И. М. Гельфанд, С. М. Львовский, А. Л. Тоом

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Допущено Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия по тригонометрии для учащихся 10 классов
общеобразовательных учреждений

МЦНМО
АО «Московские учебники»
Москва 2002

ББК 22.151.0
Г32

Г32 **И. М. Гельфанд, С. М. Львовский, А. Л. Тоом.** Тригонометрия. М.: МЦНМО, 2002. — 199 с.

ISBN 5-94057-050-X

Эта книга, написанная группой авторов под руководством одного из крупнейших математиков 20 века академика И. М. Гельфанда, призвана опровергнуть расхожее мнение о тригонометрии как скучном и непонятном разделе школьного курса математики. Читателю предлагается взглянуть на знакомый предмет по-новому. Изложение, сопровождающееся большим количеством задач, начинается «с нуля» и доходит до материала, выходящего довольно далеко за рамки школьной программы; тригонометрические формулы иллюстрируются примерами из физики и геометрии.

Отдельная глава посвящена типичным приемам решения тригонометрических задач, предлагаемых на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения.

Книга будет незаменимым помощником для школьников старших классов, преподавателей, родителей и всех, интересующихся математикой.

ISBN 5-94057-050-X

Предисловие

Что такое тригонометрия? Скучные и никому не нужные формулы — скажут почти все старшеклассники. Тем не менее, мы хотим вас в этом разубедить.

Чтобы взглянуть на тригонометрию по-новому, мы рассказываем о ней «с нуля». Поэтому читать пособие лучше с самого начала и подряд, хотя кое-что вы, скорее всего, уже знаете.

Наши определения равносильны определениям из школьных учебников, но не всегда дословно с ними совпадают.

Не надо стремиться перерешать все задачи из книги (мы сознательно поместили их с запасом), но сколько-то задач после каждого параграфа порешать стоит. Если задачи к параграфу совсем не выходят, значит, что-то вы не усвоили, и есть смысл перечитать этот параграф.

Более трудные задачи отмечены звездочкой, более трудный текст напечатан мелким шрифтом. При первом чтении все это можно пропустить.

Теперь более подробно о содержании книги. В первых двух главах речь идет о начальных понятиях тригонометрии (точнее говоря, о той ее части, в которой не участвуют формулы сложения). Третья глава («Решение треугольников») посвящена применениям тригонометрии к планиметрии. (Имейте в виду, что решение треугольников — не единственный раздел геометрии; не следует думать, что, проработав *только* нашу книжку, вы уже научитесь решать геометрические задачи.)

Четвертая глава посвящена формулам сложения и их следствиям. Это — центральная часть тригонометрии (и книги), и именно здесь сосредоточены основные тригонометрические формулы. Мы надеемся, что после изучения этой главы вы поймете, откуда они берутся, и научитесь в них ориентироваться. Мы начинаем эту главу с параграфов, в которых рассказано о векторах на плоскости, а сами тригонометрические формулы иллюстрируем примерами из физики.

Тригонометрия по традиции занимает большое место в материалах конкурсных экзаменов в вузы; чтобы научиться уверенно решать экзаменационные задачи по тригонометрии, нужна тренировка. В пятой главе мы описываем типичные приемы решения тригонометрических уравнений и неравенств. Многие из задач к этой главе взяты из материалов приемных экзаменов в Московский государственный университет и ведущие вузы.

Заключительная шестая глава, напротив, посвящена теме, не входящей в программу вступительных экзаменов, но тесно связанной с тригонометрией — комплексным числам. Мы надеемся, что наши читатели получат удовольствие от знакомства с этим красивым и важным разделом математики.

При написании пятой главы нам помогли беседы с Ж. М. Рабботом; часть задач к этой главе мы позаимствовали из известного «Сборника задач по математике для конкурсных экзаменов в вузы» под редакцией М. И. Сканави. Многие задачи по планиметрии взяты из сборников И. Ф. Шарыгина. Обсуждение примеров из физики и комплексных чисел многим обязано заслуженно популярным «Фейнмановским лекциям по физике».

Работа над этой книгой никогда не была бы завершена, если бы мы не ощущали постоянного внимания и поддержки и не пользовались помощью многих и многих людей. Пользуемся случаем выразить им всем глубокую благодарность. Особенно тепло мы хотим поблагодарить Н. Б. Васильева, Ж. М. Раббота и А. Шеня, потративших много сил и времени на улучшение рукописи этого пособия.

Предисловие ко второму и третьему изданиям

Второе издание этого пособия готовилось без участия И. М. Гельфанда и А. Л. Тоома, поэтому отличия от первого издания невелики (самое существенное — иное изложение дистрибутивности скалярного произведения в § 18). Само собой разумеется, что вся ответственность за эти изменения лежит только на мне. В третьем издании исправлен ряд ошибок и добавлены указания и решения к некоторым задачам.

С. Львовский

Глава 1

Первое знакомство с тригонометрией

§ 1. Как измерить крутизну

> Классификация углов из книги по альпинизму:
> «Перпендикулярно» — 60 градусов;
> «Мой дорогой сэр, абсолютно перпендикулярно!» — 65 градусов;
> «Нависающе»— 70 градусов.
> *Дж. Литтлвуд. «Математическая смесь».*

1.1. Синус

Пусть человек поднимается в гору. Будем считать, что склон горы — это гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC (рис. 1.1). Можно предложить по крайней мере два способа измерения крутизны подъема: 1) измерить высоту подъема (отрезок BC на рис. 1.1а); 2) провести дугу с центром в точке (рис. 1.1б) и измерить ее длину.

Конечно, сама по себе высота подъема ничего не характеризует: если вы долго идете по склону, то можно подняться высоко даже при пологом склоне. Поэтому нужно рассматривать отно-

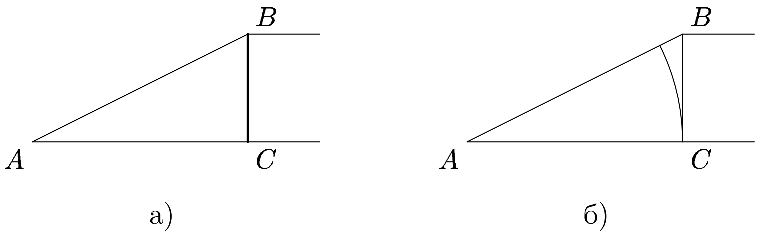


Рис. 1.1.

шение длины подъема к длине пути (соответственно отношение длины дуги к радиусу)[1]. Эти отношения от длины пути уже не зависят.

Вот формальное доказательство того, что отношение длины подъема к длине пути не зависит от этой длины. Пусть человек прошел не весь путь, а дошел только до точки B' (рис. 1.2). Тогда крутизна подъема на отрезке AB' равна $B'C'/A'B'$, а на отрезке AB равна BC/AB. Однако $B'C' \parallel BC$ как два перпендикуляра к одной прямой, так что $\angle AC'B = \angle ACB = 90°$, $\angle AB'C = \angle ABC$. Стало быть, треугольники ABC и $AB'C'$ подобны по двум углам, и $BC/AB = B'C'/AB'$. Таким образом, отношение высоты подъема к длине пути не зависит от длины пути. Доказать, что отношение длины дуги к радиусу не зависит от радиуса, также можно, но для этого надо формально определить, что такое длина дуги. В этой книжке мы этим заниматься не будем.

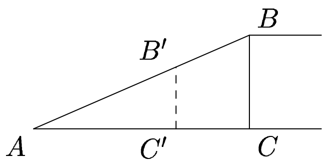


Рис. 1.2.

Определение. Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение катета этого треугольника, лежащего против угла, к гипотенузе треугольника (рис. 1.3).

От выбора прямоугольного треугольника, содержащего угол, это отношение не зависит.

[1]Физик объяснил бы это так: высота подъема имеет размерность длины, а крутизна — безразмерное число.

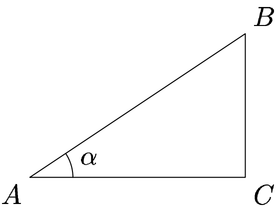


Рис. 1.3. $\sin\alpha = BC/AB$.

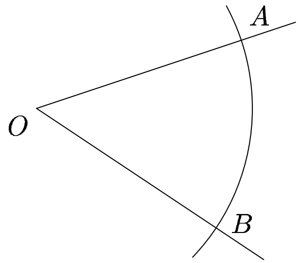


Рис. 1.4. Радианная мера угла AOB — отношение длины дуги AB к радиусу AO.

1.2. Измерение углов

Вторая из введенных нами характеристик крутизны называется радианной мерой угла.

> **Определение.** Радианной мерой угла называется отношение длины дуги окружности, заключенной между сторонами угла и с центром в вершине угла, к радиусу этой окружности (рис. 1.4).

От радиуса окружности это отношение не зависит.

Например, когда говорят, что «радианная мера угла равна 1/2», или «величина угла равна 1/2 радиана», или попросту «угол равен 1/2 радиана», это значит, что заключенная внутри него дуга вдвое короче радиуса. Если радиус окружности равен 1, то радианная мера угла равна длине дуги.

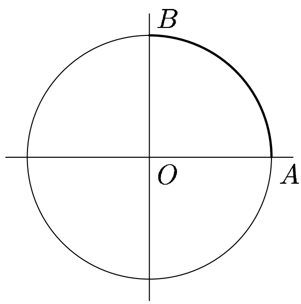


Рис. 1.5.

Вычислим радианную меру прямого угла. В соответствии с нашим определением проведем дугу окружности радиуса r с центром в вершине прямого угла (рис. 1.5). Дуга AB составляет четверть всей окружности. Коль скоро длина окружности радиуса r равна $2\pi r$, длина нашей дуги равна $2\pi r/4 = \pi r/2$, а радианная мера прямого угла равна $(\pi r/2)/r = \pi/2 \approx 1{,}57$.

Обе введенные нами характеристики крутизны (синус и радианная мера угла) имеют то преимущество перед привычным измерением углов в градусах, что являются естественными; про измерение углов в градусах этого не скажешь: как бы вы стали объяснять представителю внеземной цивилизации, почему один градус составляет именно одну девяностую прямого угла? Кстати, во время Великой французской революции, когда пытались изменить все, включая календарь и названия игральных карт, была предложена и новая единица измерения углов — одна сотая прямого угла, что ничуть не хуже и не лучше одной девяностой.

Выясним, как связаны между собой радианная и градусная меры угла. Как мы уже знаем, величина прямого угла равна $\frac{\pi}{2}$ радиан. Так как угол 1° в 90 раз меньше прямого угла, то и его радианная мера в 90 раз меньше радианной меры прямого угла, то есть равна $\frac{\pi}{2} : 90 = \pi/180 \approx 0{,}017$. Угол в k градусов имеет меру $(\pi/180)k$ радиан. Чтобы узнать, сколько градусов содержит угол в 1 радиан, надо найти такое k, что $(\pi/180)k = 1$. Стало быть, в одном радиане содержится $180/\pi \approx 57{,}29^\circ$.

Задача 1.1. Заполните пустые места в таблице, после чего выучите таблицу наизусть:

градусы	30°	45°	60°	120°	135°	150°	180°	360°
радианы								

Задача 1.2. Для каждого из углов 10°, 30°, 60° найдите приближенные значения синуса и радианной меры (с двумя значащими цифрами). На сколько процентов отличаются синус и радианная мера для этих углов?

Задача 1.3. Пусть радианная мера острого угла равна α. Докажите неравенство: $\sin\alpha < \alpha$ (словами: синус острого угла меньше его радианной меры).

Указание. См. рис. 1.6.

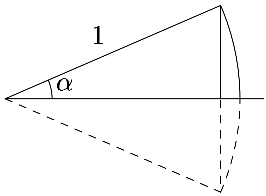


Рис. 1.6.

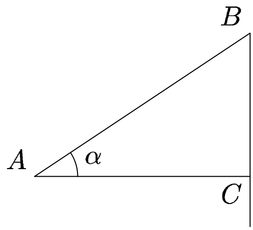


Рис. 2.1. Тангенс.

§ 2. Тангенс

В предыдущем параграфе мы научились измерять крутизну с помощью синуса угла. Есть и другой способ измерения крутизны, составляющий, как пока еще говорят, альтернативу синусу.

Представим себе, что человек, поднимаясь по тропе, приближается к крутому берегу (рис. 2.1). Если измерять крутизну подъема с помощью отношения высоты подъема к длине пути, то получится уже знакомый нам синус. Давайте теперь вместо длины пройденного человеком пути измерять, насколько он приблизился к берегу по горизонтали. Иными словами, рассмотрим расстояние AC — проекцию пути на горизонталь. В качестве характеристики крутизны возьмем отношение BC/AC. Это отношение называется тангенсом угла.

> **Определение.** Тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение катета этого треугольника, лежащего против угла, к катету треугольника, прилежащему к углу (рис. 2.1).

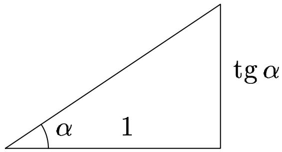
Как и синус угла, тангенс не зависит от выбора прямоугольного треугольника, содержащего этот угол.

Обозначается тангенс угла α так: $\operatorname{tg}\alpha$ (читается «тангенс альфа»).

Задача 2.1. Докажите, что тангенс угла не зависит от размеров прямоугольного треугольника, содержащего этот угол.

Задача 2.2. Для данного острого угла α что больше: $\sin\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha$?

Выясним, как связаны синус и тангенс угла. Пусть, например, известен тангенс угла α; как найти его синус? Воспользуемся тем, что для вычисления $\operatorname{tg}\alpha$ годится любой прямоугольный треугольник с углом α; выберем тот из них, что изображен на рис. 2.1. По теореме Пифагора его гипотенуза равна $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, так что



$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}}$$

Рис. 2.1.

Задача 2.3. Пусть α — острый угол; выведите формулу, выражающую $\operatorname{tg}\alpha$ через $\sin\alpha$.

Задача 2.4. Для каждого из углов 10°, 30°, 60° найдите приближенные значения их тангенса. Что больше: тангенс или радианная мера? И на сколько процентов больше?

Из предыдущей задачи вы должны были увидеть, что тангенсы фигурировавших в ней углов больше, чем их радианная мера. На самом деле это верно для любых острых углов. Наглядно это можно пояснить с помощью рис. 2.2а. На нем $AC = 1$, так что длина дуги CMC' равна 2α (мы считаем, что угол измерен в радианах), а длина ломаной CBC' равна $2\operatorname{tg}\alpha$. Из рисунка ясно, что длина ломаной CBC' больше, чем длина дуги CMC',[1] так что $2\operatorname{tg}\alpha > 2\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$.

Аккуратное доказательство этого неравенства вы узнаете, решив следующую задачу.

Задача 2.5. Докажите неравенство $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$.

Указание. Сравните площадь треугольника ABC и сектора AMC (рис. 2.2б). Площадь сектора равна половине произведения длины дуги, ограничивающей этот сектор, на радиус окружности.

[1] Веревочку CBC' надо укоротить, чтобы она облегала дугу CMC' вплотную.

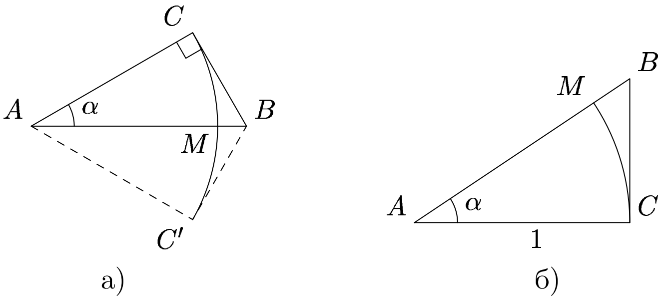


Рис. 2.2. $\operatorname{tg}\alpha > \alpha$.

§ 3. Косинус

Определение. Косинусом острого угла α в прямоугольном треугольнике называется отношение катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе треугольника (рис. 3.1).

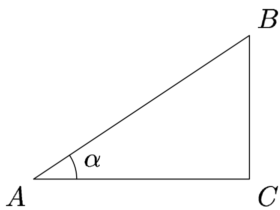
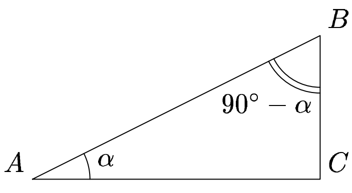


Рис. 3.1. $\cos\alpha = AC/AB$.

От выбора прямоугольного треугольника, содержащего угол α, это отношение не зависит.

Косинус угла α обозначается $\cos\alpha$ («косинус альфа»).

Задача 3.1. Докажите следующие формулы:



а) $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$;

б) $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$.

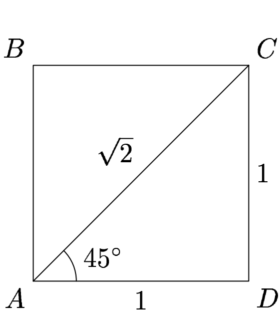


Рис. 3.2. Функции угла 45°.

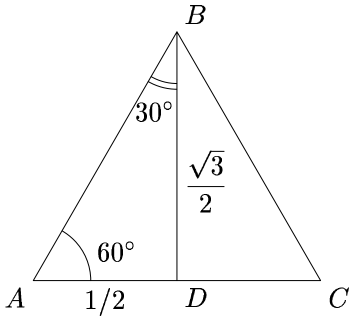


Рис. 3.3. Углы 30° и 60°.

Задача 3.2. Докажите формулу: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Пифагора.

Задача 3.3. Пусть α — острый угол. Выведите формулу, выражающую $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$: $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Указание. Воспользуйтесь рис. 2.1 из предыдущего параграфа.

Задача 3.4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, угол при основании равен α. Найдите: а) основание; б) высоту, опущенную на боковую сторону; в) высоту, опущенную на основание.

Не существует простой формулы, позволяющей по величине угла найти точное значение его синуса или косинуса. Тем не менее для некоторых углов точные значения синуса, косинуса и тангенса легко вычислить. Сделаем это для углов 30°, 45° и 60°.

Начнем с угла 45°. Чтобы посчитать его синус, косинус и тангенс, надо, согласно нашим определениям, взять прямоугольный треугольник с углом 45°. В качестве такого треугольника можно взять половинку квадрата со стороной 1 (рис. 3.2).

Из теоремы Пифагора ясно, что диагональ этого квадрата равна $\sqrt{2}$. Следовательно, из треугольника ACD получаем:

$$\sin 45^\circ = CD/AC = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2;$$
$$\cos 45^\circ = AD/AC = \sqrt{2}/2;$$
$$\operatorname{tg} 45^\circ = CD/AD = 1.$$

Теперь займемся углами $30°$ и $60°$. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 1 и опустим в нем высоту (рис. 3.3). Эта высота разделит его на два прямоугольных треугольника с гипотенузой 1 и острыми углами $60°$ и $30°$; при этом $AD = 1/2$ (высота BD в равностороннем треугольнике является также биссектрисой и медианой). По теореме Пифагора находим $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{3}/2$. Теперь, когда длины всех сторон треугольника ABD нам известны, остается только выписать:

$$\begin{aligned} \sin 30° &= AD/AB = 1/2; & \sin 60° &= BD/AB = \sqrt{3}/2; \\ \cos 30° &= BD/AB = \sqrt{3}/2; & \cos 60° &= AD/AB = 1/2; \\ \operatorname{tg} 30° &= AD/BD = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3; & \operatorname{tg} 60° &= BD/AD = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Кстати, тот факт, что $\sin 30° = 1/2$, был известен вам и раньше, только в другом обличье, как теорема о том, что катет, лежащий против угла $30°$, равен половине гипотенузы.

Приведем более сложный пример явного вычисления синуса и косинуса. Для этого рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом при основании $72°$ и углом при вершине $36°$ (рис 3.4). Проведем в нем биссектрису AM угла A и подсчитаем все углы. Из рисунка видно, что треугольники ABM и ACM равнобедренные и $AC = AM = BM$. Если $AB = a$, то $AC = 2a\cos 72°$, $MC = 2AC\cos 72° = 4a\cos^2 72°$; так как $AB = BC = MC + BM = MC + AC$, получаем равенство

$$a = 4a\cos^2 72° + 2a\cos 72°,$$

откуда $4\cos^2 72° + 2\cos 72° - 1 = 0$. Решая это (квадратное) уравнение относительно $\cos 72°$, получаем

$$\cos 72° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

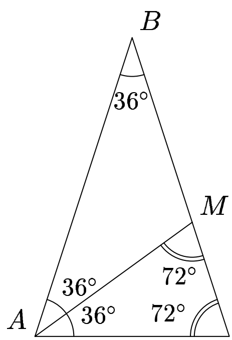


Рис. 3.4.

Задача 3.5. Найдите $\cos 36°$.

Задача 3.6. В окружность вписан правильный пятиугольник. Найдите отношение его стороны к радиусу окружности.

Можно доказать, что правильный многоугольник можно построить с помощью циркуля и линейки в том и только в том случае, когда отношение его стороны к радиусу описанной окружности можно выразить через целые числа с помощью четырех арифметических действий и извлечения квадратного корня. Решив задачу 3.6, вы убедитесь, что правильный пятиугольник именно таков. В 1796 году К. Ф. Гаусс окончательно выяснил, какие правильные многоугольники можно построить с помощью циркуля и линейки (будущему великому немецкому математику было тогда всего 19 лет, и это была его первая научная работа). В частности, оказалось, что циркулем и линейкой можно построить правильный 17-угольник.

Для практических применений нужны не столько точные формулы, сколько приближенные значения синусов и косинусов конкретных углов. В прежние времена эти значения собирались в таблицы тригонометрических функций. Пример такой таблицы мы приводим ниже. Излишне объяснять, что таблицы, использовавшиеся на практике, давали значения тригонометрических функций не через 5°, а с гораздо более мелким шагом. В настоящее время тригонометрические таблицы утратили былое значение: чтобы приближенно найти синус или косинус угла, достаточно нажать несколько клавиш на микрокалькуляторе или компьютере.

Таблица 3.1. Значения тригонометрических функций (с двумя знаками после запятой)

α	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
$\sin\alpha$	0,09	0,17	0,26	0,34	0,42	0,50	0,57	0,64
$\operatorname{tg}\alpha$	0,09	0,18	0,27	0,36	0,47	0,58	0,70	0,84

α	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°
$\sin\alpha$	0,71	0,77	0,82	0,87	0,91	0,94	0,97	0,98	0,99
$\operatorname{tg}\alpha$	1,00	1,19	1,43	1,73	2,14	2,75	3,73	5,67	11,43

Задача 3.7. Найдите с помощью таблицы 3.1 приближенное значение $\cos 25^\circ$.

§ 4. Малые углы

В принципе можно было бы мерить все углы в радианах. На практике широко используется и градусное измерение углов, хотя с чисто математической точки зрения оно неестественно. При этом для малых углов используются специальные единицы: угловая минута и угловая секунда. Угловая минута — это 1/60 часть градуса; угловая секунда — это 1/60 часть угловой минуты. Если, например, величина угла равна 129 градусам, 34 минутам и 16 секундам, то пишут: $129°34'16''$.

Задача 4.1. На какой угол поворачивается за одну секунду:

а) часовая стрелка часов;

б) минутная стрелка часов;

в) секундная стрелка часов?

Решение. Разберем только пункт а). Полный оборот часовая стрелка делает за 12 часов; стало быть, за час она поворачивается на $360/12 = 30°$. Следовательно, за минуту часовая стрелка повернется на угол, в 60 раз меньший, чем за час, то есть на $30'$; в свою очередь, за секунду стрелка повернется на угол, в 60 раз меньший, чем за минуту, то есть на $30''$. Теперь вы видите, насколько мала угловая секунда: ведь даже угол, в тридцать раз больший (поворот часовой стрелки за секунду времени) мы не в состоянии заметить.

Представление об угловой минуте дает такой факт: «разрешающая способность» человеческого глаза (при стопроцентном зрении и хорошем освещении) равна примерно одной угловой минуте. Это означает, что две точки, которые видны под углом $1'$ или меньше, на глаз воспринимаются как одна.

Посмотрим, что можно сказать о синусе, косинусе и тангенсе малых углов. Если на рис. 4.2 угол α мал, то высота BC, дуга BD и отрезок BE, перпендикулярный AB, очень близки. Их длины — это $\sin\alpha$, радианная мера α и $\operatorname{tg}\alpha$. Стало быть, для малых углов синус, тангенс и радианная мера приближенно равны друг другу:

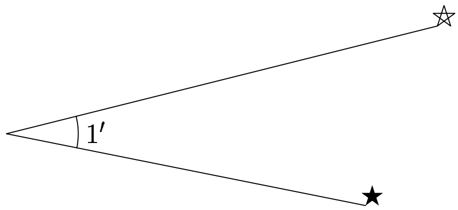


Рис. 4.1. Разрешающая способность.

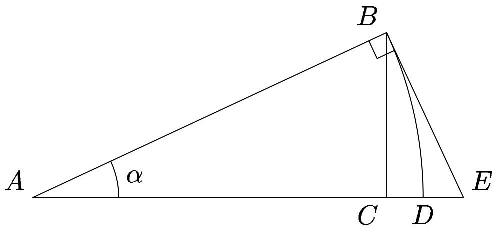


Рис. 4.2. Малые углы.

Если α — малый угол, измеренный в радианах, то $\sin\alpha \approx \alpha$; $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

Задача 4.2. Запишите приближенные формулы для синуса и тангенса малых углов, считая, что угол измеряется в градусах.

Ответ. $\sin\alpha^\circ \approx \pi\alpha/180$.

Видно, что формулы сложнее, чем для радианной меры — еще один довод в ее пользу!

Задача 4.3. Под каким углом видно дерево высотой 10 метров с расстояния в 800 метров? Дайте ответ: а) в радианах; б) в угловых минутах.

Задача 4.4. Чему равно расстояние, равное одной минуте дуги земного меридиана? Радиус Земли равен примерно 6370 .

Расстояние, о котором идет речь в этой задаче, примерно равно морской миле (именно так и появилась эта мера длины).

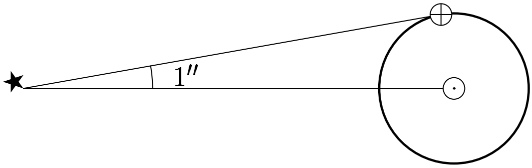


Рис. 4.3. Парсек.

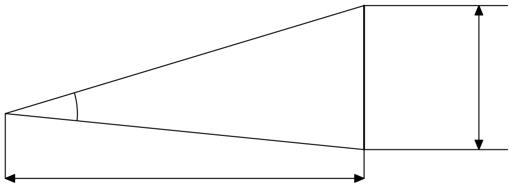


Рис. 4.4. Формула тысячных.

Задача 4.5. В астрономии применяется единица измерения расстояний, называемая парсек. По определению, расстояние в 1 парсек — это расстояние с которого радиус земной орбиты[1] виден под углом $1''$ (рис. 4.3). Сколько километров в одном парсеке? (Радиус земной орбиты равен примерно 150 миллионам километров.)

Задача 4.6. Военные пользуются единицей измерения углов, называемой «тысячная». По определению, тысячная — это $1/3000$ развернутого угла. Такое измерение углов военные применяют в следующей формуле для определения расстояния до удаленных предметов: $= (/) \cdot 1000$. Здесь — расстояние до предмета, — его высота, — угол, под которым он виден, измеренный в тысячных (рис. 4.4). Точна ли эта формула? Почему ей можно пользоваться на практике? Чему равно число π, по мнению военных?

Мы видим, что формулы $\sin\alpha \approx \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ верны с хорошей точностью для малых углов. Посмотрим, что произойдет,

[1] Астрономы поправили бы нас: не радиус (орбита Земли — не круг, а эллипс), а большая полуось (половина расстояния между наиболее удаленными друг от друга точками орбиты).

если угол не столь мал. Для угла в 30° точное значение синуса равно 0,5, а радианная мера равна $\pi/6 \approx 0{,}52$. Ошибка (или, как еще говорят, погрешность), которую дает формула $\sin\alpha \approx \alpha$, равна примерно 0,02, что составляет 4% от значения синуса. Можно сказать, что относительная погрешность при таком вычислении (отношение погрешности к значению синуса) составляет 4%. Для углов, меньших 10°, относительная погрешность формулы $\sin\alpha \approx \alpha$ меньше одного процента. Чем меньше угол α, тем меньше относительная погрешность формулы $\sin\alpha \approx \alpha$.

Существуют и другие формулы, позволяющие вычислять синусы и тангенсы — и не только малых углов — с хорошей точностью. Например, формула $\sin\alpha \approx \alpha - \alpha^3/6$ (напоминаем, что α измеряется в радианах!) дает относительную погрешность менее 1% уже для всех углов, не превосходящих 50°. Позднее мы увидим, как оценить погрешность наших формул.

Задача 4.7. Пусть α — острый угол, измеренный в радианах. Докажите неравенство $\cos\alpha > 1 - \alpha^2$.

Указание. Воспользуйтесь формулой $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, неравенством $\sin\alpha < \alpha$ и неравенством $\sqrt{t} > t$ (для $0 < t < 1$).

Задача 4.8. Для косинусов малых углов в качестве приближенного значения можно брать 1. Докажите, что при величине угла менее 5° относительная погрешность этого приближения будет менее 1%.

Глава 2

Начальные свойства тригонометрических функций

§ 5. Часы, или современный взгляд на тригонометрию

5.1. Часы и процессы

До сих пор тригонометрия была для нас наукой о соотношениях сторон в треугольниках. Именно с этого развитие тригонометрии и начиналось (слово «тригонометрия» означает в переводе с древнегреческого «измерение треугольников»). Позднее, однако, акценты сместились, и сейчас тригонометрию правильнее рассматривать как науку не о треугольниках, а о периодических процессах. Чтобы понять, при чем тут периодические процессы, рассмотрим простейший из них — движение стрелок часов.

Задача 5.1. Предположим, что все стрелки часов имеют длину 1 см (видимо, это женские наручные часики). Какой путь проходит за сутки:

а) секундная стрелка;

б) минутная стрелка;

в) часовая стрелка?

Длина каждой из трех дуг равна 1

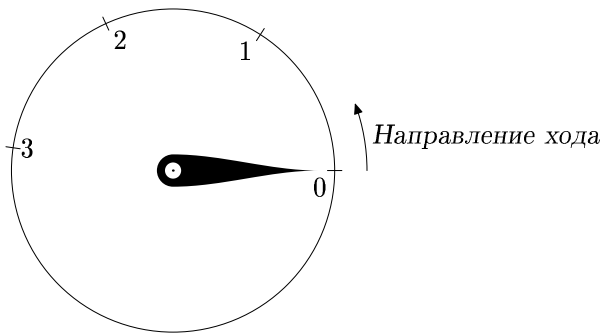


Рис. 5.1. Часы фирмы «Тригонометрия».

(Мы имеем в виду, конечно, путь, проходимый концом стрелки.)

Задача 5.2. Секундная стрелка часов имеет длину 1 см. Часы завели в 12 часов дня 1 января. В котором часу и какого числа путь, пройденный концом секундной стрелки, составит 1 км? С какой точностью надо знать пройденный стрелкой путь, чтобы иметь возможность ответить на вопрос о дате?

Часы нам еще сослужат добрую службу, но чтобы не входить в противоречие с общепринятой терминологией и обозначениями, нам нужны часы не совсем обычные. Наши «часы для любителей тригонометрии» имеют всего одну стрелку. Эта стрелка движется в обратном (по сравнению с обычными часами) направлении. В момент пуска часов стрелка указывает вправо (туда, где на обычных часах написана цифра 3). За час стрелка поворачивается на 1 радиан.

Будем считать, что длина стрелки равна 1. Тогда, согласно определению радианной меры угла, длина дуги, описываемой концом стрелки за час, равна 1, за два часа — 2 и т. д.

Объясним теперь, какое отношение эти часы имеют к синусам и косинусам. Для этого рассмотрим систему координат, расположенную, как показано на рис. 5.2а.

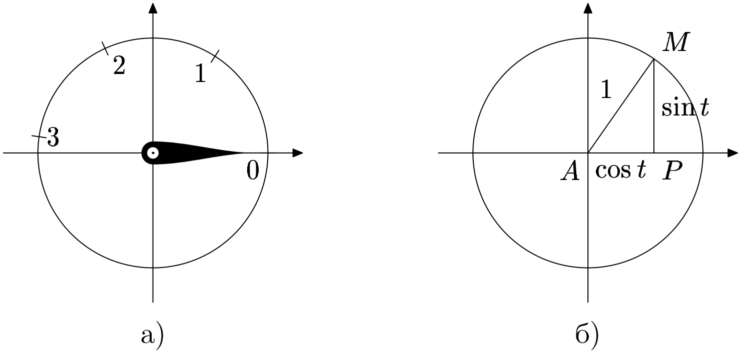


Рис. 5.2. Часы и тригонометрия.

Каковы будут координаты конца стрелки в момент t (через t часов после запуска)? Из рис. 5.2б ясно, что, пока стрелка не успела выйти за пределы первой координатной четверти, ее координаты будут $(\cos t; \sin t)$ (имеются в виду косинус и синус угла в t радиан). В самом деле, из прямоугольного треугольника MAP видно, что $\cos\angle MAP = AP$, $\sin\angle MAP = MP$, а радианная мера угла $\angle MAP$ равна t.

Пусть теперь стрелка вышла за пределы первой координатной четверти (это означает, что пройденный ей путь t превысил $\pi/2$). Формально мы не можем сказать, что координаты конца стрелки равны $(\cos t; \sin t)$, так как t больше не является радианной мерой острого угла, а синус и косинус мы определили только для острых углов. Однако мы можем обобщить наши определения. Можно определить косинус числа t как абсциссу конца стрелки в тот момент, когда пройденное этим концом расстояние составит t. Аналогично синус t определяется как ордината конца стрелки в тот же момент. Как мы видели, в тех случаях, когда t является радианной мерой острого угла, новые определения согласуются с прежними.

Задача 5.3. Как бы вы определили синус и косинус отрицательного числа t?

Задача 5.4. Найдите:

а) $\cos(\pi/2)$ и $\sin(\pi/2)$;

б) $\cos\pi$ и $\sin\pi$;

в) $\cos(3\pi/2)$ и $\sin(3\pi/2)$;

г) $\cos(5\pi/2)$ и $\sin(5\pi/2)$.

В следующем параграфе мы дадим более формальные определения синуса и косинуса произвольного числа и начнем систематическое изучение тригонометрии. Но некоторые важные свойства синуса и косинуса можно увидеть уже сейчас.

Заметим, что за время 2π стрелка наших часов делает полный круг и оказывается на прежнем месте. Поэтому координаты ее конца в моменты t и $t+2\pi$ одинаковы. Другими словами:

$$\cos(t+2\pi) = \cos t$$
$$\sin(t+2\pi) = \sin t$$

Как говорят, функции синус и косинус имеют период 2π.

Задача 5.5. Как меняется положение стрелки за время π? Чему равны $\cos(t+\pi)$ и $\sin(t+\pi)$?

5.2. Скорость

Посмотрим теперь, как изменяются $\cos t$ и $\sin t$ при изменении t. Сделаем это для косинуса (ситуация с синусом аналогична).

Стрелка часов равномерно вращается, при этом в тот момент, когда конец стрелки прошел расстояние t, проекция этого конца на ось абсцисс отмечает число $\cos t$ (рис. 5.3а). Видно, что эта проекция совершает колебания от 1 до -1 и обратно. Далее, движение конца стрелки по окружности равномерно, но движение его проекции равномерным уже не будет. Чтобы это увидеть, нанесем на окружность положения конца стрелки через равные промежутки времени, а на ось абсцисс — их проекции (рис. 5.3б). Хорошо видно, что вблизи концов отрезка $[-1;1]$ точки идут гуще, чем в его середине. Однако отмеченные точки — не что иное, как проекции конца стрелки через равные промежутки времени. Стало быть, в середине отрезка $[-1;1]$ наша точка движется быстрее, чем у его краев. Это и понятно: в своих колебаниях по отрезку наша точка в концах разворачивается, а чтобы развернуться, надо сначала затормозить.

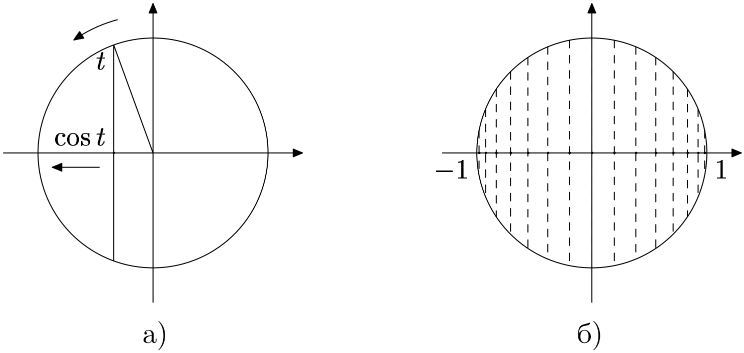


Рис. 5.3. Как меняется косинус.

Задача 5.6. а) Если для каждого целого n найти число $\sin(\pi n/30)$, сколько различных чисел получится?

б*) Каким должно быть число a, чтобы множество чисел вида $\cos(\pi n a)$, где n пробегает все целые числа, было конечно?

в**) Существует ли такое натуральное число n, что $|\cos n| <$ $< 1/1000$?

Давайте подсчитаем поточнее, с какой скоростью движется проекция конца стрелки. Будем опять-таки рассматривать проекцию на горизонтальную ось, соответствующую косинусу. Мы считали, что стрелка движется со скоростью 1 / и имеет длину 1, так что ее конец движется со скоростью 1. Пусть в данный момент стрелка повернута на угол t (рис. 5.4) Через маленькое время τ конец стрелки переместится из точки A в точку B, а его проекция — из точки M в точку N. Найдем отрезок MN. Для этого заметим, что угол CAB можно приближенно считать прямым, так как хорда AB мала. Поэтому

$$\angle BAK \approx \pi/2 - \angle CAK = \pi/2 - t$$

(углы измеряются в радианах). Следовательно,

$$MN \approx AB\cos(\pi/2 - t) = AB \cdot \sin t.$$

Далее, так как хорда AB мала, ее длина приближенно равна длине дуги AB, то есть τ. Следовательно, $MN \approx \tau \cdot \sin t$, и средняя скорость проекции конца стрелки на участке от M до N приблизительно равна $MN/\tau = \sin t$. На самом деле чем меньше, тем меньше ошибки наших

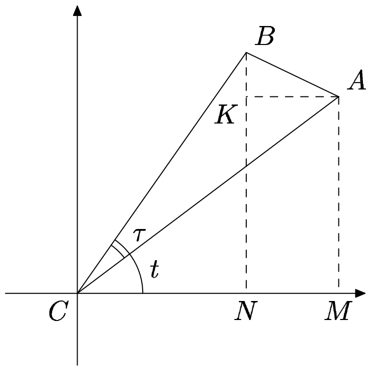


Рис. 5.4.

приближенных вычислений и тем ближе средняя скорость к $\sin t$. Как говорят, мгновенная скорость проекции конца стрелки в тот момент, когда стрелка прошла расстояние t, равна $\sin t$. Точнее говоря, эта мгновенная скорость равна $-\sin t$, так как при возрастании пройденного расстояния от t до $t+\tau$ проекция конца стрелки движется по оси абсцисс в «отрицательном направлении» (от бо́льших чисел к меньшим). Говоря по-ученому, производная от функции $y = \cos t$ — это функция $y = -\sin t$.

§ 6. Определение тригонометрических функций

В этом параграфе мы аккуратно сформулируем определения тригонометрических функций.

Для этого введем на плоскости прямоугольную систему координат и рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 6.1а).

Такой чертеж принято называть тригонометрическим кругом (или тригонометрической окружностью). Точку с координатами $(1;0)$, лежащую на этой окружности, будем называть *началом отсчета* или *точкой ноль* (не путайте с началом координат!). Направление движения против часовой стрелки будем называть положительным направлением (рис. 6.1б).

Тригонометрическая окружность служит для того, чтобы *на-*

носить на нее числа. Это делается так. Пусть у нас есть число t. Начав с начала отсчета, пройдем по тригонометрической окружности путь длиной $|t|$: если $t > 0$ — в положительном направлении, если $t < 0$ — в отрицательном (возможно, нам придется при этом несколько раз пройти по одному и тому же месту). Точка, в которой мы остановились, и есть точка на окружности, соответствующая числу t.

По-другому точку на окружности, соответствующую числу t, можно себе представить как второй конец намотанной на окружность нерастяжимой нити длины $|t|$, один конец которой закреплен в начале отсчета, или как положение стрелки часов, о которых мы говорили в предыдущем параграфе, в момент t.

На рис. 6.2 отмечено, какая точка соответствует числу $\pi/2$ (длина дуги от 0 до этой точки составляет как раз 1/4 всей длины окружности, т. е. $2\pi/4 = \pi/2$). Впрочем, в ту же точку попадут и числа $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi$, $\dfrac{\pi}{2} - 2\pi$, $\dfrac{\pi}{2} + 4\pi$ — при движении по окружности мы сделаем один или несколько лишних кругов, но остановимся все в той же точке.

Задача 6.1. Нанесите на тригонометрический круг числа $3\pi/2$, $\pi/4$, $-\pi/4$, $-\pi/2$, $-7\pi/4$, $-7\pi/2$. Сколько различных точек у вас получилось?

Задача 6.2. Нанесите на тригонометрическую окружность точки, соответствующие числам $\pi n/2$ для всех целых n. Сколько различ-

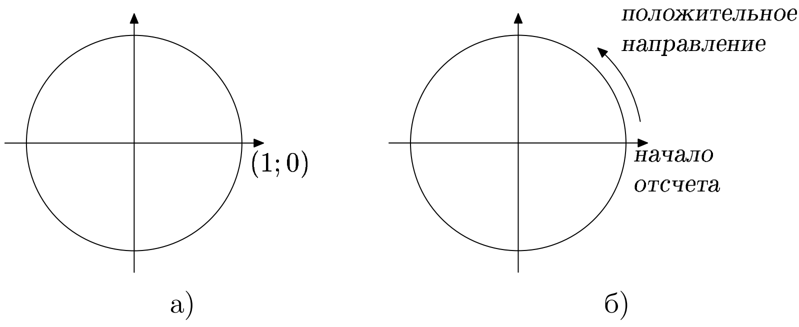


Рис. 6.1. Тригонометрический круг.

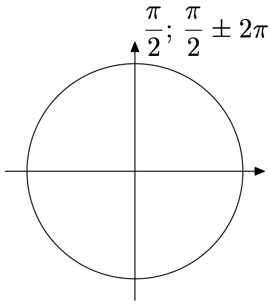


Рис. 6.2.

ных точек у вас получилось?

Задача 6.3. Выполните задание предыдущей задачи для чисел: а) $-\pi/4 + \pi n$; б) $\pi/3 + 2\pi n$ (n — любое целое число).

Задача 6.4. В какой четверти будет находиться точка тригонометрической окружности, соответствующая числу 1000?

Задача 6.5. Сколько точек получится, если нанести на тригонометрический круг все числа вида $73\pi n/107$, где n — целое число?

Задача 6.6. Каким должно быть число a, чтобы среди точек, соответствующих числам вида $2\pi a n$ при всех целых n, было бы конечное число различных?

Задача 6.7. Пусть числу t соответствует на тригонометрической окружности точка P. Запишите какое-нибудь другое число, которому на тригонометрической окружности соответствуют:

а) та же самая точка P;

б) точка, симметричная точке P относительно начала координат;

в) точка, симметричная точке P относительно оси абсцисс;

г) точка, симметричная точке P относительно оси ординат;

д) точка, симметричная точке P относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Задача 6.8. Как выглядит на тригонометрическом круге множество точек, соответствующих числам из промежутков: а) $[0; \pi/2]$; б) $[\pi/2; 2\pi]$; в) $(-\pi; \pi)$; г) $(2; 9)$.

Если $0 < t < \pi/2$, то число t на круге будет расположено так, что отрезок, соединяющий соответствующую точку с началом координат, составит угол t радиан с осью абсцисс. В самом деле, в этом случае длина дуги от 0 до t будет как раз равна t (рис. 6.3).

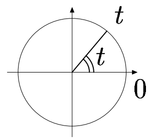


Рис. 6.3.

Теперь все готово для того, чтобы ввести основные определения тригонометрии.

Определение. Косинусом числа t называется абсцисса точки на тригонометрическом круге, соответствующей числу t.

Если t — радианная мера острого угла, то косинус этого угла в нашем прежнем смысле равен косинусу числа t в новом смысле.

Косинус числа t обозначается $\cos t$.

Определение. Синусом числа t называется ордината точки на тригонометрическом круге, соответствующей числу t.

Если t — радианная мера острого угла, то синус этого угла в нашем прежнем смысле равен синусу числа t в новом смысле.

Синус числа t обозначается $\sin t$.

Определение. Тангенсом числа t называется отношение синуса числа t к его косинусу.

Если t — радианная мера острого угла, то тангенс этого угла в нашем прежнем смысле равен тангенсу числа t в новом смысле (так как для острых углов верна формула $\operatorname{tg} t = \sin t / \cos t$).

Тангенс числа t обозначается $\operatorname{tg} t$.

Определения синуса и косинуса, которые вы сейчас прочитали, — это те же самые определения, что были даны в предыдущем параграфе, только сформулированные более аккуратно. В предыдущем же параграфе было объяснено, почему для острых углов эти определения согласуются с прежними.

Кроме синуса, косинуса и тангенса используются также и менее употребительные функции котангенс, секанс и косеканс, которые определяются так:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} t &= \frac{\cos t}{\sin t}; \\ \sec t &= \frac{1}{\cos t}; \\ \operatorname{cosec} t &= \frac{1}{\sin t}. \end{aligned}$$

Теперь, когда мы определили тригонометрические функции числового аргумента, можно узнать, чему равны тригонометрические функции не только острых, но и прямого и тупых углов: надо перевести величину угла в радианы и взять синус, косинус или тангенс от получившегося числа.

Задача 6.9. Заполните пустые места в следующей таблице:

α	$0°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\operatorname{tg}\alpha$		—				

Замечание. В графе для $\operatorname{tg} 90°$ мы сразу поставили прочерк, так как, по определению, $\operatorname{tg} 90° = \sin 90°/\cos 90°$, но $\cos 90° = 0$, так что $\operatorname{tg} 90°$ не определен.

Задача 6.10. Определите котангенс, секанс и косеканс острых углов с помощью прямоугольных треугольников (аналогично тому, как мы определяли синус, косинус и тангенс).

Задача 6.11. Одна из вершин правильного шестиугольника, вписанного в тригонометрическую окружность, расположена в начале отсчета. Найдите координаты остальных его вершин.

Задача 6.12. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, но для правильного пятиугольника (указание: см. задачу 3.5).

Задача 6.13. В задаче 4.8 было сказано, что в качестве приближенного значения косинуса малого угла α можно взять число 1, то есть значение функции косинус в нуле. Что, если в качестве приближенного значения для синуса малого угла α, не мудрствуя лукаво, взять $0 = \sin 0$? Чем это плохо?

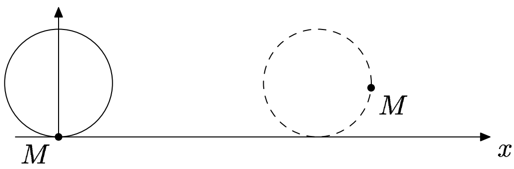


Рис. 6.4. Точка M движется по циклоиде.

Задача 6.14. Рассмотрим колесо радиуса 1, касающееся оси абсцисс в начале координат (рис. 6.4). Предположим, что колесо покатилось по оси абсцисс в положительном направлении со скоростью 1 (т. е. за время t его центр смещается на t вправо).

а) Нарисуйте (примерно) кривую, которую будет описывать точка M, касающаяся в первый момент оси абсцисс.

б) Найдите, каковы будут абсцисса и ордината точки M через время t после начала движения.

6.1. Ось тангенсов

Синус и косинус мы в этом параграфе определили геометрически, как ординату и абсциссу точки, а тангенс — алгебраически, как $\sin t/\cos t$. Можно, однако, и тангенсу придать геометрический смысл.

Для этого проведем через точку с координатами $(1;0)$ (начало отсчета на тригонометрической окружности) касательную к тригонометрической окружности — прямую, параллельную оси

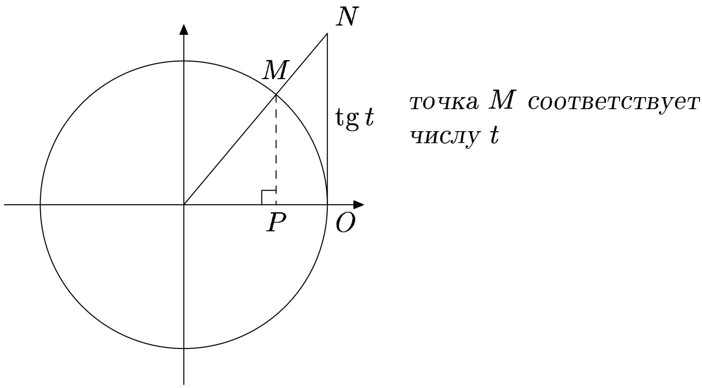


Рис. 6.5. Ось тангенсов.

ординат. Назовем эту прямую осью тангенсов (рис. 6.5). Название это оправдывается так: пусть M — точка на тригонометрической окружности, соответствующая числу t. Продолжим радиус SM до пересечения с осью тангенсов. Тогда оказывается, что ордината точки пересечения равна $\operatorname{tg} t$.

В самом деле, треугольники NOS и MPS на рис. 6.5, очевидно, подобны. Отсюда

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{MP}{PS} = \frac{NO}{OS} = \frac{NO}{1} = NO,$$

что и утверждалось.

Если точка M имеет координаты $(0;1)$ или $(0;-1)$, то прямая SM параллельна оси тангенсов, и тангенс нашим способом определить нельзя. Это и не удивительно: абсцисса этих точек равна 0, так что $\cos t = 0$ при соответствующих значениях t, и $\operatorname{tg} t = \sin t/\cos t$ не определен.

6.2. Знаки тригонометрических функций

Разберемся, при каких значениях t синус, косинус и тангенс положительны, а при каких — отрицательны. Согласно определению, $\sin t$ — это ордината точки на тригонометрической окружности, соответствующая числу t. Поэтому $\sin t > 0$, если точка t на

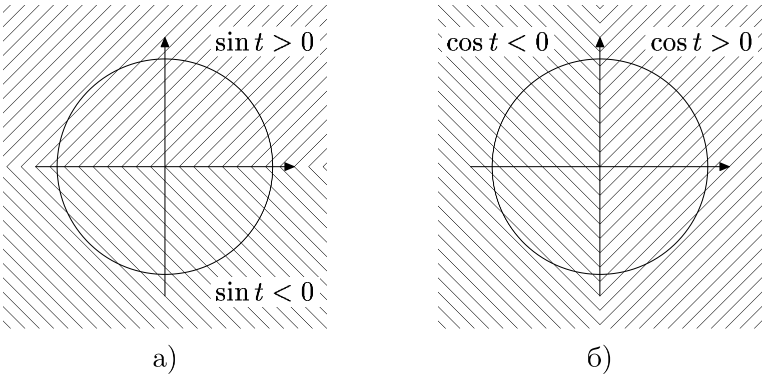


Рис. 6.6. Знаки синуса и косинуса.

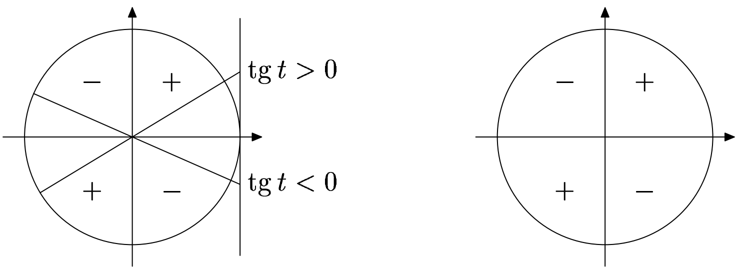


Рис. 6.7. Знаки тангенса.

окружности лежит выше оси абсцисс, и $\sin t < 0$, если точка t на окружности лежит ниже оси абсцисс (рис. 6.6а). На рис. 6.6б аналогичным образом изображено, когда положителен и когда отрицателен $\cos t$. Увидеть, когда положителен, а когда отрицателен $\operatorname{tg} t$, проще всего с помощью оси тангенсов: $\operatorname{tg} t$ положителен, если точка на окружности, соответствующая числу t, лежит в первой или третьей четверти, и отрицателен, если эта точка лежит во второй или четвертой четверти. Схематически это изображено на рис. 6.7.

Задача 6.15. Нарисуйте картинки, аналогичные рис. 6.7, для знаков $\operatorname{ctg} t$.

Задача 6.16. а) Изобразите на числовой оси множество точек t, удовлетворяющих системе неравенств:

$$\begin{cases} \sin t > 0, \\ 0 \leqslant t \leqslant 4\pi. \end{cases}$$

б) Рассмотрим множество чисел на числовой оси, удовлетворяющих системе неравенств:

$$\begin{cases} \sin x \leqslant 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 20\pi. \end{cases}$$

Найдите сумму длин отрезков, из которых состоит это множество.

§ 7. Простейшие формулы

В § 3 мы установили для острых углов α такую формулу:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

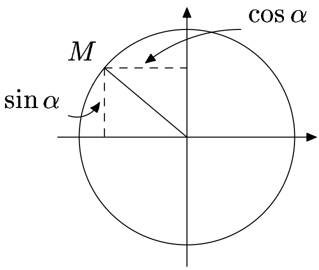


Рис. 7.1.

Эта же формула верна и в случае, когда α — любое число. В самом деле, пусть M — точка на тригонометрической окружности, соответствующая числу α (рис. 7.1). Тогда M имеет координаты $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Однако всякая точка $(x; y)$, лежащая на окружности единичного радиуса с центром в начале координат, удовлетворяет уравнению $x^2 + y^2 = 1$, откуда $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, что и требовалось.

Итак, формула $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ вытекает из уравнения окружности. Может показаться, что тем самым для острых углов мы дали новое доказательство этой формулы (по сравнению с указанным в § 3, где мы пользовались теоремой Пифагора). Отличие, однако, чисто внешнее: при выводе уравнения окружности $x^2 + y^2 = 1$ используется та же теорема Пифагора.

Для острых углов мы получали и другие формулы, например $\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. Для произвольных углов эта формула в таком виде верна быть не может: согласно общепринятому пониманию символа $\sqrt{\ }$, правая часть всегда неотрицательна, в то время как левая часть вполне может быть и отрицательной. Чтобы формула была верна при всех α, надо ее возвести в квадрат. Получится равенство: $\cos^2\alpha = 1/(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$. Докажем, что эта формула верна при всех α:[1]

$$1/(1+\operatorname{tg}^2\alpha) = 1\left/\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\right. = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \cos^2\alpha.$$

Задача 7.1. Выведите все формулы, приведенные ниже, из определений и формулы $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ (некоторые из них мы уже доказали):

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1; && \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; && \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\\
&1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; && \sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}; && \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1;\\
&1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}; && \cos^2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}.
\end{aligned}$$

Эти формулы позволяют, зная значение одной из тригонометрических функций данного числа, *почти* найти все остальные. Пусть, например, мы знаем, что $\sin x = 1/2$. Тогда $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 3/4$, так что $\cos x$ равен или $\sqrt{3}/2$, или $-\sqrt{3}/2$. Чтобы узнать, какому именно из этих двух чисел равен $\cos x$, нужна дополнительная информация.

Задача 7.2. Покажите на примерах, что оба вышеуказанных случая возможны.

Задача 7.3. а) Пусть $\operatorname{tg} x = -1$. Найдите $\sin x$. Сколько ответов у этой задачи?

б) Пусть в дополнение к условиям пункта а) нам известно, что $\sin x < 0$. Сколько теперь ответов у задачи?

[1] Для которых $\operatorname{tg}\alpha$ определен, т. е. $\cos\alpha \neq 0$.

Задача 7.4. Пусть $\sin x = 3/5$, $x \in [\pi/2; 3\pi/2]$. Найдите $\operatorname{tg} x$.

Задача 7.5. Пусть $\operatorname{tg} x = 3$, $\cos x > \sin x$. Найдите $\cos x$, $\sin x$.

Задача 7.6. Пусть $\operatorname{tg} x = 3/5$. Найдите $\dfrac{\sin x + 2\cos x}{\cos x - 3\sin x}$.

Задача 7.7. Докажите тождества:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha \sin\alpha}$;

в) $\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{ctg}\alpha + \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Задача 7.8. Упростите выражения:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;
б) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 + (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$;
в) $\sin\alpha(2 + \operatorname{ctg}\alpha)(2\operatorname{ctg}\alpha + 1) - 5\cos\alpha$.

§ 8. Периоды тригонометрических функций

Числам x, $x+2\pi$, $x-2\pi$ соответствует одна и та же точка на тригонометрической окружности (если пройти по тригонометрической окружности лишний круг, то придешь туда, где был). Отсюда вытекают такие тождества, о которых уже шла речь в § 5:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \sin x;$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos x.$$

В связи с этими тождествами мы уже употребляли термин «период». Дадим теперь точные определения.

Определение. Число $T \neq 0$ называют *периодом* функции f, если для всех x верны равенства $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$ (подразумевается, что $x + T$ и $x - T$ входят в область определения функции, если в нее входит x). Функцию называют *периодической,* если она имеет период (хотя бы один).

Периодические функции естественно возникают при описании колебательных процессов. Об одном из таких процессов речь уже шла в § 5. Вот еще примеры:

1) Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — угол отклонения качающегося маятника часов от вертикали в момент t. Тогда φ — периодическая функция от t.

2) Напряжение («разность потенциалов», как сказал бы физик) между двумя гнездами розетки в сети переменного тока, если его рассматривать как функцию от времени, является периодической функцией[1].

3) Пусть мы слышим музыкальный звук. Тогда давление воздуха в данной точке — периодическая функция от времени.

Если функция имеет период T, то периодами этой функции будут и числа $-T$, $2T$, $-2T\ldots$ — одним словом, все числа nT, где n — целое число, не равное нулю. В самом деле, проверим, например, что $f(x+2T) = f(x)$:

$$f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x).$$

Определение. Наименьшим положительным периодом функции f называется — в соответствии с буквальным смыслом слов — такое положительное число T, что T — период f и ни одно положительное число, меньшее T, периодом f уже не является.

Периодическая функция не обязана иметь наименьший положительный период (например, функция, являющаяся постоянной, имеет периодом вообще любое число и, стало быть, наименьшего положительного периода у нее нет). Можно привести примеры и непостоянных периодических функций, не имеющих наименьшего положительного периода. Тем не менее в большинстве интересных случаев наименьший положительный период у периодических функций существует.

[1] Когда говорят «напряжение в сети 220 вольт», имеют в виду его «среднеквадратичное значение», о котором мы будем говорить в § 21. Само же напряжение все время меняется.

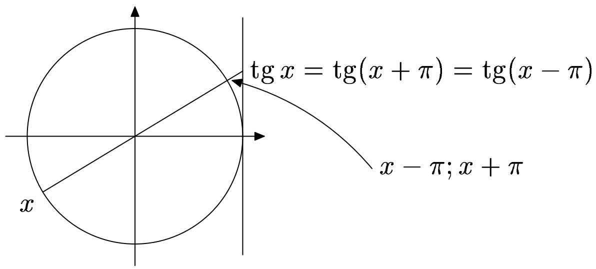


Рис. 8.1. Период тангенса и котангенса.

В частности, наименьший положительный период как синуса, так и косинуса равен 2π. Докажем это, например, для функции $y = \sin x$. Пусть вопреки тому, что мы утверждаем, у синуса есть такой период T, что $0 < T < 2\pi$. При $x = \pi/2$ имеем $\sin x = 1$. Будем теперь увеличивать x. В точке $x + T$ значение синуса должно быть также равно 1. Но в следующий раз синус будет равен 1 только при $x = (\pi/2) + 2\pi$. Поэтому период синуса быть меньше 2π не может. Доказательство для косинуса аналогично.

Наименьший положительный период функции, описывающей колебания (как в наших примерах 1–3), называется просто периодом этих колебаний.

Поскольку число 2π является периодом синуса и косинуса, оно будет также периодом тангенса и котангенса. Однако для этих функций 2π — не наименьший период: наименьшим положительным периодом тангенса и котангенса будет π. В самом деле, точки, соответствующие числам x и $x + \pi$ на тригонометрической окружности, диаметрально противоположны: от точки x до точки $x + 2\pi$ надо пройти расстояние π, в точности равное половине окружности. Теперь, если воспользоваться определением тангенса и котангенса с помощью осей тангенсов и котангенсов, равенства $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$ станут очевидными (рис. 8.1). Легко проверить (мы предложим это сделать в задачах), что π — действительно наименьший положительный период тангенса и котангенса.

Одно замечание по поводу терминологии. Часто слова «период функции» употребляют в значении «наименьший положительный период». Так что если на экзамене у вас спросят: «Является ли 100π периодом функции синус?», не торопитесь с ответом, а уточните, имеется в виду наименьший положительный период или просто один из периодов.

Тригонометрические функции — типичный пример периодических функций: любую «не очень плохую» периодическую функцию можно в некотором смысле выразить через тригонометрические.

Задача 8.1. Найдите наименьшие положительные периоды функций:

а) $y = \sin 3x$; б) $y = \cos \dfrac{x}{2}$; в) $y = \cos \pi x$;
г) $y = \cos x + \cos(1{,}01x)$.

Задача 8.2. Зависимость напряжения в сети переменного тока от времени задается формулой $U = U_0 \sin \omega t$ (здесь t — время, U — напряжение, U_0 и ω — постоянные величины). Частота переменного тока — 50 Герц (это означает, что напряжение совершает 50 колебаний в секунду).

а) Найдите ω, считая, что t измеряется в секундах;

б) Найдите (наименьший положительный) период U как функции от t.

Задача 8.3. а) Докажите, что наименьший положительный период косинуса равен 2π;

б) Докажите, что наименьший положительный период тангенса равен π.

Задача 8.4. Пусть наименьший положительный период функции f равен T. Докажите, что все остальные ее периоды имеют вид nT для некоторых целых чисел n.

Задача 8.5. Докажите, что следующие функции не являются периодическими:

а) $y = x^2$; б) $y = \sin(x^2)$;
в) $y = x + \sin x$; г) $y = \sin|x|$;
д*) $y = \cos x + \cos(kx)$, где k — иррациональное число.

Задача 8.6. Числа 5 и 8 являются периодами функции f. Докажите, что число 1 — тоже ее период.

Задача 8.7. Функция $y = f(x)$ имеет наименьший положительный период 2, а функция $y = g(x)$ имеет наименьший положительный период 6. Может ли функция $y = f(x) + g(x)$ иметь наименьший положительный период 3?

Задача 8.8. Определим функцию f так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Докажите, что всякое рациональное число будет периодом функции f (отсюда следует, что у нее нет наименьшего положительного периода).

§ 9. Формулы приведения

Нанесем на тригонометрическую окружность точку M, соответствующую числу x. Ее координатами будут $(\cos x; \sin x)$.

Опустим из точки M перпендикуляр на ось абсцисс. У нас получится прямоугольный треугольник (на рис. 9.1а он заштрихован).

Теперь повернем этот треугольник на $90°$ против часовой стрелки. Он займет положение, показанное на рис. 9.1б. Точка M на этом рисунке соответствует числу $x + \pi/2$ (так как угол MZM', очевидно, прямой) и имеет координаты $(-\sin x; \cos x)$. Поскольку координаты точки на тригонометрической окружности — это косинус и синус соответствующего этой точке числа, получаем такие формулы:

$$\cos(x + \pi/2) = -\sin x;$$
$$\sin(x + \pi/2) = \cos x.$$

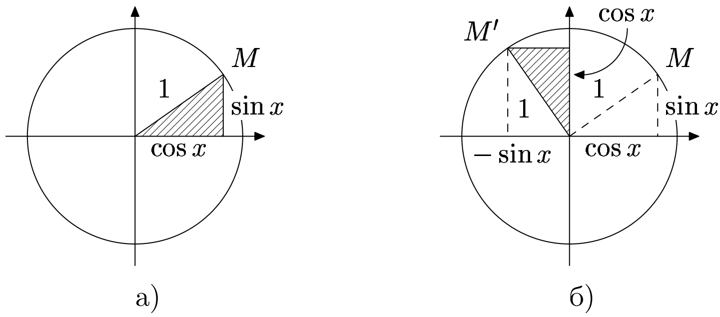


Рис. 9.1. Точка M соответствует числу x, точка M' соответствует числу $x + \pi/2$.

Поделим эти равенства одно на другое. Получится вот что:

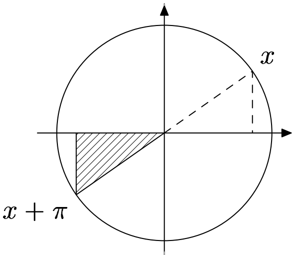
$$\operatorname{tg}(x + \pi/2) = -\operatorname{ctg} x;$$
$$\operatorname{ctg}(x + \pi/2) = -\operatorname{tg} x.$$

Строго говоря, мы доказали эти формулы лишь в одном случае — если точка, соответствующая числу x, лежит в первой четверти. Проверьте сами, что эти формулы верны и в других случаях.

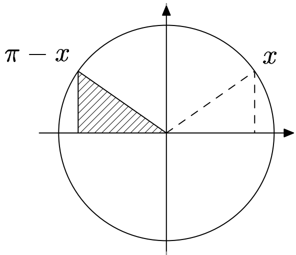
Итак, сравнив два положения треугольника на рис. 9.1а, мы получили несколько формул. Прикладывать этот треугольник к осям можно и разными другими способами, и каждый из этих способов дает свой набор формул. На рис. 9.2 изображены разные способы перекладывания треугольника, а под ними выписаны соответствующие формулы.

Задача 9.1. Заполните пустые места в подписях к чертежам на рис. 9.2.

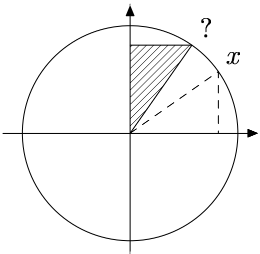
Формулы, которые мы получили с помощью перекладывания треугольника, называются формулами приведения. Точнее говоря, пусть у нас есть число a, равное $n\pi/2$ для какого-то целого числа n. Формулами приведения называются формулы, связывающие тригонометрические функции от $x + a$, $x - a$ или $a - x$ с тригонометрическими функциями от x. Как видите, этих формул много, и заучивать их наизусть было бы неразумно. На практике,



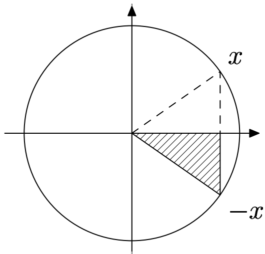
$\cos(x+\pi) = -\cos x;$
$\sin(x+\pi) = -\sin x;$
$\operatorname{tg}(x+\pi) = \ldots$



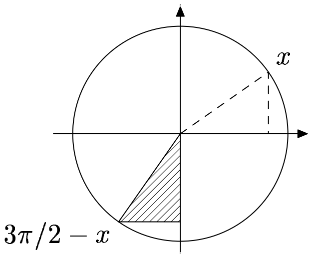
$\cos(\pi - x) = \ldots;$
$\sin(\pi - x) = \sin x;$
$\operatorname{tg}(\pi - x) = \ldots$



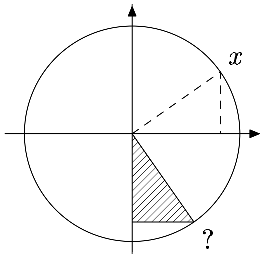
$\cos(\ldots) = \ldots;$
$\sin(\ldots) = \ldots;$
$\operatorname{tg}(\ldots) = \ldots$



$\cos(-x) = \cos x;$
$\sin(-x) = -\sin x;$
$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$



$\cos(3\pi/2 - x) = \ldots;$
$\sin(3\pi/2 - x) = \ldots;$
$\operatorname{tg}(3\pi/2 - x) = \ldots$



$\cos(\ldots) = \sin x;$
$\sin(\ldots) = \ldots;$
$\operatorname{tg}(\ldots) = \ldots$

Рис. 9.2. Формулы приведения.

если требуется воспользоваться формулой приведения, удобно нарисовать картинку наподобие тех, из которых составлен рис. 9.2, и посмотреть по ней, как должна выглядеть формула. Кроме того, есть и мнемоническое правило, позволяющее выписать любую формулу приведения. Сформулируем это правило.

1) Пусть в левой части стоит тригонометрическая функция от $x+a$, $x-a$ или $a-x$, где $a=n\pi/2$. Если π укладывается в числе a целое число раз ($a=0$, π, $-\pi$, 2π, $-2\pi,\ldots$), то в правой части надо записать ту же тригонометрическую функцию, что и в левой части. Если же π укладывается в числе a не целое, а «полуцелое» число раз ($a=\pi/2$, $-\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2,\ldots$), то название тригонометрической функции надо заменить на похожее (синус на косинус и наоборот, тангенс на котангенс и наоборот).

2) Если при x, принадлежащем первой четверти, левая часть положительна, то перед правой частью надо поставить знак плюс, в противном случае — знак минус.

Вот как по этим правилам получается формула для $\sin(3\pi/2+x)$: $3\pi/2$ скобках указывает, что название функции меняется, так что в правой части будет стоять косинус; так как при x, лежащем в первой четверти, $\sin(3\pi/2+x)$ отрицателен (рис. 9.3), перед косинусом будет стоять знак минус. В итоге: $\sin(3\pi/2+x) = -\cos x$.

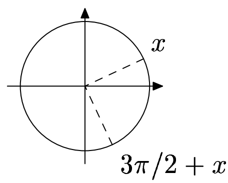


Рис. 9.3.

С помощью формул приведения тригонометрические функции любого числа можно выразить через тригонометрические функции чисел, лежащих на отрезке $[0;\pi/2]$ (от 0° до 90°, если измерять углы в градусах). Поэтому тригонометрические таблицы составляются только для углов от 0° до 90°; в современных калькуляторах и компьютерах программы, вычисляющие тригонометрические функции, также предварительно «приводят» аргумент к промежутку $[0;\pi/2]$.

Из множества формул приведения стоит, возможно, отметить такие:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x;$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{ctg} x; \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{tg} x.$$

Эти формулы называются «формулами дополнительного угла»; для острых углов они нам уже знакомы.

Полезно также запомнить, как меняются тригонометрические функции при изменении знака аргумента:

$$\sin(-x)=-\sin x; \qquad \cos(-x)=\cos x;$$
$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x; \qquad \operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x.$$

Иными словами, синус, тангенс и котангенс — нечетные функции, косинус — четная функция.

Задача 9.2. Упростите выражения:

а) $\sin(x-\pi/2)$; б) $\sin(x-1998\pi)$; в) $\sin(x-1991\pi/2)$;
г) $\sin(x-3\pi/2)$; д) $\sin(2\pi-x)$; е) $\operatorname{tg}(x-\pi/2)$;
ж) $\sin(x-111\pi)$; з) $\cos(x+7\pi/2)$; и) $\operatorname{tg}(-x-3\pi/2)$.

Задача 9.3. Вычислите:

а) $\cos(13\pi/6)$; б) $\sin(44\pi/3)$; в) $\cos(-21\pi/2)$;
г) $\operatorname{tg}(77\pi/4)$; д) $\sin(123\pi/2)$; е) $\sin(-19\pi/3)$;
ж) $\sin 3540°$; з) $\operatorname{tg}(-1050°)$; и) $\cos 1575°$;
к) $\sin(-1200°)$.

Задача 9.4. Выразите через тригонометрическую функцию числа́, лежащего на отрезке $[0;\pi/2]$:

а) $\operatorname{tg} 19,3\pi$; б) $\operatorname{tg} 10$; в) $\sin 46\pi/9$;
г) $\cos 114$; д) $\sin(-9)$; е) $\sin 22\pi/7$.

Задача 9.5. Определите знаки следующих выражений:

а) $\sin(127\pi/5)$; б) $\cos(-26,17\pi)$; в) $\operatorname{tg} 83,1\pi$;
г) $\cos 17$; д) $\sin(-46)$.

Задача 9.6. Пусть на плоскости задана система координат и точка M с координатами $(a; b)$. Запишите координаты точки, в которую M переходит при следующих преобразованиях:

а) симметрии относительно оси абсцисс;

б) симметрии относительно оси ординат;

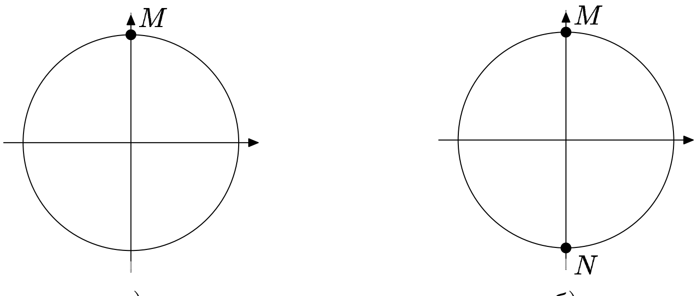
в) симметрии относительно начала координат;

г) повороте относительно начала координат на $90°$ в положительном направлении;

д) симметрии относительно прямой с уравнением $y = x$.

§ 10. Простейшие тригонометрические уравнения

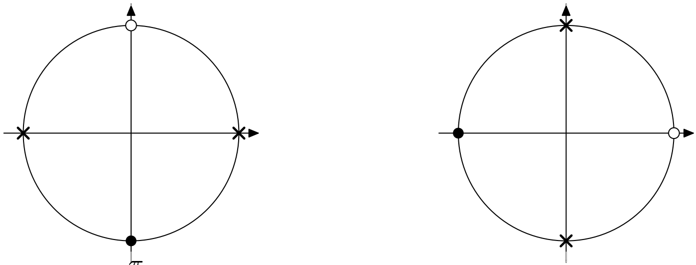
Будем учиться решать тригонометрические уравнения. Начнем с самого простого: уравнения $\sin x = 1$. Мы помним, что $\sin x$ — ордината точки x на тригонометрической окружности. На ней есть только одна точка с ординатой 1 — точка M на рис. 10.1а. Одно



а) б)

Рис. 10.1. Простейшие уравнения.

из чисел, соответствующих точке M, — это число $\pi/2$. Кроме $\pi/2$ этой точке соответствуют, очевидно, все числа вида $\pi/2 + 2\pi n$, где n — целое число, и только они. Вместо «n — целое число» принято писать «$n \in \mathbb{Z}$» (буквальный перевод: «n принадлежит множеству



○ $\sin x = 1$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

× $\sin x = 0$; $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

• $\sin x = -1$; $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

○ $\cos x = 1$; $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

× $\cos x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

• $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Рис. 10.2. Простейшие уравнения: систематизация.

всех целых чисел, обозначаемому $\mathbb{Z}$»). Итак, решения уравнения $\sin x = 1$ можно записать так: $x = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Можно записать решения этого уравнения и в виде множества:

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \qquad n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Можно, наконец, написать так:

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Решим еще уравнение $\cos x = 0$. Так как $\cos x$ — абсцисса точки, соответствующей x, на тригонометрическом круге числу x могут соответствовать точки M и N (рис. 10.1б), и только они. Точке M, как мы только что выяснили, соответствуют числа вида $\pi/2+2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Точке N соответствует, в частности, число $-\pi/2$, а значит, и все числа вида $-\pi/2 + 2\pi m$ $(m \in \mathbb{Z})$.

Можно записать оба эти множества чисел одной формулой, а именно $x = \pi/2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Убедитесь, что эта формула дает в точности все числа, которым соответствует точка M или N на рис 10.1б.

Решения этих и аналогичных тригонометрических уравнений изображены на рис. 10.2.

Прежде чем читать дальше, убедитесь, что решения уравнений на рис 10.2 соответствуют рисункам.

Теперь займемся уравнениями посложнее. Решим уравнение $\sin x = 1/2$. Сначала мы опять-таки найдем не сами решения, а соответствующие им точки на тригонометрическом круге. Это — точки с ординатой $1/2$, их, очевидно, две (точки M_1 и M_2 на рис. 10.3).

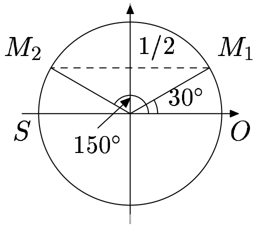


Рис. 10.3.

Выясним, какие числа соответствуют этим точкам. Точка M_1 соответствует (в частности) числу $\pi/6$ ($\pi/6$ радиан — это $30°$, $\sin 30° = 1/2$), а точка M_2 — числу $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$ (чтобы пройти путь от начала отсчета O до точки M_2, можно сначала пройти в положительном направлении расстояние π до точки S, а затем вернуться из S в M_2, пройдя расстояние $\pi/6$ — ду́ги SM_2 и OM_1 равны). Числа, соответствующие точке M_1, имеют вид $\pi/6 + 2\pi n$, а числа, соответствующие точке M_2, имеют вид $5\pi/6+2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Итак, ответ к уравнению $\sin x = 1/2$ готов:

$$\begin{aligned} &x = \pi/6 + 2\pi n; \\ &x = 5\pi/6a + 2\pi n \qquad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

С уравнением $\sin x = 1/2$ нам повезло в том отношении, что мы смогли явно указать число, синус которого равен $1/2$. Чтобы решить уравнение $\sin x = a$ для произвольного a, нам нужно как-то обозначить число, синус которого равен a. При этом, если такие числа есть, то их много, так что нужно еще выбрать из них одно. Эти проблемы принято решать следующим образом:

Определение. Арксинусом числа a называется такое число x, что $\sin x = a$ и $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$. Это число обозначается $\arcsin a$.

Из рис. 10.4 видно, что $\arcsin a$ существует и однозначно определен, если $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Если $|a| > 1$ (то есть $a > 1$ или $a < -1$), то $\arcsin a$ не определен, поскольку $\sin x$ не бывает больше 1 или меньше -1. Теперь мы можем записать в общем виде решения

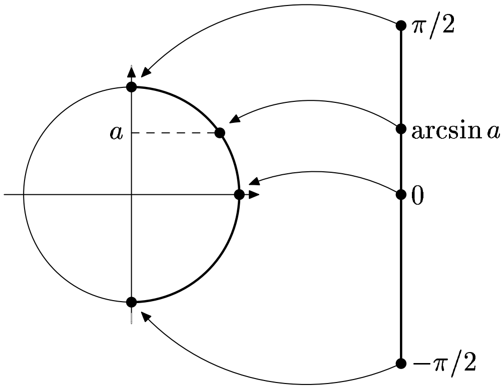


Рис. 10.4. Арксинус.

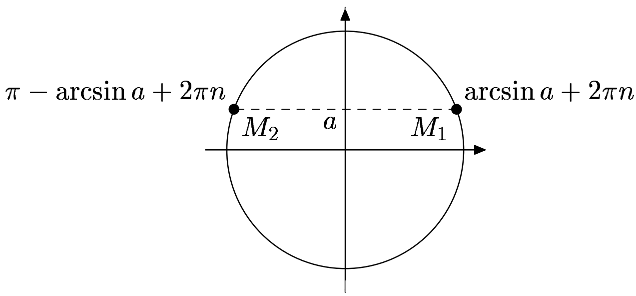


Рис. 10.5. $\sin x = a$.

уравнения $\sin x = a$. Будем для начала считать, что $-1 < a < 1$. Тогда на тригонометрической окружности есть две точки с ординатой a (рис. 10.5).

Точка M_1 соответствует, очевидно, числу $\arcsin a$ (а также числам, отличающимся от него на кратные 2π). Точка M_2 соответствует числу $\pi - \arcsin a$ (вспомните уравнение $\sin x = 1/2$, а также формулу приведения $\sin(\pi - x) = \sin x$). Все числа, соответствующие этим двум точкам, — это числа $\arcsin a + 2\pi n$ и $\pi - \arcsin a + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Стало быть, при $|a| < 1$ ответ к уравнению $\sin x = a$ таков:

$$\begin{aligned} &x = \arcsin a + 2\pi n; \\ &x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \qquad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{10.1}$$

Когда a приближается к 1, две точки с ординатой a на тригонометрической окружности приближаются друг к дружке, а когда a становится равным 1, они сливаются. Сливаются в одну и две «серии» решений уравнения $\sin x = a$: каждая из двух формул переходит в знакомую нам $\pi/2 + 2\pi n$. Если же $a > 1$ (или $a < -1$), то уравнение $\sin x = a$ не имеет решений: точек с соответствующей ординатой на тригонометрической окружности просто нет.

Это напоминает положение дел с уравнением $x^2 = a$: если $a > 0$, то корня два; когда a приближается к нулю, эти корни приближаются друг к другу, когда $a = 0$, два корня сливаются в один, а когда a отрицательно, то корней у уравнения $x^2 = a$ нет. Если, однако, рассматривать наряду с обычными еще и так называемые «комплексные числа», то окажется, что при $a < 0$ у уравнения $x^2 = a$ тоже есть два корня, но только комплексных. Аналогичным образом у уравнения $\sin x = a$ при $a > 1$ есть решения, являющиеся комплексными числами. Об этом у нас пойдет речь в главе 6.

Решения уравнения $\sin x = a$ можно записать и одной формулой:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \tag{10.2}$$

Проверьте, что формула (10.2) дает другую запись того же ответа, что и формула (10.1) (для этого полезно отдельно разобрать случай четных n, когда $(-1)^n = 1$, и нечетных n, когда $(-1)^n = -1$).

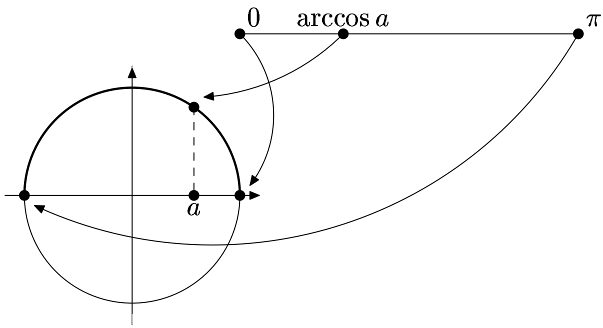


Рис. 10.6. Арккосинус.

Запись ответа к уравнению $\sin x = a$ в виде (10.2) удобна, если ничего, кроме ответа, от нас не требуется. Если же нужен дальнейший анализ решений (как, например, в задаче 10.10 в конце параграфа), то запись (10.1) (в виде двух «серий») удобнее.

Разберемся теперь с уравнением $\cos x = a$. Для записи его решений используется функция арккосинус.

> **Определение.** Арккосинусом числа a называется такое число x, что $\cos x = a$ и $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Это число обозначается $\arccos a$.

Из рисунка 10.6 видно, что $\arccos a$ существует и однозначно определен, если $-1 \leqslant a \leqslant 1$, и не определен, если $a > 1$.

Теперь запишем решения уравнения $\cos x = a$. Опять будем сначала считать, что $-1 < a < 1$. Решениям этого уравнения соответствуют точки с абсциссой a на тригонометрической окружности (рис. 10.7). Точка M_1 соответствует числу $\arccos a$, а точка M_2 — числу $-\arccos a$ (вспомните формулу $\cos(-x) = \cos x$). Вспоминая, что числа, отличающиеся на кратные 2π, соответствуют одной и той же точке, получаем, что при $|a| < 1$ ответ к уравнению $\cos x = a$ таков:

$$\begin{aligned} &x = \arccos a + 2\pi n; \\ &x = -\arccos a + 2\pi n \qquad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

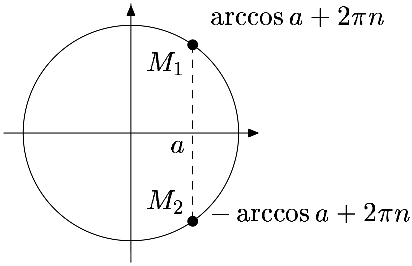


Рис. 10.7. $\cos x = a$.

Если $a = 1$ или -1, этот ответ тоже верен, причем обе «серии» сливаются в одну (т. е. одни и те же значения x встречаются в обеих сериях); впрочем, при этих значениях a пользоваться общими формулами неразумно. Если же $a > 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет решений.

Часто решения уравнения $\cos x = a$ кратко записывают так:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Эта запись имеет те же преимущества и недостатки, что и запись решений уравнения $\sin x = a$ с помощью одной формулы.

Для записи решений уравнения $\operatorname{tg} x = a$ используется функция арктангенс.

> **Определение.** Арктангенсом числа a называется такое число x, что $\operatorname{tg} x = a$ и $-\pi/2 < x < \pi/2$. Это число обозначается $\operatorname{arctg} a$.

Из рис. 10.8 видно, что $\operatorname{arctg} a$ существует и однозначно определен для всех a.

Теперь решим уравнение $\operatorname{tg} x = a$. Очевидно, что оно имеет решения для всех a и что его решения — числа, соответствующие точкам M_1 и M_2 на рис. 10.8. Точке M_1, очевидно, соответствуют числа $\operatorname{arctg} a + 2\pi n$, а точке M_2 — числа $(\operatorname{arctg} a + \pi) + 2\pi k$ (если нанести на тригонометрическую окружность числа, отличающиеся на π, то получатся две диаметрально противоположные точки). Получилось две серии решений. Проще, однако, ответ записать так:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

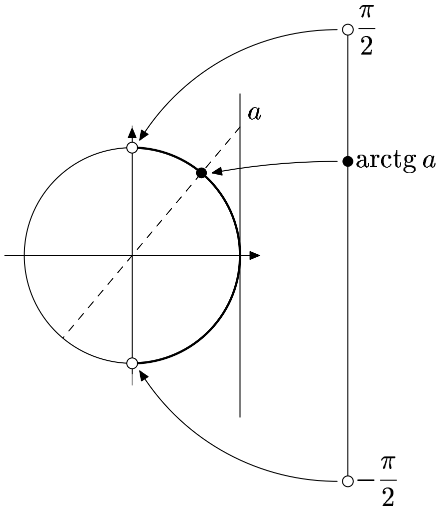


Рис. 10.8. Арктангенс.

Эта запись дает верный ответ, так как при четных n получается точка M_1, а при нечетных — точка M_2. Впрочем, это также следует из того, что период тангенса равен π.

Осталось еще сказать про уравнение $\operatorname{ctg} x = a$. Для его решения используется малоупотребительная функция арккотангенс.

> **Определение.** Арккотангенсом числа a называется такое число x, что $\operatorname{ctg} x = a$ и $0 < x < \pi$. Обозначается это число $\operatorname{arcctg} a$.

Арккотангенс, как и арктангенс, определен для всех чисел и связан с арктангенсом простой формулой (см. задачу 10.5).

Решениями уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ являются числа $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 10.1. Заполните таблицы:

a	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arcsin a$									
$\arccos a$									

a	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$							
$\operatorname{arcctg} a$							

Задача 10.2. Решите уравнения:

а) $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$; б) $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$; г) $\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$; е) $\cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\operatorname{tg}(x + \pi/4) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

и) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2}\right) = -1$.

Задача 10.3. Решите уравнения:

а) $\sin x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; б) $\sin 2x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$;

в) $\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = 4 - \sqrt{7}$; г) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$;

д) $6\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$; е) $3\sin^2 x - 10\sin x + 3 = 0$;

ж) $2\sin^2 x = 4\sin x + \cos^2 x$; з) $3\sin^2 2x + \cos^2 2x + 5\cos 2x = 0$;

и) $\cos^2 y - 3\cos y + 1 = 0$; к) $\operatorname{tg} x = 3$;

л) $\operatorname{ctg} x = 4 - \sqrt{7}$.

Задача 10.4. Решите уравнения:

а) $\arcsin x = \pi/6$; б) $\arcsin x = 5\pi/6$; в) $\arccos x = 5\pi/6$.

Задача 10.5. Докажите формулы:

а) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$; б) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;
в) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; г) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$.

Задача 10.6. Постройте графики функций:

а) $y = \sin(\arcsin x)$; б) $y = \cos(\arccos x)$;
в) $y = \arcsin(\sin x)$; г) $y = \arccos(\cos x)$;
д) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

Задача 10.7. Упростите выражения:

а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{17\pi}{5}\right)$; б) $\arcsin\left(\cos\dfrac{31\pi}{5}\right)$;
в) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 8)$; г) $\arccos(\cos 11)$;
д) $\arccos(\sin 11)$.

Задача 10.8. Для каких x верны равенства:

а) $\arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos x$; б) $\operatorname{arctg}(1/x) = \operatorname{arcctg} x$;
в) $\arcsin(\sin x) = x$; г) $\sin(\arcsin x) = x$.

Задача 10.9. Упростите выражения:

а) $\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}\right)$; б) $\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}\right)$;
в) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$; г) $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$;
д) $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right)$.

Задача 10.10. а) Сколько решений уравнения $\sin x = 1/2$ лежит на отрезке $[0; 10\pi]$?

б) Сколько решений уравнения $\sin x = 1/3$ лежит на отрезке $[0; 100\pi]$?

в) Найдите сумму решений уравнения $\sin x = -\sqrt{2}/2$, лежащих на отрезке $[0; 64\pi]$.

§ 11. Графики синуса и косинуса

Повторить: *§ 5. Часы, или современный взгляд на тригонометрию.*

Построим график функции $y = \sin x$. При этом нам опять пригодятся часы из § 5.

Если $x = 0$, то, очевидно, $y = 0$. Когда x возрастает от 0 до $\pi/2$, число $\sin x$ возрастает от 0 до 1 (представьте себе, как меняется ордината конца стрелки на наших фирменных часах). Участок графика для x от 0 до $\pi/2$ изображен на рис. 11.1.

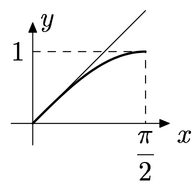


Рис. 11.1.

При малых x наш график близок к прямой $y = x$: вспомним, что при малых x верна приближенная формула $\sin x \approx x$. Можно сказать, что прямая $y = x$ касается кривой с уравнением $y = \sin x$ в точке $(0; 0)$. Заметим также, что наш участок графика расположен ниже этой прямой: ведь для острых углов x, измеренных в радианах, выполнено неравенство $\sin x < x$.

Чем ближе x к $\pi/2$, тем более полого идет наша кривая. Это происходит потому, что проекция конца стрелки на ось ординат, колеблясь по отрезку $[-1; 1]$, быстрее всего движется в середине отрезка и замедляется у его краев: мы это уже обсуждали в § 5.

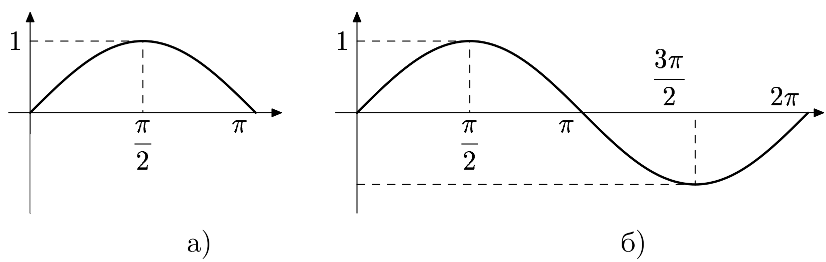
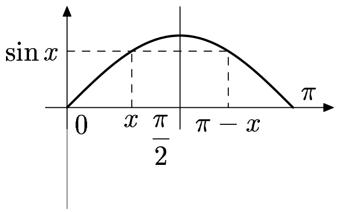
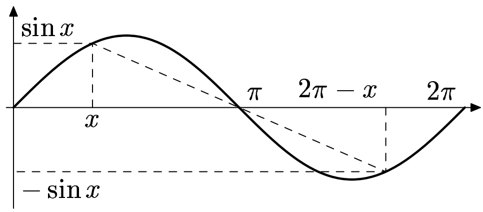


Рис. 11.2.

Пусть далее, $\pi/2 \leqslant x \leqslant 2\pi$ (стрелка часов продолжает движение). Тогда, очевидно, ордината конца стрелки, то есть $\sin x$, уменьшается от 1 до 0 — рис. 11.2а. Далее, когда x возрастает от π до $3\pi/2$, $\sin x$ уменьшается от 0 до -1, а когда x возрастает от $3\pi/2$ до 2π, возрастает от -1 до 0. Итак, участок графика для $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ готов (рис. 11.2б). Заметим, кстати, что кривая на рис 11.2а симметрична относительно вертикальной прямой с уравнением $x = \pi/2$. В самом деле, формула приведения $\sin(\pi/2 - x) = \sin x$ показывает, что точки с абсциссами x и $\pi - x$ имеют на графике одинаковые ординаты и, стало быть, симметричны относительно прямой $x = \pi/2$ (рис. 11.3а).



а)



б)

Рис. 11.3.

Задача 11.1. Запишите уравнение прямой, касающейся графика функции $y = \sin x$ в точке с координатами $(\pi; 0)$.

Кривая на рис 11.2б центрально симметрична относительно точки с координатами $(\pi; 0)$; это следует из другой формулы приведения: $\sin(2\pi - x) = -\sin x$ (рис. 11.3б).

После того, как у нас есть участок графика функции $y = \sin x$ для $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, весь график строится уже просто. В самом деле, когда конец стрелки прошел путь 2π, стрелка вернулась в исходное положение; при дальнейшем движении все будет повторяться. Значит, график будет состоять из таких же кусков, как на рис 11.2б. Окончательно график функции $y = \sin x$ выглядит так, как на рис. 11.4. При этом участки графика при $x \in [2\pi; 4\pi]$, $[4\pi; 6\pi]$, $[-2\pi; 0]$,... получаются из графика на рис 11.2б сдвигом вдоль оси абсцисс на 2π, 4π, -2π,... соответственно. Это — просто переформулировка того факта, что функция $y = \sin x$ имеет период 2π.

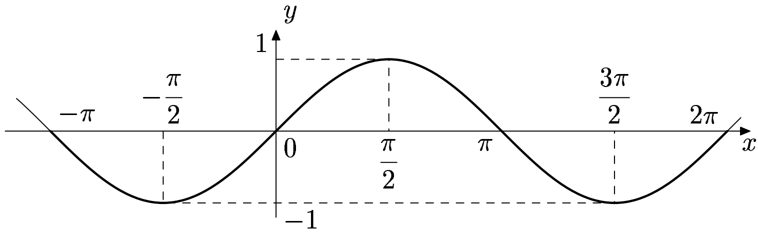


Рис. 11.4. $y = \sin x$.

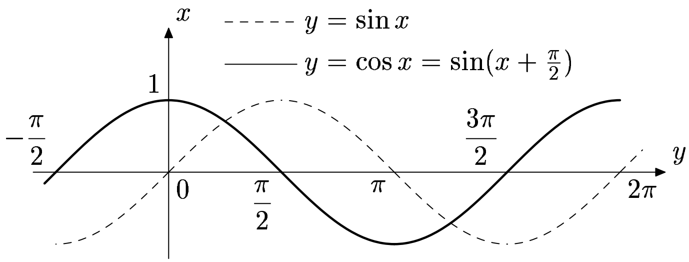


Рис. 11.5. $y = \cos x$.

Теперь построим график функции $y = \cos x$. Можно было бы строить его так же, как мы строили график синуса. Мы, однако, изберем другой путь, который позволит использовать уже имеющуюся у нас информацию.

Именно, воспользуемся формулой приведения $\sin(x + \pi/2) = \cos x$. Эту формулу можно понимать так: функция $y = \cos x$ принимает те же значения, что и функция $y = \sin x$, но на $\pi/2$ раньше. Например, функция $y = \sin x$ принимает значение 1 при $x = \pi/2$, а функция $y = \cos x = \sin(x + \pi/2)$ принимает это же значение уже при $x = 0$. На графике это означает следующее: для каждой точки графика $y = \sin x$ есть точка графика $y = \cos x$, у которой ордината та же, а абсцисса на $\pi/2$ меньше (рис. 11.5). Стало быть, график $y = \cos x$ получится, если сдвинуть график $y = \sin x$ вдоль оси абсцисс на $\pi/2$ влево. На рис. 11.5 график функции $y = \cos x$ изображен сплошной кривой.

Итак, мы выяснили, что график косинуса получается преобразованием (сдвигом) из графика синуса. Случаи, когда график одной функции можно получить преобразованием из графика другой функции, интересны и сами по себе, поэтому скажем о них несколько слов.

Как, например, будет выглядеть график функции $y = 2\sin x$? Ясно, что ординаты точек этого графика получаются из ординат соответствующих точек графика $y = \sin x$ умножением на 2, так что наш график изобразится сплошной кривой на рис. 11.6. Можно сказать, что график $y = 2\sin x$ получается из графика $y = \sin x$ растяжением в два раза вдоль оси ординат.

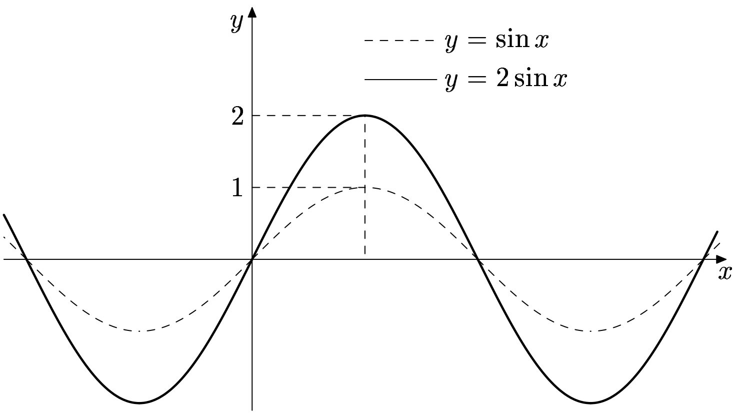


Рис. 11.6. $y = 2\sin x$.

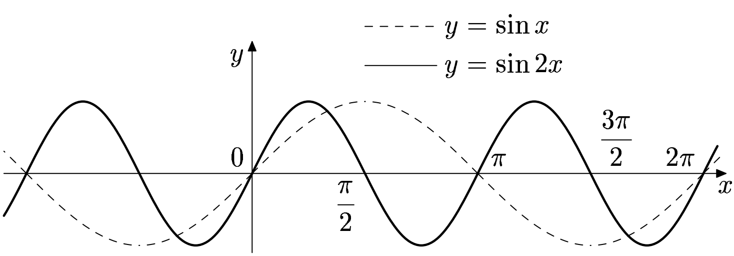


Рис. 11.7. $y = \sin 2x$.

Теперь построим график функции $y = \sin 2x$. Легко понять,

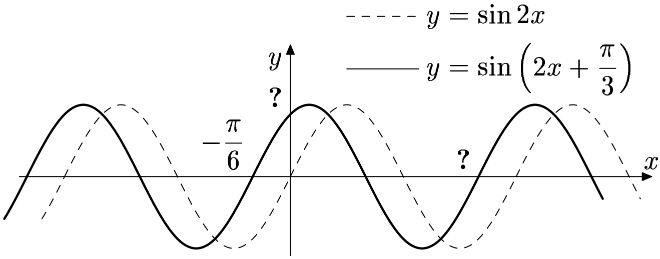


Рис. 11.8. $y = \sin(2x + \pi/3)$.

что функция $y = \sin 2x$ принимает те же самые значения, что и функция $y = \sin x$, но при в два раза меньших значениях x. Например, функция $y = \sin x$ принимает значение 1 при $x = \pi/2$, а функция $y = \sin 2x$ — уже при $x = \pi/4$; иными словами, чтобы получить график $y = \sin 2x$, надо абсциссы всех точек графика $y = \sin x$ уменьшить в два раза, а ординаты оставить неизменными. То, что получается, изображено на рис. 11.7. Можно сказать, что график $y = \sin 2x$ (сплошная линия на рис. 11.7) получается из графика $y = \sin x$ сжатием в 2 раза к оси ординат.

Попробуем еще построить график функции $y = \sin(2x + \pi/3)$. Понятно, что он должен получаться каким-то преобразованием из графика $y = \sin 2x$. На первый взгляд может показаться, что это преобразование — сдвиг влево на $\pi/3$ вдоль оси абсцисс, по аналогии с тем, что изображено на рис. 11.5. Однако, если бы это было так, то вышло бы, например, что функция $y = \sin(2x + \pi/3)$ принимает значение 1 при $x = \pi/4 - \pi/3 = \pi/12$, что не соответствует действительности (проверьте!). Правильно рассуждать так: $\sin(2x + \pi/3) = \sin 2(x + \pi/6)$, так что функция $y = \sin(2x + \pi/3)$ принимает те же значения, что и функция $y = \sin 2x$, но на $\pi/6$ раньше. Так что сдвиг влево — не на $\pi/3$, а на $\pi/6$ (рис. 11.8).

Кривые, являющиеся графиками функций $y = a \sin bx$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, называются *синусоидами*. Заметим, что кривой «косинусоида» вводить не надо: как мы видели, график косинуса — это та же кривая, что и график синуса, только иначе расположенная относительно осей координат.

Задача 11.2. Каковы координаты точек, помеченных на рис. 11.8 вопросительными знаками?

Задача 11.3. Возьмите свечу, тонкий лист бумаги и острый нож. Намотайте лист бумаги на свечу в несколько слоев и аккуратно разрежьте эту свечу вместе с бумагой наискосок ножом. Теперь разверните бумагу. Вы увидите, что она оказалась разрезанной по волнистой линии. Докажите, что эта волнистая линия является синусоидой.

Задача 11.4. Постройте графики функций:

а) $y = -\sin x$; б) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; в) $y = \cos(x/2)$;
г) $y = 3\cos 2x$; д) $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; е) $y = \sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$;
ж) $y = \sin(\pi x)$.

Замечание. Если вы строите графики тригонометрических функций на клетчатой бумаге, удобно выбрать немного разные масштабы по осям, с тем чтобы на оси абсцисс числу π соответствовало целое число клеточек. Например, часто выбирают такой масштаб: по оси ординат отрезок длины 1 занимает две клеточки, по оси абсцисс отрезок длины π занимает 6 клеточек.

Задача 11.5. Постройте графики функций:

а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arccos x$.

Посмотрим, как выглядят на графиках уже известные нам решения уравнений $\sin x = a$ и $\cos x = a$. Эти решения являются абсциссами точек пересечения горизонтальной прямой $y = a$ с графиком функций $y = \sin x$ (соответственно $y = \cos x$). На рис. 11.9, 11.10 хорошо видны две серии решений, получающихся при $-1 < a < 1$.

По графикам синуса и косинуса видно, на каких промежутках эти функции возрастают, а на каких убывают. Ясно, например, что функция $y = \sin x$ возрастает на отрезках $[-\pi/2; \pi/2]$,

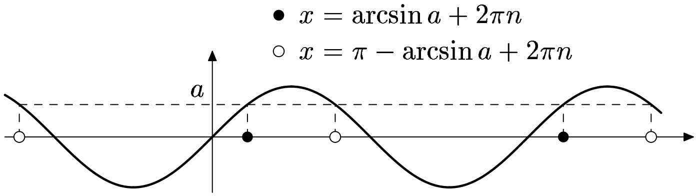


Рис. 11.9.

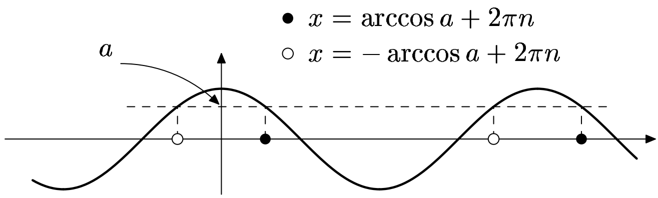


Рис. 11.10.

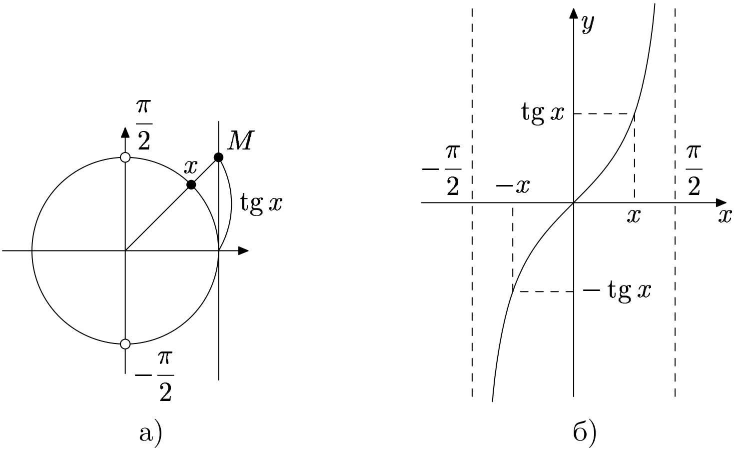


Рис. 12.1.

$[3\pi/2; 5\pi/2]$, $[-5\pi/2; -3\pi/2]$,... — одним словом, на всех отрезках $[-\pi/2 + 2\pi k; \pi/2 + 2\pi k]$, где $k \in \mathbb{Z}$, и убывает на всех отрезках $[\pi/2 + 2\pi n; 3\pi/2 + 2\pi n]$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 11.6. На каких отрезках возрастает и на каких убывает функция $y = \cos x$?

Задача 11.7. Сравните числа:

а) $\sin(17\pi/5)$ и $\cos(-6\pi/7)$; б) $\sin(11,2\pi)$ и $\cos(-6,4\pi)$;
в) $\cos(19\pi/9)$ и $\cos(-13\pi/6)$; г) $\sin 7$ и $\cos 7$;
д) $\cos 7$ и $\cos 10$.

Задача 11.8. Расположите в порядке возрастания: $\sin 1$, $\cos 2$, $\sin 3$, $\cos 4$, $\sin 5$, $\cos 6$.

§ 12. Графики тангенса и котангенса

Построим график функции $y = \operatorname{tg} x$. Для начала построим его для чисел x, принадлежащих интервалу $(-\pi/2; \pi/2)$.

Если $x = 0$, то $\operatorname{tg} x = 0$; когда x возрастает от 0 до $\pi/2$, $\operatorname{tg} x$ тоже возрастает — это видно, если посмотреть на ось тангенсов (рис. 12.1а). Когда x приближается к $\pi/2$, оставаясь меньше

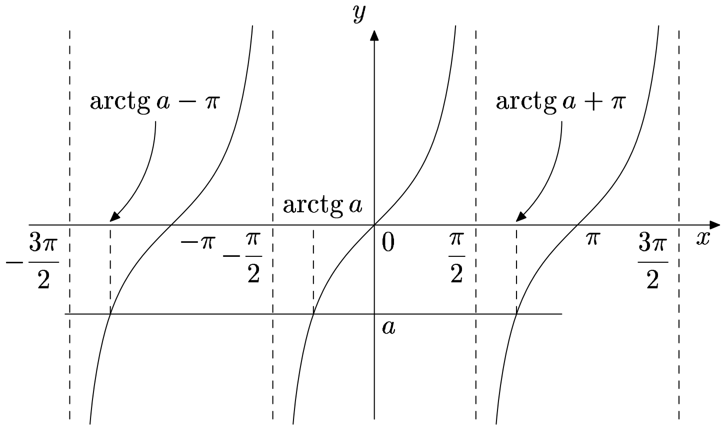


Рис. 12.2. $y = \operatorname{tg} x$.

$\pi/2$, значение $\operatorname{tg} x$ возрастает (точка M на рис. 12.1а убегает все выше) и может, очевидно, стать сколь угодно большим положительным числом. Аналогично, когда x убывает от 0 до $-\pi/2$, $\operatorname{tg} x$ становится отрицательным числом, абсолютная величина которого возрастает при приближении x к $-\pi/2$. При $x = \pi/2$ или $-\pi/2$ функция $\operatorname{tg} x$ не определена. Стало быть, график $y = \operatorname{tg} x$ при $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ выглядит примерно как на рис. 12.1б.

Вблизи начала координат наша кривая близка к прямой $y = x$ x: ведь для малых острых углов верно приближенное равенство $\operatorname{tg} x \approx x$. Можно сказать, что прямая $y = x$ касается графика функции $y = \operatorname{tg} x$ в начале координат. Кроме того, кривая на рис 12.1б симметрична относительно начала координат. Это объясняется тем, что функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная, то есть выполнено тождество $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

Чтобы построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ для всех x, вспомним, что $\operatorname{tg} x$ — периодическая функция с периодом π. Стало быть, чтобы получить полный график функции $y = \operatorname{tg} x$, надо повторить бесконечно много раз кривую рис. 12.1б, перенося ее вдоль оси абсцисс на расстояния πn, где n — целое число. Окончательный вид графика функции $y = \operatorname{tg} x$ — на рис. 12.2.

По графику мы в очередной раз видим, что функция $y = \operatorname{tg} x$

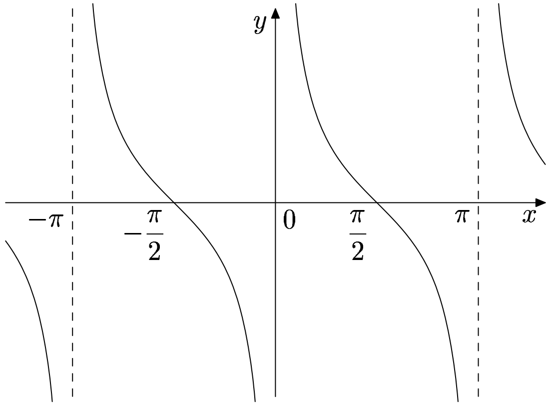


Рис. 12.3. $y = \operatorname{ctg} x$.

не определена при $x = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то есть при тех x, при которых $\cos x = 0$. Вертикальные прямые с уравнениями $x = \pi/2$, $3\pi/2, \ldots$, к которым приближаются ветви графика, называются асимптотами графика.

На том же рис. 12.2 мы изобразили решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$.

Построим график функции $y = \operatorname{ctg} x$. Проще всего, воспользовавшись формулой приведения $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(\pi/2 - x)$, получить этот график из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ с помощью преобразований наподобие тех, что мы описывали в предыдущем параграфе. Результат — на рис. 12.3

Задача 12.1. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ с помощью симметрии относительно некоторой прямой. Какой именно? Есть ли другие прямые с указанным свойством?

Задача 12.2. Как выглядит уравнение прямой, касающейся графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ в точке с координатами $(\pi/2; 0)$?

Задача 12.3. Сравните числа: а) $\operatorname{tg}(13\pi/11)$ и $\operatorname{tg} 3{,}3\pi$; б) $\operatorname{tg} 9{,}6\pi$ и $\operatorname{ctg}(-11{,}3\pi)$.

Задача 12.4. Расположите числа в порядке возрастания: $\operatorname{tg} 1$, $\operatorname{tg} 2$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{tg} 4$, $\operatorname{tg} 5$.

Задача 12.5. Постройте графики функций:

а) $y = \operatorname{tg}(2x - \pi/3)$; б) $y = 2 \operatorname{ctg}(\pi/4 - x)$.

Задача 12.6. Постройте графики функций:

а) $y = \operatorname{arctg} x$; б) $y = \operatorname{arcctg} x$.

Задача 12.7. Постройте график функции $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x)$.

§ 13. Чему равно $\sin x + \cos x$?

В этом параграфе мы попытаемся решить такую задачу: какое самое большое значение может принимать выражение $\sin x + \cos x$?

Ясно, что $\sin x + \cos x \leqslant 2$ при всех x: ведь как $\sin x$, так и $\cos x$ не превосходят 1. Впрочем, значения 2 ни при каком x получиться не может: чтобы так вышло, нужно, чтобы $\sin x$ и $\cos x$ оба равнялись 1, а это невозможно, поскольку формула $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ говорит нам, что когда $\sin x = 1$, тогда $\cos x = 0$ (и вообще, что когда $\sin x$ велик, тогда $\cos x$ мал). Хорошо было бы найти такое x, для которого оба слагаемых как бы уравновесили друг друга: и то, и другое было бы не слишком велико. Советуем вам, прежде чем читать дальше, поискать такое x с помощью таблицы из § 3.

Если вы правильно считали, у вас должно было выйти, что из всех x, входящих в эту таблицу, наибольшее значение $\sin x + \cos x$ получается при x, близких к $45°$, или, в радианной мере, к $\pi/4$. Если $x = \pi/4$, точное значение $\sin x + \cos x$ равно $\sqrt{2}$. Оказывается, что наш результат, полученный экспериментальным путем, и в самом деле верен: при всех x верно неравенство $\sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$, так что $\sqrt{2}$ — самое большое из значений, принимаемых этим выражением.

У нас еще не хватает средств, чтобы доказать это неравенство наиболее естественным способом. Пока что мы покажем, как свести его к задаче по планиметрии.

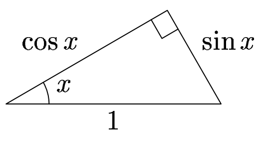


Рис. 13.1.

Если $0 < x < \pi/2$, то $\sin x$ и $\cos x$ — катеты прямоугольного треугольника с гипотенузой 1 и острым углом x (рис. 13.1). Поэтому наша задача переформулируется так: доказать, что сумма длин катетов прямоугольного треугольника с гипотенузой 1 будет максимальной, если этот треугольник — равнобедренный.

Задача 13.1. Докажите это утверждение.

Так как у равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 1 сумма длин катетов равна $\sqrt{2}$, из результата этой задачи вытекает неравенство $\sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$ для всех x, лежащих в интервале $(0; \pi/2)$. Отсюда уже нетрудно заключить, что это неравенство выполнено и вообще для всех x.

Результат задачи 13.1 верен не только для прямоугольных треугольников.

Задача 13.2. Докажите, что среди всех треугольников с данными величинами стороны AC и угла $\angle B$ наибольшая сумма $AB + BC$ будет у равнобедренного треугольника с основанием AC.

Вернемся к тригонометрии.

Задача 13.3. Пользуясь таблицей синусов из § 3, постройте по точкам график функции $y = \sin x + \cos x$.

Указание. Не забудьте, что x должен быть выражен в радианах; для значений x за пределами отрезка $[0; \pi/2]$ воспользуйтесь формулами приведения.

Если вы все сделали правильно, у вас должна была получиться кривая, похожая на синусоиду. Позже мы увидим, что эта кривая не просто похожа, а является синусоидой. Научимся мы также находить и наибольшие значения таких выражений, как $3\sin x + 4\cos x$ (кстати, график функции $y = 3\sin x + 4\cos x$ тоже является синусоидой!).

Глава 3

Решение треугольников

§ 14. Теорема косинусов

Определения тригонометрических функций острых углов, которые мы давали в начале нашей книжки, можно рассматривать как соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника. В этой главе речь пойдет о произвольных треугольниках (не обязательно прямоугольных). Ход мыслей будет вот каким. С каждым треугольником связаны шесть чисел: величины трех сторон и трех углов. Между этими числами есть соотношения. Одно из этих соотношений вы уже знаете: сумма углов треугольника равна $180°$. Если, например, два угла в треугольнике равны $75°$ и $55°$, то третий угол уже не может быть каким попало, он обязательно равен $180° - 75° - 55° = 50°$. Этим соотношением, однако, дело не исчерпывается. Пусть, например, у некоторого треугольника мы знаем величины двух сторон и угла между ними. Тогда, согласно одному из признаков равенства треугольников, оставшаяся сторона и остальные два угла уже полностью определены. Наша цель — найти формулы, по которым они выражаются через уже известные стороны и угол.

Другие признаки равенства треугольников также ведут к соотношениям между сторонами и углами, и эти соотношения также можно задать формулами. Кроме того, если известны стороны и углы треугольника, то этим однозначно определяются площадь

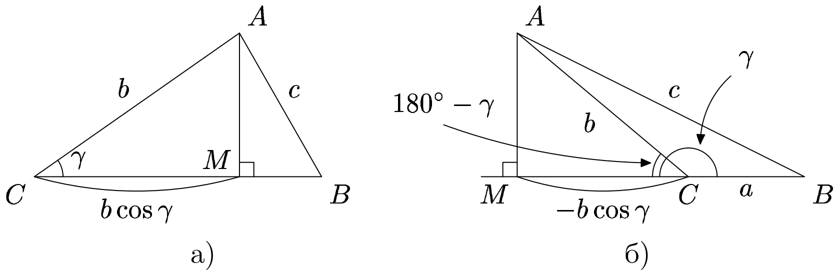


Рис. 14.1.

треугольника, радиусы вписанной и описанной окружности и тому подобное. Для них тоже имеет смысл поискать формулы, выражающие их через стороны и углы треугольника.

Начнем же мы как раз с соотношения, связанного с «первым признаком равенства треугольников» (по двум сторонам и углу между ними)[1]. Итак, пусть заданы две стороны a и b треугольника и угол γ между ними. Попробуем выразить через эти данные длину третьей стороны. Обозначим эту сторону c. План действий таков: опустим высоту $AM \perp BC$ (рис. 14.1а — чертеж для случая, когда угол γ острый, 14.1б — для случая, когда он тупой). По теореме Пифагора для треугольника AMB имеем $c^2 = AM^2 + MB^2$; если мы теперь выразим AM и MB через известные нам a, b и γ, то задача будет решена. Теперь конкретно:

- Пусть угол γ острый (рис. 14.1а). Тогда:

  $AM = b\sin\gamma$ (из прямоугольного треугольника AMC);
  $CM = b\cos\gamma$ (из того же треугольника);
  $BM = BC - CM = a - b\cos\gamma$.

  Теперь по теореме Пифагора

  $$c^2 = AM^2 + BM^2 = (b\sin\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2.$$

  После упрощений, которые предоставляем вам провести самостоятельно, получаем:

  $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

[1] В некоторых учебниках этот признак имеет другой номер.

- Пусть угол γ тупой (рис. 14.1б). Тогда:

$$AM = b\sin(180^\circ - \gamma) = b\sin\gamma;$$
$$BM = BC + CM = a + b\cos(180^\circ - \gamma) = a - b\cos\gamma.$$

(мы воспользовались формулами приведения). Отсюда

$$c^2 = AM^2 + BM^2 = (b\sin\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2.$$

Получилось то же самое выражение, что и в первом случае; тем самым для всех случаев мы доказали такую формулу:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Эта формула называется *теоремой косинусов.*

В нашем доказательстве мы не рассмотрели случай, когда угол γ прямой. В этом случае теорема косинусов также верна и, более того, была вам уже известна: если $\gamma = 90^\circ$, то $\cos\gamma = 0$, и теорема косинусов приобретает вид $c^2 = a^2+b^2$, то есть сводится к обычной теореме Пифагора.

Итак, часть программы по переводу первого признака равенства треугольников на язык формул мы выполнили: формула для вычисления третьей стороны по двум сторонам и углу между ними у нас уже есть. Надо еще найти два оставшихся угла треугольника, при том что один из углов и все стороны мы уже знаем. Собственно говоря, угол даже и не нужен: «третий признак равенства треугольников» гласит, что треугольник полностью определяется своими тремя сторонами[1].

Стало быть, зададимся такой задачей: даны три стороны треугольника, найти его углы. Оказывается, ее решение дает та же теорема косинусов: надо только в формуле, выражающей эту теорему, выразить $\cos\gamma$ через a, b и c:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};\ \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};\ \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Вторая и третья формулы получаются аналогично первой.

[1]В некоторых учебниках этот признак также идет под другим номером.

Мы нашли не сами углы, а только их косинусы, но углы треугольника этим полностью определяются: когда α меняется от $0°$ до $180°$ (то есть от 0 до π радиан), значение $\cos\alpha$ изменяется от 1 до -1, принимая каждое значение ровно один раз. Таким образом, можно записать:

$$\alpha = \arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Задача 14.1. В треугольнике со сторонами a, b и c против стороны c лежит угол γ. Докажите, что угол γ острый тогда и только тогда, когда $a^2+b^2>c^2$, и тупой тогда и только тогда, когда $a^2+b^2<c^2$.

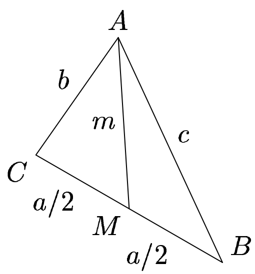


Рис. 14.2.

С помощью теоремы косинусов легко получить формулу, выражающую длину медианы треугольника через длины его сторон. Именно, пусть стороны треугольника равны $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, и пусть AM — медиана, проведенная к стороне BC. Чтобы найти ее длину, заметим, что по теореме косинусов для треугольника ABM (рис. 14.2) имеем

$$AM = \sqrt{AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos\beta} = \\ = \sqrt{c^2+\frac{a^2}{4}-ac\cos\beta}.$$

С другой стороны, по теореме косинусов уже для всего треугольника ABC имеем

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Подставляя это в предыдущую формулу, получим (после упрощений) вот что:

В треугольнике со сторонами a, b и c длина медианы, проведенной к стороне a, равна

$$\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

В задаче 14.4 мы предложим другой способ вывода этой формулы.

Задача 14.2. Докажите что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Задача 14.3. Две стороны треугольника равны b и c, угол между ними равен α. Докажите, что длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}$.

Указание. Достройте треугольник до параллелограмма.

Задача 14.4. Используя результат задачи 14.2, дайте новое доказательство формулы, выражающей медиану треугольника через три его стороны.

Задача 14.5. В треугольнике ABC даны стороны $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Точка M выбрана на стороне BC таким образом, что $BM/MC = 1/2$. Найдите длину отрезка AM.

§ 15. Вокруг площади треугольника

Пусть опять в треугольнике известны стороны a и b и угол между ними γ. Выразим через эти данные — которые полностью определяют треугольник — его площадь. Для этого опустим из вершины A высоту $AM \perp BC$ (рис. 15.1а); пусть $AM = h$. Как известно, площадь треугольника равна $ah/2$.

С другой стороны, если угол γ острый, то из прямоугольного треугольника AMC находим, что $h = b\sin\gamma$ (рис. 15.1а); если же угол γ тупой (рис. 15.1б), то из треугольника AMC опять же получаем $h = b\sin(180° - \gamma) = b\sin\gamma$. Стало быть, в любом случае площадь равна $\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

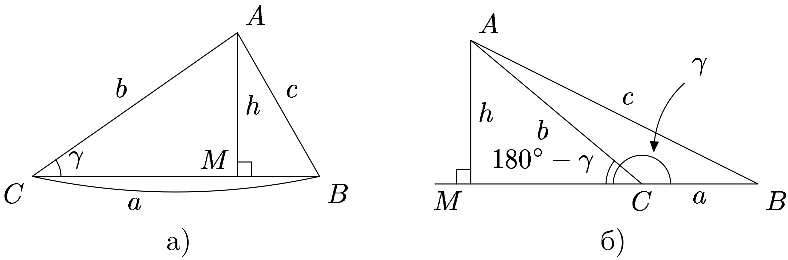


Рис. 15.1. Площадь треугольника.

> Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Мы пропустили случай, когда угол γ прямой. В этом случае $\sin\gamma = 1$, и формула принимает вид $S = \frac{1}{2}ab$, что, очевидно, справедливо.

Задача 15.1. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Задача 15.2. Диагонали четырехугольника делят его на четыре треугольника, площади которых равны S_1, S_2, S_3 и S_4 (рис. 15.2). Докажите, что $S_1S_3 = S_2S_4$.

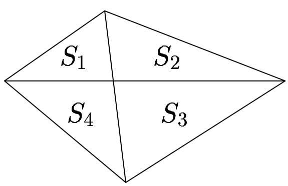


Рис. 15.2.

Итак, мы знаем, как находить площадь треугольника, если известны две его стороны и угол между ними. А что делать, если даны три стороны a, b и c? Надо найти угол между сторонами a и b, благо мы это уже умеем. Точнее, нам нужен не сам угол, а его синус. Его мы найдем так: из теоремы косинусов запишем $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ и воспользуемся формулой $\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma}$ (для произвольных γ, как вы помните, в правой части может стоять минус, но если γ — угол в пределах от $0°$ до $180°$, то $\sin\gamma \geqslant 0$, так что в этом случае минус не нужен).

Подставляя все это в нашу формулу для площади треугольника, получим вот что (S — площадь треугольника):

$$S = \frac{ab}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2}.$$

Это выражение можно преобразовать к более приятному виду. Для этого обозначим буквой p величину $(a+b+c)/2$ (p — половина периметра треугольника, коротко — полупериметр). Тогда после упрощений получим:

> Площадь треугольника со сторонами a, b и c равна $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = (a+b+c)/2$.

Эта формула называется формулой Герона.

Задача 15.3. Проведите преобразования, с помощью которых из нашей формулы для площади получается формула Герона.

Существует полезная формула, связывающая площадь треугольника с радиусом вписанной в него окружности. Именно, пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, r — ее радиус. Расстояние от O до каждой из сторон треугольника равно, очевидно, r (рис. 15.3). Поэтому, если разбить наш треугольник на треугольники AOB, BOC и COA, то высоты, опущенные в них из точки O, все равны r; следовательно, площади этих треугольников равны $cr/2$, $ar/2$ и $br/2$, а площадь всего треугольника ABC равна $cr/2 + ar/2 + br/2 = (a+b+c)/2 \cdot r = pr$, где p — полупериметр. Словами:

> Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

Задача 15.4. Даны стороны a, b, c треугольника. Найдите:

а) радиус вписанной окружности;

б) высоту, опущенную на сторону a.

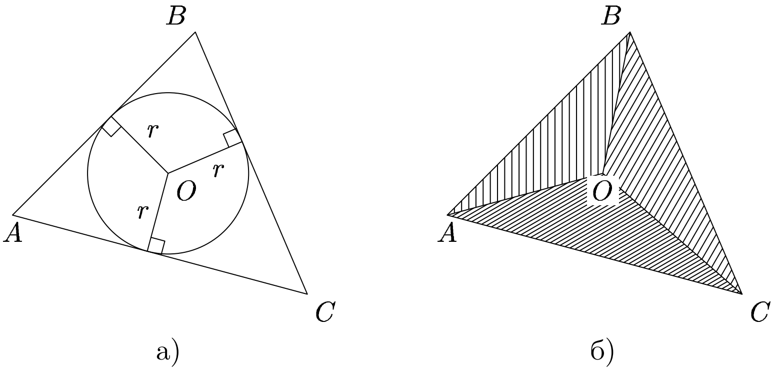


Рис. 15.3.

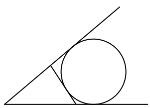


Рис. 15.4.

Задача 15.5. Пусть стороны треугольника равны a, b, c. Найдите радиус окружности, касающейся стороны a и продолжений сторон b и c. (Окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон, называется вневписанной окружностью — рис. 15.4.)

Мы уже умеем находить медианы, площадь, высоты и радиус вписанной окружности треугольника по его трем сторонам (или по двум сторонам и углу между ними). Давайте научимся находить и биссектрису треугольника. Основным средством у нас будет такая теорема:

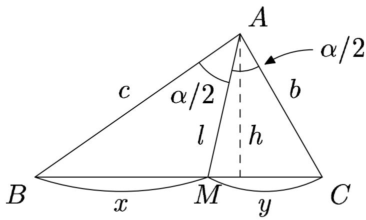


Рис. 15.5. Теорема о биссектрисе.

Теорема. Если AM — биссектриса угла A в треугольнике ABC (рис. 15.5), то $BM/CM = AB/AC$. Словами эту теорему можно сформулировать так: «биссектриса угла в треугольнике делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам».

Проще всего доказать эту теорему, используя площади. Именно, обозначим $AB = c$, $AC = b$, $AM = l$, $\angle BAC = \alpha$, $BM = x$,

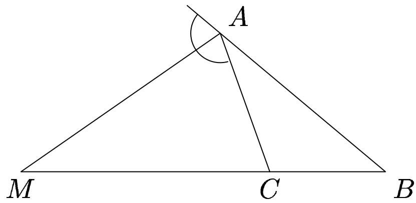


Рис. 15.6.

$CM = y$. Биссектриса AM делит треугольник ABC на два: ABM и ACM. Найдем двумя способами отношение их площадей. Треугольники ABM и ACM имеют общую высоту h, поэтому их площади пропорциональны основаниям:

$$\frac{\text{площадь}\, ABM}{\text{площадь}\, ACM} = \frac{x}{y}.$$

С другой стороны, так как AM — биссектриса, то $\angle BAM = \angle CAM = \alpha/2$. Пользуясь нашей формулой для площади, получаем:

$$\frac{\text{площадь}\, ABM}{\text{площадь}\, ACM} = \frac{c}{b}.$$

Сопоставляя два выражения для отношения площадей треугольников ABM и ACM, получаем, что $x/y = c/b$, или $BM/CM = AB/CB$, что и утверждалось.

Задача 15.6. а) В треугольнике со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ проведена биссектриса AM угла A. Чему равны отрезки BM и MC?

б) В каком отношении точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла A этого же треугольника?

Задача 15.7. Стороны треугольника равны 7, 8 и 12. Найдите длину биссектрисы[1], проведенной к стороне длиной 12.

[1] Замечание для педантов: под длиной биссектрисы в треугольнике понимают длину отрезка биссектрисы от вершины угла до пересечения с противоположной стороной.

Задача 15.8. В треугольнике биссектриса угла между сторонами длиной a и b имеет длину l и делит противоположную сторону на отрезки длиной x и y. Докажите формулу: $l^2 = ab - xy$.

Задача 15.9. В треугольнике ABC биссектриса угла, смежного к углу BAC, пересекает прямую BC в точке M (рис. 15.6). Докажите, что $MB/MC = AB/AC$.

Задача 15.10. Высоты треугольника равны 2, 3 и 4. Найдите углы этого треугольника.

§ 16. Теорема синусов

Мы уже перевели на язык формул первый и третий признаки равенства треугольников (то есть мы можем восстановить все элементы треугольника, если даны две его стороны и угол между ними или же три стороны). А теперь давайте выясним, какие формулы будут соответствовать второму признаку равенства треугольников, который гласит, что треугольник полностью определяется стороной и двумя прилежащими к ней углами. Чтобы получить соответствующие формулы, рассмотрим стороны a и b треугольника ABC, выходящие из вершины C, и опустим из C высоту h на сторону AB (рис. 16.1). Тогда $h = a \sin \beta$ (независимо от того, будет ли чертеж таким, как на рисунке, или же угол β будет тупым или прямым). Точно так же можно записать равенство $h = b \sin \alpha$. Значит, $a \sin \beta = b \sin \alpha$, откуда, деля обе части на $\sin \alpha \sin \beta$, получаем равенство $a/\sin \alpha = b/\sin \beta$: отношение длины стороны к синусу противолежащего угла будет одно и то же для стороны a и стороны b. Однако то же самое можно сделать и для любых двух сторон, так что эти отношения для всех трех сторон равны. Получилось у нас вот что:

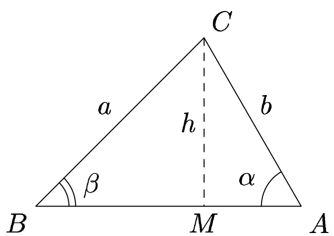


Рис. 16.1.

Теорема синусов (предварительная форма). Если в треугольнике против сторон a, b, c лежат углы α, β, γ соответственно, то

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Задача 16.1. К стороне a треугольника прилегают углы β и γ.

а) Найдите остальные стороны и углы этого треугольника.

б) Найдите площадь этого треугольника.

В теореме синусов в том виде, в каком мы ее получили, присутствует недоговоренность: мы узнали, что отношения сторон к синусам противолежащих им углов равны между собой, но чему же именно равны эти отношения? Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним кое-что из геометрии.

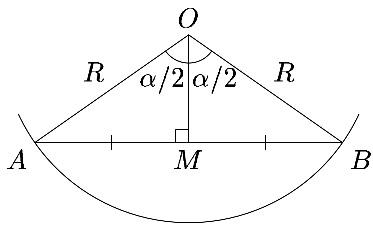


Рис. 16.2.

Для начала вспомним, как связаны угловая величина дуги и длина стягиваемой ей хорды. Из равнобедренного треугольника ABO на рис. 16.2 видно, что если дуга AB имеет угловую величину α, а радиус окружности равен R, то $AB = 2 \cdot AM = 2R\sin(\alpha/2)$ (на рисунке дуга занимает меньшую из двух половин окружности, но величина дуги, дополняющей дугу АВ до полной окружности, равна $\beta = 360^\circ - \alpha$ и $\sin(\beta/2) = \sin(180^\circ - \alpha/2) = \sin(\alpha/2)$, так что формулой можно пользоваться для любых дуг).

Второй факт из геометрии, который нам понадобится, — это теорема о вписанном угле. Пусть на окружности даны дуга AB и точка M, не лежащая на ней (рис. 16.3а), тогда угол AMB называется вписанным углом[1], опирающимся на дугу AB. Теорема о

[1]Если дуга AB больше половины окружности, угол AMB становится больше 180°, что нынешние учебники запрещают. Мы опускаем необходимые уточнения.

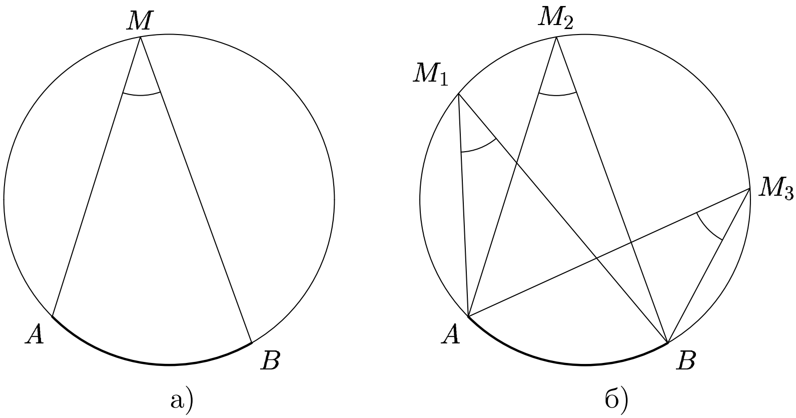


Рис. 16.3. Вписанные углы

вписанном угле гласит, что величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Из этой теоремы следует, в частности, что величина угла AMB, где точки A, M, B лежат на одной окружности, полностью определяется дугой AB и не зависит от положения точки M вне дуги AB: на рис. 16.3б углы AM_1B, AM_2B, AM_3B, и т. д. равны.

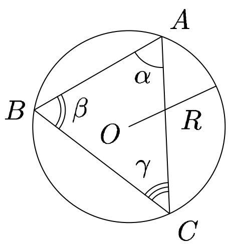


Рис. 16.4.

Теперь, когда в нашем распоряжении есть теорема о вписанном угле, мы можем наконец уточнить теорему синусов. Именно, рассмотрим треугольник ABC с углами $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ и сторонами $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, и опишем около него окружность. Радиус окружности обозначим через R (рис. 16.4). В этой окружности длина хорды BC равна, как мы видели, $2R\sin(\overset{\smile}{BC}/2)$ (имеется в виду та из дуг BC, что не содержит точки A). С другой стороны, по теореме о вписанном угле $\overset{\smile}{BC}/2 = \alpha$, хорда же BC — не что иное, как сторона a треугольника ABC. Подставляя эти равенства в выражение для BC, получаем, что $a = 2R\sin\alpha$, или $a/\sin\alpha = 2R$. Проделывая то же для двух других сторон, получаем:

Если в треугольнике против сторон a, b, c лежат углы α, β, γ соответственно, то

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

Задача 16.2. Треугольник с углами α, β, γ вписан в окружность радиуса R. Найдите площадь треугольника.

Задача 16.3. а) Докажите, что площадь треугольника со сторонами a, b и c, вписанного в окружность радиуса R, равна $abc/4R$.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b и c.

Задача 16.4. Сторона квадрата $ABCD$ равна a. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину A, центр квадрата и середину стороны BC.

Задача 16.5. В окружности проведены три хорды, каждая из которых пересекается с двумя другими. Каждая из этих хорд делится точками пересечения на три отрезка равной длины a. Найдите радиус окружности.

Задача 16.6. Диагонали разбивают выпуклый четырехугольник на четыре треугольника. Радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, одинаковы и равны R. Найдите стороны четырехугольника.

Задача 16.7. В круг радиуса R вписана трапеция, основания которой видны из центра под углами α и β. Найдите площадь трапеции.

Задача 16.8. Диагонали трапеции, вписанной в круг радиуса R, образуют с ее боковыми сторонами углы α и 2α. Найдите площадь трапеции.

Задача 16.9. Вокруг треугольника ABC со стороной $BC = a$ и углами $\angle ABC = \beta$ и $\angle ACB = \gamma$, описана окружность. Биссектриса угла A пересекает окружность в точке K. Найдите длину хорды AK.

Задача 16.10. Внутри угла величины α лежит точка, находящаяся на расстояниях m и n от сторон угла. Найдите ее расстояние от вершины угла.

Глава 4

Формулы сложения и их следствия

§ 17. Векторы

Повторить: *Свойства параллелограмма. Прямоугольные координаты на плоскости (по любому пособию).*

17.1. Направленные отрезки и векторы

Чтобы как следует понять важный раздел тригонометрии, которому посвящена эта глава, нам придется познакомиться с векторами на плоскости.

Давайте рассматривать отрезки, у которых один из концов назван началом отрезка (а другой так и остался концом). Такие отрезки называются направленными отрезками. На чертежах их принято изображать в виде стрелки, идущей от начала отрезка к его концу. Направленный отрезок с началом A и концом B обозначается $\overline{AB}$.

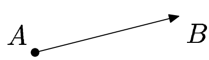


Рис. 17.1.

Главное отличие направленных отрезков от обычных — это то, в каких случаях два направленных отрезка считаются равными.

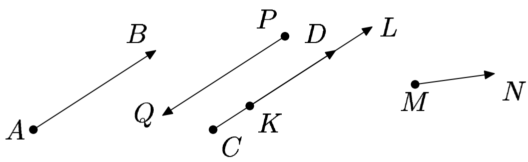


Рис. 17.2. $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{KL}$.

Если обычные отрезки равны в том случае, когда равны их длины, то для направленных отрезков мы будем учитывать еще и направление. Именно:

Определение. Два направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ считаются равными, если:

1) Равны их длины, т. е. $AB = CD$;

2) Прямые AB и CD параллельны (или совпадают), и при этом отрезки AB и CD направлены в одну сторону.

Например, на рис. 17.2 длины направленных отрезков $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KL}$, $\overline{PQ}$ и $\overline{MN}$ равны друг другу; тем не менее верны только равенства $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{KL}$; направленные отрезки $\overline{PQ}$ и $\overline{MN}$ не равны друг другу и этим трем ($\overline{PQ}$ хоть и лежит на прямой, параллельной AB, но направлен в сторону, противоположную $\overline{AB}$).

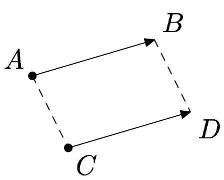


Рис. 17.3.

Если два направленных отрезка не лежат на одной прямой, то определение их равенства можно сформулировать и короче: $\overline{AB} = \overline{CD}$ тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABDC$ является параллелограммом (рис 17.3). (Вспомним, что четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда две его стороны равны и параллельны.)

Обратите внимание, что вершины параллелограмма идут в порядке $ABDC$: именно это обеспечивает выполнение того условия, что направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ направлены в одну сторону, а не в противоположные.

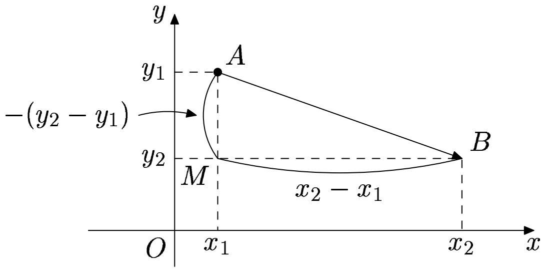


Рис. 17.4. Координаты направленного отрезка.

Предположим теперь, что на плоскости задана система координат. Тогда можно определить, что такое *координаты* направленного отрезка.

По определению, координаты направленного отрезка получаются, если из координат его конца вычесть координаты начала. Точнее говоря:

> Если точка A имеет координаты $(x_1; y_1)$, а точка B имеет координаты $(x_2; y_2)$, то координатами направленного отрезка $\overline{AB}$ называется пара чисел $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

В частности, если начало направленного отрезка $\overline{OA}$ совпадает с началом координат, то координаты $\overline{OA}$ — не что иное, как координаты точки A.

Геометрически можно представить координаты направленного отрезка так: проведем через его концы прямые, параллельные осям координат (рис. 17.4). Вместе с самим отрезком эти прямые ограничивают прямоугольный треугольник (AMB на рисунке)[1]. Координаты $\overline{AB}$ — это длины катетов этого треугольника, взятые с подходящим знаком («плюс», если при движении по катетам треугольника из начала в конец отрезка мы движемся в том же направлении, куда указывает соответствующая ось координат, и «минус» в противном случае).

[1]Если отрезок AB параллелен одной из осей, этот «треугольник» будет отрезком.

Можно еще сказать, что координаты направленного отрезка $\overline{AB}$ — это числа, указывающие, на какие расстояния надо сдвинуться вдоль осей координат, чтобы попасть из A в B.

Главное свойство координат направленного отрезка таково:

> Направленные отрезки равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

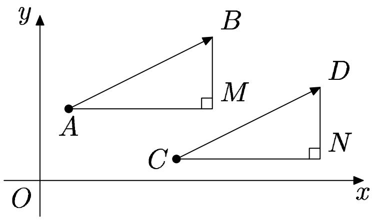


Рис. 17.5.

В самом деле, пусть $\overline{AB} = \overline{CD}$. Достраивая эти отрезки до прямоугольных треугольников ABM и CDN (рис. 17.5), получаем, что в этих треугольниках $AB = CD$ и $\angle BAM = \angle DCN$: первое равенство — это часть определения направленных отрезков, второе вытекает из того, что $AB \parallel CD$ и $AM \parallel CN$. Значит, прямоугольные треугольники ABM и CDN равны, стало быть, равны и их катеты: $AM = CN$, $BM = DN$. А катеты этих треугольников — это и есть координаты $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Напротив, пусть нам известно, что у направленных отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны координаты. Тогда, построив те же треугольники ABM и CDN, получаем, что они равны (по двум катетам), откуда $\angle BAM = \angle DCN$; так как $AM \parallel CN$, из этого следует, что $AB \parallel CD$.

С формальной точки зрения наши рассуждения неполны: например, из равенства направленных отрезков мы вывели лишь равенство абсолютных величин их координат, ни словом не обмолвившись об их знаках. Это — неизбежное следствие того, что в определении равенства направленных отрезков мы пользовались наглядно очевидным, но не определенным формально понятием «отрезки направлены в одну сторону». Давайте сформулируем определение равенства направленных отрезков более строго.

Для случая, когда отрезки AB и CD не лежат на одной прямой, равенство $\overline{AB} = \overline{CD}$ равносильно, как мы знаем, тому, что $ABDC$ — параллелограмм. Однако четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам, поэтому определение можно сформулировать еще и так:

$\overline{AB} = \overline{CD}$ если и только если середины отрезков AD и BC совпадают. В таком виде это определение имеет смысл и в том случае, когда точки A, B, C и D лежат на одной прямой; легко убедиться, что и в этом случае оно равносильно нашему исходному определению. Такое определение равенства направленных отрезков уже безупречно с формальной точки зрения.

С помощью нового определения легко дать аккуратное доказательство того факта, что равенство направленных отрезков равносильно равенству их координат. В самом деле, пусть точки A, B, C, D имеют координаты соответственно $(a_1; a_2)$, $(b_1; b_2)$, $(c_1; c_2)$, $(d_1; d_2)$. Так как координаты середины отрезка являются полусуммами координат его концов, равенство $\overline{AB} = \overline{CD}$ (то есть, по нашему определению, совпадение середин отрезков AD и BC) равносильно равенствам

$$\frac{a_1 + d_1}{2} = \frac{b_1 + c_1}{2};$$
$$\frac{a_2 + d_2}{2} = \frac{b_2 + c_2}{2}.$$

Эти равенства, в свою очередь, равносильны равенствам $b_1 - a_1 = d_1 - c_1$, $b_2 - a_2 = d_2 - c_2$, то есть равенству координат $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Задача 17.1. Точки M, N и P таковы, что координаты направленного отрезка $\overline{MN}$ равны $(10; -14)$, а координаты направленного отрезка $\overline{NP}$ равны $(-6; 26)$. Найдите координаты направленного отрезка $\overline{MP}$.

Задача 17.2. Докажите, что длина направленного отрезка с координатами $(x; y)$ равна $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Указание. Воспользуйтесь формулой, выражающей расстояние между точками через их координаты, или теоремой Пифагора.

Задача 17.3. Рассмотрим на плоскости наряду с той системой координат OXY, которая у нас уже есть (назовем ее «системой координат номер 1»), еще две следующие системы координат (рис. 17.6):

Система координат номер 2. Ее начало координат O' имеет в системе номер 1 координаты $(3; 2)$, а оси $O'X'$ и $O'Y'$ параллельны осям OX и OY и направлены в ту же сторону.

Система координат номер 3. Ее начало координат совпадает с O, а оси OX'' и OY'' повернуты на $45°$ в положительном направлении относительно осей OX и OY.

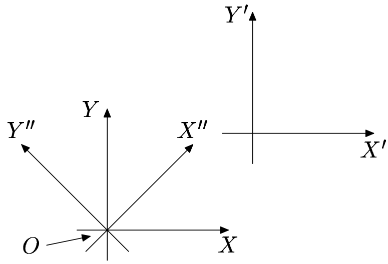


Рис. 17.6.

Пусть направленный отрезок имеет в системе координат номер 1 координаты $(1; 1)$. Каковы будут его координаты: а) в системе номер 2? б) в системе номер 3?

Указание. Так как равные направленные отрезки имеют равные координаты, удобно рассмотреть равный данному направленный отрезок, имеющий своим началом точку O.

В тех случаях, когда все равно, о котором из равных направленных отрезков идет речь (в трех последних задачах так и было), направленные отрезки часто называют векторами.

Например, на рис. 17.2 изображено 5 различных направленных отрезков, но всего 3 различных вектора. Так как с точностью до равенства направленный отрезок полностью определяется координатами, для задания вектора не обязательно рисовать направленный отрезок: если есть система координат, то достаточно указать координаты, и вектор будет полностью определен.

В большинстве интересных задач, в которых встречаются направленные отрезки, равные направленные отрезки взаимозаменяемы, так что обычно предпочитают говорить именно о векторах, а не о направленных отрезках.

Наряду с векторами, соответствующими настоящим отрезкам, рассматривают еще «нулевой вектор», имеющий координаты $(0; 0)$. Можно сказать, что нулевой вектор соответствует любому из «отрезков» $\overline{AA}$, у которого начало и конец совпадают. Как мы вскоре увидим, нулевой вектор играет роль, аналогичную роли нуля среди чисел.

Обозначать векторы можно так же, как и направленные отрезки; кроме того, иногда их обозначают латинскими буквами с черточкой сверху, например $\overline{a}$. Можно также в качестве обозначения вектора записать его координаты: если вектор $\overline{a}$ имеет координаты $(x; y)$, пишем $\overline{a} = (x; y)$. Нулевой вектор обозначается $\overline{0}$ или $(0; 0)$. Длина вектора $\overline{a}$ обозначается $|\overline{a}|$.

И еще одна особенность терминологии: если про направленные отрезки говорят «отрезки параллельны», то векторы принято называть не «параллельными», а «коллинеарными».

Задача 17.4. Рассмотрим всевозможные векторы вида $\overline{AB}$, где A и B — две вершины данного правильного шестиугольника. Сколько среди этих векторов различных?

Если нам даны вектор $\overline{a}$ и точка M, то однозначно определена такая точка N, что $\overline{a} = \overline{MN}$ (рис. 17.7). В этом случае говорят, что $\overline{MN}$ получен откладыванием вектора $\overline{a}$ от точки M. Говорят также, что точка N получена из точки M переносом на вектор $\overline{a}$.

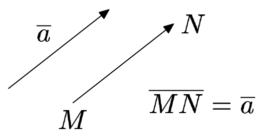


Рис. 17.7.

Задача 17.5. Каждую точку квадрата с вершинами $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$ подвергли переносу на вектор $(-1; 2)$. Изобразите фигуру, которая при этом получилась.

17.2. Сложение векторов

С векторами можно производить различные действия, немного похожие на арифметические действия с числами. Сначала мы научимся векторы складывать.

Пусть нам даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Чтобы их сложить, надо сделать следующее. Возьмем произвольную точку M и отложим от нее вектор $\overline{MN} = \overline{a}$; от конца этого вектора отложим вектор $\overline{NP} = \overline{b}$. Тогда суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{MP}$. Сумма векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается $\overline{a} + \overline{b}$ — так же, как сумма чисел.

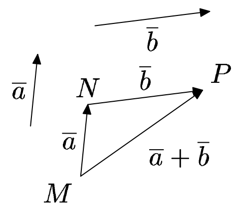


Рис. 17.8. Сложение векторов.

Вкратце наше определение сложения векторов можно записать так:

$$\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MP}.$$

Строго говоря, надо еще проверить, что $\overline{a}+\overline{b}$ зависит только от самих векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Предположим, мы начали построение не с точки M, а с другой точки M', построив N' и P'; где гарантия, что полученный в результате вектор $\overline{M'P'}$ будет равен вектору $\overline{MP}$? Интуитивно ясно, что так оно и будет; вскоре мы увидим, как это доказать формально.

Координаты суммы векторов очень просто выражаются через координаты слагаемых. Именно, по определению координат направленного отрезка (вектора) мы можем записать:

$$(\text{координаты } \overline{a}) = (\text{координаты точки } N) - (\text{координаты точки } M);$$
$$(\text{координаты } \overline{b}) = (\text{координаты точки } P) - (\text{координаты точки } N).$$

Сложим эти два равенства. При этом координаты точки N сократятся, и получится вот что:

$$(\text{координаты } \overline{a}) + (\text{координаты } \overline{b}) = \\ = (\text{координаты } P) - (\text{координаты } M).$$

В правой части стоит не что иное, как координаты вектора $\overline{MP}$, то есть, по нашему определению, $\overline{a}+\overline{b}$. Стало быть, координаты вектора $\overline{a}+\overline{b}$ являются суммами координат векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Запишем это же формулой:

Если $\overline{a_1} = (a_1; a_2)$, $\overline{b} = (b_1; b_2)$, то $\overline{a}+\overline{b} = (a_1+b_1; a_2+b_2)$.

$$(a_1; a_2) + (b_1; b_2) = (a_1+b_1; a_2+b_2).$$

Эта формула показывает, в частности, что координаты вектора $\overline{a}+\overline{b}$ зависят только от координат $\overline{a}$ и $\overline{b}$, так что сумма векторов действительно не зависит от выбора точки M, использованной на рис. 17.8 для ее построения.

Итак, операция сложения векторов вполне соответствует своему названию: при сложении векторов координаты складываются. Из этого следует также, что сложение векторов подчиняется тем же законам, что и сложение чисел:

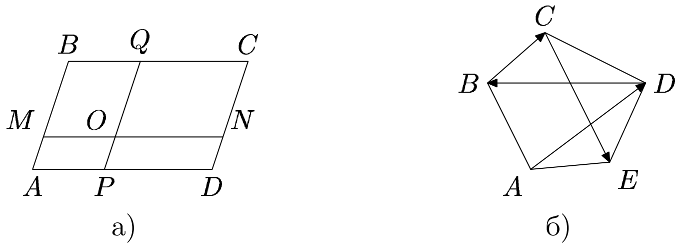


Рис. 17.9.

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a} \text{ (переместительность, или коммутативность);}$$
$$\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} \text{ (сочетательность, или ассоциативность);}$$
$$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a} \text{ (свойство нуля).}$$

Задача 17.6. Через точку O, лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены отрезки MN и PQ, параллельные его сторонам (рис. 17.9а). Если от точки A отложить вектор $\overline{a} = \overline{DN} + \overline{AP} + \overline{MB} + \overline{ON}$, где окажется конец этого вектора?

Задача 17.7. $ABCDE$ — пятиугольник (рис. 17.9б). Найдите сумму векторов $\overline{AD} + \overline{CE} + \overline{BC} + \overline{DB}$.

Задача 17.8. На плоскости задана точка O. Изобразите множество таких точек C, что $\overline{OC} = \overline{a} + \overline{b}$, где $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — всевозможные векторы, для которых: а) $|\overline{a}| \leqslant 1$, $|\overline{b}| \leqslant 2$; б) $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 2$.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны (непараллельны), то существует еще один способ построить их сумму. Именно, если отложить $\overline{a}$ и $\overline{b}$ от точки O так, что $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$, то $\overline{a} + \overline{b} = \overline{OC}$, где C — такая точка, что $OACB$ — параллелограмм (рис. 17.10). В самом деле, $\overline{OB} = \overline{AC}$, так что $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{a} + \overline{b}$, что и утверждалось. В старых учебниках это построение называлось «сложение векторов по правилу параллелограмма».

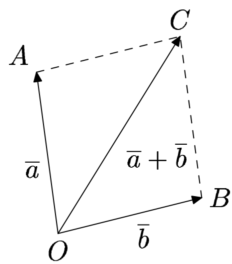


Рис. 17.10.

17.3. Вычитание и умножение на число

Раз уж мы умеем складывать векторы, давайте научимся их вычитать. Для начала найдем для вектора $\overline{a} = \overline{MN}$ противоположный ему, то есть такой вектор $-\overline{a}$, что $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$. Ясно, что таковым будет вектор $\overline{NM}$: ведь $\overline{MN} + \overline{NM} = \overline{0}$. Таким образом, чтобы получить вектор, противоположный данному, надо просто поменять местами его конец и начало. Координаты $\overline{a} = \overline{MN}$ получаются, если из координат N вычесть координаты M, а координаты $-\overline{a} = \overline{NM}$ — если из координат M вычесть координаты N. Стало быть, координаты $-\overline{a}$ получаются из координат $\overline{a}$ переменой знака.

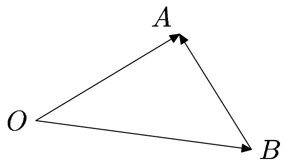


Рис. 17.11. $\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$.

Что же до разности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то это, конечно, такой вектор $\overline{c}$, что $\overline{c} + \overline{b} = \overline{a}$ (вычитание — действие, обратное сложению). Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ будет, очевидно, вектор $\overline{a} + (-\overline{b}) = \overline{a} - \overline{b}$; ясно, что координаты разности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равны разности их координат. Если векторы $\overline{a} = \overline{OA}$ и $\overline{b} = \overline{OB}$ отложены от одной точки O, то $\overline{a} - \overline{b} = \overline{BA}$ (так как $\overline{OB} + \overline{BA} = \overline{OA}$). Подытожим:

> Если $\overline{a} = \overline{MN}$, то $-\overline{a} = \overline{NM}$. $\overline{a} + (-\overline{a}) = 0$.
> Если $\overline{a} = (a_1; a_2)$, то $-\overline{a} = (-a_1; -a_2)$.
> $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$; $(\overline{a} - \overline{b}) + \overline{b} = \overline{a}$.
> Если $\overline{a} = (a_1; a_2)$, $\overline{b} = (b_1; b_2)$, то $\overline{a} - \overline{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Разобравшись со сложением и вычитанием, перейдем к умножению. Из начальной школы мы помним, что перемножить натуральные числа a и b — это найти сумму b слагаемых, каждое из которых равно a. Например, $5a = a + a + a + a + a$.

Рассмотрим теперь не число a, но вектор $\overline{a}$. Для него также будет $5\overline{a} = \overline{a} + \overline{a} + \overline{a} + \overline{a} + \overline{a}$ (рис. 17.12).

Мы видим, что вектор $\overline{PQ} = 5\overline{a}$ коллинеарен (параллелен) вектору $\overline{a}$, что его длина в 5 раз больше длины $\overline{a}$, и направлен он в ту же сторону, что и $\overline{a}$. Ясно также, что в качестве $-5\overline{a}$ разумно взять вектор, противоположный вектору $5\overline{a}$.

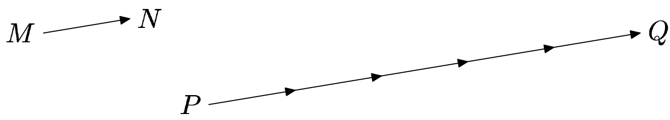


Рис. 17.12. $\overline{MN} = \overline{a}$; $\overline{PQ} = 5\overline{a}$.

Итак, мы описали, что значит умножить вектор на число 5 или -5. Число 5 можно заменить на любое другое. Тогда получится такое

Определение. Произведением вектора $\overline{a} \neq \overline{0}$ на число $k \neq 0$ называется такой вектор $\overline{b}$, что:

1) $|\overline{b}| = |k| \cdot |\overline{a}|$;

2) $\overline{b}$ коллинеарен $\overline{a}$;

3) $\overline{b}$ направлен в ту же сторону, что и $\overline{a}$, если $k > 0$, и в противоположную сторону, если $k < 0$.

Произведение вектора $\overline{a}$ на число k обозначается $k\overline{a}$. По определению полагаем $k\overline{a} = \overline{0}$, если $k = 0$ или $\overline{a} = \overline{0}$.

Вектор $k\overline{a}$ этим определением задается однозначно: условие 1 определяет его длину, а условия 2 и 3 — его направление.

Чтобы определить формально, что такое «коллинеарные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ направлены в одну сторону», отложим $\overline{a} = \overline{OA}$ и $\overline{b} = \overline{OB}$ от одной точки O. Тогда точки O, A и B окажутся на одной прямой, и мы скажем, что $\overline{a}$ и $\overline{b}$ направлены в противоположные стороны, если точка O лежит между A и B, и в одну сторону — в противном случае.

Посмотрим, как меняются координаты вектора при умножении его на число. Пусть мы умножаем вектор $\overline{a} = \overline{AB}$ на число k, получая в результате $k\overline{a} = \overline{AB}$ (рис. 17.13а для случая $k > 0$ и рис. 17.13б для случая $k < 0$). Проведем через концы отрезков AB и AB_1 прямые, параллельные осям координат. Получающиеся прямоугольные треугольники ABM и AB_1M_1 будут, очевидно, подобны. Коэффициент подобия равен, очевидно, $AB_1/AB = |k|$; поэтому катеты треугольника AB_1M получаются из катетов треугольника ABM умножением на $|k|$, и, стало быть, координаты

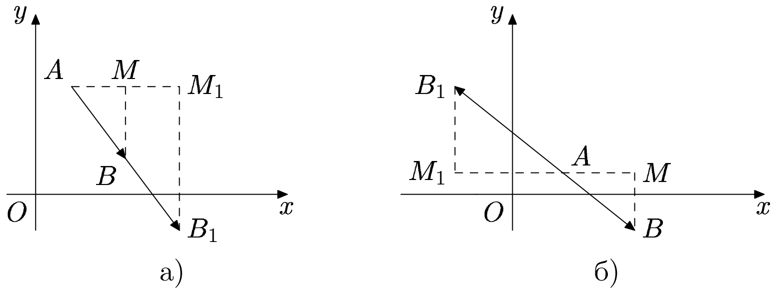


Рис. 17.13.

вектора $k\overline{a}$ получаются из координат вектора $\overline{a}$ умножением на k (знаки совпадают, если $k > 0$, и противоположны, если $k < 0$). Запишем это формулой:

> Если $\overline{a} = (a_1; a_2)$, то $k\overline{a} = (ka_1; ka_2)$.
> Или: $k(a_1; a_2) = (ka_1; ka_2)$.

Из этой формулы следует, что умножение вектора на число подчиняется законам, аналогичным законам умножения чисел:

$$k \cdot (l\overline{a}) = (k \cdot l)\overline{a} \text{ (ассоциативность);}$$

$$\left.\begin{aligned} k(\overline{a} + \overline{b}) &= k\overline{a} + k\overline{b} \\ (k + l)\overline{a} &= k\overline{a} + l\overline{a} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{(распределительность, или} \\ \text{дистрибутивность).}\end{array}$$

Задача 17.9. Докажите эти законы для векторов.

Обратите внимание, что у нас два различных распределительных закона. Так получилось потому, что сомножители неравноправны: один из них — число, другой — вектор. Наверное, было бы более естественно, если бы мы определили умножение вектора на вектор так, чтобы произведение тоже было вектором. Однако же для векторов на плоскости вообще невозможно геометрически определить такое умножение (если мы хотим, чтобы выполнялся распределительный закон). В следующем параграфе мы определим умножение вектора на вектор, но результат при этом будет не вектором, а числом.

Действия над векторами позволяют дать еще одно объяснение того, что такое координаты вектора. Именно: пусть на плоскости задана система координат. Рассмотрим два вектора $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$, имеющие длину 1, параллельные осям абсцисс и ординат и направленные в сторону положительного направления этих осей. Эти векторы называются единичными координатными векторами. Очевидно, $\overline{e}_1 = (1;0)$, $\overline{e}_2 = (0;1)$. Рассмотрим теперь произвольный вектор $\overline{a} = (a_1;a_2)$ и запишем такие равенства: $\overline{a} = (a_1;a_2) = (a_1;0) + (0;a_2) = a_1 \cdot (1;0) + a_2 \cdot (0;1) = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2$. Как видите, координаты вектора $\overline{a}$ — это коэффициенты, с помощью которых он выражается через единичные координатные векторы.

> Если $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ — единичные координатные векторы, то вектор $\overline{a}$ имеет координаты $(a_1;a_2)$ тогда и только тогда, когда $\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2$.

Задача 17.10. Даны векторы $\overline{a} = (2;-1)$, $\overline{b} = (1;-6)$, $\overline{c} = (2;24)$. Найдите такие числа x и y, что $\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}$.

17.4. О векторах в физике

Многие физические величины представляют собой векторы. В самом деле, такие величины, как скорость, ускорение, сила, напряженность электрического поля, характеризуются не только величиной, но и направлением (если нам известно, из какого порта и с какой скоростью вышел корабль, то мы не можем сказать, где он будет через час, не зная направления его движения). Поэтому, например, скорость изображают в виде вектора, длина которого соответствует величине скорости, а направление указывает на направление движения. При этом формулировка многих физических законов использует те самые операции над векторами, которые мы только что определили. Простейший пример векторной величины в физике — это перемещение. Если тело, размерами и формой которого мы пренебрегаем, передвинулось из точки A в точку B, то говорят, что перемещение нашего тела равно вектору $\overline{AB}$ (если не пренебрегать размерами тела, то вектора для описания передвижения тела будет недостаточно: по дороге тело может и повернуться). Если тело сначала переместилось на вектор $\overline{S}_1$, а затем на вектор $\overline{S}_2$, то в результате его перемещение

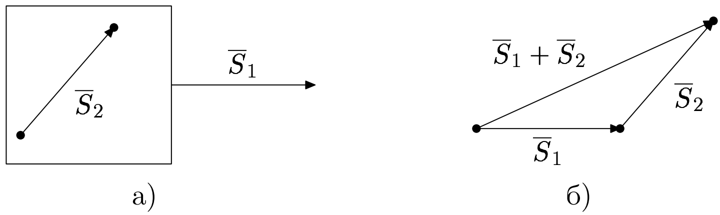


Рис. 17.14. Перемещение.

будет равно $\overline{S}_1 + \overline{S}_2$ (рис. 17.14а). Точно так же складываются перемещения, если тело совершило перемещение $\overline{S}$ относительно платформы, которая за это время сама совершила относительно нас перемещение $\overline{S}$: перемещение тела относительно нас будет равно $\overline{S}_1 + \overline{S}_2$ (рис. 17.14б).

Так как скорость — это перемещение за единицу времени, то скорость тоже является векторной величиной. Свойство перемещений, изображенное на рис. 17.14б, для скоростей будет выглядеть так: если платформа движется относительно нас со скоростью $\overline{u}$, а тело движется относительно платформы со скоростью $\overline{v}$, то относительно нас тело движется со скоростью $\overline{u} + \overline{v}$.

Задача 17.11. а) Скорость течения реки равна 5 /, ширина реки равна 80 , гребец в лодке развивает скорость 3 / относительно воды. Гребец переправляется через реку, направив лодку перпендикулярно берегу. На какое расстояние снесет лодку?

б*) Как надо направить лодку, чтобы ее снесло течением как можно меньше? На какое расстояние ее при этом снесет?

Задача 17.12. Два корабля, находящиеся друг от друга на расстоянии 30 миль, движутся со скоростью 10 узлов[1] (каждый) курсами, указанными на рис. 17.15. На какое наименьшее расстояние они сблизятся? Через какое время после момента, показанного на рисунке, это произойдет?

[1]Узел — единица скорости, равная одной морской миле в час.

Указание. Перейдите в систему отсчета, связанную с одним из кораблей, и воспользуйтесь тем, что если одно тело движется со скоростью $\overline{v}$, другое — со скоростью $\overline{w}$, то второе тело движется относительно первого со скоростью $\overline{w} - \overline{v}$.

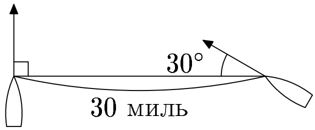


Рис. 17.15.

§ 18. Скалярное произведение

Пусть тело, на которое действует сила $\overline{F}$, совершило перемещение $\overline{s}$. При этом, как говорят физики, сила совершает работу. Если сила параллельна перемещению, работа равна произведению силы и перемещения, взятому со знаком «+», если сила действует в направлении перемещения, и со знаком «−» в противном случае. В общем случае, когда $\overline{F}$ и $\overline{s}$ образуют угол φ, работа равна $|\overline{F}|\cdot|\overline{s}|\cos\varphi$. Это объясняется тем, что силу $\overline{F}$ можно представить в виде суммы сил $\overline{F}_{\|}$ и $\overline{F}_{\perp}$, параллельной и перпендикулярной направлению перемещения, причем работа равна работе силы $\overline{F}_{\|}$ (сила, перпендикулярная пути, работы не совершает). Великий английский физик и математик прошлого века У. Гамильтон понял, что действие над векторами, используемое в определении работы, заслуживает названия умножения, так как для него, как и для умножения чисел, выполняется распределительный закон. Давайте и мы изучим эту операцию.

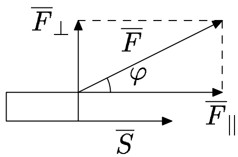


Рис. 18.1. Работа.

Определение. Скалярным произведением векторов $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$ называется число $|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то полагают $\varphi = 0$, если векторы направлены в одну сторону, и $\varphi = \pi$, если векторы направлены в противоположные стороны). Если один из векторов равен нулю, то скалярное произведение полагают равным нулю. Скалярное произведение

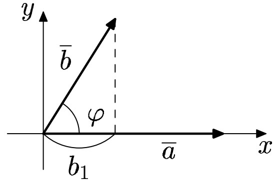


Рис. 18.2.

векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается $\overline{a}\cdot\overline{b}$.

Основное свойство скалярного произведения — это распределительный закон $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$.

Чтобы его доказать, установим прежде всего следующий факт: если $\overline{a} = (a_1;0)$, где $a_1 > 0$, $\overline{b} = (b_1;b_2)$, то $\overline{a}\cdot\overline{b} = a_1\cdot b_1$. В самом деле, в этом случае $|\overline{a}| = a_1$, $|\overline{b}|\cdot\cos\varphi = b_1$ (рис. 18.2), так что требуемое равенство непосредственно следует из определения скалярного произведения; чтобы теперь доказать распределительный закон для векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, выберем систему координат так, чтобы вектор $\overline{a}$ был параллелен оси абсцисс и направлен в положительную сторону. В этой системе координат имеем $\overline{a} = (a_1;0)$, где $a_1 > 0$; если в этой же системе $\overline{b} = (b_1;b_2), \overline{c} = (c_1;c_2)$, то из доказанного нами факта вытекает:

$$\begin{aligned}\overline{b}+\overline{c} &= (b_1+b_2;c_1+c_2),\\ \overline{a}\cdot\overline{b} &= a_1\cdot b_1,\\ \overline{a}\cdot\overline{c} &= a_1\cdot c_1,\\ \overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c}) &= a_1\cdot(b_1+c_1),\end{aligned}$$

так что распределительный закон для векторов вытекает из обычного распределительного закона $a_1(b_1+c_1) = a_1\cdot b_1 + a_1\cdot c_1$.

Еще одно важное свойство скалярного умножения — это аналог сочетательного закона: если k — число, $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — векторы, то $(k\overline{a})\cdot\overline{b} = k(\overline{a}\cdot\overline{b})$ (в самом деле, если φ — угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то обе части равенства равны $k\cdot|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$). Наконец, уж совсем очевидно, что для скалярного умножения выполняется переместительный закон: $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$. Подытожим:

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}\\ (\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}\\ \overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c}) = \overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}\\ (k\overline{a})\cdot\overline{b} = k(\overline{a}\cdot\overline{b})\end{gathered}}$$

Выписанные свойства показывают, что при проведении выкладок с участием скалярного произведения, как и при действиях с числами, можно раскрывать скобки, приводить подобные члены и так далее. Нужно только не забывать, что скалярное произведение векторов — не вектор, а число.

Задача 18.1. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — ненулевые векторы. В каких случаях $\overline{a}\cdot\overline{b}$ положительно, в каких — отрицательно, а в каких равно нулю?

Попробуем скалярно умножить вектор $\overline{a}$ на самого себя. Так как он образует сам с собой нулевой угол и $\cos 0 = 1$, получаем, что скалярное произведение вектора на себя равно квадрату его длины: $\overline{a}\cdot\overline{a} = |\overline{a}|^2$.

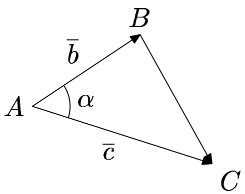


Рис. 18.3.

В качестве примера применения свойств скалярного произведения дадим новое доказательство теоремы косинусов. Для этого рассмотрим треугольник ABC с углом $\angle BAC = \alpha$ и попробуем выразить сторону BC через AB и AC. Так как скалярное произведение вектора на себя равно квадрату его длины, то $BC^2 = \overline{BC}\cdot\overline{BC}$; с другой стороны, если обозначить векторы $\overline{AB} = \overline{b}$ и $\overline{AC} = \overline{c}$, то $\overline{BC} = \overline{c} - \overline{b}$. Стало быть,

$$\begin{aligned} BC^2 &= \overline{BC}\cdot\overline{BC} = (\overline{c}-\overline{b})(\overline{c}-\overline{b}) = \\ &= \overline{c}\cdot\overline{c} - \overline{b}\cdot\overline{c} - \overline{c}\cdot\overline{b} + (-\overline{b})\cdot(-\overline{b}) = \\ &= \overline{c}\cdot\overline{c} - 2\overline{b}\cdot\overline{c} + \overline{b}\cdot\overline{b} = \\ &= AC^2 - 2\overline{b}\cdot\overline{c} + AB^2 = AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha + AB^2, \end{aligned}$$

что и утверждает теорема косинусов.

Задача 18.2. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — векторы. Докажите формулу:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = (|\overline{a}+\overline{b}|^2 - |\overline{a}|^2 - |\overline{b}|^2).$$

Указание. Можно вывести эту формулу из теоремы косинусов и определения скалярного произведения, можно и раскрыть скобки в равенстве $|\overline{a}+\overline{b}|^2 = (\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}+\overline{b})$.

Задача 18.3. Пусть ABC — равносторонний треугольник и O — его центр. Докажите, что для любой точки M верно равенство

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 3\cdot MO^2.$$

Указание. Положите $\overline{MO} = \overline{x}$, $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$, $\overline{OC} = \overline{c}$ и воспользуйтесь тем, что $MA^2 = \overline{MA}\cdot\overline{MA}$, $MB^2 = \overline{MB}\cdot\overline{MB}$, $MC^2 = \overline{MC}\cdot\overline{MC}$.

Давайте теперь выясним, как вычислять скалярное произведение векторов, если даны их координаты. Пусть $\overline{a} = (a_1; a_2)$, $\overline{b} = (b_1; b_2)$. Рассмотрим на плоскости единичные координатные векторы $\overline{e}_1 = (1; 0)$, $\overline{e}_2 = (0; 1)$, о которых шла речь в предыдущем параграфе. Тогда

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2) \cdot (b_1\overline{e}_1 + b_2\overline{e}_2) =$$
$$= a_1a_2(\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2) + a_1b_2(\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2) + a_2b_1(\overline{e}_2 \cdot \overline{e}_1) + a_2b_2(\overline{e}_2 \cdot \overline{e}_2).$$

Однако же $\overline{e}_1\overline{e}_2 = \overline{e}_2\overline{e}_1 = 0$, так как $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ перпендикулярны; с другой стороны, $\overline{e}_1\overline{e}_1 = \overline{e}_2\overline{e}_2 = 1$; с учетом этих равенств получаем, что $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2$. Запишем эту формулу еще раз:

$$\boxed{\text{Если } \overline{a} = (a_1; a_2),\ \overline{b} = (b_1; b_2), \text{ то } \overline{a} \cdot \overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2.}$$

Частный случай этой формулы (когда $a_2 = 0$) мы уже установили, когда доказывали распределительный закон для скалярного произведения.

Задача 18.4. Выведите формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты, используя результат задачи 18.2.

§ 19. Тригонометрические формулы сложения

Формула, выражающая скалярное произведение векторов через их координаты, — это главное, ради чего мы занялись векторами.

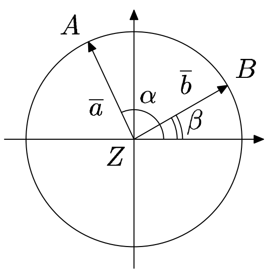


Рис. 19.1.

Сейчас мы будем пожинать плоды нашей работы. Для начала давайте научимся находить синус и косинус суммы чисел, если известны синус и косинус слагаемых. Нам будет удобнее начать с формулы для косинуса разности.

Итак, пусть нам даны числа α и β. Рассмотрим на тригонометрической окружности точку A, соответствующую числу α, и точку B, соответствующую числу β (рис. 19.1). Обозначим начало координат буквой Z и рассмотрим векторы $\overline{a} = \overline{ZA}$,

$\overline{b} = \overline{ZB}$. Из определения тригонометрических функций ясно, что координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ таковы: $\overline{a} = (\cos\alpha; \sin\alpha)$; $\overline{b} = (\cos\beta; \sin\beta)$. Стало быть, скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно, по формуле из предыдущего параграфа,

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

С другой стороны, длина каждого из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равна единице, а угол между ними равен $\alpha - \beta$ (точнее говоря, $(\alpha-\beta)+2\pi n$ для некоторого целого n, так как число $\alpha - \beta$ может оказаться отрицательным или бóльшим π). Так или иначе косинус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $\cos(\alpha-\beta)$, так что $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta)$. Сопоставляя два выражения для $\overline{a}\cdot\overline{b}$, получаем:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Чтобы получить теперь формулу для косинуса суммы, надо в формулу для $\cos(\alpha-\beta)$ подставить $-\beta$ вместо β:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-(-\beta)) = \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Чтобы получить формулы для синуса суммы и разности, воспользуемся формулами приведения. Вот формула синуса суммы:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos(\pi/2-(\alpha+\beta)) = \\ &= \cos((\pi/2-\alpha)-\beta) = \\ &= \cos(\pi/2-\alpha)\cos\beta + \sin(\pi/2-\alpha)\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Аналогичным способом получается и формула синуса разности. Предлагаем вам вывести ее самостоятельно и свериться с ответом:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Из формул для синуса и косинуса суммы и разности получаются и формулы для тангенса суммы и разности. Вот, например, как получается формула для тангенса суммы:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} = \\ &= \frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)/\cos\alpha\cos\beta}{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)/\cos\alpha\cos\beta} = \\ &= \frac{(\sin\alpha/\cos\alpha)+(\sin\beta/\cos\beta)}{1-(\sin\alpha\sin\beta/\cos\alpha\cos\beta)} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.\end{aligned}$$

Выпишем еще раз формулы для тангенса суммы и разности:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

В этой книжке уже шла речь о периодических, или колебательных, процессах. В простейшем и типичном случае колебательного процесса график зависимости величины (скажем, силы тока) от времени является синусоидой. Если отсчитывать время от того момента, когда значение величины равно нулю, то зависимость величины u, совершающей колебания, от времени t задается формулой $u = A\sin\omega t$, где A и ω — постоянные. В общем же случае, когда отсчет времени начинается через время τ после этого момента, вместо t в формулу надо будет подставить $t+\tau$, и формула примет вид $u = A\sin\omega(t+\tau) = A\sin(\omega t+\varphi)$, где через φ мы обозначили величину $\omega\tau$. Постоянные ω, A и φ называются соответственно частотой, амплитудой и фазой, и этими тремя параметрами синусоидальное колебание полностью определяется. Амплитуда показывает, какого наибольшего значения достигает величина в процессе колебаний, а фаза показывает, на каком этапе колебаний мы начали отсчет времени: если $\varphi = 0$, то в момент, когда $u = 0$, а если, допустим, $\varphi = \pi/2$, то в момент, когда u достигло наибольшего значения.

Если преобразовать выражение $u = A\sin(\omega t + \varphi)$, то мы получим:

$$u = A\cos\varphi\sin\omega t + A\sin\varphi\cos\omega t = P\sin\omega t + Q\cos\omega t,$$

где $P = A\cos\varphi$, $Q = A\sin\varphi$ — постоянные. Учитывая, что вместо $\cos\omega t$ можно написать $\sin(\omega t + \pi/2)$, получаем, что всякое синусоидальное колебание можно представить в виде суммы колебаний с фазами 0 и $\pi/2$.

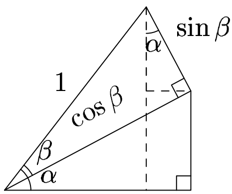


Рис. 19.2.

Задача 19.1. Если α, β и $\alpha+\beta$ — острые углы, то формулу для синуса суммы можно получить геометрически, без всяких векторов. Сделайте это, руководствуясь рис. 19.2.

Задача 19.2. а) Докажите тождество

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

б) Выведите аналогичное тождество для $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta$.

Задача 19.3. Докажите тождество

$$\sin\alpha + \sin(\alpha + 120^\circ) + \sin(\alpha - 120^\circ) = 0.$$

Задача 19.4. Найдите значения следующих выражений:

а) $\cos 78^\circ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \cos 72^\circ$;

б) $\cos 76^\circ \cos 31^\circ + \cos 14^\circ \cos 59^\circ$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 22^\circ + \operatorname{tg} 113^\circ}{1 + \operatorname{tg} 158^\circ \operatorname{ctg} 23^\circ}$.

Задача 19.5. а) Найдите $\sin\alpha$, если $\sin(\pi/6 + \alpha) = 4/5$, $\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

б) Дано, что $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 3$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -3$. Найдите α.

Задача 19.6. Докажите тождества:

а) $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = 3\pi/4$;

б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \pi/4$.

Задача 19.7. а) Докажите тождество

$$\sin(60^\circ - \alpha) + \sin\alpha = \sin(60^\circ + \alpha).$$

б) Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность. На дуге BC взята точка M. Докажите, что $AM = BM + CM$.

Задача 19.8. Расстояние между центрами двух пересекающихся окружностей равно a, общая хорда видна из центров под углами 90° и 60°. Найдите радиусы окружностей.

Задача 19.9. Остроугольный треугольник вписан в окружность радиусом 10. Центр окружности удален от двух сторон треугольника на $2\sqrt{5}$ и 8. Чему равно расстояние от центра окружности до третьей стороны треугольника?

Задача 19.10. а) На клетчатой бумаге нарисован треугольник, вершины которого расположены в узлах (точках пересечения линий). Докажите, что тангенсы углов этого треугольника являются рациональными числами.

б) Докажите, что на клетчатой бумаге нельзя нарисовать равносторонний треугольник с вершинами в узлах.

Задача 19.11. Величина u зависит от времени t по закону

$$u = P\cos\omega t + Q\sin\omega t.$$

Сдвинем начало отсчета на постоянную величину τ (то есть подставим $t = t' + \tau$ и выразим u через t'); получится формула $u = P'\cos\omega t' + Q\sin\omega t'$. Выразите P' и Q' через P, Q и число $\varphi = \omega\tau$.

Если говорить не о колебательных процессах, а просто о функциях, то эта задача говорит, что функция $y = a\sin x + b\cos x$ после сдвига аргумента на постоянное число c (замены x на $x + c$) остается функцией того же вида, только с другими коэффициентами a и b. Существует и более простой пример такого рода: показательная функция $y = ka^x$

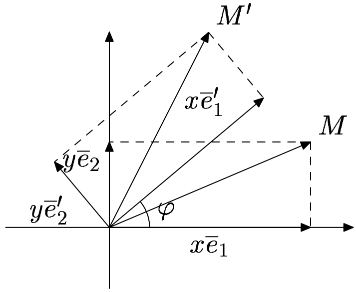


Рис. 19.3.

после замены x на $x+c$ остается функцией того же вида, только с другим коэффициентом k. Великий математик XVIII века Леонард Эйлер открыл, что эти два примера — фактически одно и то же. У нас пойдет об этом речь, когда мы займемся комплексными числами.

Задача 19.12. Точку M, имеющую координаты $(x; y)$, повернули относительно начала координат на угол φ в положительном направлении. Получилась точка M' (рис. 19.3). Каковы ее координаты?

Указание. Если $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ — единичные координатные векторы, то $\overline{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$; пусть $\bar{e}_1{}'$ и $\bar{e}_2{}'$ — векторы, полученные из $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ соответственно поворотом на угол φ (относительно начала координат в положительном направлении). Тогда, очевидно, $\overline{OM'} = x\bar{e}_1{}' + y\bar{e}_2{}'$.

Формулы, выражающие координаты точки M' через координаты точки M, совпадают с формулами из предыдущей задачи, выражающими P' и Q' через P и Q. Причины такого совпадения мы обсудим в следующем параграфе.

Задача 19.13. а) Пусть a и b — положительные числа, меньшие 1. Покажите, что $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \dfrac{a+b}{1-ab}$.

б) Что нужно подставить вместо многоточия в правую часть равенства

$$\arcsin a + \arcsin b = \arcsin(\ldots),$$

чтобы получилось тождество, верное при всех достаточно малых положительных a и b?

§ 20. Формула вспомогательного угла, или сложение колебаний равной частоты

Повторить: *§ 13: Чему равно* $\sin x + \cos x$*?*

В предыдущем параграфе мы с помощью формул сложения перешли от записи колебаний в виде $u = A\sin(\omega t+\varphi)$ к записи $u = P\cos t + Q\sin t$. Давайте теперь научимся переходить от второй записи к первой.

Если вместо t написать α, то задача будет такова: дано выражение $P\sin\alpha + Q\cos\alpha$; требуется найти такие числа A и φ, чтобы выполнялось тождество $P\sin\alpha+Q\cos\alpha = A\sin(\alpha+\varphi)$ (мы можем, очевидно, считать, что P и Q не равны одновременно нулю).

Предположим сначала, что нам удалось найти такое φ, что $P = \cos\varphi$, $Q = \sin\varphi$. Тогда наша задача решалась бы просто:

$$P\sin\alpha + Q\cos\alpha = \cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha = \sin(\alpha+\varphi).$$

Однако в общем случае такого числа может и не существовать: ведь если $P = \cos\varphi$, $Q = \sin\varphi$, то $P^2 + Q^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, а сумма квадратов двух произвольных чисел P и Q равняться единице не обязана. Поэтому применим небольшой трюк, а именно умножим и поделим наше выражение на $\sqrt{P^2+Q^2}$:

$$P\sin\alpha+Q\cos\alpha = \sqrt{P^2+Q^2}\left(\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\sin\alpha+\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\cos\alpha\right).$$

Заметим, что

$$\left(\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right)^2 + \left(\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right)^2.$$

Стало быть, точка с координатами $\left(\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}; \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}\right)$ лежит на тригонометрической окружности; пусть φ — какое-нибудь из соответствующих ей чисел. Тогда выполнены равенства

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}},$$
$$\sin\varphi = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}},$$

и наше выражение запишется так:

$$P\sin\alpha + Q\cos\alpha = \sqrt{P^2+Q^2}(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) = \\ = \sqrt{P^2+Q^2}\sin(\alpha+\varphi).$$

Итак, наша цель достигнута.

> Если числа P и Q не равны 0, то
>
> $$P\sin\alpha + Q\cos\alpha = \sqrt{P^2+Q^2}\sin(\alpha+\varphi),$$
>
> где $\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$, $\sin\varphi = \frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}$.

Эта формула называется формулой вспомогательного угла (вспомогательный угол — это φ).

Если поделить друг на друга выражения для $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, то получится равенство $\operatorname{tg}\varphi = Q/P$, так что возникает искушение написать попросту $\varphi = \operatorname{arctg}(Q/P)$. К сожалению, так писать можно только если $P > 0$: в этом случае точка, соответствующая φ, лежит правее оси ординат, и поэтому ей соответствует число из интервала $(-\pi/2; \pi/2)$, в котором лежат арктангенсы всех углов. Если $P < 0$, то это уже не так (тогда в качестве φ годится число $\operatorname{arctg}((Q/P)+\pi)$).

Теперь мы можем довести до конца исследование функции $y = \sin x + \cos x$, начатое в § 13. Если преобразовать выражение $\sin x + \cos x$ по нашему рецепту, то получится вот что:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \\ = \sqrt{2}(\sin x \cdot \cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)\cos x) = \sqrt{2}\sin(x+\pi/4).$$

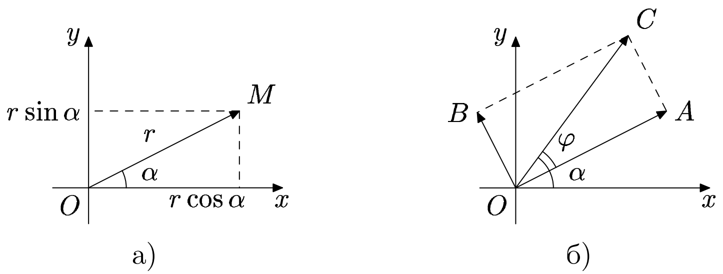


Рис. 20.1.

Стало быть, график нашей функции — действительно синусоида; заодно мы еще раз убеждаемся, что наибольшее значение выражения $\sin x + \cos x$ равно $\sqrt{2}$, а наименьшее значение равно $-\sqrt{2}$.

Задача 20.1. Постройте графики функций:

а) $y = \sin x + \cos x$; б) $y = \sin x - \cos x$;
в) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

Задача 20.2. Найдите множество значений функции $y = \sin x - 2\cos x$.

Задача 20.3. Решите уравнения:

а) $6\cos x - 5\sin x = 8$; б) $\sin x + \cos x = 1$.

Нашу формулу вспомогательного угла можно получить и геометрически. Напомним для начала, что вектор длины r, образующий с осью абсцисс угол α, имеет координаты $(r\cos\alpha; r\sin\alpha)$ (рис. 20.1а).

Теперь рассмотрим вектор $\overline{OA}$, имеющий длину P и образующий с осью абсцисс угол α, и перпендикулярный ему вектор $\overline{OB}$, имеющий длину Q и образующий с осью абсцисс угол $\alpha + \pi/2$ (рис. 20.1б). Тогда

$$\overline{OA} = (P\cos\alpha; P\sin\alpha), \qquad \overline{OB} = (-Q\sin\alpha; Q\cos\alpha)$$

(второе равенство вытекает из формул приведения $\sin(\alpha+\pi/2) = \cos\alpha$, $\cos(\alpha+\pi/2) = -\sin\alpha$), откуда

$$\overline{OA} + \overline{OB} = (P\cos\alpha - Q\sin\alpha; P\sin\alpha + Q\cos\alpha).$$

Однако сумму можно найти и по правилу параллелограмма: $\overline{OA}+$ $+\overline{OB}=\overline{OC}$, где точка C — вершина прямоугольника $OACB$. По теореме Пифагора имеем $OC=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{P^2+Q^2}$; если обозначить $\angle AOC$ через φ, то вектор $\overline{OC}$ образует с осью абсцисс угол $\alpha+\varphi$, откуда

$$\overline{OC}=\left(\sqrt{P^2+Q^2}\cos(\alpha+\phi);\sqrt{P^2+Q^2}\sin(\alpha+\phi)\right).$$

Приравнивая ординаты векторов $\overline{OC}$ и $\overline{OA}+\overline{OB}$, получаем, что

$$P\sin\alpha+Q\cos\alpha=\sqrt{P^2+Q^2}\sin(\alpha+\varphi).$$

Угол φ найдем также геометрически: из прямоугольного треугольника OAC видим, что $\operatorname{tg}\varphi=AC/OA=Q/P$. Это также согласуется с предыдущими результатами (напомним, что числа P и Q положительны).

Задача 20.4. Если приравнять абсциссы векторов $\overline{OC}$ и $\overline{OA}+\overline{OB}$, то для положительных P и Q получится формула

$$P\cos\alpha-Q\sin\alpha=\sqrt{P^2+Q^2}\cos(\alpha+\varphi),$$

где $\varphi=\operatorname{arctg}(Q/P)$. Выведите эту формулу, не используя векторов.

Прием, которым мы воспользовались, позволяет придать геометрический смысл и другим тригонометрическим выкладкам. Давайте, например, упростим выражение $\sin\alpha+\sin(\alpha+120^\circ)+$ $+\sin(\alpha-120^\circ)$ (задача 19.3 из предыдущего параграфа). Для этого отложим от начала координат следующие три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, соответствующие точкам α, $\alpha-120^\circ$, $\alpha-120^\circ$ тригонометрической окружности: $\overline{a}=(\cos\alpha;\sin\alpha)$, $\overline{b}=(\cos(\alpha-120^\circ);\sin(\alpha-120^\circ))$, $\overline{c}=(\cos(\alpha+120^\circ);\sin(\alpha+120^\circ))$ (рис. 20.2а). Если искать сумму $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ геометрически (откладывая $\overline{b}$ от конца $\overline{a}$ и т. д.), то ясно, что наша ломаная из трех звеньев замкнется в правильный треугольник, так что $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{0}$ (рис. 20.2б). Записывая же сумму $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ в координатах, получаем равенства

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+120^\circ)+\sin(\alpha-120^\circ)=0,$$
$$\cos\alpha+\cos(\alpha+120^\circ)+\cos(\alpha-120^\circ)=0.$$

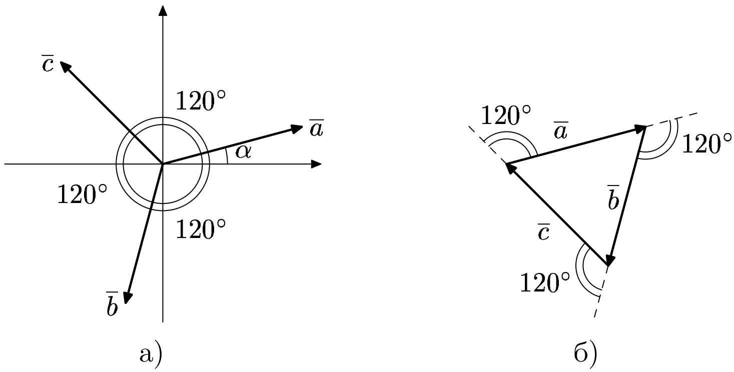


Рис. 20.2.

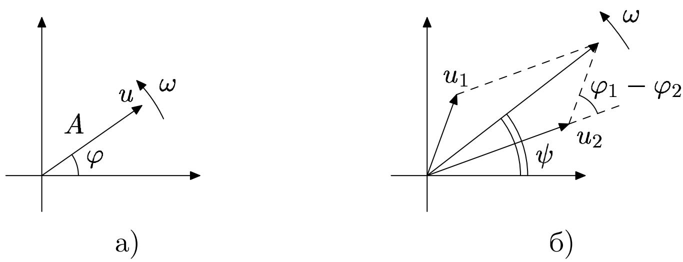


Рис. 20.3. Векторные диаграммы.

Таким образом, мы доказали тождество из задачи 19.3 (а заодно и аналогичное тождество для косинусов). Впрочем, в данном случае ничего не стоит доказать эти тождества без всяких векторов, с помощью формул сложения. Приведем более серьезный пример.

Рассмотрим синусоидальное колебание с амплитудой $A > 0$, частотой ω и фазой φ: $u = A\sin(\omega t + \varphi)$. Тогда значение u в момент времени t есть ордината вектора длины A, образующего угол $\omega t + \varphi$ с осью абсцисс. Иными словами, значение u в момент t равно ординате вектора длины A, вращающегося вокруг начала координат с угловой скоростью ω. На рисунках принято изображать положение этого вращающегося вектора в момент $t = 0$. При этом угол, образованный им с осью абсцисс, будет равняться фазе (рис. 20.3а). Рассмотрим теперь два колебания одной частоты:

$u_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$, $u_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$. Как найти амплитуду и фазу их суммы $u_1 + u_2$? Если изобразить u_1 и u_2 вращающимися векторами, то очевидно, что сумма этих векторов также будет вращаться со скоростью ω, и $u_1 + u_2$ будет равно ординате их суммы. Стало быть, при изображении колебаний векторами сумме колебаний соответствует сумма векторов. В частности, из рис. 20.3б и теоремы косинусов ясно, что длина суммы векторов равна $\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$, так что

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \\ = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\,\sin(\omega t + \psi),$$

где угол ψ также может быть найден геометрически (например, с помощью теоремы синусов).

При таком соответствии между колебаниями и векторами разложение

$$A \sin(\omega t + \varphi) = P \sin \omega t + Q \cos \omega t$$

соответствует разложению вектора на сумму векторов, параллельных осям абсцисс и ординат (так что коэффициенты P и Q — не что иное, как координаты вектора). Сдвиг начала отсчета времени на τ, в результате которого к фазе прибавляется число $\omega\tau = \psi$, соответствует повороту на угол ψ. Теперь становится понятным, почему полностью аналогичны ответы к задачам 19.11 и 19.12.

Описанное нами изображение колебаний с помощью векторов применяется в электротехнических расчетах; там его называют методом векторных диаграмм.

Задача 20.5. Рассмотрим колебания, заданные формулами $u_1 = A_1 \sin \omega t$ и $u_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$. Найдите с помощью векторной диаграммы амплитуду и фазу для $u_1 + u_2$.

§ 21. Двойные, тройные и половинные углы

Запишем формулы синуса, косинуса и тангенса суммы для частного случая, когда слагаемые равны. Получится вот что:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-2\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Стало быть, мы получили формулы, выражающие тригонометрические функции от 2α через тригонометрические функции от α:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Формулу для $\cos 2\alpha$ можно немного преобразовать. Если заменить в ней $\sin^2\alpha$ на $1-\cos^2\alpha$, то получится формула, выражающая $\cos 2\alpha$ через $\cos\alpha$:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Можно, наоборот, заменить $\cos^2\alpha$ на $1-\sin^2\alpha$. В итоге получается вот что:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Задача 21.1. Формулу $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ можно доказать (для острых углов α) геометрически. Сделайте это, найдя двумя разными способами основание равнобедренного треугольника с углом при вершине 2α и боковой стороной 1.

Задача 21.2. а) Пусть $\sin\alpha + \cos\alpha = m$; найдите $\sin 2\alpha$.

б) Пусть $\sin\alpha - \cos\alpha = n$; найдите $\sin 2\alpha$.

Задача 21.3. Докажите тождество:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = \sin 8\alpha/8\sin\alpha.$$

Указание. Умножьте и поделите левую часть на $8\sin\alpha$.

Задача 21.4. Найдите значения выражений, не используя калькулятор или таблицы:

а) $\cos(\pi/9)\cos(2\pi/9)\cos(4\pi/9)$;
б) $\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$.

Подобно формулам для функций двойного угла, можно получать формулы для синуса и косинуса 3α, 4α и т.д. Например:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) &= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = \\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha = \\ &= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha =\end{aligned}$$

(заменяем $\sin^2\alpha$ на $1-\cos^2\alpha$)

$$\begin{aligned}&= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.\end{aligned}$$

Задача 21.5. Выведите вторую из нижеприведенных формул:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Мы не будем выписывать формулы для синуса и косинуса $n\alpha$ при n, больших 3. Для небольших значений n читатель легко сделает это сам; как устроена формула для произвольного n, мы узнаем, когда познакомимся с комплексными числами.

На наши формулы для $\cos 2\alpha$ можно посмотреть и с другой стороны. Именно, выразим в этих формулах $\cos^2\alpha$ или $\sin^2\alpha$ через $\cos 2\alpha$. Получается вот что:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Эти формулы часто называют *формулами понижения степени*; вот два их применения.

Во-первых, давайте заменим всюду в этих формулах α на $\alpha/2$. Получится вот что:

$$\cos^2(\alpha/2) = (1+\cos\alpha)/2;$$
$$\sin^2(\alpha/2) = (1-\cos\alpha)/2.$$

Если теперь извлечь из обеих частей квадратные корни, то получатся такие «формулы половинного угла»:

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Стало быть, если нам известен косинус числа α, то — с точностью до знака — мы можем найти также синус и косинус числа $\alpha/2$.

Если отбросить в формулах половинного угла знаки абсолютной величины и записать, например, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, то получится неверная формула: правая часть у нее всегда неотрицательна (по определению квадратного корня), а левая часть может быть отрицательной. Если мы знаем только значения тригонометрических функций от угла α, то для определения знаков $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ нужна дополнительная информация.

Такая неоднозначность в определении значений функций половинного угла не удивительна: если мы знаем только $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, то нам известно расположение точки, соответствующей числу α, на тригонометрической окружности, но узнать, где на окружности находится число $\alpha/2$, без дополнительной информации нельзя: если числа α и β отличаются на 2π, то сами они занимают на тригонометрической окружности одно и то же место, а числа $\alpha/2$ и $\beta/2$ диаметрально противоположны.

Задача 21.6. а) Найдите $\cos(x/2)$, если $\cos x = 1/3, 2\pi < x < 3\pi$.

б) Найдите $\sin(x/2)$, если $\cos x = 1/4, 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

в) Пусть нам требуется найти $\sin(x/2)$, если $\cos x = 1/4$ и $a - 2\pi \leqslant x \leqslant a$. Для каких a из отрезка $[0;\pi/2]$ эта задача будет иметь единственное решение?

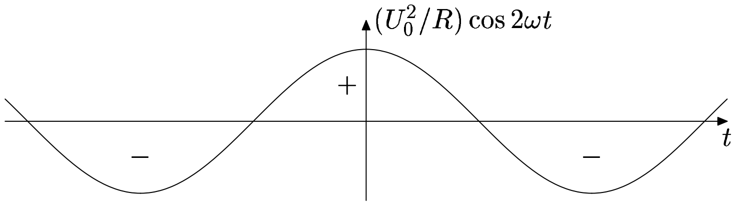


Рис. 21.1.

Задача 21.7. В треугольнике против сторон a, b, c лежат углы A, B, C. Докажите следующие формулы:

$$\text{а)}\quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};\qquad \text{б)}\quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

($p = (a+b+c)/2$ — полупериметр).

Второй пример применения формул понижения степени относится к физике. Как известно, если «нагрузка» (например, лампочка) сопротивлением R находится под напряжением U, то на ней выделяется мощность U^2/R. Если ток у нас переменный, то напряжение U, а стало быть, и мощность все время меняются; практический интерес представляет среднее значение этой мощности. Давайте его найдем. Пусть напряжение зависит от времени по закону $U = U_0\cos\omega t$, где U_0 — амплитуда (максимальное значение напряжения). Тогда по формуле понижения степени имеем:

$$U^2/R = (U_0^2/R)\cos^2\omega t = (U_0^2/R)\frac{1+\cos 2\omega t}{2} = \\ = U_0^2/2R + (U_0^2/R)\cos 2\omega t.$$

В этой сумме меняется со временем только второе слагаемое, но при этом его среднее значение равно нулю: половину времени число $\cos 2\omega t$ положительно, другую половину — отрицательно, а при усреднении эти положительные и отрицательные значения компенсируют друг друга (см. рис. 21.1).

Поэтому среднее значение мощности равно первому слагаемому, то есть $U_0^2/2R$. Если обозначить $U = U_0/\sqrt{2}$, то получится, что средняя мощность равна $(U^2)/R$. Стало быть, средняя мощность, выделяемая на сопротивлении R в цепи переменного тока с амплитудой напряжения U_0, такая же, как если бы ток был постоянен, а напряжение было в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем U_0. Величину U называют среднеквадратичным значением напряжения; именно его имеют в виду, когда говорят, что напряжение равно 220 .

Задача 21.8. Докажите тождества:

а) $\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)+\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta=1$;

б) $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta=1$;

в) $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$.

Задача 21.9. Упростите выражение $\sin^4 x+\cos^4 x$ и постройте график функции $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

Мы уже выписывали формулы для $|\sin(\alpha/2)|$ и $|\cos(\alpha/2)|$, так что формулу для $|\operatorname{tg}(\alpha/2)|$ можно получить, просто поделив эти формулы друг на друга:

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}}.$$

Можно, однако, получить для тангенса половинного угла формулы и поинтереснее. Для этого в равенстве $\operatorname{tg}(\alpha/2)=\dfrac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}$ умножим числитель и знаменатель на $2\cos(\alpha/2)$:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{2\cos^2(\alpha/2)}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

(мы воспользовались формулами синуса двойного угла и понижения степени). Можно было бы также умножить числитель и знаменатель на $2\sin(\alpha/2)$:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Итак:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Задача 21.10. Формулу $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ можно (по крайней мере для острых углов α) доказать геометрически. Сделайте это, руководствуясь рис. 21.2.

Тангенс половинного угла играет в тригонометрии особую роль: через него можно выразить все остальные тригонометрические функции. Это делается так. Рассмотрим такую цепочку равенств:

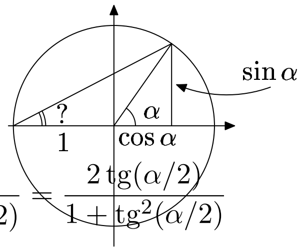


Рис. 21.2.

$$\sin\alpha = \frac{\sin(2\cdot(\alpha/2))}{1} = \frac{2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)} = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$$

(мы поделили числитель и знаменатель на $\cos(\alpha/2)$). Обработаем аналогичным образом косинус:

$$\cos\alpha = \frac{\cos(2\cdot(\alpha/2))}{1} = \frac{\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)} = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}.$$

Деля формулу для $\sin\alpha$ на формулу для $\cos\alpha$, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}.$$

Впрочем, в этой последней формуле ничего нового как раз нет: если записать $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(2\cdot(\alpha/2))$, то это — просто формула тангенса двойного угла.

Запишем три наши формулы вместе:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)};$$
$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)};$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}.$$

Формулы, которые мы только что получили, в принципе позволяют чисто механически проверить любое тригонометрическое тождество, в обеих частях которого стоят выражения относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$: надо только выразить всюду $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, после чего, если обозначить $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ через t, получится алгебраическое тождество с одной переменной t, проверка которого может потребовать времени, но не изобретательности. Точно так же любое тригонометрическое уравнение, в котором левая и правая части выражены через $\sin x$ и $\cos x$, сводится с помощью этих формул к алгебраическому уравнению относительно $\operatorname{tg}(x/2)$ (впрочем, для решения уравнений в «школьном» смысле эта подстановка мало что дает, поскольку при этом, как правило, получаются алгебраические уравнения высокой степени).

Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного угла, называются «формулами универсальной подстановки».

На формулы универсальной подстановки можно посмотреть и еще с одной стороны. Рассмотрим нашу старую знакомую — окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Уравнение этой окружности $x^2+y^2=1$ можно рассматривать как рецепт проверки, принадлежит ли окружности данная точка: «подставь ее координаты $(x;y)$ в уравнение; точка будет лежать на окружности, если при этом получится верное равенство». После того, как мы определили функции синус и косинус, появляется возможность описать окружность, что называется, параметрически, а именно задать координаты всех ее точек формулами: «точки окружности — это точки с координатами $(\cos\alpha;\sin\alpha)$ для всевозможных чисел α». Если теперь выразить $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ через $t=\operatorname{tg}(\alpha/2)$, то точки окружности окажутся заданными с помощью формул, не использующих тригонометрии: точки окружности с уравнением $x^2+y^2=1$ — это точки с координатами $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2};\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ для всевозможных t.[1] Как говорят, координаты точек окружности задаются с помощью «рациональных функций» от t (рациональная функция — это функция, для вычисления значения которой достаточно четырех действий арифметики и возведения в целую степень).

Представим теперь, что кривая задается не уравнением $x^2+y^2=1$, а каким-то другим алгебраическим уравнением. Спрашивается, можно ли

[1] Строго говоря, эти формулы задают все точки окружности, кроме $(-1;0)$. Мы не будем обращать внимания, если конечное число точек формулой не охватывается.

в этом случае координаты ее точек задать рациональными выражениями от переменной t? Ответ на этот вопрос зависит от уравнения кривой. Если в обеих частях уравнения стоят многочлены от x и y степени не выше второй, то задать точки кривой с помощью рациональных функций от одной переменной всегда удается (примеры — в задаче 21.11). Если же кривая задана уравнением степени больше 2, то, как правило, задать координаты ее точек рациональными функциями невозможно: так обстоит дело уже для кривой $x^3 + y^3 = 1$.

Задача 21.11. Задайте с помощью рациональных функций координаты точек следующих кривых:

а) эллипса с уравнением $x^2 + 4y^2 = 1$;

б) гиперболы с уравнением $xy = 1$;

в) гиперболы с уравнением $x^2 - y^2 = 1$.

Указания. б) Если $x = t$, то $y = 1/t$. в) Разложите левую часть на множители.

Задача 21.12. а) Укажите пять решений уравнения $x^2 + y^2 = 1$ в положительных рациональных числах.

б) Укажите пять решений уравнения $a^2 + b^2 = c^2$ в натуральных числах.

§ 22. Преобразование произведения в сумму и суммы в произведение

Напишем одну под другой формулы синуса суммы и синуса разности:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Сложив эти формулы, получим $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$, или

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

Поступая аналогичным образом с формулами косинуса суммы и разности, получим:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда получаются такие формулы:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

Мы получили формулы, позволяющие переходить от произведения тригонометрических функций к их сумме. Давайте теперь научимся делать переход в другую сторону: от суммы к произведению.

Рассмотрим, например, формулу

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta).$$

Обозначим в правой части этой формулы $\alpha+\beta$ через x, а $\alpha-\beta$ через y. Складывая и вычитая равенства $\alpha+\beta=x$ и $\alpha-\beta=y$, находим, что $\alpha=(x+y)/2$, $\beta=(x-y)/2$. Подставляя эти выражения в левую часть формулы и читая формулу справа налево, получаем окончательно:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Подставляя в только что полученную формулу $-y$ вместо y, получаем:

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Если обработать формулы для $\cos\alpha\cos\beta$ и для $\sin\alpha\sin\beta$ так же, как мы это сделали с формулой для $\sin\alpha\cos\beta$, то получится вот что:

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

(обратите внимание на знак «минус» во второй формуле).

Задача 22.1. Докажите эти формулы.

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение можно получить и геометрически. В самом деле, отложим от начала координат векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, имеющие длину 1 и образующие с положительным направлением оси абсцисс углы α и β соответственно; пусть $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$ (рис. 22.1). Тогда, очевидно,

$$\overline{OA} = (\cos\alpha; \sin\alpha),$$
$$\overline{OB} = (\cos\beta; \sin\beta),$$
$$\overline{OC} = (\cos\alpha + \cos\beta; \sin\alpha + \sin\beta).$$

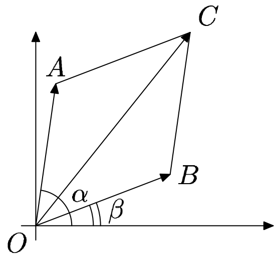


Рис. 22.1.

С другой стороны, так как $OA = OB = 1$, параллелограмм $OACB$ является ромбом. Следовательно, OC — биссектриса угла AOB, откуда $\angle BOC = \frac{\alpha-\beta}{2}$, и для равнобедренного треугольника OBC имеем

$$OC = 2 \cdot OB \cdot \cos\angle BOC = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Так как вектор $\overline{OC}$ составляет с осью абсцисс угол $\beta + \dfrac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, то

$$\overline{OC} = \left(OC\cos\frac{\alpha+\beta}{2}; OC\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Сопоставляя два выражения для координат вектора $\overline{OC}$, получаем

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

в согласии с выведенными нами формулами.

Задача 22.2. Докажите тождества:

а) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)+$
$+\sin(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)=0;$

б) $4\sin\alpha\sin(\pi/3-\alpha)\sin(\pi/3+\alpha)=\sin 3\alpha;$

в) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$

Задача 22.3. В предположении, что $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, докажите равенства:

а) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2};$

б) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2};$

в) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

Задача 22.4. Пусть в треугольнике против сторон a, b, c лежат соответственно углы α, β, γ. Докажите формулы:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

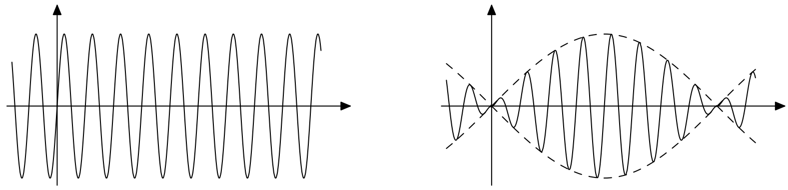
Эти формулы называются формулами Региомонтана, или теоремой тангенсов.

Задача 22.5. а) В предположении, что $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$, докажите тождество:

$$\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\delta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).$$

б) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$ (во вписанном четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей — теорема Птолемея).

Формулы, которыми мы занимались в этом параграфе, применяются в радиотехнике. Пусть нам надо передать по радио голос диктора частотой, скажем, 300 . На таких низких частотах вести радиопередачу невозможно: частоты радиоволн, применяемых для радиовещания, могут измеряться миллионами . Волны



а) Диктор молчит. б) Диктор заговорил.

Рис. 22.2.

таких частот используют так. Пока диктор молчит, в эфир идут только радиоволны высокой частоты ω (несущая частота — см. график на рис. 22.2а).

Никакой информации с этим сигналом не передается. Пусть теперь диктор начал издавать звуки с частотой η (η много меньше, чем ω); тогда в эфир идет сигнал $u = (A\sin\eta t)\sin\omega t$. Примерный график его представлен на рис. 22.2б. Можно сказать, что амплитуда колебаний высокой частоты ω сама претерпевает колебания с низкой частотой η. Как говорят, высокочастотный сигнал модулируется низкочастотным (все сказанное — лишь грубая схема того, что на самом деле происходит в приемнике).

Преобразуем выражение для модулированного сигнала:

$$u = A\sin\eta t\sin\omega t = \frac{A}{2}\cos(\omega-\eta)t - \frac{A}{2}\cos(\omega+\eta)t.$$

Как видите, наш модулированный сигнал — не что иное, как сумма сигналов с частотами $\omega+\eta$ и $\omega-\eta$. Так что когда говорят, что радиостанция ведет передачу на частоте, скажем, $\omega = 10$, то надо помнить, что фактически в эфир идут не только радиоволны частоты ω, но и волны всех частот из интервала $[\omega-\eta;\omega+\eta]$ где η — максимальная частота полезного сигнала, передаваемого радиостанцией. Значит, несущие частоты разных радиостанций не могут быть слишком близки друг к другу: если отрезки $[\omega-\eta;\omega+\eta]$ будут перекрываться, то радиостанции будут мешать друг дружке.

Еще одно приложение формул из этого параграфа — вычисление суммы косинусов или синусов чисел, образующих арифметическую прогрессию (в физике такие вычисления используются при исследовании явления дифракции).

Пусть нам надо упростить выражение

$$\cos\alpha + \cos(\alpha + h) + \cos(\alpha + 2h) + \ldots + \cos(\alpha + 10h).$$

Для начала решим эту задачу геометрически, а потом покажем, как к ней можно применить наши формулы. Рассмотрим следующие векторы: $a_0 = (\cos\alpha; \sin\alpha)$, $a_1 = (\cos(\alpha+h); \sin(\alpha+h))$, $\ldots$, $a_{10} = (\cos(\alpha+10h); \sin(\alpha+10h))$. Очевидно, искомая сумма — это абсцисса вектора $\overline{a}_0 + \overline{a}_1 + \ldots + \overline{a}_{10}$. Найдем эту сумму векторов. Для этого отложим $\overline{OA_1} = \overline{a}_0$ от начала координат, $\overline{A_1A_2} = \overline{a}_1$ от точки A_1 и т. д. (рис. 22.3). Тогда $\overline{a}_0 + \overline{a}_1 + \ldots + \overline{a}_{10} = \overline{OA}_{11}$.

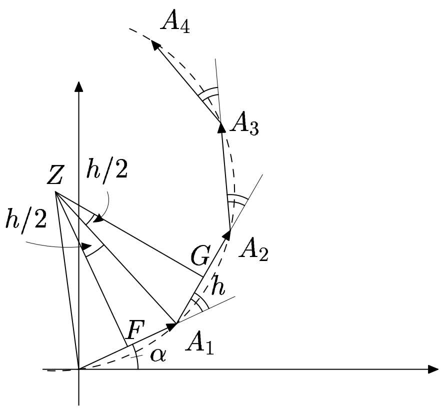


Рис. 22.3. $\overline{OA_1} = \overline{a}_0$, $\overline{A_1A_2} = \overline{a}_1, \ldots, \overline{A_{10}A_{11}} = \overline{a}_{10}$.

Чтобы найти координаты вектора $\overline{OA}$, найдем его длину и угол наклона к оси абсцисс. Для этого заметим, что каждый из отрезков OA_1, $A_1A_2, \ldots$ имеет длину 1 и повернут относительно предыдущего на один и тот же угол h радиан. Следовательно, точки O, A_1, A_2, $\ldots$, A_{11} лежат на одной окружности. Ее центр Z является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам OA_1 и A_1A_2. Если FZ и GZ — эти перпендикуляры, то $\angle FZG = h$, так что $\angle FZA_1 = h/2$ и радиус окружности R равен $FA_1/\sin\angle FZA_1 = 1/2\sin(h/2)$ (напомним, что длины отрезков OA_1 и A_1A_2 равны единице). Так как, очевидно, $\angle OZA_1 = \angle A_1ZA_2 = \ldots = \angle A_{10}ZA_{11} = h$, то $\angle OZA_{11} = 11h$, и из равнобедренного треугольника OZA_{11} имеем

$$OA_{11} = 2R\sin\frac{\angle OZA_{11}}{2} = \frac{\sin(11h/2)}{\sin(h/2)}.$$

Чтобы найти угол наклона вектора $\overline{OA}_{11}$ к оси абсцисс, заметим, что центральный угол $\angle A_1ZA_{11} = 10h$, так что вписанный угол $\angle A_{11}OA_1$, опирающийся на дугу $\smile{A_1A_{11}}$, равен $10h/2 = 5h$, а $\angle A_{11}OX = \angle A_{11}OA_1 + \alpha = \alpha + 5h$. Стало быть,

$$\begin{aligned}\overline{OA}_{11} &= (OA_{11}\cos(\alpha+5h); OA_{11}\sin(\alpha+5h)) = \\ &= \left(\frac{\sin\frac{11h}{2}\cos(\alpha+5h)}{\sin(h/2)}; \frac{\sin\frac{11h}{2}\sin(\alpha+5h)}{\sin(h/2)}\right).\end{aligned}$$

Сопоставляя две записи для координат вектора $\overline{OA}_{11}$, получаем формулы:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+h) + \cos(\alpha+2h) + \ldots + \cos(\alpha+10h) = \\ = \frac{\sin\frac{11h}{2}\cos(\alpha+5h)}{\sin(h/2)};$$

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+h) + \sin(\alpha+2h) + \ldots + \sin(\alpha+10h) = \\ = \frac{\sin\frac{11h}{2}\sin(\alpha+5h)}{\sin(h/2)}.$$

Первая из этих формул — это то, к чему мы стремились, вторая получилась в качестве побочного продукта.

Как видите, вычисления оказались довольно длинными. К тому же читатель-педант может заметить, что чертеж на рис. 22.3 получается только для достаточно малых h, а при больших h ломаная $OA_1 \cdots A_{10}A_{11}$ может обойти всю окружность, и не один раз, так что чертеж будет другой. На самом деле наша формула верна при всех α и h (если только знаменатель $\sin(h/2)$ не равен нулю; но последнее возможно только если $h = 2\pi n$ для некоторого целого n, а тогда и без всякой формулы ясно, что сумма равна

$11\cos\alpha$). Чтобы в этом убедиться, давайте подсчитаем нашу сумму, не используя чертеж.

Именно, умножим и разделим нашу сумму на $2\sin(h/2)$:

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha+\cos(\alpha+h)+\cos(\alpha+2h)+\ldots+\cos(\alpha+10h)= \\
&\qquad=\frac{1}{2\sin(h/2)}\left(2\sin(h/2)\cos\alpha+2\sin(h/2)\cos(\alpha+h)\right.+ \\
&\qquad+\left.2\sin(h/2)\cos(\alpha+2h)+\ldots\ +2\sin(h/2)\cos(\alpha+10h)\right).
\end{aligned}$$

Каждое из слагаемых в скобках вида $2\sin(h/2)\cos(\alpha+mh)$ преобразуем так:

$$\begin{aligned}
2\sin(h/2)\cos(\alpha+mh)&=\sin\Big(\alpha+mh+\frac{h}{2}\Big)+\sin\Big(-\alpha-mh+\frac{h}{2}\Big)= \\
&=\sin\Big(\alpha+(m+\frac{1}{2}h)\Big)-\sin\Big(\alpha+(m-\frac{1}{2}h)\Big).
\end{aligned}$$

Подставляя это в нашу формулу, видим, что сумма равна

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\sin(h/2)}\Bigg(&\sin\Big(\alpha+\frac{h}{2}\Big)-\sin\Big(\alpha-\frac{h}{2}\Big)+\sin\Big(\alpha+\frac{3h}{2}\Big)+\ldots+ \\
&+\sin\Big(\alpha+\Big(10+\frac{1}{2}\Big)h\Big)-\sin\Big(\alpha+\Big(9+\frac{1}{2}\Big)h\Big)\Bigg);
\end{aligned}$$

если раскрыть скобки, то сократятся все слагаемые, за исключением $-\sin\Big(\alpha-\dfrac{h}{2}\Big)$ и $\sin\Big(\alpha+\Big(10+\dfrac{1}{2}\Big)h\Big)$, и сумма будет равна

$$\frac{\sin(\alpha+(10+\frac{1}{2})h)-\sin(\alpha-\frac{h}{2})}{2\sin(h/2)}=\frac{2\sin\frac{11h}{2}\cos(\alpha+5h)}{2\sin(h/2)}$$

(мы преобразовали сумму в произведение). Сокращая двойки в числителе и знаменателе, получаем ту же формулу, что мы нашли геометрически.

Наше второе вычисление короче и проще первого, но менее естественно. Когда мы познакомимся с комплексными числами, мы научимся находить такие суммы наиболее естественным (хотя и не наиболее коротким) способом.

Задача 22.6. Докажите, что на рис. 22.3 точки $O, A_1, A_2, \ldots, A_{11}$ действительно лежат на одной окружности.

Задача 22.7. Упростите выражения:

а) $\cos x - \cos(x+h) + \cos(x+2h) -$
$$- \cos(x+3h) + \ldots - \cos(x+9h) + \cos(x+10h);$$
б) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin 100x$.

Задача 22.8. Через центр окружности, описанной около правильного многоугольника, проведена прямая. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин многоугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.

§ 23. Производные тригонометрических функций

Повторить: *§ 4: малые углы;*
§ 5: часы, или современный взгляд на тригонометрию;
§ 11: графики синуса и косинуса.

Для начала вспомним, что такое вообще производная.

Посмотрим на таблицу значений функции $y = 0{,}7x + 0{,}4$:

x	3	4	5	6	7	8	9
$0{,}7x + 0{,}4$	2,5	3,2	3,9	4,6	5,3		

Чтобы продолжить заполнение этой таблицы, не нужно даже подставлять $x = 8$, $x = 9\ldots$ в выражение $0{,}7x + 0{,}4$: достаточно заметить, что при увеличении x на 1 значение y увеличивается на $0,7$. Это и не удивительно: ведь наша функция линейна, а у линейных функций одинаковым изменениям аргумента соответствуют одинаковые изменения функции.

Если, однако, функция линейной не является, то положение будет другим. Посмотрим, для тех же значений x, на таблицу значений функции $y = \sqrt{x}$ (приближенные значения даны с тремя знаками после запятой):

x	3	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{x}$	1,732	2,000	2,234	2,449			

На сей раз при увеличении x на 1 значение $\sqrt{x}$ увеличивается то на 0,268, то на 0,234, то еще как-нибудь. Исходя только из этой таблицы, предсказать значение $\sqrt{7}$ будет затруднительно. Возьмем, однако, значения x с меньшим шагом, скажем, отстоящие друг от друга на 0,01:

x	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1,00	1,01	1,02
$\sqrt{x}$	0,975	0,980	0,985	0,990	0,995	1,000	1,005	1,010

(значения $\sqrt{x}$ вновь взяты с тремя знаками после запятой).

Чудесным образом вновь возникла та же ситуация, что была у нас с линейной функцией: при увеличении x на 0,01 значение $\sqrt{x}$ увеличивается всегда на 0,005. Точные значения приращений друг другу все равно, конечно, не равны, но приближенно можно сказать, что при изменениях x на отрезке $[0{,}95; 1{,}02]$ функция $y = \sqrt{x}$ ведет себя как линейная функция.

Таким свойством обладает не только функция $g(x) = \sqrt{x}$. Большинство интересных функций при изменении аргумента на малых промежутках ведут себя почти как линейные функции: равным изменениям аргумента соответствуют приближенно равные изменения функции. По-ученому такие функции называются «дифференцируемыми» или «гладкими».

В эпоху, предшествовавшую распространению калькуляторов и компьютеров, этим свойством пользовались при нахождении значений функций с помощью таблиц. Если, допустим, в таблице были приближенные значения для $\sqrt{1{,}93}$ и $\sqrt{1{,}94}$, а требовалось найти $\sqrt{1{,}931}$, то поступали так: к табличному значению $\sqrt{1{,}93}$ прибавляли одну десятую от разности приведенных в таблице значений $\sqrt{1{,}94}$ и $\sqrt{1{,}93}$, как если бы функция $y = \sqrt{x}$ на отрезке $[1{,}93; 1{,}94]$ была линейна. Такой способ обращения с таблицами назывался линейной интерполяцией.

Давайте выразим то, что мы узнали про функцию $y = \sqrt{x}$, с помощью формулы. Если x близко к 1, то при увеличении x на 0,01 значение x увеличивается примерно на 0,005, т. е. на в два раза меньшую величину. Если x отстоит от 1 на малую величину h, то $\sqrt{x}$ отстоит от 1 примерно на $h/2$. Стало быть, для малых h верна приближенная формула $\sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{h}{2}$.

Рассмотрим теперь вместо $y = \sqrt{x}$ произвольную «достаточно хорошую» функцию $y = f(x)$ и число a из ее области определения. При x, близких к a, изменения значений $f(x)$ приблизительно пропорциональны изменениям значений x. Обозначим коэффициент пропорциональности буквой c; тогда если x отстоит от a на малую величину h, то $f(x)$ отстоит от $f(a)$ приблизительно на ch, так что $f(a+h) \approx f(a) + ch$.

> Если при малых h верна приближенная формула $f(a+h) \approx$ $\approx f(a) + ch$, то число c называется производной функции f в точке a. Производная функции f в точке a обозначается $f'(a)$.

Результат наших экспериментов над функцией $y = \sqrt{x}$ можно теперь записать так: производная функции $y = \sqrt{x}$ в точке 1 равна 1/2.

Как искать производные функций, не обращаясь к таблицам их значений? Рассмотрим произвольную функцию $y = f(x)$. Из приближенной формулы $f(a+h) \approx f(a) + ch$ число $c = f(a)$ выражается так:

$$f(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Чем меньше a, тем эта формула точнее. Стало быть,

> $f'(a)$ — это число, к которому приближается отношение
>
> $$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
>
> при h, приближающемся к нулю.

Говоря по-ученому, $f(a)$ равна «пределу $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ при h, стремящемся к нулю». Еще раз повторим, что этот предел может не существовать, но он существует для большинства интересных функций (и в большинстве точек).

Вот как можно найти этим способом производную функции $f(x) = x^3$. Чтобы найти ее производную в точке a, надо узнать, к чему приближается отношение $\dfrac{(a+h)^3 - a^3}{h}$ при приближении

h к нулю. После упрощений с использованием формулы куба суммы это выражение примет вид $3a^2 + 3ah + h^2$. Ясно, что при стремлении h к нулю это выражение приближается к $3a^2$, так что $f'(a) = 3a^2$, если $f(x) = x^3$.

Теперь найдем производную функции $y = \sqrt{x}$. Чтобы найти эту производную в точке a, надо узнать, к чему приближается отношение $\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$ при приближении h к нулю. Для этого обозначим $\sqrt{a}$ через b, $\sqrt{a+h}-\sqrt{a}$ через t; тогда $\sqrt{a+h}$ будет равен $b+t$; запишем еще число h в виде

$$h = (a+h) - a = (\sqrt{a+h})^2 - (\sqrt{a})^2 = (b+t)^2 - b^2.$$

Тогда получается:

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{t}{(b+t)^2 - b^2} = \frac{t}{2bt - b^2} = \frac{1}{2b - t}.$$

Когда h приближается к нулю, число $t = \sqrt{a+h}-\sqrt{a}$ тоже приближается к нулю, так что $\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$ приближается к $1/2h = 1/2\sqrt{a}$. Стало быть, производная функции $y = \sqrt{x}$ в точке a равна $1/2\sqrt{a}$. При $a = 1$ получается $1/2$, что согласуется с результатами нашего эксперимента.

Более подробно о производной вы прочитаете в книжках, посвященных основам анализа. Мы же еще напомним только, как производная связана с графиками функций.

Рассмотрим на графике функции $y = f(x)$ секущую, соединяющую точки $(a; f(a))$ и $(a+h; f(a+h))$ (рис. 23.1). Если φ — угол наклона этой секущей к оси абсцисс, то из треугольника PQR имеем $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \operatorname{tg}\varphi$. Когда h уменьшается до нуля, точка $R(a+h; f(a+h))$ сливается с точкой $P(a; f(a))$, секущая PR превращается в касательную к графику в точке P, а отношение $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ превращается в $f(a)$. Стало быть:

> производная функции $y = f(x)$ в точке a равна тангенсу угла между касательной к графику функции в точке $(a; f(a))$ и осью абсцисс.

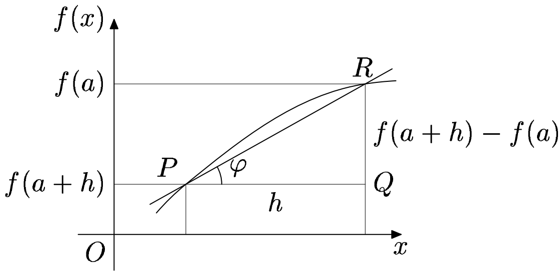


Рис. 23.1.

Теперь перейдем к производным синуса и косинуса. Первое, что тут надо сказать, — это что производную функции $y = \cos x$ мы уже вычисляли. В самом деле, в § 5, где шла речь о наших фирменных часах, мы вычисляли скорость движения проекции конца стрелки на ось абсцисс. Для этого мы делили путь, пройденный этой проекцией за малое время τ, на само τ, то есть вычисляли (для малых τ) отношение $\dfrac{\cos(t+\tau)-\cos t}{\tau}$. С точностью до обозначений это то же отношение, что используется для вычисления производной. Как мы выяснили в § 5, при уменьшении τ это отношение стремится к $-\sin t$, так что производная функции $y = \cos x$ в точке t равна $-\sin t$, или, короче: $(\cos x)' = -\sin x$. Рассуждая аналогичным образом, но рассматривая проекцию на ось ординат, а не абсцисс, можно было бы установить, что $(\sin x)' = \cos x$. Однако рассуждения в § 5 были не слишком аккуратными: по ходу дела мы заменяли длину дуги на длину хорды, считали перпендикулярными прямые, которые перпендикулярными не являются, и тому подобное. Поэтому мы сейчас подсчитаем производные синуса и косинуса другим способом.

Начнем с того, что подсчитаем производную от синуса в точке 0. Согласно определению, для этого надо узнать, к чему приближается отношение

$$\frac{\sin(0+h)-\sin h}{h} = \frac{\sin h}{h},$$

когда h приближается к нулю. Если вспомнить, что для малых

h есть приближенная формула $\sin h \approx h$, то естественно предположить, что это отношение будет приближаться к 1. Чтобы убедиться в этом, вспомним, что для всех h от 0 до $\pi/2$ верны неравенства $\sin h < h$ и $\operatorname{tg} h > h$. Из первого неравенства следует, что $\sin h/h < 1$, а из неравенства $\operatorname{tg} h > h$ (т. е. $\sin h/\cos h > h$) получаем, что $\sin h/h > \cos h$. Итак, отношение $\sin h/h$ заключено между единицей и числом $\cos h$, которое при стремлении h к нулю также приближается к единице. Стало быть, и отношению $\sin h/h$ при приближении h к нулю ничего не остается, как приближаться к единице. Итак, в точке 0 производная синуса равна единице.

Теперь можно найти производную функции $y = \sin x$ в любой точке a. Для этого сделаем такие преобразования:

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)}{h} = \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{h/2} \cdot \cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\right).$$

Когда h приближается к нулю, величина $h/2$ также приближается к нулю. Поэтому первый сомножитель, как мы только что установили, приближается к единице, а второй приближается к $\cos a$, так что значение всего выражения приближается к $\cos a$. Итак, производная функции $\sin x$ в точке a равна $\cos a$, или:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Производную функции $y = \cos x$ можно найти с помощью аналогичных выкладок, преобразуя разность в произведение. Для разнообразия поступим иначе: воспользуемся тем, что $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Тогда производная косинуса в точке a будет вычисляться так:

$$\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+a+h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)}{h};$$

при стремлении h к нулю это последнее выражение стремится, очевидно, к производной функции синус в точке $\frac{\pi}{2} + a$, равной, как мы только что вычислили, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$. Так как $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\sin a$, получаем окончательно, что производная функции $y = \cos x$ в точке a равна $-\sin a$, или:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

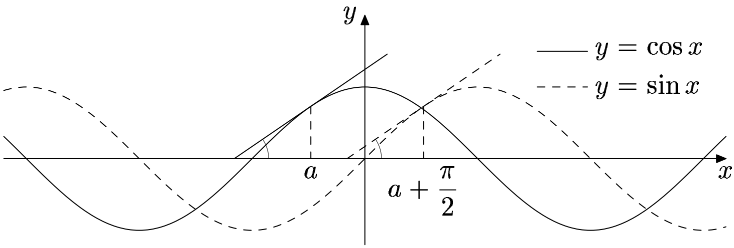


Рис. 23.2.

Наше рассуждение, сводящее вычисление производной косинуса к производной синуса, имеет простой геометрический смысл. В самом деле, как мы помним из § 11, график функции $y = \cos x$ получается из графика функции $y = \sin x$ параллельным переносом на $-\frac{\pi}{2}$ вдоль оси абсцисс; стало быть, и касательная к графику $y = \cos x$ в точке с абсциссой a получается параллельным переносом из касательной к графику $y = \sin x$ в точке с абсциссой $a + \frac{\pi}{2}$ (рис. 23.2). Эти две прямые образуют, очевидно, равные углы с осью абсцисс; однако тангенс угла наклона пунктирной прямой равен производной синуса в точке $a + \frac{\pi}{2}$, то есть равен $\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$ или $-\sin a$. Значит, таков же и тангенс угла наклона сплошной прямой, равный производной косинуса в точке a.

Теперь, когда мы нашли производные синуса и косинуса в любой точке a, мы можем выписать приближенные формулы, пригодные при малых h:

$$\sin(a + h) \approx \sin a + h\cos a; \qquad \cos(a + h) \approx \cos a - h\sin a.$$

Однако, чтобы иметь возможность ими пользоваться, необходимо знать их погрешность. Выясним это.

Начнем опять со случая, когда $a = 0$. Тогда формулы принимают вид $\sin h \approx h$, $\cos h \approx 1$. Для малых h значение $\cos h$ положительно, так что можно записать $\cos h = \sqrt{1 - \sin^2 h}$. С другой стороны, если $0 \leqslant h \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то $\sin h \leqslant h$. Отсюда

$$\cos h = \sqrt{1 - \sin^2 h} \geqslant \sqrt{1 - h^2} \geqslant 1 - h^2$$

(последнее — так как $\sqrt{x} \geqslant x$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$). Стало быть, $1 - \cos h \leqslant h^2$, то есть погрешность формулы $\cos h \approx 1$ не превосходит h^2. Чтобы оценить погрешность формулы $\sin h \approx h$, снова воспользуемся неравенствами $\sin h \leqslant h \leqslant \operatorname{tg} h$:

$$\begin{aligned} h - \sin h \leqslant \operatorname{tg} h - \sin h = \frac{\sin h}{\cos h} - \sin h = \sin h\Bigl(\frac{1}{\cos h} - 1\Bigr) \leqslant \\ \leqslant h\Bigl(\frac{1}{1-h^2} - 1\Bigr) \end{aligned}$$

(мы заменили $\sin h$ и $\frac{1}{\cos h}$ на бо́льшие числа h и $\frac{1}{1-h^2}$ соответственно). Далее, $h\bigl(\frac{1}{1-h^2} - 1\bigr) = \frac{h^3}{1-h^2}$. Если $h \leqslant 0{,}1$, то $1 - h^2 \geqslant 0{,}99$, $\frac{1}{1-h^2} \leqslant 1{,}02$, и $h - \sin h \leqslant 1{,}02h^3$, так что при $|h| \leqslant 0{,}1$ погрешность формулы $\sin h \approx h$ не превосходит $1{,}02|h|^3$.

Теперь можно оценить погрешность формулы

$$\sin(a + h) \approx \sin a + h \cos a.$$

Чтобы это сделать, заметим, что погрешность равна

$$\sin a + h \cos a - \sin(a + h),$$

и раскроем $\sin(a + h)$ по формуле синуса суммы:

$$\begin{aligned} &\sin a + h\cos a - \sin(a+h) = \\ &\qquad = \sin a + h\cos a - \sin a \cos h - \sin h \cos a = \\ &\qquad = \sin a(1 - \cos h) + \cos a(h - \sin h) \leqslant h^2 \sin a + 1{,}02h^3 \cos a \end{aligned}$$

(мы молчаливо предполагаем, что $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, так что $\sin a$ и $\cos a$ неотрицательны; с помощью формул приведения к этому сводятся любые приближенные вычисления синуса и косинуса). Поскольку при $h \leqslant 0{,}1$ будет выполнено неравенство $1{,}02h^3 < h^2$, нашу погрешность можно далее оценить так:

$$h^2 \sin a + 1{,}02h^3 \cos a \leqslant h^2 \sin a + h^2 \cos a \leqslant h^2 + h^2 = 2h^2.$$

Стало быть, погрешность формулы $\sin(a+h) \leqslant \sin a + h\cos a$ не превосходит $2h^2$ (при $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ и $0 \leqslant h \leqslant 0{,}1$). Например, если $h = 0{,}01$, то погрешность не превосходит $0{,}0002$, так что при пользовании формулой $\sin(a+h) \approx \sin a + h\cos a$ три знака после запятой будут верны.

Результат, который мы получили, — иллюстрация общего факта: если f — «достаточно хорошая» гладкая функция, то для малых h погрешность приближенной формулы $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$ не превосходит Mh^2 для некоторого числа M, не зависящего от h.

Задача 23.1. Докажите, что погрешность приближенной формулы $\cos(a+h) \approx \cos a - h\sin a$ также не превосходит $2h^2$ при всех достаточно малых h. Укажите какую-нибудь конкретную границу для h, наподобие $0 \leqslant h \leqslant 0{,}1$ в нашей формуле для синуса (не стремитесь найти наиболее экономную).

Мы ничего не говорили о производных тангенса и котангенса. Они легко находятся из формул для производных синуса и косинуса и следующей формулы для производной частного:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.$$

Применяя эту формулу к $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, получим:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}.$$

Задача 23.2. Докажите, что $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

В заключение покажем, как искать производные от обратных тригонометрических функций. Найдем, например, производную от функции $y = \arcsin x$. Пусть мы ищем эту производную в точке a. Составим отношение $\dfrac{\arcsin(a+h) - \arcsin a}{h}$ и обозначим $\arcsin a = b$, $\arcsin(a+h) - \arcsin a = t$; тогда $\arcsin(a+h) = b + t$, поэтому $h = (a+h) - a = \sin(b+t) - \sin b$, так что

$$\frac{\arcsin(a+h) - \arcsin a}{h} = \frac{t}{\sin(b+t) - \sin b}.$$

Когда h приближается к нулю, t тоже приближается к нулю; величина, обратная к нашему отношению, стремится к производной синуса в точке b, то есть к $\cos b$, а само отношение стремится к $1/\cos b$; так как $b = \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin a)} = \sqrt{1 - a^2},$$

так что производная в точке a равна $1/\sqrt{1 - a^2}$. Итак:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Задача 23.3. Докажите формулы: а) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
б) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

Способ, которым мы нашли производную арксинуса, аналогичен способу, с помощью которого мы нашли производную функции $y = \sqrt{x}$. Если известна производная от какой-то функции, то таким способом можно найти производную от обратной к ней (функции $y = \sqrt{x}$ и $y = \arcsin x$ обратны к функциям $y = x^2$ и $y = \sin x$ соответственно).

Глава 5

Тригонометрия для абитуриентов

§ 24. Как решать тригонометрические уравнения

Повторить: *§ 10. Простейшие тригонометрические уравнения.*
§ 19. Тригонометрические формулы сложения.
§ 20. Формула вспомогательного угла.
§ 21. Двойные, тройные и половинные углы.
§ 22. Преобразование произведения в сумму и суммы в произведение.

С точки зрения поступающего в вуз, важным применением тригонометрии является ее использование в задачах вступительного экзамена. Кроме хорошего знания тригонометрии как таковой, для успешного решения экзаменационных задач необходимо освоить несколько стандартных приемов. Изучению этих приемов и посвящена настоящая глава.

Предполагая, что вы уже умеете решать простейшие тригонометрические уравнения наподобие $\cos x = 0$ или $\sin x = 1/3$, пойдем дальше.

В простых случаях тригонометрическое уравнение можно почти сразу свести заменой переменной к алгебраическому.

Пример 24.1. $\cos^2\frac{x}{3} - 7\cos\frac{x}{3} + 4 = \sin^2\frac{x}{3}$.

Решение. Если бы в правой части не было $\sin^2\frac{x}{3}$, можно было бы сразу же обозначать $\cos\frac{x}{3}$ новой буквой. В данном же случае придется предварительно выразить в правой части $\sin^2\frac{x}{3}$ через $\cos^2\frac{x}{3}$. Заменим $\sin^2\frac{x}{3}$ на $1-\cos^2\frac{x}{3}$:

$$\cos^2\frac{x}{3} - 7\cos\frac{x}{3} + 4 = 1 - \cos^2\frac{x}{3}.$$

Обозначая $\cos\frac{x}{3}$ через t, получаем, после упрощений, $2t^2-7t+3 = 0$. Корни этого уравнения: $t_1 = 3$, $t_2 = 1/2$, так что $\cos\frac{x}{3} = 3$ или $\cos\frac{x}{3} = 1/2$. Первое из этих уравнений не имеет решений, так как $\cos\frac{x}{3} \leqslant 1$; решая второе, получаем $\frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, откуда $x = \pm\pi + 6\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\pm\pi + 6\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Вот еще пример, когда уравнение сводится к простейшим с помощью разложения левой части на множители.

Пример 24.2. $\sin 2x + 4\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 1$.

Решение. Заменим $\sin 2x$ по формуле синуса двойного угла и перенесем все в левую часть:

$$\sin 2x + 4\cos x - \frac{1}{2}\sin x - 1 = 0;$$
$$2\cos x(\sin x + 2) - \frac{1}{2}(\sin x + 2) = 0;$$
$$\left(2\cos x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + 2) = 0,$$

откуда $2\cos x - \frac{1}{2} = 0$ или $\sin x + 2 = 0$, то есть $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = -2$. Решениями первого уравнения будут числа $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$, второе уравнение решений не имеет, так как $\sin x \leqslant$

$\leqslant 1$.

Ответ: $\pm\arccos\dfrac{1}{4}+2\pi n\ (n\in\mathbb{Z})$.

Теперь перейдем к более специфическим приемам.

> Часто решение тригонометрического уравнения находится, если воспользоваться формулой для косинуса двойного угла в одном из следующих вариантов:
>
> $$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;\qquad \cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha.$$

Пример 24.3. $2\sin\dfrac{x}{2}+\cos x+2=0$.

Решение. Так как $\cos x=\cos\Bigl(2\cdot\dfrac{x}{2}\Bigr)=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$, то, обозначая $\sin\dfrac{x}{2}$ через t, получаем уравнение

$$2t+1-2t^2+2=0\Leftrightarrow 2t^2-2t-3=0.$$

Корни этого уравнения равны $\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{2}$, так что наше уравнение равносильно совокупности уравнений $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$ и $\sin\dfrac{x}{2}=$ $=\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$. Первое из этих уравнений не имеет решений, так как $\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}>1$; из второго имеем $\dfrac{x}{2}=(-1)^n\arcsin\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}+\pi n\ (n\in\mathbb{Z})$, откуда

Ответ: $(-1)^n\cdot 2\arcsin\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}+2\pi n\ (n\in\mathbb{Z})$.

Задача 24.1. Решите уравнения: а) $\cos 2x-5\sin x-3=0$; б) $2\cos x=5-9\sin\dfrac{x}{2}$.

> Некоторые уравнения рассчитаны на то, что их будут решать с помощью формул синуса и косинуса тройного угла:
>
> $$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;\qquad \sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$

Задача 24.2. Решите уравнения:

а) $\cos 3x - 18\cos x + 10 = 0$; б) $5\sin x = \sin 3x$;
в) $8\cos 6x \cos 3x - \cos 9x - \cos 3x = 0$.

Следующий тип тригонометрических уравнений, с которыми нам надо познакомиться, — это однородные тригонометрические уравнения. Вообще, однородным уравнением от двух неизвестных u и v называют уравнение

$$a_0u^n + a_1u^{n-1}v + a_2u^{n-2}v^2 + \ldots + a_nv^n = 0, \qquad (*)$$

в котором во всех слагаемых сумма степеней при u и v одна и та же (она называется степенью однородного уравнения). Однородным тригонометрическим уравнением называется уравнение, которое получится из $(*)$, если вместо u и v подставить синус и косинус одного и того же выражения. Вот пример однородного тригонометрического уравнения степени 2:

Пример 24.4. $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.
Решение. Поделим обе части уравнения на $\cos x$. Чтобы это действие было законным, надо убедиться, что выражение, на которое мы делим, не может обращаться в нуль для тех x, которые являются корнями уравнения. В самом деле, если $\cos^2 x = 0$, то $\cos x = 0$; в нашем уравнении второе и третье слагаемые обратятся в нуль, а потому и первое слагаемое обращается в нуль: $\sin^2 x = 0$. Однако $\cos^2 x$ и $\sin^2 x$ не могут одновременно равняться нулю, так что деление на $\cos^2 x$ законно. Поделив, после очевидных упрощений получим: $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$. Обозначая $\operatorname{tg} x = t$, получаем квадратное уравнение, из которого находим t, а затем и сам x.
Ответ: $(\pi/4) + \pi n$; $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Рассуждение, оправдывающее законность деления на $\cos^2 x$, проходит всегда, если только в уравнении присутствует слагаемое с $\sin^2 x$. В противном случае делить на $\cos^2 x$ нельзя, но в этом и нет необходимости, так как можно сразу вынести $\cos x$ за скобку. Приведем пример.

Пример 24.5. $3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Решение. Переписав уравнение в виде $\cos x(3\sin x + 2\cos x) = 0$, получаем, что оно равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{aligned} \cos x &= 0; && (1)\\ 3\sin x + 2\cos x &= 0. && (2)\end{aligned}\right.$$

Решениями уравнения (1) являются $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; для решения уравнения (2) поделим обе части на $\cos x$ (на сей раз это можно, так как если $\cos x = 0$, то из (2) вытекало бы, что $\sin x = 0$, а $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю) и получим $3\operatorname{tg} x + 2 = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = -\dfrac{2}{3}$ и $x = \operatorname{arctg}\Big(-\dfrac{2}{3}\Big) + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$; $\operatorname{arctg}\Big(-\dfrac{2}{3}\Big) + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Кстати, уравнение (2), которое мы решили по ходу дела, — тоже однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$, только первой степени.

Наряду с уравнениями, которые сразу записаны в виде однородных относительно синуса и косинуса, существуют и уравнения, которые можно свести к однородным с помощью следующего приема:

> Если в каждой из частей тригонометрического уравнения стоит сумма выражений вида $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x\cos x$, $\sin 2x, \cos 2x$ (возможно, с какими-то коэффициентами) и свободных членов, то это уравнение сведется к однородному, если всюду заменить $\sin 2x$ на $2\sin x\cos x$, $\cos 2x$ на $\cos^2 x - \sin^2 x$, а каждый свободный член a заменить на $a(\cos^2 x + \sin^2 x)$.

Пример 24.6. $2 - 4{,}5\sin 3x + 5\cos^2\dfrac{3x}{2} = \cos 3x + \sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}$.

Решение. Заметим, что $\sin 3x = \sin\Big(2\cdot\dfrac{3x}{2}\Big) = 2\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{3x}{2}$, $\cos 3x = \cos\Big(2\cdot\dfrac{3x}{2}\Big) = \cos^2\dfrac{3x}{2} - \sin^2\dfrac{3x}{2}$, $2 = 2\Big(\cos^2\dfrac{3x}{2} + \sin^2\dfrac{3x}{2}\Big)$.

С учетом этого уравнение запишется так:

$$2\cos^2\frac{3x}{2}+2\sin^2\frac{3x}{2}-4{,}5\cdot 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}+5\cos^2\frac{3x}{2}= \\ =\cos^2\frac{3x}{2}-\sin^2\frac{3x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2},$$

или, после упрощений:

$$3\sin^2\frac{3x}{2}-10\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}+6\cos^2\frac{3x}{2}=0.$$

Получилось однородное уравнение относительно $\sin\dfrac{3x}{2}$ и $\cos\dfrac{3x}{2}$. Дальнейшее ясно.

Ответ: $\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}+\dfrac{2}{3}\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$.

С помощью описанного приема можно решать и уравнения вида $a\sin x+b\cos x=c$, которые мы решали в § 20 с помощью формулы вспомогательного угла: надо только заменить $\sin x$ на $2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, $\cos x$ — на $\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}$, c — на $c\Bigl(\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}\Bigr)$.

Задача 24.3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$10x^2-13xy+3y^2=0.$$

Задача 24.4. Решите уравнение

$$10x^4-7x^2(x^2+x+1)+(x+x+1)^2=0.$$

Задача 24.5. Решите уравнения:

а) $7\sin^2 x-5\sin x\cos x-\cos^2 x=0$;
б) $\sin^2 x+3\sin x\cos x+2\cos^2 x=1$;
в) $\sin x-\cos x=1$;
г) $4\sin^3 x-5\sin^2 x\cos x+\sin x=\cos^3 x$;
д) $2\sin^3 x+\sin 3x+3\sin^2 x\cos x+\cos^3 x=0$;
е) $3(\cos x-\sin x)=1+\cos 2x-\sin 2x$.

Задача 24.6. При каких значениях a уравнение

$$a\sin x + (a+1)\sin^2\frac{x}{2} + (a-1)\cos^2\frac{x}{2} = 1$$

имеет решение?

> Ключ ко многим уравнениям — это преобразование суммы в произведение и произведения в сумму.

Разберем два примера.

Пример 24.7. $\sin 3x = \cos 5x$.
Решение. Преобразуем $\cos 5x$ по формуле приведения и перенесем его в левую часть. Тогда получим уравнение

$$\sin 3x - \sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Преобразуем в произведение:

$$2\sin\frac{3x - 5x - (\pi/2)}{2}\cos\frac{3x + 5x + (\pi/2)}{2} = 0,$$

$$-2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ или $\cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Решая первое уравнение, получаем $x + \frac{\pi}{4} = \pi n$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Решая второе уравнение, получаем $4x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, откуда $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$ $(n, k \in \mathbb{Z})$.

Пример 24.8. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$.
Решение. Преобразуем обе части следующим образом:

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x);$$

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x + \cos 2x;$$

$$\cos 2x + \cos 8x = 0;$$

$$2\cos 5x\cos 3x = 0,$$

откуда $\cos 5x = 0$ или $\cos 3x = 0$. Дальнейшее ясно.
Ответ: $\pi/10 + \pi n/5$; $\pi/6 + \pi n/3$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Задача 24.7. Решите уравнения:

а) $\cos 3x = \cos 5x$; б) $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$;
в) $\sin 3x - \sin 7x = 3\sin 2x$. г) $\cos 5x + \cos 6x + \cos 7x = 0$;
д) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$;
е) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right)$.

> Некоторые уравнения легко решаются с помощью формулы вспомогательного угла (§ 20).

В дополнение к сказанному в § 20 об этой формуле заметим, что на практике при преобразовании выражений вида $a\sin x + b\cos x$ с конкретными a и b не обязательно пользоваться именно формулой синуса суммы: можно воспользоваться любой другой формулой сложения.

Пример 24.9. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}/2$.
Решение. Преобразуем левую часть так:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \\ = \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x - \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right).$$

Стало быть, уравнение принимает вид $-\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}/2$, откуда $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1/2$. Дальнейшее ясно.
Ответ: $\frac{5\pi}{12} + 2\pi n$; $\frac{11\pi}{12} + 2\pi k$.

Можно было бы решить это уравнение и по-другому, сведя его к однородному относительно $\cos\frac{x}{2}$ и $\sin\frac{x}{2}$.

Задача 24.8. Решите уравнения:

а) $2\sin x + 5\cos x = \sqrt{29}\sin 7x$;
б) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

В некоторых уравнениях решающим переходом является использование формул понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Пример 24.10. $\cos 4x + 2\cos^2 x = 2$.
Решение. Преобразуем уравнение так:

$$\begin{aligned} \cos 4x + 2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} &= 2;\\ \cos 4x + 1 + \cos 2x &= 2;\\ \cos(2\cdot 2x) + 1 + \cos 2x &= 2;\\ 2\cos^2 2x + \cos 2x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Дальнейшее ясно.
Ответ: $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$.

В связи с формулами понижения степени находится еще один частный, но поучительный прием решения тригонометрических уравнений.

Пример 24.11. $\sin x + \cos x = \sin 2x$.
Решение. Пусть $\sin x + \cos x = t$. Тогда

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x,$$

откуда $\sin 2x = t^2 - 1$. Стало быть, уравнение принимает вид $t = t^2 - 1$, откуда $t = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, и уравнение сводится к совокупности двух уравнений: $\sin x + \cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\sin x + \cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Эти уравнения можно далее решать разными известными вам способами (удобнее всего — с помощью формулы вспомогательного угла).

Неопытные люди часто решают это уравнение так: возводят обе части в квадрат, получают, после упрощений, уравнение

$$1 + \sin 2x = \sin^2 2x, \tag{$*$}$$

после чего обозначают $\sin 2x = y$ и действуют далее обычным образом. В полученном ответе, однако, будут посторонние решения. Дело в том, что уравнение

$$\sin x + \cos x = -\sin 2x \qquad (**)$$

после возведения в квадрат тоже дает уравнение $(*)$! Значит, решая $(*)$, мы находим не только то, что нам нужно, но и корни «постороннего» уравнения $(**)$. Именно так и появляются «посторонние корни» при возведении уравнений (не обязательно тригонометрических) в квадрат. В принципе посторонние корни можно отсеять (либо непосредственной подстановкой в исходное уравнение, либо оставив только те из них, при которых обе части возводимого в квадрат уравнения имеют один знак), но в данном случае провести такой отсев было бы непросто.

Задача 24.9. Решите уравнения:

а) $\sin^2 \dfrac{x}{2} + \cos 2x = 1$; б) $\sin^4 x + \cos^4 x = 7/8$;

в) $\sin 2x = \cos^4 \dfrac{x}{2} - \sin^4 \dfrac{x}{2}$;

г) $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = 3/2$;

д) $\cos^2 \dfrac{x}{2} - \cos^2 \dfrac{3x}{2} = \sin^2 2x - \sin^2 4x$;

е) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} + x\right) = \sin x + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} - x\right)$;

ж) $2 + \cos \dfrac{3}{2}x + \sqrt{3} \sin \dfrac{3}{2}x = 4 \sin^2 \dfrac{x}{4}$;

з) $2 \sin x + 2 \cos x + 1 = \sin 2x + 4(\sin^3 x + \cos^3 x)$.

До сих пор мы избегали уравнений, в которых участвуют тангенс или котангенс или же что-то стоит в знаменателе, теперь дошла очередь и до них. Основной новый момент — необходимость следить за областью определения.

Напомним, что выражение $\operatorname{tg} x$ имеет смысл тогда и только тогда, когда $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ ни для какого $n \in \mathbb{Z}$ (иными словами, когда $\cos x \neq 0$). Аналогично выражение $\operatorname{ctg} x$ имеет смысл тогда и только тогда, когда $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (иными словами, когда $\sin x \neq 0$).

Лучше всего в самом начале решения уравнения выписать все необходимые ограничения (если в уравнении присутствует $\operatorname{tg} 2x$, надо написать, что $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$; если какое-то выражение стоит в знаменателе, надо записать, что оно не равно 0, причем не обязательно сразу же «расшифровывать» это ограничение, выясняя, чему именно не может равняться x: ведь для этого может потребоваться решить еще одно уравнение!). В конце решения надо проверить найденные значения неизвестных на вхождение в область определения. Часто это бывает совсем просто. Например, если мы свели уравнение в конечном счете к простейшему уравнению $\cos x = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{6}$, а выписанные нами ограничения имеют вид $\cos x + 1 \neq 0$, то ясно, что все наши x этому ограничению удовлетворяют. Или, допустим, уравнение свелось к совокупности уравнений $\operatorname{tg} 2x = -1$ и $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{1}{3}$, в то время как ограничение было $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, что проистекает из условия «$\operatorname{tg} 2x$ имеет смысл»; тогда опять-таки все найденные нами x подходят: уж если мы знаем, чему равен $\operatorname{tg} 2x$, то заведомо $\operatorname{tg} 2x$ имеет смысл. Бывают и случаи, когда так просто с проверкой не обойдешься; о них речь пойдет в следующем параграфе.

Пример 24.12. $(\cos x + 1)\operatorname{ctg} x = \sin 2x$.
Решение. Выпишем область определения: $x \neq \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Теперь перепишем уравнение, согласно определению котангенса:

$$\frac{(\cos x + 1)\cos x}{\sin x} = \sin 2x.$$

Избавимся от знаменателя и преобразуем:

$$\begin{aligned}
&(\cos x + 1)\cos x = \sin 2x \sin x;\\
&(\cos x + 1)\cos x = 2\sin^2 x \cos x;\\
&(\cos x + 1)\cos x = 2(1-\cos^2 x)\cos x.
\end{aligned}$$

Получилось алгебраическое уравнение относительно $\cos x$; решая его, получаем: $\cos x = 0$, $\cos x = -1$ или $\cos x = 1/2$. Решения первого уравнения имеют вид $\frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$; все эти x входят в область определения, так как для них $\sin x \neq 0$. Решения уравнения $\cos x = -1$ в область определения не входят, так как если $\cos x = -1$, то $\sin x = 0$. Наконец, решения уравнения $\cos x = 1/2$ имеют вид $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$; они в область определения входят (если $\cos x = 1/2$, то $\sin x \neq 0$).

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$ $(n, m \in \mathbb{Z})$.

Задача 24.10. Решите уравнения:

а) $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \dfrac{2\sqrt{3}\cos 2x}{1 + \cos 2x}$; б) $\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sin x} = 4$;

в) $2\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{2}{\sin 2x}$; г) $(\sin 2x + \sin 4x)\operatorname{tg} x = 0$;

д) $\dfrac{1 - \cos x}{\sin(x/2)} = 2$; е) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} + \dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = 2$.

Еще одна неприятность, связанная с областью определения, возникает при применении тригонометрических тождеств, левая или правая часть которых определена не при всех значениях переменных. Если мы заменяем выражение на тождественно равное ему, но с меньшей областью определения, то те значения переменной, при которых определена левая часть тождества, но не определена его правая часть, из рассмотрения выпадают, и даже если какие-то из них являются корнями исходного уравнения, в ответ они заведомо не войдут. Поэтому при каждой такой замене те значения неизвестного, что выпадают из рассмотрения, надо немедленно проверить (например, подстановкой в исходное уравнение).

Пример 24.13. Решим уравнение $3\sin x - 2\cos x = 2$ с помощью «формул универсальной подстановки» (выражающих $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}(x/2)$). Согласно этим формулам,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}, \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}. \tag{$*$}$$

Левые части этих тождеств определены при всех x, а правые — при всех x, кроме тех, для которых $x/2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Поэтому эти значения x надо проверить подстановкой в исходное уравнение. Если $x/2 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, то $x = \pi + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$; подставляя в уравнение, убеждаемся, что эти x являются корнями. Теперь обозначим $\operatorname{tg}(x/2) = t$ и заменим в уравнении $\sin x$ и $\cos x$ по формулам $(*)$. Получим:

$$\frac{6t}{1+t^2} - 2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2.$$

Решая это уравнение, находим:

$$t = 2/3, \quad \operatorname{tg}(x/2) = 2/3, \quad x = 2\operatorname{arctg}(2/3) + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Собирая найденные значения x, получаем
Ответ: $\pi + 2\pi k$; $2\operatorname{arctg}(2/3) + 2\pi n$ $(k, n \in \mathbb{Z})$.

Если бы мы забыли проверить те значения x, при которых $\operatorname{tg}(x/2)$ не имеет смысла, то первая из двух серий решений была бы потеряна.

Задача 24.11. Рассмотрим следующие тригонометрические тождества:

а) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

в) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; г) $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$;

д) $\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$; е) $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

ж) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \cos^2\alpha$; з) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

Разбейте их на такие группы: 1) тождества, у которых области определения левой и правой частей совпадают; 2) тождества, у которых область определения правой части шире, чем область определения левой части; 3) тождества, у которых область определения правой части у́же, чем область определения левой части.

Задача 24.12. Решите уравнение $3\sin x - 2\cos x = 2$, разобранное в предыдущем примере, двумя другими способами: с помощью формулы вспомогательного угла и с помощью сведения к уравнению, однородному относительно $\sin(x/2)$ и $\cos(x/2)$.

Задача 24.13. Решите уравнения:

а) $8\cos x + 6\sin x - \cos 2x - 7 = 0$;
б) $5\sin 2x - 5\cos 2x = \operatorname{tg} x - 5$;
в) $2(1 - \cos 2x) = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$; г) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$.

В заключение параграфа приведем один пример решения системы тригонометрических уравнений, который должен предостеречь вас от типичной ошибки.

Пример 24.14. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos(x+y) = 1; \\ \cos(x-y) = -1. \end{cases}$$

Решение. Эта система, очевидно, равносильна следующей:

$$\begin{cases} x + y = 2\pi k & (k \in \mathbb{Z}); \\ x - y = \pi + 2\pi n & (n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения, находим: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi(k+n)$, $y = -\dfrac{\pi}{2} + \pi(k-n)$. Теперь записываем

Ответ: $(x;y) = \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi(k+n); -\dfrac{\pi}{2} + \pi(k-n)\right)$ $(k, n \in \mathbb{Z})$.

Типичная ошибка при решении этой и подобных систем — обозначить «любое целое число» в двух уравнениях одной и той же буквой:

$$\begin{cases} x + y = 2\pi k; \\ x - y = \pi + 2\pi k; \end{cases}$$

после этого в качестве решений системы получатся пары $(x;y) = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; -\dfrac{\pi}{2}\right)$. Все они решениями действительно являются, но кроме них есть еще много других, скажем $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Чтобы $\cos(x+y)$ равнялся 1, а $\cos(x-y)$ равнялся -1, вполне достаточно, чтобы равенства $x + y = 2\pi k$ и $x - y = \pi + 2\pi n$ выполнялись при *разных* k и n.

Задача 24.14. Изобразите на плоскости множество точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют следующим условиям:

а) системе уравнений из примера 24.14;

б) $\cos x \cos y = 0$;

в) $\begin{cases} \cos x = 0; \\ \cos y = 0. \end{cases}$

г) $\cos x + \cos y = 0$.

Задача 24.15. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sin x \cos y = 1/2; \\ \sin y \cos x = 1/2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y; \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y; \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \cos^2 6x + (\sqrt{5} - 1) \operatorname{ctg}(-9y) = \dfrac{2\sqrt{5} - 1}{4}; \\ \operatorname{ctg}^2(-9y) + (\sqrt{5} - 1) \cos 6x = \dfrac{2\sqrt{5} - 1}{4}. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2y - \operatorname{ctg}(x - y) = 3; \\ 3y + 2 \operatorname{ctg}(x - y) = 8. \end{cases}$

§ 25. Отбор чисел на тригонометрическом круге

Повторить: *§ 6. Определение тригонометрических функций. § 10. Простейшие тригонометрические уравнения.*

В уравнениях, встречавшихся нам до сих пор, при отборе корней получалось так, что при проверке в ответ включалась или же отбрасывалась вся серия целиком. В этом параграфе мы расскажем, что делать в более сложных случаях, когда часть серии в ответ входит, а часть — нет.

Пример 25.1. $\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x} = 0$.

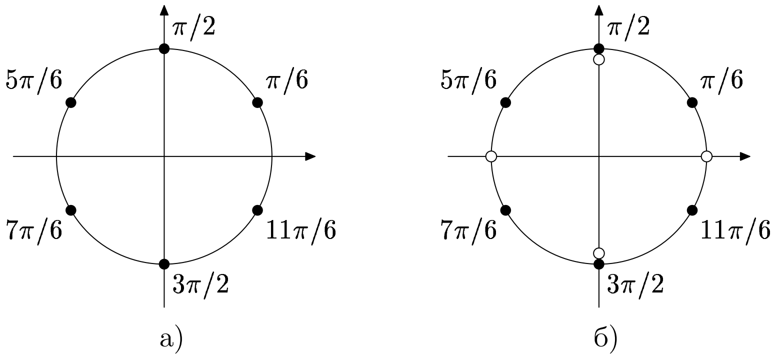


Рис. 25.1.

Решение. Это уравнение, очевидно, равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 3x = 0; \\ \sin 2x \neq 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k; \\ 2x \neq \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}; \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2} \end{cases} \qquad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

Итак, нам нужно из множества всех x, представимых в виде $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}$, где k — некоторое целое число, выкинуть посторонние корни — те, что представимы в виде $\dfrac{\pi n}{2}$, где n — какое-то целое число. Для этого нанесем на тригонометрический круг все числа вида $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}$, где $k \in \mathbb{Z}$ (рис. 25.1а).

При этом получится 6 точек, обозначенных на рис. 25.1а. Эти точки появляются, если взять любые 6 последовательных значений n, при остальных n точки будут повторяться. Более того, ясно, что всякое число, которому соответствует одна из отмеченных на рис. 25.1а точек, имеет вид $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}$ для некоторого целого k.

Если нанести на этот рисунок еще и точки, соответствующие числам вида $\dfrac{\pi n}{2}$, то у нас получится рис. 25.1б (точки, соответствующие числам $\dfrac{\pi n}{2}$, отмечены белыми кружками). Ответом к нашему уравнению будут числа, представимые в виде $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}$ и при этом не представимые в виде $\dfrac{\pi n}{2}$. Иными словами, решения уравнения — числа, которым соответствуют черные кружки, не совпадающие с белыми. Обращаясь к рис. 25.1б, видим, что таких кружков ровно четыре, и каждому из них соответствует бесконечная серия значений x: $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$; $\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n$; $\dfrac{11\pi}{6}+2\pi n$. Можно также объединить первую серию с третьей, а вторую — с четвертой. Тогда ответ запишется так: $x=\dfrac{\pi}{6}+\pi n$; $x=\dfrac{5\pi}{6}+\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$.

Мы не случайно при записи системы

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}; \\ x\neq\dfrac{\pi n}{2} \end{cases}$$

использовали две разные буквы для обозначения «произвольного целого числа»: ведь если $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3}=\dfrac{\pi n}{2}$, где $k\neq n$, то x — все равно посторонний корень. Например, так будет при $k=4$ и $n=3$ (получается посторонний корень $3\pi/2$).

Пример 25.2. $\dfrac{\cos(x/2)}{\sin(x/3)}=0$.

Решение Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos(x/2)=0; \\ \sin(x/3)\neq 0 \end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases} x=\pi+2\pi k; \\ x\neq 3\pi n \end{cases} \quad (k,n\in\mathbb{Z}).$$

Попробуем действовать так же, как и в предыдущем примере: нанесем на тригонометрический круг черные точки — числа вида $\pi+2\pi k$ и белые точки — числа вида $3\pi n$. То, что получится, изображено на рис. 25.2.

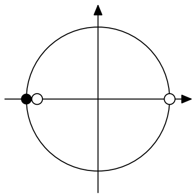


Рис. 25.2.

На основании этого рисунка надо, казалось бы, сделать вывод, что решений у уравнения нет: ведь на рисунке нет черных точек, не совпадающих с белыми. Тем не менее легко видеть, что, скажем, число $x = \pi$ будет решением уравнения. Где же мы ошиблись? Дело в том, что изображение чисел вида $3\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, на тригонометрическом круге неадекватно: верно, что все такие числа изображаются одной из белых точек на рис. 25.2, но неверно, что все числа, соответствующие белым точкам, имеют вид $3\pi n$ с целым n: белым точкам на рис. 25.2 соответствуют и числа π, 2π, 4π, 5π и т. д.

Вообще, изображение множества чисел на тригонометрическом круге будет адекватно, только если это множество «имеет период 2π»: вместе с каждым числом x содержит числа $x - 2\pi$ и $x + 2\pi$. В частности, будет иметь период 2π множество решений уравнения, обе части которого имеют период 2π как функции от x.

Доведем теперь до конца решение уравнения $\dfrac{\cos(x/2)}{\sin(x/3)} = 0$. Все, что нам нужно, — выяснить, для каких целых чисел k число $x = \pi + 2\pi k$ окажется посторонним корнем. Это будет тогда, когда найдется такое число $n \in \mathbb{Z}$, что $\pi + 2\pi k = 3\pi n$. Сокращая в этом равенстве на π, получаем вопрос, к которому все сводится: для каких $k \in \mathbb{Z}$ существует такое $n \in \mathbb{Z}$, что $1 + 2k = 3n$?

Чтобы ответить на этот вопрос, выразим k через n: $k = \dfrac{3n-1}{2}$; выделим из этой дроби «целую часть»:

$$k = \frac{3n-1}{2} = \frac{2n+n-1}{2} = n + \frac{n-1}{2}. \qquad (*)$$

Так как k и n — целые числа, то $\dfrac{n-1}{2}$ — тоже целое число. Значит, $\dfrac{n-1}{2} = m$, $n = 2m+1$ $(m \in \mathbb{Z})$. Подставляя в $(*)$, получаем $k = 3m+1$ $(m \in \mathbb{Z})$. Итак, мы получили ответ на наш вопрос: посторонние корни получаются при $k = 3m+1$, $m \in \mathbb{Z}$. Нас же интересуют как раз все остальные k. Ясно, что сказать «$k \neq 3m+$

1, $m \in \mathbb{Z}$»—все равно, что сказать «число k при делении на 3 дает остаток, не равный 1». Однако кроме единицы при делении на 3 возможны только остатки 0 или 2. Так что можно еще сказать, что для числа $x = \pi + 2\pi k$, являющегося корнем, число k дает при делении на 3 остаток 0 или 2, или, иными словами, $k = 3m$ или $k = 3m + 2$, $m \in \mathbb{Z}$. Подставляя это выражение для k, получаем окончательно ответ: $x = \pi + 6\pi m$ или $x = 5\pi + 6\pi m$.

Прием, позволивший нам выделить «плохие» значения k, срабатывает всегда; как им пользоваться в общем случае, рассказано в приложении к этому параграфу.

Заметим еще, что и для уравнения $\dfrac{\cos(x/2)}{\sin(x/3)} = 0$ можно было бы обойтись изображением чисел на круге. Для этого надо было бы сделать замену переменной $x = 6t$. После этого уравнение принимает вид $\dfrac{\cos 3t}{\sin 2t} = 0$. Левая часть этого уравнения уже имеет период 2π как функция от t, так что его можно решать, отбирая числа на круге. Найдя t, остается найти $x = 6t$.

Задача 25.1. Решите уравнения:

а) $\dfrac{\sin 3x}{\cos 6x} = 0$; б) $\dfrac{\sin 4x}{\cos 5x} = 0$;

в) $\dfrac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1$; г) $\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x} = 1$;

д) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x$.

Задача 25.2. Решите уравнения:

а) $\sin 3x + \cos 4x = 2$; б) $\sin 3x - \cos 2x = 2$;

в) $\sin 4x + |\sin 5x| = 2$; г) $\sin^3 5x + \sin^4 7x = 2$;

д) $\sin \dfrac{x}{3} - \sin \dfrac{x}{4} = -2$.

Указание к пункту а). При всех x верны неравенства $\sin 3x \leqslant 1$, $\cos 4x \leqslant 1$. Складывая их, получаем, что $\sin 3x + \cos 4x \leqslant 2$, причем равенство достигается только в том случае, когда оба слагаемых одновременно равны 1.

Задача 25.3. Решите уравнения:

а) $\sin 6x \cos 8x = 1$; б) $\cos 4x \cos 5x = 1$;

в) $\cos 8x \cos 3x = -1$; г) $\sin \dfrac{x}{10} \cos \dfrac{x}{3} = -1$;

д) $\cos \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{5} = 1$.

Указание к пункту а). При всех x верны неравенства $|\sin 6x| \leqslant 1$, $|\cos 8x| \leqslant 1$. Следовательно, $\sin 6x \cos 8x = 1$ тогда и только тогда, когда оба сомножителя одновременно равны 1 или -1.

Задача 25.4. а) Решите уравнение $\cos x + \cos(x\sqrt{2}) = 2$.

б) При каких значениях a уравнение $\cos x + \cos(ax) = 2$ имеет бесконечно много решений?

Приложение. Линейные неопределенные уравнения с двумя неизвестными

При отборе корней тригонометрических уравнений иногда приходится отвечать на вопросы наподобие: «для каких $k \in \mathbb{Z}$ существует такое $n \in \mathbb{Z}$, что $44k + 6 = 166n$»? Посмотрим на этот вопрос немного с другой стороны: выясним, для каких вообще целых k и n выполняется равенство $166n - 44k = 6$. Такого рода задачи называются неопределенными уравнениями (точнее говоря, линейными неопределенными уравнениями с двумя неизвестными, но эти уточняющие слова мы будем опускать, поскольку других неопределенных уравнений нам не встретится). Расскажем, как можно решать такие уравнения.

Первое, что надо сделать для решения неопределенного уравнения, — это найти наибольший общий делитель коэффициентов при неизвестных и попробовать сократить на него обе части уравнения (разумеется, свободный член должен при этом остаться целым числом). Рассмотрим, например, уравнение $21k - 24n = 8$. Наибольший общий делитель коэффициентов равен 3, и сократить на него не удается, так как 8 на 3 не делится. Тогда можно сразу сказать, что это уравнение решений в целых числах не имеет. В самом деле, если $(k; n)$ — решение этого уравнения[1], то левая

[1] В этом приложении под «решением» мы всегда понимаем целочисленное решение.

часть делится на 3 (так как на 3 делятся оба коэффициента), а правая часть на 3 не делится. Значит, у этого уравнения решений нет. Сформулируем примененное нами соображение в общем виде:

> Если в уравнении $ax+by=c$ (с целыми a, b и c) коэффициенты a и b делятся на некоторое число d, а свободный член c не делится на d, то это уравнение не имеет решений в целых числах.

Мы указали одну причину, по которой наше неопределенное уравнение может не иметь решений. Оказывается, во всех остальных случаях решения обязательно будут.

> Если в неопределенном уравнении $ax+by=c$ свободный член c делится на наибольший общий делитель коэффициентов a и b (в частности, так будет, если a и b вообще не имеют общих делителей, кроме единицы), то уравнение обязательно имеет решения в целых числах.

Мы не будем доказывать это утверждение, а просто покажем, как искать решения.

Решим уравнение $166n-44k=6$. Для начала, как мы уже говорили, поделим обе части на 2: $83n-22k=3$. Теперь выберем ту неизвестную, коэффициент при которой меньше по абсолютной величине — в нашем случае это k, — и выразим ее через другую неизвестную: $k=\dfrac{83n-3}{22}$. Выделим в этой дроби целую часть:

$$k=\frac{83n-3}{22}=\frac{66n+17n-3}{22}=3n+\frac{17n-3}{22}. \qquad (*)$$

Как видите, целочисленные решения нашего уравнения будут получаться, если подставлять в него все те целые n, для которых число $\dfrac{17n-3}{22}$ тоже будет целым: ведь тогда из $(*)$ получается, что и k — целое число. Но как же узнать, когда число $\dfrac{17n-3}{22}$ будет целым? Для этого обозначим $\dfrac{17n-3}{22}$ буквой t и запишем:

$\dfrac{17n-3}{22} = t$, или $17n - 3 = 22t$. Как видите, снова получилось неопределенное уравнение, но его коэффициенты уже меньше, чем у исходного. Проделаем с этим новым уравнением ту же операцию, что и с исходным: выразим из него ту неизвестную, коэффициент при которой меньше по абсолютной величине (на сей раз это будет n), и выделим из получающейся дроби целую часть:

$$n = \frac{22t+3}{17} = \frac{17t+5t+3}{17} = t + \frac{5t+3}{17}. \qquad (**)$$

Из $(**)$ видно, что число $\dfrac{5t+3}{17}$ обязано быть целым. Обозначим его буквой s: $\dfrac{5t+3}{17} = s$, $5t+3 = 17s$. Продолжая в том же духе, выразим t через s:

$$t = \frac{17s-3}{5} = 3s + \frac{2s-3}{5}.$$

Обозначим, далее, $\dfrac{2s-3}{5}$ буквой v: $\dfrac{2s-3}{5} = v$, $2s - 3 = 5v$, $s = \dfrac{5v+3}{2} = 2v + \dfrac{v+3}{2}$. Обозначим, наконец, $\dfrac{v+3}{2}$ буквой u: $\dfrac{v+3}{2} = u$, $v = 2u - 3$. В этом месте наши мучения и кончаются. В самом деле, нам надо выяснить, для каких целых v число $\dfrac{v+3}{2}$ будет целым, и ответ на этот вопрос уже готов: если $v = 2u - 3$, где u — любое целое число! (дело тут, конечно, в том, что в неопределенном уравнении $v = 2u - 3$ коэффициент при v равен единице). Теперь, чтобы получить решения исходного уравнения, нам осталось последовательно выразить v через u, s через v, t через s, n через t и k через n. Отправимся в обратный путь: $v = 2u - 3$; $s = 2v + \dfrac{v+3}{2} = 5u - 6$; $t = 3s + \dfrac{2s-3}{5} = 17u - 21$; $n = t + \dfrac{5t+3}{17} = 22u - 27$; $k = 3n + \dfrac{17n-3}{22} = 83u - 102$. Итак, решение получено: $k = 83u - 102$, $n = 22u - 27$, где u — произвольное целое число. Стало быть, ответ на наш исходный вопрос таков: пусть k — целое число. Тогда $44k + 6 = 166n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $k = 83u - 102$, где $u \in \mathbb{Z}$.

Изложенный нами способ нахождения решения линейного неопределенного уравнения с целыми коэффициентами называется *алгоритмом Евклида.*

Задача 25.5. Для каких целых k существует такое целое n, что $7k - 19 = 5n$?

Задача 25.6. Решите уравнения в целых числах:

а) $17x + 19y = 1$; б) $26x - 78y = 143$; в*) $7x^2 - 4y = 5$.

Задача 25.7. При решении в целых числах уравнения $166n - 44k = 6$ нам пришлось ввести помимо n и k четыре дополнительные переменные (t, s, v и u). Приведите пример неопределенного уравнения вида $ax + by = c$, в котором a и b — двузначные числа, для решения которого по изложенному методу надо ввести восемь дополнительных переменных. Попробуйте также доказать, что большего количества дополнительных переменных при двузначных a и b никогда не потребуется.

§ 26. Как решать тригонометрические неравенства

Повторить: *§ 6. Определение тригонометрических функций. § 11. Графики синуса и косинуса.*

Мы начнем с простейших неравенств, к которым любое тригонометрическое неравенство в конечном счете сводится.

Пример 26.1. $\sin x > 1/2$.

Решение. Для начала выясним, какие точки на тригонометрической окружности соответствуют решениям неравенства. Это — точки, ордината которых больше $1/2$, и на окружности они заполняют дугу PQ, отмеченную на рис. 26.1.

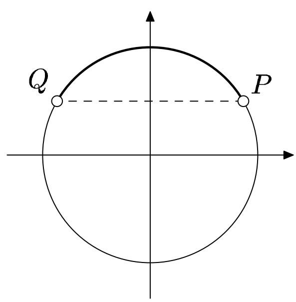


Рис. 26.1.

Теперь можно записать множество чисел, соответствующих точкам на дуге PQ. Ясно, что это множество содержит интервал

$(\pi/6; 5\pi/6)$ ($\pi/6$ соответствует точке P, $5\pi/6$ — точке Q), а вообще наше множество состоит из всех интервалов $(\pi/6+2\pi k; 5\pi/6+2\pi k)$, где k — целое: ведь если точке на тригонометрической окружности соответствует число x, то ей же соответствуют и все числа вида $x + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) (рис. 26.2).

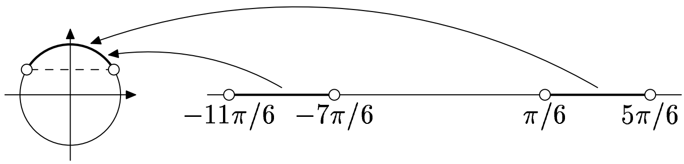


Рис. 26.2.

Ответ к неравенству можно записать так:

$$(\pi/6 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi k) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

или еще проще: $\pi/6 + 2\pi k < x < 5\pi/6 + 2\pi k$.

Пример 26.2. $\sin x \leqslant 1/3$.

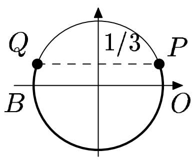


Рис. 26.3.

Решение. На тригонометрической окружности множество решений неравенства изобразится дугой PQ, отмеченной на рис. 26.3. Нам нужно выбрать на числовой оси какой-нибудь отрезок, соответствующий этой дуге, и тогда останется только прибавить к его границам $2\pi n$. Выберем какое-нибудь число, соответствующее одному из концов дуги. Очевидно, точке P соответствует $\arcsin\dfrac{1}{3}$. Раз это число выбрано, выбор числа, соответствующего другому концу, уже предопределен. Чтобы найти это число, надо сдвинуться из точки $\arcsin\dfrac{1}{3}$ на числовой оси в отрицательном направлении на расстояние, равное длине дуги PQ. Точке O на окружности соответствует ноль, точке B — число $-\pi$, а точке Q — число, расположенное еще на $\arcsin\dfrac{1}{3}$ левее, то есть $-\pi - \arcsin\dfrac{1}{3}$. Стало быть, один из отрезков, соответствующих дуге PQ, будет $\left[-\pi-\arcsin\dfrac{1}{3}; \arcsin\dfrac{1}{3}\right]$, а ответом к неравенству $\sin x \leqslant 1/3$ будет объединение отрезков

$$\Bigl[-\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k; \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k\Bigr] \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Разумеется, тот же ответ можно представить и по-иному, например

$$\Bigl[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k\Bigr]; \quad \Bigl[\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\Bigr].$$

Пример 26.3. $\operatorname{tg} x > -\frac{3}{4}$.

Решение. Используя ось тангенсов, легко убедиться, что на тригонометрической окружности решения неравенства изображаются двумя дугами, отмеченными на рис. 26.4. Дуге PQ соответствует интервал $\bigl(-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg}(-\frac{3}{4})\bigr)$, а дуге MN — интервал $\bigl(\frac{\pi}{2}; \pi + \operatorname{arctg}(-\frac{3}{4})\bigr)$. Второй из этих интервалов получается из первого сдвигом на π, так что ясно, что ответ к неравенству — это объединение интервалов

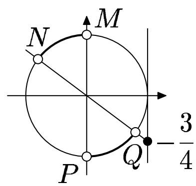


Рис. 26.4.

$$\Bigl(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg}\Bigl(-\frac{3}{4}\Bigr) + \pi n\Bigr) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

При решении простейших тригонометрических неравенств можно также пользоваться не тригонометрическим кругом, а графиками. Например, чтобы решить то же неравенство $\sin x \leqslant 1/3$, достаточно отметить на числовой оси такие точки, что лежащие над ними точки графика $y = \sin x$ имеют ординату не более $1/3$ (рис. 26.5). По этому рисунку легко записать ответ.

При оформлении решений простейших тригонометрических неравенств не надо записывать рассуждений наподобие тех, что мы проводили в этих примерах: достаточно рисунка наподобие рис. 26.3 и ответа. Можно также нарисовать рисунок наподобие рис. 26.5 и опять же записать ответ.

Задача 26.1. Решите неравенства:

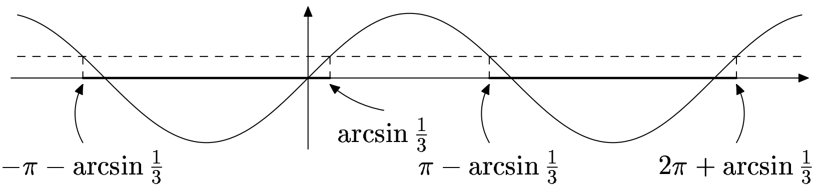


Рис. 26.5.

а) $\cos x \geqslant 0$; б) $\sin x < 0$;
в) $\cos 100x \geqslant 0$; г) $\cos\dfrac{x}{100} \leqslant 0$;
д) $\operatorname{tg} 2x < 0$.

Задача 26.2. Решите неравенства:

а) $\sin 2x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x < -\dfrac{1}{2}$;
в) $|\sin x| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{tg} x \geqslant 1$;
д) $|\operatorname{tg} x| > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 26.3. Решите неравенства:

а) $\sin x < \dfrac{1}{4}$; б) $\cos 3x > -\dfrac{2}{9}$; в) $|\sin x| \leqslant \dfrac{\sqrt{10}}{10}$;
г) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{5}$.

Задача 26.4. Решите неравенства:

а) $\sin x > \sin 1$; б) $\sin x \leqslant \sin 7$; в) $\cos x > \cos 10$;
г) $\cos x \leqslant \sin 2$; д) $\operatorname{tg} x < \operatorname{ctg} 10$.

Задача 26.5. Решите неравенства:

а) $2\sin^2 x - 3\cos x - 1 \geqslant 0$;
б) $9\cos 4x + 6\cos 2x + 5 < 0$;
в) $\cos 2x - 2\sin x + 5 > 0$.

Задача 26.6. Решите неравенства:

а) $\arccos x \geqslant \dfrac{\pi}{3}$; б) $\arccos x < 2$;

в) $\arcsin x \leqslant -\dfrac{1}{4}$; г) $\arccos x < \dfrac{\pi}{6}$.

Приведем пример решения более сложного неравенства.

Пример 26.4. $\dfrac{2\sin x + 1}{2\cos\dfrac{x}{2} - 1} \geqslant 0.$

Решение. Мы применим «метод интервалов», который должен быть вам знаком по решению рациональных неравенств. Рецепт таков: надо на числовой оси отметить те точки, в которых обращаются в нуль числитель и знаменатель; на каждом из интервалов, на которые делится этими точками числовая ось, знак левой части будет постоянен, и останется только записать ответ как объединение интервалов с нужным знаком. В случае тригонометрических неравенств точек и интервалов будет, как правило, бесконечно много, однако они будут периодически повторяться, поэтому достаточно все проделать на отрезке длиной в период.

В нашем случае наименьшим периодом числителя будет 2π, а знаменателя 4π. Будем поэтому рассматривать знак левой части на отрезке $[0; 4\pi]$: его длина равна 4π, а это число служит периодом как числителя, так и знаменателя.

Легко видеть, что на отрезке $[0; 4\pi]$ числитель обращается в нуль в точках $\dfrac{7\pi}{6}$, $\dfrac{11\pi}{6}$, $\dfrac{19\pi}{6}$ и $\dfrac{23\pi}{6}$, а знаменатель — в точках $\dfrac{2\pi}{3}$ и $\dfrac{10\pi}{3}$. Знаки числителя, знаменателя и левой части удобно записать в таблице (точки, в которых знаменатель обращается в нуль, мы в интервалы не включили).

Интервал	$\left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right)$	$\left(\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{7\pi}{6}\right]$	$\left[\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right]$	$\left[\dfrac{11\pi}{6}; \dfrac{19\pi}{6}\right]$
$2\sin x + 1$	$+$	$+$	$-$	$+$
$2\cos\dfrac{x}{2} - 1$	$+$	$-$	$-$	$-$
Левая часть	$+$	$-$	$+$	$-$

Интервал	$\left[\frac{19\pi}{6}; \frac{10\pi}{3}\right)$	$\left[\frac{10\pi}{3}; \frac{23\pi}{6}\right]$	$\left[\frac{23\pi}{6}; 4\pi\right]$
$2\sin x + 1$	$-$	$-$	$+$
$2\cos\frac{x}{2} - 1$	$-$	$+$	$+$
Левая часть	$+$	$-$	$+$

Теперь, выделяя промежутки, на которых левая часть неотрицательна, и прибавляя к их концам $4\pi k$, получаем

Ответ: $\left[4\pi k; \frac{2\pi}{3} + 4\pi k\right)$; $\left[\frac{7\pi}{6} + 4\pi k; \frac{11\pi}{6} + 4\pi k\right]$; $\left[\frac{19\pi}{6} + 4\pi k; \frac{10\pi}{3} + 4\pi k\right]$; $\left[\frac{23\pi}{6} + 4\pi k; 4\pi + 4\pi k\right]$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Задача 26.7. Ответ к неравенству из примера 26.4 можно записать и так: $\left[\frac{7\pi}{6} + 4\pi k; \frac{11\pi}{6} + 4\pi k\right]$; $\left[\frac{19\pi}{6} + 4\pi k; \frac{10\pi}{3} + 4\pi k\right]$; $\left[\frac{23\pi}{6} + 4\pi k; \frac{14\pi}{3} + 4\pi k\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Убедитесь, что ответ в этой форме задает то же самое множество значений x.

Задача 26.8. Решите неравенства:

а) $\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x} \leqslant 0$; б) $\cos 2x \geqslant \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$;

в) $\dfrac{3\sin x + 1}{2\cos x + 1} < 1$.

§ 27. Задачи на повторение

Задача 27.1. Решите уравнения:

а) $\sin x + \cos x = \cos 2x$; б) $\sin^2 x + \cos^2 3x = 1$;

в) $\dfrac{\cos^2 3t}{\operatorname{tg} t} + \dfrac{\cos^2 t}{\operatorname{tg} 3t} = 0$; г) $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin 2x$;

д) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$; е) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 4\sin x$;

ж) $5\sin x + 12\cos x = 13\sin 3x$;

з) $\cos^2 x - \cos^4 x = \sin^2 x \sin 3x - 1$;
и) $3 \operatorname{ctg} t - 3 \operatorname{tg} t + 4 \sin 2t = 0$;
к) $\sin x - \cos x + 5 \sin x \cos x = 1$;
л) $\sin x(3 \sin 2x \sin^3 x + 12 \sin 2x \sin x - 16 \cos x) + 2 \sin 4x = 0$;
м) $2 \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 1 = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;
н) $\sin 3x \sin x + 1 = \cos 2x$;
о) $\cos 2x + 2 \cos x + 7 = 2 \sin\left(\dfrac{7\pi}{2} + x\right) + 4 \sin^2 \dfrac{x}{2}$;
п) $4(\sin 4x - \sin 2x) = \sin x(4 \cos^2 3x + 3)$;
р) $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$;
с) $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x = \sqrt{3} + \sin 2x$;
т) $\sin x + \cos 4x + 2 \sin 5x = 4$.

Задача 27.2. Решите уравнения

а) $\sqrt{5 \cos x - \cos 2x} + 2 \sin x = 0$;
б) $\sqrt{1 - 4 \sin x} = \sqrt{1 - 4 \cos 2x}$;
в) $(1 + 2 \cos x)\sqrt{\sin(x + \pi/4)} = 0$;
г) $\sqrt{\dfrac{1}{2} + \sin x} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \sin 3x}$;
д) $\sqrt{2 \sin x \sin 2x} = \sqrt{5 \cos x + 4 \sin 2x}$;
е) $\sqrt{5 \sin x - \cos 2x} + 2 \cos x = 0$;
ж) $\sqrt{\cos 2x + \sin \dfrac{x}{2}} = \sqrt{\sin x + \sin \dfrac{x}{2}}$.

Указание. Уравнение $\sqrt{a} = b$ равносильно системе $\begin{cases} a = b^2; \\ b \geqslant 0, \end{cases}$ уравнение $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ равносильно любой из систем $\begin{cases} a = b; \\ a \geqslant 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = b; \\ b \geqslant 0. \end{cases}$

Задача 27.3. Решите уравнения:

а) $\left|\cos^2 \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3}\right| = 3 \cos x + 1$;
б) $\dfrac{|\cos x|}{\cos x} = \cos 2x - 1$;

в) $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$;

г) $\cos\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) = \dfrac{1}{2}$;

д) $\sin\left(\pi\sqrt{8}\cos x\right) = \cos\left(\pi\sqrt{8}\sin x\right)$;

е) $\cos(\pi \operatorname{arcctg}^2 x) = \dfrac{1}{2}$;

ж) $\sin\left(\dfrac{13\pi}{9}\cdot\sin x\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 27.4. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\sin\left(y - \dfrac{3\pi}{4}\right); \\ \operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} y = 2\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right). \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{\cos 2x}\cos x = 0; \\ 2\sin^2 x - \cos\left(2y - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2}; \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sin(x - y) = 2\cos x \sin y; \\ \cos(2x + y) + \cos x \cos y = 0. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 4\sin x - 2\sin y = 3; \\ 2\cos x - \cos y = 0. \end{cases}$

е) $\begin{cases} \sqrt{1 + \sin x \sin y} = \cos x; \\ 2\sin x \operatorname{ctg} y + 1 = 0. \end{cases}$

Задача 27.5. Решите неравенства:

а) $\cos 2x \geqslant \sin x$;
б) $\cos 2x > \cos x - \sin x$;
в) $2\cos x(\cos x - \sqrt{8}\operatorname{tg} x) < 5$;
г) $4\sin x \sin 2x \sin 3x \geqslant \sin 4x$;
д) $(\cos x - \cos 5x)(2\sin x + 3\cos x + 4) > 0$;
е) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 \geqslant \dfrac{|\operatorname{tg} x - \sqrt{3}| + \sqrt{3}}{\operatorname{ctg} x}$.

Задача 27.6. Решите уравнения:

а) $\sin^2 x + \cos^2 14x = \sin x + \cos 14x - \dfrac{1}{2}$;
б) $x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0$;
в) $\sin^{10} x + \cos^{16} x = 1$;
г) $\sin^2 x - 2\sin x \sin y - 2\cos^2 y + \cos^4 y + \dfrac{1}{4} = 0$;
д) $2\sqrt{3}\sin 5x - \sqrt{3}\sin x = \cos 24x \cos x + 2\cos 5x - 6$.

Задача 27.7. Найдите $\sin\alpha$, если $\sin 2\alpha \geqslant \dfrac{3}{5}$ и $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \dfrac{1}{3}$.

Задача 27.8. При каждом значении параметра a решите уравнение

$$3\cos x \sin a - \sin x \cos a - 4\cos a = 3\sqrt{3}.$$

Задача 27.9. Найдите множество значений функции

$$y = \sin^2 x - 12\sin x \cos x + 3\cos^2 x + 1.$$

Глава 6

Комплексные числа

§ 28. Что такое комплексные числа

Повторить: *§ 17: векторы на плоскости.*

В этой главе мы познакомимся с комплексными числами, о которых уже неоднократно упоминали. Итак, что же это такое?

Как известно, из отрицательного числа извлечь квадратный корень невозможно: квадраты всех чисел неотрицательны. Давайте, однако, вообразим, что нашлось такое необычное число i, квадрат которого равняется -1. Посмотрим, что получится, если это число i добавить к обычным числам.

Для начала поумножаем i на само себя: $i^2 = -1$ (как мы и договаривались), тогда $i^3 = (i^2) \cdot i = (-1) \cdot i = -i$; $i^4 = i^3 i = (-i) \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$ и т. д.

Задача 28.1. Чему равно i^5? i^6? i^{2003}?

Теперь давайте умножать число i на обычные числа и складывать его с обычными числами. При этом будут получаться выражения наподобие $1 - i$, $-4i$, $2 + 5i$ и т.д. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, такие выражения можно складывать и перемножать; поскольку i^2 всякий раз можно заменять на -1, в выражения, получающиеся после упрощений, i будет входить не более чем в первой степени:

$$(2+5i)+(3-i)=2+3+5i-i=5+4i;$$
$$(2+5i)(3-i)=6+15i-2i-5i^2=6+13i-5(-1)=11+13i.$$

Задача 28.2. Упростите выражения: а) $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$; б) $(1+i)^{20}$.

Имея в распоряжении число i, мы можем извлечь корень не только из -1, но и из любого отрицательного числа. Например, в качестве $\sqrt{-2}$ подойдет число $i\sqrt{2}$, поскольку $(i\sqrt{2})^2=i^2\cdot 2=-2$. Впрочем, $-i\sqrt{2}$ также даст в квадрате -2; число $-i\sqrt{2}$ мы тоже будем называть квадратным корнем из -2. Выделять из этих двух квадратных корней один «арифметический корень» мы не будем: для чисел, в записи которых участвует i, не удается разумным образом определить, какие из них следует считать положительными, а какие — отрицательными.

Задача 28.3. Пользуясь формулой для корней квадратного уравнения, найдите корни уравнения $x^2-4x+5=0$ (дискриминант этого уравнения отрицателен, так что в их записи будет участвовать i). Проверьте найденные значения x, подставив их в уравнение.

А если выражение с i стоит в знаменателе? Сейчас мы увидим, что всякую дробь, в знаменателе которой присутствует i, можно преобразовать так, чтобы в знаменателе были только обычные числа. Покажем это на примере.

Пусть требуется упростить выражение $\dfrac{1}{2+3i}$. Поступим так же, как мы делали, когда в школьных примерах избавлялись от иррациональности в знаменателе: домножим числитель и знаменатель на «сопряженное выражение» $2-3i$:

$$\frac{1}{2+3i}=\frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2-3i}{4-(-9)}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i.$$

Задача 28.4. Упростите выражения: а) $\dfrac{7-11i}{3+i}$; б) $\dfrac{1}{i}$.

Теперь можно ответить на вопрос, стоящий в заглавии этого параграфа: комплексные числа — это те самые выражения с участием i, которыми мы до сих пор занимались. Точнее говоря:

> Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b — обычные (действительные, или вещественные) числа. Комплексные числа $a + bi$ и $c + di$ считаются равными, если $a = c$ и $b = d$. Чтобы сложить или перемножить два комплексных числа, надо раскрыть скобки и привести подобные члены, заменяя i^2 на -1.

Если провести это приведение подобных в общем виде, получится вот что:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Чтобы поделить одно комплексное число на другое, надо «домножить на сопряженные»:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Задача 28.5. Умножьте $\dfrac{a + bi}{c + di}$, вычисленное по вышеприведенной формуле, на $c+di$ и убедитесь, что действительно получится $a+bi$ (то есть что деление комплексных чисел действительно является действием, обратным к умножению).

Комплексное число $a+bi$ удобно изображать точкой на плоскости с координатами $(a; b)$ (рис. 28.1). Абсцисса этой точки, то есть a, называется вещественной (или действительной) частью числа $a+bi$, а ордината этой точки, то есть b, называется мнимой частью числа $a + bi$. Плоскость с системой координат, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью.

Комплексные числа, мнимая часть которых равна нулю, располагаются при таком изображении на оси абсцисс (когда речь

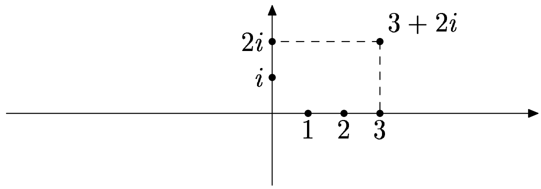


Рис. 28.1. Комплексная плоскость.

идет о таком изображении комплексных чисел, ось абсцисс принято называть вещественной, или действительной, осью, а ось ординат — мнимой осью). Комплексные числа, лежащие на действительной оси, складываются и умножаются так же, как обычные действительные числа: ведь в их записи i не участвует. Поэтому можно считать, что действительные числа — частный случай комплексных, а действительная ось, которую они заполняют, — это знакомая нам с младших классов числовая прямая.

Задача 28.6. Докажите, что уравнение $z^2 = -1$ не имеет (в комплексных числах) других решений, кроме i и $-i$.

Указание. Пусть $z = x + iy$. Тогда $z^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$. По условию, $z^2 = -1$. Так как комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, получаем:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1; \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

Решите эту систему уравнений.

Задача 28.7. Найдите все комплексные решения уравнения $z^3 = 1$ и изобразите их на комплексной плоскости.

Указание. Решений три; на комплексной плоскости они окажутся вершинами правильного треугольника.

Задача 28.8. Найдите все комплексные решения уравнения $z^2 = 5 - 12i$.

Задача 28.9. Докажите, что для всякого отличного от нуля комплексного числа $a+bi$ существуют ровно два решения уравнения $z^2 = a + bi$.

Результат задачи 28.9 показывает, что, имея в своем распоряжении комплексные числа, можно извлекать квадратные корни не только из отрицательных, но и вообще из любых комплексных чисел.

Если дано комплексное число $z = a + bi$, то сопряженным к нему называется число $a - bi$. Мы уже сталкивались с сопряженными комплексными числами, когда обсуждали деление комплексных чисел. Число, сопряженное к комплексному числу z, обозначается $\bar{z}$. Говорят еще, что числа z и $\bar{z}$ сопряжены друг другу. Сопряженные числа изображаются на комплексной плоскости точками, симметричными относительно действительной оси.

Задача 28.10. Докажите тождества:

а) $\overline{(\bar{z})} = z$; б) $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$; в) $\overline{(zw)} = \bar{z} + \bar{w}$.

Задача 28.11. Пусть z и w — комплексные числа, не являющиеся действительными. Докажите, что z и w сопряжены тогда и только тогда, когда $z + w$ и zw — действительные числа.

Задача 28.12. Докажите, что всякое квадратное уравнение с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом имеет два комплексных корня, сопряженных друг с другом. Верна ли для таких уравнений теорема Виета?

Если изобразить комплексные числа точками на плоскости, то оказывается, что у действий над комплексными числами есть геометрический смысл. Давайте выясним, какой геометрический операции соответствует сложение комплексных чисел.

Соединим начало координат 0 (соответствующее числу нуль) с точкой на плоскости, соответствующей комплексному числу $z = x + iy$ — получится вектор $\overline{OZ}$, имеющий координаты $(x; y)$. Так как при сложении векторов их координаты складываются, то равенство $z_1 + z_2 = z_3$ равносильно равенству $\overline{OZ_1} + \overline{OZ_2} = \overline{OZ_3}$ (рис. 28.2). Итак, сложить комплексные числа — все равно что сложить соответствующие векторы.

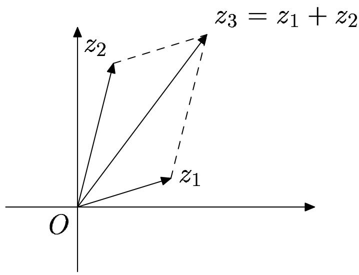


Рис. 28.2. Сложение комплексных чисел.

Умножение комплексных чисел также имеет геометрический смысл; мы выясним его в следующем параграфе.

§ 29. Модуль и аргумент комплексного числа

Повторить: *§ 25: отбор чисел на круге.*

В этом параграфе мы выясним геометрический смысл умножения комплексных чисел. Сначала — небольшая подготовка.

Расстояние на комплексной плоскости от начала координат (точки O) до точки z называется модулем комплексного числа z. Модуль комплексного числа z обозначается $|z|$, как и модуль действительного числа. Такое совпадение обозначений не приводит к путанице, поскольку модуль действительного числа также равен расстоянию от соответствующей точки на числовой оси до точки O. Если $z = a + bi$, то, очевидно, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 29.1).

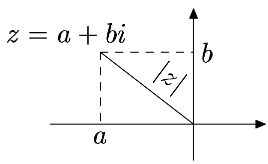


Рис. 29.1.

Задача 29.1. Докажите, что для любых комплексных чисел z и w верно неравенство $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

Теперь соединим точку z с точкой O. Угол, образуемый полученным отрезком с действительной осью (точнее говоря, с поло-

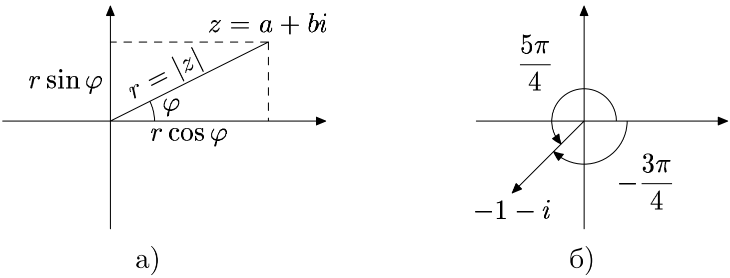


Рис. 29.2.

жительным направлением действительной оси), называется аргументом числа z (рис. 29.2а). Этот угол принято выражать в радианах.

Если $z = a + bi$, $|z| = r$, аргумент z равен φ, то, очевидно,

$$a = r\cos\varphi;$$
$$b = r\sin\varphi.$$

Стало быть, $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Запись комплексного числа в виде $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r > 0$, называется тригонометрической формой комплексного числа. В тригонометрической форме можно записать любое комплексное число, кроме нуля (аргумент нуля мы не определяем).

Запишем, например, в тригонометрической форме число $z = -1 - i$. Очевидно, $|z| = \sqrt{2}$, и из рис. 29.2б видно, что в качестве аргумента можно взять $5\pi/4$:

$$-1 - i = 2\Big(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\Big).$$

Впрочем, с тем же успехом можно было бы сказать, что аргумент $-1 - i$ равен $-\frac{3\pi}{4}$: ведь равенство $-1 - i = \sqrt{2}\Big(\cos(-\dfrac{3\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{3\pi}{4})\Big)$ также верно. Вообще, аргумент комплексного числа определен не однозначно, а с точностью до прибавления $2\pi n$, где n — целое число. В качестве аргумента числа z можно взять любое число φ, для которого $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Задача 29.2. Найдите аргументы следующих чисел, после чего запишите эти числа в тригонометрической форме: а) i; б) -1; в) $\sqrt{3}+i$; г) $\sqrt{3}-i$; д) $-(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; е) $\cos\varphi - i\sin\varphi$.

Задача 29.3. Докажите, что

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Пусть теперь нам даны комплексные числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Давайте их перемножим:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ &\qquad + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = \\ &= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

(мы воспользовались формулами синуса и косинуса суммы).

Как видите, если перейти к тригонометрической форме, то умножение комплексных чисел запишется простой формулой:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Или словами:

> При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Поскольку деление — действие, обратное к умножению, то:

> При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Итак, мы придали геометрический смысл умножению комплексных чисел, рассматриваемых как векторы на плоскости. На первый взгляд это противоречит сказанному в § 17, где мы говорили, что геометрически определить умножение векторов на плоскости невозможно. Представьте себе, однако, что у нас даны два вектора и мы хотим их умножить «как комплексные числа» — тут же выяснится, что для того, чтобы сложить аргументы, надо сначала иметь ось, от которой эти аргументы отсчитывать, причем если выбрать «действительную ось» по-другому, то произведение изменится!

Рассматривая умножение комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, мы убедились, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются. Запишем это свойство комплексных чисел в виде формулы

$$|zw| = |z| \cdot |w|. \tag{29.1}$$

Задача 29.4. Докажите формулу (29.1), исходя из определения умножения комплексных чисел.

Задача 29.5. а) Докажите, что $|z| = z \cdot \bar{z}$; б) выведите из этой формулы тождество (29.1).

Формулу (29.1) можно переписать и не используя комплексных чисел. В самом деле, если $z = a_1 + b_1 i$ и $w = a_2 + b_2 i$, то, возводя (29.1) в квадрат, получаем такое тождество:

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2. \tag{29.2}$$

Разумеется, это тождество легко проверить и непосредственно.

Задача 29.6. Докажите, что число

$$328589697129410536309272967884317040443420410156255 = 5^{31} \cdot 13^{25}$$

является суммой квадратов двух целых чисел.

Задача 29.7. Докажите, что число

$$\begin{aligned} &7373431415937804203538404957 0 = \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 53 \cdot 61 \cdot 73 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 113 \cdot 137 \cdot 149 \cdot 157 \cdot 173 \end{aligned}$$

также является суммой квадратов двух целых чисел.

Указание. $2 = 1^2 + 1^2$; $5 = 1^2 + 2^2 \ldots$

Существует аналог тождества (29.2) для сумм четырех квадратов, показывающий, что произведение двух сумм четырех квадратов также равно сумме четырех квадратов:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = \\ = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 + \\ + (a_1b_3 + a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b_2)^2 + (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)^2.$$

Задача 29.8. Докажите это тождество.

Имеется также аналог этих двух тождеств для сумм восьми квадратов, но на этом все и кончается: при $n \neq 2, 4, 8$ тождеств типа «произведение двух сумм n квадратов равно сумме n квадратов» не существует.

Теперь посмотрим, что вытекает из того, что аргументы комплексных чисел при умножении складываются.

Если возвести комплексное число в степень n, то есть умножить его на себя n раз, то его модуль возведется в степень n, а аргумент умножится на n:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

В частности, при $r = 1$ получится вот что:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Эта формула называется формулой Муавра.

Из формулы Муавра легко вывести формулы, выражающие $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Для этого надо в ее левой части раскрыть скобки и привести подобные. При $n = 5$, например, получится вот что:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = (\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi) + \\ + i(5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi) = \\ = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi.$$

Так как выражения слева и справа равны, то равны по отдельности их вещественные и мнимые части, откуда:

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$
$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi.$$

Чтобы получить такие формулы для произвольного n, надо раскрывать скобки в $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$, а для этого требуется общая формула для раскрытия скобок в выражении $(a+b)^n$. Мы выпишем эту формулу, но не будем ее доказывать. Выглядит она так:

$$\begin{aligned}(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2}{1\cdot 2\cdot\ldots(n-1)}a^1b^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Иными словами, в правой части коэффициент при $a^{n-k}b^k$ равен $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k}$: в знаменателе стоит произведение первых k натуральных чисел, а в числителе — произведение k идущих подряд целых чисел в убывающем порядке, начиная с n. Хотя коэффициенты в нашей формуле записаны как дроби, на самом деле все они — целые числа.

Формула для $(a+b)^n$, которую мы выписали, называется формулой бинома Ньютона.

Задача 29.9. Проверьте формулу бинома Ньютона для $n = 3, 4, 5$.

Задача 29.10. а) Выпишите формулу бинома Ньютона для $n = 6$.

б) Выпишите формулы для $\cos 6\varphi$ и $\sin 6\varphi$.

Задача 29.11. Убедитесь, что в формуле бинома Ньютона коэффициент при ab^{n-1} равен n.

Задача 29.12. Докажите, что в формуле бинома Ньютона коэффициенты при $a^{n-k}b^k$ и a^kb^{n-k} равны (что и не удивительно: если левая часть тождества не меняется, когда меняешь местами a и b, то такой же должна быть и правая часть).

Другое приложение формулы Муавра — еще один вывод формулы для суммы косинусов или синусов углов, образующих арифметическую прогрессию (§ 22). В самом деле, пусть нам надо вычислить сумму

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots + \cos(\alpha+n\beta).$$

Рассмотрим комплексные числа $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $b = \cos\beta + i\sin\beta$. Тогда, очевидно, $ab^k = \cos(\alpha+k\beta) + i\sin(\alpha+k\beta)$. Следовательно,

$$a + ab + ab^2 + \ldots + ab^n = (\cos + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha+n\beta)) + \\ + i(\alpha\sin + \sin(\alpha+\beta) + \ldots + \sin(\alpha+n\beta)).$$

Однако правую часть можно вычислить по формуле для суммы геометрической прогрессии:

$$a + ab + ab^2 + \ldots + ab^n = a\frac{1-b^{n+1}}{1-b} = \\ = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{1-\cos(n+1)\beta - i\sin(n+1)\beta}{1-\cos\alpha - i\sin\alpha}.$$

(Если вас смущает, что мы применяем эту формулу к комплексным числам, посмотрите в вашем школьном учебнике, как она доказывается, и убедитесь, что дословно то же доказательство годится и для комплексных чисел.)

Теперь осталось упростить выражение в правой части (для этого, как обычно при делении комплексных чисел, надо умножить числитель и знаменатель дроби на $(1-\cos\alpha)+i\sin\alpha$ и выделить в полученном выражении действительную и мнимую части). Действительная часть будет равна $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta)$, а мнимая часть будет равна $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \ldots + \sin(\alpha + n\beta)$.

Задача 29.13. Проведите эти выкладки и убедитесь, что ответы совпадают с полученными в § 22.

Раз с помощью тригонометрической формы комплексные числа удобно возводить в степень, естественно надеяться, что та же тригонометрическая форма поможет и в выполнении обратной операции — извлечения корней из комплексных чисел. Покажем на примере, какие новые явления при этом возникают.

Давайте извлечем корень пятой степени из 32, то есть найдем число, которое, будучи возведенным в пятую степень, даст 32. Среди действительных чисел такое число одно — это число 2. Посмотрим, что будет, если рассматривать любые комплексные числа. Мы ищем такие числа z, что $z^5 = 32$. Проще всего найти модуль числа z: если $z^5 = 32$, то $|z^5| = |z|^5 = 32$ (при перемножении чисел модули перемножаются), откуда $|z| = 2$ (уж $|z|$-то — это обычное действительное число, так что тут никаких разночтений не будет). Осталось найти аргумент z. Для этого запишем z в тригонометрической форме: $z = 2(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $z^5 = 32(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi)$, откуда $32(\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi) = 32$, $\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = 1$, что, в свою очередь, равносильно системе тригонометрических уравнений

$$\begin{cases} \cos 5\varphi = 1; \\ \sin 5\varphi = 0. \end{cases}$$

Этой системе, очевидно, удовлетворяют в точности те и только те числа φ, для которых числу 5φ соответствует начало отсчета на тригонометрической окружности, то есть $5\varphi = 2k\pi$, или $\varphi = 2\pi k/5$ ($k \in \mathbb{Z}$). Стало быть, решения уравнения $z^5 = 32$ — это числа вида $2(\cos 2\pi k/5 + i\sin 2\pi k/5)$, где $k \in \mathbb{Z}$. Не все эти числа различны: так как комплексные числа с аргументами, отличающимися на 2π, совпадают, то разные комплексные числа получаются только при $k = 0, 1, 2, 3, 4$, а дальше значения z будут повторяться. Итак, все корни уравнения $z^5 = 32$ или, если угодно, все корни пятой степени из 32 таковы:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(\cos 0 + i\sin 0); \\ z_2 &= 2(\cos 2\pi/5 + i\sin 2\pi/5); \\ z_3 &= 2(\cos 4\pi/5 + i\sin 4\pi/5); \\ z_4 &= 2(\cos 6\pi/5 + i\sin 6\pi/5); \\ z_5 &= 2(\cos 8\pi/5 + i\sin 8\pi/5); \end{aligned}$$

Здесь z_1 — это просто число 2, действительный корень уравнения $z^5 = 32$. Прочие корни этого уравнения действительными уже не являются. Если изобразить все корни пятой степени из 32 на комплексной плоскости, то окажется, что они расположены в вершинах правильного пятиугольника.

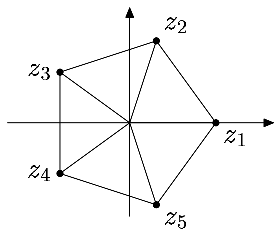


Рис. 29.3.

В наших рассуждениях не играло никакой роли ни то, что мы извлекали корень именно степени 5, ни то, что мы извлекали его из 32. На самом деле для всякого комплексного числа $a \neq 0$ существует ровно n решений уравнения $z^n = a$ (эти решения называются корнями степени n из a). При изображении на комплексной плоскости корни степени n из a располагаются в вершинах правильного n-угольника с центром в точке 0.

Задача 29.14. Найдите: а) все три кубических корня из i; б) все шесть корней степени 6 из 1 и изобразите их на комплексной плоскости.

Задача 29.15. а) Докажите, что произведение двух корней степени n из 1 — тоже корень степени n из 1.

б*) Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — все корни степени n из 1, k — целое число. Докажите, что

$$z_1^k + z_2^k + \cdots + z_n^k = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ не делится на } n; \\ n, & \text{если } k \text{ делится на } n. \end{cases}$$

Мы добавили к обычным вещественным числам число i для того, чтобы можно было извлекать квадратные корни из отрицательных чисел; при этом оказалось, что в комплексных числах можно решить любое квадратное уравнение. Замечательно, что и вообще любое алгебраическое уравнение имеет корень в комплексных числах: никаких новых чисел помимо i ради этого вводить не надо. Этот важный факт, который по традиции называют основной теоремой алгебры, доказал в конце 18 века великий немецкий математик К. Ф. Гаусс.

§ 30. Показательная функция и формула Эйлера

Повторить: *§ 23. Производная.*

Хороший физик пользуется формализмом,
как поэт — естественным языком.
Ю.И. Манин. «Математика и физика»

В предыдущих параграфах мы видели, что с комплексными числами можно так же, как и с действительными, проделывать такие операции, как сложение, умножение, возведение в степень и извлечение корня. Цель этого параграфа — придать смысл таким выражениям, как 2^z или $\sin z$, где z — комплексное число.

В последующем тексте не будет ни аккуратных математических определений, ни (тем более) строгих доказательств: мы будем обращаться с математикой примерно так же вольно, как это делают физики. Тем не менее обмана не будет: все последующие определения и рассуждения можно довести до математического уровня строгости, и в абзацах, набранных мелким шрифтом, объясняется, как это сделать. Руководствуясь этими указаниями, заинтересованный читатель сможет навести строгость в нашем тексте (если не сейчас, то тогда, когда он овладеет основами математического анализа).

Теперь приступим к делу. Удобнее начать с показательной функции. Пусть a — положительное действительное число; чему должно быть равно a^z для комплексных чисел z? Вспомним для начала, как определяется a^z для действительных z. Если z — целое число, то a^z — это произведение z сомножителей, каждый из которых равен a; если $z = m/n$, где m и n — целые числа, то $a^z = \sqrt[n]{a^m}$. Как распространить такие определения на случай комплексных z — неясно: что такое «умножить на себя i раз» или «извлечь корень i-й степени»?! Поэтому придется пойти другим путем.

Для начала заметим, что если x мало, то для a^x можно записать приближенную формулу. В самом деле, если обозначить буквой l производную функции $y = a^x$ в точке $x = 0$, то, согласно § 23, для малых x получается: $a^x = a^{0+x} \approx a^0 + lx = 1 + lx$. Итак, Если x мало, то $a^x \approx 1+lx$, где l — производная функции $y = a^x$ в точке $x = 0$.

Разумеется, как мы уже объясняли в § 23, приближенную формулу такого типа можно получить для любой «достаточно хорошей» функции, и действовать она будет только для малых x. К счастью, свойства показательной функции позволяют перейти к формуле, пригодной при любых x. Вот как это делается. Пусть x — любое число. Выберем большое целое число n и запишем $a^x = a^{(x/n)n} = (a^{x/n})^n$; если n велико, то x/n уже мало, и можно с помощью нашей приближенной формулы заменить $a^{x/n}$ на $1 + lx/n$. Подставляя это выражение для $a^{x/n}$, получаем:

Для больших целых n верна приближенная формула

$$a^x \approx (1 + lx/n)^n,$$

где l — производная функции $y = a^x$ в точке $x = 0$.

Добросовестный читатель скажет, что наше рассуждение не очень убедительно: при умножении погрешности могут накапливаться, и где гарантия, что после перемножения n штук формул $a^{x/n} \approx 1+lx/n$ они не накопятся настолько, что a^x не будет иметь с $(1 + lx/n)^n$ ничего общего? Это действительно могло бы случиться, но, к счастью, в данном случае накопление погрешностей к опасным последствиям не приводит: при больших n приближенное равенство $a^x \approx (1+lx/n)^n$ имеет место, причем, выбрав n достаточно большим, погрешность этой формулы можно сделать сколь угодно малой.

Вот как это устанавливается. В § 23 мы уже говорили, что для «достаточно хороших» функций погрешность формулы $f(a+h) \approx f(a)+hf'(a)$ не превосходит Mh^2 для некоторого числа M, не зависящего от h. Если применить это соображение к функции $f(x) = a^x$, выйдет, что погрешность формулы $a^{x/n} \approx 1+lx/n$ не превосходит Ml^2x^2/n^2 для некоторого M. Обозначая, для сокращения письма, Ml^2x^2 буквой c, получаем, что погрешность формулы $a^{x/n} \approx 1 + lx/n$ не превосходит c/n^2, где число c от n не зависит. При возведении обеих частей этой формулы в степень n эта погрешность возрастает, но не слишком сильно: можно показать, что при возведении в n-ую степень обеих частей приближенной формулы, в которой левая и правая части близки к 1 (а именно таковы $a^{x/n}$ и $1 + lx/n$), погрешность возрастает примерно в n раз.

Стало быть, погрешность формулы $a^x \approx (1 + lx/n)^n$ не превосходит $n \cdot (c/n^2) = c/n$, и чем больше n, тем эта погрешность меньше, так что наша формула действительно позволяет вычислить a^x с любой степенью точности.

Теперь мы готовы определить a^z для комплексных значений z. В самом деле, правая часть нашей приближенной формулы имеет смысл и при комплексных значениях x. Теперь для любого комплексного z определим a^z как $(1 + lz/n)^n$ для большого целого числа n. Точнее говоря, это будет не само a^z, но его приближенное значение, а точное значение a^z — это то, к чему стремится $(1 + lz/n)^n$ при росте n (по-ученому говоря, «предел $(1 + lz/n)^n$ при n, стремящемся к бесконечности»). Напомним, что через l обозначена производная функции $y = a^x$ в нуле.

Сейчас мы исследуем свойства показательной функции комплексного аргумента, но сперва — одно замечание. В наших формулах постоянно присутствует число l. Наиболее простые формулы получатся, если взять основание степени, для которого l равняется 1. Это число так часто встречается в математике, что для его есть специальное обозначение: его обозначают буквой e; повторим еще раз, что e — это, по определению, положительное число, для которого производная в нуле функции $y = e^x$ равна единице.

Задача 30.1. Покажите, что производная функции $y = a^x$ в точке 0 равна логарифму числа a по основанию e.

Приближенно e равно 2,718. Таким образом, имеем формулу:

$$e^z \approx \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \text{ при больших целых } n.$$

Для действительных z эта формула выражает свойство показательной функции с основанием e, а для произвольного комплексного z представляет собой определение.

Если в нашей формуле для e^z положить $z = 1$, то получим приближенную формулу для $e = e^1$: $e \approx \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Можно также показать, что при нашем определении показательной функции от комплексных чисел основное свойство показательной функции $e^{z+w} = e^z e^w$ будет верно для любых комплексных z и w.

Давайте теперь посмотрим, каковы будут свойства функции e^z при z, не являющихся действительными. Выясним, например, как подсчитать e^{ix}, где x — действительное число.

Согласно нашему определению, надо взять большое целое число n, и тогда e^{ix} будет примерно равно $(1+ix/n)^n$. Чтобы узнать, к чему будет приближаться это число при росте n, заметим, что при больших n число x/n мало, так что действуют приближенные формулы $\sin(x/n) \approx x/n$, $\cos(x/n) \approx 1$. Поэтому $(1 + ix/n)^n \approx$ $\approx \cos(x/n) + i\sin(x/n)$, откуда, возводя в степень n, получаем:

$$\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n \approx \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n = \cos x + i\sin x.$$

Иными словами, при больших n верна приближенная формула $(1 + ix/n)^n \approx \cos x + i\sin x$. Можно показать, что с ростом n погрешность этой формулы уменьшается.

Это следует из того, что в формулах $\sin(x/n) \approx x/n$, $\cos(x/n) \approx 1$ погрешность, как мы видели в § 23, не превосходит $(x/n)^2$ (при достаточно больших n); стало быть, можно сказать, что и у приближенной формулы

$$1 + \frac{ix}{n} \approx \cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}$$

погрешность не превосходит (по модулю) c/n^2, где c не зависит от n. После возведения обеих частей этой формулы в степень n погрешность увеличится примерно в n раз (это свойство возведения в степень верно и для комплексных чисел) и станет равняться примерно c/n, что стремится к нулю с ростом n.

Итак, то число, к которому $(1 + ix/n)^n$ приближается с ростом n, — это $\cos x + i\sin x$. Значит, это и есть e^{ix}. Итак:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

Это — не что иное, как знаменитая формула Эйлера.

Посмотрим, что из нее можно вывести.

Для начала, теперь мы можем найти значение показательной функции от любого комплексного числа $a+bi$:

$$e^{a+bi} = e^a e^b i = e^a(\cos b + i\sin b). \qquad (*)$$

Задача 30.2. Выведите из формулы $(*)$ тождество $e^{z+w} = e^z e^w$ для произвольных комплексных z и w.

Задача 30.3. Вычислите: а) $e^{\pi i/2}$; б) $e^{\pi i}$.

Задача 30.4. Найдите все комплексные числа z, для которых выполнено равенство $e^z = -1$.

Из формулы Эйлера следует, что $e^{2\pi i} = \cos 2\pi i + i\sin 2\pi i = 1$. Следовательно, для любого комплексного числа z имеем:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

Значит, $2\pi i$ — период функции $f(z) = e^z$. Как видите, показательная функция тоже является периодической, только мы этого не видели, пока ограничивались действительными числами.

Задача 30.5. Докажите, что всякий период функции $f(z) = e^z$ имеет вид $2\pi i n$ для некоторого целого числа n (так что $2\pi i$ является чем-то вроде наименьшего положительного периода для этой функции).

Следующее, что мы сделаем с помощью формулы Эйлера — это покажем, что тригонометрические и показательные функции — фактически одно и то же (как и было обещано в § 19). Точнее говоря, мы выразим тригонометрические функции через показательные.

Для этого запишем формулу Эйлера, а под ней — ту же формулу, в которую вместо x подставлено $-x$:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x;$$
$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

(мы воспользовались тем, что $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$). Если сложить и вычесть эти два равенства, получится $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$, $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$, откуда выходит:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Таким образом, мы выразили тригонометрические функции через показательную, а формула Эйлера, наоборот, выражает показательную функцию через тригонометрические. Так что если в нашем распоряжении есть комплексные числа, то тригонометрические функции выражаются через показательные, и наоборот.

У наших формул, выражающих синус и косинус через показательную функцию, есть еще одно применение. Именно, правые части этих формул имеют смысл, если вместо x подставить любое комплексное число. Поэтому их можно использовать для того, чтобы определить, что такое синус и косинус от любого комплексного числа. Именно: если z — комплексное число, то положим по определению:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Формулы, выражающие синус и косинус от действительных чисел через показательную функцию, показывают, что для действительного числа z наше определение дает обычные синус и косинус.

Задача 30.6. Найдите $\sin i$ и $\cos i$.

Задача 30.7. Докажите, что формула Эйлера $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ верна для произвольных комплексных значений z.

Задача 30.8. Докажите, что

$$\cos(a + bi) = \frac{e^b + e^{-b}}{2}\cos a + i\frac{e^b - e^{-b}}{2}\sin a.$$

Задача 30.9. а) Докажите, что все комплексные решения уравнения $\sin z = 0$ имеют вид $z = \pi n$, где n — целое (так что дополнительных комплексных решений у этого уравнения нет).

б) Решите в комплексных числах уравнение $\cos z = 0$.

в) Решите в комплексных числах остальные простейшие тригонометрические уравнения из начала § 10.

Задача 30.10. Верно ли, что для всех комплексных чисел z выполнено неравенство $|\sin z| \leqslant 1$?

Задача 30.11. Докажите, что для всех комплексных z верны тождества:

а) $\cos(z + 2\pi) = \cos z$;   б) $\sin(z + 2\pi) = \sin z$;
в) $\cos(-z) = \cos z$;   г) $\sin(-z) = -\sin z$.

Задача 30.12. Докажите, что для всех комплексных чисел верны тождества:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1;$$
$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w;$$
$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

Все тригонометрические тождества, которые мы выводили в главе 4, следуют из трех тождеств, перечисленных в этой задаче (а также из свойств четности и нечетности синуса и косинуса, которые в комплексных числах также верны — см. задачу 30.11). Поэтому все эти тождества верны и для тригонометрических функций комплексного переменного.

Задача 30.13. Решите в комплексных числах уравнение $\sin z = 2$ (решить уравнение — найти *все* его решения).

Задача 30.14. Верны ли для тригонометрических функций комплексного аргумента формулы приведения?

Задача 30.15. Докажите, что уравнения $\sin z = a$ и $\cos z = a$ имеют решения (возможно, комплексные) при любом a.

Ответы и указания к некоторым задачам

1.2. $\sin 10^\circ \approx 0{,}17$, $\sin 30^\circ = 0{,}5$, $\sin 60^\circ \approx 0{,}87$. Радианные меры углов в 10, 30 и 60 градусов приближенно равны 0,17, 0,52 и 1,05. Радианные меры углов в 30 и 60 градусов больше их синусов приблизительно на 4% и 21% соответственно; радианная мера угла в 10 градусов совпадает с его синусом с точностью до двух знаков после запятой.

2.1. *Указание*: два прямоугольных треугольника с равными острыми углами подобны.

2.2. $\sin\alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

2.3. $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha/\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

2.4. $\operatorname{tg} 10^\circ \approx 0{,}18$, $\operatorname{tg} 30^\circ \approx 0{,}58$, $\operatorname{tg} 60^\circ \approx 1{,}73$. Тангенсы углов в 10, 30 и 60 градусов больше их радианных мер приблизительно на 1%, 10% и 65% соответственно.

3.4. а) $2a\cos\alpha$. б) $a\sin\alpha$. в) $a\sin 2\alpha$, если $\alpha < 45^\circ$, и $a\sin(180^\circ - 2\alpha)$, если $\alpha > 45^\circ$ (когда мы познакомимся с тригонометрическими функциями произвольного угла, вы увидите, что этот ответ во всех случаях записать в виде $a\sin 2\alpha$).

3.5. $(\sqrt{5}+1)/4$.

3.6. $2\sin(36^\circ) = \sqrt{10-2\sqrt{5}}/2$.

3.7. $\cos 25^\circ = \sin 65^\circ \approx 0{,}91$.

4.1. б) $6'$. в) 6°.

4.3. 0,012 радиана, или приблизительно $43'$.

4.4. Примерно 1850 метров.

4.6. *Указание.* Тысячная равна $\pi/3000 \approx 1/1000$ радиана (если принять, что $\pi \approx 3$, что при таких измерениях и делают). И не надо считать военных неучами: ошибка порядка 15%, получающаяся при вычислениях по формуле тысячных, несущественна, поскольку измерить угол подручными средствами с бо́льшей точностью нереально.

5.1. а) Примерно 90 метров. б) Примерно полтора метра.

5.2. 12 января, в двенадцать часов три минуты пополуночи. Чтобы не ошибиться с датой, достаточно знать путь, пройденный секундной стрелкой за сутки, с точностью до 4 метров.

5.4. а) $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$. г) $\cos(5\pi/2) = 0$, $\sin(5\pi/2) = 1$.

5.6. а) 30 различных чисел. б) Число a должно быть рациональным. в) Да.

6.1. Если вы не ошиблись, должно получиться 4 различных точки.

6.3. а) Две точки. б) Одна точка.

6.4. В первой четверти.

6.5. 214 точек.

6.6. Рациональным.

6.11. $(1/2;\sqrt{3}/2)$, $(-1/2;\sqrt{3}/2)$, $(-1;0)$, $(-1/2;-\sqrt{3}/2)$, $(1/2;-\sqrt{3}/2)$.

6.12. $((\sqrt{5}-1)/4;\sqrt{10+2\sqrt{5}}/4)$, $(-(1+\sqrt{5})/4;\sqrt{10-2\sqrt{5}}/4)$, $(-(1+\sqrt{5})/4;-\sqrt{10-2\sqrt{5}}/4)$, $((\sqrt{5}-1)/4;-\sqrt{10+2\sqrt{5}}/4)$.

6.13. При пользовании формулой $\cos\alpha\approx 1$ для малых углов α относительная погрешность (отношение погрешности к точному значению) будет мала, а если для столь же малых углов использовать формулу $\sin\alpha\approx 0$, то погрешность будет близка к 100% точного значения — столь грубые приближенные формулы в этой ситуации бесполезны.

6.14. б) $(t-\sin t, 1-\cos t)$.

6.16. б) 10π.

7.3. а) $\sqrt{2}/2$ или $-\sqrt{2}/2$. б) Только $-\sqrt{2}/2$.

7.5. $\cos x=-\sqrt{10}/10$, $\sin x=-3\sqrt{10}/10$.

7.6. $13/5$.

7.8. а) 2. б) $2(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)$. в) $2/\sin\alpha$.

8.1. а) $2\pi/3$. б) 4π. в) 2. г) 200π.

8.2. а) 100π. б) $1/50$.

8.6. *Указание.* $2\cdot 8-3\cdot 5=1$.

8.7. Ответ: да. Когда вы освоите § 22, вы сможете проверить, что такими свойствами обладают функции $f(x)=\sin\pi x$, $g(x)=\sin\dfrac{2\pi x}{3}-\sin\pi x$. Можно, однако, построить пример, в котором тригонометрические функции вообще не используются.

9.2. а) $-\cos x$. б) $\sin x$. е) $-\operatorname{ctg} x$. ж) $-\sin x$.

9.3. а) $\sqrt{3}/2$. в) 0. д) -1. ж) $-\sqrt{3}/2$. и) $-\sqrt{2}/2$.

9.4. б) $\operatorname{tg}(10-3\pi)$. г) $\cos(114-36\pi)$. е) $-\sin(\pi/7)$.

9.5. а) $-$. д) $-$.

9.6. а) $(-a;b)$. в) $(-a;-b)$. д) $(b;a)$.

10.2. а) $(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. в) Решений нет. д) $-\dfrac{\pi}{8}\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. ж) $\dfrac{\pi}{6}\pm\dfrac{3\pi}{8}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

10.3. а) $(-1)^n\arcsin\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. б) Решений нет. д) *Указание*: положите $\sin x=t$; *ответ*: $(-1)^n\arcsin\Bigl(-\dfrac{2}{3}\Bigr)+\pi n$ $n\in\mathbb{Z}$. ж) *Указание*: замените $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$; *ответ*: $(-1)^n\arcsin\dfrac{2-\sqrt{5}}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. к) $\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; л) $\operatorname{arcctg}(4-\sqrt{7})+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

10.4. а) $1/2$. б) Нет решений. в) $-\sqrt{3}/2$.

10.6. а) *Указание*: $\sin(\arcsin x)=x$ по самому́ определению арксинуса, но не от всякого числа можно взять арксинус. в) *Указание*: эта функция — периодическая с периодом 2π.

10.7. а) $2\pi/5$. б) $3\pi/10$. д) $\dfrac{9\pi}{2} - 11$.

10.8. а) $-1 \leqslant x \leqslant 1$. б) $x > 0$. в) $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. г) $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

10.9. а) $2\sqrt{13}/13$. в) $1/3$. д) $2\sqrt{2}/3$.

10.10. а) 10.

11.1. $y = \pi - x$.

11.2. $(0; \sqrt{3}/2)$, $(5\pi/6; 0)$.

11.7. б) $\sin(11{,}2\pi) < \cos(-6{,}4\pi)$. г) $\sin 7 < \cos 7$;

11.8. $\sin 5 < \cos 4 < \cos 2 < \sin 3 < \sin 1 < \cos 6$.

12.1. Например, относительно прямой с уравнением $x = \pi/4$.

12.2. $y = \pi/2 - x$.

12.3. а) $\operatorname{tg}(13\pi/11) < \operatorname{tg} 3{,}3\pi$.

12.4. $\operatorname{tg} 5 < \operatorname{tg} 2 < \operatorname{tg} 3 < \operatorname{tg} 4 < \operatorname{tg} 1$.

12.7. *Указание*: эта функция нечетная.

14.1. *Указание*: каковы знаки косинуса острых и тупых углов?

14.2. *Указание*: обозначьте стороны параллелограмма буквами a и b, а угол между ними буквой α; выразите диагонали через a, b и α.

14.5. *Указание*: выразите косинус угла $\angle ABM$ через стороны треугольника, после чего примените теорему косинусов еще раз.

15.1. *Указание*: диагонали разбивают четырехугольник на четыре треугольника.

15.4. а) $r = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)/p}$.

15.7. $6\sqrt{14}/5$.

15.10. $\arccos(43/48)$, $\arccos(29/36)$, $\arccos(-11/24)$.

16.2. $2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

16.4. $a\sqrt{10}/4$.

16.5. $a\sqrt{21}/6$.

16.6. *Указание*: докажите, что четырехугольник является ромбом.

16.7. $R^2\left(\sin\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\beta}{2}\right)\left|\cos\dfrac{\alpha}{2} \pm \cos\dfrac{\beta}{2}\right|$ (у задачи, вообще говоря, два ответа!).

16.8. $R^2(\sin\alpha + \sin 2\alpha)\sqrt{4\sin^2 3\alpha - (\sin 2\alpha - \sin\alpha)^2}$.

16.9. $\dfrac{a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin(\beta+\gamma)}$.

16.10. $\dfrac{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

17.1. $(4; 12)$.

17.3. а) $(1; 1)$. б) $(\sqrt{2}; 0)$.

17.4. 19 (не забудьте про нулевой вектор!).

17.10. $x = \dfrac{36}{11}$, $y = -\dfrac{50}{11}$.

17.11. а) На $400/3 \approx 133{,}9$ м. б) Лодку надо направить против течения под углом $\operatorname{arctg}(4/3)$ к берегу; при этом ее снесет на $320/3 \approx 106{,}7$ м.

17.12. Наименьшее расстояние — 15 миль; на этом расстоянии корабли окажутся через $3\sqrt{3}/2 \approx 2{,}6$ часов.

19.4. а) $1/2$.

19.5. а) $(3 + 4\sqrt{3})/10$. б) $\pi/4$.

19.8. $4a/(\sqrt{2} + \sqrt{6})$, $2a\sqrt{2}/(\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

19.9. $22\sqrt{5}/5$.

19.12. $(x\cos\varphi + y\sin\varphi; y\cos\varphi - x\sin\varphi)$.

20.2. $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

20.3. б) $-\dfrac{\pi}{4} + (-1)^n\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

21.2. а) $m^2 - 1$.

21.4. а) $1/8$. б) $1/8$.

21.6. а) $-\sqrt{6}/3$. б) $\sqrt{6}/4$. в) $0 \leqslant a < 2\arcsin(\sqrt{6}/4)$.

22.7. а) $\dfrac{\cos(11h/2)\cos(x+5h)}{\cos(h/2)}$. б) $\dfrac{\sin 50x \sin(101x/2)}{\cos(x/2)}$.

23.1. Годится, например, та же граница $0 \leqslant h \leqslant 0{,}1$.

24.1. б) $(-1)^n \cdot 2\arcsin\dfrac{9-\sqrt{33}}{8} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

24.2. а) $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. б) $\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

24.3. Объединение прямых, заданных уравнениями $y = x$ и $y = 10x/3$.

24.4. $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$.

24.5. а) $\operatorname{arctg}\dfrac{5 \pm \sqrt{53}}{14} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. в) $\pi + 2\pi n$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ n, k \in \mathbb{Z}$. д) $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

24.6. $a \geqslant 0$.

24.7. а) πn; $\dfrac{\pi k}{4},\ n, k \in \mathbb{Z}$ (на самом деле здесь можно было и не выписывать серии $x = \pi n$; см. § 25). в) $\dfrac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$. е) $-\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi n}{2}$, $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{7},\ n, k \in \mathbb{Z}$.

24.8. б) $\dfrac{\pi}{3} + (-1)^n \arcsin\dfrac{-1 \pm \sqrt{33}}{8} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

24.9. а) $2\pi n$, $\pm\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right) + 2\pi k,\ n, k \in \mathbb{Z}$. в) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $(-1)^n\dfrac{\pi}{6} +$

$+\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}$. д) $\frac{\pi n}{2},\ \frac{2\pi k}{7},\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi m}{5},\ n,k,m\in\mathbb{Z}$. ж) $\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ \frac{4\pi}{3}+$ $+2\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}$.

24.10. а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \frac{\pi}{6}+\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}$. в) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. д) $\pi+$ $+4\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

24.11. К первой группе относятся тождества (а), (б), (г) и (е), ко второй группе относится тождество (д), к третьей — тождество (в).

24.13. а) $2\pi n,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}$. б) πn, $\operatorname{arctg}(5\pm\sqrt{34})+\pi k,\ n,k\in\mathbb{Z}$. в) $\pi n,\ \frac{\pi}{3}+\pi k,\ \frac{\pi}{6}+\pi m,\ n,k,m\in\mathbb{Z}$. г) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{6}\sqrt{3}-\frac{1}{6}\pm\frac{1}{6}\sqrt{4+14\sqrt{3}}\right)+$ $+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

25.1. а) $\frac{\pi n}{3},\ n\in\mathbb{Z}$. г) $\frac{\pi}{10}+2\pi n,\ \frac{9\pi}{10}+2\pi k,\ \frac{13\pi}{10}+2\pi m,\ \frac{17\pi}{10}+$ $+2\pi l,\ n,k,m,l\in\mathbb{Z}$.

25.2. а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. г) Решений нет. д) Решений нет.

25.3. а) $\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. г) $15\pi+60\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

25.4. а) 0. б) При рациональных a и только при них.

25.5. $k=2+5t,\ t\in\mathbb{Z}$.

25.6. а) $x=-10+19t$, $y=9-17t,\ t\in\mathbb{Z}$. б) Решений нет. в) Решений нет.

26.1. а) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$. д) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in\mathbb{Z}$.

26.2. а) $\left[\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{3\pi}{8}+\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$. в) $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$. г) $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.

26.3. а) $\left(-\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n;\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$. б) $\left(-\frac{1}{3}\arccos\frac{2}{9}+\right.$ $\left.+\frac{2\pi n}{3};\frac{1}{3}\arccos\frac{2}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right),\ n\in\mathbb{Z}$. в) $\left[-\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}+\pi n;\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}+\right.$ $\left.+\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$.

26.4. а) $(-\pi-1+2\pi n;1+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$. б) $[3\pi-7+2\pi n;7+2\pi n],\ n\in\mathbb{Z}$. в) $(10+2\pi n;8\pi-10+2\pi n),\ n\in\mathbb{Z}$.

26.5. а) $\left[\arccos\frac{-3+\sqrt{17}}{4}+2\pi n;2\pi-\arccos\frac{-3+\sqrt{17}}{4}+2\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$.

26.6. а) $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$. б) $(\cos 2;1]$. в) $\left[-1;-\sin\frac{1}{4}\right]$. г) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};1\right]$.

26.8. а) $\left(\frac{\pi}{5}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right],\ \left(\frac{2\pi}{5}+\pi n;\frac{3\pi}{5}+\pi n\right),\ \left[\frac{2\pi}{3}+\pi n;\frac{4\pi}{5}\right),\ n\in\mathbb{Z}$. б) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{11\pi}{18}+2\pi n\right],\ \left[\frac{23\pi}{18}+2\pi n;\frac{35\pi}{18}+2\pi n\right],\ n\in\mathbb{Z}$. в) $\left(\frac{2\pi}{3}+\right.$

$+ 2\pi n; \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} + \pi + 2\pi n\Big)$, $\Big(\dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n; \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} + 2\pi + 2\pi n\Big)$ $n \in \mathbb{Z}$.

28.1. $i^5 = i, i^6 = -1, i^{1999} = -i$.

28.2. а) $(\sqrt{3} + i)^3 = 8i$.

28.3. $2 \pm i$.

28.4. а) $8 - 10i$. б) $-i$.

28.7. $1, -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

28.8. $\pm(3 - 2i)$.

29.2. а) $\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$. в) $2\Big(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\Big)$. г) $\cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi)$.

29.10. а) $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. б) $\cos 6\varphi = \cos^6\varphi - 15\cos^4\varphi\sin^2\varphi + 15\cos^2\varphi\sin^4\varphi - \sin^6\varphi$. $\sin 6\varphi = 6\cos^5\varphi\sin\varphi - 20\cos^3\varphi\sin^3\varphi + 6\cos\varphi\sin^5\varphi$.

30.4. а) $\pi i + 2\pi i n,\ n \in \mathbb{Z}$.

30.9. б) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

30.10. Нет.

Предметный указатель

Алгоритм Евклида 156
Аргумент комплексного числа 171
Арккосинус 48
Арккотангенс 51
Арксинус 46
  производная 133
Арктангенс 50
  производная 133
Бином Ньютона 175
Биссектриса 72–74
Векторная диаграмма 107
Векторы 79–97, 101, 105–108, 118, 121
  вычитание 88
  координатные 91
  координаты 81, 91
  нулевой вектор 85
  определение 84
  противоположный вектор 88
  равенство 80
  скалярное произведение 94–97
    запись в координатах 96
    определение 94
    распределительный закон 94
  сложение 86
    запись в координатах 87
    правило параллелограмма 88
  умножение на число 89
    запись в координатах 90
Вписанный угол 76
Вычитание векторов 88
Герона формула 71
Двойного угла формулы 109
Деление комплексных чисел 166, 167
  геометрический смысл 172
Дополнительного угла формулы 11, 42
Евклида алгоритм 156
Комплексные числа
  аргумент 171
  возведение в комплексную степень 181, 182
  геометрическое изображение 167
  деление 166, 167
    геометрический смысл 172
  извлечение корней 177–178
  модуль 170
  определение 167
  сложение 167
    геометрический смысл 169
  сопряжение 169
  тригонометрическая форма 171
  умножение 166
    геометрический смысл 172

Координатные векторы 91
Координаты вектора 81, 91
Корни из комплексных
чисел 177–178
Косеканс 28
Косинус
график 55–56
знаки 31
значения для некоторых
углов 13
комплексного числа 184
малых углов 18, 131
общее определение 21, 27
острого угла 11
период 36
производная 23–24, 130
четность 42
Косинусов теорема 67, 95
Котангенс 28
график 62
нечетность 42
производная 132
Круг тригонометрический 25–27
Медиана 69
Минута угловая 15
Модуль комплексного числа 170
Модуляция 120
Муавра формула 174–175
Нулевой вектор 85
Ось тангенсов 30
Период 35
комплексной показательной
функции 183
наименьший положительный 35
синуса и косинуса 36
тангенса и котангенса 36
Периодическая функция 35
Площадь треугольника,
формулы:
Герона 71
через две стороны и угол
между ними 70
через радиус вписанной
окружности 71
Показательная функция 179–181
Половинного угла формулы 111,
113
Понижения степени
формулы 110
Правило параллелограмма 88
Преобразование произведения
в сумму 117
Преобразование произведения
в сумму 116
Преобразование суммы в
произведение
геометрический смысл 118
для углов, образующих
арифметическую
прогрессию 121
Преобразование суммы
в произведение 117
Преобразование суммы
в произведение 117
для углов, образующих
арифметическую
прогрессию 176
Приведения формулы 40
мнемоническое правило 41
Производная 126
обратных тригонометрических
функций 133
связь с касательными 127
синуса и косинуса 128
тангенса и котангенса 132
Простейшие формулы 33
Противоположный вектор 88
Птолемея теорема 119
Работа силы 93
Равенство векторов 80
Радианная мера угла

определение 7
связь с градусной мерой 8
Региомонтана формулы 119
Секанс 28
Секунда угловая 15
Синус
график 55
значения для некоторых
углов 13
комплексного числа 184
малых углов 16, 29, 131
нечетность 42
общее определение 21, 27
острого угла 6
период 36
производная 129
Синусов теорема 77
Системы тригонометрических
уравнений 147–148, 163
Скалярное произведение, см.
векторы
Сложение
векторов 86
запись в координатах 87
правило параллелограмма 88
комплексных чисел 167
геометрический смысл 169
Сложения формулы 98, 99
Сопряженные комплексные
числа 169
Среднеквадратичное
значение 112
Тангенс
геометрическое определение 30
график 61
знаки 32
значения для некоторых
углов 13
малых углов 16
нечетность 42
общее определение 27
острого угла 9
половинного угла 113
производная 132
Тангенсов теорема 119
Теорема
косинусов 95
о вписанном угле 76
Птолемея 119
синусов 77
тангенсов 119
Теорема косинусов 67
Тригонометрическая форма
комплексного числа 171
Тригонометрические
неравенства 156–161
использование графиков 159
метод интервалов 160
простейшие 156
Тригонометрические уравнения
борьба с потерей
корней 143–146
простейшие 45, 46, 49–51
$\cos x = a$ 49
$\operatorname{ctg} x = a$ 51
$\sin x = a$ 46
$\operatorname{tg} x = a$ 50
использование графиков 59,
61
Тригонометрический круг 25–27
Тройного угла формулы 110
Угловая минута 15
Угловая секунда 15
Умножение
вектора на число 89
запись в координатах 90
комплексных чисел 166
геометрический смысл 172
Универсальная подстановка 114
Уравнение
линейное
неопределенное 153–156

однородное 137, 138
Формула
вспомогательного угла 104
геометрический смысл 105
Герона 71
двойного угла
использование
в уравнениях 136, 138
Муавра 174–175
Эйлера 182
Формулы
двойного угла 109
дополнительного угла 11, 42
половинного угла 111, 113
понижения степени 110
приведения 40
мнемоническое правило 41
простейшие 33
Региомонтана 119
сложения 98, 99
тройного угла 110
универсальной подстановки 114
Число e 181
Эйлера формула 182

Оглавление

1. Первое знакомство с тригонометрией **5**
§ 1. Как измерить крутизну 5
1.1. Синус 5
1.2. Измерение углов 7
§ 2. Тангенс 9
§ 3. Косинус 11
§ 4. Малые углы 15

2. Начальные свойства тригонометрических функций **19**
§ 5. Часы, или современный взгляд на тригонометрию . 19
5.1. Часы и процессы 19
5.2. Скорость 22
§ 6. Определение тригонометрических функций 24
6.1. Ось тангенсов 29
6.2. Знаки тригонометрических функций 30
§ 7. Простейшие формулы 32
§ 8. Периоды тригонометрических функций 34
§ 9. Формулы приведения 38
§ 10. Простейшие тригонометрические уравнения 43
§ 11. Графики синуса и косинуса 53
§ 12. Графики тангенса и котангенса 60
§ 13. Чему равно $\sin x + \cos x$? 63

3. Решение треугольников **65**
§ 14. Теорема косинусов 65
§ 15. Вокруг площади треугольника 69

§ 16. Теорема синусов 74

4. Формулы сложения и их следствия **79**

§ 17. Векторы 79

17.1. Направленные отрезки и векторы 79

17.2. Сложение векторов 85

17.3. Вычитание и умножение на число 88

17.4. О векторах в физике 91

§ 18. Скалярное произведение 93

§ 19. Тригонометрические формулы сложения 96

§ 20. Формула вспомогательного угла, или сложение колебаний равной частоты 102

§ 21. Двойные, тройные и половинные углы 108

§ 22. Преобразование произведения в сумму и суммы в произведение 115

§ 23. Производные тригонометрических функций 123

5. Тригонометрия для абитуриентов **133**

§ 24. Как решать тригонометрические уравнения 133

§ 25. Отбор чисел на тригонометрическом круге 147

§ 26. Как решать тригонометрические неравенства 155

§ 27. Задачи на повторение 161

6. Комплексные числа **164**

§ 28. Что такое комплексные числа 164

§ 29. Модуль и аргумент комплексного числа 169

§ 30. Показательная функция и формула Эйлера 178

Ответы и указания к некоторым задачам **185**

Предметный указатель **191**

Израиль Моисеевич Гельфанд, Сергей Михайлович Львовский,
Андрей Леонович Тоом

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования
АО «Московские учебники»

Лицензия ИД №01335 от 24.03.2000 г.
Подписано в печать
Формат $60 \times 90\,1/16$. Печать офсетная. Печ. л. 12,5.
Тираж 10000 экз.
Заказ №

МЦНМО
121002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано с готовых диапозитивов
в АО «Московские учебники и картолитография»
125252, г. Москва, ул. Зорге, 15