БИБЛИОТЕЧКА ВСЕРОССИЙСКОЙ ЗАОЧНОЙ
МНОГОПРЕДМЕТНОЙ ШКОЛЫ

И. М. Гельфанд

Е. Г. Глаголева Э. Э. Шноль

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

(ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ)

Москва
Издательство МЦНМО
2006

УДК 517
ББК 22.161
Г32

Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э.

Г32 Функции и графики (основные приемы). — 7-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2006. — 120 с.: ил.

ISBN 5-94057-131-X

Книга представляет собой методическое пособие, созданное около сорока лет назад для заочного обучения школьников старших классов.

В книге описывается построение графиков элементарных функций способами, традиционными для средней школы (без применения производной). Рассматриваются линейные, квадратичные и другие рациональные функции.

Книга предназначена для школьников 8—11 классов, учителей математики, руководителей кружков, студентов пединститутов.

ББК 22.161

Израиль Моисеевич Гельфанд
Елена Георгиевна Глаголева
Эммануил Эльевич Шноль

Функции и графики
(основные приемы)

Редактор Ж. М. Раббот
Художник Н. А. Шихова

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г.

Подписано в печать 20.07.2006 г. Формат 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1
Печать офсетная. Печ. л. 7,5. Тираж 3000 экз. Заказ №

МЦНМО
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86

ISBN 5-94057-131-X

К читателю

Эта книга называется «Функции и графики». Она была написана около сорока лет тому назад специально для заочного обучения. В то время необычайно возрос интерес к математике и ее изучению: конкурсы на мехмат МГУ были как никогда высоки, возникли математические классы и первые школы-интернаты.

Но все эти формы обучения были доступны только немногочисленным «счастливчикам» из крупных городов. И получалось, что способные и интересующиеся математикой ребята, которые есть, конечно, повсюду, оказывались обиженными: ведь не везде есть достаточно учителей, которые могут показать школьникам, как замечательно интересна и красива математика.

Тогда, в 1964 году, и было организовано совершенно необычное учебное заведение: заочная математическая школа (ЗМШ). По замыслу ее создателей эта школа должна была дать реальную возможность получать систематическую квалифицированную помощь в углубленных занятиях математикой всем школьникам независимо от того, где они живут.

Заочная форма обучения отличается гибкостью: она не ставит целью работу только с особо одаренными детьми, не предполагает обязательной специализации школьников, тем самым не предопределяя жестко их дальнейшую судьбу и не отрывая их от семьи.

С тех пор прошло около сорока лет. Сейчас школа называется ВЗМШ. Буква «М» в этом сокращении означает теперь не «математическая», а «многопредметная» — в школе появились биологическое, химическое, филологическое и другие отделения.

За это время в ВЗМШ учились многие тысячи школьников. Результаты показывают, что заочные школы — это эффективный способ массового дифференцированного обучения школьников, живущих там, где нет других возможностей получить помощь в занятиях. При этом высокий уровень знаний получается не за счет расширения круга рассматриваемых вопросов, а за счет более глубокого, всестороннего изучения основных понятий и идей школьных курсов.

Следует отметить, что, помимо хороших знаний по тому или иному предмету, ВЗМШ прививает школьнику умение самостоятельно работать с книгой, письменно излагать свои мысли, приучает их к систематическому умственному труду и т. д.

Важную роль в работе ВЗМШ и ее учеников играет комплекс учебных пособий, специально приспособленных для обучения в заочной школе. Многие из этих пособий неоднократно издавались массовыми тиражами, что положило начало «Библиотечке физико-математической школы». Примером такого пособия и является книга «Функции и графики», посвященная одной из самых важных и интересных тем школьного курса. Вот что писал об этой теме основатель и руководитель ВЗМШ, один из крупнейших математиков нашего времени Израиль Моисеевич Гельфанд:

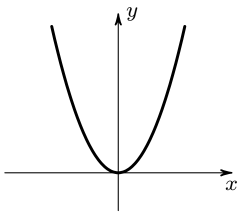


Рис. 1

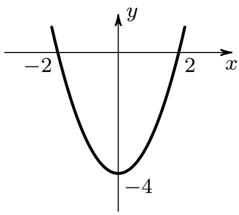


Рис. 2

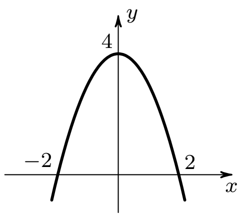


Рис. 3

«Процесс построения графиков является способом превращения формул и описаний в геометрические образы. Это — построение графиков — является средством увидеть формулы и функции и проследить, каким образом эти функции меняются. Например, если написано $y = x^2$, то Вы сразу видите параболу (рис. 1); если $y = x^2 - 4$, Вы видите параболу, опущенную на четыре единицы (рис. 2); если же $y = 4 - x^2$, то Вы видите предыдущую параболу, перевернутую вниз (рис. 3).

Такое умение — видеть сразу и формулу, и ее геометрическую интерпретацию — является важным не только для изучения математики, но и для других предметов. Это умение, которое останется с Вами на всю жизнь, подобно умению ездить на велосипеде, печатать на машинке или водить машину.»

Мы не думаем, что все ученики нашей школы обязательно в будущем станут математиками. Но мы уверены, что какой бы род деятельности Вы ни выбрали, занятия по этой книге принесут Вам несомненную пользу. Как сказал И. М. Гельфанд в своем обращении к американским школьникам, для которых он тоже организовал заочную школу, «мы рассматриваем математику как важный компонент культуры».

Методическая комиссия
математического отделения ВЗМШ

Предисловие к шестому изданию

Предыдущее издание этой брошюры вышло в 1973 году (издательство «Наука»).

При подготовке этого издания мы исправили большое количество неточностей, замеченных авторами или указанных читателями. В текст внесено также несколько существенных изменений и добавлений.

В частности, появился параграф 7 о графиках многочленов, написаны «Послесловие» и дополнение к «Вступлению» (о выборе единиц по осям координат).

Изменен порядок изложения некоторых вопросов; так, например, понятие нечетной функции вводится раньше: в § 5 вместо § 6.

Пересмотрены все задачи и упражнения, некоторые выброшены или заменены и несколько добавлено. Отредактированы также рисунки, играющие в этой книжке особенно важную роль.

Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль

Вступление

На рис. 0.1 Вы видите две кривые, начерченные сейсмографом — прибором, записывающим колебания земной коры. Верхняя кривая получена, когда земная кора спокойна, на нижней видны сигналы землетрясения.

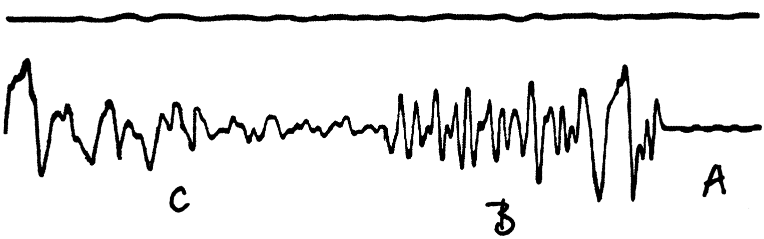


Рис. 0.1

На рис. 0.2 — две кардиограммы. Верхняя показывает нормальную работу сердца, нижняя снята у больного.

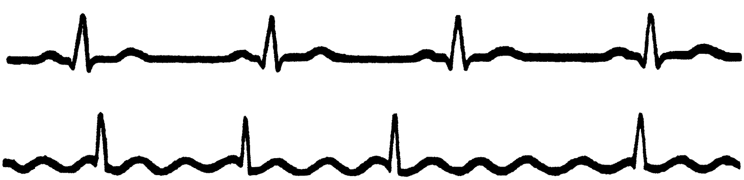


Рис. 0.2

На рис. 0.3 показана так называемая вольт-амперная характеристика полупроводникового элемента — кривая зависимости силы тока от напряжения.

Сейсмолог, анализируя сейсмограмму, узнает, когда было землетрясение, где оно произошло, определяет силу и характер толчков.

Врач, исследующий больного, может по кардиограмме судить о нарушениях сердечной деятельности; изучение кардиограммы помогает правильно поставить диагноз заболевания. Инженер-радиоэлектроник по характеристике полупроводникового элемента выбирает наиболее подходящий режим его работы. Все эти люди изучают некоторые функции по графикам этих функций.

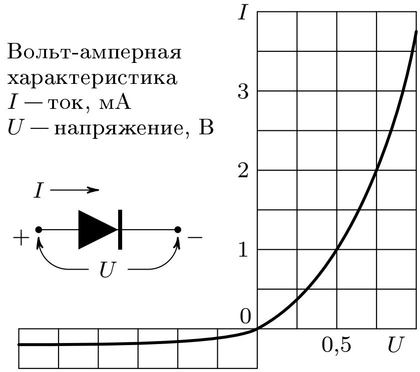


Рис. 0.3

Что же такое функция и что же такое график функции?

Прежде чем дать точное определение функции, поговорим немного об этом понятии. Говорят, что две величины связаны функциональной зависимостью, если каждому значению одной величины, которую математики называют *аргументом* (или *независимой переменной*) и обозначают обычно буквой x, отвечает значение другой величины y, называемой *функцией*.

Так, например, при землетрясении величина смещения земной поверхности в каждый момент времени имеет в определенной точке определенное значение — величина смещения есть функция времени. Сила тока в полупроводниковом элементе есть функция напряжения, так как каждому значению напряжения соответствует определенное значение силы тока.

Таких примеров можно привести очень много: объем шара есть функция его радиуса, высота, на которую поднимается вертикально брошенный камень, есть функция его начальной скорости, и т. д.

Есть одно существенное замечание. Когда говорят, что величина y есть функция величины x, то прежде всего указывают, какие значения может принимать x. Эти «разрешенные» значения аргумента x называются его *допустимыми значениями*, а множество всех допустимых значений величины x называется *областью определения* функции y.

Например, если мы говорим, что объем шара V есть функция его радиуса R, то областью определения функции $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ будут все числа, бóльшие нуля: величина радиуса шара может быть только положительным числом, и каждое положительное число можно считать радиусом некоторого шара.

Всегда, когда задается функция, необходимо указывать ее область определения.

Теперь мы можем более точно сказать, что такое функция.

> Мы говорим, что величина y есть *функция* величины x, если 1) указано, какие значения x являются допустимыми, т. е. задана область определения функции; 2) каждому допустимому значению x соответствует в точности одно значение величины y.

Коротко вместо слов «величина y есть функция величины x» записывают: $y = f(x)$ (читается «игрек равно эф от икс»).

Разумеется, не обязательно использовать букву x для обозначения аргумента, y для обозначения функции и f для обозначения связи между ними. Так, в приведенном выше примере с объемом шара функция была обозначена буквой V, а аргумент — буквой R; если аргумент функции имеет смысл времени, то его, как правило, обозначают буквой t, и т. п. Если в одной задаче рассматривают две функции, то их обозначают разными буквами, например, $f(x)$ и $g(x)$ или $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и т. д.

Запись $f(a)$ означает значение функции $y = f(x)$ при x, равном a.

Например:

если $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, то $f(2) = \dfrac{1}{2^2+1} = \dfrac{1}{5}$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$, $f(0) = 1$;

если $g(t) = t^3 + \dfrac{1}{t-1}$, то $g(2) = 2^3 + \dfrac{1}{2-1} = 9$;

и т. д.

Правило, с помощью которого по значению x находят соответствующее значение y, можно задавать различными способами, и никаких ограничений на форму, в которой оно выражается, не налагается. Если сказано, что y есть функция от x, то Вы должны проверить только, что 1) задана область определения, т. е. указано, какие значения может принимать x, и 2) дано правило, по которому допустимому значению x Вы можете поставить в соответствие единственное значение y.

Каким может быть это правило?

Приведем несколько примеров.

1. Пусть сказано, что x — любое действительное число и y находится по формуле $y = x^2$.

Функция $y = x^2$ задана формулой.

2. Правило может быть и словесным.

Функция y задается следующим образом: если x — положительное число, то y равно 1, если x — отрицательное число, то y равно -1, если x равно нулю, то y равно 0.

Каждое число можно записать в виде

$$x = y + \alpha,$$

где α — неотрицательное число, меньшее единицы, а y — целое число. Ясно, что каждому числу x соответствует единственное число y, т. е. y есть функция от x. Область определения этой функции — вся числовая ось. Эта функция называется «целая часть x» и обозначается так:

$$y = [x].$$

Например, $[3{,}53] = 3$, $[4] = 4$, $[0{,}3] = 0$, $[-0{,}3] = -1$, $[-1{,}2] = -2$.

Ниже мы используем эту функцию в упражнениях.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную формулой

$$y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}.$$

Что разумно считать областью определения этой функции?

Если функция задана формулой, причем область определения этой функции специально не оговорена, то рассматривается обычно так называемая *естественная область определения*, т. е. множество всех чисел, для которых можно выполнить действия, указанные формулой. Значит, в область определения нашей функции не входит число 5 (так как при $x = 5$ знаменатель этой дроби обращается в нуль) и значения x, меньшие, чем -3 (так как при $x < -3$ подкоренное выражение отрицательно и квадратный корень из него не определен).

Итак, естественная область определения функции $y=\frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$ — это все числа, удовлетворяющие двум соотношениям:

$$\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Функцию можно изображать геометрически с помощью графика. Чтобы построить график некоторой функции, рассмотрим некоторое допустимое значение x и отвечающее ему значение y. Например, пусть значение x — это число a, а соответствующее ему значение y — число b, равное $f(a)$. Эту пару чисел a и b изобразим на плоскости точкой с координатами $(a; b)$. Построим такие точки для всех допустимых значений x. Набор получившихся точек и есть график функции.

> График функции — это множество точек, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента x, а ординаты — соответствующими значениями функции y.

Например, на рис. 0.4 изображен график функции

$$y = [x].$$

Он состоит из бесконечного множества горизонтальных отрезков. «Пустые» точки означают, что правые концы этих отрезков не принадлежат графику (левые же концы принадлежат ему и поэтому обозначены жирными точками).

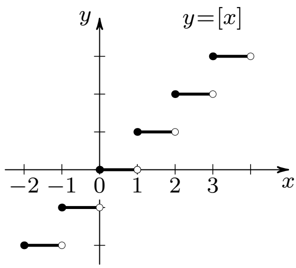


Рис. 0.4

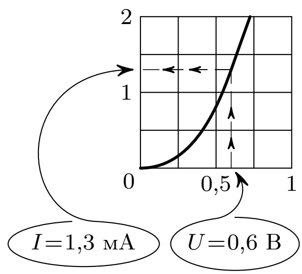


Рис. 0.5

График может служить правилом, задающим функцию. Например, по характеристике полупроводникового элемента можно определить (см. рис. 0.5), что если аргумент U равен 0,6 (вольт), то функция I равна 1,3 (миллиампера) *).

Изображать функции графиками очень удобно, потому что, поглядев на графики, можно сразу отличить одну функцию от другой. Посмотрите еще раз на нижнюю кривую рисунка 0.1. На этом графике самый неопытный человек сразу увидит сигналы землетрясения (участки B и C). Присмотревшись, он, безусловно, заметит и разницу в характере волн на участках B и C (сейсмолог мог бы объяснить Вам, что на участке B записана волна, идущая в глубине земной коры, а на участке C — волна, идущая вдоль поверхности).

*) Разумеется, по нарисованному графику из-за конечной ширины линий можно определить значение функции лишь приближенно.

Интересно, удастся ли Вам отличить эти два участка по помещенным рядом таблицам?

На рис. 0.6 показаны графики двух функций, которые задаются очень похожими формулами:

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}.$$

Разницу в поведении этих двух функций можно, конечно, обнаружить и по формулам. Но если посмотреть на графики, эта разница сразу бросается в глаза.

Всегда, когда нужно выяснить общий характер поведения функции, обнаружить ее особенности, график в силу своей наглядности является незаменимым средством. Поэтому инженер или ученый, получив интересующую его функцию в виде формулы или таблицы, обычно берется за карандаш, набрасывает эскиз графика и смотрит, как ведет себя функция, как она «выглядит».

Волна 1 (шаг 0,2 с)	Волна 2 (шаг 0,2 с)
0,1	0,2
0,1	0,5
−1,6	2,5
−1,7	4,9
−2,4	7,1
−3,0	6,1
−4,5	3,8
−3,8	0,4
−2,9	0,2
−1,1	0,7
0,8	1,5
3,3	2,5
5,1	3,2
3,7	2,8
0,0	0,4
−2,0	−2,2
−4,4	−3,3
−5,8	−4,5
−3,8	−4,8
−1,6	−4,8
	−4,8
	−3,7
	−3,5
	−4,4
	−6,6

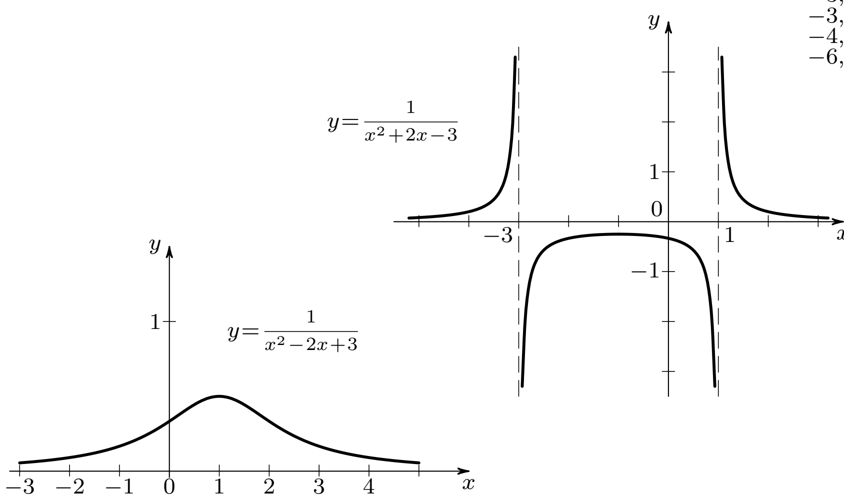


Рис. 0.6

Упражнения.

0-1. Функция $f(t)$ задается формулой $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 1$. Найдите $f(0)$, $f(2)$, $f(1/2)$.

0-2. Функция $I = g(u)$ задана формулой вида $I = \dfrac{a \cdot u}{1 - u}$. Известно, что $g(-1/2) = -1/2$. Чему равно $g(1/2)$?

0-3. График функции $z = h(x)$ изображен на рис. 0.7.
1) Найдите $h(3)$; $h(-1)$.
2) Что больше: $h(2)$ или $h(4)$? $h(3)$ или $h(-2)$? $h(3)$ или $h(3{,}1)$?
3) Какие x удовлетворяют неравенству $h(x) > 1$?

З а м е ч а н и е. Перед рисованием графика нужно выбрать систему координат. Математики чаще всего используют декартову систему координат, в которой оси взаимно перпендикулярны и единицы по осям одинаковы (иначе говоря, точки с координатами (1; 0) и (0; 1) находится на одинаковых расстояниях от начала координат).

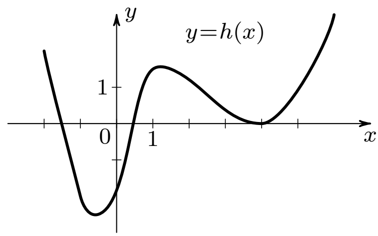


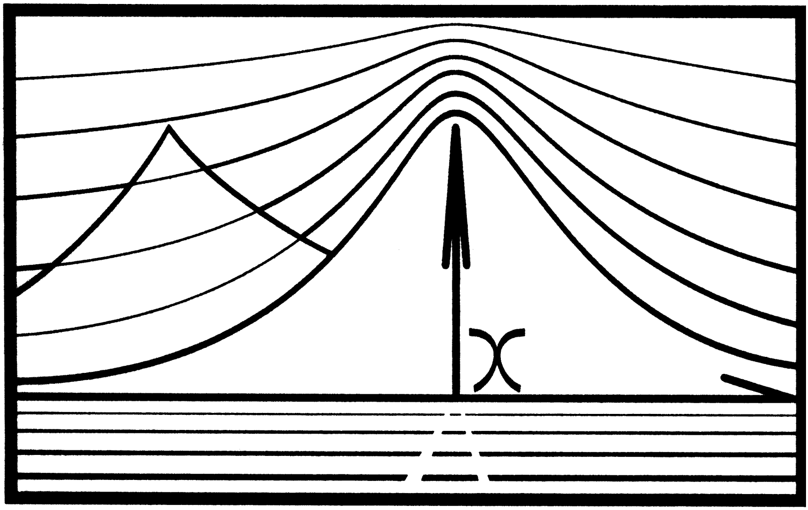
Рис. 0.7

В этой книге большей частью мы будем придерживаться этой традиции, всегда используя прямоугольную систему координат. Однако при графическом изображении реальных зависимостей выбор одинаковых масштабов по оси абсцисс и оси ординат теряет смысл. Например, на приведенном выше рисунке 0.3 единичный отрезок по оси абсцисс соответствует напряжению в 1 вольт, а единица по оси ординат — силе тока в 1 миллиампер. Вы понимаете, что нет никаких оснований выбирать эти два отрезка равными — и на рис. 0.3 один их них в два раза больше другого.

Если на графике изображается некоторый процесс, например, изменение во времени скорости летящего самолета, то единица по оси абсцисс может соответствовать одной секунде (если речь идет, например, о взлете) или одному часу (если описывается длительный перелет). По оси ординат единичный отрезок может соответствовать скорости в 100 км/час. И на этот раз не имеет смысла делать единичные отрезки по осям одинаковыми.

Выбор разных масштабов по осям иногда может быть удобным даже при решении чисто математических задач. Например, когда на небольшом участке изменения аргумента функция очень быстро меняется и нужно показать эти изменения (или какие-нибудь другие важные особенности), удобно взять по оси Ox единицу больше, чем по оси Oy.

Мы встретимся дальше с примерами разных масштабов по осям координат и в таких случаях будем всегда отмечать эту особенность выбранной системы координат.



§ 1. Некоторые примеры

1. Построение графика по точкам. Если буквально следовать определению, то для построения графика некоторой функции нужно найти все пары соответствующих значений аргумента и функции и построить все точки с этими координатами. В большинстве случаев это сделать практически невозможно, так как таких точек бесконечно много. Поэтому обычно находят несколько точек, принадлежащих графику, и соединяют их плавной кривой. Попробуем построить таким способом график функции

$$y = \frac{1}{1+x^2}. \tag{1}$$

$\boxed{y=\frac{1}{1+x^2}}$

x	y
0	1
1	1/2
2	1/5
3	1/10

Выберем несколько значений аргумента, найдем соответствующие значения функции и запишем их в таблицу. По полученным координатам построим точки и соединим их пока пунктирной линией (рис. 1.1).

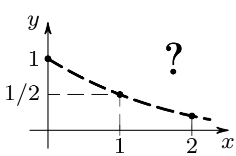


Рис. 1.1

Проверим теперь, правильно ли мы провели кривую между найденными точками графика. Для этого возьмем какое-нибудь промежуточное значение аргумента, например, $x = 3/2$, и вычислим соответствующее значение функции $y = 4/13$. Полученная точка $(3/2;\, 4/13)$ хорошо «ложится» на нашу кривую (рис. 1.2), так что мы провели ее вроде бы правильно.

Однако возьмем еще $x = 1/2$. Тогда $y = 4/5$ и соответствующая точка ложится выше нарисованной нами кривой (рис. 1.2). Значит, между $x = 0$ и $x = 1$ график идет не так, как мы думали. Возьмем на этом «сомнительном» участке еще значения $x = 1/4$ и $x = 3/4$. Соединив все полученные точки, мы получим более правильную кривую, изображенную на рис. 1.3. Взятые для контроля точки $(1/3;\, 9/10)$ и $(2/3;\, 9/13)$ хорошо «ложатся» на эту кривую.

x	y
3/2	4/13
1/2	4/5

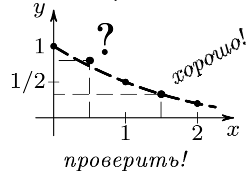
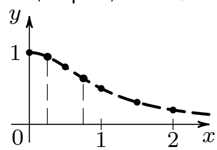


Рис. 1.2

x	y
1/4	16/17≈1
3/4	16/25≈0,6



еще одна проверка

x	y
1/3	9/10
2/3	9/13

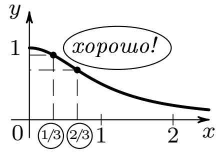


Рис. 1.3

2. Симметрия графиков. Четные функции. Чтобы построить левую половину графика функции (1), нужно заполнить еще одну таблицу — для отрицательных значений аргумента. Это сделать просто.

Например, при $x = 2$ имеем $y = \dfrac{1}{2^2+1} = \dfrac{1}{5}$, при $x = -2$ имеем $y = \dfrac{1}{(-2)^2+1} = \dfrac{1}{5}$.

Значит, вместе с точкой $(2;\, 1/5)$ на графике лежит точка $(-2;\, 1/5)$, симметричная первой относительно оси ординат.

Вообще, если точка $(a;\, b)$ лежит на правой половине нашего графика, то на левой его половине, очевидно, будет лежать точка $(-a;\, b)$, симметричная $(a;\, b)$ относительно оси ординат (рис. 1.4). Поэтому, чтобы получить левую часть графика функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, соответствующую отрицательным значениям x, нужно зеркально отразить относительно оси Oy правую половину этого графика. Общий вид графика — на

x	y
1	1/2
2	1/5
3	1/10
⋮	

x	y
−1	1/2
−2	1/5
−3	1/10
⋮	

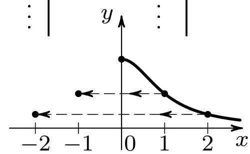


Рис. 1.4

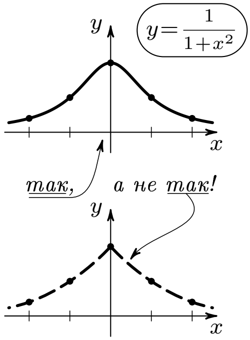


Рис. 1.5

рис. 1.5.

Если бы мы поторопились и достроили для отрицательных x наш первоначальный набросок (рис. 1.1 и рис. 1.2), то на нем при $x = 0$ получился бы «излом» (уголок). Этого излома нет на правильном графике: вместо него здесь плавный «купол».

Упражнения.

1-1. График функции $y = \dfrac{1}{3x^2+1}$ похож на график функции $y = \dfrac{1}{x^2+1}$. Постройте его.

1-2. Выясните, какие из следующих функций являются четными (определение четной функции, а также некоторые примеры см. на с. 17):

а) $y = 1 - x^2$; б) $y = x^2 + x$;

в) $y = \dfrac{x^2}{1+x^4}$; г) $y = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$.

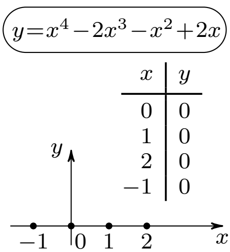


Рис. 1.6

3. Нули функции (график одного многочлена). График многочлена

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \qquad (2)$$

мы тоже начнем строить по точкам.

Взяв для аргумента значения, равные 0, 1, 2, мы получим значения функции, равные нулю. Возьмем еще значение $x = -1$. Снова получим, что y равно нулю. Соответствующие точки графика $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(2; 0)$, $(-1; 0)$ лежат на оси Ox (рис. 1.6).

Если ограничиться этими четырьмя значениями аргумента, то «плавной» кривой, соединяющей полученные точки, будет, например, ось абсцисс. Однако ясно, что ось абсцисс не является графиком нашей функции: многочлен, определяемый формулой (2), не может быть равен нулю при всех значениях x.

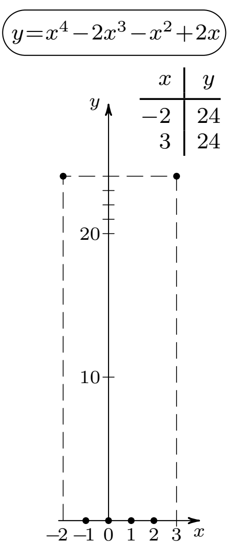
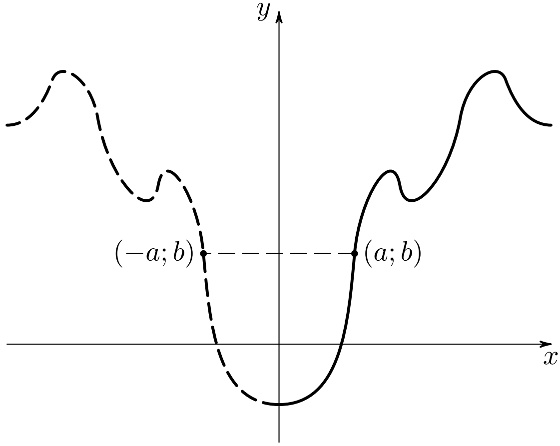


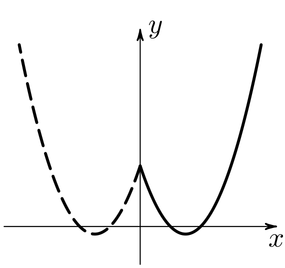
Рис. 1.7

Возьмем еще два значения аргумента: $x = -2$ и $x = 3$. Соответствующие точки $(-2; 24)$ и $(3; 24)$ уже не лежат на оси Ox, а, напротив, расположены очень далеко от нее (рис. 1.7).

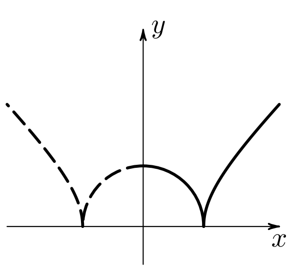


$$f(-a) = f(a)$$

Если значения некоторой функции, соответствующие двум противоположным значениям аргумента (т. е. значениям a и −a) равны между собой, то такая функция называется четной. График всякой четной функции симметричен относительно оси ординат.



$y = x^2 - 3|x| + 2$



$y = \sqrt{|x^2 - 1|}$

Как выглядит график, остается по-прежнему неясным. Можно, конечно, как мы делали раньше, найти достаточное количество промежуточных точек и приблизительно построить график, но этот способ не очень надежен.

Попробуем поступить иначе.

Выясним, где функция положительна (и, значит, график лежит выше оси Ox) и где отрицательна (т. е. график лежит ниже оси Ox).

Для этого разложим многочлен, задающий функцию, на множители:

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = x^3(x-2) - x(x-2) = \\ = (x^3 - x)(x-2) = x(x^2-1)(x-2) = \\ = (x+1)x(x-1)(x-2).$$

Теперь видно, что наша функция равна нулю только в тех четырех точках, которые мы уже нанесли на график. Левее точки $x = -1$ все четыре сомножителя отрицательные — функция положительна. Между точками $x = -1$ и $x = 0$ (т. е. на промежутке $-1 < x < 0$) множитель $(x+1)$ становится положительным, а остальные остаются отрицательными — функция отрицательна. На участке $0 < x < 1$ имеем два отрицательных сомножителя и два положительных — функция положительна. На следующем участке функция снова отрицательна. Наконец, при переходе через точку $x = 2$ последний из сомножителей становится положительным — функция становится положительной.

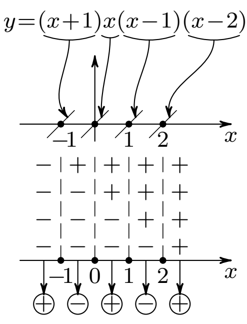


График функции представляется нам теперь примерно в таком виде, как на рис. 1.8 *).

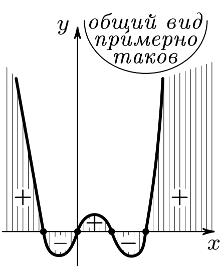


Рис. 1.8

*) Конечно, на рис. 1.8 мы можем показать только «характер» графика. Было бы неправильно определять по этому графику числовые значения функции.

4. Разрывы графика. Возьмем теперь функцию

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}. \qquad (3)$$

По виду эта формула мало отличается от формулы (1). Однако при построении этого графика по точкам сразу же начинаются неприятности.

Составим таблицу и отметим на рисунке точки графика, отвечающие значениям x, равным $-2, -1, 0, 1, 2$. Получится примерно так, как на рис. 1.9. Если соединить эти точки как на рис. 1.10, создается впечатление, что точка $(0;\,-1)$ «выпадает».

$y = \frac{1}{3x^2 - 1}$

x	y
0	-1
1	$1/2$
2	$1/11$
-1	$1/2$
-2	$1/11$

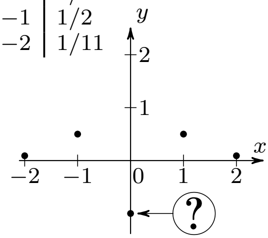


Рис. 1.9

Возьмем теперь $x = 1/2$. Мы получим $y = -4$, и точка $(1/2;\,-4)$ лежит гораздо ниже нашей кривой (рис. 1.11). Значит, между $x = 0$ и $x = 1$ график идет совсем по-другому!

Возьмем еще $x = 3/2$ и $x = 5/2$. Соответствующие точки довольно хорошо ложатся на нашу кривую. Более точный ход графика для $x > 1$ мы изобразим на рис. 1.11.

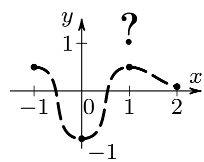
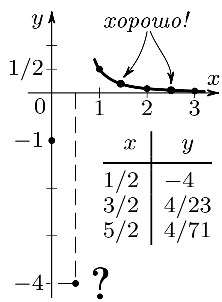


Рис. 1.10

Но как же проходит график между точками $x = 0$ и $x = 1$?

Возьмем $x = 1/4$ и $x = 3/4$. Получим соответственно $y = -16/13 \approx -5/4$ и $y = 16/11 \approx \approx 3/2$. Ход графика между точками $x = 0$ и $x = 1/2$ несколько прояснился (рис. 1.12), но как ведет себя функция между $x = 1/2$ и $x = 3/4$, по-прежнему непонятно.

Если мы возьмем еще несколько промежуточных значений между $x = 1/2$ и $x = 3/4$, то увидим, что соответствующие точки графика ложатся не на одну, а на две плавные кривые, и график приобретает примерно такой вид, как на рис. 1.13.



x	y
$1/2$	-4
$3/2$	$4/23$
$5/2$	$4/71$

Рис. 1.11

Вы теперь хорошо понимаете, что построение графика по точкам — это рискованный и длинный путь. Если взять мало точек, то может оказаться, что мы получим

x	y
$1/4$	$-16/13$
$3/4$	$16/11$

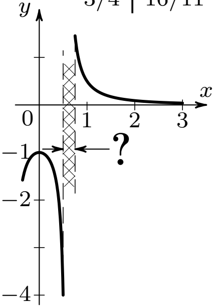


Рис. 1.12

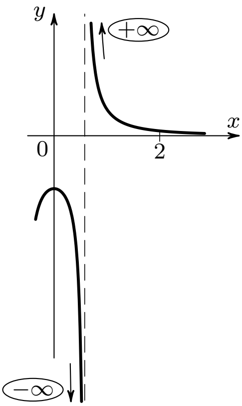


Рис. 1.13

совсем неверное представление о функции. Если же брать точки чаще, то будет много лишней работы и все равно останется сомнение, не пропустили ли мы чего-нибудь существенного. Как же быть?

Вспомним, что при построении графика функции (1) на участках $2 < x < 3$ и $1 < x < 2$ никаких дополнительных точек не потребовалось, а на участке $0 < x < 1$ пришлось найти еще пять точек. Так же при построении графика (3) основной работы потребовал участок $0 < x < 1$, где кривая разрывается на две ветви.

Нельзя ли заранее выделить такие «опасные» участки?

5. Осторожно: нули знаменателя! Вернемся еще раз к графику функции

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}.$$

Если посмотреть на выражение, задающее функцию, то сразу видно, что при двух значениях x знаменатель этого выражения обращается в нуль. Эти значения равны $+\sqrt{1/3}$ и $-\sqrt{1/3}$, то есть примерно $\pm 0{,}58$. Одно из них лежит в промежутке $1/2 < x < 3/4$, то есть как раз там, где функция ведет себя необычно, график идет неплавно. Теперь понятно, почему это происходит.

Действительно, при значениях $x = \pm\sqrt{1/3}$ функция не определена (деление на нуль невозможно); значит, на графике не может быть точек с такими абсциссами — график не пересекает прямые $x = \sqrt{1/3}$ и $x = -\sqrt{1/3}$. Поэтому график распадается на три отдельные ветви. Если x приближается к одному из «запрещенных» значений, например к $x = \sqrt{1/3}$, то дробь (3) неограниченно растет по абсолютной величине — две ветви графика приближаются к вертикальной прямой $x = \sqrt{1/3}$.

Аналогично ведет себя наша (четная!) функция вблизи точки $x = -\sqrt{1/3}$. Общий вид графика $y = \dfrac{1}{3x^2-1}$ показан на рис. 1.14.

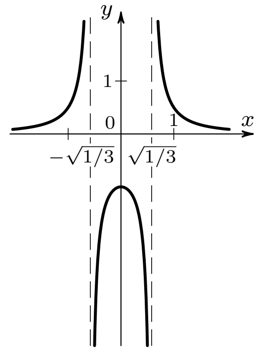


Рис. 1.14

Теперь понятно, что *всегда, когда функция задана формулой, которая представляет собой дробь, необходимо обращать внимание на те значения аргумента, при которых знаменатель равен нулю.*

6. Некоторые выводы. Какой же урок можно извлечь из рассмотренных примеров? При изучении поведения функции и построении ее графика не все значения аргумента одинаково важны.

На примере функции $y = \dfrac{1}{3x^2-1}$ мы видели, насколько важными являются те «особые» точки, в которых функция не определена. Характер графика

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

нам стал понятен тогда, когда мы нашли точки пересечения графика с осью абсцисс, т. е. корни многочлена.

В большинстве случаев основная работа при построении графиков состоит как раз в том, чтобы найти существенные для данной функции значения аргумента и изучить ее поведение вблизи этих значений. После такого исследования для полного построения графика достаточно бывает найти несколько промежуточных значений функции между этими характерными точками.

Упражнения.

1-3. Постройте график функции $y = \dfrac{1}{3x-1}$.

а) В каких точках график пересекает оси координат?

б) Представьте себе, что мы поместили начало координат в самой середине тетрадного листа и взяли за единицу масштаба 1 см (для определенности будем считать тетрадный лист прямоугольником размером 16 см $\times$ 20 см). Найдите координаты точек, в которых график уходит за пределы тетрадного листа.

1-4. Постройте графики многочленов *):

а) $y = x^3 - x^2 - 2x + 2$;

⊕ б) $y = x^3 - 2x^2 + x$.

(Обратите внимание на то, что в случае б) при разложении многочлена на множители получаются два одинаковых сомножителя.)

7. Растяжение графика вдоль оси ординат.

Построив график какой-либо функции, с помощью разных приемов можно легко построить графики некоторых других функций, «родственных» первой. Один из простейших таких приемов — это так называемое *растяжение вдоль оси Oy*.

Мы построили уже график функции

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

(см. рис. 1.5 на с. 16).

Построим теперь график функции

$$y = \frac{3}{x^2 + 1}. \qquad (4)$$

$y=\dfrac{1}{x^2+1}$

x	y
0	1
1/2	4/5
2	1/5

$y=\dfrac{3}{x^2+1}$

x	y
0	3
1/2	12/5
2	3/5

Возьмем какую-нибудь точку первого графика, например, точку $M_1(1/2;\,4/5)$. Ясно, что мы можем из нее получить точку второго графика, оставив x тем же (т. е. $x = 1/2$) и увеличив y в три раза. Получится точка $M_2(1/2;\,12/5)$. Ее можно получить прямо на чертеже (рис. 1.15). Для этого нужно увеличить ординату точки $M_1(1/2;\,4/5)$ в три раза.

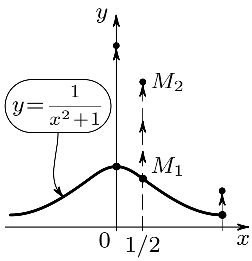


Рис. 1.15

Если мы проделаем такое преобразование с каждой точкой графика $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, то весь график, растянувшись втрое по оси Oy, превратится в график функции $y = \dfrac{3}{x^2+1}$ (рис. 1.16).

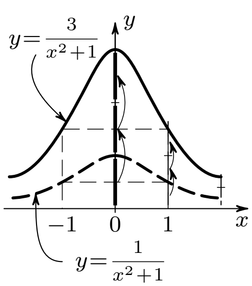
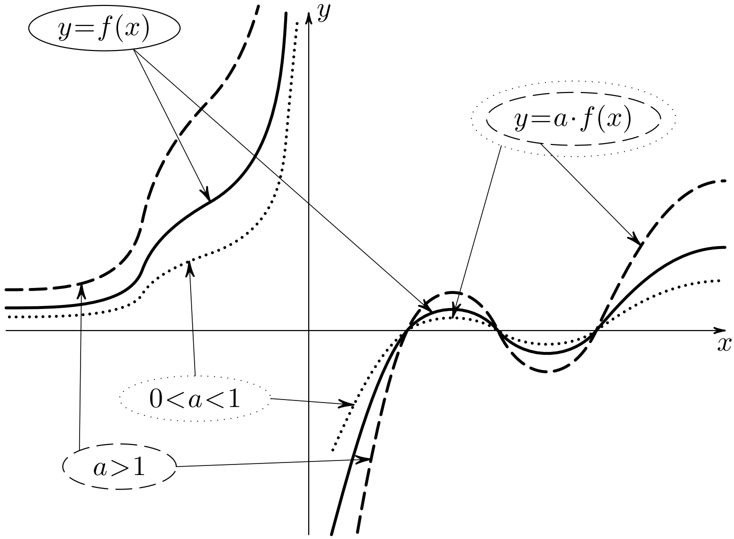


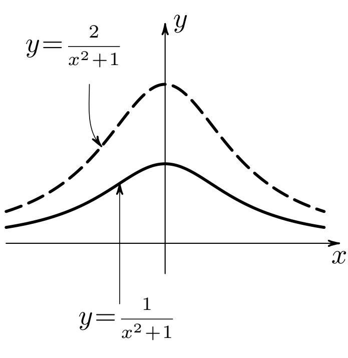
Рис. 1.16

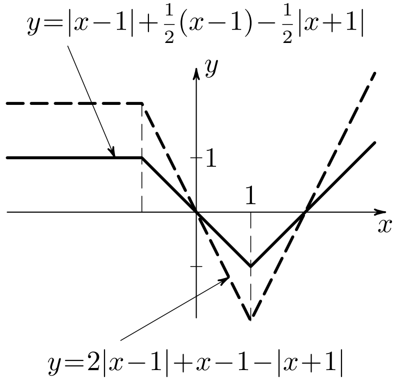
Итак, график функции $y = \dfrac{3}{x^2+1}$ представляет собой график функции $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, растянутый втрое вдоль оси Oy.

*) Знак ⊕ стоит около упражнений, к которым имеются ответы в конце книги — см. с. 114.

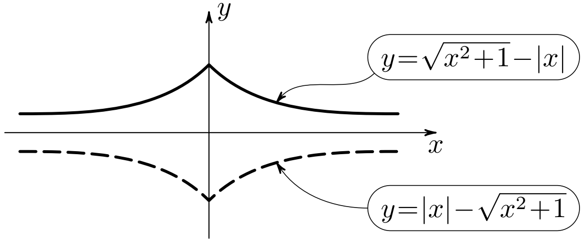


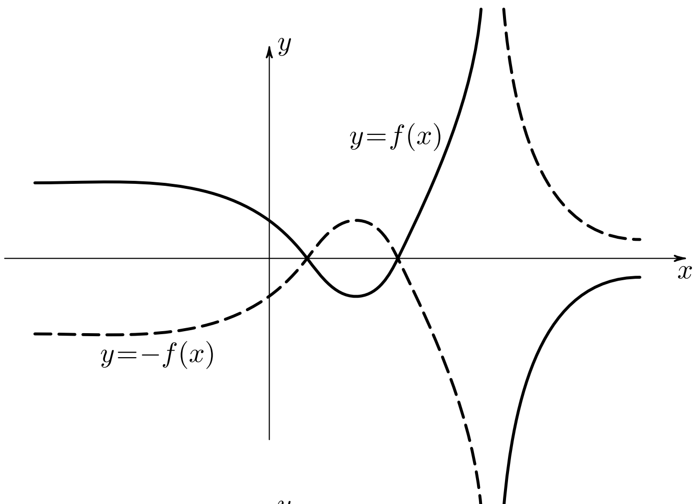
$\boldsymbol{f(x) \Rightarrow af(x)}$	*График функции $y = af(x)$ при $a > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в a раз по оси Oy (в случае $0 < a < 1$ получается сжатие).*

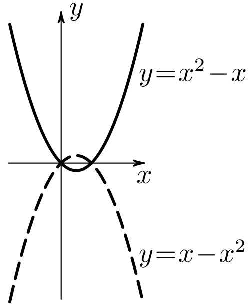




$\boldsymbol{f(x) \Rightarrow -f(x)}$	*График* $y=-f(x)$ *может быть получен из графика* $y=f(x)$ *зеркальным отражением относительно оси* Ox.







Еще проще получить из графика функции $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ график функции
$$y = -\frac{1}{x^2+1}. \qquad (5)$$

Чтобы получить из таблицы для функции $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ (см. рис. 1.4) таблицу для функции $y = -\dfrac{1}{x^2+1}$, нужно просто поменять знак у каждого из чисел второго столбца.

Тогда из каждой точки графика $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ получится точка графика $y = -\dfrac{1}{x^2+1}$ с той же абсциссой и противоположной ординатой. Например, из точки M с абсциссой 2 и ординатой $1/5$ получится точка M' с абсциссой 2 и ординатой $-1/5$. Очевидно, точка $M'(2; -1/5)$ симметрична точке $M(2; 1/5)$ относительно оси Ox. Ясно, что всякой точке $M(a; b)$ графика $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ соответствует точка $M'(a; -b)$ графика $y = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

Итак, график функции $y = -\dfrac{1}{x^2+1}$ можно получить из графика $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ зеркальным отражением относительно оси Ox (рис. 1.17).

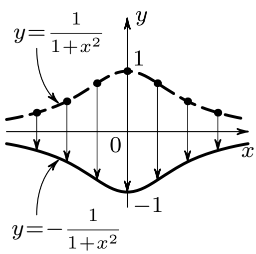


Рис. 1.17

Упражнения.

1-5. Используя график $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ (рис. 1.8 на с. 18), постройте графики функций:

а) $y = 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 6x$;

б) $y = -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x$.

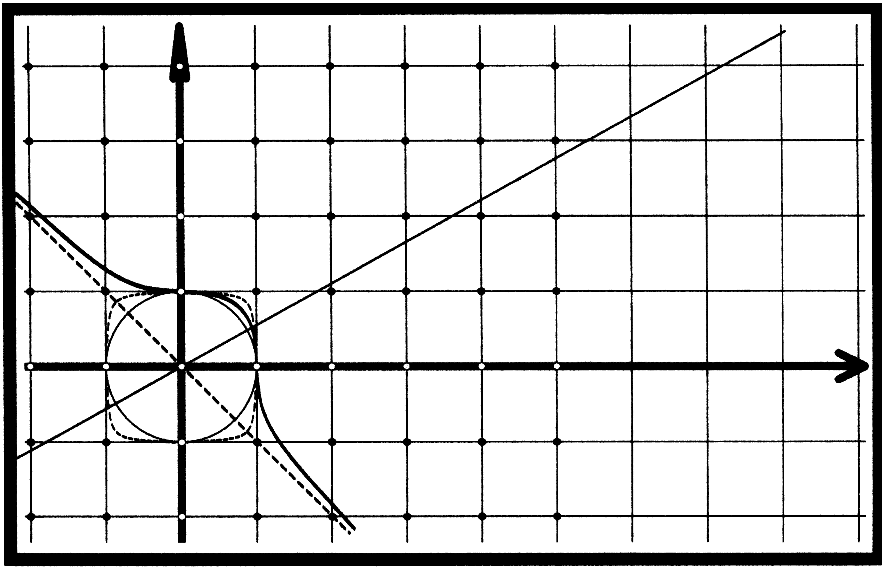
1-6. Зная график функции $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, постройте графики функций:

а) $y = \dfrac{1}{2x^2+2}$; б) $y = -\dfrac{3}{x^2+1}$.

1-7. Используя график функции $y = [x]$ (см. рис. 0.4), постройте графики функций:

а) $y = \dfrac{1}{2}[x]$; б) $y = 2[x]$;

⊕ в) $y = [2x]$; г) $y = \left[\dfrac{1}{2}x\right]$.



§ 2. Линейная функция

1. График линейной функции — прямая. Приступим теперь к систематическому изучению поведения различных функций и построению их графиков. При этом с характерными чертами поведения функций и особенностями их графиков мы будем знакомиться на простейших примерах. При построении более сложных графиков будем стараться найти в них знакомые элементы.

Самая простая функция — это функция $y = x$. Ее графиком является прямая, составленная из биссектрис первого и третьего координатных углов (рис. 2.1) *).

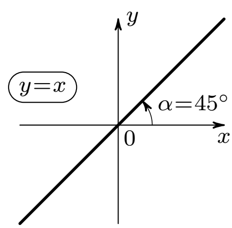


Рис. 2.1

Вообще, как Вы знаете, графиком любой линейной функции $y = kx + b$ является некоторая прямая. Обратно, любая прямая,

*) Биссектриса получится, конечно, только если масштабы по осям Ox и Oy одинаковые. В дальнейшем мы каждый раз будем оговаривать случаи разных масштабов.

не параллельная оси Oy, является графиком некоторой линейной функции.

Положение прямой вполне определяется заданием двух ее точек. В соответствии с этим линейная функция вполне определяется заданием ее значений для двух значений аргумента.

Упражнения.

2-1. Найдите линейную функцию $y = kx + b$, которая принимает при $x = -10$ значение $y = 41$, а при $x = 6$ — значение $y = 9$.

2-2. Прямая проходит через точки $A(0; 0)$ и $B(a; c)$. Найдите линейную функцию, графиком которой является эта прямая.

2-3. Проведите через начало координат прямые под углом 60° к оси ординат. Графиками каких функций они являются?

2-4. а) В таблице 1 значений некоторой линейной функции два из пяти ее значений записаны неверно. Найдите их и исправьте.

б) Тот же вопрос для таблицы 2.

Таблица 1

x	y
-2	-2
-1	3
0	1
1	2
2	-3

Таблица 2

x	y
-15	-33
-10	-13
0	7
10	17
15	27

2-5. Найдите функцию $y = kx + b$, если ее график параллелен графику $y = x$ и проходит через точку $(3; -5)$.

2-6. Угловой коэффициент прямой*) равен a. Прямая проходит через точку $(3; -5)$. Найдите линейную функцию, графиком которой является эта прямая.

2. Линейная функция и арифметические прогрессии. Линейная функция обладает важным свойством, отличающим ее от всех других функций, а именно: если x увеличивается равномерно, то есть увеличивается (или уменьшается) на одно и то же число, то y меняется тоже равномерно. Возьмем, например, функцию $y = 3x - 2$. Пусть x принимает значения $1, 3, 5, 7, \ldots,$ каждое из которых больше предыдущего на одно и то же число 2. Соответствующие значения y будут равны $1, 7, 13, 19, \ldots$ Вы видите, что каждое из значений y боль-

---

*) Угловым коэффициентом прямой называется коэффициент k в уравнении $y = kx + b$, задающем эту прямую.

ше предыдущего тоже на одно и то же число — на 6.

Ряд чисел, который получается из какого-нибудь числа прибавлением одного и того же числа, образует *арифметическую прогрессию.* Таким образом, характерное свойство, о котором мы говорили, можно выразить так: линейная функция переводит одну арифметическую прогрессию в другую арифметическую прогрессию. В нашем примере функция $y = 3x - 2$ переводит арифметическую прогрессию $1, 3, 5, 7, \ldots$ в арифметическую прогрессию $1, 7, 13, 19, \ldots,$ а на рис. 2.2 показано, как функция $y = 2x - 1$ переводит арифметическую прогрессию $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ в арифметическую прогрессию $-1, 1, 3, 5, 7, \ldots$

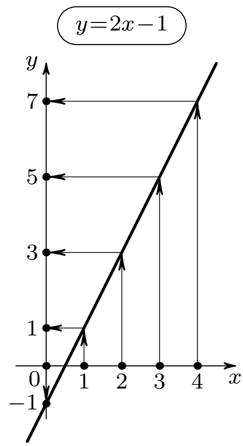


Рис. 2.2

Упражнения.

2-7. а) Придумайте линейную функцию, которая переводила бы арифметическую прогрессию $-3, -1, 1, 3, \ldots$ в арифметическую прогрессию $-2, -12, -22, -32, \ldots$

б) Какая линейная функция переведет вторую прогрессию в первую?

2-8. Пусть даны две арифметические прогрессии: a, $a + h$, $a + 2h$, $\ldots$ и c, $c + l$, $c + 2l$, $\ldots$ Всегда ли можно найти линейную функцию $y = kx + b$, которая переводит первую прогрессию во вторую?

2-9. Постройте график функции $y = \sqrt{3}\,x$: возьмите за единицу масштаба одну клеточку, поместите начало координат в левом нижнем углу тетради и проведите аккуратно прямую $y = \sqrt{3}\,x$ под углом 60° к оси Ox.

а) Докажите, что прямая $y = \sqrt{3}\,x$ не может пройти ни через одну точку, координаты которой — целые числа, кроме точки $(0;\ 0)$.

б) На Вашем чертеже такими «целочисленными» точками будут вершины клеток. Некоторые из целочисленных точек окажутся очень близко от этой прямой. Пользуясь этим, найдите приближенные значения для $\sqrt{3}$ в виде обыкновенных дробей.

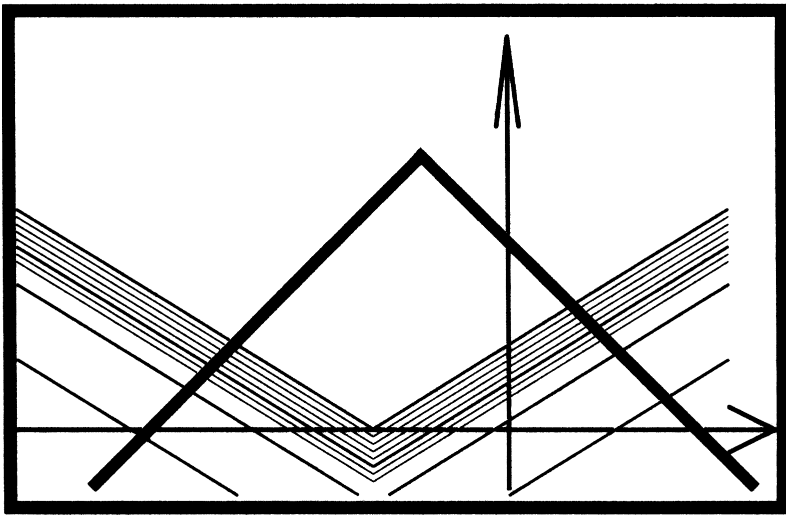
Сравните полученные значения с табличным: $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$.

2-10. а) Прямая $y = \dfrac{7}{15}x + \dfrac{1}{3}$ проходит через две точки с целыми координатами: $A(10;\ 5)$

и $B(-20;\ -9)$. Есть ли на этой прямой еще целочисленные точки (т. е. точки с целыми координатами)?

б) Известно, что прямая $y = kx + b$ проходит через две целочисленные точки. Есть ли на этой прямой еще целочисленные точки?

в) Легко построить прямую, не проходящую ни через одну целочисленную точку. Например, $y = x + 1/2$. Может ли какая-нибудь прямая $y = kx + b$ проходить только через одну целочисленную точку $A(1;\ 2)$?



§ 3. Функция $y = |x|$

Рассмотрим теперь функцию

$$y = |x|,$$

где $|x|$ означает абсолютную величину (или *модуль*) числа x. Построим ее график, пользуясь определением абсолютной величины *).

При положительных x имеем $|x| = x$. Значит, для положительных значений аргумента график $y = |x|$ совпадает с графиком $y = x$, то есть эта часть графика является лучом, выходящим из начала координат под углом 45° к оси абсцисс (рис. 3.1). При $x < 0$ имеем $|x| = -x$; значит, для отрицательных x график $y = |x|$ совпадает с биссектри-

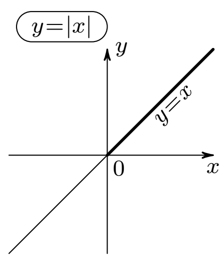


Рис. 3.1

*) Напоминаем: абсолютная величина положительного числа равна этому числу (если $x > 0$, то $|x| = x$); абсолютная величина отрицательного числа равна противоположному числу (если $x < 0$, то $|x| = -x$), абсолютная величина нуля равна нулю ($|0| = 0$).

сой второго координатного угла (рис. 3.2).

Впрочем, вторую половину графика (для отрицательных x) легко получить из первой, если заметить, что функция $y = |x|$ — четная, так как $|-a| = |a|$ (см. определение четной функции на с. 17). Значит, график функции $y = |x|$ симметричен относительно оси Oy, и вторую половину графика можно получить, отразив относительно оси ординат часть, начерченную для положительных x. Получается график, изображенный на рис. 3.3.

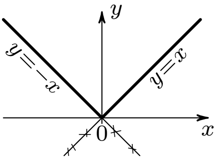


Рис. 3.2

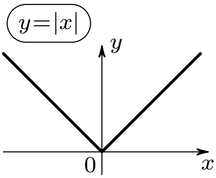


Рис. 3.3

Построим график функции
$$y = |x| + 1.$$

Этот график легко построить непосредственно. Однако мы его получим из графика функции $y = |x|$. Составим таблицу значений функции $y = |x| + 1$ и сравним ее с такой же таблицей, составленной для $y = |x|$, выписав эти таблицы рядом (табл. *а*, *б* на рис. 3.4). Ясно, что из каждой точки первого графика можно получить точку второго графика, увеличив y на единицу. Например, точка $(-2; 2)$ графика $y = |x|$ переходит в точку $(-2; 3)$ графика $y = |x| + 1$, лежащую на 1 выше первой. Значит, весь второй график получается из первого сдвигом вверх на единицу (см. рис. 3.4).

а) $y=|x|$

x	y
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

б) $y=|x|+1$

x	y
-2	3
-1	2
0	1
1	2
2	3

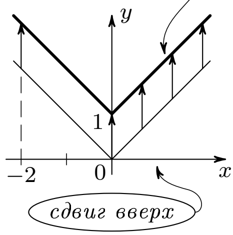


Рис. 3.4

З а д а ч а. Постройте график функции
$$y = |x| - 1.$$

Р е ш е н и е. Сравним этот график с графиком $y = |x|$. Если точка $x = a$, $y = |a|$ лежит на первом графике, то точка $x = a$, $y = |a| - 1$ будет лежать на втором графике. Поэтому каждая точка $(a; |a| - 1)$ второго графика может быть получена из точки $(a; |a|)$ первого графика сдвигом вниз на 1 единицу, и весь график получается, если график $y = |x|$ сдвинуть вниз на 1 (рис. 3.5).

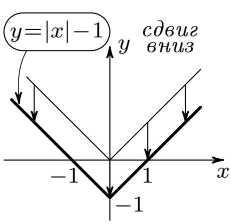
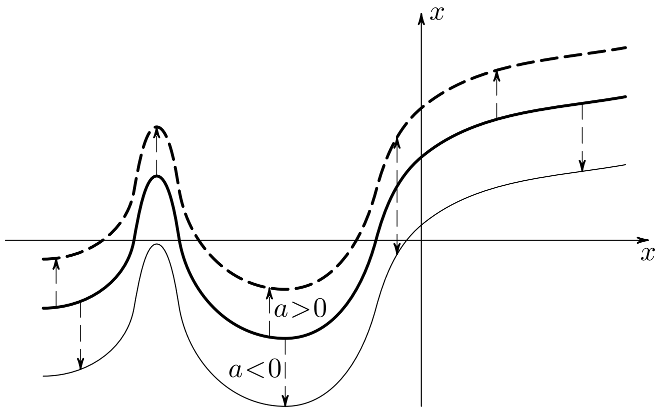


Рис. 3.5

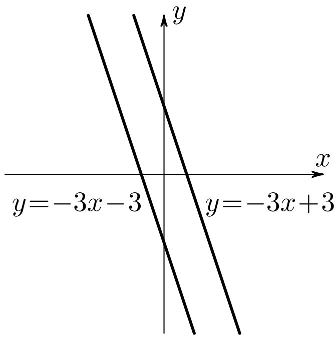


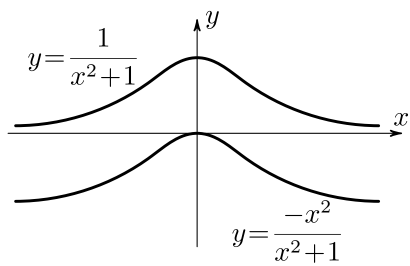
$$\boldsymbol{f(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{f(x)+a}$$

График функции $y = f(x) + a$ получается из графика $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на a единиц. Направление сдвига определяется знаком числа a (при $a > 0$ график сдвигается вверх, при $a < 0$ — вниз).





Такой сдвиг параллельно оси Oy полезен при построении многих графиков (см. с. 33).

Пусть надо построить график функции

$$y = \frac{x^2+2}{x^2+1}.$$

Представим эту функцию в виде

$$y = \frac{x^2+1+1}{x^2+1}, \quad \text{или} \quad y = 1 + \frac{1}{x^2+1}.$$

Теперь ясно, что ее график может быть получен из графика $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ (см. рис. 1.5 на с. 16) сдвигом параллельно оси Oy на 1 вверх.

Возьмем теперь функцию

$$y = |x+1|.$$

График этой функции мы тоже получим из графика функции $y = |x|$. Напишем опять рядом две таблицы: для $y = |x|$ и для $y = |x+1|$ (табл. *а*, *б* на рис. 3.6). Если сравнивать значения этих функций при одинаковых x, то окажется, что для некоторых x ордината первого графика больше, чем второго, а для некоторых — наоборот.

Однако, если внимательно посмотреть на правые столбцы этих двух таблиц, связь между таблицами можно установить. Именно, вторая функция принимает те же самые значения, что и первая, только принимает их на единицу раньше, при меньших значениях x. (Почему?) Значит, каждая точка графика $y = |x|$, сдвинутая на 1 влево, становится точкой графика $y = |x+1|$; например, из точки $(-1;\ 1)$ получается точка $(-2;\ 1)$ (рис. 3.6). Поэтому и весь график функции $y = |x+1|$ получится, если сдвинуть график функции $y = |x|$ на 1 влево параллельно оси абсцисс.

З а д а ч а. Построить график функции $y = |x-1|$.

а) $y=|x|$

x	y
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

б) $y=|x+1|$

x	y
-2	1
-1	0
0	1
1	2
2	3

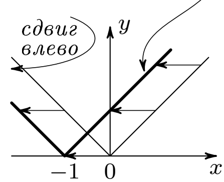


Рис. 3.6

Р е ш е н и е. Сравним его с графиком функции $y = |x|$. Если A — точка графика $y = |x|$ с координатами $(a;\ |a|)$, то точкой графика $y = |x - 1|$ с тем же значением ординаты y будет точка $A'(a + 1;\ |a|)$. (Почему?) Эту точку второго графика можно получить из точки $A(a;\ |a|)$ первого графика сдвигом параллельно оси Ox вправо. Значит, и весь график функции $y = |x - 1|$ получается из графика функции $y = |x|$ сдвигом параллельно оси Ox вправо на 1 (рис. 3.7).

Мы можем сказать, что функция $y = |x - 1|$ принимает те же значения, что и функция $y = |x|$, только с некоторым запозданием (а именно, на 1).

Такой сдвиг параллельно оси Ox полезен при построении многих графиков (см. с. 37).

У п р а ж н е н и я.

3-1. Постройте графики функций $y = |x| + 3$ и $y = |x + 3|$.

3-2. Постройте график функции $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

У к а з а н и е. Представьте знаменатель дроби $\dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$ в виде $(x - 1)^2 + 1$ и воспользуйтесь графиком на рис. 1.5 (с. 16).

3-3. У функции $y = x^4 - 5x^2 + 4$ четыре нуля: $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

а) Постройте график $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

б) Покажите, что график $y = x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x$ получается из графика $y = x^4 - 5x^2 + 4$ сдвигом на единицу влево *).

⊕ в) Найдите корни уравнения

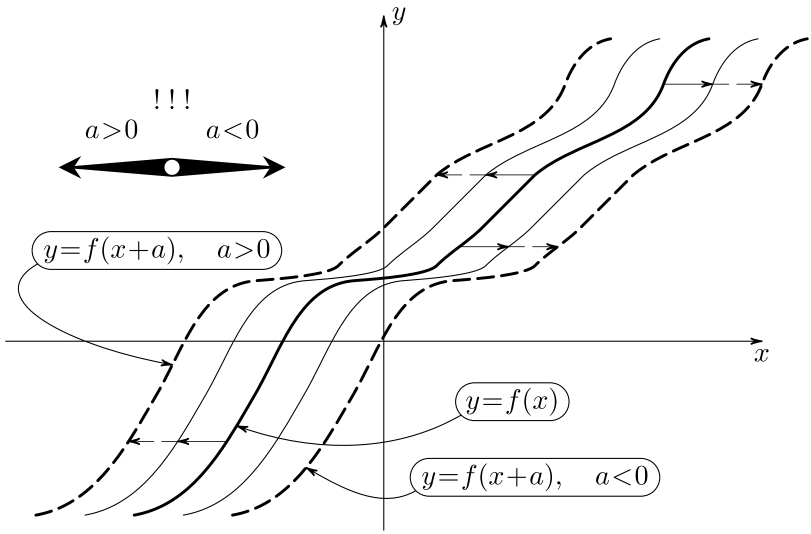
$$x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x = 0.$$

Сдвиги параллельно осям Ox и Oy полезны не только при построении многих графиков. Приведем пример.

З а д а ч а. Найти все линейные функции, которые при $x = 3$ принимают значе-

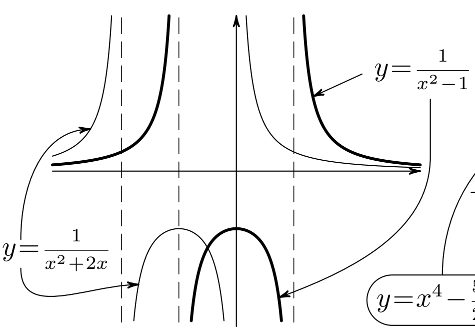
---

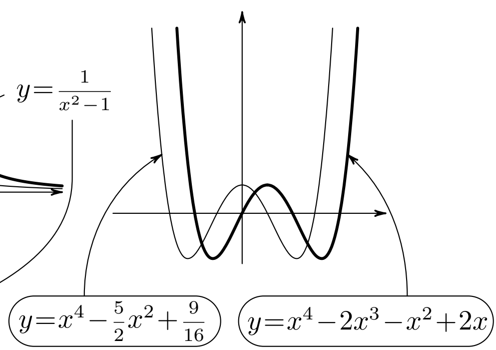
*) Можно использовать формулу $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.



$$\boldsymbol{f(x) \Rightarrow f(x+a)}$$

График функции $y = f(x+a)$ получается из графика $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на $-a$ единиц. Знак «минус» означает, что если $a > 0$, график сдвигается влево, если $a < 0$, график сдвигается вправо.





ние $y=-5$.

Р е ш е н и е. Геометрически условие формулируется так: найти все прямые, проходящие через точку $(3;\,-5)$. Любая (невертикальная) прямая, проходящая через начало координат, является графиком некоторой функции $y=kx$. Сдвинем эту прямую так, чтобы она проходила через нужную точку $(3;\,-5)$, т. е. на 3 единицы вправо и на 5 единиц вниз (рис. 3.8). После первого сдвига мы получим уравнение $y=k(x-3)$, после второго $y=k(x-3)-5$.

О т в е т. Все линейные функции, которые при $x=3$ принимают значение $y=-5$, выражаются формулой $y=k(x-3)-5$, где k — любое действительное число. (Сравните эту задачу с упражнением 2-6 на с. 28.)

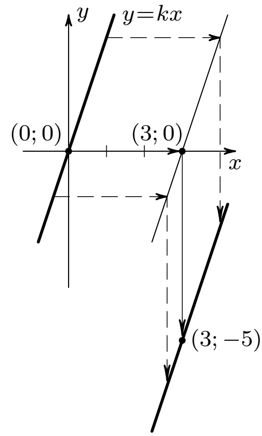


Рис. 3.8

4. Графики $y=|f(x)|$.

З а д а ч а. Построить график $y=|2x-1|$.

Р е ш е н и е. Получим этот график из прямой $y=2x-1$ (рис. 3.9). Там, где прямая идет выше оси абсцисс, значения y положительны, т. е. $2x-1>0$. Значит, на этом участке $|2x-1|=2x-1$ и искомый график $y=|2x-1|$ совпадает с графиком $y=2x-1$. Там, где $2x-1<0$ (т. е. прямая $y=2x-1$ идет ниже оси Ox), $|2x-1|=-(2x-1)$. Значит, чтобы на этом участке из графика $y=2x-1$ получить график $y=|2x-1|$, нужно у каждой точки прямой $y=2x-1$ поменять знак ординаты, т. е. отразить эту прямую относительно оси абсцисс. Получаем рис. 3.10.

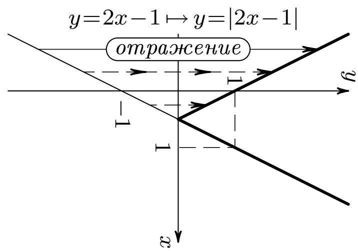


Рис. 3.9

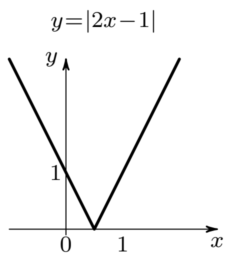


Рис. 3.10

У п р а ж н е н и е.

3-4. Зная график функции $y=x^4-2x^3-x^2+2x$ (рис. 1.8 на с. 18), постройте график

$$y=|x^4-2x^3-x^2+2x|.$$

$$y=\frac{1}{(x-1)^2+1}$$

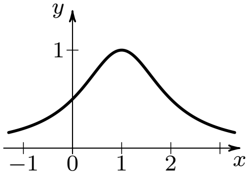


Рис. 3.11

З а д а ч а. Зная график функции

$$y=\frac{1}{x^2-2x+2} \tag{1}$$

(рис. 3.11), построить график функции

$$y=\frac{1}{x^2-2|x|+2}. \tag{2}$$

Р е ш е н и е. Поскольку для положительных значений аргумента $|x|=x$, при $x>0$ получаем, что $\frac{1}{x^2-2|x|+2}=\frac{1}{x^2-2x+2}$.

при $x>0$ $|x|=x$

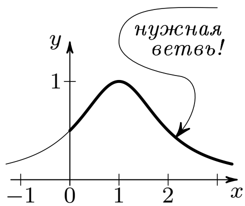


Рис. 3.12

Значит, справа от нуля график (2) совпадает с графиком (1) (рис. 3.12). Чтобы получить левую половину искомого графика (2), заметим, что функция $y=\frac{1}{x^2-2|x|+2}$ четная. Значит, левая половина графика (2) получается из его правой половины зеркальным отражением относительно оси ординат (рис. 3.13).

$$\frac{1}{(-x)^2-2|-x|+2}=$$
$$=\frac{1}{x^2-2|x|+2}$$

четная!

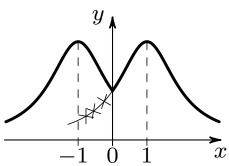


Рис. 3.13

То же самое верно и в общем случае: чтобы получить из графика $y=f(x)$ график $y=f(|x|)$, нужно половину первого графика, лежащую справа от оси ординат, оставить без изменения, а левую половину получить как зеркальное отражение правой относительно оси ординат.

У п р а ж н е н и я.

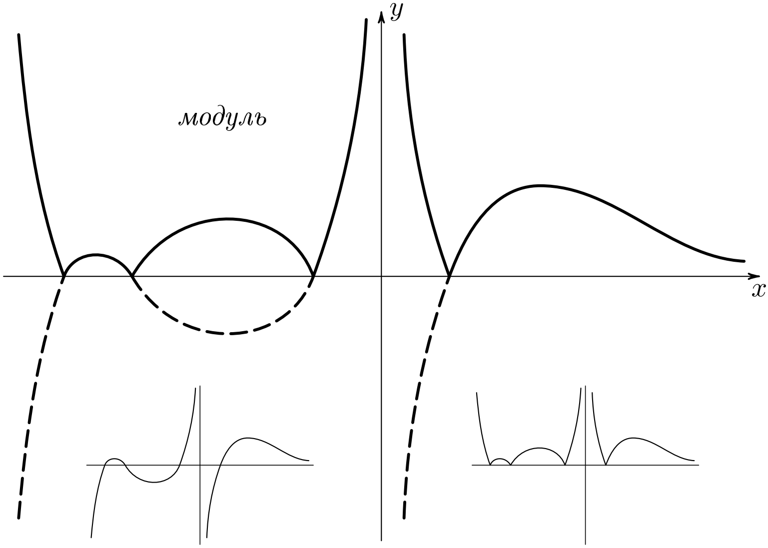
3-5. Постройте графики функций:
а) $y=|2x-1|$; б) $y=2|x|-1$; в) $y=2|x-1|$.

3-6. Постройте графики:
а) $y=4-2x$; б) $y=|4-2x|$; в) $y=4-2|x|$; г) $y=|4-2|x||$.

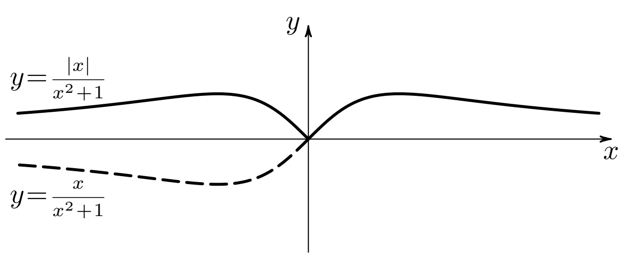
6. Ломаные линии как графики функций.

З а д а ч а. Построить график функции $y=|x+1|+|x-1|$.

Р е ш е н и е. Построим сначала на одном чертеже графики каждого из слагаемых: $y=|x+1|$ и $y=|x-1|$.



$\boldsymbol{f(x) \Rightarrow}$ $\boldsymbol{\Rightarrow \lvert f(x) \rvert}$	*Чтобы из графика $y = f(x)$ получить график $y = \lvert f(x) \rvert$, нужно участки графика $y = f(x)$, лежащие выше оси абсцисс, оставить без изменений, а участки, лежащие ниже оси абсцисс, отразить относительно этой оси.*



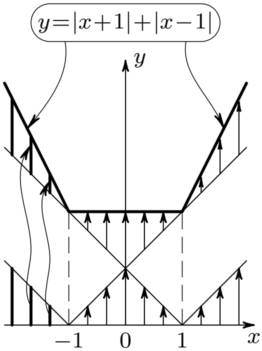


Рис. 3.14

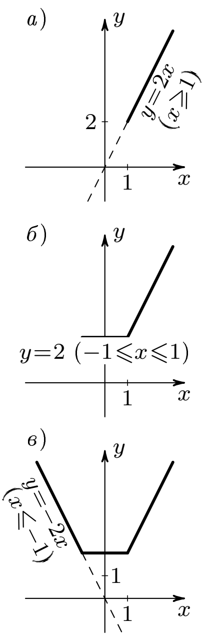


Рис. 3.15

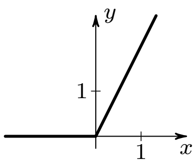


Рис. 3.16

Попробуем получить искомый график, складывая при каждом x ординаты обоих графиков. На рис. 3.14 показано построение нужного графика таким способом.

Кажется, что получилась ломаная, то есть что точки «излома» соединяются отрезками прямых. Проверим, так ли это: напишем уравнения для каждого из звеньев ломаной.

Выражения $|x+1|$ и $|x-1|$ «раскрываются» по-разному в зависимости от того, какой знак имеют выражения, стоящие под знаком модуля.

Для $x \geqslant 1$ имеем: $|x+1| = x+1$, $|x-1| = x-1$; на этом участке наша функция приобретает вид $y = 2x$ (рис. 3.15, *а*).

На участке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ получаем $y = (x+1) + (1-x) = 2$ — функция на этом участке постоянна (рис. 3.15, *б*)!

Наконец, на участке $x \leqslant -1$ функция имеет вид $y = -2x$ (рис. 3.15, *в*).

Окончательный график совпадает с тем, который был получен «сложением».

З а м е ч а н и е. Из графика видно, что функция $y = |x+1| + |x-1|$ четная. Конечно, это можно увидеть из формулы, задающей функцию.

У п р а ж н е н и я.

3-7. В каких точках имеются изломы у графика функции $y = |x| + |x+1| + |x+2|$? Найдите уравнения каждого из звеньев.

3-8. Постройте графики функций:
а) $y = |x+1| - 2x + 1$; б) $y = |x+1| + x^2 + 1$.

⊕ **3-9.** Функцию, график которой изображен на рис. 3.16, можно задать следующими условиями:

$$y = 0 \quad \text{при } x < 0,$$
$$y = 2x \quad \text{при } x \geqslant 0.$$

Попробуйте задать эту функцию одной формулой.

⊕ **3-10.** Напишите формулы для функций, графики которых изображены на а) рис. 3.17; б) рис. 3.18.

У к а з а н и е. Функция, график которой является ломаной, представляет собой сумму линейной функции и нескольких модулей таких функций. Для этой задачи ищите нужную формулу в виде $y = ax + b + c|x|$.

⊕ **3-11.** Найдите наименьшее значение функции $y = |x-2| + |x| + |x+2| + |x+4|$.

⊕ **3-12.** Зная графики функций $y=[x]$ (см. рис. 0.4) и $y = x$ (см. рис. 2.1), постройте график функции $y = x - [x]$.

Указание. Используйте «вычитание» графиков.

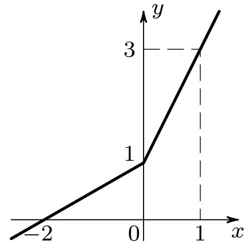


Рис. 3.17

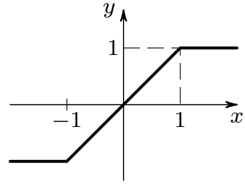


Рис. 3.18

Примечание. Функция $y = x - [x]$ встречается в разных задачах и даже имеет специальное название «дробная часть x» и обозначение $x - [x] = \{x\}$.

Проверьте себя: чему равна сумма $[x] + \{x\}$? Может ли величина $\{x\}$ быть отрицательной? Чему равны значения $\{2{,}5\}$; $\{-2{,}5\}$; $\{0\}$; $\{5/3\}$?

В заключение этого параграфа предлагаем Вам решить задачи *), которые на первый взгляд совершенно не имеют никакого отношения к тому, чем мы занимались в этом параграфе. Разобравшись в решении этих и подобных задач (см. с. 108), Вы увидите, что это не так.

⊕ **3-13.** а) Семь спичечных коробок расположены в ряд. В первой лежит 16 спичек, во второй 9 спичек, в следующих соответственно 23, 11, 18, 20 и 8 спичек (рис. 3.19). Спички можно перекладывать из любой коробки в любую, соседнюю с ней. Нужно переложить как можно меньше спичек так, чтобы во всех коробках спичек стало поровну.

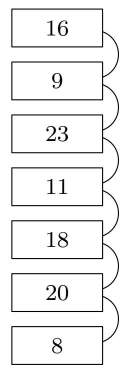


Рис. 3.19

б) Теперь 7 коробок расположены на окружности (рис. 3.20). В первой лежит 19 спичек, во второй — 9, в остальных соответственно 26, 8, 18, 11, 14 спичек. Условия те же: разрешается перекладывать спички

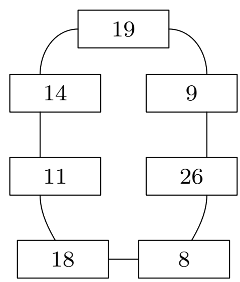
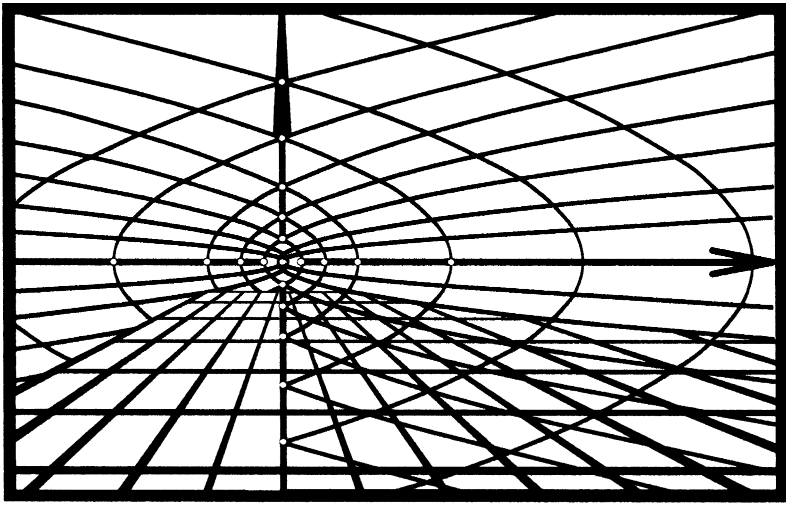


Рис. 3.20

*) Эти задачи и способ их решения предложены М. Л. Цетлиным.

из любой коробки в любую из соседних с ней. Какое наименьшее число спичек придется переложить, чтобы во всех коробках их стало поровну?

Примечание. Чтобы правильно и полностью решить эти задачи, требуется не только найти минимум числа спичек, но и показать, что действительно можно достичь требуемого результата, переложив столько спичек.



§ 4. Квадратичная функция

1. Параболы. Рассмотрим функцию

$$y = x^2.$$

Вы, конечно, строили ее график и знаете, что у этой кривой есть специальное название — *парабола*. Графики функций $y = ax^2$ легко получаются из графика функции $y = x^2$ растяжением вдоль оси Oy и тоже называются параболами.

Интересно, что все эти кривые подобны друг другу (см. с. 109, задача 9-19, г), так что одна и та же кривая при подходящем выборе масштаба может служить графиком любой функции $y = ax^2$.

Упражнение.

4-1. На рис. 4.1 изображена парабола. Известно, что это — график функции $y = x^2$. Определите масштаб (масштаб по обеим осям одинаков).

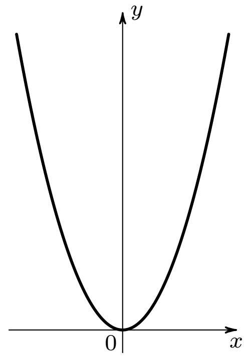


Рис. 4.1

2. Как растет квадратичная функция. Посмотрим, как будут меняться значения функции $y = x^2$, если значения аргумен-

x	y	*приращение*
1	1	
		$4-1=3$
2	4	
		$9-4=5$
3	9	
		$16-9=7$
4	16	
		$25-16=9$
5	25	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

приращение
приращения$=2$
постоянно!

Рис. 4.2

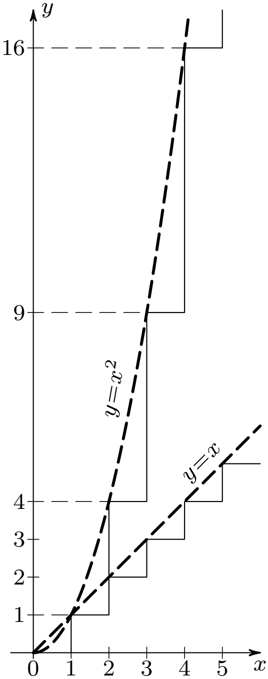


Рис. 4.3

та меняются на одну и ту же величину, т. е. составляют арифметическую прогрессию. Для простоты рассмотрим положительные значения x. Например, пусть аргумент x принимает значения 1, 2, 3, 4, ... Тогда функция будет принимать значения 1, 4, 9, 16, ...

Вы видите, что, в отличие от линейной функции, значения функции $y = x^2$ уже не образуют арифметической прогрессии.

Добавим к таблице значений аргумента и функции еще один столбец (рис. 4.2). В этом столбце мы будем записывать, на сколько меняется значение y, когда аргумент x переходит от своего значения к следующему. Например, пусть аргумент меняется от значения $x = 2$ до значения $x = 3$. Тогда функция $y = x^2$ меняется от значения $y = 4$ до значения $y = 9$. Изменение или, как говорят, *приращение* функции равно $9 - 4 = 5$.

Итак, в третьем столбце нашей таблицы мы запишем приращения*) функции $y = x^2$ для выбранных нами значений аргумента x. Теперь ясно видно, что функция $y = x^2$ изменяется так, что при возрастании значений x на одну и ту же величину возрастает не только сама функция, но и ее приращения. На графике этот факт тоже виден: кривая $y = x^2$ все круче и круче идет вверх, в то время как график линейной функции, которая изменяется равномерно, идет все время под одним и тем же углом к оси Ox (рис. 4.3).

*) Слово «приращение» в разговорном языке означает увеличение. Приращение функции, конечно, может быть и отрицательным (например, приращения функции $y = x^2$ для отрицательных значений аргумента); в этом случае с увеличением аргумента значения функции будут уменьшаться.

Интересно отметить, что приращения функции $y = x^2$ при постоянном приращении аргумента x образуют арифметическую прогрессию! Попробуйте доказать этот факт в общем виде: если значения аргумента x образуют арифметическую прогрессию a, $a + d$, $a + 2d$, $\ldots$, $a + nd$, $\ldots$, то значения соответствующих приращений квадратичной функции $y = x^2$ также образуют арифметическую прогрессию.

Этим свойством обладают все квадратичные функции $y = ax^2 + bx + c$: равным приращениям аргумента соответствуют равномерно возрастающие приращения функции.

Пусть аргумент t есть время, а функция s — пройденный путь (мы меняем обозначения x на t и y на s в соответствии с тем, как это принято в физике). Тогда формула $s = vt$ выражает путь, пройденный за время t при равномерном прямолинейном движении со скоростью v.

Если же прямолинейное движение происходит с постоянным ускорением a, то зависимость пройденного пути s от времени t выражается (при нулевой начальной скорости) формулой $s = \frac{at^2}{2}$.

При равномерном движении за равные промежутки времени тело проходит равные отрезки пути, т. е. равным приращениям аргумента соответствуют равные приращения функции — <u>значения</u> линейной функции образуют арифметическую прогрессию.

При равноускоренном движении отрезки пути, пройденные за равные промежутки времени, равномерно возрастают — <u>приращения</u> квадратичной функции образуют арифметическую прогрессию.

Упражнения.

4-2. Составьте таблицу с тремя столбцами (значения аргумента, функции и ее приращений) для трехчлена $y = x^2 + x - 3$, взяв для x значения 1, 0, -1, -2, -3. Добавьте к таблице еще один столбец и запишите в него разности двух последовательных приращений.

Возьмите теперь другой трехчлен: $x^2 + 3x + 5$. Составьте и для него такую же таблицу. Сравните последние столбцы этих двух таблиц. А что получится, если взять трехчлен $y = 2x^2 + 3x + 5$?

4-3. Из рисунка 4.4 видно, что если взять на положительной половине оси абсцисс равномерную шкалу, то график $y = x^2$ переведет ее в шкалу 0, A_1, A_2, A_3 и т. д., расположенную на оси ординат, которая уже не будет равномерной. Этой шкалой ось ординат разбилась на отрезки OA_1, A_1A_2, A_2A_3 и т. д. Представьте себе, что Вы разрезали ось ординат на эти отрезки и поставили их вертикально один за другим вдоль оси Ox на равных расстояниях друг от друга (основаниями в точки 1, 2, 3 и т. д.) (рис. 4.5). Как расположатся концы этих отрезков? Объясните результат.

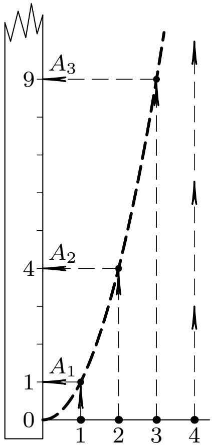


Рис. 4.4

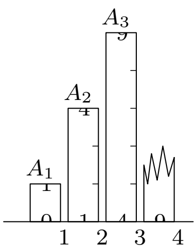


Рис. 4.5

3. График приведенного квадратного трехчлена. Рассмотрим теперь графики функций вида

$$y = x^2 + px + q.$$

Покажем, что они по форме ничем не отличаются от параболы $y = x^2$ и занимают лишь другое положение относительно координатных осей.

Рассмотрим сначала конкретный пример. Возьмем трехчлен $x^2 + 2x + 3$. Представим его в виде $(x + 1)^2 + 2$, выделив полный квадрат.

$$y=x^2$$
$$\downarrow$$
$$y=(x+1)^2=x^2+2x+1$$
$$\downarrow$$
$$y=(x+1)^2+2=$$
$$=x^2+2x+3$$

График $y = (x + 1)^2$ получается из параболы $y = x^2$ сдвигом параллельно оси Ox. (Сообразите, в какую сторону сдвигается парабола.) Из графика $y = (x + 1)^2$ график $y = (x + 1)^2 + 2$ получается совсем просто (рис. 4.6).

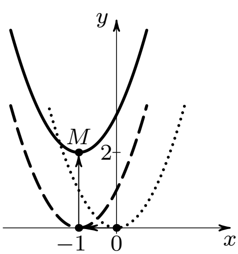


Рис. 4.6

Итак, график функции $y = x^2 + 2x + 3$ получается из параболы $y = x^2$ сдвигом ее влево на 1 единицу и вверх на 2 единицы. При таком преобразовании вершина параболы, помещавшаяся в точке (0; 0) — начале координат, — переходит в точку M с координатами $(-1; 2)$.

З а д а ч а. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 + 6x + 5$.

Р е ш е н и е. Наименьшее значение указанной функции — это ордината вершины параболы $y = x^2 + 6x + 5$. Чтобы определить координаты вершины, выделим полный квадрат: $x^2+6x+5=(x+3)^2-4$. Теперь видно, что наша парабола получилась из $y=x^2$ сдвигом по оси Ox на 3 единицы влево и по оси Oy на 4 единицы вниз.

О т в е т. Наименьшее значение функции равно -4.

Докажем теперь, что, сдвигая параболу $y=x^2$, можно получить график любого квадратного трехчлена вида $y=x^2+px+q$. Для этого, как и выше, выделим полный квадрат, т. е. представим наш трехчлен в виде $y=(x+\ldots)^2+\ldots,$ где второе слагаемое в скобках и свободный член нужно подобрать не зависящими от x.

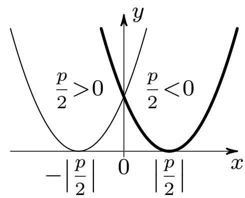


Рис. 4.7

После раскрытия скобок член с первой степенью x получается лишь в удвоенном произведении, и поскольку этот член должен быть равен px, второе слагаемое в скобках нужно взять равным $p/2$. Таким образом,

$$x^2+px+q=(x+p/2)^2+\ldots=$$
$$=x^2+px+p^2/4+\ldots$$

$$y=x^2+px+q=$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$$

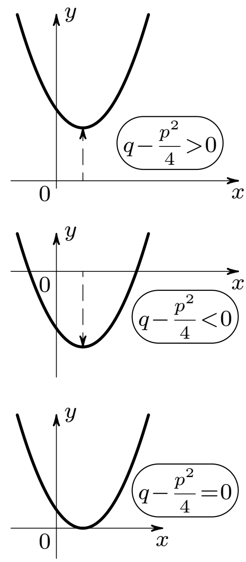


Рис. 4.8

Поскольку свободный член трехчлена должен быть равен q, вместо многоточия нужно написать $q-p^2/4$. Итак, трехчлен $y=x^2+px+q$ можно переписать в виде

$$y=(x+p/2)^2+q-p^2/4.$$

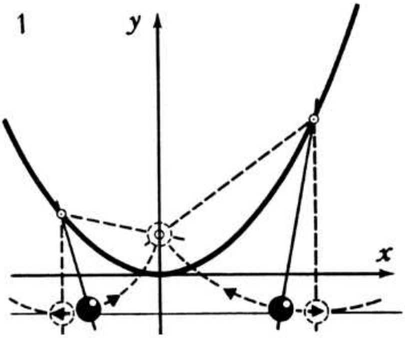
Мы видим, что *график*

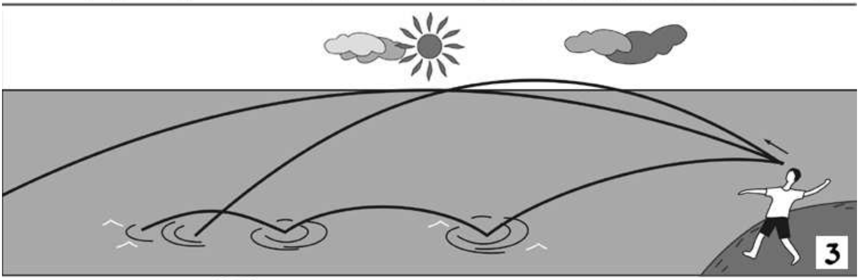
$$y=x^2+px+q$$

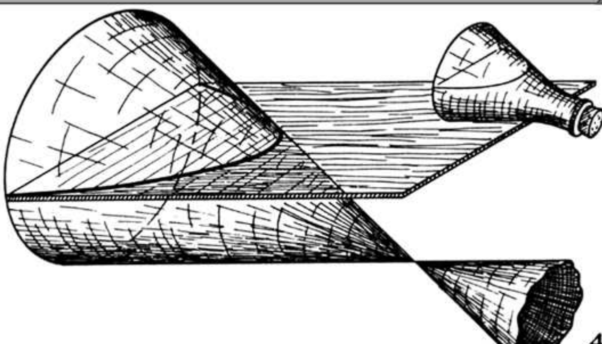
представляет собой параболу $y=x^2$, *сдвинутую на* $-p/2$ *параллельно оси* Ox (рис. 4.7), *и на* $q-p^2/4$ *параллельно оси* Oy (рис. 4.8) *).

Вершина M этой параболы имеет абсциссу $x_m=-p/2$ и ординату $y_m=q-p^2/4$.

*) Сдвиг на $-p/2$ по оси Ox означает сдвиг влево, если $p/2>0$, и сдвиг вправо, если $p/2<0$.







Интересные свойства параболы

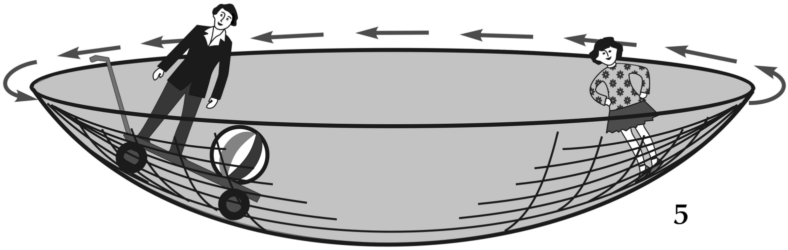
1. Любая точка параболы равноудалена от некоторый точки, называемой фокусом параболы, и некоторой прямой, называемой ее директрисой.

2. Если вращать параболу вокруг ее оси симметрии (например, параболу $y = x^2$ вокруг оси Oy), то получается очень интересная поверхность, которая называется *параболоидом вращения*.

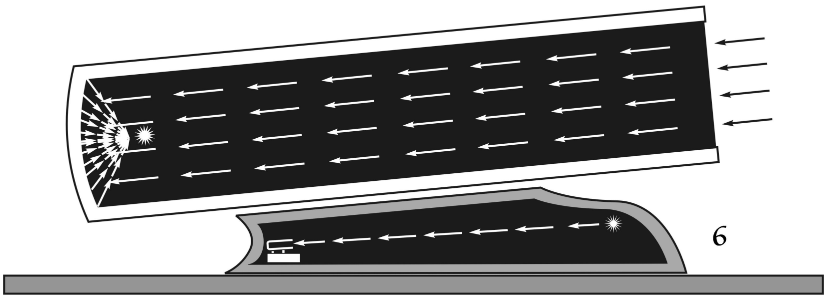
Поверхность жидкости, вращающейся в сосуде, имеет форму параболоида вращения. Вы можете увидеть эту поверхность, если помешаете ложечкой в неполном стакане чая, а потом вынете ложечку.

3. Если в пустоте бросить камень под некоторым углом к горизонту, то он полетит по параболе.

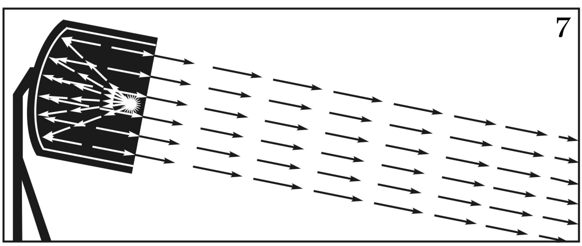
4. Если пересечь поверхность конуса плоскостью, параллельной какой-либо одной его образующей, то в сечении получится парабола.



5



6



7

5. В парках культуры устраивают иногда забавный аттракцион «Параболоид чудес». Каждому из стоящих внутри вращающегося параболоида кажется, что он стоит на полу, а остальные люди каким-то чудом держатся на стенках *).

6. В зеркальных телескопах тоже применяют параболические зеркала: свет от далекой звезды, идущий параллельным пучком, упав на зеркало телескопа, собирается в фокусе.

7. У прожекторов обычно зеркало делается в форме параболоида. Если поместить источник света в фокусе параболоида, то лучи, отразившись от параболического зеркала, образуют параллельный пучок.

*) Опыты, описанные в пунктах 2 и 5, основаны на одном и том же свойстве параболоида: если вращать параболоид с подходящей скоростью вокруг его оси, расположенной вертикально, то равнодействующая центробежной силы и силы тяготения в любой точке параболоида направлена перпендикулярно к его поверхности.

Упражнения.

4-4. Нарисуйте графики функций

а) $y=(x+2)^2+3$; б) $y=(x+2)^2-3$;
в) $y=(x-2)^2+3$; г) $y=(x-2)^2-3$.

4-5. Вершина параболы $y=x^2+px+q$ лежит в точке $(-1;\ 2)$. Найдите p и q.

4. Произвольный квадратный трехчлен. Взяв «за основу» график $y=ax^2$, легко получить график квадратного трехчлена общего вида $y=ax^2+bx+c$.

Рассмотрим пример. Возьмем трехчлен $y=\frac{1}{2}x^2-3x+6$. Вынесем коэффициент при x^2 за скобки:

$$\frac{1}{2}x^2-3x+6=\frac{1}{2}(x^2-6x+12).$$

В выражении, стоящем в скобках, выделим полный квадрат:

$$\frac{1}{2}(x^2-6x+12)=\frac{1}{2}(x^2-2\cdot 3x+9+3)=$$
$$=\frac{1}{2}((x-3)^2+3).$$

Итак, окончательно $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{3}{2}$.

Мы видим, что график $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{3}{2}$ получается из параболы $y=\frac{1}{2}x^2$ сдвигом по оси Ox на 3 единицы вправо и по оси Oy на $3/2$ единицы вверх.

Упражнения.

4-6. Нарисуйте графики следующих функций, указав точные координаты вершины каждой из парабол и координаты точек пересечения графиков с осями координат:

а) $y=x-x^2-1$; б) $y=1-3x^2-2x$; в) $y=$ $=10x^2-10x+3$; г) $y=0{,}125x^2+x+2$.

4-7. Сдвиньте параболу $y=ax^2$ по оси Ox и по оси Oy так, чтобы получить график трехчлена $y=ax^2+bx+c$.

Ответ. Парабола $y=ax^2+bx+c$ получается из параболы $y=ax^2$ сдвигом по оси абсцисс на $-\frac{b}{2a}$ и по оси ординат на $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

⊕ **4-8.** Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 4x + 5$ на участках: а) от $x = 0$ до $x = 5$ $(0 \leqslant x \leqslant 5)$; б) от $x = -5$ до $x = 0$ $(-5 \leqslant x \leqslant 0)$.

Указание. Используйте график функции $y = 2x^2 - 4x + 5$.

4-9. а) График какой функции получится, если параболу $y = x^2$ сначала растянуть по оси ординат в два раза, а потом сдвинуть по той же оси на три единицы вниз?

б) График какой функции получится, если эти два преобразования проделать в обратном порядке: сначала сдвинуть параболу $y = x^2$ на три единицы вниз, а потом полученную кривую растянуть в два раза вдоль оси Oy?

в) Нарисуйте графики этих функций.

4-10. На сколько единиц нужно сдвинуть параболу $y = x^2 - 3x + 2$ по оси Ox и по оси Oy так, чтобы получилась парабола $y = x^2 + x + 1$?

4-11. Сдвиньте параболу $y = x^2$ параллельно оси Ox так, чтобы она прошла через точку (3; 2) — см. рис. 4.9. График какой функции Вы при этом получите?

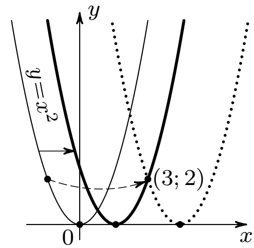


Рис. 4.9

5. Корни квадратного трехчлена. Посмотрим теперь, что можно сказать по графику функции $y = x^2 + px + q$ о решении квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Корни этого уравнения — это те значения x, при которых значение функции $y = x^2 + px + q$ равно нулю. Точки графика, соответствующие этим значениям x, лежат на оси абсцисс.

Напомним, что график $y = x^2 + px + q$ (или $y = (x + p/2)^2 + q - p^2/4$) получается из параболы $y = x^2$ сдвигом параллельно оси Oy на величину $q - p^2/4$ (и по горизонтали на величину $-p/2$). Если $q - p^2/4 < 0$, то парабола сдвигается вниз (рис. 4.10, *а*) и дважды пересекает ось абсцисс — уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два действительных корня. Если $q - p^2/4 > 0$, парабола сдвигается вверх (рис. 4.10, *б*) и график целиком расположен выше оси абсцисс — уравнение не имеет корней.

Если же $p^2/4 - q = 0$ (рис. 4.10, *в*), то квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ пре-

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

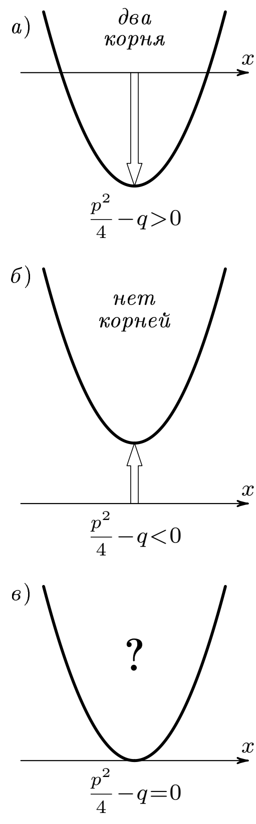


Рис. 4.10

вращается в уравнение $(x + p/2)^2 = 0$. Этот случай особенно интересен. Рассмотрим его подробно.

Уравнение $x - 2 = 0$ имеет одно решение $x = 2$. Уравнение $(x - 2)^2 = 0$ тоже имеет лишь решение $x = 2$ — ведь никакое другое число не удовлетворяет этому уравнению.

Однако в первом случае мы говорим, что уравнение $x - 2 = 0$ имеет один корень, а во втором случае обычно говорят, что уравнение $(x - 2)^2 = 0$ имеет кратный корень, или два равных корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 2$.

Как же объяснить это различие?

Есть несколько способов это сделать. Мы приведем один из них. Изменим немного первое уравнение: заменим нуль в правой части каким-нибудь маленьким числом. Корень, конечно, изменится, но он по-прежнему останется единственным: уравнению по-прежнему будет удовлетворять только одно число. Например, $x - 2 = 0{,}01$, $x = 2{,}01$.

Изменим теперь таким же образом второе уравнение:

$$(x - 2)^2 = 0{,}01, \quad \text{или} \quad x^2 - 4x + 3{,}99 = 0.$$

Полученное уравнение теперь будет иметь два корня: $x_1 = 2{,}1$ и $x_2 = 1{,}9$. Будем теперь в уравнении $(x - 2)^2 = 0{,}01$ менять правую часть, заменяя ее все меньшими и меньшими положительными числами. С уменьшением правой части корни будут «сближаться», так что их значения будут отличаться друг от друга на все меньшую и меньшую величину. Наконец, когда правая часть станет равной нулю, два корня «сольются» в один — значения двух корней станут равными друг другу.

Поэтому говорят, что уравнение

$$(x - 2)^2 = 0$$

имеет два корня, слившихся в один двукратный корень.

Геометрически случай слившихся корней соответствует касанию параболы

$$y = (x-2)^2$$

оси Ox.

Рассмотрим теперь общий случай — квадратный трехчлен $x^2 + px + q$. Пусть сначала свободный член q меньше $p^2/4$ (т. е. $p^2/4 - q > 0$), так что парабола $y = x^2 + px + q$ имеет две точки пересечения с осью абсцисс (рис. 4.11, *а*). Будем увеличивать свободный член: первое время парабола, двигаясь вверх, все еще будет иметь две точки пересечения с осью Ox (рис. 4.11, *б* и *в*) и уравнение $x^2 + px + q = 0$ будет иметь два различных корня. Затем, в некоторый момент (когда $p^2/4 - q = 0$) эти точки пересечения, сближаясь, сливаются в одну (рис. 4.11, *г*). В этот момент парабола $y = x^2 + px + q = (x + p/2)^2$ касается оси, а уравнение $x^2 + px + p/4 = 0$ имеет один двукратный корень. При дальнейшем увеличении свободного члена q (т. е. при $p^2/4 - q < 0$) парабола перестает пересекать ось Ox, и уравнение $x^2 + px + q = 0$ не будет иметь действительных корней.

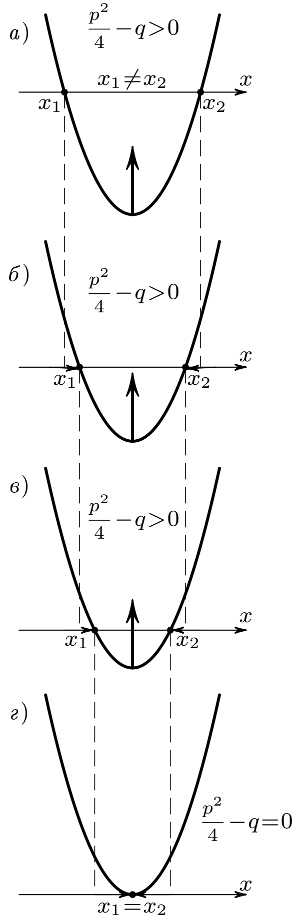


Рис. 4.11

З а д а ч а. Найти параболу

$$y = ax^2 + bx + c,$$

которая пересекает ось Ox в точках $x = 3$ и $x = -5$, а ось Oy — в точке $y = 30$.

Р е ш е н и е. Квадратичная функция, задающая эту параболу, будет иметь вид $y = a(x-3)(x+5)$.

Точка пересечения с осью Oy получается при $x = 0$. Значит, при $x = 0$ наша функция должна равняться 30. Получаем

$$a(-3)(+5) = 30, \qquad \text{откуда } a = -2.$$

О т в е т. Парабола $y = -2x^2 - 4x + 30$.

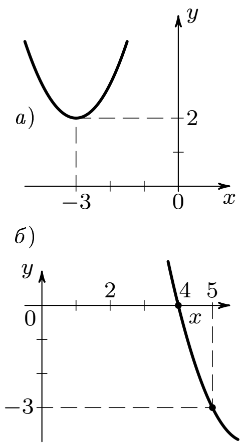


Рис. 4.12

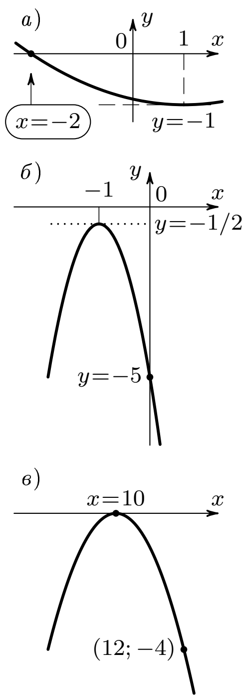


Рис. 4.13

Упражнения.

4-12. а) Найдите квадратный трехчлен вида x^2+px+q, если его график пересекает ось абсцисс в точках $x=2$ и $x=5$.

б) Найдите кубический многочлен вида

$$y=x^3+px^2+qx+r,$$

если известно, что его график пересекает ось Ox в точках $x=1$, $x=2$ и $x=3$.

в) Не можете ли Вы придумать многочлен, график которого пересекал бы ось Ox в 101 точке: $x_1=-50$, $x_2=-49$, $x_3=-48$, $\ldots$, $x_{101}=50$?

Какова наименьшая возможная степень такого многочлена?

4-13. Трехчлен $-x^2+6x-9$ имеет два одинаковых корня.

а) Измените на 0,01 свободный член так, чтобы у полученного трехчлена было два различных корня.

б) Можно ли добиться того же результата, изменяя на 0,01 только коэффициент при x?

4-14. На рис. 4.12, *а* и *б* изображены графики квадратных трехчленов $y=x^2+px+q$. Найдите p и q. Нарисуйте график *б*, выбрав более удачно масштаб и положение осей.

4-15. На рис. 4.13, *а*, *б* и *в* изображены графики квадратных трехчленов $y=ax^2+bx+c$. Найдите a, b и c.

Задача. а) Решить неравенство

$$x^2-5x+4>0.$$

Решение. На рис. 4.14 видно, что функция $y=x^2-5x+4$ положительна на двух участках: при x, меньших 1, и при x, больших 4.

Ответ. $x<1$ и $x>4$.

б) Решить неравенство

$$x-1<|x^2-5x+4|.$$

Решение. Нарисуем на одном чертеже графики функций, стоящих в правой и левой части, т. е. функций $y=x-1$ и $y=|x^2-5x+4|$. По рис. 4.15 видно, что прямая $y=x-1$ имеет с графиком $y=|x^2-5x+4|$ три общие точки: $A(x_1;\,y_1)$, $B(x_2;\,y_2)$ и $C(x_3;\,y_3)$. Условие $x-1<|x^2-5x+4|$ выполняется на трех участках: $x < x_1$, $x_1 < x < x_2$, $x > x_3$. Значения x_1 и x_3 находятся из уравнения $x - 1 = x^2 - 5x + 4$. Значение x_2 находится из уравнения $x - 1 = -(x^2 - 5x + 4)$.

Ответ. $x < 1$, $1 < x < 3$ и $x > 5$, т. е. все x, кроме $x = 1$ и $3 \leqslant x \leqslant 5$.

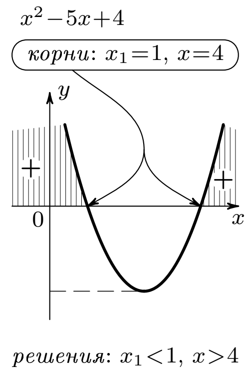


Рис. 4.14

Упражнения.

4-16. Используя результат предыдущей задачи, напишите ответы для неравенств:
а) $x - 1 > |x^2 - 5x + 4|$; б) $x - 1 \leqslant |x^2 - 5x + 4|$.

4-17. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 5|x| + 4$ на участке от -2 до 2.

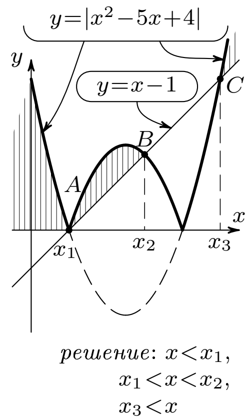


Рис. 4.15

6. Фокус и директриса параболы.

Задача. Постройте график функции $y = x^2$. Масштаб возьмите покрупней: 1 = = 2 см (4 клетки). Отметьте на оси Oy точку $F(0; 1/4)$. Полоской бумаги измерьте расстояние от точки F до какой-нибудь точки M параболы. Затем приколите полоску в точке M и поверните ее вокруг этой точки так, чтобы она стала вертикальной. Конец полоски опустится немного ниже оси абсцисс. Отметьте на полоске, насколько она выйдет за ось абсцисс (рис. 4.16). Возьмите теперь другую точку на параболе и повторите измерение еще раз. Насколько теперь опустился край полоски за ось абсцисс?

Результат мы Вам сможем сказать заранее: какую бы точку на параболе $y = x^2$ Вы ни взяли, расстояние от этой точки до точки $(0; 1/4)$ будет больше расстояния от той же точки до оси абсцисс всегда на одно и то же число — на $1/4$.

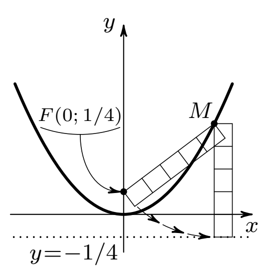


Рис. 4.16

Можно сказать иначе: расстояние от любой точки параболы $y = x^2$ до точки $(0; 1/4)$ равно расстоянию от той же точки параболы до прямой $y = -1/4$, параллельной оси Ox.

Докажем это замечательное свойство параболы.

Возьмем некоторую точку A параболы. Она будет иметь координаты $(a;\, a^2)$. Расстояние d от точки $A(a;\, a^2)$ до прямой $y = -1/4$ равно $a^2 + 1/4$.

Расстояние R от точки A до точки $F(0;\, 1/4)$ вычисляется по формуле

$$R^2 = (0-a)^2 + \left(a^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = \\ = a^2 + a^4 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{16} = \\ = a^4 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{16} = \left(a^2 + \frac{1}{4}\right)^2,$$

откуда $R = a^2 + 1/4$. Получили $R = d$, что и требовалось доказать.

Замечательная точка $F(0;\, 1/4)$ называется *фокусом параболы* $y = x^2$, а прямая $y = -1/4$ — *директрисой* этой параболы.

Директриса и фокус есть у всякой параболы. (См. также рис. 1 на с. 50.)

Упражнение.

⊕ **4-18.** Найдите директрису и фокус параболы $y = x^2 + 2x + 2$.

7. Можно ли график возвести в квадрат? График функции $y = x^2$ можно также нарисовать, «возводя в квадрат» график $y = x$, т. е. мысленно возводя в квадрат значение каждой ординаты (рис. 4.17). Конечно, мы таким способом (как, впрочем, и всяким другим) не получим точного графика, по которому можно будет определять числовые значения функции, но характер графика, все его принципиальные особенности будут выявлены.

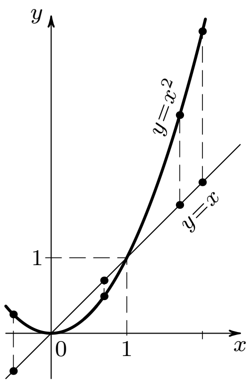


Рис. 4.17

Так, ясно, что при переходе от графика функции $y = x$ к графику функции $y = x^2$ точка с ординатой, равной 1, останется на месте. Если же ордината $y = x$ больше 1, то $x^2 > x$ и график $y = x^2$ пойдет выше прямой $y = x$. При положительных x, меньших 1, $x^2 < x$, и график $y = x^2$ пойдет ниже прямой $y = x$. При приближении к точке $x = 0$, где график $y = x$ пересекает ось Ox, квадраты x будут уменьшаться быстрее, чем x в первой степени, и поэтому график функции $y = x^2$ будет не пересекать ось Ox, как график $y = x$, а касаться этой оси.

Для отрицательных x можно воспользоваться четностью функции $y = x^2$.

Упражнения.

4-19. Нарисован график (рис. 4.18) функции $y = f(x)$. Нарисуйте на этом же чертеже график $y = (f(x))^2$.

4-20. Воспользовавшись графиком

$$y = x(x+1)(x-1)(x-2)$$

(рис. 1.8), нарисуйте график

$$y = x^2(x+1)^2(x-1)^2(x-2)^2.$$

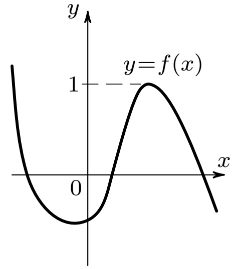
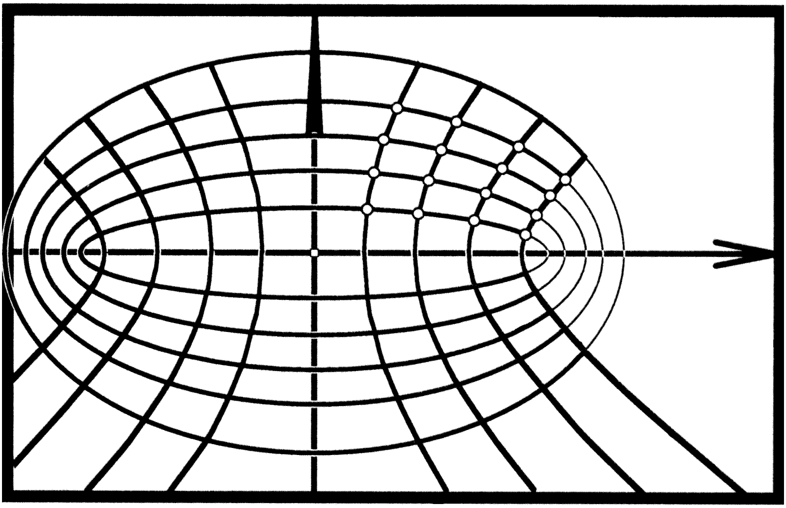


Рис. 4.18



§ 5. Дробно-линейная функция

$\boxed{y=\frac{1}{x}}$

x	y
1	1
2	1/2
3	1/3
−1	−1

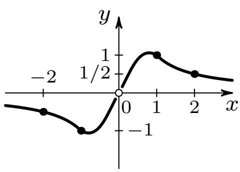


Рис. 5.1

$x>0,\ y=\frac{1}{x}>0$;
пусть $x\to 0$

x	y
1/10	10
1/100	100
1/1000	1000
$\vdots$	$\vdots$

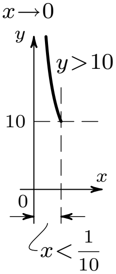


Рис. 5.2, *а*

На рис. 5.1 изображен «график» функции $y=1/x$ в том виде, как его может нарисовать человек, не искушенный в построении графиков. Он будет рассуждать так: «При $x=1$ $y=1$. При $x=2$ $y=1/2$. При $x=3$ $y=1/3$. $x=0$ пока пропустим. Найдем еще точки для отрицательных значений x: при $x=-1$ $y=-1$; при $x=-2$ $y=-1/2$, и т. д. Теперь соединим точки плавной линией. А так как неизвестно, что такое $1/0$, точку с абсциссой 0 из графика выкинем.»

Вы уже знаете, что так рисовать графики нельзя. Чтобы представить себе правильную картину, заметим сначала, что при $x=0$ функция не определена. В таких случаях следует обязательно посмотреть, как ведет себя функция около этой точки.

Когда x, уменьшаясь по абсолютной величине, подходит к 0, то y становится по абсолютной величине как угодно большим. При этом, если x приближается к нулю справа ($x > 0$), то $y = 1/x$ тоже положителен. Поэтому при приближении к нулю справа график неограниченно поднимается вверх (рис. 5.2, *а*).

Если же x приближается к нулю слева ($x < 0$), то y отрицателен, поэтому слева график бесконечно спускается вниз (рис. 5.2, *б*).

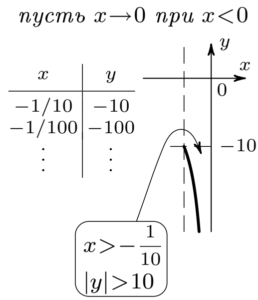


Рис. 5.2, *б*

Теперь ясно, что около «запрещенного» значения $x = 0$ график, разорвавшись на две ветви, расходится вдоль оси Oy: правая ветвь идет вверх, а левая — вниз (рис. 5.3).

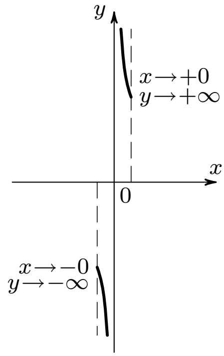


Рис. 5.3

Посмотрим теперь, как ведет себя функция, если x увеличивается по абсолютной величине.

При положительном x значения функции y тоже положительны. Значит, вся правая ветвь графика расположена выше оси абсцисс. При увеличении x дробь $1/x$ уменьшается. Поэтому при движении от нуля вправо кривая $y = 1/x$ опускается все ниже и ниже, причем она может подойти к оси Ox на сколь угодно малое расстояние (рис. 5.4, *а*). Для $x < 0$ получается аналогичная картина (рис. 5.4, *б*).

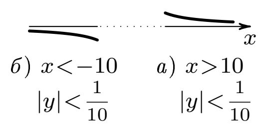


Рис. 5.4

Таким образом, при неограниченном увеличении x по абсолютной величине функция $y = 1/x$ неограниченно уменьшается по абсолютной величине и обе ветви графика приближаются к оси абсцисс: правая сверху, левая снизу. Общий вид графика — на рис. 5.5.

Кривая, являющаяся графиком функции $y = 1/x$, называется *гиперболой*. Прямые, к которым приближаются ветви гиперболы, называются ее *асимптотами*.

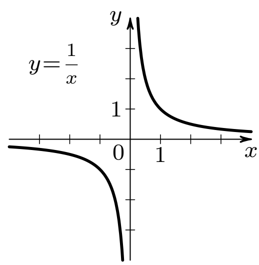


Рис. 5.5

2. Симметрия гиперболы. Нечетные функции. Построив правую ветвь гиперболы $y = 1/x$, левую ветвь можно было получить из правой с помощью симметрии, правда, другого рода, чем та, которую мы рассматривали на с. 15—16.

Возьмем некоторую точку M на правой ветви графика $y = 1/x$ (рис. 5.6). Если a — абсцисса этой точки, то ее ордината b равна $1/a$. Найдем теперь точку графика, соответствующую противоположному значению абсциссы, $x = -a$. Ордината такой точки равна $\frac{1}{-a}$, т. е. $-\frac{1}{a}$, или $-b$. Итак, для каждой точки $M(a;\, b)$ на правой половине графика $y = 1/x$ на левой его половине найдется точка $M'(-a;\, -b)$.

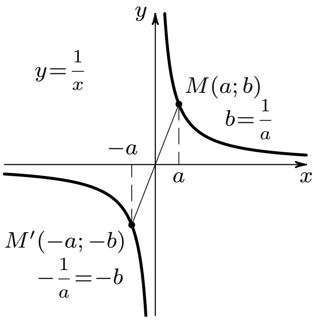


Рис. 5.6

Очевидно (см. рис. 5.6), точка M' симметрична точке M относительно начала координат. Значит, всю левую половину графика можно получить из правой симметричным отражением относительно начала координат. При таком отражении левая половина графика переходит в правую и, тем самым, весь график переходит в себя. Говорят, что точка O есть *центр симметрии* кривой $1/x$, а также что эта кривая симметрична относительно точки O.

Функция $y = 1/x$ не является четной, и ось ординат не является, конечно, ее осью симметрии. Но наклонные оси симметрии у гиперболы есть! Это две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через начало координат и составляющие с осями углы в 45° (рис. 5.7).

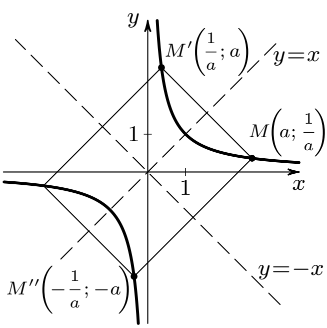


Рис. 5.7

Упражнения.

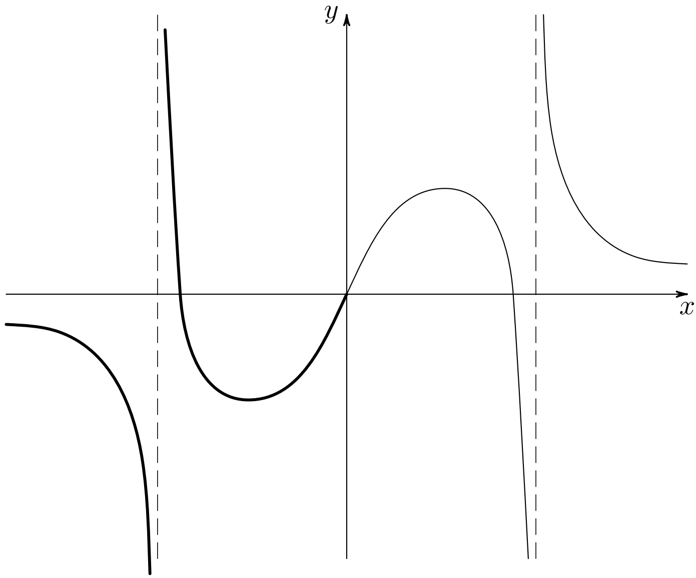
5-1. Выберите из следующих функций 1) четные; 2) нечетные*).

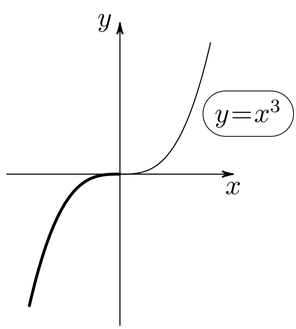
а) $y = x^3|x|$; б) $y = x + x^2$; в) $y = x^2 + |x|$;
г) $y = |x + x^2|$; д) $y = (x + 1)^4 + (x - 1)^4$;
е) $y = (x^2 + 1)^3$.

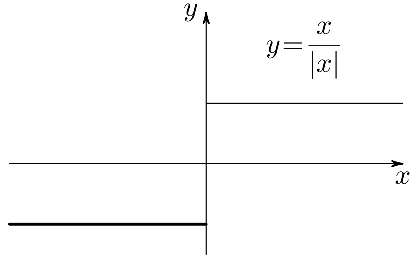
---

*) Определение четной функции см. на с. 17, определение нечетной — на с. 63.

$\boldsymbol{f(-a) =}$ $\boldsymbol{= -f(a)}$	*Функция $y = f(x)$ называется <u>нечетной</u>, если при всяком a выполняется равенство $f(-a) = -f(a)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.*







З а м е ч а н и е. Функция может, конечно, не быть ни четной, ни нечетной.

5-2. Укажите, какие из графиков функций а)—е) имеют центр симметрии, какие — ось симметрии:

а) $y = x^4$; б) $y = x^5$; в) $y = x^2 - x^4$;
г) $y = x^3 + x$; д) $y = x^2 + 2x$; $\oplus$ е) $y = x^2 - 2x^3$.

5-3. а) Докажите, что прямая $y = x$ является осью симметрии гиперболы $y = 1/x$.

Подсказка. Точка $M(a;\, b)$ симметрична точке $M(b;\, a)$ относительно прямой $y = x$ (рис. 5.7).

б) Докажите, что прямая $y = -x$ является осью симметрии гиперболы $y = 1/x$.

5-4. Зная график $y = 1/x$, постройте график $y = 4/x$. Имеет ли эта кривая ось симметрии?

$\oplus$ **5-5.** Имеет ли ось симметрии правая ветвь графика функции $y = \dfrac{1}{x^2}$?

3. Другие гиперболы. Кривые, которые Вы будете строить в следующих упражнениях, получаются из гиперболы $y = 1/x$ известными Вам преобразованиями. Все они тоже называются гиперболами.

Упражнения.

5-6. Нарисуйте графики функций:

а) $y = \dfrac{1}{x} + 1$; б) $y = \dfrac{1}{x+1}$; в) $y = \dfrac{1}{x-2} + 1$.

Укажите, какие асимптоты имеет каждая из этих гипербол, а также их центры и оси симметрии.

5-7. Нарисуйте графики следующих функций:

а) $y = \dfrac{4}{x}$; б) $y = \dfrac{1}{2x}$; в) $y = -\dfrac{2}{x}$; г) $y = -\dfrac{1}{3x}$.

Укажите, имеют ли эти кривые оси симметрии.

4. Дробно-линейные функции. Функции вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ называются *дробно-линейными* *).

Графики дробно-линейных функций получаются из гиперболы $y = 1/x$ с помощью известных нам преобразований: сдвигов и растяжений вдоль осей координат.

---

*) Мы предполагаем, конечно, что $c \neq 0$ $\left(\text{иначе получится линейная функция } y = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}\right)$ и что $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$, т. е. числитель не есть кратное знаменателя $\left(\text{как у функции } y = \dfrac{4x+6}{2x+3}\right)$, иначе функция постоянна.

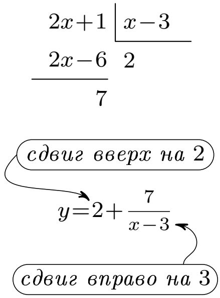


Рис. 5.8

Покажем это на примере. Рассмотрим функцию $y=\frac{2x+1}{x-3}$. Выделим «целую часть» дроби, разделив числитель на знаменатель (см. рис. 5.8). Мы получим:

$$\frac{2x+1}{x-3}=\frac{2x-6+7}{x-3}=2+\frac{7}{x-3}.$$

Теперь видно, что график этой функции получается из графика $y=1/x$ следующими преобразованиями: сдвигом на 3 единицы вправо, растяжением в 7 раз вдоль оси Oy и сдвигом на 2 единицы вверх.

Любую дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ можно записать аналогичным образом, выделив ее «целую часть». Следовательно, графики всех дробно-линейных функций являются гиперболами, различным образом сдвинутыми параллельно координатным осям и растянутыми по оси Oy.

З а д а ч а. Построим график функции

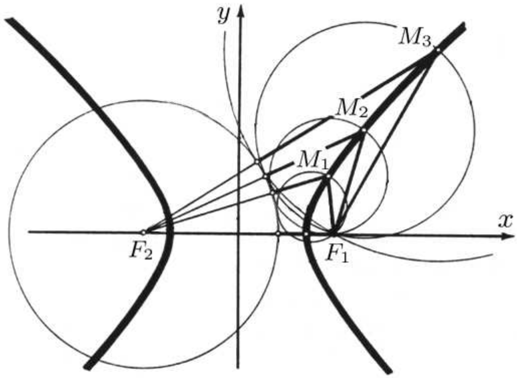
$$y=\frac{3x+5}{2x+2}.$$

Поскольку мы знаем, что график есть гипербола, достаточно найти прямые, к которым приближаются ее ветви (асимптоты), и еще несколько точек.

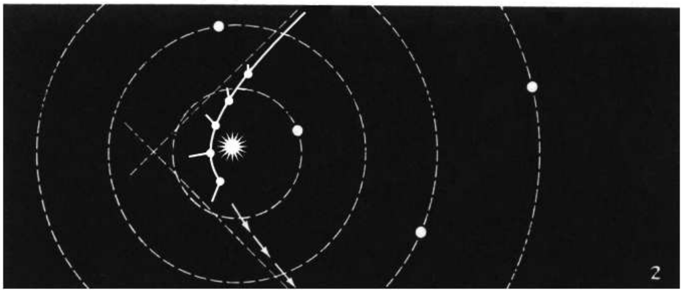
Найдем сначала вертикальную асимптоту. Функция не определена там, где $2x+2=0$, т. е. при $x=-1$ (рис. 5.9). Стало быть, вертикальной асимптотой служит прямая $x=-1$.

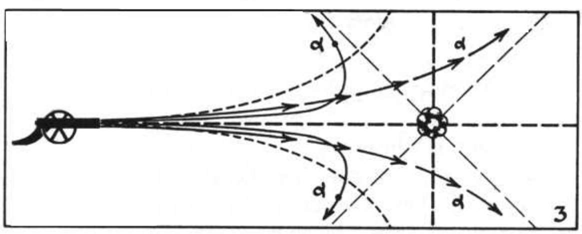
Чтобы найти горизонтальную асимптоту, посмотрим, к чему приближаются значения функции, когда аргумент возрастает по абсолютной величине. Для больших (по абсолютной величине) значений x вторые слагаемые в числителе и знаменателе дроби $\frac{3x+5}{2x+2}$ относительно малы. Поэтому

$$y=\frac{3x+5}{2x+2}\approx\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}.$$



1





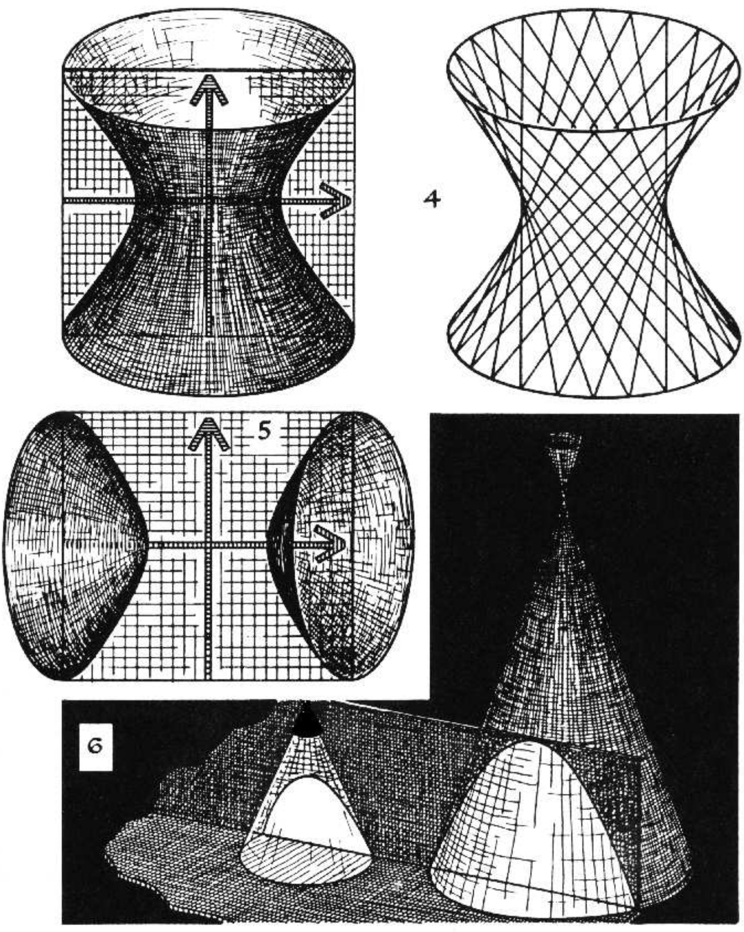
Интересные свойства гиперболы

1. Гипербола есть геометрическое место точек M, разность расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, по абсолютной величине равна заданному числу.

2. Комета или метеорит, залетевшие издалека в солнечную систему, движутся по ветви гиперболы. В фокусе находится Солнце. Одна асимптота*) показывает направление, в котором комета прилетает, вторая — направление, в котором она покидает Солнечную систему.

3. При бомбардировке атомного ядра α-частица, пролетающая мимо ядра, движется по гиперболе.

*) У всякой гиперболы есть две асимптоты. У гипербол, являющихся графиками дробно-линейных функций $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, асимптоты взаимно перпендикулярны. У других гипербол асимптоты бывают расположены под другим углом.



4. Если вращать гиперболу вокруг ее оси симметрии, не пересекающей ветвей, то получится поверхность, называемая *однополостным гиперболоидом*. Эта поверхность обладает удивительным свойством: она «соткана» из прямых линий. Ажурная мачта московского телецентра на Шаболовке составлена из «кусков» таких гиперболоидов, целиком сделанных из прямых стальных стержней.

5. Если вращать гиперболу вокруг ее оси симметрии, то получается поверхность, состоящая из двух «кусков» — *двуполостный гиперболоид*. Именно его имел в виду А. Толстой в своем романе «Гиперболоид инженера Гарина». Впрочем, нужным инженеру Гарину свойством — собирать лучи в параллельный пучок — обладает на самом деле не гиперболоид, а параболоид. Так что правильнее было бы назвать книгу «Параболоид инженера Гарина».

6. Если подходящим образом пересечь бесконечный конус плоскостью, то в сечении получится гипербола. Если у Вас есть лампа с круглым абажуром, Вы можете в этом убедиться. Лампа освещает часть стены, ограниченную куском гиперболы.

Стало быть, горизонтальная асимптота — прямая $y = 3/2$ (рис. 5.9).

Определим точки пересечения нашей гиперболы с осями координат. При $x = 0$ имеем $y = 5/2$. Функция равна нулю, когда $3x + 5 = 0$, т. е. при $x = -5/3$.

Отметив на чертеже точки $(-5/3;\ 0)$ и $(0;\ 5/2)$ и проведя найденные горизонтальную и вертикальную асимптоты, построим график (рис. 5.10).

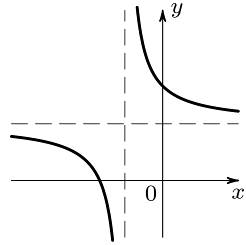


Рис. 5.10

У п р а ж н е н и я.

5-8. Постройте графики функций:

а) $y = \dfrac{1}{1-2x}$; б) $y = \dfrac{3+x}{3-x}$; в) $y = \left|\dfrac{2x+1}{x+1}\right|$.

5-9. На рис. 5.11, *а* и *б* изображены графики дробно-линейных функций

$$y = \frac{px+q}{x+r}.$$

Найдите эти функции (т. е. определите p, q и r).

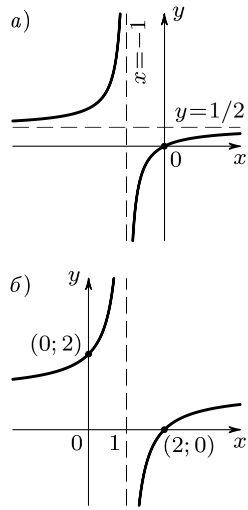


Рис. 5.11

З а д а ч а. Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{x}{1-x} = x^2 + 4x + 2?$$

Р е ш е н и е. Построим на одном чертеже графики функций

$$\frac{x}{1-x} \quad \text{и} \quad y = x^2 + 4x + 2.$$

На рис. 5.12 видны две точки пересечения этих графиков. Ясно, что есть и третья точка, так как парабола пересекает асимптоту гиперболы. Абсциссы точек пересечения графиков и являются решениями уравнения.

О т в е т. Три решения.

5. Еще один прием построения графиков. График функции $y = 1/x$ можно построить несколько иначе.

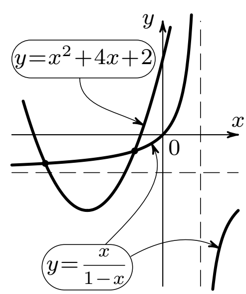


Рис. 5.12

Нарисуем график функции $y = x$ (рис. 5.13, *а*). Заменим каждую ординату величиной, ей обратной, и отметим соответствующие точки на рис. 5.13, *б*. Получим график $y = 1/x$.

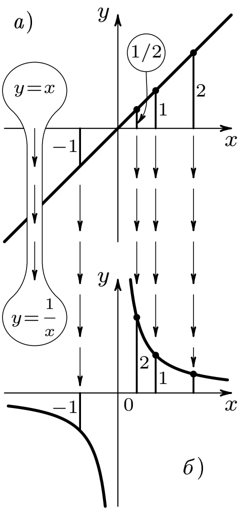


Рис. 5.13

Нарисованная картина показывает, как маленькие (по абсолютной величине) ординаты первого графика превращаются в большие ординаты второго и, наоборот, — большие ординаты первого в маленькие ординаты второго. Точки с ординатами, равными 1 (и -1), остаются на месте.

Этот прием «деления» графиков бывает полезен всегда, когда у нас есть график $y = f(x)$, а нам нужно понять, как ведет себя функция $y = \dfrac{1}{f(x)}$ (см. с. 71).

Упражнения.

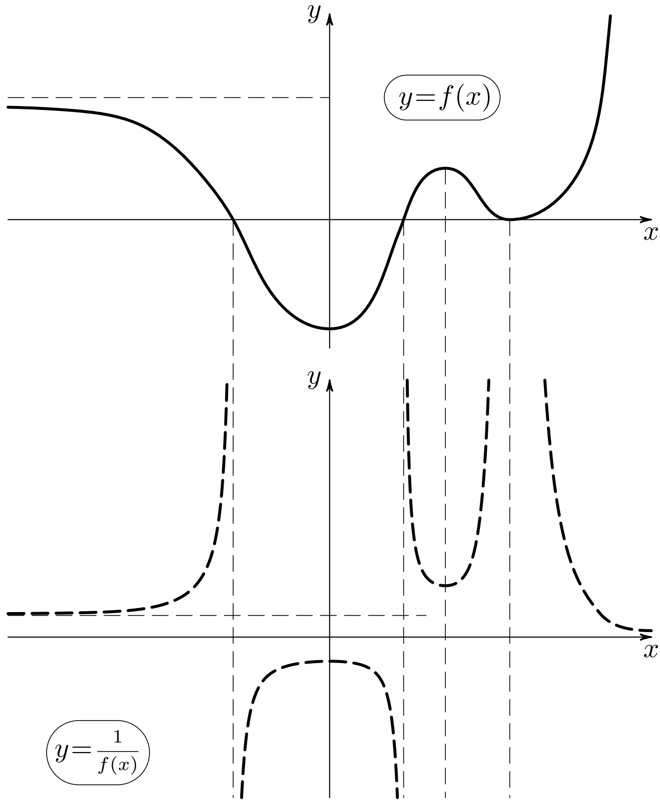
⊕ **5-10.** Зная график функции $y = x^2$, постройте график $y = \dfrac{1}{x^2}$.

5-11. Постройте графики функций:

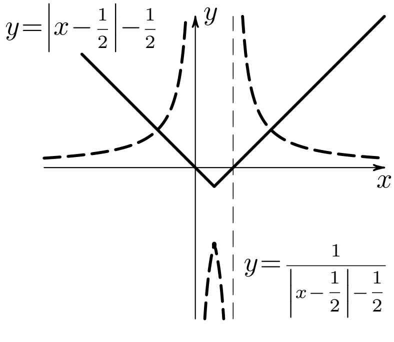
а) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 2}$; б) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 3}$.

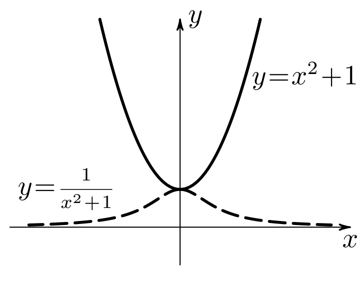
(Вы увидите, что эти два графика выглядят совершенно по-разному.)

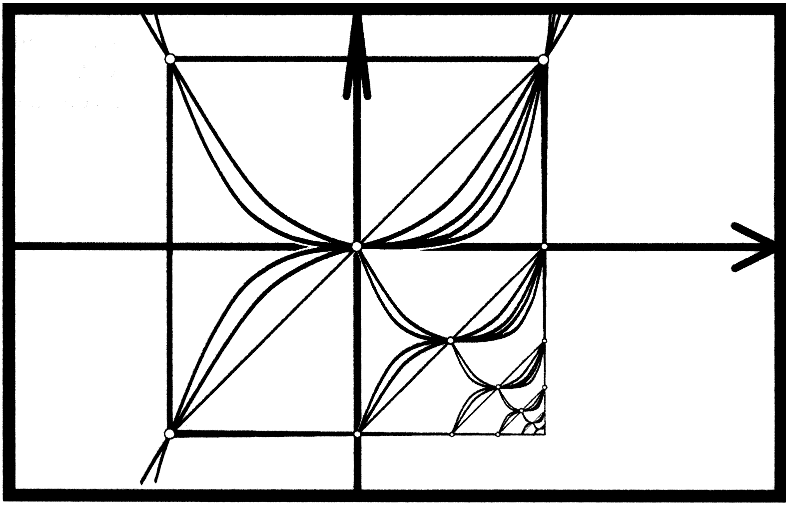
5-12. Зная графики функций $y = [x]$ (см. с. 9) и $y = x - [x]$, постройте графики: а) $y = \dfrac{1}{[x]}$; б) $y = \dfrac{1}{x - [x]}$.



$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{1}{f(x)}$$







§ 6. Степенные функции

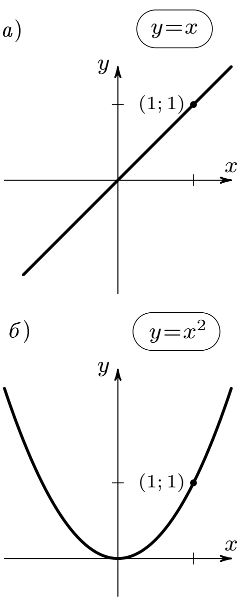


Рис. 6.1

1. Кубическая парабола. *Степенные функции* — это функции вида $y = x^n$. Графики степенных функций $n = 1$ и $n = 2$ мы уже строили. При $n = 1$ получаем функцию $y = x$; график этой функции — прямая (рис. 6.1, *а*). При $n = 2$ получается функция $y = x^2$; график этой функции — парабола (рис. 6.1, *б*).

График функции $y = x^3$ $(n = 3)$ называется *параболой третьего порядка*, или *кубической параболой*. Для положительных значений аргумента кубическая парабола $y = x^3$ похожа на параболу второго порядка $y = x^2$. Действительно, при $x = 0$ функция $y = x^2$ равна нулю и функция $y = x^3$ тоже равна нулю — оба графика проходят через начало координат; при $x = 1$ значение x^2 равно 1 и x^3 тоже равен 1 — оба графика проходят через точку (1; 1).

С увеличением x (если x положителен) увеличиваются и значения функции $y = x^2$, и значения функции $y = x^3$, кубическая парабола $y = x^3$, как и обычная парабола $y = x^2$, справа от начала координат все время поднимается вверх (рис. 6.2).

Для отрицательных значений x кривая $y=x^3$ ведет себя иначе, чем парабола $y=x^2$: ведь $y = x^2$ — это четная функция, а функция $y = x^3$ — нечетная *). Поэтому левая половина графика $y = x^3$ симметрична правой его половине относительно начала координат, и при отрицательных x кривая уходит вниз.

Таким образом, в целом кубическая парабола совсем не похожа на график $y = x^2$.

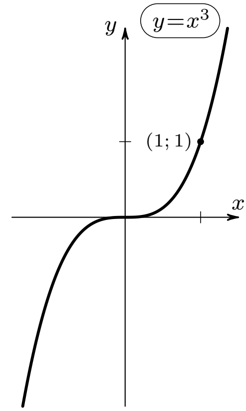


Рис. 6.2

Упражнения.

6-1. Нарисуйте графики функций:
а) $y = -x^3$; б) $y = |x^3|$; в) $y = 1 + x^3$;
г) $y = (2 + x)^3$; д) $y = (2 - x)^3$;
е) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.

6-2. Пять из шести кривых предыдущего упражнения могут быть получены из кубической параболы $y = x^3$ посредством сдвигов параллельно координатным осям и отражений относительно оси Ox. Эти кривые, следовательно, имеют центры симметрии. Укажите координаты этих центров.

Посмотрим теперь, чем отличаются друг от друга графики $y = x^3$ и $y = x^2$ для положительных значений x. Для этого представим x^3 как $x^2 \cdot x$ и получим график $y = x^3$, «умножая» график $y = x^2$ на график $y = x$ (рис. 6.3).

При $x = 1$ значение x^3 равно значению x^2: точка $(1; 1)$ — общая для обоих графиков. Пойдем теперь от $x = 1$ сначала направо, а затем налево.

Справа от точки $x = 1$ значения функции $y = x^3$ получаются из значений функции $y = x^2$ умножением на числа, большие единицы. Поэтому для $x > 1$ значения x^3 больше, чем x^2 — справа от точки

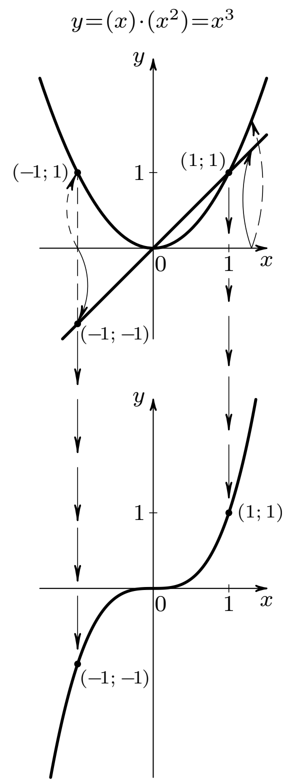


Рис. 6.3

*) Определение четной функции см. на с. 17, определение нечетной — на с. 63.

(1; 1) кубическая парабола $y = x^3$ идет выше параболы $y = x^2$, все больше и больше ее обгоняя (так как приходится умножать x^2 на все большие и большие числа).

Если пойти от точки $x = 1$ налево, к $x = 0$, то значения x^3 будут получаться из значений x^2 умножением на числа, меньшие единицы. Поэтому слева от точки (1; 1) кубическая парабола лежит ниже параболы $y = x^2$, еще более тесно прилегая в начале координат к оси абсцисс (рис. 6.4).

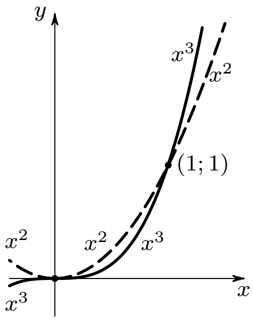


Рис. 6.4

Вопросы.

6-3. При каком x значение x^3 будет больше, чем значение x^2, в 100 раз? в 1000 раз? На сколько выше окажется при этих x кубическая парабола, чем квадратная?

6-4. Если считать, что толщина карандашной линии равна 0,1 мм и принять за единицу масштаба 1 см, то при $x = 0{,}1$ парабола $y = x^2$ «на глаз» сливается с осью Ox. Во сколько раз ближе к оси Ox находится при этом значении x кубическая парабола?

Построим $y = x^3 - x^2$

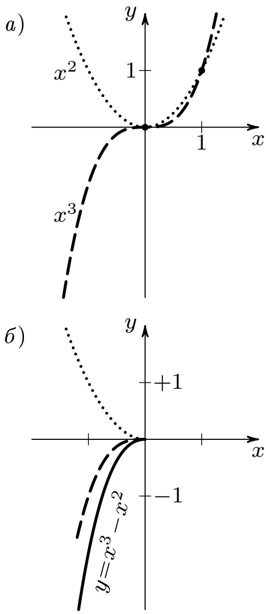


Рис. 6.5, *а*, *б*

Получая x^3 из x^2 умножением на x, мы видим, *во сколько раз* ордината $y = x^3$ больше (или меньше), чем ордината $y = x^2$. Постараемся теперь наглядно изобразить, *на сколько* значения функции $y = x^3$ больше (или меньше), чем значения $y = x^2$. Для этого нарисуем график функции $y = x^3 - x^2$, ординаты которого можно получить, вычитая из ординат графика $y = x^3$ ординаты графика $y = x^2$ (рис. 6.5, *а*).

При $x = 0$ и x^3, и x^2 обращаются в нуль, значит, график функции $y = x^3 - x^2$ проходит через начало координат. Слева от начала координат из отрицательного x^3 вычитается положительный x^2; разность $x^3 - x^2$ отрицательна, так что график $y = x^3 - x^2$ идет ниже оси Ox (и даже ниже, чем график $y = x^3$ — см. рис. 6.5, *б*).

Справа от начала координат дело сложнее. Сначала x^2 больше, чем x^3, поэтому кривая $y = x^3 - x^2$ около начала координат расположена ниже оси Ox (рис. 6.5, *в*). Постепенно x^3 начинает расти все быстрее и к $x = 1$ догоняет по своему значению функцию $y = x^2$. Поэтому кривая $y = x^3 - x^2$ где-то между $x = 0$ и $x = 1$ начинает подниматься и при $x = 1$ пересекает ось абсцисс (рис. 6.5, *г*).

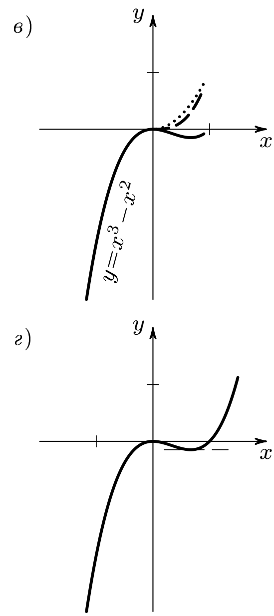


Рис. 6.5, *в*, *г*

В дальнейшем, после $x = 1$, значения функции $y = x^3 - x^2$ увеличиваются, график идет вверх и для бо́льших x, когда x^2 по сравнению с x^3 мал, по форме почти не отличается от графика $y = x^3$ (рис. 6.6).

У п р а ж н е н и я.

6-5. Вычисляя значения функции $y = x^3 - x^2$, можно приблизительно определить, при каком x эти значения начинают увеличиваться. Попробуйте найти это значение, хотя бы с точностью до 0,1 *). Как раз на этом месте и находится нижняя точка «впадины» графика.

6-6. Решите неравенства:

а) $x^3 - x^2 > 0$; б) $x^3 - x^2 \leqslant 0$.

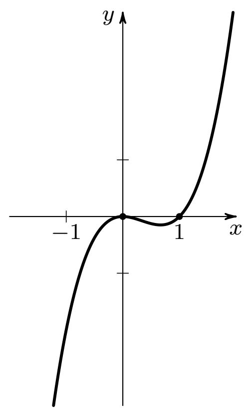


Рис. 6.6

Сравним теперь поведение функций $y = x^3$ и $y = cx^2$ и построим график функции $y = x^3 - cx^2$ для различных положительных значений параметра c. Вид графика зависит от того, как расположены друг относительно друга два графика: $y = x^3$ и $y = cx^2$.

Возьмем сначала маленькое значение c, например, $c = 0{,}3$. Из рис. 6.7 легко понять, что построение графика вдали от начала координат, т. е. для значений x, бо́льших по абсолютной величине, не вызовет затруднений. Однако на рисунке не разглядишь, как

*) Как найти это значение точно, рассказывается в курсах математического анализа. Некоторые элементарные приемы решения таких задач показаны на примерах в § 8.

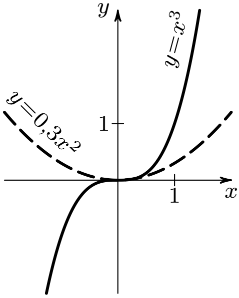


Рис. 6.7

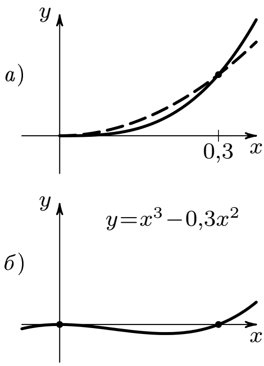


Рис. 6.8

расположены графики $y = x^3$ и $y = 0{,}3x^2$ вблизи начала координат, какая из этих кривых лежит ниже. А ведь от этого зависит, будет ли «впадина» $^{*)}$ на графике $y = x^3 - 0{,}3x^2$.

Чтобы выяснить это, рассмотрим неравенство $x^3 > 0{,}3x^2$, или

$$x^2(x - 0{,}3) > 0.$$

Ясно, что выражение $x^2(x - 0{,}3)$ положительно только при $x > 0{,}3$. Значит, для положительных значений x, меньших $0{,}3$, кубическая парабола лежит ниже параболы $y = 0{,}3x^2$ (см. рис. 6.8, *а*).

Мы можем теперь нарисовать неясное нам ранее место рисунка 6.7 в увеличенном виде и построить график разности $y = x^3 - 0{,}3x^2$. На этом графике, как и на графике $y = x^3 - x^2$, будет «впадина», только более узкая и более мелкая (рис. 6.8, *б*).

Упражнения.

6-7. Найдите ширину «впадины» для графиков функций:

а) $y = x^3 - 0{,}01x^2$; б) $y = x^3 - 1000x^2$.

6-8. Укажите, после какого значения x парабола $y = x^3$ будет лежать выше параболы $y = 50x^2$; выше параболы $y = 10000x^2$.

6-9. Нарисуйте графики:

а) $y = x^3 + x^2$; б) $y = x^2 - x^3$.

Укажите, будет ли на каждом из этих графиков «впадина».

6-10. а) Нарисуйте графики функций $y = x^3 - x$; $y = x^3 + x$.

б) Подберите a и b так, чтобы на графике функции $y = ax^3 + bx$ была «впадина» шириной не менее 10 и глубиной не менее 100.

Проделав эти упражнения, Вы поймете, что графики функций $y = x^3 - cx^2$ при любом $c > 0$ имеют один и тот же характер, одну и ту же форму: слева от начала координат график идет вниз, в начале координат

$^{*)}$ В данном случае «впадина» — это часть графика, лежащая ниже оси Ox.

касается оси абсцисс, далее заворачивает опять вниз, а потом вверх; впадина, получающаяся при этом на графике, тем больше, чем больше c (рис. 6.9, *а*).

Семейство $y = x^3 - cx^2$

Если уменьшать c, то впадина постепенно заравнивается и в конце концов, когда c станет равным нулю, заровняется совсем, и график превратится в кубическую параболу $y = x^3$ (рис. 6.9, *б*).

Теперь мы можем сделать общий вывод относительно того, как ведет себя функция $y = x^3$ для положительных значений x по сравнению с любой функцией вида $y = cx^2$ (при $c > 0$). Для x, близких к нулю, функция $y = x^3$ будет меньше любой функции $y = cx^2$, даже если коэффициент c будет очень мал. Для бóльших значений x, напротив, функция $y = x^3$ будет больше, чем всякая функция вида $y = cx^2$, даже если коэффициент c очень велик.

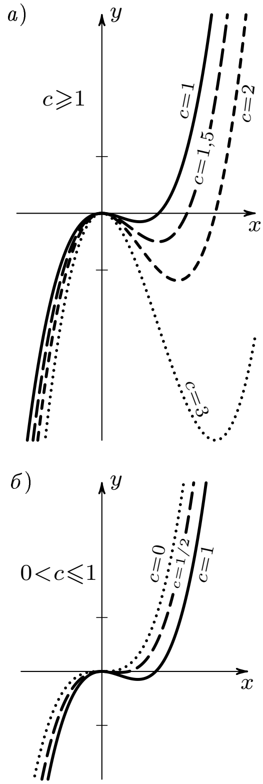


Рис. 6.9

Можно сказать иначе: парабола третьего порядка в начале координат прилегает к оси абсцисс настолько тесно, что между этой кривой и осью не может пройти не только ни одна прямая, но и ни одна парабола $y = cx^2$, каким бы малым ни был коэффициент c. Наоборот, при увеличении x кубическая парабола $y = x^3$ в конце концов «перегоняет» любую параболу $y = cx^2$ с любым (даже очень большим) коэффициентом c.

Упражнения.

6-11. На рис. 6.10 изображены графики функций $y = 5x^3$ и $y = x^2$. Из-за небольшого масштаба рисунка не ясно взаимное расположение графиков около нуля.

Посмотрите на этот чертеж под «микроскопом» и нарисуйте, что Вы там увидите, то есть область, отмеченную маленьким кружочком, нарисуйте в увеличенном масштабе.

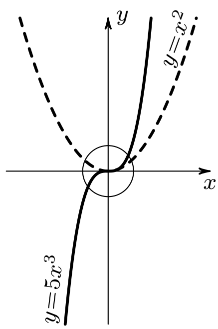


Рис. 6.10

6-12. а) Даны две возрастающие последовательности:

$$a_n: 0{,}001;\ 0{,}004;\ 0{,}009;\ \ldots;\quad 0{,}001 \cdot n^2;\ \ldots$$
$$b_n:\quad 100;\quad 300;\quad 500;\ \ldots;\ 100(2n-1);\ \ldots$$

Может ли первая последовательность перегнать вторую (т. е. может ли при каком-нибудь n выполняться неравенство $a_n > b_n$)?

б) Ответьте на этот же вопрос для последовательностей

$$a_n: 0{,}001;\ 0{,}008;\ 0{,}027;\ \ldots$$
$$b_n: \quad 100;\quad 400;\quad 900;\ \ldots$$

Функции $y = x^n$ при $n > 3$ мы не будем разбирать столь подробно, как $y = x^3$. Графики этих функций по внешнему виду напоминают либо параболу $y = x^2$ (при четном n), либо кубическую параболу $y = x^3$ (при нечетном n). Понятно, что функция $y = x^4$ для бóльших (по абсолютной величине) значений x растет еще быстрей, чем $y = x^3$, а функция $y = x^5$ — быстрей, чем $y = x^4$. Вообще, чем больше n, тем быстрее растет степенная функция $y = x^n$ для бóльших значений x (рис. 6.11).

Когда x приближается к нулю, значения всех степенных функций $y = x^n$ тоже приближаются к нулю, причем тем быстрее, чем больше n. Графики всех степенных функций $y = x^n$ (начиная с $n = 2$) касаются в начале координат оси абсцисс, прилегая к ней тем теснее, чем больше n (рис. 6.12).

При большом n график функции $y = x^n$ нарисовать с соблюдением масштаба практически невозможно. Почти на всем отрезке от 0 до 1 значения функции очень малы и график $y = x^n$ сольется с осью Ox. На маленьком участке около $x = 1$ функция подрастает до 1 и затем быстро вырастает настолько, что график выходит за пределы любого листа бумаги.

Пусть, например, $n = 100$. Попробуем нарисовать график $y = x^{100}$, начиная от $x = 1$. При $x = 2$ получим $y = 2^{100}$. Это слишком много! Возьмем $x = 1{,}1$. Тогда $y = (1{,}1)^{100}$. Это все еще большое число. В самом деле: $(1{,}1)^{100} = ((1{,}1)^{10})^{10}$, а $1{,}1^{10} > 2$ *).

---

*) Мы воспользовались неравенством $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$, справедливым при $\alpha > 0$.

Итак, $(1{,}1)^{100} > 2^{10} > 1000$. Таким образом, участок от 1 до 1,1 все еще слишком велик для построения графика $y = x^n$. Выберем теперь масштаб по оси Ox в 100 раз больше, чем по оси Oy.

График $y = x^{100}$ растянется при этом в горизонтальном направлении в 100 раз и будет иметь вид, изображенный на рис. 6.13, *а*. Если n еще больше, то участок для аккуратного построения графика придется выбирать еще меньше. На рис. 6.13, *б* Вы видите график $y = x^{1000}$, растянутый в 1000 раз по оси Ox. Замечательно, что на обоих рисунках получились две одинаковые кривые *)!

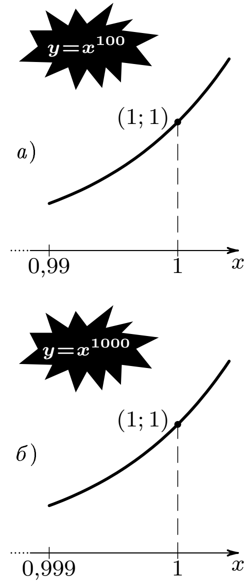


Рис. 6.13

Упражнения.

6-13. Постройте график функции $y = x^2 - x^4$ двумя способами: а) вычитанием графиков $y = x^2$ и $y = x^4$; б) разложив многочлен $x^2 - x^4$ на множители.

6-14. Определите, сколько решений имеют следующие уравнения:

а) $x^3 = x^2 + 1$; б) $x^3 = x + 1$; в) $x^3 + 0{,}1 = 10x$; г) $x^5 - x - 1 = 0$.

5. Обсуждение: что такое касательная. Говоря о поведении степенных функций $y = x^n$ для малых значений аргумента x, мы отмечали, что графики этих функций в начале координат касаются оси Ox. Остановимся на этом вопросе, чтобы уточнить смысл выражения: прямая касается кривой.

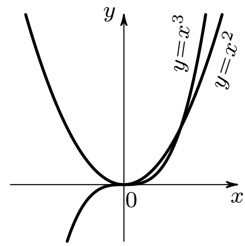


Рис. 6.14

В самом деле, почему мы говорим, что ось Ox касается и параболы $y = x^2$, и кубической параболы $y = x^3$ (хотя кривую $y = x^3$ ось Ox «протыкает насквозь» (см. рис. 6.14))?

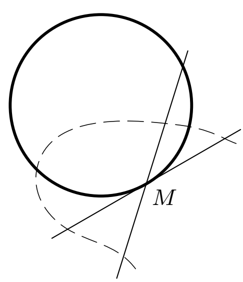


Рис. 6.15

Все зависит от того, какой смысл придать выражению «прямая касается кривой», что считать основным, определяющим свойством касательной, какое определение дать этому понятию. До сих пор

*) Разница между кривыми, конечно, есть, но она слишком мала, чтобы ее можно было заметить на графике.

в школьном курсе геометрии мы знакомились только с одной-единственной кривой — с окружностью и знали только определение касательной к окружности. Попробуем понять, чем отличается касательная к окружности от секущей. Нам сразу бросаются в глаза два следующих обстоятельства.

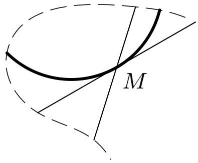


Рис. 6.16

1) Касательная имеет с окружностью только одну общую точку, а секущая — две (рис. 6.15).

2) Касательная около точки касания M «прилегает» к кривой ближе, чем секущая. (Поэтому даже если на чертеже поместилась не вся окружность, и мы не видим, есть ли на самом деле вторая общая точка, мы можем отличить касательную от секущей — рис. 6.16.)

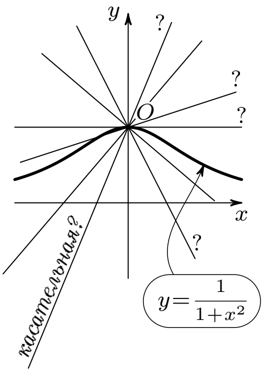


Рис. 6.17

Какое же из этих двух обстоятельств считать более важным (главным), какое следует положить в основу определения касательной к кривой вообще (а не только к окружности)?

Более простым является первое. Можно попробовать назвать касательной прямую, имеющую с кривой только одну общую точку. Однако, приняв такое определение, мы будем часто приходить в противоречие со здравым смыслом и с нашим наглядным представлением о касательной.

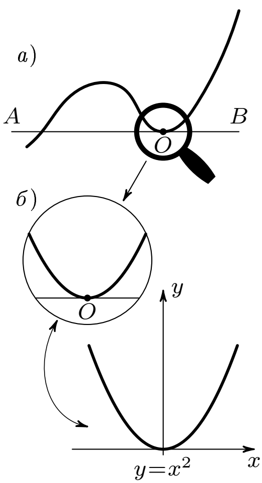


Рис. 6.18

Например, через вершину параболы $y = x^2$, кроме оси абсцисс, проходит еще одна прямая, имеющая с параболой только одну общую точку — это ось Oy; однако ось Oy не называется касательной к параболе $y = x^2$ (см. рис. 6.14).

На рис. 6.17 положение еще хуже: через точку O проходит бесконечное множество прямых, которые пересекают кривую только один раз! С другой стороны, на рис. 6.18, *а* прямая AB имеет с кривой две общие точки, но, очевидно, имеет полное право называться касательной. Действительно, если «обрезав» чертеж, посмотреть на участок кривой вблизи точки касания O (рис. 6.18, *б*), то расположение кривой и прямой будет по своему характеру совершенно таким, как расположение параболы относительно оси Ox.

Значит, в качестве основного, определяющего свойства разумно выбрать то, что касательная тесно прилегает к кривой. Так, например, естественно считать, что кубическая парабола $y = x^3$ касается в начале координат оси Ox: парабола $y = x^3$ в начале координат тесно прилегает к оси Ox (еще теснее, чем парабола $y = x^2$).

Чтобы дать определение касательной, нам осталось сформулировать, что значит прямая «тесно прилегает» к кривой.

Рассмотрим снова параболу $y = x^2$. Между осью Ox (прямой $y = 0$) и параболой не может пройти ни одна прямая: всякая прямая $y = kx$ на некотором участке идет выше параболы и пересекает ее еще раз.

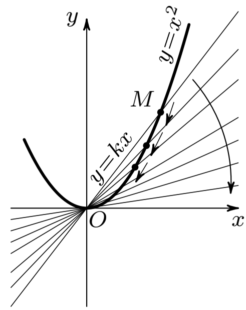


Рис. 6.19

Если, уменьшая k по абсолютной величине, поворачивать прямую, то вторая точка (точка M на рис. 6.19) приближается к первой (к точке O) и в конце концов сливается с ней. В этот момент прямая из секущей превращается в касательную.

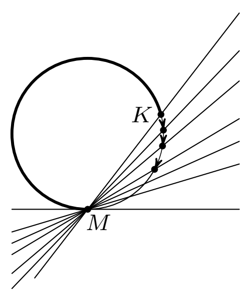


Рис. 6.20

Вернемся к окружности. На рис. 6.20 через точку M окружности проведена секущая MK. Если точку K приближать к M, то секущая поворачивается вокруг точки M и в конце концов, когда точка K сольется с точкой M, превращается в касательную к окружности в точке M. При этом она других общих точек с окружностью иметь не будет. Но это обстоятельство является несущественным, второстепенным.

Итак, мы примем следующее определение касательной.

О п р е д е л е н и е. Пусть имеется некоторая кривая l и точка M на этой кривой (рис. 6.21). Проведем через точку M и еще какую-нибудь точку K кривой l прямую MK (такая прямая, проходящая через какие-нибудь две точки кривой, называется секущей; она может пересечь кривую и еще в каких-нибудь точках). Если теперь двигать точку K по кривой l так, чтобы она приближалась к точке M, то секущая MK будет поворачиваться вокруг точки M. Если в конце концов, когда точка K сольется с точкой M, прямая совпадает с некоторой определенной прямой MN (см. рис. 6.21), то эта прямая MN и называется *касательной* к кривой l в точке M.

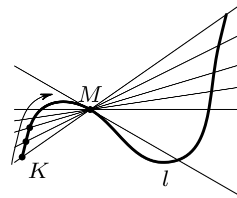


Рис. 6.21

Итак, существенным отличием прямой, касающейся некоторой кривой в точке M, от других прямых, проходящих через ту же точку, является то, что для касательной общая ее точка с кривой — точка касания — является двойной, получается как результат слияния двух сближающихся точек пересечения.

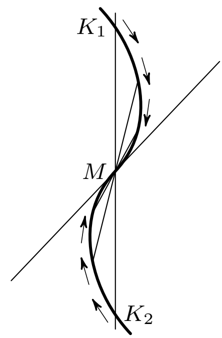


Рис. 6.22

Иногда в точке касания сливаются не две точки, а три (рис. 6.22).

З а м е ч а н и е 1. В определении ничего не говорится о числе общих точек кривой и касательной к ней. Это число может быть любым. На рис. 6.23, *а* Вы видите прямую, касающуюся кривой γ в точке M и пересекающую ее еще в двух точках, а на рис. 6.23, *б* — прямую MN, которая касается кривой сразу в нескольких точках.

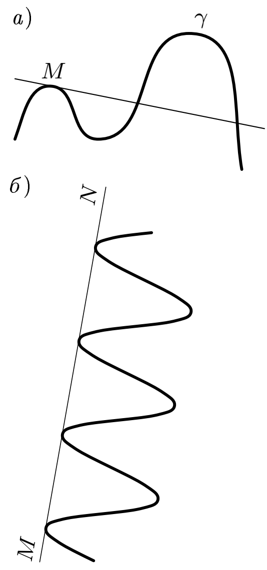


Рис. 6.23

З а м е ч а н и е 2. В определении касательной предполагается, что точка K может приближаться к точке M любым способом. Во всех случаях секущая должна стремиться к одной и той же прямой, которая и называется касательной. Если при различных способах приближения K к M

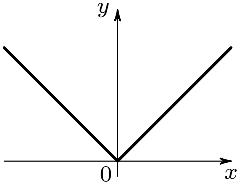


Рис. 6.24

секущая стремится к разным прямым, то говорят, что кривая в этой точке не имеет касательной (например, график функции $y = |x|$ в точке $(0;\ 0)$ не имеет касательной; см. рис. 6.24).

З а д а ч а. Найти касательную в точке $O(0;\ 0)$ к параболе $y = x^2 + x$.

Р е ш е н и е. Возьмем на параболе некоторую точку M с координатами $(a;\ b)$. Очевидно, $b = a^2 + a$. Проведем прямую через точки O и M. Уравнение этой прямой имеет вид $y = kx$. При $x = a$ имеем $y = a^2 + a$, значит, $k = a + 1$, и уравнение секущей есть $y = (a + 1)x$. Будем теперь приближать точку $M(a;\ b)$ к точке $O(0;\ 0)$. Когда точка M сольется с точкой O, ее абсцисса a обратится в нуль, а секущая $y = (a + 1)x$ превратится в касательную $y = x$.

О т в е т. Уравнение касательной $y = x$.

У п р а ж н е н и я.

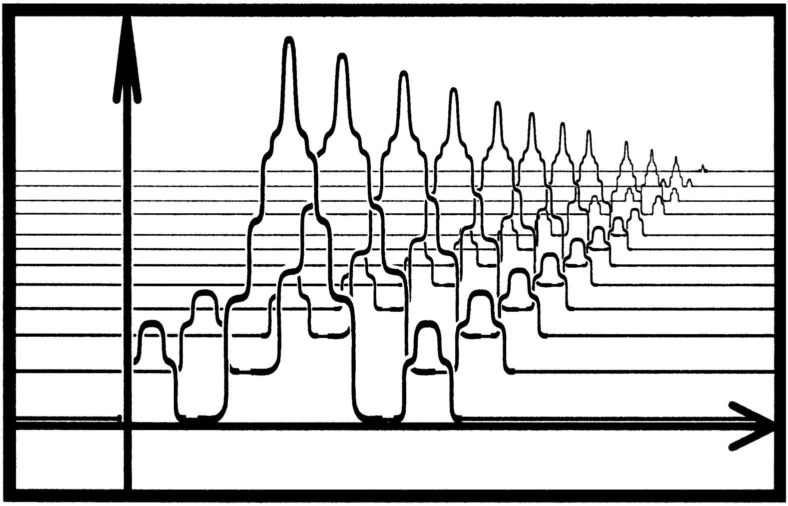
$\oplus$ **6-15.** Найдите касательную к параболе $y = x^2 + x$ в точке $A(1;\ 2)$.

$\oplus$ **6-16.** Какая из прямых, параллельных прямой $y = x$, касается параболы $y = -x^2 + 1$?

6-17. а) Докажите, что прямая $y = 0$ есть касательная к кривой $y = x^3 + x^2$ в начале координат.

б) Найдите касательную в точке $O(0;\ 0)$ к кривой $y = x^3 - 2x$.

6-18. Для графиков каких кубических многочленов $y = ax^3 + bx^2 + cx$ ось Ox служит касательной в начале координат?



§ 7. Многочлены

1. Что такое многочлен. Если взять несколько степенных функций, например, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^5$, $q(x) = x^3$, помножить их на какие-нибудь коэффициенты, например, $3f(x) = 3x^2$, $-g(x) = -x^5$, $2{,}5q(x) = 2{,}5x^3$, и сложить, то получится новая функция $R(x) = 3x^2 - x^5 + 2{,}5x^3$. Выражение $3x^2 - x^5 + 2{,}5x^3$, как Вы знаете, называется *многочленом.* В общем виде многочлен записывается и обозначается так:

$$Q_n(x) =$$
$$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Функцию, задаваемую формулой вида $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, тоже называют многочленом.

Многочлены — очень важный класс функций. Это связано, прежде всего, с тем, что значения многочлена просто вычисляются: для этого над аргументом нужно произвести только операции двух видов, самых простых — сложение и умножение. Поэтому функция $y = Q_n(x)$ имеет еще одно название — *целая рациональная функция.*

Формула, задающая целую рациональную функцию, не обязательно имеет форму многочлена. Например, при вычислении значений функции

$$F(x) = \frac{(x^2-2)^2 - x^3 + 4}{2}$$

над аргументом производятся только сложение и умножение (деление на число 2, а не на аргумент, не считается, так как его можно заменить умножением на $1/2$). Поэтому $F(x)$ является целой рациональной функцией и, как и всякую такую функцию, ее можно представить в форме многочлена:

$$F(x) = \frac{(x^2-2)^2 - x^3 + 4}{2} = \\ = \frac{1}{2}(x^4 - 4x^2 + 4 - x^3 + 4) = \\ = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4.$$

Функция $G(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ — тоже целая рациональная, и ее тоже можно представить в виде многочлена: раскрыть скобки, привести подобные члены и расположить их в порядке убывания степеней.

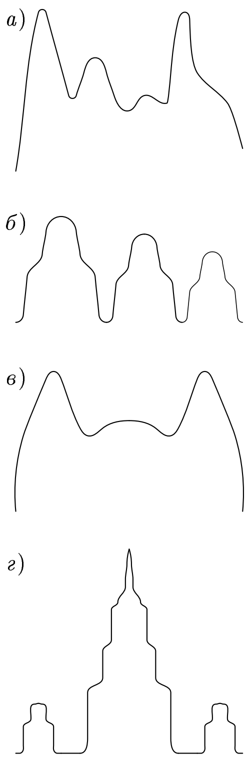


Рис. 7.1

Упражнения.

7-1. Определите степени многочленов *), задающих следующие целые рациональные функции:

а) $15^5x^2 - 3x$;

б) $y = (x-1)(x^3+5x-3)$;

в) $(x-1)(x^3+5x-3)^5$;

г) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)\cdot\ldots\cdot(x^{100}-1)$.

7-2. Чему равны свободные члены в многочленах а)—г)?

7-3. Чему равен член с x в первой степени в многочлене $(x+1)^n$?

---

*) Напоминаем, что степенью многочлена называется наибольшая из степеней его членов.

2. О графиках многочленов. С графиками простейших многочленов Вы уже встречались и умеете их строить. Так, график многочлена 1-й степени — линейной функции $y = kx + b$ — это прямая линия, многочлена второй степени $y = ax^2 + bx + c$ — парабола. Знакомые Вам графики многочленов высоких степеней для случая $y = x^n$ (то есть не многочленов, а одночленов) тоже по существу однотипны, вернее, «двутипны» — для четных n и для нечетных n.

А вот графики многочленов общего вида очень разнообразны и могут иметь самую причудливую форму. Например, графиком многочлена можно «нарисовать» горный пейзаж, или трех матрешек, или кошачьи ушки и даже силуэт здания Московского университета (рис. 7.1). Справедливо следующее утверждение.

Любая непрерывная кривая, имеющая на некотором промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ с каждой из прямых, параллельных Oy, в точности одну общую точку, может быть приближенно задана как график функции $y = P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен.

Однако есть два ограничения, указывающие на то, каким не может быть график многочлена. Во-первых, график многочлена не может иметь «разрывов» *) — ни таких, как у графика $y = 1/x$ (рис. 7.2, *а*), ни таких, как у графика $y = \dfrac{x}{|x|}$ (рис. 7.2, *б*), ни даже таких, как на графике функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (рис. 7.2, *в*). Во-вторых, у графика многочлена не может быть «углов» *), таких, как у графика $y = |x|$ (рис. 7.3, *а*) или графика $y = \sqrt{|x|}$ (рис. 7.3, *б*).

*) Мы взяли в кавычки слова, точный смысл которых определяется в курсах математического анализа. Здесь же нам будет достаточно наглядных представлений.

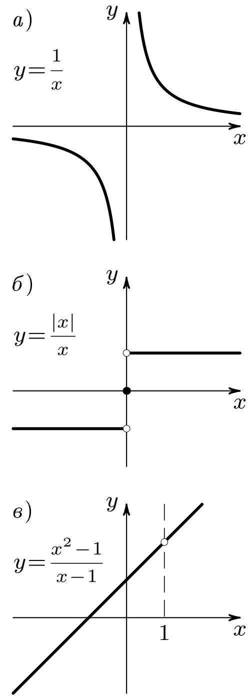


Рис. 7.2

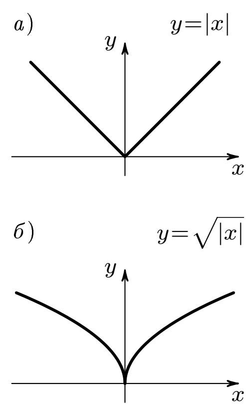


Рис. 7.3

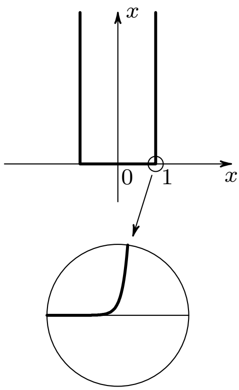


Рис. 7.4

З а м е ч а н и е. Конечно, эти ограничения относятся только к точным графикам, т. е. к некоторой идеализации, которую невозможно реализовать. А «с точностью до ширины линии» и то, и другое возможно. Например, если мы попытаемся изобразить график $y = x^{1000}$ от 0 до 1, то получим картинку как на рис. 7.4 где около точки (1; 0) придется нарисовать прямой угол. Однако, если мы рассмотрим этот участок графика «под микроскопом», то вместо излома увидим закругление.

Итак, несмотря на разнообразие, все графики многочленов имеют важные общие свойства: каждый такой график можно начертить «одним росчерком пера» (то есть он является непрерывной кривой) и не поворачивая карандаша резко, сразу на какой-то угол (то есть кривая графика должна быть плавной).

Есть еще общее свойство у графиков многочленов: такой график не ограничен по вертикали, то есть он не может поместиться в горизонтальной «полоске» (в отличие, например, от графика $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ — см. с. 16), даже если полоска будет очень широкая.

Все определит старший член: при n четном обе ветви уйдут как угодно высоко, если число a_n (коэффициент при x^n) положительно, или как угодно низко, если a_n отрицательно. Другими словами, графики многочленов четных степеней при больших значениях переменной x похожи на график функции $y = ax^2$. Если же n нечетно, то график $y = Q_n(x)$ при больших x похож на график функции $y = ax^3$: если a_n положительно, правая ветвь уйдет вверх, а левая — вниз, а если a_n отрицательно, то наоборот: правая вниз, а левая — вверх.

3. Примеры.

П р и м е р 1. График многочлена

$$Q_3(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

можно построить сложением графиков функций $y = x^3$, $y = x^2$ и $y = -x - 1$. Поступим иначе. Разложим многочлен $Q_3(x)$ на множители:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x^3 + x^2) - (x + 1) =$$
$$= x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1) =$$
$$= (x + 1)^2(x - 1).$$

Многочлен $Q_3(x)$ обращается в нуль при $x = -1$ и при $x = 1$, значит, его график имеет с осью Ox две общие точки *). Понятно также, что график проходит через точку $(0;\ -1)$, на оси Oy. Отметим эти три точки (рис. 7.5, *а*).

Знак многочлена $(x + 1)^2(x - 1)$ при заданном x определяется последним сомножителем: при $x > 1$ многочлен $Q_3(x)$ положителен, а на промежутках $-1 < x < 1$ и $x < -1$ — отрицателен. Отметим это на рис. 7.5, *б*.

$Q_3(x)$ — многочлен нечетной степени, значит, левая его ветвь уходит вниз, а правая — вверх. Отметим и это на чертеже (рис. 7.5, *б*) и будем проводить непрерывную плавную линию графика.

График идет снизу («от минус бесконечности») вверх направо до точки $(-1;\ 0)$. В этой точке графику придется плавно повернуть вниз, к точке $(0;\ -1)$ («плавно» потому, что «углов» на графиках многочленов не бывает). Значит, в точке $(-1;\ 0)$ график не пересекает оси Ox, а касается ее.

Далее график идет вниз, пересекает ось ординат в точке $(0;\ -1)$ и, опустившись еще

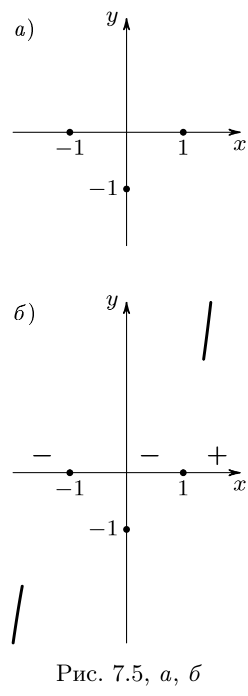


Рис. 7.5, *а*, *б*

---

*) Почему бы не сказать «график пересекает ось Ox в двух точках»? Но, как Вы сейчас увидите, такое утверждение было бы неправильным.

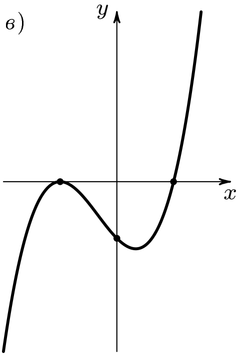


Рис. 7.5, *в*

немного ниже, поворачивает, пересекает ось Ox в точке (1; 0) и круто уходит вверх.

Общий вид графика — на рис. 7.5, *в*.

П р и м е р 2. Чтобы построить график многочлена $P(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x$, мы разложим многочлен $P(x)$ на множители. Для этого сначала вынесем за скобку x:

$$P(x) = x(x^3 - 4x^2 - 4x + 16).$$

Выражение в скобках разложим, используя группировку:

$$(x^3 - 4x^2) - (4x - 16) = x^2(x-4) - 4(x-4) = \\ = (x-4)(x^2-4) = (x-4)(x-2)(x+2).$$

Теперь отметим на оси абсцисс нули функции $P(x)$, то есть точки $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$, и $x = 4$, и построим эскиз графика (рис. 7.6, *а*).

З а м е ч а н и е. Обратите внимание, что масштабы по осям координат на рис. 7.6, *а* разные.

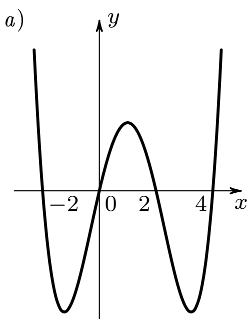
Полученный график не симметричен относительно оси Oy, так как функция $P(x)$ не является четной. Однако на глаз представляется, что все-таки у этого графика есть ось симметрии, только не Oy, а прямая $x = 1$. Посмотрим, так ли это.

Сдвинем график $y = P(x)$ на единицу влево, чтобы прямая $x = 1$ совместилась с осью Oy (см. рис. 7.6, *б*). Полученная кривая будет графиком функции $y = P(x+1)$. Чтобы получить формулу, задающую эту функцию, нужно в формулу для $P(x)$ вместо x подставить $x + 1$. Воспользуемся представлением многочлена $P(x)$ в виде произведения

$$P(x) = (x+2)x(x-2)(x-4).$$

Получим

$$P(x+1) = (x+3)(x+1)(x-1)(x-3) = \\ = (x^2-9)(x^2-1) = x^4 - 10x^2 + 9.$$



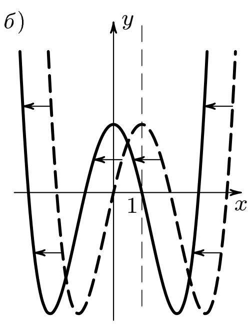


Рис. 7.6

Мы видим, что многочлен $P(x+1)$ содержит только четные степени переменной x. Он является, тем самым, четной функцией и его график симметричен относительно оси Oy.

Поэтому график $P(x)$, получаемый из графика $P(x+1)$ сдвигом обратно, на единицу вправо, тоже будет симметричен, его осью симметрии будет прямая $x=1$. Значит, наши глаза нас не обманули.

Многочлен x^4-10x^2+9 называется биквадратным трехчленом. Произвольный биквадратный трехчлен записывается в виде ax^4+bx^2+c. Нахождение его корней сводится, очевидно, к решению квадратного уравнения $az^2+bz+c=0$, где $z=x^2$.

П р и м е р 3. Построим график многочлена $f(x)=x^4+x^3-6x^2-x+2$.

Представим эту функцию в виде суммы двух: $f_1(x)=x^4+x^3-6x^2$ и $f_2(x)=-x+2$. Многочлен $x^4+x^3-6x^2$ нетрудно разложить на множители. Вынесем за скобку x^2, а выражение в скобках разложим, используя теорему Виета: $f_1(x)=x^2(x^2+x-6)=$ $=x^2(x+3)(x-2)$.

Теперь ясно, что график

$$f_1(x)=x^2(x+3)(x-2)$$

имеет с осью Ox три общие точки, $x=-3$, $x=0$ и $x=2$, причем при $x=0$, где многочлен имеет двойной корень, график касается Ox, а на крайних интервалах, при $x<-3$ и при $x>2$, ветви графика поднимаются вверх («к плюс бесконечности»). Отметим это на графике (рис. 7.7, *а*) и покажем схематически ход графика функции f_1 штриховой линией.

Для уточнения вида графика найдем еще несколько значений функции $f_1(x)=$ $=x^2(x+3)(x-2)$: например, $f_1(-2)=-16$, $f_1(-1)=-6$, $f_1(1)=-4$, построим соответ-

а)

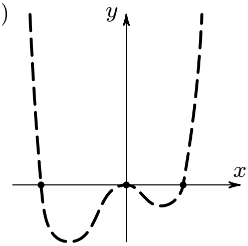


Рис. 7.7, *а*

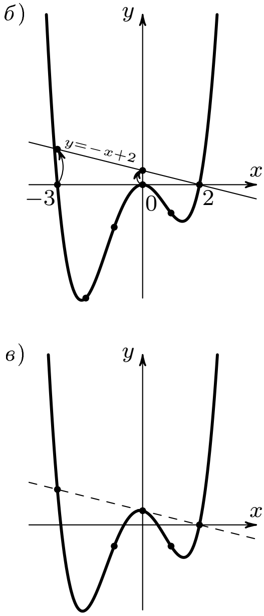


Рис. 7.7, *б*, *в*

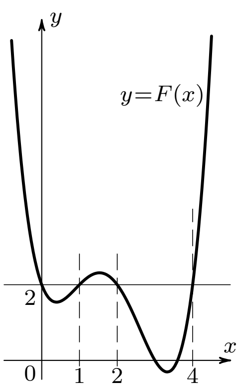


Рис. 7.8

ствующие точки и соединим их плавной кривой — рис. 7.7, *б*. (Так как на участке от $-2 \leqslant x \leqslant 2$ значения функции, по сравнению с изменением аргумента, меняются довольно сильно, то на рис. 7.7, *б* единица по оси Oy взята вчетверо меньше, чем по оси Ox.)

Чтобы получить искомый график функции $f(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2$, нужно график f_1 «сложить» с графиком f_2 ($f_2(x) = -x + 2$). Тогда нули функции $f_1(x)$ «переедут» с оси Ox на прямую $y = -x + 2$. Полученная кривая при $x = 0$ будет касаться этой прямой. Общий вид графика — на рис. 7.7, *в*.

П р и м е р 4. Решим теперь несколько необычную задачу. В предыдущих примерах были заданы разные многочлены и мы строили их графики. Теперь же на рисунке 7.8 задан график некоторого многочлена. Требуется угадать, что это за многочлен.

Заметим, прежде всего, что степень искомого многочлена четная: при больших по абсолютной величине значениях x он принимает значения одного знака. Поскольку эти значения положительные, старший коэффициент (при наибольшей степени x) тоже положителен.

Далее, ясно, что степень многочлена больше двух: график совсем не похож на параболу.

Попробуем подобрать многочлен четвертой степени.

Здесь был бы удобен прием, которым мы неоднократно пользовались (например, в п. 3 из § 1, в примере 2 из этого параграфа): разложение многочлена на линейные множители. Однако искомый многочлен $P(x)$, судя по графику, имеет только два нуля (т. е. уравнение $P(x) = 0$ имеет только два корня), поэтому $P(x)$ на линейные множители не разлагается *).

Поступим так: проведем горизонтальную прямую так, чтобы она пересекла график в максимально большом числе точек. На рис. 7.8 прямая $y = 2$ пересекает график в точках с абсциссами 0, 1, 2 и 4. Теперь заметим, что если опустить график на 2 единицы, то все четыре точки окажутся на оси Ox (рис. 7.9). Значит, многочлен $P_1(x) = P(x) - 2$ можно искать в виде $P_1(x) = ax(x-1)(x-2)(x-4)$.

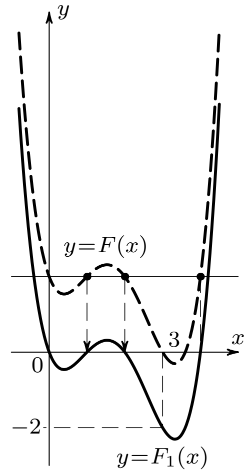


Рис. 7.9

Чтобы найти a, возьмем какое-то значение x, при котором P_1 не обращается в нуль. Например, $x = 3$. Получим: $P_1(3) = -6a$. Судя по нарисованному графику, значение $P(3)$ равно нулю и, значит, $P_1(3) = -2$. Отсюда $a = 1/3$ и предполагаемый многочлен четвертой степени можно записать в виде

$$P(x) = \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)(x-4) + 2 = \\ = \frac{1}{3}(x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 6). \qquad (1)$$

Чтобы проверить, дает ли эта формула разумное приближение для других точек графика, кроме уже использованных, нужны, конечно, дополнительные вычисления. Координаты нескольких таких контрольных точек, вычисленные по формуле (1), приведены в табличке. Все эти точки хорошо ложатся на заданный график, и найденную нами формулу можно считать вполне удовлетворительным ответом.

x	y
$\frac{1}{2}$	$1\frac{9}{16}$
$\frac{3}{2}$	$2\frac{5}{16}$
$\frac{5}{2}$	$1\frac{1}{16}$
$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{16}$

Упражнения.

7-4. Постройте графики $y = x^3 + 4x$ и $y = x^3 - 4x$.

7-5. Постройте график многочлена $y = x^4 - 2x^2 + 1$ и график функции $y = |x^2 - 1|$. Сколько общих точек с осью Ox имеет каждый из этих графиков и

*) Если бы $P(x)$ был равен произведению $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, то он имел бы четыре корня: a, b, c и d.

какие именно? В чем различие этих двух графиков около этих точек?

Подсказка. Посмотрите п. 7 § 4.

7-6. Найдите точные координаты самых низких точек графика функции $y = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x$ (см. рис. 7.6, *а*).

Указание. Используйте сдвиг по оси Ox (см. пример 3 выше) и замену $u = x^2$.

7-7. По графику функции

$$f(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2$$

(рис. 7.6, *в*) видно, что многочлен

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2$$

имеет четыре корня. Можно ли так изменить свободный член многочлена, чтобы уравнение

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$$

имело три корня? два корня? один корень? не имело ни одного корня? имело 5 корней? В каждом случае утвердительного ответа нарисуйте эскиз графика.

7-8. Многочлен 4-й степени разложен на множители:

$$Q_4(x) = (x^2 - 4x - 5)(x^2 + px + q).$$

Сколько корней может иметь уравнение

$$(x^2 - 4x - 5)(x^2 + px + q) = 0$$

в зависимости от значения параметров p и q? На каждый случай приведите пример и нарисуйте эскиз графика функции $y = Q_4(x)$.

7-9. Докажите, что график многочлена

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2$$

имеет ось симметрии.

Подсказка. Сдвиньте график на единицу вправо.

7-10. Докажите, что график многочлена

$$y = x^4 - 2x^2 + 3x - 3$$

не имеет вертикальной оси симметрии.

⊕ **7-11.** Найдите условие (или условия) того, что график многочлена 4-й степени

$$y = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$$

имеет вертикальную ось симметрии.

7-12. Докажите, что никакая прямая $y = kx + b$ не может пересекать график многочлена 4-й степени более чем в четырех точках.

4. Симметрия графиков многочленов третьей степени. Вернемся к кубическим многочленам, с которыми мы уже встречались в предыдущем параграфе. Для графиков нечетных функций $y=ax^3$ и $y=ax^3+bx$ начало координат является центром симметрии. Многочлены x^3+bx^2 (при b, не равном нулю) не являются ни четными, ни нечетными. Но похоже, что их графики тоже имеют центр симметрии (например, см. рис. 6.13, *а*).

Мы теперь докажем, что этим свойством обладает график любого кубического многочлена.

В примере 3 пункта 3 (с. 91) мы решали похожую задачу про многочлен 4-й степени. Там заранее было понятно, что осью симметрии графика является прямая $x=1$, и когда мы сдвинули график на единицу влево, в многочлене исчезли члены с x^3 и x, «мешающие» функции быть четной.

Теперь мы не знаем, куда и на сколько надо сдвинуть график функции $y=x^3+{}$ $+px^2+qx+r$, но нам ясна цель: надо «уничтожить» члены, мешающие нечетности, а именно, px^2 и r. Со свободным членом r справиться легко, передвигая график параллельно оси Oy. Член px^2 попробуем убрать, сдвигая график параллельно Ox.

Величину сдвига, которую мы не знаем, обозначим буквой h. Тогда уравнение сдвинутого графика получится заменой x на $x-h$:

$$f(x-h)=(x-h)^3+p(x-h)^2+q(x-h)+r.$$

Теперь надо так подобрать число h, чтобы после раскрытия скобок член с x^2 исчез. Начнем раскрывать скобки:

$$f(x-h)=(x-h)^3+p(x-h)^2+q(x-h)+r=$$
$$=x^3-3hx^2+3h^2x-h^3+px^2+\ldots$$

Дальше раскрывать скобки не обязательно, так как члена с x^2 там не будет.

Итак, получаем

$$f(x-h)=x^3-(3h-p)x^2+\ldots$$

Теперь видно, что член с x^2 исчезнет, если мы сдвинем график на $h=p/3$. Тогда уравнение сдвинутой кривой примет вид: $y=x^3+q_1x+r_1$. Остается сдвинуть график на $-r_1$ параллельно оси Oy, и мы получим нечетную функцию $y=x^3+q_1x$, график которой симметричен относительно начала координат $O(0;\,0)$.

Мы доказали, что двумя сдвигами параллельно координатным осям график любого кубического многочлена можно сделать симметричным относительно начала координат *). А так как при сдвигах форма графика не меняется, то получается следующий вывод:

График любого многочлена третьей степени имеет центр симметрии.

Так что, изучив формы графика функции $y=x^3+qx$, мы узнаем, какой вид может иметь график кубического многочлена общего вида.

Мы уже строили графики $y=x^3+qx$ для $q=4$ и $q=-4$ (см. упражнение 7-4) и получили две совершенно разные кривые. Могут ли быть еще какие-либо случаи?

Разложим многочлен x^3+qx на множители: $x^3+qx=x(x^2+q)$. График $y=x^3+qx$ проходит через начало координат — точку $O(0;\,0)$. Будут ли еще у графика точки, общие с осью Ox, зависит от того, будут ли корни, какие и сколько у уравнения $x^2+q=0$.

---

*) Другими словами, заменами x на $x-h$ и y на $y+r_1$ формулу, задающую функцию, можно привести к виду $y=x^3+qx$.

Возможны три случая: $q < 0$, $q = 0$ и $q > 0$.

В первом случае это уравнение имеет два корня: $+\sqrt{-q}$ и $-\sqrt{-q}$, значит, график пересекает ось Ox еще в двух точках, симметричных относительно начала координат, и имеет вид, как на рис. 7.10, *а*.

Во втором случае функция $y = x^3 + qx$ приобретает вид $y = x^3$. График этой функции нам хорошо знаком — рис. 7.10, *б*.

Наконец, если $q > 0$, то выражение $x^2 + q$ ни при каком значении x не может стать нулем. Значит, график $y = x^3 + qx$ пересекает ось Ox в единственной точке (в начале координат), функция монотонно растет, и ее график выглядит, как на рис. 7.10, *в*.

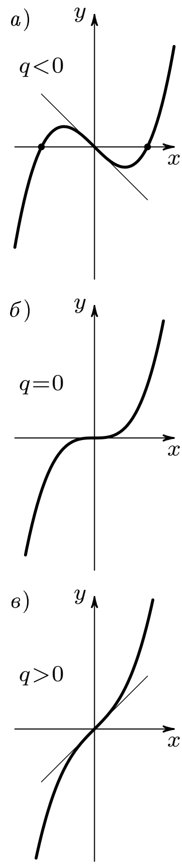


Рис. 7.10

Упражнение.

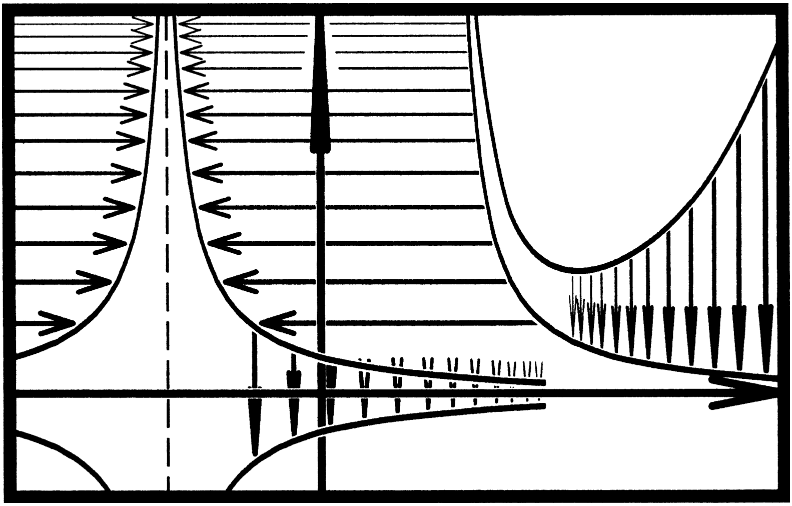
7-13. 1) Сдвиньте график $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ так, чтобы он стал симметричен относительно начала координат.

2) Найдите координаты центра симметрии графиков:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$;

$\oplus$ б) $y = x^3 + 3x^2 + 2x - 2$.

3) Какой вид имеют графики многочленов $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ и $y = x^3 + 3x^2 + 2x - 2$?



§ 8. Рациональные функции

1. Определение. Рациональные функции — это функции, которые можно представить в виде частного двух многочленов.

Примеры рациональных функций:

$$y = \frac{x^3 - 5x + 3}{x^6 + 1}; \qquad y = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2+3};$$

$$y = x^2 + 3 - \frac{1}{x-1}\ ^{*)}.$$

Дробно-линейная функция $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, разобранная в § 5, является рациональной. Она представляет собой частное двух многочленов первой степени.

Если функция $y = f(x)$ представляет собой частное двух многочленов степени выше первой, то график ее обычно более сложен, и построить его, отразив все нужные детали, бывает трудно. Однако часто достаточно применить приемы, аналогичные тем, с которыми мы уже знакомились.

---

*) Эта функция рациональна, поскольку $x^2 + 3 - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{(x^2+3)(x-1)-1}{x-1}$.

2. Примеры построения графиков рациональных функций.

Пример 1. Построим график функции $y = \dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$.

Обратим прежде всего внимание на то, что при $x = -1$ функция не определена (так как знаменатель дроби $x^2 + 2x + 1$ при $x = -1$ равен нулю). При x, близких к -1, числитель дроби $x - 1$ приблизительно равен -2, а знаменатель $(x + 1)^2$ положителен и мал по абсолютной величине. Значит, вся дробь $\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ будет отрицательна и велика по абсолютной величине (и тем больше, чем ближе x к значению $x = -1$). Вывод: график распадается на две ветви (поскольку на нем нет точки с абсциссой, равной -1); обе ветви уходят вниз, когда x приближается к -1 (рис. 8.1, *а*).

Посмотрим теперь на числитель. Он обращается в нуль при $x = 1$. Значит, в точке $x = 1$ график пересекает ось абсцисс. Нарисовав еще точку пересечения с осью Oy ($y = -1$ при $x = 0$), мы можем примерно представить себе ход графика в средней его части (рис. 8.1, *б*).

Остается посмотреть, что происходит с функцией при больших по абсолютной величине значениях x.

Если x положительно и увеличивается, то числитель и знаменатель дроби увеличиваются. Но так как в числителе стоит x в первой степени, то знаменатель при больших x увеличивается гораздо быстрей, чем числитель. Поэтому при неограниченном увеличении x функция $y = \dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$ будет все больше и больше приближаться к нулю. Таким образом, правая ветвь графика правее точки $x = 1$ немного поднимается над осью абсцисс (рис. 8.1, *в*), а потом опять

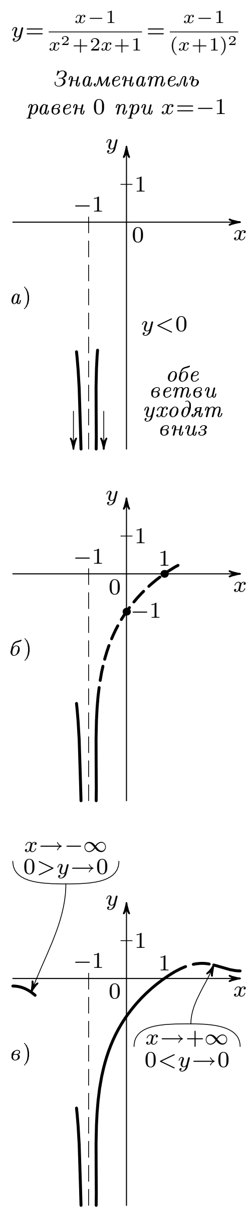


Рис. 8.1

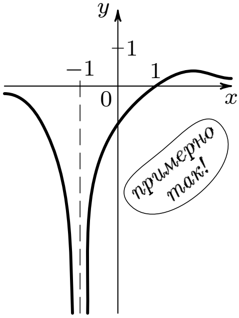


Рис. 8.2

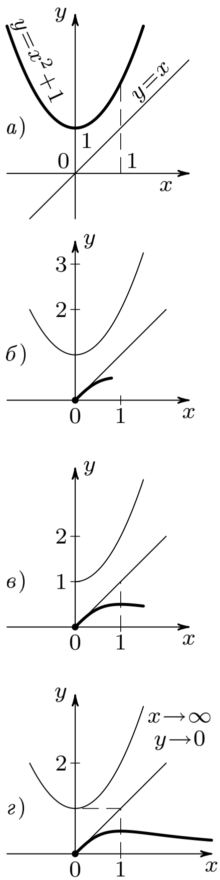


Рис. 8.3

начнет опускаться и будет приближаться к оси Ox.

Аналогичные соображения покажут нам, что левая ветвь кривой при увеличении x по абсолютной величине тоже приближается к оси абсцисс, только не сверху, а снизу (рис. 8.1, *в*). Позже мы покажем (см. п. 3), как можно точно найти место наивысшего подъема правой ветви графика.

По отмеченным деталям можно представить общий вид графика (рис. 8.2).

Пример 2. Построим график функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Для удобства начертим сначала графики числителя $y = x$ и знаменателя $y = x^2 + 1$ (рис. 8.3, *а*). Для построения графика нашей функции нужно значения числителя делить на значения знаменателя.

При $x = 0$ числитель равен нулю — график проходит через начало координат. Пойдем теперь направо (т. е. рассмотрим положительные значения аргумента). Так как величина x^2 много меньше x при очень маленьких x, то при выходе из начала координат знаменатель будет некоторое время почти равен единице (немного больше, чем единица); поэтому вся функция будет примерно равна числителю x (чуть-чуть меньше числителя) — график пойдет рядом с прямой $y = x$, постепенно от нее отставая (рис. 8.3, *б*).

Вскоре, однако, $x^2 + 1$ начинает расти быстрее, чем x, знаменатель обгоняет числитель и дробь начинает уменьшаться — график заворачивает вниз (рис. 8.3, *в*). С дальнейшим увеличением x дробь становится все меньше и график приближается к оси абсцисс (рис. 8.3, *г*).

Левую половину графика можно получить, заметив, что данная функция —

нечетная. Общий вид графика показан на рис. 8.4.

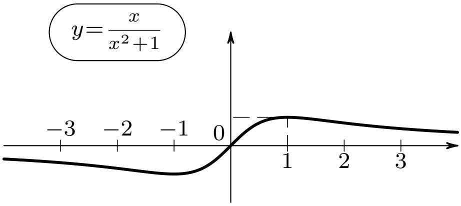


Рис. 8.4

3. Пример нахождения самой высокой точки графика. Вернемся к построенному нами графику функции $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ и попробуем точно найти самую высокую точку правой половины графика (а значит, конечно, и самую низкую точку левой половины).

Очевидно, что наша кривая не может подняться очень высоко, так как знаменатель $x^2 + 1$ довольно быстро начинает обгонять числитель x.

Посмотрим, может ли она подняться на высоту, равную 1, т. е. может ли при каком-нибудь x значение y быть равным 1. Условие $y = 1$ дает уравнение $\dfrac{x}{x^2+1} = 1$ или $x^2 - x + 1 = 0$. Это уравнение не имеет действительных корней. (Проверьте!) Значит, на графике нет точки с ординатой $y = 1$ — график не пересекает прямой $y = 1$ (рис. 8.5, *а*).

Посмотрим, поднимается ли кривая на высоту, равную 1/3. Для этого нужно, чтобы выполнялось равенство $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{3}$, или $x^2 - 3x + 1 = 0$. Это уравнение имеет два действительных корня (проверьте!), и, значит, наш график имеет две точки с ординатами, равными 1/3 , т. е. пересекает прямую $y = 1/3$ в двух точках (рис. 8.5, *б*).

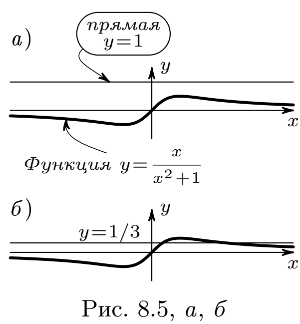


Рис. 8.5, *а*, *б*

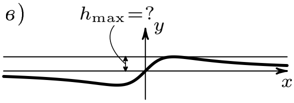


Рис. 8.5, *в*

Чтобы найти самую высокую точку, надо узнать, при каком самом большом h уравнение $\dfrac{x}{x^2+1}=h$ будет иметь решение (рис. 8.5, *в*). Перепишем уравнение $\dfrac{x}{x^2+1}=h$ в виде $h\cdot x^2-x+h=0$. Это уравнение имеет решение, когда $1-4h^2\geqslant 0$, откуда $h^2\leqslant 1/4$, т. е. $-1/2\leqslant h\leqslant 1/2$.

Значит, самая большая высота, на которую поднимается график, равна $1/2$.

Найдем, при каком x это наибольшее значение y достигается. Написав $\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}$, или $x^2-2x+1=0$ [*], получим $x=1$. Итак, самая высокая точка графика — это точка $(1;\ 1/2)$.

Упражнение.

8-1. Найдите самую большую ординату графика $y=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$ (см. пример 1 из п. 2).

4. Об одном неравенстве. Построим график функции $y=\dfrac{x^2+1}{x}$. Эскиз его легко нарисовать, если заметить, что

$$\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{\dfrac{x}{x^2+1}},$$

и, следовательно, мы пришли к задаче, которую уже решали: зная график $y=f(x)$, построить график $y=\dfrac{1}{f(x)}$ (см. с. 71).

Получаем примерно такую картину (рис. 8.6).

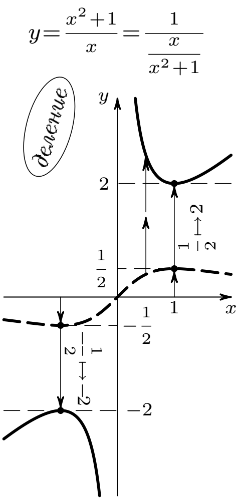


Рис. 8.6

Построим этот график другим способом. При этом выяснится его интересная особенность.

Поделим числитель на знаменатель:

$$\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}.$$

Теперь построим график $y=x+1/x$ «сложением» известных нам графиков $y=x$

[*] Случайно ли получился полный квадрат?

и $y = 1/x$ — рис. 8.7, *а* (для $x > 0$). Для отрицательных значений x график получается исходя из того, что $y = x + 1/x$ — нечетная функция (рис. 8.7, *б*).

Мы видели, что график $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту — ось Oy, к которой график приближается, когда x уменьшается по абсолютной величине. Теперь видно (рис. 8.7, *а*), что этот график имеет еще наклонную асимптоту — прямую $y = x$: к этой прямой обе ветви графика приближаются, когда x неограниченно возрастает по абсолютной величине.

Найдем координаты самой низкой точки правой ветви графика $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Ответ ясен из первого способа построения этого графика (см. рис. 8.6): самая низкая точка графика $y = \dfrac{x^2+x}{x}$ получается при том x, при котором на графике $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ получается самая высокая, т. е. при $x = 1$. Наименьшее значение ординаты графика $y = \dfrac{x^2+x}{x}$ равно, таким образом, двум, и искомая точка имеет координаты $(1;\ 2)$. Мы получили интересное неравенство: *для положительных* x (речь шла о правой части графика) *всегда* $x + 1/x \geqslant 2$.

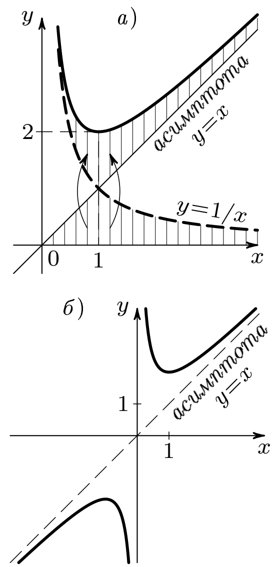


Рис. 8.7

Упражнения.

8-2. Докажите неравенство

$$a + 1/a \geqslant 2 \qquad (1)$$

для $a > 0$ алгебраически. Какое неравенство получится, если $a < 0$?

8-3. Докажите неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \qquad (2)$$

для $a > 0$, $b > 0$.

Словесная формулировка этого неравенства: «среднее арифметическое двух положительных чисел a и b всегда больше или равно среднему геометрическому этих же чисел». Неравенство (1) есть частный случай неравенства (2).

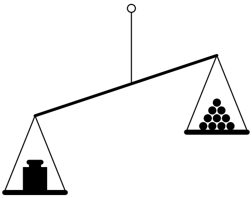


Рис. 8.8

8-4. Неравенство $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ используется при решении старинной задачи о «честном купце». Один честный купец знал, что весы, на которых он взвешивает товар, неточны, потому что одно коромысло немного длиннее другого (в то время еще пользовались весами с двумя чашками, см. рис. 8.8). Что делать? Обвешивать покупателей — грех, но и себя обижать не хочется. Купец решил, что половину требуемого веса покупателю он будет взвешивать, поставив гири на одну чашку, а вторую половину — поставив те же гири на другую.

Спрашивается, что при этом получилось: оказался ли купец в выигрыше или в проигрыше?

Указание. Если одно коромысло весов в k раз длиннее другого, то весы находятся в равновесии, когда груз на коротком коромысле в k раз больше груза на длинном.

5. Еще один пример. В следующем примере возьмем функцию $y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

Она представлена в виде суммы двух функций, и, конечно, можно строить ее график сложением графиков $y = \frac{1}{x+1}$ и $y = \frac{1}{x-1}$. Но здесь можно сразу выяснить общий вид графика из таких соображений:

а) функция не определена при $x = 1$ и $x = -1$, значит, кривая распадается на три ветви (рис. 8.9, *а*);

б) при приближении к $x = 1$ второе слагаемое неограниченно растет по абсолютной величине, а первое остается ограниченным. Значит, вся функция неограниченно растет, и ветви графика, приближаясь к прямой $x = 1$, неограниченно удаляются от оси абсцисс. При этом справа от $x = 1$ (то есть при $x > 1$) функция положительна, и кривая идет вверх, а слева (при $x < 0$) — вниз (рис. 8.9, *б*).

Аналогичная картина получается около прямой $x = -1$;

в) Поскольку $y = 0$ при $x = 0$, кривая проходит через начало координат (рис. 8.9, *в*);

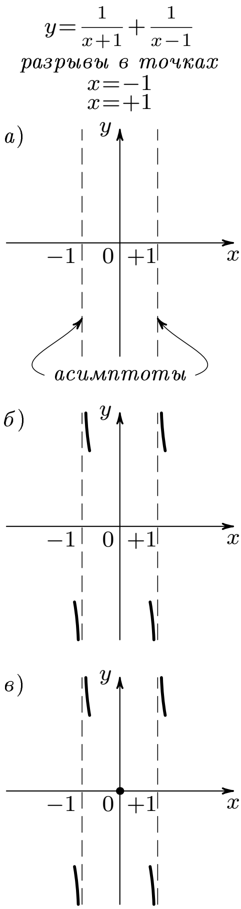


Рис. 8.9, *а*, *б*, *в*

г) для больших по абсолютной величине значений x оба слагаемых малы по абсолютной величине — обе крайние ветви графика приближаются к оси абсцисс: правая сверху, а левая снизу (рис. 8.9, *г*).

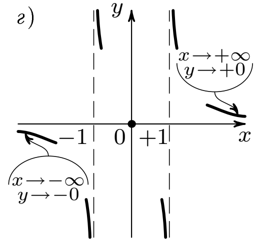


Рис. 8.9, *г*

Объединив все эти сведения, получим общий вид графика (рис. 8.10).

Упражнение.

8-5. Покажите, что этот график симметричен относительно начала координат.

общий вид

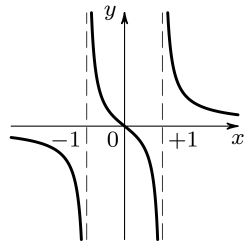


Рис. 8.10

Разобранные примеры показывают, что при построении одного и того же графика можно пользоваться различными приемами. Поэтому сейчас мы дадим еще несколько примеров на построение графиков и не будем лишать Вас удовольствия самим подобрать подходящие приемы для их построения.

Упражнения.

8-6. Постройте график $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}$. На сколько «кусков» распадается кривая?

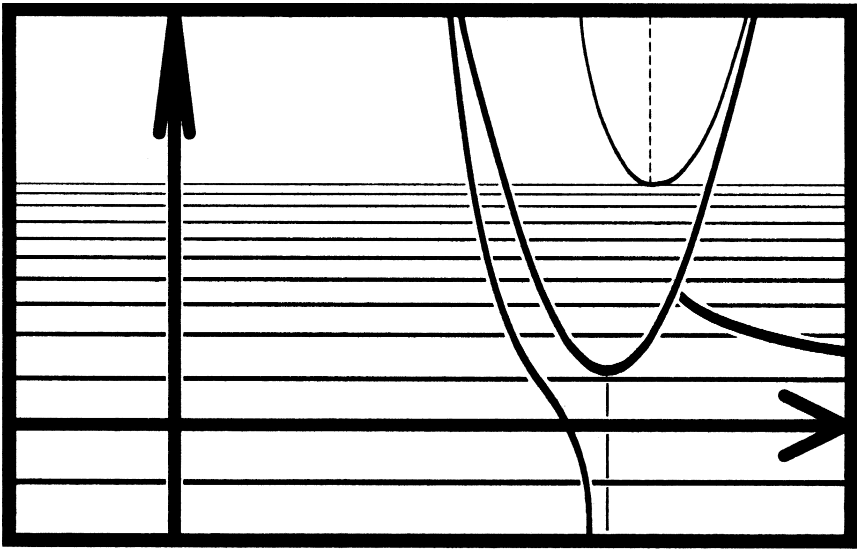
8-7. а) Постройте график $y=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$.

б) Постройте график $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$. Укажите ось симметрии этой кривой.

8-8. Постройте графики:

а) $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$; б) $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;

в) $y = x + \frac{1}{x^2}$.



§ 9. Разные задачи

9-1. Постройте графики функций:

а) $y = x(1-x) - 2$; б) $y = x(1-x)(x-2)$;

в) $y = \dfrac{1}{x^3 - 5x}$; г) $y = \dfrac{2|x| - 3}{3|x| - 2}$;

д) $y = \dfrac{1}{4x^2 - 8x - 5}$; е) $y = \dfrac{4 - x}{x^3 - 4x}$;

ж) $y = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x-1}$; $\oplus$ з) $y = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$;

и) $y = (2x^2 + x - 1)^2$; к) $y = |x| + \dfrac{1}{1 + x^2}$;

л) $y = (x-3)|x+1|$; м) $y = |x-2| + 2|x| + |x+2|$;

н) $y = [1/x]$; о) $y = \dfrac{|x+1| - x}{|x-2| + 3}$;

$\oplus$ п) $y = \dfrac{x}{[x]}$; р) $y = [x]^2$; с) $y = (x - [x])^2$.

9-2. Постройте графики дробно-линейных функций вида $y = \dfrac{2x + a}{x + 1}$ для различных значений a. Сколько качественно различных рисунков можно получить при этом?

9-3. Общий вид графика функции, являющейся частным от деления одного квадратного трехчлена на другой, зависит от того, сколько корней и какие корни будут иметь числитель и знаменатель.

1) Постройте графики функций:

а) $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2}$; б) $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+x-2}$;

в) $y=\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+3}$; г) $y=\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-x-6}$.

⊕ 2) Какой вид имеет график функции $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+px+q}$, если оба корня числителя меньше корней знаменателя?

3) Разберите все возможные случаи и нарисуйте возможные типы графиков у функций вида $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+px+q}$. Постарайтесь не пропустить ни одного случая и приведите по примеру на каждый тип.

9-4. Функция $y=f(x)$ определена следующим правилом:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x=0,\\ -1 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

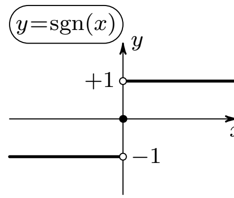


Рис. 9.1

График этой функции изображен на рис. 9.1.

Эта функция часто встречается, и потому для нее есть специальное обозначение $y=\mathrm{sgn}(x)$ (читается «сигнум икс»; по-латыни signum — «знак»). Функцию $\mathrm{sgn}(x)$ можно для $x\neq 0$ задать формулой $y=\dfrac{x}{|x|}$ *).

Нарисуйте графики функций:

а) $y=\mathrm{sgn}^2(x)$; б) $y=(x-1)\,\mathrm{sgn}(x)$; в) $y=x^2\,\mathrm{sgn}(x)$.

9-5. Определите, имеет ли корень уравнение:

а) $x^4-4x^2+3=0$; б) $x^4+2x^2+4=0$; в) $x^4+2x^3-25=0$.

9-6. Используя эскизы графиков, определите, сколько решений имеют уравнения:

а) $-x^2+x-1=|x|$; б) $\dfrac{1}{x^2-x+1}=x$;

в) $|3x^2+12x+9|+x=0$; г) $|x-1|+|x-2|+|x+1|+|x+2|=6$;

д) $x(x+1)(x+2)=0{,}01$; ⊕ е) $|x+3|=|x+2|(x^2-4)$;

ж) $[x]=x$ на участке $|x|<3$; з) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}=100$.

*) Почему только для $x\neq 0$?

9-7. Решите уравнения:

а) $2x^2 - x - 1 = |x|$; б) $|2x^2 - x - 1| - x = 0$;

в) $|x| = |x-1| + |x-2|$.

9-8. а) Определите, сколько решений может иметь уравнение $|1 - |x|| = a$ при различных значениях a.

б) Тот же вопрос для уравнения $x^2 + 1/x = a$ *).

9-9. Решите неравенства:

а) $\dfrac{2-x}{x^2+6x+5} > 0$; б) $x \leqslant |x^2 - x|$; в) $|x| + 2|x+1| > 3$.

⊕ **9-10.** Найдите минимум (наименьшее значение) функции $x^2 + \dfrac{4}{x^2}$.

9-11. Найдите наибольшее значение функции и укажите, при каких значениях x оно достигается:

а) $y = x(a-x)$; б) $y = |x|(a - |x|)$; в) $y = x^2(a - x^2)$;

г) $y = 1 - x\sqrt{2}$ на участке $|x| \leqslant \sqrt{2}$;

д) $y = -x^2 + 2x - 2$ на участке $-5 \leqslant x \leqslant 2$;

е) $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ на участке $x \geqslant 2$; ⊕ ж) $y = \dfrac{x^2+4}{x^2+x+1}$.

⊕ **9-12.** Шесть коробок со спичками расположены кольцом. В одной коробке лежит 22 спички, в следующей 12 спичек, в следующих по порядку 14, 34, 10, 16. Какое самое меньшее число спичек надо переложить, чтобы во всех коробках их стало поровну?

9-13. Две дороги пересекаются под прямым углом. По направлению к перекрестку движутся две автомашины: по первой дороге — со скоростью 60 км/час, по второй — со скоростью 120 км/час. В 12 часов обе машины находились за 30 км от перекрестка.

В какой момент расстояние между машинами будет наименьшим? Где будут находиться машины в этот момент?

9-14. Пусть $y = f(x)$ — четная функция, а $y = g(x)$ — нечетная функция. Что можно сказать о четности или нечетности функций:

а) $y = |g(x)|$; б) $y = g(|x|)$;

в) $y = f(x) \cdot g(x)$; г) $y = f(x) - g(|x|)$?

9-15. Найдите все четные и все нечетные функции вида:

а) $y = kx + b$; б) $y = \dfrac{px+q}{x+r}$; в) $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+px+q}$.

⊕ **9-16.** Функция $y = x^2 + x + 1$ не является ни четной, ни нечетной функцией. Однако эту функцию легко представить в виде суммы четной функции $y = x^2 + 1$ и нечетной функции $y = x$.

---

*) Значение a, разделяющее разные случаи, найдите приближенно по графику.

1) Представьте в виде суммы четной и нечетной функций: а) функцию $y = \dfrac{1}{x^2+x+1}$; б) функцию $y = \dfrac{1}{x^4-x}$.

2) Докажите, что любую функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

9-17. Через каждые две точки с разными абсциссами проходит прямая — график линейной функции $y = kx + b$. Аналогично, через каждые три точки с разными абсциссами, не лежащие на одной прямой, можно провести параболу — график функции $y = ax^2 + bx + c$.

Найдите квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, график которого проходит через точки:

а) $(-1;\ 0)$; $(0;\ 2)$; $(1;\ 0)$; б) $(1;\ 0)$; $(4;\ 0)$; $(5;\ 8)$;
в) $(-3;\ -1)$; $(1;\ 7)$; $(-2;\ 7)$; г) $(0;\ -3)$; $(-5;\ 0)$; $(5;\ -6)$;
д) $(0;\ -2)$ $(2;\ 6)$ $(-7;\ 5)$.

9-18. Нарисуйте параболу $y = x^2$. Поставьте новые масштабы (одинаковые!) по осям Ox и Oy на Вашем рисунке так, чтобы эта кривая стала графиком функции: $\oplus$ а) $y = 3x^2$; б) $y = \dfrac{2}{3}x^2$.

9-19. $\oplus$ а) Покажите, что подобное преобразование параболы с центром в начале координат и коэффициентом подобия 2 переводит кривую $y = x^2$ в кривую $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

б) Совершите подобное преобразование параболы $y = x^2$, выбрав центр подобия в начале координат и коэффициент подобия, равный $1/2$. Какая кривая получится?

$\oplus$ в) Воспользовавшись результатом задачи 9-19, а), найдите фокус и директрису параболы $y = \dfrac{1}{2}x^2$. (Определение директрисы и фокуса см. на с. 58.)

г) Докажите, что все параболы $y = ax^2 + bx + c$ геометрически подобны.

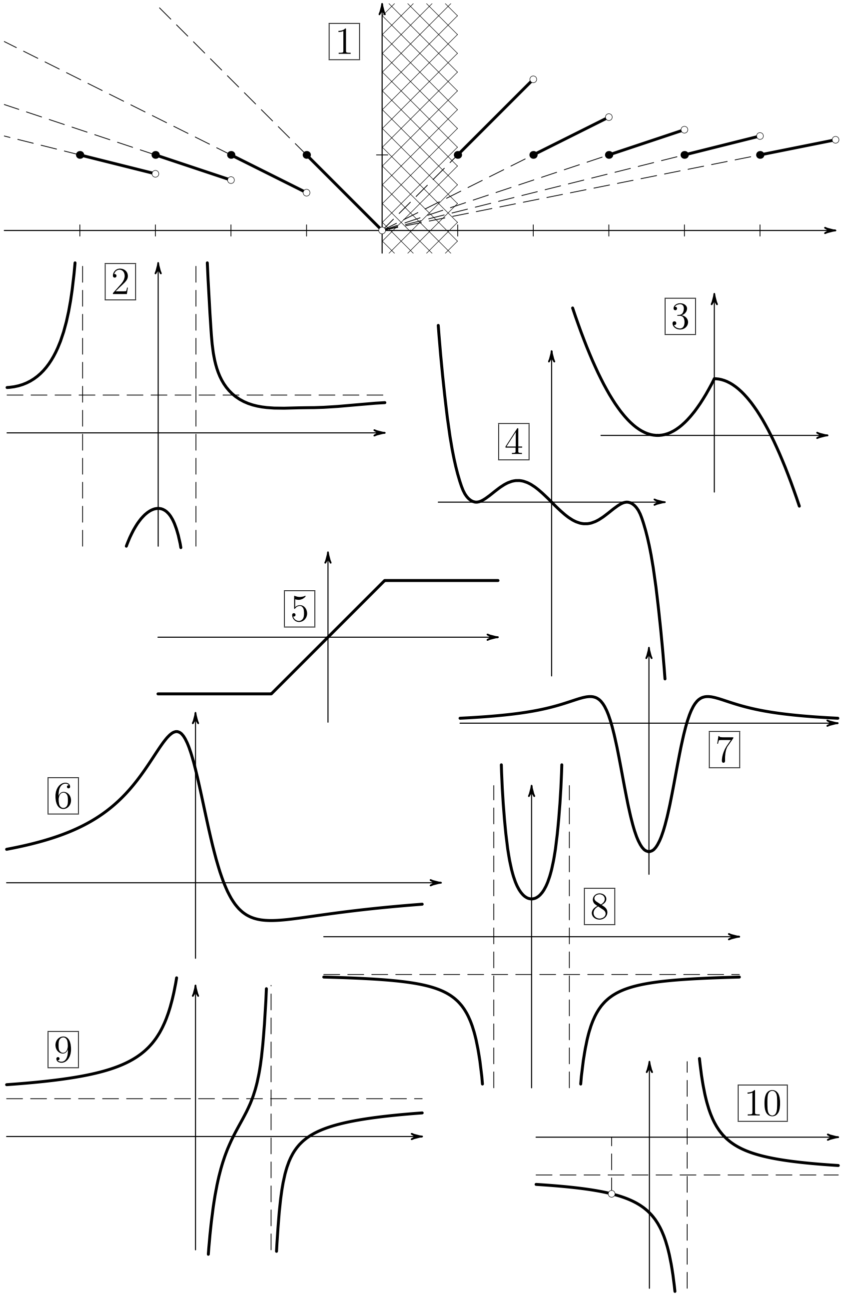
$\oplus$ **9-20.** Докажите, что точки $F_1(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ и $F_2(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$ являются фокусами гиперболы $y = 1/x$, т. е. что разность расстояний любой точки этой кривой до точек F_1 и F_2 по абсолютной величине постоянна — не зависит от выбора точки на гиперболе*).

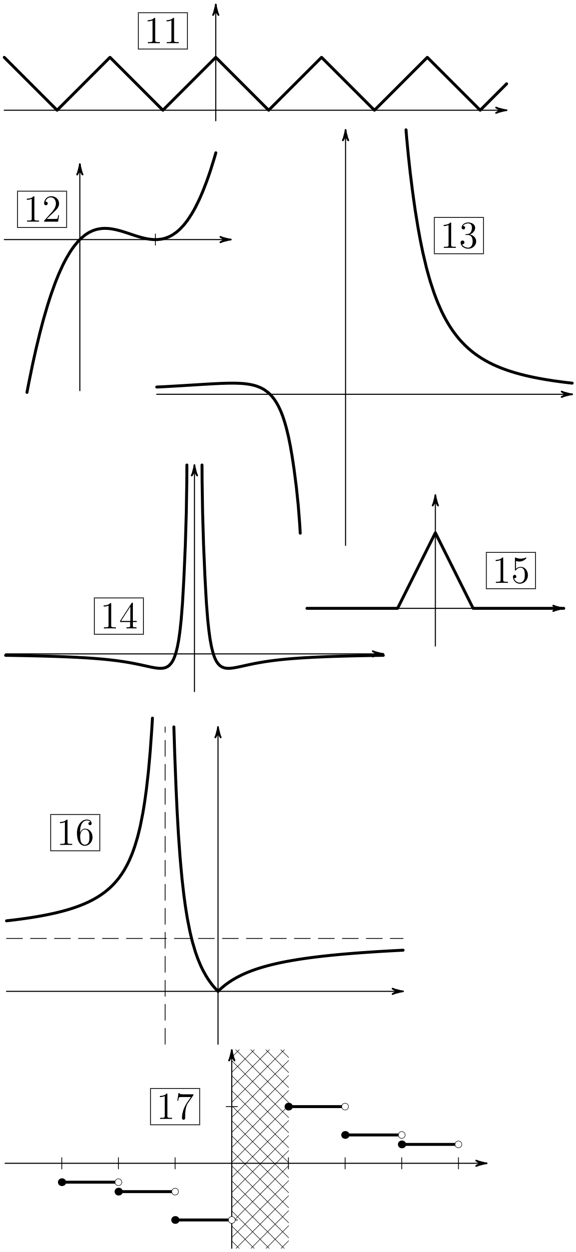
Указание. Возьмите на гиперболе $y = 1/x$ произвольную точку $M(a;\ 1/a)$. Выразите через a расстояния от M до F_1 и F_2. Вычислите разность этих расстояний. Покажите, что абсолютная величина этой разности при всех значениях a одинакова.

9-21. На с. 110—111 даны 17 графиков и столько же формул. Ваша задача — определить, какая формула относится к какому

---

*) Предполагается, что масштабы по осям координат одинаковы.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10



$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x}$$

$$\frac{x^2+1}{1-x^2}$$

$$\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

$$-x^5+2x^3-x$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+4}$$

$$\frac{1/4-x^2}{x^2+x^4}$$

$$\Big|1-|x|\Big|-|x|+1$$

$$\frac{x+1}{x^3}$$

$$\frac{1}{[x]}$$

$$\frac{x}{[x]}$$

$$x^3-2x^2+x$$

$$(1+x)(1-|x|)$$

$$\frac{x^2-2x+4}{x^2+x-2}$$

$$\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|$$

$$\frac{1}{2}|x+1|-\frac{1}{2}|x-1|$$

$$\frac{3-4x}{x^2+1}$$

$$\frac{2+x-x^2}{x^2-1}$$

графику. Среди этих графиков Вы найдете ответы к некоторым упражнениям. (Учтите, что не во всех случаях масштабы по осям одинаковые.)

9-22. 1) Воспользовавшись графиками, определите число решений следующих кубических уравнений:

а) $0{,}01x^3 = x^2 - 1$; б) $0{,}001x^3 = x^2 - 3x + 2$.

2) Найдите приближенные значения корней этих уравнений.

9-23. 1) На с. 37 есть рисунок, показывающий, что график многочлена $y = x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{16}$ получается из графика многочлена $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ сдвигом параллельно оси Ox. Найдите величину этого сдвига.

⊕ 2) Решите уравнения четвертой степени:

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0 \quad \text{и} \quad x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15 = 0.$$

3) Имеет ли график многочлена $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x - 25$ ось симметрии? Имеет ли этот многочлен корни?

9-24. На рис. 9.2 изображен график функции $y = f(x)$. Нарисуйте эскизы графиков следующих функций:

а) $y = f(x) - 2$; б) $y = -3f(x)$; в) $y = f(x+2)$;
г) $y = |f(x)|$; д) $y = f(-x)$; е) $y = f(|x|)$;
ж) $y = \dfrac{1}{f(x)}$; з) $y = (f(x))^2$; и) $y = x + f(x)$;
к) $y = \dfrac{f(x)}{x}$.

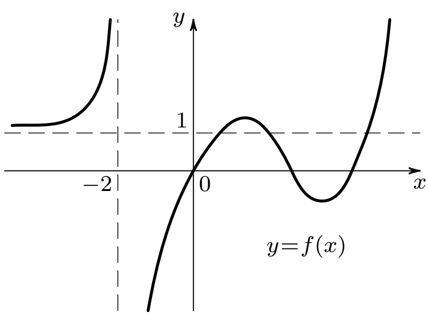


Рис. 9.2

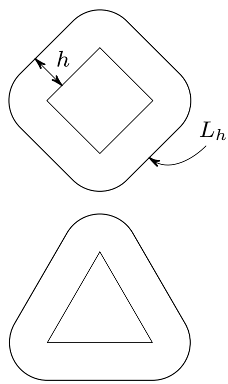


Рис. 9.3

⊕ **9-25.** На плоскости нарисован квадрат со стороной a (рис. 9.3). Кривая L_h есть геометрическое место точек, наименьшее расстояние которых до какой-нибудь точки квадрата равно h. Обозначим площадь фигуры, ограниченной кривой L_h, через $S(h)$.

а) Найдите $S(h)$ как функцию h.

б) Решите аналогичную задачу, взяв вместо квадрата прямоугольник со сторонами a и b.

в) Та же задача для равностороннего треугольника со стороной a.

г) Та же задача для треугольника со сторонами a, b и c.

д) Та же задача для круга радиуса r.

е) Не можете ли Вы заметить закономерность в получающихся выражениях для $S(h)$? Напишите общую формулу для любой выпуклой фигуры.

9-26. Автомобиль разгоняется в течение трех секунд с ускорением 6 м/с^2, а затем движется равномерно с достигнутой при разгоне скоростью. График движения этого автомобиля изображен на рис. 9.4 сплошной линией.

а) Найдите уравнения прямой AB (участок равномерного движения) и параболы OAK (участок равноускоренного движения).

б) Докажите, что прямая AB касается параболы OAK в точке A.

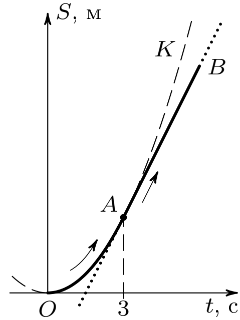


Рис. 9.4

Ответы и решения к задачам и упражнениям, отмеченным значком $\oplus$

1-4, б). Ответ ищите среди графиков на с. 110—111.

1-7, в). График функции $y = [2x]$ см. на рис. 1.

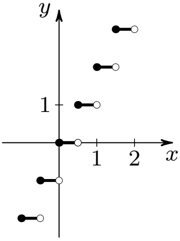


Рис. 1

3-3, в). Уравнение $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x = 0$ имеет четыре корня: $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$ и $x_4 = 1$.

3-9. Ответ. $y = x + |x|$.

3-10, а). Указание. Найдите коэффициенты a, b и c из условия, что график функции $y = ax + b + c|x|$ проходит через точки $(-2;\ 0)$, $(0;\ 1)$ и $(1;\ 3)$.

б) Решение аналогично решению задачи а). Ответ — формулу для функции, график которой изображен на рис. 3.18, — ищите на с. 111.

3-11. Чтобы получить ответ, не обязательно составлять уравнения звеньев — достаточно вычислить значения функции в «изломах».

Замечание. Эта функция принимает наименьшее значение на целом отрезке.

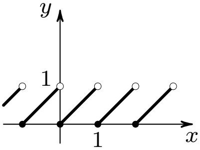


Рис. 2

3-12. График функции $y = x - [x]$ — на рис. 2.

3-13. а). Решение. Всего в семи коробках 105 спичек. Поэтому нам нужно добиться, чтобы в каждой коробке было $105 : 7 = 15$ спичек.

Определим, какое минимальное число спичек требуется переложить по каждому «мостику», соединяющему коробки. Например, слева от «мостика» II, соединяющего коробку Б и коробку В (см. рис. 3), находится $16 + 9 = 25$ спичек, а должно в двух коробках быть $15 \cdot 2 = 30$ спичек. Значит, по этому «мостику» придется переложить, как минимум, $30 - 25 = 5$ спичек. Справа от мостика IV лежит $18 + 20 + 8 = 46$ спичек, а должно лежать 45 спичек, значит, надо обязательно убрать 1 лишнюю, и т. д. — продолжите подсчеты самостоятельно. Если Вы не ошибетесь, то получится, что для уравнивания числа спичек в коробках необходимо перенести 19 спичек.

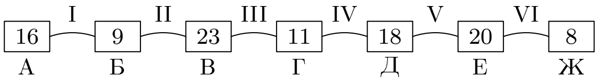


Рис. 3

Теперь надо показать, что этот оптимальный результат достижим, то есть составить «план перекладываний»: указать, в каком порядке и в каком направлении нужно перекладывать спички. Сделайте это самостоятельно, пользуясь схемой на рис. 4.

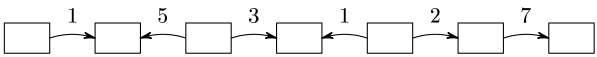


Рис. 4

О т в е т. Чтобы уравнять количество спичек в коробках, достаточно переложить 19 спичек. Меньшим числом перекладываний обойтись нельзя.

3-13, б). Как и в задаче 3-13, а) нужно добиться, чтобы в каждой коробке было $(19 + 9 + 26 + 8 + 18 + 11 + 14) : 7 = 105 : 7 = 15$ спичек. Но то, что коробки расположены по кольцу, принципиально меняет дело: теперь старым рассуждением невозможно определить минимальное число спичек, которое необходимо перенести по какому-то «мостику» *).

Приходится действовать сложнее. Итак, пусть после некоторых перекладываний задача решена и в каждой коробке лежит 15 спичек.

Обозначим буквой x число спичек, которые переложили из первой коробки во вторую. (Может быть, конечно, что спички придется перекладывать из второй коробки в первую — тогда x будет отрицательным.) После того как мы переложим x спичек из первой коробки во вторую, во второй коробке будет $x + 9$ спичек.

После всех перекладываний во второй коробке осталось 15 спичек. Значит, из нее в третью было переложено $x + 9 - 15 = x - 6$ спичек.

Аналогично рассуждая получим, что из третьей в четвертую было переложено $x + 5$ спичек, из четвертой коробки в пятую $x - 2$,

*) Это связано с тем, что кольцо нельзя разделить на две части одним разрезом. (Например, чтобы поделить бублик на двоих, его приходится разламывать в двух местах.)

из пятой в шестую $x+1$, из шестой в седьмую $x-3$, наконец, из седьмой в первую $x-4$ спички (рис. 5).

Обозначим через S общее число переложенных спичек:

$$S = |x| + |x-6| + |x+5| + |x-2| + |x+1| + |x-3| + |x-4|.$$

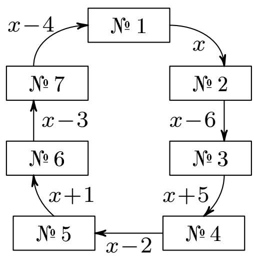


Рис. 5

В этой формуле знаки абсолютной величины стоят потому, что важно лишь число переложенных спичек, а не то, в каком направлении их перекладывали.

Нам нужно выбрать x так, чтобы S имело наименьшую величину. График функции $S(x)$ — это ломаная линия (рис. 6).

Самая низкая точка графика — это вершина A_4, значит, функция $S(x)$ принимает свое наименьшее значение при $x = 2$. Это минимальное значение легко подсчитать:

$$S_{\min} = S(2) = 19.$$

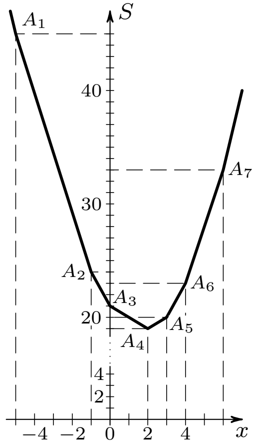


Рис. 6

Что этот минимум осуществим, видно из рисунка 7, где показано, сколько спичек и в каком направлении нужно переложить по каждому «мостику».

О т в е т. Чтобы уравнять количество спичек в коробках, достаточно переложить 19 спичек. Меньшим количеством обойтись нельзя.

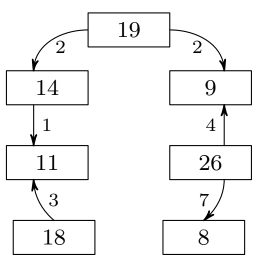


Рис. 7

С этими похожими на игру задачами связана практически важная задача о перевозках по кольцевым маршрутам.

З а д а н и е 1. Представьте себе кольцевую железную дорогу с равноотстоящими станциями. На некоторых станциях находятся склады угля, на других — потребители, которым нужно доставить весь этот уголь. На рис. 8 указаны запасы угля на складах и (со знаком минус) потребность в нем. Воспользовавшись решением предыдущей задачи, составьте наиболее экономный план перевозок.

З а д а н и е 2. Эти же склады расположены в том же порядке на кольцевой

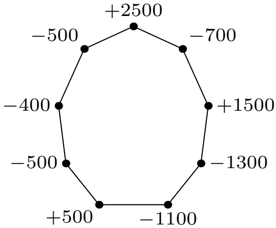


Рис. 8

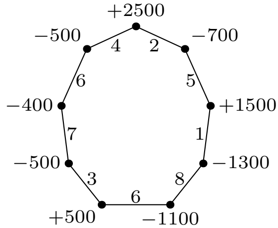


Рис. 9

железной дороге, но перегоны между станциями имеют разную длину (см. рис. 9). Составьте наиболее экономный план перевозок.

4-8. По рис. 10, *а* видно, что при изменении x от нуля до $x = 5$ функция $y = 2x^2 - 4x + 5$ сначала убывает (при $0 \leqslant x \leqslant 1$), затем возрастает. Таким образом, наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 4x + 5$ на участке а) есть ее значение при $x = 1$.

При изменении x от -5 до 0 функция $y = 2x^2 - 4x + 5$ все время убывает — рис. 10, *б*. Значит, наименьшее значение функции на участке б) есть ее значение при $x = 0$.

О т в е т. Наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 4x + 5$ на участке $[0; 5]$ равно 3, а на участке $[-5; 0]$ равно 5.

4-18. Задачу легко решить, если воспользоваться тем, что парабола $y = x^2 + 2x + 2$ — это парабола $y = x^2$, передвинутая параллельно осям координат.

5-2, е). Функция $y = x^2 - 2x^3$ не является ни четной, ни нечетной, и может показаться, что ее график не имеет ни центра, ни оси симметрии. Однако это не так — см. § 7, п. 4.

5-5. Нет, не имеет. Строгое доказательство этого факта не очень просто, и мы его здесь не приводим. Однако так как и ось Ox, и ось Oy являются асимптотами этой кривой, то осью симметрии могла бы быть только

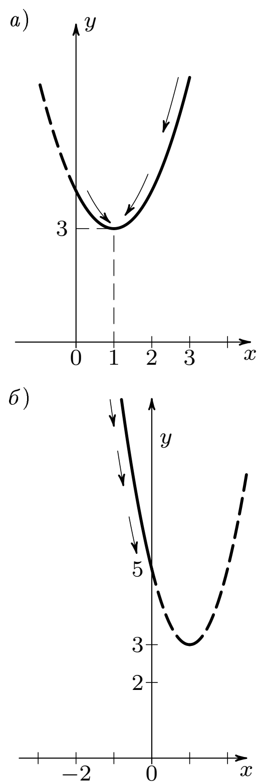


Рис. 10

прямая $y = x$. То, что эта прямая не является осью симметрии, легко проверяется.

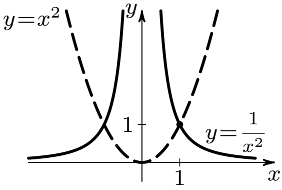


Рис. 11

5-10. Ответ см. на рис. 11.

6-15. Уравнение касательной $y = 3x - 1$.

6-16. Указание. Система

$$\begin{cases} y = x + a, \\ y = -x^2 + 1 \end{cases}$$

должна иметь два слившихся решения.

7-11. График многочлена четвертой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ имеет вертикальную ось симметрии, если этот многочлен биквадратный или становится биквадратным при замене x на $x + s$. Для того, чтобы такое s можно было подобрать, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: $b^3 = 4bc - 8d$.

7-13, 2 б). Центр симметрии графика $y = x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ находится в точке $(-1; -2)$.

9-1, з) и **9-1**, п). Ответы ищите среди графиков на с. 110—111.

9-3, 2). Возьмем числовой пример. Пусть корни числителя будут -5 и 0, а знаменателя $+2$ и $+4$. Тогда наша функция имеет вид $y = \dfrac{ax(x+5)}{(x-2)(x-4)}$.

Выберем какое-нибудь конкретное значение a, например, $a = 2$.

Функция $y = \dfrac{2x(x+5)}{(x-2)(x-4)}$ не определена при $x = 2$ и $x = 4$. При приближении x к этим значениям знаменатель уменьшается, приближаясь к нулю; значит, функция неограниченно растет по абсолютной величине — прямые $x = 2$ и $x = 4$ являются вертикальными асимптотами графика.

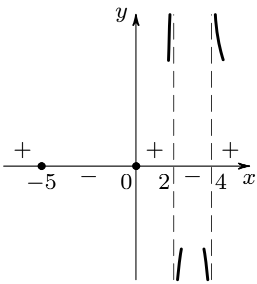


Рис. 12

Функция равна нулю при $x = 0$ и $x = -5$. Отметим на оси Ox две точки графика: $(0; 0)$ и $(-5; 0)$.

Четыре «особых» значения аргумента: $x = -5, 0, 2, 4$ делят ось Ox на пять участков. При переходе через границу любого участка функция меняет знак (обращаясь в нуль или «уходя в бесконечность») (рис. 12).

Осталось выяснить поведение функции, когда аргумент неограниченно растет по абсолютной величине. Попробуем вместо x подставлять большие числа (например, $x = 10000$, $x = 1000000$ и т. д.). Поскольку $2x^2$ будет гораздо больше, чем $10x$, а x^2 гораздо больше, чем $-6x+8$, дробь

$$\frac{2x(x+5)}{(x-2)(x-4)}=\frac{2x^2+10x}{x^2-6x+8}$$

примерно равна отношению старших членов числителя и знаменателя:

$$y=\frac{2x^2+10x}{x^2-6x+8}\approx\frac{2x^2}{x^2}=2,$$

причем тем ближе к 2, чем больше $|x|$. Значит, при удалении от начала координат график будет приближаться к горизонтальной прямой $y=2$.

Общий вид графика — на рис. 13. Во всех случаях, когда оба корня знаменателя больше корней числителя, график будет примерно такой.

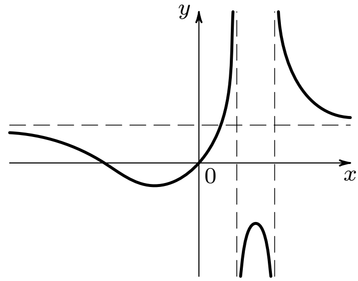


Рис. 13

9-6, е). Указание. Нарисуйте графики функций $y=\frac{|x+3|}{|x+2|}$ и $y=$ $=x^2-4$.

9-10. См. упражнение 8-2.

9-11, ж). См. п. 3 из § 8.

9-12. См. решение задачи 3-13, б). Ответ. 24 спички.

Замечание. В этой задаче наиболее «экономное» перекладывание можно осуществить несколькими способами.

9-16. Как это часто бывает в математике, задачу легче решить в общем виде, чем для заданной конкретной функции. Поэтому мы сначала решим задачу 2), а решения задач 1, а) и 1, б) получим как частные случаи.

Итак, пусть дана некоторая функция $f(x)$. Предположим, что задача решена, т. е. $f(x)$ представлена в виде суммы четной функции $g(x)$ и нечетной функции $h(x)$:

$$f(x)=g(x)+h(x). \tag{1}$$

Так как это равенство верно для всех значений x, то в него можно подставить $-x$ вместо x:

$$f(-x)=g(-x)+h(-x).$$

Функция $g(x)$ четная, а $h(x)$ нечетная, поэтому $g(-x)=g(x)$ и $h(-x)=-h(x)$. Пользуясь этим, получаем

$$f(-x)=g(x)-h(x). \tag{2}$$

Складывая (1) и (2), а затем вычитая одно из другого, найдем

$$f(x)+f(-x)=2g(x), \qquad f(x)-f(-x)=2h(x).$$

Отсюда находятся функции $g(x)$ и $h(x)$ и получается искомое разложение функции $f(x)$ на сумму четной и нечетной функций:

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}. \tag{3}$$

Заметим, что формальное доказательство полученного результата еще проще: напишите сразу разложение (3), проверьте, что оно выполняется тождественно для всех x и что первое слагаемое в правой части — четная функция, а второе — нечетная.

Решения задач 1, а) и 1, б) получаются непосредственно по формуле (3):

а) $\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{x^2+1}{x^4+x^2+1}-\dfrac{x}{x^4+x^2+1}$;

б) $\dfrac{1}{x^4-x}=\dfrac{x^2}{x^6-1}+\dfrac{1}{x^7-x}$.

З а м е ч а н и е. Если функция $y=f(x)$ не определена для некоторых значений x, то и функции $g(x)$ и $h(x)$ тоже будут определены не для всех значений x. При этом может оказаться, что для некоторых x функция $f(x)$ определена, а $g(x)$ и $h(x)$ не определены.

9-18, а). У к а з а н и е. Проведите прямую $y=x$ и найдите координаты точки M — точки пересечения этой прямой с графиком функции $y=3x^2$. Зная координаты точки M, легко определить единицы по осям.

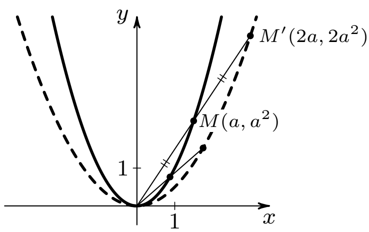


Рис. 14

9-19, а). При заданном подобном преобразовании расстояние каждой точки параболы от начала координат удваивается. Пусть $M(a;\, a^2)$ — некоторая точка параболы. Проведем из начала координат луч через точку M и отложим на нем отрезок OM', вдвое больший, чем OM (рис. 14). Точка M' будет иметь координаты $(2a;\, 2a^2)$. Проверим, лежит ли эта точка на параболе $y=\dfrac{1}{2}x^2$:

$$2a^2=\frac{1}{2}(2a)^2=\frac{1}{2}\cdot 4a^2=2a^2.$$

Итак, при заданном подобном преобразовании каждая точка $M(a;\, a^2)$ параболы $y=x^2$ превращается в точку $M'(2a;\, 2a^2)$, лежащую на параболе $y=\dfrac{1}{2}x^2$.

9-19, в). Фокус параболы $y = \dfrac{1}{2}x^2$ лежит в точке $(0;\, 1/2)$, а директрисой ее является прямая $y = -1/2$.

9-20. Пусть сначала $a > 0$ — рассматривается правая ветвь гиперболы. Расстояние r_2 от точки $M(a;\, 1/a)$ до фокуса $F_2(-\sqrt{2};\, -\sqrt{2})$ дается формулой: $r_2^2 = (a + \sqrt{2})^2 + (1/a + \sqrt{2})^2 = a^2 + (1/a)^2 + 2\sqrt{2}(a + 1/a) + 4 = (a^2 + (1/a)^2 + 2) + 2\sqrt{2}(a + 1/a) + 2$.

Заметим, что $a^2 + (1/a)^2 + 2 = (a + 1/a)^2$, и обозначим $a + 1/a = b$. Получим:

$$r_2^2 = \sqrt{b^2 + 2\sqrt{2} \cdot b + 2} = (b + \sqrt{2})^2, \quad \text{или} \quad r^2 = b + \sqrt{2}.$$

Аналогично для расстояния от точки M до $F_1(\sqrt{2};\, \sqrt{2})$ получим $r_1^2 = \sqrt{b^2 - 2\sqrt{2} \cdot b + 2} = (b - \sqrt{2})^2$, или $r_1 = b - \sqrt{2}$ (используется то, что $b = a + 1/a \geqslant 2 > \sqrt{2}$).

Таким образом, разность $r_1 - r_2 = -2\sqrt{2}$ — одна и та же для всех точек правой ветви. Для всех точек левой ветви в силу симметрии гиперболы получится, что $r_1 - r_2 = 2\sqrt{2}$.

Таким образом, мы доказали, что $|r_1 - r_2|$ — величина постоянная для всех точек гиперболы.

9-23, 2). Указание. Сдвиньте графики многочленов параллельно оси Ox так, чтобы они стали графиками некоторых биквадратных многочленов.

9-25. Для всех фигур ответ получается один и тот же: $S(h) = S_0 + Ph + \pi h^2$, где $S(h)$ — площадь полученной фигуры, S_0 — площадь исходной фигуры, P — периметр исходной фигуры и h — ширина добавленной «полосы».

Подумайте, верна ли эта формула для невыпуклых фигур.

Послесловие

Мы с Вами разобрали много разнообразных графиков и еще больше предложили Вам разобрать самостоятельно в задачах. Накопив опыт, мы можем теперь оглянуться и попробовать ответить на вопрос, что значит правильно нарисовать график функции.

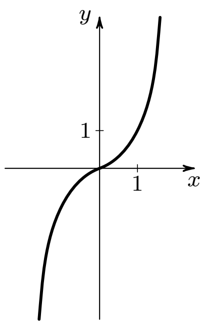


Рис. 1

Давайте вспомним, какова была наша предварительная точка зрения. Мы исходили из того, что главное назначение графика — отразить характер функции, наглядно изобразить ее главные, качественные особенности. С этой точки зрения график надо считать неправильным, если эти особенности в нем не отражены. Количественные несоответствия более допустимы.

Пусть, например, график функции $y = x^3$ построен по точкам примерно в таком виде, как на рис. 1. Можно ли считать этот график правильным? Конечно нет! Рисунок не отражает важное свойство функции $y = x^3$: при x, стремящемся к нулю, эта функция стремится к нулю быстрее любой линейной функции $y = kx$ (и даже быстрее любой функции $y = ax^2$!). Поэтому график функции $y = x^3$ — кубическая парабола — *касается* оси абсцисс, а не пересекает ее под некоторым углом. Показав на рисунке пересечение под ненулевым углом, мы совершаем принципиальную ошибку.

Другой пример. Функция $y = 2x^4 - x^2$ при x, близких к нулю, принимает отрицательные значения и имеет два минимума. Если строить график этой функции по точкам, возникает соблазн нарисовать его примерно в таком виде (рис. 2). Но этот график является грубо ошибочным. График на рис. 3 является правильным, хотя точных количественных сведений он не доставляет: чтобы яснее показать особенности функции, «ямки» сделаны более глубокими, чем на самом деле. Такая неточность допустима.

Видоизменим рассмотренную задачу: построим график функции $y = |2x^4 - x^2|$. Вы знаете, что этот график легко получить из графика $y = 2x^4 - x^2$ (см. рис. 4).

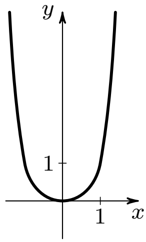


Рис. 2

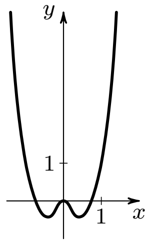


Рис. 3

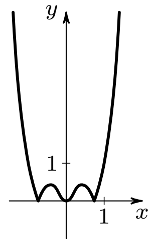


Рис. 4

Обратите внимание на то, что получившийся график в начале координат касается оси абсцисс, а при $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ образуются «уголки». Если эту качественную особенность функции не показать на ее графике, это будет существенной ошибкой.

В этой брошюре нам встречались только функции, определенные на всей числовой оси. Исключение составляли те рациональные функции, у которых знаменатель в некоторых точках обращался в нуль. Мы подробно обсуждали, как правильно отразить поведение функции вблизи этих исключительных точек (см., например, с. 19—21), и не будем повторять это обсуждение. Подчеркнем только еще раз, что рисунок, на котором неправильно отражено поведение рациональной функции около нуля ее знаменателя, не может служить графиком этой функции.

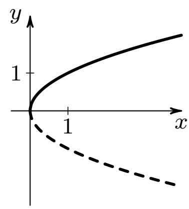


Рис. 5

Простейшая функция, которая определена только на половине числовой оси, задается формулой $y = \sqrt{x}$. Нетрудно сообразить, что ее графиком будет служить «половинка» параболы (рис. 5). Если кто-либо будет строить этот график по точкам и нарисует что-то вроде рис. 6, это будет существенной ошибкой: при $x = 0$ график функции $y = \sqrt{x}$ касается оси Oy. Эта важная особенность функции должна быть отражена на графике!

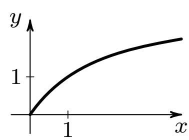


Рис. 6

Мы ограничимся здесь этими примерами. Надеемся, что прочитав книгу, Вы не только узнали нечто полезное и интересное, но и получили удовольствие от разнообразия и красоты графиков.

Оглавление