Л. А. ВАЙНШТЕЙН
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Л. А. Вайнштейн

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

"СОВЕТСКОЕ РАДИО"

Л. А. ВАЙНШТЕЙН

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „СОВЕТСКОЕ РАДИО
МОСКВА — 1957

ЭБ "Научное наследие России"

Л. А. ВАЙНШТЕЙН

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Книга представляет собой пособие по электродинамике сверхвысоких частот, предназначенное для студентов — радиофизиков и радиотехников, а также для аспирантов и инженеров соответствующих специальностей. Содержащийся в книге дополнительный материал, посвященный более сложным теоретическим вопросам, предназначен для специалистов в данной области.

ЭБ "Научное наследие России"

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние десятилетия электродинамика все в большей степени становится теоретическим инструментом радиоинженера. Действительно, в диапазоне сантиметровых волн (и в примыкающих радиодиапазонах) совершенно недостаточны привычные для радиотехники прошлого „инженерные" теории—теория цепей и теория длинных линий, и необходимо использовать законы электромагнитного поля в их полной формулировке. В результате растущего значения радиотехники сантиметровых волн, а также в силу трудности и новизны возникающих в ней теоретических проблем, появилось большое (и все увеличивающееся с каждым днем) число работ в данной области, принадлежащих не только радиоинженерам, но также математикам и физикам.

Данная книга является введением в прикладную теорию электромагнитного поля. Она посвящена электромагнитным волнам в радиотехнических устройствах различного типа, относящихся преимущественно к сверхвысоким частотам. При этом, как подчеркивает название книги, стационарные (статические) и квазистационарные электромагнитные поля в ней не рассматриваются совсем. Основные положения макроскопической электродинамики—уравнения Максвелла и важнейшие следствия из них — мы считаем известными; в § 1 дается их краткая сводка, и затем мы переходим к изучению многообразных свойств электромагнитных волн. Поэтому данную книгу можно считать продолжением общего курса электродинамики, изложенного, например, в „Основах теории электричества" И. Е. Тамма. Для большей систематичности изложения в данной книге допущены лишь небольшие повторения некоторых основных вопросов. Так, например, в теории плоских волн (гл. II) и в теории скин-эффекта (гл. IV)

ЭБ "Научное наследие России"

приходится отчасти дублировать общий курс электродинамики. Однако в этих главах соответствующие вопросы рассмотрены более полно, чем это обычно делается в общем курсе.

О содержании книги читатель может судить по приложенному к ней подробному оглавлению. Следует отметить, что книга возникла на основе лекций, прочитанных автором по курсу „Электродинамика сверхвысоких частот" или „Специальные главы электродинамики" для студентов — радиофизиков и радиотехников, а также для аспирантов соответствующих специальностей.

При подготовке книги к печати материал лекций был переработан и значительно расширен. В частности, были написаны две главы (XVI и XVII) об объемных резонаторах. Наряду с этим добавлены параграфы и главы (X и XIII), посвященные более тонким и трудным вопросам. Такие параграфы, выпадающие из общей нити изложения, отмечены звездочкой; при первом чтении их можно опускать, равно как и мелкий шрифт в „обычных" параграфах. Они могут представить интерес для специалистов; многие результаты здесь являются новыми, по крайней мере, в методическом отношении. Выбор дополнительных вопросов в значительной степени диктовался научными интересами автора.

Основной текст книги на дополнительные параграфы не опирается. Он предназначен для читателя, впервые изучающего электродинамику сверхвысоких частот.

При анализе электромагнитных волн в различных системах большое внимание уделяется физической стороне дела. Мы стараемся применять, как правило, наиболее простые математические методы, позволяющие, однако, вскрыть физическую сущность явлений и вместе с тем обладающие достаточной общностью. Требования, предъявляемые к математической подготовке читателя, в основном те же, что и при изучении общей электродинамики.

В данной книге применяется абсолютная система единиц CGS (называемая также симметричной или гауссовой системой), с которой читатель должен быть знаком по общему курсу электродинамики. В последнее время ряд авторов усиленно внедряет в теорию электромагнитного поля так называемую практическую систему единиц Джорджи, или рационализированную систему единиц MKS, однако практичность этой системы единиц совершенно иллюзорна. Несмотря на то, что исходные электрические

"Научное наследие России"

единицы — ампер, вольт и ом — выбраны в ней из практических соображений, большинство производных единиц оставляет желать лучшего. Действительно, на практике предпочитают выражать индукцию и напряженность магнитного поля в гауссах и эрстедах, а электрические и магнитные свойства вещества характеризовать безразмерными проницаемостями ε и μ — так же, как в абсолютной системе единиц. Некоторые единицы, например кулон и фарада, оказываются в „практической" системе единиц несоразмерно большими, так что по существу единицей емкости является микромикрофарада. Параметры, „характеризующие" пустоту в практической системе, — проницаемости ε_0 и μ_0 и волновое сопротивление $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$ *ом* — не имеют никакого физического смысла.

Единицы измерения электрических и магнитных величин, удобные для одного класса электромагнитных явлений, становятся неудобными, когда мы переходим к другому классу явлений. Так, например, абсолютные единицы весьма удобны для электростатических полей и зарядов, поскольку они сами определены с помощью законов электростатики; при переходе к постоянным или переменным токам эти единицы становятся малопригодными с практической точки зрения. Наоборот, ампер, вольт и ом, определенные посредством законов электрического тока, приводят к единицам, неудобным в электростатике.

Таким образом, в силу многогранности электромагнитных явлений не существует системы единиц, которая была бы практически удобной во всех случаях. Поэтому при теоретическом анализе разумно пользоваться абсолютной системой, в которой основные законы электродинамики формулируются наиболее простым и естественным образом, и лишь в окончательных расчетных соотношениях переходить от одних единиц к другим. Так мы и будем поступать на протяжении всей книги.

Распространение каждой системы единиц фактически определяется наличием тех или иных пособий. Автор надеется, что данная книга явится добавочным аргументом в пользу применения абсолютной системы в „технической" электродинамике.

ЭБ "Научное наследие России"

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 1. Основные законы электродинамики

Согласно основным положениям макроскопической электродинамики электромагнитное *поле* в любой среде в каждый момент времени определяется четырьмя величинами: векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, характеризующими электрическое поле, и векторами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$, характеризующими магнитное поле. В уравнениях электромагнитного поля, помимо этих четырех векторов, фигурируют еще две величины: плотность заряда ρ и плотность тока $\mathbf{j}$. Эти величины характеризуют *источники* поля—заряды и токи, наличие которых приводит к возбуждению поля в окружающем пространстве. Уточним: в макроскопической электродинамике ρ есть плотность свободного электрического заряда, а $\mathbf{j}$—плотность электрического тока (тока проводимости). При отсутствии макроскопических перемещений вещества плотность тока и плотность заряда связаны уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \tag{1.01}$$

выражающим тот факт, что ток проводимости обусловлен движением свободных зарядов, подчиняющихся закону сохранения электричества. Конвекционные токи, обусловленные, например, движением электронов в электровакуумных приборах, мы в дальнейшем не рассматриваем; если они заданы, то их нетрудно учесть (как сторонние токи, ср. § 3).

Векторы электромагнитного поля, а также величины $\mathbf{j}$ и ρ, зависят от трех пространственных координат (например от декартовых координат x, y, z) и времени t. Они

ЭБ "Научное наследие России"

связаны между собой системой уравнений Максвелла, которую мы запишем в следующем виде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{1.02}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \tag{1.03}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{1.04}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{1.05}$$

При этом здесь и далее мы используем абсолютную систему единиц CGS (так называемая симметричная или гауссова система), где c — скорость света в пустоте, равная $2{,}998 \cdot 10^{10}$ *см/сек* $\approx 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*.

Напомним, что уравнение (1.02) называется обычно первым, а уравнение (1.04) — вторым уравнением Максвелла. Эти уравнения, равно как и уравнения (1.03) и (1.04), являются обобщением опытных данных. Так, уравнение (1.04) есть дифференциальная формулировка закона электромагнитной индукции Фарадея, уравнение (1.02) — дифференциальная формулировка „закона полного тока" (закона, связывающего циркуляцию магнитного поля по контуру и ток, охватываемый этим контуром) и гипотезы Максвелла о токе смещения.

Уравнения (1.02) и (1.03) мы записали так, чтобы в их правых частях стояли величины $\mathbf{j}$ и ρ, характеризующие источники поля — токи и заряды, а в левых частях — векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$, характеризующие электромагнитное поле. Тогда физический смысл уравнений (1.02) и (1.03) выступает более четко: эти уравнения показывают, как электромагнитное поле возбуждается своими источниками.

В уравнениях (1.04) и (1.05) фигурируют только векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а источники поля отсутствуют.

Записанная система уравнений пригодна для электромагнитных полей в любых средах. Однако этих уравнений недостаточно для решения конкретных задач, ибо число уравнений оказывается меньше, чем число неизвестных. В самом деле, если, например, считать источники $\mathbf{j}$ и ρ заданными, то для определения четырех векторных величин $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ необходимо иметь четыре векторных уравнения, в то время как уравнения (1.03) и (1.05) суть скалярные уравнения.

Недостаточность этой системы уравнений физически объясняется именно ее универсальностью — она применима

ЭБ "Научное наследие России"

к электромагнитным процессам в любых средах, между тем как параметры, характеризующие среду, в ней отсутствуют. Поэтому при решении конкретных задач эти уравнения необходимо дополнять системой материальных уравнений, в которых фиксируется влияние среды на протекающие в ней электромагнитные явления.

Как известно, простейшие материальные уравнения имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \tag{1.06}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \tag{1.07}$$

Они охватывают электромагнитные свойства достаточно большого числа сред; однако ряд свойств реальных веществ этими уравнениями, как известно, не учитывается.

Хотя с введением материальных уравнений мы получаем систему уравнений, математически полную и позволяющую решать до конца конкретные задачи, в физическом отношении эта система уравнений нуждается в некотором дополнении, а именно необходимо указать, как измерять на опыте величины, характеризующие электромагнитное поле: только после этого данные величины приобретают физический смысл и выводы теории станут доступными опытной проверке.

Так как измерение любого поля сводится, в сущности, к извлечению некоторой энергии из поля, то достаточно указать, как связана энергия поля с величинами, характеризующими поле. Поэтому к числу основных положений макроскопической теории поля относится следующее утверждение. Электромагнитная энергия распределена в пространстве, занятом полем, с некоторой объемной плотностью таким образом, что электромагнитная энергия, содержащаяся в объеме V, выражается в виде объемного интеграла

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, dV. \tag{1.08}$$

Эта энергия может изменяться во времени за счет двух процессов. Во-первых, она может внутри данного объема V превращаться в другие формы энергии неэлектромагнитного характера (внутренняя энергия тел, называемая часто «тепловой» энергией, химическая энергия и т. д.). Во-вторых, эта энергия, не изменяя своего электромагнитного характера, может вытекать из данного объема (или втекать в него) через поверхность S, ограничивающую

ЭБ "Научное наследие России"

данный объем. Энергия, превращающаяся в единицу времени из электромагнитной формы в другие виды энергии, называется мощностью, отдаваемой полем, и будет обозначаться через P. Энергию, вытекающую в единицу времени из объема через его поверхность, называют потоком энергии или же мощностью излучения; мы ее будем обозначать через Σ. К числу основных положений электродинамики принадлежат следующие выражения для отдаваемой мощности P и мощности излучения Σ:

$$P = \int_V \mathbf{j}\mathbf{E}\,dV \tag{1.09}$$

$$\Sigma = \frac{c}{4\pi} \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}]\,\mathbf{n}\,dS, \tag{1.10}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали (рис. 1).

Разумеется, величины P и Σ могут быть как положительными, так и отрицательными. Отрицательность P означает, что в данном объеме по преимуществу идет превращение других видов энергии в электромагнитную энергию, отрицательность Σ означает, что в данный объем поступает избыточная энергия со стороны смежных участков пространства.

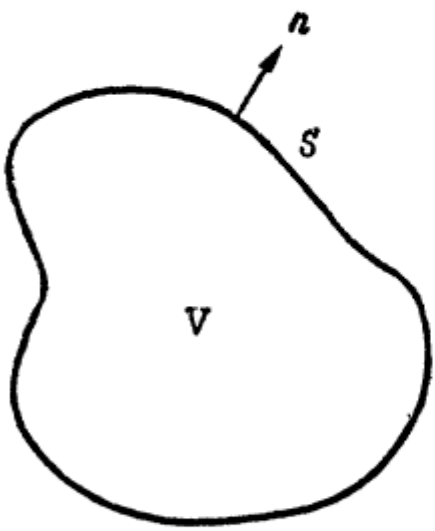


Рис. 1. Объем V, поверхность S и нормаль $\mathbf{n}$.

Заметим, что применимость выражений (1.08) и (1.09) для энергии поля и отдаваемой мощности тесно связана с применимостью материальных уравнений (1.06). Если среды, заполняющие данный объем, обладают более сложными электромагнитными свойствами, то выражения (1.08) и (1.09) становятся, вообще говоря, непригодными. Однако выражение (1.10) для потока энергии справедливо во всех случаях.

Как известно, три энергетических величины W, P и Σ связаны между собой соотношением Умова—Пойнтинга

$$\frac{dW}{dt} + P + \Sigma = 0, \tag{1.11}$$

которое дает формулировку закона сохранения энергии для электромагнитного поля.

ЭБ "Научное наследие России"

Энергетические формулы (1.08—1.11) можно переписать в несколько ином виде. Формула (1.08) показывает, что электромагнитная энергия распределена в пространстве с объемной плотностью

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 + \frac{\mu}{8\pi} H^2, \tag{1.12}$$

причем эта плотность является суммой плотности электрической энергии $w_э$ и плотности магнитной энергии $w_м$:

$$w = w_э + w_м;\ w_э = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 \text{ и } w_м = \frac{\mu}{8\pi} H^2. \tag{1.13}$$

Объемная плотность отдаваемой мощности (т. е. мощность, отдаваемая на единицу объема) равна

$$p = \mathbf{jE}. \tag{1.14}$$

Интегральные величины W и P связаны с дифференциальными величинами w и p формулами

$$W = \int_V w dV;\ P = \int_V p dV. \tag{1.15}$$

Наконец, входящий в выражение (1.10) вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] \tag{1.16}$$

называется вектором Умова — Пойнтинга. Этот вектор связан с потоком энергии из данного объема формулой

$$\Sigma = \oint_S S_n dS, \tag{1.17}$$

причем не следует смешивать обозначение поверхности S и ее элемента dS с символами $\mathbf{S}$ и S_n, относящимися к вектору Умова — Пойнтинга. Согласно формуле (1.17) величину $S_n dS$ можно интерпретировать как электромагнитную энергию, проходящую в единицу времени через площадку dS, так что вектор $\mathbf{S}$ является *плотностью потока энергии*. Правильность этой интерпретации доказывается, например, в книге И. Е. Тамма („Основы теории электричества“, стр. 502 — 506). Поэтому не только интеграл (1.17) имеет четкий физический смысл, но и сам вектор **S**.

ЭБ "Научное наследие России"

Пользуясь дифференциальными величинами w, p и $\mathbf{S}$, мы можем переписать закон сохранения энергии (1.11) следующим образом:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + p + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \qquad (1.18)$$

При написании материальных уравнений (1.06) и (1.07) предполагаем, что каждое вещество характеризуется тремя материальными константами ε, μ и σ. Чтобы подчеркнуть постоянство величин ε и μ, фигурирующих в уравнениях (1.06), и отличить их от комплексных проницаемостей, которые будут введены нами дальше, будем обозначать ε и μ в уравнениях (1.06) через ε_0 и μ_0 соответственно.

В заключение дадим сводку основных формул макроскопической теории электромагнитного поля

$$\text{(II)}\quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad \text{(I)}$$

$$\text{(IIa)}\quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad \text{(Ia)}$$

$$\text{(IVa)}\quad w = \frac{\varepsilon_0}{8\pi} E^2 + \frac{\mu_0}{8\pi} H^2 \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{(IIIa)}$$

$$\text{(IVb)}\quad p = \mathbf{jE} \qquad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{(IIIb)}$$

$$\text{(IVc)}\quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \qquad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{(IIIc)}$$

§ 2. Уравнения электромагнитного поля в комплексной форме

При исследовании электромагнитных колебаний и волн большое значение имеют электромагнитные поля, изменяющиеся во времени по синусоидальному закону, т. е. колеблющиеся с вполне определенной частотой. Такие электромагнитные процессы часто называют монохроматическими или гармоническими. При математическом исследовании монохроматических процессов, подчиняющихся линейным уравнениям, целесообразно ввести комплексные обозначения. Эти обозначения, как известно, используются и при анализе других вопросов, например в теории переменных токов. Применимость комплексных обозначений тесно связана с линейностью всех уравнений, которым подчиняются физические величины данной задачи: так, например, известно, что если цепь переменного тока содержит нелинейный элемент (например, катушку с железным сердечником), то комплексных обозначений в этом случае применять нельзя.

Сами уравнения Максвелла (I), (II), (Ia) и (IIa) (см. сводку в конце § 1) линейны. Поэтому при линейном характере материальных уравнений, в частности при справедливости материальных уравнений (III), можно пользоваться комплексными обозначениями.

Суть комплексных обозначений заключается в том, что, например, векторам напряженности электрического и магнитного полей $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ приводятся в соответствие комплексные векторные амплитуды, которые мы будем обозначать через $\mathbf{E}(\omega)$ и $\mathbf{H}(\omega)$. Связь между физическими величинами и их комплексными амплитудами дается соотношениями

$$\mathbf{E}(t)=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}(\omega)\,e^{-i\omega t}\right\};\quad \mathbf{H}(t)=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}(\omega)\,e^{-i\omega t}\right\}, \tag{2.01}$$

где Re — вещественная часть комплексного вектора, стоящего в фигурной скобке, ω — круговая частота исследуемого монохроматического процесса, связанная с обычной частотой f и периодом колебания T формулой

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}. \tag{2.02}$$

Аналогичным образом вводятся комплексные амплитуды для всех физических величин, входящих в уравнения электродинамики и колеблющихся с частотой ω.

Подставляя выражения (2.01) в уравнения Максвелла (I) и (II) и пользуясь формулами дифференцирования

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(t)&=\mathrm{Re}\left\{\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\omega)\,e^{-i\omega t}\right\},\\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(t)&=\mathrm{Re}\left\{-i\omega\,\mathbf{E}(\omega)\,e^{-i\omega t}\right\},\end{aligned} \tag{2.03}$$

мы получаем следующие уравнения для комплексных амплитуд

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left\{\left[\mathrm{rot}\,\mathbf{H}(\omega)+ik\,\mathbf{D}(\omega)\right]e^{-i\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}(\omega)\,e^{-i\omega t}\right\},\\ &\mathrm{Re}\left\{\left[\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\omega)-ik\,\mathbf{B}(\omega)\right]e^{-i\omega t}\right\}=0,\end{aligned} \tag{2.04}$$

где для сокращения через k обозначена величина

$$k=\frac{\omega}{c}, \tag{2.05}$$

физический смысл которой рассмотрим позже. Уравнения (2.04) могут удовлетворяться при всех значениях t, если комплексные амплитуды удовлетворяют уравнениям

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}-ik\mathbf{B}=0;\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H}+ik\,\mathbf{D}=\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}. \tag{2.06}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Формальная связь комплексных уравнений (2.06) с исходными уравнениями (I) и (II) очень проста: для получения комплексных уравнений нужно заменить оператор дифференцирования по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ оператором умножения $-i\omega$, или символически

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega. \tag{2.07}$$

Пользуясь материальными уравнениями (III), преобразуем уравнения (2.06) к виду

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mu_0 \mathbf{H}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\varepsilon \mathbf{E}, \tag{2.08}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — комплексные амплитуды, а ε — так называемая комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{2.09}$$

Эта комплексная диэлектрическая проницаемость имеет вещественную часть — обычную диэлектрическую постоянную ε_0 данного вещества, входящую в материальное уравнение (IIIа), а мнимая ее часть пропорциональна проводимости данного вещества σ и обратно пропорциональна частоте электромагнитных колебаний.

Таким образом мы пришли к комплексным уравнениям для монохроматических электромагнитных полей, в которых фигурирует комплексная диэлектрическая проницаемость ε. К уравнениям вида (2.08) можно прийти, исходя из более общих предположений об электрических свойствах среды. В частности, пусть диэлектрическая проницаемость, являющаяся коэффициентом пропорциональности в уравнении

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_1(\omega)\mathbf{E}(\omega), \tag{2.10}$$

связывающем комплексные амплитуды $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, зависит от частоты, а токи проводимости в данной среде отсутствуют ($\sigma = 0$, $\mathbf{j} = 0$). В этом случае мы естественным образом приходим к тем же уравнениям (2.08), но комплексная диэлектрическая проницаемость имеет другое физическое происхождение. Если величина $\varepsilon_1(\omega)$ при данной частоте ω комплексна

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + i\varepsilon_1'' = |\varepsilon_1| e^{i\delta_1}, \tag{2.11}$$

то угол δ_1 определяется не проводимостью вещества, как в случае формулы (2.09), а запаздыванием по фазе век-

Электронное наследие России

тора $\mathbf{D}(t)$ относительно вектора $\mathbf{E}(t)$. Это запаздывание часто наблюдается в диэлектриках при достаточно высоких частотах.

Если диэлектрик обладает также проводимостью σ (которая может зависеть от частоты), то его комплексная диэлектрическая проницаемость определяется формулой

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{2.12}$$

В общем случае мы записываем комплексную диэлектрическую проницаемость вещества в виде

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = |\varepsilon| e^{i\delta}. \tag{2.13}$$

Она позволяет учесть зависимость диэлектрических свойств вещества от частоты, т. е. его дисперсию. Одновременно учитывается явление запаздывания вектора $\mathbf{D}$ относительно вектора $\mathbf{E}$ в высокочастотных электрических полях (так называемый диэлектрический гистерезис), а также зависимость проводимости вещества от частоты.

Подводя итоги сказанному, мы можем утверждать, что комплексная диэлектрическая проницаемость, входящая в комплексные уравнения поля и записываемая нами в виде (2.13), полностью характеризует электрические свойства вещества при данной частоте. Мнимая часть комплексной проницаемости ε может быть обусловлена как токами проводимости, так и явлением высокочастотного диэлектрического гистерезиса. С чисто макроскопической точки зрения эти два фактора неотличимы друг от друга; в частности, они оба приводят к выделению тепла в веществе (см. § 9).

По аналогии с комплексной диэлектрической проницаемостью вводится комплексная магнитная проницаемость, зависящая в общем случае от частоты и связывающая между собой комплексные амплитуды векторов магнитного поля

$$\mathbf{B}(\omega) = \mu(\omega)\mathbf{H}(\omega). \tag{2.14}$$

Эта величина в общем случае является комплексной

$$\mu = \mu' + i\mu'' = |\mu| e^{i\Delta}, \tag{2.15}$$

причем угол Δ характеризует отставание по фазе вектора $\mathbf{B}$ от вектора $\mathbf{H}$. Материальное уравнение (2.14) соответствует более широкому кругу веществ и электромагнитных про-

ЭБ "Научное наследие России"

цессов, чем материальное уравнение (IIIb). В частности, уравнение (2.14) учитывает наличие магнитных потерь в различных магнетиках и зависимость магнитных свойств от частоты (ср. § 9).

При выводе комплексных уравнений электромагнитного поля, применяя вместо материальных уравнений (III) более общие соотношения этого параграфа, мы получаем уравнения в окончательном виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mu \mathbf{H}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\varepsilon \mathbf{E}. \tag{2.16}$$

Чтобы использовать эти уравнения для расчета электромагнитных процессов в данном веществе, необходимо знать его комплексную диэлектрическую проницаемость ε и его комплексную магнитную проницаемость μ на данной частоте. Отметим также, что эти уравнения применимы лишь при отсутствии нелинейных эффектов, как, например, эффектов насыщения и т. п. В ряде случаев это означает, что исследуемые электромагнитные поля не должны быть слишком интенсивными.

Уравнения (2.16) являются основным математическим аппаратом для расчетов монохроматических электромагнитных процессов. Заметим, что, преобразовывая уравнения (Ia) и (IIa) в комплексную форму, мы не получаем для монохроматических процессов каких-либо новых уравнений, а получаем лишь соотношения, являющиеся тривиальным следствием уравнений (2.16). Проверку этого утверждения мы предоставляем читателю.

В теорию электромагнитного поля две комплексные проницаемости ε и μ были введены в 1913 г. В. К. Аркадьевым. Уравнения (2.16) приходится применять в полном объеме, т. е. с двумя комплексными параметрами ε и μ, только для веществ с сильно выраженными магнитными свойствами: для ферромагнитных металлов и сплавов, ферритов, искусственных магнитодиэлектриков и т. д. У парамагнитных и диамагнитных веществ магнитные свойства, как правило, выражены весьма слабо, обычно для них можно считать $\mu = 1$, как для пустоты. Поскольку введение комплексной магнитной проницаемости μ не усложняет уравнений поля и придает им симметрию, в дальнейшем мы будем рассматривать электромагнитные процессы в средах с двумя комплексными параметрами ε и μ, полагая, если нужно, при анализе конкретных сред $\mu = 1$.

Заметим, что комплексные амплитуды физических вели-

ЭБ "Научное наследие России"

чин часто вводятся не с помощью соотношений типа (2.01), а с помощью формул

$$\mathbf{E}(t)=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}(\omega)\,e^{i\omega t}\right\};\quad \mathbf{H}(t)=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}(\omega)\,e^{i\omega t}\right\}. \quad (2.17)$$

Тогда для комплексных амплитуд получаются уравнения, отличающиеся от уравнений (2.16) тем, что в них всюду (в том числе и в выражениях для комплексных проницаемостей ε и μ) мнимая единица i заменена на $-i$. „Временной" множитель $e^{i\omega t}$ [вместо множителя $e^{-i\omega t}$, введенного нами ранее в формулах (2.01)] вводится обычно в теории переменных токов. Однако для анализа электромагнитных волн введение комплексных амплитуд по формулам (2.01) удобнее, поэтому мы ими и будем пользоваться в дальнейшем.

В заключение остановимся на немонохроматических процессах. Для их теоретической трактовки можно, разумеется, пользоваться общими уравнениями электродинамики, записанными в § 1. Однако в этом случае мы вынуждены ограничиваться материальными уравнениями (III), менее общими, чем материальные уравнения этого параграфа. Поэтому в случае, когда комплексные уравнения (2.16) применимы в достаточно широком диапазоне частот, для расчета электромагнитных процессов с произвольной зависимостью от времени можно использовать спектральное разложение, например разложение поля в интеграл Фурье

$$\mathbf{E}(t)=\mathrm{Re}\int_0^\infty \mathbf{E}(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega;\quad \mathbf{H}(t)=\mathrm{Re}\int_0^\infty \mathbf{H}(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega. \quad (2.18)$$

В этом случае, как легко показать, для комплексных амплитуд $\mathbf{E}(\omega)$ и $\mathbf{H}(\omega)$ получаются те же комплексные уравнения (2.16), что и раньше, только связь этих комплексных амплитуд с физическими полями усложняется: вместо формул (2.01) нужно применять формулы (2.18). Физический смысл формул (2.18) заключается в том, что любой электромагнитный процесс представляется в виде суперпозиции монохроматических процессов.

Дадим сводку основных уравнений электромагнитного поля в комплексной форме:

$$\text{(II)}\qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E}=ik\mu\mathbf{H} \qquad\qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{H}=-ik\varepsilon\mathbf{E} \qquad \text{(I)}$$

$$\mu=\mu'+i\mu''=|\mu|\,e^{i\Delta} \qquad\qquad \varepsilon=\varepsilon'+i\varepsilon''=|\varepsilon|\,e^{i\delta}$$

§ 3. Сторонние токи

В § 1 мы говорили о том, что токи и заряды являются источниками электромагнитного поля. Это утверждение нуждается, однако, в некотором уточнении, поскольку электрические токи не только возбуждают поля, но и согласно материальному уравнению (IIIc) сами возникают под действием поля.

Рассмотрим случай, когда передающая антенна излучает электромагнитные волны в пространство, частично или полностью занятое каким-либо проводящим веществом; например, элементарный диполь (вибратор Герца) находится над землей, являющейся, вообще говоря, хорошим проводником. В такой системе имеются токи двух родов: ток в вибраторе, являющийся *первичным* источником электромагнитного поля, и токи в земле (или ином проводящем веществе). Эти последние возбуждают свое электромагнитное поле, что находит выражение в том, что результирующее электромагнитное поле зависит от проводимости вещества. Однако эти токи являются лишь *вторичными* источниками поля, возбуждаемыми самим полем согласно дифференциальному закону Ома (IIIc).

Таким образом, в § 1 и § 2 мы принимали во внимание только вторичные токи с плотностью $\sigma\mathbf{E}$, поэтому уравнения поля, полученные в этих параграфах, не охватывают самого явления „первичного возбуждения" электромагнитного поля и позволяют лишь исследовать поведение поля за границами области, где находятся его источники.

Для того, чтобы учесть первичные источники в уравнениях электромагнитного поля, проще всего обобщить материальное уравнение (IIIc) следующим образом

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}^e, \tag{3.01}$$

вводя наряду со вторичными токами, имеющими плотность $\sigma\mathbf{E}$, также первичные или *сторонние* электрические токи с плотностью $\mathbf{j}^e$, которые считаются заданными. Последние токи возбуждают поля, но сами не порождаются рассматриваемыми электромагнитными полями, в этом смысле они являются „сторонними" по отношению к полю. Полная плотность тока является векторной суммой этих двух плотностей.

Часто дифференциальный закон Ома обобщается несколько иным образом, а именно, вместо (3.01) пишут

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^e), \tag{3.02}$$

Электронное наследие России

обозначая через $\mathbf{E}^e$ напряженность стороннего электрического поля. При этом возможны два случая: $\mathbf{E}^e$ есть напряженность поля сторонних электродвижущих сил (сил неэлектромагнитного происхождения — химических, диффузионных и т. д.), но при исследовании динамических процессов чаще всего встречается случай, когда $\mathbf{E}^e$ есть просто напряженность поля от части системы, не рассматриваемой нами детально.

Соотношения (3.01) и (3.02) становятся эквивалентными, если считать

$$\mathbf{j}^e = \sigma \mathbf{E}^e. \tag{3.03}$$

В одних случаях удобнее вводить в качестве первичных источников сторонние токи, в других — сторонние электродвижущие силы. Далее мы будем в основном пользоваться сторонними токами, переходя, если нужно, к сторонним электродвижущим силам с помощью формулы (3.03).

Пользуясь соотношением (3.01) и проводя те же рассуждения, что и в § 2, мы приходим к комплексным уравнениям поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mu \mathbf{H}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^e, \tag{3.04}$$

в которых уже фигурирует плотность стороннего тока $\mathbf{j}^e$.

Заметим, что для одной и той же физической системы величины $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{E}^e$ вводятся по-разному, в зависимости от постановки задачи. Если мы рассматриваем распространение радиоволн, излученных данной антенной, то, как было указано выше, токи в антенне можно считать заданными и обозначать их плотность через $\mathbf{j}^e$. Однако в реальных условиях передача энергии от генератора к антенне происходит по линии. Для анализа прохождения энергии по линии достаточно заменить генератор некоторой сторонней электродвижущей силой, а антенну — некоторой нагрузкой. Таким образом, при теоретическом анализе одной и той же реальной системы сторонние токи или электродвижущие силы можно помещать в различные места — в зависимости от того, какие свойства и какие части системы нужно исследовать. Сторонние источники как раз позволяют учесть, что, кроме выделенной части системы, существуют и другие, не рассматриваемые нами детально, но влияющие на выделенную часть. Если такого выделения не производить и все рассматривать совместно,

ЭБ "Научное наследие России"

то всегда будут получаться сложные задачи, не поддающиеся решению.

При рассмотрении возбуждения электромагнитных полей различными источниками часто вводят, наряду со сторонними электрическими токами, также и сторонние магнитные токи, плотность которых мы будем обозначать через $\mathbf{j}^m$. Величина $\mathbf{j}^m$ вводится в уравнения поля так, чтобы они стали симметричными относительно электрических и магнитных величин. В этом случае комплексные уравнения электромагнитного поля приобретают вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mu\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m; \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e. \quad (3.05)$$

Нужно иметь в виду, что магнитных токов и магнитных зарядов в действительности не существует. Это находит, в частности, свое выражение в том, что правые части уравнений Максвелла (II) и (IIa) равны нулю (см. конец § 1). Магнитные токи введены в уравнения поля из формальных соображений — для облегчения математической трактовки ряда сложных источников поля. Из тех же соображений, в сущности, вводятся магнитные заряды при современном изложении теории магнитостатического поля.

Напомним, что, как доказывается в теории стационарного магнитного поля, небольшой замкнутый контур тока создает такое же магнитное поле, как и магнитный диполь, состоящий из двух близко расположенных зарядов, противоположных по знаку. Эта аналогия распространяется и на переменные токи и поля, и, таким образом, „реализуется“ поле колеблющегося магнитного диполя с переменными магнитными зарядами и соединяющим их „магнитным током“. Рассматривать же магнитный диполь проще, чем контур тока.

В данном примере вместо реально существующего распределения $\mathbf{j}^e$ введено распределение $\mathbf{j}^m$, так как с магнитными токами оперировать удобнее. Далее мы приведем другие примеры, показывающие целесообразность применения магнитных токов (см. § 78).

Заметим, что в теории монохроматических электромагнитных полей заряды обычно не рассматриваются, поскольку в силу соотношения (2.07) и уравнения непрерывности (1.01) они однозначно определяются токами

$$\rho = \frac{1}{i\omega}\operatorname{div}\mathbf{j}. \quad (3.06)$$

Научное наследие России

Такое же соотношение имеет место для сторонних токов и зарядов—как электрических, так и магнитных

$$\rho^e = \frac{1}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{j}^e; \quad \rho^m = \frac{1}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{j}^m. \tag{3.07}$$

Если образовать дивергенции от сбеих частей уравнений (3.05), использовать тождество $\operatorname{div}\operatorname{rot} \equiv 0$ и формулы (3.07), то мы получим уравнения

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 4\pi\rho^m; \quad \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho^e, \tag{3.08}$$

аналогичные уравнениям (Ia) и (IIa) в § 1. Таким образом, в теории монохроматических полей как заряды, так и уравнения поля, в которые они входят, не имеют самостоятельного значения и поэтому обычно не рассматриваются.

В заключение перепишем основные комплексные уравнения поля со сторонними токами

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mu \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^m; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^e. \qquad \text{(I)}$$

§ 4. Граничные условия

Параметры ε и μ, фигурирующие в уравнениях электромагнитного поля, могут любым образом изменяться в пространстве. Это изменение может происходить не только непрерывно, но и скачкообразно, например на некоторой поверхности S параметры могут терпеть скачок: такая поверхность является границей раздела двух сред. На поверхности S электромагнитное поле также испытывает скачок, и уравнения электромагнитного поля должны быть дополнены граничными условиями. Как известно из общей электродинамики, на поверхности раздела двух сред имеют место граничные условия

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}; \quad H_t^{(1)} = H_t^{(2)}, \tag{4.01}$$

справедливые при отсутствии поверхностных токов. Здесь индекс t определяет тангенциальные ссставляющие полей, а значками $^{(1)}$ и $^{(2)}$ отмечены поля по обе стороны границы раздела S.

Граничные условия (4.01) получаются с помощью предельного перехода из уравнений (I) и (II) § 1. Если тот же предельный переход применить к комплексным уравнениям (I) и (II) § 3, то мы получим граничные условия (4.01) для комплексных амплитуд $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

ЭБ "Научное наследие России"

Как мы указывали выше, для монохроматических процессов уравнения (3.08) следуют из уравнений (3.05). Можно показать, что граничные условия для нормальных составляющих поля, вытекающие из уравнений (3.08), также автоматически удовлетворяются, коль скоро справедливы граничные условия (4.01). Доказательство этого утверждения предоставляется читателю.

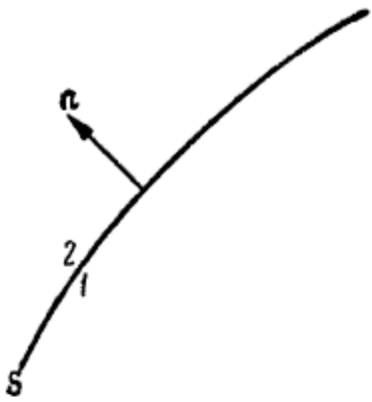


Рис. 2. Граница раздела S.

В случае, если на поверхности S имеются поверхностные токи—электрические и магнитные, поверхностные плотности которых мы будем соответственно обозначать через $\mathbf{i}^e$ и $\mathbf{i}^m$, то тангенциальные составляющие электрического и магнитного поля терпят разрыв, и вместо граничных условий (4.01) мы будем иметь граничные условия

$$[\mathbf{n},\ \mathbf{E}^{(2)}-\mathbf{E}^{(1)}]=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}^m;\ [\mathbf{n},\ \mathbf{H}^{(2)}-\mathbf{H}^{(1)}]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}^e, \quad (4.02)$$

где через $\mathbf{n}$ обозначена нормаль к поверхности S, направленная в сторону *2* (рис. 2). Если имеются поверхностные электрические токи, возбуждаемые полем, то в граничных условиях (4.02) под $\mathbf{i}^e$ нужно понимать полную поверхностную плотность тока—как стороннего, так и возбужденного полем.

Заметим в заключение, что поверхностные электрические токи не могут существовать в проводниках, имеющих конечную проводимость: действительно, наличие поверхностных токов означает, что через бесконечно малое поперечное сечение проводника идет конечный ток, что приведет к выделению бесконечно большого джоулева тепла. Поэтому поверхностные токи становятся физически возможными только при бесконечной проводимости тела (идеально проводящие тела, см. § 24). Поверхностные магнитные токи имеют еще более условное значение (ср. § 78 и § 85).

§ 5. Леммы о смысле квадратов и произведений комплексных амплитуд

Выше мы записали в комплексной форме как уравнения электромагнитного поля, так и граничные условия. К числу основных положений теории поля (ср. § 1) отно-

Электронное наследие России

сится также связь между величинами, фигурирующими в уравнениях (в данном случае комплексными амплитудами полей и сторонних токов), и энергетическими характеристиками процессов.

Как показывают формулы § 1, энергетические характеристики определяются квадратами и произведениями мгновенных значений полей и токов. Ниже мы установим непосредственную связь между комплексными амплитудами поля и его энергетическими характеристиками. Для этого нам понадобятся две простых леммы.

Пусть мы имеем две физические величины $a(t)$ и $b(t)$, которые сначала будем считать скалярными. Им соответствуют комплексные амплитуды $a(\omega)$ и $b(\omega)$, связанные с самими величинами соотношениями типа (2.01)

$$a(t)=\mathrm{Re}\{a(\omega)\,e^{-i\omega t}\};\ b(t)=\mathrm{Re}\{b(\omega)\,e^{-i\omega t}\}. \qquad (5.01)$$

Эти формулы показывают, что если $a(\omega)$ и $b(\omega)$ суть комплексные числа вида

$$a(\omega)=Ae^{i\alpha}\ \text{и}\ b(\omega)=Be^{i\beta}, \qquad (5.02)$$

где A и B суть абсолютные величины, а α и β — аргументы этих комплексных чисел $a(\omega)$ и $b(\omega)$, то

$$a(t)=A\cos(\omega t-\alpha);\ b(t)=B\cos(\omega t-\beta). \qquad (5.03)$$

Таким образом, абсолютные величины комплексных амплитуд являются амплитудами соответствующих физических величин, а аргументы комплексных амплитуд определяют фазу колебания этих величин.

Образуя произведение физических величин

$$a(t)\,b(t)=AB\cos(\omega t-\alpha)\cos(\omega t-\beta)=$$
$$=\frac{1}{2}AB[\cos(\alpha-\beta)+\cos(2\omega t-\alpha-\beta)] \qquad (5.04)$$

и вычисляя его среднее значение за период колебания

$$\overline{a(t)\,b(t)}=\frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,b(t)\,dt, \qquad (5.05)$$

очевидно, получим

$$\overline{a(t)\,b(t)}=\frac{1}{2}AB\cos(\alpha-\beta) \qquad (5.06)$$

или

$$\overline{a(t)\,b(t)}=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{a(\omega)\,b^*(\omega)\}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{a^*(\omega)\,b(\omega)\}. \qquad (5.07)$$

ЭБ "Научное наследие России"

При $a(t)=b(t)$ эта формула дает выражение для среднего квадрата любой физической величины

$$\overline{a^2(t)}=\frac{1}{2}a(\omega)a^*(\omega)=\frac{1}{2}|a(\omega)|^2. \tag{5.08}$$

Формулы (5.07) и (5.08) дают нам первую лемму, в которой от скалярных физических величин нетрудно перейти к векторным. Обычно нас интересуют величины

$$w_э=\frac{\varepsilon_0}{8\pi}E^2;\quad w_м=\frac{\mu_0}{8\pi}H^2; \tag{5.09}$$

$$p=\mathbf{jE};\quad \mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}], \tag{5.10}$$

о которых мы уже говорили в § 1 [см. формулы (1.13), (1.14) и (1.16)]. Соответствующие средние (за период колебания) значения этих величин выразятся через комплексные амплитуды полей по формулам

$$\overline{w}_э=\frac{\varepsilon_0}{16\pi}|\mathbf{E}(\omega)|^2;\quad \overline{w}_м=\frac{\mu_0}{16\pi}|\mathbf{H}(\omega)|^2, \tag{5.11}$$

$$\overline{p}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{j}^*(\omega)\mathbf{E}(\omega)\};\quad \overline{\mathbf{S}}=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\mathbf{E}(\omega)\mathbf{H}^*(\omega)], \tag{5.12}$$

непосредственно вытекающим из формул (5.08) и (5.07).

Доказанная выше лемма позволяет по известным комплексным амплитудам вычислять среднее значение или „постоянную часть“ энергетических характеристик электромагнитного процесса. Докажем теперь другую лемму, позволяющую делать то же самое для „переменной части“ или „колеблющейся части“ энергетических величин.

Действительно, выражение (5.04) для произведения $a(t)b(t)$ можно переписать в виде

$$a(t)b(t)=\overline{a(t)b(t)}+\overbrace{a(t)b(t)},$$

где функцию времени

$$\overbrace{a(t)b(t)}=\frac{1}{2}AB\cos(2\omega t-\alpha-\beta) \tag{5.13}$$

естественно назвать переменной или колеблющейся частью произведения $a(t)b(t)$: эта часть колеблется во времени

Электронное наследие России

с частотой 2ω и имеет среднее значение, равное нулю. Формулу (5.13) можно переписать в виде

$$\overline{a(t)\,b(t)} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{a(\omega)\,b(\omega)\,e^{-2i\omega t}\right\}; \qquad (5.14)$$

показывающем, что половина произведения комплексных амплитуд $a(\omega)\,b(\omega)$ является комплексной амплитудой колеблющейся части произведения $a(t)\,b(t)$. В самом деле формула (5.14) аналогична формулам (5.01), отличается лишь временными множителями ($e^{-2i\omega t}$ и $e^{-i\omega t}$). При $a(t) = b(t)$ формула (5.14) примет более простой вид:

$$\overline{a^2(t)} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{a^2(\omega)\,e^{-2i\omega t}\right\}. \qquad (5.15)$$

Анализируя с помощью формул (5.14) и (5.15) энергетические величины (5.09) и (5.10), мы получаем

$$\tilde{w}_э = \frac{\varepsilon_0}{16\pi}\mathbf{E}^2(\omega); \quad \tilde{w}_м = \frac{\mu_0}{16\pi}\mathbf{H}^2(\omega) \qquad (5.16)$$

и

$$\tilde{p} = \frac{1}{2}\mathbf{j}(\omega)\,\mathbf{E}(\omega); \quad \tilde{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}[\mathbf{E}(\omega)\,\mathbf{H}(\omega)] \qquad (5.17)$$

где $\tilde{w}_э$ и $\tilde{w}_м$ — комплексные амплитуды колеблющейся части плотности электрической и магнитной энергии, $\tilde{p}$ — комплексная амплитуда колеблющейся части плотности отдаваемой мощности, а $\tilde{\mathbf{S}}$ — комплексная амплитуда колеблющейся части вектора Умова—Пойнтинга.

Доказанные леммы раскрывают смысл произведения $\frac{1}{2}a(\omega)\,b(\omega)$ и вещественной части произведения $\frac{1}{2}a(\omega)\,b^*(\omega)$. При этом смысл мнимой части $\frac{1}{2}a(\omega)\,b^*(\omega)$ остается неопределенным, и, в частности, мнимая часть вектора $\frac{c}{8\pi}[\mathbf{E}(\omega)\,\mathbf{H}^*(\omega)]$ не имеет четкого физического смысла. То же относится и к мнимой части $\frac{1}{2}\mathbf{j}^*(\omega)\,\mathbf{E}(\omega)$.

В заключение применим доказанные выше простые леммы к случаю переменной электродвижущей силы, приложенной к клеммам некоторой цепи (рис. 3). Пусть $\mathcal{E}(t)$ есть элек-

ЭБ "Научное наследие России"

тродвижущая сила, $J(t)$ — ток в цепи, тогда мгновенная мощность, вводимая в цепь, равна

$$P(t) = \mathcal{E}(t) J(t). \tag{5.18}$$

Если электродвижущая сила и ток изменяются по синусоидальному закону с частотой ω, то можно ввести комплексные амплитуды

$$\mathcal{E}(\omega) = \mathcal{E}_0 e^{i\alpha}; \quad J(\omega) = J_0 e^{i\beta}, \tag{5.19}$$

где $\mathcal{E}_0$ и J_0 — абсолютные величины комплексных амплитуд, α и β — их фазы, а через φ обычно обозначается разность фаз

$$\varphi = \alpha - \beta. \tag{5.20}$$

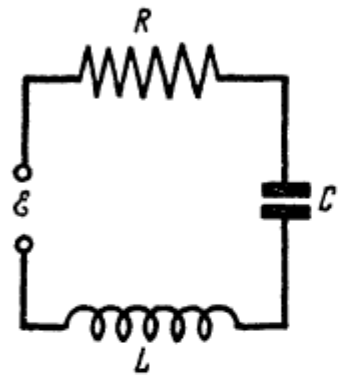


Рис. 3. Колебательный контур, возбуждаемый электродвижущей силой $\mathcal{E}$.

Величина

$$P^{\text{к}} = \frac{1}{2} \mathcal{E}(\omega) J^*(\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 J_0 e^{i\varphi} \tag{5.21}$$

в электротехнике и радиотехнике часто называется комплексной мощностью, ее вещественная часть

$$\operatorname{Re} P^{\text{к}} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 J_0 \cos\varphi \tag{5.22}$$

— активной мощностью, ее мнимая часть

$$\operatorname{Im} P^{\text{к}} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 J_0 \sin\varphi \tag{5.23}$$

— реактивной мощностью. Величина (5.22) по первой лемме равна среднему значению мгновенной мощности (5.18), величина (5.23) четкого энергетического смысла не имеет. Колеблющаяся часть мгновенной мощности (5.18) определяется по второй лемме комплексным числом

$$\tilde{P} = \frac{1}{2} \mathcal{E}(\omega) J(\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 J_0 e^{i(\alpha+\beta)}. \tag{5.24}$$

Ниже, в § 6, аналогичные понятия будут введены для электромагнитных полей.

§ 6. Теорема о комплексной мощности

Из комплексных уравнений § 3

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mu \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^m; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^e \tag{6.01}$$

Электронное научное наследие России

легко получаются уравнения для комплексно-сопряженных векторов $\mathbf{E}^*$ и $\mathbf{H}^*$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^* = -ik\mu^*\mathbf{H}^* - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{m*}; \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}^* = ik\varepsilon^*\mathbf{E}^* + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{e*}, \tag{6.02}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon' + i\varepsilon'', \quad & \mu &= \mu' + i\mu'', \\ \varepsilon^* &= \varepsilon' - i\varepsilon'', \quad & \mu^* &= \mu' - i\mu''. \end{aligned}\right\} \tag{6.03}$$

Умножим первое уравнение (6.01) скалярно на $\mathbf{H}^*$, второе уравнение (6.02) — на $-\mathbf{E}$ и результаты сложим. Используя известное тождество векторного анализа

$$\mathbf{H}^*\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}^* = \operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*], \tag{6.04}$$

мы получаем соотношение

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*] = -ik\varepsilon^*|\mathbf{E}|^2 + ik\mu|\mathbf{H}|^2 - \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}^{e*}\mathbf{E} + \mathbf{j}^m\mathbf{H}^*), \tag{6.05}$$

которое после умножения на $-\frac{c}{8\pi}$ и использования формул (2.05) и (6.03) принимает вид

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\frac{c}{8\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*] &= \frac{\omega}{8\pi}(\varepsilon''|\mathbf{E}|^2 + \mu''|\mathbf{H}|^2) + \\ &+ \frac{i\omega}{8\pi}(\varepsilon'|\mathbf{E}|^2 - \mu'|\mathbf{H}|^2) + \frac{1}{2}(\mathbf{j}^{e*}\mathbf{E} + \mathbf{j}^m\mathbf{H}^*). \end{aligned} \tag{6.06}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{S}^{\text{к}} = \frac{c}{8\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*], \quad p_e^{\text{к}} = \frac{1}{2}\mathbf{j}^{e*}\mathbf{E}, \quad p_m^{\text{к}} = \frac{1}{2}\mathbf{j}^m\mathbf{H}^*, \tag{6.07}$$

$$\bar{p}_{\text{э}} = \frac{\omega\varepsilon''}{8\pi}|\mathbf{E}|^2, \quad \bar{p}_{\text{м}} = \frac{\omega\mu''}{8\pi}|\mathbf{H}|^2, \tag{6.08}$$

$$w'_{\text{э}} = \frac{\varepsilon'}{16\pi}|\mathbf{E}|^2, \quad w'_{\text{м}} = \frac{\mu'}{16\pi}|\mathbf{H}|^2, \tag{6.09}$$

причем отметим, что величины $\mathbf{S}^{\text{к}}$, $P_e^{\text{к}}$ и $P_m^{\text{к}}$ — комплексные (что и отмечается индексом $^{\text{к}}$ наверху), а остальные — вещественные. С помощью этих обозначений перепишем соотношение (6.06) более кратко

$$-\operatorname{div}\mathbf{S}^{\text{к}} = \bar{p}_{\text{э}} + \bar{p}_{\text{м}} + 2i\omega(w'_{\text{э}} - w'_{\text{м}}) + p_e^{\text{к}} + p_m^{\text{к}} \tag{6.10}$$

По форме это соотношение напоминает формулу (1.18); ниже будет показано, что соотношение (6.10) включает в себя закон сохранения энергии для монохроматических

ЭБ "Научное наследие России"

полей. Чтобы облегчить анализ физического смысла этого соотношения, введем интегральные величины (V — объем, ограниченный поверхностью S с внешней нормалью $\mathbf{n}$, см. рис. 1)

$$\Sigma^{к} = \oint S_n^{к}\, dS, \quad P_e^{к} = \int_V p_e^{к}\, dV, \quad P_m^{к} = \int_V p_m^{к}\, dV, \tag{6.11}$$

$$\overline{P}_{э} = \int_V \overline{p}_{э} dV, \quad \overline{P}_{м} = \int_V \overline{p}_{м} dV\,, \tag{6.12}$$

$$W'_{э} = \int_V w'_{э}\, dV, \quad W'_{м} = \int_V w'_{м}\, dV \tag{6.13}$$

и преобразуем с помощью теоремы Гаусса — Остроградского формулу (6.10) в интегральное соотношение

$$-\Sigma^{к} = \overline{P}_{э} + \overline{P}_{м} + 2i\omega (W'_{э} - W'_{м}) + P_e^{к} + P_m^{к}. \tag{6.14}$$

Вектор $\mathbf{S}^{к}$ называется комплексным вектором Умова — Пойнтинга, а величина $\Sigma^{к}$ — комплексной мощностью излучения из данного объема V. Формула (5.12) показывает, что вещественные части этих комплексных величин имеют четкий физический смысл

$$\operatorname{Re} \mathbf{S}^{к} = \overline{\mathbf{S}}; \quad \operatorname{Re}\Sigma^{к} = \overline{\Sigma}, \tag{6.15}$$

где $\overline{\mathbf{S}}$ — среднее (за период колебания) значение обычного вектора Умова — Пойнтинга $\mathbf{S}$, а $\overline{\Sigma}$ — среднее значение мощности излучения (или, что то же, потока энергии) из данного объема. Физический смысл этих величин нами подробно рассмотрен в § 1. Мгновенное значение мощности, поглощаемой сторонними электрическими токами, можно по аналогии с формулами (1.09) и (1.14) написать в виде

$$P_e = \int_V p_e dV; \quad p_e = \mathbf{j}^{e}(t)\, \mathbf{E}(t) \tag{6.16}$$

тогда комплексные величины $P_e^{к}$ и $p_e^{к}$ будут связаны с P_e и p_e соотношениями

$$\operatorname{Re} p_e^{к} = \overline{p}_e; \quad \operatorname{Re} P_e^{к} = \overline{P}_e, \tag{6.17}$$

подобными формулами (6,15). Аналогичные соотношения

Электронное наследие России

можно написать для мощности, поглощаемой сторонними магнитными токами

$$P_m = \int_V p_m dV; \quad p_m = \mathbf{j}^m(t)\,\vec{\mathbf{H}}(t) \tag{6.18}$$

и

$$\operatorname{Re} p_m^{\kappa} = p_m; \quad \operatorname{Re} P_m^{\kappa} = \overline{P}_m. \tag{6.19}$$

Эти величины позволяют рассчитывать мощность, извлекаемую из электромагнитного поля рамочными антеннами, щелями и отверстиями (см. далее § 78), а также мощность, сообщаемую ими полю (при отрицательном $\overline{P}_m$).

Приравнивая в соотношении (6.14) вещественные части, мы получаем

$$-\operatorname{Re}\Sigma^{\kappa} = \overline{P}_э + \overline{P}_м + \overline{P}_e + \overline{P}_m. \tag{6.20}$$

Левая часть этого соотношения в силу знака минус равна средней мощности, поступающей в данный объем V через его поверхность S. Если эту среднюю мощность умножить на период колебаний T, то получим полную электромагнитную энергию, втекающую в данный объем через поверхность S за период.

Исходя из общего закона сохранения энергии, можно считать, что поступление электромагнитной энергии за период T приведет к соответствующему увеличению энергии объема V — как электромагнитной, так и других форм энергии. Однако в силу периодичности процесса электромагнитные поля в объеме V по истечении времени T возвращаются к прежним значениям, и так как электромагнитная энергия должна однозначно определяться полями, то и она по истечении периода T приходит к начальному значению. Поэтому остается только одна возможность: электромагнитная энергия, втекающая в данный объем за период, равна приращению неэлектромагнитной энергии в объеме.

Из этих соображений следует, что стоящая в правой части формулы (6.20) сумма четырех слагаемых

$$\overline{P} = \overline{P}_э + \overline{P}_м + \overline{P}_e + \overline{P}_m \tag{6.21}$$

есть средняя мощность, отдаваемая полем в данном объеме. Слагаемое $\overline{P}_э$ дает мощность электрических потерь, сла-

ЭБ "Научное наследие России"

гаемое $\bar{P}_м$ — мощность магнитных потерь, слагаемые $\bar{P}_e$ и $\bar{P}_m$ — мощности, сообщаемые электромагнитным полем сторонним электрическим и магнитным токам. Величины $\bar{p}_э$, $\bar{p}_м$, $\bar{p}_e$ и $\bar{p}_m$ определяют соответственно объемные плотности этих мощностей, сумма их

$$\bar{p} = \bar{p}_э + \bar{p}_м + \bar{p}_e + \bar{p}_m \tag{6.22}$$

дает объемную плотность отдаваемой полем мощности. Правильность этой интерпретации легко проверить в случае, когда справедливы простейшие материальные условия (III) § 1. В этом случае [ср. формулу (2.09)]

$$\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad \mu'' = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{j}^m = 0, \tag{6.23}$$

так что

$$\bar{p} = \frac{1}{2}\sigma|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\mathbf{j}^{e*}\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{(\mathbf{j}^e + \sigma\mathbf{E})^*\mathbf{E}\}, \tag{6.24}$$

что можно благодаря соотношению (3.01) записать более кратко

$$\bar{p} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\mathbf{j}^*\mathbf{E}), \tag{6.25}$$

а это полностью согласуется с первой формулой (5.12), выведенной нами выше для отдаваемой мощности. Ниже (в § 9) мы более детально рассмотрим физический смысл величин $\bar{p}_э$ и $\bar{p}_м$ в том случае, когда простейшие материальные условия (III) не имеют места.

Предыдущее изложение базировалось на том, что данное в § 1 выражение (1.10) для потока энергии остается справедливым для любых сред, в том числе для веществ с любыми комплексными проницаемостями ε и μ. Только благодаря этому обстоятельству мы выяснили смысл левой части формулы (6.20) и всей этой формулы.

Мы рассмотрели выше вещественную часть комплексного соотношения (6.14) и пришли к выводу, что она представляет собой энергетический баланс за период, или, что то же самое, баланс средних мощностей. Вещественная часть введенной выше комплексной мощности излучения $\Sigma^к$, равная средней мощности или „постоянной части“ мощности излучения (ср. § 5), называется активной мощ-

ЭБ "Научное наследие России"

ностью, а мнимая часть комплексной мощности — реактивной мощностью. Эта терминология распространяется на другие виды мощности: так, величины $P_e^к$ и $P_m^к$ называются комплексной мощностью, отдаваемой сторонним токам, тогда $\mathrm{Re}P_e^к$ и $\mathrm{Re}\,P_m^к$ суть активные, $\mathrm{Im}\,P_e^к$ и $\mathrm{Im}\,P_m^к$ — реактивные мощности.

Применяя эту терминологию, соотношение (6.14) можно назвать теоремой о комплексной мощности, его вещественную часть (6.20) — теоремой об активной мощности, а его мнимую часть

$$-\mathrm{Im}\,\Sigma^к = 2\omega\,(W'_э - W'_м) + \mathrm{Im}\,(P_e^к + P_m^к) \qquad (6.26)$$

— теоремой о реактивной мощности.

Последнее соотношение является прямым следствием уравнений поля и часто весьма полезно для расчетов. Однако оно не имеет четкого физического смысла. Прежде всего, таким смыслом не обладает само понятие реактивной мощности, как это уже было отмечено в конце § 5. Часто с понятием реактивной мощности связывают представление о колеблющейся мощности (среднее значение которой равно нулю), в отличие от постоянного слагаемого в выражении для мощности — средней или активной мощности. Однако на самом деле это не так: в следующем параграфе мы рассмотрим теорему о колеблющейся мощности и увидим, что она существенно отличается от теоремы о реактивной мощности.

Следует также добавить, что величины $W'_э$ и $W'_м$ также не имеют в общем случае четкого физического смысла: они не равны электрической и магнитной энергии поля в объеме V, как мы увидим ниже (ср. § 8 и § 9).

Рассмотренная выше теорема о комплексной мощности в литературе часто называется комплексной теоремой Умова — Пойнтинга.

§ 7*. Теорема о колеблющейся мощности

Теорему о колеблющейся мощности мы легко получим из уравнений (6.01), умножая первое на $\mathbf{H}$, второе на $-\mathbf{E}$ и складывая

$$\mathrm{div}\,[\mathbf{EH}] = ik\varepsilon\,\mathbf{E}^2 + ik\mu\,\mathbf{H}^2 - \frac{4\pi}{c}\,(\mathbf{j}^e\,\mathbf{E} + \mathbf{j}^m\mathbf{H}). \qquad (7.01)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Добавляя множитель $-\frac{c}{8\pi}$ и пользуясь формулами (6.03), приходим к соотношению

$$-\operatorname{div}\frac{c}{8\pi}[\mathbf{EH}]=\frac{\omega}{8\pi}(\varepsilon''\mathbf{E}^2+\mu''\mathbf{H}^2)-\frac{i\omega}{8\pi}(\varepsilon'\mathbf{E}^2+\mu'\mathbf{H}^2)+$$
$$+\frac{1}{2}(\mathbf{j}^e\mathbf{E}+\mathbf{j}^m\mathbf{H}). \qquad (7.02)$$

Оно похоже по внешнему виду на соотношение (6.06), но имеет иной физический смысл. Согласно формуле (5.17) вектор

$$\tilde{\mathbf{S}}=\frac{c}{8\pi}[\mathbf{EH}] \qquad (7.03)$$

дает колеблющуюся часть вектора Умова — Пойнтинга, а величины

$$\tilde{p}_e=\frac{1}{2}\mathbf{j}^e\mathbf{E} \quad \text{и} \quad \tilde{p}_m=\frac{1}{2}\mathbf{j}^m\mathbf{H} \qquad (7.04)$$

— колеблющуюся часть мощности, отдаваемой полем сторонним электрическим и магнитным токам в единице объема.

Как мы увидим далее, соотношение (7.02) дает нам теорему о колеблющейся мощности. Прежде чем переходить к более детальному анализу этого соотношения, вернемся к формуле (1.18) — дифференциальной форме закона сохранения и превращения энергии для любого поля. Рассматривая монохроматическое электромагнитное поле и усредняя соотношение (1.18) по времени, мы в силу равенства

$$\overline{\frac{\partial w}{\partial t}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial w}{\partial t}\,dt=\frac{w(T)-w(0)}{T}=0, \qquad (7.05)$$

вытекающего из периодичности энергии (ср. § 6), получаем формулу

$$\bar{p}+\operatorname{div}\bar{\mathbf{S}}=0. \qquad (7.06)$$

Это — дифференциальная формулировка закона сохранения энергии „в среднем за период“, или теорема об активной мощности. Согласно § 6 величина $\bar{p}$ определяется формулой (6.22), а величина $\bar{\mathbf{S}}$ — формулой (6.15); само соотношение (7.06) мы получим, если в выражении (6.10) приравняем вещественные части.

ЭБ "Научное наследие России"

Беря колеблющуюся (переменную) часть каждого слагаемого в формуле (1.18), мы получим соотношение

$$\frac{\partial \breve{w}}{\partial t} + \breve{p} + \operatorname{div} \breve{\mathbf{S}} = 0. \tag{7.07}$$

Действительно, производная $\frac{\partial w}{\partial t}$ в силу формулы (7.05) постоянной части не имеет, поэтому ее переменная часть равна

$$\frac{\partial \breve{w}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial (\bar{w} + \breve{w})}{\partial t} = \frac{\partial \breve{w}}{\partial t}, \text{ так как } \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = 0. \tag{7.08}$$

Вводя вместо колеблющихся величин $\breve{w}$, $\breve{p}$ и $\breve{\mathbf{S}}$ их комплексные амплитуды $\tilde{w}$, $\tilde{p}$ и $\tilde{\mathbf{S}}$ по формулам (ср. § 5)

$$\breve{w} = \operatorname{Re}\{\tilde{w} e^{-2i\omega t}\}; \quad \breve{p} = \operatorname{Re}\{\tilde{p} e^{-2i\omega t}\}; \breve{\mathbf{S}} = \operatorname{Re}\{\tilde{\mathbf{S}} e^{-2i\omega t}\}, \tag{7.09}$$

приходим к соотношению

$$-\operatorname{div} \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{p} - 2i\omega \tilde{w}. \tag{7.10}$$

Переменную часть плотности мощности, отдаваемой полем, естественно представить [как и постоянную часть (6.22)] в виде суммы четырех слагаемых

$$\tilde{p} = \tilde{p}_э + \tilde{p}_м + \tilde{p}_e + \tilde{p}_m, \tag{7.11}$$

где величины $\tilde{p}_e$ и $\tilde{p}_m$ определяются формулами (7.04), а величины $\tilde{p}_э$ и $\tilde{p}_м$ дают переменную часть мощности электрических и магнитных потерь в веществе.

Переменная часть плотности энергии будет равна

$$\tilde{w} = \tilde{w}_э + \tilde{w}_м, \tag{7.12}$$

где $\tilde{w}_э$ — переменная часть плотности электрической энергии, $\tilde{w}_м$ — магнитной.

При сравнении формул (7.02) и (7.10) можно с первого взгляда сделать вывод, что переменная часть плотности электрических и магнитных потерь в веществе равна

$$\tilde{p}_э = \frac{\omega \varepsilon''}{8\pi} \mathbf{E}^2; \quad \tilde{p}_м = \frac{\omega \mu''}{8\pi} \mathbf{H}^2, \tag{7.13}$$

а переменная часть плотности электрической и магнитной энергии равна

$$\tilde{w}_э = \frac{\varepsilon'}{16\pi}\mathbf{E}^2; \quad \tilde{w}_м = \frac{\mu'}{16\pi}\mathbf{H}^2. \tag{7.14}$$

Однако такая физическая интерпретация слагаемых в формуле (7.02) является неоднозначной и в некоторых случаях просто ошибочной (ср. § 52). Действительно, сравнение тождеств (7.01) и (7.02) с законом сохранения энергии (7.10) дает общие соотношения

$$\tilde{p}_э - 2i\omega\tilde{w}_э = -\frac{i\omega\varepsilon}{8\pi}\mathbf{E}^2; \quad \tilde{p}_м - 2i\omega\tilde{w}_м = -\frac{i\omega\mu}{8\pi}\mathbf{H}^2, \tag{7.15}$$

из которых формулы (7.13) и (7.14) можно получить лишь в частных случаях. Так например, если ε' и μ' не зависят от частоты, то согласно формулам (5.16) выражения (7.14) дают нам плотность электрической и магнитной энергии; из соотношений (7.15) тогда вытекает справедливость формул (7.13). Если потери отсутствуют ($\varepsilon'' = \mu'' = 0$ и, следовательно, $\tilde{p}_э = \tilde{p}_м = 0$), то из формул (7.15) опять следует правильность выражений (7.14) для плотности электрической и магнитной энергии. Наконец, при условиях

$$\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon'') = 0; \quad \frac{d}{d\omega}(\omega\mu'') = 0 \tag{7.16}$$

выражения (7.13) и (7.14) также справедливы. Действительно, из первого условия следует, что проводимость вещества $\sigma = \frac{\omega\varepsilon''}{4\pi}$ не будет зависеть от частоты, а в этом случае из формулы (5.17) получаем

$$\tilde{p}_э = \frac{1}{2}\sigma\mathbf{E}^2 = \frac{\omega\varepsilon''}{8\pi}\mathbf{E}^2 \tag{7.17}$$

в соответствии с формулой (7.13), и соотношение (7.15) приводит к формуле (7.14) для $\tilde{w}_э$. Аналогичные следствия для магнитных величин вытекают из второго условия (7.16). Можно показать, что формулы (7.13) и (7.14) применимы, если условия (7.16) выполняются не при всех частотах, а лишь при данной частоте монохроматических колебаний ω; для этого достаточно рассмотреть (как ниже в § 8) „почти монохроматические" переходные процессы.

Научное наследие России

В других случаях для вычисления переменной части мощности потерь и энергии приходится привлекать специальные соображения (ср. § 52).

От дифференциальной формулировки закона сохранения колеблющейся части энергии нетрудно перейти к интегральной

$$\frac{d\breve{W}}{dt}+\breve{P}+\breve{\Sigma}=0, \tag{7.18}$$

где

$$\breve{W}=\int_V \breve{w}dV;\quad \breve{P}=\int_V \breve{p}dV;\quad \breve{\Sigma}=\oint_S \breve{S}_n dS. \tag{7.19}$$

Пользуясь соответствующими комплексными амплитудами $\tilde{W}$, $\tilde{P}$ и $\tilde{\Sigma}$, можно также написать

$$-\tilde{\Sigma}=\tilde{P}-2i\omega\tilde{W}. \tag{7.20}$$

Последняя формула несколько напоминает по внешнему виду теорему о реактивной мощности (6.26), однако соотношение (7.20) — комплексное, а (6.26) — вещественное. По аналогии с § 6 соотношения (7.18) и (7.20) можно назвать теоремой о колеблющейся мощности.

§ 8*. Электромагнитная энергия монохроматического поля

В рассмотренных выше энергетических соотношениях постоянная составляющая электромагнитной энергии монохроматического поля отсутствовала. Это отсутствие совершенно естественно, так как при строго периодических процессах постоянная составляющая энергии электромагнитного поля неизменна. Она является фиксированным „запасом" энергии, который образуется в процессе установления периодических колебаний и освобождается при их прекращении. Для вычисления этого запаса необходимо рассмотреть соответствующие переходные процессы, что мы и сделаем ниже. Ясно, что такие процессы не могут быть характеризованы одной частотой, и для полного их исследования необходимо в общем случае пользоваться интегралами Фурье (2.18).

С помощью искусственного приема можно рассмотреть процессы нарастания или постепенного прекращения колебаний, минуя интегралы Фурье: для этого достаточно

ЭБ "Научное наследие России"

брать в уравнениях монохроматических колебаний вместо вещественной частоты ω комплексную частоту

$$\Omega = \omega + i\gamma. \tag{8.01}$$

В зависимости от знака γ мы будем иметь колебания, экспоненциально возрастающие (при $\gamma > 0$) или затухающие (при $\gamma < 0$) во времени. Если величина γ достаточно мала, то в каждый момент времени колебания являются „почти монохроматическими", и с их помощью можно исследовать медленное изменение среднего за период значения энергии поля.

Связь между мгновенными значениями и комплексными амплитудами полей при комплексной частоте определяется соотношениями

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}e^{-i\Omega t}\right\}; \quad \mathbf{H}(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}e^{-i\Omega t}\right\}, \tag{8.02}$$

аналогичными формулам (2.01). Комплексные амплитуды $\mathbf{E}(\Omega)$ и $\mathbf{H}(\Omega)$ здесь и в дальнейшем обозначены просто через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Соотношения (8.02) можно также записать в виде

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}e^{-i\omega t}\right\} e^{\gamma t}; \quad \mathbf{H}(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}e^{-i\omega t}\right\} e^{\gamma t}. \tag{8.03}$$

Уравнения для комплексных амплитуд $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ получаются из уравнений (6.01) заменой $k = \frac{\omega}{c}$ на $\frac{\Omega}{c}$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \frac{i}{c}\Omega\mu(\Omega)\,\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m; \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = -\frac{i}{c}\Omega\varepsilon(\Omega)\,\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e, \tag{8.04}$$

а уравнения для комплексно сопряженных векторов $\mathbf{E}^*$ и $\mathbf{H}^*$ имеют вид

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}^* = -\frac{i}{c}\Omega^*\mu^*(\Omega)\,\mathbf{H}^* - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{m*};$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}^* = \frac{i}{c}\Omega^*\varepsilon^*(\Omega)\,\mathbf{E}^* + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{e*}. \tag{8.05}$$

Отсюда (так же как и в § 6) получаем тождество

$$\mathrm{div}\,[\mathbf{E}\mathbf{H}^*] = -\frac{i}{c}\Omega^*\varepsilon^*(\Omega)\,|\mathbf{E}|^2 +$$

$$+\frac{i}{c}\Omega\mu(\Omega)\,|\mathbf{H}|^2 - \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}^{e*}\mathbf{E} + \mathbf{j}^m\mathbf{H}^*)$$

Научное наследие России

или

$$-\operatorname{div}\frac{c}{8\pi}[\mathbf{EH}^*]=i\frac{\Omega^*\varepsilon^*(\Omega)}{8\pi}|\mathbf{E}|^2-$$

$$-i\frac{\Omega\mu(\Omega)}{8\pi}|\mathbf{H}|^2+\frac{1}{2}(\mathbf{j}^{e*}\mathbf{E}+\mathbf{j}^m\mathbf{H}^*). \qquad (8.06)$$

При $\gamma=0$ последнее тождество превращается в выведенное ранее соотношение (6.06), приводящее к теореме о комплексной мощности. В дальнейшем мы используем лишь равенство вещественных частей соотношения (8.06).

При достаточно малых значениях γ можно положить

$$\Omega\varepsilon(\Omega)=\omega\varepsilon+i\gamma\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon) \quad \text{и} \quad \Omega\mu(\Omega)=\omega\mu+i\gamma\frac{d}{d\omega}(\omega\mu), \qquad (8.07)$$

пренебрегая второй и высшими степенями γ; здесь через ε и μ обозначены комплексные проницаемости для вещественной частоты ω. Пользуясь тождествами

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Re}\{i\Omega^*\varepsilon^*(\Omega)\}&=\operatorname{Im}\{\Omega\varepsilon(\Omega)\}=\omega\varepsilon''+\gamma\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon'),\\ \operatorname{Re}\{-i\Omega\mu(\Omega)\}&=\operatorname{Im}\{\Omega\mu(\Omega)\}=\omega\mu''+\gamma\frac{d}{d\omega}(\omega\mu'),\end{aligned}\right\} \qquad (8.08)$$

мы получаем из формулы (8.06) соотношение

$$-\operatorname{div}\frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\mathbf{EH}^*]=\frac{\omega\varepsilon''}{8\pi}|\mathbf{E}|^2+\frac{\omega\mu''}{8\pi}|\mathbf{H}|^2+$$

$$+\frac{\gamma}{8\pi}\left\{\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon')|\mathbf{E}|^2+\frac{d}{d\omega}(\omega\mu')|\mathbf{H}|^2\right\}+\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\mathbf{j}^{e*}\mathbf{E}+\mathbf{j}^m\mathbf{H}^*). \qquad (8.09)$$

Первая лемма § 5 позволяет легко интерпретировать левую часть этого соотношения. Правда, лемма была доказана лишь для монохроматических колебаний, однако формулы (8.03) показывают, что при экспоненциально нарастающих или затухающих колебаниях мгновенные значения полей приобретают лишь дополнительный множитель $e^{\gamma t}$, благодаря чему средние значения квадратов и произведений полей медленно изменяются во времени—пропорционально $e^{2\gamma t}$. Среднее за период колебания значение вектора Умова — Пойнтинга равно

$$\overline{\mathbf{S}}=\frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\mathbf{EH}^*]e^{2\gamma t}. \qquad (8.10)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Плотность мощности, отдаваемой электрическим и магнитным сторонним токам (ср. § 6), имеет средние значения

$$\overline{p}_e = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\mathbf{j}^{e*}\mathbf{E})\,e^{2\gamma t} \quad \text{и} \quad \overline{p}_m = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\mathbf{j}^{m}\mathbf{H}^{*})\,e^{2\gamma t}. \quad (8.11)$$

Если усреднить соотношение (1.18) по периоду колебаний, то мы получим

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \overline{p} + \operatorname{div}\overline{\mathbf{S}} = 0, \quad (8.12)$$

поскольку

$$\overline{\frac{\partial w}{\partial t}} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{\partial w}{\partial t}\,dt = \frac{w(t+T) - w(t)}{T}$$

и

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} w\,dt = \frac{w(t+T) - w(t)}{T} = \overline{\frac{\partial w}{\partial t}}. \quad (8.13)$$

Учитывая, что все энергетические величины пропорциональны $e^{2\gamma t}$, будем также иметь

$$-\operatorname{div}\overline{\mathbf{S}} = \overline{p} + 2\gamma w. \quad (8.14)$$

Сравнивая соотношения (8.09) и (8.14), легко с первого взгляда сделать заключение, что средние значения плотностей электрических и магнитных потерь равны

$$\overline{p}_э = \frac{\omega\varepsilon''}{8\pi}|\mathbf{E}|^2 e^{2\gamma t};\ \overline{p}_м = \frac{\omega\mu''}{8\pi}|\mathbf{H}|^2 e^{2\gamma t} \quad (8.15)$$

[ср. формулы (6.08)], а полная мощность, отдаваемая полем в единице объема, определяется суммой (6.22).

Тогда среднее значение плотности электромагнитной энергии равно

$$\overline{w} = \overline{w}_э + \overline{w}_м, \quad (8.16)$$

причем плотность электрической и плотность магнитной энергии имеют средние значения

$$\overline{w}_э = \frac{1}{16\pi}\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon')|\mathbf{E}|^2 e^{2\gamma t};\quad \overline{w}_м = \frac{1}{16\pi}\frac{d}{d\omega}(\omega\mu')|\mathbf{H}|^2 e^{2\gamma t}. \quad (8.17)$$

Однако такое толкование отдельных слагаемых в формуле (8.09) будет, вообще говоря, неправильным: на осно-

Научное наследие России

вании сравнения формул (8.09) и (8.14) можно лишь утверждать, что

$$\overline{p}_э + 2\gamma\overline{w}_э = \frac{1}{8\pi}\left[\omega\varepsilon'' + \gamma\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon')\right]|\mathbf{E}|^2 e^{2\gamma t}$$

и

$$\overline{p}_м + 2\gamma\overline{w}_м = \frac{1}{8\pi}\left[\omega\mu'' + \gamma\frac{d}{d\omega}(\omega\mu')\right]|\mathbf{H}|^2 e^{2\gamma t}. \qquad (8.18)$$

В некоторых частных случаях формулы (8.17) будут все же справедливы. Так например, при отсутствии потерь ($\varepsilon'' = \mu'' = 0$ и $\overline{p}_э = \overline{p}_м = 0$) соотношения (8.17) и (8.18) совпадают, и, следовательно, при монохроматических процессах ($\gamma = 0$) постоянные части плотности электрической и магнитной энергии равны

$$\overline{w}_э = \frac{1}{16\pi}\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon')|\mathbf{E}|^2; \quad \overline{w}_м = \frac{1}{16\pi}\frac{d}{d\omega}(\omega\mu')|\mathbf{H}|^2. \qquad (8.19)$$

При отсутствии дисперсии, когда ε' и μ' не зависят от частоты, мы имеем

$$\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon') = \varepsilon' = \varepsilon_0; \quad \frac{d}{d\omega}(\omega\mu') = \mu' = \mu_0 \qquad (8.20)$$

и формулы (8.19) справедливы, поскольку они совпадают с формулами (5.11). Наконец, при тождественном выполнении условий (7.16) проводимость вещества $\sigma = \frac{\omega\varepsilon''}{8\pi}$ не зависит от частоты, среднее значение плотности электрических потерь равно

$$\overline{p}_э = \sigma\overline{\mathbf{E}^2(t)} = \frac{1}{2}\sigma|\mathbf{E}|^2 e^{2\gamma t} = \frac{\omega\varepsilon''}{8\pi}|\mathbf{E}|^2 e^{2\gamma t} \qquad (8.21)$$

и формулы (8.15), (8.17) и (8.19) оказываются правильными.

В общем случае формулы (8.15) применимы лишь при $\gamma = 0$, когда они совпадают с выражениями (6.08). При малых γ среднее значение плотности потерь может отличаться от выражений (8.15) на величину порядка γ, и тогда соотношения (8.18) приведут к другим формулам для средней плотности энергии, отличным от (8.17) и (8.19). Примеры таких формул даны в § 49. Если же условия (7.16) имеют место при данной частоте ω, то формулы (8.15)

ЭБ "Научное наследие России"

правильны с точностью до членов порядка γ^2 или выше и формулы (8.19) дают правильные выражения для запаса электрической и магнитной энергии при монохроматических колебаниях с частотой ω.

§ 9. Энергетический смысл вещественной и мнимой частей ε и μ

Рассмотрим более подробно физический смысл выражений (6.08). Формула для $\bar{p}_м$ следует из материального уравнения (2.14). Если, пользуясь соотношением (2.15), перейти к физическим величинам $\mathbf{H}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$ и считать для простоты, что эти векторы имеют только по одной декартовой составляющей, которые мы будем обозначать просто как $H(t)$ и $B(t)$, то при

$$H(t) = H_0 \cos \omega t \tag{9.01}$$

будем иметь

$$B(t) = |\mu| H_0 \cos(\omega t - \Delta). \tag{9.02}$$

Если для фиксированной амплитуды магнитного поля H_0 на плоскости HB нанести последовательные значения величин H и B, то эти точки образуют, как легко показать, эллипс (при $\Delta = 0$ эллипс вырождается в отрезок прямой, при $\Delta = \frac{\pi}{2}$ — в окружность). При изменении H_0 эти эллипсы образуют семейство подобных кривых с центром в начале координат. Каждый из этих эллипсов имеет все свойства кривой гистерезиса: действительно (см. рис. 4,*а*) данному значению H соответствуют в общем случае два значения B. Однако эти эллипсы отличаются от кривых низкочастотного гистерезиса (рис. 4,*б*), наблюдаемых при больших напряженностях поля H и имеющих сложную геометрическую форму. Формулы (9.01) и (9.02) и рис. 4,*а* определяют линейный гистерезис, при котором все эллиптические гистерезисные кривые подобны друг другу и амплитуда B пропорциональна амплитуде H. Обычно при достаточно низких частотах и слабых магнитных полях ферромагнитные материалы имеют практически $\Delta = 0$. Однако при увеличении частоты вместе с падением абсолютной величины μ появляется запаздывание величины B по фазе на некоторый угол Δ.

Как известно (см. Тамм „Основы теории электричества“, стр. 531), при наличии магнитного гистерезиса выделяемое

Электронное научное наследие России

за период в единице объема тепло определяется интегралом

$$q_м = \frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{H}\, d\,\mathbf{B}, \qquad (9.03)$$

где символ $\oint$ означает, что интегрирование производится по замкнутому циклу перемагничивания. Таким образом, выделяемое тепло оказывается пропорциональным площади

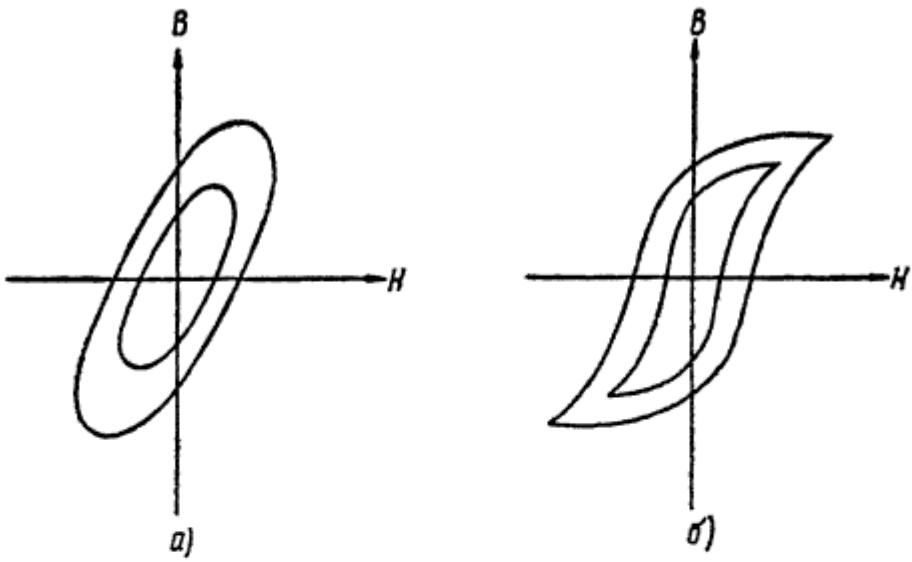


Рис. 4. Петли гистерезиса:
а — линейный гистерезис при высоких частотах; *б* — нелинейный гистерезис при сильных полях.

петли гистерезиса. Вычисляя эту площадь для процесса линейного гистерезиса, определяемого формулами (9.01) и (9.02), мы легко приходим к выражению

$$q_м = -\frac{1}{4\pi} |\mu| H_0^2 \int_0^{2\pi} \cos \omega t \sin(\omega t - \Delta)\, d(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{4} |\mu| \sin \Delta\ H_0^2 = \frac{1}{4} \mu'' |\mathbf{H}|^2, \qquad (9.04)$$

откуда среднее значение мощности магнитных потерь на единицу объема получается равным

$$\bar{p}_м = \frac{q_м}{T} = \frac{\omega \mu''}{8\pi} |\mathbf{H}|^2, \qquad (9.05)$$

что и соответствует формуле (6.08) для $\bar{p}_м$.

Выражение для $\bar{p}_э$ дает джоулево тепло на единицу объема, если справедливы простейшие материальные урав-

ЭБ "Научное наследие России"

нения § 1. Действительно, в этом случае по формуле (6.24) имеем

$$\bar{p}_э = \frac{\sigma}{2} |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2\sigma} |\mathbf{j}|^2, \tag{9.06}$$

что соответствует среднему значению мощности электрических потерь (потерь на джоулево тепло) в единице объема проводника. В непроводящем диэлектрике ($\sigma=0$) векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ связаны соотношением (2.10) и потери происходят лишь за счет диэлектрического гистерезиса. Величина этих потерь в единице объема за период определяется формулой

$$q_э = \frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{D}, \tag{9.07}$$

совершенно аналогичной формуле (9.03). Проводя те же выкладки, что и выше, мы получаем

$$q_э = \frac{1}{4} \varepsilon_1'' |\mathbf{E}|^2, \tag{9.08}$$

и плотность электрических потерь оказывается равной

$$\bar{p}_э = \frac{q_э}{T} = \frac{\omega\varepsilon''}{8\pi} |\mathbf{E}|^2, \tag{9.09}$$

в соответствии с первой формулой (6.08).

Вообще говоря, среда может иметь как проводимость, так и диэлектрический гистерезис. Тогда согласно формулам (2.10)—(2.13) будем иметь

$$\varepsilon' = \varepsilon_1' \quad \text{и} \quad \varepsilon'' = \varepsilon_1'' + \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{9.10}$$

Электрические потери будут по-прежнему определяться формулой (9.09), которая объединяет как потери на диэлектрический гистерезис (пропорциональные ε_1''), так и джоулевы потери (пропорциональные σ): эти два вида потерь при фиксированной частоте с макроскопической точки зрения неразличимы. Таким образом, в среде с двумя комплексными проницаемостями переход электромагнитной энергии в другие формы может происходить не только за счет токов проводимости, но и под влиянием других причин: диэлектрического гистерезиса, который может определять частично или полностью ε'', и магнитного гистерезиса, который полностью определяет μ''. При этом мы подразумеваем не обычный магнитный гистерезис, имею-

Электронное наследие России

щий место в ферромагнетиках при перемагничивании их сильными и медленными магнитными полями, что приводит к появлению гистерезисных потерь сложной формы, а линейный гистерезис в сравнительно слабых полях и на высоких частотах, приводящий к появлению эллиптических кривых гистерезиса. Аналогичный смысл имеет термин „диэлектрический гистерезис".

Из сказанного следует, что мнимые части комплексных проницаемостей ε'' и μ'' имеют непосредственный энергетический смысл. По этой причине величины ε'' и μ'' не могут быть отрицательными:

$$\varepsilon'' \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \mu'' \geqslant 0, \tag{9.11}$$

так как отрицательность ε'' или μ'' означала бы, что в данном веществе возможно непрерывное образование электромагнитной энергии за счет охлаждения вещества, что согласно второму началу термодинамики невозможно.

Вещественные части комплексных проницаемостей согласно § 8 определяют плотность электрической и магнитной энергии. Разумеется, энергия поля определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое (как это всегда делается в электродинамике) выбрано так, чтобы в отсутствии поля (при $\mathbf{E}=0$ и $\mathbf{H}=0$) его энергия была равна нулю. Поскольку на создание поля должна затрачиваться энергия, плотность его энергии как электрической, так и магнитной всегда положительна.

Если ε' и μ' не зависят от частоты, то выражения (6.09) совпадают со средними значениями плотностей электрической и магнитной энергии по формулам (5.11).

В этом случае должны выполняться неравенства

$$\varepsilon' > 0; \quad \mu' > 0. \tag{9.12}$$

Однако при сильной зависимости от частоты величина ε' или μ' может быть отрицательной. Наиболее известным примером среды с отрицательным ε' является ионизированный газ (ионосфера) при частоте ниже критической; средняя плотность электрической энергии в ионосфере нужно вычислять по первой из формул (8.17) (см. также § 49).

Подводя итоги сказанному выше, следует отметить, что комплексные числа

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = |\varepsilon| e^{i\delta}; \quad \mu = \mu' + i\mu'' = |\mu| e^{i\Delta} \tag{9.13}$$

ЭБ "Научное наследие России"

в силу неравенств (9.11) должны находиться в первом или втором квадранте плоскости комплексного переменного, т. е. аргументы их должны быть заключены в пределах

$$0 \leqslant \delta \leqslant \pi; \quad 0 \leqslant \Delta \leqslant \pi. \tag{9.14}$$

При выполнении неравенств (9.12) эти величины должны находиться только в первом квадранте, так что аргументы будут заключены в более узких пределах

$$0 \leqslant \delta < \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leqslant \Delta < \frac{\pi}{2}. \tag{9.15}$$

Идеальным средам без потерь соответствуют вещественные положительные значения ε и μ, т. е. $\delta = 0$ и $\Delta = 0$. Заметим, что аргументы δ и Δ часто называют углами потерь: δ — углом электрических потерь, Δ — углом магнитных потерь.

§ 10. Теоремы единственности. Условия излучения

Различные задачи, которые приходится решать в теории монохроматических электромагнитных полей, можно разбить на две категории: внутренние задачи и внешние задачи.

Во внутренних задачах рассматривается поле в ограниченном участке пространства, окруженном поверхностью S. Внутри поверхности S задаются сторонние токи, а на самой поверхности — либо тангенциальная составляющая электрического поля E_t (заданная, например, на части S_1 поверхности S), либо тангенциальная составляющая магнитного поля H_t (на остальной части S_2 поверхности S, см. рис. 5,*а*).

Во внешних задачах рассматриваются электромагнитные поля в безграничном пространстве вне некоторой поверхности S, на которой также заданы тангенциальные составляющие E_t или H_t, а в окружающем эту поверхность пространстве заданы сторонние токи (рис. 5,*б*).

Для обеих задач можно доказать теорему единственности, т. е. показать, что двух решений быть не может. Важность этой теоремы заключается в том, что найдя каким-нибудь способом решение внутренней или внешней задачи, мы можем быть уверены, что оно реализуется на самом деле и что другого решения искать ненужно.

Научное наследие России

Теорему единственности для обеих задач удается доказать только в предположении, что в каждой точке пространства отличны от нуля (хотя, может быть, и весьма малы) либо электрические, либо магнитные потери, т. е. либо всюду $\varepsilon'' > 0$, либо всюду $\mu'' > 0$.

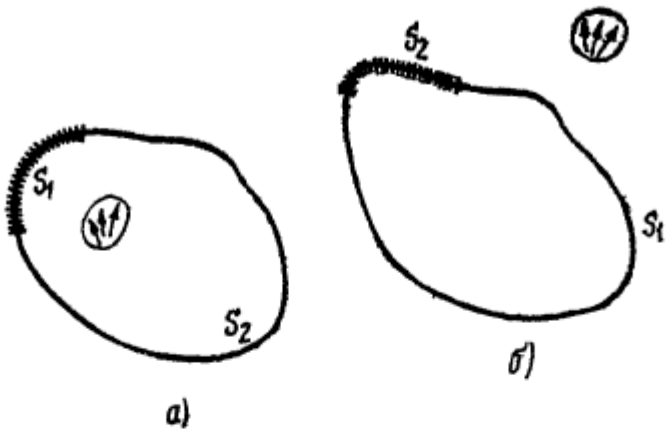


Рис. 5. К теореме единственности
а — для внутренней задачи; *б* — для внешней задачи.

Доказательство теоремы единственности проведем от противного и предположим, что существует два решения поставленной задачи, т. е. два различных электромагнитных поля $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$. Образуем разность этих полей

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)}. \tag{10.01}$$

Разностное поле будет удовлетворять однородным комплексным уравнениям поля (см. конец § 2) и граничным условиям на поверхности S

$$E_t = 0 \text{ на } S_1, \; H_t = 0 \text{ на } S_2, \tag{10.02}$$

которые можно согласно § 4 также переписать в виде

$$[\mathbf{nE}] = 0 \text{ на } S_1, \; [\mathbf{nH}] = 0 \text{ на } S_2. \tag{10.03}$$

К этому разностному полю можно применить теорему об активной мощности (6.20). Для внутренней задачи эта теорема применяется ко всему объему V, ограниченному поверхностью S. В силу граничных условий (10.03) имеем

$$S_n^к = \frac{c}{8\pi}[\mathbf{EH}^*]\mathbf{n} = \frac{c}{8\pi}[\mathbf{nE}]\mathbf{H}^* = -\frac{c}{8\pi}[\mathbf{nH}^*]\mathbf{E} \equiv 0 \text{ на } S \tag{10.04}$$

ЭБ "Научное наследие России"

и $\Sigma^{к}=0$, а в силу отсутствия сторонних токов $\bar{P}_e=\bar{P}_m=0$. Поэтому формула (6.20) для разностного поля примет вид

$$\bar{P}_э+\bar{P}_м=0. \tag{10.05}$$

В силу неравенства $\varepsilon''>0$ из этого соотношения следует, что разностное электрическое поле в любой точке внутри поверхности S должно быть равно нулю. Отсюда из уравнения (II) (см. § 2) следует, что разностное магнитное поле также тождественно равно нулю. Если же считать, что в каждой точке пространства $\mu''>0$, то из соотношения (10.05) следует, что разностное поле $\mathbf{H}\equiv 0$, тогда из уравнения (I) следует, что и $\mathbf{E}\equiv 0$.

Таким образом, теорема единственности для внутренней задачи доказана, причем для ее доказательства существенно предположение о наличии электрических или магнитных потерь в каждой точке рассматриваемого пространства. В доказательстве теоремы единственности для внешней задачи помимо этого предположения мы сделаем еще два:

1) все сторонние токи находятся на конечном расстоянии;

2) на бесконечности поля убывают быстрее, чем $\frac{1}{R}$, где R — расстояние от фиксированной точки. Последнее условие можно формулировать следующим образом

$$|\mathbf{E}|<\frac{M}{R^{1+\alpha}};\ |\mathbf{H}|<\frac{M}{R^{1+\alpha}}\ \text{при}\ R\to\infty, \tag{10.06}$$

где α — некоторое положительное число, а M — конечная положительная константа.

Для доказательства теоремы единственности применим опять теорему об активной мощности к разностному полю в рассматриваемой нами области пространства, ограниченной с одной стороны поверхностью S, а с другой стороны — сферой бесконечно большого радиуса. Для поверхности S имеем опять $\Sigma^{к}=0$ в силу условий (10.03) для разностного поля, а для бесконечно большой сферы $\Sigma^{к}=0$ в силу следующих оценок для сферы большого радиуса R

$$|\mathbf{E}|\leqslant|\mathbf{E}^{(1)}|+|\mathbf{E}^{(2)}|<\frac{2M}{R^{1+\alpha}};\quad |\mathbf{H}|\leqslant|\mathbf{H}^{(1)}|+|\mathbf{H}^{(2)}|<\frac{2M}{R^{1+\alpha}},$$

$$|\Sigma^{к}|\leqslant\frac{c}{8\pi}\oint|\mathbf{E}||\mathbf{H}|\,dS<\frac{c}{8\pi}\frac{4M^2}{R^{2+2\alpha}}4\pi R^2=$$

$$=\frac{2cM^2}{R^{2\alpha}}\to 0\ \text{при}\ R\to\infty. \tag{10.07}$$

Электронное наследие России

Так как для разностного поля $\tilde{P}_e = P_m = 0$, то мы опять приходим к соотношению (10.05), откуда и делаем заключение, что разностное поле должно быть тождественно равно нулю, т. е. двух различных решений одной и той же задачи быть не может.

Физический смысл теоремы единственности заключается в том, что в данном объеме V не может существовать разностное электромагнитное поле, поскольку оно лишено подвода энергии через источники поля (для него сторонние токи отсутствуют) и через границы объема [в силу условий (10.03) и (10.06)]. Благодаря потерям в каждой точке объема V такое поле будет затухать во времени и монохроматическим быть не может.

Предположение о наличии потерь является не только математически, но и физически необходимым. В самом деле, если во внутренней задаче совершенно отсутствуют потери, разностное поле может быть отличным от нуля, по крайней мере для некоторых частот. Действительно, рассмотрим объемный резонатор, ограниченный идеально проводящей стенкой, имеющей форму поверхности S; внутри такой поверхности могут существовать незатухающие электромагнитные колебания, имеющие определенные частоты и удовлетворяющие однородным уравнениям поля и граничному условию $E_t = 0$ на S (ср. гл. XVI). При этих частотах решение внутренней задачи для данного объема становится неоднозначным, поскольку разностное поле может быть равно полю этих колебаний.

Решение внешней задачи при отсутствии потерь также теряет свою единственность. Из электродинамики известно, что для безграничного пустого пространства при известных токах и зарядах электромагнитное поле не определяется однозначно: помимо запаздывающего решения, можно дать и опережающее решение, также удовлетворяющее всем уравнениям поля и, кроме того, прибавить еще произвольное решение однородных уравнений поля, например, сумму произвольных плоских волн. Вводя небольшое поглощение в пространство и пользуясь условиями (10.06), мы при доказательстве теоремы единственности исключили как опережающее решение, имеющее вид волн, сходящихся из бесконечности к источникам поля, так и решение однородных уравнений (например, плоские волны), и оставили только запаздывающие решения, имеющие вид расходящихся от источников сферических

ЭБ "Научное наследие России"

волн. Действительно, только эти последние, претерпевая затухание при своем распространении во все стороны от источников, стремятся на бесконечности к нулю быстрее, чем $\frac{1}{R}$. Опережающие же решения при $R \to \infty$ экспоненциально возрастают, поскольку направление распространения их — от бесконечности к источникам. Плоские волны также исключаются из рассмотрения с помощью условий (10.06), поскольку они затухают в направлении своего распространения и в противоположном направлении экспоненциально возрастают.

При отсутствии поглощения в бесконечном пространстве сходящиеся и расходящиеся волны перестают отличаться друг от друга по поведению амплитуды при $R \to \infty$. Поэтому теорему единственности для бесконечной непоглощающей среды сформулировать труднее. Для этого нужно потребовать, чтобы электромагнитные поля на бесконечности имели вид сферических волн, расходящихся от источников и зависящих в пустоте от R по закону $\frac{e^{ikR}}{R}$. Точная математическая формулировка этого требования может быть дана в виде следующих предельных соотношений

$$\left.\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial R} - ik\mathbf{E}\right) = 0, \\ \lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial R} - ik\mathbf{H}\right) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (10.08)$$

которые называются условиями излучения. Этим условиям удовлетворяют лишь расходящиеся волны, а сходящиеся $\left(\text{имеющие зависимость } \frac{e^{-ikR}}{R}\right)$ и плоские волны им не удовлетворяют.

Физически ясно, что условия излучения выделяют поля, создаваемые данными источниками, и обеспечивают единственность решения внешних задач. Мы не будем рассматривать этих вопросов более подробно, поскольку при практическом решении задач гораздо проще предполагать с самого начала, что пространство имеет малые потери (например, приписать пространству малую проводимость), получить решение задачи и лишь в окончательных результатах перейти к непоглощающей среде, положив $\varepsilon'' = 0$ и $\mu'' = 0$.

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА II

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

§ 11. Плоские волны в однородной изотропной среде

С помощью комплексных уравнений поля исследуем прежде всего распространение монохроматических плоских электромагнитных волн в однородной среде с произвольными комплексными проницаемостями ε и μ. Плоской электромагнитной волной называется электромагнитное поле, векторы которого в каждый момент времени принимают постоянные значения на системе параллельных плоскостей. Таким образом, если выбрать ось z перпендикулярной этим плоскостям, то в монохроматической плоской волне комплексные амплитуды полей **E** и **H** будут зависеть только от координаты z, но не от координат x и y.

Для анализа распространения плоских волн в однородной среде запишем однородные векторные уравнения § 2 в декартовой системе координат x, y, z:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=ik\mu H_x; \quad \frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=-ik\varepsilon E_x,\\
&\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=ik\mu H_y; \quad \frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=-ik\varepsilon E_y, \qquad (11.01)\\
&\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=ik\mu H_z; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=-ik\varepsilon E_z.
\end{aligned}$$

Для плоской волны производные по x и y равны нулю, и уравнения (11.01) значительно упрощаются. Прежде всего, из третьего уравнения каждого столбца мы сразу получаем

$$H_z=0 \text{ и } E_z=0, \qquad (11.02)$$

откуда видно, что плоские электромагнитные волны в любой среде суть волны поперечные.

Комбинируя затем попарно уравнения, в которые входят E_x и H_y с одной стороны и E_y и H_x с другой стороны, мы приходим к двум независимым системам уравнений (в которых символ $\frac{\partial}{\partial z}$ мы заменили на $\frac{d}{dz}$, поскольку все величины зависят только от z)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dE_x}{dz} &= ik\mu H_y; & \frac{dE_y}{dz} &= -ik\mu H_x; \\ \frac{dH_y}{dz} &= ik\varepsilon E_x; & \frac{dH_x}{dz} &= -ik\varepsilon E_y. \end{aligned}\right\} \tag{11.03}$$

Исключая из каждой системы какую-нибудь одну функцию, мы для каждой из четырех величин E_x, H_y, E_y и H_x получаем простое уравнение

$$\frac{d^2U}{dz^2} + K^2U = 0, \tag{11.04}$$

где введено обозначение

$$K = k\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{11.05}$$

Величина K называется комплексным волновым числом для данной среды. Помимо этого, часто вводится обозначение

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{11.06}$$

и n называют комплексным показателем преломления в данной среде. Величины K и n связаны соотношением

$$K = kn. \tag{11.07}$$

Квадратный корень во всех этих формулах извлекается следующим образом

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{|\varepsilon||\mu|}\, e^{i\frac{\delta+\Delta}{2}}, \tag{11.08}$$

где углы δ и Δ взяты в пределах (9.14) или (9.15), а корень $\sqrt{|\varepsilon||\mu|}$ понимается в арифметическом смысле. Поэтому число n всегда находится в первом или втором квадранте плоскости комплексного переменного, а при выполнении ограничительных условий (9.12) — в первом квадранте.

ЭБ "Научное наследие России"

Дифференциальное уравнение (11.04) имеет общее решение

$$U = C_1 e^{iKz} + C_2 e^{-iKz}, \tag{11.09}$$

где C_1 и C_2 суть произвольные постоянные. Написав для четырех величин E_x, H_y, E_y и H_x выражения такого вида с разными постоянными и подставляя их в уравнения (11.03), приходим окончательно к следующим выражениям:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= Ae^{iKz} + Be^{-iKz}; \quad E_y = Ce^{iKz} + De^{-iKz}; \\ H_y &= \frac{1}{w}\left[Ae^{iKz} + Be^{-iKz}\right]; \\ H_x &= \frac{1}{w}\left[-Ce^{iKz} + De^{-iKz}\right], \end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

где введено обозначение

$$w = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{|\mu|}{|\varepsilon|}}\, e^{i\frac{\Delta-\delta}{2}}. \tag{11.11}$$

Комплексное число w часто называется волновым сопротивлением данной среды; смысл этого термина будет ясен из § 13.

Разберем физический смысл полученных выражений для E_x и H_y, причем ограничимся только первым слагаемым, положив $B = 0$:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= Ae^{iKz}, \\ H_y &= \frac{1}{w} Ae^{iKz}. \end{aligned}\right\} \tag{11.12}$$

Перейдем к физическим величинам, введя предварительно вещественные и мнимые части комплексных чисел K и n

$$K = K' + iK''; \quad n = n' + in'' \tag{11.13}$$

и полагая

$$A = |A|\, e^{i\alpha}. \tag{11.14}$$

Пользуясь соотношениями (2.01), мы получаем

$$\left.\begin{aligned} E_x(t) &= |A|\, e^{-K''z} \cos(K'z - \omega t + \alpha), \\ H_y(t) &= \frac{1}{|w|} |A|\, e^{-K''z} \cos\left(K'z - \omega t + \alpha + \frac{\delta - \Delta}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{11.15}$$

Электронное научное наследие России

Эти формулы показывают, что, отвлекаясь от экспоненциального множителя $e^{-K''z}$, мы получаем электромагнитную волну, распространяющуюся со скоростью

$$u = \frac{\omega}{K'} = \frac{c}{n'}, \tag{11.16}$$

поскольку составляющие E_x и H_y изменяются в зависимости от z и t по закону

$$\cos(K'z - \omega t + \varphi) = \cos[K'(z - ut) + \varphi].$$

Это распространение благодаря наличию экспоненциального множителя $e^{-K''z}$ сопровождается затуханием, причем амплитуда поля уменьшается в $e = 2{,}718$ раз при прохождении волной расстояния

$$d = \frac{1}{K''}. \tag{11.17}$$

Расстояние d называется глубиной проникания поля в данную среду, а для металлических проводников имеет еще одно название — толщина скин-слоя. Происхождение второго названия мы рассмотрим детально в гл. IV, а смысл первого заключается в том, что, пройдя расстояние в несколько d, электромагнитная волна настолько сильно уменьшает свою амплитуду, что дальше практически не проникает.

Таким образом, физический смысл K' и n' заключается в том, что они определяют скорость распространения волны в данном веществе, точнее, ее фазовую скорость, поскольку речь идет о фазе монохроматической плоской волны (11.15). При этом n' связано с фазовой скоростью u в данной среде и скоростью c в пустоте таким же соотношением, что и обыкновенный показатель преломления в оптике, отсюда и название „комплексный показатель преломления“ для величины $n = n' + in''$. Величины K'' и n'' определяют затухание волн при распространении в данной среде и связанную с этим затуханием глубину проникания d.

Если мы нарисуем зависимость поля E_x от z в какой-то определенный момент времени t, то получим кривую на рис. 6 — синусоиду, затухающую по оси z. С течением времени эта синусоида, оставаясь ограниченной сверху и снизу двумя „неподвижными“ экспонентами $\pm|A|e^{-K''z}$, передвигается со скоростью u по оси z: с такой ско-

„Научное наследие России“

ростью, в частности, перемещаются узлы поля, т. е. точки, где поле равно нулю.

Величина K' определяет в мгновенной картине поля (рис. 6) пространственную периодичность (или, точнее, при $K'' > 0$ квазипериодичность) поля. Если ввести длину волны λ' в данной среде с помощью соотношения

$$\lambda' = \frac{2\pi}{K'}; \quad K' = \frac{2\pi}{\lambda'}, \tag{11.18}$$

то длина λ' будет равна удвоенному расстоянию между двумя соседними узлами поля и приближенно равна (с тем большей точностью, чем меньше затухание K'') расстоянию между двумя соседними максимумами или минимумами поля. Отсюда название „длина волны“ для λ' и „волновое

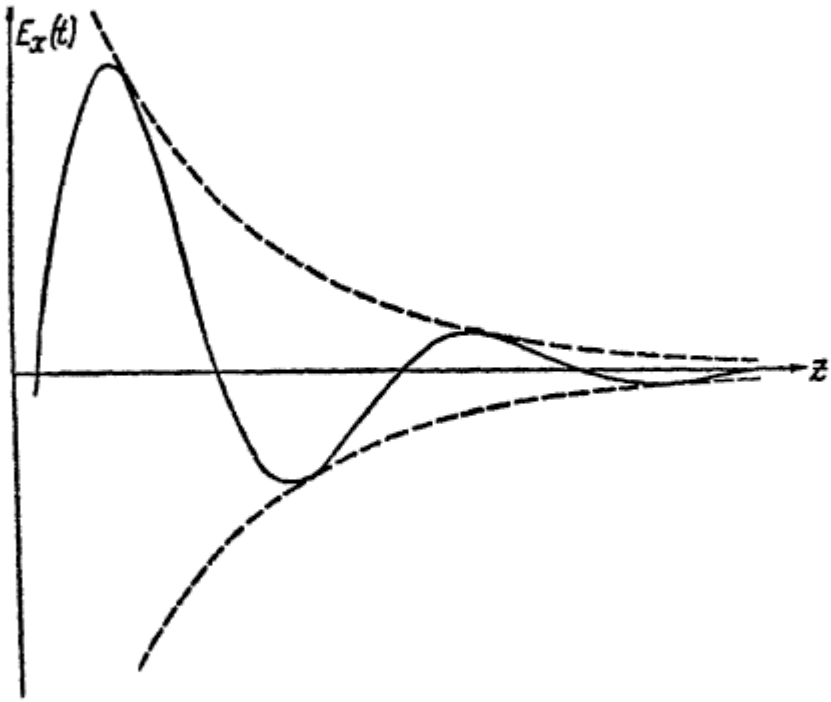


Рис. 6. Монохроматическая волна, распространяющаяся в поглощающей среде.

число“ для K, поскольку вещественная часть K равна числу волн, укладывающихся на отрезке 2π.

Формула (11.12) всегда определяет волну, затухающую в положительном направлении оси z, так как в силу условий (9.14) и формулы (11.08) всегда будем иметь

$$n'' \geqslant 0 \text{ и } K'' \geqslant 0. \tag{11.19}$$

Что же касается скорости распространения, то она для такой волны может быть как положительной, так и отрицательной. В последнем случае с течением времени сину-

ЭБ "Научное наследие России"

соида на рис. 6 передвигается не направо, а налево. Такой тип распространения принципиально возможен, хотя и встречается довольно редко; для осуществления этого необходимо, чтобы было

$$u<0, \quad K'<0, \quad n'<0 \tag{11.20}$$

или

$$\delta+\Delta>\pi; \tag{11.21}$$

это возможно, если один угол потерь больше $\frac{\pi}{2}$, а другой достаточно велик $\left(\text{он может быть и меньше } \frac{\pi}{2}\right)$.

Комплексный вектор Умова — Пойнтинга $\mathbf{S}^{\text{к}}$ в поле плоской электромагнитной волны (11.10) имеет только составляющую

$$S_z^{\text{к}}=\frac{c}{8\pi}\left(E_x H_y^*-E_y H_x^*\right). \tag{11.22}$$

Для волны (11.12) имеем

$$S_z^{\text{к}}=\frac{c}{8\pi w^*}|A|^2 e^{-2K''z}. \tag{11.23}$$

Образуя вещественную часть последнего выражения

$$\operatorname{Re} S_z^{\text{к}}=\frac{c}{8\pi|w|}\cos\frac{\delta-\Delta}{2}|A|^2 e^{-2K''z}, \tag{11.24}$$

мы видим, что в силу неравенства

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\delta-\Delta}{2}<\frac{\pi}{2}, \tag{11.25}$$

вытекающего из неравенств (9.14), плоская распространяющаяся волна (11.12) переносит, в среднем за период, энергию в направлении $+z$, т. е. в направлении своего затухания. Таким образом, направление переноса энергии распространяющейся волной всегда совпадает с направлением ее затухания и может (при отрицательной фазовой скорости) быть противоположно направлению набегания фазы.

Перейдем теперь от частной формулы (11.12) к выражениям (11.10) для плоской электромагнитной волны в общем случае. Слагаемые

$$E_x=Be^{-iKz},$$
$$H_y=-\frac{1}{w}Be^{-iKz} \tag{11.26}$$

Научное наследие России

в формулах (11.10) определяют плоскую волну, отличающуюся от волны (11.12) противоположным направлением распространения (и затухания). Для такой волны должно быть $\operatorname{Re} S_z^{\text{к}} < 0$, чем и объясняется знак минус в выражении для H_y.

Выражения (11.10) для E_y и H_x определяют сумму двух волн, распространяющихся в направлениях $+z$ и $-z$ и поляризованных перпендикулярно волнам (11.12) и (11.26). Наложением таких четырех волн и получается плоская электромагнитная волна в самом общем случае.

§ 12. Распространение электромагнитных волн в различных средах

Дадим краткий обзор электродинамических свойств различных сред и зависимости этих свойств от частоты.

Наиболее простыми свойствами обладает пустота, для которой

$$\varepsilon = 1 \text{ и } \mu = 1. \tag{12.01}$$

Пустота является единственной средой, в которой нет дисперсии и потерь. Так как для нее

$$n = 1 \text{ и } w = 1, \tag{12.02}$$

то плоская распространяющаяся волна (11.15) в пустоте имеет вид

$$E_x(t) = H_y(t) = |A| \cos(kz - \omega t + \alpha). \tag{12.03}$$

Таким образом, волновое число k, введенное в § 2, имеет простой физический смысл — оно определяет пространственную зависимость плоской электромагнитной волны в пустоте. В отличие от волнового числа K, введенного в § 11 для любой среды, величина k часто называется волновым числом в пустоте. Оно связано с длиной волны λ в пустоте формулой

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{12.04}$$

Длина волны λ, как видно из формулы (12.03), есть пространственный период плоской волны в пустоте. В силу формулы $k = \frac{\omega}{c}$, длина волны λ связана с частотой f соотношением

$$\lambda = \frac{c}{f}. \tag{12.05}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Скорость плоских волн в пустоте равна c и не зависит от частоты. Ввиду электромагнитного характера световых волн скорость c называют скоростью света.

В других средах законы распространения плоских волн будут иными. Если взять диэлектрики, имеющие в постоянных полях и при низких частотах пренебрежимо малую проводимость, магнитную проницаемость $\mu = 1$ и некоторую вещественную диэлектрическую постоянную ε_0, то для них будем иметь

$$K = k\sqrt{\varepsilon_0}, \quad w = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}. \tag{12.06}$$

Соотношение

$$n = \sqrt{\varepsilon_0}. \tag{12.07}$$

между показателем преломления для волн в прозрачном диэлектрике и его диэлектрической постоянной называется соотношением Максвелла. Это соотношение применимо лишь для таких частот, при которых диэлектрическая проницаемость ε практически совпадает со „статической" диэлектрической постоянной ε_0. Если же при данной частоте ε отличается от ε_0, то нужно применять соотношение

$$n = \sqrt{\varepsilon}, \tag{12.08}$$

справедливое, как мы видели в § 11, для всех веществ, имеющих $\mu = 1$.

Все диэлектрики в той или иной степени имеют дисперсию, и при достаточно высоких частотах для каждого диэлектрика соотношение (12.07) становится неправильным и должно быть заменено соотношением (12.08). Наиболее ярким примером неприменимости соотношения Максвелла (12.07) к электромагнитным волнам весьма высокой частоты является вода, имеющая при низких частотах $\varepsilon_0 = 81$ и $n = 1{,}32$ для инфракрасных волн ($\lambda \sim 1\mu$).

Вода является примером дипольного (полярного) диэлектрика. Поляризация таких диэлектриков происходит в результате поворота молекул, обладающих сильной инерцией, поэтому дисперсия диэлектрической проницаемости проявляется для них в радиодиапазоне. Для воды дисперсия начинается при частотах $f \sim 10^{10}$ *гц*, что соответствует длине волны $\lambda \sim 3$ *см*. Для спиртов, молекулы которых более сложны, дисперсия появляется при еще более низких частотах ($f \sim 10^9$ *гц*). Водяной пар сильно

Научное наследие России

меняет свою диэлектрическую проницаемость при более коротких волнах, при $\lambda \sim 0{,}1$ *мм*. Как правило, при наличии сильной дисперсии в некотором диапазоне частот, в том же диапазоне имеются большие диэлектрические потери.

Другими свойствами обладают неполярные диэлектрики, например, сухой неионизированный воздух, водород, бензол, гелий, неон и другие инертные газы; из твердых веществ — сера и алмаз. Поляризация этих диэлектриков обусловлена смещением электронов внутри атомов и молекул. Для них соотношение Максвелла (12.07) выполняется хорошо даже при оптических частотах. Объясняется это тем, что электроны обладают малой инерцией и следуют за изменениями поля вплоть до весьма высоких частот.

Среди проводников наибольшее практическое значение имеют металлы. Если ограничиться сначала неферромагнитными металлами, то можно сказать, что электродинамические свойства металлов определяются исключительно их проводимостью. Как показывает опыт, проводимость металлов при всех радиочастотах (вплоть до миллиметровых волн) практически сохраняет то же значение, что на постоянном токе. В оптическом диапазоне (начиная с инфракрасных волн) электрические свойства металлов усложняются.

Комплексная диэлектрическая проницаемость металлов имеет весьма большую мнимую часть

$$\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega} = \frac{2\sigma}{f}. \qquad (12.09)$$

Действительно, для меди имеем удельное сопротивление $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-6}$ *ом·см*, откуда проводимость в абсолютной системе единиц равна

$$\sigma = \frac{9 \cdot 10^{11}}{\rho} = 5 \cdot 10^{17} \text{ сек}^{-1}. \qquad (12.10)$$

Даже для висмута, являющегося среди металлов сравнительно плохим проводником ($\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ *ом·см*), имеем $\sigma = 7{,}5 \cdot 10^{15}$ *сек*$^{-1}$, в то время как для световых волн частота $f \sim 5 \cdot 10^{14}$ *гц*. Поэтому для металлов во всем диапазоне радиочастот величина ε'' является весьма большим числом, по сравнению с которым вещественной частью ε' комп-

ЭБ "Научное наследие России"

лексной диэлектрической проницаемости можно практически пренебречь. Поэтому для металлов обычно пишут

$$\varepsilon = i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{12.11}$$

Комплексное волновое число для металлов равно

$$K = k\sqrt{\frac{\sigma}{f}}(1+i) \tag{12.12}$$

или

$$K' = K'' = \frac{1}{d}, \tag{12.13}$$

где для d — глубины проникания поля в металл — можно написать выражение

$$d = \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{\sigma}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda c}{\sigma}}. \tag{12.14}$$

Чтобы оценить порядок величины d для различных частот, достаточно обратиться к следующей таблице, составленной для меди

λ	1 *см*	1 *м*	100 *м*	10 *км*
d	0,0004 *мм*	0,004 *мм*	0,04 *мм*	0,4 *мм*

Из других проводников следует отметить электролиты, проводимость которых обусловлена ионами (а не электронами, как у металлов). Проводимость электролитов при низких частотах довольно велика, однако при повышении частоты она падает. В качестве иллюстрации этого обстоятельства можно указать хотя бы на прозрачность большинства электролитов для световых волн, что свидетельствует об отсутствии проводимости при оптических частотах. Заметим, что снижение электропроводности для раствора поваренной соли наблюдается уже при радиочастотах — на метровых волнах.

Следует подчеркнуть, что резкое изменение свойств при переходе от одного диапазона частот к другому наблюдается в большом число случаев. При этом не только проводники могут становиться изоляторами, но и диэлектрики при некоторых частотах могут сильно поглощать электромагнитные волны.

Магнитные свойства ферромагнитных веществ, как правило, весьма сильно изменяются с частотой. Для

...научное наследие России"

обычных ферромагнитных материалов, используемых в сердечниках на низких (звуковых) частотах, μ при повышении частоты резко падает уже при частотах, превышающих частоты звукового диапазона, и одновременно появляются магнитные потери (растет μ'').

Специальные магнитные материалы сохраняют свои магнитные свойства и при более высоких частотах. В последнее время приобретают все большее значение ферриты, являющиеся непроводящими магнитными материалами.

Интересными электродинамическими свойствами обладает ионизированный газ (ионосфера). Для не слишком интенсивных электромагнитных волн ионосферу можно считать в первом приближении средой с проницаемостями

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad \mu = 1, \tag{12.15}$$

где e и m — заряд и масса электрона, а N — число свободных электронов в единице объема. Формула (12.15) показывает, что при достаточно низких частотах диэлектрическая проницаемость ионизированного газа может быть отрицательной (ср. замечания в § 9).

Из сделанного выше краткого обзора следует, что комплексные уравнения поля и комплексные проницаемости ε и μ позволяют охватить большое число различных сред и эффективно учесть дисперсию этих сред, что в рамках обычных уравнений Максвелла (§ 1) сделать не удается.

§ 13. Нормальное падение волны на плоскую границу раздела

Перед тем, как исследовать (в § 15) задачу о падении любой плоской волны на плоскую границу раздела, рассмотрим сначала более простую задачу для волны, падающей *нормально* на эту границу. А именно, пусть в пустом полупространстве $z < 0$ (см. рис. 7) распространяется по направлению к плоскости раздела $z = 0$ плоская волна, составляющие поля которой по § 11 и § 12 равны

$$E_x^\circ = H_y^\circ = Ae^{ikz}. \tag{13.01}$$

Это поле не зависит от x и y. Из соображений симметрии ясно, что в результате падения этой волны на границу возникает дополнительное поле, также не зависящее от x и y, т. е. согласно § 11 при $z \gtrless 0$ будут плоские

ЭБ "Научное наследие России"

волны, распространяющиеся в направлениях $\pm z$. Полное поле в пустоте согласно формуле (11.10) запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} E_x &= A(e^{ikz} + Re^{-ikz}) \\ H_y &= A(e^{ikz} - Re^{-ikz}) \end{aligned}\right\} \text{ при } z<0, \qquad (13.02)$$

где мы ввели обозначение

$$R = \frac{B}{A}. \qquad (13.03)$$

Величина R называется (комплексным) коэффициентом отражения по электрическому полю; коэффициент отражения по магнитному полю равен $-R$.

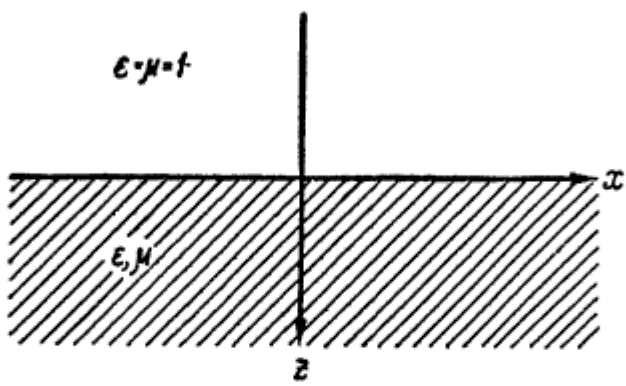


Рис. 7. Плоская граница раздела.

Полупространство $z>0$ является однородной средой с комплексными проницаемостями ε и μ. Полное поле при $z>0$ естественно искать в виде

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \tilde{A}e^{iKz} + \tilde{B}e^{-iKz} \\ H_y &= \frac{1}{w}(\tilde{A}e^{iKz} - \tilde{B}e^{-iKz}) \end{aligned}\right\} \text{ при } z<0, \qquad (13.04)$$

поскольку оно также не должно зависеть от x и y. Здесь $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — новые постоянные, K и w — комплексные параметры, соответствующие проницаемостям ε и μ. Первое слагаемое в выражениях (13.04), пропорциональное $\tilde{A}$, дает волну, распространяющуюся от границы $z=0$ внутрь среды, а второе слагаемое, пропорциональное $\tilde{B}$, определяет волну, распространяющуюся в противоположном

Электронное наследие России"

направлении. Из физических соображений ясно, что в данной задаче следует положить

$$\tilde{B}=0. \tag{13.05}$$

Действительно, значение $\tilde{B}\neq 0$ нужно брать в случае, когда плоская волна падает на границу раздела $z=0$ из полупространства $z>0$ (снизу), в нашей же задаче нужно считать $\tilde{B}=0$. Введя обозначение

$$D=\frac{\tilde{A}}{A}, \tag{13.06}$$

мы можем окончательно написать

$$\left.\begin{aligned} E_x &= AD\,e^{iKz} \\ H_y &= \frac{1}{w}AD\,e^{iKz} \end{aligned}\right\} \text{ при } z>0. \tag{13.07}$$

Величина D называется (комплексным) коэффициентом прохождения по электрическому полю; коэффициент прохождения по магнитному полю равен $\frac{1}{w}D$. Для определения коэффициентов R и D нужно воспользоваться граничными условиями (4.01), которые в данном случае имеют вид

$$E_x|_{z=-0}=E_x|_{z=+0}; \quad H_y|_{z=-0}=H_y|_{z=+0} \tag{13.08}$$

и дают соотношения

$$1+R=D; \quad 1-R=\frac{1}{w}D, \tag{13.09}$$

откуда

$$R=\frac{w-1}{w+1}; \quad D=\frac{2w}{w+1}. \tag{13.10}$$

Между формулами (13.10) и соответствующими формулами для коэффициентов отражения и прохождения при сочленении двух линий передачи с различными волновыми сопротивлениями (см. § 45) существует полная аналогия. Этим объясняется название волнового сопротивления для введенной в § 11 величины w; при этом пустоте приписывается волновое сопротивление $w=1$. Нужно однако отметить, что волновое сопротивление w при переходе к общей задаче об отражении и прохождении плоской волны (§ 15) теряет свое значение.

ЭБ "Научное наследие России"

Формулы (13.10) показывают, что вещество, у которого

$$w = 1, \tag{13.11}$$

т. е. диэлектрическая проницаемость равна магнитной

$$\varepsilon = \mu, \tag{13.12}$$

не отражает электромагнитных волн при нормальном падении. Пластина из такого вещества, помещенная на пути электромагнитных волн, излучаемых радиолокатором, будет „радиолокационной невидимкой" вследствие того, что радиолокатор при облучении плоской поверхности принимает только волны, отражаемые нормально — обратно к нему.

Выше мы нашли решение задачи о падении плоской волны на границу раздела. Физически ясно, что эта задача допускает лишь единственное решение (полученное выше), хотя непосредственно теорему единственности § 10 здесь применить нельзя, поскольку поле возбуждается не сторонними токами, расположенными в конечной части пространства, а падающей из бесконечности плоской волной. Отметим, однако, что условие (13.05) имеет, по существу, тот же физический смысл, что и условия (10.06) в теореме единственности: при $\tilde{B} \neq 0$ поле, возбуждаемое падающей волной во второй среде, имело бы недопустимый характер, экспоненциально возрастая (если $K'' > 0$) при удалении от границы раздела.

§ 14. Волновые уравнения. Обобщенные плоские волны

Электромагнитные волны в однородной изотропной среде можно рассмотреть несколько иначе, чем это сделано в § 11. Возьмем комплексные уравнения поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = ik\mu\mathbf{H}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E} \tag{14.01}$$

в однородной среде, т. е. при

$$\varepsilon = \text{const} \text{ и } \mu = \text{const}. \tag{14.02}$$

В однородной среде из уравнений (14.01) в качестве следствия получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{14.03}$$

Из комплексных уравнений поля (14.01) можно исключить один из векторов поля **E** или **H**. Для этого применим опе-

Электронное научное наследие России

рацию rot к обеим частям этих уравнений и воспользуемся известным тождеством векторного анализа

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}, \qquad (14.04)$$

принимающим в силу соотношений (14.03) для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ более простой вид

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E}; \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\Delta\mathbf{H}. \qquad (14.05)$$

Здесь через $\Delta\mathbf{A}$ обозначен оператор Лапласа, примененный к $\mathbf{A}$, т. е. такой вектор, составляющие которого по осям x, y, z декартовой системы координат равны

$$(\Delta\mathbf{A})_x = \Delta A_x; \quad (\Delta\mathbf{A})_y = \Delta A_y; \quad (\Delta\mathbf{A})_z = \Delta A_z. \qquad (14.06)$$

Окончательно получаем для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ уравнения

$$\Delta\mathbf{E} + K^2\mathbf{E} = 0; \quad \Delta\mathbf{H} + K^2\mathbf{H} = 0. \qquad (14.07)$$

Эти уравнения называются волновыми уравнениями (для монохроматических колебаний) или кратко, но не совсем точно, уравнениями колебаний. Через K обозначено, как и выше, волновое число в данной среде (в общем случае комплексное), определяемое формулами (11.05) и (11.07).

Таким образом, при решении задач о распространении электромагнитных волн в однородной среде можно исходить не из уравнений электромагнитного поля, а из волнового уравнения (14.07) для одного из векторов поля. При этом нельзя забывать, что, помимо волнового уравнения, этот вектор должен еще удовлетворять одному из уравнений (14.03). Найдя, например, вектор $\mathbf{E}$, удовлетворяющий обоим уравнениям

$$\Delta\mathbf{E} + K^2\mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \qquad (14.08)$$

всегда можем определить вектор $\mathbf{H}$ из первого уравнения (14.01), т. е. по формуле

$$\mathbf{H} = \frac{1}{ik\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}, \qquad (14.09)$$

и тем самым решить исходные уравнения (14.01). Аналогично, найдя решения уравнений для магнитного поля

$$\Delta\mathbf{H} + K^2\mathbf{H} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \qquad (14.10)$$

и определив электрическое поле формулой

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{ik\varepsilon}\operatorname{rot}\mathbf{H}, \qquad (14.11)$$

ЭБ "Научное наследие России"

также получаем векторы, удовлетворяющие исходным уравнениям (14.01). Оба эти метода применены ниже в § 15.

Векторные уравнения (14.07) в сущности означают, что любая декартова составляющая каждого из векторов поля удовлетворяет скалярному волновому уравнению

$$\Delta U + K^2 U = 0. \tag{14.12}$$

Для плоских волн это уравнение переходит в уравнение (11.04). Изучим более подробно частные решения уравнения (14.12). Как легко показать, функция

$$U = Ce^{iK(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \tag{14.13}$$

является решением этого уравнения, если C есть постоянная, а постоянные коэффициенты α, β, γ в экспоненте удовлетворяют соотношению

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \tag{14.14}$$

Такое частное решение скалярного волнового уравнения (14.12) мы будем называть обобщенной плоской волной. Если α, β, γ суть вещественные числа, удовлетворяющие соотношению (14.14), то функция (14.13) является плоской волной в том смысле, как мы ее определили в § 11. Действительно, в этом случае можно ввести новую координату z' с помощью соотношения

$$z' = \alpha x + \beta y + \gamma z, \tag{14.15}$$

и функция (14.13) переписывается в виде

$$U = Ce^{iKz'}, \tag{14.16}$$

вполне аналогичном выражению (11.12) для плоской волны. Числа α, β, γ будут иметь смысл направляющих косинусов, фиксирующих направление оси z' относительно системы координат x, y, z.

Если же среди чисел α, β, γ, удовлетворяющих соотношению (14.14), есть хотя бы одно комплексное число, то обобщенную плоскую волну (14.13) уже нельзя привести к простой плоской волне (14.16); такая волна, как мы увидим ниже, имеет целый ряд особенностей, отличающих ее от обычных плоских волн. В частности, при переходе от „скалярной“ волны (14.13) к векторным электромагнитным волнам оказывается, что обобщенные плоские волны уже не являются чисто поперечными (ср. § 16).

Научное наследие России

Рассмотрим более детально случай комплексных чисел α, β, γ. Положим

$$\alpha = \alpha' + i\alpha''; \quad \beta = \beta' + i\beta''; \quad \gamma = \gamma' + i\gamma'', \qquad (14.17)$$

где α', β', γ' — вещественные части, α'', β'', γ'' — мнимые части этих чисел. Тогда в пустоте ($K = k$) формула (14.13) примет вид

$$U = Ce^{ik(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)} e^{-k(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)}, \qquad (14.18)$$

так что поверхности равной фазы будут плоскостями

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \text{const}, \qquad (14.19)$$

а поверхности равной амплитуды — плоскостями

$$\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = \text{const}. \qquad (14.20)$$

Плоскости (14.19) и (14.20) перпендикулярны друг другу, так как из условия (14.14) вытекает соотношение

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 \qquad (14.21)$$

В поглощающих средах плоскости равной амплитуды и плоскости равной фазы могут образовывать и острые углы (ср. § 16). Во всех случаях несовпадения этих плоскостей амплитуда волны меняется в плоскости равной фазы, поэтому обобщенные плоские волны часто называют неоднородными плоскими волнами.

В заключение остановимся на вопросе: всегда ли электромагнитные волны являются поперечными? В § 11 мы показали, что плоские волны непременно являются волнами поперечными: они не имеют продольных составляющих — составляющих E_z и H_z в направлении своего распространения (по оси z). Однако плоские волны с бесконечно широким фронтом являются, в сущности, далеко идущей идеализацией: реальные электромагнитные волны либо имеют конечное поперечное сечение, либо обладают некоторой расходимостью.

Рассмотрим (см. рис. 8,*б*) картину силовых линий в плоской волне, границы которой изображены пунктиром, так что вне этих границ электромагнитные поля отсутствуют. Вдали от границы плоской волны картина силовых линий электрического поля практически такая же, как и в бесконечной плоской волне на рис. 8,*а*: пучки электрических силовых линий с противоположной направленностью чередуются и находятся друг от друга на расстоянии $\frac{\lambda}{2}$,

если распространение плоских волн происходит в пустоте. В плоской волне, ограниченной с боков, силовые линии электрического поля не могут, очевидно, выходить за боковые границы волны, поскольку вне этих границ поле отсутствует. Так как электрическое поле в однородной среде удовлетворяет соотношению (14.03), то силовые линии должны быть замкнутыми (рис. 8,*б*). Форма электрических

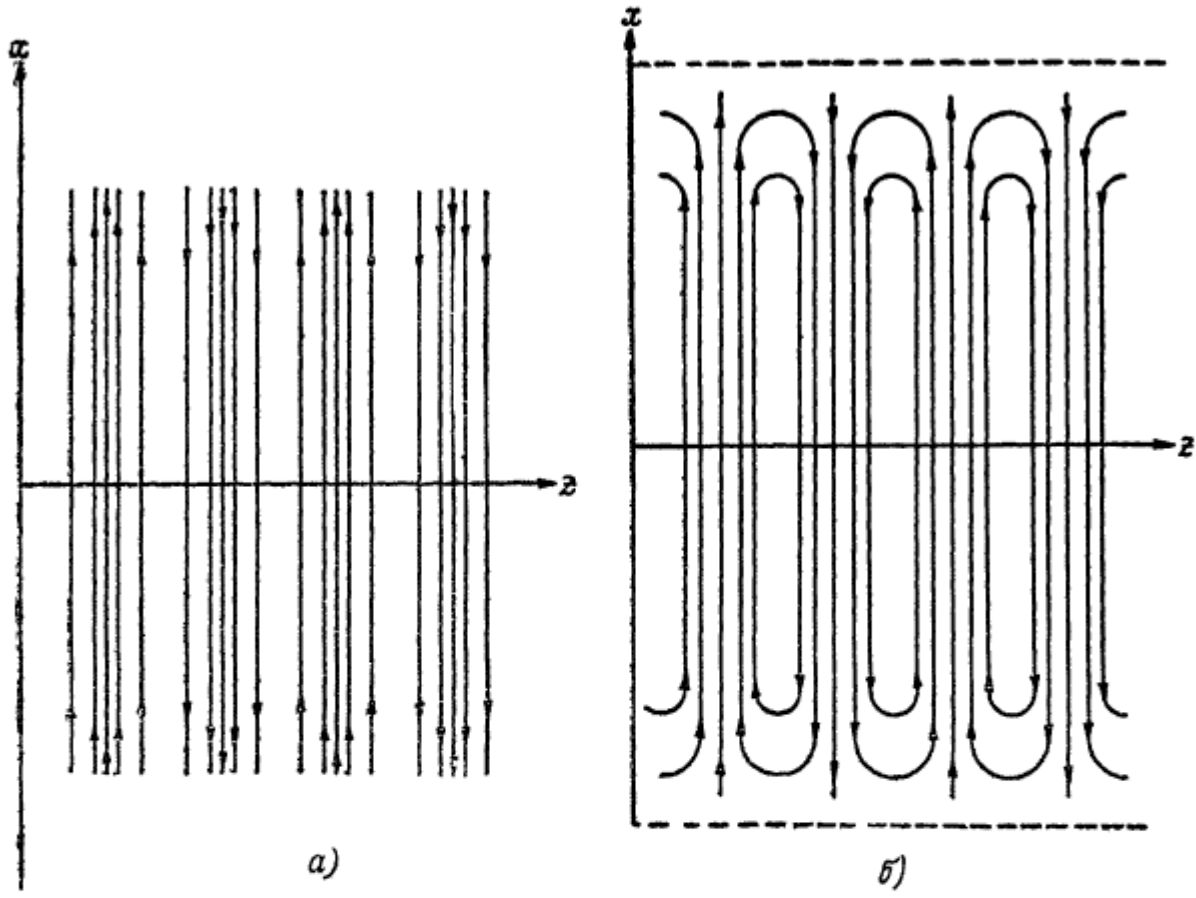


Рис. 8. Силовые линии в электромагнитной волне:
а — идеальная плоская волна; *б* — плоская волна, имеющая конечное поперечное сечение.

силовых линий (о магнитных силовых линиях можно сказать то же самое) показывает, что такая плоская волна уже не является чисто поперечной и неизбежно имеет продольные составляющие поля.

Можно показать, что не только ограничение фронта волны, но и любое изменение амплитуды волны вдоль ее фронта неизбежно влечет за собой появление продольных составляющих. Напомним, что при расходимости волны также появляются составляющие в направлении распространения. Действительно, в сферической волне, излучаемой, например, элементарным диполем, даже на больших расстояниях от диполя имеется небольшая радиальная со-

"Научное наследие России"

ставляющая электрического поля, за счет которой электрические силовые линии образуют замкнутые кривые.

Из сказанного следует, что электромагнитные волны имеют чисто поперечный характер только в случае „однородных" плоских волн (см. § 11), в более сложных случаях этого может не быть.

§ 15. Отражение плоской волны от плоской границы раздела

Пусть плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в пустоте, падает на плоскую границу полубесконечной среды, имеющей комплексные проницаемости ε и μ. Направим ось z перпендикулярно плоской поверхности раздела внутри нижней среды и будем, как в § 13, считать, что плоскость x, y той же системы координат совпадает с границей раздела (рис. 9). Обозначим направление распространения падающей плоской волны через z' и проведем ось z' через начало координатной системы x, y, z. Кроме того, выберем ось x так, чтобы она лежала в плоскости zz', которую в оптике обычно называют плоскостью падения (плоскостью падения называется, как известно, плоскость, образованная нормалью к поверхности раздела и падающим лучом).

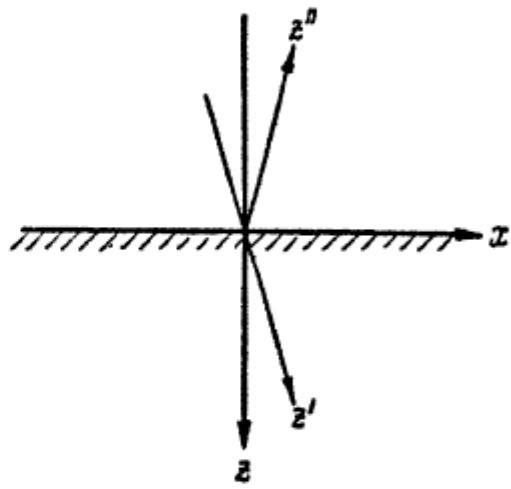


Рис. 9. Наклонное падение плоской волны на плоскую границу раздела $z = 0$.

При рассмотрении явлений, происходящих при падении волны на границу раздела, необходимо знать еще поляризацию падающей волны. В данной задаче приходится различать две различные поляризации падающей волны в зависимости от ориентации ее электрического и магнитного полей по отношению к плоскости падения, а именно:

1. Магнитное поле падающей волны перпендикулярно плоскости падения и, следовательно, параллельно границе раздела: оно имеет только составляющую H_y. Электрическое поле лежит в плоскости падения и имеет составляющие E_x и E_z.

2. Электрическое поле перпендикулярно плоскости падения и, следовательно, параллельно плоскости раздела:

ЭБ „Научное наследие России"

оно имеет единственную составляющую E_y. Магнитное поле параллельно плоскости падения и имеет составляющие H_x и H_z.

Для краткости мы будем называть эти две поляризации просто первой и второй поляризациями. При рассмотрении первой поляризации будем считать, что падающая волна имеет единичную амплитуду, так что ее составляющая H_y равна

$$H_y^0 = e^{ikz'}. \tag{15.01}$$

Обозначим через φ угол падения, т. е. угол между осями z и z'. Тогда

$$z' = z\cos\varphi + x\sin\varphi, \tag{15.02}$$

и падающая волна (15.01) перепишется в виде

$$H_y^0 = e^{ik(z\cos\varphi + x\sin\varphi)}. \tag{15.03}$$

Предположим, что полное магнитное поле имеет только составляющую H_y в нижней среде (при $z > 0$). Будем искать ее в виде обобщенной плоской волны

$$H_y = D_1 e^{iK(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \tag{15.04}$$

амплитуда D_1 которой считается постоянной, а коэффициенты α, β, γ выбираются из следующих соображений. Во-первых, падающая волна (15.03) не зависит от y, поэтому из соображений симметрии полное поле во всем пространстве не должно зависеть от y, вследствие чего мы полагаем $\beta = 0$; при этом удовлетворяется также второе уравнение (14.03). Далее, зависимость падающей волны от x дается множителем $e^{ikx\sin\varphi}$. Волна, возбуждаемая в нижней среде, должна зависеть от x по тому же закону, иначе с помощью волны (15.04) мы не сможем удовлетворить граничным условиям на всей плоскости раздела $z = 0$, т. е. при любых значениях x; отсюда следует, что

$$\alpha = \frac{k\sin\varphi}{K} = \frac{\sin\varphi}{n}. \tag{15.05}$$

Третий коэффициент γ должен быть определен из соотношения $(14.14)_b$, но при этом необходимы дополнительные соображения, которые позволили бы выбрать знак квадратного корня в выражении

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{n^2}}. \tag{15.06}$$

Электронное наследие России

Этот знак выбирается из тех же соображений, что и в § 13. А именно, если нижняя среда обладает потерями, то мы выбираем γ так, чтобы величина

$$\nu = n\gamma = \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi} \tag{15.07}$$

удовлетворяла условию

$$\operatorname{Im}\nu > 0. \tag{15.08}$$

В этом случае волна (15.04) в нижней среде будет затухать при удалении от границы раздела, что и следует ожидать от волны, возбужденной на границе раздела. Выбор другого знака для ν означал бы, что мы рассматриваем волну, падающую на границу раздела снизу и затухающую при приближении к этой границе.

Некоторые трудности представляет выбор знака для ν в случае, когда нижняя среда не имеет потерь и коэффициент ν вещественный. В этом случае ν обычно считают положительным, чтобы распространение фазы волны происходило от границы раздела во внутрь данной среды. Нужно, однако, выбирать такое ν, чтобы распространение энергии (ср. выше § 11) шло от границы раздела. Вводя в рассмотрение малые потери в нижней среде и выбирая ν в соответствии с неравенством (15.08), мы получаем правильный результат и в пределе, когда потери отсутствуют.

Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на плоскости $z = 0$, необходимо считать, что в верхнем полупространстве ($z < 0$), наряду с падающей волной (15.03), имеется еще дополнительное поле, которое мы будем также искать в виде обобщенной плоской волны

$$H_y^1 = R_1 e^{ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)}. \tag{15.09}$$

Из тех же соображений, что и выше, мы получим $\beta = 0$ и $\alpha = \sin\varphi$, и соотношение (14.14) дает $\gamma = -\cos\varphi$, так как при $\gamma = \cos\varphi$ мы получаем волну вида (15.03), которую прибавлять к падающей мы не имеем права, так как амплитуда последней равна единице по условию задачи.

Для составляющей H_y полного поля в верхнем и нижнем полупространстве приходим к следующим выражениям

$$\left.\begin{aligned} H_y &= e^{ik(z\cos\varphi + x\sin\varphi)} + R_1 e^{ik(-z\cos\varphi + x\sin\varphi)} && [\text{при } z < 0], \\ H_y &= D_1 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)} && [\text{при } z > 0]. \end{aligned}\right\} \tag{15.10}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Неизвестные коэффициенты R_1 и D_1, фигурирующие в этих формулах, должны быть определены из граничных условий, которым должны удовлетворять поля на плоскости раздела $z=0$. Они называются (ср. § 13): R_1 — коэффициентом отражения, D_1 — коэффициентом прохождения. Индекс *1* указывает, что они относятся к первой поляризации (и к магнитному полю).

В дальнейшем мы считаем, что магнитное поле имеет единственную составляющую (15.10). Оно удовлетворяет уравнениям (14.10) и позволяет по формуле (14.11) вычислить электрическое поле.

Граничные условия для волн первой поляризации имеют вид [ср. формулы (13.08)]:

$$H_y|_{z=-0}=H_y|_{z=+0};\quad E_x|_{z=-0}=E_x|_{z=+0}. \tag{15.11}$$

Учитывая, что согласно уравнению (14.11)

$$E_x=\frac{1}{ik\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial z},$$

второе граничное условие (15.11) перепишем в виде

$$\left.\frac{\partial H_y}{\partial z}\right|_{z=-0}=\frac{1}{\varepsilon}\left.\frac{\partial H_y}{\partial z}\right|_{z=+0}. \tag{15.12}$$

Подставляя выражения (15.10) в эти граничные условия, приходим к следующим алгебраическим уравнениям для коэффициентов R_1 и D_1:

$$\left.\begin{aligned} 1+R_1&=D_1,\\ \varepsilon\cos\varphi\,(1-R_1)&=\nu D_1 \end{aligned}\right\}, \tag{15.13}$$

откуда они получаются равными

$$R_1=\frac{\varepsilon\cos\varphi-\nu}{\varepsilon\cos\varphi+\nu};\quad D_1=\frac{2\varepsilon\cos\varphi}{\varepsilon\cos\varphi+\nu}. \tag{15.14}$$

Исследование второй поляризации производится аналогичным образом. В этом случае мы имеем в падающей волне только составляющие E_y, H_x, H_z и полное поле ищем с такими же тремя составляющими, выражая его через E_y. Из тех же соображений поле плоской волны с единичной амплитудой, падающей под углом φ, равно

$$E_y^0=e^{ikz'}=e^{ik(z\cos\varphi+x\sin\varphi)}. \tag{15.15}$$

Электронное научное наследие России

Мы ищем полное поле в виде

$$\left.\begin{aligned} E_y &= e^{ik(z\cos\varphi + x\sin\varphi)} + R_2 e^{ik(-z\cos\varphi + x\sin\varphi)} \quad [\text{при } z<0], \\ E_y &= D_2 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)} \quad [\text{при } z>0], \end{aligned}\right\} \tag{15.16}$$

удовлетворяющем уравнениям (14.08), и ставим граничные условия

$$E_y|_{z=-0} = E_y|_{z=+0}; \quad H_x|_{z=-0} = H_x|_{z=+0}. \tag{15.17}$$

В силу формулы (14.09) мы имеем

$$H_x = -\frac{1}{ik\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z},$$

поэтому второе граничное условие (15.17) можно записать в виде

$$\frac{\partial E_y}{\partial z}\Big|_{z=-0} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z}\Big|_{z=+0}. \tag{15.18}$$

Отсюда приходим к уравнениям для R_2 и D_2:

$$\left.\begin{aligned} 1 + R_2 &= D_2 \\ \mu\cos\varphi(1 - R_2) &= \nu D_2 \end{aligned}\right\} \tag{15.19}$$

и окончательно получаем

$$R_2 = \frac{\mu\cos\varphi - \nu}{\mu\cos\varphi + \nu}; \quad D_2 = \frac{2\mu\cos\varphi}{\mu\cos\varphi + \nu}, \tag{15.20}$$

где R_2 — коэффициент отражения, D_2 — коэффициент прохождения для второй поляризации (по электрическому полю).

Рассмотрим физический смысл наших формул. Прежде всего, в формулах (15.10) и (15.16) содержится известный закон отражения: угол падения равен углу отражения. Действительно, второе слагаемое для поля при $z<0$, появляющееся в результате влияния поверхности раздела, имеет зависимость от координат в виде

$$e^{ikz''}, \text{ где } z'' = -z\cos\varphi + x\sin\varphi. \tag{15.21}$$

При этом ось z'', по направлению которой происходит распространение этой дополнительной, „отраженной" волны, составляет с осью $-z$ тот же угол φ, какой направление распространения падающей волны (ось z') составляет с осью z.

ЭБ "Научное наследие России"

В формулах (15.10) и (15.16) содержится также (для непоглощающих сред) известный закон преломления, который мы рассмотрим в § 16.

Выведенные выше формулы имеют широкое применение. Ниже мы остановимся на простейших следствиях, вытекающих из них.

Для нормального падения электромагнитной волны имеем $\varphi = 0$, и формулы (15.14) и (15.20) переходят в формулы (13.10). Точнее, получаем

$$R = -R_1 = R_2; \quad D = wD_1 = D_2. \tag{15.22}$$

При нормальном падении плоскость падения становится неопределенной и различие поляризаций пропадает. Соотношения (15.22) получаются вследствие того, что R_1 и D_1 суть коэффициенты отражения и прохождения по магнитному полю, а R_2 и D_2 — коэффициенты отражения и прохождения по электрическому полю. О различии этих коэффициентов для нормального падения мы говорили уже в § 13.

В связи со сказанным в § 13 естественно возникает вопрос о том, какими свойствами должно обладать вещество, чтобы являться „оптической невидимкой". Так как визуальное обнаружение любого тела обусловлено волнами, отраженными телом под самыми различными углами, то для этого необходимо, чтобы коэффициенты отражения R_1 и R_2 равнялись нулю для любого угла падения φ, что в силу формул (15.14) и (15.20) возможно только при

$$\varepsilon = \mu = 1, \tag{15.23}$$

т. е. когда электромагнитные свойства вещества не отличимы от электромагнитных свойств пустоты (воздуха).

Отметим условия, при которых вещество полностью отражает падающие на него электромагнитные волны. Например, если при конечном μ величина $\varepsilon \to \infty$, то коэффициенты отражения обеих поляризаций стремятся к предельным значениям

$$R_1 = 1 \quad \text{и} \quad R_2 = -1. \tag{15.24}$$

Как мы видели в § 12, к этому предельному случаю весьма близко подходят металлы, у которых проницаемость ε имеет весьма большую мнимую часть. Поэтому металлы являются почти идеальными зеркалами для электромагнитных волн: они почти полностью отражают падающую на них электромагнитную энергию. Если бы существовали ве-

Электронное научное наследие России

щества, для которых проницаемость μ была бы весьма велика (при конечном ε), то коэффициенты отражения от таких веществ приближались бы к предельным значениям

$$R_1 = -1 \quad \text{и} \quad R_2 = 1. \tag{15.25}$$

Приведенные примеры не исчерпывают собой случаев сильного отражения. Полное отражение может реализоваться и при конечных значениях проницаемостей ε и μ. Например, если ε и μ суть вещественные числа, то при мнимости величины ν, определяемой формулой (15.07), или равенстве ее нулю коэффициенты R_1 и R_2 становятся по абсолютной величине равными единице

$$|R_1| = |R_2| = 1. \tag{15.26}$$

Для этого необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$n^2 \leqslant \sin^2 \varphi, \tag{15.27}$$

которое (если не считать случаев падения волны на границу диэлектрик—пустота со стороны диэлектрика, о чем мы будем говорить ниже) может иметь место при падении волны на плоскую границу ионизированного газа, параметры которого определяются формулами (12.15). Действительно, в этом случае всегда

$$\varepsilon < 1, \tag{15.28}$$

поэтому существует такой интервал углов падения, при котором отражение от границы будет полным. Если же при данной частоте диэлектрическая проницаемость ε отрицательна, то равенство (15.26) имеет место при всех φ, т. е. падающая волна всегда претерпевает полное отражение.

Разберем еще вопрос о том, при каких углах падения на плоскую границу вещества с проницаемостями ε и μ коэффициент отражения будет равен нулю. Обозначим через φ_1 угол падения при нулевом отражении для 1-ой поляризации, через φ_2 — такой же угол для 2-ой поляризации. Углы φ_1 и φ_2 должны удовлетворять соотношениям

$$\varepsilon \cos \varphi_1 = \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2 \varphi_1} \quad \text{и} \quad \mu \cos \varphi_2 = \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2 \varphi_2},$$

откуда получаем

$$\cos \varphi_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon^2 - 1}} \quad \text{и} \quad \cos \varphi_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu^2 - 1}}. \tag{15.29}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Нулевое отражение имеет место, если величины $\cos\varphi_1$ и $\cos\varphi_2$, вычисляемые по этим формулам, суть вещественные числа, лежащие между нулем и единицей. Например, при $\varepsilon = \mu$ получаем

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = 1; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \tag{15.30}$$

что соответствует разобранному в § 13 случаю вещества, „невидимого“ для радиолокатора.

Если мы имеем прозрачный немагнитный диэлектрик

$$\mu = 1; \quad n = \sqrt{\varepsilon} \tag{15.31}$$

с вещественным значением n, то для него по формулам (15.29) получаем

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}; \quad \cos\varphi_2 = \infty. \tag{15.32}$$

Таким образом, волны 2-ой поляризации всегда частично отражаются от немагнитных диэлектриков, а волны 1-ой поляризации не отражаются при падении под углом φ_1, который может быть найден по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = n. \tag{15.33}$$

Этот угол называется углом Брюстера.

Выше мы подробно исследовали падение плоских волн на границу раздела в предположении, что одна из сред, а именно та среда, в которой распространяется падающая плоская волна, является пустотой. Легко показать (это можно сделать как непосредственно, так и с помощью леммы § 21), что если волна падает со стороны среды, имеющей проницаемости ε_1 и μ_1, а другая полубесконечная среда имеет проницаемости ε_2 и μ_2, то формулы (15.14) и (15.20) сохраняют свою силу, если в них через ε и μ обозначить „относительные“ проницаемости

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \tag{15.34}$$

а через n — „относительный“ показатель преломления

$$n = \frac{n_2}{n_1}. \tag{15.35}$$

Формулы (15.10) и (15.16) при этом также сохранят свой

Электронное наследие России

смысл, если k заменить на комплексное волновое число в первой (верхней) среде с проницаемостями ε_1 и μ_1.

Полученные таким путем формулы позволяют рассмотреть, в частности, падение плоской волны из любой среды на ее границу с пустотой. Соотношение (15.27) есть условие полного отражения от границы, называемого обычно в учебниках полным внутренним отражением.

§ 16. Структура электромагнитного поля прошедшей волны

Выше мы уделяли основное внимание волне, отраженной от границы раздела. Исследуем более подробно структуру поля, возбуждаемого падающей волной во второй среде и кратко называемого прошедшей волной. Для этого воспользуемся формулами (15.10) и (15.16), а также формулами

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{ik\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial z}; \qquad H_x = -\frac{1}{ik\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z}; \\ E_z &= -\frac{1}{ik\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x}; \quad H_z = \frac{1}{ik\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{16.01}$$

вытекающими из уравнений (14.11) и (14.09).

Составляющие поля для 1-ой поляризации будут равны

$$\left.\begin{aligned} H_y &= D_1 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)}; \\ E_x &= \frac{\nu}{\varepsilon} D_1 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)}; \\ E_z &= -\frac{\sin\varphi}{\varepsilon} D_1 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)}, \end{aligned}\right\} \tag{16.02}$$

а для 2-ой поляризации

$$\left.\begin{aligned} E_y &= D_2 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)}; \\ H_x &= -\frac{\nu}{\mu} D_2 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)}; \\ H_z &= \frac{\sin\varphi}{\mu} D_2 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)}. \end{aligned}\right\} \tag{16.03}$$

Наиболее простой физический смысл эти формулы имеют при вещественных значениях ν и n. В этом случае

ЭБ "Научное наследие России"

зависимость всех составляющих поля от координат определяется множителем $e^{iknz'''}$, где

$$\left.\begin{aligned} z''' &= \frac{\nu}{n} z + \frac{\sin\varphi}{n} x = z\cos\psi + x\sin\psi; \\ \sin\psi &= \frac{\sin\varphi}{n}; \quad \cos\psi = \frac{\nu}{n} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\varphi}{n}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{16.04}$$

Распространение во второй среде происходит в направлении оси z''', составляющей с осью z, т. е. с нормалью к поверхности раздела, угол ψ, который называют углом преломления. Угол преломления ψ связан с углом падения φ законом Снеллиуса

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = n, \tag{16.05}$$

известным из элементарной физики.

Структура прошедшей волны в этом случае довольно проста. Если перейти к новой системе координат, в которой ось z есть ось z''', ось x перпендикулярна оси z''' и лежит в плоскости падения, а ось y — та же, что и раньше, то в этой системе координат поле прошедшей волны определяется, как легко показать на основании выражений (16.02) и (16.03), формулами вида (11.12). Иначе говоря, во второй среде распространяется обычная плоская волна.

Если же величина ν, определяемая формулами (15.07) и (15.08), оказывается комплексной

$$\nu = \nu' + i\nu'' \quad \text{и} \quad \nu'' > 0, \tag{16.06}$$

то структура поля во второй среде оказывается гораздо более сложной. В этом случае в ней распространяется обобщенная плоская волна, которая не сводится к простым плоским волнам, изученным нами в § 11, и подчиняется более сложным закономерностям § 14.

Фаза поля определяется множителем

$$e^{ik(\nu' z + x\sin\varphi)} = e^{ik\sqrt{(\nu')^2 + \sin^2\varphi}\cdot z'''},$$

так что распространение фазы прошедшей волны происходит в направлении оси

$$\left.\begin{aligned} z'' &= z\cos\psi + x\sin\psi, \\ \sin\psi &= \frac{\sin\varphi}{\sqrt{(\nu')^2 + \sin^2\varphi}}; \quad \cos\psi = \frac{\nu'}{\sqrt{(\nu')^2 + \sin^2\varphi}}, \end{aligned}\right\} \tag{16.07}$$

ЭБ "Научное наследие России"

составляющей с осью z угол ψ, который по-прежнему можно считать углом преломления; он связан с углом падения φ более сложным соотношением

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \sqrt{(\nu')^2 + \sin^2\varphi}, \qquad (16.08)$$

переходящим в формулу (16.05) при вещественном ν.

При распространении в среде прошедшая волна испытывает затухание, определяемое множителем $e^{-k\nu''z}$ в формулах (16.02) и (16.03). Таким образом, волна затухает в направлении нормали к поверхности, а фаза распространяется под некоторым углом к нормали. Иначе говоря, плоскости равной амплитуды и плоскости равной фазы прошедшей волны пересекаются друг с другом под некоторым углом ψ, чего в случае простой плоской волны (§ 11) не наблюдается. Другой особенностью обобщенной плоской волны, возбуждаемой во второй среде при комплексных значениях ν, является наличие составляющих поля, параллельных оси z''', т. е. направлению распространения фазы этой волны. В этом случае прошедшая волна теряет свой поперечный характер, если под поперечностью понимать отсутствие составляющих, перпендикулярных фазовому фронту (ср. конец § 14).

Заметим, что при нормальном падении электромагнитная волна во второй среде всегда является простой плоской волной, распространяющейся от границы в глубину среды. Действительно, в этом случае из формул (16.02) и (16.03) легко получить выражения

$$\left.\begin{aligned} H_y &= D_1 e^{iknz}; \qquad E_y = D_2 e^{iknz}; \\ E_x &= wD_1 e^{iknz}; \quad H_x = -\frac{1}{w} D_2 e^{iknz}, \end{aligned}\right\} \qquad (16.09)$$

эквивалентные выражениям (13.07) в силу формул (15.22).

Предположим теперь, что комплексный показатель преломления второй среды имеет большую абсолютную величину

$$|n| \gg 1. \qquad (16.10)$$

При этом условии составляющими E_z и H_z в поле прошедшей волны при любых углах φ можно пренебречь по сравнению с составляющими E_x и H_x, так как последние по порядку величины в n раз больше первых. Кроме

ЭБ "Научное наследие России"

того, при этом условии мы можем считать $\nu = n$. Составляющие поля прошедшей волны можно записать в приближенной форме

$$\left.\begin{aligned} H_y &= D_1 e^{ik(nz + x\sin\varphi)}; \quad E_y = D_2 e^{ik(nz + x\sin\varphi)}; \\ E_x &= \varpi D_1 e^{ik(nz + x\sin\varphi)}; \quad H_x = -\frac{1}{\varpi} D_2 e^{ik(nz + x\sin\varphi)}. \end{aligned}\right\} \qquad (16.11)$$

Эти формулы показывают, что при условии (16.10) во второй среде возбуждается почти нормально распространяющаяся плоская волна, отличающаяся от волны, определяемой формулами (16.09), численными значениями D_1 и D_2, а также тем, что ее зависимость от x определяется множителем $e^{ikx\sin\varphi}$ (эта зависимость задается падающей волной). Однако ввиду условия (16.10) плоскости равных фаз в этом случае составляют с плоскостями равных амплитуд весьма малые углы и являются почти параллельными границе раздела. Поэтому при условии (16.10) мы можем говорить о том, что прошедшая волна имеет ту же структуру, что и нормально распространяющаяся плоская волна. Составляющие электрического и магнитного поля прошедшей волны, как видно из формул (16.11), связаны между собой соотношениями

$$E_x = \varpi H_y; \quad E_y = -\varpi H_x, \qquad (16.12)$$

справедливыми для плоских волн, рассмотренных нами в § 11 [см. формулу (11.12)].

К соотношениям (16.12) мы вернемся в гл. IV.

Заметим в заключение, что изученные выше явления, имеющие место при падении волны на границу раздела двух сред, имеют более широкую область приложения, чем это может показаться с первого взгляда. Во-первых, законы отражения и преломления используются в оптике в случаях, когда электромагнитные волны и поверхности раздела не являются плоскими (расчеты прохождения волн через систему линз, отражение от зеркал и т. п.). Как можно показать, такое использование законов преломления и отражения должно приводить к правильным результатам, если радиусы кривизны как поверхности раздела,

ЭБ ...ое наследие России"

так и поверхности фронта волны значительно больше длины волны. Во-вторых, те же законы могут быть применены и для расчета прохождения волн через пластинки и более сложные слоистые среды (если при этом учитывать повторные отражения волн). В-третьих, эти же законы применимы и к линиям передачи (коаксиальным и волноводным), частично заполненным каким-либо веществом, если границы раздела совпадают с поперечным сечением линии. На последнем применении этих законов мы подробно остановимся в § 29 и § 48.

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА III

ПОТЕНЦИАЛЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ[1]

§ 17. Векторные потенциалы

Потенциалы применяются в электродинамике для решения задач двух типов. Во-первых, с помощью потенциалов находится решение задачи о полях, возбуждаемых в свободном пространстве заданными источниками—токами и зарядами. Во-вторых, потенциалы позволяют решать граничные задачи электродинамики, в которых рассматриваются электромагнитные поля при наличии границ раздела.

Употребление потенциалов электромагнитного поля значительно облегчает решение таких задач. В этом параграфе мы рассмотрим лишь задачу о поле заданных источников в безграничном пустом пространстве. Заметим, что решение этой задачи можно получить и без потенциалов, исходя непосредственно из уравнений электромагнитного поля. Однако в последнем случае выкладки оказываются более сложными и громоздкими, чем при использовании потенциалов.

Напомним, как вводятся потенциалы при решении задачи о поле заданных источников в безграничном пространстве. Рассматривая электромагнитное поле в пустоте, где

$$\mathbf{B}=\mathbf{H},\ \mathbf{D}=\mathbf{E}, \tag{17.01}$$

и считая заданными плотность тока $\mathbf{j}$ и плотность заряда ρ, исходят из общих уравнений Максвелла, выписанных в

[1] Данная глава имеет вспомогательный характер. Ее параграфы могут изучаться раздельно, по мере того, как при чтении следующих глав в них возникает необходимость.

Электронное научное наследие России

конце § 1. При этом оказывается, что уравнения (II) и (IIa) выполняются тождественно, если электрическое и магнитное поля выражены через векторный потенциал **A** и скалярный потенциал Φ следующим образом:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{17.02}$$

Остальные уравнения электромагнитного поля удовлетворяются, если векторный и скалярный потенциалы удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \\ \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho \end{aligned}\right\} \tag{17.03}$$

и дополнительному соотношению

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{17.04}$$

Как известно, запаздывающие потенциалы

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}]}{R} dV \quad \text{и} \quad \Phi = \int \frac{[\rho]}{R} dV \tag{17.05}$$

являются частным решением волновых уравнений (17.03). Эти частные решения удовлетворяют дополнительному соотношению (17.04), так как **j** и ρ связаны уравнением непрерывности (1.01). Общее решение волновых уравнений (17.03) получается в виде суммы частного решения (17.05) и общего решения однородных волновых уравнений

$$\left.\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= 0; \\ \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17.06}$$

При решении задачи о поле, возбужденном заданными токами и зарядами, обычно используют только частное решение в виде запаздывающих потенциалов (17.05). Это делается из физических соображений, так как общее решение однородных уравнений (17.06) дает электромагнитные волны (в частности, изученные в § 11 плоские волны), распространяющиеся в безграничном пространстве и не имеющие источников. Для монохроматических процессов

и комплексных амплитуд, введенных в § 2, уравнения (17.02) принимают вид

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi + ik\mathbf{A}, \tag{17.07}$$

причем потенциалы $\mathbf{A}$ и Φ должны удовлетворять волновым уравнениям для монохроматических колебаний

$$\left.\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \Delta \Phi + k^2 \Phi &= -4\pi\rho \end{aligned}\right\} \tag{17.08}$$

и дополнительному соотношению

$$\operatorname{div} \mathbf{A} - ik\Phi = 0, \tag{17.09}$$

показывающему, что скалярный потенциал монохроматического поля выражается через векторный потенциал с помощью формулы

$$\Phi = \frac{1}{ik} \operatorname{div} \mathbf{A} \tag{17.10}$$

подобно тому, как плотность заряда ρ определяется плотностью тока $\mathbf{j}$ по формуле (3.06). Поэтому для монохроматического электромагнитного поля оказывается достаточным один векторный потенциал, с помощью которого электрическое и магнитное поля вычисляются в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{ik} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A}); \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{17.11}$$

Векторный потенциал удовлетворяет первому из уравнений (17.08), частное решение которого имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{j}\, dV. \tag{17.12}$$

Последнее выражение непосредственно следует из первой формулы (17.05). Действительно, мгновенное значение $\mathbf{j}(t)$ плотности тока связано с его комплексной амплитудой $\mathbf{j}(\omega)$, входящей в формулы (17.08) и (17.12), соотношением (ср. § 2)

$$\mathbf{j}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{j}(\omega) e^{-i\omega t} \right\}. \tag{17.13}$$

Поэтому „запаздывающее“ значение плотности тока равно

$$\begin{aligned} [\mathbf{j}] = \mathbf{j}\left(t - \frac{R}{c}\right) &= \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{j}(\omega)\, e^{-i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right)} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{j}(\omega)\, e^{ikR} e^{-i\omega t} \right\} \end{aligned} \tag{17.14}$$

Научное наследие России

и ему соответствует комплексная амплитуда $e^{ikR}\mathbf{j}(\omega)$, благодаря чему мы и приходим к выражению (17.12). Можно убедиться непосредственной проверкой, что выражение (17.12) действительно удовлетворяет первому из уравнений (17.08).

Векторный потенциал удобно применять при расчете полей в свободном пространстве, возбуждаемом заданными источниками. При изложении теории излучения и дифракции электромагнитных волн (гл. XV) мы встретимся со случаем, когда монохроматическое электромагнитное поле в пустоте возбуждается как электрическими, так и магнитными сторонними токами и, следовательно, удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=ik\mathbf{H}-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m;\ \operatorname{rot}\mathbf{H}=-ik\mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e, \qquad (17.15)$$

которые можно решить следующим образом. Будем искать электромагнитное поле в виде

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^e+\mathbf{E}^m;\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}^e+\mathbf{H}^m, \qquad (17.16)$$

где поле $\mathbf{E}^e$, $\mathbf{H}^e$ порождается электрическими токами $\mathbf{j}^e$ и удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^e=ik\mathbf{H}^e;\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}^e=-ik\mathbf{E}^e+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e, \qquad (17.17)$$

а поле $\mathbf{E}^m$, $\mathbf{H}^m$ порождается магнитными токами $\mathbf{j}^m$ и удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^m=ik\mathbf{H}^m-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m;\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}^m=-ik\mathbf{E}^m. \qquad (17.18)$$

Уравнения (17.17) мы, по существу, исследовали выше, но вместо $\mathbf{E}^e$, $\mathbf{H}^e$ и $\mathbf{j}^e$ писали просто $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{j}$. Поэтому если обозначить через $\mathbf{A}^e$ введенный выше векторный потенциал, то поля

$$\mathbf{E}^e=-\frac{1}{ik}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}^e+k^2\mathbf{A}^e);\quad \mathbf{H}^e=\operatorname{rot}\mathbf{A}^e \qquad (17.19)$$

удовлетворяют уравнениям (17.17), если векторный потенциал удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\mathbf{A}^e+k^2\mathbf{A}^e=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e, \qquad (17.20)$$

Электронное наследие России

частное решение которого

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{c}\int \frac{e^{ikR}}{R}\mathbf{j}^e\, dV \qquad (17.21)$$

дает нужное нам поле, создаваемое электрическими токами.

Уравнения (17.18) имеют ту же структуру, что и уравнения (17.17). Действительно, если произвести (формально) замену

$$\mathbf{E}^m \to -\mathbf{H}^e;\ \mathbf{H}^m \to \mathbf{E}^e;\ \mathbf{j}^m \to \mathbf{j}^e, \qquad (17.22)$$

то уравнения (17.18) переходят в уравнения (17.17). Отсюда возникает мысль — ввести наряду с „электрическим" векторным потенциалом $\mathbf{A}^e$ также „магнитный" векторный потенциал $\mathbf{A}^m$, определяющий поля по формулам

$$\mathbf{E}^m = -\operatorname{rot}\mathbf{A}^m;\quad \mathbf{H}^m = -\frac{1}{ik}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}^m + k^2\mathbf{A}^m) \qquad (17.23)$$

и удовлетворяющий волновому уравнению

$$\Delta\mathbf{A}^m + k^2\mathbf{A}^m = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m \qquad (17.24)$$

с частным решением

$$\mathbf{A}^m = \frac{1}{c}\int \frac{e^{ikR}}{R}\mathbf{j}^m\, dV, \qquad (17.25)$$

дающим поле, возбуждаемое заданными магнитными токами.

Окончательное решение поставленной задачи записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{1}{ik}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}^e + k^2\mathbf{A}^e) - \operatorname{rot}\mathbf{A}^m;\\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot}\mathbf{A}^e - \frac{1}{ik}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}^m + k^2\mathbf{A}^m),\end{aligned}\right\} \qquad (17.26)$$

где векторные потенциалы $\mathbf{A}^e$ и $\mathbf{A}^m$ определяются интегралами (17.21) и (17.25). Правильность этих выражений может быть проверена также непосредственной подстановкой в уравнения (17.15), если учесть формулы (17.20) и (17.24).

§ 18. Векторы Герца

Выше мы вывели формулы (17.02), выражающие электрическое и магнитное поля в пустоте через скалярный и

Научное наследие России

векторный потенциалы. Эти потенциалы должны удовлетворять волновым уравнениям (17.03) и дополнительному соотношению (17.04).

Наряду с векторным потенциалом $\mathbf{A}$ и скалярным потенциалом Φ вводят еще один потенциал—вектор Герца, который мы будем обозначать через $\mathbf{\Pi}$. Вектор Герца позволяет вычислить векторный и скалярный потенциалы с помощью соотношений

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}; \quad \Phi = -\operatorname{div}\mathbf{\Pi}, \tag{18.01}$$

так что получаемые по этим формулам потенциалы $\mathbf{A}$ и Φ автоматически удовлетворяют дополнительному соотношению (17.04). С помощью вектора Герца наиболее просто и изящно выражается поле элементарного диполя (вибратора Герца), причем вектор Герца оказывается непосредственно связанным с дипольным моментом вибратора.

В теории монохроматических электромагнитных полей эти соотношения принимают вид

$$\mathbf{A} = -ik\mathbf{\Pi}; \quad \Phi = -\operatorname{div}\mathbf{\Pi}. \tag{18.02}$$

Вектор $\mathbf{\Pi}$, отличающийся лишь постоянным множителем от векторного потенциала $\mathbf{A}$, определяет напряженность электрического и магнитного полей по формулам

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi}; \quad \mathbf{H} = -ik\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}, \tag{18.03}$$

вытекающим из формул (17.11).

В сущности говоря, для монохроматических полей в векторе Герца нет особой необходимости — его может вполне заменить векторный потенциал. Однако по традиции вектор Герца вводится при исследовании электромагнитного поля в пустом пространстве (без источников) или в ограниченной части такого пространства. В этих случаях вектор $\mathbf{\Pi}$ удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\Delta\mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi} = 0. \tag{18.04}$$

Введенный выше вектор Герца $\mathbf{\Pi}$ часто называется электрическим вектором Герца в отличие от магнитного вектора Герца, который будет введен несколько позже. Из всего сказанного вытекает следующее: если в качестве $\mathbf{\Pi}$ взять любое решение векторного волнового уравнения

ЭБ "Научное наследие России"

(18.04) и образовать с помощью формул (18.03) векторы электромагнитного поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, то они будут тождественно удовлетворять комплексным уравнениям электромагнитного поля в пустом пространстве

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{H};\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\mathbf{E} \qquad (18.05)$$

и таким образом определять некоторый возможный электромагнитный процесс.

Так как к формулам для вектора Герца мы пришли довольно сложным обходным путем с использованием векторного и скалярного потенциалов, то полезно будет также провести непосредственное доказательство сделанного утверждения. Образуем с помощью формул (18.03) выражения

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = k^2 \operatorname{rot}\Pi;$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik \operatorname{rot}\operatorname{rot}\Pi = -ik(-\Delta\Pi + \operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi).$$

Поскольку Π является решением уравнения (18.04), то выражение для $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ может быть переписано в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik(\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi + k^2\Pi),$$

откуда уже непосредственно видно, что уравнения электромагнитного поля (18.05) тождественно удовлетворяются.

Смысл введения вектора Π заключается в том, что решение уравнений электромагнитного поля сводится к более простой и лучше изученной в математике задаче — к отысканию решения волнового уравнения.

Даже при беглом взгляде на уравнения электромагнитного поля в пустоте видна симметрия этих уравнений относительно векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В самом деле, если обозначить через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ какое-нибудь решение уравнений (18.05), то векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, образованные по формулам

$$\mathbf{E}' = -\mathbf{H};\quad \mathbf{H}' = \mathbf{E}, \qquad (18.06)$$

также будут удовлетворять уравнениям электромагнитного поля в пустоте

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}' = ik\mathbf{H}';\ \operatorname{rot}\mathbf{H}' = -ik\mathbf{E}'. \qquad (18.07)$$

Поэтому, наряду с электрическим вектором Герца, определяющим электромагнитные поля по формулам (18.03), можно ввести магнитный вектор Герца, который мы обо-

Научное наследие России

значаем через Π'. Вектор Π' определяет напряженности электрического и магнитного полей следующим образом

$$\mathbf{E} = ik \operatorname{rot} \Pi'; \quad \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi' + k^2 \Pi'. \tag{18.08}$$

Вектор Π' связан с векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ так же, как вектор Π связан по формулам (18.03) с векторами $-\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ соответственно — это требует симметрия уравнений поля в пустоте.

Непосредственной проверкой нетрудно также убедиться, что если вектор Π' удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \Pi' + k^2 \Pi' = 0, \tag{18.09}$$

то величины (18.08) тождественно удовлетворяют уравнениям (18.05).

Иногда при исследовании электромагнитных волн оказывается необходимым ввести электрический и магнитный векторы Герца одновременно. В этом случае выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ принимают вид.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi + k^2 \Pi + ik \operatorname{rot} \Pi', \\ \mathbf{H} &= -ik \operatorname{rot} \Pi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi' + k^2 \Pi', \end{aligned}\right\} \tag{18.10}$$

т. е. являются суммой выражений (18.03) и (18.08). Векторы Π и Π' по-прежнему должны удовлетворять волновым уравнениям (18.04) и (18.09).

Введенные в этом параграфе формулы относятся к электромагнитному полю в пустоте. В случае необходимости все выведенные выше формулы могут быть обобщены таким образом, что они станут применимы для любой однородной среды с произвольными комплексными проницаемостями ε и μ. Это обобщение можно произвести как непосредственно, так и с помощью леммы § 21.

Заметим в заключение, что формулы (18.10) могут быть также непосредственно выведены из формул (17.26) предыдущего параграфа, если положить

$$\Pi = -ik\mathbf{A}^e; \quad \Pi' = -ik\mathbf{A}^m. \tag{18.11}$$

Таким образом, электрический и магнитный векторы Герца пропорциональны соответственно электрическому и магнитному векторным потенциалам. Мы предпочли вывести формулы (18.10) еще раз независимым путем, поскольку для полей без источников, которым посвящен настоящий параграф, выкладки гораздо проще.

ЭБ "Научное наследие России"

§ 19. Криволинейные ортогональные координаты

Для исследования электромагнитного поля при наличии поверхностей раздела сложной формы часто вместо декартовых координат x, y, z используются криволинейные координаты ξ, η, ζ, связанные с ними однозначно

$$x = x(\xi, \eta, \zeta); \quad y = y(\xi, \eta, \zeta); \quad z = z(\xi, \eta, \zeta). \qquad (19.01)$$

На рис. 10 изображен бесконечно малый прямоугольный параллелепипед (слегка искривленный), образованный тремя координатными поверхностями

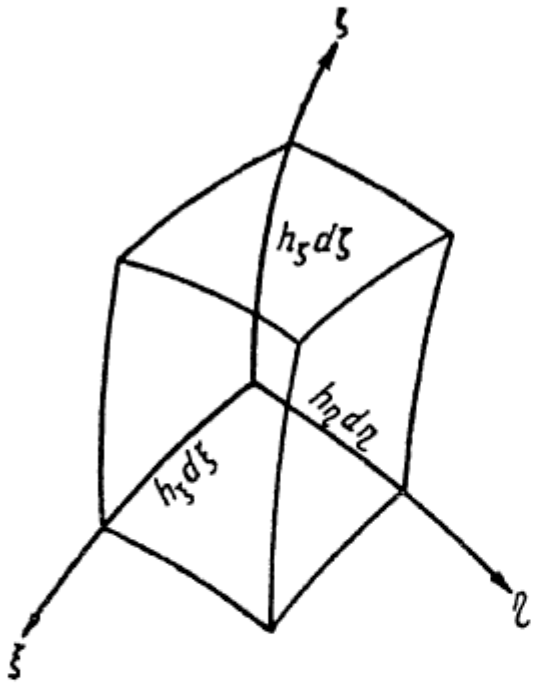


Рис. 10. Криволинейные координаты ξ, η, ζ.

$$\xi = \text{const}; \quad \eta = \text{const}; \quad \zeta = \text{const} \qquad (19.02)$$

и тремя бесконечно близкими поверхностями, соответствующими значениям $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$; в дальнейшем мы считаем дифференциалы $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ положительными. Обозначим: ds_ξ, ds_η, ds_ζ—ребра этого параллелепипеда, проходящие через точку ξ, η, ζ (индекс указывает на координату, изменяющуюся вдоль данного ребра), dS_ξ, dS_η, dS_ζ—его грани, проходящие через ту же точку (индекс указывает на координату, остающуюся постоянной на данной грани), dV — его объем. Мы имеем

$$ds_\xi = h_\xi d\xi; \quad ds_\eta = h_\eta d\eta; \quad ds_\zeta = h_\zeta d\zeta, \qquad (19.03)$$

где коэффициенты h_ξ, h_η, h_ζ в общем случае изменяются от точки к точке; они называются коэффициентами Ламе. Далее можно написать

$$dS_\xi = h_\eta h_\zeta d\eta d\zeta; \quad dS_\eta = h_\zeta h_\xi d\zeta d\xi; \quad dS_\zeta = h_\xi h_\eta d\xi d\eta \qquad (19.04)$$

и

$$dV = h_\xi h_\eta h_\zeta d\xi d\eta d\zeta. \qquad (19.05)$$

Длина диагонали этого параллелепипеда, т. е. длина бесконечно малого отрезка ds, соединяющего две точки с ко-

Электронное наследие России

ординатами ξ, η, ζ и $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, $\zeta+d\zeta$, определяется формулой

$$ds^2 = h_\xi^2\, d\xi^2 + h_\eta^2\, d\eta^2 + h_\zeta^2\, d\zeta^2. \qquad (19.06)$$

Вычислим составляющие вектора

$$\mathbf{R} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \qquad (19.07)$$

в криволинейной ортогональной системе координат. Согласно теореме Стокса, примененной, например, к грани $\xi = \text{const}$ параллелепипеда на рис. 10, имеем

$$R_\xi dS_\xi = \oint\limits_{(\xi=\text{const})} A_s ds, \qquad (19.08)$$

где интегрирование производится по периметру этой грани. Легко показать, что

$$\oint\limits_{(\xi=\text{const})} A_s ds = d\eta \frac{\partial}{\partial \eta}(A_\zeta ds_\zeta) - d\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}(A_\eta ds_\eta), \qquad (19.09)$$

и, пользуясь формулами (19.03) и (19.04), получаем формулы:

$$\left.\begin{aligned} h_\eta h_\zeta R_\xi &= \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\zeta A_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\eta A_\eta); \\ h_\zeta h_\xi R_\eta &= \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi A_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi}(h_\zeta A_\zeta); \\ h_\xi h_\eta R_\zeta &= \frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta A_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi A_\xi), \end{aligned}\right\} \qquad (19.10)$$

причем составляющие R_η и R_ζ получаются циклической перестановкой переменных ξ, η, ζ, ξ в формуле для R_ξ. Заметим, что для справедливости формул (19.09) и (19.10) направления ξ, η, ζ должны образовывать правую тройку (как направления x, y, z).

Составляющие вектора

$$\mathbf{G} = \operatorname{grad} \psi, \qquad (19.11)$$

как известно, равны

$$G_\xi = \frac{\partial \psi}{\partial s_\xi}\ ;\ G_\eta = \frac{\partial \psi}{\partial s_\eta}\ ;\ G_\zeta = \frac{\partial \psi}{\partial s_\zeta}, \qquad (19.12)$$

поэтому по формулам (19.03) мы сразу получаем

$$G_\xi = \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\ ;\ G_\eta = \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\ ;\ G_\zeta = \frac{1}{h_\zeta}\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}. \qquad (19.13)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Дивергенцию любого вектора $\mathbf{A}$ можно вычислить по теореме Гаусса—Остроградского

$$\operatorname{div}\mathbf{A}\,dV=\oint\limits_S A_n\,dS, \tag{19.14}$$

где справа интеграл берется по поверхности бесконечно малого координатного объема на рис. 10. Так как

$$\oint\limits_S A_n\,dS=d\xi\,\frac{\partial}{\partial\xi}(A_\xi dS_\xi)+d\eta\,\frac{\partial}{\partial\eta}(A_\eta dS_\eta)+$$
$$+d\zeta\,\frac{\partial}{\partial\zeta}(A_\zeta dS_\zeta), \tag{19.15}$$

то с помощью формул (19.04) и (19.05) легко получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta h_\zeta A_\xi)+\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\zeta h_\xi A_\eta)+\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\xi h_\eta A_\zeta)\right\}. \tag{19.16}$$

Так как оператор Лапласа определяется (применительно к скалярной функции ψ) формулой

$$\Delta\psi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi, \tag{19.17}$$

то комбинация формул (19.13) и (19.16) дает

$$\Delta\psi=\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\zeta h_\xi}{h_\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)\right\}. \tag{19.18}$$

В дальнейшем наиболее часто мы будем пользоваться цилиндрической системой координат r, φ, z, связанной с декартовыми координатами x, y, z соотношениями

$$x=r\cos\varphi;\quad y=r\sin\varphi. \tag{19.19}$$

Полагая в выведенных выше формулах

$$\left.\begin{aligned}\xi&=r;\quad \eta=\varphi;\quad \zeta=z;\\ h_r&=1;\quad h_\varphi=r;\quad h_z=1,\end{aligned}\right\} \tag{19.20}$$

мы можем написать

$$\Delta\psi=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{19.21}$$

"Научное наследие России"

Сферические координаты r, ϑ, φ, которыми также приходится пользоваться в электродинамике, связаны с декартовыми координатами следующим образом

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi;\quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi;\quad z = r\cos\vartheta, \tag{19.22}$$

причем φ имеет тот же геометрический смысл, что и в формулах (19.19), а r — другой. Чтобы применить выведенные выше общие формулы к сферическим координатам, достаточно положить

$$\left.\begin{aligned} &\xi = r;\quad \eta = \vartheta;\quad \zeta = \varphi;\\ &h_r = 1;\quad h_\vartheta = r;\quad h_\varphi = r\sin\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{19.23}$$

Поэтому оператор Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. \tag{19.24}$$

§ 20*. Поля и потенциалы в криволинейных ортогональных координатах

Запишем комплексные уравнения электромагнитного поля в пустоте

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{H};\quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\mathbf{E} \tag{20.01}$$

с помощью криволинейных ортогональных координат. Применяя формулы (19.10), легко получаем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\zeta E_\zeta) - \frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\eta E_\eta) = ikh_\eta h_\zeta H_\xi;\\ &\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\xi E_\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}(h_\zeta E_\zeta) = ikh_\zeta h_\xi H_\eta;\\ &\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta E_\eta) - \frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi E_\xi) = ikh_\xi h_\eta H_\zeta;\\ &\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\zeta H_\zeta) - \frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\eta H_\eta) = -ikh_\eta h_\zeta E_\xi;\\ &\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\xi H_\xi) - \frac{\partial}{\partial\xi}(h_\zeta H_\zeta) = -ikh_\zeta h_\xi E_\eta;\\ &\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\eta H_\eta) - \frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi H_\xi) = -ikh_\xi h_\eta E_\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{20.02}$$

ЭБ "Научное наследие России"

В ряде случаев удается все шесть функций (E_ξ, E_η, E_ζ, H_ξ, H_η, H_ζ), входящие в эти уравнения, выразить через две вспомогательные функции U и V, удовлетворяющие уравнениям второго порядка (волновому уравнению или уравнению, приводящемуся к волновому). Это возможно, если уравнения (20.02) допускают решения „электрического типа“ и „магнитного типа“; тогда функция U однозначно определяет электромагнитное поле электрического типа, функция V — поле магнитного типа.

Решением электрического типа называется такое решение уравнений (20.02), у которого $E_\zeta \neq 0$ и $H_\zeta = 0$, а решением магнитного типа — такое, у которого $E_\zeta = 0$ и $H_\zeta \neq 0$ (ζ — любая координата). Для решения электрического типа из условия

$$H_\zeta = 0 \tag{20.03}$$

вытекает соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta E_\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi E_\xi), \tag{20.04}$$

из которого следует, что составляющие E_ξ и E_η могут быть представлены в виде

$$E_\xi = \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial U'}{\partial \xi}; \quad E_\eta = \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial U'}{\partial \eta}, \tag{20.05}$$

где U' — вспомогательная функция. Подставляя (20.05) в четвертое и пятое уравнения (20.02) и учитывая условие (20.03), получаем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\eta H_\eta) = ik\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi}\frac{\partial U'}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi H_\xi) = -ik\frac{h_\zeta h_\xi}{h_\eta}\frac{\partial U'}{\partial \eta}, \tag{20.06}$$

которые могут быть легко разрешены, если коэффициенты Ламе данной координатной системы ξ, η, ζ удовлетворяют условиям

$$h_\zeta = 1; \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\right) = 0 \tag{20.07}$$

или, что то же самое, если

$$h_\xi = g_1(\xi, \eta)\, g(\zeta); \quad h_\eta = g_2(\xi, \eta)\, g(\zeta); \quad h_\zeta = 1. \tag{20.08}$$

Действительно, полагая

$$U' = \frac{\partial U}{\partial \zeta}; \quad H_\xi = -\frac{ik}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta}; \quad H_\eta = \frac{ik}{h_\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}, \tag{20.09}$$

Электронное наследие России

где U — новая функция, мы удовлетворим уравнениям (20.06). Последнее уравнение (20.02) дает

$$E_\zeta = -\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\zeta}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)\right]. \qquad (20.10)$$

Таким образом, с помощью всех уравнений (20.02), за исключением первых двух, все составляющие решения электрического типа выражены через функцию U. Подставляя теперь эти выражения в первые два уравнения, получим соотношения

$$-\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\zeta}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)\right]\right\}-\frac{\partial^3 U}{\partial\eta\partial\zeta^2}=k^2\frac{\partial U}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\zeta}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)\right]\right\}+\frac{\partial^3 U}{\partial\xi\partial\zeta^2}=-k^2\frac{\partial U}{\partial\xi},$$

которые удовлетворяются, если функция U есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\zeta}\frac{\partial U}{\partial\eta}\right)\right]+k^2U=0. \qquad (20.11)$$

Найдя решение уравнения (20.11), мы можем построить решение исходных уравнений (20.02), относящееся к электрическому типу, а именно

$$\left.\begin{aligned} &E_\xi=\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\zeta}; \quad && H_\xi=-\frac{ik}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial\eta};\\ &E_\eta=\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial^2 U}{\partial\eta\partial\zeta}; && H_\eta=\frac{ik}{h_\xi}\frac{\partial U}{\partial\xi};\\ &E_\zeta=\frac{\partial^2 U}{\partial\zeta^2}+k^2U; && H_\zeta=0. \end{aligned}\right\} \qquad (20.12)$$

По аналогии нетрудно построить поле магнитного типа

$$\left.\begin{aligned} &E_\xi=\frac{ik}{h_\eta}\frac{\partial V}{\partial\eta}; && H_\xi=\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\partial\zeta};\\ &E_\eta=-\frac{ik}{h_\xi}\frac{\partial V}{\partial\xi}; && H_\eta=\frac{1}{h_\eta}\frac{\partial^2 V}{\partial\eta\partial\zeta};\\ &E_\zeta=0; && E_\zeta=\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}+k^2V, \end{aligned}\right\} \qquad (20.13)$$

причем функция V должна удовлетворять тому же уравнению (20.11). При написании формул (20.13) проще всего

ЭБ "Научное наследие России"

исходить из отмеченной в § 18 симметрии уравнений поля (20.01). Общее решение уравнений поля обычно представляется в виде суммы решений (20.12) и (20.13).

Отметим, что при выводе формул (20.12) и (20.13) мы исходили из условий (20.07) или (20.08). Если в выбранной координатной системе эти условия не выполняются, то данный способ решения уравнений электромагнитного поля оказывается неприменимым. В частности, в такой координатной системе общее решение уравнений поля не распадается на сумму решений электрического и магнитного типов.

Условиям (20.08) удовлетворяет координатная система, в которой ζ есть декартова координата z, а ξ, η — любые криволинейные ортогональные координаты на плоскости x, y: это могут быть декартовы координаты ($\xi = x$, $\eta = y$), полярные координаты ($\xi = r$, $\eta = \varphi$) и т. д. Во всех случаях имеем

$$h_\xi = g_1(\xi, \eta); \quad h_\eta = g_2(\xi, \eta); \quad h_z = 1 \tag{20.14}$$

в соответствии с формулами (20.08).

В декартовой системе координат x, y, z в силу условий $h_x = h_y = h_z = 1$ получаем для функций U и V волновые уравнения

$$\Delta U + k^2 U = 0; \quad \Delta V + k^2 V = 0, \tag{20.15}$$

а суперпозиция полей электрического и магнитного типов имеет вид

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + ik\frac{\partial V}{\partial y}; & H_x &= -ik\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}; \\ E_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - ik\frac{\partial V}{\partial x}; & H_y &= ik\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}; \\ E_z &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U; & H_z &= \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2 V. \end{aligned}\right\} \tag{20.16}$$

Как легко проверить, последние выражения могут быть получены из формул (18.10), если в них положить

$$\Pi_x = \Pi_y = 0, \ \Pi_z = U; \ \Pi'_x = \Pi'_y = 0, \ \Pi'_z = V. \tag{20.17}$$

Таким образом, если ζ есть декартова координата, то функции U и V суть не что иное, как (единственные) составляющие электрического и магнитного векторов Герца по оси ζ. В этом случае U называется электрической функ-

цией Герца, V — магнитной функцией Герца. Сделанный выше вывод о связи U и V с векторами Герца сохраняется при любом выборе координат ξ, η в плоскости x, y. Функции Герца мы будем применять в теории волноводов (гл. VII); поле электрического типа есть в этом случае совокупность электрических волн, поле магнитного типа — совокупность магнитных волн в волноводе.

Если ζ есть радиус-вектор цилиндрической системы координат, то условия (20.08), как легко проверить, не удовлетворяются. Поэтому для цилиндрических волн, распространяющихся, например, в секториальном рупоре (см. § 58), разделение полей на электрический и магнитный типы производится по отношению к оси цилиндрической системы, а не по отношению к направлению распространения волн. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы в § 58 будем слова „электрические“ и „магнитные“ волны ставить в кавычки.

Если ζ есть радиус-вектор сферической системы координат, то условия (20.08) соблюдаются. Действительно, полагая

$$\xi = \vartheta; \quad \eta = \varphi; \quad \zeta = r,$$

мы будем иметь

$$h_r = 1; \quad h_\vartheta = r; \quad h_\varphi = r \sin\vartheta \tag{20.18}$$

в соответствии с формулами (20.08). Формулы (20.12) для полей электрического типа примут вид

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 U; & H_r &= 0; \\ E_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \vartheta}; & H_\vartheta &= -\frac{ik}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}; \\ E_\varphi &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}; & H_\varphi &= \frac{ik}{r}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}, \end{aligned}\right\} \tag{20.19}$$

а формулы (20.13) дают поле магнитного типа в сферических координатах

$$\left.\begin{aligned} E_r &= 0; & H_r &= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + k^2 V; \\ E_\vartheta &= \frac{ik}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}; & H_\vartheta &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \vartheta}; \\ E_\varphi &= -\frac{ik}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}; & H_\varphi &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{20.20}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Функции U и V должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right]+k^2U=0, \quad (20.21)$$

которое уже не является волновым. Однако если ввести функции u и v по формулам

$$U=ru; \quad V=rv, \quad (20.22)$$

то благодаря соотношению

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad (20.23)$$

они будут удовлетворять волновым уравнениям

$$\Delta u+k^2u=0; \quad \Delta v+k^2v=0, \quad (20.24)$$

где оператор Δ в сферической системе координат определяется формулой (19.24). Функции u и v обычно называют потенциалами Дебая. Эти функции, равно как и введенные выше функции Герца, позволяют свести интегрирование уравнений поля к более простой задаче — интегрированию волновых уравнений.

Оказывается, что функции Дебая довольно просто связаны с электрическим и магнитным векторами Герца, а именно

$$\Pi=u\mathbf{r}+\operatorname{grad}\chi; \quad \Pi'=v\mathbf{r}+\operatorname{grad}\chi', \quad (20.25)$$

где

$$\chi=\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial r}(ru); \quad \chi'=\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial r}(rv), \quad (20.26)$$

а $\mathbf{r}$ есть вектор, проведенный из начала координат в данную точку и имеющий составляющие x, y, z. Проверим, например, что вектор Π, определенный таким образом, дает по формулам (18.03) электромагнитное поле, совпадающее с полем (20.19). В декартовых координатах составляющие вектора Π равны

$$\Pi_x=ux+\frac{\partial\chi}{\partial x}; \quad \Pi_y=uy+\frac{\partial\chi}{\partial y}; \quad \Pi_z=uz+\frac{\partial\chi}{\partial z}, \quad (20.27)$$

а в сферических координатах

$$\Pi_r=ur+\frac{\partial\chi}{\partial r}; \quad \Pi_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}; \quad \Pi_\varphi=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}. \quad (20.28)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Вычислением в декартовых координатах легко показать, что

$$\Delta\Pi = \mathbf{r}\Delta u + 2\,\mathrm{grad}\,u + \mathrm{grad}\,\Delta\chi$$

и

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = \mathbf{r}\,(\Delta u + k^2 u) + \mathrm{grad}\,(\Delta\chi + k^2\chi + 2u). \quad (20.29)$$

Вычислением в сферических координатах легко показать, что

$$\Delta\chi + k^2\chi + 2u = 0$$

и потому электрический вектор Герца Π удовлетворяет уравнению (18.04). Подставляя этот вектор в формулы (18.03), мы приходим к выражениям (20.19). Аналогичным путем доказывается справедливость выражения (20.25) для магнитного вектора Π'.

Формулы (20.25) позволяют, в частности, вычислить потенциалы Дебая для электрического или магнитного радиального диполя. Действительно, формулы (18.03) можно переписать в виде

$$\mathbf{E} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\Pi; \quad \mathbf{H} = -ik\,\mathrm{rot}\,\Pi. \quad (20.30)$$

Согласно формуле (20.25) мы имеем

$$\mathrm{rot}\,\Pi = \mathrm{rot}\,(u\,\mathbf{r}) = [\mathrm{grad}\,u, \mathbf{r}] \quad (20.31)$$

поскольку $\mathrm{rot}\,\mathbf{r} = 0$. Положим

$$u = \frac{p}{r_0}\,\frac{e^{ikR}}{R}, \quad (20.32)$$

где p есть момент электрического диполя (в радиальном направлении). Через $\mathbf{r}_0$ обозначен вектор (с абсолютной величиной r_0), проведенный от начала координат к диполю, через $\mathbf{R}$ — вектор (с абсолютной величиной R), проведенный от диполя к точке наблюдения. Векторы $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ образуют замкнутый треугольник

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R}, \quad (20.33)$$

и так как градиент функции (20.32) параллелен $\mathbf{R}$, то

$$[\mathrm{grad}\,u,\ \mathbf{r}] = [\mathrm{grad}\,u,\ \mathbf{r}_0] = \mathrm{rot}\,(u\mathbf{r}_0). \quad (20.34)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Поэтому функция Дебая (20.32) дает то же электромагнитное поле, что и вектор Герца

$$\Pi = p \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} \frac{e^{ikR}}{R}, \tag{20.35}$$

а последний, как известно, соответствует радиальному диполю с моментом p.

Записывая уравнения (18.08) в виде

$$\mathbf{E} = ik \operatorname{rot} \Pi'; \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Pi', \tag{20.36}$$

легко показать, что потенциал Дебая

$$v = \frac{m}{r_0} \frac{e^{ikR}}{R} \tag{20.37}$$

определяет то же поле, что и магнитный вектор Герца

$$\Pi' = m \frac{r_0}{r_0} \frac{e^{ikR}}{R}, \tag{20.38}$$

соответствующий радиальному магнитному диполю с моментом m.

Подведем некоторые итоги. Выше мы рассмотрели криволинейные координаты, удовлетворяющие условиям (20.08). При этих условиях существуют решения уравнений (20.02), относящиеся к электрическому и магнитному типу, и можно ввести потенциалы U и V. Мы убедились в том, что условиям (20.08) удовлетворяют декартовы и сферические координаты. Точнее, эти условия справедливы в такой координатной системе ξ, η, ζ, где координата ζ является либо расстоянием вдоль прямолинейной оси ($\zeta = z$, поверхности ζ=const суть параллельные плоскости), либо расстоянием от фиксированной точки ($\zeta = r$, поверхности ζ=const суть концентрические сферы). Можно показать, что эти два случая исчерпывают все многообразие координатных систем, подчиняющихся условиям (20.08.) Во всех остальных координатных системах электродинамические задачи решаются иначе — как правило, с гораздо бóльшим трудом. Исключение составляют случаи, когда можно ввести потенциалы Абрагама (см. ниже).

Рассмотрим в заключение координатную систему, в которой коэффициенты Ламе не зависят от ζ, и ограничимся частным случаем электромагнитного поля, также

Научное наследие России"

не зависящего от ζ. Для такого поля уравнения (20.02) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\zeta E_\zeta)=ikh_{\tau_1}h_\zeta H_\xi; \qquad \frac{\partial}{\partial\eta}(h_\zeta H_\zeta)=-ikh_{\tau_1}h_\zeta E_\xi;\\
&-\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\zeta E_\zeta)=ikh_\zeta h_\xi H_{\tau_1}; \qquad -\frac{\partial}{\partial\xi}(h_\zeta H_\zeta)=-ikh_\zeta h_\xi E_{\tau_1};\\
&\frac{\partial}{\partial\xi}(h_{\tau_1}H_{\tau_1})-\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi H_\xi)=-ikh_\xi h_{\tau_1}E_\zeta;\\
&\frac{\partial}{\partial\xi}(h_{\tau_1}E_{\tau_1})-\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi E_\xi)=ikh_\xi h_{\tau_1}H_\zeta,
\end{aligned}\right\} \tag{20.39}$$

т. е. уравнения поля разбиваются на две группы, в первую из которых входят только составляющие H_ξ, H_{τ_1}, E_ζ, а во вторую — составляющие E_ξ, E_{τ_1}, H_ζ. Если ввести обозначения

$$P=h_\zeta E_\zeta, \quad Q=h_\zeta H_\zeta, \tag{20.40}$$

то составляющие электромагнитного поля выражаются через функции P и Q по формулам:

$$\begin{aligned}
&H_\xi=\frac{1}{ikh_{\tau_1}h_\zeta}\frac{\partial P}{\partial\eta}, \qquad E_\xi=-\frac{1}{ikh_{\tau_1}h_\zeta}\frac{\partial Q}{\partial\eta};\\
&H_{\tau_1}=-\frac{1}{ikh_\zeta h_\xi}\frac{\partial P}{\partial\xi}; \quad E_{\tau_1}=\frac{1}{ikh_\zeta h_\xi}\frac{\partial Q}{\partial\xi};\\
&E_\zeta=\frac{1}{h_\zeta}P; \qquad H_\zeta=\frac{1}{h_\zeta}Q,
\end{aligned} \tag{20.41}$$

а сами эти функции (как P, так и Q) удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi h_\zeta}\frac{\partial P}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\zeta h_\eta}\frac{\partial P}{\partial\eta}\right)+k^2\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta}P=0. \tag{20.42}$$

Функции P и Q называются потенциалами Абрагама.

В качестве тривиального примера применения потенциалов Абрагама может служить задача § 15, где мы выражаем электромагнитное поле через H_y и E_y; в данном случае $\zeta=y$, $h_y=1$, и формулы (20.40) принимают вид

$$P=E_y, \; Q=H_y. \tag{20.43}$$

Нетривиальным примером могут служить координатные системы, обладающие симметрией вращения: $\zeta=\varphi$ есть

Электронное научное наследие России

азимутальный угол, поверхности $\zeta = \text{const}$ суть меридиональные плоскости, ξ и η — криволинейные координаты в этих плоскостях. Если электромагнитное поле также обладает симметрией вращения, то оно может быть найдено по формулам (20.41); уравнение (20.42) при этом может быть преобразовано к волновому уравнению, поскольку в этом случае декартовы составляющие

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -E_\varphi \sin\varphi; \quad H_x = -H_\varphi \sin\varphi; \\ E_y &= E_\varphi \cos\varphi; \quad\quad H_y = H_\varphi \cos\varphi; \end{aligned}\right\} \tag{20.44}$$

должны удовлетворять волновому уравнению (ср. § 14).

§ 21. Лемма о пропорциональном изменении проницаемостей ε и μ во всем пространстве

Для многих вопросов имеет значение следующая лемма. Пусть требуется определить электромагнитное поле в пространстве, проницаемости ε и μ которого являются, вообще говоря, функциями координат x, y, z, и пусть функции ε и μ могут быть представлены в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \tilde{\varepsilon}, \quad \mu = \mu_1 \tilde{\mu}, \tag{21.01}$$

где ε_1 и μ_1 — постоянные числа (вообще говоря, комплексные), а $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ соответствуют случаю, когда электромагнитное поле в пространстве известно. Тогда, как мы сейчас покажем, легко найти электромагнитное поле и для проницаемостей ε и μ, отличающихся от $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ коэффициентами пропорциональности ε_1 и μ_1, постоянными для всего пространства.

Лемма о пропорциональном изменении проницаемостей может быть математически сформулирована следующим образом. Пусть нам нужно определить поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, удовлетворяющие комплексным уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mu\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m; \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e \tag{21.02}$$

с заданными плотностями сторонних токов $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$ (см. § 3). При этом пусть известны вспомогательные поля $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} = i\tilde{k}\tilde{\mu}\tilde{\mathbf{H}} - \frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}}^m; \quad \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{H}} = -i\tilde{k}\tilde{\varepsilon}\tilde{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}}^e, \tag{21.03}$$

...ое наследие России"

где $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ удовлетворяют соотношениям (21.01), а сторонние токи $\tilde{\mathbf{j}}^e$ и $\tilde{\mathbf{j}}^m$ равны

$$\tilde{\mathbf{j}}^e = \sqrt{\mu_1}\,\mathbf{j}^e; \quad \tilde{\mathbf{j}}^m = \sqrt{\varepsilon_1}\,\mathbf{j}^m. \tag{21.04}$$

Тогда, если выбрать волновое число $\tilde{k}$ в уравнениях (21.03) согласно формуле

$$\tilde{k} = k\sqrt{\varepsilon_1\,\mu_1}, \tag{21.05}$$

то решение уравнений (21.02) может быть выражено через решение уравнений (21.03) с помощью простых соотношений

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\tilde{\mathbf{E}}; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\tilde{\mathbf{H}}. \tag{21.06}$$

Доказательство этой леммы элементарно. Действительно, образуем $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ для векторов, определяемых формулами (21.06)

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left\{ ik\sqrt{\varepsilon_1\,\mu_1}\,\frac{\mu}{\mu_1}\sqrt{\mu_1}\,\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\,\mathbf{j}^m \right\} =$$

$$= ik\mu\,\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\left\{ -ik\sqrt{\varepsilon_1\,\mu_1}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_1}\,\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\sqrt{\mu_1}\,\mathbf{j}^e \right\} =$$

$$= -ik\varepsilon\,\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e.$$

При применении этой леммы нужно иметь в виду, что частоты искомого поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и вспомогательного поля $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ различны: первому полю соответствует временной множитель $e^{-i\omega t}$, а второму — множитель $e^{-i\tilde{\omega}t}$, где в силу формулы (21.05)

$$\tilde{\omega} = \omega\sqrt{\varepsilon_1\,\mu_1}. \tag{21.07}$$

Поэтому при комплексном ε_1 или μ_1 частота $\tilde{\omega}$ также комплексна, т. е. соответствует колебаниям, экспоненциально нарастающим во времени. Это обстоятельство не является препятствием для применения доказанной выше леммы, так как если известно решение комплексных уравнений элек-

ЭБ "Научное наследие России"

тромагнитного поля, то оно обычно известно при любых $\tilde{k}$, и поэтому не составляет никакого труда считать $\tilde{k}$ комплексным числом, аналитически продолжая полученное решение (ср. § 8).

Поясним на примерах, как применять доказанную выше лемму.

Из теории волн в пустоте при $\tilde{\varepsilon}=\tilde{\mu}=1$ известно (ср. § 11), что составляющие электромагнитного поля удовлетворяют соотношению

$$\tilde{E}_x=\tilde{H}_y=A\,e^{i\tilde{k}z} \tag{21.08}$$

для волны, распространяющейся вдоль оси z. Из этого закона распространения плоских волн в пустоте и из леммы легко получить электромагнитные поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, соответствующие распространению в однородной среде с произвольными проницаемостями $\varepsilon=\varepsilon_1$ и $\mu=\mu_1$. А именно, из формул (21.08) и (21.06) мы получаем

$$E_x=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}Ae^{ik\sqrt{\varepsilon\mu}z},\quad H_y=\frac{1}{\sqrt{\mu}}Ae^{ik\sqrt{\varepsilon\mu}z}, \tag{21.09}$$

откуда видно, что плоские волны в произвольной среде распространяются с комплексным волновым числом $K=k\sqrt{\varepsilon\mu}$, причем составляющие E_x и H_y связаны соотношением

$$E_x=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H_y. \tag{21.10}$$

Эти формулы мы уже имели в § 11.

В данном примере сторонние токи в интересовавшей нас задаче (21.02) отсутствовали, поэтому и во вспомогательной задаче (21.03) они были приняты равными нулю [формула (21.04)].

В качестве второго примера рассмотрим задачу о падении плоской волны на плоскую границу раздела двух сред (рис. 11,*а*), причем верхняя среда, в которой распространяется падающая волна, имеет проницаемости ε_1 и μ_1, а нижняя — проницаемости ε_2 и μ_2. В качестве вспомогательного поля $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ мы возьмем рассмотренное в § 15 электромагнитное поле, возбуждаемое падающей под тем же углом плоской волной в пустоте — верхней среде, в то время как нижняя среда имеет проницаемости $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$

(рис. 11,*б*). Если параметры нижней среды во вспомогательной задаче будут взяты равными

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \tag{21.11}$$

то мы можем применить лемму и, в частности, вычислить коэффициенты отражения и прохождения для рис. 11,*а*. Так как наличие постоянных множителей $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$ и $\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}$ в формулах (21.06) не влияет на значения коэффициентов отражения и прохождения (которые дают отношение отражен-

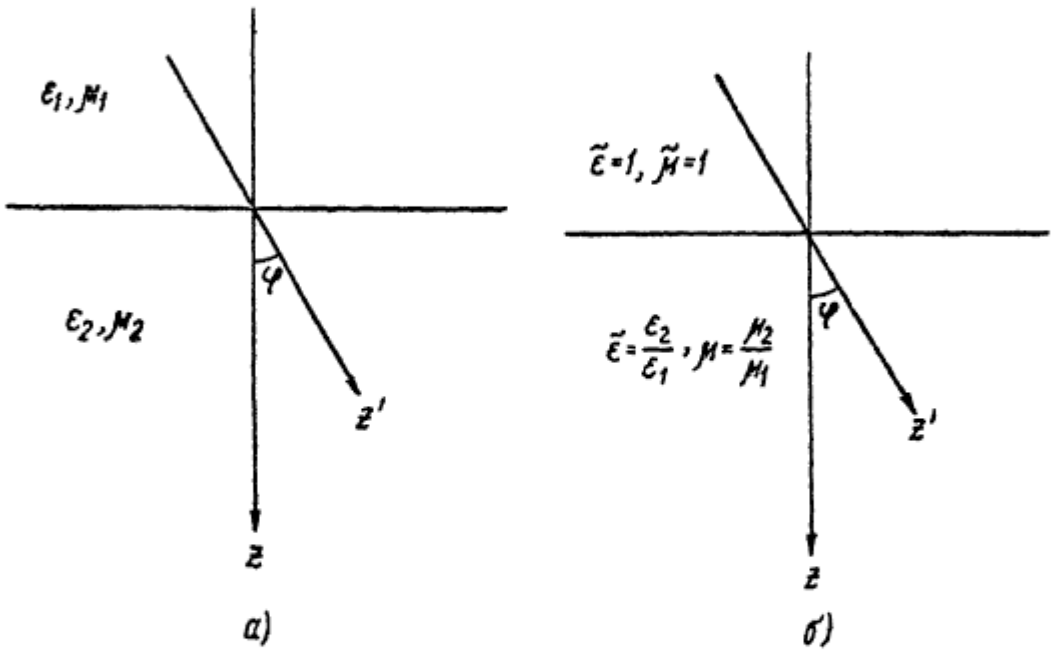


Рис. 11. Падение плоской волны на плоскость раздела $z = 0$: *а* — в общем случае; *б* — из пустоты.

ного и прошедшего поля к полю падающей волны), то для коэффициентов отражения и падения будут справедливы формулы (15.14) и (15.20), если в эти формулы вместо ε и μ подставить $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$, определяемые соотношениями (21.11).

В качестве третьего примера можно рассмотреть обобщение потенциалов электромагнитного поля, введенных выше в § 17 и § 18 для пустоты, на случай изотропной однородной среды с произвольными комплексными проницаемостями. Для дальнейшего нам понадобится обобщить формулы (18.04), (18.09) и (18.10),

ЭБ "Научное наследие России"

Из леммы следует, что в среде с проницаемостями ε и μ векторы $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{\Pi}'$ вместо уравнений (18.04) и (18.09) должны удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\,\mathbf{\Pi} + K^2\,\mathbf{\Pi} = 0; \\ &\Delta\,\mathbf{\Pi}' + K^2\,\mathbf{\Pi}' = 0; \end{aligned}\quad K^2 = k^2\varepsilon\mu\,.\right\} \tag{21.12}$$

Что же касается полей, то они определяются через электрический и магнитный векторы Герца по формулам

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} + k^2\varepsilon\mu\,\mathbf{\Pi} + ik\mu\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}'; \\ \mathbf{H} &= -ik\varepsilon\operatorname{rot}\mathbf{\Pi} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}' + k^2\varepsilon\mu\,\mathbf{\Pi}', \end{aligned}\right\} \tag{21.13}$$

обобщающим формулы (18.10). Хотя выражения (21.13) и могут быть получены с помощью леммы, их справедливость проще всего установить непосредственной проверкой, а именно показать, что комплексные уравнения поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mu\,\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\varepsilon\,\mathbf{E} \tag{21.14}$$

тождественно удовлетворяются, если выполняются соотношения (21.12) и (21.13).

§ 22. Цилиндрические волны

В § 14 было показано, что каждая декартова составляющая любого из векторов поля удовлетворяет в однородной среде с комплексными проницаемостями ε и μ волновому уравнению (14.12). Пользуясь выражением (19.21) для оператора Лапласа в цилиндрической системе координат r, φ, z, легко написать это уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + K^2 U = 0, \tag{22.01}$$

где через K обозначено комплексное волновое число (11.05) в данной среде.

Мы будем называть в дальнейшем цилиндрической волной такое решение уравнения (22.01), которое не зависит от координаты z, а от координат r и φ имеет зависимость вида

$$U = R_m(r)\cos m\varphi \tag{22.02}$$

или

$$U = R_m(r)\sin m\varphi, \tag{22.03}$$

где m — положительное вещественное число (которое не обязательно считать целым). Подставляя выражения (22.02)

Электронное наследие России"

или (22.03) в уравнение (22.01), получаем для функции R_m обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_m}{dr} + \left(K^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R_m = 0. \qquad (22.04)$$

Вводя независимую переменную

$$x = Kr, \qquad (22.05)$$

приводим уравнение (22.04) к виду

$$\frac{d^2 R_m}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR_m}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R_m = 0. \qquad (22.06)$$

Последнее уравнение есть не что иное, как уравнение Бесселя. Решения этого уравнения хорошо изучены в математике, поэтому мы здесь ограничимся кратким перечнем основных свойств этих решений.

Уравнение (22.06) имеет особую точку при $x = 0$, вследствие чего из двух линейно независимых решений этого уравнения только одно остается конечным при $x = 0$. Это последнее называется функцией Бесселя и обозначается через $J_m(x)$, причем x называется аргументом, а m — индексом функции Бесселя. При малых значениях аргумента для вычисления функции Бесселя можно применить степенной ряд, первый член которого имеет вид

$$J_m(x) = \frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m. \qquad (22.07)$$

Для функции с индексами 0 и 1, которые чаще всего встречаются, мы приведем первые два члена степенных разложений

$$\left.\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots; \\ J_1(x) &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (22.08)$$

При больших значениях аргумента (точнее, при тех аргументах, которые удовлетворяют также неравенству $x \gg m^2$) функцию $J_m(x)$ можно заменить первым членом асимптотического разложения, имеющим вид

$$J_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - (2m+1)\frac{\pi}{4}\right]. \qquad (22.09)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Второе решение уравнения Бесселя называется функцией Неймана и обозначается обычно через $N_m(x)$. При малых аргументах для функций $N_m(x)$ имеются приближенные формулы

$$\left.\begin{aligned} N_m(x) &= -\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^m \quad (m=1,2,\ldots); \\ N_0(x) &= -\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x}, \end{aligned}\right\} \qquad (22.10)$$

где $\gamma = 1{,}7811\ldots$ есть так называемая постоянная Эйлера. Формулы (22.10) показывают, что функции Неймана имеют особенность в точке $x=0$. Для больших аргументов функция $N_m(x)$ может быть приближенно вычислена с помощью выражения

$$N_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left[x-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right]. \qquad (22.11)$$

Выражения (22.09) и (22.11) показывают, что функции Бесселя и Неймана определяют стоячие цилиндрические волны, причем из функции Бесселя получается цилиндрическая волна, принимающая всюду конечные значения, а функция Неймана дает стоячую цилиндрическую волну с бесконечной амплитудой на оси z цилиндрической системы координат, т. е. при $r=0$.

Наиболее наглядный физический смысл цилиндрические волны имеют в непоглощающей среде с вещественным волновым числом K, когда стоячие волны (22.09) и (22.11) имеют бесконечное число узловых окружностей (в чем наиболее ярко проявляется стоячий характер этих волн) и амплитуду, убывающую как $\frac{1}{\sqrt{r}}$ (в чем сказывается цилиндрический характер этих волн, т. е. расходимость в радиальном направлении).

Функции Бесселя и Неймана часто рассматриваются как основные решения уравнения Бесселя, с помощью которых может быть найдено общее решение этого уравнения

$$R_m = CJ_m(x) + C'N_m(x), \qquad (22.12)$$

где C и C' — произвольные постоянные. Функции J_m и N_m при вещественных положительных x принимают вещественные значения, что делает их удобными при численных расчетах. Можно пользоваться и другими решениями

Электронное наследие России

уравнения Бесселя. Наиболее часто в этой связи рассматриваются так называемые функции Ханкеля 1-го и 2-го рода, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned} H_m^{(1)}(x) &= J_m(x) + iN_m(x); \\ H_m^{(2)}(x) &= J_m(x) - iN_m(x). \end{aligned}\right\} \qquad (22.13)$$

Обе функции Ханкеля являются комплексными при вещественных x и обращаются в бесконечность при $x=0$. При больших значениях x для функций Ханкеля из формул (22.09) и (22.11) получаются приближенные выражения

$$\left.\begin{aligned} H_m^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left[x-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right]}; \\ H_m^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left[x-(2m+1)\frac{\pi}{4}\right]}, \end{aligned}\right\} \qquad (22.14)$$

показывающие, что функции Ханкеля определяют по формулам (22.02) и (22.03) бегущие цилиндрические волны. При временной зависимости $e^{-i\omega t}$, которую мы применяем, функция Ханкеля 1-го рода $H_m^{(1)}$ соответствует цилиндрической волне, расходящейся от оси системы координат на бесконечность, а функция Ханкеля 2-го рода $H_m^{(2)}$ соответствует сходящейся цилиндрической волне.

Так как бегущие волны при рассмотрении волновых процессов встречаются весьма часто, то функции Ханкеля находят себе, наряду с функциями Бесселя и Неймана, широкое применение. При больших значениях Kr цилиндрическая волна (22.02), содержащая функции Ханкеля, имеет множитель e^{iKr} или e^{-iKr}, подобный множителям e^{iKz} и $^{-iKz}$ для плоских волн (см. § 11), но наряду с этим содержит и дополнительный множитель $\sqrt{\frac{2}{\pi Kr}}$, указывающий на изменение амплитуды волны вследствие ее цилиндрического характера.

В настоящее время для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля имеются подобные таблицы, охватывающие также комплексные значения аргумента x. Поэтому пользоваться этими функциями для расчетов лишь немногим сложнее, чем пользоваться тригонометрическими и экспоненциальными функциями. Расчет цилиндрических

ЭБ "Научное наследие России"

волн может быть в принципе произведен в любом конкретном случае с той же полнотой, что и расчет плоских волн.

Функции Бесселя и Неймана с индексами 0 и 1 связаны между собой соотношениями

$$J_0'(x) = -J_1(x); \quad N_0'(x) = -N_1(x), \tag{22.15}$$

причем аналогичные соотношения имеют место и для функций Ханкеля.

В заключение отметим, что более общими решениями волнового уравнения (22.01) являются выражения

$$U = R_m(r)\cos m\varphi\, e^{ihz} \tag{22.16}$$

и

$$U = R_m(r)\sin m\varphi\, e^{ihz}, \tag{22.17}$$

где h будем называть продольным волновым числом.

Подставляя выражения (22.16) и (22.17) в волновое уравнение, получаем для функции R_m уравнение

$$\frac{d^2R_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_m}{dr} + \left(g^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R_m = 0, \tag{22.18}$$

где через g обозначено так называемое поперечное волновое число, определяемое формулой

$$g^2 = K^2 - h^2 \tag{22.19}$$

или

$$g = \sqrt{K^2 - h^2}. \tag{22.20}$$

Уравнение (22.18) также сводится к уравнению Бесселя (22.06), но аргумент x определяется не формулой (22.05), а формулой

$$x = gr. \tag{22.21}$$

С такими выражениями нам придется иметь дело в теории круглых волноводов.

§ 23*. Сферические волны

В § 20 мы показали, что потенциалы U и V в сферической системе координат удовлетворяют уравнению (20.21), которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\Delta^* U + k^2 U = 0, \tag{23.01}$$

ЭБ "Научное наследие России"

где для сокращения введено обозначение

$$\Delta^* U = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}. \qquad (23.02)$$

Если искать решение уравнения (23.01) в виде

$$U = R(r)\,Y(\vartheta, \varphi), \qquad (23.03)$$

то обычные рассуждения метода разделения переменных (ср. § 41) приводят к следующим уравнениям для функций R и Y:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^* Y + \lambda Y &= 0; \\ \frac{d^2R}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right)R &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (23.04)$$

где λ — переменная разделения, которую мы будем представлять в виде

$$\lambda = \nu(\nu+1) \qquad (23.05)$$

(ν — новый параметр). Рассмотрим сначала уравнение для функции R, которое после введения новой независимой переменной $x = kr$ принимает вид

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \left[1 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2}\right]R = 0. \qquad (23.06)$$

Одним из решений этого уравнения является функция

$$\psi_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(x), \qquad (23.07)$$

где $J_{\nu+\frac{1}{2}}(x)$ — функция Бесселя с индексом $\nu+\frac{1}{2}$. Проверим это

$$\frac{d\psi_\nu}{dx} = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left\{\frac{d}{dx}J_{\nu+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2x}J_{\nu+\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\frac{d^2\psi_\nu}{dx^2} = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left\{\frac{d^2}{dx^2}J_{\nu+\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}J_{\nu+\frac{1}{2}} - \frac{1}{4x^2}J_{\nu+\frac{1}{2}}\right\}, \qquad (23.08)$$

$$\frac{d^2\psi_\nu}{dx^2} + \left[1 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2}\right]\psi_\nu =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\left\{\frac{d^2}{dx^2}J_{\nu+\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}J_{\nu+\frac{1}{2}} + \left[1 - \frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right]J_{\nu+\frac{1}{2}}\right\}.$$

ЭБ "Научное наследие России"

Поскольку функция $J_{\nu+\frac{1}{2}}$ удовлетворяет уравнению Бесселя (22.06) при $m=\nu+\frac{1}{2}$, функция ψ_ν действительно является решением уравнения (23.06). В качестве второго решения этого уравнения мы возьмем функцию

$$\zeta_\nu(x)=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}H^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}(x), \tag{23.09}$$

которая дает расходящуюся волну, имеющую (при $\nu\neq 0$) особенность в точке $x=0$. Функция (23.07) определяет стоячую волну, остающуюся всюду конечной.

При больших значениях x функции ψ_ν и ζ_ν имеют асимптотические выражения

$$\psi_\nu(x)=\cos\left[x-(\nu+1)\frac{\pi}{2}\right];\quad \zeta_\nu(x)=e^{i\left[x-(\nu+1)\frac{\pi}{2}\right]}, \tag{23.10}$$

вытекающие из формул (22.09) и (22.14).

Уравнение (23.04) для угловой функции $Y=Y(\vartheta,\varphi)$ также можно решать методом разделения переменных. Таким путем мы приходим к выражениям

$$\left.\begin{aligned} Y&=P^m_\nu(\cos\vartheta)\cos m\varphi\\ \text{и}\qquad Y&=P^m_\nu(\cos\vartheta)\sin m\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{23.11}$$

где m — положительный параметр (не обязательно целое число), а функция P^m_ν есть решение уравнения

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP^m_\nu}{d\vartheta}\right)+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]P^m_\nu=0. \tag{23.12}$$

Она называется присоединенной функцией Лежандра. Если ввести переменную

$$x=\cos\vartheta, \tag{23.13}$$

то уравнение (23.12) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP^m_\nu}{dx}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P^m_\nu=0. \tag{23.14}$$

© "Научное наследие России"

Если мы рассматриваем сферические волны в свободном пространстве, где φ принимает любые значения, а ϑ заключено в пределах

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \tag{23.15}$$

то индексы m и ν могут быть лишь целыми положительными числами (включая нуль). Действительно, лишь при целых m функции (23.11) являются однозначными функциями точки, т. е. не меняются при замене φ на $\varphi \pm 2\pi$, $\varphi \pm 4\pi$ и т. д. С другой стороны, в теории сферических функций доказывается, что уравнение (23.12) имеет конечное решение во всем интервале (23.15) лишь при $\nu = 0, 1, 2 \ldots$; отрицательные значения ничего нового не дают, так как, например, при $\nu = -1$, мы получаем то же уравнение, что при $\nu = 0$, и т. д.

При $m = 0$ уравнение (23.12) принимает вид

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP_\nu}{d\vartheta}\right) + \nu(\nu+1)P_\nu = 0. \tag{23.16}$$

При целых ν уравнению (23.16) удовлетворяют полиномы Лежандра P_ν, имеющие степень ν и нормируемые обычно так, что

$$P_\nu(1) = 1. \tag{23.17}$$

Второе решение уравнения (23.16) обращается в бесконечность при $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$. Присоединенные функции Лежандра, как известно, могут быть выражены через полиномы Лежандра по формуле

$$P_\nu^m(\cos\vartheta) = \sin^m\vartheta\frac{d^m P_\nu(\cos\vartheta)}{d(\cos\vartheta)^m}, \tag{23.18}$$

показывающей, что каждому значению постоянной разделения (23.05) соответствует $\nu + 1$ присоединенных функций P_ν^m, так как

$$P_\nu^m \equiv 0 \text{ при } m > \nu. \tag{23.19}$$

Поскольку при $m = 0$ вторая функция (23.11) обращается в нуль, то при каждом целом значении ν существует $2\nu + 1$ различных угловых функций (23.11).

В заключение напомним, что уравнение (23.01) не является волновым; однако оно сводится к волновому при замене функции U на функцию u по формуле (20.22).

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА IV

ТЕОРИЯ СКИН-ЭФФЕКТА

§ 24. Понятие идеального проводника и граничные условия на его поверхности

В § 12 мы отмечали, что металлы обладают настолько высокой электропроводностью, что при всех радиочастотах их комплексная диэлектрическая проницаемость ε имеет весьма большую мнимую часть:

$$\varepsilon = i\frac{4\pi\sigma}{\omega}; \quad \frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg 1. \tag{24.01}$$

Магнитная же проницаемость металлов по сравнению с ε всегда является конечной.

Идеализируя свойства хороших проводников, удовлетворяющих условиям (24.01), можно ввести понятие идеального проводника, для которого по определению имеем

$$\varepsilon = i\infty, \ \mu — \text{конечно}. \tag{24.02}$$

Внутри такого идеального проводника электромагнитное поле тождественно равно нулю, а на его поверхности имеет место граничное условие

$$E_t = 0 \text{ или } [\mathbf{nE}] = 0, \tag{24.03}$$

т. е. тангенциальная составляющая электрического поля на поверхности идеального проводника должна исчезать. Что же касается тангенциальной составляющей магнитного поля, то на поверхности идеального проводника она в общем случае не исчезает, а подчиняется соотношению

$$[\mathbf{nH}] = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}, \tag{24.04}$$

Электронное наследие России

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности идеального проводника, направленная внутрь него, а $\mathbf{i}$ — поверхностная плотность электрического тока.

В формулах (24.03) и (24.04) через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ обозначены значения полей в точках, бесконечно близких к поверхности идеального проводника, но лежащих вне его. Эти формулы вытекают из условий (24.02) и добавочного предположения о конечности электрического и магнитного полей. Последнее предположение является с физической точки зрения вполне естественным, так как появление бесконечно больших полей связано с бесконечно большей энергией поля, чего при источниках поля конечной мощности быть не может. Из первого уравнения поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E}$$

следует, что внутри идеального проводника

$$\mathbf{E} \equiv 0, \tag{24.05}$$

ибо конечные значения $\mathbf{E}$ при условии (24.02) возможны только при бесконечно больших значениях $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}$. Из второго уравнения поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mu\mathbf{H}$$

и условия (24.05) следует, что внутри идеального проводника также

$$\mathbf{H} \equiv 0. \tag{24.06}$$

Так как при идеальной проводимости могут существовать только поверхностные электрические токи, а поверхностных магнитных токов быть не может, то применение обычных граничных условий § 4 к поверхности идеального проводника при учете отсутствия поля внутри него приводит к граничным условиям (24.03) и (24.04).

Заметим, что известны проводники, для которых проводимость можно считать бесконечной: это так называемые сверхпроводники. Однако при рассмотрении идеального проводника имеют в виду реальные проводники, например металлы, обладающие высокой, но все же конечной проводимостью. Поэтому представляет интерес выяснить, в какой мере поведение идеального проводника отображает свойства реальных проводников. Это проще всего сделать, рассмотрев какую-нибудь конкретную задачу, например задачу о падении плоской волны на плоскую поверхность проводящего тела (ср. § 15 и § 16).

Для идеального проводника задача о падении плоской волны решается совсем просто: для 1-ой поляризации мы ищем поле в первой среде (пустоте) в виде

$$H_y = e^{ik(z\cos\varphi + x\sin\varphi)} + R_1 e^{ik(-z\cos\varphi + x\sin\varphi)}, \quad (24.07)$$

а для 2-ой поляризации — в виде

$$E_y = e^{ik(z\cos\varphi + x\sin\varphi)} + R_2 e^{ik(-z\cos\varphi + x\sin\varphi)}. \quad (24.08)$$

Применение граничных условий (24.03) приводит к следующим значениям коэффициентов отражения:

$$R_1 = 1;\ R_2 = -1, \quad (24.09)$$

что совпадает с выражениями (15.24).

Для реальных проводников соотношения (24.09) не совсем точны: так, например, если взять медь ($\sigma = 5\cdot 10^{17}$ *сек*$^{-1}$) и частоту $f = 3\cdot 10^9$ *гц*, что соответствует длине волны $\lambda = 10$ *см*, то будем иметь

$$\varepsilon = i\,3{,}3\cdot 10^8;\ |w| \sim 10^{-4},$$

и коэффициенты R_1 и R_2 будут для нормального падения отличаться от предельных значений (24.09) лишь на величину порядка одной десятитысячной; при более длинных волнах отличие будет еще меньше. С такой же точностью выполняется и граничное условие (24.03) (ср. § 25), так что при единичной амплитуде падающей волны тангенциальная составляющая электрического поля по порядку величины равна $|w|$.

Что же касается поля внутри хорошего проводника, то по формулам § 16 электромагнитное поле быстро затухает при удалении от поверхности раздела. Коэффициент затухания связан с глубиной проникания d, введенной в § 11 и подробно рассмотренной для металлов в § 12. Таким образом, в металл поле не проникает глубоко вследствие сильного поглощения, которое сопровождается почти полным отражением падающей волны от поверхности металла.

Поле внутри металла сосредоточено в весьма тонком слое вблизи поверхности металла — так называемом скин-слое, на расстояниях от поверхности, по порядку величины равных d. Поля **E** и **H** проникают в этот слой по-разному, что легко непосредственно усмотреть хотя бы из формул (15.22): магнитное поле имеет тот же порядок на

...ое наследие России"

поверхности металла, что и в падающей волне, а электрическое поле проникает в поверхностный слой уже ослабленным в w раз по сравнению с магнитным. При переходе к предельному случаю идеальной проводимости ($\sigma \to \infty$) толщина скин-слоя стремится к нулю, тангенциальное электрическое поле на поверхности исчезает, а тангенциальное магнитное поле терпит скачок. У реальных же металлов толщина скин-слоя конечна, но весьма мала, особенно на сверхвысоких частотах (ср. § 12).

Из сказанного выше следует, что идеальный проводник правильно передает свойства реальных металлических проводников как в отношении поля около проводников, так и в отношении распределения поля в самих проводниках. Различие между идеальными и реальными проводниками заключается главным образом в том, что в идеальных проводниках потери на джоулево тепло отсутствуют, в то время как в реальных проводниках они имеются в тем большей степени, чем меньше толщина скин-слоя d. В случаях, когда необходимо учесть явления, связанные с потерями, понятием идеального проводника пользоваться нельзя.

Понятие идеального проводника вводится для того, чтобы упростить (а в ряде случаев сделать вообще возможным) решение большого числа электродинамических задач. Упрощение выражается в том, что поле внутри идеального проводника можно вообще не рассматривать, а наличие проводника учитывать с помощью граничного условия (24.03) на его поверхности. Исходя из решения задачи об идеальном проводнике, можно также методом возмущений вычислить и потери в реальных проводниках, как это будет показано в гл. IX и гл. XVI.

§ 25. Сильный скин-эффект. Граничные условия Леонтовича

Перейдем к изучению электромагнитных волн в веществах с большим комплексным показателем преломления

$$n = n' + in''; \quad n'' \gg 1 \tag{25.01}$$

и с конечным волновым сопротивлением w. Параметры n и w были введены нами в § 11; ниже мы их будем употреблять вместо первоначальных параметров ε и μ.

В принципе неравенство (25.01) может выполняться как за счет большой комплексной диэлектрической про-

ЭБ "Научное наследие России"

ницаемости ε, так и за счет большой комплексной магнитной проницаемости μ. Однако в большинстве случаев вещества, удовлетворяющие этому условию, являются хорошими проводниками и имеют конечную магнитную проницаемость. Для таких веществ волновое сопротивление w является малой величиной. К рассмотрению этого конкретного случая мы перейдем лишь в § 26.

Выше в § 13 мы показали, что при нормальном падении плоской волны на плоскую поверхность любого вещества внутри него возбуждается плоская волна (16.09), составляющие которой связаны между собой соотношением (16.12). Поэтому на поверхности раздела составляющие электрического и магнитного поля удовлетворяют граничным условиям

$$E_x = wH_y;\ E_y = -wH_x \text{ (при } z = 0), \qquad (25.02)$$

где ось z направлена внутрь среды с волновым сопротивлением w.

Граничные условия (25.02) точно выполняются, если плоская волна падает на плоскость раздела нормально. Если же волна падает на плоскую поверхность наклонно, то эти граничные условия, как следует из тех же формул (16.12), справедливы приближенно — для веществ с большим комплексным показателем преломления [условия (16.10) или (25.01)].

Объясним физически, что происходит при наклонном падении плоской волны на поверхность тела с большим комплексным показателем преломления. Как известно, при падении волны на более плотную в оптическом отношении среду направление распространения прошедшей волны приближается к нормали. При весьма большом показателе преломления второй среды волна в ней распространяется практически по нормали при любых углах падения. Если к тому же показатель преломления второй среды является комплексным, то прошедшая волна затухает при своем распространении вдоль нормали, и глубина ее проникновения во вторую среду равна

$$d = \frac{1}{kn''} = \frac{\lambda}{2\pi n''}, \qquad (25.03)$$

так что при условии

$$n'' \gg 1 \qquad (25.04)$$

получаем неравенство

$$d \ll \frac{\lambda}{2\pi}. \qquad (25.05)$$

Электронное наследие России

Предположим теперь, что на ту же плоскую границу раздела падает не плоская, а, например, сферическая электромагнитная волна, имеющая радиус кривизны ρ. Эта волна может возбуждаться например диполем, находящимся в первой среде на расстоянии ρ от рассматриваемой точки плоскости раздела. Отличие сферической волны от плоской заключается в том, что не только фаза, но и амплитуда электромагнитного поля будет меняться вдоль границы раздела, причем амплитуда претерпевает заметные изменения на расстояниях, сравнимых с ρ. Однако если будет выполняться условие

$$d \ll \rho, \tag{25.06}$$

то это изменение амплитуды не повлияет на структуру поля во второй среде: там по-прежнему будут возбуждаться волны, распространяющиеся по нормали от границы раздела. Приближенные граничные условия (25.02) останутся в этом случае без изменений.

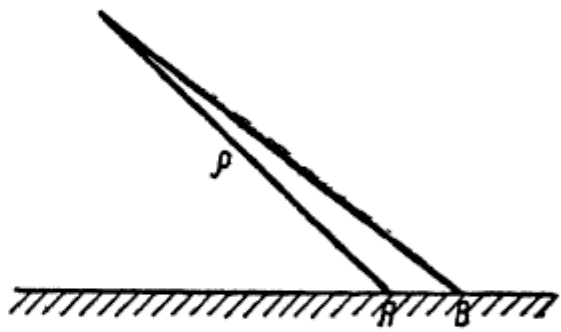


Рис. 12. К обоснованию условия (25.06).

Сказанное можно пояснить следующим образом. Сферическую волну можно рассматривать в *каждой* точке границы раздела как „кусок" плоской волны с некоторой амплитудой и направлением распространения. Если расстояние между двумя точками A и B на плоскости раздела (рис. 12) составляет малую часть ρ, то приближенно на всем участке AB падающую волну можно считать плоской волной с постоянной амплитудой и постоянным углом падения. Если к тому же участок AB велик по сравнению с d, то на нем поле проходит в нижнюю среду так же, как при падении однородной плоской волны, и потому удовлетворяет условиям (25.02). Линейные размеры участка AB должны удовлетворять неравенствам

$$d \ll AB \ll \rho, \tag{25.07}$$

так что при условии (25.06) такой участок всегда можно выбрать.

Предположим теперь, что электромагнитные волны падают не на полубесконечное тело, а на пластину толщи-

ЭБ "Научное наследие России"

ной D, вещество которой обладает большим комплексным показателем преломления. Так как волны в пластинке, возбуждаемые вблизи одной ее граничной плоскости, могут отражаться от другой плоскости, то в общем случае характер поля в пластинке изменится и граничные условия (25.02) уже не будут иметь места. Однако если выполняется условие

$$d \ll D, \tag{25.08}$$

то волна, идущая от одной границы раздела, не сможет практически дойти до другой границы, пластинка будет себя вести в электромагнитном отношении как бесконечно толстая, и на каждой ее границе будут иметь место приближенные граничные условия (25.02).

Рассмотрим теперь тело, поверхность которого имеет радиусы кривизны порядка a. Если для этого тела выполняется условие (25.01) и, кроме того, условие

$$d \ll a, \tag{25.09}$$

то кривизна поверхности не должна влиять на структуру поля, проникшего на небольшую глубину d в это тело, и на его поверхности по-прежнему должны выполняться приближенные граничные условия (25.02). Здесь через x, y, z обозначена местная декартова система координат, плоскость x, y которой совпадает с касательной плоскостью к поверхности тела в данной точке, а ось z направлена по нормали внутрь тела.

Для тела, ограниченного неплоской поверхностью, граничные условия (25.02) целесообразно переписать в векторной форме. Если мы обозначим через $\mathbf{n}$ нормаль к поверхности тела, направленную внутрь тела, то условия (25.02) легко преобразовать к виду

$$[\mathbf{nE}] = -w[\mathbf{n}[\mathbf{nH}]]. \tag{25.10}$$

Усло́вия (25.02) или (25.10) называются приближенными граничными условиями М. А. Леонтовича. Эти граничные условия применимы при выполнении неравенств (25.04)—(25.09). Так как явление концентрации электромагнитного поля вблизи поверхности тела называется обычно скин-эффектом, то можно сказать, что приближенные граничные условия Леонтовича имеют место при *сильном* скин-эффекте, когда толщина скин-слоя d мала по сравнению со всеми величинами, имеющими размерность длины и характеризующими рассматриваемую электродинамическую си-

...ое наследие России"

стему. В частности, толщина скин-слоя должна быть мала как по сравнению с размерами тела во всех направлениях, так и по сравнению с радиусами кривизны его поверхности. Иначе говоря, при сильном скин-эффекте электромагнитное поле должно занимать лишь небольшую часть объема тела.

Выше мы рассматривали, нигде не оговаривая этого явно, тело с большим комплексным показателем преломления, окруженное пустотой. Если электромагнитные свойства окружающего пространства отличаются от свойств пустоты, то приближенные граничные условия Леонтовича, как легко показать, не изменяются, однако условия их применимости принимают несколько иной вид.

Значение приближенных граничных условий Леонтовича заключается в том, что они позволяют не рассматривать поля внутри тела и учитывать наличие тела с помощью граничных условий на его поверхности. Такими же свойствами обладали и граничные условия на поверхности идеального проводника, введенные в § 24.

Для оценки точности приближенных граничных условий применим их к падению плоской волны на плоскую границу раздела. Записывая поле в пустоте с помощью формул (24.07) и (24.08) с неизвестными коэффициентами отражения R_1 и R_2, мы с помощью граничных условий (25.02) легко получаем выражения

$$R_1 = \frac{\cos\varphi - w}{\cos\varphi + w};\quad R_2 = \frac{w\cos\varphi - 1}{w\cos\varphi + 1}, \tag{25.11}$$

которые можно вывести из выражений (15.14) и (15.20), если в последних величину $\nu = \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}$ заменить на n. Отсюда видно, что относительная ошибка, даваемая приближенными граничными условиями, по порядку величины равна $\frac{1}{|n|^2}$.

§ 26. Сопротивление проводников при сильном скин-эффекте

В § 25 мы рассмотрели приближенные граничные условия Леонтовича. Эти условия тем более точны, чем больше комплексный показатель преломления тела и чем меньше глубина проникания поля внутрь этого тела. Если совершить (чисто математически) предельный переход к зна-

ЭБ "Научное наследие России"

чениям $n''=\infty$ и $d=0$, то в пределе граничные условия Леонтовича станут совершенно точными.

Конкретизируем приближенные граничные условия для хороших проводников, не являющихся ферромагнетиками. Комплексные проницаемости таких проводников равны

$$\varepsilon = i\frac{4\pi\sigma}{\omega};\quad \mu = 1, \tag{26.01}$$

их волновое сопротивление равно

$$w = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{f}{\sigma}}(1-i). \tag{26.02}$$

Так как волновое сопротивление металлов w по абсолютной величине весьма мало, то в самом грубом приближении приближенные граничные условия (25.10) переходят для хороших проводников в граничные условия (24.03), соответствующие идеальному проводнику. Граничные условия Леонтовича дают гораздо лучшее приближение к свойствам реального проводника, так как они учитывают проникание поля в проводник и связанные с этим потери, что с помощью понятия идеального проводника непосредственно сделать не удается.

Действительно, для хороших проводников приближенные граничные условия позволяют правильно учесть влияние проводника в первом приближении относительно параметра малости — волнового сопротивления $w=\frac{1}{n}$ и, как мы видели на примере в конце § 25, дают погрешность порядка $\frac{1}{n^2}$. Заметим, что можно уточнить приближенные граничные условия Леонтовича, после чего они будут давать погрешность порядка $\frac{1}{n^3}$; однако, при этом они сильно усложнятся и пользоваться ими в общем случае будет гораздо труднее.

Если на поверхности тела, имеющего параметры (26.01) и удовлетворяющего условию (25.01), имеют место приближенные граничные условия (25.02) или (25.10), то можно легко вычислить сопротивление проводника при скин-эффекте. Получаемые результаты справедливы в случае сильного скин-эффекта, так как сами граничные условия применимы лишь при сильном скин-эффекте.

Выразим тангенциальное магнитное поле на поверхности проводящего тела через ток, текущий в его скин-слое. Если толщина скин-слоя равна нулю, то мы имеем по-

ЭБ "Научное наследие России"

верхностный ток с плотностью $\mathbf{i}$, текущий по геометрической поверхности и связанный с тангенциальным магнитным полем на ней соотношением (24.04). Если же толщина скин-слоя d конечна, то ток уже не носит поверхностного характера, а распределен по объему. Однако при *достаточно малом* d можно ввести вектор $\mathbf{I}$, который называется плотностью квазиповерхностного тока. Вектор $\mathbf{I}$ связан с обычной (объемной) плотностью тока $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ соотношением

$$\mathbf{I}=\int_0^{Nd}\mathbf{j}\,dz, \tag{26.03}$$

где интегрирование производится по нормали от поверхности тела до глубины Nd (несколько d), ниже которой токами и полями можно уже пренебречь. Для плотности квазиповерхностного тока справедливо соотношение

$$[\mathbf{nH}]=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{I}. \tag{26.04}$$

Подставляя его в граничные условия (25.10), получим

$$[\mathbf{nE}]=\zeta[\mathbf{nI}], \tag{26.05}$$

где обозначено

$$\zeta=\frac{4\pi}{c}w. \tag{26.06}$$

Заметим, что соотношение (26.04), в противоположность аналогичному соотношению (24.04), является приближенным и справедливо лишь при достаточно малом d— в той же степени, впрочем, как и сами граничные условия (25.10). Кроме того, соотношение (26.04) справедливо лишь для хороших проводников, внутри которых можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости и, следовательно, считать комплексную диэлектрическую проницаемость ε чисто мнимой, как в формуле (26.01). Действительно, соотношение (26.04) можно вывести обычным способом из первого уравнения поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=-ik\varepsilon\mathbf{E},$$

где в силу (26.01)

$$-ik\varepsilon\mathbf{E}=\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{26.07}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Применяя это уравнение в интегральной форме

$$\oint H_s\, ds = \frac{4\pi}{c} \int j_n\, dS \qquad (26.08)$$

к контуру $ABCDA$, изображенному на рис. 13, мы и приходим к соотношению (26.04), если провести сторону CD на такой глубине Nd, что полем и током на этой глубине можно пренебречь; интегралами по сторонам BC и DA пренебрегаем на том основании, что толщина скин-слоя мала и нормальные составляющие поля внутри проводника согласно § 16 также малы.

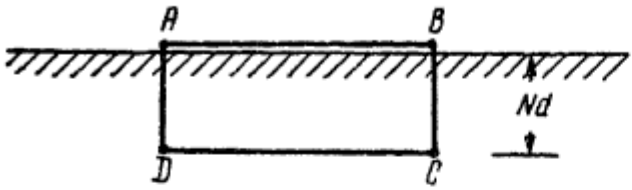


Рис. 13. К выводу соотношения (26.04).

Приближенные граничные условия (26.05), выведенные для хороших проводников, можно также записать в виде

$$E_t = \zeta I_t. \qquad (26.09)$$

Таким образом, тангенциальное магнитное поле на поверхности хорошего проводника и плотность квазиповерхностного тока, текущего по этому проводнику, пропорциональны друг другу. Коэффициент пропорциональности ζ естественно назвать поверхностным импедансом проводника. Поверхностный импеданс есть комплексная величина, которую с помощью формул (26.01) и (26.06) легко преобразовать к следующему виду:

$$\zeta = \frac{1-i}{\sigma d}, \qquad (26.10)$$

где d есть толщина скин-слоя, определяемая формулой (12.14),

$$d = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda c}{\sigma}}. \qquad (26.11)$$

Если магнитная проницаемость проводника отлична от единицы, но вещественна, то формулы (26.09) и (26.10) останутся в силе, но d будет вычисляться по формуле

$$d = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda c}{\sigma\mu}}. \qquad (26.12)$$

Если имеются магнитные потери, так что проницаемость μ комплексна, то выражение для поверхностного

...ное наследие России"

импеданса ζ усложняется, и аргумент комплексного числа ζ становится отличным от $-\frac{\pi}{4}$.

Поверхностный импеданс ζ можно разложить, как и всякий импеданс, на вещественную и мнимую части

$$\zeta = \rho - i\xi, \tag{26.13}$$

и назвать ρ — активным, а ξ — реактивным сопротивлением проводника при сильном скин-эффекте.

Заметим, что в теории цепей активное и реактивное сопротивления вводятся по формуле

$$Z = R + iX, \tag{26.14}$$

но там применяется зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$. Так как у нас взята временна́я зависимость $e^{-i\omega t}$, то для получения соотношений при зависимости $e^{i\omega t}$ надо во всех наших формулах мнимую единицу i заменить на $-i$. Поэтому мы вводим активное и реактивное сопротивления R и X по формуле

$$Z = R - iX, \tag{26.15}$$

причем для индуктивного сопротивления как обычно $X > 0$.

Из формулы (26.10) видно, что активное поверхностное сопротивление проводника при сильном скин-эффекте равно

$$\rho = \frac{1}{\sigma d}, \tag{26.16}$$

т. е. имеет ту же величину, какую на постоянном токе (при отсутствии скин-эффекта, когда ток равномерно заполняет все поперечное сечение проводника) имеет пластинка толщины d. Это соотношение с новой точки зрения обосновывает применение термина „толщина скин-слоя“ к величине d: толщина d показывает, какая часть объема проводника эффективно участвует в перенесении электрического тока и определяет активное сопротивление данного объема проводника. Иначе говоря, толщина скин-слоя d показывает толщину поверхностного слоя, равномерно заполненного током и имеющего то же активное сопротивление. Что же касается реактивного поверхностного сопротивления, то оно численно равно активному и положительно, т. е. поверхностный импеданс имеет индуктивный характер. Физически это объясняется тем, что полный поверхностный ток I_t отстает по фазе от тангенциального

ЭБ "Научное наследие России"

электрического поля E_t на поверхности проводника. Действительно, лишь объемные токи $\mathbf{j}$ на самой поверхности оказываются, в силу соотношения $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, в фазе с поверхностным электрическим полем; токи же в более глубоких слоях проводника отстают по фазе от поверхностного электрического поля в силу того, что в проводнике возбуждается волна, распространяющаяся нормально внутрь проводника.

С помощью теоремы о комплексной мощности (см. § 6) нетрудно выяснить энергетический смысл активного и реактивного поверхностного сопротивления. Действительно, применим соотношение (6.14) к объему проводника и учтем, что внутри проводника отсутствуют сторонние токи, так что $P_e^к=P_m^к=0$. Кроме того, возьмем для проводника проницаемости (26.01), тогда теорема о комплексной мощности в объеме проводника принимает вид

$$-\Sigma^к=\overline{P}_э-2i\omega W'_м, \tag{26.17}$$

где $\overline{P}_э$ есть средняя за период мощность электрических потерь (6.08) в объеме проводника V, а $W'_м$ при $\mu=1$ совпадает со средней магнитной энергией $\overline{W}_м$, находящейся в том же объеме [формулы (5.11) и (6.13)].

Величина $-\Sigma^к$ есть комплексная мощность, втекающая в объем проводника через его поверхность S. Она может быть преобразована к виду

$$-\Sigma^к=\frac{c}{8\pi}\oint\limits_S \mathbf{n}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]\,dS=\frac{c}{8\pi}\oint\limits_S[\mathbf{n}\mathbf{E}]\,\mathbf{H}^*dS=$$

$$=-\frac{c}{8\pi}\oint\limits_S w\,[\mathbf{n}\,[\mathbf{n}\mathbf{H}]]\,\mathbf{H}^*dS,$$

так что

$$-\Sigma^к=\frac{c}{8\pi}\oint\limits_S w\,|\,[\mathbf{n}\mathbf{H}]\,|^2dS \tag{26.18}$$

или

$$-\Sigma^к=\frac{1}{2}\oint\zeta\,|\,\mathbf{I}\,|^2dS, \tag{26.19}$$

причем при преобразовании мы использовали формулы (25.10), (26.04) и (26.05). Здесь $\mathbf{n}$, в отличие от § 6, озна-

"Научное наследие России"

чает нормаль к поверхности S, направленную внутрь рассматриваемого объема проводника.

Разделяя в соотношении (26.19) вещественные и мнимые части, мы приходим к формулам

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\oint \rho |\mathbf{I}|^2 dS &= \overline{P}_э, \\ \frac{1}{4}\oint \xi |\mathbf{I}|^2 dS &= \omega \overline{W}_м, \end{aligned}\right\} \qquad (26.20)$$

показывающим, что активное поверхностное сопротивление ρ определяет мощность потерь в проводнике, а реактивное поверхностное сопротивление ξ — магнитную энергию, находящуюся в проводнике. Отметим еще раз, что по формуле (26.16) ток, распределенный по глубине проводника по экспоненциальному закону (сплошная кривая на рис. 14), выделяет то же тепло, что и ток, равномерно распределенный в слое толщины d (пунктир на рис. 14).

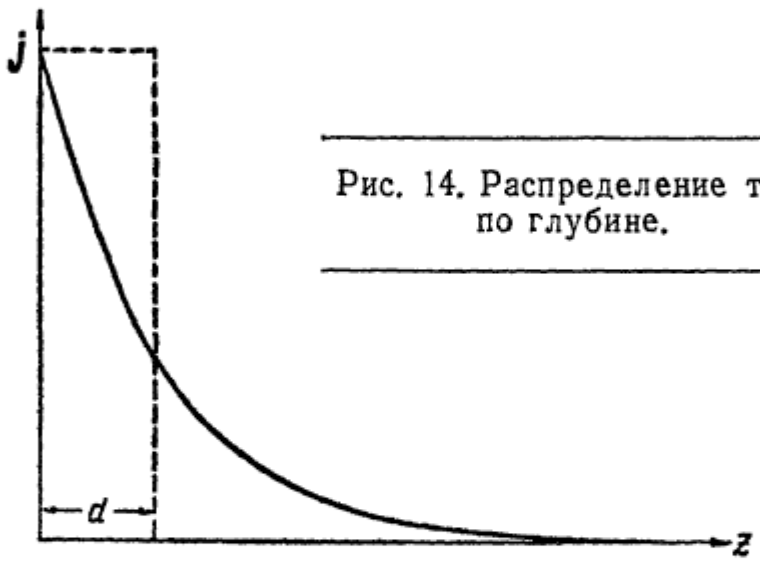


Рис. 14. Распределение тока по глубине.

Полученное выше общее соотношение можно применить, например, к вычислению погонного сопротивления цилиндрического провода радиуса a при сильном скин-эффекте, т. е. когда выполняется условие (25.09). Будем считать, что электрический ток течет вдоль провода и обозначим через E_t продольную составляющую электрического поля на поверхности провода, а через J полный ток, протекающий через поперечное сечение провода. По определению, погонным внутренним импедансом провода (или его внутренним импедансом на единицу длины) называется комплексный коэффициент пропорциональности Z_i в соотношении

$$E_t = Z_i J. \qquad (26.21)$$

ЭБ "Научное наследие России"

При этом предполагается, что поля и токи распределены симметрично вокруг оси провода. Соотношение (26.21) является непосредственным следствием соотношения (26.09) и того обстоятельства, что при симметрии вращения полный ток J и плотность квазиповерхностного тока I_t связаны между собой формулой

$$J = 2\pi a I_t, \tag{26.22}$$

откуда и получаем как соотношение (26.21), так и выражение для погонного импеданса

$$Z_i = \frac{\zeta}{2\pi a} = \frac{1-i}{2\pi a \sigma d}. \tag{26.23}$$

Представляя погонный импеданс в виде (26.15), т. е.

$$Z_i = R - iX_i, \tag{26.24}$$

получаем для активного и реактивного погонного сопротивления выражения

$$R = X_i = \frac{1}{2\pi a \sigma d}. \tag{26.25}$$

Так как реактивное сопротивление X_i имеет индуктивный характер, то можно ввести величину L_i с помощью соотношения

$$X_i = \omega L_i \tag{26.26}$$

и назвать ее погонной внутренней индуктивностью провода. Погонные параметры провода R и L_i согласно формулам (26.20) имеют простой энергетический смысл

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} R |J|^2 &= \overline{P}_э, \\ \frac{1}{4} L_i |J|^2 &= \overline{W}_м, \end{aligned}\right\} \tag{26.27}$$

где $\overline{P}_э$ и $\overline{W}_м$ относятся к единице длины провода.

Погонный импеданс провода Z_i является обобщением понятия погонного сопротивления, вводимого для постоянного тока как отношение падения напряжения на единицу длины провода к току в нем. При этом при вычислении Z_i электрическое поле E_t, являющееся естественным обобщением понятия „падения напряжения на единицу длины

...ое наследие России"

провода", берется на поверхности провода. Основания для этого следующие: во-первых, именно это „падение напряжения" измеряется вольтметром, присоединенным к различным точкам проводника (по необходимости на его поверхности) и, во-вторых, только при таком определении импеданса его активная и реактивная части имеют четкий энергетический смысл.

Основные законы скин-эффекта получены выше из рассмотрения законов возбуждения электромагнитных волн в проводнике электромагнитными волнами в окружающем проводник пространстве. Нужно при этом иметь в виду, что в окружающем пространстве волновые свойства переменного электромагнитного поля могут быть выражены слабо (например, если скин-эффект имеет место в цепи переменного тока, для которой соблюдаются условия квазистационарности), в то время как в проводниках, несущих переменные электрические токи, имеется сильный скин-эффект и, следовательно, поле обладает резко выраженным волновым характером. Это вызывается тем, что показатель преломления проводника весьма велик, вследствие чего волновые свойства поля проявляются в первую очередь внутри проводников. Например, при $\lambda = 100\,м$ в меди $d = 0{,}04\,мм$ и $\lambda' = \frac{2\pi}{K'} = 2\pi d = 0{,}24\,мм$ (см. § 11 и § 12). Поэтому в проводе диаметром 1 $мм$ волновые свойства поля выражены сильно, а в окружающем пространстве поле будет квазистационарным.

§ 27. Скин-эффект в цилиндрическом проводе

Изучим распределение переменного электрического тока в цилиндрическом проводе радиуса a. Будем считать, что ток и связанное с ним электрическое поле имеют лишь составляющую вдоль оси провода (ось z) и не зависят от расстояния вдоль этой оси. Кроме того, будем в соответствии с симметрией задачи считать, что распределение тока и поля обладает симметрией вращения. Волновое уравнение, которому должна подчиняться составляющая E_z внутри провода

$$\Delta E_z + K^2 E_z = 0, \tag{27.01}$$

в силу отсутствия зависимости от φ и z сводится к уравнению

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE_z}{dr} + K^2 E_z = 0, \tag{27.02}$$

ЭБ "Научное наследие России"

являющемуся частной формой уравнения (22.04) при $m=0$. Предполагая, что материал провода является хорошим проводником, не имеющим магнитных потерь, в соответствии с формулами (12.12) и (12.13) мы можем брать комплексное волновое число в проводнике в виде

$$K=\frac{1+i}{d}, \tag{27.03}$$

где d—толщина скин-слоя, определяемая формулами (26.11) и (26.12).

В качестве решения уравнения (27.02) нужно взять функцию Бесселя $J_0(Kr)$, т. е. положить

$$E_z=CJ_0(Kr). \tag{27.04}$$

В выражении для E_z не может присутствовать слагаемое типа $C'N_0(Kr)$, так как это привело бы к бесконечно большим значениям поля и тока на оси провода (при $r=0$), что недопустимо из физических соображений.

Формула (27.04) уже дает нам картину распределения переменного тока в проводе. В самом деле, распределение тока (и поля) по поперечному сечению провода можно характеризовать функцией

$$f(r)=\frac{E_z(r)}{E_z(a)}=\frac{j_z(r)}{j_z(a)}, \tag{27.05}$$

обращающейся в единицу на поверхности провода, при $r=a$. По формуле (27.04) функция $f(r)$ получается равной

$$f(r)=\frac{J_0(Kr)}{J_0(Ka)}. \tag{27.06}$$

Отсюда видно, что функция распределения тока по поперечному сечению провода определяется величиной Ka, т. е. согласно формуле (27.03) отношением радиуса провода a к толщине скин-слоя d. Для данного проводника толщина скин-слоя d зависит от длины волны. Для постоянного тока ($\omega=0$, $\lambda=\infty$) имеем $d=\infty$, вследствие чего аргументы функций $J_0(Kr)$ и $J_0(Ka)$ равны нулю и функция распределения тока равна единице. При увеличении частоты толщина скин-слоя d уменьшается и при небольших отношениях $\frac{a}{d}$ абсолютная величина функции $f(r)$ мало отличается от единицы $\left(\text{см. кривые } \frac{a}{d}=0{,}5 \text{ и } \frac{a}{d}=1 \text{ на рис. 15}\right)$;

Электронное наследие России"

центральная часть проводника несет несколько меньшую плотность тока, чем его периферийная часть. При увеличении отношения $\frac{a}{d}$ распределение тока становится все более неравномерным, и при больших значениях $\frac{a}{d}$ абсо-

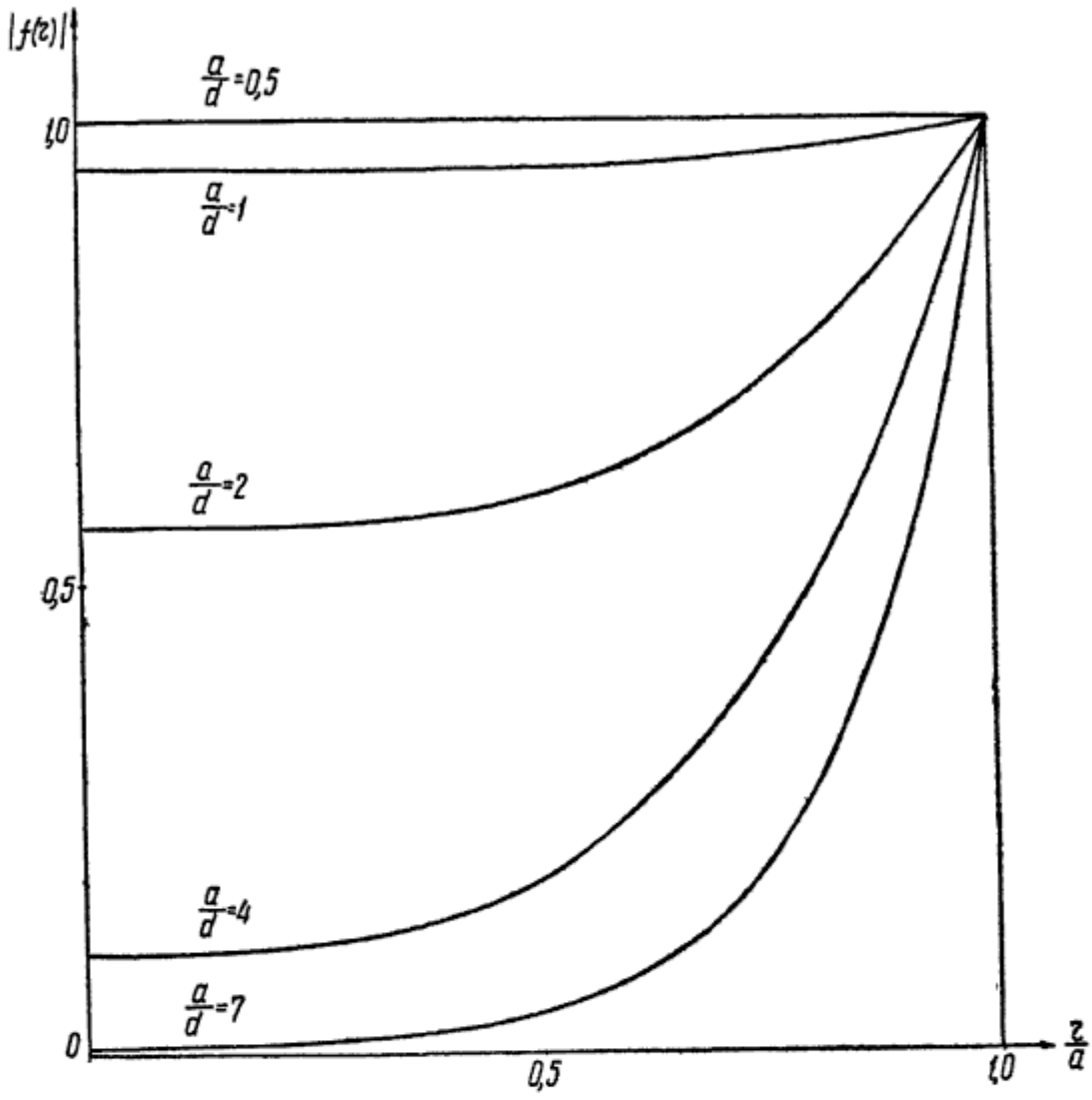


Рис. 15. Распределение тока в цилиндрическом проводе.

лютная величина функции $f(r)$ быстро спадает при удалении от поверхности провода. Если скин-эффект сильный, то функции Бесселя $J_0(Ka)$ и $J_0(Kr)$ (при $r \approx a$) можно вычислить по формуле (22.09), пригодной и для комплексных x; при $\operatorname{Im} x \gg 1$ эта формула может быть записана в виде

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}, \qquad (27.07)$$

ЭБ "Научное наследие России"

так как

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\right]\approx\frac{1}{2}e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Подставляя выражение (27.07) в формулу (27.06), получим

$$f(r)=\sqrt{\frac{a}{r}}e^{iK(a-r)}\approx e^{iK(a-r)}, \tag{27.08}$$

поскольку функция $f(r)$ отлична от нуля практически лишь при $r\approx a$; отсюда

$$|f(r)|=e^{-\frac{a-r}{d}}, \tag{27.09}$$

и мы приходим (так как $a\gg d$) к кривым на рис. 15, соответствующим сосредоточению тока в тонком слое у поверхности провода.

Пользуясь формулой (27.04), нетрудно вычислить с помощью определения (26.21) погонный импеданс провода Z_l. Для этого нужно вычислить полный ток J, соответствующий распределению поля в проводе по формуле (27.04). Так как плотность тока j_z связана с полем E_z соотношением

$$j_z=\sigma E_z, \tag{27.10}$$

то полный ток может быть найден в виде интеграла

$$J=\int j_z dS=2\pi\sigma\int_0^a E_z r dr. \tag{27.11}$$

Пользуясь уравнением (27.02), можно написать

$$E_z=-\frac{1}{K^2}\left(\frac{d^2E_z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dE_z}{dr}\right);$$

$$rE_z=-\frac{1}{K^2}\left(r\frac{d^2E_z}{dr^2}+\frac{dE_z}{dr}\right)=-\frac{1}{K^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right)$$

и подставляя последнее выражение в формулу (27.11), получаем

$$J=-\frac{2\pi\sigma}{K^2}\int_0^a\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right)dr=-\frac{2\pi\sigma}{K^2}\left|r\frac{dE_z}{dr}\right|_0^a=-\frac{2\pi\sigma a}{K}CJ_0'(Ka). \tag{27.12}$$

Электронное наследие России

С помощью первого соотношения (22.15) можно также написать

$$J=\frac{2\pi\sigma a}{K}CJ_1(Ka). \tag{27.13}$$

Погонный импеданс Z_i получается в виде

$$Z_i=\frac{E_z(a)}{J}=\frac{K}{2\pi\sigma a}\cdot\frac{J_0(Ka)}{J_1(Ka)}. \tag{27.14}$$

Вводя погонное сопротивление провода на постоянном токе

$$R_0=\frac{1}{\pi a^2\sigma}, \tag{27.15}$$

мы можем придать формуле (27.14) следующий вид:

$$\frac{Z_i}{R_0}=\frac{x}{2}\frac{J_0(x)}{J_1(x)}, \tag{27.16}$$

где

$$x=Ka=(1+i)\frac{a}{d}. \tag{27.17}$$

Выражение (27.16) позволяет рассчитывать погонный импеданс провода при любых условиях. Если скин-эффект выражен слабо, т. е. если $\frac{a}{d}\ll 1$, то вследствие малости аргумента x можно пользоваться разложениями (22.08). В этом случае имеем

$$\frac{Z_i}{R_0}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=1-\frac{1}{8}k^2a^2\varepsilon\mu, \tag{27.18}$$

откуда, представляя Z_i в виде

$$Z_i=R-i\omega L_i, \tag{27.19}$$

как это было сделано выше в формулах (26.24) и (26.26), мы получим

$$R=R_0 \text{ и } L_i=\frac{1}{2c^2}, \tag{27.20}$$

если проводник имеет параметры (26.01); при вещественном $\mu\neq 1$ погонную внутреннюю индуктивность L_i нужно еще умножить на μ.

Таким образом, при достаточно низких частотах, когда скин-эффект выражен слабо, активное сопротивление провода практически равно его сопротивлению на постоянном

ЭБ "Научное наследие России"

токе. Его внутреннюю индуктивность, как легко показать, можно найти из элементарных соображений, принимая распределение постоянного тока внутри провода равномерным и вычисляя вызванное им внутри провода магнитное поле (см. конец параграфа).

В случае *сильного* скин-эффекта, когда отношение $\frac{a}{d}$ велико, для функции $J_0(x)$ может быть применено приближенное выражение (27.07), а для функции $J_1(x)$ — аналогичное выражение

$$J_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-i\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)}, \qquad (27.21)$$

откуда для погонного импеданса получаем формулу

$$\frac{Z_i}{R_0} = -\frac{ix}{2} \qquad (27.22)$$

или

$$Z_i = \frac{1-i}{2\pi a \sigma d}. \qquad (27.23)$$

Таким образом, при сильном скин-эффекте мы приходим к выражению для погонного импеданса, уже выведенному выше из других соображений [формула (26.23)]. Этому, разумеется, не следует удивляться, так как в случае сильного скин-эффекта распределение тока и поля по формуле (27.08) получилось таким же, как и при общих рассуждениях § 26.

При конечных значениях отношения $\frac{a}{d}$ погонный импеданс приходится вычислять с помощью формулы (27.16), пользуясь имеющимися таблицами функций Бесселя от комплексного аргумента. В безразмерных переменных нетрудно построить универсальный график, пригодный для расчета погонного импеданса проводов из любого материала. Этот график дан на рис. 16, где представлены (в зависимости от $\frac{a}{d}$) три отношения: $\frac{R}{R_0}$, $\frac{X_i}{R_0} = \frac{\omega L_i}{R_0}$ и $\frac{L_i}{L_i^\circ}$; через L_i° обозначена „низкочастотная“ погонная индуктивность провода, определяемая формулой (27.20).

Мы видим, что активное и реактивное сопротивления единицы длины провода при увеличении отношения $\frac{a}{d}$, т. е.

Электронное наследие России

при росте частоты, неограниченно возрастают, в то время как внутренняя индуктивность падает. Действительно, из формул (27.22) следует, что при $\frac{a}{d} \to \infty$ имеем

$$\frac{R}{R_0} = \frac{a}{2d}; \quad \frac{X_i}{R_0} = \frac{a}{2d} \tag{27.24}$$

и

$$\frac{L_i}{L_i^\circ} = \frac{2d}{a}. \tag{27.25}$$

Уменьшение L_i с ростом частоты физически объясняется тем, что при уменьшении d ток и поле вытесняются из

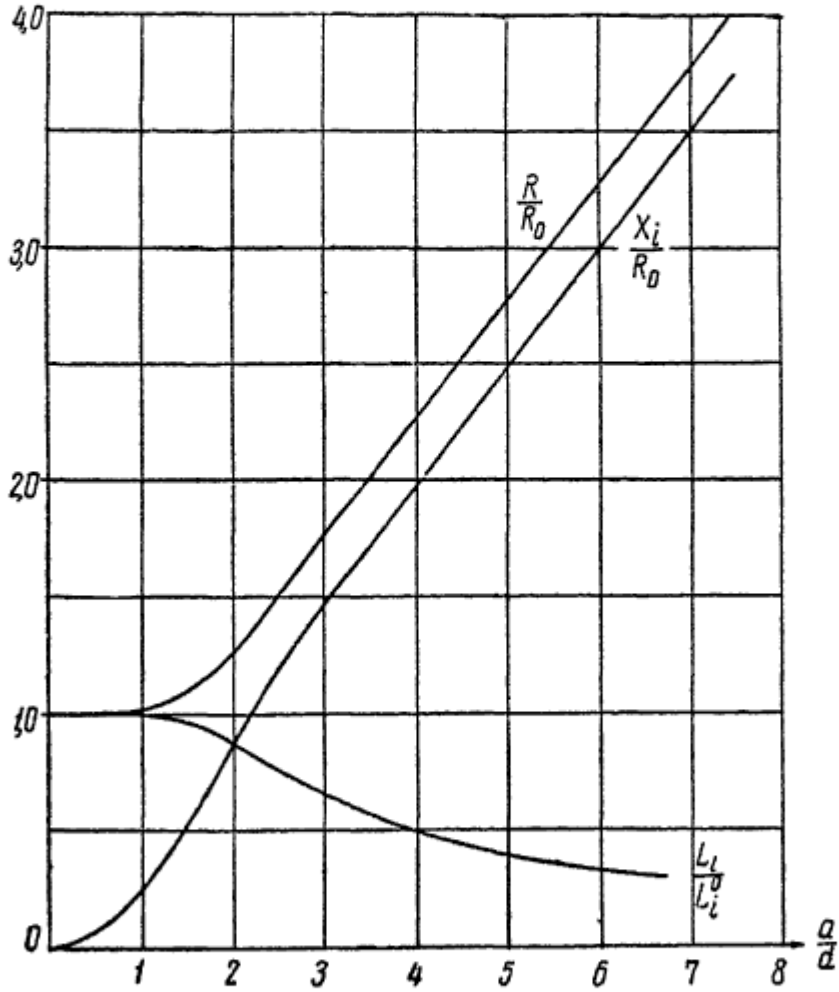


Рис. 16. Погонный внутренний импеданс цилиндрического провода.

внутренней области провода, в силу чего находящаяся внутри провода магнитная энергия стремится к нулю.

Нетрудно показать, что введенные в этом параграфе величины R и L_i имеют тот же энергетический

ЭБ "Научное наследие России"

смысл, что и соответствующие величины в § 26, и, в частности, удовлетворяют соотношениям (26.27). Доказательство этого утверждения также основано на теореме о комплексной мощности. Применим ее к единице длины провода (рис. 17), тогда комплексная мощность $-\Sigma^{к}$, поступающая в этот отрезок провода, определяется интегралом

$$-\Sigma^{к}=-\int S_n^{к}dS=\frac{c}{8\pi}\int E_z H_\varphi^* dS \qquad (27.26)$$

по боковой поверхности провода, поскольку для поперечных сечений

$$S_n^{к}=0. \qquad (27.27)$$

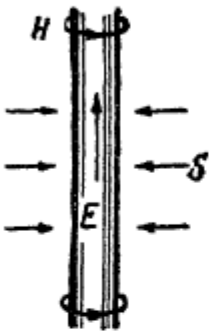


Рис. 17. Поток энергии к „потребляющему" участку цепи.

В интеграле (27.26) можно считать $dS=dsdz$, где $d\,s$ — элемент дуги окружности провода. При интегрировании можно E_z вынести за знак интеграла, интеграл по z дает единицу, т. е. длину отрезка, и мы получаем

$$-\Sigma^{к}=\frac{c}{8\pi}E_z\oint H_\varphi^* ds, \qquad (27.28)$$

где интеграл берется по окружности $r=a$. Применяя формулу

$$\oint H_\varphi ds=\frac{4\pi}{c}J, \qquad (27.29)$$

имеющую тот же смысл, что и соотношение (26.08), мы приходим к соотношениям (26.27) и к выражению

$$-\mathbf{\Sigma}^{к}=\frac{1}{2}E_z J^*=\frac{1}{2}Z_i|J|^2. \qquad (27.30)$$

Как при переменном, так и при постоянном токе мощность поступает в данный „потребляющий" участок цепи (отрезок проводника) не через поперечные сечения этого отрезка, а через его боковую поверхность, т. е. из внешнего пространства. Во внешнее пространство мощность подается „возбуждающими" участками цепи, где приложены сторонние электродвижущие силы. Поэтому скин-эффект в цепи переменного тока и скин-эффект при падении волны на проводящее тело можно рассматривать с единой точки зрения (ср. § 25 и 26).

Электронное наследие России

Второе соотношение (26.27) позволяет вычислить погонную внутреннюю индуктивность L_i для низких частот, когда скин-эффект практически не проявляется. Для этого применим соотношение (27.29) к окружности $r = \text{const}$ внутри провода

$$\oint H_\varphi ds = \frac{4\pi}{c} \int j_z dS, \tag{27.31}$$

отсюда получим

$$2\pi r H_\varphi = \frac{4\pi}{c} j_z \pi r^2 = \frac{4\pi}{c} J \frac{r^2}{a^2}$$

или

$$H_\varphi = \frac{2J}{c} \frac{r}{a^2}. \tag{27.32}$$

Внутренняя магнитная энергия провода на единицу его длины равна

$$\overline{W}_м = \frac{1}{8\pi} \int |H_\varphi|^2 dS = \frac{1}{4} \int_0^a |H_\varphi|^2 r dr = \frac{|J|^2}{c^2} \int_0^a \frac{r^3 dr}{a^4} = \frac{1}{4c^2} |J|^2, \tag{27.33}$$

откуда и получаем вторую формулу (27.20).

В заключение отметим, что выражение для Z_i было выведено в предположении, что переменный ток равномерно распределен по длине провода. Если же, например, вдоль провода бежит волна с волновым числом h, так что зависимость поля и тока от z определяется множителем e^{ihz}, то в каждом поперечном сечении $z = \text{const}$ составляющая E_z будет удовлетворять не уравнению (27.02), а уравнению

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z}{dr} + g^2 E_z = 0; \quad g = \sqrt{K^2 - h^2}, \tag{27.34}$$

как показано в конце § 22. В связи с этим в выражениях (27.06) и (27.14) нужно заменить K на g. Однако при выполнении условия

$$|K| \gg |h| \tag{27.35}$$

величины K и g практически совпадают. В большинстве случаев это неравенство удовлетворяется за счет условия (25.01) для металлов, так как $|h| \sim k$. Поэтому для волн, распространяющихся вдоль длинных линий, можно пользоваться погонным внутренним импедансом Z_i, вычисленным выше.

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА V

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

§ 28. Классификация линий передачи

Передача электромагнитной энергии осуществляется с помощью передающих линий самых различных типов. Для теоретического рассмотрения можно все линии передачи разбить на две основные группы. В первую группу мы отнесем линии передачи, подчиняющиеся телеграфным уравнениям. К их числу принадлежат: коаксиальная линия (концентрический кабель), двухпроводная линия и различные их модификации, как например экранированная двухпроводная линия и т. д. Ко второй группе мы отнесем линии, не подчиняющиеся телеграфным уравнениям и рассчитываемые чисто электродинамическими методами. К числу таких линий относятся прежде всего волноводы, например прямоугольный и круглый волновод, а также волноводы специального назначения, например волноводы с медленными волнами.

Приведенная классификация четко разграничивает физические принципы, лежащие в основе действия линий передачи. Нужно при этом отметить, что в некоторых случаях передающие линии имеют свойства, не позволяющие их отнести вполне определенно к одной из групп. Так бывает, если данная линия может быть рассчитана с помощью телеграфного уравнения весьма грубо, а более точный расчет осуществляется электродинамическими методами. С такими примерами мы встретимся в дальнейшем, в частности при рассмотрении однопроводной линии.

Историческое развитие радиотехники было, в частности, связано с переходом от длинноволнового диапазона к диапазонам все более и более коротковолновым. В начальной

Электронное наследие России"

стадии развития радиотехники, когда дециметровые и более короткие волны не имели еще практического значения, для передачи электромагнитной энергии использовались почти исключительно передающие линии первой группы. Полный инженерный расчет этих линий может быть произведен с помощью телеграфных уравнений, и таким образом данные линии с практической точки зрения почти не нуждаются в электродинамической трактовке. Для вычисления их параметров достаточно знать законы квазистационарного поля; так, расчет погонной емкости линий производится с помощью электростатики, а расчет погонной индуктивности — с помощью законов стационарного магнитного поля (ср. § 33). Интересно, что с помощью телеграфных уравнений распространение электромагнитных волн вдоль линий и близость их скорости к электродинамической постоянной c были теоретически предсказаны раньше, чем была создана теория распространения электромагнитных волн в свободном пространстве.

Ввиду большого технического значения телеграфных уравнений мы подробно изучим их связь с законами электродинамики и, в частности, рассмотрим важный вопрос о пределах применимости телеграфных уравнений. Дело в том, что пределы применимости какой-либо теории нельзя, как правило, вывести из нее самой. Для этого необходимо прибегнуть либо к опыту, либо к другой, более общей теории, содержащей первую в качестве частного случая: Применимость обычной теории длинных линий, базирующейся на телеграфных уравнениях, можно выяснить с помощью теории электромагнитного поля.

Для того, чтобы физически понять особое положение передающих линий первой группы, отметим связь между волнами в этих линиях и плоскими волнами в свободном пространстве. Рассмотрим плоскую волну в пустоте, распространяющуюся в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа (рис. 18,$а$).

Если перпендикулярно линиям электрического поля поставить две параллельные идеально проводящие плоскости, то (в силу равенства нулю тангенциального электрического поля на них) они не изменят электромагнитного процесса. Поэтому между параллельными, идеально проводящими плоскостями может распространяться (рис. 18, $б$) плоская поперечная волна и в случае, когда вне пространства между плоскостями никакого поля нет. Пара параллельных плоскостей является простейшим при-

ЭБ "Научное наследие России"

мером передающей линии первой группы. Непрерывной деформацией этих плоскостей и поля между ними можно получить (рис. 18, *в* и 18, *г*) электромагнитное поле волны в коаксиальной и двухпроводной линии.

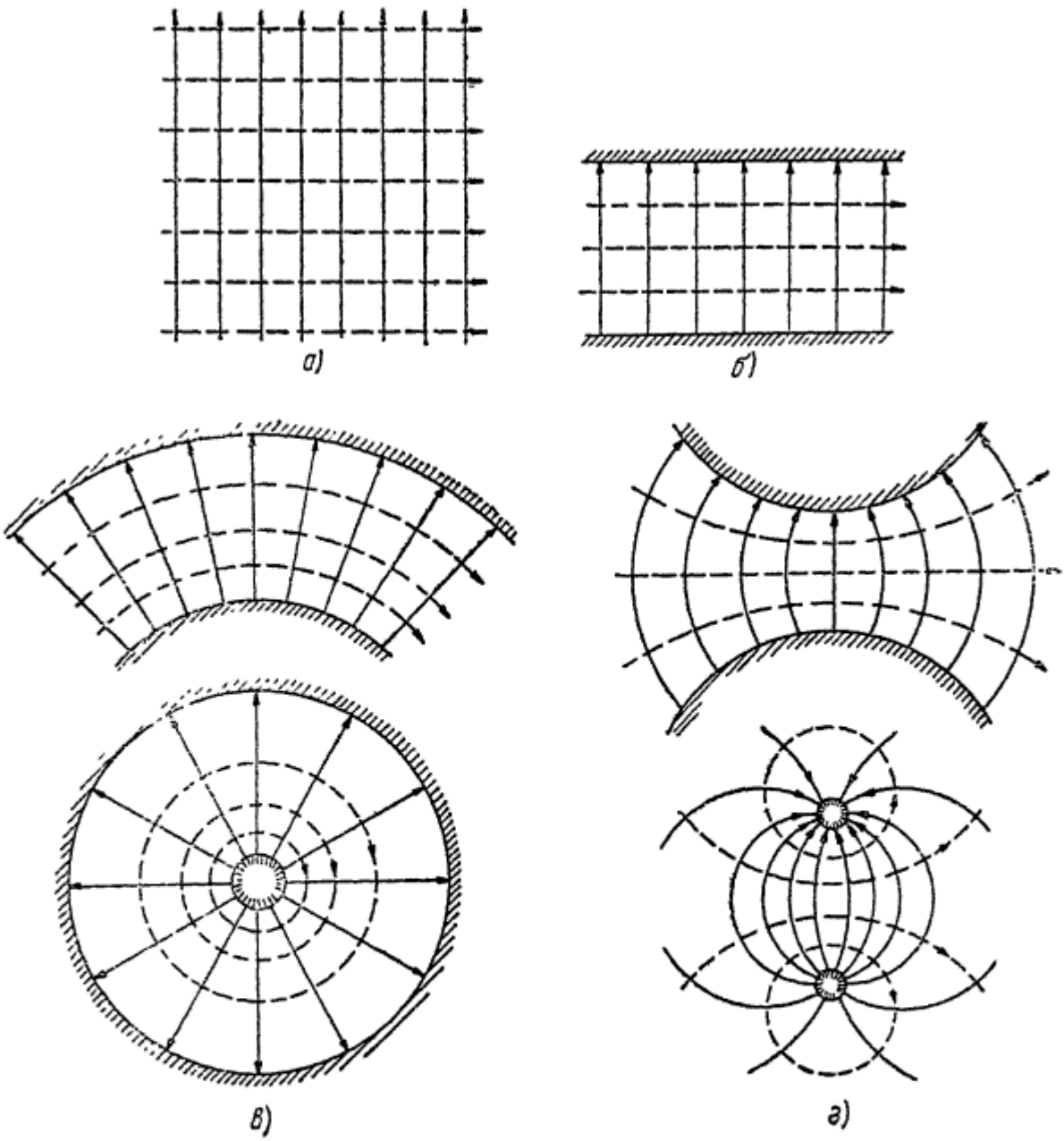


Рис. 18. Плоская волна и волны в линиях 1-й группы:

а — плоская волна в свободном пространстве; *б* — плоская волна между проводящими плоскостями; *в* - преобразование плоской волны в волну коаксиальной линии; *г* — то же для двухпроводной линии; ——— электрические силовые линии; — — — магнитные силовые линии.

Из этих нестрогих рассуждений вытекает, что электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль передающих линий первой группы, родственны плоским электромагнитным волнам в свободном пространстве. Разумеется, конечная проводимость линий передачи несколько искажает распределение поля. При этом скорость распро-

странения волн в линиях изменяется (становится отличной от c) и появляется затухание. Все эти явления мы подробно рассмотрим в дальнейшем.

Электромагнитные волны в передающих линиях второй группы имеют более сложную структуру, которую мы подробно изучим в гл. VII, XI и XII.

§ 29. Электромагнитные волны в идеально проводящих линиях

Исследуем электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль бесконечно длинных и идеально проводящих линий передачи, принадлежащих к первой группе. В § 28 мы привели нестрогие соображения о том, что волны

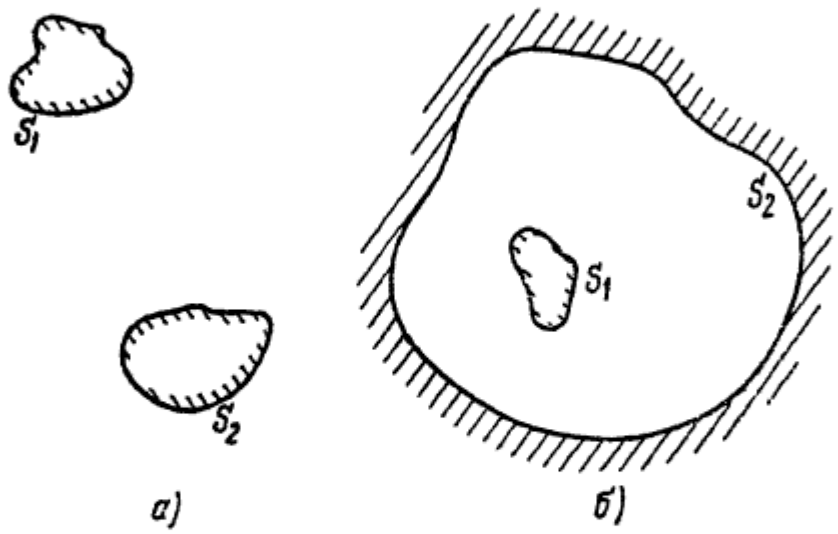


Рис. 19. Передающие линии, состоящие из двух проводников:
а — обобщенная двухпроводная линия; *б* — обобщенная „коаксиальная" линия.

распространяются вдоль таких линий со скоростью c и без затухания, причем структура их электромагнитного поля в некотором смысле близка к структуре поля плоских волн в неограниченном пустом пространстве.

Рассмотрим этот вопрос более точно, причем в общем виде. Будем считать, что линия передачи образована двумя бесконечными идеально проводящими цилиндрами *1* и *2*, не соприкасающимися друг с другом, с произвольной формой поперечного сечения. Эти цилиндры могут быть расположены либо рядом (рис. 19, *а*), либо один внутри другого (рис. 19, *б*).

Покажем, что вдоль такой идеально проводящей линии может распространяться волна, имеющая скорость c

ЭБ "Научное наследие России"

и электрический вектор Герца $\mathbf{\Pi}$, компоненты которого равны

$$\Pi_x = \Pi_y = 0; \quad \Pi_z = \Pi(x, y)\, e^{\pm ikz}, \tag{29.01}$$

откуда по формулам (18.02)

$$\left.\begin{aligned} A_x = A_y = 0; \quad A_z = -ik\,\Pi(x, y)\, e^{\pm ikz}; \\ \Phi = \mp ik\Pi(x, y)\, e^{\pm ikz}. \end{aligned}\right\} \tag{29.02}$$

Множитель $e^{\pm ikz}$ показывает, что мы рассматриваем волну, бегущую со скоростью c в положительном (+) или отрицательном (—) направлении оси z. Наличие у векторов $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{A}$ только составляющих по оси z связано с тем, что поверхностные токи, обусловленные рассматриваемой волной в линии, текут только вдоль оси z — в продольном направлении; это легко установить из формул (29.03).

Применительно к вектору Герца (29.01) формулы (18.03) дают

$$\left.\begin{aligned} E_x = \pm ik\frac{\partial \Pi}{\partial x}\, e^{\pm ikz}; \quad H_x = -ik\frac{\partial \Pi}{\partial y}\, e^{\pm ikz}; \\ E_y = \pm ik\frac{\partial \Pi}{\partial y}\, e^{\pm ikz}; \quad H_y = ik\frac{\partial \Pi}{\partial x}\, e^{\pm ikz}; \\ E_z = 0; \qquad\qquad H_z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{29.03}$$

причем равенство $E_z = 0$ вытекает из того, что

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} = -k^2\Pi_z. \tag{29.04}$$

Составляющая Π_z должна удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2\Pi_z = 0 \tag{29.05}$$

и в силу формулы (29.04) для функции $\Pi(x, y)$, зависящей только от поперечных координат системы, мы получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = 0, \tag{29.06}$$

т. е. двухмерное уравнение Лапласа. Тому же уравнению должны в силу формул (29.02) удовлетворять величины A_z

...ое наследие России"

и Ф, рассматриваемые как функции x и y. Поэтому можно сказать, что электрическое и магнитное поля в поперечном сечении имеют статический или потенциальный характер. Для того, чтобы подчеркнуть это обстоятельство, можно в формулы (29.03) ввести скалярный потенциал Ф, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \tag{29.07}$$

после чего формулы (29.03) примут вид

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad & H_x &= \mp E_y; \\ E_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad & H_y &= \pm E_x; \\ E_z &= 0; & H_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{29.08}$$

Таким образом, из электрического вектора Герца, заданного формулой (29.01), получается электромагнитная волна со следующими свойствами:

1. В поперечном сечении электрическое и магнитное поля подчиняются статическим законам. В частности, электрическое поле получается из потенциала, удовлетворяющего двухмерному уравнению Лапласа.

2. Волна чисто поперечная, так как $E_z = H_z = 0$.

3. Магнитное поле связано в каждой точке с электрическим так же, как у бегущей плоской волны: эти поля перпендикулярны и имеют одинаковую абсолютную величину.

Может ли данная линия поддерживать распространение волны со всеми этими свойствами?

Необходимым условием возможности такого распространения является идеальная проводимость проводов, поскольку в данной волне $E_z = 0$, а токи текут в продольном направлении. Граничное условие

$$E_t = 0 \tag{29.09}$$

выполняется на поверхности проводов, если на ней функция $\Pi(x, y)$ принимает некоторое постоянное значение. Для системы, изображенной на рис. 19, должны выполняться условия

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= \Pi_1 \text{ на } S_1; \\ \Pi &= \Pi_2 \text{ на } S_2, \end{aligned}\right\} \tag{29.10}$$

где Π_1 и Π_2 — две постоянные.

ЭБ "Научное наследие России"

Действительно, при выполнении этих граничных условий в каждом поперечном сечении $z = \text{const}$ на контуре каждого проводника будет $\Phi = \text{const}$, и поэтому в силу формул (29.08) электрические силовые линии будут подходить к поверхности проводника нормально, и граничное условие (29.09) удовлетворится.

Можно показать, что уравнение Лапласа (29.06) всегда имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (29.10). Это решение позволяет построить поле волны в данной линии.

В качестве примера рассмотрим электромагнитные волны в коаксиальной и двухпроводной линиях. Из сказанного выше следует, что в поперечном сечении коаксиальной линии электрическое поле бегущей волны распределено так же, как электростатическое поле в цилиндрическом конденсаторе тех же размеров. Отсюда вытекает формула

$$E_r = \pm H_\varphi = \frac{A}{r} e^{\pm ikz} \qquad (29.11)$$

(A — постоянная), приводящая к распределению электрических и магнитных силовых линий (на рис. 18,*в*).

В двухпроводной линии наибольшее значение имеет так называемая противофазная волна, распределение поля которой изображено на рис. 18,*г*. Электрические силовые линии этой волны распределены так же, как линии электростатического поля между двумя бесконечными параллельными проводами, несущими одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды.

Таким образом, отличие между статическим и динамическим полем в концентрическом кабеле или в системе двух проводников заключается лишь в том, что интенсивность полей в каждом поперечном сечении зависит от времени, а в фиксированный момент времени меняется от сечения к сечению по синусоидальному закону.

Полученные результаты легко обобщаются на случай трех и более проводников. Если же имеется один идеально проводящий цилиндр, то в окружающем его пространстве легко получить решение уравнений электромагнитного поля, соответствующее распространению волны изученного выше типа со скоростью c. Так как одиночный провод можно рассматривать как предельный случай коаксиальной линии с бесконечно большим радиусом оболочки, то электромагнитное поле этой волны также определяется формулой (29.11). Соответствующее распределе-

Электронное наследие России

ние поля изображено на рис. 20, *а*. Как легко показать, такая волна переносит через поперечное сечение $z = \text{const}$ бесконечно большую мощность

$$\int\limits_{(z=\text{const})} S_z^{\text{к}}\, dS = \frac{c}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_a^{\infty} E_z H_\varphi^* r\, dr = \pm\frac{c}{4}\,|A|^2 \int\limits_a^{\infty}\frac{dr}{r} = \pm\infty. \tag{29.12}$$

Поэтому данная волна не может быть возбуждена в однопроводной линии (как, впрочем, и плоская волна в свободном пространстве) с помощью источников поля, обладающих конечной мощностью. Тем же свойством обладает и синфазная волна в двухпроводной линии, рас-

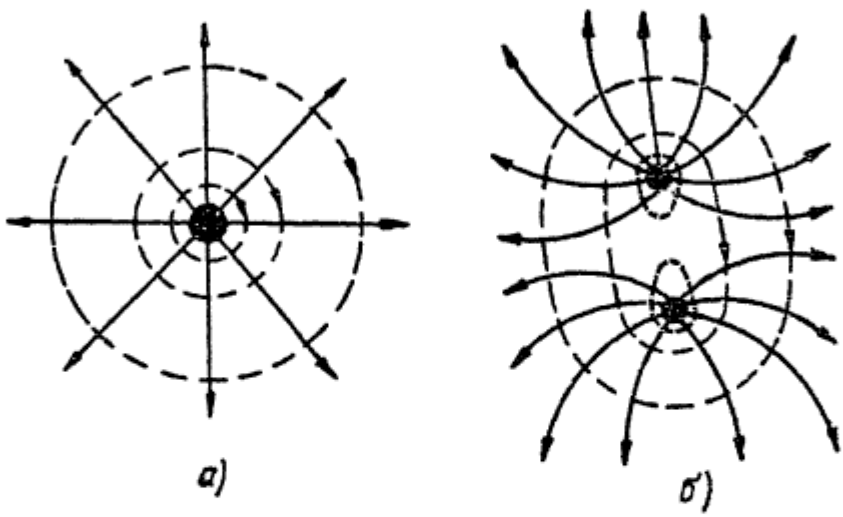


Рис. 20. Электромагнитное поле:
а — в однопроводной линии; *б* — в двухпроводной линии (для синфазной волны).

пределение электрического поля которой соответствует одинаковым зарядам на проводах (см. рис. 20, *б*).

Заметим, что изученные выше волны распространяются без дисперсии. Поэтому со скоростью c распространяются волны любой формы, причем это распространение происходит без каких-либо искажений.

Сказанное выше относилось к линиям передачи, между проводниками которых — пустота. С помощью леммы § 21 нетрудно показать, что при заполнении пространства между проводами однородным веществом с комплексной диэлектрической проницаемостью ε и комплексной магнитной проницаемостью μ распространение данной волны будет происходить не с волновым числом k, а с волновым числом

$$K = k\sqrt{\varepsilon\mu}, \tag{29.13}$$

ЭБ "Научное наследие России"

т. е. с тем же волновым числом, с каким распространяются плоские волны в данном веществе. Иначе говоря, цилиндрические проводники в передающих линиях первой группы лишь ограничивают и как бы поддерживают электромагнитную волну, а характер распространения этой волны вдоль линии определяется свойствами пространства между проводниками, в котором и происходят электромагнитные процессы.

При любом однородном заполнении статический характер распределения электрического и магнитного полей в поперечном сечении сохраняется. Благодаря этому можно утверждать, что распределение полей и потенциалов

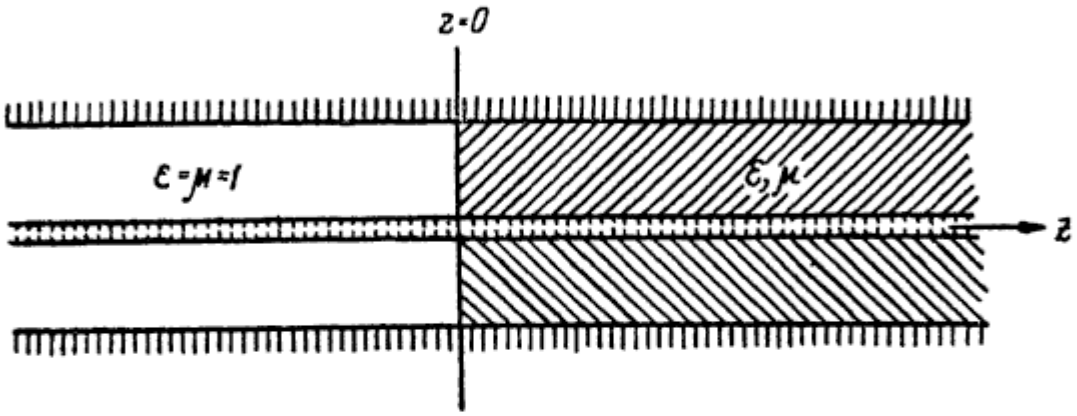


Рис. 21. Коаксиальная линия, заполненная различными веществами при $z<0$ и $z>0$.

в любой линии первой группы можно получить путем конформного преобразования полей в простейшей передающей линии первой группы, образованной парой параллельных плоскостей (рис. 18,*б*). Так как электромагнитное поле между плоскостями имеет точно такую же структуру, что и поле плоской волны в свободном пространстве, то в „бесконечно малом" элементе объема электромагнитное поле волны в идеально проводящей коаксиальной или двухпроводной линии такое же, как поле плоской волны в свободном пространстве.

На основании сказанного легко без всяких вычислений решить задачу об отражении волны от границы раздела в коаксиальной линии, заполненной двумя различными веществами (рис. 21). Действительно, волна в коаксиальной линии отражается от поперечного сечения $z=0$ с таким же коэффициентом отражения R и проходит в другую половину коаксиальной линии с таким же коэффициентом прохождения D, что и плоская волна, падающая

нормально на плоскую границу раздела тех же веществ [формулы (13.10)].

Если мы попробуем применить вектор Герца вида (29.01) к анализу волн, распространяющихся внутри замкнутой цилиндрической оболочки без внутреннего проводника (рис. 30), то какого-либо решения уравнений электромагнитного поля мы получить не сможем. Действительно, мы в этом случае придем к уравнению Лапласа (29.06), и так как на внутренней поверхности S оболочки должно выполняться граничное условие (29.09), то получим условие

$$\Pi = \text{const на } S. \tag{29.14}$$

Как известно из электростатики, единственное решение уравнения Лапласа внутри замкнутой поверхности S, удовлетворяющее условию (29.14) на самой поверхности, есть постоянная, приводящая по формулам (29.03) к электромагнитным полям, тождественно равным нулю. Поэтому внутри замкнутой цилиндрической оболочки, лишенной внутреннего проводника, не могут распространяться поперечные волны со скоростью c, а распространяются волны совсем иного характера, которые мы изучим в теории волноводов. Физически этот результат нужно понимать так: если бы поперечная волна существовала, то ее электрическое поле имело бы электростатический характер, а электростатическое поле не может существовать внутри замкнутых оболочек, если туда не внесены свободные заряды.

§ 30*. Волны в двухпроводной линии с конечным сопротивлением проводов

Рассмотрим сначала распространение электромагнитной волны вдоль одиночного провода радиуса a. Если считать, что токи текут вдоль оси провода и обладают симметрией вращения, то электромагнитное поле, ими возбуждаемое, может быть по-прежнему получено из электрического вектора Герца с единственной составляющей Π_z. Эта составляющая должна удовлетворять в пустоте (вне провода) уравнению (29.05), решение которого мы будем искать в виде

$$\Pi_z = \Pi(x, y)\, e^{ihz}, \tag{30.01}$$

где h — пока неизвестное нам продольное волновое число данной волны. В § 29 мы показали, что для идеально проводящей линии с бесконечной проводимостью

$$h = \pm k. \tag{30.02}$$

Функция $\Pi(x, y)$ должна в общем случае удовлетворять уравнению (ср. конец § 22)

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + g^2 \Pi = 0. \tag{30.03}$$

где поперечное волновое число g определяется формулой

$$g = \sqrt{k^2 - h^2}, \quad \operatorname{Im} g > 0. \tag{30.04}$$

Мы полагаем

$$\Pi = AH_0^{(1)}(gr). \tag{30.05}$$

Здесь взята функция Ханкеля, поскольку поле возбуждается током в проводе и поэтому в плоскости $z = \text{const}$ оно должно иметь вид расходящейся волны. Индекс $m=0$ взят в силу того, что поле обладает симметрией вращения.

С помощью формул (18.03), записанных в цилиндрической системе координат, мы найдем компоненты поля при $r > a$

$$\left.\begin{aligned} E_r &= ih \frac{\partial \Pi}{\partial r} e^{ihz} = -ihgAH_1^{(1)}(gr) e^{ihz}. \\ E_z &= (k^2 - h^2) \Pi e^{ihz} = g^2 AH_0^{(1)}(gr) e^{ihz}. \\ H_\varphi &= ik \frac{\partial \Pi}{\partial r} e^{ihz} = -ikgAH_1^{(1)}(gr) e^{ihz}, \\ E_\varphi &= H_r = H_z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{30.06}$$

Пользуясь соотношением (27.29), мы находим ток, текущий по проводу

$$J = \frac{ca}{2} H_\varphi \Big|_{r=a} = -\frac{ca}{2} ikgAH_1^{(1)}(ga) e^{ihz}. \tag{30.07}$$

Если представить этот ток в виде

$$J = J_0 e^{ihz}, \tag{30.08}$$

то

$$A = \frac{2iJ_0}{cakgH_1^{(1)}(ga)}, \tag{30.09}$$

ЭБ "Научное наследие России"

и из (30.06) получаем

$$E_z = \frac{2igJ_0}{ckaH_1^{(1)}(ga)} H_0^{(1)}(gr)\, e^{ihz}. \qquad (30.10)$$

Последнее выражение дает в явном виде составляющую E_z, возбуждаемую током (30.08) на расстоянии $r > a$ от оси провода.

Рассмотрим теперь двухпроводную линию. Пусть на расстоянии b от оси первого провода находится такой же параллельный провод, причем выполняется условие

$$b \gg a. \qquad (30.11)$$

Тогда наряду с полем первого провода нужно учесть так же поле второго провода, по которому течет ток $-J$. Это значит, что, например, формулу (30.10) следует переписать в виде

$$E_z = \frac{2igJ_0}{ckaH_1^{(1)}(ga)} [H_0^{(1)}(gr) - H_0^{(1)}(gr')]\, e^{ihz}, \qquad (30.12)$$

где r' — расстояние точки наблюдения от оси второго провода. В этой формуле волновые числа h и g пока неизвестны. Они могут быть определены из условия

$$E_z|_{r=a} = Z_i J \qquad (30.13)$$

на поверхности первого провода (условие на втором проводе дает то же самое), где Z_i — погонный внутренний импеданс провода. В силу условия (30.11) при $r = a$ будем считать $r' = b$, так что соотношение (30.13) принимает вид

$$\frac{2ig}{ckaH_1^{(1)}(ga)} [H_0^{(1)}(ga) - H_0^{(1)}(gb)] = Z_i. \qquad (30.14)$$

Это — характеристическое уравнение для поперечного волнового числа g; найдя g, мы определяем h по формуле

$$h^2 = k^2 - g^2. \qquad (30.15)$$

Будем искать решение уравнения (30.14) при условии

$$|gb| \ll 1, \qquad (30.16)$$

тогда ga и подавно будет малым комплексным числом. С помощью приближенных формул (22.08) и (22.10) мы получаем выражения

$$\left.\begin{aligned} H_0^{(1)}(x) &= J_0(x) + iN_0(x) = 1 - \frac{2i}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x}, \\ H_1^{(1)}(x) &= J_1(x) + iN_1(x) = -\frac{2i}{\pi x}, \end{aligned}\right\} \tag{30.17}$$

пригодные при достаточно малых x. Тогда уравнение (30.14) примет вид

$$g^2 = -\frac{i\omega Z_i}{2\ln\frac{b}{a}}, \tag{30.18}$$

т. е. дает явное выражение для g^2. В § 33 мы покажем, что величина

$$C = \frac{1}{4\ln\frac{b}{a}} \tag{30.19}$$

есть погонная емкость двухпроводной линии при условии (30.11). Поэтому формулу (30.18) можно переписать следующим образом:

$$h^2 = k^2 - 2i\omega C Z_i. \tag{30.20}$$

Точно такая же формула получается из телеграфных уравнений (ср. § 35). Эти соотношения справедливы лишь при условии (30.16), т. е. при

$$b\sqrt{2\omega C Z_i} \ll 1. \tag{30.21}$$

Иначе говоря, погонный внутренний импеданс проводов не должен быть слишком велик.

Если же вместо условия (30.16) выполняется противоположное условие

$$|gb| \gg 1, \tag{30.22}$$

то в силу асимптотической формулы (22.14) функция $H_0^{(1)}(gb)$ оказывается малой, так как волновое число g комплексно [ср. например формулу (30.18)]. В этом случае характеристическое уравнение (30.14) принимает вид

$$\frac{2igH_0^{(1)}(ga)}{ckaH_1^{(1)}(ga)} = Z_i. \tag{30.23}$$

...ое наследие России"

Уравнение (30.23) есть характеристическое уравнение для поверхностной волны, распространяющейся вдоль одиночного провода, которое мы в несколько иных обозначениях выведем вновь в § 62. Расстояние b выпало из этого уравнения, поскольку при условии (30.22) поле второго провода „не дотягивается“ до первого вследствие своего поверхностного характера.

Наоборот, при условии (30.16) оба провода находятся в интенсивном электродинамическом взаимодействии, благодаря которому свойства двухпроводной линии существенно отличаются от свойств одиночного провода (ср. § 37). Выше было показано, что при выполнении условия (30.16) распространяющаяся в линии волна имеет волновое число (30.20), согласующееся с телеграфными уравнениями. В § 36 мы увидим, что для полной применимости телеграфных уравнений должно еще выполняться другое условие, а именно произведение kb должно быть малым.

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА VI

ТЕЛЕГРАФНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 31. Основные свойства телеграфных уравнений

Расчет передающих линий первой группы производится обычно с помощью телеграфных уравнений. Мы приведем здесь для справок основные понятия, относящиеся к телеграфным уравнениям.

Электромагнитное поле в телеграфных уравнениях явно не фигурирует, а вместо него для каждого поперечного сечения z данной линии передачи в каждый момент времени t вводятся две величины — напряжение $U=U(z, t)$ и ток $J=J(z, t)$. Каждый однородный отрезок линии передачи характеризуется четырьмя параметрами:

R — погонное сопротивление линии;

L — погонная индуктивность линии;

C — погонная емкость линии;

G — погонная утечка линии.

Напряжение и ток связаны между собой уравнениями в частных производных — телеграфными уравнениями первого порядка

$$-\frac{\partial U}{\partial z}=RJ+L\frac{\partial J}{\partial t}, \tag{31.01}$$

$$-\frac{\partial J}{\partial z}=GU+C\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{31.02}$$

Исключая из этих уравнений одну из величин (U или J), мы для другой величины получаем уравнение в частных производных второго порядка, которое обычно также называется телеграфным уравнением. Этого уравнения мы здесь не выписываем (ср., впрочем, § 47).

При применении телеграфных уравнений к реальным линиям передачи нужно иметь в виду, что, например, по-

Электронное наследие России

гонное сопротивление линии R вследствие скин-эффекта зависит от частоты, и поэтому его нельзя рассматривать как константу для волн любой формы. В этом случае необходимо ограничиться рассмотрением монохроматических волн, т. е. колебаний вполне определенной частоты ω. Для таких колебаний, как и для монохроматических электромагнитных полей (ср. § 2), мы будем применять комплексные обозначения и брать временно́й множитель $e^{-i\omega t}$. Обозначая комплексные амплитуды физических величин (в данном случае напряжения U и тока J) так же, как и сами физические величины, мы из обычных телеграфных уравнений (31.01) и (31.02) получаем комплексные телеграфные уравнения

$$-\frac{dU}{dz}=(R-i\omega L)J, \tag{31.03}$$

$$-\frac{dJ}{dz}=(G-i\omega C)U. \tag{31.04}$$

Здесь производные по z обозначены через $\frac{d}{dz}$, поскольку комплексные амплитуды сугь функции только z.

Найдем общее решение уравнений (31.03) и (31.04). Для этого исключим одну из величин, например J. Дифференцируя уравнение (31.03)

$$-\frac{d^2J}{dz^2}=(R-i\omega L)\frac{dJ}{dz}=-(R-i\omega L)(G-i\omega C)U,$$

мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2U}{dz^2}+h^2U=0, \tag{31.05}$$

где

$$h^2=-(R-i\omega L)(G-i\omega C)=(\omega L+iR)(\omega C+iG). \tag{31.06}$$

Обозначая через

$$h=\sqrt{(\omega L+iR)(\omega C+iG)} \tag{31.07}$$

корень уравнения (31.06), удовлетворяющий условию

$$\operatorname{Im} h>0, \tag{31.08}$$

получим общее решение уравнения (31.05) в виде

$$U=Ae^{ihz}+Be^{-ihz} \tag{31.09}$$

ЭБ "Научное наследие России"

и, подставляя это выражение в уравнение (31.03), найдем соответствующее выражение для тока

$$J = \frac{1}{W}(A\,e^{ihz} - B\,e^{-ihz}), \tag{31.10}$$

где величина

$$W = \frac{\omega L + iR}{h} = \sqrt{\frac{\omega L + iR}{\omega C + iG}} \tag{31.11}$$

называется волновым сопротивлением линии передачи.

Величина h, определяемая соотношениями (31.07) и (31.08), называется комплексным волновым числом линии. Формулы (31.09) и (31.10) показывают, что общее решение телеграфных уравнений для любого однородного отрезка линии передачи равно сумме двух бегущих волн с произвольными комплексными амплитудами: одна волна бежит в положительном направлении (слагаемые, пропорциональные e^{ihz}), а другая — в отрицательном направлении (слагаемые, пропорциональные e^{-ihz}).

Если имеется только одна бегущая волна, распространяющаяся в положительном направлении, то $B = 0$ и

$$\frac{U}{J} = W. \tag{31.12}$$

В случае волны, бегущей в отрицательном направлении, имеем

$$\frac{U}{J} = -W. \tag{31.13}$$

Таким образом, волновое сопротивление линии определяет отношение напряжения к току в „чистой“ бегущей волне.

Заметим, что структура формул для волн в линиях вполне аналогична структуре формул (11.10) для плоских волн в однородных средах: h соответствует комплексному волновому числу $K = k\sqrt{\varepsilon\mu}$, напряжение U — составляющей E_x, ток J — составляющей H_y, волновое сопротивление W — волновому сопротивлению $w = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$. Это объясняется тем, что телеграфные уравнения (31.03) и (31.04) имеют ту же структуру, что и уравнения (11.03) для плоских волн.

В качестве простейшего примера рассмотрим линию без потерь. Это значит, что мы считаем утечку равной нулю ($G = 0$), т. е. предполагаем, что пространство между про-

Электронное наследие России

водами является непроводящим; например, это может быть пустота, как мы считали в § 29. Кроме того, пренебрегаем потерями в проводах, считая их идеально проводящими ($R=0$). Так как для идеальных проводников внутренняя индуктивность равна нулю, то в этом случае полная погонная индуктивность линии L сводится к ее внешней индуктивности, которую мы будем в дальнейшем обозначать через L_e. При данных упрощениях формулы (31.06) и (31.11) принимают вид

$$h^2=\omega^2 L_e C; \quad W=\sqrt{\frac{L_e}{C}}. \tag{31.14}$$

Если воспользоваться результатами § 29, в котором для проводов *в пустоте* получены волновые числа $\pm k$, то получим следующее соотношение между погонной емкостью и погонной внешней индуктивностью:

$$L_e C=\frac{1}{c^2}. \tag{31.15}$$

Пользуясь этим соотношением, легко преобразовать выражение (31.14) для волнового сопротивления к виду

$$W=\frac{1}{cC}. \tag{31.16}$$

В системе единиц CGS, которой мы все время пользуемся, погонная емкость C является безразмерным параметром (иначе говоря, имеет размерность *см/см*). Если желательно выразить волновое сопротивление в омах, считая величину C по-прежнему безразмерной, то в формуле (31.16) достаточно заменить

$$\frac{1}{c}\to 30\ \textit{ом}. \tag{31.17}$$

Это правило оказывается полезным для перевода сопротивлений из абсолютных единиц в практические и в других случаях.

§ 32. Электродинамический вывод телеграфных уравнений

Дадим электродинамический вывод телеграфных уравнений (31.03) и (31.04) для линии передачи, состоящей из двух проводов (рис. 22). Будем считать, что ток в первом проводе равен $J=J(z, t)$, а во втором проводе равен $-J$.

ЭБ "Научное наследие России"

Этим самым определено понятие тока J в линии. Напряжение U ввести труднее, так как понятие напряжения в случае электродинамического поля, вообще говоря, неприменимо. Эту трудность мы обходим тем, что напряжением $U = U(z, t)$ между проводами *1* и *2* называем интеграл

$$U = \int_1^2 E_s ds, \tag{32.01}$$

взятый в данном поперечном сечении линии передачи $z = \text{const}$ по кратчайшему пути от провода *1* к проводу *2*.

Перейдем теперь к выводу уравнений (31.03) и (31.04) для функций U и J. Как оказывается, уравнение (31.03) является следствием закона электромагнитной индукции

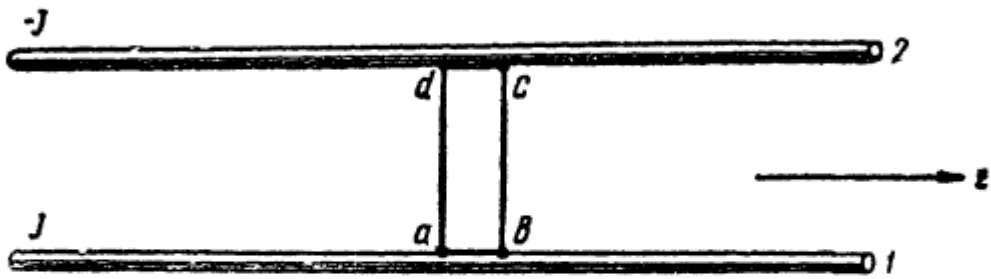


Рис. 22. К выводу 1-го телеграфного уравнения.

Фарадея, а уравнение (31.04) — следствием закона сохранения заряда. Однако, выводя телеграфные уравнения из этих общих законов электродинамики, необходимо сделать дополнительные предположения, которые выполняются приближенно и делают телеграфные уравнения применимыми только при определенных условиях.

Напишем второе уравнение Максвелла в интегральной форме или закон электромагнитной индукции Фарадея

$$\oint_C E_s ds = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S B_n dS, \tag{32.02}$$

где S — поверхность, ограниченная замкнутым контуром C. Применим его к прямоугольному контуру $abcda$, изображенному на рис. 22. Этот контур состоит из двух отрезков ab и cd, лежащих на поверхности проводов *1* и *2*, и двух отрезков bc и ad, соединяющих провода по кратчайшей прямой в поперечном сечении $z + dz$ и z соответственно. Вычисляя циркуляцию электрического поля по замкнутому

контуру $abcda$, мы для интеграла по каждой стороне в отдельности получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\int_b^c E_s ds = U(z+dz) = U(z) + \frac{\partial U}{\partial z} dz,\\
&\int_d^a E_s ds = -\int_d^a E_s ds = -U(z),\\
&\int_a^b E_s ds = E_{z,1} dz,\\
&\int_c^d E_s ds = -E_{z,2} dz,
\end{aligned}\right\} \qquad (32.03)$$

где через $E_{z,1}$ и $E_{z,2}$ обозначены составляющие электрического поля на проводах *1* и *2* соответственно. Вводя погонные внутренние импедансы обоих проводов $Z_{i,1}$ и $Z_{i,2}$ (ср. § 26 и § 27), мы можем написать

$$E_{z,1} = Z_{i,1} J; \quad E_{z,2} = -Z_{i,2} I, \qquad (32.04)$$

и, обозначая через Z_i сумму погонных внутренних импедансов обоих проводов

$$Z_i = Z_{i,1} + Z_{i,2}, \qquad (32.05)$$

мы для циркуляции электрического поля получаем выражение

$$\oint_{abcda} E_s ds = \left(\frac{\partial U}{\partial z} + Z_i J\right) dz. \qquad (32.06)$$

Магнитный поток через прямоугольник $abcd$ можно представить в виде

$$\frac{1}{c} \int_{abcd} B_n dS = \Psi dz, \qquad (32.07)$$

поскольку элемент площади $dS = ds\,dz$, где ds есть элемент длины прямой, соединяющей провода *1* и *2*. Величина

$$\Psi = \frac{1}{c} \int_1^2 B_n ds \qquad (32.08)$$

ЭБ "Научное наследие России"

равна $\left(\text{с точностью до множителя } \frac{1}{c}\right)$ магнитному потоку, проходящему между проводами линии на единицу ее длины.

Подставляя выражения (32.06) и (32.08) в уравнение (32.02), мы для временной зависимости $e^{-i\omega t}$ получаем комплексное уравнение

$$-\frac{dU}{dz} = Z_i J - i\omega\Psi. \tag{32.09}$$

Входящая в него величина $\Psi = \Psi(z)$ определяется согласно формуле (32.08) магнитным полем в данном поперечном сечении z. Магнитное поле в конечном счете возбуждается токами, текущими по проводам *1* и *2*. Предположим, что это поле определяется только током J, проходящим через сечение z, и не зависит от токов, имеющихся в других частях линии. Предположение о локальном характере магнитного поля может выполняться лишь приближенно, поскольку из электродинамики известно, что сколь угодно удаленные токи влияют на магнитное поле в точке наблюдения. Мы примем, однако, пока это предположение без критики и выясним, какие следствия из него вытекают.

Поскольку магнитное поле пропорционально создающему его току, то величина Ψ должна быть пропорциональна J:

$$\Psi = L_e J, \tag{32.10}$$

где коэффициент пропорциональности L_e зависит от свойств линии передачи: геометрической формы и размеров линии в поперечном сечении, магнитной проницаемости среды между проводами и т. д. Коэффициент L_e называется погонной внешней индуктивностью линии, так как он определяет магнитный поток, проходящий целиком вне проводов линии.

Сочетание формул (32.09) и (32.10) приводит нас к телеграфному уравнению (31.03). Действительно, для монохроматических колебаний мы получаем

$$-\frac{dU}{dz} = (Z_i - i\omega L_e) J, \tag{32.11}$$

и, вводя погонное сопротивление и погонную внутреннюю индуктивность линии по формуле

$$Z_i = R - i\omega L_i, \tag{32.12}$$

Электронное наследие России

а также вводя суммарную погонную индуктивность линии L с помощью соотношения

$$L = L_e + L_i, \tag{32.13}$$

мы окончательно получаем первое телеграфное уравнение (31.03).

Заметим, что в силу формулы (32.05) сопротивление и внутренняя индуктивность линии на единицу длины складываются из соответствующих величин, вычисленных для каждого провода в отдельности:

$$R = R_1 + R_2; \quad L_i = L_{i,1} + L_{i,2}, \tag{32.14}$$

Таким образом, сопротивления двух параллельных проводов складываются, как и при последовательном соединении сопротивлений. Это объясняется тем, что в электрическом отношении провода линии передачи включены по-

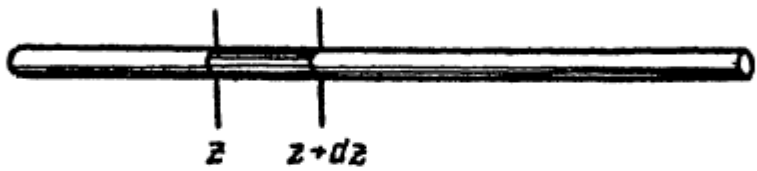


Рис. 23. К выводу 2-го телеграфного уравнения.

следовательно. Действительно, представим себе, что справа на рис. 22 к проводам линии присоединена некоторая нагрузка; ток J, идущий по проводу *1*, проходит через нагрузку и возвращается обратно в виде тока $-J$ по проводу *2*.

Для вывода 2-го телеграфного уравнения будем исходить из уравнения непрерывности (1.01) в интегральной форме, т. е. из закона сохранения заряда

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV + \oint_S j_n dS = 0. \tag{32.15}$$

и применим его к отрезку z, $z+dz$ провода *1* (рис. 23), Интеграл

$$\int_V \rho dV = q dz \tag{32.16}$$

определяет заряд на этом отрезке провода и поэтому равен погонной плотности заряда q на проводе *1*, умноженной на dz (погонная плотность на проводе *2* равна,

ЭБ "Научное наследие России"

очевидно, $-q$). Поверхностный интеграл в формуле (32.15) может быть разложен на сумму интегралов по поперечным сечениям z и $z+dz$ провода 1

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{(z+dz)} j_n\,dS = \int\limits_{(z+dz)} j_z\,dS = J(z+dz) = \\ = J(z)+\frac{\partial J}{\partial z}\,dz;\\ \int\limits_{(z)} j_n\,dS = -\int\limits_{(z)} j_z\,dS = -J(z)\end{aligned}\right\} \qquad (32.17)$$

и на интеграл по боковой поверхности провода $S_{\text{бок}}$ на на том же участке $(z,\ z+dz)$. Обозначая через σ_0 проводимость среды между проводами, а через ε_0 ее диэлектрическую постоянную, мы будем иметь

$$\int\limits_{S_{\text{бок}}} j_n\,dS = \sigma_0 \int\limits_{S_{\text{бок}}} E_n\,dS = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\int\limits_{S_{\text{бок}}} D_n\,dS. \qquad (32.18)$$

Последний интеграл можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\int\limits_{S_{\text{бок}}} D_n\,dS = \oint\limits_S D_n\,dS - \int\limits_{(z)} D_n\,dS - \int\limits_{(z+dz)} D_n\,dS = \\ = 4\pi q\,dz - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\int\limits_{(z)} j_n\,dS - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\int\limits_{(z+dz)} j_n\,dS = \\ = 4\pi q\,dz - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\left[J(z+dz)-J(z)\right], \qquad (32.19)\end{aligned}$$

причем мы обозначили через ε_1 и σ_1 диэлектрическую постоянную и проводимость провода 1 и воспользовались теоремой Гаусса. Таким путем мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\left(1-\frac{\varepsilon_1\sigma_0}{\varepsilon_0\sigma_1}\right)\frac{\partial J}{\partial z}+\frac{4\pi\sigma_0}{\varepsilon_0}\,q = 0, \qquad (32.20)$$

которое в силу условия $\sigma_0 \ll \sigma_1$ (проводимость среды гораздо меньше, чем у проводов) практически сводится к уравнению

$$-\frac{\partial J}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma_0}{\varepsilon_0}\,q \qquad (32.21)$$

ое наследие России"

или в комплексных обозначениях

$$-\frac{dI}{dz}=\left(\frac{4\pi\sigma_0}{\varepsilon_0}-i\omega\right)q. \qquad (32.22)$$

Если сделать далее предположение о локальном характере электрического поля, т. е. предположить, что электрическое поле в данном поперечном сечении $z=\text{const}$ определяется исключительно погонной плотностью заряда q в том же сечении и не зависит от токов и зарядов, имеющихся в других участках линии, то отсюда вытекает, что погонная плотность заряда q и напряжение U в той же точке линии должны быть связаны соотношением

$$q=CU, \qquad (32.23)$$

где коэффициент пропорциональности C называется погонной емкостью линии. Если ввести величину G по формуле

$$G=\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0}C. \qquad (32.24)$$

то окончательно уравнение (32.22) примет вид

$$-\frac{\partial I}{\partial z}=(G-i\omega C)U, \qquad (32.25)$$

т. е. совпадает со вторым телеграфным уравнением (31.04). При этом коэффициент G (погонная утечка линии) оказывается пропорциональным погонной емкости C и проводимости среды σ_0.

Таким образом, для вывода телеграфных уравнений одних законов электродинамики недостаточно, и к ним, приходится прибавлять предположения о локальном характере магнитного и электрического поля. Эти предположения позволили характеризовать свойства линии с помощью таких величин, как емкость и индуктивность строго применимых лишь для стационарных полей. Поэтому естественно думать, что телеграфные уравнения применимы лишь для достаточно медленных колебаний, т. е. при достаточно низких частотах. В § 36 мы подробно рассмотрим пределы применимости телеграфных уравнений и покажем, что это действительно так.

§ 33. Расчет параметров длинных линий

В этом параграфе мы выведем формулы для расчета параметров наиболее важных линий передачи, а именно коаксиальной и двухпроводной линий.

ЭБ "Научное наследие России"

Начнем с погонной емкости C и погонной внешней индуктивности L_e, определяемых формулами (32.23) и (32.10). Эти формулы базируются на предположениях о локальном характере электрического и магнитного поля, введенных в § 32 без надлежащего обоснования. Однако ясно, что для бесконечно длинной линии, провода которой несут постоянный ток или заряжены статическим электричеством, эти формулы являются вполне точными и предположение о локальном характере поля удовлетворяется автоматически. Действительно, в статических условиях заряд распределяется равномерно вдоль проводов линии, так что создаваемое им электрическое поле в любом поперечном сечении системы одно и то же: оно пропорционально погонной плотности зарядов на проводах, постоянной по длине линии. Аналогично, стационарный ток постоянен по длине провода, вследствие чего магнитное поле в любом поперечном сечении одинаково и пропорционально силе тока J.

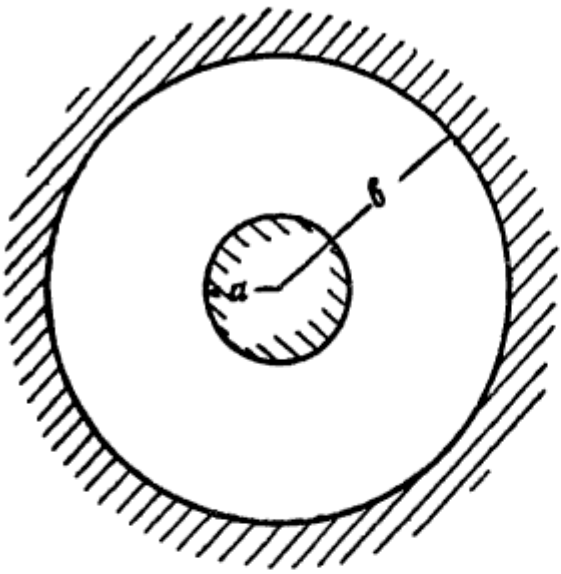


Рис. 24. Коаксиальная линия.

Рассматривая электрическое поле в бесконечной коаксиальной линии (кабеле), легко видеть, что мы получаем обычный цилиндрический конденсатор (рис. 24). Электрическое поле в конденсаторе имеет только радиальную составляющую (q — погонный заряд на внутреннем проводе)

$$E_r = \frac{2q}{r}. \tag{33.01}$$

Это выражение проще всего вывести, если применить теорему Гаусса к цилиндру, коаксиальному с конденсатором и имеющему единичную длину по оси z. Эта теорема дает соотношение

$$\oint E_r ds = 4\pi q, \tag{33.02}$$

если между обкладками конденсатора — пустота и радиус цилиндра лежит в интервале $a < r < b$. Поскольку

$$\oint E_r ds = E_r 2\pi r, \tag{33.03}$$

Электронное наследие России

мы и получаем выражение (33.01). Вычисляя напряжение между внутренним проводником *1* и внешним проводником *2*, имеем

$$U = \int_a^b E_r dr = 2q \ln \frac{b}{a}, \tag{33.04}$$

где a — радиус внутреннего провода, b — радиус оболочки коаксиальной линии.

Сравнивая выражение (33.04) с формулой (32.23), мы видим, что погонная емкость коаксиальной линии равна

$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{b}{a}}. \tag{33.05}$$

Если коаксиальная линия заполнена диэлектриком, имеющим диэлектрическую постоянную ε_0, то из тех же рассуждений получаем

$$C = \frac{\varepsilon_0}{2 \ln \frac{b}{a}}. \tag{33.06}$$

Для вычисления погонной внешней индуктивности коаксиальной линии нужно считать, что по проводнику *1* течет постоянный ток J, а по проводнику *2* течет ток $-J$. В этом случае магнитное поле будет отлично от нуля только в пространстве $a < r < b$, так как при $r > b$, т. е. во внешнем пространстве, магнитные поля проводников *1* и *2* будут взаимно уничтожаться. Магнитное поле данной системы будет иметь только составляющую H_φ, определяемую формулой

$$H_\varphi = \frac{2J}{cr}. \tag{33.07}$$

Действительно, применяя формулу

$$\oint H_\varphi ds = \frac{4\pi}{c} J \tag{33.08}$$

к любой окружности $r = \text{const}$, мы сразу получаем формулу (33.07).

Вычисляя погонный магнитный поток Ψ по формуле (32.08), получим

$$\Psi = \frac{1}{c} \int_a^b H_\varphi dr = \frac{2J}{c^2} \ln \frac{b}{a} \tag{33.09}$$

для магнитного поля в пустоте. Сравнивая соотношение (33.09) с соотношением (32.10), получим

$$L_e = \frac{2}{c^2} \ln \frac{b}{a}. \qquad (33.10)$$

Если коаксиальная линия заполнена магнетиком с магнитной проницаемостью μ_0, то формула (33.10) приобретает вид

$$L_e = \frac{2\mu_0}{c^2} \ln \frac{b}{a}. \qquad (33.11)$$

Полученные выражения (33.05) и (33.10) удовлетворяют соотношению

$$L_e C = \frac{1}{c^2}, \qquad (33.12)$$

благодаря которому при отсутствии потерь в проводах, т. е. при идеальной проводимости их, волны вдоль линии согласно формуле (31.14) распространяются со скоростью c. Этот важный результат был получен с помощью телеграфных уравнений исторически раньше, чем были теоре-

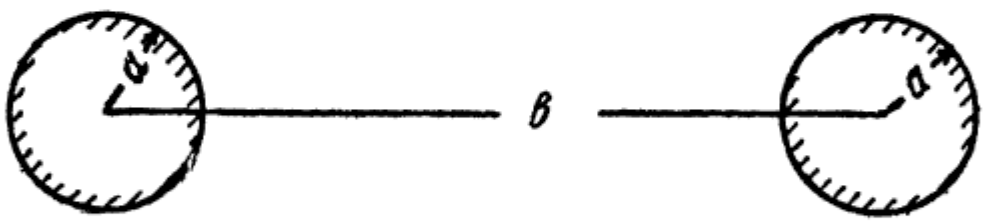


Рис. 25. Двухпроводная линия.

тически исследованы электромагнитные волны в свободном пространстве. Этот результат, разумеется, находится в полном соответствии с электродинамической теорией длинных линий, изложенной в § 29.

Если считать провода линии по-прежнему идеально проводящими и подставить в формулу (31.14) выражения (33.06) и (33.11), то мы получим волновое число

$$h = k\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \qquad (33.13)$$

в соответствии с результатами § 29.

Переходя к расчету погонной емкости двухпроводной линии, состоящей из двух параллельных проводов радиуса a, центры которых отстоят на расстоянии b друг

...ное наследие России"

от друга (рис. 25), мы ограничимся приближенным рассмотрением этой системы при условии

$$\frac{a}{b} \ll 1, \tag{33.14}$$

т. е. когда радиус проводов значительно меньше расстояния между ними. В этом случае, обозначая через q погонный заряд провода *1* и через $-q$ погонный заряд провода *2*, мы можем вычислять электрическое поле каждого провода так, как если бы другой провод отсутствовал. В частности, для поля провода *1* можно в этом случае пользоваться формулой (33.01), где r обозначает радиус-вектор, проведенный от оси провода *1*, а поле провода *2* можно вычислять по формуле

$$E^{(2)}_{r'} = -\frac{2q}{r'}, \tag{33.15}$$

где r' обозначает расстояние от оси провода *2*. Так как на отрезке прямой, соединяющей центры обоих проводов в данном поперечном сечении $z = \text{const}$, направление отсчета r противоположно направлению отсчета r', $(E^{(2)}_{r'} = -E^{(2)}_{r})$, то на этой линии можно окончательно написать выражение для составляющей E_r полного поля

$$E_r = \frac{2q}{r} + \frac{2q}{r'}. \tag{33.16}$$

Так как напряжение между проводами равно

$$U = \int_a^{b-a} E_r dr, \tag{33.17}$$

то в силу формулы (33.16) мы имеем

$$U = \int_a^{b-a} \left(\frac{2q}{r} + \frac{2q}{r'}\right) dr = 2q \int_a^{b-a} \frac{dr}{r} - 2q \int_{b-a}^{a} \frac{dr'}{r'} =$$

$$= 4q \ln \frac{b}{a}, \tag{33.18}$$

ЭБ "Научное наследие России"

причем в последнем выражении в силу условия (33.14) вместо $b-a$ можно написать просто b. Отсюда видно, что погонная емкость двухпроводной линии равна

$$C=\frac{1}{4\ln\frac{b}{a}}. \tag{33.19}$$

Эта формула — приближенная. С помощью метода конформных отображений данную электростатическую задачу можно решить точно, и в результате получается формула

$$C=\frac{1}{4\ln\left[\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-1}\right]}, \tag{33.20}$$

переходящая в формулу (33.19) при условии (33.14).

При выводе формулы (33.20) принимается во внимание так называемый „эффект близости", заключающийся в том, что благодаря взаимодействию проводов распределение зарядов (и токов) по окружности становится неравномерным. На рис. 26 показано, как благодаря притяжению разноименных зарядов они скапливаются на одной стороне проводов. При условии (33.14) этот эффект выражен слабо, благодаря чему погонную емкость системы можно рассчитать, исходя из предположения о симметричном распределении заряда на поверхности каждого провода.

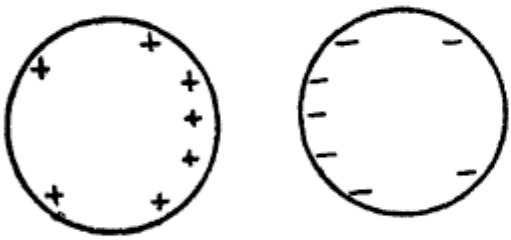


Рис. 26. „Эффект близости" в двухпроводной линии.

Мы здесь не будем вычислять погонную внешнюю индуктивность двухпроводной линии, предоставляя это читателю. Отметим только, что она удовлетворяет соотношению (31.15) и легко может быть найдена из этого соотношения.

Что касается волнового сопротивления идеально проводящей коаксиальной и двухпроводной линии, то оно легко вычисляется по второй из формул (31.14) или по формуле (31.16). С учетом соотношения (31.17) мы для коаксиальной линии получаем волновое сопротивление

$$W=60\ln\frac{b}{a}\ \text{ом}, \tag{33.21}$$

Электронное наследие России"

а для двухпроводной линии волновое сопротивление равно

$$W = 120 \ln \frac{b}{a} \text{ ом}, \tag{33.22}$$

Эти формулы справедливы, если электромагнитное поле линии расположено в пустоте. Если же пространство заполнено веществом с проницаемостями ε и μ, то погонная емкость C умножается на ε, погонная индуктивность L_e — на μ, а волновое сопротивление приобретает множитель $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$.

При вычислении погонного внутреннего импеданса Z_i данной линии передачи, т. е. погонного сопротивления R и погонной внутренней индуктивности L_i линии [см. формулы (32.12)], необходимо иметь в виду, что этот импеданс складывается из импеданса каждого из проводов линии по формуле (32.05). Что же касается погонного импеданса провода, то эта величина была уже нами определена в теории скин-эффекта (см. гл. IV). Выведенные там формулы принимают наиболее простой вид в случае сильного скин-эффекта, когда, например, для внутреннего проводника *1* коаксиальной линии можно написать

$$Z_{i,1} = \frac{1-i}{2\pi a \sigma_1 d_1}. \tag{33.23}$$

Применяя те же соображения к внешнему проводнику *2* коаксиальной линии, получим

$$Z_{i,2} = \frac{1-i}{2\pi b \sigma_2 d_2}, \tag{33.24}$$

где σ_1 и σ_2 суть проводимости соответствующих проводников, а d_1 и d_2 — толщина скин-слоя в каждом из них.

Формулу (33.23) можно применять и для вычислений погонного внутреннего импеданса каждого из проводов двухпроводной линии. Если провода, как это предполагалось выше, одинаковы, то погонный внутренний импеданс линии равен

$$Z_i = 2Z_{i,1}. \tag{33.25}$$

В этой формуле не учтен упомянутый выше „эффект близости“, и она применима поэтому лишь при условии (33.14). Заметим, что при наличии „эффекта близости“ внутреннее сопротивление линии увеличивается, так как появляется

ЭБ "Научное наследие России"

дополнительная неравномерность в распределении тока; при выполнении условия (33.14) эта неравномерность мала, поскольку поле, действующее на данный провод со стороны другого, мало по сравнению с собственным полем провода.

Что же касается погонной утечки G, то она для любой линии передачи вычисляется по формуле (32.24).

§ 34*. Энергетический смысл параметров длинных линий

В теории цепей средние значения электрической и магнитной энергии при гармонических колебаниях определяются формулами

$$\overline{W}_э = \frac{1}{4} C |U|^2; \quad \overline{W}_м = \frac{1}{4} L |J|^2, \tag{34.01}$$

где U — напряжение между обкладками конденсатора с емкостью C, J — ток в катушке с индуктивностью L. Эти же формулы дают погонную электрическую и магнитную энергию в длинной линии, если в качестве C и L взять введенные выше погонные параметры линии, а под U и J понимать комплексные амплитуды напряжения и тока в данном отрезке линии. При этом погонная индуктивность L определяется формулой (32.13), и соответственно погонная магнитная энергия является суммой внешней и внутренней энергии; последняя была исследована еще в теории скин-эффекта [см. формулу (26.27) с замечаниями в § 27].

Потери в цепи обусловливаются, во-первых, омическим сопротивлением R, во-вторых, утечкой в конденсаторе. Обозначая среднюю мощность омических потерь через $\overline{P}_1$, а потерь в конденсаторе через $\overline{P}_2$, мы будем иметь

$$\overline{P}_1 = \frac{1}{2} R |J|^2; \quad \overline{P}_2 = \frac{1}{2} G |U|^2, \tag{34.02}$$

где коэффициент G связан с емкостью конденсатора C и параметрами σ_0 и ε_0 заполняющего его вещества формулой (32.24). Те же формулы дают погонные потери в длинной линии, если под R и G понимать соответствующие погонные параметры этих линий.

Данное выше толкование формул (34.01) и (34.02) базируется, во-первых, на теории скин-эффекта (ср. § 26 и § 27, где мы подробно рассмотрели энергетический смысл величин L_i и R), и, во-вторых, на предположении, что поле в пространстве между проводами распределено по квази-

Научное наследие России

стационарным законам. Последнее предположение служит основой для вычисления параметров L_e, C и G (ср. § 33) и будет дополнительно рассмотрено в § 36. Здесь же заметим лишь, что для волны в идеально проводящей линии это предположение выполняется точно (см. § 29), а при конечной проводимости линии — приближенно (§ 30).

Таким образом, среднее значение электромагнитной энергии в линии на единицу ее длины равно

$$\overline{W} = \overline{W}_э + \overline{W}_м = \frac{1}{4}(C|U|^2 + L|J|^2), \qquad (34.03)$$

а среднее значение мощности потерь на единицу длины линии

$$\overline{P} = \frac{1}{2}(G|U|^2 + R|J|^2). \qquad (34.04)$$

Выведем теперь из телеграфных уравнений (31.03) и (31.04) соотношение, аналогичное теореме о комплексной мощности (§ 6). Для этого умножим уравнение (31.03) на J^*, уравнение

$$-\frac{dJ^*}{dz} = (G + i\omega C)U^*,$$

комплексно сопряженное уравнению (31.04), — на U и результаты сложим. Полученное соотношение

$$-\frac{d}{dz}(UJ^*) = G|U|^2 + R|J|^2 + i\omega(C|U|^2 - L|J|^2) \qquad (34.05)$$

мы можем переписать, используя формулы (34.01) и (34.04), в виде

$$-\frac{d\Sigma^к}{dz} = \overline{P} + 2i\omega(\overline{W}_э - \overline{W}_м), \qquad (34.06)$$

где введено обозначение

$$\Sigma^к = \frac{1}{2}UJ^*. \qquad (34.07)$$

Правая часть соотношения (34.06) имеет ту же структуру, что и в соотношении (6.14); поскольку мы для простоты считаем, что для данной системы справедливы простые материальные условия § 1, то в соотношении (34.05) фигурируют не вспомогательные величины $W'_э$ и $W'_м$ (ср. § 9), а средние значения погонных энергий $\overline{W}_э$ и $\overline{W}_м$. Более того,

ЭБ "Научное наследие России"

можно соотношение (34.06) получить непосредственно из соотношения (6.10), если последнее переписать в виде

$$-\operatorname{div}\mathbf{S}^{\text{к}}=\bar{p}+2i\omega\left(\bar{w}_{\text{э}}-\bar{w}_{\text{м}}\right) \tag{34.08}$$

(полагая $p_e^{\text{к}}=p_m^{\text{к}}=0$ в силу отсутствия сторонних токов) и затем проинтегрировать по поперечному сечению. Интегралы

$$\overline{P}=\int\limits_{S_p}\bar{p}\,dS;\ \overline{W}_{\text{э}}=\int\limits_{S_p}\bar{w}_{\text{э}}\,dS;\ \overline{W}_{\text{м}}=\int\limits_{S_p}\bar{w}_{\text{м}}\,dS, \tag{34.09}$$

взятые по поперечному сечению S_p (т. е. по всем x и y при $z=\text{const}$), дают, очевидно, погонную мощность потерь $\overline{P}$ и погонные энергии $\overline{W}_{\text{э}}$ и $\overline{W}_{\text{м}}$.

Интеграл

$$\Sigma^{\text{к}}=\int\limits_{S_p}S_z^{\text{к}}\,dS=\frac{c}{8\pi}\int\limits_{S_p}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_z\,dS \tag{34.10}$$

дает комплексную мощность, переносимую волнами через поперечное сечение линии $z=\text{const}$. Интеграл

$$\int\limits_{S_p}\int\left(\frac{\partial S_x^{\text{к}}}{\partial x}+\frac{\partial S_y^{\text{к}}}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint\limits_{C}S_n^{\text{к}}\,ds=0 \tag{34.11}$$

обращается в нуль. Контур C для коаксиальной линии нужно провести в глубине ее оболочки на достаточно большом расстоянии от внутренней поверхности, тогда в каждой точке контура C поле практически равно нулю, и соотношение (34.11) выполняется. Для двухпроводной линии в качестве контура C можно взять окружность с достаточно большим радиусом r: легко показать, что на такой окружности электрическое и магнитное поля противофазной волны обратно пропорциональны r^2, поэтому при $r\to\infty$ соотношение (34.11) удовлетворяется.

Окончательно в результате интегрирования уравнения (34.08) мы получаем соотношение

$$-\frac{d\,\Sigma^{\text{к}}}{dz}=\overline{P}+2i\omega\left(\overline{W}_{\text{э}}-\overline{W}_{\text{м}}\right), \tag{34.12}$$

формально тождественное соотношению (34.06). Особенность соотношения (34.12) заключается в том, что оно выведено из электродинамических уравнений и потому остается спра-

Электронное наследие России"

ведливым для волноводов и других линий передачи (ср. § 54), если входящие в него величины определять с помощью формул (34.09) и (34.10).

Выписанные же ранее выражения (34.01), (34.04) и (34.07) пригодны лишь для длинных линий, подчиняющихся телеграфным уравнениям. Последняя из этих формул вскрывает энергетический смысл волнового сопротивления W; если мы имеем волну, бегущую в положительном направлении, то в силу соотношения (31.12) мы можем написать

$$\Sigma^{\text{к}} = \frac{1}{2} W |J|^2 = \frac{1}{2W^*} |U|^2. \tag{34.13}$$

Из телеграфных уравнений (34.03) нетрудно вывести также тождество

$$-\frac{d}{dz}(UJ) = GU^2 + RJ^2 - i\omega(CU^2 + LJ^2), \tag{34.14}$$

аналогичное теореме о колеблющейся мощности (§ 7). Величина

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}(GU^2 + RJ^2) \tag{34.15}$$

есть комплексная амплитуда колеблющейся части погонной мощности потерь, величина

$$\tilde{W} = \frac{1}{4}(CU^2 + LJ^2) \tag{34.16}$$

дает колеблющуюся часть погонной электромагнитной энергии, величина

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{2} UJ \tag{34.17}$$

— колеблющуюся часть мощности, переносимой через поперечное сечение линии. Для волны, бегущей в положительном направлении, формула (34.17) принимает вид

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{2} WJ^2 = \frac{1}{2W} U^2. \tag{34.18}$$

Окончательно соотношение (34.14) можно записать в виде

$$-\frac{d\tilde{\Sigma}}{dz} = \tilde{P} - 2i\omega\tilde{W}. \tag{34.19}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Физический смысл выражений (34.15) и (34.16) может быть легко установлен по аналогии с теорией цепей, как это было сделано для выражений (34.04) и (34.03) в начале параграфа. Электродинамический вывод соотношения (34.19), пригодный для любых линий передачи, будет дан в § 52.

§ 35. Зависимость свойств длинных линий от частоты

Рассмотрим зависимость свойств линий передачи от частоты. Остановимся на наиболее важном случае, когда между проводами линии — пустота, так что утечка G может быть взята равной нулю, а внешняя индуктивность и емкость линии связаны соотношением (31.15).

Чтобы получить представление о конкретных численных соотношениях, возьмем коаксиальную линию, выполненную из меди, причем радиус внутреннего проводника $a = 0{,}05$ *см*, а радиус внешнего проводчика $b = 0{,}5$ *см*. Ограничимся при рассмотрении свойств такой коаксиальной линии достаточно высокими частотами, при которых имеет место сильный скин-эффект. Тогда погонное сопротивление и погонную внутреннюю индуктивность данной линии можно представить в виде

$$R = \omega L_i = 9{,}05 \cdot 10^{-5} \sqrt{f} \ \text{ом/м},$$

а погонная внешняя индуктивность этой линии такова, что

$$\omega L_e = 2{,}9 \cdot 10^{-6} f \ \text{ом/м},$$

где f есть частота в герцах. Отношение

$$\frac{R}{\omega L_e} = \frac{L_i}{L_e} = \frac{31}{\sqrt{f}}$$

стремится к нулю при возрастании частоты. Это отношение показывает, как мы увидим дальше, насколько объем проводников принимает участие в электромагнитных процессах, происходящих при распространении волн вдоль линии. Для достаточно высоких частот это отношение принимает малые значения, например при $f = 10^8$ *гц* (что соответствует $\lambda = 3$ *м*) оно оказывается равным $3{,}1 \cdot 10^{-3}$.

Если мы возьмем линию с другими геометрическими размерами или провода из другого материала, то численные коэффициенты в написанных выше выражениях несколько изменятся, однако зависимость всех величин от

Научное наследие России

частоты сохранится, и для достаточно высоких частот отношение $\frac{R}{\omega L_e} = \frac{L_i}{L_e}$ будет пренебрежимо малым.

Вычисляя по формуле (31.11) волновое сопротивление линии передачи

$$W = \sqrt{\frac{\omega L + iR}{\omega C}} = \sqrt{\frac{L_e}{C}\left(1 + \frac{L_i}{L_e} + i\frac{R}{\omega L_e}\right)}, \qquad (35.01)$$

мы видим, что при увеличении частоты оно стремится к выражению

$$W_0 = \sqrt{\frac{L_e}{C}}, \qquad (35.02)$$

соответствующему линии той же геометрической формы, но идеально проводящей [ср. формулу (31.14)]. Поэтому можно сказать, что с ростом частоты волновое сопротивление линии приближается к волновому сопротивлению соответствующей идеально проводящей линии.

Выясним, как ведет себя волновое число h при увеличении частоты. Так как $G = 0$, то формула (31.07) запишется

$$h = \sqrt{(\omega L + iR)\,\omega C} \qquad (35.03)$$

или в силу соотношения (31.15)

$$h = k\sqrt{1 + \frac{L_i}{L_e} + i\frac{R}{\omega L_e}}. \qquad (35.04)$$

Учитывая, что при высоких частотах отношение $\frac{L_i}{L_e} = \frac{R}{\omega L_e}$ становится малым, мы можем использовать приближенную формулу $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$, пригодную при малых x, и написать

$$h = k\left(1 + \frac{L_i}{2L_e} + i\frac{R}{2\omega L_e}\right). \qquad (35.05)$$

В общем случае мы имеем

$$h = h' + ih'', \qquad (35.06)$$

где вещественная часть волнового числа h' определяет фазовую скорость волны u по формуле

$$u = \frac{\omega}{h'}, \qquad (35.07)$$

ЭБ "Научное наследие России"

а мнимая часть h'' есть коэффициент затухания волны в линии [ср. формулы (11.16) и (11.17)]. Из приближенной формулы (35.05) следует, что фазовая скорость волн в линии равна

$$u = \frac{c}{1 + \frac{L_i}{L_e}}. \tag{35.08}$$

Эта скорость меньше скорости света c; она стремится к c при увеличении частоты. Поэтому можно сказать, что при росте частоты реальная линия по скорости распространения волн в ней приближается к линии идеально проводящей. Физически это объясняется тем, что поле вследствие скин-эффекта вытесняется из проводов ($L_i \to 0$), и электродинамические процессы переносятся исключительно в пространство между проводами.

Коэффициент затухания линии может быть записан в виде

$$h'' = \frac{R}{2cL_e} = \frac{R}{2W_0}, \tag{35.09}$$

где W_0 — волновое сопротивление (35.02). Отсюда видно, что затухание фиксированной длины линии (например линии длиной в 100 *м*) увеличивается пропорционально $\sqrt{f}$, когда через нее передаются волны все более высоких частот. Таким образом, в отношении затухания реальная линия при увеличении частоты все более отличается от идеально проводящей линии.

Однако в некоторых случаях бывает важен так называемый относительный коэффициент затухания $\varkappa$, равный

$$\varkappa = h''\lambda. \tag{35.10}$$

Этот коэффициент дает ослабление волны на отрезке линии, равном длине волны. Так как относительный коэффициент затухания равен

$$\varkappa = \pi \frac{R}{\omega L_e}, \tag{35.11}$$

то с ростом частоты он стремится к нулю, как $\frac{1}{\sqrt{f}}$. Поэтому можно сказать, что по относительному коэффициенту затухания реальная линия при росте частоты также стремится к идеально проводящей линии.

На сверхвысоких частотах обычные резонансные контуры обладают в силу ряда причин большим декрементом

Электронное наследие России

затухания, т. е. малой добротностью. В качестве контуров с высокой добротностью в этом диапазоне часто применяют отрезки линий передачи длиной порядка четверти или половины волны, закороченные на конце или разомкнутые. Как показывает расчет, декремент затухания таких отрезков примерно равен четверти или половине относительного коэффициента затухания (35.10), и поэтому такие отрезки при увеличении частоты обладают все более высокой добротностью, чем и оправдывается их использование.

При практическом применении телеграфных уравнений нужно учитывать (ср. далее § 36), что при слишком высоких частотах телеграфные уравнения теряют свою силу и становятся неприменимыми. Поэтому в приведенных выше соотношениях частоту нельзя увеличивать неограниченно.

Заметим, что распространение весьма длинных волн (например, с длиной волны от 1 *км* до 100 *км*) происходит вдоль линий со скоростью, значительно меньшей, чем скорость света, причем скорость распространения сильно зависит от частоты и от параметров линии. Для таких волн отношение $\frac{R}{\omega L_e}$ является большим числом, причем погонное сопротивление линии уже нельзя рассчитывать по формулам сильного скин-эффекта. Относящиеся к этому случаю формулы могут быть легко получены из общих соотношений, однако на этом останавливаться мы не будем (ср. впрочем § 51).

§ 36. Пределы применимости телеграфных уравнений

Рассмотрим условия применимости телеграфных уравнений к неоднородным линиям, т. е. к линиям с оконечной нагрузкой, к разомкнутым на конце или закороченным отрезкам линий и т. д. Возьмем, например, открытый конец двухпроводной линии, на который набегает слева волна, распространяющаяся в линии (рис. 27). Как известно, телеграфные уравнения позволяют рассчитать коэффициент отражения волны при любом импедансе оконечной нагрузки; коэффициент отражения определяется отношением импеданса нагрузки к волновому сопротивлению линии. Разомкнутый конец с точки зрения телеграфных уравнений есть оконечная нагрузка с бесконечным импедансом, поэтому коэффициент отражения от открытого конца равен единице: энергия падающей волны должна полностью отражаться от открытого конца назад. На самом деле отражение

ЭБ "Научное наследие России"

никогда не бывает полным, так как часть энергии тратится на излучение. Действительно, переменный ток, текущий в каждом отрезке провода, является элементарным диполем — источником сферических электромагнитных волн. В результате сложения волн, посылаемых обоими прово-

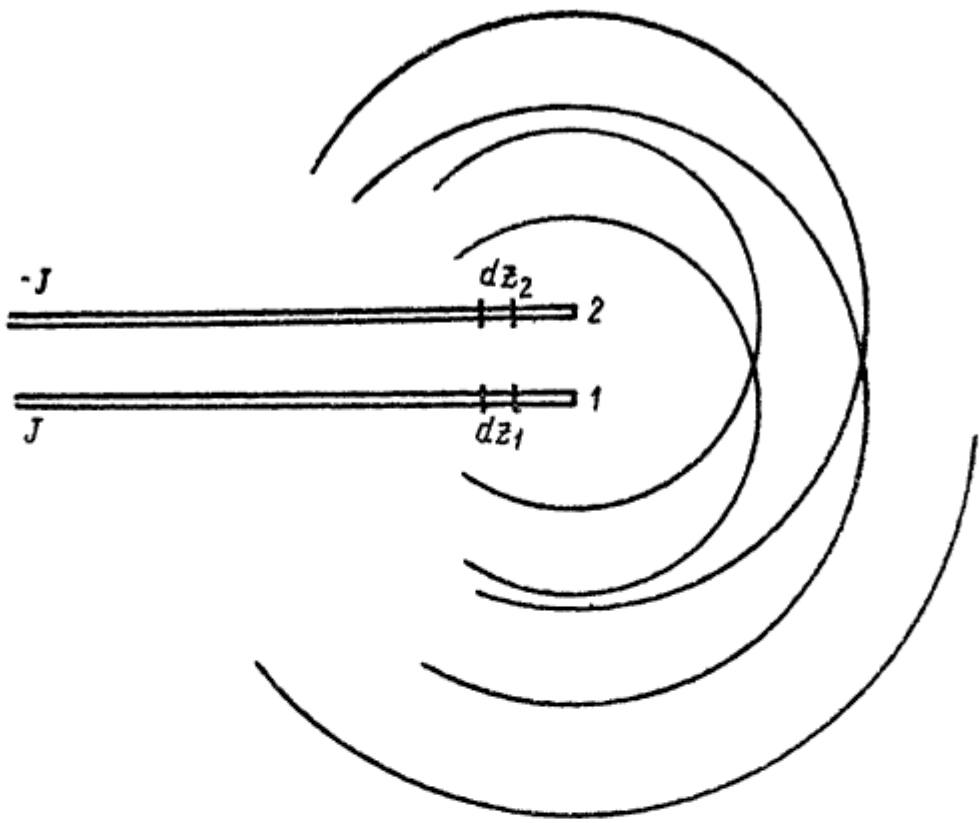


Рис. 27. Двухпроводная линия с разомкнутым концом.

дами, возникает электромагнитная волна, расходящаяся от открытого конца двухпроводной линии и уносящая с собой часть мощности набегающей волны. Поэтому коэффициент отражения этой волны от конца линии всегда несколько меньше единицы. Если, однако, выполняется условие

$$kb \ll 1 \qquad (36.01)$$

(где k — волновое число в пустоте, b — расстояние между проводами), то амплитуда сферической волны весьма мала, и эта волна уносит лишь пренебрежимо малую часть мощности набегающей противофазной волны. Действительно, в этом случае дипольный момент отрезка первого провода dz_1 отличается лишь знаком от дипольного момента соответствующего отрезка dz_2 на втором проводе (рис. 27), а волны, создаваемые этими диполями в любой точке вдали от конца линии, имеют при условии (36.01) малую дополнительную

Электронное наследие России

разность фаз и поэтому почти полностью погашают друг друга.

Если же условие (36.01) не выполняется, то линия сильно излучает. Так как это излучение никак не учитывается телеграфными уравнениями, по которым коэффициент отражения от разомкнутого конца всегда равен единице, то телеграфные уравнения теряют свою силу и не позволяют рассчитывать неоднородные линии. Одновременно двухпроводная линия становится практически не пригодной для передачи электромагнитной энергии, так как любая неоднородность приводит к сильным потерям на излучение.

Те же рассуждения применимы и к коаксиальной линии. Так, например, если мы имеем открытый конец коаксиальной линии, то он будет давать пренебрежимо малое излучение лишь при условии (36.01), где уже под b нужно понимать радиус внешнего проводника коаксиальной линии. Однако коаксиальная линия может и не иметь сообщения с внешним пространством, и тогда для нее излучение не играет роли. Тем не менее, телеграфные уравнения применимы для расчета коаксиальной линии с нагрузками и неоднородностями лишь при условии (36.01). Последнее утверждение будет обосновано дальше, при анализе волноводных свойств коаксиальных линий (см. § 45). Здесь мы лишь отметим, что телеграфное уравнение относится к распространению только одной волны в линии, а именно той, которая в идеально проводящей линии распространяется со скоростью c и имеет чисто поперечную структуру поля (ср. § 29). В § 45 мы покажем, что в коаксиальной линии наряду с этой волной могут распространяться (при достаточно высоких частотах) и другие волны—так называемые волноводные волны, которые телеграфным уравнениям не подчиняются и возникают в местах, где нарушается однородность коаксиальной линии. Эти волноводные волны при условии (36.01) можно во внимание не принимать, так как они быстро затухают.

Заметим, что наличие распространяющихся волноводных волн в коаксиальной линии обычно лишает ее практического значения в соответствующем диапазоне частот, поскольку, например, согласование такой линии с нагрузкой и другие технические задачи становятся практически неразрешимыми. Можно сказать, что как только передающие линии первой группы перестают подчиняться телеграфным уравнениям, так одновременно они теряют свою практическую ценность.

ЭБ "Научное наследие России"

Условие (36.01) можно назвать условием поперечной квазистационарности. Оно показывает, что в любом поперечном сечении линии в каждый момент времени распределение электрического и магнитного поля будет практически таким же, как и при стационарных условиях. Действительно, обычное условие квазистационарности

$$kD \ll 1 \tag{36.02}$$

гарантирует нам то же самое для системы (электрической цепи), наибольший размер которой во всех трех измерениях равен D.

Наряду с квазистационарным характером поля в поперечном сечении, условие (36.01) обеспечивает локальный характер электрического и магнитного поля в соответствии с предположениями § 32. Действительно, как мы видели выше, волна распространяется вдоль линии с волновым числом h, не слишком отличающимся от k. Поэтому условие (36.01) приводит к тому, что в бегущей волне фазы тока и погонного заряда на проводах (а в стоячей волне — их амплитуды) остаются практически постоянными на длине линии, равной Nb, где N есть число порядка нескольких единиц или более. Токи и заряды на таком отрезке линии, очевидно, возбуждают основную часть поля в некотором среднем сечении этого отрезка, а остальные участки линии дают лишь малые поправки к этому полю. Таким образом и реализуется локальный характер полей в поперечном сечении.

Иначе можно сказать, что для справедливости теории длинных линий, основанной на телеграфных уравнениях, необходимо, чтобы длина волны в окружающем пространстве была достаточно велика, а именно, значительно превосходила бы поперечные размеры данной линии.

Заметим, что условие применимости телеграфных уравнений для волны, распространяющейся в бесконечно длинной *однородной* линии, является более мягким, чем условие (36.01). Оно имеет вид

$$\sqrt{k^2 - h^2}\, b \ll 1, \tag{36.03}$$

где h есть волновое число в линии, которое можно получить из телеграфных условий [см. формулу (35.03)]. Подробное обоснование условия (36.03) можно найти выше, в § 30. Здесь мы лишь укажем, что для идеально проводящих линий ($R=0$, $L_i=0$) оно удовлетворяется автоматически,

Электронное наследие России

так как для них по телеграфному уравнению получается $h^2 = k^2$, что полностью соответствует результатам электродинамического рассмотрения § 29, где мы при всех условиях получили $h^2 = k^2$. Более того, в § 29 мы показали, что электромагнитное поле в поперечном сечении распределено согласно законам стационарных полей, что позволяет применять понятия погонной емкости и погонной индуктивности, не внося этим какой-либо ошибки.

§ 37. Однопроводная линия и телеграфные уравнения. Понятие о строгой теории вибраторов

Однопроводную линию (ср. § 29) можно рассматривать, например, как предельный случай коаксиальной линии при бесконечном радиусе внешнего проводника ($b = \infty$). Однако непосредственное применение телеграфных уравнений к однопроводной линии наталкивается на невозможность разумного определения параметров C, L_e и W для такой линии. Действительно, по формулам (33.05), (33.10) и (33.21) мы получаем

$$C = 0, \quad L_e = \infty, \quad W = \infty. \tag{37.01}$$

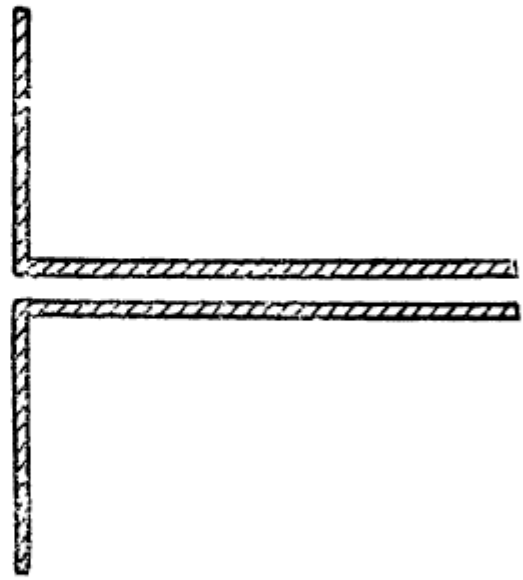


Рис. 28. Вибратор и передающая линия.

Этот результат является вполне естественным, так как условию применимости телеграфных уравнений (36.01) однопроводная линия не удовлетворяет никогда. Вследствие отсутствия обратного провода при возбуждении однопроводной линии возникает сильное излучение в стороны, и электромагнитная энергия лишь частично направляется вдоль линии. Поэтому телеграфные уравнения к однопроводной линии и ее отрезкам применять, строго говоря, нельзя.

Для излучения и приема радиоволн с давних пор находят широкое применение антенные системы, вибраторы которых являются отрезками тонких проводов. Простейшая антенна такого типа состоит (рис. 28) из одного вибратора, к разрезу которого присоединена передающая линия, провода

которой переходят в противоположные края разреза. Чаще всего длина вибратора выбирается приблизительно равной половине длины волны в свободном пространстве, а разрез расположен в середине вибратора. Для расчета основных свойств такой антенны, как например характеристики излучения, сопротивления излучения и т. п., требуется знать распределение тока по длине вибратора. Ясно, что чисто электродинамическое решение этой задачи представляет серьезные трудности. Поэтому в течение долгого времени, ввиду отсутствия электродинамической теории, данную задачу трактовали с помощью телеграфных уравнений. Конечно, этот подход ни физически, ни математически обосновать невозможно (в силу соображений, высказанных выше), однако вследствие огромной практической важности данной задачи необходимо было получить хотя бы самое грубое ее решение.

Погонные параметры вибратора, рассматриваемого как отрезок однопроводной линии, определялись следующим образом. Можно вычислить полную емкость конечного отрезка провода длиной l. Деля эту емкость на длину l, получим погонную емкость такого вибратора. Она оказывается равной

$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{l}{a}}. \qquad (37.02)$$

Мы видим, что погонная емкость, определенная таким образом, зависит от длины l и для бесконечной однопроводной линии ($l = \infty$) обращается в нуль, как это и должно быть по формуле (37.01). С помощью величины C можно найти параметры L_e и W и вычислить по телеграфным уравнениям то распределение тока и напряжения по длине вибратора, которое при работе антенны на передачу возбуждается волной, распространяющейся в линии.

К решению той же задачи можно также подойти, рассматривая рис. 28 как предельный случай рис. 29,*а*, в котором линия передачи переходит в отрезок неоднородной линии с плавно меняющимся расстоянием между проводами. Так как расчет колебаний в такой неоднородной линии связан с некоторыми математическими трудностями, то для упрощения задачи отрезок неоднородной линии на рис. 29,*а* заменяют отрезком однородной линии на рис. 29,*б*, имеющим ту же среднюю погонную емкость. Расчет системы, изображенной на рис. 29,*б*, производится элементарными

Электронное наследие России

средствами, но, разумеется, не дает непосредственной возможности найти сопротивление излучения, так как телеграфные уравнения излучения не учитывают. Сопротивления излучения приходится вычислять обходным путем, определяя поле излучения, создаваемое током в вибраторе, и находя излучаемую мощность интегрированием.

Такая трактовка проблемы излучения является, очевидно, непоследовательной. Действительно, наличие излучения делает телеграфные уравнения неприменимыми,

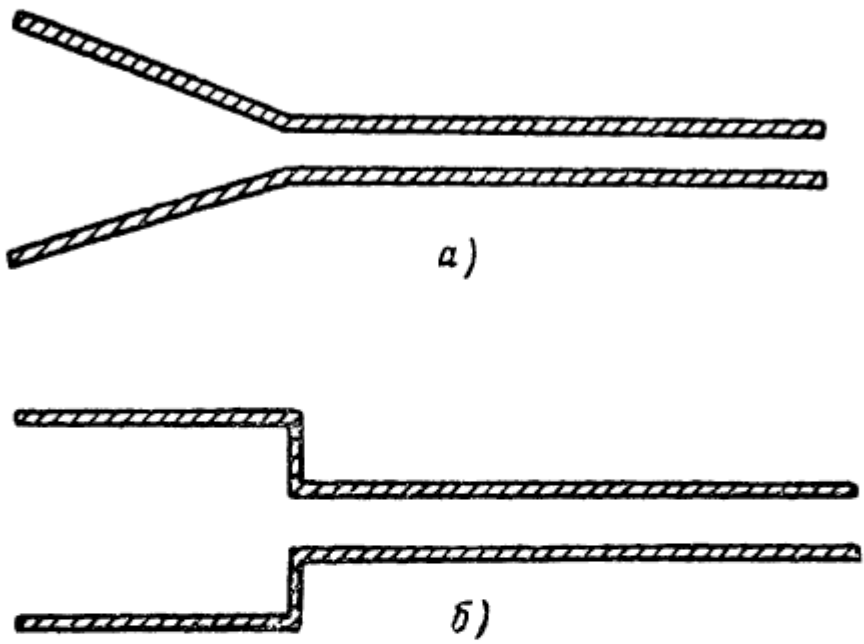


Рис. 29. Вибратор с точки зрения теории длинных линий:

а — вибратор как отрезок линии с переменным расстоянием между проводами; *б* — вибратор как эквивалентный отрезок однородной линии.

а излучение вибраторов стараются сделать возможно более сильным. Наличие излучения может, вообще говоря, изменить распределение тока в вибраторе, а поэтому весь расчет нельзя считать вполне убедительным.

В последние десятилетия была создана строгая электродинамическая теория вибраторов антенн. В этой теории распределение тока вдоль вибратора определяется в результате приближенного решения электродинамической задачи, причем вибратор рассматривается как тонкий идеальный проводник — настолько тонкий, что величину (37.02) можно считать малой. Наличие линии передачи, возбуждающей электрическое поле в разрезе между обеими половинками вибратора и вводящей токи в эти половинки, в теории не учитывается. Вместо этого (ср. § 3) принимается, что

ЭБ "Научное наследие России"

в месте разреза вибратора приложено стороннее электрическое поле, выполняющее в основном те же функции, которые в реальной системе выполняет линия, включенная в разрез.

Строгая электродинамическая теория тонких вибраторов позволила дополнить старую теорию антенн, основанную на телеграфных уравнениях. Ввиду того, что строгая теория вибраторов отличается математической сложностью, мы ее здесь излагать не будем. Для изучения этой теории следует обратиться к оригинальным работам Халлена, М. А. Леонтовича и М. Л. Левина и других авторов.

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА VII

ВОЛНОВОДЫ

§ 38. Особенности электромагнитных волн в волноводах

Волноводом называется полый металлический цилиндр, имеющий поперечное сечение произвольной формы (рис. 30). Электромагнитное поле в волноводе заключено внутри металлической оболочки; в этом отношении волновод аналогичен коаксиальной линии. Однако под волноводом обычно понимают полый цилиндр *без внутреннего провода*. Отсутствие внутреннего провода приводит к тому, что свойства волновода как линии передачи радикально отличаются от свойств коаксиальной линии. Впрочем, методы исследования электромагнитных волн в волноводах могут быть перенесены и на коаксиальные линии (ср. § 45).

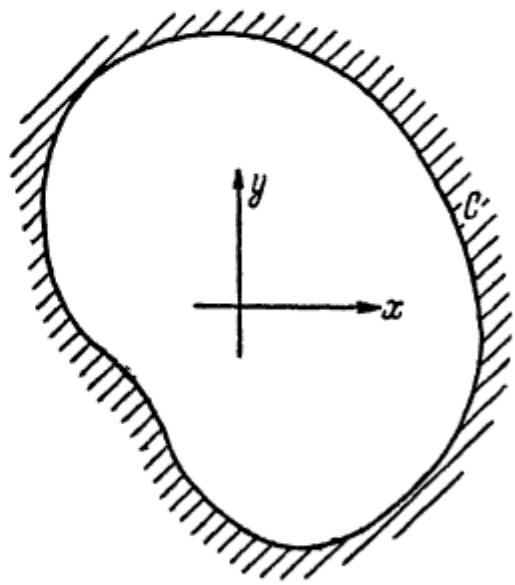


Рис. 30. Поперечное сечение волновода, ограниченное контуром C.

В дальнейшем мы покажем, что в волноводах может существовать ряд волн различных типов. Каждая из этих волн имеет следующие особенности, отличающие ее от электромагнитных волн, изученных в § 29.

1. Критические частоты. Электромагнитная волна может распространяться в волноводе и эффективно переносить электромагнитную энергию, если частота превышает некоторое критическое значение — так называемую критическую частоту данной волны в волноводе. Если вместо

ЭБ "Научное наследие России"

частоты пользоваться рабочей длиной волны, т. е. длиной волны, соответствующей данной частоте в свободном пространстве, то можно сказать, что распространение возможно только при условии, что рабочая волна короче критической длины волны.

Оказывается, что критическая длина волны λ_0 для волноводов простой формы (круговое, прямоугольное, квадратное поперечные сечения и т. д.) имеет порядок наибольшего размера волновода или меньше. Поэтому использование волноводов рационально лишь в диапазоне сантиметровых и более коротких волн: для более длинных волн габариты поперечного сечения волновода становятся слишком большими.

2. Дисперсия. Фазовая скорость волны, распространяющейся в волноводе, зависит от частоты, даже если считать стенки волновода идеально проводящими. Эта фазовая скорость оказывается больше c (см. далее § 47).

3. Структура поля. Электромагнитное поле волн в волноводе не является чисто поперечным, а имеет также продольные составляющие. Последнее обстоятельство не должно нас удивлять, так как чисто поперечное поле реализуется лишь в предельном случае плоской волны с неограниченным поперечным сечением (ср. конец § 14).

Оказывается, что все электромагнитные волны в волноводе могут быть разбиты на два класса, в зависимости от того, какое поле имеет продольную составляющую — электрическое или магнитное. Если электрическое поле данной волны имеет продольную составляющую, а магнитное не имеет таковой, то волна условно называется электрической. Если магнитное поле имеет продольную составляющую, а электрическое ее не имеет, то волна именуется магнитной. Таким образом, обозначая через z координату, отсчитываемую вдоль волновода, имеем для электрических волн

$$E_z \neq 0; \quad H_z = 0, \tag{38.01}$$

а для магнитных волн

$$H_z \neq 0; \quad E_z = 0. \tag{38.02}$$

Напомним, что в § 29 мы показали, что распространение волн со скоростью c и с поперечной структурой поля внутри волноводов невозможно. Поэтому неудивительно, что волны в волноводах так сильно отличаются от волн, рассмотренных нами в § 29.

Электронное наследие России

Теоретическое исследование электромагнитных волн в волноводах мы проведем сначала в предположении, что стенки волновода обладают идеальной проводимостью и внутри волновода — пустота. От этих ограничений мы освободимся только в гл. IX.

§ 39. Электрические волны в волноводах

Будем искать частные решения уравнений электромагнитного поля внутри волноводов с произвольным поперечным сечением. При этом мы рассмотрим бегущие волны, точнее предположим, что зависимость всех комплексных амплитуд электромагнитного поля от z определяется множителем e^{ihz}, где h — пока неизвестное нам волновое число.

Легко показать, что целый класс таких решений может быть получен с помощью электрического вектора Герца с составляющими

$$\Pi_x = 0; \quad \Pi_y = 0; \quad \Pi_z = \Pi(x, y)\, e^{ihz}, \tag{39.01}$$

где функция $\Pi = \Pi(x, y)$ от z не зависит.

Электрический вектор Герца должен удовлетворять волновому уравнению (18.04), поэтому для составляющей Π_z мы должны иметь уравнение

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z = 0 \tag{39.02}$$

или для функции Π

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + g^2 \Pi = 0. \tag{39.03}$$

где

$$g^2 = k^2 - h^2. \tag{39.04}$$

Заметим, что h естественно назвать продольным волновым числом, а g — поперечным волновым числом. Эти волновые числа связаны с k — волновым числом в свободном пространстве — соотношением

$$g^2 + h^2 = k^2, \tag{39.05}$$

показывающим, что g и h можно рассматривать как проекцию некоторого вектора $\mathbf{k}$ с абсолютной величиной k на плоскость поперечного сечения и ось z соответственно.

ЭБ "Научное наследие России"

Формулы (18.03), примененные к электрическому вектору Герца частного вида (39.01), определяют составляющие электромагнитного поля

$$\left.\begin{aligned} E_x &= ih\frac{\partial \Pi}{\partial x}e^{ihz}; & H_x &= -ik\frac{\partial \Pi}{\partial x}e^{ihz};\\ E_y &= ih\frac{\partial \Pi}{\partial y}e^{ihz}; & H_y &= ik\frac{\partial \Pi}{\partial x}e^{ihz};\\ E_z &= g^2\Pi e^{ihz}; & H_z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (39.06)$$

Таким образом, электрический вектор Герца (39.01) дает электромагнитное поле, не имеющее продольной составляющей вектора **H** и соответствующее электрической волне по классификации предыдущего параграфа [см. формулу (38.01)]. Разумеется, термин „электрическая волна" не означает, что в данной волне отсутствует магнитное поле: этим только подчеркивается, что магнитное поле не имеет продольной составляющей.

Электромагнитное поле (39.06) удовлетворяет комплексным уравнениям поля, если функция Π есть решение двухмерного волнового уравнения (39.03). Граничное условие

$$E_t = 0 \qquad (39.07)$$

на идеально проводящей стенке волновода будет выполняться, если функция Π удовлетворяет граничному условию

$$\Pi = 0 \text{ на } C, \qquad (39.08)$$

где C есть контур, получающийся при пересечении внутренней поверхности стенки волновода с плоскостью поперечного сечения x, y (рис. 30). Действительно, в силу условия (39.08) на стенке будем иметь $E_z = 0$. Кроме того, составляющие электрического поля E_x и E_y в плоскости поперечного сечения $z = \text{const}$ отличаются от двухмерного градиента функции $\Pi(x, y)$, т. е. от вектора с составляющими $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Pi}{\partial y}$, только постоянным множителем. Поэтому силовые линии электрического поля в плоскости поперечного сечения $z = \text{const}$ будут ортогональны семейству линий уровня $\Pi = \text{const}$ (см. рис. 31); эти силовые линии подходят к стенке, являющейся одной из линий уровня, под прямым углом. Таким образом, граничное

Электронное наследие России"

условие (39.08) ведет к выполнению граничного условия (39.07).

Более строго связь между условиями (39.07) и (39.08) можно установить, если образовать составляющую электрического поля по касательной к контуру C:

$$E_s = E_x \frac{dx}{ds} + E_y \frac{dy}{ds} = ih\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right) e^{ihz} = ih\frac{\partial \Pi}{\partial s} e^{ihz}, \quad (39.09)$$

где s — длина дуги вдоль контура C. Полученное выражение показывает, что при выполнении условия (39.08) на контуре C будем иметь $E_s = 0$.

Из сказанного выше следует, что, нанеся линии уровня $\Pi = \text{const}$, мы путем построения семейства кривых, им ортогональных, получим картину электрических силовых линий в плоскости поперечного сечения. Точнее, это будут проекции электрических силовых линий, являющихся трехмерными (пространственными) кривыми, на плоскость поперечного сечения. Из формул (39.06) вытекает соотношение

$$E_x H_x + E_y H_y = 0, \quad (39.10)$$

поэтому электрическое поле в каждой точке перпендикулярно магнитному и магнитные силовые линии совпадают с линиями уровня функции $\Pi(x, y)$. Так как $H_z = 0$, то магнитные силовые линии являются плоскими кривыми.

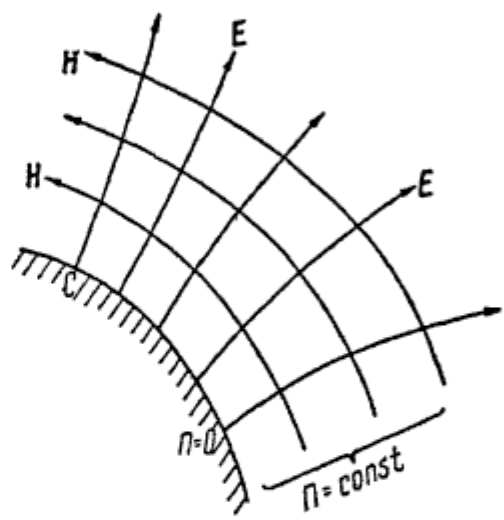


Рис. 31. Электрическое и магнитное поле электрической волны в поперечном сечении $z = \text{const}$.

В математике доказывается, что двухмерное волновое уравнение (39.03) имеет внутри замкнутого контура C отличное от нуля решение Π, удовлетворяющее на самом контуре граничному условию (39.08) не при любом g^2, а лишь при некоторых значениях

$$g_1^2, g_2^2, \ldots \quad (39.11)$$

образующих спектр собственных значений данной граничной задачи. Величины (39.11) образуют возрастающую (или, по крайней мере, неубывающую) последовательность положительных вещественных чисел. Каждому собствен-

ЭБ "Научное наследие России"

ному значению g поперечного волнового числа соответствуют два значения продольного волнового числа h, получающиеся из соотношения (39.04)

$$h^2 = k^2 - g^2 \tag{39.12}$$

и некоторая собственная функция $\Pi(x, y)$. Эта функция по формулам (39.06) дает распределение электромагнитного поля некоторой электрической волны, а волновое число h — зависимость этого поля от координаты z.

Формула (39.12) показывает, что значение h^2 может быть как положительным, так и отрицательным. В первом случае мы получаем волну с вещественным волновым числом

$$h = \pm\sqrt{k^2 - g^2}. \tag{39.13}$$

Эта волна распространяется вдоль волновода без затухания, так как потерями в стенках волновода мы пренебрегаем и считаем их идеально проводящими. Во втором случае волновое число h получается чисто мнимым

$$h = \pm i\sqrt{g^2 - k^2} \tag{39.14}$$

и волна затухает, не распространяясь. Это затухание не связано, разумеется, с какими-либо потерями (ср. § 44).

Исследуем подробнее, при каких условиях данная волна в волноводе распространяется, а при каких затухает. Для этого введем длину волны λ в свободном пространстве, связанную с волновым числом k формулой (12.04)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{39.15}$$

Будем далее считать, что волна распространяется, возьмем в формуле (39.13) знак плюс и введем длину волны в волноводе Λ по формуле

$$h = \frac{2\pi}{\Lambda}. \tag{39.16}$$

Длина волны Λ определяет периодичность поля распространяющейся волны по оси z. Если также определить „критическую длину волны“ λ_0 по формуле

$$g = \frac{2\pi}{\lambda_0} \tag{39.17}$$

Электронное наследие России"

(мы считаем $g > 0$), то соотношение (30.12) примет вид

$$\frac{1}{\Lambda} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2}}. \qquad (39.18)$$

Отсюда следует, что данная волна является распространяющейся только при $\lambda < \lambda_0$, т. е. когда рабочая длина волны меньше критической. Если же, наоборот, рабочая длина волны больше критической ($\lambda > \lambda_0$), то волна является затухающей, и ее волновое число определяется формулой (39.14). О длине волны в волноводе в этом случае вообще говорить нельзя, так как поле не имеет периодической зависимости от z.

Если непрерывно изменять рабочую длину волны λ, то при $\lambda = \lambda_0$ происходит качественное изменение — данная волна из распространяющейся становится затухающей или наоборот. Отсюда и название для величины λ_0 — критическая длина волны.

Каждое собственное значение g^2 определяется, очевидно, лишь геометрией поперечного сечения волновода, т. е. его размерами и формой. То же относится и к критической длине волны λ_0. С другой стороны, волновое число h волны в волноводе определяется как частотой (или рабочей длиной волны λ), так и геометрическими параметрами поперечного сечения. В зависимости от соотношения между λ и λ_0 данная волна распространяется или затухает, причем длина волны в волноводе или коэффициент ее затухания определяются через λ и λ_0.

В § 41 и § 42 изложенная выше общая теория электрических волн в волноводе с произвольным поперечным сечением будет применена к волноводам с прямоугольным и круговым сечениями.

§ 40. Магнитные волны в волноводах

Для волноводов произвольного поперечного сечения можно найти еще один класс частных решений комплексных уравнений электромагнитного поля. Эти решения выражаются через магнитный вектор Герца с составляющими

$$\Pi'_x = 0; \quad \Pi'_y = 0; \quad \Pi'_z = \Pi'(x, y)\, e^{ihz}, \qquad (40.01)$$

ЭБ "Научное наследие России"

подобными составляющим (39.01). С помощью формул (18.08) мы легко можем вычислить электромагнитное поле, соответствующее вектору (40.01), а именно получаем

$$\left.\begin{aligned} E_x &= ik\frac{\partial \Pi'}{\partial y}e^{ihz}; & H_x &= ih\frac{\partial \Pi'}{\partial x}e^{ihz};\\ E_y &= -ik\frac{\partial \Pi'}{\partial x}e^{ihz}; & H_y &= ih\frac{\partial \Pi'}{\partial y}e^{ihz};\\ E_z &= 0; & H_z &= g^2\Pi' e^{ihz}. \end{aligned}\right\} \qquad (40.02)$$

Отсюда видно, что электрический вектор Герца (40.01) определяет электромагнитное поле, у которого продольная составляющая вектора E равна нулю. Поэтому выражения (40.02) определяют поле магнитной волны по классификации § 38. Через g здесь обозначено поперечное волновое число магнитной волны, а через h — ее продольное волновое число; эти волновые числа связаны соотношениями (39.04) и (39.05).

Магнитный вектор Герца Π' должен удовлетворять волновому уравнению (18.09). Отсюда мы получаем для функции Π' двухмерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial y^2}+g^2\Pi'=0, \qquad (40.03)$$

подобное уравнению (39.03). Для того, чтобы электромагнитное поле (40.02) удовлетворяло граничному условию (39.07) на стенке волновода, необходимо и достаточно, чтобы функция Π' удовлетворяла граничному условию

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial n}=0 \text{ на } C, \qquad (40.04)$$

где C есть тот же контур, что и в условии (39.08), а $\frac{\partial \Pi'}{\partial n}$ есть нормальная производная функции Π'.

Действительно, если мы на плоскости x, y проведем линии уровня $\Pi'=\text{const}$, то магнитные силовые линии в силу формул (40.02) будут ортогональны к этим линиям уровня. Так как из формул (40.02) опять вытекает соотношение (39.10), указывающее на перпендикулярность электрического и магнитного поля в каждой точке пространства, то электрические силовые линии будут совпадать с линиями уровня $\Pi'=\text{const}$ (см. рис. 32). Поэтому

Электронное наследие России

линии уровня $\Pi' = \text{const}$ должны подходить к контуру C под прямым углом; это значит, что при движении по нормали к контуру C мы сначала остаемся на той же линии уровня, а это равноценно граничному условию (40.04).

Более строго граничное условие (40.04) можно обосновать следующим образом. Так как в магнитной волне $E_z = 0$ тождественно, то на стенке волновода должна обращаться в нуль лишь составляющая электрического поля в направлении касательной к контуру C

$$E_s = E_x \frac{dx}{ds} + E_y \frac{dy}{ds} = ik \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial \Pi'}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) e^{ihz}. \quad (40.05)$$

Так как единичная нормаль $\mathbf{n}$ к контуру C имеет составляющие

$$n_x = -\frac{dy}{ds}; \quad n_y = \frac{dx}{ds},$$

то

$$E_s = ik \left(n_x \frac{\partial \Pi'}{\partial x} + n_y \frac{\partial \Pi'}{\partial y} \right) e^{ihz} = ik \frac{\partial \Pi'}{\partial n} e^{ihz} \quad (40.06)$$

и требование $E_s = 0$ приводит к граничному условию (40.04).

Из сказанного выше следует, что, построив линии уровня $\Pi' = \text{const}$, мы тем самым получим электрические силовые линии; эти линии являются плоскими кривыми, целиком лежащими в плоскости поперечного сечения. Проводя линии, им ортогональные, мы получаем магнитные силовые линии в плоскости поперечного сечения, точнее проекции магнитных силовых линий на эту плоскость.

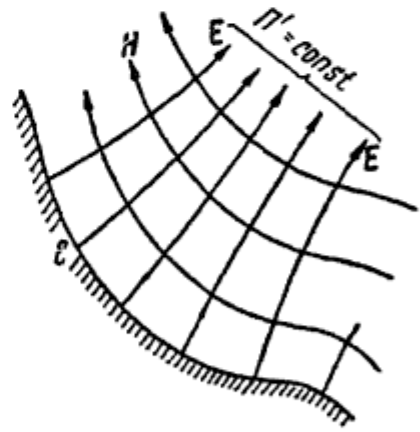


Рис. 32. Электрическое и магнитное поле магнитной волны в поперечном сечении $z = \text{const}$.

Общее математическое исследование уравнения (40.03) с граничным условием (40.04) также приводит к заключению, что данная граничная задача имеет нетривиальные решения лишь при некоторых значениях g^2, образующих ее спектр собственных значений

$$g_1^2, \; g_2^2, \ldots \quad (40.07)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Собственные значения (40.07) образуют возрастающую (точнее, неубывающую) последовательность, вообще говоря, отличную от последовательности (39.11). Каждому собственному значению g^2 соответствует некоторая собственная функция Π', дающая распределение поля данной магнитной волны, и пара продольных волновых чисел, получающихся из формулы

$$h^2 = k^2 - g^2. \tag{40.08}$$

Исследование последней формулы производится таким же образом, что и в § 39. Соотношения (39.13) — (39.18) остаются в силе и, в частности, распространение или затухание данной волны имеет место в зависимости от соотношения между рабочей длиной волны λ и критической волной λ_0; последняя зависит лишь от геометрии поперечного сечения и от номера данной магнитной волны.

Заметим, что в число собственных значений мы не включаем значение $g^2 = 0$, которому соответствует собственная функция $\Pi' = \text{const}$, удовлетворяющая, как легко проверить, уравнению (40.03) и условию (40.04). Действительно, такая собственная функция приводит по формулам (40.02) к электромагнитному полю, тождественно равному нулю, и поэтому не представляет интереса.

В § 41 и § 42 мы применим развитую здесь общую теорию магнитных волн к волноводам частного вида — прямоугольному и круглому.

Изложенная выше теория электрических и магнитных волн в волноводах показывает, что потенциалы облегчают решение электродинамических волн. В самом деле, с помощью электрического и магнитного вектора Герца мы свели задачу об электромагнитных волнах в волноводе произвольного поперечного сечения к двум граничным задачам для двухмерного волнового уравнения. Эти задачи давно исследованы в математике в связи с другими физическими проблемами. Например, можно показать, что исследование собственных колебаний мембраны, натянутой на жесткий контур C (рис. 30), сводится к уравнению (39.03) с граничным условием (39.08). Другая граничная задача (для магнитных волн) также имеет механический смысл.

При исследовании электромагнитных волн в волноводах мы нашли два класса частных решений уравнений поля, соответствующих электрическим и магнитным вол-

Электронное наследие России

нам. Разумеется, из нашего изложения еще не следует полнота полученной системы волн: мы не доказали, что в волноводе никаких других волн не существует. Однако можно показать, что система электрических и магнитных волн действительно является полной. Ввиду того, что доказательство является довольно сложным, мы на нем останавливаться не будем.

Свойство полноты системы электрических и магнитных волн в волноводе означает, что при любом способе возбуждения монохроматического электромагнитного поля в волноводе оно представляется—вне возбуждающих источников — в виде суммы (точнее, ряда) электрических и магнитных волн, изученных нами выше.

§ 41. Система волн в прямоугольном волноводе

При исследовании электромагнитных волн в прямоугольном волноводе выберем начало координат в одной из вершин прямоугольного поперечного сечения и направим ось x вдоль большой стороны a, а ось y — вдоль меньшей стороны b прямоугольника (рис. 33).

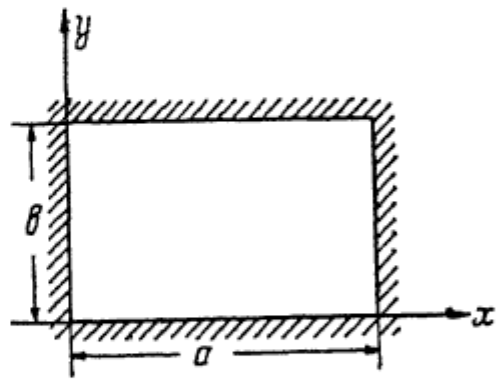


Рис. 33. Прямоугольный волновод.

Будем искать решение двухмерного волнового уравнения (39.03) для электрических волн методом разделения переменных. Напишем для функции Π выражение

$$\Pi(x, y) = X(x)\,Y(y) \quad (41.01)$$

и подставим его в уравнение (39.03). После деления обеих частей уравнения на произведение XY получим

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + g^2 = 0. \quad (41.02)$$

Из последнего соотношения следует, что как $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}$, так и $\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$ должны быть постоянными величинами; обозначим эти постоянные соответственно через $-g_x^2$ и $-g_y^2$. Таким образом

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -g_x^2; \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -g_y^2 \quad (41.03)$$

ЭБ "Научное наследие России"

или

$$\frac{d^2X}{dx^2}+g_x^2X=0;\ \frac{d^2Y}{dy^2}+g_y^2Y=0, \tag{41.04}$$

где в силу соотношения (41.02)

$$g^2=g_x^2+g_y^2. \tag{41.05}$$

Последнее соотношение можно рассматривать как продолжение разложения (39.05), а именно разложение поперечного волнового числа g на составляющие g_x и g_y, каждая из которых определяет зависимость потенциалов и полей от соответствующей поперечной координаты x или y.

Общие решения уравнений (41.04) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} X&=A_1\cos(g_xx)+A_2\sin(g_xx),\\ Y&=B_1\cos(g_yy)+B_2\sin(g_yy),\end{aligned}\right\} \tag{41.06}$$

где A_1, A_2, B_1 и B_2 суть произвольные постоянные. Так как функция Π должна удовлетворять граничному условию (39.08), т. е. в нашем случае должно быть

$$\begin{aligned}\Pi=0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=a,\\ y=0 \text{ и } y=b,\end{aligned} \tag{41.07}$$

то функции X и Y должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &X=0 \text{ при } x=0, \text{ откуда } A_1=0;\\ &X=0 \text{ при } x=a, \text{ откуда } A_2\sin(g_xa)=0;\\ &Y=0 \text{ при } y=0, \text{ откуда } B_1=0;\\ &Y=0 \text{ при } y=b, \text{ откуда } B_2\sin(g_yb)=0.\end{aligned}$$

Для того, чтобы получить нетривиальное решение граничной задачи, необходимо выбрать числа g_x и g_y так, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\sin(g_xa)=0;\ \sin(g_yb)=0, \tag{41.08}$$

т. е. взять

$$g_x=\frac{m\pi}{a};\ g_y=\frac{n\pi}{b}, \tag{41.09}$$

Электронное наследие России

где m и n суть любые целые числа: 1, 2, 3... Таким образом мы получаем собственные функции данной граничной задачи в виде

$$\Pi = C \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{41.10}$$

где C — произвольная постоянная. Собственная функция (41.10) соответствует по формулам (41.05) и (41.09) собственному значению

$$g^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \tag{41.11}$$

Заметим, что ни одно из чисел m и n нельзя брать равным нулю, так как это приводит к функции (41.10), тождественно равной нулю. Если же взять в качестве m или n отрицательное целое число, то нового решения мы не получим, так как это приведет лишь к изменению знака постоянной C в формуле (41.10).

В математике доказывается, что собственные функции (41.10) и собственные значения (41.11) исчерпывают все возможные решения граничной задачи. То же самое относится и к полученному ниже решению граничной задачи для магнитных волн.

Собственная функция (41.10) и собственное значение (41.11) определяет нам электрическую волну, которая называется волной E_{mn} в прямоугольном волноводе.

Граничная задача для магнитных волн решается аналогичным образом. Мы ищем функцию Π', которая должна удовлетворять двухмерному волновому уравнению (40.03) в виде произведения (41.01). Рассуждая таким же образом, как и выше, мы получаем для функций X и Y уравнения (41.04) и общие решения (41.06). Однако граничные условия в этом случае будут иные, так как в силу формулы (40.04) должно быть

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi'}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a, \\ &\frac{\partial \Pi'}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b. \end{aligned}\right\} \tag{41.12}$$

Мы имеем:

$$\frac{dX}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \text{ откуда } A_2 = 0;$$

$$\frac{dX}{dx}=0 \text{ при } x=a, \text{ откуда } A_1 \sin(g_x a)=0;$$

$$\frac{dY}{dy}=0 \text{ при } y=0, \text{ откуда } B_2=0;$$

$$\frac{dY}{dy}=0 \text{ при } y=b, \text{ откуда } B_1 \sin(g_y b)=0.$$

Таким образом, для получения нетривиального решения граничной задачи необходимо выбрать числа g_x и g_y, удовлетворяющие тем же самым уравнениям (41.08), которые были получены выше для электрических волн. Поэтому возможные значения g_x и g_y по-прежнему определяются формулами (41.09) с тем лишь отличием, что индексы m и n могут быть также равными нулю. Действительно, например при $m=0$ получаем $X=A_1$, и функция $\Pi'=XY$ в нуль не обращается.

Окончательно получаем собственные функции

$$\Pi'=C\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{41.13}$$

и собственные значения

$$g^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \tag{41.14}$$

Они определяют магнитную волну, которая называется волной H_{mn} в прямоугольном волноводе.

Заметим, что среди магнитных волн в волноводе имеются волны $H_{10}, H_{20}, \ldots, H_{01}, H_{02}, \ldots$, однако волна H_{00}, у которой оба индекса равны нулю и $g^2=0$, отсутствует, так как по формулам (40.02) такой волне соответствовало бы электромагнитное поле, равное тождественно нулю. Отметим также что поле волны H_{10} (а также волн H_{20}, $H_{30}, \ldots$) не зависит от координаты y. Подобная ей волна E_{10} не может существовать по следующей причине: поле такой волны не должно зависеть от координаты y, но так как при $y=0$ и $y=b$ должно быть $E_z=0$, то вследствие независимости E_z от y составляющая E_z должна тождественно обращаться в нуль. А это и означает, что такой волны не существует.

Рассмотрим структуру электромагнитного поля электрических и магнитных волн в прямоугольном волноводе. Простейшая электрическая волна в прямоугольном волноводе есть волна E_{11}, для которой

$$\Pi=C\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}. \tag{41.15}$$

Электронное наследие России

Построим линии уровня функции П. Так как в центре прямоугольника, при $x=\frac{a}{2}$ и $y=\frac{b}{2}$, функция П принимает максимальное значение, то вблизи него линии уровня имеют вид эллипсов, центры которых совпадают с центром прямоугольника а полуоси направлены по осям x и y и относятся как $a:b$. По мере увеличения размера эллипса форма его искажается, и он делается все более похожим на прямоугольник со слегка закругленными углами. Наконец линия уровня $\Pi=0$ есть не что иное, как сам периметр прямоугольника. Изображенные пунктиром на рис. 34,*а* ли-

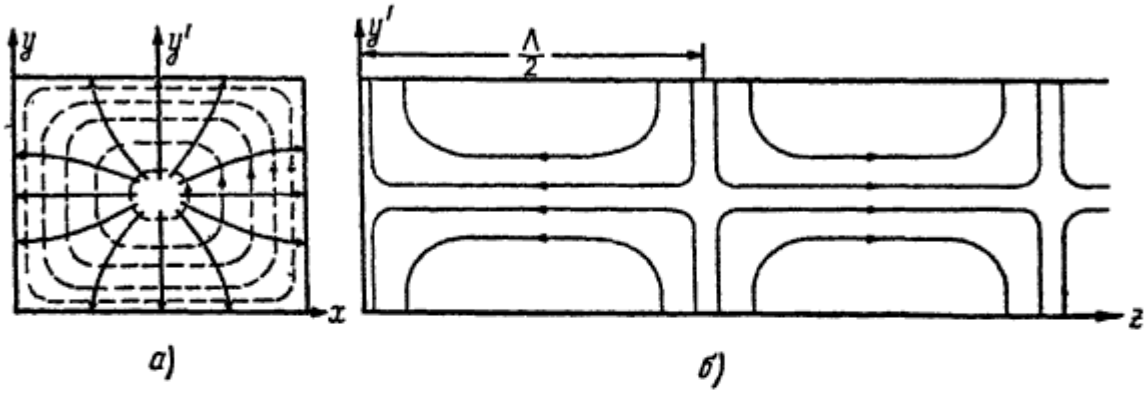


Рис. 34. Волна E_{11} в прямоугольном волноводе.

нии уровня функции П по общим соображениям § 39 (рис. 31) дают нам силовые линии магнитного поля, а перпендикулярные к ним сплошные кривые на рис. 34,*а* суть электрические силовые линии.

Полученная картина силовых линий в волне E_{11} напоминает коаксиальную линию передачи (рис. 18,*в*), Действительно, создается впечатление, что в центре прямоугольного волновода находится проводник, на котором кончаются электрические силовые линии, а ток в проводнике охватывается кольцеобразными магнитными силовыми линиями. Однако сходимость силовых линий к центру прямоугольного сечения волновода есть эффект кажущийся, так как на самом деле электрические силовые линии расположены в пространстве, а на рис. 34,*а* даны их проекции на плоскость поперечного сечения. Если учесть, что по формуле (39.06) составляющая E_z имеет максимальное значение в центре прямоугольника, то ясно, что вблизи центра силовые линии электрического поля идут в основном в осевом направлении. Изменяющемуся во времени продольному электрическому полю соответствует ток смещения, направленный по оси волновода: именно этот ток сме-

Электронное наследие России

щения и охватывается магнитными силовыми линиями, изображенными на рис. 34,*а*.

Ход силовых линий электрического поля распространяющейся волны E_{11} в продольном сечении yz изображен на рис. 34,*б*, из которого видно, что силовые линии начинаются на стенках и идут сначала перпендикулярно этим стенкам, т. е. в плоскости поперечного сечения. По мере приближения к оси волновода они отходят от этого сечения, идут в основном параллельно оси волновода и кончаются опять на стенке, подходя к ней под прямым углом в плоскости другого поперечного сечения. Заметим, что картина силовых линий в плоскости продольного сечения обладает периодом, равным длине волны в волноводе Λ.

Структура электромагнитного поля волны E_{mn} в прямоугольном волноводе может быть получена следующим образом: если разбить сторону прямоугольника a на m равных частей, а сторону b на n равных частей и через соответствующие точки провести прямые, параллельные осям x и y, то прямоугольное поперечное сечение волновода разобьется на mn одинаковых прямоугольников. Легко показать, что в каждом малом прямоугольнике электромагнитное поле волны E_{mn} имеет ту же структуру, которую имеет в волноводе с таким поперечным сечением рассмотренная выше волна E_{11}. Поэтому электромагнитное поле волны E_{mn} в прямоугольном волноводе является лишь многократным повторением поля волны E_{11}, но в более мелком масштабе. Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю; оно легко получается из формул (41.10) и (41.15).

Перейдем к рассмотрению структуры поля магнитных волн. С практической точки зрения наиболее важна волна H_{10}, для которой

$$\Pi' = C\cos\frac{\pi x}{a} \tag{41.16}$$

и

$$g = \frac{\pi}{a}. \tag{41.17}$$

С помощью формул (40.02) легко вычислить составляющие электромагнитного поля волны H_{10}:

$$\left.\begin{aligned} &E_y = ikgC\sin\frac{\pi x}{a}e^{ihz};\quad H_x = -ihgC\sin\frac{\pi x}{a}e^{ihz};\\ &E_x = E_z = H_y = 0;\qquad H_z = g^2C\cos\frac{\pi x}{a}e^{ihz}. \end{aligned}\right\} \tag{41.18}$$

Научное наследие России

Из этих формул видно, что электрическое поле волны H_{10} направлено по оси y, причем наибольшая густота силовых линий достигается при $x = \frac{a}{2}$, т. е. на вертикальной оси симметрии волновода. Магнитные силовые линии лежат в горизонтальных плоскостях, причем их проекции на плоскости поперечного сечения являются горизонтальными прямыми, изображенными на рис. 35,*а* пунктиром. Если изображать силовые линии магнитного поля распространяю-

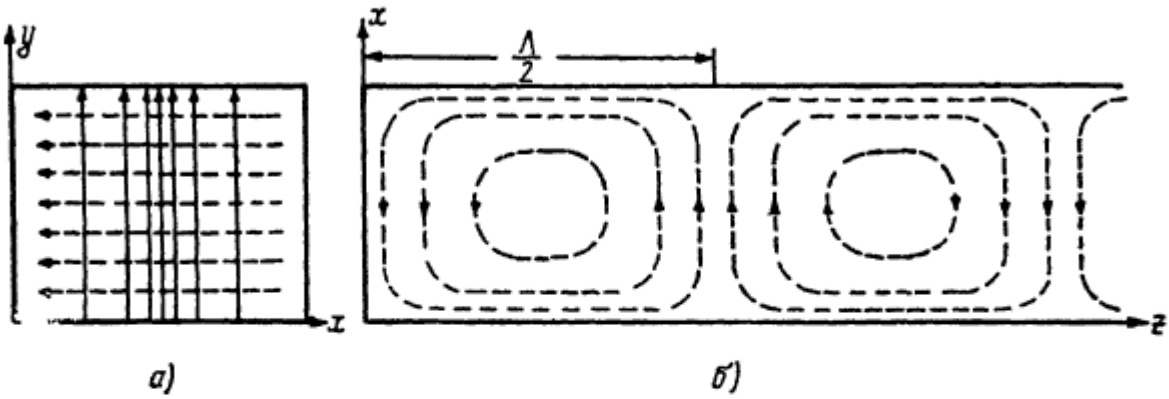


Рис. 35. Волна H_{10} в прямоугольном волноводе.

щейся волны H_{10} в плоскости продольного сечения xz, то это будут замкнутые кривые (рис. 35,*б*).

Структура поля волны H_{m0} является m-кратным повторением структуры волны H_{10} по оси x. Структура поля волны H_{01} та же, что и у волны H_{10}, но с заменой оси x на ось y и наоборот. Поле волны H_{0n} является n-кратным повторением поля волны H_{01} по оси y, но в уменьшенном масштабе.

Функция Π' для волны H_{11} в прямоугольном волноводе определяется формулой

$$\Pi' = C \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \qquad (41.19)$$

Линии уровня этой функции изображены на рис. 36,*а*. Эту картину легко построить, если учесть, что в каждой вершине прямоугольника функция (41.19) достигает своего максимального или минимального значения, так что вблизи каждой вершины прямоугольника линии уровня имеют вид эллипсов (точнее — вблизи каждого угла имеет значение лишь четверть эллипса). При удалении от вершины форма

ЭБ "Научное наследие России"

эллипсов искажается и они становятся похожими на гиперболы, имеющие в качестве асимптот прямые

$$x=\frac{a}{2};\ y=\frac{b}{2},$$

которые являются линиями уровня $\Pi'=0$.

Магнитные силовые линии в плоскости поперечного сечения изображены на рис. 36,*а* пунктиром. Они являются пространственными кривыми, и их проекции на плоскость продольного сечения yz имеют для распространяющейся волны H_{11}, вид, изображенный на рис. 36,*б*.

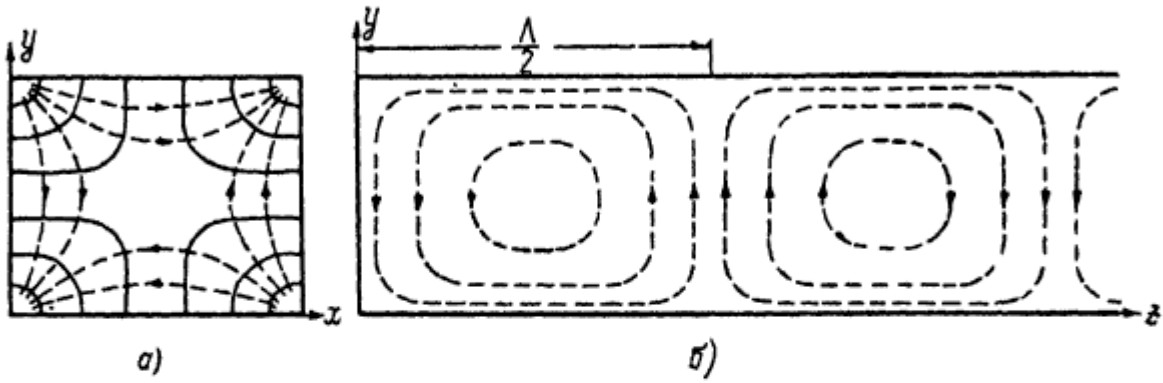


Рис. 36. Волна H_{11} в прямоугольном волноводе.

Структура поля волны $H_{mn}(m\neq 0,\ n\neq 0)$ связана со структурой волны H_{11} таким же образом, как структура поля волны E_{mn} связана со структурой волны E_{11} (см. выше).

Сравним между собой критические длины волн, которые определяются поперечным волновым числом g соответствующей волны в волноводе по формуле

$$g=\frac{2\pi}{\lambda_0}. \tag{41.20}$$

Волна H_{10} имеет наименьшее значение g, которое задается формулой (41.17). Ему соответствует критическая длина волны

$$\lambda_0=2a. \tag{41.21}$$

Таким образом, на большей стороне прямоугольного волновода укладывается как раз половина критической длины волны λ_0. Все другие волны в прямоугольном волноводе имеют меньшие критические длины волн. Например, для волны H_{01} имеем

$$\lambda_0=2b, \tag{41.22}$$

Электронное наследие России"

и так как мы считаем $a > b$, то это значение λ_0 меньше, чем (41.21). Для волн E_{11} и H_{11} поперечное волновое число определяется формулой

$$g = \pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}, \tag{41.23}$$

и критическая длина волны равна

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}. \tag{41.24}$$

Например для квадратного волновода, т. е. при $a = b$, имеем

$$\lambda_0 = \sqrt{2}a. \tag{41.25}$$

Значения (41.24) и (41.25) меньше, чем значения (41.21) и (41.22). Легко показать, что при условии

$$a < \sqrt{3}\, b = 1{,}73b \tag{41.26}$$

имеем

$$\frac{2\pi}{a} > \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}, \tag{41.27}$$

поэтому волна H_{20} и все другие волны в прямоугольном волноводе, имеющие более высокие индексы m и n, чем рассмотренные выше четыре волны, обладают бóльшими значениями поперечных волновых чисел g и, следовательно, более короткими критическими длинами волн λ_0. При

$$\sqrt{3}\, b < a < 2b \tag{41.28}$$

вслед за волнами H_{10} и H_{01} непосредственно следует волна H_{20}. При $a = 2b$ критические частоты волн H_{01} и H_{20} совпадают.

В § 39 мы показали, что при длине волны, превышающей критическую, распространение в волноводе невозможно. Поэтому при условии

$$\lambda > 2a \tag{41.29}$$

все волны в прямоугольном волноводе (как электрические, так и магнитные) являются затухающими волнами, и волновод не может служить линией передачи в этом диапазоне. При укорочении рабочей волны, когда λ становится меньше критического значения (41.21), магнитная волна H_{10} становится распространяющейся и с ее помощью можно

ЭБ "Научное наследие России"

передавать электромагнитную энергию по волноводу. В большинстве случаев для передачи используется именно эта волна, в силу чего ее структуру поля и критическую длину волны необходимо твердо помнить.

При дальнейшем укорочении рабочей длины волны может также распространяться и волна H_{01}: так будет, если λ окажется меньше критического значения (41.22); в квадратном волноводе ($a=b$) критические значения волны H_{10} и H_{01} совпадают. Для более коротких волн число распространяющихся волн становится еще больше, в частности волны E_{11} и H_{11} могут также распространяться. Как правило, передача электромагнитной энергии по волноводам с помощью нескольких распространяющихся волн представляет значительные технические неудобства, поэтому для заданного диапазона частот размеры прямоугольного волновода обычно подбираются таким образом, чтобы в в нем распространялась только волна H_{10}, а все остальные волны были затухающими.

В заключение скажем несколько слов о вырождении волн в прямоугольном волноводе. В граничных задачах встречаются случаи, когда две (или больше) собственных функции соответствуют одному и тому же собственному значению. Это явление называется вырождением, а такие собственные значения называются вырожденными (кратными).

Со случаями вырождения мы встречаемся в граничной задаче для электрических волн — при решении уравнения (39.03) с условием (39.08), или в граничной задаче для магнитных волн — при решении уравнения (40.03) с условием (40.04). Если мы будем для собственных значений этих задач писать последовательности (39.11) или (40.07) и сопоставлять каждому собственному значению одну собственную функцию, то при вырождении эти последовательности будут иметь одинаковые элементы. В прямоугольном волноводе с соизмеримыми сторонами a и b (т. е. при условии, что отношение $\frac{a}{b}$ является рациональным числом) всегда будет вырождение. В частности, в квадратном волноводе, при $a=b$, волны E_{mn} и E_{nm} будут иметь одинаковые собственные значения, хотя при $m \neq n$ распределение их полей в пространстве будет различным.

Если рассматривать задачу об электромагнитных волнах в волноводе как одну граничную задачу, то для прямоугольного волновода характерно особое вырождение, которое можно назвать вырождением E—H. Оно заключается

ЭБ "Научное наследие России"

в том, что поперечные волновые числа для волн E_{mn} и H_{mn} совпадают, и, таким образом, все собственные значения, соответствующие волнам E_{mn}, являются вырожденными. Невырожденные собственные значения могут иметь лишь волны H_{m0} и H_{0n}, так как электрические волны с теми же индексами не существуют. В частности, при $a > b$ собственное значение (41.17) для волны H_{10} является всегда невырожденным.

Отмеченное вырождение E—H в прямоугольном волноводе приводит к тому, что вместо волн E_{mn} и H_{mn} в качестве основных решений уравнений поля можно брать любые линейные комбинации этих волн. В частности, можно составить такие линейные комбинации, для одной из которых $E_x \neq 0$, $H_x = 0$, а для другой $H_x \neq 0$, $E_x = 0$. Эти новые волны также можно назвать „электрическими“ и „магнитными“, но теперь классификация производится относительно оси x. Можно показать, что эти новые „электрические“ и „магнитные“ волны могут быть получены с помощью электрического и магнитного векторов Герца, имеющих по одной составляющей Π_x и Π'_x.

Мы не будем рассматривать соответствующие формулы, так как в дальнейшем они нам не понадобятся (ср. впрочем § 59). Заметим, что вырождение $E - H$ в волноводах другой формы, например в круглых, места не имеет.

§ 42. Система волн в круглом волноводе

Рассмотрим электрические и магнитные волны в волноводе с круговым поперечным сечением радиуса a или, кратко, в „круглом волноводе“. Для решения двухмерных волновых уравнений (39.03) и (40.03) внутри круглого волновода, введем полярную систему координат с центром на оси волновода. Двухмерное волновое уравнение (39.03) в этой системе координат примет вид

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + g^2 \Pi = 0. \qquad (42.01)$$

Решения этого уравнения были исследованы в § 22. Они имеют вид

$$\Pi = C J_m(gr) \cos m\varphi \qquad (42.02)$$

ЭБ "Научное наследие России"

или

$$\Pi = CJ_m(gr)\sin m\varphi, \tag{42.03}$$

где C — постоянная, а m — любое целое число, включая нуль; если $m=0$, то решение (42.03) обращается в нуль, и мы имеем только одно решение

$$\Pi = CJ_0(gr). \tag{42.04}$$

Заметим, что функции $N_m(gr)$ или $H_m^{(1,2)}(gr)$ мы в данной задаче использовать не можем, так как они принимают бесконечные значения при $r=0$.

Поскольку функция Π должна удовлетворять граничному условию

$$\Pi = 0 \text{ при } r=a, \tag{42.05}$$

то для поперечного волнового числа g электрических волн в круглом волноводе получаем уравнение

$$J_m(ga)=0. \tag{42.06}$$

Через ν_{mn} мы обозначим n-ый положительный корень уравнения

$$J_m(\nu)=0, \tag{42.07}$$

тогда возможные значения g для электрических волн равны

$$g=\frac{\nu_{mn}}{a}. \tag{42.08}$$

Электрическая волна, функция Π которой определяется по формуле (42.02), (42.03) или (42.04) и поперечное волновое число — по формуле (42.08), называется волной E_{mn} в круглом волноводе.

Функция Π' для магнитных волн в круглом волноводе также должна удовлетворять уравнению (42.01) и поэтому представляется в том же виде, что функция Π в формулах (42.02 — 42.04). Граничное условие для нее имеет вид

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial r}=0 \text{ при } r=a, \tag{42.09}$$

поэтому поперечное волновое число g магнитной волны должно удовлетворять уравнению

$$J_m'(ga)=0. \tag{42.10}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Если через μ_{mn} обозначить n-ый положительный корень уравнения

$$J_m'(\mu) = 0, \tag{42.11}$$

то возможные значения g для магнитных волн в круглом волноводе имеют вид

$$g = \frac{\mu_{mn}}{a}. \tag{42.12}$$

Такое волновое число по определению соответствует волне H_{mn} в круглом волноводе.

Мы не будем приводить здесь таблиц для чисел ν_{mn} и μ_{mn}, определяющих поперечные волновые числа волн в круглом волноводе. Заметим лишь, что числа $\nu_{m1}, \nu_{m2}, \ldots, \nu_{mn}, \ldots$ и $\mu_{m1}, \mu_{m2}, \ldots, \mu_{mn}, \ldots$ образуют возрастающие последовательности, в которых наибольший интерес представляют числа ν_{m1} и μ_{m1}, соответствующие наименьшим значениям g и, следовательно, наибольшим значениям критических длин волн λ_0. Приведем таблицу значений λ_0 для наиболее важных волн в круглом волноводе.

Волна	E_{01}	E_{11}	E_{21}	H_{01}	H_{11}	H_{21}
$\frac{\lambda_0}{2a}$	1,31	0,84	0,61	0,84	1,71	1,05

Из этой таблицы видно, что наиболее длинная критическая волна соответствует магнитной волне H_{11}: для нее критическая длина волны равна 1,71 диаметра волновода. Функция Π' волны H_{11} определяется формулой

$$\Pi' = CJ_1(gr)\cos\varphi, \tag{42.13}$$

где

$$g = \frac{\mu_{11}}{a};\ \mu_{11} = 1{,}841. \tag{42.14}$$

Линии уровня $\Pi' = \text{const}$ для этой волны изображены на рис. 37,*а* сплошными линиями. Эти линии уровня по § 40 совпадают с электрическими силовыми линиями, которые нормальны к окружности волновода. Рис. 37,*а* легко построить, если учесть, что функция Бесселя $J_1(gr)$ имеет ход, изображенный на рис. 37,*б*, благодаря чему $J_1(gr)$ прини-

ЭБ "Научное наследие России"

мает максимальное значение при $r=a$. Поэтому функция Π' достигает максимального и минимального значения на концах горизонтального диаметра, т. е. при $r=a$, $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$. Вблизи этих двух точек линии уровня имеют вид слегка искаженных эллипсов, подходящих к окружности волновода под прямым углом. Вертикальный диаметр волновода, соответствующий значениям $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$, также является линией уровня, поскольку на нем $\Pi'=0$. Ближайшие к нему линии уровня почти параллельны ему и лишь слегка

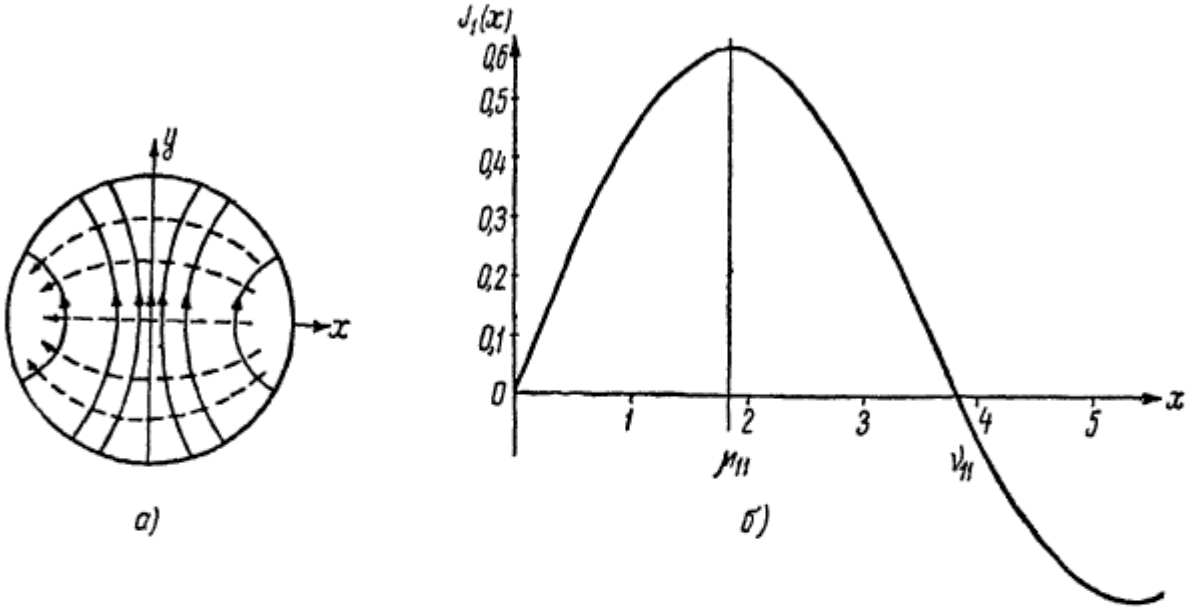


Рис. 37. Волна H_{11} в круглом волноводе.

изгибаются, чтобы подойти к стенке нормально. Таким образом распределение электрических силовых линий волны H_{11} в круглом волноводе весьма похоже на ту же картину волны H_{10} в прямоугольном волноводе (рис. 35,*а*): в обоих случаях мы имеем пучок электрических силовых линий, идущий в вертикальном направлении вдоль оси симметрии волновода.

Магнитные силовые линии в плоскости поперечного сечения изображены на рис. 37,*а* пунктирными линиями, ортогональными сплошным линиям. Ход магнитных силовых линий волны H_{11} в круглом волноводе также несколько напоминает волну H_{10} в прямоугольном волноводе. В пространстве эти силовые линии образуют замкнутые петли, проекции которых на продольное сечение xz подобны кривым, изображенным на рис. 35,*б*.

Заметим, что поперечному волновому числу (42.14) помимо функции (42.13) соответствует также функция

$$\Pi'=CJ_1(gr)\sin\varphi. \qquad (42.15)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Картина силовых линий, получаемая из последней функции, отличается от картины на рис. 37,*а* лишь поворотом на 90°. Поэтому собственное значение (42.14) является двухкратно вырожденным, так как ему соответствуют две собственные функции (42.13) и (42.15).

Можно вообще сказать, что любое собственное значение (42.08) или (42.12), соответствующее несимметричной электрической или магнитной волне, т. е. имеющее индекс $m=1, 2, 3, \ldots$, является вырожденным, так как ему соответствуют по крайней мере две собственных функции (42.02) и (42.03). Это вырождение называется поляризационным (или поворотным) вырождением и является следствием того, что круглый волновод обладает симметрией вращения.

Согласно сводке в начале параграфа следующей по величине критической длиной волны обладает электрическая волна E_{01}. Функция П волны E_{01} равна

$$\Pi = CJ_0(gr), \tag{42.16}$$

где

$$g = \frac{\nu_{01}}{a};\ \nu_{01} = 2{,}405. \tag{42.17}$$

Собственное значение (42.17) является невырожденным, так как ему соответствует только одна собственная функция (42.16). Вообще легко показать, что собственные значения симметричных электрических волн E_{0n} являются невырожденными.

Линии уровня $\Pi = \text{const}$ для волны E_{01} изображены на рис. 38,*а*; на рис. 38,*б* изображена зависимость функции $J_0(gr)$ от аргумента gr.

Мы видим, что магнитные силовые линии волны E_{01}, совпадающие с линиями $\Pi = \text{const}$, суть окружности, а электрические силовые линии в плоскости поперечного сечения идут в радиальном направлении и как бы сходятся в центре. В этом отношении волна E_{01} похожа на поперечную волну в коаксиальной линии (рис. 18,*в*). Однако на самом деле электрические силовые линии волны E_{01} являются пространственными кривыми и в плоскости продольного сечения ведут себя качественно так же, как электрические силовые линии волны E_{11} в прямоугольном волноводе (рис. 34,*б*). Вообще нужно отметить, что структура электромагнитного поля волны E_{11} в прямоугольном волноводе и волны E_{01} в круглом чрезвычайно похожи одна на другую.

ЭБ "Научное наследие России"

Выше при исследовании волн в прямоугольном и круглом волноводах мы обращали основное внимание на электромагнитные поля этих волн. Заметим, что тангенциальные составляющие магнитного поля на стенке волновода поз-

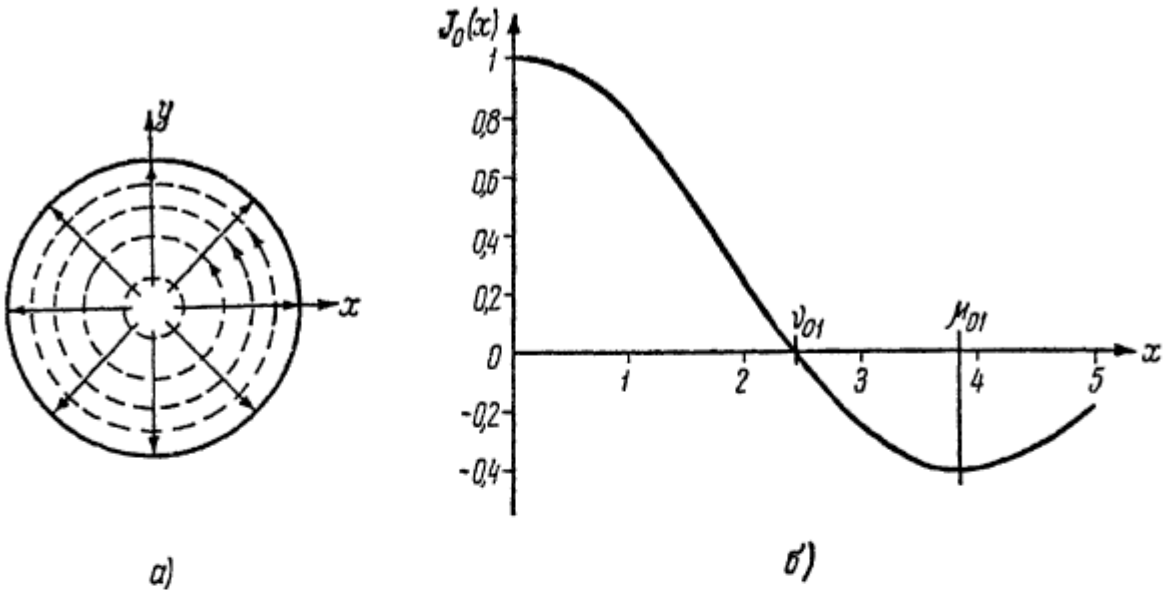


Рис. 38. Волна E_{01} в круглом волноводе.

воляют по формуле (24.04) вычислить также поверхностную плотность электрического тока, текущего по стенке. Так как для электрических волн в волноводе выполняется соотношение

$$H_z = 0, \tag{42.18}$$

то плотность тока электрических волн имеет только составляющую i_z. Таким образом, при прохождении через волновод электрических волн в стенках волновода возбуждаются только продольные токи. В этом отношении электрические волны в волноводе аналогичны поперечным волнам в длинных линиях, изученных в § 29.

Для магнитных волн

$$H_z \neq 0, \tag{42.19}$$

поэтому поверхностная плотность тока магнитных волн имеет кроме продольной составляющей i_z также поперечные составляющие. В частности, поперечными составляющими тока обладают изученные выше волны: H_{10} в прямоугольном волноводе и H_{11} в круглом волноводе; эти волны, как легко видеть из рис. 35 и рис. 37, несут и продольные токи.

В круглом волноводе существует симметричная магнитная волна H_{01}, несущая только поперечные токи. Это ис-

Электронное наследие России"

ключительное свойство волны H_{01} резко выделяет ее среди всех других волн в волноводах, так как благодаря ему затухание этой волны падает с ростом частоты (см. ниже § 54), и потому она способна с малыми потерями переносить электромагнитную энергию на большие расстояния. Функция Π' волны H_{01} в круглом волноводе равна

$$\Pi' = CJ_0(gr), \tag{42.20}$$

где

$$g = \frac{\mu_{01}}{a}; \quad \mu_{01} = 3{,}832. \tag{42.21}$$

Структура электромагнитного поля этой волны изображена на рис. 39: электрические силовые линии этой волны суть окружности, а магнитные силовые линии в плоскости поперечного сечения идут по радиусам. Существенно, что для данной волны $H_\varphi = 0$ (в силу ее симметрии) и по-

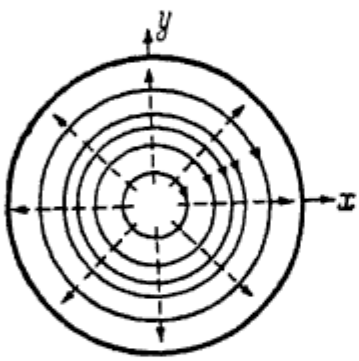


Рис. 39. Волна H_{01} в круглом волноводе.

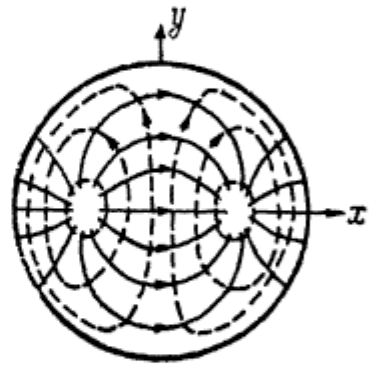


Рис. 40. Волна E_{11} в круглом волноводе.

этому по формуле (24.04) имеем $i_z = 0$, так что данная волна возбуждает только токи, текущие по окружности волновода. Из таблицы в начале параграфа видно, что собственное значение (42.21) является вырожденным, так как той же критической волной обладает и волна E_{11} (точнее — две волны E_{11}, отличающиеся друг от друга поворотом на 90°). Это вырождение является следствием известного соотношения теории бесселевых функций

$$J_0'(x) = -J_1(x), \tag{42.22}$$

благодаря которому мы имеем

$$\mu_{0n} = \nu_{1n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{42.23}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Волна E_{11} в круглом волноводе имеет функцию П, равную

$$\Pi = CJ_1(gr)\cos\varphi, \qquad (42.24)$$

где поперечное волновое число g определяется формулой (42.21). Линии уровня этой функции изображены на рис. 40. Картину этих линий легко построить, если учесть, что на горизонтальном диаметре, т. е. при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, при $gr = \mu_{11} < ga$ достигается согласно рис. 37,*б* максимум и минимум функции П, вблизи которых линии уровня имеют эллиптическую форму. Кроме того, вертикальный диаметр также является линией уровня, так как $\Pi = 0$ при $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. Эти линии уровня дают магнитные силовые линии (пунктир), а электрические линии, им ортогональные, изображены на рис. 40 сплошными кривыми. Картина силовых линий волны E_{11} в круглом волноводе напоминает двухпроводную экранированную линию.

Вырождение собственного значения (42.21), соответствующего волне H_{01}, делает проблему передачи энергии с помощью такой волны довольно трудной, так как при небольших возмущениях формы волновода волна H_{01} имеет тенденцию превращаться в волну E_{11}, обладающую той же фазовой скоростью, но гораздо бóльшим затуханием.

§ 43. О волноводах сложной формы

Изучив электромагнитные волны в волноводах простейшей формы (круглом и прямоугольном), мы убедились, что критические длины волн для этих волноводов оказываются того же порядка, что и наибольший поперечный размер волновода. Сказанное относится к простейшим электромагнитным волнам в волноводе, имеющим наибольшие длины волн; волны с более высокими номерами имеют более короткие критические длины волн.

Действительно, по формуле (41.21) значение λ_0 для волны H_{10} в прямоугольном волноводе вдвое превышает наибольшую сторону волновода. Согласно § 42 значение λ_0 для волны H_{11} в круглом волноводе в 1,71 раз превышает диаметр волновода. Однако не нужно думать, что эта закономерность является общей и имеет место для волноводов любой формы. Легко показать, что выбирая форму поперечного сечения волновода надлежащим образом, можно добиться такого значения λ_0 для этого

Электронное наследие России

волновода, которое будет во много раз превосходить его поперечные габариты.

Чтобы разобраться в этом, рассмотрим (рис. 41,*а*) прямоугольный волновод с очень малой стороной b. Поскольку значение λ_0 для волны H_{10} в таком волноводе не зависит от стороны b, оно по-прежнему будет определяться формулой (41.21). Если теперь „свернуть" такой волновод по спирали (рис. 41,*в*) или по ломаной линии (рис. 41,*б*), то в первом приближении критическая длина волны будет по-прежнему равна удвоенной длине спирали или ломаной линии и будет гораздо больше наибольшего поперечного размера такого „свернутого волновода".

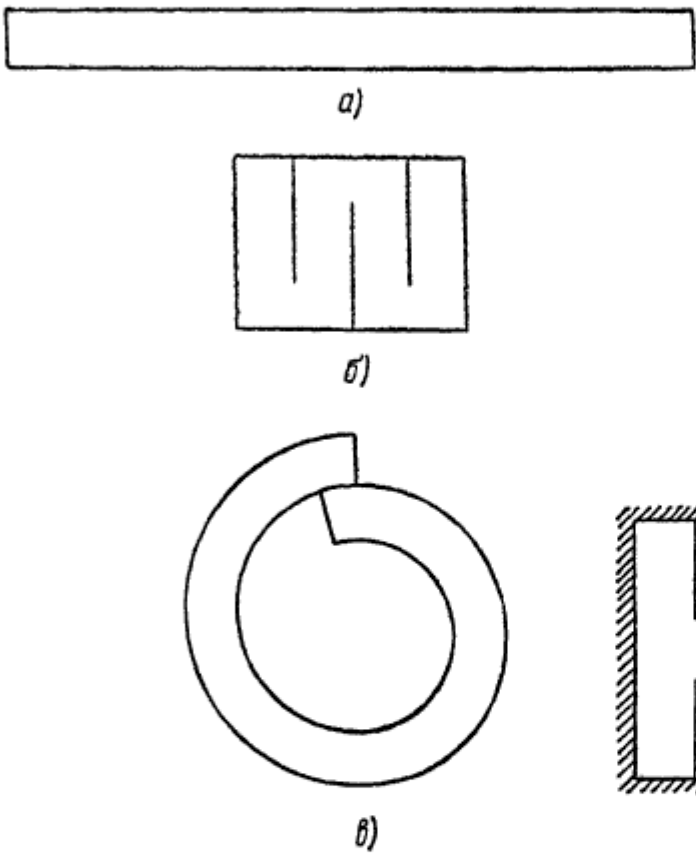


Рис. 41. Свернутые волноводы.

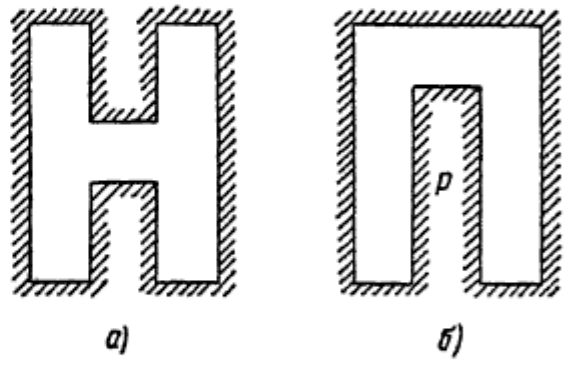


Рис. 42. Н-образный и П-образный волноводы.

Тем же свойством обладают так называемые Н-волноводы и П-волноводы, поперечные сечения которых напоминают очертания букв Н и П (рис. 42,*а* и 42,*б*). Можно себе представить, что П-волновод получается из обычного прямоугольного волновода добавлением металлической пластины P. Благодаря наличию этой пластины поле волны H_{10} в прямоугольном волноводе искажается. Как показывают расчеты, электрическое и магнитное поля концентрируются вблизи конца пластины в тем большей степени, чем меньше зазор между пластиной и верхней стенкой волновода. Если этот зазор весьма мал, то распределение электромагнитного поля в такой системе становится весьма похожим на картину поля поперечной волны в

ЭБ "Научное наследие России"

двухпроводной линии, одним из „проводов" которой является пластина, а другим „проводом" — верхняя стенка волновода. Критическая длина волны в этом случае значительно превышает поперечные размеры П-волновода. То же самое можно сказать о Н-волноводе.

Таким образом, через волноводы сложной формы можно передавать более длинные волны, чем через простые волноводы с теми же поперечными габаритами. Необходимость в волноводах сложной формы возникает лишь в особых случаях, так как обычно для передачи более длинных волн целесообразнее использовать коаксиальные или двухпроводные линии.

§ 44. Распространяющиеся и затухающие волны в волноводах

Рассмотрим более подробно физические свойства распространяющихся и затухающих волн в волноводах различной формы. Для этого прежде всего изучим энергетические свойства этих волн. Комплексная мощность, переносимая данным электромагнитным полем через поперечное сечение волновода, определяется интегралом

$$\overset{к}{\Sigma} = \iint\limits_{S_p} S_z^к \, dxdy, \tag{44.01}$$

взятым по поперечному сечению волновода S_p. Подынтегральное выражение равно

$$S_z^к = \frac{c}{8\pi}(E_x H_y^* - E_y H_x^*). \tag{44.02}$$

Оно является продольной составляющей комплексного вектора Умова—Пойнтинга

$$\mathbf{S}^к = \frac{c}{8\pi}[\mathbf{EH}^*], \tag{44.03}$$

введенного в § 6.

Вычислим составляющую $S_z^к$ для распространяющихся электрических и магнитных волн, поля которых определяются формулами (39.06) и (40.02) при вещественных

ЭБ "Научное наследие России"

значениях h. Для обоих типов волн мы получаем сходные формулы:

для электрических волн

$$S_z^{\text{к}} = \frac{c}{8\pi} hk \left(\left| \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right|^2 \right), \qquad (44.04)$$

для магнитных волн

$$S_z^{\text{к}} = \frac{c}{8\pi} hk \left(\left| \frac{\partial \Pi'}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi'}{\partial y} \right|^2 \right). \qquad (44.05)$$

Таким образом, распространяющиеся волны переносят лишь активную мощность, причем в том направлении, в котором они сами распространяются: волны, распространяющиеся в направлении $+z$ ($h > 0$), переносят активную мощность вдоль оси z ($S_z^{\text{к}} > 0$), а волны, распространяющиеся в направлении $-z$ ($h < 0$), несут энергию в направлении $-z$. Мощность, переносимая распространяющейся волной, не зависит от z, поскольку амплитуда волны при ее распространении остается постоянной.

Производя то же вычисление для затухающих волн (т. е. при чисто мнимых значениях h), мы получаем

для электрических волн

$$S_z^{\text{к}} = \frac{c}{8\pi} hk \left(\left| \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right|^2 \right) e^{2ihz}, \qquad (44.06)$$

и для магнитных волн

$$S_z^{\text{к}} = \frac{c}{8\pi} h^* k \left(\left| \frac{\partial \Pi'}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi'}{\partial y} \right|^2 \right) e^{2ihz}. \qquad (44.07)$$

Из этих формул видно, что затухающие волны переносят лишь реактивную мощность, причем величина этой мощности зависит от z экспоненциально, так что по мере затухания волны происходит и уменьшение переносимой ею реактивной мощности.

Рассмотрим, например, диполь, возбуждающий электромагнитное поле в волноводе (рис. 43). Вдали от него будут распространяться волны, например, в прямоугольном волноводе — волна H_{10}, имеющая простейшую структуру. Вблизи же, так сказать в „ближней“ зоне диполя, поле имеет более сложную структуру, напоминающую структуру его квазистационарного поля в свободном пространстве. В этой области имеют значение затухающие волны, возбуждаемые диполем и переносящие лишь реактивную мощность.

ЭБ "Научное наследие России"

Можно показать, что благодаря ортогональности различных волн в волноводе (см. далее § 79) комплексная мощность, переносимая суммой распространяющихся и затухающих волн одного и того же направления (например, распространяющихся и затухающих в положительном на-

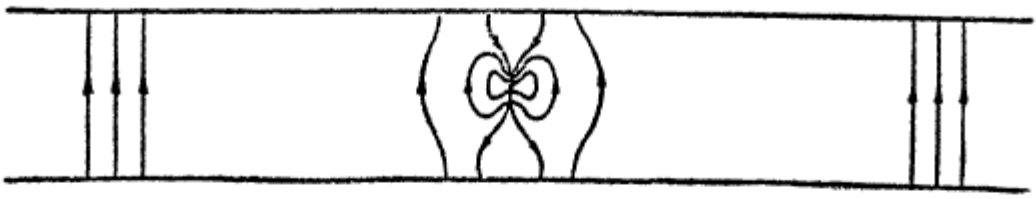


Рис. 43. Диполь в бесконечном волноводе.

правлении оси z) равна сумме мощностей, переносимых каждой волной в отдельности. В данном выше примере реактивная мощность излучения диполя обусловлена всеми затухающими волнами, а активная мощность излучения — волнами, распространяющимися от диполя. Если частота

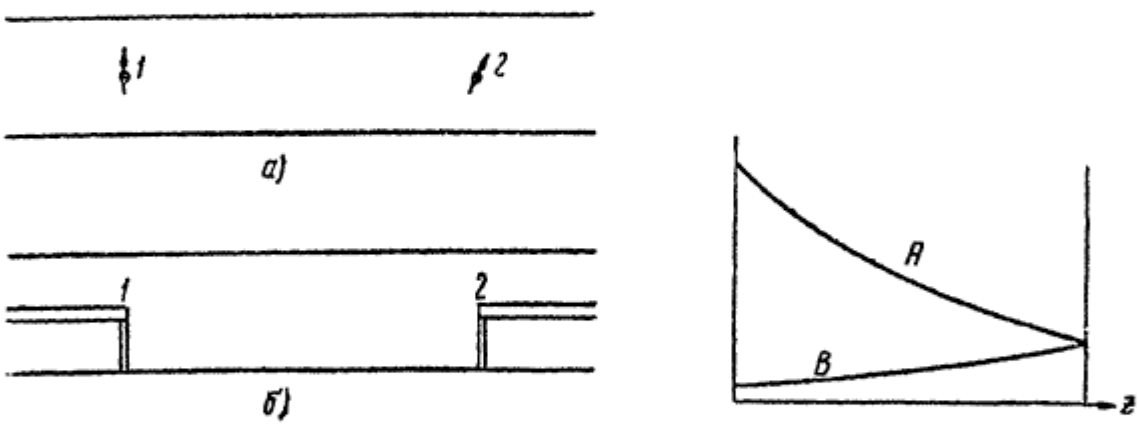


Рис. 44. Передача мощности по волноводу при отсутствии распространяющихся волн.

такова, что распространяющихся волн нет, то диполь не может сообщать активной мощности бесконечному волноводу.

Последний вывод относится лишь к бесконечному идеально проводящему волноводу, в котором отсутствуют какие-либо устройства, способные потреблять электромагнитную энергию. Если же, например, на конечном расстоянии от излучающего диполя *1* находится приемный диполь *2* (рис. 44,*а*), то даже при отсутствии распространяющихся волн в месте нахождения приемного диполя возбуждается слабое электромагнитное поле, обусловленное затухающими волнами. Приемный диполь извлекает из этого поля небольшую активную мощность.

ное наследие России"

Описанная схема является в сущности простейшим примером волноводного аттенюатора (ослабителя). Обычная конструкция волноводного ослабителя состоит из двух линий передачи (например, коаксиальных, как на рис. 44,*б*), разделенных отрезком волновода. Характерное для волноводного ослабителя явление переноса активной мощности затухающими волнами не находится в противоречии со сказанным выше, поскольку ранее мы говорили о волнах, затухающих в одном направлении и возбуждаемых, например, диполем в бесконечном волноводе. Если же мы имеем второй (приемный) диполь, то он также возбуждает затухающие волны, и в отрезке волновода между двумя диполями существуют две затухающие волны (рис. 44,*в*): „прямая" затухающая волна A и „обратная" затухающая волна B. Такое поле способно переносить некоторую активную мощность, как нетрудно показать аналитически. В самом деле, если рассмотреть сумму прямой и обратной электрических волн, т. е. вместо выражения (39.01) взять

$$\Pi_z = \Pi(x, y)(e^{ihz} + Re^{-ihz}), \tag{44.08}$$

где R — коэффициент отражения данной волны, то поперечные составляющие электромагнитного поля равны

$$\left.\begin{aligned} E_x &= ih\frac{\partial \Pi}{\partial x}(e^{ihz} - Re^{-ihz});\ H_x = -ik\frac{\partial \Pi}{\partial y}(e^{ihz} + Re^{ihz});\\ E_y &= ih\frac{\partial \Pi}{\partial y}(e^{ihz} - Re^{-ihz});\ H_y = ik\frac{\partial \Pi}{\partial x}(e^{ihz} + Re^{-ihz}) \end{aligned}\right\} \tag{44.09}$$

и продольная составляющая комплексного вектора Умова—Пойнтинга получается равной

$$S_z^{к} = \frac{c}{8\pi} hk\left(\left|\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right|^2\right) \times$$

$$\times (e^{ihz} - Re^{-ihz})(e^{-ih^* z} + Re^{ih^* z}). \tag{44.10}$$

Для магнитной волны получаем аналогичные выражения: если

$$\Pi'_z = \Pi'(x, y)(e^{ihz} + Re^{-ihz}), \tag{44.11}$$

ЭБ "Научное наследие России"

то

$$E_x = ik\frac{\partial \Pi'}{\partial y}(e^{ihz} + Re^{-ihz});\quad H_x = ih\frac{\partial \Pi'}{\partial x}(e^{ihz} - Re^{-ihz});$$
$$E_y = -ik\frac{\partial \Pi'}{\partial x}(e^{ihz} + Re^{-ihz});\quad H_y = ih\frac{\partial \Pi'}{\partial y}(e^{ihz} - Re^{-ihz}) \Bigg\} \quad (44.12)$$

и

$$S_z^{\text{к}} = \frac{c}{8\pi} h^* k \left(\left|\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right|^2 \right) \times$$
$$\times (e^{ihz} + Re^{-ihz})(e^{-ih^*z} - R^* e^{ih^*z}). \quad (44.13)$$

Если данные волны затухают, то волновое число h—мнимое, и из формулы (44.10) получаем

$$\mathrm{Re} S_z^{\text{к}} = \frac{c}{4\pi} k \left(\left|\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right|^2 \right) \mathrm{Im}\, h\, \mathrm{Im}\, R. \quad (44.14)$$

Аналогичное выражение получаем (с заменой Π на Π') и для магнитной волны. Таким образом, при наличии прямой и обратной („отраженной“) затухающих волн по волноводу может передаваться активная мощность.

Возвращаясь к волноводам, в которых при данной частоте имеются распространяющиеся волны, мы можем сказать, что распространяющиеся волны определяют электромагнитное поле в „дальней зоне“ излучателя, где затухающими волнами уже можно пренебречь, так как они существенны лишь в ближней зоне излучателя. Интересно отметить, что в большинстве случаев переход от ближней зоны к дальней в волноводе происходит, как и для диполя в свободном пространстве, на расстояниях порядка длины волны; при этом под „длиной волны“ подразумевается длина волны Λ в волноводе. Действительно, размеры волновода на практике выбираются обычно так, чтобы при данной частоте в нем могла распространяться только одна волна, имеющая поперечное волновое число g_1, продольное волновое число $h_1 = \sqrt{k^2 - g_1^2}$ и длину волны $\Lambda = \frac{2\pi}{h_1}$ (в прямоугольном волноводе это есть волна H_{10}, ср. § 41). Все другие волны являются затухающими, причем наименьшим затуханием обладает волна с наименьшим (после g_1) значением g_2 поперечного волнового числа; продольное волновое число этой волны равно $h_2 = \sqrt{k^2 - g_2^2}$

и ее коэффициент затухания равен $|h_2| = \sqrt{g_2^2 - k^2}$. Так как волновое число k обычно лежит вблизи середины интервала

$$g_1 < k < g_2, \tag{44.15}$$

то коэффициент затухания $|h_2|$ имеет тот же порядок, что и волновое число h_1. Поэтому экспонента $e^{-|h_2|z}$, определяющая зависимость этой затухающей волны от z, становится весьма малой уже при $z \sim \Lambda$, где

$$|h_2| z \sim \frac{|h_2|}{h_1} 2\pi \sim 2\pi. \tag{44.16}$$

Эти рассуждения применимы не только к затухающим волнам, возбуждаемым диполем, но и к затухающим волнам, возникающим в местах, где нарушается однородность волновода, например находятся пассивные вибраторы (стержни), диафрагмы, различные расширения или изгибы волноводов и т. п. В таких местах всегда возникают затухающие волны, обусловливающие сложную структуру электромагнитного поля в непосредственной окрестности этих мест, или, иначе говоря, в соответствующих „ближних зонах“.

В заключение остановимся на вопросе о том, в какой мере можно рассматривать волновод (или другую передающую линию, не подчиняющуюся телеграфному уравнению) с помощью понятия „эквивалентной линии“. Сходство между волноводами и длинными линиями, рассмотренными в гл. V и VI, заключается в том, что оба типа линий передачи работают обычно в „одноволновом“ режиме, т. е. в рабочем диапазоне частот вдоль этих линий может распространяться и эффективно переносить энергию только одна волна. При наличии неоднородностей в волноводе (например, нагрузок, разветвлений, расширений, изгибов и т. д.) вблизи каждой неоднородности возникают „ближние“ поля и затухающие волны, однако вдали от неоднородности поле всегда представляется в виде суммы прямой и обратной распространяющейся волны. Для данного типа неоднородности всегда можно подобрать „эквивалентную схему“, имеющую *при данной частоте* те же соотношения между прямыми и обратными распространяющимися волнами, что и реальная волноводная система. Пример такой эквивалентной схемы будет дан далее (рис. 45). При этом, однако, нужно иметь в виду следующие обстоятель-

ЭБ "Научное наследие России"

ства. Во-первых, эквивалентную схему можно построить лишь в случае, когда известно решение волноводной задачи, т. е. когда с помощью электродинамических методов вычислены (или же измерены на опыте) коэффициенты отражения и прохождения или другие величины, характеризующие распространяющиеся волны в реальной волноводной системе. Иначе говоря, эквивалентная схема служит не для решения электродинамической задачи, а является одним из способов представления готового решения, полученного другим методом. Во-вторых, эквивалентная схема годится лишь для представления поля в „дальней зоне" и может давать совершенно ошибочные результаты для „ближней зоны".

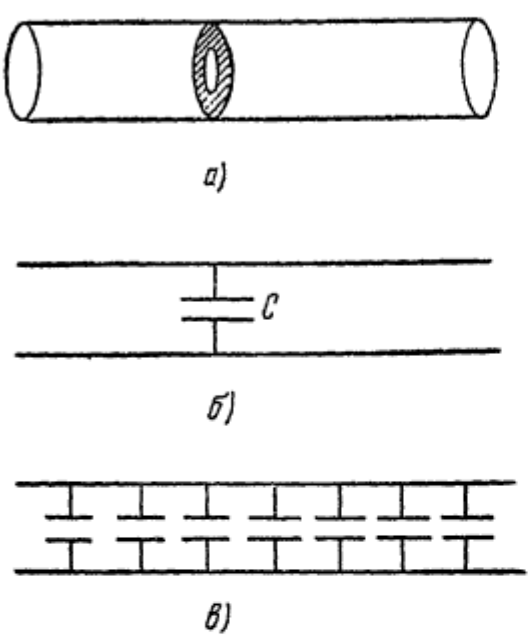


Рис. 45. Об эквивалентных схемах в волноводных задачах.

Сказанное можно пояснить таким примером. Пусть в круглом волноводе с поперечной диафрагмой (рис. 45, *а*) распространяется симметричная электрическая волна E_{01}. Если волны E_{02}, E_{03}, . . . при данной частоте являются затухающими, то эквивалентная схема такого волновода определяется рис. 44, *б*. Можно показать, что коэффициент отражения волны E_{01} от диафрагмы и коэффициент ее прохождения за диафрагму будут совпадать с соответствующими коэффициентами волны в „эквивалентной линии", показанной на рис. 45, *б*, при надлежащем соотношении между емкостью C и волновым сопротивлением линии. Параметр C является функцией частоты, которую можно найти в результате электродинамического исследования. В данном случае несущественно, что помимо волны E_{01} в волноводе может распространяться волна H_{11}, поскольку последняя не возбуждается при падении волны E_{01} на симметричную диафрагму.

Однако эквивалентная схема на рис. 45, *б* относится лишь к „дальнему" полю. Это выражается в том, что если мы имеем диафрагмированный волновод (см. рис. 78) с достаточно часто расположенными диафрагмами, то эквивалентная схема, изображенная на рис. 45, *в*, не охватывает свойств такого волновода и его приходится рас-

...ческое наследие России"

считывать электродинамически (ср. § 68). Эквивалентная схема рис. 45, *в* применима лишь, если диафрагмы находятся так далеко друг от друга, что затухающие волны от одной диафрагмы не доходят до соседних диафрагм.

Большое количество решений электродинамических задач, относящихся к волноводам и представленных в виде эквивалентных схем, читатель может найти в „Справочнике по волноводам".

§ 45. Волноводные свойства коаксиальных линий

В коаксиальной линии, т. е. в пространстве между двумя коаксиальными проводниками с радиусами a и b (рис. 24), существуют „волноводные" волны электрического и магнитного типа. Электрические волны в коаксиальной линии получаются по формулам (39.06) из функции Π, удовлетворяющей уравнению (42.01). Для коаксиальной линии решение этого уравнения нужно брать не в виде (42.02) или (42.03), а в более общем виде:

$$\Pi = [CJ_m(gr) + DN_m(gr)]\cos m\varphi \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{45.01}$$

или

$$\Pi = [CJ_m(gr) + DN_m(gr)]\sin m\varphi \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{45.02}$$

так как сейчас нас интересует решение волнового уравнения в кольцеобразной области

$$a < r < b, \tag{45.03}$$

где обе функции $J_m(gr)$ и $N_m(gr)$ принимают конечные значения. Функция Π должна удовлетворять граничным условиям

$$\Pi = 0 \text{ при } r = a \text{ и } r = b, \tag{45.04}$$

что приводит нас к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} CJ_m(ga) + DN_m(ga) &= 0, \\ CJ_m(gb) + DN_m(gb) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{45.05}$$

имеющим нетривиальное решение лишь в случае, когда поперечное волновое число g удовлетворяет уравнению

$$J_m(ga)\,N(gb) - J_m(gb)\;N_m(ga) = 0. \tag{45.06}$$

В результате решения этого трансцендентного уравнения определяются поперечные волновые числа и критические

ЭБ "Научное наследие России"

длины электрических волн E_{mn} в коаксиальной линии [m есть азимутальный индекс, а n означает номер корня уравнения (45.06) при данном m].

Исследование магнитных волн в коаксиальной линии производится таким же путем. Функция Π' для магнитных волн также записывается в виде (45.01) или (45.02), и граничные условия

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial r} = 0 \text{ при } r = a \text{ и } r = b \tag{45.07}$$

приводят нас к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} CJ'_m(ga) + DN'_m(ga) &= 0, \\ CJ'_m(gb) + DN'_m(gb) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{45.08}$$

имеющим нетривиальное решение ($C \neq 0$ или $D \neq 0$) лишь при условии, что g является корнем уравнения

$$J'_m(ga)\,N'_m(gb) - J'_m(gb)\,N'_m(ga) = 0. \tag{45.09}$$

Последнее уравнение определяет поперечные волновые числа магнитных волн H_{mn} в коаксиальной линии.

Мы не будем производить детального численного исследования уравнений (45.06) и (45.09), поскольку получающиеся из них электрические и магнитные волны не находят практического применения для передачи электромагнитной энергии по коаксиальной линии. Приведем лишь приближенные формулы для простейших волноводных волн. Наибольшей критической длиной волны обладает магнитная волна H_{11}, у которой

$$\lambda_0 \approx \pi(a+b) \tag{45.10}$$

и таким образом на средней окружности радиуса $\frac{a+b}{2}$ как раз укладывается критическая волна. Следующей по величине критической длиной волны обладает волна E_{01}, у которой

$$\lambda_0 \approx 2(b-a), \tag{45.11}$$

т. е. на зазоре между проводниками (шириной $b-a$) укладывается половина критической волны. Волна H_{01} имеет критическую длину волны, близкую к (45.11). Остальные волноводные волны коаксиальной линии имеют еще меньшие критические длины волн.

...ое наследие России"

В § 29 мы показали, что в коаксиальных линиях существует еще поперечная электромагнитная волна, при всех частотах распространяющаяся со скоростью c (в идеально проводящей линии). Эта поперечная волна имеет основное значение для передачи электромагнитной энергии по коаксиальной линии. Расчет передающих линий типа коаксиальной линии производится обычно с помощью телеграфных уравнений, позволяющих рассмотреть неоднородные линии, линии с различными оконечными нагрузками и т. д. Необходимо подчеркнуть, что телеграфные уравнения учитывают лишь поперечную волну в линии, а наличие волн волноводного типа телеграфные уравнения в расчет не принимают: это видно, в частности, из того, что телеграфные уравнения для однородной линии определяют только одну волну с волновым числом $\pm k$ (для идеально проводящей линии с воздушным заполнением).

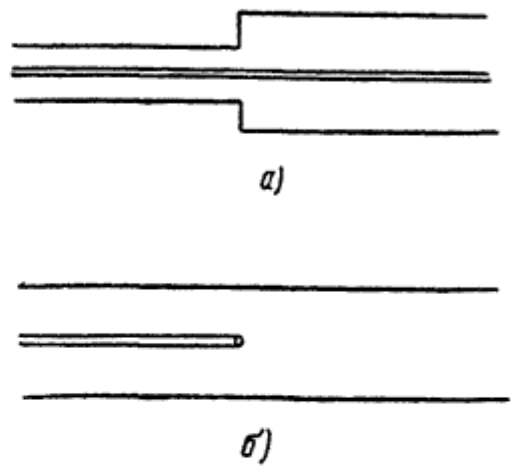


Рис. 46. Стык двух линий передачи:

а — двух коаксиальных линий с различными волновыми сопротивлениями; *б* — коаксиальной линии и волновода.

На самом деле волноводные волны присутствуют в коаксиальной линии вблизи всех мест, где нарушается однородность коаксиальной линии. Если рассмотреть, например, сочленение одной коаксиальной линии с другой линией большего радиуса b (рис. 46, *а*), то вблизи плоскости сочленения линии электрического поля не могут идти по радиусам, как в однородной линии, так как они должны быть перпендикулярны поперечной стенке в месте „стыка". Вследствие этого электромагнитное поле вблизи сочленения имеет сложную структуру, связанную с наличием затухающих волноводных волн в „ближней" зоне данной неоднородности. С подобным же явлением мы столкнулись при рассмотрении волноводов, где протяженность „ближней" зоны по порядку величины была равна λ. Оценим протяженность „ближней" зоны в коаксиальных линиях при условии

$$kb \ll 1, \tag{45.12}$$

которое мы формулировали в § 36. Это условие приводит к тому, что все волноводные волны будут сильно затухать,

ЭБ "Научное наследие России"

так как в выражении для продольных волновых чисел этих волн

$$h = \sqrt{k^2 - g^2} \tag{45.13}$$

первое слагаемое под знаком радикала во много раз меньше второго слагаемого. Действительно, по формулам (45.10) и (45.11) величина g имеет порядок $\frac{2}{b}$ (или больше) и поэтому для всех волноводных волн можно считать

$$h \approx ig \sim \frac{2i}{b}. \tag{45.14}$$

Отсюда видно, что при условии (45.12) протяженность ближней зоны в коаксиальных линиях по порядку величины равна b, т. е. поперечному размеру коаксиальной линии, и во много раз меньше длины волны λ. Таким образом, волноводные волны успевают затухнуть на таких расстояниях от плоскости сочленения волноводов на рис. 46, *а*, где распространяющаяся волна еще сохраняет практически ту же фазу, что и на самой плоскости сочленения. Поэтому телеграфные уравнения позволяют решить задачу об отражении поперечной волны от стыка двух коаксиальных линий, не прибегая к рассмотрению волноводных волн, и дают результаты, близкие к истине. При расчетах других типов неоднородностей в коаксиальных линиях телеграфные уравнения также дают правильные результаты, если выполняется условие (45.12). Если же это условие не выполняется, то по формуле (45.13) коэффициент затухания волноводных волн получается меньшим, протяженность „ближней" зоны растет, и вследствие этого при анализе различных неоднородностей необходимо принимать во внимание волноводные волны. В этом случае телеграфные уравнения становятся неприменимыми. Если же хотя бы одна из этих волн распространяется, то непригодность телеграфных уравнений становится очевидной, поскольку в этом случае волноводная волна способна переносить электромагнитную энергию на равных правах с поперечной волной.

Приведенные выше соображения поясняют, почему коэффициент отражения от стыка двух волноводов, или от стыка волновода и коаксиальной линии (рис. 46,*б*), не может быть рассчитан по формуле

$$R = \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}, \tag{45.15}$$

Электронное наследие России

выводимой с помощью телеграфных уравнений (W_1 и W_2 суть волновые сопротивления линий, изображенных на рис. 46). Действительно, строгий расчет системы, изображенной на рис. 46, *б*, приводит к простой формуле для коэффициента отражения

$$|R| = \frac{k-h}{k+h}, \tag{45.16}$$

пригодной при условии, что в круглом волноводе может распространяться только волна E_{01} с волновым числом h, а в коаксиальной линии — только поперечная волна. Так как волновое сопротивление коаксиальной линии определяется формулой (33.21), то формула (45.16) никак не может быть истолкована в духе формулы (45.15).

Этот пример показывает, что проблемы, связанные с расчетом неоднородностей в волноводах, не могут быть решены с помощью применения к волноводам представлений, дающих правильные результаты для обычных длинных линий. Основное отличие волноводов заключается в большей протяженности их ближней зоны, что приводит к необходимости учета затухающих волн вблизи неоднородности. Теория длинных линий может быть использована лишь для формального представления „дальнего поля" в волноводах (ср. конец § 44).

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА VIII

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

§ 46. Фазовая и групповая скорости

Теория распространения электромагнитных волн в волноводе (гл. VII) для электрического и магнитного поля каждой волны дает следующие выражения

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 e^{ihz}; \quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0 e^{ihz}, \tag{46.01}$$

где векторы $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ не зависят от координаты z вдоль волновода, а h есть волновое число распространяющейся волны. Переходя к мгновенным значениям электрического и магнитного полей по формулам (2.01), мы получим

$$\mathbf{E}(t)=\mathrm{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i(hz-\omega t)}\}; \quad \mathbf{H}(t)=\mathrm{Re}\{\mathbf{H}_0 e^{i(hz-\omega t)}\}. \tag{46.02}$$

В таком же виде можно представить монохроматические волны, распространяющиеся вдоль передающих линий других типов, в однородной среде (гл. II) и т. д. Такие волны (при вещественном h) распространяются со скоростью

$$u=\frac{\omega}{h}, \tag{46.03}$$

которая называется фазовой скоростью данной монохроматической волны (ср. § 11).

Передача *сигналов* с помощью монохроматической волны невозможна в силу ее однородности в пространстве и во времени, поэтому сигнал всегда имеет некоторый *спектр* частот. Он распространяется со скоростью, вообще говоря, отличной от u. Примем сначала, что передаваемый сигнал имеет дискретный спектр, как на рис. 47, *а* (такой спектр имеет, например, периодическая последовательность радиоимпульсов). Результирующее электромаг-

Электронное наследие России

нитное поле, являющееся наложением монохроматических волн с частотами ω_0, ω_1, ω_2, ..., можно в этом случае записать в виде

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{i(h_0 z - \omega_0 t)} + \mathbf{E}_1 e^{i(h_1 z - \omega_1 t)} + \mathbf{E}_2 e^{i(h_2 z - \omega_2 t)} + \ldots\right\} \tag{46.04}$$

или

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{F} e^{i(h_0 z - \omega_0 t)}\right\}, \tag{46.05}$$

где величина $\mathbf{F}$ равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 e^{i[(h_1 - h_0) z - (\omega_1 - \omega_0) t]} + \mathbf{E}_2 e^{i[(h_2 - h_0) z - (\omega_2 - \omega_0) t]} + \ldots \tag{46.06}$$

Вектор $\mathbf{F}$ можно назвать комплексной огибающей высокочастотного сигнала в пространстве и во времени. В самом деле, для любой декартовой составляющей вектора $\mathbf{E}(t)$ или для любой скалярной функции $E(t)$ формулу (46.05) можно переписать в виде

$$E(t) = \mathrm{Re}\left\{F e^{i(h_0 z - \omega_0 t)}\right\}. \tag{46.07}$$

Вводя абсолютную величину A и фазу φ комплексной функции F

$$F = A e^{i\varphi}, \tag{46.08}$$

мы будем иметь

$$E(t) = A\cos(h_0 z - \omega_0 t + \varphi), \tag{46.09}$$

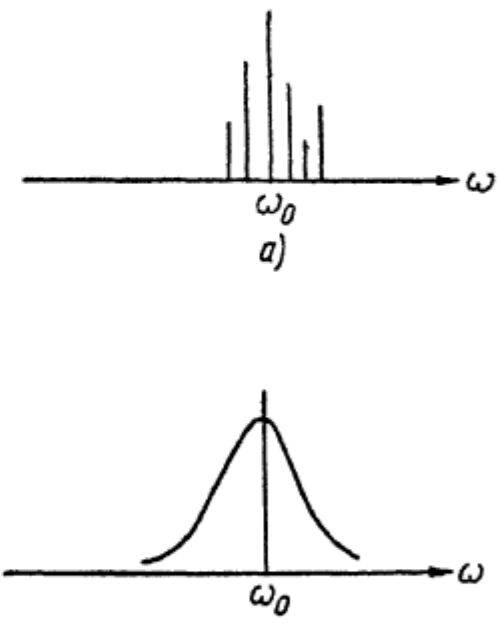


Рис. 47. Спектры сигналов:
а — дискретный спектр; *б* — непрерывный спектр.

т. е. обычное выражение для высокочастотного колебания[1] огибающей A, высокочастотной фазой $h_0 z - \omega_0 t$ и медленно меняющейся дополнительной фазой φ.

При достаточно узком спектре сигнала все разности $\omega_1 - \omega_0$, $h_1 - h_0$ и т. д. малы, поэтому функция $\mathbf{F}$ является медленно меняющейся по сравнению со вторым множите-

[1] Амплитудная модуляция изменяет огибающую A, частотная (или фазовая) модуляция — фазу φ. Во всех случаях информацию переносит комплексная огибающая (46.08).

ЭБ "Научное наследие России"

лем в фигурной скобке формулы (46.05), дающим распространение монохроматической волны с несущей частотой ω_0. Величину $\mathbf{F}$ можно также переписать в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 e^{i(h_1-h_0)\left[z-\frac{\omega_1-\omega_0}{h_1-h_0}t\right]} + \mathbf{E}_2 e^{i(h_2-h_0)\left[z-\frac{\omega_2-\omega_0}{h_2-h_0}t\right]} + \ldots \tag{46.10}$$

Пользуясь узостью диапазона частот, в последней формуле можно положить

$$\frac{\omega_1-\omega_0}{h_1-h_0} = \frac{\omega_2-\omega_0}{h_2-h_0} = \ldots = \frac{d\omega}{dh} = v, \tag{46.11}$$

и величина $\mathbf{F}$ оказывается равной

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 e^{i(h_1-h_0)(z-vt)} + \mathbf{E}_2 e^{i(h_2-h_0)(z-vt)} + \ldots = \mathbf{F}_1(z-vt), \tag{46.12}$$

где v есть так называемая групповая скорость, определяемая формулой

$$v = \frac{d\omega}{dh}, \tag{46.13}$$

в которой производная берется при $\omega = \omega_0 (h = h_0)$. Термин „групповая скорость“ объясняется тем, что рассматриваемый нами сигнал (46.04) с узким спектром частот называется „группой волн“ или квазимонохроматической группой; последнее название подчеркивает узость спектрального состава данного сигнала. Групповую скорость можно также назвать скоростью распространения огибающей сигнала или просто скоростью сигнала, поскольку вся информация передается комплексной огибающей, а не высокочастотным заполнением.

Заметим, что в механике скорость материальной точки определяется единственным образом, а при анализе волновых процессов приходится вводить фазовую и групповую скорости, а также ряд других скоростей (см. далее). Это объясняется тем, что при наличии дисперсии отдельные монохроматические волны, входящие в состав сигналов, распространяются в общем случае с различными фазовыми скоростями, и вследствие этого форма сигнала при его распространении искажается. По этой причине мы получаем различные значения скоростей в зависимости от того, за каким признаком сигнала следим при его перемещении.

Электронное наследие России

Сигнал полностью сохраняет свою форму лишь при отсутствии дисперсии, когда u не зависит от частоты

$$\omega = uh, \quad u = \text{const}. \tag{46.14}$$

Тогда мы имеем соотношение

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{h_1 - h_0} = \frac{\omega_2 - \omega_0}{h_2 - h_0} = \ldots = \frac{d\omega}{dh} = v = u = \text{const} \tag{46.15}$$

для сигнала любого спектрального состава. В этом случае форма волны не изменяется при ее распространении, и все скорости совпадают. Однако строгое отсутствие дисперсии имеет место лишь для волн, распространяющихся в пустоте; их скорость равна c независимо от формы.

Выше мы показали, что при отсутствии дисперсии, т. е. при $u = \text{const}$, всегда имеем $u = v$. Наоборот, равенство $u = v$ влечет за собой дифференциальное уравнение $\frac{d\omega}{dh} = \frac{\omega}{h}$, имеющее единственное решение (46.14). Таким образом, совпадение фазовой и групповой скорости при всех частотах есть необходимый и достаточный признак отсутствия дисперсии ($u = \text{const}$).

Отметим также, что групповая скорость лишь приближенно характеризует распространение сигнала. Дело в том, что к понятию групповой скорости и формуле (46.12) мы пришли, заменяя отношение приращений $\frac{\omega_1 - \omega_0}{h_1 - h_0}$, $\frac{\omega_2 - \omega_0}{h_2 - h_0}$ и т. д. значениями производной $\frac{d\omega}{dh}$ по формуле (46.11). На самом деле, эти отношения слегка отличаются друг от друга; так как они умножаются в формуле (46.10) на t, то при достаточно больших t точная функция (46.10) будет заметно отличаться от приближенной функции (46.12). Это значит, что для таких больших периодов движения сигнала его огибающая уже не перемещается по формуле (46.12) со скоростью v „как единое целое“, а происходит деформация сигнала, сигнал „расплывается“. Чем меньше спектральный диапазон сигнала, тем его деформация происходит медленнее, так как с тем большей точностью применимы соотношения (46.11). Понятие групповой скорости применимо лишь для таких промежутков времени, в течение которых сигнал не успевает изменить своей формы.

Данный вывод формулы (46.13) относится к сигналу с дискретным спектром (рис. 47, *а*). Скорость распространения сигналов с непрерывным спектром (рис. 47, *б*), например скорость распространения одиночного высокочастотного импульса, по-прежнему определяется формулой (46.13). Однако при этом вместо ряда (46.04) нужно писать интеграл по частотам — интеграл Фурье [ср. формулы (2.18)]

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re} \int_0^\infty \mathbf{E}_\omega e^{i(hz-\omega t)} d\omega, \tag{46.16}$$

где вектор $\mathbf{E}_\omega$ зависит лишь от частоты ω и поперечных координат x и y, а

$$h = h(\omega). \tag{46.17}$$

Если сигнал имеет достаточно узкий спектр, т. е. если функция $\mathbf{E}_\omega$ практически отлична от нуля лишь при $\omega \approx \omega_0$, то интеграл (46.16) легко исследовать так же, как и ряд (46.04); а именно, мы заменяем при $\omega \approx \omega_0$ функцию (46.17) выражением

$$h = h_0 + \left(\frac{dh}{d\omega}\right)_0 (\omega - \omega_0) = h_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v} \tag{46.18}$$

и приходим к формуле (46.05), где комплексная огибающая $\mathbf{F}$ определяется интегралом

$$\mathbf{F} = \int_0^\infty \mathbf{E}_\omega e^{i(\omega-\omega_0)\left(\frac{z}{v}-t\right)} d\omega = \mathbf{F}(z - vt). \tag{46.19}$$

В данном случае комплексная огибающая $\mathbf{F}$ также является медленно меняющейся функцией и перемещается вдоль оси z с групповой скоростью v, а второй множитель в фигурной скобке (46.05) по-прежнему дает распространение фазы со скоростью $u = \frac{\omega_0}{h_0}$.

§ 47. Скорость волн в волноводе

Волновое число h распространяющейся волны в волноводе равно

$$h = \sqrt{k^2 - g^2}, \quad k > g, \tag{47.01}$$

Электронное наследие России

где $k=\frac{\omega}{c}$, а g от частоты не зависит. Ее фазовая скорость равна

$$u=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{g}{k}\right)^2}}. \qquad (47.02)$$

Она характеризует скорость распространения фазы в монохроматической волне, являющейся в пространстве (вдоль оси z) и во времени бесконечной синусоидой.

Фазовая скорость в волноводе по формуле (47.02) превосходит c. Этот результат не противоречит теории относительности, запрещающей передачу сигналов и движение тел со скоростью, превышающей скорость света. Действительно, с помощью монохроматической волны не может быть передан сигнал, несущий какую-либо информацию. Передача информации возможна лишь с помощью модулированных волн, т. е. волн, не являющихся монохроматическими. Например, периодическая последовательность радиолокационных импульсов, разделенных пустыми промежутками и распространяющихся в волноводе, несет информацию о расстоянии до объекта, от которого они отразились при своем распространении в свободном пространстве. Однако такая последовательность импульсов обладает определенным частотным спектром (см. рис. 47, *а*). Скорость распространения этих импульсов в волноводе определяется не фазовой скоростью u, а так называемой групповой скоростью

$$v=\frac{d\omega}{dh}, \qquad (47.03)$$

которую можно также назвать скоростью распространения огибающей.

Формула (47.03) является общей формулой, позволяющей рассчитывать скорость распространения сигнала в любой системе. Единственным условием применимости этой формулы является требование, чтобы спектр сигнала, схематически изображенный на рис. 47, был сосредоточен в достаточно малом диапазоне вблизи произвольной центральной частоты ω_0.

Вычисляя по формуле (47.03) групповую скорость электромагнитной волны в волноводе

$$v=\frac{1}{\left(\frac{dh}{d\omega}\right)}=\frac{c}{\left(\frac{dh}{dk}\right)}, \qquad (47.04)$$

Электронное наследие России

получаем

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{g}{k}\right)^2}. \qquad (47.05)$$

Таким образом, групповая скорость волн в волноводе оказывается, как это и следовало ожидать, всегда меньше c. Поскольку $u > v$, то относительно наблюдателя, движущегося вместе с огибающей (со скоростью v), синусоида высокочастотного заполнения будет двигаться вперед; при этом передние гребни синусоиды будут исчезать, доходя до передней границы сигнала, а задние гребни — возникать в „хвосте“ сигнала. Интересно, что фазовая и групповая скорости в волноводе удовлетворяют соотношению

$$uv = c^2. \qquad (47.06)$$

Физический смысл формул (47.02), (47.05) и (47.06) мы подробно рассмотрим в следующем параграфе.

Деформация сигнала при его распространении в волноводе приводит, в частности, к тому, что передний фронт любого сигнала (или, иначе говоря, бесконечно слабый „предвестник“ сигнала) теоретически всегда распространяется со скоростью c. Это объясняется тем, что в спектре сигнала с передним фронтом теоретически присутствуют сколь угодно высокие частоты, распространение которых по формулам (47.02) и (47.05) происходит со скоростью c; они распространяются вдоль оси волновода как в свободном пространстве.

Сказанное выше можно пояснить следующим образом. Если мы имеем сигнал, ограниченный во времени, например одиночный высокочастотный импульс с резко выраженным передним фронтом, то в его спектральном разложении (46.16) теоретически представлены все частоты вплоть до самых высоких; хотя, разумеется, функция $\mathbf{E}_\omega$ при $\omega \to \infty$ и стремится к нулю, но она обращается в нуль лишь при $\omega = \infty$. Поскольку согласно формуле (47.02) мы имеем

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{\omega}{h} = c, \qquad (47.07)$$

то при достаточно больших ω, например при $\omega > \omega_1 \gg \omega_0$, можем приближенно положить $h = \frac{\omega}{c}$, и тогда

$$\int_{\omega_1}^{\infty} \mathbf{E}_\omega e^{i(hz-\omega t)}\, d\omega \approx \int_{\omega_1}^{\infty} \mathbf{E}_\omega e^{i\omega\left(\frac{z}{c}-t\right)}\, d\omega = \mathbf{f}(z-ct). \qquad (47.08)$$

Научное наследие России

Поэтому в выражении для поля (46.16) имеется слагаемое, которое соответствует волне, распространяющейся со скоростью c и опережающей основной сигнал, бегущий со скоростью $v < c$. Это слагаемое будет однако весьма малым, поскольку при $\omega \gg \omega_0$ функция $\mathbf{E}_\omega$ принимает малые значения.

Таким образом, прямоугольный высокочастотный импульс в волноводе приобретает слабо выраженные „предвестники", уходящие от него по мере распространения (рис. 48). Нужно однако иметь в виду, что реальный приемник не воспринимает этих предвестников и не регистрирует приход сигнала по теоретическому переднему фро-

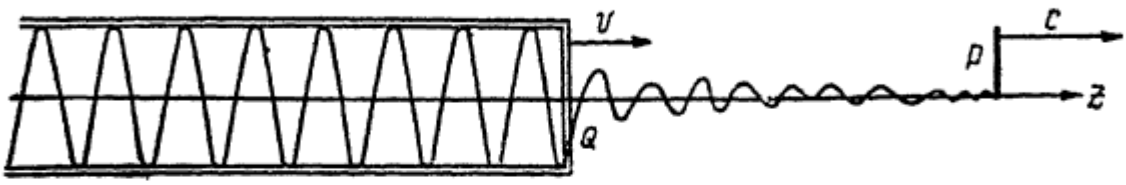


Рис. 48. Распространение радиоимпульса в волноводе.

ту P, перемещающемуся со скоростью c. Это объясняется не только тем, что предвестники обладают малой энергией, но также тем, что их частотный спектр лежит далеко от „рабочего диапазона", соответствующего основной энергии сигнала. Для создания сигнала с резко выраженным фронтом передатчик должен также работать в бесконечно широком диапазоне частот, чего обычно не бывает. Поэтому фактически регистрируется приход сигнала по „фронту огибающей" Q (рис. 48), перемещающейся с групповой скоростью v.

Можно показать, что передний фронт в любой диспергирующей среде также перемещается со скоростью c, поскольку волновое число h в любой реальной среде или в реальной линии передачи удовлетворяет соотношению (47.07).

Проведенное выше исследование движения фронта волны не является строгим с математической точки зрения. Для волноводов, т. е. для закона дисперсии (47.01), можно провести более строгое рассмотрение вопроса, если воспользоваться уравнением

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + g^2 U = 0, \qquad (47.09)$$

которому удовлетворяет каждая декартова компонента вектора (46.16); действительно, этому уравнению удовлетворяет функция

$$e^{i(hz-\omega t)} = e^{i\left(\sqrt{k^2-g^2}z-\omega t\right)},$$

а вследствие этого и весь интеграл (46.16).

ЭБ "Научное наследие России"

Фронтом волны в данный момент t называется такая плоскость $z = z(t)$, правее которой поле тождественно равно нулю ($U = 0$ вместе со всеми своими производными), а левее — отлично от нуля. Таким образом, при $z = z(t)$ поле терпит разрыв. Теория дифференциальных уравнений в частных производных исследует движение таких разрывов; при этом оказывается, что кривая с уравнением $z = z(t)$ должна быть так называемой характеристикой соответствующего дифференциального уравнения (47.09). Не останавливаясь на теории характеристик, отметим лишь, что характеристики уравнения (47.09) и соответствующего ему уравнения

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0, \tag{47.10}$$

в котором сохранены лишь старшие производные (производные второго порядка), совпадают. Уравнение (47.10) есть обычное волновое уравнение, или уравнение Даламбера. Известно, что его решения имеют вид волн, распространяющихся со скоростью c; с той же скоростью перемещаются и разрывы, соответствующие переднему фронту волн, удовлетворяющих уравнениям (47.09) и (47.10).

Аналогичным путем можно найти скорость фронта волны, которая распространяется в длинной линии и подчиняется телеграфным уравнениям (31.01) и (31.02). Дифференцируя уравнение (31.01) по z, а уравнение (31.02) по t, мы получим

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=R\frac{\partial I}{\partial z}+L\frac{\partial^2 I}{\partial z\partial t}=-R\left(GU+C\frac{\partial U}{\partial t}\right)+L\frac{\partial^2 I}{\partial z\partial t},$$

$$-\frac{\partial^2 I}{\partial z\partial t}=G\frac{\partial U}{\partial t}+C\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

откуда получаем уравнение для U

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+LC\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial U}{\partial t}+RGU=0, \tag{47.11}$$

характеристики которого совпадают с характеристиками более простого уравнения

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0. \tag{47.12}$$

Поэтому фронт волны распространяется со скоростью

$$v_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{47.13}$$

§ 48. Разложение волноводных волн на плоские волны

Свойства электромагнитных волн в волноводе становятся физически более наглядными, если учесть связь этих волн с плоскими волнами, распространяющимися в свободном пространстве. Исследование этой связи мы начнем

Электронное наследие России

с простейшей волны — волны H_{10} в прямоугольном волноводе. Для нее в силу формул (41.16) и (41.17) можно написать

$$\Pi' = C\cos gx, \quad g = \frac{\pi}{a}, \tag{48.01}$$

так что

$$\Pi_z' = \Pi' e^{ihz} = C\cos gx\, e^{ihz}. \tag{48.02}$$

Пользуясь формулой Эйлера для $\cos gx$, мы получаем

$$\Pi_z' = \frac{C}{2}\left[e^{i(gx+hz)} + e^{i(-gx+hz)}\right]. \tag{48.03}$$

Выражению (48.03) соответствуют по формулам (41.18) составляющие электрического и магнитного полей

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{kgC}{2}\left[e^{i(gx+hz)} - e^{i(-gx+hz)}\right], \\ H_x &= -\frac{hgC}{2}\left[e^{i(gx+hz)} - e^{i(-gx+hz)}\right], \\ H_z &= \frac{g^2C}{2}\left[e^{i(gx+hz)} + e^{i(-gx+hz)}\right], \\ E_x &= E_z = H_y = 0. \end{aligned} \tag{48.04}$$

Формулы (48.03) и (48.04) показывают, что волна H_{10} может быть представлена в виде суммы двух плоских электромагнитных волн [ср. формулу (14.13)]. Чтобы определить направления распространения этих плоских волн, мы вводим угол ϑ, лежащий в интервале $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ и удовлетворяющий соотношению

$$g = k\sin\vartheta. \tag{48.05}$$

Тогда при $h > 0$ мы можем записать h в виде

$$h = k\cos\vartheta, \tag{48.06}$$

поскольку поперечное и продольное волновые числа удовлетворяют соотношению

$$g^2 + h^2 = k^2. \tag{48.07}$$

Поэтому указанные выше плоские волны распространяются в направлениях *1* и *2* (рис. 49,*а*), составляющих с осью волновода (осью z) угол ϑ.

ЭБ "Научное наследие России"

В результате сложения плоских волн возникает сложное электромагнитное поле, имеющее вдоль оси z характер бегущей волны, а вдоль оси x характер стоячей волны, так как в этом направлении плоские волны распространяются навстречу друг другу. Каждая плоская волна является чисто поперечной, так что электрическое и магнитное поля перпендикулярны ее направлению распространения, как это может быть проверено по формулам (48.04). Магнитное поле этих волн имеет составляющие H_x и H_z, поэтому результирующее поле магнитной волны H_{10} имеет продольную составляющую $H_z \neq 0$.

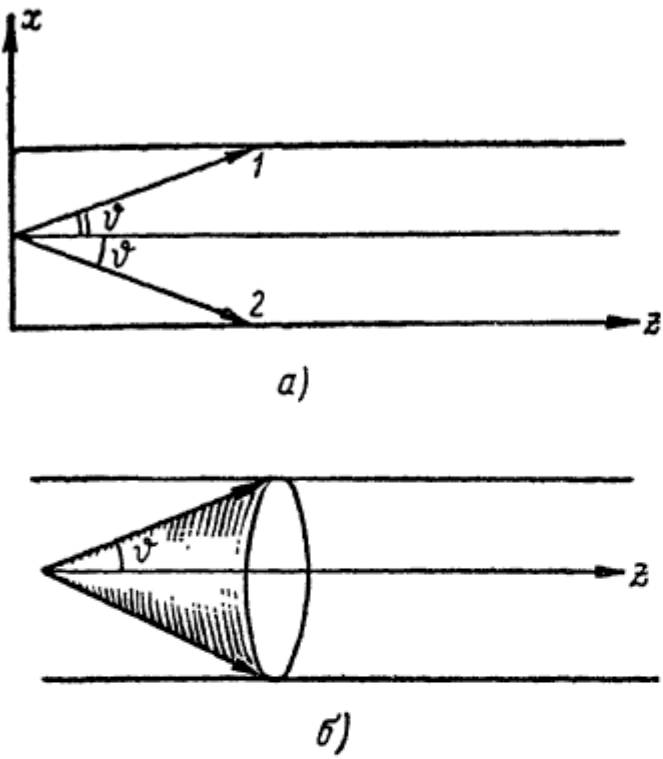


Рис. 49. Направления распространения плоских волн, образующих волну в волноводе:
а — два направления; *б* — конус направлений.

Электрическое поле плоских волн имеет только составляющую E_y и, следовательно, оно перпендикулярно оси волновода. В силу того, что по оси x поле образует стоячую волну, на некоторых плоскостях $x = \text{const}$, например при $x=0$, $x=a$, $x=2a$ и т. д., электрическое поле обращается в нуль ($E_y=0$). Поэтому, рассматривая суперпозицию двух плоских волн (48.03) в неограниченном пространстве, мы можем поставить при $x=0$ и $x=a$ идеально проводящие плоскости, на которых будет удовлетворяться граничное условие $E_t=0$ без возмущения поля. Такие же плоскости можно поставить, например, при $y=0$ и $y=b$, они также будут нормальны к электрическим силовым линиям. Окончательно можно сказать, что простейшую волну H_{10} можно рассматривать как результат суперпозиции двух плоских волн в пределах объема волновода.

Интересно, что ранее (в § 28) мы показали связь волн в передающих линиях 1-ой группы с плоскими волнами в свободном пространстве. Связь волноводных волн с плоскими волнами более сложна, так как здесь нужно брать

Электронное наследие России

по крайней мере две волны, распространяющиеся под углом ϑ к оси волновода. Эта связь позволяет наглядно понять как продольный характер волноводных волн, так и наличие критических частот. Действительно, при приближении угла ϑ к $\frac{\pi}{2}$ (рис. 49,*а*) расстояние между узлами электрического поля по оси x уменьшается и при $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ оказывается равным $\frac{\lambda}{2}$, где λ—рабочая длина волны. Если длина широкой стенки волновода a такова, что $a<\frac{\lambda}{2}$, т. е. $\lambda>2a$, то любая суперпозиция плоских волн не будет удовлетворять граничным условиям на стенках волновода. Распространение волн в волноводе в этом случае невозможно, и в нем существуют лишь затухающие волны. Этот результат иным способом был получен ранее [формула (41.29)].

Соотношения (48.03) и (48.04) легко обобщаются для волн H_{m0}, а также для волн H_{0n}. Для волны H_{mn} ($m,\ n=1,\ 2,\ldots$) имеем

$$\left.\begin{aligned}\Pi_z' = C\cos(g_x x)\cos(g_y y)\,e^{ihz} = \frac{C}{4}\left[e^{i(g_x x+g_y y+hz)}+\right.\\ \left.+e^{i(-g_x x+g_y y+hz)}+e^{i(g_x x-g_y y+hz)}+e^{i(-g_x x-g_y y+hz)}\right]\end{aligned}\right\} \quad (48.08)$$

и аналогично для волны E_{mn}

$$\left.\begin{aligned}\Pi_z = C\sin(g_x x)\sin(g_y y)\,e^{ihz} = \frac{C}{4}\left[-e^{i(g_x x+g_y y+hz)}+\right.\\ \left.+e^{i(-g_x x+g_y y+hz)}+e^{i(g_x x-g_y y+hz)}+e^{i(-g_x x-g_y y+hz)}\right],\end{aligned}\right\} \quad (48.09)$$

где

$$g_x=\frac{m\pi}{a};\quad g_y=\frac{n\pi}{b}. \quad (48.10)$$

Из формул (48.08) и (48.09) видно, что волны H_{mn} и E_{mn} могут быть разложены на четыре плоские волны.

Можно показать, что в волноводах произвольной формы (в частности, в круглых волноводах) волны также разлагаются на плоские волны, но при этом в общем случае необходимо брать бесконечное число плоских волн, направления распространения которых образуют в пространстве круговой конус, ось вращения которого совпадает с осью z (рис. 49,*б*). Угол раствора ϑ этого конуса

ЭБ "Научное наследие России"

связан с продольным и поперечным волновыми числами данной волны соотношениями (48.05) и (48.06). Доказательство основывается на интегральном представлении функции Π, удовлетворяющей уравнению (39.03) и граничному условию (39.08). Это интегральное представление имеет вид

$$\Pi(x,\ y)=\int_0^{2\pi} f(\psi)\, e^{ig\,(x\cos\psi + y\sin\psi)}\, d\psi. \qquad (48.11)$$

Аналогичное интегральное представление имеет место для функции Π', удовлетворяющей уравнению (40.03) и граничному условию (40.04). Формулу (48.11) можно найти, например, в книге Уиттекера и Ватсона „Курс современного анализа".

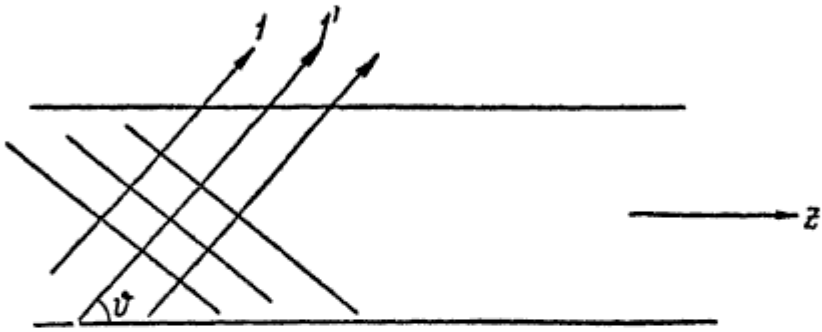


Рис. 50. Фазовые плоскости и поток энергии в плоской волне, иллюстрирующие фазовую и групповую скорость волн в волноводе.

Пользуясь разложением на плоские волны, нетрудно вскрыть физический смысл формул (47.02) и (47.05). Для этого рассмотрим (рис. 50) одну из плоских волн, входящих в состав волноводной волны. Если плоская волна распространяется в направлении *1* со скоростью c, то ее фазовые плоскости перемещаются в направлении *1* со скоростью c. В направлении оси z скорость перемещения этих плоскостей оказывается большей; она равна

$$u=\frac{c}{\cos\vartheta}. \qquad (48.12)$$

Это и есть фазовая скорость волноводной волны. Учитывая, что по формулам (48.06) и (48.07)

$$\cos\vartheta=\frac{h}{k}=\sqrt{1-\left(\frac{g}{k}\right)^2}, \qquad (48.13)$$

Электронное наследие России

мы видим, что формула (48.12) эквивалентна формуле (47.02). Как видно из рис. 50, длина волны в направлении оси z равна

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\cos \vartheta}. \qquad (48.14)$$

Величина Λ определяет периодичность поля вдоль оси волновода, это—волноводная длина волны.

Для вычисления групповой скорости необходимо рассмотреть, например, распространение амплитудно-модулированных колебаний, т. е. распространение волноводной волны, амплитуда (или энергия) которой зависит от z и t [ср. формулы (46.07), (46.09) и (46.12)]. Разложение такой модулированной волноводной волны ведет к плоским волнам, амплитуда (огибающая) которых непостоянна. Это значит, что в плоскости равной фазы каждой такой волны, схематически изображенной на рис. 50, амплитуда на прямой *1* несколько отличается от амплитуды на параллельной ей прямой *1'*. Из геометрической оптики известно, что энергия волны перемещается в направлении лучей, являющихся нормалями к волновым поверхностям (поверхностям равной фазы), т. е. в данном случае по прямым *1* или *1'*. Дойдя до поверхности стенки волновода, энергия отражается от нее и продолжает распространяться в направлении отраженного луча, который образует с осью волновода z тот же угол ϑ, что и первоначальный („падающий") луч. Скорость распространения энергии вдоль каждого луча равна c.

Таким образом, распространение энергии, заключенной в некотором цилиндре с образующими *1* и *1'*, происходит по зигзагообразному пути, каждое звено которого наклонено к оси z под углом ϑ. Поэтому скорость перемещения энергии по оси z оказывается равной

$$v = c \cos \vartheta. \qquad (48.15)$$

Это и есть групповая скорость, вычисленная нами ранее [см. формулу (47.05)]. Заметим, что одна и та же причина—несовпадение направления распространения плоских волн с осью волновода—приводит к увеличению фазовой скорости и уменьшению групповой скорости по сравнению с теми же величинами для свободного пространства. Различие между фазовой и групповой скоростями возникает вследствие того, что при вычислении этих скоростей мы следим за различными физическими признаками волны, распространяющейся в волноводе.

ЭБ "Научное наследие России"

Скорости u и v удовлетворяют соотношению

$$uv = c^2. \tag{48.16}$$

Интересно, что аналогичное соотношение мы имеем в квантовой механике, где произведение фазовой и групповой скоростей также постоянно.

Произведенное выше разложение волноводных волн на плоские волны относилось только к распространяющимся волнам. Если воспользоваться введенным в § 14 понятием обобщенной плоской волны, то данное разложение можно распространить и на затухающие волны в волноводах. Однако такое разложение не представляет физического интереса.

Заметим в заключение, что формулу (48.15) мы проанализировали с помощью геометрической оптики. Таким образом, в приближении геометрической оптики распространение высокочастотного импульса в волноводе происходит без искажения его формы. Фактически же при своем распространении импульс расплывается. Это явление можно отождествить с дифракцией, испытываемой „пучком параллельных лучей" (плоской волной с конечным поперечным сечением). Под влиянием дифракции сечение волны расширяется, т. е. лучи как бы начинают расходиться (ср. далее § 88). Прямоугольный импульс в волноводе можно представить как пучок параллельных лучей, который претерпевает последовательные отражения от стенок волновода: его расширение происходит так же, как и расширение пучка лучей в свободном пространстве. Это явление подчиняется законам дифракции Френеля.

§ 49*. Электромагнитная энергия в поглощающей диспергирующей среде

Рассмотрим (ср. § 8) электромагнитную волну, имеющую комплексную частоту

$$\Omega = \omega + i\gamma, \tag{49.01}$$

т. е. нарастающую или затухающую (в фиксированной точке пространства) по экспоненциальному закону. Электрическое и магнитное поле такой волны при ее распространении по оси z имеет вид

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i[h(\Omega)z - \Omega t]}\};\quad \mathbf{H}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{H}_0 e^{i[h(\Omega)z - \Omega t]}\}, \tag{49.02}$$

ЭБ "Научное наследие России"

где $h(\Omega)$ — волновое число, соответствующее частоте Ω. При достаточно малом γ (при достаточно медленном изменении амплитуды поля в фиксированной точке) можно написать

$$h(\Omega) = h + i\gamma \frac{dh}{d\omega}, \tag{49.03}$$

где $h = h(\omega)$ и производная $\frac{dh}{d\omega}$ соответствуют уже вещественной частоте ω. Пользуясь формулами (49.01) и (49.03), получаем

$$e^{i[h(\Omega)z - \Omega t]} = e^{i(hz - \omega t)} e^{-\gamma\left(\frac{dh}{d\omega} z - t\right)}. \tag{49.04}$$

Этот множитель определяет зависимость электромагнитного поля данной волны от z и t. Мы видим, что первый множитель правой части (49.04) определяет (быстро меняющуюся) фазу электромагнитного поля, которая распространяется с фазовой скоростью

$$u = \frac{\omega}{h}. \tag{49.05}$$

Второй множитель определяет (медленно меняющуюся) амплитуду поля, перемещающуюся с групповой скоростью

$$v = \frac{d\omega}{dh}. \tag{49.06}$$

Эти соотношения можно применить также к распространению плоских электромагнитных волн в однородной среде (ср. § 11), при этом нужно заменить волновое число h на

$$K = k\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{49.07}$$

Однако мы пока ограничиваемся средами без потерь, поскольку во всем предыдущем анализе групповой скорости предполагали волновое число h вещественным, и сейчас должны считать проницаемости ε и μ вещественными и положительными.

С помощью комплексной частоты можно также исследовать распространение головной части волны. Действительно, считая в формуле (49.01) величину γ достаточно большой и положительной, мы получаем волну с крутым фронтом, переходящим при $\gamma \to \infty$ в бесконечно крутой фронт. В этом случае, разумеется, формулы (49.03) и

ЭБ "Научное наследие России"

(49.04) неприменимы, так что фронт распространяется не с групповой скоростью. Если фазовая скорость удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\omega\to\infty} u = \lim_{\omega\to\infty} \frac{\omega}{h} = c, \tag{49.08}$$

которое для реальных сред и линий передачи всегда выполняется, то при $\gamma \to \infty$ можно считать $h(\Omega) = \frac{\Omega}{c}$, и вместо формулы (49.04) получаем

$$e^{i[h(\Omega)z - \Omega t]} = e^{i\Omega\left(\frac{z}{c} - t\right)}, \tag{49.09}$$

так что фронт волны распространяется со скоростью c.

Физический смысл соотношения (49.08) заключается в том, что волны достаточно высоких частот проходят, например, через диэлектрик как через пустоту, поскольку вследствие своей инерции электроны (а тем более атомы или молекулы диэлектрика) в колебаниях достаточно высокой частоты принимать участие не могут. Таков же смысл выражения (49.09): достаточно крутой фронт проходит через вещество как через пустоту, поскольку за время его прохождения вещество включиться в электромагнитный процесс не успевает.

Нужно иметь в виду, что при формальном рассмотрении волн в различных линиях и средах скорость фронта может отличаться от c, однако во всех случаях она равна

$$v_0 = \lim_{\omega\to\infty} \frac{\omega}{h}. \tag{49.10}$$

Например, для линии, подчиняющейся телеграфным уравнениям с погонными параметрами, не зависящими от частоты, по формуле (31.07) получим

$$v_0 = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(L + i\frac{R}{\omega}\right)\left(C + i\frac{G}{\omega}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{49.11}$$

что согласуется с выражением (47.13). В этом случае $v_0 \neq c$. Если же учесть скин-эффект в проводах линии, то $L \to L_e$ при $\omega \to \infty$ (ср. § 35), и для линии с воздушным заполнением (или в пустоте) согласно формуле (31.15) будем иметь $v_0 = c$.

Электронное наследие России"

Вывод формулы (49.06) для групповой скорости, данный в этом параграфе, не может иметь самостоятельного значения, поскольку в отличие от § 46 мы здесь рассмотрели квазимонохроматическую волну вполне определенного вида. Этот вывод мы привели, чтобы подчеркнуть методическую связь понятия групповой скорости и понятия электромагнитной энергии (ср. § 8): для рассмотрения обоих понятий необходимо пользоваться переходными процессами, например процессами с комплексной частотой (49.01).

Как увидим в § 50, эта связь оказывается весьма тесной и с физической точки зрения. Поэтому вернемся к более подробному исследованию электромагнитной энергии в среде с дисперсией и поглощением (см. § 8).

Если при данной частоте условия (7.16) не удовлетворяются, то электромагнитную и магнитную энергию уже нельзя вычислять по формулам (8.19). Так, например, для ионосферы комплексная диэлектрическая проницаемость определяется формулой

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega + ig)}, \tag{49.12}$$

где ω_0 — критическая частота плазмы, равная

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}, \tag{49.13}$$

а g — эффективная частота соударений электронов с ионами и молекулами; при $g = 0$ формула (49.12) переходит в простую формулу (12.15). Из формулы (49.12) получаем

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + g^2}; \quad \varepsilon'' = \frac{\omega_0^2 g}{\omega(\omega^2 + g^2)}. \tag{49.14}$$

Второе выражение показывает, что при $g > 0$

$$\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon'') \neq 0, \tag{49.15}$$

поэтому электрическую энергию в ионосфере вычислять по первой формуле (8.19) нельзя. Действительно, величина

$$\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon') = 1 + \frac{\omega_0^2(\omega^2 - g^2)}{(\omega^2 + g^2)^2} \tag{49.16}$$

может принимать отрицательные значения.

Однако электрическую энергию в веществе с диэлектрической проницаемостью (46.12) можно вычислить из

ЭБ "Научное наследие России"

чисто *макроскопических соображений.* Для этого рассмотрим (рис. 51,*а*) конденсатор, заполненный данным веществом. Если C_0 — емкость пустого конденсатора, то комплексная емкость

$$C_\varepsilon = \varepsilon C_0 \tag{49.17}$$

определяет входной импеданс конденсатора

$$Z(\omega) = -\frac{1}{i\omega C_\varepsilon} \tag{49.18}$$

(напомним, что при взятой нами временной зависимости $e^{-i\omega t}$ знаки для реактивных сопротивлений изменяются на

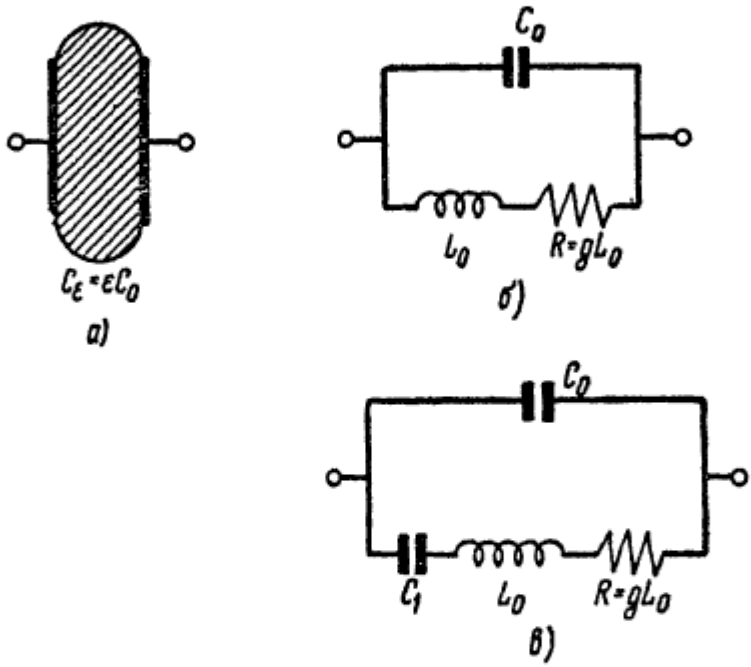


Рис. 51. Эквивалентные схемы для вычисления электрической энергии в веществе:

а — конденсатор, заполненный веществом; *б* — его эквивалентная схема при заполнении ионизированным газом; *в* — его эквивалентная схема при заполнении диэлектриком с „квазиупругими" электронами.

обратные по сравнению с обычными). Если ввести индуктивность L_0 так, чтобы она удовлетворяла соотношению

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \tag{49.19}$$

то можно написать

$$-i\omega C_\varepsilon = -i\omega\varepsilon C_0 = -i\omega C_0 + \frac{1}{-i(\omega + ig)L_0}. \tag{49.20}$$

Отсюда видно, что двухполюсники, изображенные на рис. 51,*а* и рис. 51,*б*, имеют при всех частотах один и тот

...ное наследие России"

же входной импеданс (49.18). Так как входной импеданс определяет переходные процессы в двухполюснике—как установление, так и затухание колебаний, то запас энергии в обоих двухполюсниках при монохроматических колебаниях с частотой ω будет один и тот же.

В схеме на рис 51,*б* средняя энергия равна

$$\overline{W} = \frac{1}{4} C_0 |U|^2 + \frac{1}{4} L_0 |J|^2, \tag{49.21}$$

где U — комплексная амплитуда напряжения, приложенного к клеммам, J — комплексная амплитуда тока, текущего через катушку L_0.

В силу очевидного соотношения

$$\frac{U}{J} = (g - i\omega) L_0 \tag{49.22}$$

можно написать

$$L_0 |J|^2 = \frac{|U|^2}{L_0 (\omega^2 + g^2)} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + g^2} C_0 |U|^2 \tag{49.23}$$

и

$$\overline{W} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + g^2} \right) C_0 |U|^2. \tag{49.24}$$

Такая же энергия должна запасаться в конденсаторе, показанном на рис. 51,*а*, в виде электрической энергии

$$\overline{W}_э = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + g^2} \right) C_0 |U|^2, \tag{49.25}$$

откуда сразу следует, что в среде с диэлектрической проницаемостью (49.12) — в ионизированном газе — плотность электрической энергии равна

$$\overline{w}_э = \frac{1}{16\pi} \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + g^2} \right) |\mathbf{E}|^2. \tag{49.26}$$

Та же формула может быть выведена и из микроскопических соображений. При $g = 0$ из первой формулы (8.19) и из формулы (49.26) получается одно и то же выражение для электрической энергии.

Рассмотрим также вещество с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + ig\omega - \omega_1^2}, \tag{49.27}$$

где ω_0, ω_1 и g — три константы, имеющие размерность частоты. Формула (49.27) соответствует диэлектрику с „квазиупругими“ (или „упруго связанными“) электронами, имеющими собственную частоту ω_1 и декремент затухания g; величина ω_0 связана с числом электронов N на единицу объема формулой (49.13). Если таким веществом заполнить конденсатор на рис. 51,*а*, то он будет иметь эквивалентную схему, изображенную на рис. 51,*в*. Индуктивность L_0 в этой схеме и емкость C_1 определяются формулами

$$L_0 = \frac{1}{\omega_0^2 C_0}; \quad C_1 = \frac{1}{\omega_1^2 L_0}, \tag{49.28}$$

причем L_0 по-прежнему удовлетворяет соотношению (49.19), а частота ω_1 равна

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_1}}. \tag{49.29}$$

Электромагнитная энергия цепи, изображенной на рис. 51,*в*, равна

$$\overline{W} = \frac{1}{4} C_0 |U|^2 + \frac{1}{4}\left(L_0 + \frac{1}{\omega^2 C_1}\right)|J|^2, \tag{49.30}$$

где U и J имеют тот же смысл, что и в формуле (49.21). Так как

$$\frac{U}{J} = -i\omega L_0 + gL_0 - \frac{1}{i\omega C_1}, \tag{49.31}$$

то с помощью формул (49.28) легко получаем следующее выражение для запаса энергии

$$\overline{W} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\omega_0^2(\omega^2 + \omega_1^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + g^2\omega^2}\right] C_0 |U|^2, \tag{49.32}$$

откуда и находим плотность энергии в диэлектрике с квазиупругими электронами

$$\overline{w}_э = \frac{1}{16\pi}\left[1 + \frac{\omega_0^2(\omega^2 + \omega_1^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + g^2\omega^2}\right]|\mathbf{E}|^2, \tag{49.33}$$

Заметим, что при $\omega_1 = 0$, т. е. для свободных электронов, формулы (46.32) и (49.33) переходят в формулы (49.25) и (49.26) соответственно, а при $g = 0$ формула (49.33) совпадает с первой формулой (8.19). С микроскопической точки зрения энергия электрического поля состоит из трех

Электронное наследие России

слагаемых: „чисто электрической“ энергии поля в пустоте, кинетической энергии и потенциальной энергии упруго связанных электронов. Эти три слагаемых соответствуют запасам энергии в элементах C_0, L_0 и C_1 эквивалентной схемы на рис. 51,*в*.

Тот же способ может быть применен для вычисления энергии электрического поля в более общих случаях, когда комплексная диэлектрическая проницаемость вещества задана в виде рациональной функции частоты; конденсатор, заполненный таким веществом, имеет импеданс $Z(\omega)$, являющийся рациональной функцией частоты ω. Из теории цепей известно, что всегда можно подобрать эквивалентную схему, состоящую из конечного числа элементов C, L и R, не зависящих от частоты, и имеющую тот же импеданс $Z(\omega)$. Эта схема будет удовлетворять условию физической реализуемости, если данное вещество ему удовлетворяет. Запас энергии в эквивалентной схеме нетрудно вычислить; он равен электрической энергии в конденсаторе. Если комплексная магнитная проницаемость вещества является рациональной функцией частоты, то магнитную энергию в ней можно вычислить, рассматривая аналогичным образом катушку с сердечником из данного вещества и эквивалентную схему для нее.

Таким образом, определение электрической и магнитной энергии в среде с дисперсией и поглощением не может быть произведено в общем случае по формулам вида (8.19) или им подобным. Эта задача сводится к синтезу эквивалентных электрических цепей. В теории цепей неизвестна формула, по которой можно было бы непосредственно определять запас энергии двухполюсника по его входному импедансу, и для нахождения этого запаса необходимо суммировать энергию во всех элементах L и C конкретной схемы. Общая формула имеется лишь для двухполюсника без потерь, соответствующего непоглощающей среде; эта формула приводит к выражениям (8.19).

Заметим, что теоретические выражения для комплексных проницаемостей, выводимые из микроскопической теории, обычно имеют вид рациональных функций частоты. Проницаемости, получаемые опытным путем, обычно укладываются в надлежащим образом подобранную рациональную функцию. Поэтому предложенный выше способ определения запаса энергии электромагнитного поля в веществе имеет довольно общее значение.

Запас электромагнитной энергии в некотором объеме

Электронное наследие России

диспергирующего поглощающего вещества имеет следующий физический смысл. Если мы имеем систему, ограниченную со всех сторон (например, объемный резонатор, заполненный поглощающим веществом, или конденсатор на рис. 51,*а*) и возбуждаемую некоторыми источниками монохроматических колебаний (например, диполем или сторонней э. д. с.), то запас энергии определяет тепло, выделяющееся в системе после выключения всех источников. Если система после выключения оказывается незамкнутой, то часть энергии из нее вытекает, так что запас энергии равен сумме выделившегося тепла и вытекшей энергии.

§ 50*. Скорость движения энергии как обобщение понятия групповой скорости

Плотность электромагнитной энергии $\overline{w}$ в плоской волне и групповая скорость v этой волны связаны между собой соотношением

$$\overline{S}_z = \overline{w} v, \tag{50.01}$$

где $\overline{S}_z$ — среднее во времени значение составляющей вектора Умова—Пойнтинга.

Для среды без потерь это соотношение легко проверить непосредственно. Действительно, формулу (49 07) можно очевидно переписать в виде

$$K = \frac{1}{c}\sqrt{\omega\varepsilon \cdot \omega\mu}, \tag{50.02}$$

и групповая скорость удовлетворяет соотношению

$$\frac{c}{v} = \frac{d}{d\omega}\sqrt{\omega\varepsilon \cdot \omega\mu} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{d}{d\omega}(\omega\mu)\right]. \tag{50.03}$$

С другой стороны, для бегущей плоской волны имеем

$$\left.\begin{aligned} E_x &= Ae^{iKz}; & E_y &= Be^{iKz}; \\ H_y &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,Ae^{iKz}; & H_x &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,Be^{iKz}, \end{aligned}\right\} \tag{50.04}$$

так что

$$\overline{S}_z = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*) = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(|A|^2 + |B|^2),$$

ЭБ "Научное наследие России"

$$\overline{w}=\frac{1}{16\pi}\left[\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon)|\mathbf{E}|^2+\frac{d}{d\omega}(\omega\mu)|\mathbf{H}|^2\right]=$$

$$=\frac{1}{16\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon)+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{d}{d\omega}(\omega\mu)\right](|A|^2+|B|^2),$$

откуда и получается соотношение (50.01).

Формула (50.01) раскрывает новый физический смысл групповой скорости v как скорости движения энергии. Этот новый смысл сохраняется и в случае монохроматических процессов, поскольку по формуле (50.01) поток энергии, переносимый плоской волной в направлении своего распространения, можно рассматривать как результат движения объемной плотности энергии со скоростью v. Выражение (50.01) находится в соответствии с идеями Н. А. Умова, приписывавшего энергии определенную скорость движения.

Мы вывели формулу (50.01) для непоглощающей диспергирующей среды, где нетрудно вычислить в общем виде как $\overline{w}$, так и v. Если среда обладает поглощением, то понятия групповой скорости без дальнейших уточнений ввести нельзя, поскольку даже квазимонохроматические сигналы будут существенно изменяться по форме при своем распространении, как это нетрудно увидеть из формул § 46. Однако если известно среднее значение плотности электромагнитной энергии (§ 49), то для плоской волны можно *определить* скорость движения энергии v по формуле

$$v=\frac{\overline{S}_z}{\overline{w}}, \tag{50.05}$$

обращая формулу (50.01).

Смысл скорости v можно выяснить следующим образом. Закон сохранения энергии для плоской электромагнитной волны очевидно имеет вид

$$\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}+\overline{p}+\frac{\partial\overline{S}_z}{\partial z}=0, \tag{50.06}$$

где $\overline{w}$ — средняя плотность электромагнитной энергии, $\overline{p}$ — средняя плотность потерь, $\overline{S}_z$ — среднее значение составляющей вектора Умова—Пойнтинга. При этом усреднение производится по периоду колебания, а волна предполагается моноxроматической $\left(\text{тогда } \frac{\partial\overline{w}}{\partial t}=0\right)$ или имею-

ЭБ "Научное наследие России"

щей узкий спектр частот (квазимонохроматическая группа, ср. § 46). Представим себе сигнал в виде длинного импульса произвольной формы: при достаточной „растянутости" этого импульса во времени и пространстве он имеет достаточно узкий спектр. Введем координату z_0 центра энергии этого сигнала по формуле

$$z_0 = \frac{\int z\bar{w}dz}{\int \bar{w}dz}, \tag{50.07}$$

где интегрирование производится по z от $-\infty$ до ∞. Мы считаем, что сигнал при своем распространении имеет конечную длину (точнее, что плотность его энергии достаточно быстро убывает при $z \to \pm\infty$), так что все интегралы сходятся.

Подставляя в формулу (50.06) выражение (50.01) и учитывая, что v не зависит от z (однородная среда), получаем

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + v\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{p} = 0. \tag{50.08}$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \bar{w}dz + \int \bar{p}dz = 0. \tag{50.09}$$

Умножая соотношение (50.08) на z и интегрируя, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int z\bar{w}dz - v\int \bar{w}dz + \int z\bar{p}dz = 0. \tag{50.10}$$

Здесь мы использовали формулу интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{\infty} z\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}dz = \Big|_{-\infty}^{\infty} z\bar{w} - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{w}dz \tag{50.11}$$

и положили $\bar{w} = 0$ и $z\bar{w} = 0$ при $z = \pm\infty$.

Найдем теперь скорость движения центра энергии сигнала, для чего продифференцируем (50.07) по t

$$\frac{dz_0}{dt} = \frac{\frac{\partial}{\partial t}\int z\bar{w}dz}{\int \bar{w}dz} - z_0\frac{\frac{\partial}{\partial t}\int \bar{w}dz}{\int \bar{w}dz}. \tag{50.12}$$

...ое наследие России"

Используя соотношения (50.09) и (50.10), мы приходим к формуле

$$\frac{dz_0}{dt} = v - \frac{\int z\bar{p}\,dz}{\int \bar{w}\,dz} + z_0 \frac{\int \bar{p}\,dz}{\int \bar{w}\,dz}. \tag{50.13}$$

Для непоглощающей среды здесь нужно положить $\bar{p}=0$, и тогда получим

$$\frac{dz_0}{dt} = v, \tag{50.14}$$

т. е. центр энергии сигнала движется со скоростью v. Этот результат является совершенно естественным, поскольку в непоглощающей среде сигнал (точнее, его огибающая) перемещается как целое с групповой скоростью v, поэтому с той же скоростью движется и его центр энергии. Фактически соотношение (50.14) показывает, что даже после заметного искажения формы сигнала (ср. § 46) его центр энергии продолжает двигаться со скоростью v.

Для поглощающей среды соотношение (50.13) можно переписать в виде

$$\frac{dz_0}{dt} = v + (z_0 - z_1)\frac{\int \bar{p}\,dz}{\int \bar{w}\,dz}, \tag{50.15}$$

где

$$z_1 = \frac{\int z\bar{p}\,dz}{\int \bar{p}\,dz} \tag{50.16}$$

есть координата „центра потерь“ данного сигнала, которая практически совпадает с координатой z_0 его центра энергии

$$z_1 = z_0, \tag{50.17}$$

и поэтому формула (50.15) опять приводит нас к соотношению (50.14). Таким образом, хотя в поглощающей среде сигнал при своем распространении затухает и искажается (расплывается), его центр энергии по-прежнему движется со скоростью v.

Рассмотрим более детально соотношение (50.17). В монохроматической плоской волне, распространяющейся по оси z, поле пропорционально e^{iKz} $(K = K' + iK'')$ и поэтому плотность энергии дается формулой

$$\bar{w} = \bar{w}_0 e^{-2K''z} \tag{50.18}$$

ЭБ "Научное наследие России"

и

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -2K'' \bar{w}. \tag{50.19}$$

Для такой волны соотношение (50.08) дает

$$\bar{p} = 2vK'' \bar{w}, \tag{50.20}$$

т. е. плотность потерь и плотность энергии пропорциональны друг другу (с постоянным коэффициентом пропорциональности). Эта пропорциональность сохраняется и в случае квазимонохроматических сигналов и влечет за собой соотношение (50.17).

Рассмотрим выражение для скорости v в диэлектрике, диэлектрическая проницаемость которого определяется формулой (49.27), а магнитная проницаемость $\mu = 1$. Для плоской волны (50.04) имеем

$$\left.\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{1}{16\pi}\left[1 + \frac{\omega_0^2(\omega^2+\omega_1^2)}{(\omega^2-\omega_1^2)^2+g^2\omega^2} + |\varepsilon|\right] \times \\ &\quad \times (|A|^2 + |B|^2) e^{-2K''z}, \\ \bar{S}_z &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon}\,(|A|^2 + |B|^2) e^{-2K''z}, \end{aligned}\right\} \tag{50.21}$$

откуда

$$\frac{v}{c} = \frac{2 \operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon}}{1 + \dfrac{\omega_0^2(\omega^2+\omega_1^2)}{(\omega^2-\omega_1^2)^2+g^2\omega^2} + |\varepsilon|}. \tag{50.22}$$

Из последней формулы вытекают неравенства

$$\frac{v}{c} < \frac{2\sqrt{|\varepsilon|}}{1+|\varepsilon|} < 1, \tag{50.23}$$

т. е. скорость движения энергии не может превышать скорость света. Этот результат согласуется с теорией относительности, по которой распространение сигналов со сверхсветовыми скоростями невозможно. Впрочем, этот результат можно было предвидеть уже из того обстоятельства, что передний фронт каждого сигнала распространяется со скоростью c (см. § 47 и § 49).

Прежде чем переходить к анализу фазовой и групповой скорости в диэлектрике с комплексной проницаемостью

"Научное наследие России"

(49.27), заметим, что при $g=0$ эта проницаемость принимает вид

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_1^2}, \tag{50.24}$$

так что в диапазоне частот

$$\omega_1 < \omega < \omega_1 \sqrt{1+N} \tag{50.25}$$

проницаемость ε отрицательна. Здесь параметр N означает

$$N = \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} = \varepsilon_0 - 1, \tag{50.26}$$

где ε_0 — статическое значение диэлектрической проницаемости (50.24) или (49.27) (при $\omega=0$). В диапазоне (50.25) волны затухают, не распространяясь: волновое число K — чисто мнимое; фазовая скорость $u=\infty$; групповая скорость $v=0$, поскольку перенос энергии отсутствует. Этот же результат для скоростей получается из формул § 46 при частотах $\omega=\omega_1$ и $\omega=\omega_1\sqrt{1+N}$.

При $g>0$ расчеты значительно сложнее. Полагая $\omega \approx \omega_1$, т. е. ограничиваясь окрестностью резонансной частоты ω_1, мы можем формулу (49.27) переписать в виде

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1[2(\omega-\omega_1)+ig]}. \tag{50.27}$$

Вводя „приведенную частоту“

$$z = \frac{2(\omega-\omega_1)}{g} \tag{50.28}$$

и безразмерный параметр

$$M = \frac{\omega_0^2}{\omega_1 g}, \tag{50.29}$$

можем записать формулу (50.27) в виде

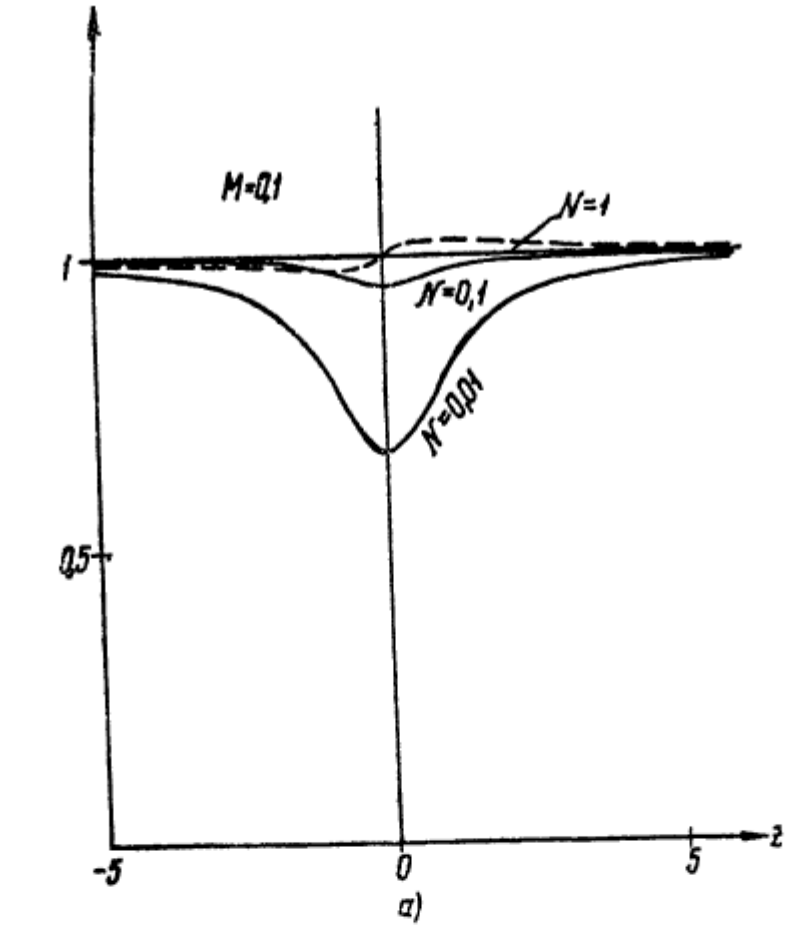
$$\varepsilon = 1 - \frac{M}{z+i}. \tag{50.30}$$

Делая аналогичные пренебрежения, получаем

$$\frac{\omega_0^2(\omega^2+\omega_1^2)}{(\omega^2-\omega_1^2)^2+g^2\omega^2} = \frac{M^2}{N(z^2+1)}, \tag{50.31}$$

где параметр N определяется формулой (50.26).

ЭБ "Научное наследие России"



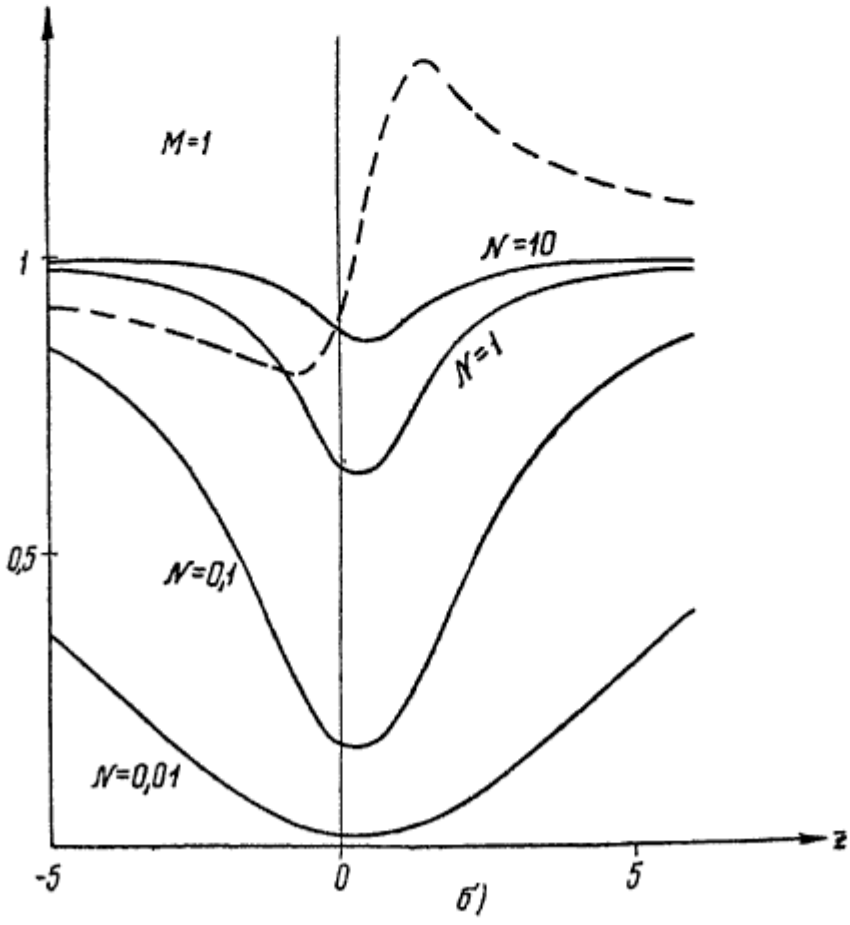


Рис. 52. Фазовая и групповая скорости в полосе аномальной дисперсии и вблизи нее.

Фазовая скорость вычисляется по формуле

$$\frac{u}{c}=\frac{1}{\operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon}}, \tag{50.32}$$

а групповая — по формуле

$$\frac{v}{c}=\frac{2\operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon}}{1+|\varepsilon|+\dfrac{M^2}{N(z^2+1)}}, \tag{50.33}$$

где ε определяется выражением (50.30). Мы видим, что ход кривой $\frac{u}{c}$ определяется одним параметром M, а ход кривой $\frac{v}{c}$ — двумя параметрами M и N. На рис. 52 пунктирные кривые дают отношения $\frac{u}{c}$ для значений $M=0{,}1$ (рис. 52,*а*) и $M=1$ (рис. 52,*б*). Сплошные кривые определяют отношение $\frac{v}{c}$ для тех же значений M и для различных N.

Заметим, что при $M\ll 1$ можно положить

$$|\varepsilon|=1-2M\frac{z}{z^2+1};\quad \operatorname{Re}\sqrt{\varepsilon}=1-\frac{1}{2}M\frac{z}{z^2+1}, \tag{50.34}$$

ввиду чего вычисления по формулам (50.32) и (50.33) несколько упрощаются.

§ 51*. Скорость распространения сигналов в передающих линиях с потерями

Понятие скорости движения энергии может быть применено также к анализу распространения сигналов вдоль передающих линий с потерями. В этом случае (ср. § 34) нужно ввести энергию электромагнитного поля $\overline{W}$ и мощность потерь $\overline{P}$ на единицу длины линии

$$\overline{W}=\int\limits_{S_p}\overline{w}\,dS;\quad \overline{P}=\int\limits_{S_p}\overline{p}\,dS, \tag{51.01}$$

а также мощность, переносимую волной через поперечное сечение линии

$$\overline{\Sigma}=\int\limits_{S_p}\overline{S}_z\,dS. \tag{51.02}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Интегралы (51.01) и (51.02) вычисляются по всему поперечному сечению линии ($z = \text{const}$) и дают средние значения энергии и мощности за период колебания. Из соотношения (6.10) легко получить (ср. § 34 и § 50) „погонный“ закон сохранения энергии

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} + \overline{P} + \frac{\partial \overline{\Sigma}}{\partial z} = 0, \tag{51.03}$$

связывающий величины $\overline{W}$, $\overline{P}$ и $\overline{\Sigma}$ и имеющий тот же вид, что и соотношение (50.06) для плоских волн. Поэтому величина

$$v = \frac{\overline{\Sigma}}{\overline{W}} \tag{51.04}$$

дает скорость движения энергии вдоль линии. Скорость v есть обобщение понятия групповой скорости волны в линии, применимое и при наличии потерь.

Легко проверить, что и для электрических и магнитных волн в идеально проводящем волноводе соотношение (51.04) приводит к формуле (47.05).

Применим формулу (51.04) к длинной линии, подчиняющейся телеграфным уравнениям. При этом будем сначала для простоты считать, что все четыре параметра линии (C, L, G и R) не зависят от частоты. Согласно формуле (34.13) имеем

$$\overline{\Sigma} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{W^*} |U|^2 = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re} W}{|W|^2} |U|^2, \tag{51.05}$$

а согласно формуле (34.03)

$$\overline{W} = \frac{1}{4} \left(C + \frac{1}{|W|^2} L \right) |U|^2, \tag{51.06}$$

так что скорость движения энергии равна

$$v = \frac{2 \operatorname{Re} W}{C |W|^2 + L}. \tag{51.07}$$

Для анализа этого выражения введем сокращенные обозначения

$$a = \frac{R}{L}; \quad b = \frac{G}{C} \tag{51.08}$$

Электронное наследие России

и перепишем формулу (31.11) в виде

$$W=\sqrt{\frac{L}{C}}\,\Gamma,\ \text{где}\ \ \Gamma=\sqrt{\frac{\omega+ia}{\omega+ib}}. \tag{51.09}$$

Тогда формула (51.07) принимает следующий вид

$$\frac{v}{v_0}=\frac{2\operatorname{Re}\Gamma}{|\Gamma|^2+1}, \tag{51.10}$$

где

$$v_0=\sqrt{LC} \tag{51.11}$$

есть скорость распространения волн в той же линии без потерь (когда $a=b=0$ и $\Gamma=1$). Если

$$a=b, \tag{51.12}$$

то скорость распространения равна просто v_0, справедливость чего легко проверить непосредственно. Действительно, в этом случае формула (31.07) принимает вид

$$h=\sqrt{LC}\,(\omega+ia)=\frac{\omega}{v_0}+i\frac{a}{v_0}, \tag{51.13}$$

так что все монохроматические волны затухают с коэффициентом $\frac{a}{v_0}$, не зависящим от частоты. Это значит, что распространение сигналов не сопровождается изменением их формы и происходит со скоростью v_0, которая в данном случае является одновременно фазовой и групповой скоростью.

Условие (51.12) хорошо изве́стно в теории длинных линий: это — так называемое условие Хевисайда, выполнение которого необходимо для неискаженной передачи сигналов. Во всех других случаях передача сигналов, в частности квазимонохроматических сигналов, сопровождается искажением, например, высокочастотные импульсы при своем распространении расплываются. Однако мы можем говорить о групповой скорости v расплывающегося сигнала (импульса), понимая под v скорость „центра энергии“ этого сигнала (§ 50). Было бы ошибочным вычислять эту скорость по формуле

$$\frac{1}{v}=\frac{dh'}{d\omega}, \tag{51.14}$$

ЭБ "Научное наследие России"

где h' — вещественная часть комплексного волнового числа

$$h = h' + ih'' \tag{51.15}$$

для монохроматической волны в линии. Действительно, соотношение (51.14) доказано в § 46 только при отсутствии затухания ($h'' = 0$) и при наличии потерь становится неправильным. Исключение составляет случай, когда коэффициент затухания h'' от частоты не зависит, как в формуле (51.13); тогда выражение (51.14) соответствует действительности.

Чтобы получить правильное значение групповой скорости в передающих линиях с потерями, необходимо пользоваться выведенной выше формулой (51.04), переходящей для длинной линии с параметрами, не зависящими от частоты, в формулу (51.10). Из последней формулы нетрудно вывести неравенство

$$\frac{v}{v_0} \leqslant 1; \tag{51.16}$$

равенство имеет место лишь при $\Gamma = 1$, т. е. либо при $a = b$, либо при $\omega = \infty$. Фазовая скорость волны в длинной линии определяется формулой

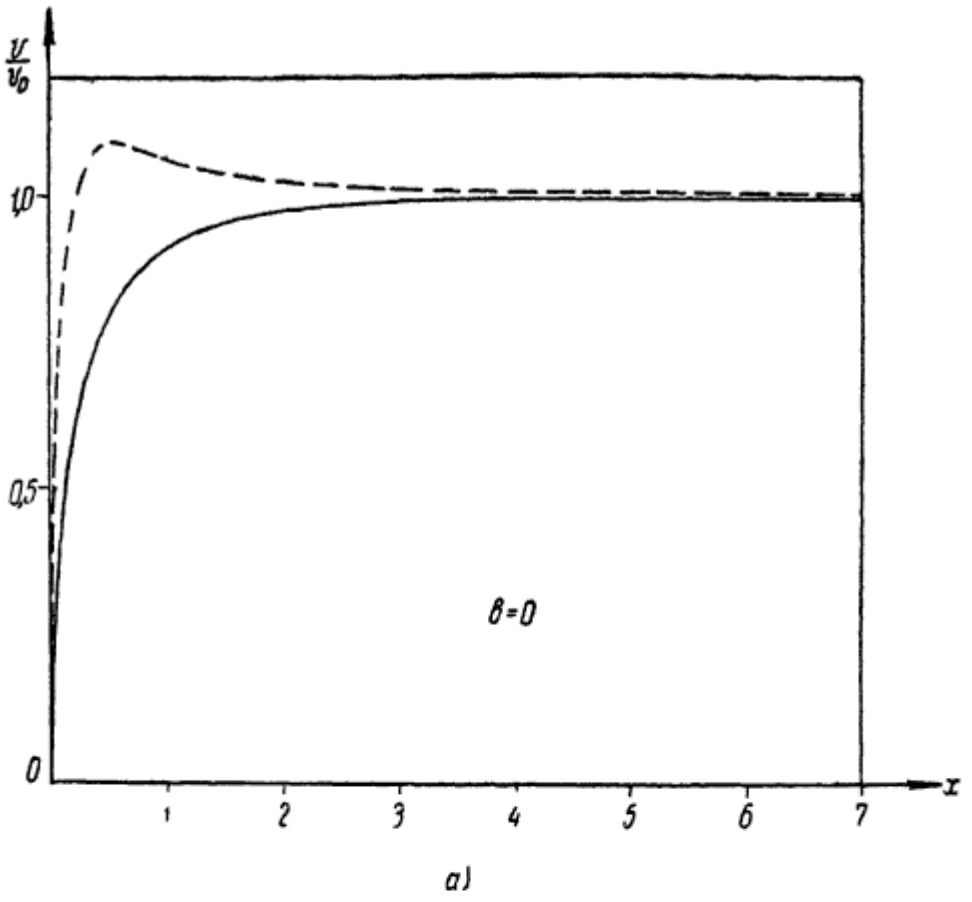
$$\frac{u}{v_0} = \frac{1}{\operatorname{Re}\sqrt{\left(1 + i\frac{a}{\omega}\right)\left(1 + i\frac{b}{\omega}\right)}}. \tag{51.17}$$

Самым интересным результатом нашего анализа является тот факт, что правые части соотношений (51.10) и (51.17) тождественно равны друг другу—что легко показать с помощью элементарных, но несколько громоздких выкладок. Таким образом, несмотря на наличие дисперсии, фазовая и групповая скорости в длинных линиях равны.

В § 46 мы показали, что равенство $u = v$ возможно только при отсутствии дисперсии, когда $u = \text{const}$. Однако это правильно лишь тогда, когда волны при своем распространении не затухают: в линии же с потерями мы имеем $u = v \neq \text{const}$.

На рис. 53 изображена зависимость отношения $\frac{v}{v_0}$ от безразмерной переменной $x = \frac{\omega}{a}$, пропорциональной частоте, при $b = 0$ (рис. 53, *а*), что соответствует, например, длинной линии в пустоте, и при $\frac{a}{b} \approx 62$ (рис. 53, *б*). Пунк-

Электронное наследие России



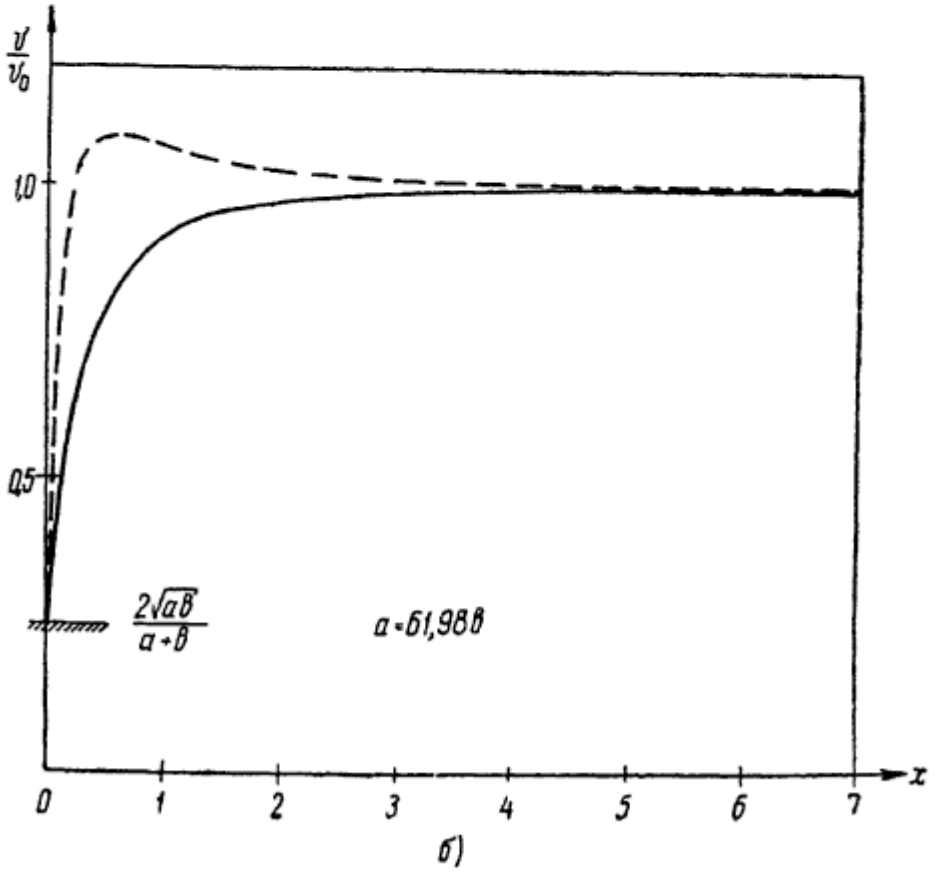


Рис. 53. Групповая скорость в длинной линии, параметры которой не зависят от частоты.

ЭБ "Научное наследие России"

тиром нанесено отношение $\frac{v}{v_0}$, вычисленное по неправильной формуле (51.14), принимающей в данном случае вид

$$\frac{v}{v_0}=\frac{1}{\operatorname{Re}\Gamma\left(\frac{1}{|\Gamma|^2}+1\right)}. \tag{51.18}$$

Мы видим, что эта формула приводит в некотором диапазоне частот к значениям $v>v_0$, что явно неверно, поскольку согласно телеграфным уравнениям передний фронт любого сигнала распространяется со скоростью v_0 [согласно формулам (47.13) и (49.11)], и поэтому групповая скорость v никогда не может превосходить v_0.

Как было отмечено в § 35, на высоких частотах следует учитывать изменение погонных параметров L_i и R с частотой. Считая, что между проводами линии пустота, полагаем $G=0$ и применяем формулу (31.15). Вместо формулы (51.09) мы должны теперь писать

$$W=\sqrt{\frac{L_e}{C}}\,\Delta, \text{ где } \Delta=\sqrt{1+\frac{L_i}{L_e}+i\frac{R}{\omega L_e}} \tag{51.19}$$

и вместо формулы (51.10) получаем следующее выражение для групповой скорости

$$\frac{v}{c}=\frac{2\operatorname{Re}\Delta}{|\Delta|^2+1+\frac{L_i}{L_e}}\leqslant 1. \tag{51.20}$$

Из формулы (35.04) нетрудно получить выражение для фазовой скорости u

$$\frac{u}{c}=\frac{1}{\operatorname{Re}\Delta}, \tag{51.21}$$

которая, как легко показать, тождественно равна групповой скорости v.

Предполагая, что частота достаточно велика, мы согласно теории сильного скин-эффекта будем иметь

$$\frac{L_i}{L_e}=\frac{R}{\omega L_e}=\frac{1}{y}, \tag{51.22}$$

причем введенная в этой формуле безразмерная переменная y будет прямо пропорциональна корню квадратному из частоты f (ср. начало § 35). На рис. 54 изображена

ЭБ "Научное наследие России"

зависимость $\frac{v}{c} = \frac{u}{c}$ от переменной y, вычисленная по формулам (51.20) или (51.21); пунктиром дано отношение $\frac{u}{c}$, вычисленное по приближенной формуле (35.08).

Рис. 54 иллюстрирует рассуждения о фазовой скорости, приведенные в § 35.

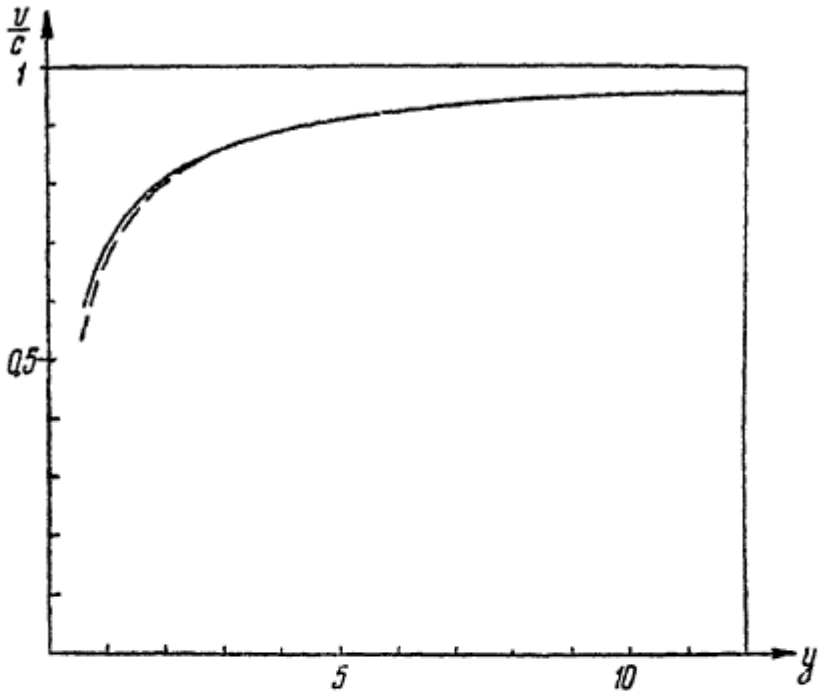


Рис. 54. Групповая скорость в длинной линии при наличии сильного скин-эффекта.

Заметим в заключение, что распространение волн в длинной линии, подчиняющейся телеграфным уравнениям, происходит по тем же законам, что и распространение плоских волн в однородной среде с комплексными проницаемостями

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}; \quad \mu = \mu_0 + i\frac{4\pi\chi}{\omega} \tag{51.23}$$

или распространение волн в идеально проводящей линии, заполненной веществом с такими параметрами (ср. конец § 29). При этом параметры C, G, L и R должны быть пропорциональны параметрам ε_0, $4\pi\sigma$, μ_0 и $4\pi\chi$ соответственно. Если все эти параметры не зависят от частоты, то, полагая

$$v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}; \quad a = \frac{4\pi\chi}{\mu_0}; \quad b = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{51.24}$$

мы, как легко проверить с помощью формул в § 50 и § 11, приходим к тем же выражениям (51.10) и (51.17). В част-

ности, в такой среде фазовая скорость волн будет равна групповой. Если некоторые параметры в длинной линии зависят от частоты, то параметры ε_0, σ, μ_0 или χ „эквивалентной среды“ (51.23) также нужно считать функциями частоты.

§ 52*. Фазовая скорость и колеблющаяся энергия

Фазовая скорость плоских волн в среде может быть легко выражена через энергетические величины, характеризующие эти волны. Если сначала взять плоскую волну (50.04) в среде без потерь ($\varepsilon''=\mu''=0$) и вычислить по формулам (7.12), (7.14) и (7.03) комплексную амплитуду колеблющейся части вектора Умова — Пойнтинга и плотности электромагнитной энергии, то получим

$$\left.\begin{aligned}\tilde{S}_z &= \frac{c}{8\pi}(E_x H_y - E_y H_x) = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(A^2+B^2)\,e^{2iKz}\\ \tilde{w} &= \frac{1}{16\pi}(\varepsilon\mathbf{E}^2+\mu\mathbf{H}^2) = \frac{1}{8\pi}\varepsilon(A^2+B^2)\,e^{2iKz},\end{aligned}\right\} \quad (52.01)$$

откуда

$$\frac{\tilde{S}_z}{\tilde{w}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = u \quad (52.02)$$

или

$$\tilde{S}_z = \tilde{w}u, \quad (52.03)$$

где u есть фазовая скорость волн в непоглощающей среде, введенная в § 11. Сравнивая последнюю формулу с формулой (52.01), мы видим, что фазовая скорость связана с колеблющейся энергией таким же образом, как групповая — со средней энергией.

Формулу (52.03) можно обобщить на случай поглощающих сред. Для этого применим закон сохранения колеблющейся части энергии (7.10)

$$\frac{d\tilde{S}_z}{dz} = 2i\omega\tilde{w} - \tilde{p} \quad (52.04)$$

к плоской волне. Так как по первой формуле (52.01) мы имеем

$$\frac{d\tilde{S}_z}{dz} = 2iK\tilde{S}_z, \quad (52.05)$$

Электронное наследие России

то для волнового числа K можно написать выражение

$$K=\frac{2\omega\tilde{w}+i\tilde{p}}{2\tilde{S}_z}, \tag{52.06}$$

которое при отсутствии потерь переходит в формулу (52.03). Разумеется, все эти выражения дают лишь физическую интерпретацию величин K и u: вычисление этих величин гораздо проще производить по формулам § 11.

В § 7 мы отметили, что вычисление колеблющейся части электрической и магнитной энергии в среде с поглощением и дисперсией наталкивается в общем случае на трудности. Эти трудности могут быть преодолены с помощью эквивалентных схем, введенных в § 49 для вычисления постоянной части электрической и магнитной энергии. Отождествляя колеблющуюся часть энергии в конденсаторе на рис. 51,*а* и в эквивалентных ему схемах (рис. 51,*б* и рис. 51,*в*), мы для среды с диэлектрической проницаемостью (49.12) будем иметь

$$\tilde{w}_э=\frac{1}{16\pi}\left[1-\frac{\omega_0^2}{(\omega+ig)^2}\right]\mathbf{E}^2, \tag{52.07}$$

а для среды с диэлектрической проницаемостью (49.27) получаем

$$\tilde{w}_э=\frac{1}{16\pi}\left[1-\frac{\omega_0^2(\omega^2-\omega_1^2)}{(\omega^2+ig\omega-\omega_1^2)^2}\right]\mathbf{E}^2. \tag{52.08}$$

При $g=0$, когда эти среды не имеют потерь, полученные выражения согласуются с первой формулой (7.14).

Теорема о колеблющейся мощности может быть применена для анализа распространения волн в линиях. Для этого введем (ср. § 51) колеблющуюся энергию поля $\tilde{W}$ и колеблющуюся мощность потерь $\tilde{P}$ на единицу длины линии по формулам

$$\tilde{W}=\int_{S_p}\tilde{w}dS;\quad \tilde{P}=\int_{S_p}\tilde{p}dS, \tag{52.09}$$

а также колеблющуюся мощность, которую волна переносит через поперечное сечение линии

$$\tilde{\Sigma}=\int_{S_p}\tilde{S}_z dS. \tag{52.10}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Из соотношения (7.10) интегрированием по всему поперечному сечению линии ($z = \text{const}$) получаем

$$\frac{d\tilde{\Sigma}}{dz} = 2i\omega\tilde{W} - \tilde{P}. \tag{52.11}$$

Если волна распространяется с продольным волновым числом h (вообще говоря, комплексным), то

$$\tilde{\Sigma}(z) = \tilde{\Sigma}(0)\, e^{2ihz}; \quad \frac{d\tilde{\Sigma}}{dz} = 2ih\tilde{\Sigma}, \tag{52.12}$$

и мы получаем следующую „энергетическую" формулу для волнового числа h

$$h = \frac{2\omega\tilde{W} + i\tilde{P}}{2\tilde{\Sigma}}, \tag{52.13}$$

которую можно применять для приближенных расчетов по методу возмущений. В таких расчетах (ср. § 54) используется чаще теорема об активной мощности, т. е. уравнение (51.03) для монохроматических колебаний $\left(\text{когда } \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} = 0\right)$. Оно приводит к соотношению (54.11), позволяющему вычислить лишь затухание, в то время как соотношение (52.13) позволяет рассчитать как затухание, так и фазовую скорость волны.

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА IX

ПОТЕРИ В ВОЛНОВОДАХ

§ 53. Волноводы, заполненные веществом

Выше мы изучили свойства волноводов с воздушным заполнением, точнее мы считали, что пространство внутри волновода имеет электромагнитные свойства пустоты. В ряде случаев интересно знать, как изменяются свойства волновода при его заполнении однородным веществом с произвольными электродинамическими параметрами. Для ответа на этот вопрос достаточно воспользоваться леммой § 21. Обозначим через ε и μ комплексную диэлектрическую и магнитную проницаемость однородной среды, заполняющей волновод. Для продольного волнового числа в пустом волноводе мы ранее получили формулу

$$h = \sqrt{k^2 - g^2}, \tag{53.01}$$

где g — поперечное волновое число, зависящее лишь от геометрии волновода.

При переходе к волноводу, заполненному веществом, согласно § 21 нужно заменить волновое число k для пустоты комплексным волновым числом $K = k\sqrt{\varepsilon\mu}$ в веществе, и тогда мы получаем продольное волновое число в виде

$$h = \sqrt{k^2\varepsilon\mu - g^2}. \tag{53.02}$$

Формула (53.02) показывает, что, заполняя волновод диэлектриком с вещественным значением $\varepsilon > 1$ и $\mu = 1$, мы получаем возможность передавать по волноводу более длинные волны. Действительно, распространение волны в волноводе с воздушным заполнением возможно лишь при $k > g$, а с диэлектрическим заполнением — при $k > \frac{g}{\sqrt{\varepsilon}}$,

ЭБ "Научное наследие России"

т. е. волна будет распространяться при частотах более низких.

Если среда, заполняющая волновод, имеет потери, т. е. проницаемость ε или μ имеет заметную мниную часть, то при любых соотношениях между рабочей длиной волны и поперечными размерами волновода данная волна в волноводе имеет комплексное продольное волновое число h, как это следует из формулы (53.02). В этом случае нельзя провести четкого разделения волн в волноводе на распространяющиеся и затухающие. Действительно, при таких условиях распространение волн неизбежно связано с затуханием, поскольку при распространении возникают потери в веществе. Чисто затухающих волн при этом также не

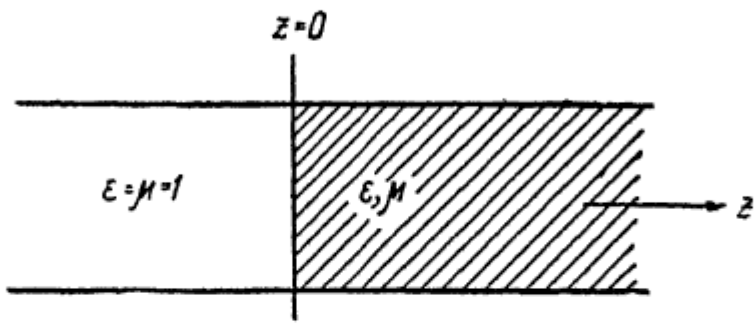


Рис. 55. Волновод, наполовину (при $z > 0$) заполненный веществом с проницаемостями ε и μ.

существует, так как при наличии потерь в среде все волны переносят активную мощность и обладают некоторой скоростью распространения. Заметим, что наличие потерь в стенках волновода (ср. § 56) приводит к аналогичным результатам: распространяющиеся волны приобретают некоторое затухание, а затухающие волны становятся отчасти распространяющимися. При достаточно малых потерях это возмущение свойств волн в волноводе оказывается малым, и данное в гл. VII разделение волн на распространяющиеся и затухающие волны правильно передает их основные черты при частотах, не слишком близких к критической частоте каждой волны. Наличие потерь в волноводе делает, однако, „скачкообразный" переход от распространения к затуханию (при критической частоте данной волны) непрерывным, „размытым".

Разложение волноводных волн на плоские волны (см. § 48) позволяет легко решить задачу о волноводе, наполовину заполненном веществом с комплексными проницаемостями ε и μ (рис. 55). Если слева на границу раздела $z = 0$ набегает волноводная волна, то при этом

очевидно, возникает отраженная волноводная волна и волна, прошедшая в правую половину волновода. Если учесть, что падающая волноводная волна есть в сущности пучок плоских волн, каждая из которых будет отражаться от плоской границы раздела $z=0$ и проникать в однородную среду с проницаемостями ε и μ по законам, изученным нами в § 15 и § 16, то коэффициенты отражения и прохождения можно написать сразу, без каких-либо дополнительных выкладок. При этом в качестве угла падения φ плоских волн нужно взять угол ϑ, определяемый формулой (48.06) или (48.05), поскольку этот угол есть угол между направлением плоской волны и нормалью к плоскости раздела (осью z). Анализируя поляризацию падающих плоских волн, нетрудно показать, что для электрических волн в волноводе мы будем иметь по классификации § 15 волны 1-ой поляризации и поэтому для коэффициентов отражения и прохождения должны брать формулы (15.14). Магнитным волнам в волноводе соответствуют плоские волны 2-й поляризации, для которых нужно брать формулы (15.20).

§ 54. Затухание волн, вызванное потерями в стенках волновода

Во всем предыдущем изложении теории волноводов мы принимали, что стенки волноводов обладают идеальной проводимостью. Разумеется, в реальных условиях проводимость стенок всегда конечна. Конечная проводимость стенок может быть учтена с помощью приближенных граничных условий Леонтовича, применимых при сильном скин-эффекте (§ 25 и § 26). Так как волноводы обычно используются в сантиметровом диапазоне, где толщина скин-слоя имеет порядок микрона или даже меньше (ср. § 12), то скин-эффект в металлических стенках волновода всегда является сильным, и мы можем писать на поверхности стенок граничное условие (25.10):

$$[\mathbf{nE}] = -w\,[\mathbf{n}\,[\mathbf{nH}]]. \qquad (54.01)$$

Волновое сопротивление w металлов есть безразмерное комплексное число, имеющее весьма малую абсолютную величину (ср. начало § 26). Если положить $w=0$, то граничное условие (54.01) принимает вид

$$[\mathbf{nE}] = 0, \qquad (54.02)$$

ЭБ "Научное наследие России"

т. е. переходит в граничное условие (39.07) для идеально проводящих стенок, и мы возвращаемся к развитой выше теории волноводов с идеально проводящими стенками. Малость параметра w означает, что структура электромагнитного поля волны в волноводе с металлическими стенками мало отличается от структуры поля в волноводе, стенкам которого мы приписываем идеальную проводимость. Затухание волн, вызываемое омическими потерями в стенках волновода, обычно невелико (ср. § 55). Однако при достаточно большой длине волноводной линии передачи полное затухание может быть весьма ощутимым, поэтому важно знать величину коэффициента затухания.

Обозначим через h'' коэффициент затухания волноводной волны по полю. Если обозначить через $\overline{\Sigma}(z)$ активную мощность, переносимую волной через поперечное сечение волновода z, то при наличии потерь будем иметь

$$\overline{\Sigma}(z) = \overline{\Sigma}(0)\, e^{-2h''z} \tag{54.03}$$

для волны, распространяющейся в положительном направлении оси z. Поэтому

$$-\frac{d\overline{\Sigma}}{dz} = 2h''\overline{\Sigma}. \tag{54.04}$$

Применим теперь теорему об активной мощности (§ 6), для чего воспользуемся соотношением

$$-\operatorname{div}\overline{\mathbf{S}} = \overline{p}, \tag{54.05}$$

получающимся из уравнения (6.10) путем приравнивания его вещественных частей. Соотношение (54.05) есть закон сохранения энергии в дифференциальной форме: $\overline{p}$ согласно формуле (6.22) есть среднее значение объемной плотности электрических потерь в стенках, поскольку в данной задаче магнитные потери и сторонние токи отсутствуют, а

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*] \tag{54.06}$$

есть согласно формуле (6.15) среднее значение вектора Умова — Пойнтинга. Проинтегрируем соотношение (54.05) по всему поперечному сечению волновода $z = \text{const}$, вклю-

чая его стенки, и воспользуемся двухмерной теоремой Гаусса — Остроградского

$$\int\limits_{S_p}\left(\frac{\partial \overline{S}_x}{\partial x}+\frac{\partial \overline{S}_y}{\partial y}\right)dS=\oint\limits_{C_0}\overline{S}_n dS=0, \tag{54.07}$$

где C_0 есть контур в сечении $z=\text{const}$, ограничивающий сечение S_p и проведенный внутри стенок волновода на такой глубине, что поле на контуре C_0 можно считать равным нулю. Так как интеграл

$$\overline{P}=\int\limits_{S_p}\overline{p}dS \tag{54.08}$$

дает среднюю мощность потерь на единицу длины волновода, т. е. погонную мощность потерь, а введенная выше величина $\overline{\Sigma}$ равна

$$\overline{\Sigma}=\int\limits_{S_p}\overline{S}_z dS, \tag{54.09}$$

то окончательно из соотношения (54.05) получаем „погонный“ закон сохранения энергии

$$-\frac{d\overline{\Sigma}}{dz}=\overline{p}, \tag{54.10}$$

связывающий скорость убывания мощности волны (при ее распространении вдоль линии) с потерями в последней.

Пользуясь формулой (54.04), мы получаем выражение для коэффициента затухания

$$h''=\frac{\overline{P}}{2\overline{\Sigma}}. \tag{54.11}$$

Полученная „энергетическая“ формула для коэффициента затухания h'' является в принципе совершенно точной, если под $\overline{\Sigma}$ и $\overline{P}$ принимать точные значения соответствующих физических величин для волновода со стенками конечной проводимости. Заметим, что при сильном скин-эффекте погонную мощность потерь $\overline{P}$ можно вычислить по формуле (26.18)

$$\overline{P}=\frac{c}{8\pi}\oint\limits_{C}w'\,|H_t|^2\,ds \tag{54.12}$$

ЭБ "Научное наследие России"

или по первой формуле (26.20)

$$\overline{P}=\frac{1}{2}\oint_C \rho|\mathbf{I}|^2 ds. \qquad (54.13)$$

В этих выражениях [в отличие от (54.07)] интегрирование производится по дуге контура C, являющегося линией пересечения стенки волновода с плоскостью $z=\text{const}$. Выражения (54.12) и (54.13) дают потери на единицу длины оси z, поэтому в них фигурирует не элемент площади $dS=dsdz$, как в § 26, а элемент дуги ds.

При применении формулы (54.13) плотность квазиповерхностного тока $\mathbf{I}$ и потери в стенках нам точно неизвестны. Неизвестна также активная мощность $\overline{\Sigma}$, переносимая волной при конечной проводимости стенок. Действительно, эти величины могут быть точно известны только если электродинамическая задача о волноводе с неидеальными стенками решена строго, а в таком случае мы знаем электромагнитное поле и волновое число h, так что в применении формулы (54.11) нет необходимости.

Поэтому энергетическую формулу (54.11) применяют обычно для приближенных расчетов коэффициента затухания, подставляя в нее величины, образованные с помощью известного решения задачи о волноводе с идеально проводящими стенками. Активная мощность $\overline{\Sigma}$ волноводной волны вычисляется по формулам § 44 для идеально проводящего волновода, а мощность потерь $\overline{P}$ рассчитывается по формуле (54.12), в которой магнитное поле H_t берется для идеального волновода, или по формуле (54.13), в которую вместо $\mathbf{I}$ подставляется величина поверхностной плотности тока $\mathbf{i}$ на идеально проводящей стенке волновода.

Этот способ расчета основан на том, что вследствие малости параметра w структура поля внутри волновода мало изменяется при замене идеально проводящих стенок стенками с хорошей, но конечной проводимостью (см. выше). Поэтому при расчете коэффициента затухания h'' по формуле (54. 11) можно в первом приближении пренебречь возмущением поля внутри волновода, вплоть до самой поверхности стенки. В стенке поле изменяется сильно, так как при конечной проводимости в ней образуется скин-слой конечной толщины, приводящий к потерям. Плотность квазиповерхностного тока в скин-слое определяется [по

...ое наследие России"

формуле (26.04)] тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности стенки; последняя и приравнивается тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности идеально проводящей стенки.

Изложенный способ расчета часто называют „методом скин-эффекта". Он является разновидностью метода возмущений и применяется в других случаях, например, при расчете декремента затухания объемных резонаторов (ср. § 98). Некоторое уточнение этого способа расчета будет указано в § 56. Можно сказать, что в данном методе принимается во внимание лишь превращение поверхностного тока на идеальном проводнике в квазиповерхностный ток реального проводника и выделение тепла этим квазиповерхностным током.

Рассчитаем сначала коэффициент затухания электрических волн в волноводе произвольной формы. Формулы § 44 дают

$$\bar{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} hk \int_{S_p} \left(\left| \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right|^2 \right) dS. \qquad (54.14)$$

Преобразуем подынтегральное выражение, используя уравнение (39.03):

$$\left| \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right|^2 = \operatorname{grad} \Pi \operatorname{grad} \Pi^* = \operatorname{div} (\Pi^* \operatorname{grad} \Pi) -$$

$$- \Pi^* \Delta \Pi = \operatorname{div} (\Pi^* \operatorname{grad} \Pi) + g^2 |\Pi|^2, \qquad (54.15)$$

где

$$\Delta \Pi = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}. \qquad (54.16)$$

Применяя теорему Гаусса — Остроградского, получаем

$$\int_{S_p} \left(\left| \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right|^2 \right) dS = \oint_C \Pi^* \frac{\partial \Pi}{\partial n} ds + g^2 \int_{S_p} |\Pi|^2 dS. \qquad (54.17)$$

Вследствие граничного условия (39.08) интеграл по контуру C равен нулю и формула (54.14) принимает вид

$$\bar{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} hkg^2 \int_{S_p} |\Pi|^2 dS. \qquad (54.18)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Для электрических волн имеем

$$|H_t|^2 = k^2 \left|\frac{\partial \Pi}{\partial n}\right|^2, \qquad (54.19)$$

поскольку составляющая $\mathbf{H}$ в направлении x или y по формулам (39.06) пропорциональна производной функции Π в перпендикулярном направлении. Считая для простоты, что материал стенок обладает всюду одними и теми же электромагнитными параметрами ($w' = \text{const}$), получаем выражение для погонных потерь

$$\overline{P} = \frac{c}{8\pi} w' k^2 \oint_C \left|\frac{\partial \Pi}{\partial n}\right|^2 ds, \qquad (54.20)$$

а коэффициент затухания (54.11) можно переписать следующим образом:

$$h'' = \frac{w'N}{2h}, \qquad (54.21)$$

где для сокращения обозначено

$$N = \frac{k \oint \left|\frac{\partial \Pi}{\partial n}\right|^2 ds}{g^2 \int |\Pi|^2 dS}. \qquad (54.22)$$

Рассматривая магнитные волны, мы можем активную мощность представить в виде

$$\overline{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} hkg^2 \int_{S_p} |\Pi'|^2 ds. \qquad (54.23)$$

Переход от формулы (44.05) к формуле (54.23) производится с помощью соотношения (54.17) для функции Π', причем интеграл по контуру C исчезает вследствие граничного условия (40.04).

В силу формул (40.02) имеем

$$|H_t|^2 = |H_s|^2 + |H_z|^2 = h^2 \left|\frac{\partial \Pi'}{\partial s}\right|^2 + g^4 |\Pi'|^2, \qquad (54.24)$$

где H_s — составляющая магнитного поля вдоль касательной к контуру C.

Наличие двух членов в правой части этой формулы объясняется тем, что в магнитных волнах поверхностная

...ое наследие России"

плотность тока имеет как продольную составляющую, пропорциональную H_s (первый член), так и поперечную составляющую, пропорциональную H_z (второй член). У электрических волн токи текут лишь в продольном направлении, и поэтому в правой части формулы (54.19) имеется лишь один член (ср. также § 42, стр. 206).

Если w' не зависит от s, то формулы (54.12) и (54.24) дают

$$\overline{P} = \frac{c}{8\pi} w' \oint_C \left(h^2 \left| \frac{\partial \Pi'}{\partial s} \right|^2 + g^4 |\Pi'|^2 \right) ds. \qquad (54.25)$$

Коэффициент затухания магнитных волн также можно записать в виде (54.21), но величина N для магнитных волн будет другой

$$N = \frac{h^2 \oint \left| \frac{\partial \Pi'}{\partial s} \right|^2 + g^4 \oint |\Pi'|^2 ds}{k g^2 \int |\Pi'|^2 dS}. \qquad (54.26)$$

Напомним еще раз, что во всех этих формулах g и h (а также Π и Π') относятся к идеальному волноводу.

Примеры количественных расчетов по формуле (54.21) даны в § 55. Здесь мы ограничимся качественным исследованием зависимости затухания от частоты. Для этого введем „относительную частоту“

$$\nu = \frac{f}{f_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{k}{g}, \qquad (54.27)$$

равную отношению рабочей частоты к критической частоте данной волны. Рассмотрим значения относительной частоты в пределах

$$1 < \nu < \infty, \qquad (54.28)$$

когда данная волна в идеально проводящем волноводе является распространяющейся. Благодаря конечной проводимости стенок волна приобретает затухание (54.21), для вычисления которого необходимо знать лишь функции Π или Π', характеризующие данную волну в идеальном волноводе. Эти функции, равно как и соответствующие им собственные значения g^2, зависят лишь от геометрии волновода и не зависят от частоты. От частоты зависят лишь следующие величины: k (пропорциональна ν), h (пропор-

ЭБ "Научное наследие России"

циональна $\sqrt{\nu^2-1}$) и w' [пропорциональна $\sqrt{\nu}$, см. формулу (26.02)]. Поэтому для электрических волн получаем

$$h''=\frac{C_0\nu\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu^2-1}}. \tag{54.29}$$

а для магнитных

$$h''=\frac{C_1(\nu^2-1)+C_2}{\sqrt{\nu}\sqrt{\nu^2-1}}, \tag{54.30}$$

где положительные коэффициенты C_0, C_1 и C_2 от ν не зависят. Эти формулы показывают, что при $\nu\to 1$, т. е. при стремлении частоты к критической, затухание волн неограниченно возрастает и при $\nu=1$ обращается в бесконечность. Последний вывод является ошибочным и объясняется неприменимостью данного метода расчета вблизи критической частоты; однако при $\nu\approx 1$ затухание волн действительно становится аномально большим: оно во много раз больше, чем при более высоких частотах (ср. § 56).

При больших значениях ν формула (54.29) принимает вид

$$h''\approx C_0\sqrt{\nu} \tag{54.31}$$

и формула (54.30) приводит к аналогичному соотношению для магнитных волн

$$h''\approx C_1\sqrt{\nu}. \tag{54.32}$$

Таким образом, при достаточно высоких частотах коэффициент затухания возрастает пропорционально квадратному корню из частоты. Подобный закон мы имели и в теории длинных линий [формула (35.09)]. Во всех случаях эта зависимость объясняется тем, что поверхностное сопротивление металла ρ, а также волновое сопротивление металла w пропорциональны корню квадратному из частоты.

Вследствие возрастания h'' при $\nu\to 1$ и $\nu\to\infty$ зависимость коэффициента затухания от частоты имеет характер кривой A на рис. 56. Эта кривая имеет один минимум при $\nu>1$.

Затухание электрических волн всегда представляется кривыми качественно того же вида, что и кривая A на рис. 56. Однако затухание некоторых магнитных волн может изменяться и по кривой вида B. Этот исключительный случай имеет место при $C_1=0$, когда формула (54.30) принимает вид

$$h''=\frac{C_2}{\sqrt{\nu}\sqrt{\nu^2-1}}. \tag{54.33}$$

Электронное наследие России

В этом случае при увеличении частоты затухание быстро спадает, а при $\nu \gg 1$ мы имеем

$$h'' \approx \frac{C_2}{\nu \sqrt{\nu}}. \tag{54.34}$$

Как видно из формулы (54.26), условие $C_1 = 0$ влечет за собой равенство

$$\oint_C \left| \frac{\partial \Pi'}{\partial s} \right|^2 ds = 0, \tag{54.35}$$

что возможно лишь при

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial s} = 0 \text{ или } \Pi' = \text{const на } C. \tag{54.36}$$

Таким образом, затухание представляется кривой вида B лишь для магнитной волны, у которой функция Π' постоянна на граничном контуре C. В прямоугольном волноводе согласно общей формуле (41.13) такой волны нет, однако в круглом волноводе она существует; это—волна H_{01}, для которой функция Π' определяется формулой (42.20), а также волны H_{02}, H_{03} и т. д.

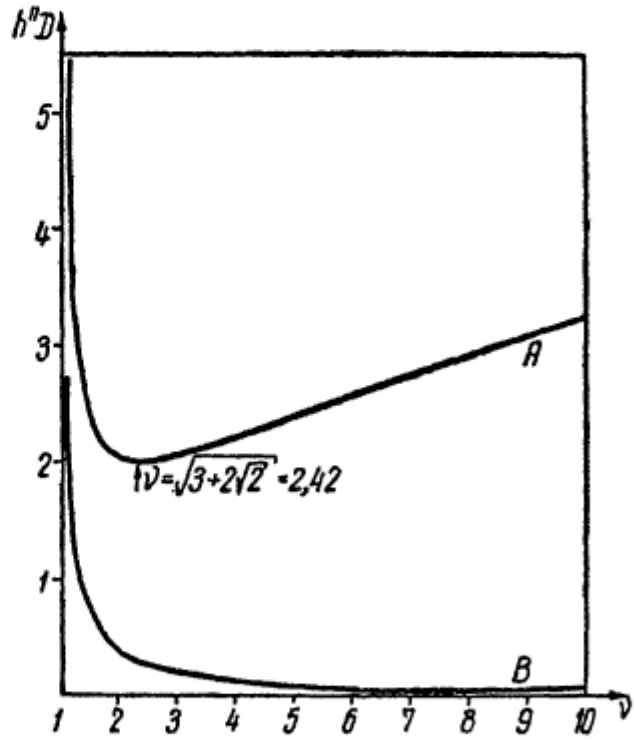


Рис. 56. Коэффициент затухания как функция затухания.

Заметим, что соотношение (54.35) показывает, что у данной магнитной волны продольные токи равны нулю. Физическое отличие волны H_{01} в круглом волноводе, приводящее к аномально малым затуханиям, заключается именно в отсутствии у нее продольных токов (ср. § 42). Наличие продольных токов у всех других волн ведет к формулам (54.31) и (54.32), согласно которым затухание возрастает пропорционально $\sqrt{f}$, как у обычных длинных линий, где токи текут лишь в продольном направлении.

ЭБ "Научное наследие России"

§ 55. Затухание важнейших волн в зависимости от частоты

Выведем расчетную формулу для коэффициента затухания волны H_{10} в прямоугольном волноводе, применяемой обычно для передачи сантиметровых радиоволн. Для этого воспользуемся формулой (54.21) и подставим в формулу (54.26) выражения

$$\Pi' = \cos\frac{\pi x}{a} \text{ и } g = \frac{\pi}{a}, \tag{55.01}$$

в соответствии с (41.16) и (41.17). Напомним, что через a и b обозначены стороны прямоугольного сечения волновода. Пользуясь соотношениями

$$\int |\Pi'|^2 dS = \int_0^a \int_0^b \cos^2\frac{\pi x}{a} dx\, dy = \frac{ab}{2},$$

$$\oint |\Pi'|^2 ds = a + 2b; \quad \oint \left|\frac{\partial \Pi'}{\partial s}\right|^2 ds = \frac{\pi^2}{a} = g^2 a,$$

получим

$$N = 4\frac{\frac{a}{2b}k^2 + g^2}{ka}, \tag{55.02}$$

так что

$$h'' = \frac{2w'}{a}\frac{\frac{a}{2b}k^2 + g^2}{kh}. \tag{55.03}$$

Вводя относительную частоту ν по формуле (54.27) и пользуясь соотношением (26.02), находим

$$h'' = \frac{1}{D}\frac{\frac{a}{2b}\nu^2 + 1}{\sqrt{\nu}\sqrt{\nu^2 - 1}}, \tag{55.04}$$

где коэффициент D равен

$$D = a\sqrt{\frac{\sigma}{f_0}}. \tag{55.05}$$

Через f_0 здесь обозначена критическая частота волны H_{10}, равная

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{2a}, \tag{55.06}$$

...ое наследие России"

и таким образом

$$D = a\sqrt{\frac{2\sigma a}{c}} \qquad (55.07)$$

или

$$D = \sqrt{60\sigma a^3}, \qquad (55.08)$$

если в последнюю формулу подставлять значение σ в практических единицах $ом^{-1} \cdot см^{-1}$ [ср. мнемоническое правило (31.17)]. Заметим, что ширину a нужно выражать в сантиметрах, когда величина D, имеющая размерность длины, также получается в сантиметрах.

Кривая A на рис. 56 построена по формуле (55.04) для волны H_{10} в прямоугольном волноводе, бо́льшая сторона которого вдвое шире меньшей ($a = 2b$). Мы видим, что минимальное затухание достигается при $\nu = 2{,}42$, причем минимум является довольно пологим. Рабочий диапазон частот приходится выбирать слева от этого минимума (при $\nu < 2$), поскольку при $\nu > 2$ появляются распространяющиеся волны H_{01} и H_{20}, в сильной степени усложняющие свойства волновода как передающей линии.

Оценим теперь порядок величины D в формуле (55.04). Для этого положим $a = 2\ см$, $b = 1\ см$, что примерно соответствует размерам стандартного прямоугольного волновода для трехсантиметрового диапазона волн, и возьмем медный волновод с проводимостью стенок $\sigma = 5 \cdot 10^{17}\ сек^{-1}$. В этом случае

$$f_0 = 7{,}5 \cdot 10^9\ гц;\quad \sqrt{\frac{f_0}{\sigma}} = 1{,}23 \cdot 10^{-4}$$

и

$$D \approx 2 \cdot 10^4\ см = 200\ м.$$

Поэтому вблизи минимума затухания на рис. 56 (где $h''D \approx 2$) электромагнитное поле волны H_{10} ослабляется в e раз при передаче на расстояния порядка 100 $м$. При увеличении рабочей длины волны и соответственном расширении поперечных габаритов волновода дальность передачи по волноводу увеличивается, так как длина D пропорциональна $a^{\frac{3}{2}}$.

Наблюдаемые на практике значения коэффициентов затухания всегда несколько превосходят расчетные. Это расхождение, достигающее $15 - 25\%$, можно формально устранить, вводя в формулу (55.05) или (55.08) „эффективное“ значение проводимости стенок, меньшее проводи-

ЭБ "Научное наследие России"

мости σ, измеренной на постоянном токе или на низких частотах. Аналогичное расхождение наблюдается и для декрементов затухания объемных резонаторов.

Снижение „эффективной" проводимости не связано, как правило, с дисперсией и объясняется следующим образом. Во-первых, благодаря малой толщине скин-слоя на сантиметровых волнах в пропускании тока участвуют главным образом поверхностные слои металла, которые вследствие окисления или механической обработки проводят хуже основной массы металла, переносящей ток на низких частотах. Во-вторых, микроскопические неровности и шероховатости металла также приводят к увеличению потерь по сравнению с „гладкой" поверхностью стенок, принятой при расчетах. В пользу этого объяснения говорит то обстоятельство, что эффективная проводимость металла в сильной степени зависит от способа обработки его поверхности.

Как было отмечено в § 54, почти все волны в волноводах имеют качественно такую же зависимость затухания от частоты, что и волна H_{10} в прямоугольном волноводе (кривая A на рис. 56). Исключение составляет волна H_{01} (а также волны H_{02}, H_{03}, ...) в круглом волноводе, затухание которой с ростом частоты неограниченно падает. Для этой волны согласно формуле (42.20) нужно взять

$$\Pi' = J_0(gr); \quad g = \frac{3{,}832}{a}, \tag{55.09}$$

тогда

$$\int |\Pi'|^2 dS = 2\pi \int_0^a J_0^2(gr)\, r dr = \frac{2\pi}{g^2} \int_0^{ga} J_0^2(x)\, x dx;$$

$$\oint \left|\frac{\partial \Pi'}{\partial s}\right|^2 ds = 0; \quad \oint |\Pi'|^2 ds = 2\pi a J_0^2(ga).$$

Известное соотношение теории бесселевых функций (см., например, книгу Ватсона, стр. 148)

$$\int_0^{ga} J_0^2(x)\, x dx = \int_0^{ga} \frac{x^2}{2} [J_0^2(x) - J_1^2(x)] = \frac{g^2 a^2}{2} J_0^2(ga) \tag{55.10}$$

в данном случае упрощается в силу того, что

$$J_0'(ga) = -J_1(ga) = 0. \tag{55.11}$$

ЭБ "Научное наследие России"

По формуле (54.26) мы получаем

$$N=\frac{2g^2}{ka}, \tag{55.12}$$

так что коэффициент затухания волны h'' в круглом волноводе можно записать в виде

$$h''=\frac{1}{D}\frac{1}{\sqrt{\nu}\sqrt{\nu^2-1}}; \quad D=2a\sqrt{\frac{\sigma}{f_0}}. \tag{55.13}$$

Кривая B на рис. 56 вычислена по этой формуле.

Заметим, что при $\frac{a}{2b}=0$ формула (55 04) принимает тот же вид, что и формула (55.13). Таким образом, заменяя в пределе при $b\to\infty$ прямоугольный волнозод парой параллельных плоскостей, получаем для волны H_{10} в такой передающей линии аномально малые затухания—такие же, как у волны H_{01} в круглом волноводе. Физически это объясняется тем, что волна H_{10} в прямоугольном волноводе возбуждает продольные токи на сторонах a, а на сторонах b текут лишь поперечные токи [это легко показать из формул (41.18) для магнитного поля]. Поэтому, неограниченно увеличивая сторону b и получая в пределе пару параллельных плоскостей, мы приходим к волне с чисто поперечными токами на этих плоскостях.

Напомним в заключение, что распространение волны H_{01} в круглой трубе возможно только при частотах, при которых могут распространяться волны других типов (ср. § 42). Это создает дополнительные трудности для возбуждения волны H_{01} и сохранения ее в чистом виде при передаче на большие расстояния. Особенно легко волна H_{01} переходит в волну E_{11}, обладающую в идеальном волноводе той же скоростью.

§ 56*. Влияние конечной проводимости стенок на волны в волноводе

Выше мы показали, что конечная проводимость стенок приводит к затуханию волн в волноводе. Фактически проводимость стенок влияет также на скорость волны и на структуру ее поля. Все эти явления можно учесть более последовательно, если рассматривать переход к граничному условию (54.01) от граничного условия (54.02) мето-

ЭБ "Научное наследие России"

дом возмущений, считая w малым параметром и представляя электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в виде

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=[\mathbf{E}_0(x,\ y)+w\mathbf{E}_1(x,\ y)+\ldots]\,e^{ihz},\\ \mathbf{H}&=[\mathbf{H}_0(x,\ y)+w\mathbf{H}_1(x,\ y)+\ldots]\,e^{ihz},\end{aligned}\right\} \tag{56.01}$$

где волновое число h равно

$$h=h_0+wh_1+\ldots \tag{56.02}$$

При этом поля $\mathbf{E}_0 e^{ih_0z}$, $\mathbf{H}_0 e^{ih_0z}$ соответствуют идеально проводящему волноводу, а выражения, пропорциональные w, дают первую поправку на конечную проводимость стенок.

Из формулы (56.02) вытекает выражение для коэффициента затухания

$$h''=w'\operatorname{Im}h_1+w''\operatorname{Re}h_1, \tag{56.03}$$

где w' — вещественная, а w'' — мнимая часть волнового сопротивления металлической стенки.

Сопоставляя формулу (56.03) с полученным выше соотношением (54.21), получим $\operatorname{Re}h_1=0$ и

$$h_1=\frac{iN}{2h_0}, \tag{56.04}$$

где h_0 — волновое число в идеальном волноводе, а положительная величина N определяется формулой (54.22) для электрических волн и формулой (54.26) для магнитных. Таким образом, формула (56.02) принимает вид

$$h=h_0+\frac{iwN}{2h_0}. \tag{56.05}$$

Физический смысл этой формулы заключается в том, что вещественная часть w, т. е. активное поверхностное сопротивление металла ρ [ср. формулы (26.06) и (26.13)], определяет затухание волны, а мнимая часть w (реактивное поверхностное сопротивление ξ) определяет возмущение фазовой скорости волны. Действительно, формула (56.05) дает

$$h'=h_0-\frac{w''N}{2h_0}. \tag{56.06}$$

В силу формулы (26.02) мы обычно имеем $w'=-w''$, поэтому

$$h'=h_0+\frac{w'N}{2h_0}=h_0+h'', \tag{56.07}$$

Научное наследие России

и фазовая скорость в первом приближении равна

$$u = \frac{\omega}{h_0 + h''}. \qquad (56.08)$$

Она уменьшается под влиянием конечной проводимости стенок. Подобный же результат мы получили раньше для длинных линий [см. формулу (35.08)].

Недостаток выражений (56.05)—(56.08) заключается в том, что вблизи критической частоты (когда $h_0 \to 0$) они становятся неприменимыми. Если обе части равенства (56.05) возвести в квадрат, то мы получим формулу

$$h^2 = h_0^2 + i\omega N + \ldots \qquad (56.09)$$

или

$$h = \sqrt{h_0^2 + i\omega N + \ldots}, \qquad (56.10)$$

которая уже при $h_0 \to 0$ бесконечных выражений не дает.

Как показал Б. З. Каценеленбаум, выражения (56.09) или (56.10) получаются с помощью последовательного проведения метода возмущений и применимы при любых частотах, в частности при критической частоте (когда $h_0 = 0$) и при более низких частотах (когда $h_0^2 < 0$). При критической частоте

$$h = \sqrt{i\omega N}, \qquad (56.11)$$

так что затухание имеет порядок $\sqrt{|\omega|}$. Поскольку величина $|\omega|$ мала, а при более высоких частотах затухание имеет порядок $|\omega|$, то отсюда следует, что при приближении рабочей частоты к критической частоте затухание резко возрастает. Эта тенденция приближенно передается формулой (54.21), хотя при самой критической частоте и при весьма близких частотах эта формула неприменима.

Формула (56.10) сохраняет свою силу также при частотах, меньших критической частоты. В этом случае из нее вытекает формула (56.05), которая вследствие соотношения $h_0 = i|h_0|$ принимает вид

$$h = i|h_0| + \frac{\omega N}{2|h_0|}. \qquad (56.12)$$

Таким образом, благодаря конечной проводимости стенок продольное волновое число затухающей волны приобре-

ЭБ "Научное наследие России"

тает небольшую вещественную часть, и эта волна становится „слегка распространяющейся". Наоборот, распространяющаяся волна приобретает, как мы видели выше, небольшое затухание порядка $|w|$.

Аналогичные соотношения мы имеем при заполнении волновода веществом с малыми потерями (ср. § 53). Пусть, например, это — диэлектрик

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''; \quad \varepsilon'' \ll 1; \quad \mu = 1. \tag{56.13}$$

По формуле (53.02) мы получаем

$$h = \sqrt{k^2\varepsilon' - g^2 + ik^2\varepsilon''} = \sqrt{h_0^2 + ik^2\varepsilon''}, \tag{56.14}$$

где

$$h_0 = \sqrt{k^2\varepsilon' - g^2} \tag{56.15}$$

есть продольное волновое число в волноводе, заполненном диэлектриком без потерь ($\varepsilon'' = 0$). При частоте, заметно превышающей критическую частоту, когда

$$h_0^2 \gg k^2\varepsilon'', \tag{56.16}$$

формула (56.14) принимает вид

$$h = h_0 + \frac{ik^2\varepsilon''}{2h_0}, \tag{56.17}$$

аналогичный виду формулы (56.05). Формула (56.17) показывает, что затухание волн в волноводе имеет порядок ε''. Вблизи критической частоты, когда $h_0 \approx 0$, выражение (56.17) неприменимо, поэтому нужно пользоваться исходной формулой (56.14). В частности, при $h_0 = 0$ мы получаем

$$h = k\sqrt{i\varepsilon''}, \tag{56.18}$$

так что затухание имеет порядок $\sqrt{\varepsilon''}$.

Мы не будем обосновывать формулы (56.09) в общем случае и лишь проверим ее справедливость для волны H_{01} в круглом волноводе. Электромагнитное поле симметричных магнитных волн в круглом волноводе можно согласно формуле (42.20) вычислить с помощью функции

$$\Pi' = CJ_0(gr), \tag{56.19}$$

...ое наследие России"

а именно

$$\left.\begin{aligned} E_\varphi &= -ik\frac{\partial \Pi'}{\partial r}e^{ihz} = ikgCJ_1(gr)e^{ihz};\\ H_r &= ih\frac{\partial \Pi'}{\partial r}e^{ihz} = -ihgCJ_1(gr)e^{ihz};\\ H_z &= g^2\Pi' e^{ihz} = g^2CJ_0(gr)e^{ihz};\\ E_r &= E_z = H_\varphi = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (56.20)$$

где мы воспользовались соотношением (22.15). Граничное условие Леонтовича

$$E_\varphi = wH_z \qquad (56.21)$$

приводит к характеристическому уравнению

$$\frac{J_1(ga)}{gaJ_0(ga)} = \frac{w}{ika}, \qquad (56.22)$$

из которого определяется поперечное волновое число g и, следовательно, продольное волновое число

$$h = \sqrt{k^2 - g^2}. \qquad (56.23)$$

При $w = 0$, т. е. для идеального волновода, характеристическое уравнение (56.22) упрощается и принимает вид

$$J_1(ga) = 0. \qquad (56.24)$$

Решение этого уравнения обозначим через g_0; для волны H_{01} согласно формуле (42.21) имеем $g_0 = \frac{\mu_{01}}{a} = \frac{3{,}832}{a}$.

Решение уравнения (56.22) мы будем искать в виде

$$g = g_0 + wg_1 + \ldots \qquad (56.25)$$

В первом приближении можно положить

$$\left.\begin{aligned} J_1(ga) &= J_1(g_0a) + wg_1aJ_1'(g_0a) + \ldots = wg_1aJ_0(g_0a) + \ldots\\ J_0(ga) &= J_0(g_0a) + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (56.26)$$

где мы воспользовались формулой (89.16)

$$J_1'(x) = J_0(x) - \frac{1}{x}J_1(x) \qquad (56.27)$$

ЭБ "Научное наследие России"

и уравнением (56.24). Подстановка выражений (56.26) в уравнение (56.22) дает

$$g_1 = -\frac{ig_0}{ka}, \tag{56.28}$$

так что

$$g^2 = g_0^2 + 2wg_0g_1 + \ldots = g_0^2 - \frac{2iwg_0^2}{ka} + \ldots \tag{56.29}$$

$$h = \sqrt{h_0^2 + \frac{2iwg_0^2}{ka} + \ldots}, \text{ где } h_0^2 = k^2 - g_0^2. \tag{56.30}$$

В силу формулы (55.12) выражение (56.30) согласуется с общим соотношением (56.10).

Сравнительная простота непосредственного вычисления волнового числа волны H_{01} связана с тем, что при конечной проводимости стенок она сохраняет свой „магнитный" характер, т. е. имеет $E_z = 0$. В общем случае этого уже не будет. А именно, волны, являющиеся в идеальном волноводе электрическими, под влиянием конечной проводимости стенок становятся „слегка магнитными", т. е. приобретают небольшую составляющую H_z. Наоборот, магнитные волны становятся „слегка электрическими" благодаря приобретению малой составляющей E_z. Поэтому электромагнитная волна в неидеальном волноводе представляется в виде суммы электрической и магнитной волн, распространяющихся с одним и тем же комплексным волновым числом h. Таким свойством обладают все волны в прямоугольном волноводе и несимметричные волны (волны E_{11}, H_{11}, ...) в круглом.

Другой особенностью волны H_{01} является ее вырождение: в идеальном круглом волноводе то же волновое число h_0 имеет волна E_{11} (см. § 42). Под влиянием конечной проводимости стенок это вырождение *снимается*, поскольку волны H_{01} и E_{11} имеют различное затухание. При этом волны H_{01} и E_{11} имеются и в реальных волноводах, но в слегка возмущенном виде.

В общем случае вырождение, имеющее место в идеальном волноводе, под влиянием возмущения (конечной проводимости стенок) снимается более сложным образом. В частности, нельзя утверждать, что структура поля *вырожденной* волны мало изменяется под влиянием возмущения, так как такая волна может распадаться на две или несколько волн, по-разному распространяющихся в неидеальном волноводе.

...ое наследие России"

В § 54 мы считали, что структура поля данной волны слабо изменяется под влиянием конечной проводимости стенок и что данная волна распространяется в неидеальном волноводе как единое целое, не распадаясь на несколько волн. Поэтому полученные выше результаты относятся, вообще говоря, лишь к невырожденным волнам (например, к волне H_{10} в прямоугольном волноводе). Если же данная волна является вырожденной, то для применения к ней формул (54.21) или (56.10) необходимо произвести особое исследование, подобное проведенному выше для волны H_{01} в круглом волноводе. В частности, необходимо показать, что в рассматриваемом нами неидеальном волноводе она не распадается. Если же это не показано, то мы можем по формуле (54.21) получить коэффициент затухания несуществующей волны.

Во многих книгах по волноводам читатель может найти графики для коэффициента затухания волн E_{11}, H_{11} и т. д. в прямоугольном волноводе, вычисленные по формуле (54.21) или формулам, ей эквивалентным. Эти графики не имеют смысла, поскольку в реальном прямоугольном волноводе волна E_{11} или волна H_{11} в отдельности распространяться не может, а существуют лишь волны, близкие к некоторым линейным комбинациям этих волн.

В заключение заметим, что формулу (56.09) можно применить и к передающим линиям 1-ой группы, например к коаксиальной линии, и мы получаем формулу (35.03), выведенную ранее с помощью телеграфных уравнений. Действительно, в этом случае нужно считать $h_0^2 = k^2$ и вычислять величину N по формуле

$$N = \frac{k \oint \left| \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right|^2 ds}{\int \left(\left| \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right|^2 \right) dS}, \qquad (56.31)$$

поскольку для поперечной волны, имеющей $g_0^2 = 0$, заменять формулу (54.14) формулой (54.18) нельзя. С этим исправлением расчет затухания поперечной волны в длинной линии не отличается от расчета затухания электрической волны в волноводе, так как обе волны характеризуются функцией Π, связанной с продольной составляющей электрического вектора Герца одинаковыми формулами (29.01) и (39.01).

ЭБ "Научное наследие России"

Формула (54.17) для поперечной волны принимает вид

$$\int\limits_{S_p}\left(\left|\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right|^2\right)dS=\oint\limits_{C}\Pi^*\frac{\partial \Pi}{\partial n}ds, \tag{56.32}$$

так что окончательно

$$N=\frac{k\int\left|\frac{\partial \Pi}{\partial n}\right|^2 ds}{\oint \Pi^*\frac{\partial \Pi}{\partial n}ds}. \tag{56.33}$$

Ограничиваясь для простоты случаем коаксиальной линии, где

$$\Pi=\ln\frac{r}{a};\quad \frac{\partial \Pi}{\partial r}=\frac{1}{r} \tag{56.34}$$

и учитывая, что контур C состоит из двух окружностей с радиусами a и b, мы получаем

$$N=\frac{k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{56.35}$$

Формула (56.09) приводит поэтому к выражению

$$h^2=k^2+ik\varpi\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\ln\frac{b}{a}}. \tag{56.36}$$

При сильном скин-эффекте и одинаковых электрических параметрах внутреннего и внешнего проводников коаксиальной линии ее погонный внутренний импеданс согласно формулам (33.23) и (33.24) оказывается равным

$$Z_i=\frac{\zeta}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{2\varpi}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right). \tag{56.37}$$

Так как погонная емкость линии равна

$$C=\frac{1}{2\ln\frac{b}{a}}, \tag{56.38}$$

то формула (56.36) принимает вид

$$h^2=k^2+i\omega CZ_i=k^2+i\omega C(R-i\omega L_i), \tag{56.39}$$

что полностью согласуется с формулой (35.03).

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА X

РУПОРЫ

§ 57. Электромагнитные волны в рупорах

Для создания направленного излучения радиоволн часто применяют рупорные антенны или кратко рупоры. Рупоры особенно удобны в сантиметровом диапазоне радиоволн, поскольку в конструктивном отношении они хорошо сочетаются с волноводами, являясь как бы их естественным продолжением (рис. 57).

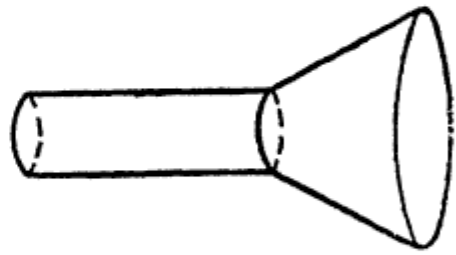


Рис. 57. Круглый волновод, переходящий в конический рупор.

Разумеется, электромагнитные волны могут излучаться в пространство непосредственно из открытого конца волновода. Однако рупор делает излучение более направленным, так как благодаря рупору площадь излучающего отверстия возрастает. Кроме того, рупор улучшает согласование волновода с открытым пространством (см. ниже), благодаря чему от генератора отбирается бо́льшая мощность и излучаемая мощность растет.

Идея применения рупоров была перенесена в сантиметровую радиотехнику из акустики. Однако у обычного переговорного рупора в акустике размеры излучающего отверстия составляют малую часть длины волны и потому рупор дает почти ненаправленное излучение. Основное назначение такого рупора — улучшать согласование источника звука с открытым пространством.

Основные свойства рупоров легко понять и даже приближенно рассчитать, если рассматривать рупор как постепенно расширяющийся волновод. В следующем пара-

ЭБ "Научное наследие России"

графе мы увидим, что такой подход позволяет составить наглядное представление о волнах, распространяющихся в рупоре. Таким образом можно оценить и свойства открытого конца рупора как передающей антенны (ср. § 87).

Отмеченное выше отличие в свойствах акустических и электромагнитных рупоров имеет место несмотря на то, что размеры их примерно одного порядка. Это отличие вызывается в основном двумя причинами:

1. Звуковые волны являются волнами продольными.

2. Звук, воспринимаемый человеческим ухом, соответствует довольно длинным волнам, например, нота „до" основной октавы (с частотой 256 *гц*) имеет в воздухе длину волны $\lambda = 1{,}3$ *м*. Лишь самые высокие ноты слухового диапазона имеют длину волны порядка нескольких сантиметров.

Вследствие продольности звуковых волн они могут распространяться по трубам („акустическим волноводам") сравнительно малого диаметра при любой длине волны. Действительно, звук распространяется по трубе в виде „поршневой" волны, т. е. в виде продольной плоской волны, ограниченной со всех сторон стенкой трубы и бегущей вдоль оси трубы со скоростью звука в свободном пространстве.

Из-за больших длин волн в акустике направленные звуковые антенны получаются лишь при больших габаритах, как, например, в случае больших разнесенных рупоров („ушей") в звуковых пеленгационных установках.

Как было указано выше, излучение из открытого конца рупора не отличается существенным образом от излучения из волновода с тем же отверстием. Для круглого волновода можно, как оказывается, дать строгое решение задачи об излучении звуковых и электромагнитных волн и таким образом получить теоретическое представление и о свойствах конического рупора, изображенного на рис. 57.

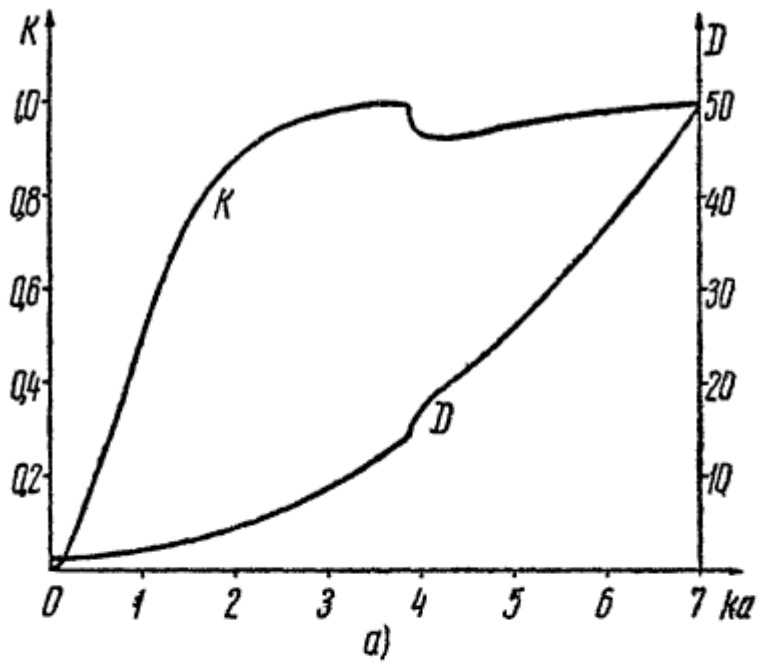
В общем случае излучение открытого конца волновода или рупора можно характеризовать двумя параметрами: коэффициентом направленности D и величиной K, которую можно условно назвать „коэффициентом излучения". Коэффициент D равен отношению мощности, излучаемой антенной в главном направлении (максимум диаграммы направленности), к мощности, излучаемой в любом направлении изотропным излучателем (при одной и той же полной излучаемой мощности). Коэффициент K равен отношению полной мощности, излучаемой из открытого конца, к мощности бегущей волны, распространяющейся в волноводе или рупоре по направлению к его открытому концу. Величина K характеризует степень согласования волновода или рупора со свободным пространством.

На рис. 58,*а* изображены коэффициенты D и K для звуковой волны в зависимости от переменной ka, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число в воздухе, a — радиус отверстия.

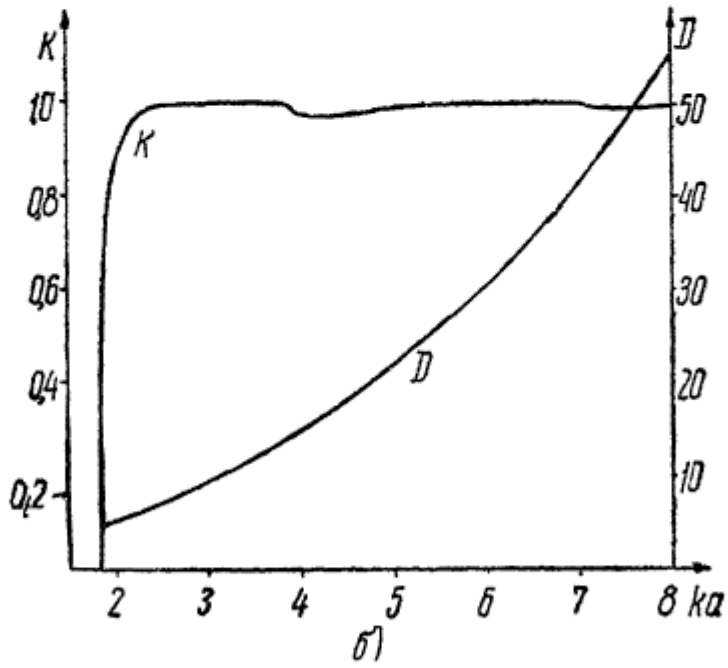
Эти кривые построены по строгой теории звуковых волн в открытой круглой трубе, но при малых углах раствора ϑ они приближенно применимы и к коническому рупору с отверстием радиуса a

ЭБ "Научное наследие России"

(см. рис. 57). Рис. 58,*а* показывает, что для длинных звуковых волн, соответствующих значениям $ka < 1$, увеличение излучающего отверстия приводит лишь к сильному увеличению K при почти постоянном D. Так, например, при переходе от $ka = 0{,}1$ к значению $ka = 1$, что соответствует увеличению радиуса излучающего отверстия в



а)



б)

Рис. 58. Коэффициенты D и K для открытого конца круглой трубы:

а — для звуковой волны; *б* — для электромагнитной волны.

10 раз, величина K увеличивается примерно в 50 раз, а величина D — всего в 2 раза. Поэтому акустические рупоры лишь увеличивают отдачу мощности в свободное пространство и не создают сильно направленного излучения.

С электромагнитными рупорами дело обстоит как раз наоборот. На рис. 58,*б* изображены коэффициенты D и K для волны H_{11} в

ЭБ "Научное наследие России"

круглом волноводе, наиболее пригодной для передачи электромагнитной энергии по такому волноводу. Действительно, эта волна обладает наинизшей критической частотой, соответствующей значению $ka = 1{,}841$ (см. § 42). При излучении эта волна создает максимальное поле в направлении „прямо вперед" (ср. § 89), подобно рассмотренной выше поршневой звуковой волне. Рис. 58,*б* показывает, что для обычного круглого волновода при $ka \geqslant 2$ коэффициент K близок к единице, так что практически при частоте, лишь немного превышающей критическую частоту, волновод сам по себе хорошо согласован со свободным пространством; наличие рупора может улучшить это согласование лишь в совершенно незначительной степени. Рис. 58,*б* можно приближенно применить к коническому рупору с малым углом раствора γ; мы видим, что благодаря рупору увеличивается D, т. е. сильно растет направленность излучения.

Как показывает опыт, в прямоугольном волноводе коэффициент отражения волны H_{10} от открытого конца обычно больше, чем в круглом, поэтому согласующая функция рупора выражена более заметно. Однако главное действие рупора и здесь заключается в формировании излучения с нужной направленностью.

§ 58. „Электрические" и „магнитные" волны в секториальном рупоре

Исследуем электромагнитные волны в секториальном рупоре. Секториальный рупор расширяется лишь в одном поперечном измерении (рис. 59). Если ввести цилиндрическую систему r, φ, z, то боковые стенки рупора, образующие между собой двухгранный угол α, могут быть совмещены с координатными плоскостями $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$, а верхняя и нижняя стенки рупора — с плоскостями $z = 0$ и $z = l$, где l — высота секториального рупора.

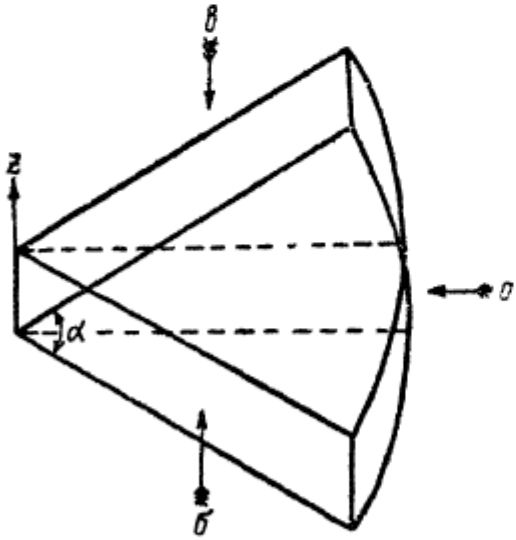


Рис. 59. Секториальный рупор.

Электромагнитные волны, существующие в секториальном рупоре, могут быть подобно волнам в волноводе разбиты на два класса — на электрические и на магнитные волны. Это разбиение производится относительно координаты z: электрические волны имеют $E_z \neq 0$, $H_z = 0$, у магнитных $E_z = 0$, $H_z \neq 0$. Так как координата z не совпадает с направлением распространения волн в рупоре (последние являются цилиндрическими волнами и движутся в направлении радиальной координаты r), то данное разбиение

Электронное наследие России"

физически не соответствует волноводной классификации, поэтому в дальнейшем применительно к секториальному рупору термины „электрическая“ или „магнитная“ волна мы будем употреблять в кавычках.

„Электрические“ волны в секториальном рупоре вычисляются по формулам (18.03) с помощью электрического вектора Герца, имеющего единственную составляющую Π_z ($\Pi_x = \Pi_y = 0$). Если переписать эти формулы в цилиндрической системе координат, то получим составляющие электромагнитного поля в виде

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r \partial z}; & H_r &= -\frac{ik}{r}\frac{\partial \Pi_z}{\partial \varphi}; \\ E_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \varphi \partial z}; & H_\varphi &= ik\frac{\partial \Pi_z}{\partial r}; \\ E_z &= \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z; & H_z &= 0. \end{aligned} \tag{58.01}$$

Отсутствие составляющей H_z оправдывает название „электрическая“ волна.

Функция Π_z должна удовлетворять волновому уравнению, которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z = 0. \tag{58.02}$$

На стенках рупора, которые мы считаем идеально проводящими, должны выполняться граничные условия

$$E_r = E_\varphi = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = l \tag{58.03}$$

и

$$E_r = E_z = 0 \text{ при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \alpha. \tag{58.04}$$

Эти условия могут быть выполнены, если функция Π_z удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial \Pi_z}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = l \tag{58.05}$$

и

$$\Pi_z = 0 \text{ при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \alpha. \tag{58.06}$$

Функцию Π_z мы ищем виде

$$\Pi_z = R(r)\,\Phi(\varphi)\,Z(z). \tag{58.07}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Применяя метод разделения переменных к уравнению (58.02), для функций R, Φ и Z получаем уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(h^2-\frac{p^2}{r^2}\right)R=0,\\ &\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+p^2\Phi=0,\\ &\frac{d^2Z}{dz^2}+g^2Z=0. \end{aligned}\right\} \qquad (58.08)$$

Здесь p^2 и g^2 суть две постоянные разделения, а $h^2=k^2-g^2$. В силу условия (58.05) мы должны иметь

$$\frac{dZ}{dz}=0 \text{ при } z=0 \text{ и } z=l \qquad (58.09)$$

и отсюда

$$Z=\cos gz,\ g=\frac{n\pi}{l}\ (n=0,\ 1,\ 2,\ldots). \qquad (58.10)$$

Так как согласно условию (58.06)

$$\Phi=0 \text{ при } \varphi=0 \text{ и } \varphi=\alpha, \qquad (58.11)$$

то

$$\Phi=\sin p\varphi,\ p=\frac{m\pi}{\alpha}\ (m=1,\ 2,\ldots). \qquad (58.12)$$

Далее, общее выражение для функции R имеет вид

$$R=CJ_p(hr)+C'N_p(hr). \qquad (58.13)$$

В этих формулах обозначения несколько изменены по сравнению с § 22, где также рассматривались цилиндрические волны [см. формулы (22.16) — (22.21)].

Обобщая волноводную терминологию, можно назвать g поперечным волновым числом, а h — продольным (или радиальным) волновым числом, поскольку h определяет зависимость поля от радиальной координаты, вдоль которой происходит распространение волн. Если в рупоре образуются волны, бегущие в радиальном направлении от его вершины, то нужно брать $C'=iC$. Тогда функция R будет равна

$$R=CH_p^{(1)}(hr), \qquad (58.14)$$

что соответствует расходящейся цилиндрической волне.

...ое наследие России"

Окончательно мы получаем следующее выражение:

$$\left.\begin{aligned} &\Pi_z = CH^{(1)}_{\frac{m\pi}{\alpha}}(hr)\sin\frac{m\pi\varphi}{\alpha}\cos\frac{n\pi z}{l}, \\ &\text{где} \\ &h = \sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \quad m = 1,\ 2,\ldots;\ n = 0,\ 1,\ 2,\ldots. \end{aligned}\right\} \tag{58.15}$$

оно определяет электромагнитное поле волны, которую можно назвать „электрической" волной E_{mn} в секториальном рупоре (по отношению к координате z).

Наибольший интерес представляет простейшая „электрическая" волна E_{10}, для которой

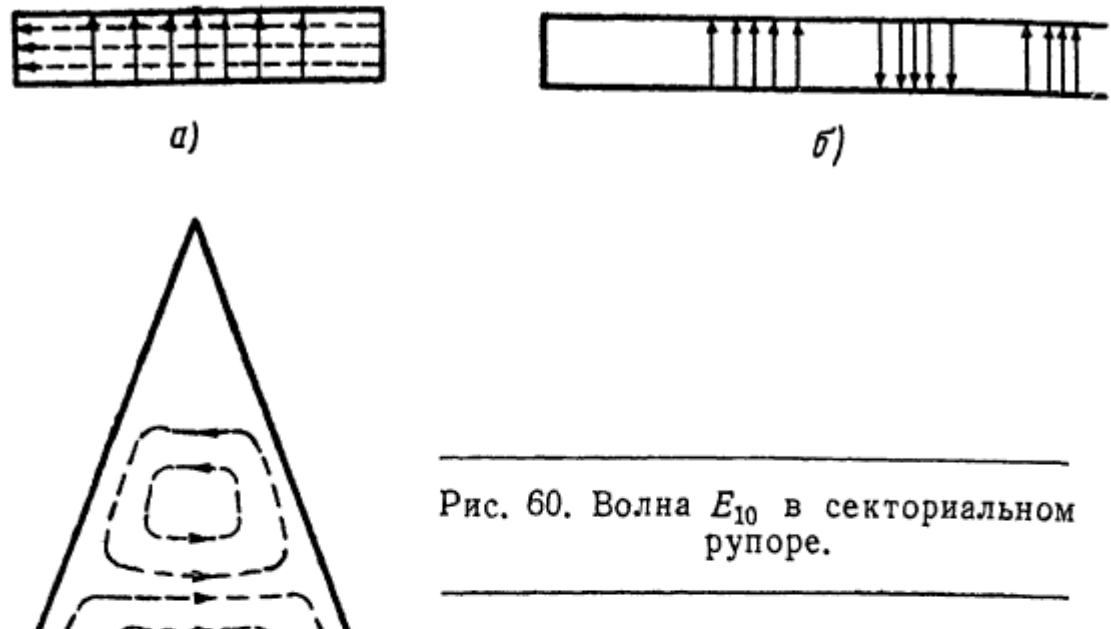
$$\Pi_z = CH^{(1)}_{\frac{\pi}{\alpha}}(kr)\sin\frac{\pi\varphi}{\alpha} \tag{58.16}$$

и по формулам (58.01)

$$\left.\begin{aligned} E_z &= k^2 CH^{(1)}_{\frac{\pi}{\alpha}}(kr)\sin\frac{\pi\varphi}{\alpha}, \\ H_r &= -\frac{ik\pi}{\alpha r}CH^{(1)}_{\frac{\pi}{\alpha}}(kr)\cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}, \\ H_\varphi &= ik^2 CH^{(1)'}_{\frac{\pi}{\alpha}}(kr)\sin\frac{\pi\varphi}{\alpha}, \\ E_r &= E_\varphi = H_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{58.17}$$

Для того, чтобы разобраться в структуре электромагнитного поля этой волны, нарисуем мгновенную картину распределения электрических (сплошные кривые) и магнитных (пунктирные) силовых линий при наблюдении электромагнитного поля в рупоре с трех направлений *а*, *б* и *в* на рис. 59. Поверхности равной фазы суть цилиндрические поверхности $r = \text{const}$, как это видно из формул (58.16) и (58.17). На каждой из этих поверхностей силовые линии электрического поля будут образовывать вертикальный пучок, наиболее густой при $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ (рис. 60,*а*). На той же поверхности магнитные силовые линии горизонтальны. Вблизи средней плоскости рупора, где $\sin\frac{\pi\varphi}{\alpha} \approx$

≈ 1 и $\cos\frac{\pi\varphi}{\alpha} \approx 0$, магнитные силовые линии будут практически лежать на поверхности $r = \text{const}$. Однако при приближении к боковым стенкам рупора (при $\varphi \approx 0$ и $\varphi \approx \alpha$) составляющая H_r становится преобладающей, магнитные силовые линии идут вдоль этих стенок и замыкаются в



а) *б)* *в)*

Рис. 60. Волна E_{10} в секториальном рупоре.

кольцо неправильной формы на другой поверхности $r = \text{const}$, как это изображено на рис. 60,*в*. Продольное сечение рупора по средней плоскости $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ дано на рис. 60,*б*: в этом сечении расстояния между центрами сгущения вертикальных пучков электрического поля не являются строго постоянными, поскольку функция Ханкеля $H^{(1)}_{\frac{\pi}{\alpha}}(kr)$ не является строго периодической функцией своего аргумента.

При больших значениях kr, точнее при условии $kr \gg p^2$, функцию Ханкеля можно заменить ее асимптотическим выражением (22.14), тогда формулы (58.17) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} E_z = -H_\varphi = k^2 C \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i\left(kr - \frac{\pi^2}{2\alpha} - \frac{\pi}{4}\right)} \sin\frac{\pi\varphi}{\alpha}, \\ H_r = -\frac{i\pi k}{\alpha r} C \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{i\left(kr - \frac{\pi^2}{2\alpha} - \frac{\pi}{4}\right)} \cos\frac{\pi\varphi}{\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (58.18)$$

"Научное наследие России"

Они показывают, что при достаточно больших kr волна распространяется по секториальному рупору со скоростью c в радиальном направлении, спадая по амплитуде по закону $\frac{1}{\sqrt{kr}}$, характерному для цилиндрических волн. Такая цилиндрическая волна (как и плоская волна в свободном пространстве) практически является поперечной, поскольку

$$H_r \ll H_\varphi \text{ при } \varphi \neq 0 \text{ и } \varphi \neq \alpha. \tag{58.19}$$

Этот результат легко понять, если рассматривать волну E_{10} в рупоре с малым углом α как простейшую волну H_{10} в постепенно расширяющемся волноводе со сторонами

$$a = \alpha r, \; b = l, \tag{58.20}$$

Вычисляя продольное волновое число в таком волноводе по формуле

$$h = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{\alpha r}\right)^2}, \tag{58.21}$$

мы видим, что при условии

$$kr \gg \frac{\pi}{\alpha} \tag{58.22}$$

можно считать $h = k$, т. е. фазовая скорость волны близка к c. Легко показать с помощью волноводных формул (41.18), что волна при этом должна стать практически поперечной.

Как следует из теории бесселевых функций, достаточным условием применимости формул (58.18) является не условие (58.22), а более жесткое условие

$$kr \gg \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2, \tag{58.23}$$

гарантирующее нам не только близость фазовой скорости волны в рупоре к c, но и строго периодический характер расположения центров сгущения силовых линий на рис. 60,*б*. Смысл условия (58.23) также легко понять с помощью волноводной аналогии. Действительно, при достаточно больших r формула (58.21) дает

$$h = k - \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{2kr^2}; \quad \int h\,dr = kr + \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{1}{2kr}. \tag{58.24}$$

Интеграл дает зависимость фазы волны от координаты r, поскольку приращение фазы на отрезке dr расширяю-

щегося волновода равно hdr. В этом интеграле можно пренебречь вторым слагаемым, нарушающим периодичность максимумов электрического поля, лишь при выполнении условия (58.23).

Пользуясь так называемыми асимптотическими выражениями Дебая (ср. Ватсон, гл. VIII), можно показать применимость простой волноводной формулы (58.21) для вычисления скорости распространения волны на различных расстояниях r от вершины рупора. Это обстоятельство тем более важно, что реальные рупоры никогда не бывают столь длинны, чтобы для них можно было считать выполненным условие (58.23). Фактически волна в рупоре излучается из его открытого конца, не успев достичь предельного вида, определяемого выражениями (58.18).

Перейдем к рассмотрению „магнитных“ волн в волноводах, которые имеют магнитный вектор Герца Π' с единственной составляющей Π'_z. Поле магнитной волны вычисляется по формулам

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{ik}{r}\frac{\partial \Pi'_z}{\partial \varphi}; & H_r &= \frac{\partial^2 \Pi'_z}{\partial r \partial z}, \\ E_\varphi &= -ik\frac{\partial \Pi'_z}{\partial r}; & H_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Pi'_z}{\partial \varphi \partial z}, \\ E_z &= 0; & H_z &= \frac{\partial^2 \Pi'_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi'_z, \end{aligned}\right\} \qquad (58.25)$$

причем граничные условия (58.03) удовлетворятся, если

$$\Pi'_z = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = l, \qquad (58.26)$$

а условия (58.04) требуют, чтобы

$$\frac{\partial \Pi'_z}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \alpha. \qquad (58.27)$$

Составляющая Π'_z удовлетворяет тому же волновому уравнению (58.02), что и составляющая Π_z. Поэтому мы ищем Π'_z в виде произведения (58.07) и приходим к уравнениям (58.08). Однако в силу граничных условий (58.26) теперь будем иметь

$$Z = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = l, \qquad (58.28)$$

...ное наследие России"

благодаря чему получаем

$$Z = \sin gz;\ g = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{58.29}$$

В силу граничных условий (58.27) функция Φ должна удовлетворять соотношениям

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \alpha, \tag{58.30}$$

откуда следует

$$\Phi = \cos p\varphi;\ p = \frac{m\pi}{\alpha} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{58.31}$$

Выбирая функцию R согласно формуле (58.14), мы получаем выражение

$$\left.\begin{aligned} &\Pi'_z = CH^{(1)}_{\frac{m\pi}{\alpha}}(hr)\cos\frac{m\pi\varphi}{\alpha}\sin\frac{n\pi z}{l}, \\ &h = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \quad m = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{58.32}$$

дающее нам, по определению, „магнитную“ волну H_{mn} в секториальном рупоре. Простейшей и наиболее важной магнитной волной в секториальном рупоре является волна H_{01}, для которой

$$\Pi'_z = CH^{(1)}_0(hr)\sin\frac{\pi z}{l},\ h = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2} \tag{58.33}$$

и

$$\left.\begin{aligned} E_\varphi &= ik^2 CH^{(1)}_1(hr)\sin\frac{\pi z}{l}, \\ H_r &= -\frac{\pi k}{l}CH^{(1)}_1(hr)\cos\frac{\pi z}{l}, \\ H_z &= h^2 CH^{(1)}_0(hr)\sin\frac{\pi z}{l}, \\ E_r &= E_z = H_\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{58.34}$$

Здесь мы использовали тождество

$$H^{(1)\prime}_0(x) = -H^{(1)}_1(x). \tag{58.35}$$

Структура электромагнитного поля волны H_{01} изображена на рис. 61 в трех разных видах (ср. рис. 60). Электрическое поле волны H_{01} направлено по окружности от одной

ЭБ "Научное наследие России"

боковой стенки к другой, а магнитное поле имеет вертикальную и радиальную составляющие, благодаря чему оно образует в плоскости продольного сечения рупора $\varphi=\text{const}$ замкнутые кольца неправильной формы, расположенные приблизительно периодически (рис. 61,*б*).

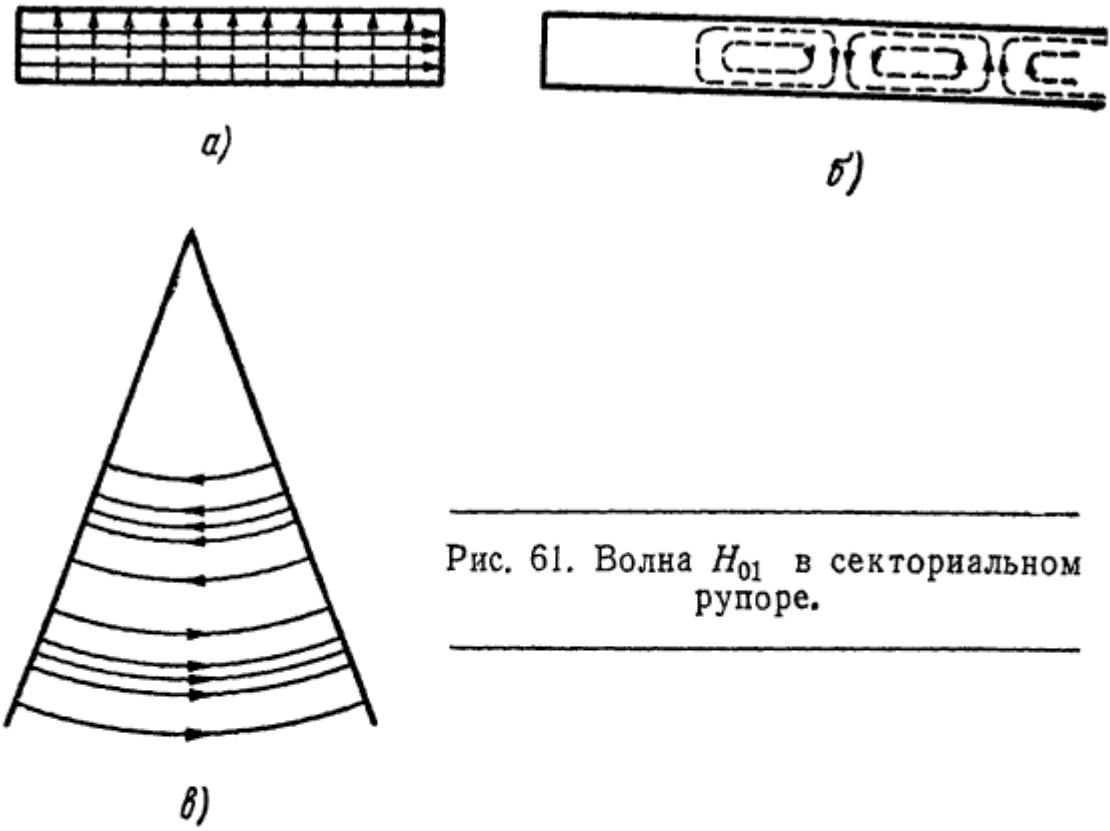


Рис. 61. Волна H_{01} в секториальном рупоре.

Отвлекаясь от цилиндрического характера данной волны в рупоре, можно сказать, что ее структура поля подобна структуре волны H_{10} в прямоугольном волноводе со сторонами

$$a=l;\ b=\alpha r. \tag{58.36}$$

Это сходство станет особенно ясным, если при $hr\gg 1$ воспользоваться асимптотическими выражениями (22.14). Тогда формулы (59.34) примут вид

$$\left.\begin{aligned} E_\varphi &= khC\sqrt{\frac{2}{\pi hr}}\,e^{i\left(hr-\frac{\pi}{4}\right)}\sin\frac{\pi z}{l},\\ H_r &= \frac{ik\pi}{l}C\sqrt{\frac{2}{\pi hr}}\,e^{i\left(hr-\frac{\pi}{4}\right)}\cos\frac{\pi z}{l},\\ H_z &= k^2C\sqrt{\frac{2}{\pi hr}}\,e^{i\left(hr-\frac{\pi}{4}\right)}\sin\frac{\pi z}{l}. \end{aligned}\right\} \tag{58.37}$$

Мы видим, что в этом случае волна в рупоре не становится поперечной и ее волновое число $h \neq k$. Это объясняется с помощью волноводной аналогии тем, что расширение рупора по формулам (58.36) происходит за счет стороны b, от которой продольное волновое число в волноводе не зависит, поэтому волна распространяется в рупоре с постоянным волновым числом $h = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$.

Аналогия между рупором и волноводом является весьма плодотворной, однако она не позволяет охватить свойства

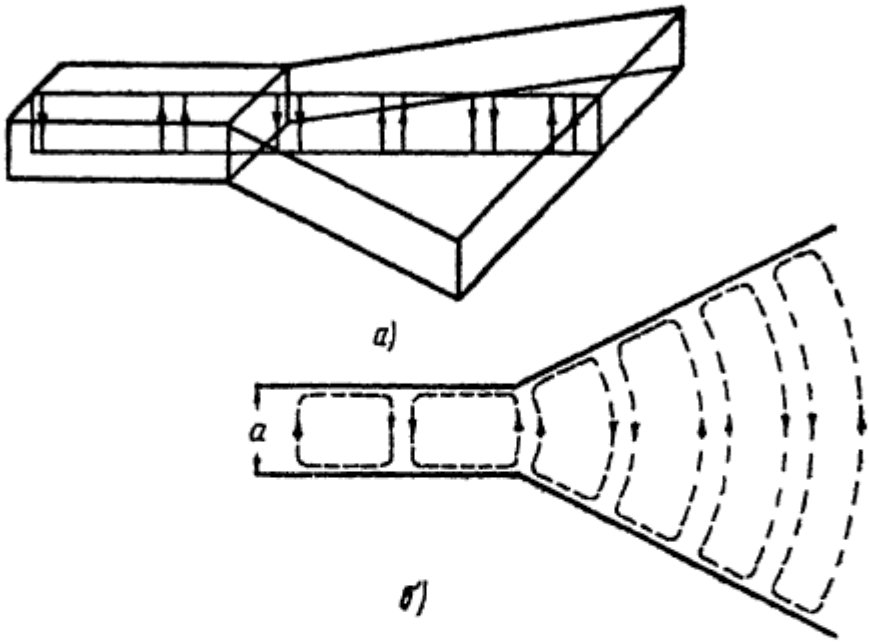


Рис. 62. Сочленение прямоугольного волновода с секториальным рупором, расширяющимся в плоскости H.

волн вблизи вершины рупора, при $hr \ll 1$. Заметим, что при $r = 0$ поле расходящейся волны обращается в бесконечность, и при малых r оно не имеет волнового характера. Это обстоятельство не проявляется, если электромагнитное поле в рупоре возбуждается волноводом, как показано на рис. 57, рис. 62 или рис. 63 (см. ниже § 59). В этом случае нужно рассматривать только ту часть рупора, которая соответствует значениям $r > r_0$, где r_0 есть расстояние от начала цилиндрической системы координат до места сочленения волновода с рупором.

§ 59. Сочленение волновода с рупором

Секториальный рупор можно двояким образом сочетать с прямоугольным волноводом; а именно, секториальный рупор может расширяться в плоскости E или в плоскости H

ЭБ "Научное наследие России"

набегающей волны H_{10} в прямоугольном волноводе со сторонами a и b. Здесь для краткости плоскостью E названа плоскость продольного сечения волновода, параллельная электрическому полю, а плоскостью H — плоскость, параллельная магнитному полю волны H_{10}.

Секториальный рупор, расширяющийся в плоскости H, получается путем постепенного увеличения стороны a волновода. Сторона b, параллельная электрическому полю набегающей волны, оказывается равной высоте l секториального рупора [ср. формулы (58.20)], так что параллельные стенки рупора суть геометрические продолжения широких стенок волновода.

Из соображений симметрии ясно, что в таком секториальном рупоре возбуждаются „электрические" волны E_{m0}, поле которых имеет, подобно полю набегающей волны, единственную составляющую электрического поля E_z в системе координат на рис. 59. Так как структура электромагнитного поля волны E_{10} в секториальном рупоре мало отличается от структуры волны H_{10} в прямоугольном волноводе, то при малых углах α в „горле" рупора, т. е. в месте сочленения его с волноводом, происходит почти полное преобразование одной волны в другую, не сопровождаемое появлением отраженных волн и волн с высшими индексами, например волн E_{20}, E_{30}, ..., в секториальном рупоре. При увеличении α, например при $\alpha = \pi$, это утверждение перестает быть правильным, так как тогда переход из волновода в рупор перестает быть „плавным", волноводная волна H_{10} и рупорная волна E_{10} сильно различаются по кривизне поверхностей равной фазы, в силу чего возникают отражения и появляются высшие волны.

На рис. 62,*б* схематически показано, как происходит преобразование магнитного поля волны H_{10} в волноводе при его сочленении с рупором, расширяющимся в плоскости H (рис. 62,*а*). В рупоре возникает магнитное поле, которое было раньше изображено на рис. 60,*б*.

Перейдем к секториальному рупору, расширяющемуся в плоскости E. Такой рупор можно рассматривать как прямоугольный волновод, у которого постепенно увеличивается сторона b, параллельная электрическому полю волны H_{10} (рис. 63,*а*) Так как электрическое поле волны H_{01} в рупоре близко по своей структуре к электрическому полю волны H_{10} в волноводе, то одна волна почти целиком преобразуется в другую, что схематически показано

...ое наследие России"

на рис. 63,*б*. Магнитные поля этих волн также весьма близки (ср. § 58).

Выводы о преобразовании волноводных волн в рупорные основаны на сходстве их электромагнитных полей. Однако в волноводе и рупоре сходные волны имеют у нас различные наименования, что не соответствует существу дела. Этот терминологический изъян можно устранить, если ввести новую классификацию волн в прямоугольных волноводах. Действительно, вследствие вырождения $E-H$ в прямоугольных волноводах можно ввести электрический и магнитный векторы Герца с единственной составляющей

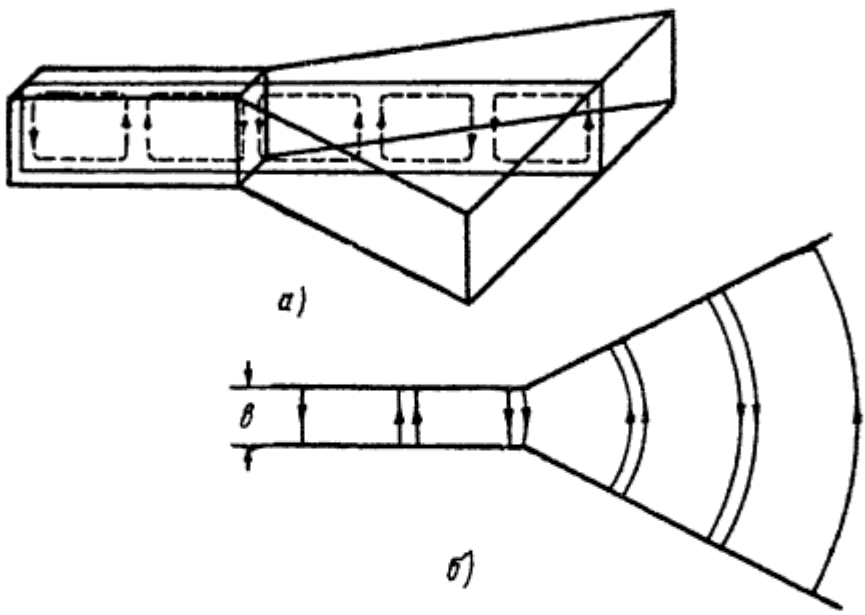


Рис. 63. Сочленение прямоугольного волновода с секториальным рупором, расширяющимся в плоскости E.

по оси x или y и называть волну „электрической“ или „магнитной“ в зависимости от наличия составляющих поля по выбранной оси (ср. конец § 41).

По новой классификации магнитные волны H_{m0} и H_{0n} будут называться иначе. Их название зависит от того, по какой оси (x или y) производится классификация и выбираются составляющие векторов Герца. Вместо вырожденных волн E_{mn} и H_{mn} ($m \neq 0$, $n \neq 0$) новые векторы Герца будут определять некоторые их линейные комбинации.

Легко видеть, что такая классификация волноводных волн может быть приведена в полное согласие с введенными выше наименованиями волн в секториальном рупоре. Для этого нужно характеризовать волны в прямоугольном волноводе с помощью тех же составляющих Π_z и Π'_z, что и

ЭБ "Научное наследие России"

в сочлененном с ним рупоре. Вводя эти составляющие для волновода с секториальным рупором, расширяющимся в плоскости H (рис. 62), мы должны назвать волну H_{01} в волноводе „электрической“ волной E_{10}. Делая то же при сочленении волновода с рупором, расширяющимся в плоскости E (рис. 63), мы называем ту же волну „магнитной“ волной H_{01}. Введенная терминология соответствует тому факту, что на рис. 62 волноводная волна E_{10} переходит в рупорную волну E_{10}, причем при недостаточном согласовании рупора с волноводом (при больших значениях α), помимо отражений, возникают еще волны E_{20}, E_{30}, ... Аналогично на рис. 63, помимо превращения волноводной волны H_{01} в рупорную волну того же названия, возникают еще дополнительные волны H_{11}, H_{21}, ... в волноводе и рупоре; их амплитуды при малых углах раствора рупора пренебрежимо малы.

Эти „высшие“ волны возбуждаются в горле рупора. При малых углах раствора α начальные амплитуды высших волн в горле рупора малы в силу сходства полей у основной волны в волноводе и рупоре. Кроме того, в волноводе обычно распространяется только одна волна, и все другие волны в волноводе затухают при удалении от плоскости сочленения. Поперечные размеры рупора вблизи его горла примерно такие же, как и у волновода, поэтому по аналогии с волноводом можно утверждать, что высшие волны в некотором начальном отрезке рупора, примыкающем к горлу, будут также затухающими. Длина этого отрезка тем больше, чем медленнее расширяется рупор, т. е. чем меньше α, так как затухающая волна превращается в распространяющуюся при поперечных размерах рупора, достаточных для распространения данной волны. Чем больше длина этого отрезка, тем больше ослабление затухающей волны в рупоре.

Из сказанного вытекает основное свойство рупора: горло рупора есть фильтр, не пропускающий высшие волны к открытому концу рупора.

Если вместо рупора взять волновод с излучающим отверстием таких же размеров, то теоретически можно получить ту же направленность излучения. Однако в таком „широком“ волноводе практически невозможно возбудить одну волну с простейшей структурой электромагнитного поля, и в нем неизбежно будут распространяться высшие волны, искажающие диаграмму направленности. Благодаря фильтрующему действию горла к открытому концу рупора приходит практически только основная (простейшая) волна.

Электронное наследие России

Изложенные выше качественные соображения полезно пояснить количественными данными. Хотя задача о переходе прямоугольного волновода в секториальный рупор до сих пор эффективно не решена, ценные сведения дает приближенное решение задачи о „сгла-

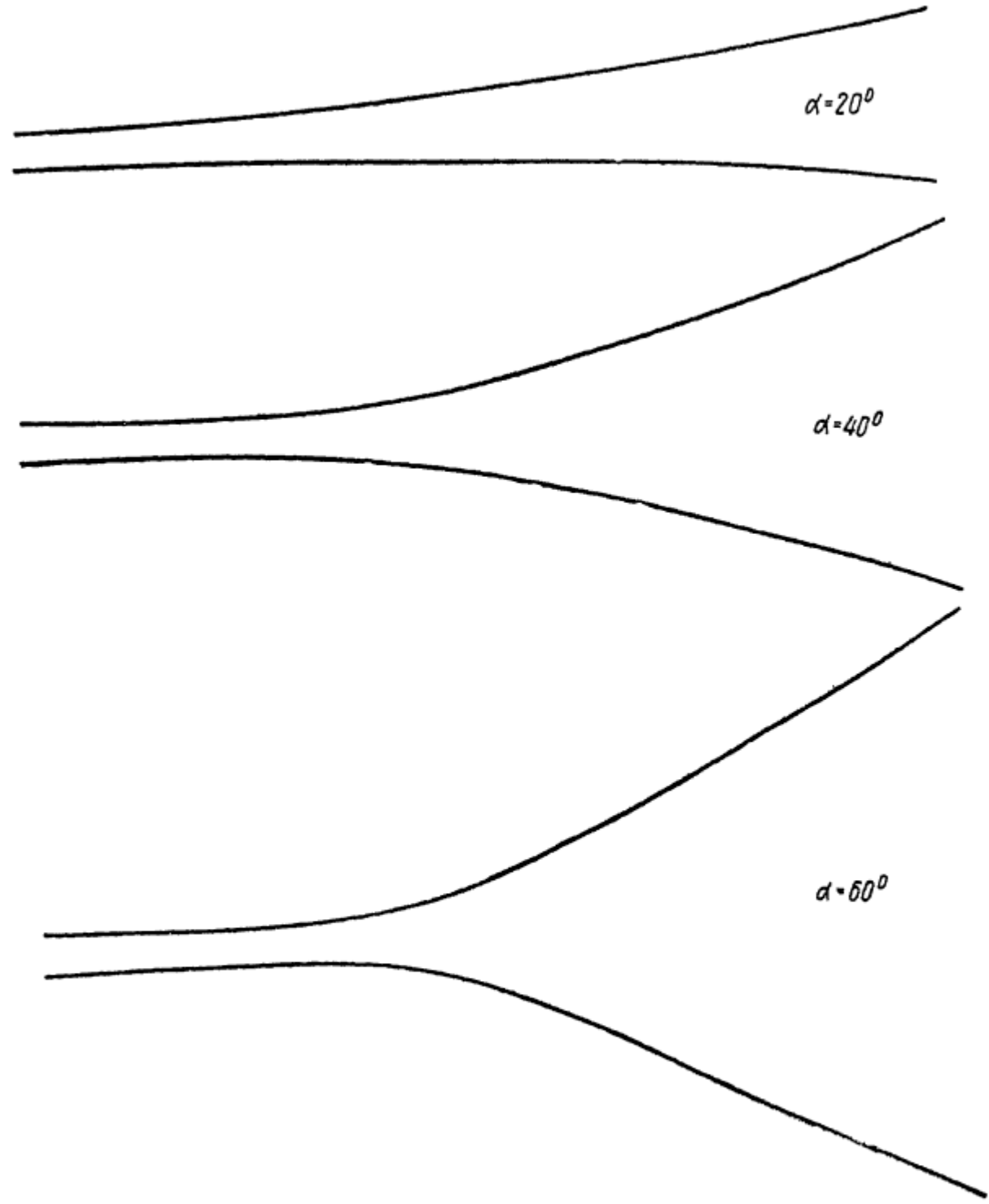
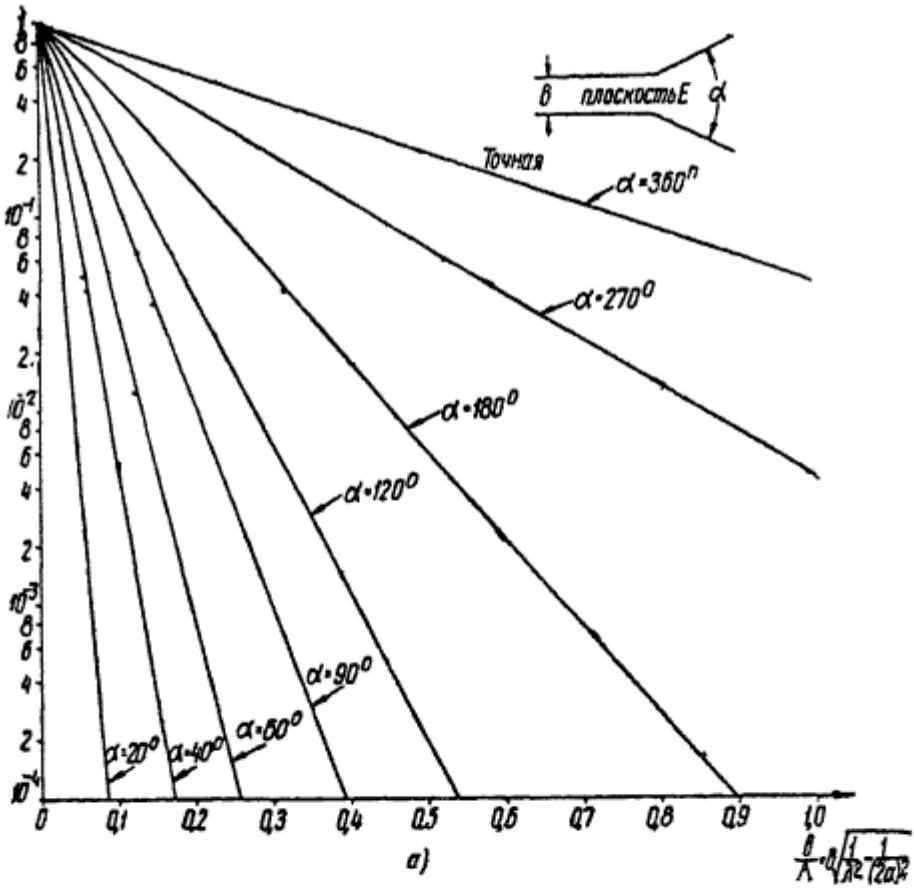


Рис. 64. Плавный переход прямоугольного волновода в секториальный рупор.

женном" переходе волновод — рупор, изображенном на рис. 64 для рупоров с углом раствора $\alpha = 20°$, 40° и 60°. Это решение было впервые получено Б. Л. Рождественским и впоследствии несколько уточнено. На рис. 65, *а* дан коэффициент отражения волны H_{10} (по

ЭБ "Научное наследие России"



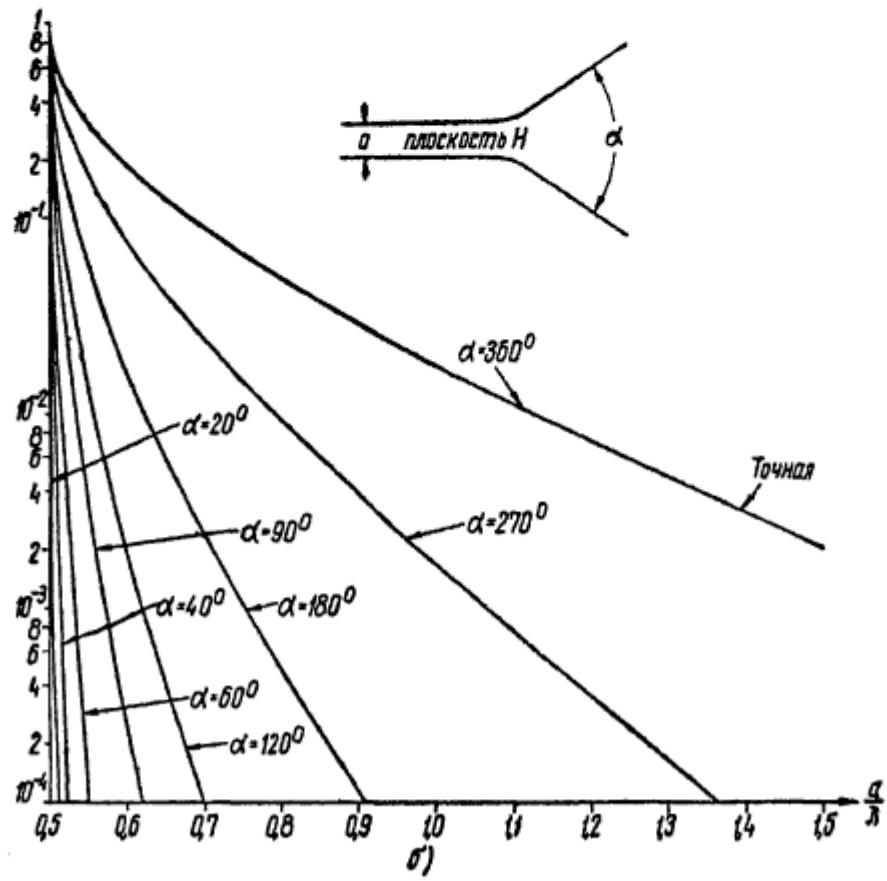


Рис. 65. Коэффициент отражения волны H_{10} от плавного перехода волновод — рупор:

а — рупор расширяется в плоскости *E*; *б* — рупор расширяется в плоскости *H*.

ЭБ "Научное наследие России"

полю) от рупора, расширяющегося в плоскости E, а на рис. 65, *б* — от рупора, расширяющегося в плоскости H. Эти графики показывают, что волны полностью отражаются от горла рупора при критической частоте. При увеличении частоты их коэффициенты отражения быстро спадают до весьма малых значений — тем быстрее, чем меньше угол раствора α. Для сравнения на рис. 65 приведен коэффициент отражения при $\alpha = 360°$, т. е. для прямоугольного волновода, излучающего волны в пространство между двумя параллельными плоскостями, частично совпадающими со сторонами a (рис. 65, *а*) или b (рис. 65, *б*) волновода; этот коэффициент отражения вычислен по строгой теории.

§ 60*. Электрические и магнитные волны в коническом рупоре

Рассмотрим электромагнитные волны в идеально проводящем коническом рупоре. Для этого введем сферическую систему координат с центром в вершине рупора (рис. 66) так, чтобы поверхность $\vartheta = \gamma$ совпадала со стенкой рупора, и будем рассматривать электромагнитное поле в пространстве

$$0 < \vartheta < \gamma; \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \quad (60.01)$$

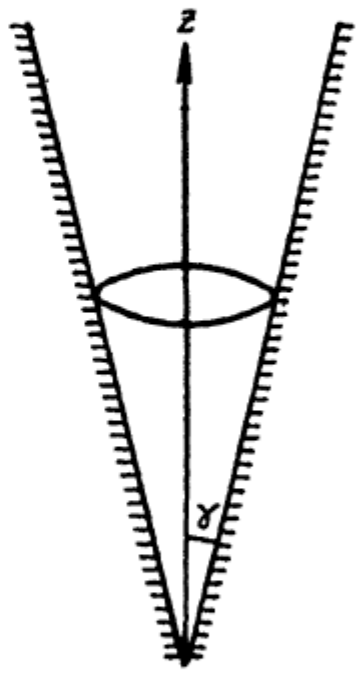


Рис. 66. Конический рупор.

Угол γ обычно называют углом раствора конического рупора (часто называют углом раствора и угол 2γ, но мы этого названия применять не будем). При исследовании волн в рупоре следует, очевидно, считать $\gamma < \frac{\pi}{2}$ (или даже $\gamma < \frac{\pi}{3}$), однако значения $\gamma > \frac{\pi}{2}$ также имеют физический интерес, поскольку мы получаем возможность рассмотреть дифракцию электромагнитных волн на металлическом конусе, расположенном в свободном пространстве (ср. § 84). Заметим, что выведенные ниже формулы при $\gamma < \frac{\pi}{2}$ и $\gamma > \frac{\pi}{2}$ не отличаются по своему внешнему виду; при $\gamma = \frac{\pi}{2}$ мы приходим к простому случаю распространения электромагнитных волн в полупространстве, ограниченном плоскостью $\vartheta = \gamma = \frac{\pi}{2}$.

В § 20 были введены потенциалы U и V, которые позволяют вычислить поля электрических и магнитных

ЭБ "Научное наследие России"

волн в коническом рупоре: с помощью функции U и формул (20.19) мы получаем электрические волны, с помощью функции V и формул (20.20) — магнитные волны. Сами функции U и V должны удовлетворять уравнению (20.21) в области (60.01) и граничным условиям на ее границе

$$U = 0 \text{ и } \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0 \text{ при } \vartheta = \gamma, \tag{60.02}$$

вытекающим из условий

$$E_r = E_\varphi = 0 \tag{60.03}$$

на идеально проводящей поверхности рупора.

В § 23 методом разделения переменных были получены частные решения уравнения (20.21). Эти решения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} U &= C \begin{Bmatrix} \zeta_\nu(kr) \\ \psi_\nu(kr) \end{Bmatrix} P_\nu^m(\cos\vartheta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}, \\ V &= C \begin{Bmatrix} \zeta_\mu(kr) \\ \psi_\mu(kr) \end{Bmatrix} P_\mu^m(\cos\vartheta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{60.04}$$

где можно брать все возможные комбинации функций в фигурных скобках. Индекс m в формулах (60.04) должен быть целым ($m = 0, 1, 2, \ldots$), поскольку поле должно быть однозначным в области (60.01), т. е. не изменяться при замене φ на $\varphi \pm 2\pi$. Однако индексы ν и μ в общем случае не будут целыми: они определяются из граничных условий (60.02). Индексы ν для электрических волн определяются из уравнения

$$P_\nu^m(\cos\gamma) = 0, \tag{60.05}$$

а индексы μ для магнитных волн — из уравнения

$$\frac{d}{d\vartheta} P_\mu^m(\cos\gamma) = 0. \tag{60.06}$$

Здесь через $P_\nu^m(\cos\vartheta)$ обозначена присоединенная функция Лежандра, принимающая при $\vartheta = 0$ конечные значения. Она выражается через функцию Лежандра $P_\nu(\cos\vartheta)$, удовлетворяющую уравнению (23.16) и условию (23.17), посредством формулы (23.18). Поскольку ν и μ не являются целыми, функции P_ν и P_μ не будут полиномами, и

...ое наследие России"

никаких ограничений типа (23.19) в данном случае не будет.

Уравнению (60.05) удовлетворяет последовательность чисел

$$\nu_{m1},\ \nu_{m2},\ \ldots,\ \nu_{mn},\ \ldots, \tag{60.07}$$

зависящих от угла γ, а уравнению (60.06) — другая последовательность чисел

$$\mu_{m1},\ \mu_{m2},\ \ldots,\ \mu_{mn},\ \ldots, \tag{60.08}$$

также зависящих от γ. Эти числа являются по существу собственными значениями данной граничной задачи: это — положительные числа, которые мы располагаем (при фиксированном m) в порядке возрастания, причем лишь как исключение (т. е. случайно) они могут быть целыми числами.

Если возьмем число $\nu = \nu_{mn}$ и соответствующую функцию U по формуле (60.04), то получим электрическую волну, которая называется волной E_{mn} в коническом рупоре. Аналогично, число $\mu = \mu_{mn}$ и функция V определяют магнитную волну H_{mn} в коническом рупоре. Заметим, что при выборе функций $\zeta_\nu(kr)$ и $\zeta_\mu(kr)$ получаем бегущие волны, при выборе функций $\psi_\nu(kr)$ и $\psi_\mu(kr)$ — стоячие волны.

Как показывает исследование структуры электромагнитного поля волн E_{mn} и H_{mn} в коническом рупоре, они весьма похожи на волны тех же номеров в круглом волноводе. Так как конический рупор есть в сущности постепенно расширяющийся круглый волновод (расширение происходит равномерно по всем сторонам, в отличие от секториального волновода), то эти волны E_{mn} и H_{mn} являются сферическими волнами. Фазовая скорость распространяющихся волн, соответствующих функциям $\zeta_\nu(kr)$ и $\zeta_\mu(kr)$, зависит от r; более того, каждая из этих волн является распространяющейся лишь при достаточно больших r, а при меньших r данная волна имеет затухающий характер. При $r \to \infty$ фазовая скорость всех волн стремится к c, что непосредственно следует из асимптотических формул (23.10).

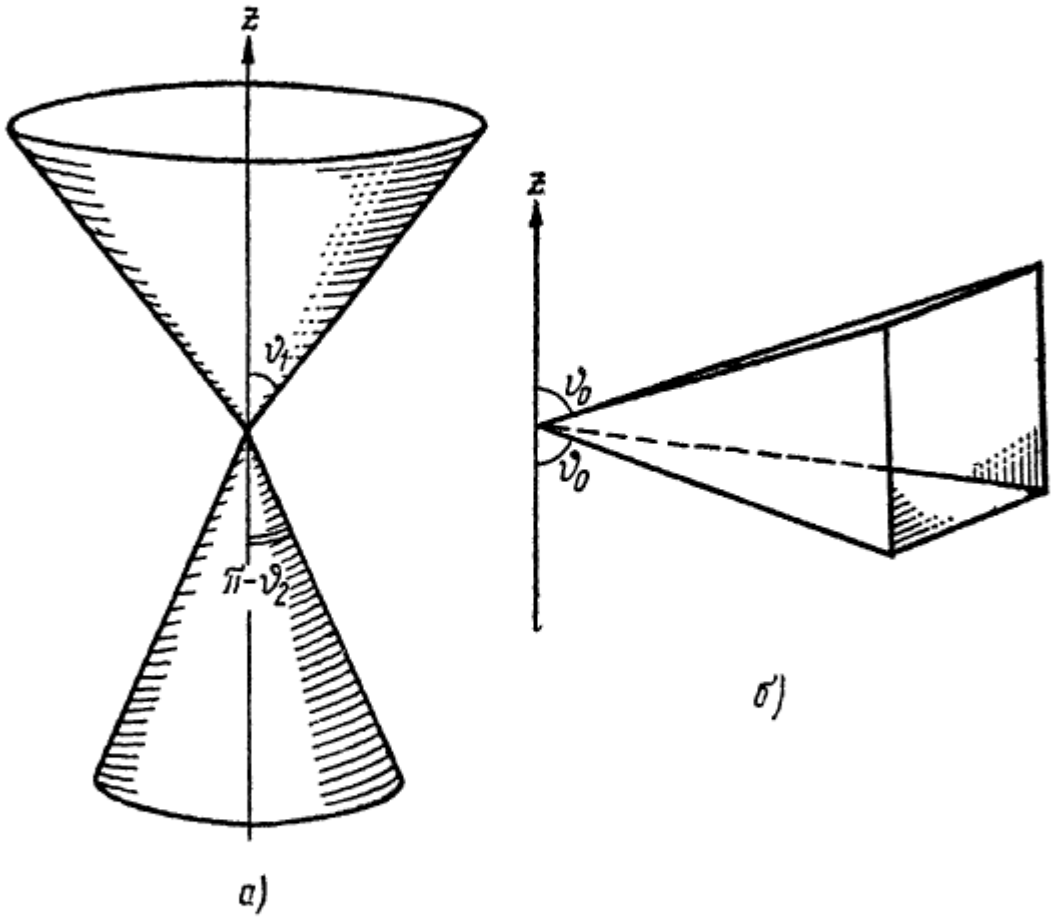
Между волнами E_{mn} и H_{mn} в коническом рупоре и круглом волноводе может быть установлена и аналитиче-

ЭБ "Научное наследие России"

ская связь; а именно, при больших ν имеют место асимптотические выражения

$$\left.\begin{aligned} P^{m}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta) &= \nu^{m}\sqrt{\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}}\,J_{m}(\nu\vartheta), \\ \frac{d}{d\vartheta}P^{m}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\vartheta) &= \nu^{m+1}\sqrt{\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}}\,J'_{m}(\nu\vartheta); \end{aligned}\right\} \qquad (60.09)$$

дающие качественно правильные результаты и при конечных ν. Отсюда легко установить связь между числами (60.07) и (60.08) и нулями функции Бесселя и ее производной — числами ν_{mn} и μ_{mn}, введенными в § 42.



а) б)

Рис. 67. Рупоры более сложной формы:
а — биконический; *б* — пирамидальный.

Если круглый волновод переходит в конический рупор, то волноводная волна, приходящая к горлу рупора, почти нацело преобразуется в соответствующую рупорную волну. То же самое происходит и в горле секториального рупора (см. § 59).

С помощью сферических координат можно исследовать рупоры более сложной формы: биконический и пира-

Электронное наследие России

мидальный. В биконическом рупоре (рис. 67, *а*) электромагнитное поле занимает область пространства

$$\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \qquad (60.10)$$

Пирамидальный рупор (рис. 67, *б*) является равномерно расширяющимся прямоугольным волноводом и часто применяется вместе с обычным прямоугольным волноводом. Его стенки ограничивают область пространства, которую приближенно можно определить неравенствами

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta_0 < \vartheta < \frac{\pi}{2} + \vartheta_0;\ -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0. \qquad (60.11)$$

В этих рупорах также существуют электрические и магнитные волны, поля которых могут быть вычислены с помощью функций U и V. Выражения для этих функций получаются, однако, более сложными, чем для конического рупора.

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА XI

ЗАМЕДЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДИЭЛЕКТРИКАМИ И ПРОВОДНИКАМИ

§ 61. Медленные электромагнитные волны

Медленные электромагнитные волны находят широкое применение в целом ряде устройств, из которых наибольший интерес представляют электронные приборы типа лампы с бегущей волной и линейные ускорители заряженных частиц.

В электронных приборах типа лампы с бегущей волной электроны движутся по прямой с нерелятивистскими скоростями (скажем, $v \sim 0{,}1\,c$). В линейных ускорителях электроны (или другие частицы) в своем прямолинейном движении ускоряются до скоростей, близких к c. В обоих случаях фазовая скорость электромагнитной волны подбирается приблизительно равной скорости электронов. Если электрон попадает в „правильную" фазу электромагнитной волны и отдает свою кинетическую энергию полю (в лампе с бегущей волной) или увеличивает свою кинетическую энергию за счет поля (в ускорителе), то благодаря близости скоростей он движется вместе с электромагнитной волной, оставаясь в поле той же фазы, и взаимодействие продолжается.

Для получения интенсивного взаимодействия между частицами и волной также необходимо, чтобы электрическое поле волны имело достаточно сильную составляющую вдоль направления движения частиц, благодаря которой происходит их торможение или ускорение.

Изученные нами ранее волны в передающих линиях I и II группы не могут быть использованы для взаимодействия с заряженными частицами. Действительно, хотя фазовая скорость волн в линиях I группы (например,

...ое наследие России"

в коаксиальной линии) близка к c, однако у этих волн практически отсутствует составляющая E_z. Электрические волны в волноводах, например волна E_{01} в круглом или волна E_{11} в прямоугольном волноводе, имеют $E_z \neq 0$, однако их фазовая скорость больше c. Чтобы использовать эти волны для взаимодействия с частицами, летящими по оси z, необходимо волны замедлить.

Наиболее простой способ замедления волноводных волн заключается в заполнении волновода диэлектриком. Согласно § 53 при однородном заполнении волновода продольное волновое число h данной волны становится равным

$$h = \sqrt{k^2\varepsilon - g^2}, \tag{61.01}$$

так что фазовая скорость равна

$$u = \frac{\omega}{h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon - \left(\frac{g}{k}\right)^2}}, \tag{61.02}$$

где g есть поперечное волновое число данной волны, зависящее от геометрической формы и размеров поперечного сечения волновода. Формула (61.02) показывает, что при достаточно высоких значениях диэлектрической постоянной ε фазовая скорость волны может быть сколь угодно снижена.

Заполняя диэлектриком весь волновод, мы не оставляем места для прохождения электронов, которые могут свободно двигаться лишь в вакууме. Поэтому в диэлектрике должен быть канал; если его поперечные размеры невелики, то он мало изменяет фазовую скорость волны, и ее по-прежнему можно рассчитывать по формуле (61.02).

Замедление электромагнитных волн диэлектриком практически не применяется в электронных приборах. Мы начнем, однако, с волн, замедленных диэлектриком или проводником, чтобы на простейших примерах познакомиться со свойствами медленных волн вообще.

Отметим одно важное свойство, которым обладает в пустоте электромагнитное поле медленной волны (например, поле в канале, упомянутом выше). В пустоте векторы Герца и составляющие электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению (18.04). Рассматривая волну, бегущую вдоль оси z с волновым числом h,

ЭБ "Научное наследие России"

будем вычислять ее поле с помощью продольных составляющих электрического и магнитного вектора Герца

$$\Pi_z = \Pi(x, y)\, e^{ihz};\ \Pi'_z = \Pi'(x, y)\, e^{ihz}. \qquad (61.03)$$

Тогда, как было показано в § 39 и § 40, функции Π и Π' будут удовлетворять двухмерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + g^2 \Pi = 0, \qquad (61.04)$$

где

$$g^2 = k^2 - h^2. \qquad (61.05)$$

В теории волноводов величина g^2 была положительной, так как в этом случае $h^2 < k^2$. Для идеально проводящих линий I группы мы имели $h^2 = k^2$ и $g^2 = 0$ (ср. § 29). Для медленных волн

$$h^2 > k^2, \qquad (61.06)$$

поэтому разность (61.05) отрицательна, а поперечное волновое число g является чисто мнимым. Введем вещественное положительное число p с помощью соотношения

$$p^2 = -g^2 = h^2 - k^2, \qquad (61.07)$$

тогда уравнение (61.04) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} - p^2 \Pi = 0. \qquad (61.08)$$

Рассмотрим сначала случай, когда функция Π зависит только от координаты x и, следовательно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \Pi}{dx^2} - p^2 \Pi = 0, \qquad (61.09)$$

имеющему общее решение

$$\Pi = Ae^{px} + Be^{-px}, \qquad (61.10)$$

где A и B суть произвольные постоянные. Представим себе, что при $x \leqslant 0$ расположена замедляющая часть системы, например диэлектрик, так что при $x > 0$ координата x показывает расстояние точки наблюдения до поверхности диэлектрика. Если в решении (61.10) положить $A = 0$, то функция

$$\Pi = Be^{-px} \qquad (61.11)$$

ЭБ "Научное наследие России"

убывает экспоненциально с удалением от поверхности $x=0$ вместе с соответствующим электромагнитным полем.

Волны, поля которых как бы „прилипают" к некоторой поверхности и убывают при удалении от нее по экспоненциальному закону (или близкому к нему), называются поверхностными волнами. Из предыдущего вытекает, что поле медленной волны в пустоте может образовывать поверхностную волну. В дальнейшем мы будем неоднократно встречаться с этим свойством медленных электромагнитных волн. Поэтому медленные и поверхностные волны естественно рассматривать совместно и выделить передающие линии с такими волнами в особую группу. О практическом значении поверхностных электромагнитных волн мы будем говорить в § 65 и § 70.

Исследуем теперь решение уравнения (61.08) в цилиндрической системе координат. Рассуждая как в § 22 и § 42, можем написать

$$\Pi = R_m(r)\cos m\varphi \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{61.12}$$

или

$$\Pi = R_m(r)\sin m\varphi \quad (m=1,\ 2,\ldots), \tag{61.13}$$

где функция R_m должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2R_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_m}{dr}-\left(p^2+\frac{m^2}{r^2}\right)R_m=0, \tag{61.14}$$

которое подстановкой $y=pr$ приводится к виду

$$\frac{d^2R_m}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{dR_m}{dy}-\left(1+\frac{m^2}{y^2}\right)R_m=0. \tag{61.15}$$

Последнее уравнение переходит в уравнение (22.06), если положить $x=iy$, вследствие чего общее решение уравнения (61.15) можно написать в виде

$$R_m = CJ_m(iy)+C'N_m(iy), \tag{61.16}$$

если мы в качестве основных функций выберем J_m и N_m. Однако при вещественных значениях y функции $J_m(iy)$ и $N_m(iy)$ будут, вообще говоря, комплексными, что неудобно как для расчета, так и для физического анализа решения. Поэтому в качестве основных решений уравнения (61.15) берут две функции $I_m(y)$ и $K_m(y)$, принимающие при вещественных положительных y лишь вещественные

ЭБ "Научное наследие России"

и положительные значения. Для функций I_m и K_m составлены подробные таблицы. Функция $I_m(y)$ называется модифицированной функцией Бесселя и может быть определена так

$$I_m(y) = i^{-m} J_m(iy). \tag{61.17}$$

Эта функция при $y = 0$ остается конечной. При $y \ll 1$ она может быть приближенно вычислена по формуле [ср. формулу (22.07)]

$$I_m(y) = \frac{1}{m!}\left(\frac{y}{2}\right)^m. \tag{61.18}$$

Функция $K_m(y)$ называется обычно функцией Макдональда; ее определяют следующим образом:

$$K_m(y) = \frac{\pi}{2} i^{m+1} H_m^{(1)}(iy). \tag{61.19}$$

При $y \to 0$ эта функция обращается в бесконечность, причем [ср. формулы (22.10)]

$$\left.\begin{aligned} K_m(y) &= \frac{(m-1)!}{2}\left(\frac{2}{y}\right)^m \text{ при } m = 1, 2, \ldots \\ K_0(y) &= \ln\frac{2}{\gamma y} \quad \gamma = 1{,}7811\ldots \end{aligned}\right\} \tag{61.20}$$

При больших y (точнее, при $y \gg 1$ и $y \gg m^2$) функции I_m и K_m можно вычислять по асимптотическим формулам

$$I_m(y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi y}}\, e^{y}; \quad K_m(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, e^{-y}. \tag{61.21}$$

При возрастании y функция I_m монотонно возрастает, а функция K_m монотонно убывает. Поэтому, если мы напишем общее решение уравнения (61.14) в виде

$$R_m = AI_m(pr) + BK_m(pr), \tag{61.22}$$

то функция П, образованная по формуле (61.12) или (61.13), будет иметь по отношению к радиальной координате r тот же характер, какой имеет более простое выражение (61.10) по отношению к декартовой координате x. Впоследствии мы покажем, что из выражения (61.22) получаются поверхностные волны.

При вещественных g волновое уравнение (61.04) имеет колеблющиеся решения, соответствующие функциям $\cos gx$,

ЭБ "Научное наследие России"

$\sin gx$, $J_m(gr)$ или $N_m(gr)$. В противоположность этому уравнение (61.08) имеет при вещественном p затухающие или возрастающие решения вида (61.10) или (61.22). Это легко понять, так как при вещественном g уравнение (61.04) соответствует распространению двухмерных волн в плоскости x, y, а при мнимых значениях g (при $g=ip$) распространение превращается в затухание.

Заметим, что в силу соотношений (61.17) и (61.19) на функции I_m и K_m могут быть перенесены тождества, которым удовлетворяют обычные бесселевы функции. В частности, укажем важные соотношения

$$I_0'(y)=I_1(y); \quad K_0'(y)=-K_1(y). \tag{61.23}$$

Электромагнитные волны замедляются не только диэлектриками, но и проводниками. Соответствующие системы мы рассмотрим в этой главе как наиболее простые и хорошо изученные. В электронных приборах применяются обычно другие замедляющие системы — периодические структуры и спиральные линии, которым посвящены главы XII и XIII.

§ 62. Распространение поверхностной волны вдоль провода с конечной проводимостью

Исследуем распространение симметричной электрической волны поверхностного типа вдоль металлического провода радиуса a. Электромагнитное поле этой волны при $r>a$ будем выражать через электрический вектор Герца с единственной составляющей Π_z, определяемой формулой (61.03). Функция Π должна удовлетворять уравнению (61.14) с индексом $m=0$ и поэтому равна

$$\Pi=AK_0(pr). \tag{62.01}$$

Мы берем здесь функцию K_0. В силу асимптотических формул (61.21) она действительно дает нам поверхностную волну, поле которой исчезает при $r\to\infty$, а функция I_0 для этой цели непригодна.

Вычисляя по формулам (18.03) составляющие электромагнитного поля при $r>a$, получаем

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -ihpAK_1(pr)\,e^{ihz},\\ E_z &= -p^2AK_0(pr)e^{ihz},\\ H_\varphi &= -ikpAK_1(pr)e^{ihz},\\ E_\varphi &= H_r = H_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{62.02}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Если провод является идеально проводящим, то распространение волны вдоль него происходит со скоростью c ($h = k$), как мы показали в § 29. В сбычных линиях (ср. § 35) конечное сопротивление проводов приводит к замедлению волны. Согласно § 61 она приобретает при этом поверхностный характер, обычно выраженный слабо (поскольку $h \approx k$).

К тому же результату приводит конечная проводимость одиночного провода, которую легко учесть, ставя на поверхности провода граничное условие Леонтовича

$$E_z = wH_\varphi \text{ при } r = a, \tag{62.03}$$

где w — волновое сопротивление металла, определяемое формулой (26.02).

Таким путем мы получаем характеристическое уравнение одиночного провода

$$pa\frac{K_0(pa)}{K_1(pa)} = iwka. \tag{62.04}$$

При решении уравнения (62.04) нужно учесть, что волновое сопротивление w металла весьма мало. Поэтому при малых и конечных значениях ka правая часть уравнения (62.04) весьма мала. Левая же часть уравнения, как легко показать (ср. § 70), может быть мала лишь при $pa \ll 1$. Пользуясь формулами (61.20), мы преобразуем уравнение (62.04) к виду

$$(pa)^2 \ln\frac{2}{\gamma pa} = iwka. \tag{62.05}$$

Это уравнение было выведено (несколько иным путем) Зоммерфельдом еще в 1899 г. Трудность решения этого уравнения заключается в том, что правая часть его комплексна, поэтому нельзя применить графический метод, изложенный далее в § 70. Уравнение (62.05) приходится поэтому решать итерационным методом, предложенным Зоммерфельдом. Перепишем это уравнение в виде

$$(pa)^2 = \frac{iwka}{\ln\frac{2}{\gamma pa}}. \tag{62.06}$$

Исходя из некоторого приближенного значения $\ln\frac{2}{\gamma pa}$, вычислим pa по уравнению и подставим затем pa в правую часть под знак логарифма; получаемое с помощью формулы (62.06)

Электронное наследие России

уточненное значение pa опять подставим в правую часть и т. д. Итерационный процесс быстро сходится к искомому значению pa, если исходное значение $\ln\frac{2}{\gamma pa}$ брать не слишком далеко от истинной величины. Обычно можно полагать

$$\ln\frac{2}{\gamma pa}\approx 10 \qquad (62.07)$$

и начинать итерацию с этого числа для всех практически интересных случаев. Этот результат объясняется тем, что при больших значениях аргумента логарифм есть медленно меняющаяся функция.

Зоммерфельд вычислил, что волна, распространяющаяся вдоль медного провода радиуса $a=1$ *мм* и имеющая частоту 10^9 *гц* ($\lambda=30$ *см*), имеет волновое число

$$h=k\,[1+(6{,}0+i6{,}4)\,10^{-5}]. \qquad (62.08)$$

Таким образом, благодаря конечной проводимости металла волна приобретает затухание (довольно малое), а ее фазовая скорость становится несколько меньше c. В теории длинных линий мы имели аналогичные результаты [см. формулы (35.03) — (35.08)].

Существенно отметить, что замедление волны, распространяющейся вдоль провода, превращает ее в поверхностную волну, и энергия волны сосредоточивается вблизи провода, как это видно из формул (62.02). Обозначим через $r(50\%)$ и $r(75\%)$ радиусы цилиндров, коаксиальных нашему проводу, через поперечные сечения которых проходит соответственно 50% и 75% мощности поверхностной волны. Приведем результаты расчетов $r(50\%)$ и $r(75\%)$ для медного провода радиуса $a=1$ *мм* и $a=5$ *мм*.

Радиусы цилиндров	$\lambda=30$ *см*		$\lambda=3$ *см*	
	$a=1$ *мм*	$a=5$ *мм*	$a=1$ *мм*	$a=5$ *мм*
$r(50\%)$, *см* . .	5	17	2	6,5
$r(75\%)$, *см* . .	38	100	9	14

Эти числа показывают, что в диапазоне дециметровых и сантиметровых волн радиальная протяженность поля одиночного провода не превышает нескольких длин волн.

ЭБ "Научное наследие России"

Эту протяженность можно еще уменьшить, если провод покрыть слоем диэлектрика (см. § 65).

Замедляющее действие провода с конечным сопротивлением можно физически объяснить тем, что волны в металле распространяются значительно медленнее, чем в воздухе, так как комплексный показатель преломления металла весьма велик (§ 12 и § 26). При распространении волны вдоль провода одна часть ее энергии (бо́льшая) находится в воздухе, а другая (меньшая) — в металле, и результирующая фазовая скорость волны получается как некоторая „взвешенная средняя". Так как поле в металле выделяет тепло, то наряду с замедлением волна приобретает и затухание. Аналогичным образом замедляет электромагнитные волны и диэлектрик (ср. § 64).

Отметим, что формулу (62.03) можно переписать в виде

$$h^2 = k^2 + \frac{ik\varkappa}{a \ln \frac{2}{\gamma p a}} = k^2 + i\omega C' Z_i, \tag{62.09}$$

где

$$Z_i = \frac{\zeta}{2\pi a} = \frac{2\varkappa}{ca} \tag{62.10}$$

есть погонный внутренний импеданс провода [формулы (26.06) и (26.23)], а параметр

$$C' = \frac{1}{2 \ln \frac{2}{\gamma p a}} \tag{62.11}$$

можно назвать (применительно к расчету h) с некоторой натяжкой „погонной емкостью" однопроводной линии. Тогда формула (62.09) приобретает тот же вид, что и формула (35.03) в теории длинных линий. Величина C' комплексна, однако в самом грубом приближении по формуле (62.07) ее можно считать вещественным числом, равным 1/20.

§ 63. Поверхностная волна Ценнека

Термин „поверхностная волна" был впервые введен в связи с теорией распространения радиоволн над земной поверхностью. Ценнек в 1907 г. показал теоретически, что вдоль проводящей поверхности земли (или моря) может распространяться поверхностная волна. Эта волна принципиально не отличается от поверхностной волны, распространяющейся вдоль провода. Характеристическое уравнение поверхностной волны Ценнека, распространяю-

Научное наследие России

щейся над плоской земной поверхностью, можно получить, например, из уравнения (62.04), полагая в нем $a=\infty$ и пользуясь асимптотическими формулами. Таким путем мы приходим к соотношению

$$p=iwk. \tag{63.01}$$

Его проще получить непосредственно, исследуя распространение (вдоль оси z) волны, поле которой не зависит от координаты y. При $x>0$ (в воздухе) мы берем единственную составляющую вектора Герца в виде

$$\Pi_z=\Pi(x)\,e^{ihz};\ \Pi(x)=Ae^{-px} \tag{63.02}$$

[ср. формулу (61.11)]. Выражение (63.02) соответствует волне, „прилипающей“ к плоскости $x=0$ — поверхности земли. Электромагнитное поле имеет составляющие

$$\left.\begin{aligned} E_x&=ih\frac{d\Pi}{dx}e^{ihz}=-ihpAe^{-px+ihz},\\ E_z&=-p^2\Pi e^{ihz}=-p^2Ae^{-px+ihz},\\ H_y&=ik\frac{d\Pi}{dx}e^{ihz}=-ikpAe^{-px+ihz},\\ E_y&=H_x=H_z=0. \end{aligned}\right\} \tag{63.03}$$

Ставя граничное условие Леонтовича

$$E_z=wH_y \quad \text{при } x=0, \tag{63.04}$$

мы приходим к соотношению (63.01).

Поверхностную волну Ценнека можно рассматривать как обычную плоскую волну, испытавшую некоторое замедление благодаря просачиванию части энергии в почву. Действительно, при $w=0$ уравнение (63.01) дает $p=0$ и $h=k$, и мы приходим к формулам

$$\left.\begin{aligned} E_x&=H_y=A_0e^{ikz},\\ E_z&=0 \qquad A_0=-ikpA. \end{aligned}\right\} \tag{63.05}$$

При $w\neq 0$ волновое число h равно

$$h=\sqrt{k^2+p^2}=k\sqrt{1-w^2}. \tag{63.06}$$

Для хороших проводников параметр w мал, поэтому волновое число h мало отличается от k при распространении волны Ценнека над сушей и тем более над морем. По-

ЭБ "Научное наследие России"

верхностный характер волны Ценнека выражен весьма слабо: так как обычно для почвы $|w| \ll 1$, то $|p| \ll k$, и вертикальная протяженность волны Ценнека весьма велика по сравнению с длиной волны. Передающие антенны поверхностной волны Ценнека фактически не возбуждают (см. § 83), и она для распространения радиоволн над сушей или морем никакого реального значения не имеет; поле радиоволн имеет совершенно иную структуру.

После того, как теоретически и экспериментально было доказано, что особенности распространения радиоволн над земной поверхностью не могут быть объяснены с помощью концепции поверхностной волны, сам опороченный термин „поверхностная волна" долгое время не употреблялся. Однако, как мы видели выше, все медленные волны являются фактически волнами поверхностного типа, так что волна, замедленная, например, проводом, качественно не отличается от поверхностной волны Ценнека.

Однако эти две поверхностные волны различаются в количественном отношении. Поверхностный характер волны вдоль провода с конечным сопротивлением выражен гораздо более резко, чем поверхностный характер волны, распространяющейся вдоль плоской границы проводника. Физически этот результат довольно понятен, так как тонкий провод должен хорошо направлять электромагнитную волну вдоль своей оси.

Сравним обе системы — провод и плоскость — более детально. Электромагнитное поле вокруг идеально проводящей однопроводной линии наиболее интенсивно вблизи самого провода [см. рис. 20,*а* и формулу (29.11)]. Поэтому при просачивании этого поля в провод с конечной проводимостью получается большее замедление, чем для плоской границы, и более быстрое спадание поля в поперечном направлении. Иначе можно сказать, что для провода замедление лишь усиливает закон спадания $\frac{1}{r}$, имевшийся при отсутствии замедления, а для плоской границы спадание появляется лишь в результате замедления.

§ 64. Замедление волн диэлектрической пластиной

Исследуем распространение электромагнитных волн в диэлектрическом слое толщиной $2l$, изображенном на рис. 68. Для общности будем приписывать слою $-l < x < l$ диэлектрическую проницаемость ε и магнитную проницае-

Электронное наследие России"

мость μ, и лишь в конце выкладок положим $\mu = 1$. Вне этого слоя, при $|x| > l$ — пустота, где $\varepsilon = \mu = 1$.

Рассмотрим, как и в § 63, поверхностные электрические волны, поля которых не зависят от координаты y (двухмерные поля). Эти волны имеют электрический вектор Герца с единственной составляющей

$$\Pi_z = \Pi(x) e^{ihz}. \tag{64.01}$$

Вне пластины, при $x > l$, поле такой волны определяется формулами (63.03). В пластине, при $|x| < l$, составляющая

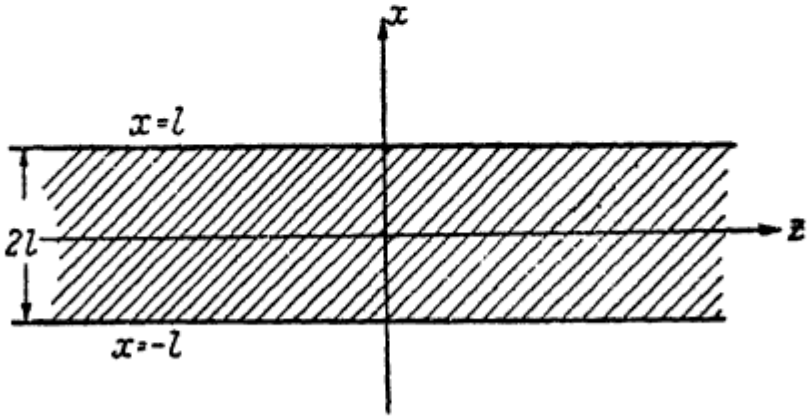


Рис. 68. Диэлектрическая пластина (плоскопараллельный слой).

Π_z должна удовлетворять уравнению (21.12), отсюда для функции Π получаем уравнение

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} + g^2\Pi = 0 \quad (g^2 = k^2\varepsilon\mu - h^2), \tag{64.02}$$

имеющее частные решения

$$\Pi = B \sin gx \tag{64.03}$$

и

$$\Pi = B' \cos gx. \tag{64.04}$$

Выражение (64.03) определяет по формулам (21.13) составляющие электромагнитного поля в диэлектрике, равные

$$\left.\begin{aligned} E_x &= ih\frac{d\Pi}{dx} e^{ihz} = ihgB\cos gx e^{ihz}, \\ E_z &= g^2\Pi e^{ihz} = g^2 B \sin gx e^{ihz}, \\ H_y &= ik\varepsilon\frac{d\Pi}{dx} e^{ihz} = ikg\varepsilon B\cos gx e^{ihz}, \\ E_y &= H_x = H_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{64.05}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Приравнивая составляющие E_z и H_y по формулам (63.03) и (64.05) на поверхности раздела $x=l$, мы получаем соотношения

$$\left.\begin{aligned} -p^2 A e^{-pl} &= g^2 B \sin gl, \\ -pA e^{-pl} &= g\varepsilon B \cos gl. \end{aligned}\right\} \tag{64.06}$$

Условие совместности этих алгебраических уравнений для постоянных A и B дает характеристическое уравнение

$$pl = \frac{1}{\varepsilon} gl \operatorname{tg} gl, \tag{64.07}$$

позволяющее вычислить фазовую скорость волн, распространяющихся вдоль пластин. Множитель l добавлен в правой и левой части уравнения (64.07) и последующих уравнений для удобства исследования.

Частное решение (64.04) приводит нас к соотношениям

$$\left.\begin{aligned} -p^2 A e^{-pl} &= g^2 B' \cos gl, \\ -pA e^{-pl} &= -g\varepsilon B' \sin gl. \end{aligned}\right\} \tag{64.08}$$

Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$pl = -\frac{1}{\varepsilon} gl \operatorname{ctg} gl. \tag{64.09}$$

Электрические волны, определяемые решениями (64.03) и (64.04), имеют различную симметрию относительно плоскости $x=0$. Электрическую волну (64.05) естественно назвать четной электрической волной, поскольку ее составляющие E_x и H_y являются четными функциями координаты x (а E_z и Π_z — нечетными). Электрическая волна, соответствующая выражению (64.04), называется нечетной электрической волной, так как ее поперечные составляющие электрического и магнитного поля суть нечетные функции x. Заметим, что в силу четности или нечетности составляющих полей граничные условия для этих волн удовлетворяются при $x=-l$ автоматически, если они удовлетворены при $x=l$, поэтому вторую границу раздела можно не рассматривать.

Наряду с электрическими волнами вдоль пластины могут распространяться магнитные волны, магнитный вектор Герца которых имеет единственную составляющую

$$\Pi'_z = \Pi'(x) e^{ihz}. \tag{64.10}$$

...ное наследие России"

Характеристическое уравнение четных магнитных волн имеет вид

$$pl = \frac{1}{\mu} gl \operatorname{tg} gl, \tag{64.11}$$

а для нечетных волн

$$pl = -\frac{1}{\mu} gl \operatorname{ctg} gl. \tag{64.12}$$

Эти уравнения отличаются от уравнений (64.07) и (64.09) заменой ε на μ.

Переходя к диэлектрической пластине, будем считать $\varepsilon > 1$ и $\mu = 1$. При анализе волн несбходимо учесть, что величины g и p связаны соотношением

$$g^2 + p^2 = k^2(\varepsilon - 1). \tag{64.13}$$

Кроме того, должно быть $p > 0$ (поверхностная волна), так что если правая часть характеристических уравнений (64.07), (64.09), (64.11) или (64.12) отрицательна, то решение отсутствует.

Зависимость pl от gl согласно уравнению (64.07) (при тех gl, когда $pl > 0$) изображена на рис. 69,*а* сплошными кривыми; множитель $\frac{1}{\varepsilon}$, изменяющий масштаб по оси ординат, на рис. 69 не учтен. Так как

$$(gl)^2 + (pl)^2 = (kl)^2(\varepsilon - 1), \tag{64.14}$$

то искомые значения gl и pl, соответствующие заданным параметрам пластины l и ε и заданной частоте $\omega = ck$, лежат на пересечениях кривых рис. 69,*а* с окружностью радиуса

$$R = kl\sqrt{\varepsilon - 1}, \tag{64.15}$$

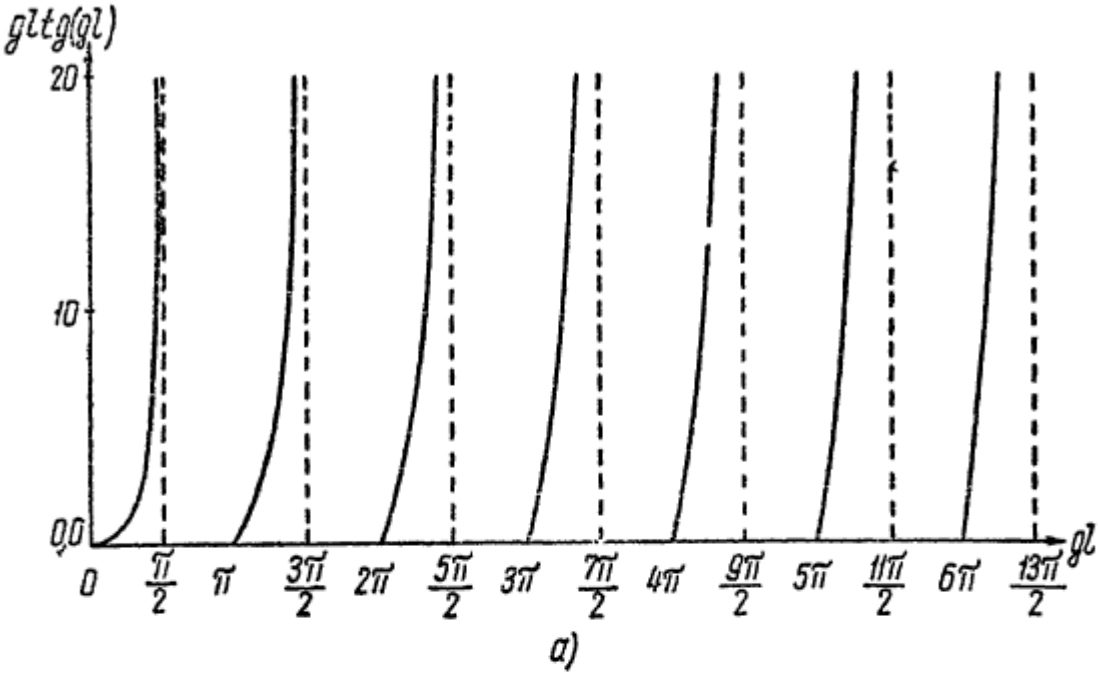
имеющей центр в начале координат (в точке $gl = pl = 0$). Так как эта окружность пересекается лишь с конечным числом ветвей кривых на рис. 69,*а*, то уравнение (64.07) имеет лишь конечное число корней. При $R < \pi$ мы имеем лишь один корень, который дает нам так называемую волну E_{00} в диэлектрической пластине; при $R > \pi$ появляется второй корень, соответствующий волне E_{20}, при $R > 2\pi$ — корень, дающий волну E_{40} и т. д. Волновые числа h этих волн определяются формулой

$$h^2 = k^2 + p^2. \tag{64.16}$$

Все эти волны суть медленные волны. Число волн тем больше, чем выше рабочая частота, точнее — чем больше параметр R. В этом отношении диэлектрическая

ЭБ "Научное наследие России"

пластина аналогична волноводу, и поэтому ее можно назвать плоскопараллельным диэлектрическим волноводом. Частоты, при которых появляются новые распространяющиеся волны в диэлектрическом волноводе, можно на-



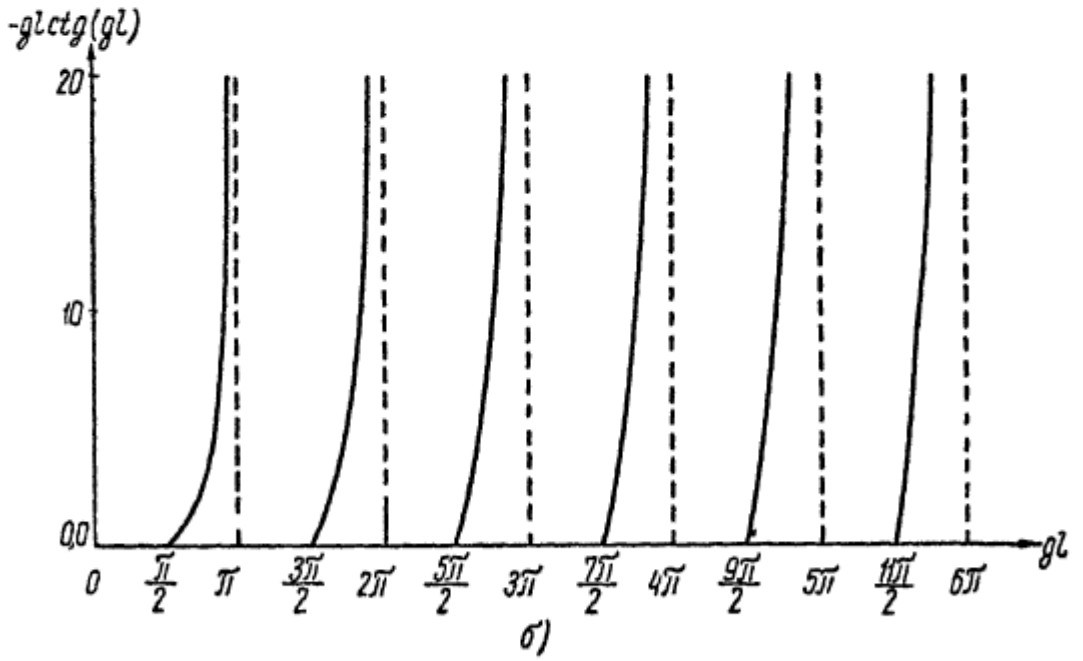


Рис. 69. Графическое решение характеристических уравнений
а — для четных волн; *б* — для нечетных волн.

звать критическими частотами. Они соответствуют значениям $R = \pi$, $R = 2\pi$ и т. д.

Однако аналогия между диэлектрическим и обычным волноводом является неполной, так как электромагнитное поле частично просачивается за пределы диэлектрического вол-

ЭБ "Научное наследие России"

новода. Это приводит к тому, что новая волна, появляющаяся в диэлектрическом волноводе при своей критической частоте, имеет согласно рис. 69,*а* $p=0$ и $h^2=k^2$, т. е. распространяется со скоростью света, в то время как в обычном волноводе при критической частоте $h=0$. Другое важное отличие состоит в том, что при частоте ниже критической в диэлектрическом волноводе данной волны вообще нет, в то время как в обычном волноводе она существует в виде затухающей волны.

Прежде чем перейти к физическому анализу этих результатов, исследуем характеристическое уравнение (64.09) для нечетных электрических волн. Это уравнение дает семейство кривых, изображенных на рис. 69,*б*, пересечение которых с окружностью (64.14) определяет значения gl и pl, соответствующие данному значению параметра R. Из рис. 69,*б* видно, что при $R<\frac{\pi}{2}$ уравнение (64.09) вообще не имеет решения, так что при этом условии нечетных электрических волн нет. При $R>\frac{\pi}{2}$ появляется волна E_{10}, при $R>\frac{3\pi}{2}$ — волна $E_{\varepsilon 0}$ и т. д. Вообще можно сказать, объединяя результаты исследования четных и нечетных волн, что волна E_{m0} существует лишь при условии

$$R\geqslant m\frac{\pi}{2}. \tag{64.17}$$

Характеристические уравнения (64.11) и (64.12) исследуются аналогичным образом: кривые, определяющие зависимость pl от gl для четных (H_{00}, H_{20} и т. д.) и нечетных (H_{10}, H_{30} и т. д.) магнитных волн совпадают с кривыми на рис. 69,*а* и 69,*б*, причем при расчетах масштаба мы изменять не должны $\left(\text{отсутствие множителя } \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Поэтому неравенство (64.17) есть также условие существования волны H_{m0}.

На рис. 69 видно, что для данной волны (например, для волны E_{00} или E_{10}) при неограниченном увеличении параметра R величина gl стремится к конечному пределу $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \text{ и т. д.}\right)$, а величина pl неограниченно возрастает. Поэтому при частоте, значительно превышающей критическую частоту данной волны, ее поле в основном сосре-

доточено в диэлектрике и в окружающее пространство просачивается слабо. Действительно, условие $pl \gg 1$ приводит к тому, что поперечная протяженность поля в пустоте значительно меньше l. Формула

$$h = \sqrt{k^2\varepsilon - g^2} \tag{64.18}$$

показывает, что при таких „высоких" частотах волна распространяется с волновым числом $h \approx k\sqrt{\varepsilon}$ (так как k растет, а g конечно), т. е. с той же скоростью, что и в безграничном диэлектрике. Наоборот, при критической частоте $p = 0$ и $h = k$. Это значит, что при частоте, лишь немного превышающей критическую частоту, электромагнитное поле волны в основном расположено в пустоте; окружающее пространство заполнено полем на большом протяжении, так как $pl \ll 1$. При таких „низких" частотах $h \approx k$, т. е. скорость волны близка к c. При частотах ниже критической данная волна исчезает.

Эти закономерности, связывающие распределение поля волны с ее фазовой скоростью, находятся в согласии с высказанными в конце § 62 соображениями о том, что результирующая скорость волны, распространяющейся вдоль границы двух сред, является „взвешенной средней" скоростью.

Распространение медленных волн удобно характеризовать с помощью коэффициента замедления

$$\beta = \frac{u}{c} = \frac{k}{h}, \tag{64.19}$$

равного отношению фазовой скорости u данной волны к скорости света в пустоте c. На рис. 70 изображен коэффициент замедления β волны E_{00} в зависимости от частоты f и соответствующей ей длины λ в свободном пространстве. Расчет произведен для диэлектрической пластины, половинная толщина которой $l = 1$ *см*, 0,5 *см* и 0,1 *см*, а диэлектрическая постоянная $\varepsilon = 4$. Мы видим, что, в соответствии со сказанным выше, коэффициент β при росте частоты уменьшается от $\beta = 1$ (волна со скоростью c) до $\beta = \frac{1}{2}$ $\left(\text{скорость } \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{2}\right)$.

Физический смысл явлений в диэлектрическом волноводе можно представить себе более ясно, если разложить электромагнитное поле в нем на плоские волны, как мы это делали в § 48 для обычного волновода. Составляю-

Электронное культурное наследие России

щая Π_z для нечетных электрических волн представится с помощью формул Эйлера в виде

$$\Pi_z = \frac{B}{2i}\left[e^{i(gx+hz)} - e^{i(-gx+hz)}\right], \qquad (64.20)$$

и на аналогичные слагаемые разложатся ссставляющие поля (64.05). Так как волновые числа g и h удовлетворяют соотношению

$$g^2 + h^2 = k^2\varepsilon, \qquad (64.21)$$

то можно, как и в § 48, ввести угол ϑ по формулам

$$g = k\sqrt{\varepsilon}\sin\vartheta; \quad h = k\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta. \qquad (64.22)$$

Отсюда видно, что поле внутри диэлектрического волновода является суммой двух плоских волн, направление

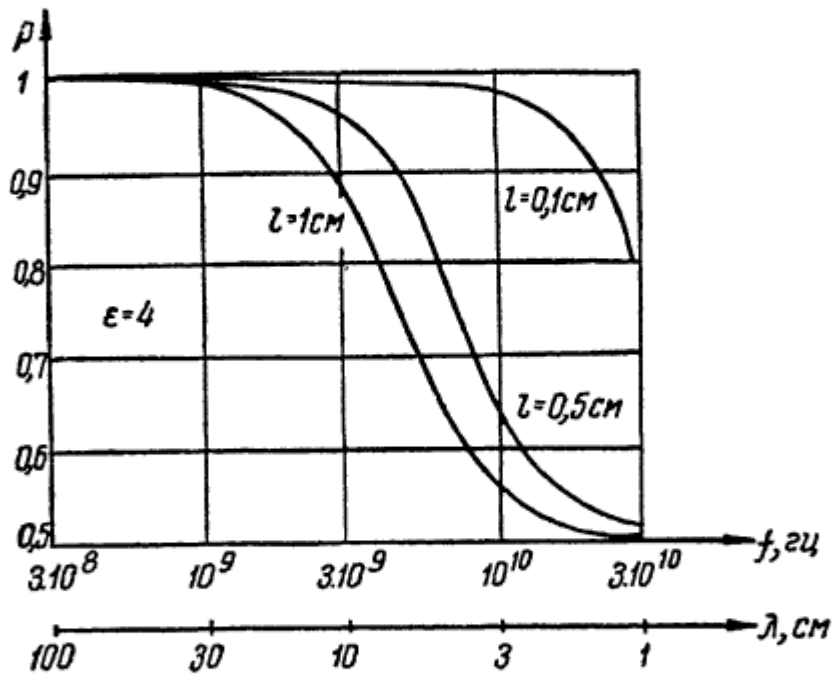


Рис. 70. Дисперсия волны E_{00} в диэлектрическом слое.

распространения которых образует с осью z угол ϑ. Угол падения этих волн на границу диэлектрика (плоскость $x=l$ или $x=-l$), очевидно, равен (рис. 71,*а*)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \vartheta. \qquad (64.23)$$

Изученные выше волны в диэлектрическом волноводе были медленными волнами, т. е. удовлетворяли условию

$$h = k\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta = k\sqrt{\varepsilon}\sin\varphi > k \qquad (64.24)$$

ЭБ "Научное наследие России"

и угол падения φ удовлетворял неравенству

$$\sin\varphi > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{n}. \qquad (64.25)$$

Поэтому плоские волны (64.20) на границе диэлектрика с пустотой испытывают полное внутреннее отражение.

Таким образом, волноводные свойства диэлектрической пластины обусловлены явлением полного внутреннего отражения, благодаря которому значительная часть электро-

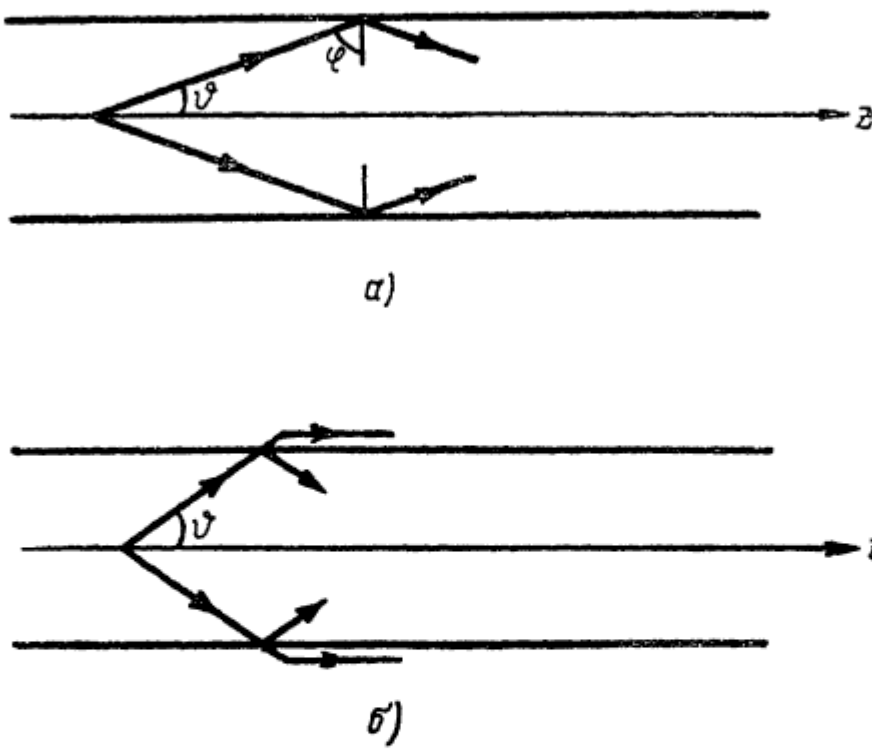


Рис. 71. Разложение волны в диэлектрической пластине на плоские волны:
а — при частоте выше критической; *б* — при критической частоте.

магнитной энергии сохраняется в пределах диэлектрика. Электромагнитное поле в окружающем диэлектрик пространстве возникает благодаря просачиванию энергии в другую среду, причем просачивающееся поле затухает при удалении от плоскости раздела по экспоненциальному закону.

При частотах, значительно превышающих критическую частоту данной волны, угол ϑ мал и плоские волны распространяются почти по оси z, чему соответствует $h \approx k\sqrt{\varepsilon}$. При уменьшении частоты угол ϑ увеличивается, а угол φ — уменьшается, что имеет место и в обычном волноводе (§ 48). Однако угол ϑ не может увеличиваться до значения $\frac{\pi}{2}$,

Электронное наследие России

как в обычном волноводе; а именно, при критической частоте мы имеем

$$\cos\vartheta = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{64.26}$$

и в окружающем пространстве появляется преломленный луч, идущий вдоль границы раздела (рис. 71,*б*). Этому лучу соответствует плоская волна, распространяющаяся в пустоте параллельно оси z со скоростью c. При более низких частотах данная волна существовать не может, поскольку диэлектрическая пластина теряет для нее свои волноводные свойства.

Особое положение занимают волны E_{00} и H_{00}, не имеющие критической частоты и существующие при сколь угодно низких частотах. Исследуем поведение волны E_{00} при условии

$$R = kl\sqrt{\varepsilon - 1} \ll 1, \tag{64.27}$$

которое по формуле (64.14) влечет за собой неравенство

$$gl \ll 1, \tag{64.28}$$

и характеристическое уравнение (64.07) принимает вид

$$p = \frac{1}{\varepsilon} g^2 l. \tag{64.29}$$

Отсюда получаем приближенные соотношения

$$p = k^2 l \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}; \quad \beta = 1 - (kl)^2 \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon}. \tag{64.30}$$

Аналогичные формулы

$$p = k^2 l(\varepsilon - 1); \quad \beta = 1 - (kl)^2 \frac{\varepsilon - 1}{2} \tag{64.31}$$

имеют место для волны H_{00} при тех же условиях.

Таким образом, при весьма низких частотах [при условии (64.27)] замедление волны E_{00} мало, вследствие чего во внешнем пространстве она имеет структуру плоской поперечной волны, распространяющейся со скоростью c вдоль оси z [см. формулы (63.05)]. Любопытно отметить, что поле внутри диэлектрика также становится поперечным, как это легко вывести из формул (64.05).

Рассмотрим в заключение волноводные свойства диэлектрического слоя толщиной l, лежащего на идеально про-

ЭБ "Научное наследие России"

водящей плоскости $x=0$ (рис. 72). На этой плоскости должны выполняться граничные условия

$$E_z = E_y = 0 \text{ при } x = 0. \tag{64.32}$$

Как непосредственно видно из формулы (64.05), четные электрические волны (E_{00}, E_{20}, E_{40}, . . .) в диэлектрическом слое толщиной $2l$ автоматически удовлетворяют этим граничным условиям и поэтому распространяются в системе, изображенной на рис. 72, по тем же законам, что и в пластине (рис. 68). В частности, кривые рис. 70 в равной

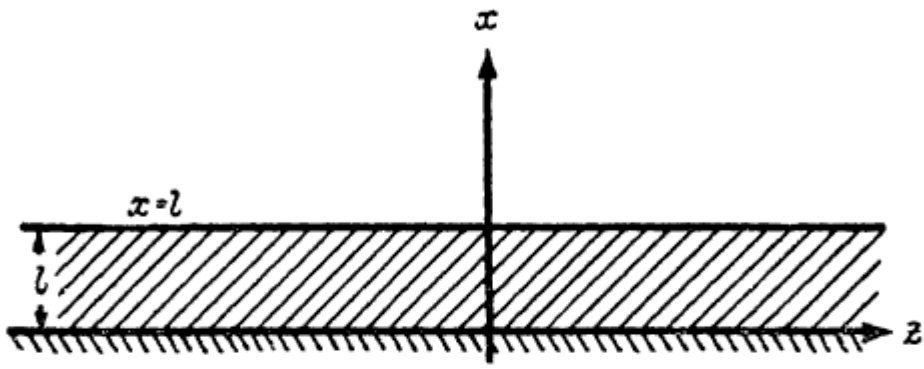


Рис. 72. Проводящая плоскость с диэлектрическим слоем.

степени применимы к волне E_{00}, распространяющейся вдоль плоскости с диэлектрическим слоем толщиной l. Нечетные магнитные волны (H_{10}, H_{30}, . . .) также без всяких изменений существуют в новой системе. Указанными волнами исчерпываются поверхностные волны в системе. Все эти волны можно рассматривать как результат попеременного отражения плоских волн от проводящей плоскости $x=0$ и границы диэлектрика $x=l$.

При условии (64.27) электромагнитное поле волны E_{00} преобразуется в поле плоской волны (63.05). Поэтому поверхностную волну E_{00} можно считать возникшей из плоской волны (63.05), распространяющейся над идеально проводящей плоскостью, в результате замедляющего действия диэлектрического слоя.

§ 65. Другие типы „гладких" замедляющих систем и их применение

Замедление электромагнитных волн диэлектрическими цилиндрами (стержнями) подчиняется таким же закономерностям, что и рассмотренное выше замедляющее действие диэлектрической пластины. Диэлектрический стержень

Электронное наследие России

также можно назвать „круглым диэлектрическим волноводом“: благодаря полному внутреннему отражению электромагнитная энергия концентрируется внутри стержня и лишь слабо просачивается в окружающее пространство. Таким образом, диэлектрический стержень есть аналог светящейся стеклянной палочки, часто используемой в микроскопии для освещения объекта, и светящейся струи фонтана. Анализ таких систем в оптике производится путем построения хода лучей, что оправдывается чрезвычайной малостью длины волны видимого света. Для радиоволн необходимо, одчако, произвести более детальное электродинамическое исследование, подобное проведенному в § 64 анализу волн в диэлектрической пластине. Этот анализ отличается некоторой громоздкостью (см. § 66), поэтому мы здесь лишь сообщим его основные результаты.

Волны в диэлектрическом стержне имеют те же свойства, что и волны E_{m0} и H_{m0} $(m=1, 2, \ldots)$ в диэлектрической пластине: каждая такая волна существует лишь при частотах, превышающих некоторую критическую частоту; при „высоких“ частотах ее поле в основном расположено в стержне, и $h \approx k\sqrt{\varepsilon}$; при „низких“ — в окружающем пространстве, и $h \approx k$. Помимо этих волн существует волна, аналогичная волнам E_{00} и H_{00} в диэлектрической пластине и существующая при любых частотах. Эта волна — несимметричная, при весьма низких частотах структура ее поля вблизи стержня приобретает вид, изображенный на рис. 73. Данную волну можно рассматривать как обычную плоскую волну, возмущенную и замедленную диэлектрическим стержнем, вследствие чего она превращается в поверхностную волну с продольными составляющими электрического и магнитного поля.

Данная волна используется в диэлектрических антеннах, выполненных в виде заостренных на конце стержней, для создания излучения, направленного вдоль оси стержня. При этом рабочая длина волны обычно берется достаточно большой, чтобы в диэлектрическом стержне не было других волн (рабочая частота ниже критических частот этих волн). В качестве линий передачи диэлектрические стержни применения не нашли.

Интересным типом замедляющейся системы является металлический стержень с диэлектрической оболочкой, например провод, покрытый изолирующим слоем. Если считать металлический стержень идеально проводящим, то свойства волн в такой системе аналогичны свойствам

ЭБ "Научное наследие России"

волн, распространяющихся вдоль проводящей плоскости со слоем диэлектрика (см. конец § 64). При достаточно низких частотах вдоль идеально проводящего цилиндра с диэлектрической оболочкой могут распространяться только две волны — симметричная и несимметричная. Симметричная волна при отсутствии диэлектрика переходит в поперечную волну однопроводной линии (рис. 20,*а*), а несимметричная волна — в плоскую волну, возмущенную поверхностью стержня (рис. 74). Несимметричная волна проводящего цилиндра с диэлектрической оболочкой при любых

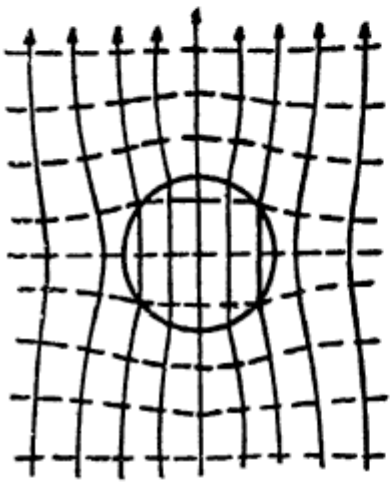


Рис. 73. Поле несимметричной волны („основной"), распространяющейся вдоль диэлектрического стержня при низких частотах.

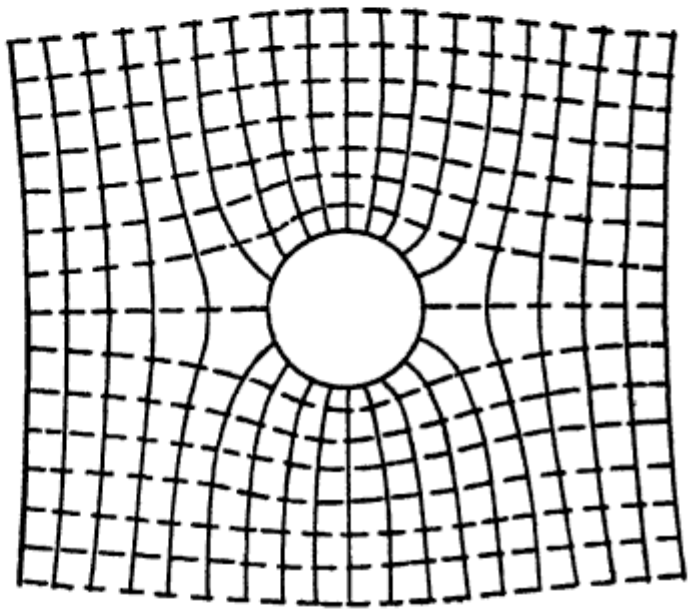


Рис. 74. Поле несимметричной волны („основной"), распространяющейся вдоль проводящего стержня с весьма тонкой диэлектрической оболочкой.

частотах аналогична такой же волне в диэлектрическом стержне; однако соответствующей симметричной волны в диэлектрическом стержне нет. Более детальное изложение теории волн в этой системе читатель найдет в § 67.

Симметричная волна провода с диэлектрическим слоем может быть использована для передачи электромагнитной энергии. Для этого пригодна, например, установка, схематически изображенная на рис. 75. Она состоит из коаксиальной линии, внутренний провод которой продолжается в виде „открытого" провода с диэлектрической оболочкой, и согласующего рупора, в котором происходит трансформация поперечной волны коаксиальной линии в электрическую поверхностную волну на проводе.

Электронное наследие России

На рис. 75 виден также ход электрических силовых линий симметричной поверхностной волны, рассмотренной нами в § 62. На приемном конце линии используется такое же

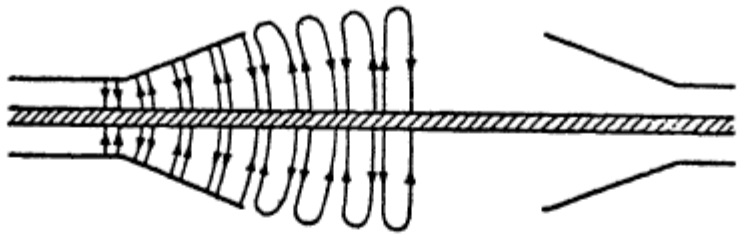


Рис. 75. Передача сантиметровых волн вдоль провода.

сочетание рупора и линии. Описанное устройство может быть применено в сантиметровом диапазоне радиоволн.

Вместо провода с диэлектрической оболочкой (рис. 76,*а*) в установке, представленной на рис. 75, можно использо-

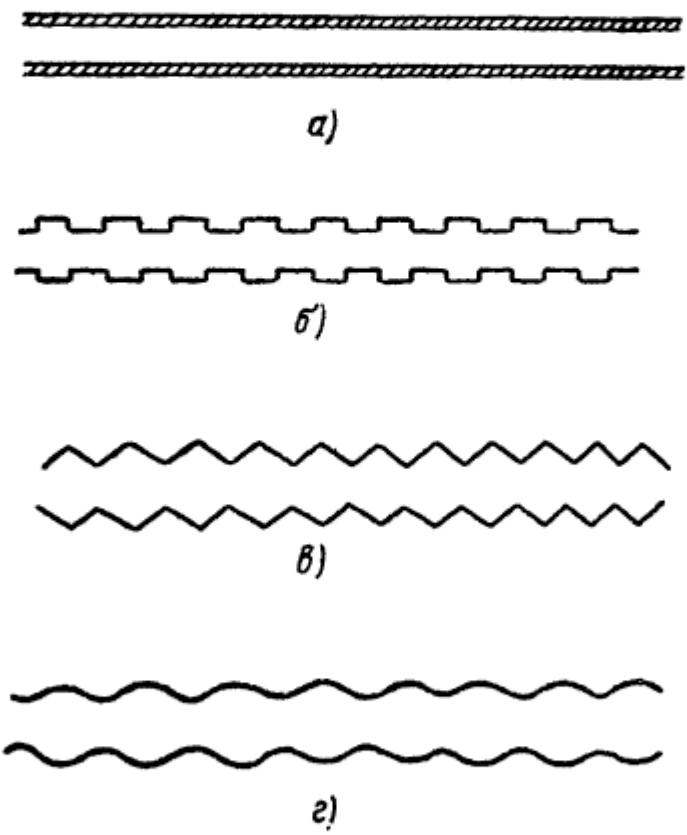


Рис. 76. Различные способы дополнительного замедления волн, распространяющихся вдоль провода:
а — диэлектрическая оболочка; *б* — гофрированная поверхность; *в* — зигзагообразная поверхность; *г* — волнистая поверхность.

вать для замедления электромагнитных волн провод с „гофрированной" (рис. 76,*б*), зигзагообразной (рис. 76,*в*) или волнистой поверхностью (рис. 76,*г*). Как мы видели в § 62, конечное сопротивление металлического провода само по

ЭБ "Научное наследие России"

себе приводит к некоторому замедлению волны и превращает ее в поверхностную волну: диэлектрическая оболочка или гофрирование лишь усиливают замедление и уменьшают радиальную протяженность поля.

Из сказанного в конце § 63 вытекает, что диэлектрический слой на тонком проводе должен создавать симметричную поверхностную волну, выраженную гораздо сильнее, чем поверхностная волна, распространяющаяся вдоль диэлектрического слоя той же толщины на проводящей плоскости. Несимметричная волна в металлическом стержне с диэлектрической оболочкой в настоящее время применения еще не нашла.

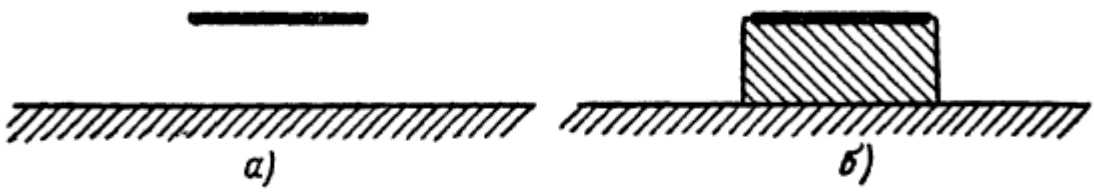


Рис. 77. Ленточный волновод:
а — без диэлектрика; *б* — с диэлектрической прокладкой.

К числу передающих линий с поверхностными волнами принадлежат так называемые ленточные (или полосковые) волноводы. В простейшем варианте ленточный волновод состоит (рис. 77,*а*) из тонкой металлической ленты над металлической плоскостью; он аналогичен двухпроводной линии (один провод—лента, другой — плоскость). Однако из конструктивных соображений между лентой и плоскостью помещают диэлектрическую прокладку (рис. 77,*б*), которая замедляет волну в ленточной линии и придает ей поверхностный характер. Благодаря этому протяженность поля в воздухе уменьшается: электромагнитное поле как бы „стягивается" к диэлектрику и ленте. Преимуществом ленточного волновода является простота его изготовления (по методу печатных схем).

§ 66*. Распространение волн вдоль диэлектрического стержня и родственные задачи

Рассмотрим распространение поверхностных волн вдоль стержня радиуса a, находящегося в пустоте. Пусть материал стержня имеет диэлектрическую проницаемость ε и магнитную проницаемость μ, вообще говоря, комплексные.

Научное наследие России

Будем искать волну, у которой электрический и магнитный векторы Герца при $r < a$ (в стержне) имеют составляющие

$$\Pi_z = AI_m(gr)\sin(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz};$$
$$\Pi'_z = A'J_m(gr)\cos(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz}, \qquad (66.01)$$

а при $r>a$ (в пустоте)—составляющие

$$\Pi_z = BK_m(pr)\sin(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz};$$
$$\Pi'_z = B'K_m(pr)\cos(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz}. \qquad (66.02)$$

В этих формулах A, A', B и B' — постоянные, φ_0 — фиксированный угол, параметры g и p равны

$$g = \sqrt{k^2\varepsilon\mu - h^2};\ p = \sqrt{h^2 - k^2}, \qquad (66.03)$$

h — неизвестное нам продольное волновое число. Выражения (66.01) удовлетворяют волновому уравнению в стержне и имеют при $r<a$ конечные значения. Выражения (66.02) удовлетворяют волновому уравнению в пустоте и при $r\to\infty$ исчезают экспоненциально, в чем и проявляется поверхностный характер исследуемой нами волны.

Применяя формулы (21.13), нетрудно вычислить составляющие поля в цилиндрической системе координат r, φ, z. Для дальнейшего нам понадобятся составляющие

$$\left.\begin{aligned} E_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Pi_z}{\partial\varphi\partial z} - ik\mu\frac{\partial\Pi'_z}{\partial r};\ E_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\varepsilon\mu\right)\Pi_z \\ H_\varphi &= ik\varepsilon\frac{\partial\Pi_z}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Pi'_z}{\partial\varphi\partial z};\ H_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\varepsilon\mu\right)\Pi'_z \end{aligned}\right\} \qquad (66.04)$$

или при $r<a$

$$\left.\begin{aligned} E_\varphi &= \left[\frac{ihm}{r}AJ_m(gr) - ikg\mu A'J'_m(gr)\right]\cos(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz}; \\ E_z &= g^2AJ_m(gr)\sin(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz}; \\ H_\varphi &= \left[ikg\varepsilon AJ'_m(gr) - \frac{ihm}{r}A'J_m(gr)\right]\sin(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz}; \\ H_z &= g^2A'J_m(gr)\cos(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz}, \end{aligned}\right\} \qquad (66.05)$$

ЭБ "Научное наследие России"

а при $r>a$, где $\varepsilon=\mu=1$, имеем

$$\left.\begin{aligned}
E_\varphi &= \left[\frac{ihm}{r}BK_m(pr)-ikpB'K_m'(pr)\right]\cos(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz};\\
E_z &= -p^2BK_m(pr)\sin(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz};\\
H_\varphi &= \left[ikpBK_m'(pr)-\frac{ihm}{r}B'K_m(pr)\right]\sin(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz};\\
H_z &= -p^2B'K_m(pr)\cos(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz}.
\end{aligned}\right\} \quad (66.06)$$

Требование непрерывности этих составляющих при $r=a$ (на границе стержня) приводит к следующим уравнениям для постоянных A, A', B и B':

$$\frac{ihm}{a}AJ_m(ga)-ikg\mu A'J_m'(ga)=\frac{ihm}{a}BK_m(pa)-ikpB'K_m'(pa);$$

$$g^2AJ_m(ga)=-p^2BK_m(pa);$$

$$ikg\varepsilon AJ_m'(ga)-\frac{ihm}{a}A'_mJ_m(ga)=ikpBK_m'(pa)-\frac{ihm}{a}B'K_m(pa);$$

$$g^2A'J_m(ga)=-p^2B'K_m(pa). \quad (66.07)$$

Выразив B и B' через A и A', мы для последних получаем алгебраические уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{mh(g^2+p^2)}{p^2a}A-kg^2\left[\frac{\mu J_m'(ga)}{gJ_m(ga)}+\frac{K_m'(pa)}{pK_m(pa)}\right]A'=0,\\
&kg^2\left[\frac{\varepsilon J_m'(ga)}{gJ_m(ga)}+\frac{K_m'(pa)}{pK_m(pa)}\right]A-\frac{mh(g^2+p^2)}{p^2a}A'=0.
\end{aligned}\right\} \quad (66.08)$$

Введем обозначения

$$f_m=\frac{J_m'(ga)}{gaJ_m(ga)};\quad F_m=-\frac{K_m'(pa)}{paK_m(pa)}, \quad (66.09)$$

тогда уравнения (66.08) перепишутся в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{mh(g^2+p^2)}{p^2}A-k(ga)^2(\mu f_m-F_m)A'=0,\\
&k(ga)^2(\varepsilon f_m-F_m)A-\frac{mh(g^2+p^2)}{p^2}A'=0.
\end{aligned} \quad (66.10)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(\varepsilon f_m-F_m)(\mu f_m-F_m)=\frac{m^2h^2(g^2+p^2)^2}{k^2p^4(ga)^4}. \quad (66.11)$$

Электронное наследие России

Пользуясь тождествами

$$g^2 + p^2 = k^2(\varepsilon\mu - 1);\ g^2 + \varepsilon\mu p^2 = h^2(\varepsilon\mu - 1), \quad (66.12)$$

мы можем переписать характеристическое уравнение следующим образом:

$$(\varepsilon f - F_m)(\mu f_m - F_m) = m^2\left[\frac{1}{(ga)^2} + \frac{1}{(pa)^2}\right]\left[\frac{\varepsilon\mu}{(ga)^2} + \frac{1}{(pa)^2}\right], \quad (66.13)$$

Это уравнение связывает между собой переменные ga и pa; оно аналогично уравнению (64.07). Соотношение

$$(ga)^2 + (pa)^2 = R^2;\ R = ka\sqrt{\varepsilon\mu - 1} \quad (66.14)$$

дает дополнительную связь между этими переменными.

Рассмотрим сначала симметричные поверхностные волны, имеющие азимутальный индекс $m = 0$. В этом случае правая часть уравнения (64.13) исчезает, и уравнение распадается на два более простых уравнения

$$\varepsilon f_0 = F_0 \quad (66.15)$$

и

$$\mu f_0 = F_0 \quad (66.16)$$

Для волны, удовлетворяющей уравнению (66.16), из соотношений (66.10) и (66.07) получаем $A' = B' = 0$, так что такая волна является электрической. Из уравнения (66.15) получаются магнитные волны, поскольку для них $A = B = 0$.

Уравнения (66.15) и (66.16) удобно переписать в виде

$$\frac{1}{F_0} = \frac{1}{\varepsilon f_0} \quad (66.17)$$

и

$$\frac{1}{F_0} = \frac{1}{\mu f_0}, \quad (66.18)$$

где

$$\frac{1}{F_0} = pa\frac{K_0(pa)}{K_1(pa)};\ \frac{1}{f_0} = -ga\frac{J_0(ga)}{J_1(ga)}. \quad (66.19)$$

Пользуясь формулами (27.07) и (27.21), легко показать, что при большом комплексном показателе преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ уравнение (66.18) переходит в уравнение (62.04) для поверхностной волны, распространяющейся вдоль провода с волновым сопротивлением $w = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$. Для анализа

ЭБ "Научное наследие России"

волн, распространяющихся вдоль диэлектрического стержня ($\varepsilon > 1, \mu = 1$), можно воспользоваться графическими приемами, лишь немного усложняющимися по сравнению с § 64.

Левая часть уравнений (66.17) и (66.18) есть монотонная функция своего аргумента (см. далее рис. 79). Правая часть, т. е. функция $\frac{1}{f_0}$, имеет тот же характер, что и правая часть уравнения (64.09), изображенная на рис. 69,*б*; она состоит из ряда ветвей, причем n-я ветвь лежит в пределах

$$\nu_{0n} < ga < \mu_{0n}, \tag{66.20}$$

где согласно § 42 через ν_{0n} обозначен n-й положительный корень уравнения $J_0(\nu) = 0$, а через μ_{0n} обозначен n-й корень уравнения $J_0'(\mu) = -J_1(\mu) = 0$. Каждая ($n$-я) ветвь кривой дает начало симметричной электрической волне E_{0n} и симметричной магнитной волне H_{0n}, причем эти волны существуют в „круглом диэлектрическом волноводе“ (стержне) при условии

$$R \geqslant \nu_{0n}. \tag{66.21}$$

При условии

$$R < \nu_{01} = 2{,}405 \tag{66.22}$$

симметричных волн в диэлектрическом волноводе нет.

Результаты, полученные в § 64 для диэлектрической пластины, качественно сохраняются и в данном случае: вблизи критической частоты $h \approx k$ и поле в основном расположено в окружающем пространстве, при значительно более высоких частотах $h \approx l\sqrt{\varepsilon}$ и поле сосредоточено внутри стержня.

Несимметричные электромагнитные волны в данной системе ($m = 1, 2, \ldots$) имеют „гибридный“ характер, т. е. у них отличны от нуля обе составляющие E_z и H_z; это видно из уравнений (66.10), которые при $m \neq 0$ дают $A \neq 0$ и $A' \neq 0$. Существует два класса несимметричных волн, которые обозначаются как волны HE_{mn} и EH_{mn} соответственно (в литературе они называются также волнами A_{mn} и B_{mn}). Мы не будем здесь разбирать детально свойств этих волн и отошлем читателя к списку литературы в конце книги. Отметим, что каждая из этих волн имеет критическую частоту, ниже которой она не существует; ее скорость и распределение поля в пространстве зависят от частоты каче-

Электронное наследие России

чественно так же, как соответствующие характеристики волн E_{0n} и H_{0n} в стержне или волн в диэлектрической пластинке (§ 64).

Особое положение занимает „основная“ (или „главная“) волна, имеющая азимутальный индекс $m=1$ и критическую частоту, равную нулю. Эта волна существует при любой частоте, подобно волнам E_{00} и H_{00} в диэлектрической пластине. При низких частотах (когда $ka \ll 1$) волновое число $h \approx k$; более точно его можно рассчитать, если воспользоваться формулами

$$J'_m(z) = \frac{m}{z} J_m(z) - J_{m+1}(z); \quad -K'_m(z) = \frac{m}{z} K_m(z) + K_{m-1}(z) \tag{66.23}$$

и представить функции в виде

$$f_m = \frac{m}{(ga)^2} - \frac{J_{m+1}(ga)}{gaJ_m(ga)}; \; F_m = \frac{m}{(pa)^2} + \frac{K_{m-1}(pa)}{paK_m(pa)}. \tag{66.24}$$

Пользуясь формулами (22.07) и (61.20), получим при $m=1$, $ga \ll 1$ и $pa \ll 1$:

$$f_1 = \frac{1}{(ga)^2} - \frac{1}{4}; \quad F_1 = \frac{1}{(pa)^2} + \ln\frac{2}{\gamma pa}. \tag{66.25}$$

При подстановке этих выражений в характеристическое уравнение (66.13) мы будем считать $pa \ll ga \approx ka\sqrt{\varepsilon\mu - 1}$, что оправдывается получаемой формулой (66.28). Приравнивая слагаемые, пропорциональные $\frac{1}{(pa)^2}$, получим соотношение

$$\ln\frac{2}{\gamma pa} + \frac{\varepsilon+\mu}{8} = \frac{\varepsilon\mu+\varepsilon+\mu+1}{2(ga)^2} \tag{66.26}$$

или в том же приближении

$$\ln\frac{2}{\gamma pa} = \frac{\varepsilon\mu+\varepsilon+\mu+1}{2(ka)^2(\varepsilon\mu-1)} - \frac{\varepsilon+\mu}{8}, \tag{66.27}$$

откуда легко находим выражение

$$pa = \frac{2}{\gamma}\exp\left\{-\frac{\varepsilon\mu+\varepsilon+\mu+1}{2(ka)^2(\varepsilon\mu-1)} + \frac{\varepsilon+\mu}{8}\right\}, \tag{66.28}$$

позволяющее вычислить замедление основной волны при низких частотах и указывающее на большую радиальную протяженность ее поля в окружающем пространстве на этих частотах.

ЭБ "Научное наследие России"

Основную волну круглого стержня можно рассматривать (ср. § 65) как плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси z и получившую поверхностный характер благодаря замедлению; все остальные волны имеют критические частоты. Симметрия стержня приводит к поляризационному вырождению (ср. § 42), так что плоские волны различных поляризаций замедляются одинаково. В системе, не обладающей симметрией вращения, в результате замедления возникают две поверхностные волны с разными скоростями, например, в плоскопараллельном диэлектрическом волноводе имеются две основные волны: E_{00} и H_{00}.

Пользуясь леммой § 21, нетрудно исследовать распространение электромагнитных волн в случае, когда при $r<a$ пространство имеет параметры ε_2 и μ_2, а при $r>a$ — параметры ε_1 и μ_1. Характеристические уравнения (66.13), (66.15) и (66.16) остаются в силе, если положить

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}; \quad \mu=\frac{\mu_2}{\mu_1}, \tag{66.29}$$

а формулы (66.03) заменить следующими:

$$g=\sqrt{k^2\varepsilon_2\mu_2-h^2}; \quad p=\sqrt{h^2-k^2\varepsilon_1\mu_1}. \tag{66.30}$$

Таким путем мы получаем, например, характеристическое уравнение для волн в круглом волноводе при конечной проводимости стенок. Считая $\varepsilon_2=\mu_2=1$ и принимая комплексный показатель преломления стенки

$$n=\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \tag{66.31}$$

достаточно большим (так что $|pa|\gg 1$), мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} F_m &\doteq \frac{1}{pa}=-\frac{1}{ika\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}, \\ \frac{F_m}{\varepsilon}&=-\frac{1}{iwka}; \quad \frac{F_m}{\mu}=-\frac{w}{ika}, \end{aligned}\right\} \tag{66.32}$$

где $w=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$ — волновое сопротивление стенки. Уравнение (66.13) принимает вид

$$\left(f_m+\frac{1}{iwka}\right)\left(f_m+\frac{w}{ika}\right)=$$

$$=m^2n^2\left[\frac{1}{(ga)^2}-\frac{1}{(ka)^2n^2}\right]\left[\frac{1}{(ga)^2n^2}-\frac{1}{(ka)^2n^2}\right]. \tag{66.33}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Отбрасывая в правой части члены порядка $\frac{1}{n^2}$ и выше, получаем характеристическое уравнение круглого волновода

$$\left(f_m+\frac{1}{iwka}\right)\left(f_m+\frac{w}{ika}\right)=\frac{m^2}{(ga)^2}\left[\frac{1}{(ga)^2}-\frac{1}{(ka)^2}\right]. \quad (66.34)$$

При $m=0$ это уравнение распадается на два уравнения—для электрических волн E_{0n} и для магнитных волн H_{0n} в отдельности. Уравнение для магнитных волн

$$-f_0=\frac{w}{ika} \quad (66.35)$$

совпадает с уравнением (56.22), выведенным нами ранее с помощью граничных условий Леонтовича.

§ 67*. Распространение волн вдоль проводящего стержня с диэлектрической оболочкой

Идеально проводящий цилиндр радиуса a_0, окруженный концентрической оболочкой, имеющей параметры ε и μ и занимающей область $a_0<r<a$, является более сложной системой. Если по-прежнему считать, что окружающее пространство (при $r>a$) является пустотой, то формулы (66.02) остаются в силе, а вместо выражений (66.01) нужно написать более общие выражения:

$$\left.\begin{aligned}\Pi_z&=A\left[J_m(gr)-\frac{J_m(ga_0)}{N_m(ga_0)}N_m(gr)\right]\sin(m\varphi+\varphi_0)\,e^{ihz},\\ \Pi'_z&=A'\left[J_m(gr)-\frac{J'_m(ga_0)}{N'_m(ga_0)}N_m(gr)\right]\cos(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz},\end{aligned}\right\} \quad (67.01)$$

обеспечивающие выполнение граничных условий

$$E_z=E_\varphi=0 \quad (67.02)$$

на поверхности проводящего цилиндра $r=a_0$.

Проделывая те же выкладки, что и в § 66, мы приходим к характеристическому уравнению

$$\left(\varepsilon f_m^{(1)}-F_m\right)\left(\mu f_m^{(2)}-F_m\right)=$$
$$=m^2\left[\frac{1}{(ga)^2}+\frac{1}{(pa)^2}\right]\left[\frac{\varepsilon\mu}{(ga)^2}+\frac{1}{(pa)^2}\right], \quad (67.03)$$

где

$$\left.\begin{aligned} f_m^{(1)} &= \frac{1}{ga}\,\frac{J'_m(ga)\,N_m(ga_0) - N'_m(ga)J_m(ga_0)}{J_m(ga)N_m(ga_0) - N_m(ga)J_m(ga_0)}, \\ f_m^{(2)} &= \frac{1}{ga}\,\frac{J'_m(ga)N'_m(ga_0) - N'_m(ga)\,J'_m(ga_0)}{J_m(ga)N'_m(ga_0) - N_m(ga)J'_m(ga_0)}, \end{aligned}\right\} \quad (67.04)$$

а функция F_m по-прежнему определяется формулой (66.09).

Для упрощения анализа предположим, что толщина l оболочки удовлетворяет условию

$$l = a - a_0 \ll a. \quad (67.05)$$

Тогда при конечных m можно написать следующие приближенные выражения:

$$\left.\begin{aligned} J_m(ga_0) &= J_m(ga)\cos gl - J'_m(ga)\sin gl, \\ J'_m(ga_0) &= J'_m(ga)\cos gl - J''_m(ga)\sin gl \end{aligned}\right\} \quad (67.06)$$

и аналогичные им для функций $N_m(ga_0)$ и $N'_m(ga_0)$. Выражения (67.06) при конечных значениях ga, когда $gl \ll ga \lesssim 1$, превращаются в два первых члена ряда Тейлора, а при больших ga, когда произведение gl может быть конечным или большим, вытекают из асимптотической формулы (22.09). Пользуясь соотношениями (см. Ватсон, стр. 90 и 91)

$$\left.\begin{aligned} J_m(z)N'_m(z) - N_m(z)J'_m(z) &= \frac{2}{\pi z}, \\ J_m(z)N''_m(z) - N_m(z)J''_m(z) &= -\frac{2}{\pi z^2}, \\ J'_m(z)N''_m(z) - N'_m(z)J''_m(z) &= \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right)\frac{2}{\pi z}, \end{aligned}\right\} \quad (67.07)$$

мы функции $f_m^{(1)}$ и $f_m^{(2)}$ приведем к виду

$$\left.\begin{aligned} f_m^{(1)} &= \frac{\operatorname{ctg} gl}{ga}, \\ f_m^{(2)} &= -\left[1 - \frac{m^2}{(ga)^2}\right]\frac{\sin gl}{ga\cos gl + \sin gl}. \end{aligned}\right\} \quad (67.08)$$

Последнее выражение в силу неравенства (67.05) можно переписать в более простой форме:

$$f_m^{(2)} = -\left[1 - \frac{m^2}{(ga)^2}\right]\frac{\operatorname{tg} gl}{ga}. \quad (67.09)$$

ЭБ "Научное наследие России"

При $m=0$ уравнение (67.03) распадается на следующие уравнения:

для симметричных электрических волн E_{0n}

$$\frac{1}{F_0}=\frac{1}{\varepsilon f_0^{(1)}}\approx\frac{1}{\varepsilon}ga\,\mathrm{tg}\,gl, \tag{67.10}$$

для симметричных магнитных волн H_{0n}

$$\frac{1}{F_0}=\frac{1}{\mu f_0^{(2)}}\approx-\frac{1}{\mu}ga\,\mathrm{ctg}\,gl. \tag{67.11}$$

Правая часть уравнения (67.10) подобна правой части уравнения (64.07). Анализируя (67.10) так же, как (66.17), мы приходим к заключению о наличии волн $E_{00}, E_{01}, \ldots, E_{0n}, \ldots$ в данной системе, причем волна E_{00} является „основной“ и существует при любых частотах, а волна E_{0n} — при условии

$$kl\sqrt{\varepsilon\mu-1}\geqslant n\pi. \tag{67.12}$$

Уравнение (67.11) дает нам волны $H_{01}, H_{02}, \ldots, H_{0n}, \ldots$, его правая часть подобна правой части уравнения (64.12). Условие существования волны H_{0n} имеет вид

$$kl\sqrt{\varepsilon\mu-1}\geqslant\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi. \tag{67.13}$$

При $a\to\infty$ волны $E_{00}, E_{01}, \ldots E_{0n}$ в данной системе переходят соответственно в четные волны $E_{00}, E_{20}, \ldots E_{2n0}$ плоскости, покрытой слоем диэлектрика (рис. 72), а волны $H_{01}, H_{02}, \ldots H_{0n}$ переходят в нечетные волны $H_{10}, H_{30}, \ldots H_{2n-10}$ той же системы.

Основная волна E_{00}, распространяющаяся вдоль проводящего стержня с оболочкой (т. е. вдоль провода с диэлектрическим покрытием) является в сущности поперечной волной однопроводной линии (рис. 20,*а*), которая в результате замедляющего действия оболочки стала поверхностной волной. Такое же влияние на данную волну оказывает и конечное сопротивление провода (см. § 62).

При условиях

$$kl\sqrt{\varepsilon-1}\ll 1,\quad k^2al\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\ll 1,\quad \mu=1,\quad \varepsilon>1 \tag{67.14}$$

характеристическое уравнение (67.10) для электрических волн принимает вид

$$(pa)^2\ln\frac{2}{\gamma pa}=k^2al\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}, \tag{67.15}$$

Электронное наследие России

аналогичный уравнению (62.05). Сравнивая это уравнение с соотношениями (64.30) и (64.31), нетрудно обосновать сделанное в § 65 утверждение о том, что диэлектрический слой на тонком проводе более эффективно замедляет волну и превращает ее в поверхностную, чем слой такой же толщины на проводящей плоскости.

Несимметричные волны в данной системе являются „гибридными" волнами. Одна из гибридных волн, соответствующая азимутальному индексу $m=1$, является „основной", т. е. распространяется вдоль системы при любой частоте. Все волны подчиняются тем же общим закономерностям, поэтому мы ограничимся несимметричными волнами с индексом $m=1$. Вблизи критической частоты у таких волн $pa \ll 1$; подставляя второе выражение (66.25) в уравнение (67.03) и приравнивая коэффициенты при $\frac{1}{(pa)^2}$, мы получим соотношение

$$\ln\frac{2}{\gamma pa}=\frac{\varepsilon\mu+1}{2(ga)^2}+\frac{\varepsilon f_1^{(1)}+\mu f_1^{(2)}}{2}, \qquad (67.16)$$

показывающее, что при $pa=0$ (на критической частоте) параметр g должен быть полюсом функции $f_1^{(1)}$ или $f_1^{(2)}$; это опять приводит к условиям (67.12) или (67.13). Для основной волны при $p\to 0$ мы должны иметь и $g\to 0$, поэтому в уравнение (67.16) при низких частотах можно подставить выражения для функций $f_1^{(1)}$ и $f_1^{(2)}$

$$f_1^{(1)}=\frac{a}{(ga)^2 l}-\frac{l}{3a};\quad f_1^{(2)}=\frac{l}{(ga)^2 a}-\frac{l}{a}, \qquad (67.17)$$

справедливые при $gl \ll 1$ и приводящие к формуле

$$\ln\frac{2}{\gamma pa}=\frac{\varepsilon\mu+1+\varepsilon\frac{a}{l}+\mu\frac{l}{a}}{2(ga)^2}-\frac{l}{6a}(\varepsilon+3\mu), \qquad (67.18)$$

аналогичной формуле (66.27) для диэлектрического стержня.

Основную волну в данной системе можно опять трактовать как плоскую волну, замедленную оболочкой цилиндра. Суммируя результаты, полученные в § 64, 65 и 67, можно утверждать, что передающая линия из N параллельных, изолированных друг от друга металлических проводов имеет при наличии диэлектрических оболочек или диэлектрических цилиндров произвольного сечения $N+2$ основные

Научное наследие России"

волны. Действительно, при отсутствии металлических проводников в данной системе существуют две основные поверхностные волны, полученные замедлением плоских волн; эти волны остаются и при наличии металлических проводников. Если система обладает симметрией, то сбе волны распространяются с одинаковой скоростью (поляризационное вырождение). С другой стороны, металлические провода имеют N различных волн; например, рассмотренная в § 29 двухпроводная линия ($N=2$) имеет две волны — противофазную и синфазную. Будучи замедлены диэлектриком, эти N волн также превращаются в поверхностные волны, существующие при любых частотах.

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА XII

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

§ 68. Диафрагмированный волновод

После того, как в гл. XI мы исследовали „гладкие" замедляющие системы, мы в этой и следующей главах рассмотрим периодические замедляющие системы, выполненные из металла. В таких системах конечная проводимость металлических проводников не имеет принципиального значения (в отличие от систем, рассмотренных в § 62

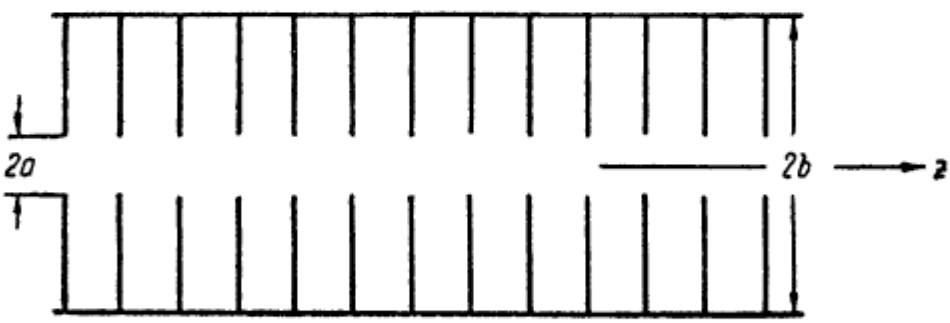


Рис. 78. Диафрагмированный волновод.

и § 63) и лишь приводит к потерям, поэтому будем считать все проводники идеальными.

Начнем с медленных волн в круглом диафрагмированном волноводе, схематически изображенном на рис. 78. Этот волновод можно рассматривать как обычный круглый волновод радиуса b, к стенке которого на равных расстояниях d друг от друга прикреплены диафрагмы, т. е. тонкие поперечные перегородки с круговым отверстием радиуса a. Как покажем ниже, в такой системе могут распространяться медленные электромагнитные волны. Она находит себе применение в линейных ускорителях и в лам-

Электронное наследие России

пах с бегущей волной, причем электроны движутся по оси z.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением симметричных электрических волн в данной системе. Электромагнитное поле таких волн определяется по формулам (39.06) с помощью единственной составляющей электрического вектора Герца

$$\Pi_z = \Pi(r)\, e^{ihz}. \tag{68.01}$$

Функция Π не зависит от φ и поэтому составляющие поля равны

$$\left.\begin{aligned} E_r &= ih\frac{d\Pi}{dr}e^{ihz}, & H_r &= 0, \\ E_\varphi &= 0, & H_\varphi &= ik\frac{d\Pi}{dr}e^{ihz}, \\ E_z &= -p^2\Pi e^{ihz}; & H_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{68.02}$$

где

$$p^2 = h^2 - k^2, \quad p > 0. \tag{68.03}$$

Функция Π должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\Pi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Pi}{dr} - p^2\Pi = 0\ . \tag{68.04}$$

и поэтому равна

$$\Pi = AI_0(pr), \tag{68.05}$$

где A — произвольная постоянная. Другое решение уравнения (68.04) — функция $K_0(pr)$ — в выражение для Π не входит, так как составляющие поля должны быть конечны при $r = 0$, т. е. на оси z.

Пользуясь первой формулой (61.23), мы можем переписать отличные от нуля составляющие электромагнитного поля (68.02) в виде

$$\left.\begin{aligned} E_r &= ihpAI_1(pr)\, e^{ihz}, \\ E_z &= -p^2AI_0(pr)\, e^{ihz}, \\ H_\varphi &= ikpAI_1(pr)\, e^{ihz}. \end{aligned}\right\} \tag{68.06}$$

Таково поле симметричной электрической волны в области $0 < r < a$, свободной от перегородок (рис. 78). В области $a < r < b$ этими выражениями пользоваться нельзя,

ЭБ "Научное наследие России"

так как они не удовлетворяют граничным условиям на поверхности перегородок.

Диафрагмированный волновод является периодической структурой с пространственным периодом d по оси z. Задачу о распространении волны вдоль этой структуры мы решаем приближенно, при условии

$$hd \ll 1, \tag{68.07}$$

т. е. считаем, что на протяжении одного периода фаза волны изменяется незначительно. Это значит, что в первом приближении периодичность структуры не сказывается на характере волны, и она распространяется как в „гладкой" передающей линии, полностью однородной по оси z. Лишь в этом приближении мы можем для потенциалов и полей пользоваться соотношениями (68.01)—(68.06).

Электромагнитное поле в области $a < r < b$, т. е. между проводящими перегородками, можно определить из следующих соображений. Фаза электромагнитного поля (68.06) в центральной области $0 < r < a$ зависит от z, поэтому фаза соответствующего ему электромагнитного поля между перегородками изменяется от периода к периоду. Однако при выполнении условия (68.07) фаза поля в центральной области (при $r < a$) на протяжении одного периода структуры практически постоянна, поэтому между двумя соседними перегородками возбуждается, главным образом, электромагнитное поле, не зависящее от z. Это поле должно иметь составляющую E_z и ту же симметрию, что и поле (68.02). Однако в пределах данного периода, например при $-\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2}$, функция Π_z не зависит от z, поэтому поле между перегородками будет иметь лишь две составляющие

$$E_z = k^2 \Pi_z; \quad H_\varphi = ik \frac{d\Pi_z}{dr} \quad (\text{при } a < r < b), \tag{68.08}$$

причем функция Π_z должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\Pi_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Pi_z}{dr} + k^2 \Pi_z = 0, \tag{68.09}$$

имеющему общее решение

$$\Pi_z = CJ_0(kr) + C'N_0(kr). \tag{68.10}$$

Здесь фигурируют обе функции $J_0(kr)$ и $N_0(kr)$, так как функция (68.10) определяет поле лишь при $a < r < b$.

Электронное наследие России"

Мы считаем, что поперечные перегородки и поверхность волновода $r=b$ обладают идеальной проводимостью. Поле с составляющими (68.08) автоматически удовлетворяет граничным условиям на перегородках, так как $E_r=E_\varphi=0$. тождественно. Для того, чтобы удовлетворялось граничное условие

$$E_z=0 \text{ при } r=b$$

необходимо, чтобы

$$CJ_0(kb)+C'N_0(kb)=0,$$

откуда

$$C=BN_0(kb); \quad C'=-BJ_0(kb),$$

где B — новая постоянная. Окончательно получаем

$$\Pi_z=B[J_0(kr)N_0(kb)-N_0(kr)J_0(kb)] \tag{68.11}$$

и

$$\left.\begin{aligned} E_z&=k^2B[J_0(kr)N_0(kb)-N_0(kr)J_0(kb)],\\ H_\varphi&=-ik^2B[J_1(kr)N_0(kb)-N_1(kr)J_0(kb)].\end{aligned}\right\} \tag{68.12}$$

Можно сказать, что наличие перегородок приводит к появлению в области $a<r<b$ стоячих цилиндрических волн.

Выше мы получили приближенные выражения для полей в разных областях диафрагмированного волновода — при $r<a$ и $r>a$. Мы использовали довольно распространенный прием, с помощью которого решаются электродинамические задачи для областей сложной формы. Эти области с помощью вспомогательных поверхностей мысленно разбивают на две простые области (или ряд областей), в каждой из которых пишут достаточно общее выражение для поля. Затем произвольные постоянные в этих выражениях подбирают так, чтобы на границах между областями электромагнитные поля непрерывно переходили друг в друга. Этот этап называют обычно „сшиванием“ полей на границах частичных областей.

Применительно к нашей задаче естественно потребовать выполнения обычных граничных условий—равенства тангенциальных составляющих электрического и магнитного поля с обеих сторон границы. Эти условия имеют вид

$$E_z|_{r=a-0}=E_z|_{r=a+0}; \quad H_\varphi|_{r=a-0}=H_\varphi|_{r=a+0} \tag{68.13}$$

ЭБ "Научное наследие России"

или

$$\left.\begin{aligned} -p^2 A I_0(pa)\, e^{ihz} &= k^2 B\,[J_0(ka)\,N_0(kb) - N_0(ka)\,J_0(kb)],\\ -pA I_1(pa)\, e^{ihz} &= kB\,[J_1(ka)\,N_0(kb) - N_1(ka)\,J_0(kb)]\\ &\text{при } -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{68.14}$$

Если удовлетворяется условие (68.07), то экспоненту e^{ihz} можно заменить единицей и поля (68.06) и (68.12) „сшиваются“[1]. Из соотношений (68.14) мы получаем так называемое характеристическое уравнение

$$pa\,\frac{I_0(pa)}{I_1(pa)} = ka\,\frac{J_0(ka)\,N_0(kb) - N_0(ka)\,J_0(kb)}{J_1(ka)\,N_0(kb) - N_1(ka)\,J_0(kb)}, \tag{68.15}$$

позволяющее определить фазовую скорость медленной волны при заданной частоте и известных размерах a и b диафрагмированного волновода. Действительно, в этом случае с помощью таблиц бесселевых функций J_0, N_0, J_1 и N_1 мы сразу вычислим правую часть уравнения (68.15). Левая часть этого уравнения есть монотонная функция одного аргумента pa. График этой функции изображен на рис. 79. Ход верхней кривой, показанной на рис. 79, легко понять, если воспользоваться формулой (61.18), из которой вытекает

$$\lim_{pa\to 0} pa\,\frac{I_0(pa)}{I_1(pa)} = 2, \tag{68.16}$$

и формулой (61.21), приводящей к приближенному равенству

$$pa\,\frac{I_0(pa)}{I_1(pa)} = pa \text{ при } pa \gg 1. \tag{68.17}$$

Если правая часть уравнения (68.15) больше двух, то с помощью верхней кривой рис. 79 можно найти (единственное) значение pa, удовлетворяющее этому уравнению. Это значит, что в данной системе может распространяться замедленная волна, продольное волновое число которой равно

$$h = \sqrt{k^2 + p^2}, \tag{68.18}$$

[1] При других z, т. е. для остальных периодов структуры, сшивание обеспечивается соответствующим выбором постоянной B для поля между перегородками.

Электронное наследие России

а фазовая скорость и длина волны определяются формулами

$$u = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{k^2}}}; \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{k^2}}}, \tag{68.19}$$

где $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ — длина волны в свободном пространстве.

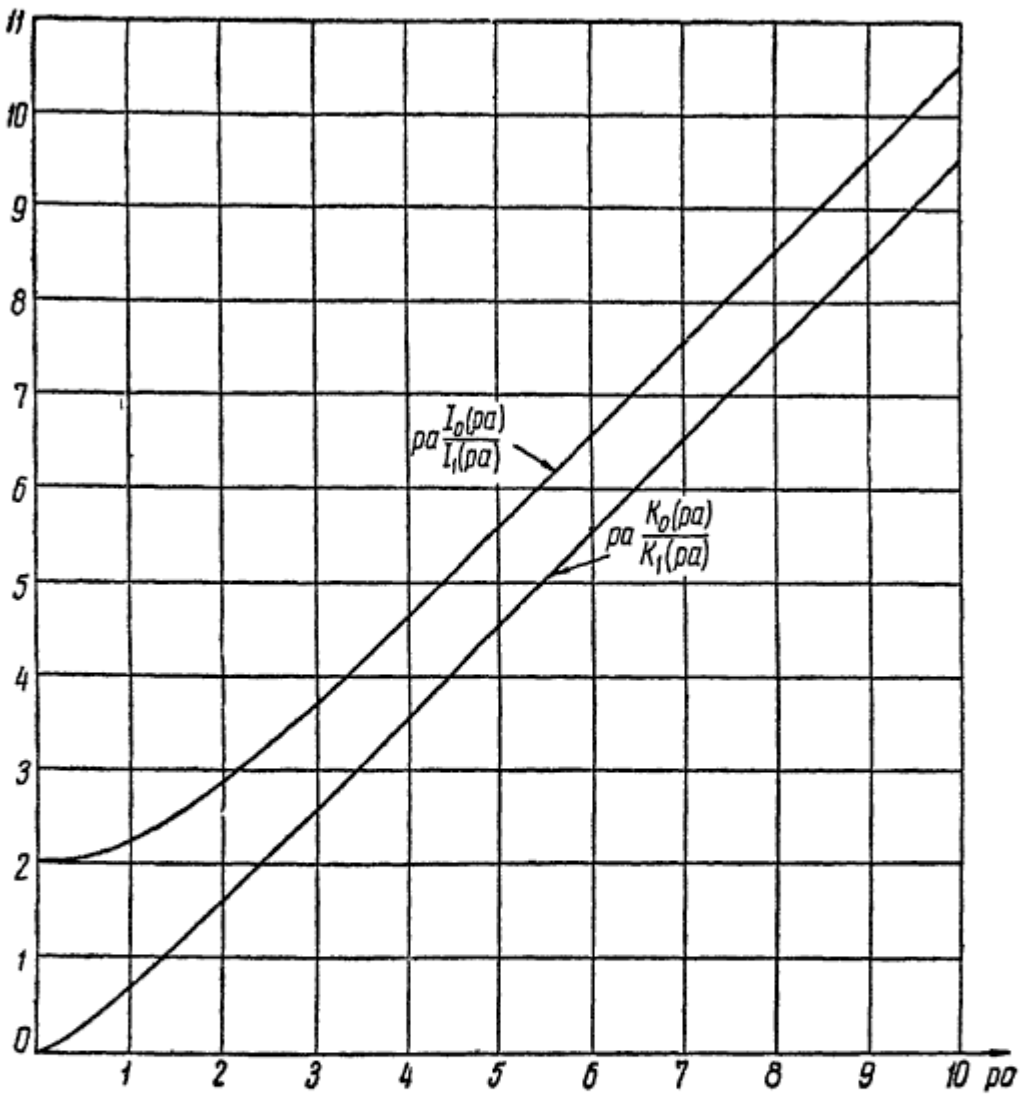


Рис. 79. Левые части уравнений (68.15) и (70.04).

Коэффициент замедления, определенный ранее формулой (64.19), равен

$$\beta = \frac{u}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{k^2}}}. \tag{68.20}$$

Если же правая часть уравнения (68.15) меньше двух, то уравнение не имеет решения и медленная волна в данной системе отсутствует.

ЭБ "Научное наследие России"

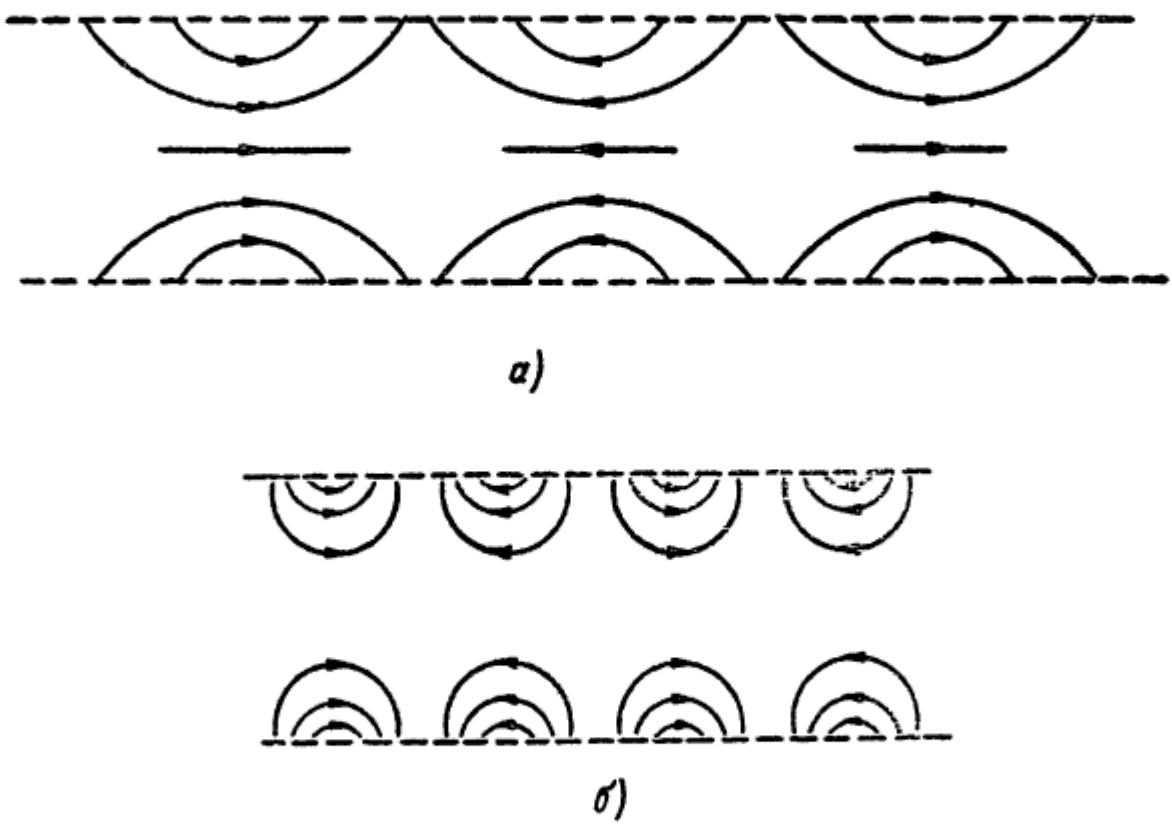
Для линейного ускорителя представляют интерес значения $\beta \approx 1$, поэтому рабочая частота и размеры a и b выбираются так, чтобы правая часть уравнения (68.15) лишь немного превышала 2. В этом случае выполняются условия

$$pa \ll 1, \quad p \ll k, \quad h \approx k, \tag{68.21}$$

и формулы (68.06) упрощаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} E_z &= A_0 e^{ikz}, \quad (A_0 = -p^2 A). \\ E_r &= H_\varphi = -A_0 \frac{ikr}{2} e^{ikz} \end{aligned}\right\} \tag{68.22}$$

На рис. 80, *а* изображен ход электрических силовых линий волны, бегущей вдоль диафрагмированного волновода при этих условиях.



а)

б)

Рис. 80. Электрическое поле бегущей волны в диафрагмированном волноводе:

а — при фазовой скорости, близкой к *с*; *б* — при сильном замедлении.

Для лампы с бегущей волной требуются коэффициенты замедления β порядка 0,1. Длина волны при этом в β раз меньше, чем в свободном пространстве, а произведение pa — порядка единицы или нескольких единиц. В этом случае распределение электрического поля в области $0 < r < a$ диафрагмированного волновода принимает вид,

Электронное наследие России"

изображенный на рис. 80, *б*: электромагнитное поле „прилипает" к поверхности $r=a$ тем сильнее, чем больше pa. При $pa \gg 1$ и $pr \gg 1$ формулы (68. 06) и (61.21) дают

$$\frac{E_z(r)}{E_z(a)}=\frac{I_0(pr)}{I_0(pa)}=\sqrt{\frac{a}{r}}\,e^{-p(a-r)}, \qquad (68.23)$$

т. е. поле экспоненциально убывает при удалении от диафрагм. По этой причине применять замедляющую систему при больших значениях параметра pa невыгодно, потому что на электроны, движущиеся вблизи оси z, действует сравнительно слабое поле. Однако и при конечных значениях pa монотонное возрастание функции $I_0(y)$ при увеличении аргумента y (ср. § 61) приводит к тому, что отношение

$$\frac{E_z(r)}{E_z(a)}=\frac{I_0(pr)}{I_0(pa)} \qquad (68.24)$$

убывает от 1 до $\frac{1}{I_0(pa)}$ при уменьшении r от a до 0 (т. е. при удалении от поверхности $r=a$). В этом обстоятельстве проявляется поверхностный характер медленных волн, о котором мы говорили еще в § 61.

Если в уравнении (68.17) положить $a=b$, то правая часть обратится в нуль и характеристическое уравнение примет вид

$$I_0(pa)=0. \qquad (68.25)$$

Это — уравнение для круглого волновода радиуса a без диафрагм. При вещественном p оно не имеет решения, поскольку $I_0 \geqslant 1$. Этот результат очевиден: волновод без диафрагм не может поддерживать медленных волн, поскольку все волны в волноводах распространяются с фазовой скоростью, превышающей c. Если воспользоваться соотношением (61.17), то уравнение (68.25) принимает вид

$$J_0(ga)=0, \qquad (68.26)$$

где мы положили $g=ip$. Уравнение (68.26) совпадает с уравнением (42.06) при $m=0$, что соответствует симметричным волнам в круглом волноводе.

Заметим в заключение, что если бы мы рассматривали несимметричную медленную волну в диафрагмированном волноводе, то для составляющей E_z получили бы выражение

$$E_z=\text{const}\, I_m(pr)\cos m\varphi e^{ihz} \quad (m=1, 2, \ldots), \qquad (68.27)$$

ЭБ "Научное наследие России"

поскольку эта составляющая является решением волнового уравнения. Из соотношения (61.18) видно, что в этом случае должно быть

$$E_z = 0 \text{ при } r = 0, \tag{68.28}$$

так что электрическое поле волны не действует на электроны, движущиеся по оси z.

§ 69. Замедление электромагнитных волн гребенчатой структурой

В § 68 мы ограничились качественным анализом характеристического уравнения (68.15). Исследуем теперь предельный вид этого уравнения при условиях

$$ka \gg 1, \quad kb \gg 1, \quad pa \gg 1. \tag{69.01}$$

Первые два условия позволяют заменить бесселевы функции в правых частях асимптотическими выражениями (22.09) и (22.11). После этой замены правая часть уравнения (68.15) принимает вид

$$ka \frac{\cos\left(ka - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(kb - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(ka - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(kb - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(ka - \frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(kb - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(ka - \frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(kb - \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= ka \frac{\sin k(b-a)}{\sin\left[k(b-a) + \frac{\pi}{2}\right]} = ka \operatorname{tg} k(b-a) = ka \operatorname{tg} kl,$$

где для краткости обозначено

$$l = b - a. \tag{69.02}$$

Заменяя левую часть уравнения (68.15) согласно формуле (61.21) просто на pa, мы получаем простое характеристическое уравнение

$$p = k \operatorname{tg} kl, \tag{69.03}$$

откуда по формуле (68.20) коэффициент замедления оказывается равным

$$\beta = \cos kl. \tag{69.04}$$

Характеристическое уравнение (69.03) имеет место не только для диафрагмированного волновода с весьма большим радиусом a, но и для периодической структуры, изо-

Научное наследие России

браженной на рис. 81 и состоящей из весьма тонких проводящих пластин шириной l, бесконечно протяженных по оси y и укрепленных на проводящей плоскости $x=-l$. Данная система называется гребенчатой структурой или, кратко, „гребенкой“. Вдоль нее могут распространяться медленные волны того же типа, что и вдоль диафрагмированного волновода. Гребенка отличается от волновода тем, что она является „открытой“ системой, электромаг-

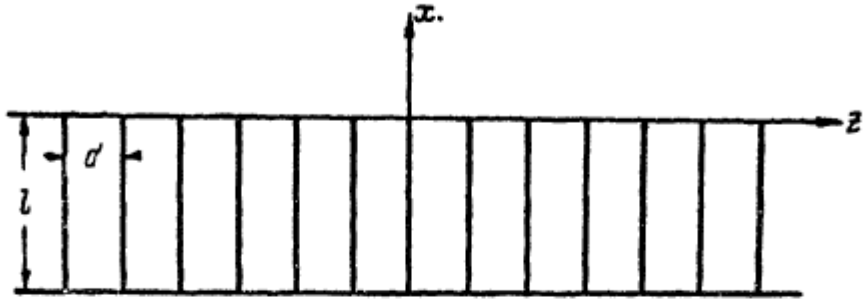


Рис. 81. Гребенка.

нитное поле которой может неограниченно простираться в сторону положительных x. Однако медленная волна, распространяющаяся вдоль гребенки, имеет поверхностный характер и ее поле экспоненциально спадает при увеличении x.

Характеристическое уравнение (69.03) проще вывести непосредственно, если при $x>0$ для поля взять выражения (63.03). Поле при $x<0$, между двумя соседними перегородками, при условии (68.07) не должно зависеть от z. Оно получается из функции

$$\Pi_z = C\cos kx + C'\sin kx. \tag{69.05}$$

Для выполнения граничного условия $E_z=0$ на проводящей плоскости $x=-l$ необходимо, чтобы там функция Π_z обращалась в нуль, откуда получаем

$$\left.\begin{aligned} C = B\sin kl;\ C' = B\cos kl,\\ \Pi_z = B\sin k(x+l). \end{aligned}\right\} \tag{69.06}$$

Электромагнитное поле между проводящими пластинами имеет составляющие

$$E_z = k^2 B\sin k(x+l);\ H_y = ik^2 B\cos k(x+l). \tag{69.07}$$

Зависимость электрического и магнитного поля между пластинами от координаты x совпадает с распределением на-

ЭБ "Научное наследие России"

пряжения и тока в стоячей волне на отрезке обычной линии. Это совпадение физически объясняется тем, что параллельные пластины являются простейшим примером передающей линии I группы (см. § 28). Условие непрерывности составляющих E_z и H_y приводит нас к соотношениям

$$\left.\begin{aligned} -p^2A &= k^2B\sin kl, \\ -pA &= kB\cos kl, \end{aligned}\right\} \qquad (69.08)$$

откуда и вытекает уравнение (69.03).

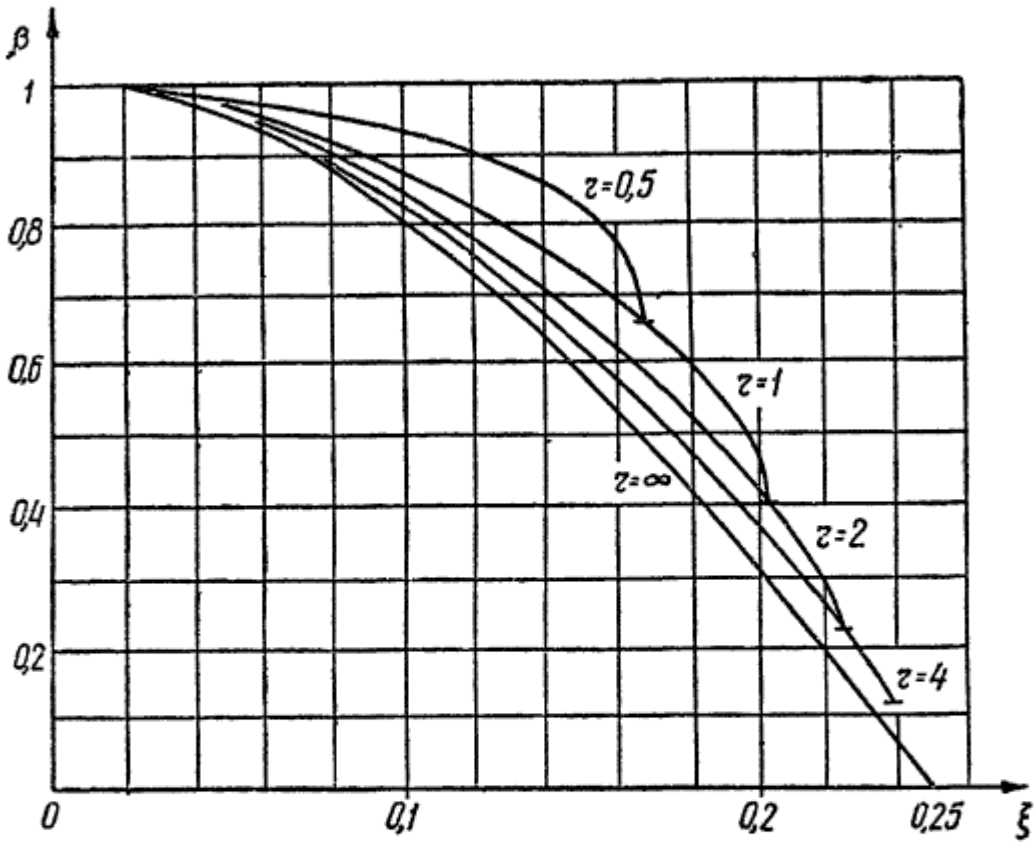


Рис. 82. Дисперсия гребенки.

По формуле (69.04) построена нижняя кривая ($r=\infty$, смысл обозначения мы поясним ниже), изображенная на рис. 82. По оси абсцисс отложена величина

$$\xi = \frac{l}{\lambda} = \frac{kl}{2\pi}, \qquad (69.09)$$

пропорциональная частоте, а по оси ординат—коэффициент замедления β, пропорциональный фазовой скорости. Эта кривая определяет дисперсию гребенки.

Рис. 82 показывает, что распространение поверхностной волны вдоль гребенки возможно при $0<\xi<\frac{1}{4}$, т. е. при глубине гребенки, не превышающей четверти длины волны

Электронное наследие России

в свободном пространстве. При значениях $\frac{1}{4}<\xi<\frac{1}{2}$ такой волны нет, так как правая часть уравнения (69.03) отрицательна. При значениях $\xi>\frac{1}{2}$ уравнение (69.03) может иметь решения, однако в дальнейшем мы их рассматривать не будем.

Отметим, что при $\xi=\frac{1}{4}$ наступает резонанс в отрезке линии, образованной каждой парой соседних пластин (рис. 81); этот резонанс имеет место, когда на длине l укладывается четверть волны. Действительно, соседние пластины образуют линию длины l, разомкнутую при $x=0$ и закороченную при $x=-l$. Формулы (69.03) и (69.04) показывают, что если частота меньше резонансной частоты гребенки, то происходит замедление и образуется поверхностная волна. Если же частота выше резонансной, то поверхностной волны нет.

Полученный результат аналогичен известным выводам теории дисперсии. Действительно, диэлектрик без потерь, состоящий из молекул с одной резонансной частотой ω_1 [диэлектрическая проницаемость его определяется формулой (50.24)], имеет $\varepsilon>1$ при $\omega<\omega_1$, т. е. волна при распространении в диэлектрике испытывает замедление $\left(\beta=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}<1\right)$. При $\omega=\omega_1$ и отсутствии потерь теория дисперсии дает $\varepsilon=\infty$ и $\beta=0$ $\left(\text{как на рис. 82 при } \xi=\frac{1}{4}\right)$. При более высоких частотах $\varepsilon<1$, и медленные волны в среде распространяться не могут.

При $\xi\to 0$ из формул (69.03) и (69.04) мы получаем $p\to 0$ и $\beta\to 1$, и поле волны принимает вид (63.05). Таким образом, при $\xi=0$ по оси z распространяется обычная плоская волна с поперечным полем и скоростью c. Значение $\xi=0$ можно получить, полагая $l\to 0$, т. е. переходя от гребенчатой структуры к „гладкой“ плоскости $x=0$. Вдоль этой плоскости может бежать плоская волна (63.05), поскольку ее электрическое поле перпендикулярно плоскости. Значение $\xi=0$ можно также получить, считая $\lambda\to\infty$; достаточно длинные волны распространяются вдоль гребенки так же, как вдоль гладкой плоскости. Этот вывод имеет общее значение, поскольку волны при своем распространении „не замечают“ неровностей, размеры которых малы по сравнению с их длиной волны.

Рассмотренный выше предельный случай приводит к представлению о поверхностной волне вдоль гребенки как о плоской волне (63.05), преобразованной в электрическую волну (63.03) вследствие замедляющего действия поперечных перегородок.

Выведенные выше формулы для волн в диафрагмированном волноводе и гребенке справедливы лишь при условии (68.07). Благодаря этому условию период структуры d вообще не вошел в полученные нами соотношения. Однако при $\xi \to \frac{1}{4}$ мы получили $\beta \to 0$ и $h \to \infty$, и тогда условие (68.07) перестает выполняться, как бы мал ни был период d. Отсюда следует ожидать, что при малых β формула (68.04) для реальных гребенок с конечным периодом d становится неприменимой. Строгая теория поверхностных волн в гребенке подтверждает это заключение. На рис. 82 представлены результаты вычислений коэффициента β по этой теории для гребенок с различными отношениями

$$r = \frac{l}{d}, \tag{69.10}$$

характеризующими форму гребенки (чем величина r больше, тем гребенка „чаще"). Из этих кривых видно, что кривая (69.04) соответствует значению $r = \infty$, т. е. „бесконечно частой" гребенке. Гребенчатые структуры с конечным значением r имеют дисперсионные кривые, идущие тем выше, чем меньше r. Эти кривые обрываются при $\xi = \xi_{max} < \frac{1}{4}$ и $\beta = \beta_{min} > 0$, причем при уменьшении r величина β_{min} увеличивается, а ξ_{max} — уменьшается. Поэтому с помощью „редких" гребенок нельзя сильно замедлить электромагнитную волну.

Строгая теория (см. § 71) показывает, что поверхностная волна вдоль периодической структуры может распространяться лишь при условии

$$hD < \pi, \tag{69.11}$$

которое можно переписать в виде

$$\lambda' > 2D, \tag{69.12}$$

где $\lambda' = \frac{2\pi}{h}$ — длина поверхностной волны, а D — период структуры.

ЭБ "Научное наследие России"

Если в результате замедления волны ее волновое число h увеличится настолько, что

$$hD = \pi, \tag{69.13}$$

то при попытке дальнейшего замедления волны происходит „срыв“ и она исчезает. Крайние правые точки кривых на рис. 82 как раз соответствуют условию (69.13).

§ 70. Ребристый стержень

Рассмотренная выше гребенчатая структура является примером „открытой“ передающей линии, способной переносить электромагнитную энергию в форме поверхностной волны. Другим примером такой линии может служить ребристый стержень (рис. 83), состоящий из металличе-

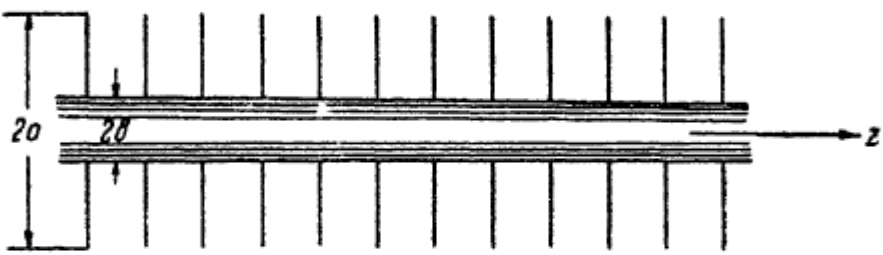


Рис. 83. Ребристый стержень.

ского стержня (цилиндра радиуса b) и надетых на него кольцеобразных поперечных перегородок („ребер“) с внешним радиусом a. Ребристый стержень можно рассматривать как некоторое „обращение“ диафрагмированного волновода (рис. 78) и рассчитывать тем же способом.

Полагая при $r > a$

$$\Pi = AK_0(pr) \tag{70.01}$$

вместо формул (68.06) получаем

$$\begin{aligned} E_r &= -ihpAK_1(pr)\,e^{ihz}, \\ E_z &= -p^2AK_0(pr)\,e^{ihz}, \\ H_\varphi &= -ikpAK_1(pr)\,e^{ihz}. \end{aligned} \tag{70.02}$$

Электромагнитное поле при $b < r < a$, между поперечными перегородками, можно по-прежнему вычислять по тем же формулам (68.08) и (68.12), что и для диафрагмированного волновода. Ставя при $hd \ll 1$ граничные усло-

Электронное культурное наследие России

вия (68.13) на поверхности $r=a$, мы получаем соотношения

$$\left.\begin{aligned} -p^2AK_0(pa) &= k^2B[J_0(ka)N_0(kb)-N_0(ka)J_0(kb)],\\ pAK_1(pa) &= kB[J_1(ka)N_0(kb)-N_1(ka)J_0(kb)] \end{aligned}\right\} \quad (70.03)$$

и характеристическое уравнение

$$pa\frac{K_0(pa)}{K_1(pa)} = -ka\frac{J_0(ka)N_0(kb)-N_0(ka)J_0(kb)}{J_1(ka)N_0(kb)-N_1(ka)J_0(kb)}, \quad (70.04)$$

отличающееся от уравнения (68.15) лишь тем, что в его левой части стоят функции K_0 и K_1 вместо I_0 и I_1, а в правой — знак минус. При условиях

$$ka \gg 1; \qquad kb \gg 1 \quad (70.05)$$

правую часть уравнения (70.04) можно преобразовать (см. начало § 69), и она становится равной $ka\,\mathrm{tg}\,kl$, где

$$l = a - b \quad (70.06)$$

есть ширина пластин или „ребер“ стержня ($l>0$, см. рис. 83). Характеристическое уравнение в этом случае принимает вид

$$pa\frac{K_0(pa)}{K_1(pa)} = ka\,\mathrm{tg}\,kl. \quad (70.07)$$

Интересно отметить, что при дополнительном условии $pa \gg 1$ с помощью асимптотических формул (61.21) мы приходим к характеристическому уравнению гребенки (69.03).

Характеристические уравнения (70.04) и (70.07) можно исследовать таким же способом, как и уравнение (68.15). Зависимость левых частей этих уравнений от переменной pa изображена на рис. 79; хотя при $pa\to\infty$ обе кривые неограниченно сближаются, но при $pa \ll 1$ ход левой части уравнения (70.04) или (70.07) иной. Действительно, по формулам (61.20) получаем

$$pa\frac{K_0(pa)}{K_1(pa)} = (pa)^2 \ln\frac{2}{\gamma pa} \quad (\text{при } pa \ll 1). \quad (70.08)$$

Таким образом, при изменении pa от 0 до ∞ левые части уравнений (70.04) и (70.07) монотонно изменяются в тех же пределах. Поэтому характеристические уравнения имеют решения, если их правая часть оказывается положительной. Как мы видели выше, тем же свойством обладает уравнение (69.03). Можно показать, что решения

...ческое наследие России"

уравнений (70.05) и (70.07) не отличаются качественно от решения (69.04) более простого характеристического уравнения (69.03). Поэтому более подробно эти уравнения мы исследовать не будем (см. впрочем § 71).

Пусть теперь ширина ребер l стремится к нулю или неограниченно увеличивается рабочая длина волны. В этом случае правая часть уравнений (70.04) и (70.07) обращается в нуль, и мы получаем решение

$$p=0; \quad h=k. \tag{70.09}$$

Раскрывая неопределенности в формулах (70.02), мы легко находим

$$\left.\begin{aligned} E_r &= H_\varphi = \frac{A_0}{r} e^{ikz}, \\ E_z &= 0; \quad A_0 = -ikA. \end{aligned}\right\} \tag{70.10}$$

Таким образом, при исчезании ребер поверхностная волна (70.02) превращается в поперечную волну, бегущую со скоростью c вдоль идеально проводящего стержня. Эта волна была нами изучена в теории линий [см. формулу (29.11) и рис. 20,a]. Можно сказать (ср. § 69), что поверхностная волна (70.02) в ребристом стержне получается в результате замедления поперечной волны (70.10) ребрами стержня и ее преобразования в электрическую волну.

Ребристые стержни используются также в качестве антенн, создающих направленное излучение в дециметровом и метровом диапазоне радиоволн. Для такой цели рассмотренная выше симметричная электрическая волна неприменима, так как ее излучение „прямо вперед", в направлении геометрического продолжения ребристого стержня, равно нулю. Действительно, симметричная волна возбуждает на поверхности $r=b$ продольные токи, не излучающие в направлении оси z, а на перегородках текут симметричные радиальные токи, излучение которых вдоль оси z взаимно уничтожается.

Для создания излучения, направленного вдоль оси ребристого стержня, в нем необходимо возбудить простейшую несимметричную волну, электрический ток которой в каждый момент времени имеет на поперечной перегородке ориентацию одного и того же знака (рис. 84); в направлении „прямо вперед" излучение всех этих токов складывается. Мы не будем здесь излагать теории такой несимметричной волны, так как эта теория довольно сложна (ср. § 71). Отметим лишь, что при $l=0$, т. е. при пре-

ЭБ "Научное наследие России"

вращении ребристого стержня в гладкий, электромагнитное поле этой волны переходит в поле плоской поперечной волны, распространяющейся вдоль оси стержня со скоростью c и несколько возмущенной наличием проводящего цилиндра (рис. 74). Благодаря поперечным перегородкам на стержне эта волна замедляется и становится поверхностной волной. При замедлении, как можно показать, волна перестает быть поперечной — ее электрическое и магнитное поля приобретают продольные составляющие.

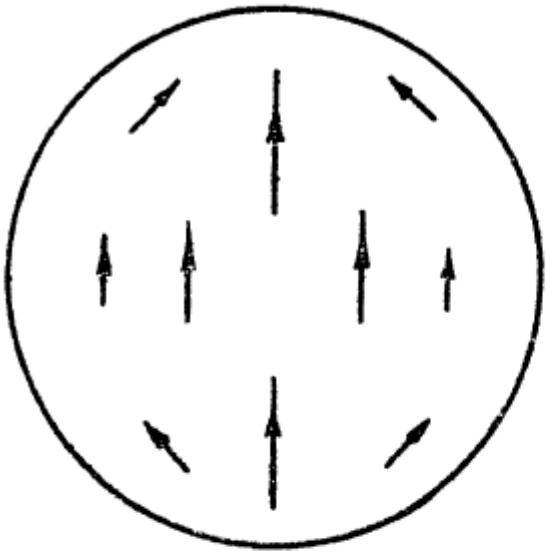


Рис. 84. Токи, возбуждаемые простейшей несимметричной волной на дисках ребристого стержня.

Ребристые стержни создают направленное излучение в дециметровом и метровом диапазонах, где рупоры и параболические зеркала должны иметь весьма большие размеры и поэтому неудобны. С другой стороны, ребристые стержни конструктивно проще, чем многовибраторные антенны (антенные решетки), и отличаются большей диапазонностью. Заметим, что ребристый стержень можно считать некоторым аналогом многовибраторной антенны, если рассматривать каждую поперечную перегородку (несущую токи, изображенные на рис. 84) как отдельный излучатель. Вместе с тем, излучение ребристого стержня можно уподобить излучению из открытого конца волновода или рупора. При этом к концу стержня подходит не волноводная или рупорная волна, для осуществления которой требуется металлическая стенка, по необходимости имеющая в метровом диапазоне весьма большие поперечные габариты, а поверхностная волна, поперечную протяженность поля которой можно регулировать, изменяя ее замедление, т. е. подбирая ширину „ребер“ стержня.

§ 71*. Общая теория поверхностных волн

Выше мы изучили медленные электромагнитные волны в диафрагмированном волноводе, гребенке и ребристом стержне, причем периодичность этих структур по существу не учитывалась: мы ее считали достаточно „мелкой“

(по сравнению с длиной волны), так что в полученные нами характеристические уравнения период структуры D не вошел (исключение составляет рис. 82 для гребенчатой структуры, где без вывода приведены дисперсионные кривые для гребенок с различным отношением $\frac{l}{d}$). В данном параграфе мы учтем влияние периодической структуры на свойства поверхностных волн.

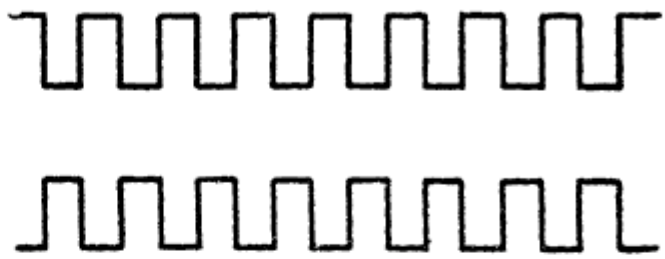


Рис. 85. Ребристый стержень общего вида (стержень с гофрированной поверхностью).

Рассмотрим ребристый („гофрированный“) стержень (рис. 85), который будем считать идеально проводящим и бесконечно длинным. Внешний (наибольший) радиус стержня обозначим через a, период структуры — через D, ширину кольцевых „канавок“ в стержне — через d. В общем случае $d<D$, при $d=D$ мы возвращаемся к стержню с бесконечно тонкими пластинками, изображенному на рис. 83.

Поле поверхностной волны мы будем вычислять с помощью продольных составляющих электрического и магнитного вектора Герца

$$\Pi_z = \Pi(r, z)\sin(m\varphi+\varphi_0);\quad \Pi_z' = \Pi'(r, z)\cos(m\varphi+\varphi_0), \tag{71.01}$$

а именно

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial r\,\partial z} - \frac{imk}{r}\Pi'\right)\sin(m\varphi+\varphi_0);\\
E_\varphi &= \left(\frac{m}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial z} - ik\frac{\partial\Pi'}{\partial r}\right)\cos(m\varphi+\varphi_0);\\
E_z &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\Pi\sin(m\varphi+\varphi_0);\\
H_r &= \left(-\frac{imk}{r}\Pi + \frac{\partial^2\Pi'}{\partial r\,\partial z}\right)\cos(m\varphi+\varphi_0),\\
H_\varphi &= \left(ik\frac{\partial\Pi}{\partial r} - \frac{m}{r}\frac{\partial\Pi'}{\partial z}\right)\sin(m\varphi+\varphi_0),\\
H_z &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\Pi'\cos(m\varphi+\varphi_0),
\end{aligned}\right\} \tag{71.02}$$

ЭБ "Научное наследие России"

причем сами функции Π и Π' удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\Pi=0. \qquad (71.03)$$

Функции Π и Π' не надо смешивать с функциями, введенными в § 39 и 40.

Тангенциальные составляющие электрического поля на цилиндрической поверхности $r=a$ мы записываем в виде

$$E_z=e_1 g(z)\sin(m\varphi+\varphi_0);\quad E_\varphi=e_2\breve{g}(z)\cos(m\varphi+\varphi_0), \qquad (71.04)$$

где e_1 и e_2 — постоянные, а $g(z)$ и $\breve{g}(z)$ — функции, отличные от нуля лишь в тех точках цилиндрической поверхности $r=a$, где имеется канавка, т. е. где радиус идеально проводящего стержня меньше своего максимального значения a. Мы нормируем функции $g(z)$ и $\breve{g}(z)$ следующим образом:

$$\int\limits_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} g(z)\,dz=\int\limits_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}}\breve{g}(z)\,dz=1, \qquad (71.05)$$

так что постоянные e_1 и e_2 можно назвать амплитудами поперечного и продольного напряжения между краями „центральной“ канавки, находящейся в интервале $-\frac{D}{2}<z<\frac{D}{2}$. При этом интегралы (71.05) фактически берутся только по ширине канавки $\left(\text{от } -\frac{d}{2} \text{ до } \frac{d}{2}\right)$.

Если вдоль ребристого стержня распространяется волна с волновым числом h, то мы имеем соотношения

$$g(z+mD)=e^{ihmD}g(z);\quad \breve{g}(z+mD)=e^{ihmD}\breve{g}(z); \qquad (71.06)$$
$$m=\pm 1,\ \pm 2,\ldots,$$

которые являются определением волнового числа h для волны в периодической структуре и показывают некоторую неопределенность этого понятия: если h есть волновое число, то волновым числом будет также и

$$h'=h+\frac{2\pi n}{D}\quad (n=\pm 1,\ \pm 2,\ldots).$$

Электронное наследие России

Рассматриваемая система не имеет потерь, и мы будем считать волновое число h вещественным и выбирать его в пределах

$$-\frac{\pi}{D}<h<\frac{\pi}{D}, \tag{71.07}$$

а ограничиваясь положительными значениями h — в пределах

$$0<h<\frac{\pi}{D}. \tag{71.08}$$

Тогда величина h будет определена однозначно.

Вместо соотношений (71.06) можно также написать

$$g(z)=e^{ihz}f(z);\quad \breve{g}(z)=e^{ihz}\breve{f}(z), \tag{71.09}$$

где $\breve{f}(z)$ и $f(z)$ суть периодические функции, имеющие период D.

Далее введем величины

$$f_n=\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-i\frac{2\pi n}{D}z} f(z)\,dz;\ \breve{f}_n=\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-i\frac{2\pi n}{D}z} \breve{f}(z)\,dz, \tag{71.10}$$

зависящие от распределения тангенциального электрического поля между краями канавки, и будем называть их структурными коэффициентами. Они позволяют разложить функции $f(z)$ и $\breve{f}(z)$ в ряды Фурье, при подстановке которых в формулы (71.04) получим

$$E_z=\frac{e_1}{D}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{ih_n z}\sin(m\varphi+\varphi_0);$$

$$E_\varphi=\frac{e_2}{D}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \breve{f}_n e^{ih_n z}\cos(m\varphi+\varphi_0), \tag{71.11}$$

где

$$h_n=h+\frac{2\pi n}{D}\ (n=0,\pm1,\pm2,\ldots). \tag{71.12}$$

ЭБ "Научное наследие России"

С помощью выражений (71.11) легко найти потенциалы и поля во всем окружающем пространстве. Будем искать (при $r \geqslant a$) функции Π и Π' в виде рядов

$$\Pi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n K_m(p_n r)\, e^{ih_n z}; \quad \Pi' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n' K_m(p_n r)\, e^{ih_n z}, \quad (71.13)$$

где A_n и A_n' — постоянные, а

$$p_n = \sqrt{h_n^2 - k^2}. \quad (71.14)$$

Выражения (71.13) удовлетворяют уравнениям (71.03) и дают поверхностную волну, если все p_n суть положительные вещественные числа

$$p_n > 0 \text{ при } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (71.15)$$

Иначе говоря, мы должны иметь

$$h_n^2 > k^2, \quad (71.16)$$

т. е. каждая „пространственная гармоника“ — каждый член в рядах (71.13) — должна распространяться с фазовой скоростью, меньшей c — медленнее, чем плоские волны в свободном пространстве. Комбинируя условие (71.16) при $n = 0$ и условие (71.08), мы получаем пределы для волнового числа h поверхностной волны

$$k < h < \frac{\pi}{D}. \quad (71.17)$$

Отсюда, в частности, следует, что распространение поверхностных волн возможно лишь при $k < \frac{\pi}{D}$, т. е. при $\lambda > 2D$, где λ — длина волны в свободном пространстве. Последние условия обязательны лишь для передающей линии „открытого“ типа, в которой энергию переносят поверхностные волны. В „закрытых“ периодических системах, например в диафрагмированном волноводе, могут распространяться волны и при нарушении условий (71.15) — (71.17).

Легко показать, что при условии (71.17) все p_n вещественны и, следовательно, могут быть взяты положительными. При этом наименьшую величину имеют p_0 и p_{-1}, а все остальные их значительно превышают. Величины p_0 и p_{-1} определяют радиальную протяженность поверхностной

Электронное наследие России

волны, поскольку они соответствуют тем членам рядов (71.13), которые наиболее медленно затухают при $r \to \infty$.

Коэффициенты A_n и A_n' в этих рядах легко определить из разложений (71.11). Мы получаем

$$\left.\begin{aligned} A_n &= -\frac{e_1}{D}\frac{f_n}{p_n^2 K_m(p_n a)}, \\ A_n' &= -\frac{m}{ka}\frac{e_1}{D}\frac{h_n f_n}{p_n^3 K_m'(p_n a)} + \frac{ie_2}{D}\frac{\tilde{f}_n}{kp_n K_m'(p_n a)}. \end{aligned}\right\} \quad (71.18)$$

Зная A_n и A_n', легко вычислить поле в любой точке при $r \geqslant a$. В дальнейшем нам понадобятся составляющие H_z и H_φ при $r = a + 0$, которые обозначим как H_z^e и H_φ^e. Они равны

$$\left.\begin{aligned} H_z^e &= \left\{\frac{m}{ka}\frac{e_1}{D}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{h_n K_m(p_n a)}{p_n K_m'(p_n a)} f_n e^{ih_n z} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{ik}\frac{e_2}{D}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{h_n K_m(p_n a)}{K_m'(p_n a)}\tilde{f}_n e^{ih_n z}\right\}\cos(m\varphi + \varphi_0), \\ H_\varphi^e &= \left\{-ik\frac{e_1}{D}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{K_m'(p_n a)}{h_n K_m(p_n a)} - \right.\right. \\ &\left. - \frac{m^2}{k^2 a^2}\frac{h_n^2 K_m(p_n a)}{p_n^3 K_m'(p_n a)}\right] f_n e^{ih_n z} + \\ &\left. + \frac{m}{ka}\frac{e_2}{D}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{h_n K_m(p_n a)}{p_n K_m'(p_n a)}\tilde{f}_n e^{ih_n z}\right\}\sin(m\varphi + \varphi_0). \end{aligned}\right\} \quad (71.19)$$

Мы решили „внешнюю" граничную задачу электродинамики (ср. § 10): определили электромагнитное поле в области $r \geqslant a$ по тангенциальным составляющим E_z и H_φ на границе $r = a$. Если для каждой канавки решить такую же „внутреннюю" задачу и определить, в частности, предельные значения (при $r = a - 0$) составляющих H_z^i и H_φ^i — тангенциальных составляющих на границе канавки с внеш-

ЭБ "Научное наследие России"

ним пространством, то „сшивание“ полей производится с помощью граничных условий

$$\left.\begin{aligned} &H_\varphi^e = H_\varphi^i;\ \ H_z^e = H_z^i \\ &\text{при} \\ &mD - \frac{d}{2} < z < mD + \frac{d}{2}\ \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{71.20}$$

Они дают систему интегральных уравнений, в результате решения которой должны получиться все интересующие нас величины: волновое число h, структурные коэффициенты f_n и $\tilde{f}_n$, амплитуды напряжений e_1 и e_2. Этим путем можно прийти к точным результатам, однако он весьма сложен.

Приближенное решение интересующей нас задачи можно получить, если вместо точных граничных условий (71.20) для „сшивания“ полей воспользоваться „усредненными“ граничными условиями

$$P_{e1} = P_{i1};\ \ P_{e2} = P_{i2}, \tag{71.21}$$

где введены обозначения:

$$P_{e1} = \frac{ca}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} E_z^* H_\varphi^e\, dz;\ \ P_{e2} = -\frac{ca}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} E_\varphi^* H_z^e\, dz; \tag{71.22}$$

и

$$P_{i1} = \frac{ca}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} E_z^* H_\varphi^i\, dz;\ \ P_{i2} = -\frac{ca}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} E_\varphi^* H_z^i\, dz. \tag{71.23}$$

При этом сумма

$$P_e^* = P_{e1}^* + P_{e2}^* \tag{71.24}$$

равна комплексной мощности, поступающей из внешнего пространства к отрезку $-\frac{D}{2} < z < \frac{D}{2}$ цилиндрической поверхности $r = a$. Сумма

$$P_i^* = P_{i1}^* + P_{i2}^* \tag{71.25}$$

Электронное наследие России

равна комплексной мощности, втекающей в каждую канавку через ее границу $r=a$. Поэтому величины (71.22) и (71.23) можно назвать частичными мощностями, а условия (71.21) сформулировать как равенство частичных мощностей.

Величины P_{e1} и P_{e2} легко вычислить по формулам (71.11) и (71.19). Мы получаем

$$\left.\begin{aligned} P^*_{e1} &= \frac{1}{2}\left(Y^e_{11}e_1 + Y^e_{12}e_2\right)e^*_1, \\ P^*_{e2} &= \frac{1}{2}\left(Y^e_{21}e_1 + Y^e_{22}e_2\right)e^*_2, \end{aligned}\right\} \tag{71.26}$$

где коэффициенты $Y^e_{\alpha\beta}$ равны

$$\left.\begin{aligned} Y^e_{\alpha\beta} &= \frac{ca}{4D}\, y^e_{\alpha\beta} \\ y^e_{11} &= ib_{11} = \\ &= -ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 \frac{K'_m(p_n a)}{p_n K_m(p_n a)} \left\{1 - \left[\frac{mh_n K_m(p_n a)}{kap_n K'_m(p_n a)}\right]^2\right\}; \\ y^e_{12} &= \frac{m}{ka} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f^*_n \tilde{f}_n \frac{h_n K_m(p_n a)}{p_n K'_m(p_n a)}; \quad y^e_{21} = -(y^e_{12})^*; \\ y^e_{22} &= ib_{22} = \frac{i}{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{f}_n|^2 \frac{h_n K_m(p_n a)}{K'_m(p_n a)}. \end{aligned}\right\} \tag{71.27}$$

Коэффициенты $Y^e_{\alpha\beta}$ можно назвать эквивалентными проводимостями внешнего пространства, $y^e_{\alpha\beta}$ — соответствующие безразмерные проводимости. Заметим, что y^e_{11} и y^e_{22} чисто мнимы, поэтому мы ввели вещественные числа b_{11} и b_{22}.

Формулы (71.26) можно рассматривать как обобщение формулы (5.21), которую можно переписать в виде

$$P^* = \frac{1}{2}\,\mathcal{E}^* J = \frac{1}{2}\, Y\, |\mathcal{E}|^2,$$

где Y есть входная комплексная проводимость цепи (рис. 3), определенная формулой

$$J = Y\mathcal{E}.$$

ЭБ "Научное наследие России"

Если цепь, показанная на рис. 3, сводится к одной индуктивности L, то $Y=-\frac{1}{i\omega L}$, а при одной емкости $Y=-i\omega C$. Поэтому при $\operatorname{Im} Y>0$ говорят об индуктивной, при $\operatorname{Im} Y<0$ — о емкостной цепи. При $\operatorname{Re} Y=0$ цепь является чисто реактивной. Этой терминологией мы будем широко пользоваться.

Частичные мощности P_{i1} и P_{i2} можно представить в таком же виде:

$$\left.\begin{aligned} P_{i1}^{*}&=\frac{1}{2}\left(Y_{11}^{i}e_1+Y_{12}^{i}e_2\right)e_1^{*},\\ P_{i2}^{*}&=\frac{1}{2}\left(Y_{21}^{i}e_1+Y_{22}^{i}e_2\right)e_2^{*},\end{aligned}\right\} \qquad (71.28)$$

где коэффициенты $Y_{\alpha\beta}^{i}$ можно назвать входными проводимостями канавки; мы их приближенно вычислим далее.

Подставляя формулы (71.26) и (71.28) в граничные условия (71.21), получаем характеристические уравнения

$$\left(Y_{11}^{e}-Y_{11}^{i}\right)\left(Y_{22}^{e}-Y_{22}^{i}\right)=\left(Y_{12}^{e}-Y_{12}^{i}\right)\left(Y_{21}^{e}-Y_{21}^{i}\right), \qquad (71.29)$$

$$Y_{11}^{e}=Y_{11}^{i}\ (\text{при } e_2=0), \qquad (71.30)$$

$$Y_{22}^{e}=Y_{22}^{i}\ (\text{при } e_1=0), \qquad (71.31)$$

позволяющие, как мы увидим ниже, определить волновое число h поверхностной волны. Уравнение (71.29) получим, если приравняем нулю определитель линейной системы уравнений для e_1 и e_2. Уравнение (71.30) получается, если на поверхности $r=a$ имеем $E_\varphi\equiv 0$, а уравнение (71.31) — если $E_z\equiv 0$ при $r=a$.

Полученные соотношения применимы не только к ребристому стержню, изображенному на рис. 81, но и к периодическим структурам с другой формой канавок: треугольной (рис. 76, *в*), полукруглой и т. д. Для ребристого стержня легко однако вывести приближенные выражения структурных коэффициентов f_n и $\tilde{f}_n$ и входных проводимостей $Y_{\alpha\beta}^{i}$ и таким образом довести расчет до конца.

Рассмотрим двухмерную систему, изображенную на рис. 86, *а* — бесконечно длинную прямую канавку бесконечной глубины. Если заряды на краях канавки противоположны по знаку, то распределение поперечного электро-

Электронное наследие России

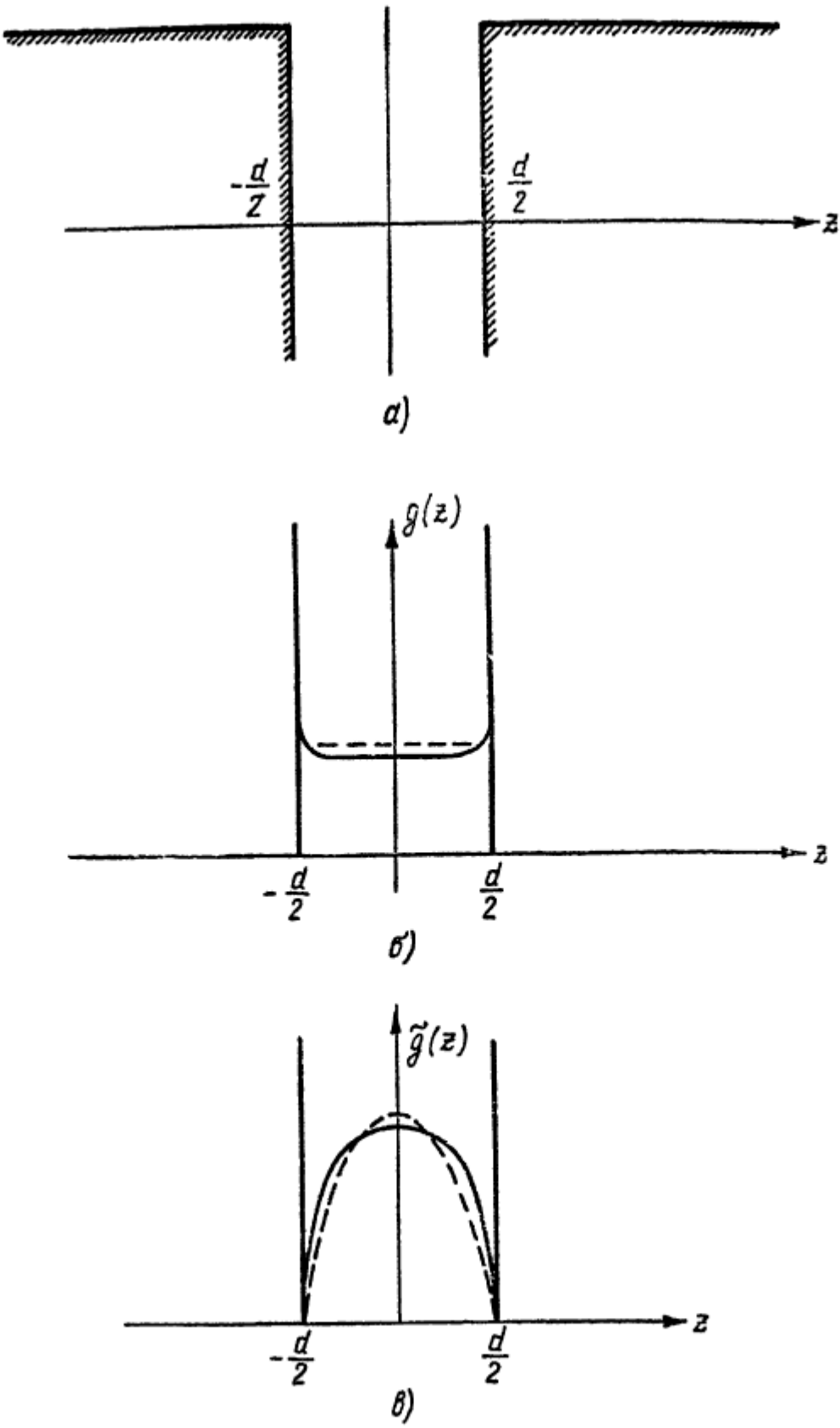


Рис. 86. Распределение поля на поверхности прямоугольной канавки.

ЭБ "Научное наследие России"

статического поля на границе канавки будет определяться функцией $g(z)$, изображенной на рис. 86, *б* сплошной линией. В такой системе может быть и продольное электрическое поле, распределение которого дается функцией $\tilde{g}(z)$ на рис. 86, *в* (сплошная кривая). Эти функции $g(z)$ и $\tilde{g}(z)$, характер которых может быть уточнен с помощью теории потенциала, для приближенных вычислений допустимо заменить простыми выражениями

$$\left.\begin{aligned} g(z)=\frac{1}{d};\quad \tilde{g}(z)=\frac{\pi}{2d}\cos\frac{\pi z}{d} \\ \text{при}\quad -\frac{d}{2}<z<\frac{d}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{71.32}$$

соответствующими пунктирным кривым на рис. 86, *б* и 86, *в*. Эти аппроксимации могут давать хорошие результаты лишь при весьма длинных волнах. Однако, как мы видели выше, поверхностные волны могут существовать лишь при $\lambda > 2D$, и поэтому в первом приближении формулы (71.32) всегда можно применять для расчета поверхностных волн.

Пользуясь формулами

$$f_n=\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-ih_n z}\, g(z)\,dz;\quad \tilde{f}_n=\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{-ih_n z}\,\tilde{g}(z)\,dz, \tag{71.33}$$

мы получаем структурные коэффициенты

$$f_n=\frac{\sin\frac{h_n d}{2}}{\frac{h_n d}{2}};\quad \tilde{f}_n=\frac{\cos\frac{h_n d}{2}}{1-\left(\frac{h_n d}{\pi}\right)^2} \tag{71.34}$$

Для входных проводимостей функции (71.32) также дают простые выражения. Действительно, функции Π и Π' в каждой канавке равны

$$\left.\begin{aligned} \Pi=\frac{e_1}{k^2 d}\cdot\frac{J_m(kr)\,N_m(ka_0)-N_m(kr)\,J_m(ka_0)}{J_m(ka)\,N_m(ka_0)-N_m(ka)\,J_m(ka_0)}, \\ \Pi'=\frac{i\pi e_2}{2kpd}\,\frac{I_m(pr)\,K'_m(pa_0)-K_m(pr)\,I'_m(pa_0)}{I'_m(pa)\,K'_m(pa_0)-K'_m(pa)\,I'_m(pa_0)}\cos\frac{\pi z}{d}, \\ \left(-\frac{d}{2}<z<\frac{d}{2},\quad a_0<r<a\right) \end{aligned}\right\} \tag{71.35}$$

Электронное наследие России

где a_0 есть внутренний (наименьший) радиус стержня, а

$$p = \sqrt{\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 - k^2} \tag{71.36}$$

есть вещественное положительное число. Потенциалы (71.35) дают

$$\left.\begin{aligned} Y^i_{11} &= i\,\frac{ca}{4D}\,b;\ Y^i_{22} = i\,\frac{ca}{4D}\,\tilde{b}, \\ Y^i_{12} &= Y^i_{21} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{71.37}$$

где

$$b = \frac{D}{d}\cdot\frac{J'_m(ka)\,N_m(ka_0) - N'_m(ka)\,J_m(ka_0)}{J_m(ka)\,N_m(ka_0) - N_m(ka)\,J_m(ka_0)} \tag{71.38}$$

и

$$\tilde{b} = \frac{\pi^2 pD}{8kd}\cdot\frac{I_m(pa)\,K'_m(pa_0) - K_m(pa)\,I'_m(pa_0)}{I'_m(pa)\,K'_m(pa_0) - K'_m(pa)\,I'_m(pa_0)}. \tag{71.39}$$

Если мы возьмем функции $g(z)$ и $\tilde{g}(z)$, отличные от (71.32), то получим более сложные выражения для $Y^i_{\alpha\beta}$. Как и следовало ожидать, входные проводимости (71.37) — чисто реактивные.

При условиях

$$ka_0 \gg 1;\ ka_0 \gg m^2 \tag{71.40}$$

формула (71.38) упрощается благодаря асимптотическим выражениям (22.09) и (22.11) следующим образом:

$$b = \frac{D}{d}\operatorname{ctg} kl,\ l = a - a_0, \tag{71.41}$$

где l — глубина канавки.

При условиях

$$pa_0 \gg 1;\ pa_0 \gg m^2 \tag{71.42}$$

в силу асимптотических формул (61.21) мы имеем

$$\tilde{b} = \frac{\pi^2 pD}{8kd}\operatorname{cth} pl. \tag{71.43}$$

Формулы (71.41) и (71.43) соответствуют двухмерной гофрированной поверхности, изображенной на рис. 87.

Из формулы (71.43) вытекает важное неравенство

$$\tilde{b} > 0, \tag{71.44}$$

которое нетрудно вывести и из более сложной формулы (71.39). Можно доказать, что это неравенство остается в силе при любом выборе функции $\tilde{g}(z)$. Оно влечёт за собой важное следствие. Если записать характеристическое уравнение (71.31) в виде

$$b_{22} = \tilde{b}, \tag{71.45}$$

то левая часть его в силу неравенства $K_m' < 0$ всегда отрицательна [см. формулу (71.27)], а правая — положительна, и это уравнение решений не имеет. Иначе говоря, в

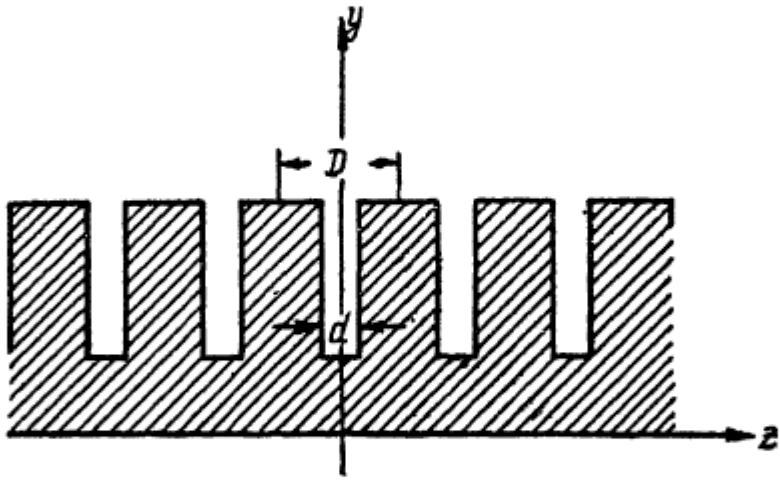


Рис. 87. Двухмерная гофрированная поверхность (гребенка) общего вида.

данной системе не могут распространяться поверхностные волны, электрическое поле которых на границах канавок было бы направлено вдоль этих канавок.

Перейдем к рассмотрению поверхностных волн частного вида.

1. Симметричные волны. Симметричные волны, имеющие индекс $m = 0$, могут в принципе быть либо электрическими, либо магнитными волнами. Действительно, при $m = 0$ мы имеем

$$Y_{21}^e = Y_{12}^e = Y_{12}^i = Y_{21}^i = 0 \tag{71.46}$$

[ср. формулу (71.27)] и характеристическое уравнение (71.29) распадается на уравнения (71.30) и (71.31). Первое из этих уравнений может быть записано в виде

$$b_{11} \equiv k \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 \frac{K_1(p_n a)}{p_n K_0(p_n a)} = b, \qquad (71.47)$$

и дает симметричные электрические волны. Второе уравнение приводится к виду (71.45) и, как показано выше, решений не имеет. Поэтому симметричные магнитные волны в данной системе отсутствуют. Электрические же волны, как показывает уравнение (71.47), существуют лишь при „индуктивных" канавках (при $b>0$), а при „емкостных" канавках (при $b<0$) они отсутствуют.

При решении уравнения (71.47) удобно ввести вместо волновых чисел k и h безразмерные параметры

$$\varkappa = \frac{kD}{2\pi} = \frac{D}{\lambda}, \quad \eta = \frac{hD}{2\pi} = \frac{D}{\lambda'}, \qquad (71.48)$$

где λ' — длина волны в системе. Эти параметры связаны неравенствами

$$\varkappa < \eta < \frac{1}{2}. \qquad (71.49)$$

Введем также безразмерные параметры

$$\delta = \frac{d}{D}; \quad \alpha = \frac{2\pi a}{D}, \qquad (71.50)$$

определяющие форму ребристого стержня и изменяющиеся в пределах

$$0 < \delta < 1; \quad 0 < \alpha < \infty. \qquad (71.51)$$

Значению $\delta = 0$ соответствует „гладкий" стержень радиуса a, значению $\delta = 1$ — ребристый стержень с бесконечно тонкими дисками; при $\alpha = \infty$ мы переходим к двухмерной структуре, показанной на рис. 87. Помимо этого мы введем еще величину

$$\xi = \frac{l}{\lambda} = \frac{k(a - a_0)}{2\pi}, \qquad (71.52)$$

равную отношению глубины канавки к длине волны в свободном пространстве.

Способ решения уравнения (71.47) пояснен на рис. 88. Фиксируя значения $\varkappa$, δ и α, мы вычисляем ряд b_{11} как функцию η и затем по формуле (71.38) находим величину b как

Электронное культурное наследие России

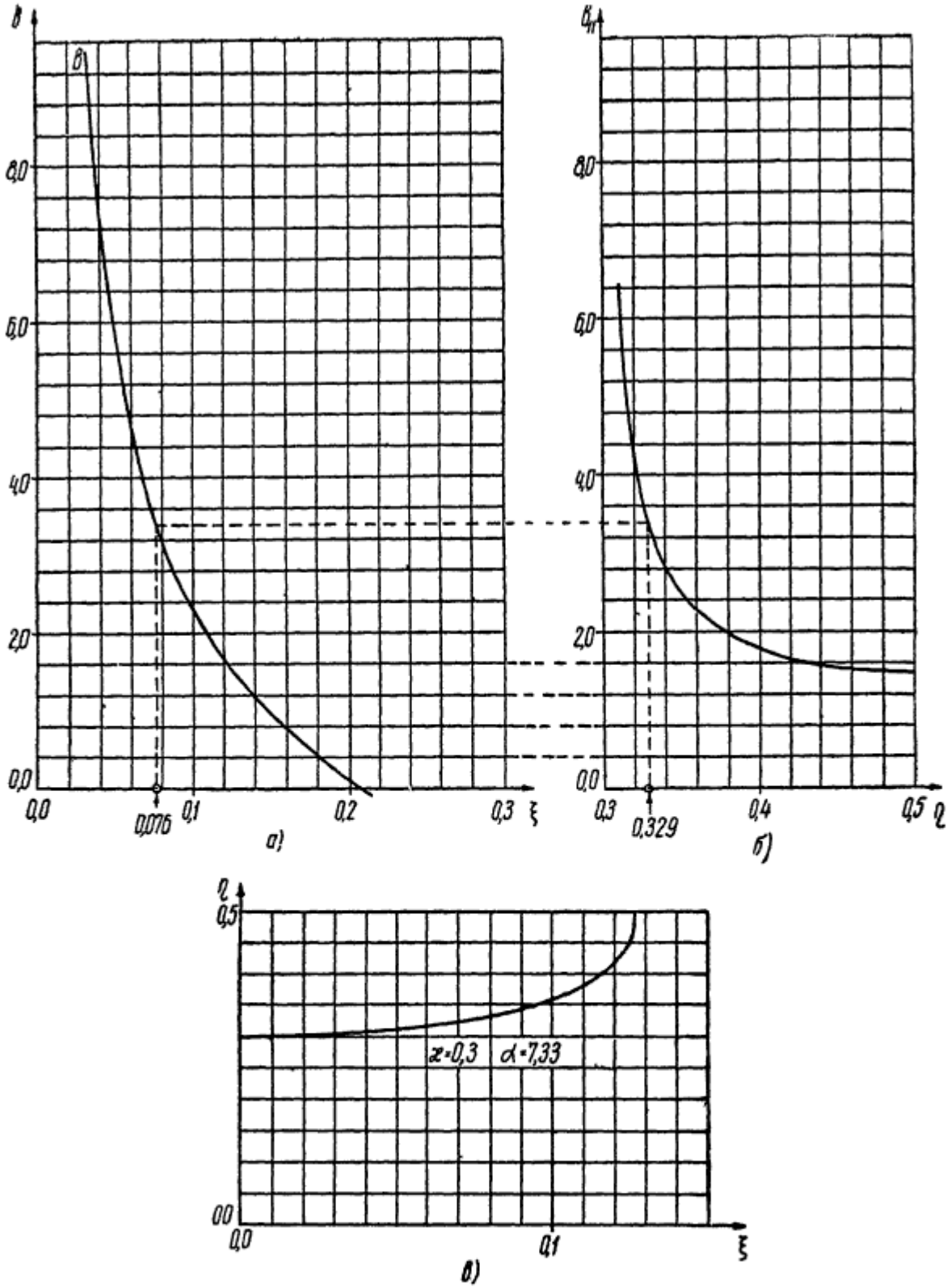


Рис. 88. Графическое решение уравнения (71. 47) при $m = 0$.

функцию ξ. Эти две функции мы наносим на соседние графики с одним и тем же масштабом по оси ординат (рис. 88, *а* и 88, *б*). Проводя семейство горизонтальных прямых, мы получаем зависимость η от ξ при фиксированных значениях остальных параметров (рис. 88, *в*).

...ное наследие России"

На рис. 89, *а* и 89, *б* приведены результаты таких вычислений. На рис. 89, *а* изображены кривые, дающие зависимость η от ξ при различных $\varkappa$, а на рис. 89, *б* — кривые, дающие ту же зависимость при различных α. Мы видим, что величина η монотонно растет при увеличении $\xi = \frac{l}{\lambda}$, при некотором значении ξ мы получаем $\eta = \frac{1}{2}$ и наступает „срыв“ волны, так что при бóльших значениях ξ — при более глубоких канавках — поверхностной волны нет: горизонталь, соответствующая этому значению ξ, не пересекает кривой b_{11} (рис. 88).

При дальнейшем увеличении ξ поверхностные волны могут опять появиться, но мы рассматриваем здесь только первую, „главную“ ветвь решений уравнения (71.47), так как другие ветви соответствуют обычно весьма глубоким канавкам.

Характеристическое уравнение (71.47) переходит в более простое уравнение (70.04), выведенное выше, если положить

$$d = D \text{ и } hd \ll 1. \tag{71.53}$$

Тогда по первой формуле (71.34) получаем $f_0 \approx 1$, $f_n \ll 1$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$), и уравнение (71.47) принимает вид

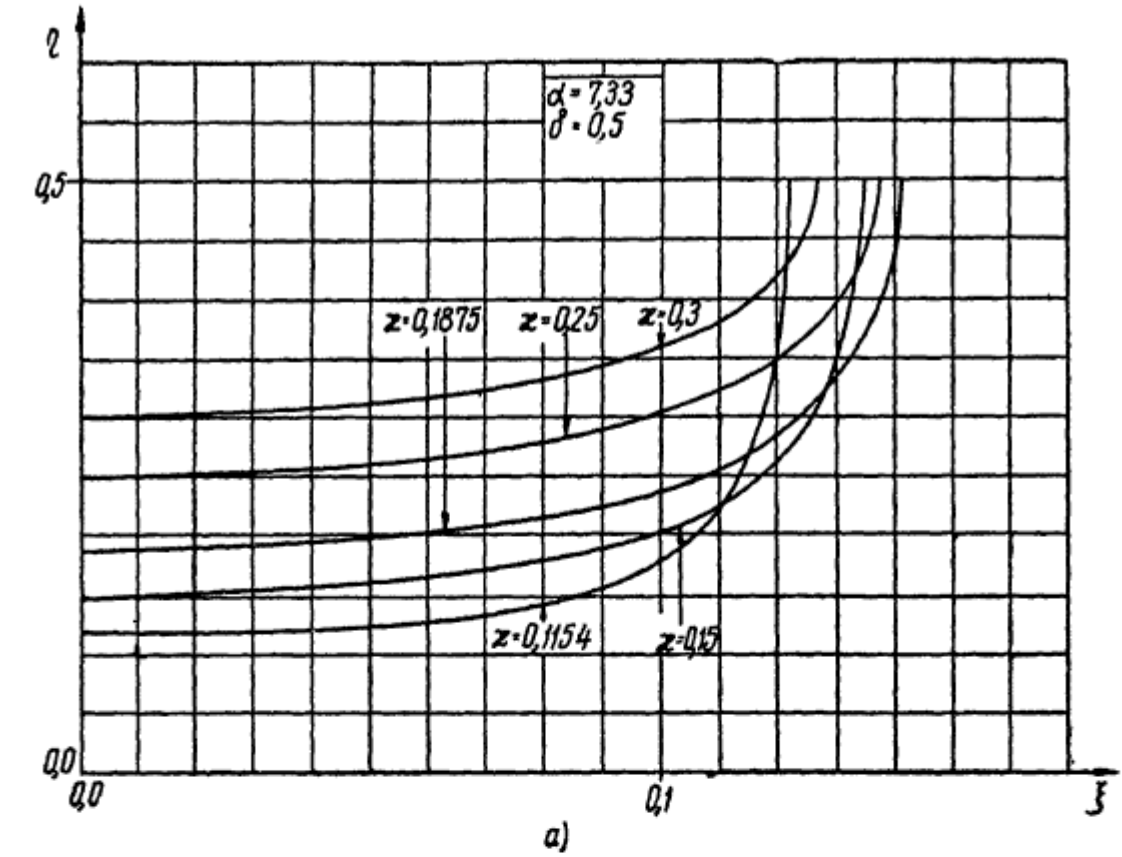
$$\frac{K_1(p_0 a)}{p_0 a K_0(p_0 a)} = \frac{b}{ka}, \tag{71.54}$$

отличающийся от формулы (70.04) лишь обозначениями. Уравнение (71.47) упрощается также при $\xi \to 0$, когда $b \to \infty$ и, следовательно, величина b_{11} также неограниченно возрастает. Но равномерно сходящийся ряд b_{11} может обращаться в бесконечность лишь за счет центрального члена с индексом $n = 0$; при $p_0 a \to 0$ этот член будет главным, и уравнение принимает вид

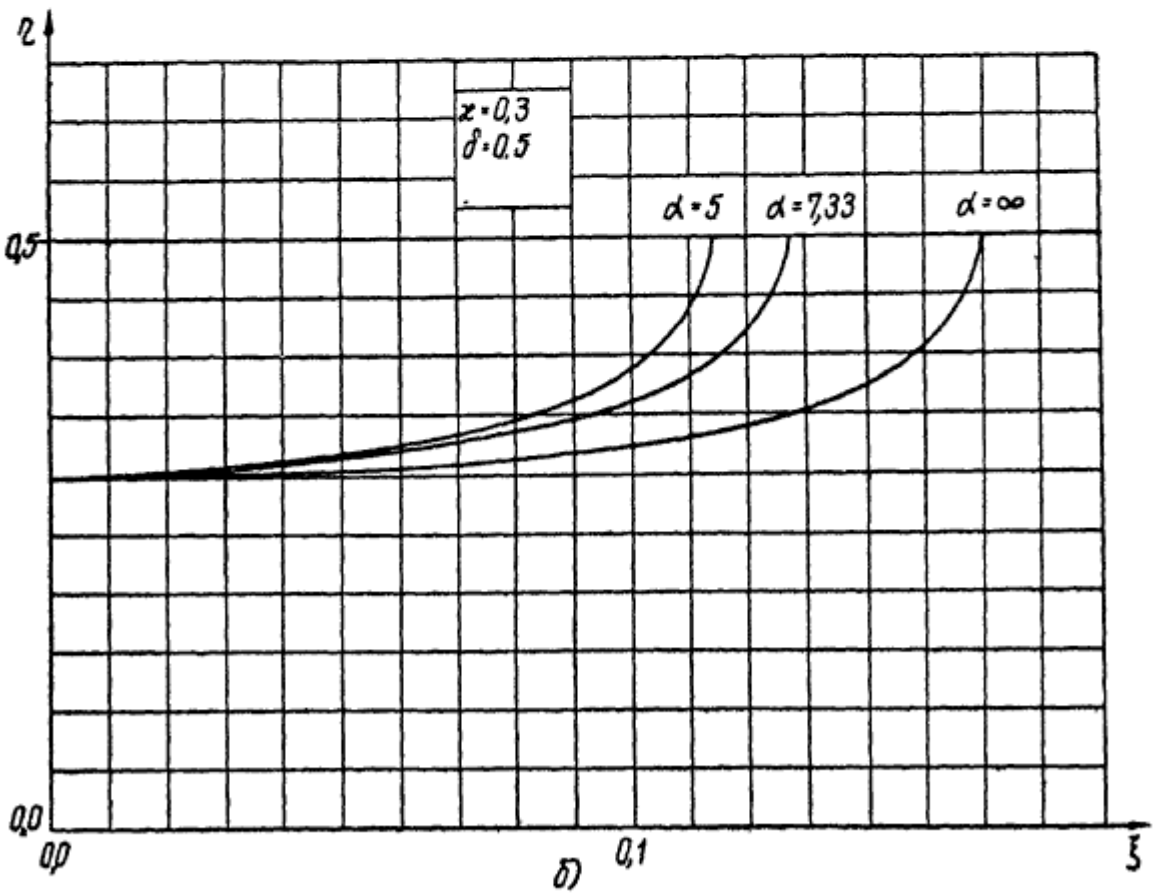
$$|f_0|^2 \frac{K_1(p_0 a)}{p_0 a K_0(p_0 a)} = \frac{b}{ka}. \tag{71.55}$$

Из выражений (71.54) и (71.55) нетрудно заключить (ср. § 70), что при $\xi \ll 1$ (при достаточно мелких канавках или достаточно длинных волнах) симметричная электрическая волна распространяется с волновым числом $h \approx k$, т. е. так же, как вдоль гладкого идеально проводящего цилиндра. Таким образом, со стороны длинных волн никакой критической волны в данном случае не существует:

ЭБ "Научное наследие России"



а)



б)

Рис. 89. Симметричные волны в ребристом стержне ($m = 0$).

ЭБ "Научное наследие России"

симметричная волна может распространяться при сколь угодно низких частотах, что весьма существенно для использования ребристого стержня в качестве линии передачи (ср. § 65). Однако существует другая критическая волна — такая, что при более коротких волнах характеристическое уравнение (71.47) решения не имеет и поверхностная волна отсутствует.

2. Двухмерные поверхностные волны. Вдоль двухмерной структуры, изображенной на рис. 87, могут распространяться поверхностные волны. Для *двухмерных* волн, поле которых не зависит от координаты x, отсчитываемой вдоль канавок, характеристическое уравнение легко получить из уравнения (71.47), полагая $a=\infty$ (или $\alpha=\infty$)

$$k\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{|f_n|^2}{p_n}=b, \qquad (71.56)$$

причем для b следует брать выражение (71.41).

На рис. 90 изображены типичные кривые, определяющие зависимость η от ξ для двухмерных поверхностных волн. Из рис. 90 видно, что структуры, имеющие $\delta=1$ и $\delta=\frac{1}{2}$, мало отличаются друг от друга по замедлению электромагнитных волн, в то время как при $\delta=\frac{1}{4}$ волны замедляются менее эффективно.

Зависимость η от ξ у стержня и двухмерной периодической структуры качественно одна и та же: „срыв“ двухмерных волн происходит всегда при $\xi<\frac{1}{4}$, а при $\frac{1}{4}<\xi<\frac{1}{2}$ эти волны не существуют вследствие отрицательности b. При дальнейшем увеличении появляются другие решения уравнения (71.56), не изображенные на рис. 90; эти решения повторяют первое („главное“) решение, поскольку $b=\frac{1}{\delta}\operatorname{ctg}(2\pi\xi)$ есть периодическая функция ξ с периодом $\frac{1}{2}$.

При $\xi\to 0$ уравнение (71.56) упрощается следующим образом:

$$\frac{k|f_0|^2}{p_0}=b, \qquad (71.57)$$

ЭБ "Научное наследие России"

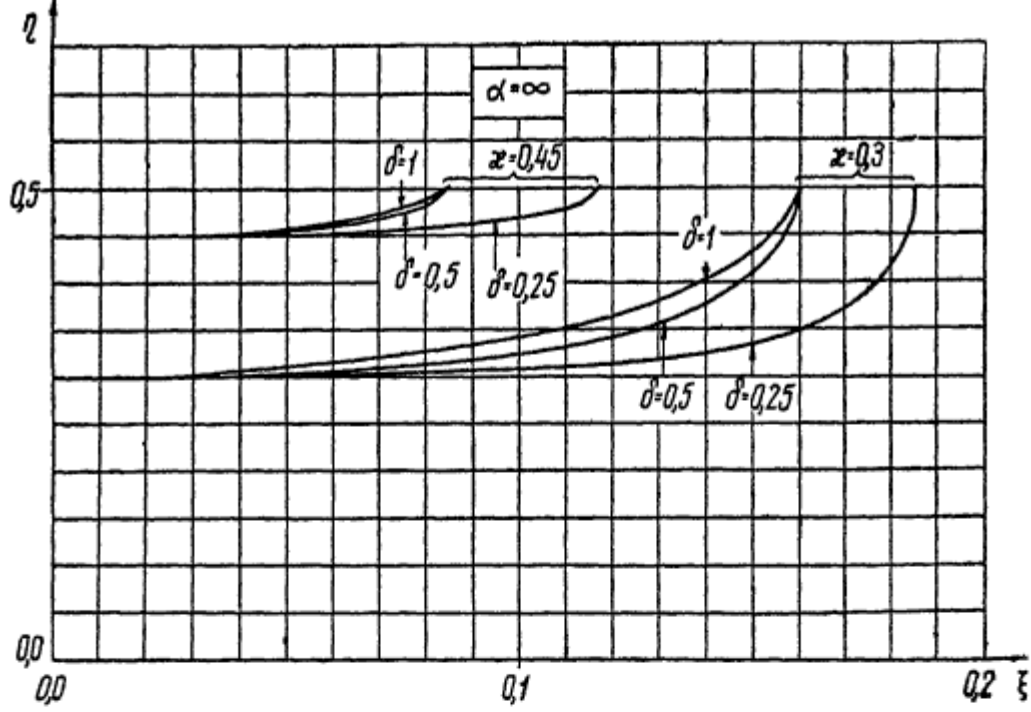


Рис. 90. Волны над двухмерной гофрированной поверхностью.

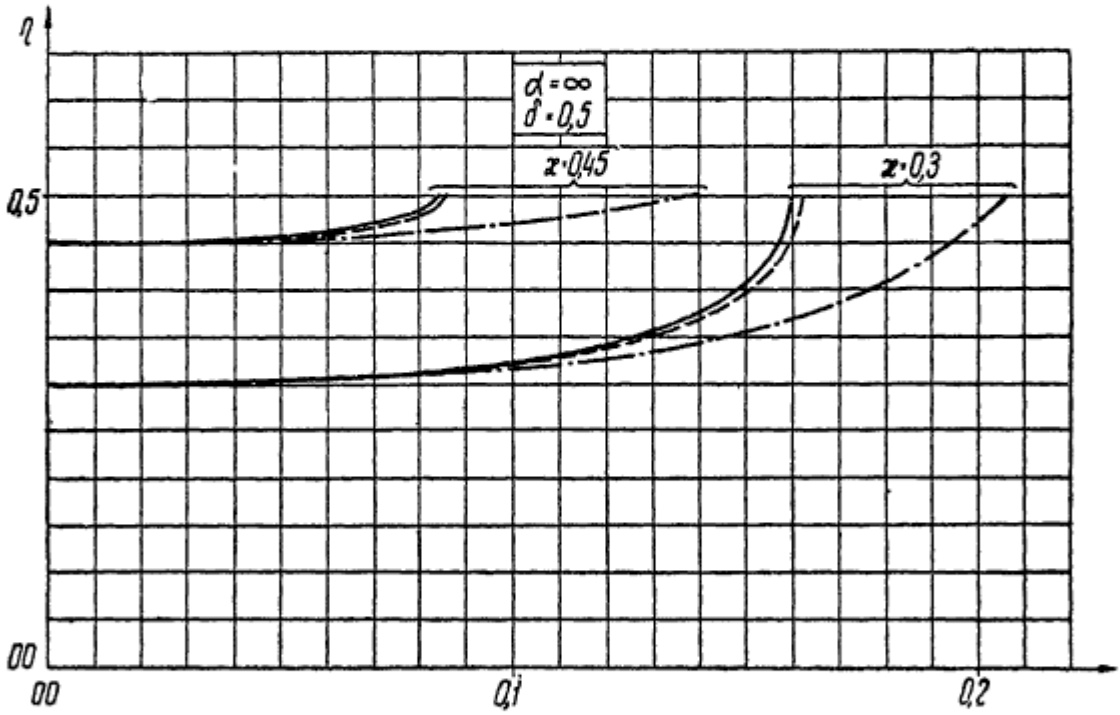


Рис. 91. Различные приближения при расчете двухмерных волн.

откуда при $|f_0|=1$ получаем явное выражение для волнового числа

$$h=k\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}. \qquad (71.58)$$

При $\delta=1$ последнее выражение дает формулу (69.04).

Представляет интерес выяснить пределы применимости приближенных выражений (71.57) или (71.58), в которых

...ое наследие России"

вместо ряда b_{11} мы берем только его центральный член с индексом $n=0$. В этом приближении по существу не принимается во внимание периодичность структуры. На рис. 91 сплошными линиями изображена зависимость η от ξ по формуле (71.56), а штрих-пунктиром — по формуле (71.57). Сравнение кривых показывает, что данным приближением можно пользоваться лишь при фазовой скорости поверхностных волн, мало отличающейся от c. На рис. 91 пунктиром нанесены кривые, вычисленные с помощью двучленного приближения, в котором вместо ряда b_{11} взята сумма двух его членов с индексами $n=0$ и $n=-1$; это приближение дает почти те же результаты, что и весь ряд.

3. Несимметричные волны. Характеристическое уравнение (71.30) при $m=1,2,\ldots$ можно записать в виде

$$b_{11}\equiv -k\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f_n|^2\frac{K'_m(p_n a)}{p_n K_m(p_n a)}\left\{1-\left[\frac{mh_n K_m(p_n a)}{kap_n K'_m(p_n a)}\right]^2\right\}=b. \tag{71.59}$$

Функция $b=b(\xi)$ при $\xi\ll 1$ и любых m приближенно равна

$$b=\frac{1}{2\pi\delta\xi}, \tag{71.60}$$

где δ и ξ определены формулами (71.50) и (71.52). Что же касается функции b_{11}, то она ведет себя при $h\to k$ (при $p_0 a\to 0$) для различных m по-разному. При $m=0$ согласно формуле (71.55) имеем

$$b_{11}=|f_0|^2 ka\frac{K_1(p_0 a)}{p_0 a K_0(p_0 a)}=|f_0|^2\frac{ka}{(p_0 a)^2\ln\frac{2}{\gamma p_0 a}}\quad (p_0 a\ll 1). \tag{71.61}$$

При $m=1,2,\ldots$ центральный член ряда b_{11} можно приближенно представить в виде

$$|f_0|^2\frac{m}{ka}\left[-1+2\frac{(ka)^2}{mp_0 a}\frac{K_{m-1}(p_0 a)}{K_m(p_0 a)}\right]\quad (p_0 a\ll 1). \tag{71.62}$$

Он неограниченно возрастает при $m=1$ и $p_0 a\to 0$; тогда

$$b_{11}=|f_0|^2 ka\left[2\ln\frac{2}{\gamma p_0 a}-\frac{1}{(ka)^2}\right]\quad (p_0 a\ll 1). \tag{71.63}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Если же $m=2,3, \ldots$, то выражение (71.62) стремится при $p_0 a \to 0$ к конечному пределу

$$|f_0|^2 \frac{ka}{m-1}\left[1-\frac{m(m-1)}{(ka)^2}\right] \qquad (71.64)$$

и величина b_{11} остается при $p_0=0$ и $h=k$ конечной.

На рис. 92,*а* изображена зависимость $b=b(\xi)$, а на рис. 92,*б* — зависимость $b_{11}=b_{11}(\eta)$ при $m=0, 1, 2$, а также для двухмерных волн ($a=\infty$). В результате различного поведения функции $b_{11}(\eta)$ кривые, определяющие зависимость η от ξ, получаются при $m=2,3, \ldots$ иными, чем ранее. При недостаточно глубоких канавках несимметричная волна с индексом $m=2,3, \ldots$ не может существовать: стержень поддерживает ее распространение только при глубине канавок, превышающей некоторое минимальное значение. Это свойство поверхностных волн тесно связано с тем обстоятельством, что вдоль гладкого идеально проводящего стержня несимметричные волны распространяться не могут. Несимметричные волны с индексами $m=2,3, \ldots$ не могут существовать и при сколь угодно низких частотах: для них имеется минимальная частота. Как видно из рис. 92,*в*, поверхностная волна с индексом $m=2$ существует в другом интервале значений ξ, нежели волны с индексами $m=0$ и $m=1$.

Из несимметричных волн наибольший интерес представляет волна с индексом $m=1$, которая, излучаясь с конца стержня конечной длины, дает максимум излучения в направлении своего распространения. Она качественно отличается от всех других несимметричных волн тем, что существует при сколь угодно мелких канавках и сколь угодно низких частотах — подобно симметричной волне. Отметим, что в других замедляющих системах, рассмотренных в § 66 и § 67, несимметричная волна с индексом $m=1$ также может распространяться при сколь угодно низких частотах.

На рис. 93 приведены некоторые результаты вычислений для несимметричной волны с индексом $m=1$. Мы видим, что эта волна может существовать при более глубоких канавках (бóльших значениях ξ), чем симметричная волна (рис. 89). Поэтому на рис. 93 кривые, соответствующие сравнительно небольшим значениям $\varkappa$ ($\varkappa=0{,}1154$; $0{,}15$; $0{,}1875$) обрываются не при $\eta=\frac{1}{2}$, а при меньших значениях η; дальнейшее увеличение ξ невозможно, так как

Электронное наследие России

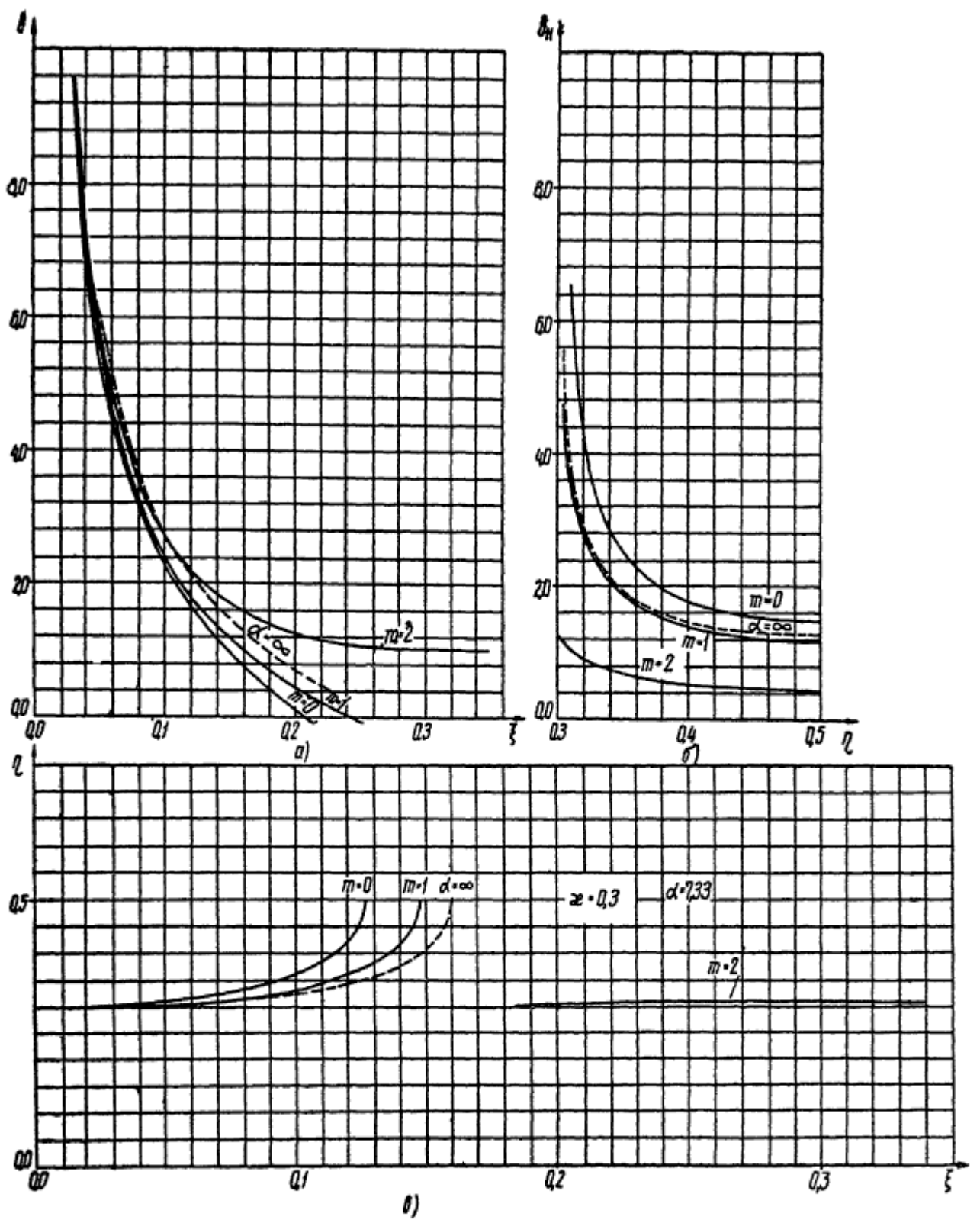


Рис. 92. Сравнение поверхностных волн различной симметрии.

глубина канавок l не может превышать радиус стержня a $\left(\text{и, следовательно, } \xi \leqslant \frac{\alpha x}{2\pi}\right)$. Такое явление для несимметричной волны с индексом $m=2$ представлено на рис. 92; то же может быть и с симметричными волнами, но при меньших значениях x.

ЭБ "Научное наследие России"

При расчетах несимметричных волн мы использовали упрощенное уравнение (71.30) вместо полного уравнения (71.29); последнее легко привести к виду

$$b_{11} = b - \frac{|y_{12}|^2}{b - b_{22}} \equiv B, \qquad (71.65)$$

причем в отличие от b величина B зависит также от η. Поэтому графический метод решения изменяется следующим образом: исходя из кривой $b_{11} = b_{11}(\eta)$, нужно для какого-нибудь значения η построить отрезок кривой $B = B(\xi)$, который пересекает горизонталь, соответствующую

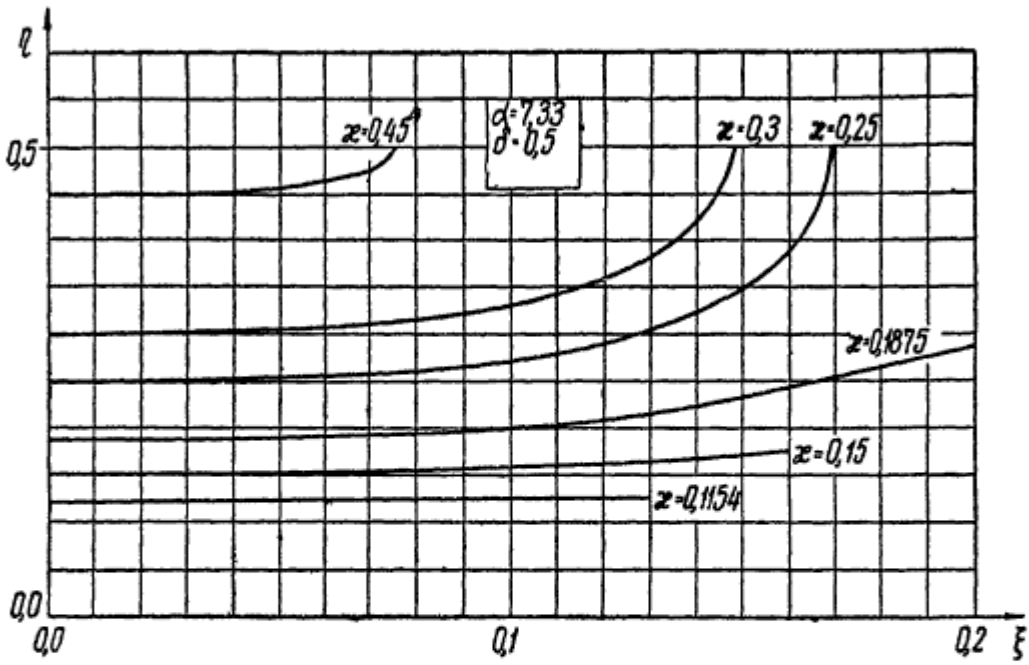


Рис. 93. Несимметричные волны с индексом $m = 1$.

на графике для b_{11} данному значению η. Необходимые для этого приближенные значения ξ легко найти, поскольку B, как правило, лишь незначительно отличается от b.

На рис. 94 сопоставлены результаты расчетов по полному (пунктир) и упрощенному (сплошные кривые) характеристическим уравнениям при $\varkappa = 0{,}25$ и $\varkappa = 0{,}45$. Мы видим, что сплошные и пунктирные линии почти совпадают, и таким образом обосновывается применимость упрощенного уравнения (71.30).

Следовательно, при распространении несимметричной волны электрическое поле на границе канавок имеет составляющую вдоль канавок значительно меньшую, чем составляющая поперек канавок. Аналогичный характер имеет электрическое поле в узких щелях (ср. § 78 и § 92).

Электронное наследие России

В отношении числа „основных“ волн, существующих при самых низких частотах, у ребристого стержня имеется полная аналогия с системами, рассмотренными в § 66 и § 67. Однако в диэлектрических замедляющих системах каждая волна существует при сколь угодно высоких частотах: при росте частоты происходит не „срыв“, а приближение фазовой скорости к своему предельному значению $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$. Периодические структуры с использованием диэлектрика, который, например, может заполнять канавки,

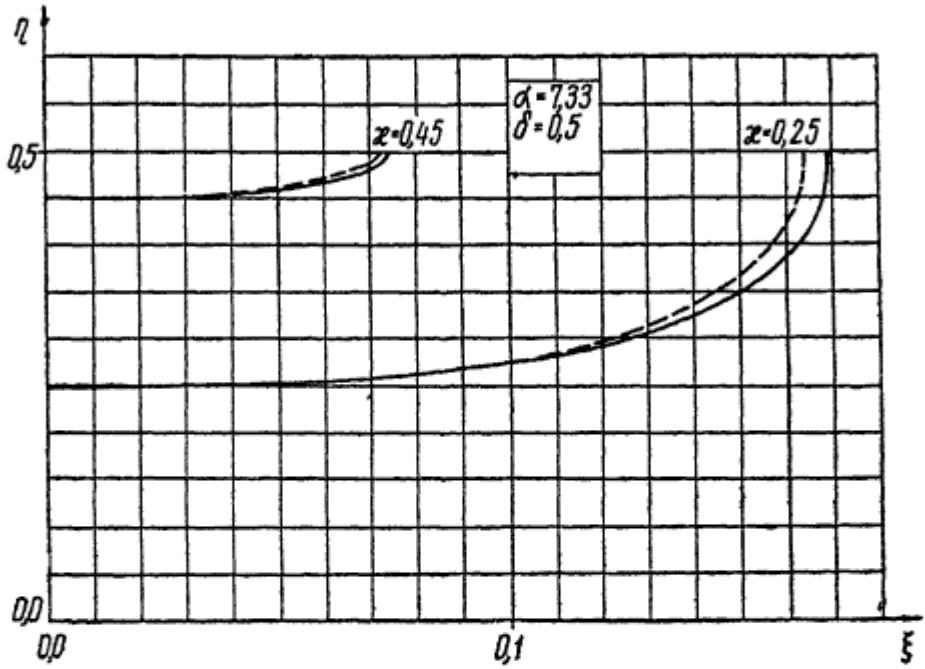


Рис. 94. Различные приближения при расчете несимметричной волны ($m = 1$).

являются промежуточным звеном между чисто диэлектрическими системами и ребристыми стержнями. В таких системах может нарушаться условие (71.44) и поэтому в них могут при некоторых условиях распространяться симметричные магнитные волны, отсутствующие у ребристого стержня без диэлектрика.

Выводы. Изложенный выше приближенный способ расчета поверхностных волн в периодических структурах позволяет сравнительно просто изучить эти волны с качественной и частично с количественной точки зрения. Перечислим основные свойства волн в ребристых стержнях.

1. Поверхностные волны существуют лишь при условии $\lambda > 2D$, где λ — длина волны в свободном пространстве, а D — период структуры. Длина поверхностной волны λ' также должна превышать $2D$.

ЭБ "Научное наследие России"

2. Поверхностные волны распространяются с фазовой скоростью, меньшей c (и, следовательно, $\lambda' < \lambda$).

3. Симметричные поверхностные волны могут быть только электрическими: симметричных магнитных волн не существует. Двухмерные поверхностные волны, распространяющиеся над волнистыми поверхностями (см. рис. 87), также могут быть только электрическими. Несимметричные поверхностные волны, распространяющиеся вдоль ребристого стержня, принадлежат к „гибридному" типу и имеют $E_z \neq 0$ и $H_z \neq 0$. На поверхности канавок составляющая E_z этих волн преобладает над составляющей E_φ.

4. Для двухмерных поверхностных волн увеличение глубины канавок при данной частоте приводит к уменьшению фазовой скорости от значения c, соответствующего гладкой плоскости, до значения $\frac{2D}{\lambda} c$, соответствующего некоторой „критической" глубине l. Последняя всегда меньше $\frac{\lambda}{4}$; если глубина канавок больше критической, но меньше $\frac{\lambda}{2}$, то двухмерные поверхностные волны существовать не могут.

5. Для поверхностных волн, распространяющихся вдоль ребристого стержня и имеющих азимутальный индекс $m = 0$ или $m = 1$, фазовая скорость при фиксированной частоте также изменяется с увеличением глубины канавок от значения c (гладкий стержень) до значения $\frac{2D}{\lambda} c$ (при некоторой критической глубине). Поверхностные волны не существуют, если глубина канавок больше критической, но меньше той, при которой входная проводимость каждой канавки опять обращается в бесконечность. Фазовая скорость может в ряде случаев не достигать значения $\frac{2D}{\lambda} c$ в силу того, что глубина канавки всегда меньше радиуса стержня.

6. Несимметричная волна с азимутальным индексом $m = 2, 3, \ldots$ существует лишь при глубине канавок, заключенной между некоторым минимальным и максимальным значениями (зависящими от типа волны и от частоты). При минимальной глубине фазовая скорость равна c, и при более мелких канавках поверхностная волна отсутствует.

Электронное наследие России"

Максимальная глубина канавок (как при $m=0$ и $m=1$) определяется либо тем, что фазовая скорость равна $\frac{2D}{\lambda}c$, либо радиусом стержня.

Заметим, что первое и второе свойства относятся ко всякой „открытой“ периодической структуре без потерь, а остальные свойства — лишь к ребристым стержням при отсутствии диэлектрика.

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА XIII

СПИРАЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД

§ 72. Спираль как замедляющая линия. Приближенные граничные условия

Спиральная линия (или „спиральный волновод“) образована металлическим проводом, намотанным по винтовой линии. Заметим, что в математике винтовую линию не принято называть спиралью: спираль есть плоская кривая (спираль Архимеда, логарифмическая спираль и т. д.). Однако в радиотехнике термин „спиральная линия“ является общепринятым.

Спиральная замедляющая линия имеет исключительно большое значение для лампы с бегущей волной и некоторых родственных ей электронных приборов. Замедление электромагнитных волн в спиральной линии осуществляется за счет того, что электромагнитные волны имеют тенденцию распространяться вдоль провода со скоростью c. Таким свойством обладает идеально проводящий прямой провод (§ 29), и при искривлении провода это свойство, очевидно, в какой-то степени сохраняется. Если считать, что по согнутому проводу волна бежит со скоростью c, то замедление волны определяется чисто геометрическим параметром—так называемым углом намотки ϑ (угол между проводом и плоскостью $z = \text{const}$). Как легко показать,

$$\sin\vartheta = \frac{l}{L}, \tag{72.01}$$

где L — длина провода, а l — длина спирали по оси z (рис. 95). В этом случае фазовая скорость волны по оси z, вдоль которой движутся электроны, равна

$$u = c\sin\vartheta, \tag{72.02}$$

...ное наследие России"

и коэффициент замедления равен

$$\beta = \sin\vartheta, \tag{72.03}$$

Согласно этим элементарным формулам фазовая скорость волны в спирали не зависит от частоты. Фактически, как мы увидим далее, волна в спирали обладает некоторой дисперсией. Однако эта дисперсия невелика, так что фазовая скорость остается почти постоянной в широком интервале частот. По этой причине усилители на лампе с бегущей волной обладают большой диапазон-

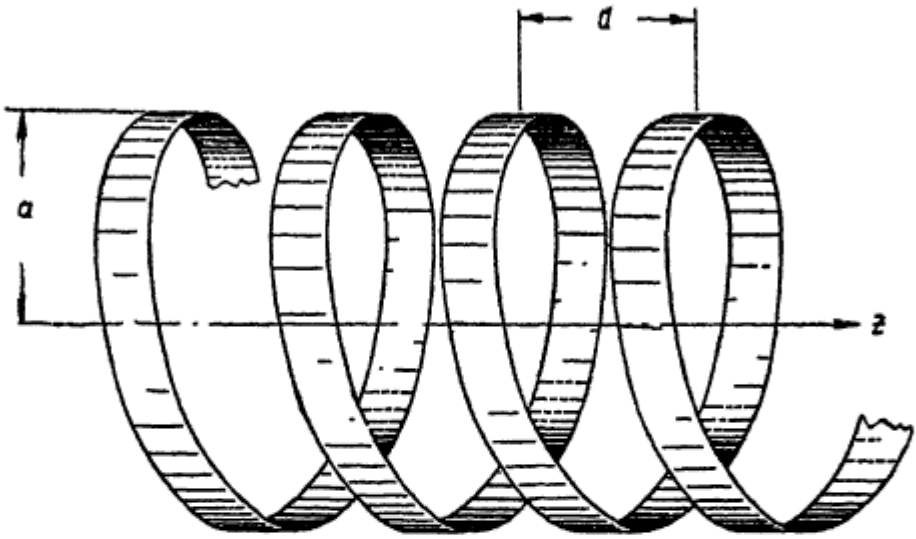


Рис. 95. Спиральный волновод (спиральная замедляющая линия),

ностью, так как близость фазовой скорости волны к скорости электронного потока сохраняется в большом частотном диапазоне.

Теория распространения волн вдоль бесконечного спирального волновода (точнее вдоль провода, намотанного по винтовой линии) может быть развита, исходя из представления о волне тока

$$J = J_0 e^{ih_0 z}, \tag{72.04}$$

бегущей по проводу с некоторым неизвестным волновым числом h_0. Иначе можно написать

$$J = J_0 e^{iH_0 s}, \tag{72.05}$$

где $s = \frac{z}{\sin\vartheta}$ — линейная координата вдоль оси провода, $H_0 = h_0 \sin\vartheta$ — волновое число, характеризующее зависимость тока от этой координаты. Вычисляя поле, создава-

емое током J, и ставя для этого поля граничное условие на поверхности провода, можно получить характеристическое уравнение для волнового числа h_0. Однако это характеристическое уравнение имеет довольно сложный вид. Поэтому ниже мы будем исследовать волны в спиральном волноводе с помощью приближенного метода, позволяющего получить те же результаты более просто и вместе с тем наглядно.

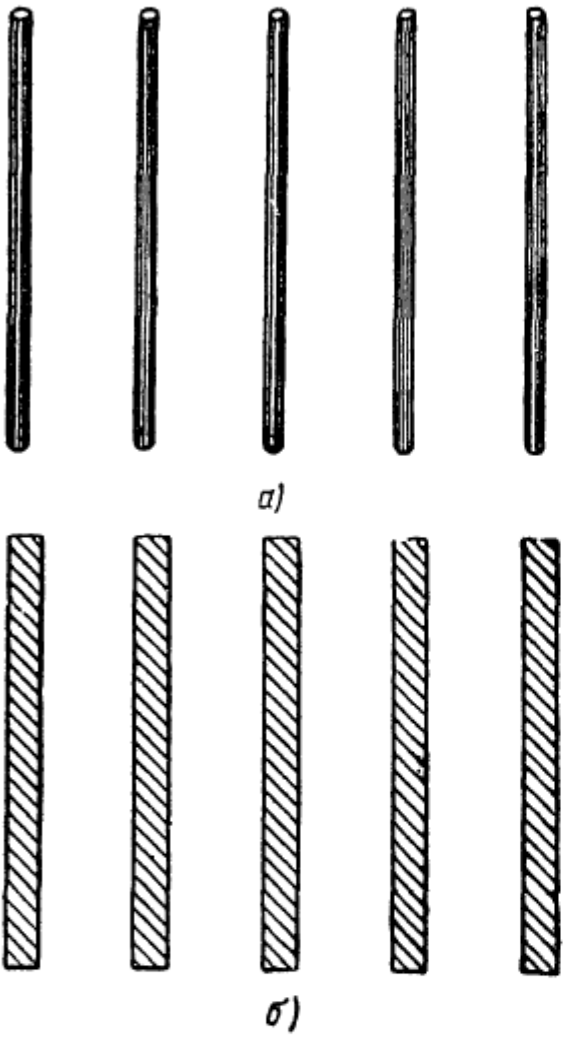


Рис. 96. Решетки:
а — из параллельных проволок круглого сечения; *б* — из параллельных лент.

Этот метод основан на приближенных граничных условиях. Представим себе сначала, что мы имеем не спиральный волновод, а решетку из параллельных проводов круглого сечения (рис. 96,*а*) или параллельных металлических лент (рис. 96,*б*). Если период решетки d мал по сравнению с длиной волны, то решетку можно рассматривать как анизотропно проводящую плоскость, обладающую идеальной проводимостью в направлении проводов или лент и не проводящую в перпендикулярном направлении. Действительно, еще в классических опытах Генриха Герца было показано, что при падении на такую решетку электромагнитных волн различных поляризаций получаются совершенно различные результаты. Если электрическое поле падающей волны параллельно проводам, то волна почти полностью отражается от решетки — как если бы это была сплошная металлическая плоскость; если же электрическое поле перпендикулярно проводам, то электромагнитная волна беспрепятственно проходит через решетку, почти не отражаясь. Различие в поведении волн различных поляризаций физически объясняется тем, что в первом случае волна возбуждает в проводах решетки сильные токи, текущие вдоль них и создающие электромагнитное поле прак-

...ое наследие России"

тически такое же, как и при сплошной металлической плоскости; это приводит к тому, что падающая волна не проникает за решетку и полностью отражается. Во втором случае падающая волна стремится возбудить токи, текущие поперек проводов; в силу тонкости проводов эти токи будут слабы, создаваемое ими поле ничтожно мало и волна проходит через решетку, как если бы решетки совсем не было.

Сказанное выше позволяет сформулировать граничные условия в плоскости решетки. Обозначим через s направление вдоль проводов или лент, через t — перпендикулярное к ним направление (в плоскости решетки). Тогда граничные условия в плоскости решетки, соответствующие предположению об ее анизотропной проводимости, можно записать в виде

$$E_s = 0 \tag{72.06}$$

и

$$H_{s,1} = H_{s,2}\,. \tag{72.07}$$

Как легко видеть из граничного условия (4.02), последнее соотношение означает отсутствие поверхностного тока в направлении, перпендикулярном проводам (отсутствие составляющей i_t).

Условия (72.06) и (72.07) на поверхности спирального волновода позволяют вывести характеристические уравнения для распространяющихся вдоль него волн (см. ниже § 73 и § 74). Подчеркнем еще раз, что эти условия являются приближенными. Ими можно пользоваться, если безразмерный параметр

$$\varkappa = \frac{kd}{2\pi} = \frac{d}{\lambda} \tag{72.08}$$

достаточно мал.

В ряде случаев их можно уточнить. Так, например, для решетки из параллельных металлических лент (рис. 96,*б*) вместо условий (72.06) и (72.07) можно написать более точные условия

$$\left.\begin{aligned} E_s &= i\xi_1\left[H_{t,2} - H_{t,1} - \frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial s}\left(E_{n,2} - E_{n,1}\right)\right], \\ H_{s,2} - H_{s,1} &= -4i\xi_2\left(E_t + \frac{1}{ik}\frac{\partial H_n}{\partial s}\right), \end{aligned}\right\} \tag{72.09}$$

где

$$\xi_1 = \varkappa \ln\sin\frac{\pi b}{2d}\,,\quad \xi_2 = \varkappa \ln\cos\frac{\pi b}{2d}\,, \tag{72.10}$$

b — ширина ленты, n—нормаль к поверхности, направленная от стороны *1* к стороне *2* этой поверхности и выбранная так, что тройка направлений t, s, n является правой.

Для решетки из параллельных проводов радиуса b (рис. 96,*а*) уточненные граничные условия можно написать лишь при

$$b \ll d, \tag{72.11}$$

т. е. когда радиус проводов составляет малую часть периода решетки. Эти условия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} E_s &= i\xi\left[H_{t,2} - H_{t,1} - \frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial s}(E_{n,2} - E_{n,1})\right], \\ H_{s,1} &= H_{s,2}, \end{aligned}\right\} \tag{72.12}$$

где

$$\xi = \varkappa \ln \frac{2\pi b}{d}. \tag{72.13}$$

Сравнивая формулы (72.10) и (72.13), мы видим, что при условии (72.11) решетка из проводов радиуса b эквивалентна решетке из лент шириной $4b$. На рис. 96,*а* и 96,*б* изображены две такие эквивалентные решетки.

Применимость как первоначальных, так и уточненных граничных условий для решеток можно проверить путем сравнения. На рис. 97 изображена зависимость $|A_0|$ и $|B_0|$ от $\varkappa$ для бесконечных решеток из параллельных идеально проводящих лент, ширина которых со-

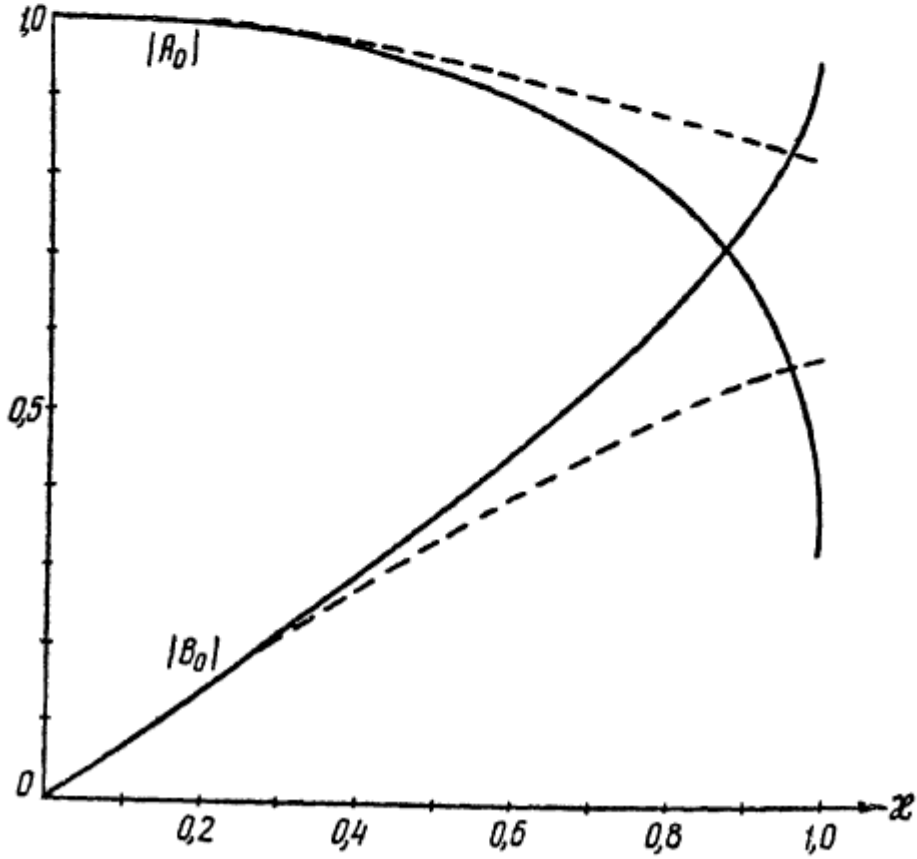


Рис. 97. Коэффициенты отражения и прохождения для решетки из параллельных лент.

"Научное наследие России"

ставляет половину периода решетки, т. е. равна ширине щелей между ними. Сплошные кривые вычислены по строгой теории, а пунктирные — по граничным условиям (72.09). Предполагается, что электромагнитная волна падает нормально на решетку; если ее электрическое поле параллельно лентам, то A_0 — коэффициент отражения волны (по электрическому полю), а B_0 — коэффициент прохождения; для перпендикулярной поляризации B_0 является коэффициентом отражения (по магнитному полю), а A_0 — коэффициентом прохождения.

Мы видим, что при условии

$$\varkappa < 0{,}3 \tag{72.14}$$

приближенные граничные условия (72.09) дают графическую точность, по крайней мере для нормально падающей волны. Простые граничные условия (72.06) и (72.07) приводят к значениям

$$A_0 = -1, \quad B_0 = 0 \tag{72.15}$$

и, следовательно, пригодны для гораздо меньших $\varkappa$.

§ 73. Симметричная волна в спиральном волноводе

Как мы видели выше, спираль является замедляющей линией и потому может быть названа спиральным волноводом. Аналогия между обычным волноводом и спиральным усиливается, если пользоваться приближенными граничными условиями (72.06) и (72.07): тогда „стенке" спирального волновода приписывается анизотропная идеальная проводимость, в то время как стенку обычного волновода можно считать идеально проводящей в любом касательном к ней направлении. Однако анизотропия проводимости коренным образом изменяет свойства спирального волновода и, в частности, приводит к появлению медленных электромагнитных волн, имеющих поверхностный характер. Поле этих волн в значительной степени расположено вне спирального волновода.

Кроме того, волны, распространяющиеся вдоль спирального волновода, не являются электрическими или магнитными: даже простейшие (симметричные) волны, которые мы будем изучать в этом параграфе, имеют продольные составляющие электрического и магнитного поля. Если взять электрический и магнитный вектор Герца с единственными составляющими по оси z, равными

$$\Pi_z = \Pi(r, \varphi)\, e^{ihz}; \qquad \Pi'_z = \Pi'(r, \varphi)\, e^{ihz}, \tag{73.01}$$

где h — продольное волновое число данной волны, а r, φ, z — цилиндрические координаты (z есть ось спираль-

ЭБ "Научное наследие России"

ного волновода), то составляющие электромагнитного поля по формулам (18.10) получатся равными

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \left(ih\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{ik}{r}\frac{\partial \Pi'}{\partial \varphi}\right) e^{ihz}, \\ E_\varphi &= \left(\frac{ih}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - ik\frac{\partial \Pi'}{\partial r}\right) e^{ihz}, \\ E_z &= -p^2 \Pi e^{ihz}, \\ H_r &= \left(-\frac{ik}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + ih\frac{\partial \Pi'}{\partial r}\right) e^{ihz}, \\ H_\varphi &= \left(ik\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{ih}{r}\frac{\partial \Pi'}{\partial \varphi}\right) e^{ihz}, \\ H_z &= -p^2 \Pi' e^{ihz}, \end{aligned}\right\} \quad (73.02)$$

где для сокращения обозначено

$$p = \sqrt{h^2 - k^2} > 0. \quad (73.03)$$

Радиус спирального волновода обозначим через a. Пренебрегая толщиной провода, можно считать, что при $r = a$ расположены поверхностные токи и поверхностные заряды, благодаря чему составляющие E_r, H_φ и H_z должны терпеть скачок на поверхности $r = a$. Наоборот, составляющие E_φ, E_z и H_r должны быть непрерывны, откуда следует непрерывность функции Π и производной $\frac{\partial \Pi'}{\partial r}$ при $r = a$. Функции Π и Π' должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} - p^2 \Pi = 0,$$

поэтому в случае симметричных волн, не зависящих от координаты φ, мы должны брать Π и Π' в виде

$$\Pi = C \begin{Bmatrix} I_0(pr) K_0(pa) \\ I_0(pa) K_0(pr) \end{Bmatrix}; \quad \Pi' = C' \begin{Bmatrix} I_0(pr) K_0'(pa) \\ I_0'(pa) K_0'(pa) \end{Bmatrix}, \quad (73.04)$$

где C и C' — постоянные, а в фигурной скобке нужно брать верхнюю строчку при $r < a$, а нижнюю — при $r > a$. Составляющие E_s и H_s в граничных условиях (72.06) и (72.07) равны

$$\left.\begin{aligned} E_s &= E_\varphi \cos\vartheta + E_z \sin\vartheta, \\ H_s &= H_\varphi \cos\vartheta + H_z \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (73.05)$$

...ое наследие России"

ил и, пользуясь формулами (73.02) и (73.04), получаем при $r = a$

$$\left.\begin{aligned} E_s &= \left(-p^2\Pi\sin\vartheta - ik\frac{d\Pi'}{dr}\cos\vartheta\right)e^{ihz} = \\ &= \left[-p^2CI_0(pa)K_0(pa)\sin\vartheta - ikpC'I_0'(pa)K_0'(pa)\cos\vartheta\right]e^{ihz}, \\ H_s &= \left(ik\frac{d\Pi}{dr}\cos\vartheta - p^2\Pi'\sin\vartheta\right)e^{ihz} = \\ &= \left\{\begin{matrix} ikpCI_0'(pa)K_0(pa)\cos\vartheta - p^2C'I_0(pa)K_0'(pa)\sin\vartheta \\ ikpCI_0(pa)K_0'(pa)\cos\vartheta - p^2C'I_0'(pa)K_0(pa)\sin\vartheta \end{matrix}\right\}e^{ihz}. \end{aligned}\right\} \quad (73.06)$$

Граничное условие (72.06) приводит к соотношению

$$pCI_0K_0\sin\vartheta + ikC'I_0'K_0'\cos\vartheta = 0. \quad (73.07)$$

Если воспользоваться тождеством

$$I_m(z)K_m'(z) - I_m'(z)K_m(z) = -\frac{1}{z}, \quad (73.08)$$

то граничное условие (72.07) легко преобразовать к виду

$$ikC\cos\vartheta + pC'\sin\vartheta = 0, \quad (73.09)$$

откуда постоянные C и C' можно выразить через новую постоянную D следующим образом

$$C = p\sin\vartheta D;\ C' = -ik\cos\vartheta D. \quad (73.10)$$

Подставляя эти выражения в соотношение (73.07), получим характеристическое уравнение для симметричных волн в спиральном волноводе

$$\frac{p^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\vartheta = -\frac{I_0'K_0'}{I_0K_0}, \quad (73.11)$$

причем невыписанные аргументы функций I_0 и K_0 всюду равны pa. Пользуясь соотношениями (61.23), характеристическое уравнение можно переписать так

$$\frac{p^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{I_1K_1}{I_0K_0}. \quad (73.12)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Решение этого уравнения проще всего получить в параметрическом виде. Введем наряду с безразмерным параметром (72.08) аналогичный параметр

$$\eta = \frac{hd}{2\pi} = \frac{d}{\lambda'}, \tag{73.13}$$

где λ' — длина волны, распространяющейся вдоль оси спирали. Аргумент функций I_m и K_m в уравнении (73.12) равен

$$pa = \sqrt{h^2 - k^2}\, a = \sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}\, \frac{2\pi a}{d} = x \operatorname{ctg} \vartheta, \tag{73.14}$$

где обозначено

$$x = \sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}, \tag{73.15}$$

и учтено соотношение

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{2\pi a}{d}, \tag{73.16}$$

вытекающее из геометрии винтовой линии: если в формуле (72.01) положить $l = d$, то L будет длиной витка, и мы будем иметь

$$L = \sqrt{(2\pi a)^2 + d^2}; \quad \sin \vartheta = \frac{d}{\sqrt{(2\pi a)^2 + d^2}}. \tag{73.17}$$

Формула (73.16) может быть выведена сразу из рис. 95, если „выпрямить“ один виток спирали.

Нашей задачей является построение дисперсионной кривой — коэффициента замедления волны в спирали

$$\beta = \frac{k}{h} = \frac{\varkappa}{\eta} \tag{73.18}$$

в зависимости от частоты или от безразмерной переменной $\varkappa$, пропорциональной частоте. Если для краткости ввести обозначение

$$Q(x) = \operatorname{tg}^2 \vartheta\, \frac{I_0(x \operatorname{ctg} \vartheta)\, K_0(x \operatorname{ctg} \vartheta)}{I_1(x \operatorname{ctg} \vartheta)\, K_1(x \operatorname{ctg} \vartheta)}, \tag{73.19}$$

то для величин η и $\varkappa$ мы получаем два уравнения

$$\left.\begin{aligned} \eta^2 - \varkappa^2 &= x^2, \\ \frac{\eta^2 - \varkappa^2}{\varkappa^2} &= \frac{1}{Q(x)}, \end{aligned}\right\} \tag{73.20}$$

решение которых имеет вид

$$\eta = \pm x \sqrt{1 + Q(x)}; \quad \varkappa = x \sqrt{Q(x)}. \tag{73.21}$$

Электронное наследие России

Параметр x принимает положительные значения и корни взяты в арифметическом смысле. Знак плюс в выражении для η дает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z, знак минус соответствует такой же волне, но бегущей в обратном направлении. Ограничиваясь волной с положительным η, мы для коэффициента замедления (73.18) получаем расчетные формулы

$$\beta = \sqrt{1+\frac{1}{Q(x)}}; \quad \varkappa = x\sqrt{Q(x)}, \tag{73.22}$$

дающие возможность вычислить β как функцию $\varkappa$. Так как $\varkappa$ оказывается монотонной функцией x, то по формулам (73.22) мы получаем только одну симметричную волну.

В предельных случаях для функции $Q(x)$ можно написать выражения

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } x\operatorname{ctg}\vartheta \ll 1 \\ &\quad Q(x) = 2\operatorname{tg}^2\vartheta \ln\frac{2}{\gamma x \operatorname{ctg}\vartheta} \to \infty \ (\text{если } x \to 0); \\ &\text{при } x\operatorname{ctg}\vartheta \gg 1 \\ &\quad Q(x) = \operatorname{tg}^2\vartheta, \end{aligned}\right\} \tag{73.23}$$

вытекающие из формул (61.18), (61.20) и (61.21). Второе соотношение (73.22) показывает, что $\varkappa \to 0$ при $x \to 0$ и $\varkappa \approx x\sin\vartheta$ при $x\operatorname{ctg}\vartheta \gg 1$, а первое соотношение (73.22) приводит к предельным равенствам

$$\lim_{x\to 0}\beta = 1; \quad \lim_{x\to\infty}\beta = \sin\vartheta. \tag{73.24}$$

Таким образом, при высоких частотах, когда параметр $\varkappa$ достаточно велик, замедление волны согласуется с элементарной формулой (72.02), т. е. волна действительно бежит со скоростью c вдоль провода. При низких частотах, когда параметр $\varkappa$ мал, замедление β близко к единице. Это значит, что волна распространяется вдоль оси спирали (оси z) со скоростью, близкой к c, как бы „перескакивая“ с витка на виток. На рис. 98 приведены результаты расчетов по формулам (73.21) при $\operatorname{ctg}\vartheta = 10$. Мы видим, что дисперсионная кривая уже при $\varkappa \gtrsim 0{,}05$ (при $\varkappa\operatorname{ctg}\vartheta \gtrsim 0{,}5$) соответствует случаю „высоких частот“, при которых замедление можно вычислять по формуле (72.02).

ЭБ "Научное наследие России"

Рассмотрим более детально структуру электромагнитного поля при низких частотах, когда выполняются условия

$$p \ll k \text{ и } pa \ll 1. \quad (73.25)$$

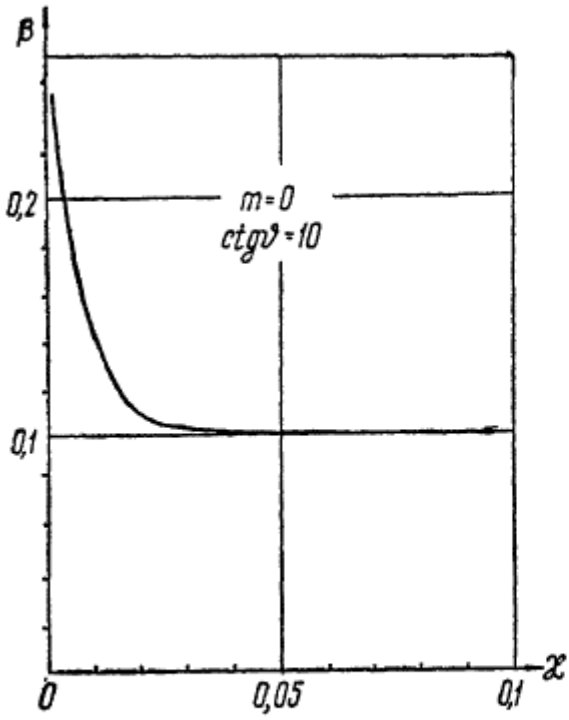


Рис. 98. Дисперсия симметричной волны спирального волновода.

В этом случае по формулам (73.10) получаем

$$C' \gg C, \quad (73.26)$$

так что внутри спирального волновода (при $r < a$) преобладает функция Π'. Определяемое ею магнитное поле, по существу, мало отличается от однородного переменного поля внутри бесконечного соленоида; это поле изучается в элементарной физике при выводе формулы для индуктивности катушек. Действительно, по формулам (73.04) и (73.10) получаем при $r < a$

$$\Pi = p \sin\vartheta D K_0(pa) I_0(pr); \quad \Pi' = ik \cos\vartheta D K_1(pa) I_0(pr), \quad (73.27)$$

и по формулам (73.02) находим

$$\left.\begin{aligned} H_z &= -ikp^2 \cos\vartheta D K_1(pa) I_0(pr) e^{ihz}, \\ H_\varphi &= ikp^2 \sin\vartheta D K_0(pa) I_1(pr) e^{ihz}, \\ H_r &= -khp \cos\vartheta D K_1(pa) I_1(pr) e^{ihz}. \end{aligned}\right\} \quad (73.28)$$

Отсюда, во-первых, видно, что составляющей H_φ можно пренебречь по сравнению с остальными двумя [вследствие множителей $\sin\vartheta$ и $K_0(pa)$], и, во-вторых, следуют приближенные выражения

$$H_z = H_0 e^{ihz}; \quad H_r = -H_0 \frac{ihr}{2} e^{ihz}, \quad (73.29)$$

где

$$H_0 = -ikp^2 \cos\vartheta K_1(pa) D = -\frac{ikp \cos\vartheta}{a} D. \quad (73.30)$$

При выводе мы воспользовались приближенными формулами (61.18) и (61.20). При низких частотах мы имеем $h \approx k$, и если выполняется добавочное условие

$$ka \ll 1, \quad (73.31)$$

т. е. окружность спирали мала по сравнению с длиной волны, то мы получаем по формулам (73.29) однородное магнитное поле, как в обычной катушке самоиндукции.

Теория спирального волновода, основанная на граничных условиях (72.06) и (72.07), была впервые дана В. В. Владимирским в 1944 г.

§ 74. Несимметричные волны в спиральном волноводе

Электромагнитное поле несимметричной волны мы будем выражать через функции Герца (73.01), причем возьмем

$$\Pi = C \begin{Bmatrix} I_m(pr) K_m(pa) \\ I_m(pa) K_m(pr) \end{Bmatrix} e^{im\varphi}; \quad \Pi' = C' \begin{Bmatrix} I_m(pr) K'_m(pa) \\ I'_m(pa) K_m(pr) \end{Bmatrix} e^{im\varphi}, \tag{74.01}$$

где $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$; при $m = 0$ мы возвращаемся к формулам (73.04). Заметим, что множитель $e^{im\varphi}$ в формулах (74.01) указывает на то, что при своем распространении в осевом направлении волна вращается по азимуту φ.

Формулы (73.06) для несимметричных волн принимают вид

$$E_s = \left[-\left(p^2 + \frac{mh}{a} \operatorname{ctg} \vartheta \right) C I_m K_m \sin\vartheta - ikpC' I'_m K'_m \cos\vartheta \right] e^{i(m\varphi + hz)},$$

$$H_s = \begin{Bmatrix} ikpC I'_m K_m \cos\vartheta - \left(p^2 + \frac{mh}{a} \operatorname{ctg} \vartheta \right) C' I_m K'_m \sin\vartheta \\ ikpC I_m K'_m \cos\vartheta - \left(p^2 + \frac{mh}{a} \operatorname{ctg} \vartheta \right) C' I'_m K_m \sin\vartheta \end{Bmatrix} e^{i(m\varphi + hz)} \tag{74.02}$$

и граничные условия приводят к соотношениям

$$\left.\begin{aligned} \left(p^2 + \frac{2\pi mh}{d} \right) C I_m K_m \sin\vartheta + ikpC' I'_m K'_m \cos\vartheta = 0, \\ ikpC \cos\vartheta + \left(p^2 + \frac{2\pi mh}{d} \right) C' \sin\vartheta = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{74.03}$$

где мы учли формулу (73.16). Последнее соотношение позволяет написать для C и C' выражения

$$C = \left(p^2 + \frac{2\pi mh}{d} \right) \sin\vartheta D; \quad C' = -ikp \cos\vartheta D, \tag{74.04}$$

ЭБ "Научное наследие России"

при подстановке которых в первое соотношение (74.03) получаем характеристическое уравнение

$$\frac{\left(p^2+\frac{2\pi mh}{d}\right)^2}{p^2k^2}\operatorname{tg}^2\vartheta=-\frac{I'_mK'_m}{I_mK_m}. \qquad (74.05)$$

Воспользуемся формулами (ср. Ватсон „Теория бесселевых функций“, стр. 93)

$$\left.\begin{aligned} I_{m-1}(z)&=I'_m+\frac{m}{z}I_m;\ K_{m-1}(z)=-K'_m-\frac{m}{z}K_m,\\ I_{m+1}(z)&=I'_m-\frac{m}{z}I_m;\ K_{m+1}(z)=-K'_m+\frac{m}{z}K_m, \end{aligned}\right\}, \qquad (74.06)$$

где I'_m и K'_m означают производные (по аргументу z) функций I_m и K_m. Умножая, получим соотношения

$$\left.\begin{aligned} I_{m-1}K_{m-1}&=-I'_mK'_m-\frac{m^2}{z^2}I_mK_m-\frac{m}{z}(I_mK'_m+I'_mK_m),\\ I_{m+1}K_{m+1}&=-I'_mK'_m-\frac{m^2}{z^2}I_mK_m+\frac{m}{z}(I_mK'_m+I'_mK_m), \end{aligned}\right\} \qquad (74.07)$$

полусумма которых имеет вид

$$-I'_mK'_m=\frac{1}{2}(I_{m-1}K_{m-1}+I_{m+1}K_{m+1})+\frac{m^2}{z^2}I_mK_m. \qquad (74.08)$$

Подставляя выражение (74.08) в характеристическое уравнение (74.05), получаем

$$\frac{\left(p^2+\frac{2\pi mh}{d}\right)^2}{p^2k^2}\operatorname{tg}^2\vartheta=\frac{I_{m-1}K_{m-1}+I_{m+1}K_{m+1}}{2I_mK_m}+\frac{m^2}{p^2a^2}. \qquad (74.09)$$

Для сокращения введем обозначения

$$h_0=h+\frac{2\pi m}{d};\quad p_0=\sqrt{h_0^2-k^2};\quad \beta_0=\frac{k}{h_0}, \qquad (74.10)$$

...ное наследие России"

физический смысл которых будет рассмотрен в § 75. Тогда, перенося член $\frac{m^2}{p^2a^2}$ из правой части (74.09) в числитель левой части и пользуясь тождествами

$$\left(p^2+\frac{2\pi mh}{d}\right)^2-\left(\frac{2\pi mk}{d}\right)^2=p^4+2p^2\frac{2\pi mh}{d}+\left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2p^2=$$
$$=p^2\left[p^2+2h\frac{2\pi m}{d}+\left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2\right]=p^2\left[h^2+2h\frac{2\pi m}{d}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2-k^2\right]=p^2(h_0^2-k^2)=p^2p_0^2, \qquad (74.11)$$

получаем характеристическое уравнение в виде

$$\frac{p_0^2}{k^2}\operatorname{tg}^2\vartheta=\frac{I_{m-1}(pa)K_{m-1}(pa)+I_{m+1}(pa)K_{m+1}(pa)}{2I_m(pa)K_m(pa)}. \qquad (74.12)$$

Если наряду с безразмерным параметром η по формуле (73.13) ввести параметр

$$\eta_0=\frac{h_0d}{2\pi}, \qquad (74.13)$$

то из формул (74.10) получим

$$\eta_0=\eta+m;\quad \beta_0=\frac{\varkappa}{\eta_0}. \qquad (74.14)$$

Чтобы найти решение уравнения (74.12) в параметрическом виде, введем переменную (73.15) и обозначим

$$Q_m(x)=\operatorname{tg}^2\vartheta\times$$
$$\times\frac{2I_m(x\operatorname{ctg}\vartheta)K_m(x\operatorname{ctg}\vartheta)}{I_{m-1}(x\operatorname{ctg}\vartheta)K_{m-1}(x\operatorname{ctg}\vartheta)+I_{m+1}(x\operatorname{ctg}\vartheta)K_{m+1}(x\operatorname{ctg}\vartheta)}. \qquad (74.15)$$

Переменные η и $\varkappa$ удовлетворяют двум уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\eta^2-\varkappa^2&=x^2,\\ \frac{(\eta+m)^2-\varkappa^2}{\varkappa^2}&=\frac{1}{Q_m(x)}.\end{aligned}\right\} \qquad (74.16)$$

Подставляя $\varkappa^2=\eta^2-x^2$ из первого уравнения во второе уравнение, мы приходим к квадратному уравнению для η

$$\eta^2-2mQ_m\eta-(x^2+x^2Q_m+m^2Q_m)=0. \qquad (74.17)$$

Корни этого уравнения равны

$$\eta^{\pm}=mQ_m(x)\pm\sqrt{m^2Q_m^2(x)+x^2+x^2Q_m(x)+m^2Q_m(x)}=$$
$$=mQ_m\pm\sqrt{(1+Q_m)(x^2+m^2Q_m)}, \qquad (74.18)$$

ЭБ "Научное наследие России"

причем корень η^+ — положительный, а корень η^- — отрицательный. Если для сокращения обозначить

$$\Psi_{\pm}(x) = mQ_m(x) \pm \sqrt{[1+Q_m(x)][x^2+m^2Q_m(x)]}, \quad (74.19)$$

то значение $\varkappa$, соответствующее данному x, равно

$$\varkappa = \sqrt{\Psi^2_{\pm}(x) - x^2}. \quad (74.20)$$

При $m=0$ формулы (74.18) и (74.20) переходят в выражения (73.21). Однако между симметричными и несимметричными волнами есть следующая существенная разница: в формулах (73.21) двойной знак $\pm$ дает, по существу, одну и ту же волну, распространяющуюся в направлении $\pm z$ с одинаковой фазовой скоростью. Двойной знак $\pm$ для несимметричных волн дает при фиксированных m и x две волны, распространяющиеся с различными фазовыми скоростями: одна в направлении $+z$, другая в направлении $-z$. Разумеется, каждая из волн может распространяться с той же фазовой скоростью и в обратном направлении, но при этом она будет по азимуту φ поворачиваться в обратном направлении, т. е. ей будет соответствовать азимутальный индекс m другого знака.

Если, например, взять $m=1$ или $m=2$ (этими случаями мы и ограничимся в дальнейшем), то мы фиксируем направление и скорость вращения электромагнитного поля в спиральном волноводе по азимуту φ и получаем по выведенным выше формулам две волны, соответствующие двум корням $\eta^{\pm}$. Первая волна, имеющая $\eta^+ > 0$ и положительную фазовую скорость, является правовинтовой волной: ее поле „ввинчивается“ в ось z как правый винт; напомним, что сама спираль предполагается правовинтовой (см. рис. 95). Вторая волна, имеющая $\eta^- < 0$ и, следовательно, отрицательную фазовую скорость, является левовинтовой. Для каждой из этих волн можно вычислить коэффициент замедления по формулам

$$\beta^+ = \frac{\varkappa}{\eta^+} = \frac{\sqrt{\Psi^2_+(x) - x^2}}{\Psi_+(x)}; \quad \beta^- = \frac{\varkappa}{-\eta^-} = \frac{\sqrt{\Psi^2_-(x) - x^2}}{-\Psi_-(x)}, \quad (74.21)$$

причем связь между $\varkappa$ и x дана выражением (74.20).

Функция $Q_m(x)$ при всех m удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{x \operatorname{ctg}\vartheta \to \infty} Q_m(x) = \operatorname{tg}^2\vartheta. \quad (74.22)$$

Культурное наследие России

Заменяя при больших значениях $x\operatorname{ctg}\vartheta$ функцию $Q_m(x)$ ее предельным значением (74.22), получаем

$$\Psi_{\pm}(x)=m\operatorname{tg}^2\vartheta\pm\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)(x^2+m^2\operatorname{tg}^2\vartheta)},$$

$$\Psi_{\pm}^2(x)-x^2=\operatorname{tg}^2\vartheta\left[2m^2\operatorname{tg}^2\vartheta+m^2+x^2\pm\right.$$

$$\left.\pm 2m\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)(x^2+m^2\operatorname{tg}^2\vartheta)}\right]\approx\operatorname{tg}^2\vartheta\left[m^2\operatorname{tg}^2\vartheta+\frac{m^2}{\cos^2\vartheta}+\right.$$

$$\left.+x^2\pm\frac{2mx}{\cos\vartheta}\right]=\operatorname{tg}^2\vartheta\left[m^2\operatorname{tg}^2\vartheta+\left(\frac{m}{\cos\vartheta}\pm x\right)^2\right]\approx$$

$$\approx\operatorname{tg}^2\vartheta\left(\frac{m}{\cos\vartheta}\pm x\right)^2,$$

так что приближенно будем иметь

$$\varkappa=\operatorname{tg}\vartheta\left(\frac{m}{\cos\vartheta}\pm x\right). \tag{74.23}$$

Как мы увидим дальше в § 75, параметр x никогда не превышает единицы (обычно $x<0{,}6$), так что при $m=1, 2, \ldots$ скобка в формуле (74.23) всегда положительна. Вычисляя $\eta^{\pm}$, достаточно взять более грубое приближение для $\Psi_{\pm}(x)$:

$$\eta^{\pm}=\Psi_{\pm}(x)=m\operatorname{tg}^2\vartheta\pm\frac{x}{\cos\vartheta}, \tag{74.24}$$

так что по формулам (74.14) получаем

$$\left.\begin{aligned}\eta_0^{\pm}&=\frac{1}{\cos\vartheta}\left(\frac{m}{\cos\vartheta}\pm x\right),\\ \beta_0^{\pm}&=\sin\vartheta.\end{aligned}\right\} \tag{74.25}$$

Таким образом, при $x\operatorname{ctg}\vartheta\gg 1$ все волны — как симметричные, так и несимметричные — имеют $\beta_0=\sin\vartheta$; физический смысл этого результата мы выясним в § 75.

При $x\operatorname{ctg}\vartheta\ll 1$ функции $Q_m(x)$ ведут себя при $m=1$ и при $m=2, 3, \ldots$ по-разному. Действительно, в силу соотношения

$$\lim_{z\to 0} I_m(z)K_m(z)=\frac{1}{2m}\quad(m=1, 2, \ldots) \tag{74.26}$$

получаем

$$\lim_{x\to\vartheta} Q_m(x)=\operatorname{tg}^2\vartheta\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\text{ при }m=2, 3, \ldots, \tag{74.27}$$

ЭБ "Научное наследие России"

в то время как при $x \operatorname{ctg} \vartheta \ll 1$ и $m = 1$ имеем

$$Q_1(x) = \operatorname{tg}^2 \vartheta \frac{1}{\ln \frac{2}{\gamma x \operatorname{ctg} \vartheta} + \frac{1}{4}} \to 0 \quad (\text{если } x \to 0). \quad (74.28)$$

Поэтому при $m = 2, 3, \ldots$ и $x \to 0$ функция $\Psi_{\pm}(x)$ стремится к конечному пределу

$$\Psi_{\pm}(0) = \operatorname{tg}^2 \vartheta \, m \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \pm \operatorname{tg} \vartheta \, m \times$$

$$\times \sqrt{\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\left[1 + \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \operatorname{tg}^2 \vartheta\right]}, \quad (74.29)$$

благодаря чему дисперсионные кривые таких несимметричных волн обрываются при $\varkappa = |\Psi_{\pm}(0)|$ и $\beta^{\pm} = 1$ (ср. ниже рис. 100, *б*). При $m = 1$ и $x \to 0$ в силу формулы (74.20) мы получаем $\Psi_{\pm}(x) \to 0$ и $\varkappa \to 0$, а также

$$\lim_{\varkappa \to 0} \beta^{\pm} = 1. \quad (74.30)$$

Таким образом, две несимметричные волны с азимутальным индексом $m = 1$ при достаточно низких частотах распространяются вдоль оси спирали со скоростью c, как и симметричная волна.

При вычислениях по формулам (74.20) и (74.21) мы сталкиваемся со следующим обстоятельством: для функции $\Psi_+(x)$ величина $\varkappa$ является монотонной функцией x, возрастая от $\Psi_+(0)$ при $x = 0$ до значений $\varkappa$, вычисляемых по формуле (74.23) со знаком плюс при достаточно больших x. Поэтому при данных m и $\varkappa > \Psi_+(0)$ имеется лишь одна правовинтовая волна с коэффициентом замедления β^+. Однако для функции $\Psi_-(x)$ по формуле (74.20) получается немонотонная зависимость $\varkappa$ от x: при $x = 0$ мы имеем $\varkappa = |\Psi_-(0)|$, затем при росте x величина $\varkappa$ растет, достигает некоторого максимума $\varkappa_{max}$ и при бо́льших x уже убывает, в соответствии с асимптотической формулой (74.23) (со знаком минус). Поэтому, хотя при данном x мы имеем согласно формуле (74.19) одну левовинтовую волну с коэффициентом замедления β^-, при заданном $\varkappa$ дело обстоит сложнее: при

$$|\Psi_-(0)| < \varkappa < \varkappa_{max} \quad (74.31)$$

мы имеем две левовинтовые волны, при $\varkappa < |\Psi_-(0)|$ и $\varkappa = \varkappa_{max}$ — одну, при $\varkappa > \varkappa_{max}$ не имеем ни одной. Для не-

Электронное наследие России

симметричных волн с индексом $m=1$ значение $\Psi_-(0)=0$, поэтому при $\varkappa<\varkappa_{max}$ будем иметь две левовинтовые волны: одна из них при $\varkappa\to 0$ имеет коэффициент замедления β^-, приближающийся к единице [ср. формулу (74.30)], а для другой будет $\beta_0^-\approx\sin\vartheta$, в соответствии с формулой (74.25).

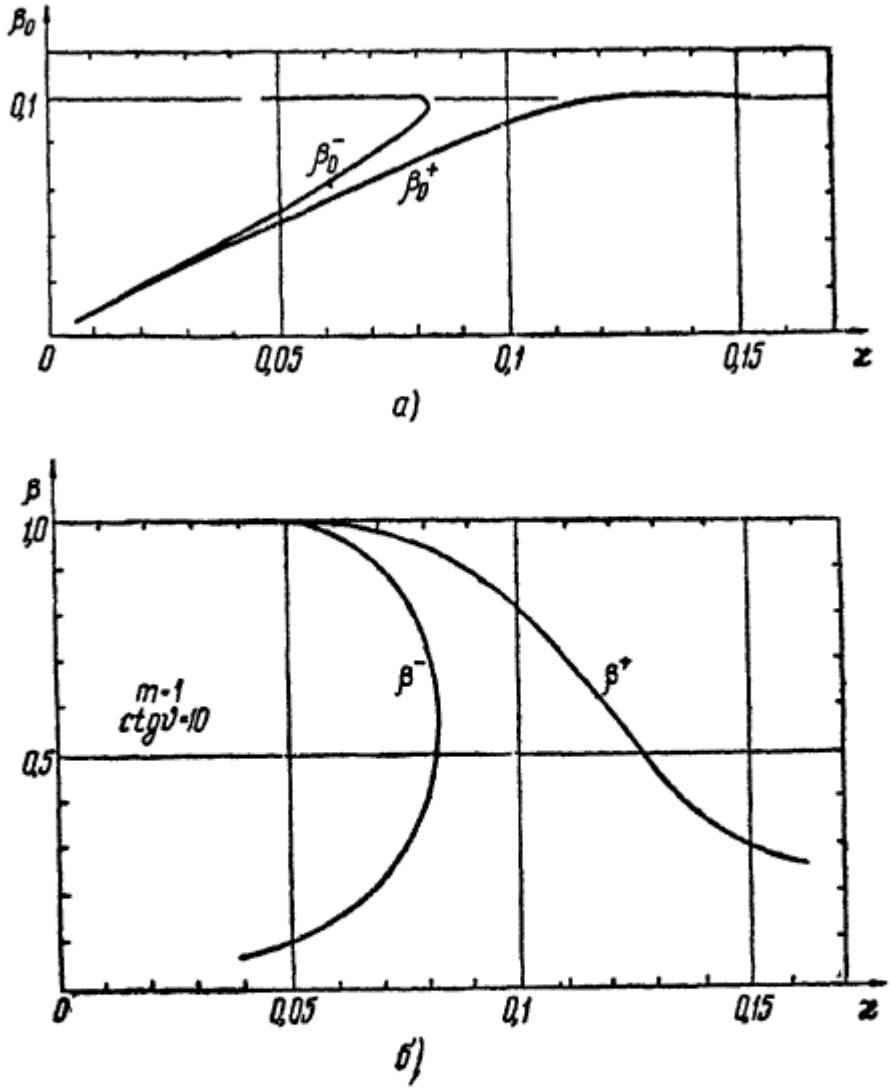


Рис. 99. Дисперсия несимметричных волн с индексом $m=1$ в спиральном волноводе.

На рис. 99 и 100 представлены дисперсионные кривые несимметричных волн с азимутальными индексами $m=1$ и $m=2$ для спирали, имеющей $\operatorname{ctg}\vartheta=10$ (как и на рис. 98). При этом на рис. 99, *б* и 100, *б* по оси ординат отложены коэффициенты замедления $\beta^{\pm}$ по формулам (74.21), а на рис. 99, *а* и 100, *а* — коэффициенты замедления $\beta_0^{\pm}$ по формуле (74.14), физический смысл которых будет вскрыт в § 75. Число и общий характер этих дис-

персионных кривых находятся в согласии с проведенными выше качественными рассуждениями, в частности с формулами (74.23) — (74.31).

Исследуем в заключение структуру электромагнитного поля двух простейших несимметричных волн с индексом

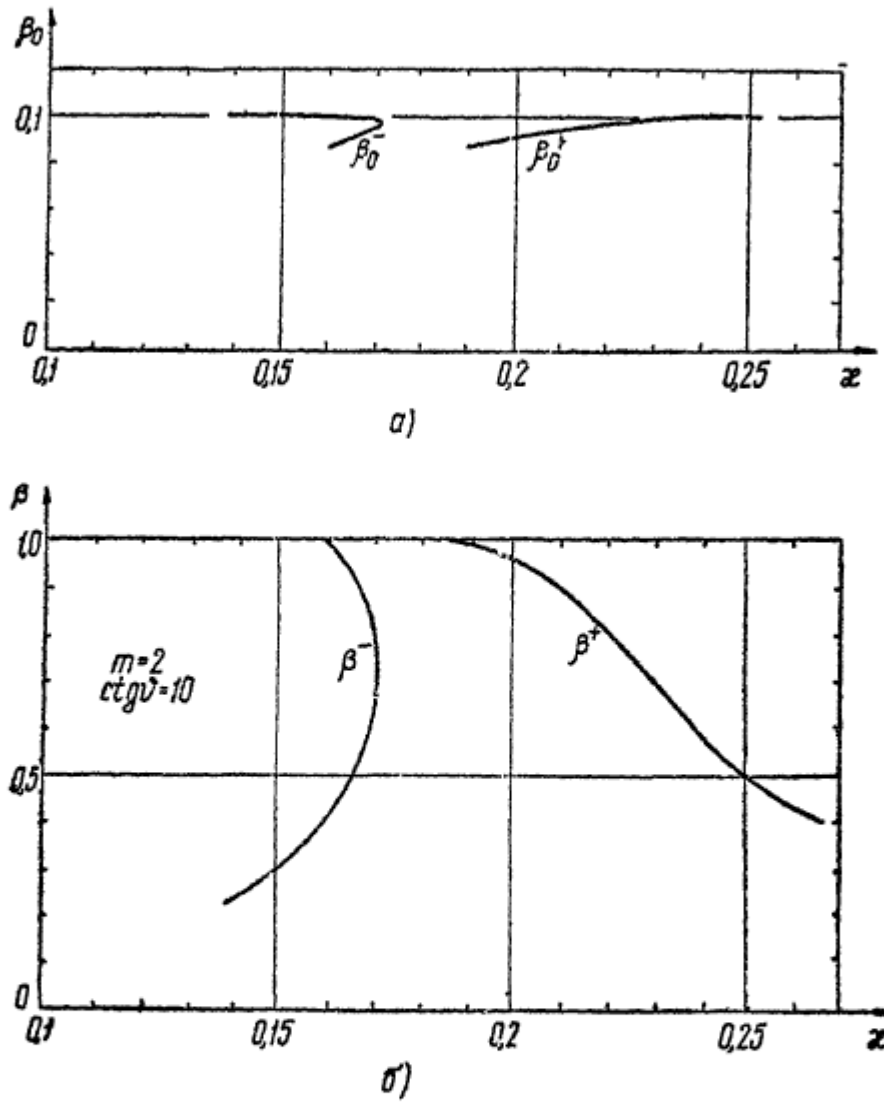


Рис. 100. Дисперсия несимметричных волн с индексом $m = 2$ в спиральном волноводе

$m = 1$ при достаточно низких частотах, когда они имеют $\beta \approx 1$ в соответствии с формулой (74.30). Для сравнения возьмем плоскую волну с правой круговой поляризацией (A — ее амплитуда)

$$\left.\begin{aligned} E_x &= H_y = A e^{ikz}, \\ E_y &= -H_x = iA e^{ikz} \end{aligned}\right\}, \qquad (74.32)$$

имеющую в цилиндрической системе координат составляющие

$$\left.\begin{aligned} E_r &= H_\varphi = A\,e^{i(\varphi+kz)}, \\ E_\varphi &= -H_r = iA\,e^{i(\varphi+kz)}. \end{aligned}\right\} \tag{74.33}$$

Такое же поле получается для правовинтовой волны в спирали по формулам (74.01) и (74.04): действительно, в силу условий (73.25) мы можем при $r<a$ написать

$$\left.\begin{aligned} &\Pi = BI_1(pr)\,e^{i\varphi}; && \Pi' = B'I_1(pr)\,e^{i\varphi}; \\ &B = \left(\frac{h\cos\vartheta}{a} + p^2\sin\vartheta\right)K_1(pa)\,D; && B' = ikp\cos\vartheta\,K_1'(pa)\,D \end{aligned}\right\}, \tag{74.34}$$

где мы использовали соотношение (73.16). Подставляя эти выражения в формулы (73.02), получим

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \left[ihpBI_1'(pr) - \frac{k}{r}B'I_1(pr)\right]e^{i(\varphi+hz)}; \\ E_\varphi &= \left[-\frac{h}{r}BI_1(pr) - ikpB'I_1'(pr)\right]e^{i(\varphi+hz)}; \\ H_r &= \left[\frac{k}{r}BI_1(pr) + ihpB'I_1'(pr)\right]e^{i(\varphi+hz)}; \\ H_\varphi &= \left[ikpBI_1'(pr) - \frac{h}{r}B'I_1(pr)\right]e^{i(\varphi+hz)}. \end{aligned}\right\} \tag{74.35}$$

Полагая $h\to k$, $pr\to 0$, мы отсюда получаем выражения (74.33), причем

$$A = \frac{kp}{2}(iB - B'). \tag{74.36}$$

При более тщательном обосновании предельного перехода для получения выражений (74.33) необходимо привлечь также условие (73.31). Если же полагать $h\to -k$, $pr\to 0$, то мы получим выражения

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -H_\varphi = A\,e^{i(\varphi-kz)}, \\ E_\varphi &= H_r = -iA\,e^{i(\varphi-kz)}, \end{aligned}\right\} \tag{74.37}$$

соответствующие плоской волне с той же круговой поляризацией, но распространяющейся в отрицательном направлении оси z. Декартовы компоненты этой волны равны

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -H_y = A\,e^{-ikz}, \\ E_y &= H_x = iA\,e^{-ikz} \end{aligned}\right\} \tag{74.38}$$

с амплитудой

$$A = -\frac{kp}{2}(iB + B'). \qquad (74.39)$$

Таким образом, при низких частотах вдоль спирали могут распространяться две волны, структура поля которых лишь незначительно отличается от структуры плоских волн с круговой поляризацией. Эти плоские волны распространяются вдоль спирали, как бы „не замечая" ее присутствия. При повышении частоты эти две волны замедляются спиралью по-разному: как видно из рис. 99, *б*, „левовинтовая" плоская волна тормозится сильнее и при некотором значении $\varkappa_{max}$ вообще прекращает свое существование; „правовинтовая" волна (ориентация которой совпадает с ориентацией самой спиральной линии) замедляется в меньшей степени и существует, по крайней мере формально, при сколь угодно высоких частотах. При высоких частотах, однако, изменяется структура электромагнитного поля этой волны — она приобретает поверхностный характер (см. ниже).

Несимметричные волны с индексом $m = 1$ существуют при сколь угодно низких частотах в диэлектрических замедляющих системах (см. § 66 и § 67) и в ребристом стержне (§ 70 и § 71). Во всех случаях структура поля этих волн близка к структуре плоской волны.

§ 75. Система волн спирального волновода. Пространственный резонанс

При анализе волн в спиральном волноводе нужно иметь в виду, что периодичности его структуры мы, по существу, не учитывали, поскольку все наши формулы базировались на граничных условиях (72.06) и (72.07). Однако спираль есть *не только* периодическая структура. Она отличается, например, от гребенки (§ 69) или ребристого стержня (§ 70 и § 71) тем, что переходит сама в себя не только при смещении на период d (шаг спирали), но и при любом смещении по оси z, если оно сопровождается надлежащим поворотом по углу φ $\left($таким, что комбинация $\varphi - \frac{2\pi z}{d} = \text{const}\right)$. Поэтому волна тока бежит по спиральному проводу в соответствии с формулами (72.04) или (72.05), как по однопроводной линии.

Формула (72.04) определяет h_0 — „истинное“ волновое число волны в спиральном волноводе; величина h_0 определяет зависимость тока от координаты s вдоль провода по формуле (72.05). В этом — основное отличие спирали, например, от ребристого стержня, в котором каждое из чисел (71.12) с равным правом можно назвать волновым числом данной волны и лишь условно мы выбираем волновое число в пределах (71.07).

Ток (72.05), текущий по спиральному проводу, в окружающем пространстве возбуждает сложное электромагнитное поле, представление о котором можно получить на основании следующих соображений. Плотность поверхностного тока $\mathbf{i}$ на боковой поверхности спирального волновода $r=a$; соответствующая току (72.04), очевидно равна

$$\mathbf{i}=J_0 e^{ih_0 z}\,\mathbf{f}(\varphi, z). \tag{75.01}$$

Функция $\mathbf{f}$ дает распределение плотности тока на поверхности $r=a$. Если, например, мы имеем металлическую ленту, намотанную по винтовой линии, то $\mathbf{f}\neq 0$ на ленте и $\mathbf{f}=0$ в зазорах между витками ленты. Во всех случаях функция $\mathbf{f}$ является периодической функцией φ (период 2π) и z (период d). Более того, функция $\mathbf{f}$ зависит только от комбинации $\varphi-\frac{2\pi z}{d}$, а не от φ и z в отдельности, в силу указанного выше геометрического свойства спирали. Раскладывая функцию

$$\mathbf{f}=\mathbf{f}\left(\varphi-\frac{2\pi z}{d}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{f}_n e^{in\left(\varphi-\frac{2\pi z}{d}\right)} \tag{75.02}$$

в ряд Фурье, мы можем представить плотность тока (75.01) в виде

$$\mathbf{i}=J_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{f}_n e^{i(n\varphi+h_n z)}, \tag{75.03}$$

где

$$h_n=h_0-\frac{2\pi n}{d}. \tag{75.04}$$

Таким образом, плотность тока на поверхности спирального волновода представляется в виде ряда пространственных гармоник по φ и z, имеющих все возможные азимутальные индексы n и волновые числа (75.04). Такой

ЭБ "Научное наследие России"

же характер имеет и электромагнитное поле, возбуждаемое этим током

$$\mathbf{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_n(r)\, e^{i(n\varphi + h_n z)}; \quad \mathbf{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_n(r)\, e^{i(n\varphi + h_n z)}. \quad (75.05)$$

Формулы (75.01) — (75.05), по существу, подобны формулам (71.09) — (71.13) для ребристого стержня; в обоих случаях поле представляется в виде ряда пространственных гармоник с волновыми числами (71.12) или (75.04). Заметим, что в § 71 мы пользовались несколько иными обозначениями (D вместо d, $-n$ вместо n).

В спиральном волноводе имеет место характерное явление, которое мы будем называть *пространственным резонансом*. Оно заключается в том, что при некоторых условиях в рядах (75.03) и (75.05) один какой-нибудь член (скажем m-ый) является главным и значительно превосходит все остальные; тогда мы можем говорить о m-ом пространственном резонансе и заменять эти ряды одним лишь m-ым членом. Таким образом, формулы § 73 соответствуют нулевому пространственному резонансу, формулы § 74 — пространственному резонансу с индексом $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

При условии

$$h_0 \ll \frac{2\pi}{d} \quad (75.06)$$

волна тока на протяжении одного витка спирали почти не изменяет своей фазы. Поскольку нас интересуют спиральные линии с малым углом ϑ, каждый виток такой линии мало отличается от окружности, а постоянство тока по окружности приводит к тому, что в пространстве возбуждается симметричное электромагнитное поле. Поэтому условие (75.06) соответствует нулевому пространственному резонансу, когда ток и поле почти не зависят от азимута φ.

При условии

$$h_0 \approx \frac{2\pi m}{d} \quad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad (75.07)$$

наступает m-ый пространственный резонанс, так как ток и поле имеют практически ту же зависимость от φ, что и m-ый член рядов (75.03) и (75.05). Условие m-го пространствен-

...ое наследие России"

ного резонанса можно сформулировать иначе, вводя волновое число m-ой пространственной гармоники

$$h = h_m = h_0 - \frac{2\pi m}{d}. \qquad (75.08)$$

в соответствии с формулами (74.10) и (75.04). Тогда вместо формулы (75.07) можно написать

$$|h| = |h_m| \ll \frac{2\pi}{d}. \qquad (75.09)$$

Термином „пространственный резонанс" мы хотим подчеркнуть выделение в рядах (75.05) главных или „резонансных" членов и возможность пренебрежения всеми другими „нерезонансными" слагаемыми. При обычном („временно́м") резонансе — при возбуждении объемного резонатора (см. § 101) — ряды (101.04) для электрического и магнитного полей также сводятся к одному резонансному слагаемому (101.17). Эту аналогию можно продолжить и далее: обычный резонанс происходит, когда в течение многих периодов колебания возбуждающий источник находится в фазе с возбуждаемым собственным колебанием резонансной системы. Пространственный же резонанс имеет место, когда на протяжении большого числа витков (периодов спирали) ток на смежных участках витков (при $\varphi = \text{const}$) имеет практически одну и ту же фазу. Как мы увидим далее, пространственный резонанс приводит к дисперсии: волна тока уже не бежит по проводу со скоростью c, характерной для „изолированного" провода, а благодаря действию на данный виток большого числа соседних витков, находящихся в одинаковой фазе, появляется сильная зависимость фазовой скорости от частоты.

В § 74 мы ввели волновое число h_0 и соответствующие ему безразмерные параметры β_0 и ν_0 по формулам (74.10) и (74.14). Из формулы (75.08) видно, что h_0 есть волновое число нулевой пространственной гармоники, которая при условиях (75.07) выражена слабо, а β_0 есть коэффициент замедления нулевой гармоники. По волновому числу h_0 или соответствующему безразмерному параметру ν_0 всего естественнее производить сравнение волн различной симметрии друг с другом, поскольку они дают скорость распространения „волны тока" по спиральному проводу. Поэтому на рис. 99,*а* и 100,*а* мы изображали коэффициент β_0 в зависимости от $\varkappa$.

ЭБ "Научное наследие России"

Таким образом, все формулы § 73 и § 74 правильны лишь при наличии соответствующего пространственного резонанса в спирали, если же резонанса нет, то эти формулы становятся сомнительными. Рассмотрим с этой точки зрения результаты, полученные в § 73 и § 74.

Исследованная в § 73 симметричная волна в спиральном волноводе имеет при низких частотах то же поле, как и катушка с переменным током, и распространяется вдоль оси волновода со скоростью, лишь немного меньшей c. При росте частоты фазовая скорость этой волны уменьшается, одновременно изменяется структура ее электромагнитного поля; поскольку параметр pa увеличивается, оно приобретает внутри и вне волновода поверхностный характер, „прилипая" к поверхности $r=a$, где текут создающие это поле токи (ср. § 61 и § 68).

При достаточно высоких частотах волна бежит со скоростью c вдоль провода спирали, в соответствии с рис. 98. Нужно однако отметить, что кривая на рис. 98 при $\varkappa \geqslant \sin\vartheta$ уже заведомо не соответствует действительности, Обозначая через L длину витка (73.17), мы имеем

$$\frac{L}{\lambda}=\frac{\varkappa}{\sin\vartheta} \tag{75.10}$$

и при условиях

$$\varkappa\approx\sin\vartheta,\ \eta\approx 1 \tag{75.11}$$

ток на спиральном проводе имеет вид, изображенный на рис. 101,*в*: в противоположных точках одного и того же витка ток имеет разные знаки. Следовательно, электромагнитное поле данной волны уже не является симметричным, как это предполагалось при построении дисперсионной кривой на рис. 98 в § 73, а имеет тот же характер, что и поле несимметричной волны с азимутальным индексом $m=1$.

Переход от симметричной ($m=0$) к несимметричной ($m=1$) структуре поля происходит при условиях

$$\varkappa\approx\frac{1}{2}\sin\vartheta,\quad \eta\approx\frac{1}{2}, \tag{75.12}$$

когда ток на спиральном проводе имеет разные знаки на соседних витках, как это показано на рис. 101, *б*. Такое „черезполосное" распределение тока можно рассматривать либо как результат эволюции симметричной волны при увеличении частоты, либо можно получить из левовинтовой

Электронное наследие России

несимметричной волны с индексом $m=1$. Действительно, полагая в такой волне $\eta \approx -\frac{1}{2}$, мы опять приходим к рис. 101, *б*: благодаря множителю $e^{i\varphi}$ волна приобретает на одном витке дополнительную фазу 2π, которая за счет множителя e^{ihz} уменьшается до π.

Данное рассуждение показывает что волны с различными азимутальными индексами m могут непрерывно переходить друг от друга при изменении частоты. Эти переходы обусловлены „дискретной" структурой, которая в граничных условиях (72.06) и (72.07) никак не учитывается.

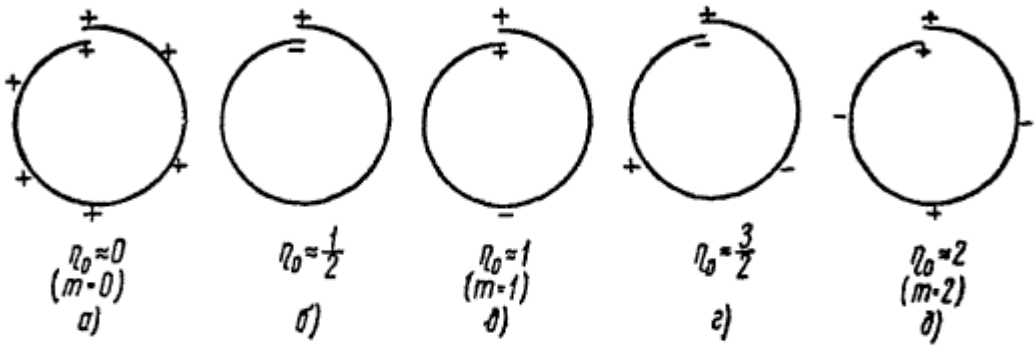


Рис. 101. Распределение тока на спиральном проводе.

Из сравнения рис. 98 и 99, *а* видно, что при условиях (75.12) дисперсионная кривая симметричной волны смыкается с дисперсионной кривой одной из левовинтовых волн с азимутальным индексом $m=1$; это смыкание происходит при распределении тока на проводе согласно рис. 101, *б*. Из сравнения рис. 99, *а* и 100, *а* можно сделать вывод, что при условиях

$$\varkappa \approx \frac{3}{2}\sin\vartheta, \quad \eta_0 \approx \frac{3}{2} \tag{75.13}$$

происходит превращение правовинтовой волны с азимутальным индексом $m=1$ в левовинтовую волну с индексом $m=2$. Соответствующее распределение тока на витке изображено на рис. 101, *г*. Такое распределение является промежуточным между рис. 101, *в* (1-й резонанс) и рис. 101, *д* (2-й резонанс). Чтобы получить рис. 101, *г* из рис. 101, *д*, нужно взять левовинтовую волну, отрицательная фазовая скорость которой уменьшала бы скорость вращения волны по азимуту.

ЭБ "Научное наследие России"

Таким образом, мы приходим к полной системе дисперсионных кривых для волн в спиральном волноводе, изображенной на рис. 102. Мы видим, что при

$$x \approx \left(m + \frac{1}{2}\right)\sin\vartheta, \quad \eta_0 \approx m + \frac{1}{2}, \quad \beta_0 \approx \sin\vartheta \qquad (75.14)$$

происходит переход от m-ого пространственного резонанса к $m+1$-ому ($m = 0, 1, 2, \ldots$), причем волна тока в переходном интервале частот бежит со скоростью c вдоль провода спирали. Непрерывный переход, т. е. плавное смыкание дисперсионных кривых, полученных с помощью совершенно различных формул, обусловлен именно этим обстоятельством. Математически так получается потому, что при значениях (75.14) мы по формулам (73.15) и (74.14) будем иметь

$$\eta \approx \pm\frac{1}{2}, \quad x \approx \frac{1}{2} \qquad (75.15)$$

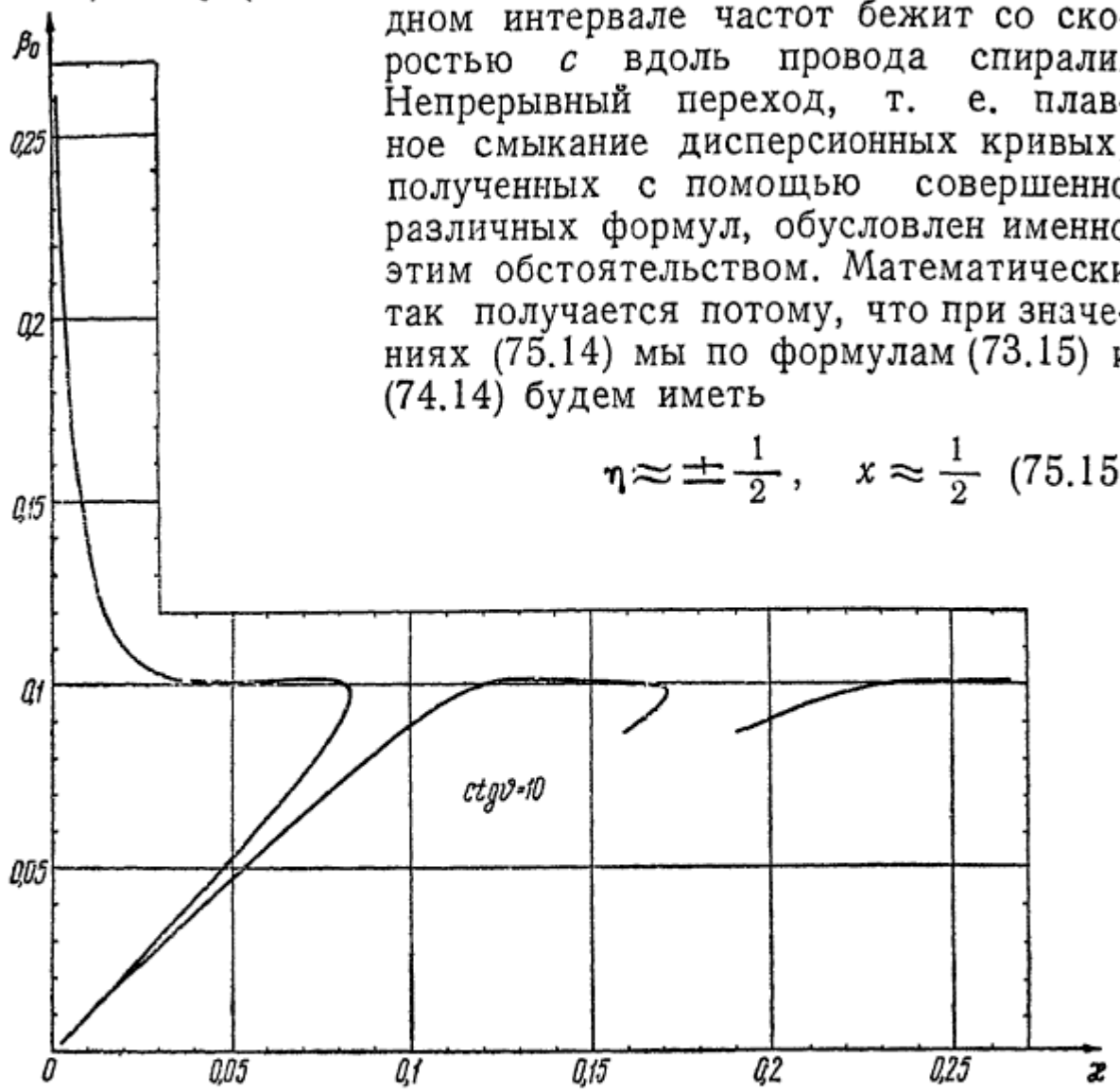


Рис. 102. Система волн спирального волновода.

в силу малости угла ϑ. По той же причине $x\,\mathrm{ctg}\,\vartheta$ оказывается большим, и тогда имеют место соотношения (74.22) и (74.25). Практически смыкание дисперсионных кривых происходит в интервале

$$0{,}4 < x < 0{,}6, \qquad (75.16)$$

поэтому строить графики, подобные рис. 98 — 100, при $x > 0{,}6$ уже не имеет смысла.

Сам пространственный резонанс номера m происходит при частотах, удовлетворяющих соотношениям

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa \approx m \sin\vartheta \quad (m = 1, 2, \ldots), \\ &\varkappa \ll \sin\vartheta \quad\quad (m = 0). \end{aligned}\right\} \tag{75.17}$$

Фазовые скорости волн при резонансе могут принимать самые различные значения, оставаясь, разумеется, меньше скорости света.

К сказанному необходимо добавить, что при заданном значении k волновые числа h_0 и h и коэффициенты замедления β_0 и β не могут принимать вполне произвольных значений. Действительно, вся развитая выше теория относилась к волнам поверхностного типа, у которых величина p в формулах (73.04) и (74.01) должна быть вещественной, и, следовательно, по формуле (73.03) должно быть

$$h^2 > k^2 \tag{75.18}$$

или по формуле (73.18)

$$\beta^2 < 1 \tag{75.19}$$

т. е. данная поверхностная волна может быть лишь волной замедленной. Этот результат очевиден как с точки зрения общих соображений § 61, так и из приведенных выше графиков для β. Условие (75.19) можно также переписать в виде

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{h^2}{k^2} = \left(\frac{1}{\beta_0} - \frac{m}{\varkappa}\right)^2 > 1. \tag{75.20}$$

Противоположное условие

$$\left(\frac{1}{\beta_0} - \frac{m}{\varkappa}\right)^2 \leqslant 1 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{75.21}$$

дает так называемую m-ую „запрещенную“ зону, в которой значения β_0 и $\varkappa$ для поверхностной волны находиться не могут. Граница m-ой запрещенной зоны определяется уравнением

$$\beta_0 = \frac{1}{\frac{m}{\varkappa} \pm 1} = \frac{\varkappa}{m \pm \varkappa}, \tag{75.22}$$

а сами зоны (при $m = 1$, 2 и 3) изображены на рис. 103 штриховкой; нулевая зона есть просто область, лежащая выше прямой $\beta_0 = 1$.

Наличие запрещенных зон тесно связано с явлением пространственного резонанса. Сложный характер диспер-

ЭБ "Научное наследие России"

сионных кривых при частотах, соответствующих пространственному резонансу, обусловлен тем, что кривые не могут пересекать областей, заштрихованных на рис. 103, и поэтому вынуждены „сворачивать“ при подходе к ним.

Спиральный волновод, как было указано в § 72, находит себе широкое применение в качестве замедляющей системы для лампы с бегущей волной. При этом используется симметричная волна, дисперсионная кривая которой изображена на рис. 98. Несимметричные волны с индексом $m=1$

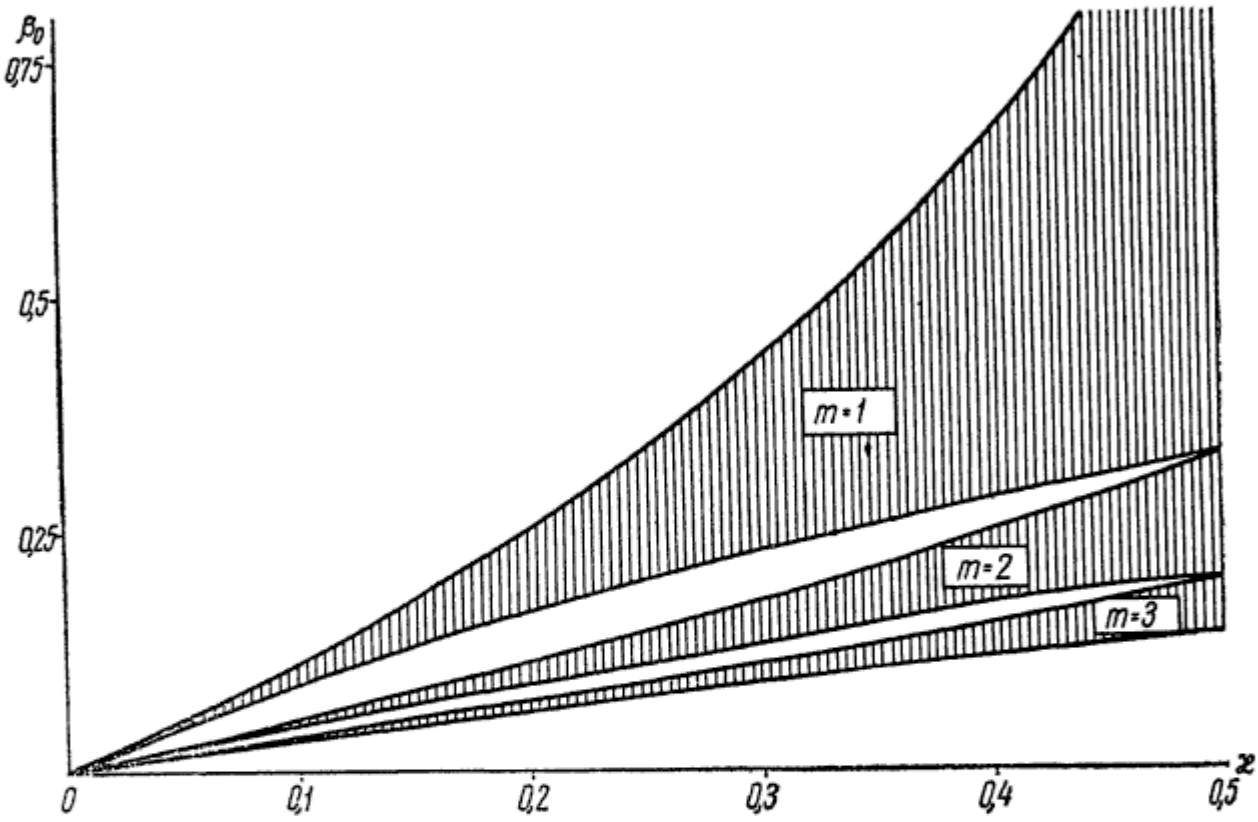


Рис. 103. „Запрещенные зоны“ спирального волновода.

находят себе применение в спиральных антеннах: такие волны дают направленное излучение с максимумом вдоль оси спирали, подобно волнам в диэлектрическом и ребристом стержнях (ср. гл. XI и XII). В связи с этим были проделаны измерения фазовой скорости волны в зависимости от частоты: результаты измерений нанесены точками на рис. 104, а сплошными кривыми — теоретические результаты. Рис. 104 взят из статьи С. Х. Когана, впервые рассмотревшего волны в спирали с учетом ее периодической структуры. Оказывается, что на опыте не проявляются волны, соответствующие дисперсионным кривым A_1 и B_1, так что при росте частоты происходит как бы „перескок“ с кривой A_2 на кривую B_2. Теоретически можно показать,

ЭБ „Научное наследие России“

что при обычных способах возбуждения эти волны имеют малые амплитуды (ср. § 83).

Заметим в заключение, что в спиральном волноводе могут распространяться и быстрые волны. Действительно, если спираль выполнена в виде ленты, навитой на цилиндр радиуса a, то при уменьшении зазора между соседними витками свойства спирального волновода должны приближаться к свойствам обычного круглого волновода со сплошной стенкой. В последнем существуют быстрые электромагнитные волны, попадающие в „запрещенные" области на рис. 103; излучаясь из щелей спирального волновода, эти волны при своем распространении затухают, так что их волновые числа h комплексны. Наименьшим затуханием за счет излучения обладает волна, которая в сплошном круглом волноводе является симметричной магнитной волной H_{01} (или H_{02}, H_{03}, ...) и имеет лишь азимутальные токи (ср. § 42): все другие волны круглого волновода возмущаются „сквозной" стенкой спирального волновода в гораздо большей степени.

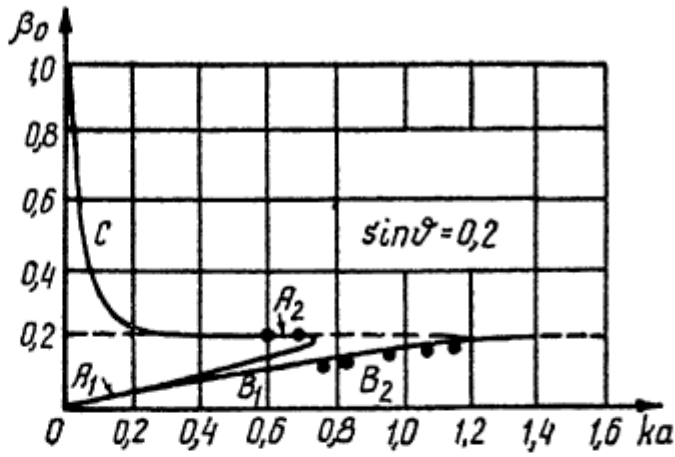


Рис. 104. Дисперсия волн в спирали и экспериментальные результаты.

Теория быстрых волн в спиральном волноводе может быть построена с помощью граничных условий (72.09) и (72.12), учитывающих просачивание электромагнитных волн через решетчатые поверхности.

§ 76. Бифилярная спираль

В последнее время приобрела большое значение так называемая „лампа с обратной волной", использующая волны с фазовой скоростью, близкой к скорости электронов, но с противоположно направленной групповой скоростью. В качестве такой волны можно использовать, например, левовинтовую волну спирали ($m=1$), переходящую в симметричную волну: действительно, как мы видели в § 74, такая волна имеет отрицательную фазовую скорость при положительной групповой, поскольку согласно рис. 99 для нее

$$\frac{dh}{d\omega} = \frac{dh_0}{d\omega} > 0. \qquad (76.01)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Такая волна, перенося энергию в направлении $+z$, имеет фазовую скорость, направленную по $-z$, и наоборот.

„Обратная волна“ еще более четко выражена в так называемой бифилярной спирали, к теории которой мы перейдем. Бифилярная спираль изображена на рис. 105; она получается, если между витками простой спирали (рис. 95) параллельно им поместить вторую такую же спираль. Бифилярная катушка является на низких частотах, как известно, практически безындукционным сопротивлением, если токи в проводах направлены в противоположные стороны („прямой“ и „обратный“ токи), поскольку однородное магнитное поле в такой катушке отсутствует.

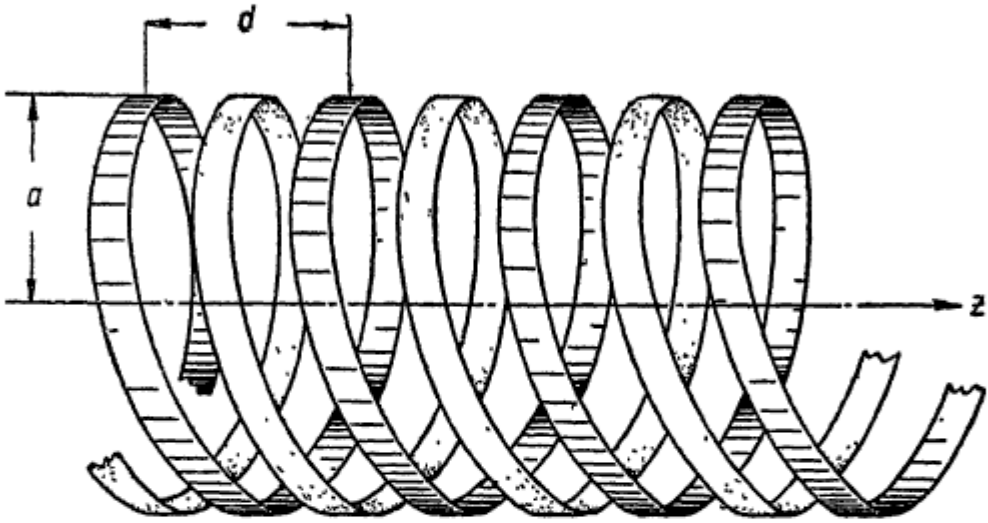


Рис. 105. Бифилярная спираль.

Электродинамическое исследование волн в бифилярной спирали можно произвести с помощью приближенных граничных условий § 72, и все сказанное в § 73 и § 74 без каких либо оговорок относится и к бифилярной спирали. При этом под d по-прежнему нужно понимать шаг каждой из простых спиралей, входящих в бифилярную, или пространственный период бифилярной структуры; расстояние между соседними витками (по оси z) будет теперь равно $\frac{d}{2}$.

При построении полной дисперсионной кривой для бифилярной спирали нужно различать волны двух различных типов: 1) синфазные волны, когда при данном z провода несут одинаковые токи; 2) противофазные волны, когда при данном z токи в проводах отличаются знаком.

Рассмотрим сначала синфазные поверхностные волны. При достаточно малых значениях $\varkappa$ поле этой волны яв-

Электронное наследие России

ляется симметричным, так что мы должны воспользоваться результатами § 73. При условии

$$\varkappa \approx \sin\vartheta, \qquad (76.02)$$

когда волна в простой спирали испытывает 1-й пространственный резонанс, для синфазной волны в бифилярной спирали резонанса нет, поскольку симметрия ее поля отличается от симметрии 1-ой пространственной гармоники (рис. 106, *а*). Лишь при условии

$$\varkappa \approx 2\sin\vartheta \qquad (76.03)$$

волна приобретает несимметричную структуру, соответствующую *сразу* азимутальному индексу $m=2$ (рис. 106, *б*); смежные участки витков несут при этом одинаковые токи. Переход от индекса $m=0$ к индексу $m=2$ происходит при условии (76.02), когда токи в смежных витках отличаются знаком. Нетрудно показать, что синфазная волна испытывает только четные пространственные резонансы,

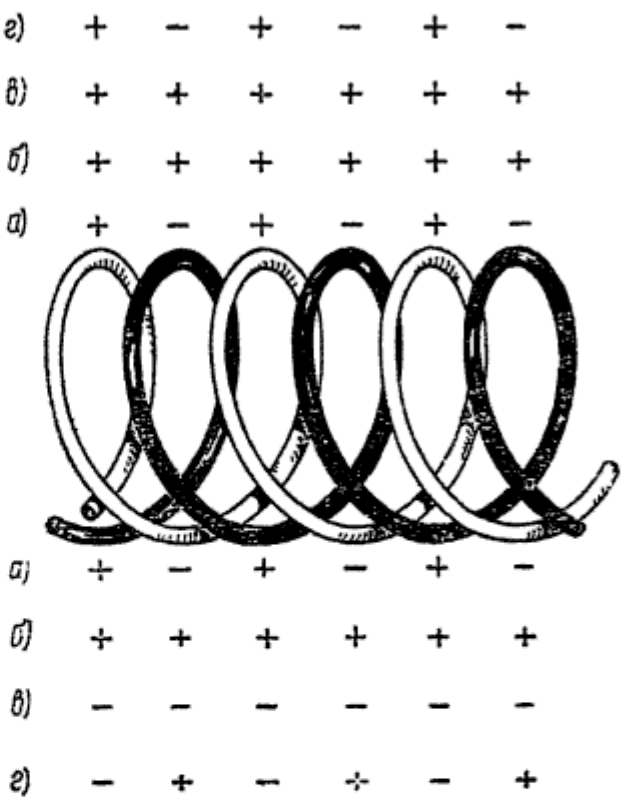
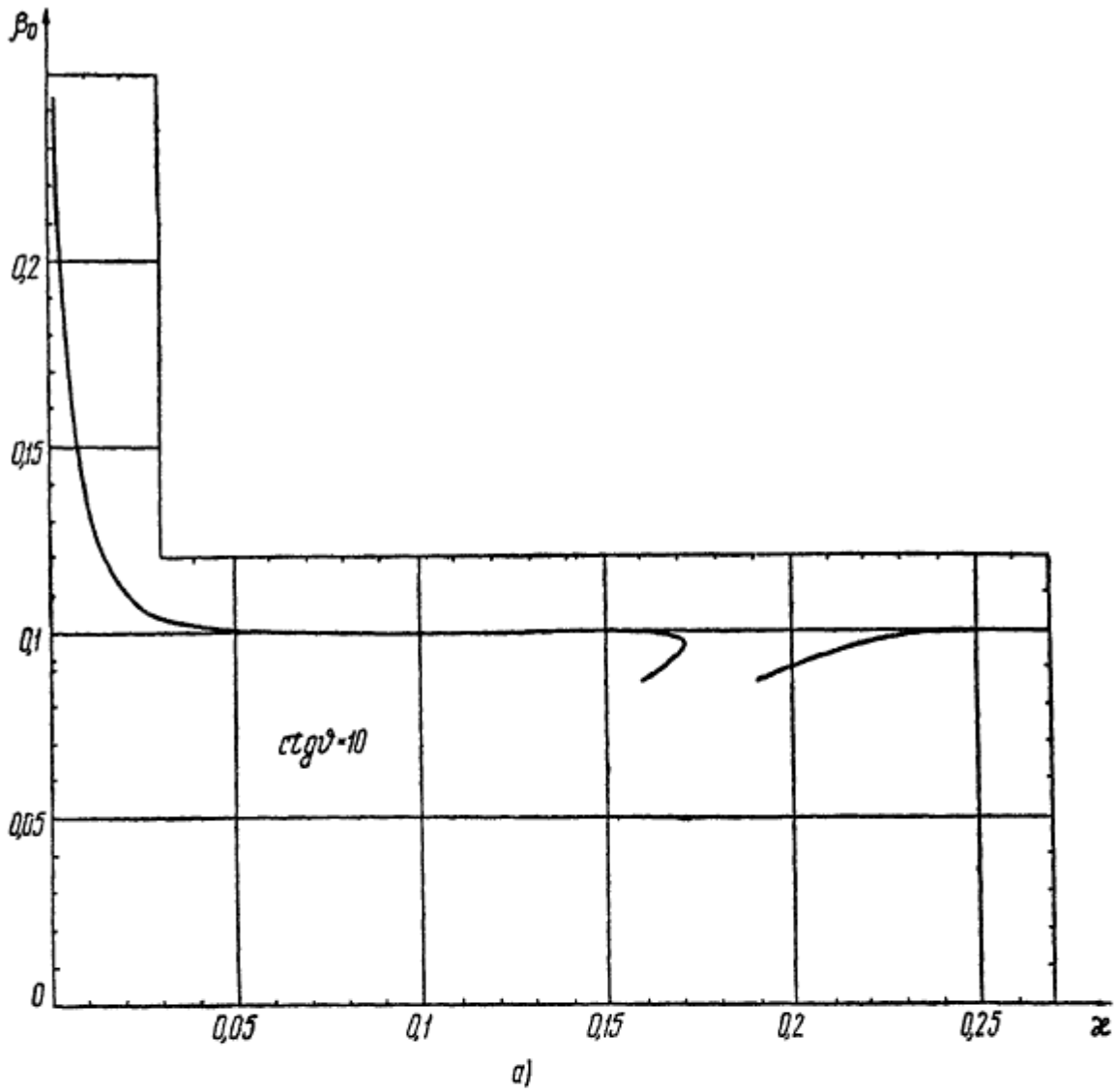


Рис. 106. Распределение тока на бифилярной спирали.

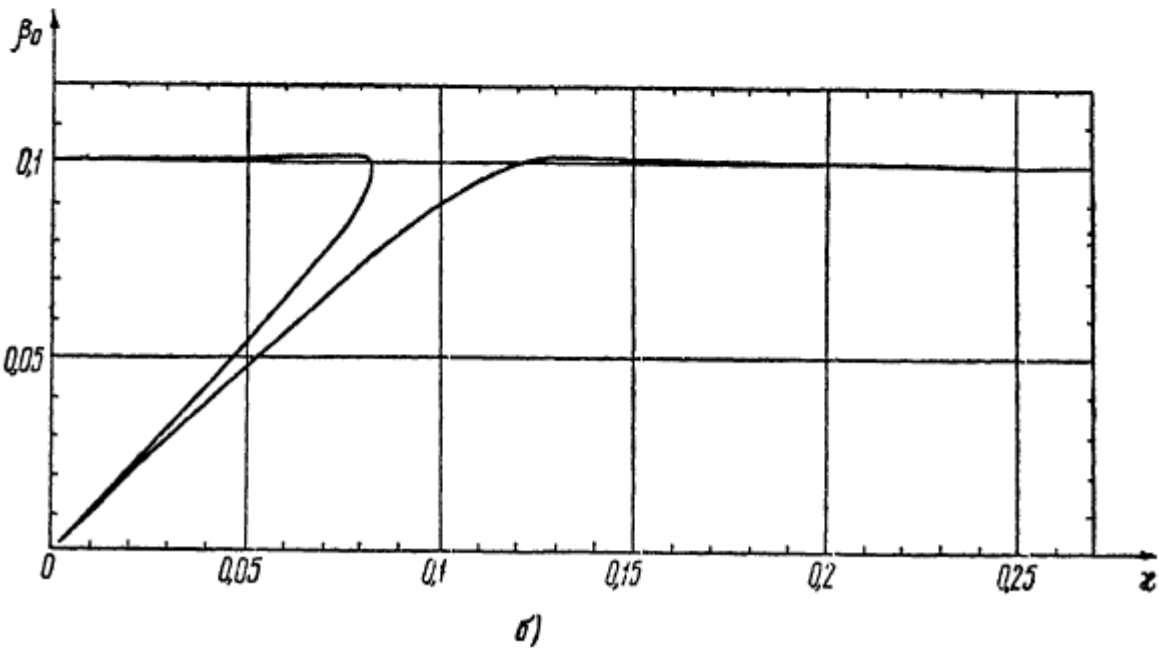
и ее дисперсионная кривая (рис. 107, *а*) проходит через нечетные запрещенные области, как бы „не замечая“ их. Этот результат легко понять с точки зрения формул (75.03) и (75.05), поскольку в последних для синфазной волны суммирование производится лишь по *четным* индексам n.

Для волны с азимутальным индексом $m=1$ распределение тока в бифилярной спирали должно быть таким, как это изображено на рис. 106, *в*; эта волна непременно будет противофазной. Пространственный резонанс этой волны реализуется при условии (75.11), и при малых значениях $\varkappa$ ее коэффициент замедления $\beta_0 \approx \sin\vartheta$, поскольку нулевого резонанса она (см. рис. 107, *б*) не имеет. Действительно, при малых $\varkappa$ распределение ее тока ни в коей мере не напоминает симметричную волну, как это видно из рис. 106, *г*, а физически соответствует противофазной волне, распро-

ЭБ "Научное наследие России"



а)



б)

Рис. 107. Система волн бифилярной спирали:
а — синфазные волны; *б* — противофазные волны.

ЭБ "Научное наследие России"

страняющейся со скоростью света в двойном проводе, изогнутом по винтовой линии. При еще более низких частотах поле противофазной волны в бифилярной спирали приближается к полю упомянутой выше безындукционной катушки подобно тому, как поле синфазной волны приближается к полю обычной катушки (ср. конец § 73).

Данная волна является обратной в том смысле, как это было указано в начале параграфа, причем остается обратной в широком диапазоне от весьма низких частот до частоты 1-го резонанса, определяемого условием (76.02). В противоположность этому соответствующая волна простой спирали имела обратный характер при условии

$$\frac{1}{2}\sin\vartheta \lesssim \varkappa \lesssim \sin\vartheta, \qquad (76.04)$$

поскольку при $\varkappa \approx \frac{1}{2}\sin\vartheta$ она переходила в симметричную волну, не обладающую „обратным“ характером. Точнее говоря, в полном выражении (75.05) для электромагнитного поля „обратная“ пространственная гармоника ($n=-1$) имеется и при $\varkappa < \frac{1}{2}\sin\vartheta$, однако она меньше основной (нулевой) гармоники.

Противофазная волна в бифилярной спирали не претерпевает также второго резонанса и всех четных резонансов и проходит через соответствующие запрещенные области (ср. рис. 107, *б*). В частности, при условии (76.03) ее распределение тока еще грубо соответствует индексу $m=1$. Заметим, что в полном выражении (75.05) для поля противофазной волны присутствуют лишь *нечетные* индексы n.

Рис. 107 получен тем же методом сопряжения, что и рис. 102 в § 75, но с учетом отмеченных особенностей волн обоих типов.

Изложенная в настоящей главе приближенная теория спирального волновода позволяет легко разобраться в его дисперсионных свойствах. Эта теория выделяет одну из пространственных гармоник, являющуюся главной и определяющую дисперсионные свойства в некотором диапазоне частот; кроме того, она позволяет указать следующую по величине пространственную гармонику, которая становится главной по другую сторону „диапазона смыкания“. Более точное исследование структуры поля нетрудно произвести, зная дисперсионные свойства спирали, а именно, вычисляя поля (75.05) по известному току (75.03), текущему по проводу.

ГЛАВА XIV

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЗАДАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

§ 77. Лемма Лоренца и теорема взаимности для электрических диполей

Лемма Лоренца есть вспомогательное математическое соотношение, связывающее комплексные амплитуды двух электромагнитных полей. Пусть поле $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ возбуждается сторонними токами $\mathbf{j}_1^e$, $\mathbf{j}_1^m$ и удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_1 = ik\mu\mathbf{H}_1 - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_1^m; \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_1 = -ik\varepsilon\mathbf{E}_1 + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_1^e, \tag{77.01}$$

а поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ возбуждается сторонними токами $\mathbf{j}_2^e$, $\mathbf{j}_2^m$, и следовательно, удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_2 = ik\mu\mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_2^m; \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_2 = -ik\varepsilon\mathbf{E}_2 + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_2^e. \tag{77.02}$$

Оба электромагнитных процесса имеют одну и ту же частоту $\omega = ck$ и происходят в одном и том же пространстве, комплексные проницаемости которого ε и μ, вообще говоря, меняются от точки к точке.

Умножим первое уравнение (77.01) скалярно на $\mathbf{H}_2$, а второе уравнение (77.02) — на $-\mathbf{E}_2$ и сложим

$$\mathbf{H}_2\operatorname{rot}\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1\operatorname{rot}\mathbf{H}_2 = ik(\varepsilon\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 + \mu\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2) - \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_2^e\mathbf{E}_1 + \mathbf{j}_1^m\mathbf{H}_2)$$

ЭБ "Научное наследие России"

и аналогично получаем второе тождество

$$\mathbf{H}_1 \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = ik(\varepsilon \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 + \mu \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2) - \\ - \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2 + \mathbf{j}_2^m \mathbf{H}_1).$$

Вычитая это тождество из первого и пользуясь известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{div}[\mathbf{AB}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

мы получаем соотношение

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_2] - \operatorname{div}[\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_1] = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_2^e \mathbf{E}_1 - \mathbf{j}_1^m \mathbf{H}_2 + \mathbf{j}_2^m \mathbf{H}_1), \tag{77.03}$$

представляющее собой лемму Лоренца в дифференциальной форме. Интегрируя по произвольному объему V и, пользуясь теоремой Гаусса—Остроградского, мы получаем лемму Лоренца в наиболее общем виде

$$\oint_S \left\{ [\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_2] - [\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_1] \right\} \mathbf{n} dS = \frac{4\pi}{c} \int_V (\mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_2^e \mathbf{E}_1 - \mathbf{j}_1^m \mathbf{H}_2 + \mathbf{j}_2^m \mathbf{H}) \, dV \tag{77.04}$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V, $\mathbf{n}$ — ее внешняя нормаль (рис. 1).

Мы получим частную формулировку леммы Лоренца, если в качестве объема V возьмем все бесконечное пространство, т. е. будем считать S бесконечно большой сферой. Принимая, как при доказательстве теоремы единственности в § 10, что все источники—электрические и магнитные токи—находятся в конечной области пространства, и считая, что на сфере S выполняются условия (10.06), мы получим в левой части формулы (77.04) исчезающий интеграл. Поэтому лемма Лоренца для безграничного пространства, имеющего в каждой точке некоторые потери, принимает вид

$$\int (\mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_2^e \mathbf{E}_1 - \mathbf{j}_1^m \mathbf{H}_2 + \mathbf{j}_2^m \mathbf{H}_1) \, dV = 0. \tag{77.05}$$

В пределе это соотношение справедливо и для пространства без потерь.

Выведенная выше лемма Лоренца имеет многообразные применения. В этом параграфе мы ограничимся тем, что с ее помощью докажем теорему взаимности для элементарных электрических диполей.

ЭБ "Научное наследие России"

Пусть имеются только сторонние электрические токи с плотностями $\mathbf{j}_1^e$ и $\mathbf{j}_2^e$, а сторонние магнитные токи отсутствуют. Тогда формула (77.05) упрощается следующим образом

$$\int (\mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_2^e \mathbf{E}_1)\, dV = 0. \tag{77.06}$$

Как известно, момент электрического диполя определяется с помощью соотношения

$$\mathbf{p} = e\mathbf{l}, \tag{77.07}$$

где $\mathbf{l}$ есть векторное расстояние между зарядами $-e$ и e. Колеблющемуся электрическому диполю соответствует переменный ток J, проходящий по отрезку $\mathbf{l}$ и равный

$$J = \frac{de}{dt} \text{ или } J = -i\omega e. \tag{77.08}$$

Отсюда

$$J\mathbf{l} = -i\omega\mathbf{p}. \tag{77.09}$$

К „точечному“ или элементарному диполю мы математически переходим, полагая $\mathbf{l} \to 0$ и $e \to \infty$ так, что величины (77.07) и (77.09) остаются постоянными. Плотность тока $\mathbf{j}^e$, соответствующая элементарному диполю, очевидно, равна нулю всюду, за исключением точки, где расположен диполь. В этой точке плотность тока $\mathbf{j}^e$ бесконечна, причем интеграл по объему V_0, внутри которого находится эта точка, равен

$$\int\limits_{V_0} \mathbf{j}^e dV = J\mathbf{l} = -i\omega\mathbf{p}. \tag{77.10}$$

Пусть теперь поле $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ возбуждено диполем $\mathbf{p}_1$, находящимся в точке *1*, а поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ — диполем $\mathbf{p}_2$, расположенным в точке *2*. Применим к этим полям лемму Лоренца в простейшей форме (77.06). Так как функции $\mathbf{j}_1^e$ и $\mathbf{j}_2^e$ обращаются в нуль всюду, за исключением точек *1* и *2* соответственно, то

$$\left.\begin{aligned} \int \mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2 dV &= \mathbf{E}_2(1) \int \mathbf{j}_1^e\, dV = -i\omega\mathbf{p}_1\mathbf{E}_2(1) \\ \int \mathbf{j}_2^e \mathbf{E}_1 dV &= \mathbf{E}_1(2) \int \mathbf{j}_2^e\, dV = -i\omega\mathbf{p}_2\mathbf{E}_1(2), \end{aligned}\right\} \tag{77.11}$$

откуда

$$\mathbf{p}_1\mathbf{E}_2(1) = \mathbf{p}_2\mathbf{E}_1(2); \tag{77.12}$$

...ое наследие России"

через $\mathbf{E}_2(1)$ обозначено значение электрического поля $\mathbf{E}_2$ в точке *1*, где расположен диполь $\mathbf{p}_1$, а $\mathbf{E}_1(2)$ есть значение поля $\mathbf{E}_1$ в точке *2*, где находится второй диполь $\mathbf{p}_2$.

Если воспользоваться трехмерными δ-функциями, то плотности тока, соответствующие элементарным диполям $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, можно записать в виде

$$\mathbf{j}_1^e = -i\omega\mathbf{p}_1\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1);\ \mathbf{j}_2^e = -i\omega\mathbf{p}_2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2), \qquad (77.13)$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы точек *1* и *2* соответственно, $\mathbf{r}$ — текущий радиус-вектор с компонентами x, y, z. Пользуясь формулой (77.06) и известным свойством δ-функции, мы опять приходим к формуле (77.12).

Соотношение (77.12) есть теорема взаимности для элементарных электрических диполей. Если взять для простоты моменты $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ по абсолютной величине равными единице, то левая часть соотношения (77.12) будет равна электрическому полю диполя $\mathbf{p}_2$, действующему на диполь $\mathbf{p}_1$, а правая часть — электрическому полю диполя $\mathbf{p}_1$, действующему на диполь $\mathbf{p}_2$. При этом мы называем, например, проекцию вектора $\mathbf{E}_2(1)$ на направление вектора $\mathbf{p}_1$ полем, действующим на этот диполь, так как именно эта составляющая поля воздействует на диполь $\mathbf{p}_1$, возбуждая ток в соответствующем отрезке проводника l. Поэтому теорему взаимности (77.12) можно сформулировать более кратко следующим образом: при равенстве абсолютных величин дипольных моментов действие диполя *2* на диполь *1* равно действию диполя *1* на диполь *2*.

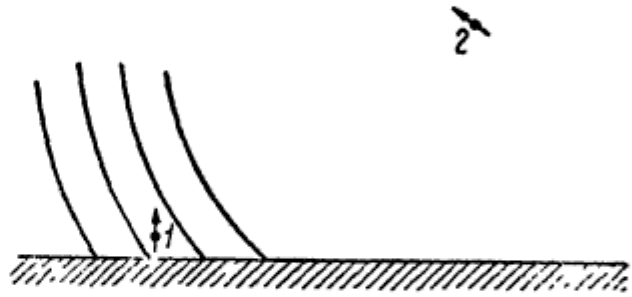


Рис. 108. К теореме взаимности.

Приведем простой пример применения доказанной теоремы взаимности. Пусть диполь $\mathbf{p}_1$ расположен в точке *1* вблизи земли (рис. 108), и нам нужно найти создаваемое им поле на большой высоте в точке *2*, в которой находится приемная антенна самолетной радиоустановки. Полное вычисление электромагнитного поля антенны, расположенной у земной поверхности, является довольно сложной задачей. Однако нужное нам поле в точке *2* легко найти, не решая этой задачи; а именно, поставим в точке *2* вспомогатель-

ЭБ "Научное наследие России"

ный излучающий диполь $\mathbf{p}_2$; так как он находится на большом расстоянии от точки *1*, то излучаемую им сферическую волну можно в окрестности точки *1* считать плоской, а электромагнитное поле, возникающее при падении плоской волны на плоскую границу раздела двух сред, хорошо известно (см. например § 15). По известному полю $\mathbf{E}_2(1)$ мы легко определяем с помощью теоремы взаимности (77.12) искомое поле $\mathbf{E}_1(2)$.

В связи с этим примером можно сказать, что в интересующей нас задаче в точке *1* находится передающая антенна, а в точке *2* — приемная. Мы же решаем вспомогательную задачу, где в точке *2* расположена передающая антенна, а в точке *1* — приемная, и пользуемся соотношением (77.12). С помощью леммы Лоренца можно обобщить теорему взаимности таким образом, чтобы она относилась не только к идеализированным антеннам — элементарным диполям, но и к реальным антеннам и антенным системам. Не останавливаясь на формулировке теорем взаимности в более общих случаях, отметим лишь, что эти теоремы связывают свойства данной приемной антенны со свойствами той же антенны при работе на передачу. В частности оказывается, что диаграммы направленности любой антенны при работе на прием и на передачу совпадают.

§ 78. Магнитные диполи и теоремы взаимности для них

Обобщим соотношения (77.12) на случай, когда поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ создаются не электрическими, а магнитными диполями, расположенными в точках *1* и *2* и имеющими моменты $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ соответственно. Магнитный диполь формально определяется с помощью магнитного тока, плотность которого $\mathbf{j}^m$ равна нулю всюду, за исключением одной точки. Интеграл по окрестности V_0 этой точки связан с моментом магнитного диполя $\mathbf{m}$ соотношением

$$\int\limits_{V_0} \mathbf{j}^m dV = -i\omega\mathbf{m}. \qquad (78.01)$$

Используя лемму Лоренца в форме (77.05) и учитывая, что в данном случае электрические сторонние токи с плот-

...ное наследие России"

ностями $\mathbf{j}_1^e$ и $\mathbf{j}_2^e$ отсутствуют, а интегралы от магнитных сторонних токов преобразуются к виду

$$\left.\begin{aligned}\int \mathbf{j}_1^m \mathbf{H}_2 dV &= \mathbf{H}_2(1)\int \mathbf{j}_1^m dV = -i\omega \mathbf{m}_1 \mathbf{H}_2(1),\\ \int \mathbf{j}_2^m \mathbf{H}_1 dV &= \mathbf{H}_1(2)\int \mathbf{j}_2^m dV = -i\omega \mathbf{m}_2 \mathbf{H}_1(2),\end{aligned}\right\} \quad (78.02)$$

мы приходим к соотношению

$$\mathbf{m}_1 \mathbf{H}_2(1) = \mathbf{m}_2 \mathbf{H}_1(2), \quad (78.03)$$

являющемуся теоремой взаимности для двух магнитных диполей. Плотности магнитных токов, соответствующих элементарным диполям, можно с помощью трехмерных δ-функций записать следующим образом

$$\mathbf{j}_1^m = -i\omega \mathbf{m}_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1); \quad \mathbf{j}_2^m = -i\omega \mathbf{m}_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2), \quad (78.04)$$

откуда также можно вывести соотношение (78.03).

Выведем, наконец, теорему взаимности для двух диполей различных типов — магнитного диполя $\mathbf{m}_1$, находящегося в точке *1* и возбуждающего поле $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$, и электрического диполя $\mathbf{p}_2$, находящегося в точке *2* и возбуждающего поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$. Соответствующие плотности тока имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{j}_1^e &= 0; & \mathbf{j}_2^e &= -i\omega \mathbf{p}_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2),\\ \mathbf{j}_1^m &= -i\omega \mathbf{m}_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1); & \mathbf{j}_2^m &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (78.05)$$

Подставляя эти выражения в соотношение (77.05), мы получаем новую теорему взаимности

$$\mathbf{m}_1 \mathbf{H}_2(1) = -\mathbf{p}_2 \mathbf{E}_1(2). \quad (78.06)$$

Выведенные в этом параграфе теоремы взаимности имеют пока чисто формальный характер, поскольку физический смысл понятий „магнитный ток“ и „магнитный диполь“ неясен. Как мы уже говорили в конце § 3, магнитные токи в природе не существуют и вводятся по аналогии с электрическими токами для облегчения математической трактовки полей.

Покажем, что если сторонний электрический ток $\mathbf{j}^e$ течет по бесконечно малому замкнутому контуру C, то такая система в отношении создаваемого ею электромагнитного

ЭБ "Научное наследие России"

поля полностью эквивалентна магнитному диполю с моментом

$$\mathbf{m} = \frac{\mu}{c} J^e \mathbf{S}, \tag{78.07}$$

где μ есть комплексная магнитная проницаемость среды в месте расположения контура C, а $\mathbf{S}$ есть векторная площадь, ограниченная этим контуром

$$\mathbf{S} = \int \mathbf{n} dS. \tag{78.08}$$

В этой формуле интегрирование производится по любой поверхности, натянутой на контур C, а нормаль $\mathbf{n}$ связана с направлением положительного обхода контура C правилом правого винта.

Соотношениями (78.07) и (78.08) широко пользуются в магнитостатике, где магнитные диполи и магнитные заряды также вводят чисто формально, заменяя ими реально существующие замкнутые электрические токи. С помощью леммы Лоренца (77.05) эти соотношения легко обосновать и для электродинамических полей. Для этого возьмем в качестве источника поля $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ сторонний электрический ток J^e, текущий по бесконечно малому контуру C, расположенному в точке *1*. Источником поля $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ по-прежнему будем считать электрический диполь $\mathbf{p}_2$ в точке *2*. Применяя к этим двум полям соотношение (77.05), мы будем иметь

$$\int \mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2 dV = J^e \oint_C \mathbf{E}_2 d\mathbf{s} = J^e \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} dS, \tag{78.09}$$

так как для линейного тока, текущего по контуру C

$$\mathbf{j}_1^e dV = J^e d\mathbf{s},$$

где $d\mathbf{s}$ — элемент дуги этого контура. В силу уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = ik\mu \mathbf{H}_2 \quad (\mathbf{j}_2^m \equiv 0)$$

выражение (78.09) принимает вид

$$\int \mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2 dV = ikJ^e \int_S \mu \mathbf{H}_2 \mathbf{n} dS = ik\mu(1) J^e \mathbf{H}_2(1) \int_S \mathbf{n} dS =$$

$$= ik\mu(1) J^e \mathbf{S} \mathbf{H}_2(1). \tag{78.10}$$

Здесь мы учли, что контур C бесконечно мал, благодаря чему магнитное поле $\mathbf{H}_2$ и комплексную магнитную прони-

Электронное наследие России

цаемость μ можно вынести за знак интеграла и воспользоваться формулой (78.08). Остальные интегралы в формуле (78.05) вычисляются без труда

$$\int \mathbf{j}_2^e \mathbf{E}_1 dV = -i\omega \mathbf{p}_2 \mathbf{E}_1(2); \quad \mathbf{j}_1^m = \mathbf{j}_2^m = 0, \qquad (78.11)$$

и лемма Лоренца (77.05) приводит нас к соотношению

$$\frac{\mu(1)}{c} J^e \mathbf{S}\mathbf{H}_2(1) = -\mathbf{p}_2 \mathbf{E}_1(2). \qquad (78.12)$$

Сравним теперь соотношения (78.06) и (78.12), для чего возьмем поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ и диполь $\mathbf{p}_2$ в обоих случаях одинаковыми. Для того, чтобы получить то же самое электрическое поле $\mathbf{E}_1$ в точке *2* в обоих задачах, достаточно взять момент магнитного диполя равным $\mathbf{m}_1 = \frac{\mu(1)}{c} J^e \mathbf{S}$. Вектор $\mathbf{p}_2$ и точка *2* могут быть выбраны произвольным образом. Тем самым доказано, что электрическое поле замкнутого электрического тока и элементарного магнитного диполя совпадают, если момент магнитного диполя определить формулой (78.07). Из уравнений электромагнитного поля вытекает, что магнитное поле обеих систем также совпадает всюду, за исключением точки, где находится сам диполь или контур с током.

Так как конечный замкнутый контур, обтекаемый током J^e, может быть разложен с помощью известного приема (рис. 109,*а*) на совокупность элементарных контуров с током, а каждый такой элементарный ток можно заменить элементарным магнитным диполем (рис. 109,*б*), то окончательно контур с током оказывается эквивалентным двойному магнитному слою, или магнитному листку (рис. 109,*в*). Катушка (рис. 109,*г*), состоящая из многих витков—контуров с постоянным током—может быть заменена пачкой магнитных листков (рис. 109,*д*). Поскольку противоположные магнитные заряды на соприкасающихся поверхностях магнитных листков взаимно уничтожаются, то такая пачка эквивалентна стержню с магнитными зарядами на концах (рис. 109,*е*), т. е. постоянному магниту. Таким путем доказывается эквивалентность катушки с током и постоянного магнита, рассматриваемого как совокупность магнитных зарядов. Из магнитостатики известно, что эта эквивалентность имеет место лишь для внешних точек пространства, а внутри магнита напряженность его магнитного поля $\mathbf{H}$

ЭБ "Научное наследие России"

отлична от напряженности магнитного поля в катушке.

Доказанное выше положение вскрывает смысл магнитных диполей. В частности, соотношение (78.03) можно характеризовать как теорему взаимности для двух рамочных антенн, выполненных в виде малых замкнутых контуров с током, а соотношение (78.06) есть теорема взаимности для такой „элементарной рамки“ и элементарного диполя—вибратора Герца.

Магнитным токам можно придать и другой смысл. Поверхностные электрические и магнитные токи вводятся по формулам (4.02) всякий раз, когда рассматриваемое нами электромагнитное поле претерпевает разрыв на некоторой поверхности S. Так, если электромагнитное поле равно нулю внутри поверхности S и принимает значения $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ на внешней стороне поверхности S, то, обозначая через $\mathbf{n}$ внешнюю нормаль к S, мы приходим с помощью формул (4.02) к соотношениям

$$[\mathbf{nH}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}^e; \quad [\mathbf{nE}] = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}^m. \tag{78.13}$$

Таким образом, данному разрывному полю соответствуют электрические и магнитные поверхностные токи. Это обстоятельство мы используем в § 85 при выводе „принципа Гюйгенса“ для электромагнитного поля.

Формулы (78.13) остаются в силе, если S есть поверхность идеального проводника. В этом случае в силу граничного условия (24.03) поверхностные магнитные токи на S равны нулю, а первое соотношение (78.13) переходит в формулу (24.04). Различие знаков формул (24.04) и (78.13) вызывается тем, что сейчас мы обозначаем через $\mathbf{n}$ нормаль, направленную в область, где поле отлично от нуля, а раньше мы направляли $\mathbf{n}$ внутрь идеального проводника.

Для практики имеют большое значение задачи об излучении из отверстий и щелей, прорезанных в металлических поверхностях, которые обычно можно считать идеально проводящими. В ряде случаев тангенциальное электрическое поле на отверстии или щели можно полагать известным, а на металлической поверхности оно равно нулю. Электромагнитное поле, возбуждаемое отверстием или щелью, можно найти следующим образом. Определим поверхностную плотность магнитного тока на отверстии или щели с помощью формулы

$$[\mathbf{nE}] = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}^m \text{ на } S \tag{78.14}$$

ЭБ "Научное наследие России"

и будем рассматривать этот поверхностный ток как предельный случай объемного магнитного тока с плотностью $\mathbf{j}^m$. Кроме того, будем считать, что отверстие или щель „заметаллизированы", т. е. у нас имеется сплошная идеально проводящая поверхность S без каких-либо вырезов.

Решив задачу о возбуждении электромагнитного поля токами $\mathbf{j}^m$ в пространстве, ограниченном сплошной идеально проводящей поверхностью S, получаем в пределе решение

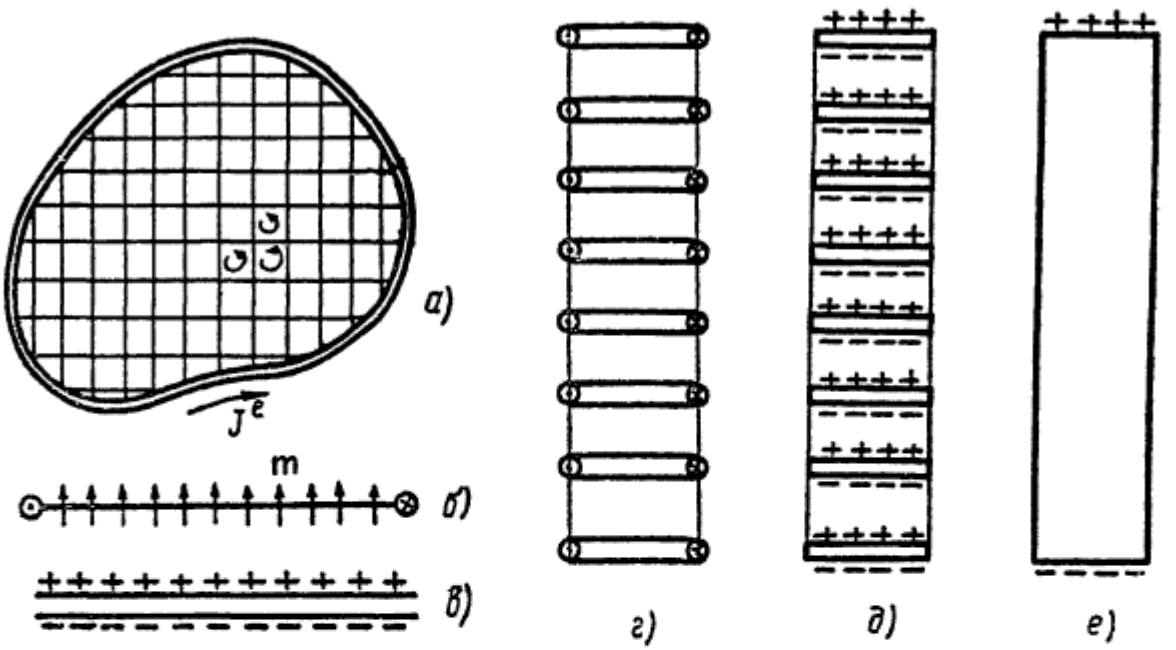


Рис. 109. Токи и магнитные заряды:

а — контур с электрическим током; *б* — эквивалентные ему диполи; *в* — эквивалентный двойной слой; *г* — катушка с электрическим током; *д* — двойные слои, эквивалентные каждому витку катушки; *е* — магнитные заряды, эквивалентные всей катушке.

задачи с граничным условием (78.14), если объемный ток с плотностью $\mathbf{j}^m$ мы превратим в поверхностный ток и перенесем последний на поверхность S. Как исходная задача о заданном тангенциальном поле $[\mathbf{nE}]$ на поверхности S, так и вспомогательная задача о токах $\mathbf{j}^m$ внутри идеально проводящей поверхности S имеют согласно § 10 единственное решение. Поскольку внутри идеального проводника $\mathbf{E}=0$, мы в месте, где на поверхности S находится отверстие, действительно получаем заданное поле $[\mathbf{nE}]$, входящее в формулу (78.14).

Таким путем можно, в частности, решить задачу о возбуждении электромагнитного поля в волноводе щелями и другими отверстиями, прорезанными в его стенках (см. конец § 80).

ЭБ "Научное наследие России"

Соотношение (78.14) позволяет отождествить короткую (рис. 110,*а*) или „гантельную“ (рис. 110,*б*) щели, прорезанные в металлической поверхности, с элементарным магнитным диполем, полуволновую щель (рис. 110,*в*) — с полуволновым „магнитным вибратором“, и т. д. Поэтому формулу (78.03) можно интерпретировать как теорему взаимности для двух „элементарных щелей“ такого же вида, что и на рис. 110,*а* и 110,*б*.

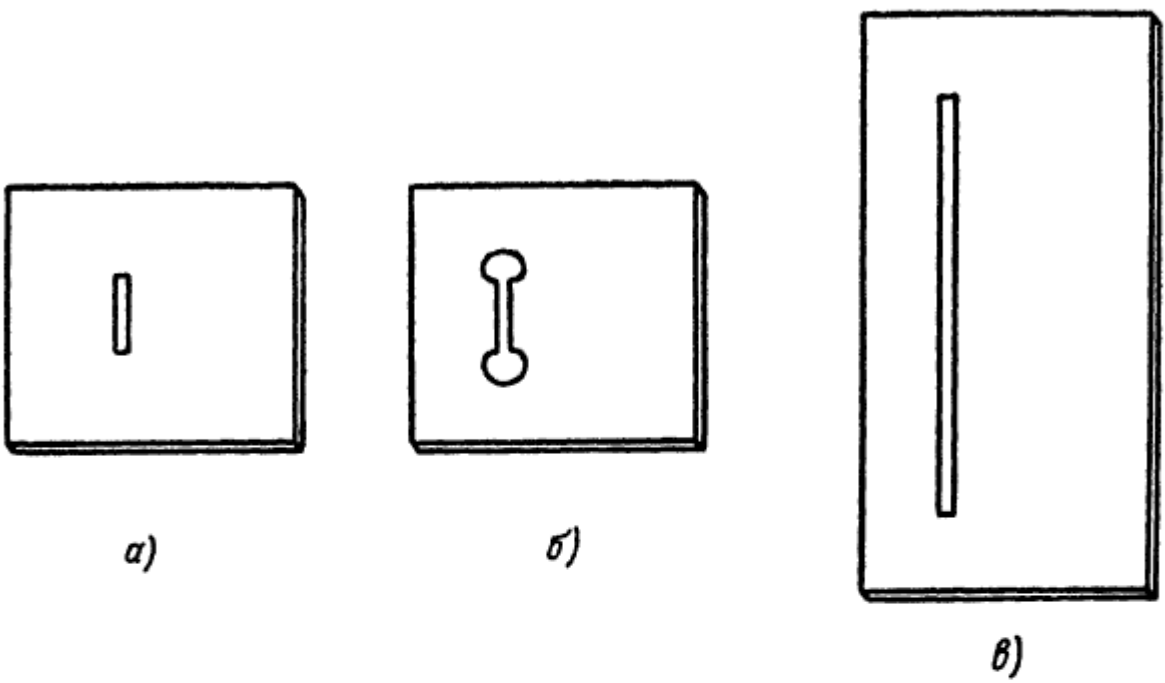


Рис. 110. Щели.

Заметим, что электрический ток в тонком проводнике течет вдоль этого проводника, а поперечными токами в таком проводнике можно обычно пренебречь. Аналогично этому „магнитный ток“ течет вдоль узких щелей, а соответствующее ему по формуле (78.14) электрическое поле в щели направлено поперек щели. Это поле возникает обычно за счет того, что щель перерезает линии электрического тока на металлической поверхности, и ток продолжается в виде тока смещения, соединяющего края щели по кратчайшему расстоянию.

§ 79. Ортогональность волн в волноводе

На протяжении всей книги мы рассматривали волны в линиях передачи (ср. гл. V, VII, XII) как решения однородных уравнений электродинамики. Иначе говоря, мы исследовали распространение электромагнитных волн в таких системах как бы „в отрыве“ от источников этих волн. Таким путем мы получили свойства волн, могущих суще-

...ое наследие России"

ствовать в данной системе. Для практики важно, однако, знать, какое электромагнитное поле создается в данной системе под воздействием источника поля — излучающей антенны, с какими амплитудами возбуждаются различные волны и т. д.

Поэтому нельзя ограничиваться исследованием свободных или собственных колебаний (волн) в данной системе, удовлетворяющих однородным уравнениям поля (без источников)

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}' = ik\mu\,\mathbf{H}';\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}' = -ik\varepsilon\,\mathbf{E}'. \tag{79.01}$$

Необходимо исследовать также вынужденные электромагнитные колебания данной системы под действием источников поля. Задавая эти источники в виде сторонних электрических и магнитных токов с плотностями $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$, мы должны решать неоднородные уравнения электромагнитного поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mu\,\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m;\quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\varepsilon\,\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e. \tag{79.02}$$

Оказывается, что задача о вынужденных колебаниях легко решается, если более простая задача о свободных колебаниях решена полностью, т. е. известна полная система решений однородных уравнений (79.01).

Рассмотрим электромагнитное поле в волноводе, понимая под „волноводом“ любую передающую линию, электромагнитное поле которой занимает в каждом поперечном сечении $z = \text{const}$ конечную площадь (ось z направлена вдоль линии передачи). Так, например, если волновод образован идеально проводящей стенкой, то на ее внутренней поверхности S_0 имеет место граничное условие

$$[\mathbf{n}\mathbf{E}] = 0 \text{ на } S_0 \tag{79.03}$$

и все электромагнитное поле заключено внутри S_0. Если учитывать конечную проводимость стенки волновода, то на поверхности стенки S_0 нужно ставить граничное условие Леонтовича

$$[\mathbf{n}\,\mathbf{E}] = w[\mathbf{n}\,[\mathbf{n}\,\mathbf{H}]] \text{ на } S_0 \tag{79.04}$$

и электромагнитное поле слегка просачивается за пределы поверхности S_0 на расстояния порядка толщины скин-слоя d. Здесь w есть комплексное волновое сопротивление металлической стенки, $\mathbf{n}$—нормаль к поверхности S_0, направленная внутрь волновода. Заметим, что в формуле (25.10) нормаль направлена внутрь металла, поэтому она отличается знаком от формулы (79.04).

ЭБ "Научное наследие России"

В случае металлической стенки можно выбрать цилиндрическую поверхность S_0 иначе; а именно, проводя S_0 внутри стенки на глубине, значительно превышающей толщину скин-слоя, мы получим приближенное условие

$$\mathbf{E}=\mathbf{H}=0 \text{ на } S_0, \tag{79.05}$$

выражающее тот факт, что все электромагнитное поле заключено внутри S_0. Таким образом, условия (79.03)—(79.05) фиксируют то обстоятельство, что мы рассматриваем линию „закрытого" типа, например обычный волновод или коаксиальную линию.

Мы считаем волновод бесконечным и однородным по оси z, так что проницаемости ε и μ суть функции x и y, не зависящие от z (это относится как к веществам, заполняющим волновод, так и к материалу стенок). Тогда частные решения уравнений (79.01) имеют зависимость от координаты z в виде e^{ihz}. Такие решения являются собственными волнами рассматриваемой системы. Предположим также, что подобно обычному волноводу рассматриваемый нами волновод (в более широком смысле этого слова) имеет дискретный спектр собственных волн. Иначе говоря, все волны в данном волноводе могут быть объединены в одну последовательность таким образом, что волна с номером s имеет поле $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ и волновое число h_s, т. е. зависит от z посредством множителя $e^{ih_s z}$. Положительным индексом s ($s=1, 2, \ldots$) мы отмечаем волны, распространяющиеся в направлении положительной оси z, точнее, имеющие $\operatorname{Im} h_s > 0$. Во избежание сомнений будем считать (как при доказательстве теоремы единственности в § 10), что волновод имеет потери, так что незатухающие волны, для которых $\operatorname{Im} h_s = 0$, в нем существовать не могут. Отрицательным индексом $-s$ ($s>0$) мы отмечаем такую же волну, что и с номером s, но распространяющуюся в противоположном направлении; ее волновое число равно

$$h_{-s}=-h_s. \tag{79.06}$$

Общее решение уравнений (79.01) по предположению имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}'&=\sum(C_s\mathbf{E}_s+C_{-s}\mathbf{E}_{-s}),\\ \mathbf{H}'&=\sum(C_s\mathbf{H}_s+C_{-s}\mathbf{H}_{-s}),\end{aligned}\right\} \tag{79.07}$$

...ое наследие России"

где C_s и C_{-s} — произвольные постоянные, а суммирование производится по всем положительным индексам s.

Отметим, что индекс $\pm s$ можно рассматривать как краткую запись группы других индексов. Так, например, в волноводах с идеально проводящими стенками и однородным заполнением индекс s заменяет обычные символы E_{mn} или H_{mn} и указание направления распространения волны.

Собственные волны любой линии передачи обладают весьма важным свойством ортогональности, которое легче всего вывести из леммы Лоренца в ее общей формулировке (77.04). Для этого возьмем в качестве поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ поле какой-нибудь волны с индексом s, а в качестве поля $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ — поле другой волны с индексом s'. Эти поля не имеют источников, поэтому мы получаем

$$\oint_S \left\{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\right\} \mathbf{n}\, dS = 0. \qquad (79.08)$$

Если взять поверхность S в виде двух поперечных сечений волновода S_1 и S_2 и заключенной между ними части поверхности S_0 (рис. 111), то интеграл по S_0 обращается

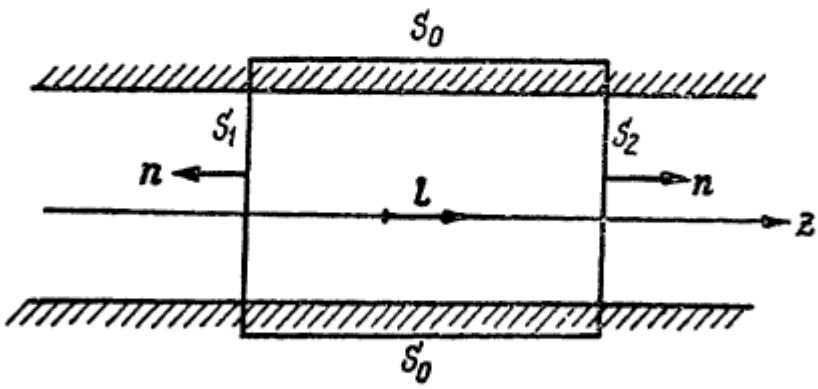


Рис. 111. Поверхность S в формуле (79. 08).

в нуль в силу условий (79.03), (79.04) или (79.05), наложенных на поля обеих волн с индексами s и s'.

В самом деле,

$$\left\{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\right\} \mathbf{n} = [\mathbf{n}\, \mathbf{E}_s]\, \mathbf{H}_{s'} - [\mathbf{n} \mathbf{E}_{s'}]\, \mathbf{H}_s,$$

так что при граничном условии (79.03) подынтегральная функция в формуле (79.08) обращается в нуль на S_0. То же будет и при граничном условии (79.04), поскольку

$$\left\{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\right\} \mathbf{n} = w \left\{[\mathbf{n}\, [\mathbf{n} \mathbf{H}_s]]\, \mathbf{H}_{s'} - [\mathbf{n}\, [\mathbf{n} \mathbf{H}_{s'}]] \mathbf{H}_s\right\} =$$

ЭБ "Научное наследие России"

$$= w\{-[\mathbf{n}\mathbf{H}_s][\mathbf{n}\mathbf{H}_{s'}] + [\mathbf{n}\mathbf{H}_s][\mathbf{n}\mathbf{H}_{s'}]\} = 0.$$

При граничном условии (79.05) подынтегральная функция (79.08) также равна нулю на поверхности S_0.

На поверхности S_2 мы имеем $\mathbf{n} = \mathbf{l}$, а на поверхности S_2 вектор $\mathbf{n}$ направлен в противоположную сторону, и $\mathbf{n} = -\mathbf{l}$; через $\mathbf{l}$ обозначен единичный вектор в направлении оси z. Поэтому соотношение (79.08) приводит нас к выводу, что интеграл

$$J_{s,s'} = \int_{S_p} \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \mathbf{l}\, dS, \qquad (79.09)$$

взятый по любому поперечному сечению S_p (при $z = \text{const}$), не зависит от z, так как этот интеграл для любых двух сечений S_1 и S_2 имеет одно и то же значение.

Однако поле $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ пропорционально $e^{ih_s z}$, а поле $\mathbf{E}_{s'}$, $\mathbf{H}_{s'}$ пропорционально $e^{ih_{s'} z}$. Поэтому мы должны иметь

$$J_{s,s'}(z) = J_{s,s'}(0)\, e^{i(h_s + h_{s'})z}. \qquad (79.10)$$

Отсюда вытекает, что либо $J_{s,s'} = 0$, либо $h_{s'} = -h_s$.

При отсутствии вырождения, когда каждому волновому числу h_s соответствует только одна волна, условие $h_{s'} = -h_s$ может иметь место только при $s' = -s$ благодаря формуле (79.06). Поэтому мы получаем соотношение

$$J_{s,s'} = \int_{S_p} \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \mathbf{l}\, dS = 0 \quad \text{при } s' \neq -s, \qquad (79.11)$$

являющееся условием ортогональности собственных волн. Если имеется вырождение, то „кратные волны" с одним и тем же волновым числом всегда могут быть подвергнуты дополнительной ортогонализации в смысле соотношения (79.11). Поэтому можно считать, что условие ортогональности (79.11), являющееся основой всего дальнейшего изложения, выполняется для всех волн волноводной системы.

Нормой s-ой собственной волны мы будем называть величину

$$N_s = \frac{c}{4\pi} J_{s,-s} = \frac{c}{4\pi} \int_{S_p} \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{-s}] - [\mathbf{E}_{-s} \mathbf{H}_s]\} \mathbf{l}\, dS. \qquad (79.12)$$

...ческое наследие России"

Норма имеет размерность мощности и в ряде случаев (см. ниже) отличается лишь простым численным множителем от комплексной мощности, переносимой s-ой волной через поперечное сечение $z=0$.

Прежде чем перейти к применению полученных выше формул (что будет сделано в § 80), разберем подробно их физический смысл.

Начнем с условия ортогональности (79.11). Если возьмем две волны с такими индексами s и s', что $s' \neq s$ и $s' \neq -s$, т. е. $|s'| \neq |s|$, то можем написать для них два соотношения ортогональности:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{S_p} \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'}, \mathbf{H}_s]\} \mathbf{1}\, dS = 0, \\ &\int\limits_{S_p} \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{-s'}] - [\mathbf{E}_{-s'}, \mathbf{H}_s]\} \mathbf{1}\, dS = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (79.13)$$

или в координатной записи

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_{S_p} (E_{s,x} H_{s',y} - E_{s,y} H_{s',x} - E_{s',x} H_{s,y} + E_{s',y} H_{s,x})\, dS = 0, \\ &\int\limits_{S_p} (E_{s,x} H_{-s',y} - E_{s,y} H_{-s',x} - E_{-s',x} H_{s,y} + E_{-s',y} H_{s,x})\, dS = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (79.14)$$

Поля прямой волны (индекс s) и обратной волны (индекс $-s$) связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} E_{-s,x}(x, y, z) &= \pm E_{s,x}(x, y, -z), \\ E_{-s,y}(x, y, z,) &= \pm E_{s,y}(x, y, -z), \\ E_{-s,z}(x, y, z) &= \mp E_{s,z}(x, y, -z), \\ H_{-s,x}(x, y, z) &= \mp H_{s,x}(x, y, -z), \\ H_{-s,y}(x, y, z) &= \mp H_{s,y}(x, y, -z), \\ H_{-s,z}(x, y, z) &= \pm H_{s,z}(x, y, -z), \end{aligned}\right\} \qquad (79.15)$$

которые легко вывести из уравнений поля в координатной записи (11.01). Действительно, если при помощи составляющих поля $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$, зависящих от z по закону $e^{ih_s z}$ и удовлетворяющих уравнениям (11.01), образовать составляющие поля $\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$ по формулам (79.15), то мы, как

легко проверить, получим новое решение уравнений поля, пропорциональное $e^{-ih_s z}$ и определяющее обратную волну с индексом $-s$.

Пользуясь соотношениями (79.15), мы легко приведем второе соотношение (79.13) к виду

$$\int_{S_p} \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] + [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \mathbf{1}\, dS = 0.$$

Комбинируя его с первым соотношением (79.13), получаем

$$\int_{S_p} [\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] \mathbf{1}\, dS = 0 \quad \text{при} \quad |s'| \neq |s|. \tag{79.16}$$

Для электрических и магнитных волн в обычных волноводах с идеально проводящими стенками можно написать соотношения

$$H_{s,x} = f_s H^*_{s,x}; \quad H_{s,y} = f_s H^*_{s,y} \tag{79.17}$$

где $f_s = f_s(z)$ есть некоторая функция z, абсолютная величина которой равна единице. Это соотношение можно вывести из формул (39.06) и (40.02), если воспользоваться тем обстоятельством, что функции Π и Π' либо вещественны, либо отличаются от вещественной функции x и y только комплексным множителем C (ср. § 41 и § 42). Соотношения (79.17) позволяют переписать формулу (79.16) следующим образом

$$\int_{S_p} [\mathbf{E}_s \mathbf{H}^*_{s'}] \mathbf{1}\, dS = 0 \quad \text{при} \quad |s'| \neq |s|. \tag{79.18}$$

Это соотношение обладает значительно меньшей общностью, чем соотношение (79.16), поскольку дополнительные соотношения (79.17) в линиях передачи выполняются далеко не всегда. В частности, они не справедливы при наличии потерь в стенках, поскольку тогда фаза электромагнитного поля зависит от x и y.

Физический смысл формулы (79.18) станет ясным, если мы будем вычислять комплексную мощность, переносимую через поперечное сечение волновода S_p полем

$$\mathbf{E} = \sum C_s \mathbf{E}_s; \quad \mathbf{H} = \sum C_s \mathbf{H}_s, \tag{79.19}$$

Электронное наследие России

равным сумме волн, распространяющихся в волноводе вдоль оси z. Эта комплексная мощность в силу соотношения (79.18) равна

$$\frac{c}{8\pi}\int\limits_{S_p}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]1\,dS=\frac{c}{8\pi}\sum_s\sum_{s'}C_sC_s^*\int\limits_{S_p}[\mathbf{E}_s\mathbf{H}_{s'}^*]1\,dS=$$

$$=\frac{c}{8\pi}\sum_s|C_s|^2\int\limits_{S_p}[\mathbf{E}_s\mathbf{H}_s^*]1\,dS. \qquad (79.20)$$

Таким образом, если в данном отрезке волновода поле представляется в виде суммы волн, распространяющихся в одну и ту же сторону, то переносимая этим полем комплексная мощность также распадается на сумму мощностей, переносимых каждой волной. „Взаимные“ мощности двух волн с разными индексами обращаются в нуль благодаря соотношению (79.18). Этим свойством волн в волноводе мы уже пользовались в § 44.

Рассмотрим теперь физический смысл нормы N_s, определяемой формулой (79.12). Учитывая соотношения (79.15), имеем

$$N_s=\mp\frac{c}{2\pi}\int[\mathbf{E}_s\mathbf{H}_s]1\,dS, \qquad (79.21)$$

где интегрирование производится по поперечному сечению $z=0$. Если справедливы соотношения (79.17), то

$$N_s=\mp\frac{c}{2\pi}f_s(0)\int[\mathbf{E}_s\mathbf{H}_s^*]1dS. \qquad (79.22)$$

Таким образом, норма N_s отличается лишь простым численным множителем $\mp 4f_s(0)$ от комплексной мощности, переносимой s-ой волной через „центральное“ поперечное сечение волновода $z=0$.

В обычных задачах математической физики, относящихся к одной скалярной функции ψ, условие ортогональности системы собственных функций ψ_s формулируется в виде

$$\int\psi_s(x)\psi_{s'}(x)\,dx=0 \text{ при } s'\neq s, \qquad (79.23)$$

а нормой собственной функции $\psi_s(x)$ называется величина

$$N_s=\int\psi_s^2(x)\,dx, \qquad (79.24)$$

ЭБ "Научное наследие России"

где символом x обозначена совокупность переменных, от которых зависят функции ψ_s, а интегрирование производится по фиксированной области изменения этих переменных. В задаче об электромагнитных волнах в волноводе вместо одной функции ψ_s фигурируют векторы $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$, заданные на каждом поперечном сечении S_p волновода, поэтому вместо условия (79.23) мы получили более сложное условие (79.11) или (79.16), а норму определили формулой (79.12).

Как мы видели выше, интерпретация условий ортогональности и выражения для нормы в духе теоремы о комплексной мощности (§ 6) возможна лишь в частных случаях, когда выполняются соотношения (79.17). Если же привлечь теорему о колеблющейся мощности (§ 7), то физическую интерпретацию этих соотношений можно дать в самом общем случае. Действительно, из условий (79.11) и (79.16) для поля (79.19) мы сразу получаем

$$\frac{c}{8\pi}\int\limits_{S_p}[\mathbf{EH}]\,\mathrm{I}\,dS=\frac{c}{8\pi}\sum_s C_s^2\int\limits_{S_p}[\mathbf{E}_s\mathbf{H}_s]\,\mathrm{I}\,dS, \tag{79.25}$$

т. е. колеблющаяся мощность, переносимая суммой волн через поперечное сечение волновода, равна сумме колеблющихся мощностей, переносимых каждой волной в отдельности. Что же касается нормы N_s, то из формулы (79.21) сразу видно, что она отличается лишь множителем ∓ 4 от колеблющейся мощности, переносимой s-ой волной через поперечное сечение $z=0$,

§ 80. Возбуждение волноводов

Предположим, что все источники поля (электрические и магнитные токи) находятся при $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$. Так как при $z<z_1$ и $z>z_2$ искомое электромагнитное поле удовлетворяет однородным уравнениям (79.01), то оно должно иметь вид (79.07). Однако поле, возбуждаемое данными источниками, должно при $z\to\pm\infty$ стремиться к нулю вследствие потерь в волноводе; только при этом дополнительном условии согласно § 10 мы получаем единственное решение электродинамической задачи. Поэтому справа от источников мы должны иметь

$$\mathbf{E}=\sum C_s\mathbf{E}_s;\ \mathbf{H}=\sum C_s\mathbf{H}_s\quad(\text{при } z>z_2), \tag{80.01}$$

а слева от источников

$$\mathbf{E}=\sum C_{-s}\mathbf{E}_{-s};\quad \mathbf{H}=\sum C_{-s}\mathbf{H}_{-s}\ (\text{при } z<z_1). \tag{80.02}$$

Научное наследие России

Таким образом, волны должны расходиться от области, занятой источниками. Комплексные амплитуды этих волн (коэффициенты C_s и C_{-s}) легко найти, если воспользоваться леммой Лоренца (77.04), в которой вместо поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ возьмем искомое поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, удовлетворяющее уравнениям (79.02), а в качестве поля $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ мы возьмем сначала поле $\mathbf{E}_{-s'}$, $\mathbf{H}_{-s'}$, а затем поле $\mathbf{E}_{s'}$, $\mathbf{H}_{s'}$ (считаем $s'>0$). Поверхность S выберем так же, как и раньше (рис. 111), причем возьмем поперечное сечение S_1 левее всех источников, т. е. при $z<z_1$, а сечение S_2 — правее всех источников, при $z>z_2$. В результате получим соотношения

$$\left.\begin{aligned}
&\oint_S \{[\mathbf{E}\mathbf{H}_{-s'}]-[\mathbf{E}_{-s'},\mathbf{H}]\}\,\mathbf{n}\,dS= \\
&=\frac{4\pi}{c}\int_V (\mathbf{j}^e\mathbf{E}_{-s'}-\mathbf{j}^m\mathbf{H}_{-s'})\,dV, \\
&\oint_S \{[\mathbf{E}\mathbf{H}_{s'}]-[\mathbf{E}_{s'},\mathbf{H}]\}\,\mathbf{n}\,dS= \\
&=\frac{4\pi}{c}\int_V (\mathbf{j}^e\mathbf{E}_{s'}-\mathbf{j}^m\mathbf{H}_{s'})\,dV.
\end{aligned}\right\} \qquad (80.03)$$

Интеграл по поверхности S_0 обращается в нуль по тем же причинам, что и раньше. На сечениях S_1 и S_2 векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ представляются в виде рядов (80.01) и (80.02). Из условия ортогональности (79.11) и формулы (79.12) вытекает, что

$$\int_{S_1} \{[\mathbf{E}\mathbf{H}_{-s'}]-[\mathbf{E}_{-s'},\mathbf{H}]\}\,\mathbf{l}\,dS=\sum_s C_{-s}J_{-s,\,-s'}=0,$$

$$\int_{S_2} \{[\mathbf{E}\mathbf{H}_{-s'}]-[\mathbf{E}_{-s'},\mathbf{H}]\}\,\mathbf{l}\,dS=\sum_s C_s J_{s,\,-s'}=C_{s'}\frac{4\pi}{c}N_{s'},$$

$$\int_{S_1} \{[\mathbf{E}\mathbf{H}_{s'}]-[\mathbf{E}_{s'},\mathbf{H}]\}\,\mathbf{l}\,dS=$$

$$=\sum_s C_{-s}J_{-s,\,s'}=C_{-s'}J_{-s',\,s'}=-C_{-s'}\frac{4\pi}{c}N_{s'},$$

$$\int_{S_2} \{[\mathbf{E}\mathbf{H}_{s'}]-[\mathbf{E}_{s'},\mathbf{H}]\}\,\mathbf{l}\,dS=\sum_s C_s J_{s,\,s'}=0.$$

ЭБ "Научное наследие России"

Окончательно получаем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} C_s &= \frac{1}{N_s}\int_V (\mathbf{j}^e\mathbf{E}_{-s} - \mathbf{j}^m\mathbf{H}_{-s})\,dV, \\ C_{-s} &= \frac{1}{N_s}\int_V (\mathbf{j}^e\mathbf{E}_s - \mathbf{j}^m\mathbf{H}_s)\,dV, \end{aligned}\right\} \qquad (80.04)$$

определяющие коэффициенты C_s и C_{-s} в виде интегралов по объему, занятому источниками. Заметим, что C_s и C_{-s} получились постоянными (не зависящими от z), как это и предполагалось при написании формул (80.01) и (80.02). Выведенные выражения имеют простой и наглядный вид. Их недостаток заключается в том, что в области $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$, занятой источниками, они неприменимы. Для определения электромагнитного поля при некотором z, лежащем между z_1 и z_2 (рис. 112,*а*), можно воспользоваться следующим приемом: мысленно удалим (рис. 112,*б*) источники

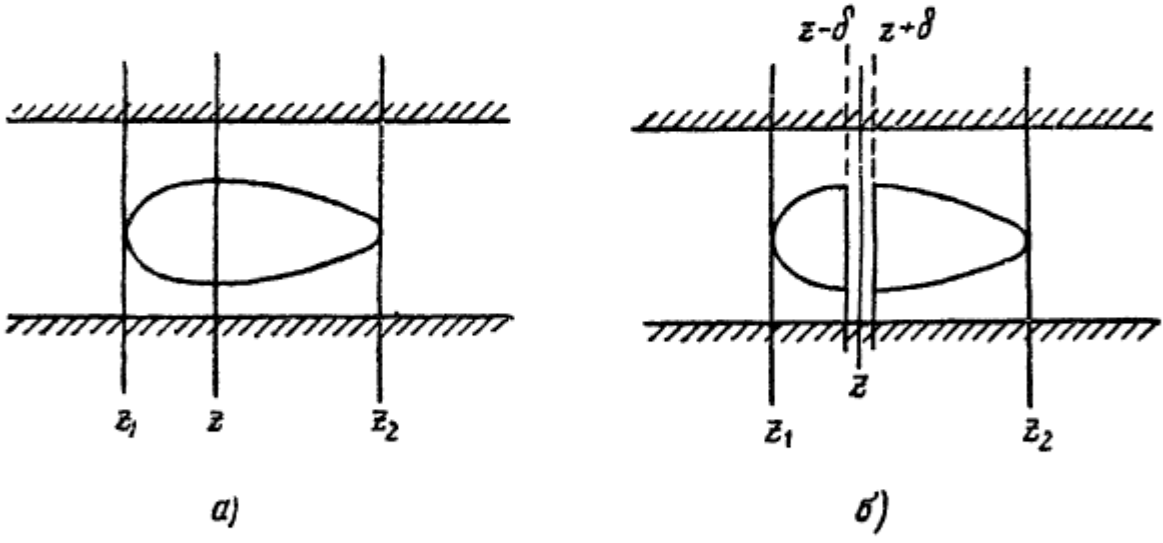


Рис. 112. Поле в области, занятой источниками:
а — основная задача; *б* — вспомогательная задача.

из плоского слоя $(z-\delta,\ z+\delta)$ и обозначим получающееся в сечении z электромагнитное поле через $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$. Поле $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ есть, в сущности, поле в области, свободной от источников, поэтому его можно представить в виде (79.07). По соображениям, приведенным выше, электромагнитные волны, распространяющиеся направо ($\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$), создаются „левыми" источниками, находящимися слева от данного сечения z, а волны, распространяющиеся налево ($\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$) — „пра-

Электронное наследие России

выми" источниками. Поэтому в пределе при $\delta \to 0$ мы получаем

$$\left.\begin{aligned} C_s &= \frac{1}{N_s} \int\limits_{(z_1,\, z)} (\mathbf{j}^e \mathbf{E}_{-s} - \mathbf{j}^m \mathbf{H}_{-s})\, dV, \\ C_{-s} &= \frac{1}{N_s} \int\limits_{(z_1,\, z_2)} (\mathbf{j}^e \mathbf{E}_s - \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s)\, dV, \end{aligned}\right\} \qquad (80.05)$$

где скобка (z_1, z) означает, что интегрирование производится по всем источникам левее данного сечения z, а скобка (z, z_2) — интегрирование по всем источникам правее сечения z.

Однако поле $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ отличается от поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, существующего в том же сечении до удаления источников; а именно, удаляя источники из слоя, мы тем самым обрываем продольные электрические и магнитные токи и создаем на поперечных сечениях $z - \delta$ и $z + \delta$ поверхностные электрические и магнитные заряды. На сечении $z - \delta$ поверхностные плотности электрического заряда σ^e и магнитного заряда σ^m связаны с продольными составляющими j_z^e и j_z^m соотношениями

$$\frac{\partial \sigma^e}{\partial t} = j_z^e; \quad \frac{\partial \sigma^m}{\partial t} = j_z^m, \qquad (80.06)$$

так что при временно́й зависимости $e^{-i\omega t}$

$$\sigma^e = -\frac{1}{i\omega} j_z^e; \quad \sigma^m = -\frac{1}{i\omega} j_z^m. \qquad (80.07)$$

В сечении $z + \delta$ плотности поверхностных зарядов равны соответственно $-\sigma^e$ и $-\sigma^m$. Поверхностные заряды создают в слое $(z - \delta, z + \delta)$ при $\delta \to 0$ дополнительное поле

$$\mathbf{E}'' = -\frac{4\pi}{i\omega\varepsilon} j_z^e \mathbf{1}; \quad \mathbf{H}'' = -\frac{4\pi}{i\omega\mu} j_z^m \mathbf{1}. \qquad (80.08)$$

Так как поле $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, получаемое по формулам (79.07) и (80.05), есть поле в „препарированном" поперечном сечении (рис. 112,*б*), а поле $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$ возникает в результате препарирования, то для определения поля, существующего в реальной системе (рис. 112,*а*), необходимо из первого поля *вычесть* второе. Мы приходим, таким образом, к

ЭБ "Научное наследие России"

окончательным выражениям для искомого электромагнитного поля:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=\sum (C_s\mathbf{E}_s+C_{-s}\mathbf{E}_{-s})+\frac{4\pi}{i\omega\varepsilon}j_z^e\mathbf{1},\\ \mathbf{H}&=\sum (C_s\mathbf{H}_s+C_{-s}\mathbf{H}_{-s})+\frac{4\pi}{i\omega\mu}j_z^m\mathbf{1},\end{aligned}\right\} \tag{80.09}$$

где коэффициенты C_s и C_{-s} даются формулами (80.05). При $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ эти коэффициенты являются функциями от z, так как при изменении z „левые источники" превращаются в „правые" (или наоборот) и вследствие этого амплитуды волн изменяются.

Вне области, занятой источниками, дополнительные слагаемые в формулах (80.09) пропадают, коэффициенты C_s и C_{-s} перестают зависеть от z и формулы (80.09) переходят в формулы (80.01) и (80.02). Поэтому выражения (80.04) и (80.09) дают нам самую общую запись электромагнитного поля, возбужденного в волноводе заданными источниками.

В следующем параграфе мы подробно рассмотрим частные случаи возбуждения волноводов сторонними электрическими токами, т. е. вибраторами, электронными потоками и т. д. Что же касается сторонних магнитных токов, то согласно § 78 они позволяют рассмотреть возбуждение электромагнитных волн рамочными антеннами, щелями и отверстиями. В частности, если возбуждение волновода производится с помощью отверстия в его идеально проводящей стенке S_0, то формулы (80.04) принимают вид

$$C_s=-\frac{1}{N_s}\int\limits_{S_0}\mathbf{i}^m\mathbf{H}_{-s}dS;\quad C_{-s}=-\frac{1}{N_s}\int\limits_{S_0}\mathbf{i}^m\mathbf{H}_s dS, \tag{80.10}$$

где вследствие поверхностного характера магнитного тока интегралы распространяются по площади отверстия (или щели). Пользуясь соотношением (78.14), преобразуем эти формулы к виду

$$C_s=\frac{1}{N_s}\frac{c}{4\pi}\int\limits_{S_0}[\mathbf{nE}]\,\mathbf{H}_{-s}dS;\quad C_{-s}=\frac{1}{N_s}\frac{c}{4\pi}\int\limits_{S_0}[\mathbf{nE}]\,\mathbf{H}_s dS, \tag{80.11}$$

где $\mathbf{E}$ есть электрическое поле на отверстии. Иначе можно написать

$$C_s=-\frac{1}{N_s}\int\limits_{S_0}\mathbf{E}\mathbf{i}_{-s}dS;\quad C_{-s}=-\frac{1}{N_s}\int\limits_{S_0}\mathbf{E}\mathbf{i}_s dS, \tag{80.12}$$

Электронное наследие России

где

$$\mathbf{i}_s = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{H}_s]; \quad \mathbf{i}_{-s} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{H}_{-s}] \tag{80.13}$$

суть поверхностные токи, возбуждаемые s-ой и $-s$-ой волнами на (неразрезанной) стенке волновода S_0.

§ 81. Некоторые применения теории возбуждения волноводов

Если электромагнитное поле в волноводе возбуждается только сторонними электрическими токами, то формулы (80.04) принимают вид

$$C_s = \frac{1}{N_s}\int_V \mathbf{j}^e \mathbf{E}_{-s} dV; \quad C_{-s} = \frac{1}{N_s}\int_V \mathbf{j}^e \mathbf{E}_s dV. \tag{81.01}$$

Эти формулы показывают, что для наиболее эффективного возбуждения s-ой волны (с наибольшим по абсолютной величине коэффициентом C_s) необходимо создать распределение плотности электрического тока по формуле

$$\mathbf{j}^e = A\mathbf{E}^*_{-s} \tag{81.02}$$

или близкое к ней, где A — постоянная. В ряде случаев это распределение эквивалентно распределению по формуле

$$\mathbf{j}^e = B\mathbf{E}_s. \tag{81.03}$$

Такая эквивалентность имеет место, в частности, для распространяющихся волн в волноводах с идеальными стенками, что легко вывести из формул (39.06) и (40.02). Таким образом, плотность стороннего электрического тока должна воспроизводить электрическое поле волны, которую нужно возбудить—по направлению, амплитуде и фазе.

Разумеется, формулы (81.02) и (81.03) не следует понимать слишком буквально; как мы увидим дальше, для эффективного возбуждения s-ой волны в волноводе нет необходимости создавать непрерывное распределение тока, поскольку даже элементарный диполь приводит к той же цели. Однако эти формулы показывают, что элементы тока, перпендикулярные электрическому полю данной волны, вовсе ее не возбуждают и что при наличии нескольких элементов тока суммарное их действие будет наибольшим, если направления, амплитуды и фазы будут выбраны в соответствии с формулой (81.02) или (81.03).

ЭБ "Научное наследие России"

При конструировании излучающих устройств в волноводе обычно исходят из сформулированного выше принципа. Тот же принцип используется и при подборе фильтров, отражающих одни волноводные волны и пропускающих другие. Эти фильтры могут иметь, например, вид проволочных решеток, расположенных в поперечном сечении волновода. Так как отразить данную волну с индексом s—это значит возбудить волну с индексом $-s$, то и в этом случае необходимо, чтобы текущие по решетке токи воспроизводили структуру отражаемой волны. По тонким проводникам токи могут течь лишь в одном направлении—вдоль проводников, поэтому проводники должны быть направлены по электрическим силовым линиям данной волны. Так, например, решеткой из вертикальных (по оси y) проволок, расположенных достаточно часто, отражают волну H_{10} и пропускают волну H_{01} в прямоугольном волноводе. Заметим, что этот фильтр не отличается принципиально от решетки из параллельных проводов, с помощью которой можно отфильтровать в свободном пространстве плоскую электромагнитную волну определенной поляризации (ср. § 72).

В лампе с бегущей волной и в подобных ей электронных приборах эффективное возбуждение электромагнитного поля осуществляется с помощью электронного потока, пронизывающего „волновод" в направлении оси z. Так как все возмущения в электронном потоке перемещаются вдоль оси z со скоростью электронов v, то плотность переменного конвекционного тока $\mathbf{j}^e$ в электронном пучке имеет вид волны, распространяющейся вдоль оси z со скоростью v. Соотношение (81.03) показывает, что наиболее эффективное возбуждение имеет место при скорости электронов, близкой к фазовой скорости одной из волн в „волноводе" (ср. § 61). Поэтому в лампе с бегущей волной применяются волноводы с медленными волнами, например диафрагмированные (§ 68) или спиральные (§ 72). Заметим, что развитая выше теория возбуждения волноводов применима и к таким волноводам.

Предположим теперь, что возбуждение производится с помощью элементарного диполя, находящегося в точке 1 и имеющего векторную длину $\mathbf{l}$ и электрический ток J. Тогда первая формула (81.01) дает

$$C_s = \frac{1}{N_s} J \mathbf{l} \mathbf{E}_{-s}(1) = \frac{1}{N_s} J l E^{(s)}, \qquad (81.04)$$

ЭБ "Культурное наследие России"

где через $E^{(s)}$ обозначено „действующее“ поле s-ой волны в волноводе—проекция вектора $\mathbf{E}_{-s}(1)$ на направление диполя 1.

Согласно формуле (79.22) абсолютная величина нормы N_s равна (для волны, распространяющейся без затухания) учетверенной активной мощности, переносимой s-ой волной через поперечное сечение волновода. Возбуждаемая диполем s-ая волна переносит через каждое поперечное сечение активную мощность

$$\left|\bar{\Sigma}_s\right| = \left|C_s\right|^2 \frac{1}{4}\left|N_s\right| = \frac{|E^{(s)}|^2}{4|N_s|}|J|^2 l^2, \tag{81.05}$$

которую можно переписать в виде

$$\bar{\Sigma}_s = \frac{1}{2} R_s |J|^2, \tag{81.06}$$

где величину

$$R_s = \frac{|E^{(s)}|^2}{2|N_s|} l^2 \tag{81.07}$$

можно назвать сопротивлением излучения диполя, обусловленным возбуждением s-ой волны. Напомним, что сопротивление излучения диполя в свободном пространстве равно

$$R_0 = \frac{2}{3c}(kl)^2 \tag{81.08}$$

и отношение этих сопротивлений равно

$$\frac{R_s}{R_0} = \frac{3c|E^{(s)}|^2}{4k^2|N_s|}. \tag{81.09}$$

Рассмотрим для примера возбуждение волны H_{10} в прямоугольном волноводе. Присвоим этой волне индекс $s = \pm 1$. Полагая в формулах (41.18) $ikgC = 1$, получим

$$\left.\begin{aligned}
&E_{1,y} = \sin gx\, e^{ihz}; \qquad E_{-1,y} = \sin gx\, e^{-ihz};\\
&H_{1,x} = -\frac{h}{k}\sin gx\, e^{ihz}; \quad H_{-1,x} = \frac{h}{k}\sin gx\, e^{-ihz};\\
&H_{1,z} = -\frac{ig}{k}\cos gx\, e^{ihz}; \quad H_{-1,z} = -\frac{ig}{k}\cos gx\, e^{-ihz},
\end{aligned}\right\} \tag{81,10}$$

ЭБ "Научное наследие России"

где $g=\frac{\pi}{a}$, $h=\sqrt{k^2-g^2}$. Составляющие обратной волны ($s=-1$) мы получили, заменив h на $-h$. Норма N_1 равна

$$N_1=-\frac{c}{2\pi}\int E_{1,y}H_{-1,x}dS=-\frac{c}{2\pi}\frac{h}{k}\int_0^a\int_0^b \sin^2 gx\,dx\,dy$$

или

$$N_1=-\frac{c}{4\pi}\frac{hab}{k}. \qquad (81.11)$$

Как легко проверить непосредственным вычислением, это выражение дает (с точностью до знака) учетверенное значение мощности, переносимое полем (81.10) через сечение волновода. К такому же результату приводит и формула (79.22), если учесть, что в данном случае $\mp f_1(0)=1$.

Если элементарный диполь находится внутри прямоугольного волновода в точке $x=x_0$, $y=y_0$, $z=0$, то формулы (80.01) и (80.02) принимают следующий вид

$$\left.\begin{array}{ll}\mathbf{E}=C_1\mathbf{E}_1+\ldots; & \mathbf{H}=C_1\mathbf{H}_1+\ldots \quad \text{при } z>0\\ \mathbf{E}=C_{-1}\mathbf{E}_{-1}+\ldots; & \mathbf{H}=C_{-1}\mathbf{H}_{-1}+\ldots \quad \text{при } z<0,\end{array}\right\} \qquad (81.12)$$

где индексом ± 1 обозначена распространяющаяся волна H_{10}, а многоточия соответствуют всем другим волнам, которые мы считаем затухающими.

Пользуясь формулой (81.04), получим

$$C_1=C_{-1}=-\frac{4\pi}{c}\frac{k}{hab}Jl_y\sin gx_0, \qquad (81.13)$$

где l_y — проекция векторной длины диполя $\mathbf{l}$ на ось y, по которой направлено электрическое поле волны H_{10}. Активная мощность, излучаемая диполем в обе стороны, равна

$$\overline{\Sigma}=(|C_1|^2+|C_{-1}|^2)\frac{c}{16\pi}\frac{hab}{k}, \qquad (81.14)$$

поскольку затухающие волны переносят лишь реактивную мощность. Если считать, что диполь направлен по оси y, то $l_y=l$, и формула (81.14) принимает вид

$$\overline{\Sigma}=\frac{2\pi}{c}\frac{k\sin^2 gx_0}{hab}|J|^2l^2. \qquad (81.15)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Мощность $\bar{\Sigma}_0$, излучаемая диполем в свободное пространство, как известно, равна

$$\bar{\Sigma}_0 = \frac{1}{2} R_0 |J|^2, \tag{81.16}$$

где R_0 есть сопротивление излучения диполя, определяемое формулой (81.08). Мощность (81.15) может быть также записана в виде

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{2} R |J|^2, \tag{81.17}$$

где, по определению, R есть сопротивление излучения диполя в волноводе. Оно равно

$$R = \frac{4\pi}{c} \frac{\sin^2 gx_0}{khab} (kl)^2. \tag{81.18}$$

Отношение сопротивлений R и R_0 оказывается равным

$$\frac{R}{R_0} = \frac{6\pi \sin^2 gx_0}{khab}. \tag{81.19}$$

В обычных условиях это отношение немного превышает единицу, если взять $x_0 = \frac{a}{2}$. Таким образом, диполь в волноводе излучает электромагнитную энергию примерно с той же эффективностью, что и диполь в свободном пространстве.

Непосредственное применение формулы (81.07) дает

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{3\pi \sin^2 gx_0}{khab}. \tag{81.20}$$

Это выражение вдвое меньше (81.19), поскольку в нем мы учитываем излучение только в одну сторону. Полное сопротивление излучения диполя R равно

$$R = R_1 + R_{-1} = 2R_1. \tag{81.21}$$

На практике в волноводе обычно создается одностороннее излучение, поскольку с другой стороны волновод ограничен, например, поперечной перегородкой; пусть она находится при $z = -L$ (рис. 113). В этом случае нужно учесть, что волны, распространяющиеся от диполя налево, отра-

ЭБ "Научное наследие России"

жаются от перегородки $z=-L$, так что при $-L<z<0$ поле имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=C_{-1}(\mathbf{E}_{-1}-e^{2ihL}\mathbf{E}_1),\\ \mathbf{H}&=C_{-1}(\mathbf{E}_{-1}-e^{2ihL}\mathbf{H}_1).\end{aligned}\right\} \tag{81.22}$$

Коэффициент $-e^{2ihL}$ при отраженной волне $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ определяется из граничного условия: $E_y=0$ при $z=-L$. Эта

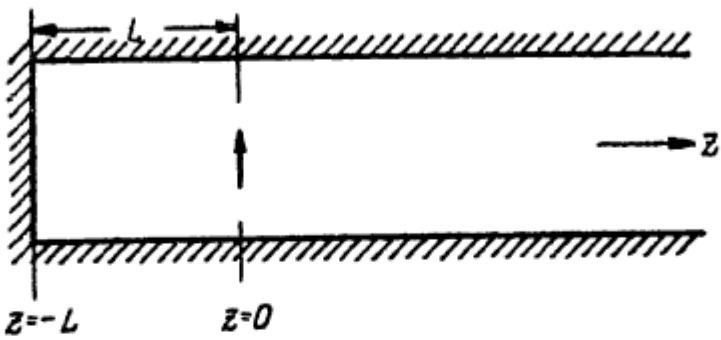


Рис. 113. Возбуждение полубесконечного волновода.

отраженная волна возникает вследствие наличия перегородки и будет присутствовать также при $z>0$. Поэтому полное поле справа от диполя (при $z>0$) имеет вид

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=(C_1-C_{-1}e^{2ihL})\,\mathbf{E}_1,\\ \mathbf{H}&=(C_1-C_{-1}e^{2ihL})\,\mathbf{H}_1.\end{aligned}\right\} \tag{81.23}$$

Активная мощность $\overline{\Sigma}_L$ одностороннего излучения будет поэтому равна

$$\overline{\Sigma}_L=\left|C_1-C_{-1}e^{2ihL}\right|^2\frac{c}{16\pi}\frac{hab}{k}. \tag{81.24}$$

Если воспользоваться формулами (81.13) и (81.14), то можно $\overline{\Sigma}_L$ связать с мощностью двухстороннего излучения $\overline{\Sigma}$ соотношением

$$\overline{\Sigma}_L=\frac{1}{2}\left|1-e^{2ihL}\right|^2\overline{\Sigma}, \tag{81.25}$$

или

$$\overline{\Sigma}_L=2\sin^2(hL)\,\overline{\Sigma}. \tag{81.26}$$

Электронное наследие России

Сопротивление одностороннего излучения R_L равно

$$R_L = 2\sin^2(hL)\,R. \qquad (81.27)$$

Задачу о возбуждении полубесконечного волновода можно решить также методом изображений. Из электростатики известно, что поле заряда над проводящей плоскостью эквивалентно полю заряда и его зеркального изображения в свободном пространстве (рис. 114,*а*). Отсюда вытекают законы отражения для электростатических диполей—нормального к плоскости (рис. 114,*б*) и параллельного ей (рис. 114,*в*). Если плоскость обладает идеальной проводимостью, то эти законы отражения применимы и в электродинамике. Они также обобщаются на случай, когда идеально проводящая плоскость перегораживает волновод, как на рис. 113. Поэтому электромагнитное поле в волноводе, показанном на рис. 113, совпадает при $z > -L$ с электромагнитным полем, возбуждаемым в бесконечном волноводе двумя диполями: в точке $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 0$ и в точке $x = x_0$, $y = y_0$, $z = -2L$, причем второй диполь является зеркальным изображением реального диполя (первого) в плоскости $z = -L$.

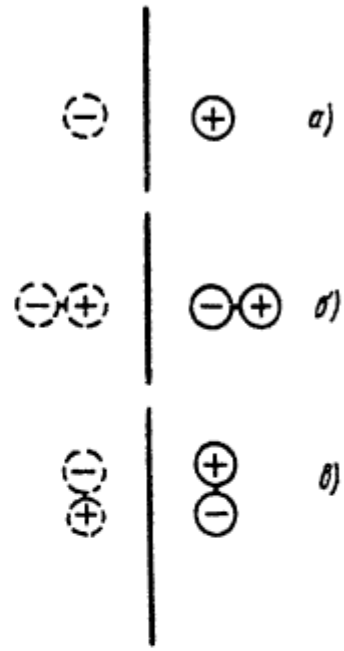


Рис. 114. Отражение электрических зарядов и диполей в плоскости.

Развитая выше теория возбуждения волн заданными источниками может быть применена для решения большого числа электродинамических задач. В частности, с ее помощью может быть развита теория лампы с бегущей волной и родственных ей электронных приборов. Существенным параметром этой теории является величина

$$\frac{[E^{(s)}]^2}{N_s}, \qquad (81.28)$$

равная отношению квадрата действующего на электроны поля s-ой волны, синхронизированной с электронным пучком, к норме этой волны. Из формулы (81.07) видно, что величина (81.28) определяет взаимодействие электронного пучка и волны, в частности мощность, сообщаемую волне электронным пучком.

ЭБ "Научное наследие России"

§ 82*. Дополнения к теории возбуждения волноводов

Данный в § 80 вывод основных формул (80.05) и (80.09) нельзя считать строгим с математической точки зрения. Поэтому мы возвращаемся здесь к этому вопросу; ниже будет показано, что основные формулы можно получить из аналитических соображений, не прибегая к мысленным „разрезам“ сторонних токов.

В силу установленного выше особого значения продольных составляющих тока и поля мы будем любой вектор $\mathbf{E}$ с составляющими E_x, E_y, E_z представлять в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^t + \mathbf{E}^l, \tag{82.01}$$

где $\mathbf{E}^t$ (поперечная часть $\mathbf{E}$) есть вектор с составляющими E_x, E_y, 0, а $\mathbf{E}^l$ (продольная часть $\mathbf{E}$) есть вектор с составляющими 0, 0, E_z.

Как легко проверить непосредственным вычислением в декартовых координатах x, y, z, поперечная и продольная части вектора $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ равны

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{rot}\mathbf{E})^t &= \operatorname{rot}\mathbf{E}^l + \left[\mathbf{1}\frac{\partial \mathbf{E}^t}{\partial z}\right], \\ (\operatorname{rot}\mathbf{E})^l &= \operatorname{rot}\mathbf{E}^t - \left[\mathbf{1}\frac{\partial \mathbf{E}^t}{\partial z}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{82.02}$$

Эти выражения позволяют разбить комплексные уравнения поля (79.02) на „поперечные“ уравнения

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E}^l + \left[\mathbf{1}\frac{\partial \mathbf{E}^t}{\partial z}\right] &= ik\mu\mathbf{H}^t - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{mt} \\ \operatorname{rot}\mathbf{H}^l + \left[\mathbf{1}\frac{\partial \mathbf{H}^t}{\partial z}\right] &= -ik\varepsilon\mathbf{E}^t + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{et} \end{aligned}\right\} \tag{82.03}$$

и „продольные“ уравнения

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E}^t - \left[\mathbf{1}\frac{\partial \mathbf{E}^t}{\partial z}\right] &= ik\mu\mathbf{H}^l - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{ml} \\ \operatorname{rot}\mathbf{H}^t - \left[\mathbf{1}\frac{\partial \mathbf{H}^t}{\partial z}\right] &= -ik\varepsilon\mathbf{E}^l + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{el} \end{aligned}\right\} \tag{82.04}$$

В таком же виде, но при $\mathbf{j}^e = \mathbf{j}^m = 0$, могут быть записаны однородные уравнения (79.01) для поля без источников, в частности уравнения для поля $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ или $\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$ любой собственной волны системы.

Поперечную часть электромагнитного поля в волноводе, возбуждаемого источниками, мы будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}^t &= \sum (C_s \mathbf{E}_s^t + C_{-s}\mathbf{E}_{-s}^t),\\ \mathbf{H}^t &= \sum (C_s \mathbf{H}_s^t + C_{-s}\mathbf{H}_{-s}^t),\end{aligned}\right\} \tag{82.05}$$

где неизвестные нам коэффициенты C_s и C_{-s} — „комплексные амплитуды" волн — вообще говоря, зависят от z.

Пользуясь тем, что поля $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ и $\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$ удовлетворяют однородным уравнениям (82.04) (при $\mathbf{j}^e = \mathbf{j}^m = 0$), мы почленным дифференцированием рядов (82.05) получаем тождества

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{E}^t - \left[1\frac{\partial \mathbf{E}^t}{\partial z}\right] &= ik\mu \sum (C_s \mathbf{H}_s^l + C_{-s}\mathbf{H}_{-s}^l),\\ \operatorname{rot}\mathbf{H}^t - \left[1\frac{\partial \mathbf{H}^t}{\partial z}\right] &= -ik\varepsilon \sum (C_s \mathbf{E}_s^l + C_{-s}\mathbf{E}_{-s}^l),\end{aligned}\right\} \tag{82.06}$$

причем мы воспользовались известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{A}) = [\operatorname{grad} f,\ \mathbf{A}] + f \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{82.07}$$

Подставляя их в „продольные" уравнения (82.04), мы получаем следующие выражения для продольной части искомого электромагнитного поля:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}^l &= \sum (C_s \mathbf{E}_s^l + C_{-s}\mathbf{E}_{-s}^l) + \frac{4\pi}{i\omega\varepsilon}\mathbf{j}^{el},\\ \mathbf{H}^l &= \sum (C_s \mathbf{H}_s^l + C_{-s}\mathbf{H}_{-s}^l) + \frac{4\pi}{i\omega\mu}\mathbf{j}^{ml},\end{aligned}\right\} \tag{82.08}$$

которые вместе с формулами (82.05) эквивалентны формулам (80.09).

Для определения коэффициентов $C_s(z)$ и $C_{-s}(z)$ воспользуемся „поперечными" уравнениями (82.03). Почленное дифференцирование рядов (82.05) и (82.08) дает тождества

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{E}^l + \left[1\frac{\partial \mathbf{E}^t}{\partial z}\right] &= ik\mu\mathbf{H}^t + \sum\left\{\frac{dC_s}{dz}[1\mathbf{E}_s^t] + \right.\\ &\left. + \frac{dC_{-s}}{dz}[1\mathbf{E}_{-s}^t]\right\} + \frac{4\pi}{i\omega}\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\mathbf{j}^{ml},\\ \operatorname{rot}\mathbf{H}^l + \left[1\frac{\partial \mathbf{H}^t}{\partial z}\right] &= -ik\varepsilon\mathbf{E}^t + \sum\left\{\frac{dC_s}{dz}[1\mathbf{H}_s^t] + \right.\\ &\left. + \frac{dC_{-s}}{dz}[1\mathbf{H}_{-s}^t]\right\} + \frac{4\pi}{i\omega}\operatorname{rot}\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{j}^{el},\end{aligned}\right\} \tag{82.09}$$

подстановка которых в уравнения (82.03) приводит к соотношениям

$$\left.\begin{aligned}
&\sum\left\{\frac{dC_s}{dz}[1\mathbf{E}_s^t]+\frac{dC_{-s}}{dz}[1\mathbf{E}_{-s}^t]\right\}=\\
&\quad=-\frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j}^{mt}+\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{j}^{el}\right);\\
&\sum\left\{\frac{dC_s}{dz}[1\mathbf{H}_s^t]+\frac{dC_{-s}}{dz}[1\mathbf{H}_{-s}^t]\right\}=\\
&\quad=\frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j}^{et}-\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\mathbf{j}^{ml}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(82.10)$$

Мы предполагаем, что заданные векторные функции, стоящие в правых частях соотношений (82.10), могут быть разложены в ряды, выписанные в левой части. Иначе говоря, мы предполагаем, что поперечные векторные функции $[1\mathbf{E}_{\pm s}^t]$ и $[1\mathbf{H}_{\pm s}^t]$ образуют (при $z=\text{const}$) полную систему функций, по которой можно производить разложение правых частей (82.10). По существу, мы уже сделали это предположение, записав поперечную часть искомого поля в виде (82.05).

Производные $\frac{dC_s}{dz}$ и $\frac{dC_{-s}}{dz}$ легко определяются из соотношений (82.10), если воспользоваться условием ортогональности (79.11). Для этого умножаем первое соотношение (82.10) скалярно на $\mathbf{H}_{s'}$, второе—на $\mathbf{E}_{s'}$ и интегрируем по всему поперечному сечению $z=\text{const}$. В результате получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_s\left\{\frac{dC_s}{dz}\int[\mathbf{E}_s\mathbf{H}_{s'}]1dS+\frac{dC_{-s}}{dz}\int[\mathbf{E}_{-s}\mathbf{H}_{s'}]1dS\right\}=\\
&\quad=-\frac{4\pi}{c}\int\left(\mathbf{j}^{mt}+\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{j}^{el}\right)\mathbf{H}_{s'}dS,\\
&\sum_s\left\{\frac{dC_s}{dz}\int[\mathbf{E}_{s'}\mathbf{H}_s]1dS+\frac{dC_{-s}}{dz}\int[\mathbf{E}_{s'}\mathbf{H}_{-s}]1dS\right\}=\\
&\quad=\frac{4\pi}{c}\int\left(\mathbf{j}^{et}-\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\mathbf{j}^{ml}\right)\mathbf{E}_{s'}dS.
\end{aligned}\right\}\qquad(82.11)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Складывая правые и левые части формулы (82.11), пользуясь соотношениями (79.11) и (79.12) и полагая поочередно $s'>0$ и $s'<0$, мы приходим к выражениям

$$\frac{dC_s}{dz}N_s=\int\limits_{S_p}\left\{\left(\mathbf{j}^{et}-\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\mathbf{j}^{ml}\right)\mathbf{E}_{-s}-\right.$$
$$\left.-\left(\mathbf{j}^{mt}+\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\frac{1}{\varepsilon}\,\mathbf{j}^{el}\right)\mathbf{H}_{-s}\right\}dS,$$
$$-\frac{dC_{-s}}{dz}N_s=\int\limits_{S_p}\left\{\left(\mathbf{j}^{et}-\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\mathbf{j}^{ml}\right)\mathbf{E}_s-\right.$$
$$\left.-\left(\mathbf{j}^{mt}+\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\frac{1}{\varepsilon}\,\mathbf{j}^{el}\right)\mathbf{H}_s\right\}dS. \qquad (82.12)$$

Полученные интегралы нетрудно упростить. Так, например,

$$\int\left(\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\mathbf{j}^{ml}\right)\mathbf{E}_s dS=\int\left[\operatorname{grad}\frac{1}{\mu}j_z^m,\ \mathbf{1}\right]\mathbf{E}_s dS=$$
$$=-\int\left[\operatorname{grad}\frac{1}{\mu}j_z^m,\ \mathbf{E}_s\right]\mathbf{1}dS=-\int\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}j_z^m,\ \mathbf{E}_s\right)\mathbf{1}dS+$$
$$+\int\frac{1}{\mu}j_z^m\operatorname{rot}\mathbf{E}_s\mathbf{1}dS=-\oint\limits_C\frac{1}{\mu}j_z^m\mathbf{E}_s d\mathbf{s}+ik\int j_z^m\mathbf{H}_s\mathbf{1}dS.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Стокса и дважды применили тождество (82.07).

Мы будем считать, что выполняются условия (при $s\gtrless 0$)

$$\left.\begin{aligned}\oint\limits_C\frac{1}{\mu}j_z^m\mathbf{E}_s d\mathbf{s}=0,\\ \oint\limits_C\frac{1}{\varepsilon}j_z^e\mathbf{H}_s d\mathbf{s}=0,\end{aligned}\right\} \qquad (82.13)$$

где C есть контур, являющийся пересечением цилиндрической поверхности S_0, ограничивающей поле (ср. § 79), и поперечного сечения $z=\text{const}$. При условии (79.05) соотношения (82.13) всегда выполняются, при граничном условии (79.03) они имеют место, если дополнительно потребовать

$$j_z^e=0 \text{ на } S_0 \qquad (82.14)$$

Электронное наследие России

и при граничном условии (79.04) для этого еще необходимо, чтобы

$$j_z^e = j_z^m = 0 \text{ на } S_0. \tag{82.15}$$

Последнее требование трудно рассматривать как существенное ограничение, поскольку граничное условие Леонтовича (79.04) справедливо лишь тогда, когда все источники находятся на конечном расстоянии от поверхности проводящего тела (ср. § 25).

Условия (82.13) приводят к соотношениям (при $s \gtrless 0$)

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_{S_p} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu}\, \mathbf{j}^{ml} \mathbf{E}_s\, dS &= ik \int\limits_{S_p} \mathbf{j}^{ml} \mathbf{H}_s\, dS, \\ \int\limits_{S_p} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu}\, \mathbf{j}^{el} \mathbf{H}_s\, dS &= -ik \int\limits_{S_p} \mathbf{j}^{el} \mathbf{E}_s\, dS, \end{aligned}\right\} \tag{82.16}$$

позволяющим переписать формулы (82.12) в более простом виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dC_s}{dz} &= \frac{1}{N_s} \int\limits_{S_p} (\mathbf{j}^e \mathbf{E}_{-s} - \mathbf{j}^m \mathbf{H}_{-s})\, dS, \\ \frac{dC_{-s}}{dz} &= -\frac{1}{N_s} \int\limits_{S_p} (\mathbf{j}^e \mathbf{E}_s - \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s)\, dS. \end{aligned}\right\} \tag{82.17}$$

Коэффициенты C_s и C_{-s} должны удовлетворять „начальным условиям“

$$\left.\begin{aligned} C_s &= 0 \quad \text{при} \quad z < z_1 \quad \text{и} \quad s > 0, \\ C_{-s} &= 0 \quad \text{при} \quad z > z_2 \quad \text{и} \quad s > 0. \end{aligned}\right\} \tag{82.18}$$

Иначе говоря, электромагнитное поле должно представляться в виде волн, расходящихся от источников (ср. § 10 и § 80). Интегрируя уравнения (82.17) при учете условий (82.18), получаем окончательно

$$\left.\begin{aligned} C_s &= \frac{1}{N_s} \int\limits_{z_1}^{z} dz \int\limits_{S_p} (\mathbf{j}^e \mathbf{E}_{-s} - \mathbf{j}^m \mathbf{H}_{-s})\, dS, \\ C_{-s} &= \frac{1}{N_s} \int\limits_{z}^{z_2} dz \int\limits_{S_p} (\mathbf{j}^e \mathbf{E}_s - \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s)\, dS. \end{aligned}\right\} \tag{82.19}$$

...ое наследие России"

Эти выражения являются лишь более подробной записью наших основных формул (80.05).

Развитая выше теория возбуждения волноводов легко обобщается на другие, более сложные системы. Так например, соответствующие соотношения лишь с незначительными изменениями переносятся на передающие линии, имеющие периодическую структуру, на волноводы, заполненные гиротропными веществами (в которых проницаемости ε и μ имеют тензорный характер) и т. д. К „открытым" передающим линиям — однопроводной или двухпроводной линии, гребенке, ребристому или диэлектрическому стержню (гл. XI и XII), спиральному волноводу (гл. XIII) и т. п.— развитую теорию непосредственно применить нельзя, поскольку электромагнитное поле таких систем в плоскости поперечного сечения $z = \text{const}$ занимает бесконечную площадь.

В случае „открытой" системы развитая теория нуждается в некотором обобщении. Представим себе, что, например, однопроводная линия (или диэлектрический цилиндр) возбуждается источниками, находящимися на конечном расстоянии от линии. Если считать (в духе § 10), что окружающее пространство обладает потерями и при своем распространении волны затухают, то при мысленном заключении данной линии в коаксиальную идеально проводящую „трубу" достаточно большого, но конечного радиуса R_0 возбуждаемое поле заметного искажения не претерпевает. Но к такой системе уже применима теория возбуждения волноводов, развитая выше, и для расчета поля необходимо знать лишь собственные волны в системе. Последние разбиваются на два класса.

1. Поверхностные волны, исследованные выше (ср. § 61). Вследствие того, что их поля экспоненциально затухают в радиальном направлении, наличие трубы не оказывает влияния на их структуру и на их возбуждение—даже при отсутствии потерь в среде. Для идеально проводящей однопроводной линии поверхностная волна превращается в основную волну коаксиальной линии (§ 29), но мы сейчас этого случая не рассматриваем.

2. Волноводные волны, несколько искаженные действием центрального провода — металлического или диэлектрического. Эти волны образуют дискретную последовательность, которая при $R_0 \to \infty$ переходит в непрерывный спектр.

Если после предельного перехода $R_0 \to \infty$ положить потери в среде равными нулю (например считать $\varepsilon = \mu = 1$),

ЭБ "Научное наследие России"

то мы и получим решение интересующей нас задачи о возбуждении открытой линии. Из предыдущего ясно, что решение состоит из суммы волн, соответствующей дискретному спектру поверхностных волн, и из интеграла, соответствующего непрерывному спектру волноводных или „пространственных" волн.

Полное решение задачи о возбуждении открытой линии обычно проще получить другим путем, а именно с помощью интегралов Фурье. Однако первую часть решения — сумму поверхностных волн — можно вычислять по формулам, выведенным выше, чем мы и воспользуемся в следующем параграфе.

§ 83*. Возбуждение поверхностных волн

В § 69 мы показали, что вдоль гребенчатой структуры могут распространяться поверхностные волны, поле которых зависит лишь от двух координат x и z (рис. 81). Обозначим индексом 1 поверхностную волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z, индексом -1 такую же волну, но бегущую в отрицательном направлении. Поскольку над гребенкой (при $x>0$) поле определяется формулами (63.03), то при $-ikpA=1$ мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} H_{1,y} &= \mathrm{e}^{-px+ihz}; & H_{-1,y} &= \mathrm{e}^{-px-ihz};\\ E_{1,x} &= \frac{h}{k}\,\mathrm{e}^{-px+ihz}; & E_{-1,x} &= -\frac{h}{k}\,\mathrm{e}^{-px-ihz};\\ E_{1,z} &= -\frac{ip}{k}\,\mathrm{e}^{-px+ihz}; & E_{-1,z} &= -\frac{ip}{k}\,\mathrm{e}^{-px-ihz}. \end{aligned}\right\} \qquad (83.01)$$

Эти волны можно, например, возбудить с помощью „светящейся нити" — прямолинейного магнитного тока, перпендикулярного плоскости x, z и проходящего через точку $x=x_0$, $z=0$. Такой источник имеет по оси y неограниченную протяженность, поскольку сила магнитного тока $\mathbf{j}^m$ не зависит от y, и поле возбуждаемых им волн (83.01) также не зависит от y. Чтобы избежать в формулах § 79 и § 80 бесконечных выражений, достаточно в данной двухмерной задаче интегрирование по поперечному сечению $z=\mathrm{const}$ производить по x от 0 до ∞, а по y — в пределах единичного интервала, например, от 0 до 1. Тогда норма

$$N_1 = \frac{c}{2\pi}\int_0^\infty E_{1,x}H_{-1,y}\,dx = \frac{c}{4\pi}\,\frac{h}{kp} \qquad (83.02)$$

Электронное наследие России

будет связана со средней мощностью, переносимой волной 1 в z-ом направлении (на единицу оси y), соотношением

$$\frac{c}{8\pi}\int_0^\infty E_{1,x}H^*_{1,y}dx=\frac{c}{16\pi}\frac{h}{kp}=\frac{1}{4}N_1. \qquad (83.03)$$

Коэффициенты C_1 и C_{-1} — комплексные амплитуды волн (83.01) — будут равны

$$C_1=C_{-1}=-\frac{1}{N_1}J^m e^{-px_0}. \qquad (83.04)$$

Средняя (за период колебания) мощность, переносимая 1-ой волной, возбужденной магнитным током, на единицу оси y равна

$$\bar{\Sigma}_1=|C_1|^2\frac{1}{4}N_1=\frac{1}{4N_1}e^{-2px_0}|J^m|^2 \qquad (83.05)$$

или, окончательно,

$$\bar{\Sigma}_1=\bar{\Sigma}_{-1}=\frac{\pi}{c}\frac{kp}{h}|J^m|^2, \qquad (83.06)$$

поскольку такая же мощность сообщается волне —1.

Для того, чтобы физически понять полученные формулы, необходимо сравнить мощность, сообщаемую поверхностным волнам, с полной мощностью излучения. Последнюю можно вычислить, имея полное решение задачи, т. е. найдя разложение по волнам непрерывного спектра (ср. конец § 82). Мы не будем здесь проводить соответствующих сложных вычислений, а сделаем допущение, что *по порядку величины* полная мощность излучения „светящейся нити" над гребенчатой плоскостью равна полной мощности излучения нити в свободном пространстве.

Поле прямолинейного электрического тока, параллельного оси z, можно вычислить для свободного пространства по формуле (30.10). Если в последней считать силу тока J не зависящей от z ($h=0$, $g=k$), считать провод достаточно тонким ($ka\ll 1$) и воспользоваться второй формулой (30.17), то мы получим

$$E_z=-\frac{\pi k}{c}JH_0^{(1)}(kr);\quad \Pi=-\frac{\pi}{ck}JH_0^{(1)}(kr), \qquad (83.07)$$

где функция Π определяет поля по формулам (30.06). Для прямолинейного магнитного тока J^m, направленного по оси

ЭБ "Научное наследие России"

z, магнитный вектор Герца имеет единственную составляющую

$$\Pi'_z = -\frac{\pi}{ck} J^m H_0^{(1)}(kr), \tag{83.08}$$

которую мы сразу пишем по аналогии со вторым выражением (83.07). Пользуясь формулами (18.08), нетрудно показать, что соответствующее электромагнитное поле имеет составляющие

$$H_z = -\frac{\pi k}{c} J^m H_0^{(1)}(kr); \quad E_\varphi = -\frac{i\pi k}{c} J^m H_1^{(1)}(kr). \tag{83.09}$$

В волновой зоне (при $kr \gg 1$) в силу асимптотических выражений (22.14) электромагнитное поле определяется формулой

$$E_\varphi = H_z = -\frac{\pi k}{c} J^m \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}, \tag{83.10}$$

так что комплексный вектор Умова—Пойнтинга имеет единственную составляющую

$$S_r^к = \frac{c}{8\pi} E_\varphi H_z^* = \frac{k}{4cr} |J^m|^2 \tag{83.11}$$

и мощность излучения на единицу длины светящейся нити равна

$$\bar{\Sigma}_0 = \frac{\pi k}{2c} |J^m|^2. \tag{83.12}$$

Согласно сказанному выше, эффективность возбуждения поверхностной волны магнитным током можно приближенно характеризовать отношением

$$\frac{\bar{\Sigma}_1}{\bar{\Sigma}_0} = 4\frac{p}{h} e^{-2px_0} = 4\sqrt{1-\beta^2}\, e^{-2px_0}, \tag{83.13}$$

где β есть коэффициент замедления, определенный формулой (64.19).

Формула (83.13) показывает, что значительная часть мощности, излучаемой источником, сообщается поверхностной волне. Исключение составляет, во-первых, случай высоко расположенного источника (когда множитель e^{-2px_0} мал); создаваемая „светящейся нитью" цилиндрическая волна вблизи плоскости $x = 0$ мало отличается от плоской волны, которая отражается от гребенки в виде плоской же волны, не возбуждая при этом волны поверхностной. Во-вторых, если скорость поверхностной волны близка к c,

Электронное наследие России

т. е. $\beta \approx 1$, то отношение (83.13) также получается малым. Иначе говоря, если поверхностный характер волны выражен слабо

$$p \ll k \approx h, \tag{83.14}$$

то такая волна плохо возбуждается источником и в создаваемом им электромагнитном поле имеет лишь незначительный удельный вес. Физически этот вывод совершенно естественен: при условии (83.14) поверхностные волны (83.01) по структуре своего поля и скорости распространения мало отличаются от обычных плоских волн, и „светящаяся нить" таких волн излучать не способна.

Выше мы сознательно ограничились простейшим, весьма идеализированным случаем возбуждения поверхностных волн. Этот случай можно осуществить, например, помещая в плоскости $z=0$ идеально проводящую перегородку и возбуждая „четверть пространства" $x>0$, $z>0$ через бесконечно длинную щель в этой перегородке, параллельную оси y. Если электрическое поле в такой щели вертикально (направлено по оси x), то согласно формуле (78.14) она эквивалентна прямолинейному магнитному току, рассмотренному выше. Качественно те же результаты получаются при возбуждении электромагнитных волн электрическим или магнитным диполем.

В § 63 мы рассмотрели поверхностную волну Ценнека, распространяющуюся над проводящей плоскостью. Ее поле также определяется формулами (83.01), однако в силу соотношения (63.01) параметры p и h этой волны комплексны. Как уже было отмечено в § 63, поверхностный характер волны Ценнека выражен весьма слабо, в силу чего обычные антенны ее не возбуждают. Поэтому распространение радиоволн вдоль земной поверхности нельзя объяснить, исходя из представления о поверхностной волне Ценнека.

Можно поставить вопрос: какие же источники способны эффективно возбуждать поверхностную волну Ценнека? Ответ дает формула (81.02): такой источник должен иметь протяженность по высоте, примерно соответствующую вертикальной протяженности волны Ценнека, и надлежащее распределение фаз.

В § 75 мы отмечали, что волны A_1 и B_1 (рис. 104) в спиральном волноводе не наблюдаются экспериментально. Это обстоятельство также связано с тем, что их поверхностный характер выражен слабо ($x \operatorname{ctg} \vartheta \ll 1$) и они весьма близки к циркулярно поляризованным плоским волнам

ЭБ "Научное наследие России"

(см. конец § 74). В силу сказанного выше, такие волны должны плохо возбуждаться обычными источниками. Заметим, что количественное исследование возбуждения этих волн можно сделать на основании формулы (81.09).

§ 84*. Возбуждение конического рупора и родственные задачи

Теория возбуждения волноводов, изложенная выше в §§ 79—81, может быть распространена на более сложные системы, в которых известна полная система решений однородных уравнений поля. В некоторых случаях целесообразно применять другие методы, быстрее ведущие к цели. В качестве примера можно привести задачу об электромагнитном поле, возбуждаемом в коническом рупоре элементарным электрическим диполем с моментом **p**. Эту задачу мы и рассмотрим в данном параграфе.

Не ограничивая общности, мы можем считать, что координаты диполя суть r_0, ϑ_0 и $\varphi_0 = 0$. Поскольку при $r < r_0$ и $r > r_0$ возбуждаемое диполем электромагнитное поле удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла, к нему применимы все результаты § 60. В частности, это поле должно выражаться в виде ряда электрических и магнитных волн, т. е. иметь потенциалы

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_n \sum_m \zeta_{\nu_{m,n}}(kr)\, P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta) \times \\ &\times [A_{m,n}\cos m\varphi + B_{m,n}\sin m\varphi], \\ V &= \sum_n \sum_m \zeta_{\mu_{m,n}}(kr)\, P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta) \times \\ &\times \left[\overline{A}_{m,n}\cos m\varphi + \overline{B}_{m,n}\sin m\varphi\right] \\ &\qquad\qquad \text{при } r > r_0 \end{aligned}\right\} \qquad (84.01)$$

и

$$\left.\begin{aligned} U &= \sum_n \sum_m \psi_{\nu_{m,n}}(kr)\, P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta) \times \\ &\times [C_{m,n}\cos m\varphi + D_{m,n}\sin m\varphi], \\ V &= \sum_n \sum_m \psi_{\mu_{m,n}}(kr)\, P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta) \times \\ &\times \left[\overline{C}_{m,n}\cos m\varphi + \overline{D}_{m,n}\sin m\varphi\right]. \\ &\qquad\qquad \text{при } r < r_0 \end{aligned}\right\} \qquad (84.02)$$

...ное наследие России"

В выражениях (84.01) фигурируют лишь расходящиеся в радиальном направлении электрические и магнитные волны в соответствии с условиями излучения (10.08). Если считать, что пространство внутри рупора имеет небольшие потери, то волновое число k станет комплексным и эти волны будут удовлетворять (при больших kr) условиям (10.06), в соответствии с требованиями теоремы единственности. В выражениях (84.02) взяты лишь стоячие волны (60.04), поскольку при $r=0$ электромагнитное поле должно быть конечным.

Неопределенные постоянные A, B, C, D, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ в формулах (84.01) и (84.02) легко связать с координатами диполя r_0 и ϑ_0 и составляющими p_r, p_ϑ, p_φ его момента. Рассмотрим сначала случай радиального диполя ($p_r=0$, $p_\vartheta=p_\varphi=0$). Такой диполь можно представить себе как предельный случай двойного слоя, расположенного на поверхности $r=r_0$ (ср. § 77). Если плотность двойного слоя равна η ($\eta=\sigma d$, где σ — поверхностная плотность „верхнего слоя“ зарядов, d — расстояние между слоями), то скачок потенциала электростатического поля на таком двойном слое равен, как известно, $4\pi\eta$. В электродинамике двойной слой можно характеризовать соотношением

$$\int\limits_{r_0-0}^{r_0+0} E_r dr = -4\pi\eta. \tag{84.03}$$

Пользуясь формулой

$$E_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right) U,$$

мы приходим к условию

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r_0+0} - \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r_0-0} = -4\pi\eta. \tag{84.04}$$

Чтобы перейти от двойного слоя к радиальному диполю, достаточно считать плотность двойного слоя равной нулю всюду на сфере $r=r_0$, кроме точки $\vartheta=\vartheta_0$ и $\varphi=\varphi_0=0$, где η обращается в бесконечность таким образом, что для любой площадки S_0, включающей эту точку, имеем

$$\int\limits_{S_0} \eta dS = p_r. \tag{84.05}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Функция U при $r=r_0$ непрерывна, поскольку составляющие H_ϑ и H_φ не терпят скачка ввиду отсутствия поверхностных токов на сфере $r=r_0$. На функцию V наличие радиального электрического диполя никаких условий не накладывает, поэтому она равна нулю.

Условие непрерывности функции U при $r=r_0$ приводит к соотношениям

$$A_{m,n}\zeta_{\nu_{m,n}}(kr_0)=C_{m,n}\psi_{\nu_{m,n}}(kr_0),$$
$$B_{m,n}\zeta_{\nu_{m,n}}(kr_0)=D_{m,n}\psi_{\nu_{m,n}}(kr_0).$$

Вводя новые коэффициенты $R_{m,n}$ и $S_{m,n}$, мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} A_{m,n}&=R_{m,n}\psi_{\nu_{m,n}}(kr_0); \quad C_{m,n}=R_{m,n}\zeta_{\nu_{m,n}}(kr_0),\\ B_{m,n}&=S_{m,n}\psi_{\nu_{m,n}}(kr_0); \quad D_{m,n}=S_{m,n}\zeta_{\nu_{m,n}}(kr_0). \end{aligned}\right\} \qquad (84.06)$$

Подставляя эти выражения в соотношение (84.04), получим

$$k\sum_n\sum_m[\zeta'_{\nu_{m,n}}(kr_0)\psi_{\nu_{m,n}}(kr_0)-\psi'_{\nu_{m,n}}(kr_0)\zeta_{\nu_{m,n}}(kr_0)]\times$$
$$\times P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta)[R_{m,n}\cos m\varphi+S_{m,n}\sin m\varphi]=-4\pi\eta. \qquad (84.07)$$

Пользуясь тождеством

$$\zeta'_\nu\psi_\nu-\psi'_\nu\zeta_\nu=i, \qquad (84.08)$$

мы переписываем формулу (84.07) в виде

$$\sum_n\sum_m P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta)[R_{m,n}\cos m\varphi+S_{m,n}\sin m\varphi]=-\frac{4\pi}{ik}\eta. \qquad (84.09)$$

Выражение (84.09) показывает, что искомые постоянные $R_{m,n}$ и $S_{m,n}$ представляют собой коэффициенты разложения известной функции $\eta=\eta(\vartheta,\varphi)$ в двухмерный ряд Фурье (по угловым гармоникам). Эти угловые гармоники образуют, как легко показать, полную систему ортогональных функций на сечении конуса $r=\text{const}$, т. е. при изменении ϑ и φ в пределах (60.01).

Поскольку ортогональность функций $P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta)^{\cos m\varphi}_{\sin m\varphi}$ при разных m обусловливается тригонометрическими мно-

Электронное наследие России"

жителями, докажем справедливость соотношения ортогональности

$$\int_0^{\gamma} P_{\nu}^{m}(\cos\vartheta) P_{\nu'}^{m}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = 0 \text{ при } \nu \neq \nu'. \qquad (84.10)$$

Для этого умножим уравнение (23.12) на $P_{\nu'}^{m}$, такое же уравнение для $P_{\nu'}^{m}$ — на P_{ν}^{m} и результаты вычтем

$$P_{\nu'}^{m}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP_{\nu}^{m}}{d\vartheta}\right) - P_{\nu}^{m}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP_{\nu'}^{m}}{d\vartheta}\right) +$$
$$+[\nu(\nu+1)-\nu'(\nu'+1)]\sin\vartheta\, P_{\nu}^{m}P_{\nu'}^{m} = 0.$$

Это соотношение можно также переписать в виде

$$\frac{d}{d\vartheta}\left[\sin\vartheta\left(P_{\nu'}^{m}\frac{dP_{\nu}^{m}}{d\vartheta} - P_{\nu}^{m}\frac{dP_{\nu'}^{m}}{d\vartheta}\right)\right] +$$
$$+[\nu(\nu+1)-\nu'(\nu'+1)]\sin\vartheta\, P_{\nu}^{m}P_{\nu'}^{m} = 0. \qquad (84.11)$$

Интегрируя это соотношение от 0 до γ и пользуясь условиями (60.05) для P_{ν}^{m} и $P_{\nu'}^{m}$, получим

$$[\nu(\nu+1)-\nu'(\nu'+1)]\int_0^{\gamma} P_{\nu}^{m}P_{\nu'}^{m}\sin\vartheta\, d\vartheta = 0, \qquad (84.12)$$

откуда и вытекает соотношение (84.10). Заметим, что выражение в квадратной скобке (84.12) обращается в нуль как при $\nu = \nu'$, так и при $\nu = -(\nu'+1)$, но последнюю возможность мы исключили ранее, считая все числа (60.07) положительными.

Соотношение (84.11) можно использовать также для вычисления нормы функции P_{ν}^{m}. Действительно, будем считать индекс ν' близким к ν; ν является собственным значением из ряда (60.07), а ν' — нет, так что $P_{\nu'}^{m}$ удовлетворяет уравнению Лежандра, но не условию (60.05). В этом случае интегрирование уравнения (84.11) дает

$$\int_0^{\gamma} P_{\nu}^{m}P_{\nu'}^{m}\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{\sin\gamma\, P_{\nu'}^{m}(\cos\gamma)\frac{d}{d\vartheta}P_{\nu}^{m}(\cos\gamma)}{\nu'(\nu'+1)-\nu(\nu+1)}. \qquad (84.13)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Полагая в этом соотношении $\nu' \to \nu$ и применяя к правой части правило Лопиталя, получаем искомое выражение для нормы

$$N_{m,n} = \int_0^\gamma [P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta)]^2 \sin\vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{\sin\gamma}{2\nu_{m,n}+1} \frac{\partial}{\partial\nu} P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\gamma) \frac{d}{d\vartheta} P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\gamma). \qquad (84.14)$$

После этого отступления вернемся к соотношению (84.09). Для того, чтобы определить коэффициенты R и S, умножим обе части уравнения на $P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta)\sin\vartheta \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix}$ и проинтегрируем в пределах (60.01). В результате получаем

$$\left.\begin{aligned} \pi\varepsilon_m N_{m,n} R_{m,n} &= -\frac{4\pi}{ik}\int_0^\gamma\int_0^{2\pi} \eta P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\cos m\varphi d\vartheta d\varphi, \\ \pi N_{m,n} S_{m,n} &= -\frac{4\pi}{ik}\int_0^\gamma\int_0^{2\pi} \eta P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\sin m\varphi d\vartheta d\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (84.15)$$

где $\varepsilon_0 = 2$, а $\varepsilon_m = 1$ при $m = 1, 2, \ldots$

Для элементарного диполя с помощью формулы (84.05) получаем

$$\left.\begin{aligned} R_{m,n} &= -\frac{4p_r}{ikr_0^2}\frac{P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta_0)}{\varepsilon_m N_{m,n}}, \\ S_{m,n} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (84.16)$$

откуда при $r < r_0$ получаем для функции U следующий ряд

$$U = \frac{4ip_r}{kr_0^2}\sum_n\sum_m \zeta_{m,n}(kr_0)\,\psi_{\nu_{m,n}}(kr)\frac{P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta_0)\,P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta)}{\varepsilon_m N_{m,n}}\cos m\varphi. \qquad (84.17)$$

При $r > r_0$ в этом выражении нужно переменить местами символы ζ и ψ, т. е. взять произведения $\psi_{\nu_{m,n}}(kr_0)\zeta_{\nu_{m,n}}(kr)$. Если $\vartheta_0 = 0$, т. е. если диполь расположен на оси вращения конуса, то в силу соотношений

$$P^m_{\nu_{m,n}}(1) = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots), \qquad (84.18)$$

Электронное наследие России

вытекающих из формулы (23.18), и соотношения (23.17), являющегося условием нормировки функций Лежандра с любым индексом ν, формула (84.17) упрощается следующим образом:

$$U=\frac{2ip_r}{kr_0^2}\sum_n \zeta_{\nu_{0,n}}(kr_0)\,\psi_{\nu_{0,n}}(kr)\,\frac{P_{\nu_{0,n}}(\cos\vartheta)}{N_{0,n}}\quad(\text{при } r<r_0). \tag{84.19}$$

Двойной ряд (84.17) здесь превратился в простой, поскольку радиальный диполь на оси возбуждает в коническом рупоре только симметричные волны E_{0n}. При $r>r_0$ формула (84.19) принимает вид

$$U=\frac{2ip_r}{kr_0^2}\sum_n \psi_{\nu_{0,n}}(kr_0)\,\zeta_{\nu_{0,n}}(kr)\,\frac{P_{\nu_{0,n}}(\cos\vartheta)}{N_{0,n}}. \tag{84.20}$$

Для проверки этой формулы положим сначала $\gamma=\frac{\pi}{2}$, т. е. рассмотрим вертикальный диполь над идеально проводящей полуплоскостью, и затем возьмем $kr_0=0$. Так как при $\gamma=\frac{\pi}{2}$ уравнение (60.05) принимает вид

$$P_\nu(0)=0, \tag{84.21}$$

то его решениями становятся полиномы Лежандра нечетных степеней, т. е. числа $\nu_{0,n}$ образуют последовательность нечетных чисел $1, 3, 5, \ldots$; других решений уравнение (84.21), как можно показать, не имеет. При $kr_0\to 0$ в ряде остается только первый член ($n=1$), для которого

$$\nu_{0,1}=1;\quad P_{\nu_{0,1}}(\cos\vartheta)=P_1(\cos\vartheta)=\cos\vartheta$$

и

$$\psi_1(kr_0)=\sqrt{\frac{\pi kr_0}{2}}\,J_{\frac{3}{2}}(kr_0).$$

Действительно, при малых kr_0 имеем

$$J_{\frac{3}{2}}(kr_0)=\frac{1}{\frac{3}{2}!}\left(\frac{kr_0}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{kr_0}{2}\right)^{\frac{3}{2}};\quad \psi_1(kr_0)=\frac{1}{3}(kr_0)^2$$

и

$$\lim_{kr_0\to 0}\frac{\psi_1(kr_0)}{(kr_0)^2}=\frac{1}{3}, \tag{84.22}$$

ЭБ "Научное наследие России"

в то время как все другие члены в пределе дают нули. Так как

$$N_{0,1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[P_1(\cos\vartheta)]^2\sin\vartheta d\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\vartheta\sin\vartheta d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{3}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^3\vartheta=\frac{1}{3}, \tag{84.23}$$

то окончательно можно написать $\left(p=p_r\right.$ есть момент вертикального диполя на горизонтальной плоскости $\left.\vartheta=\frac{\pi}{2}\right)$

$$U=2ikp\zeta_1(kr)\cos\vartheta, \tag{84.24}$$

где функция $\zeta_1(kr)$ равна

$$\zeta_1(kr)=-e^{ikr}\left(1+\frac{i}{kr}\right), \tag{84.25}$$

так что по формулам (20.19) получаем

$$\left.\begin{aligned}
E_r&=-4ikp\frac{e^{ikr}}{r^2}\left(1+\frac{i}{kr}\right)\cos\vartheta;\\
E_\vartheta&=-2k^2p\frac{e^{ikr}}{r}\left(1+\frac{i}{kr}-\frac{1}{k^2r^2}\right)\sin\vartheta;\\
H_\varphi&=-2k^2p\frac{e^{ikr}}{r}\left(1+\frac{i}{kr}\right)\sin\vartheta;\\
E_\varphi&=H_r=H_\vartheta=0,
\end{aligned}\right\} \tag{84.26}$$

что действительно дает поле элементарного диполя с моментом $2p$, находящегося в начале координат. Удвоение момента происходит за счет отражения в плоскости (ср. рис. 114,*б*).

В порядке проверки формулы (84.20) можно также показать, что при $\gamma=\pi$ она дает

$$U=p_r\frac{r}{r_0}\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{84.27}$$

где R есть расстояние от диполя до точки наблюдения. Согласно выражению (20.32) такая функция U определяет поле радиального диполя в свободном пространстве.

Аналогичным образом рассчитывается поле элементарного радиального *магнитного* диполя с моментом m_r.

ое наследие России"

В этом случае вместо граничного условия (84.04) будем иметь

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0+0} - \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_0-0} = -4\pi\xi, \tag{84.28}$$

где ξ — плотность двойного магнитного заряда; функция V будет непрерывна при $r = r_0$, а функция U тождественно обращается в нуль. Вместо соотношений (84.06) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \overline{A}_{m,n} &= \overline{R}_{m,n}\,\psi_{\mu_{m,n}}(kr_0); \quad \overline{C}_{m,n} = \overline{R}_{m,n}\,\zeta_{\mu_{m,n}}(kr_0); \\ \overline{B}_{m,n} &= \overline{S}_{m,n}\,\psi_{\mu_{m,n}}(kr_0); \quad \overline{D}_{m,n} = \overline{S}_{m,n}\,\zeta_{\mu_{m,n}}(kr_0) \end{aligned}\right\} \tag{84.29}$$

и вместо соотношения (84.09)

$$\sum_n \sum_m P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta)\,[\overline{R}_{m,n}\cos m\varphi + \overline{S}_{m,n}\sin m\varphi] = -\frac{4\pi}{ik}\,\xi. \tag{84.30}$$

Как легко видеть из формулы (84.11), соотношение ортогональности (84.10) справедливо и для присоединенных функций P^m_μ, удовлетворяющих условиям (60.06). Вместо соотношения (84.13) получим

$$\int_0^\gamma P^m_\mu\,P^m_{\mu'}\sin\vartheta\,d\vartheta = -\frac{\sin\gamma\,P^m_\mu(\cos\gamma)\,\dfrac{d}{d\vartheta}\,P^m_{\mu'}(\cos\gamma)}{\mu'(\mu'+1)-\mu(\mu+1)};$$

переходя к пределу $\mu' \to \mu = \mu_{m,n}$, найдем выражение для нормы

$$\overline{N}_{m,n} = \int_0^\gamma [P^m_{\mu m,n}(\cos\vartheta)]^2 \sin\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= -\frac{\sin\gamma}{2\mu_{m,n}+1}\,P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\gamma)\,\frac{\partial^2}{\partial\mu\,\partial\vartheta}\,P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\gamma) \tag{84.31}$$

и окончательно при $r < r_0$ будем иметь

$$V = \frac{4im_r}{kr_0^2}\sum_n\sum_m \zeta_{\mu_{m,n}}(kr_0)\,\psi_{\mu_{m,n}}(kr)\times$$

$$\times\frac{P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta_0)\,P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta)}{\varepsilon_m\,\overline{N}_{m,n}}\cos m\varphi. \tag{84.32}$$

Если радиальные диполи p_r и m_r находятся в точке P_0 с координатами r_0, ϑ_0 и φ_0, то в рядах (84.17) и (84.32) нужно заменить $\cos m\varphi$ на $\cos m(\varphi-\varphi_0)$. Выпишем составляющие E_ϑ и E_φ, определяемые функцией (84.17) и отмечаемые в дальнейшем значком ^{p} наверху:

$$\left.\begin{aligned}
\overset{p}{E}_\vartheta &= \frac{4ip_r}{r_0^2 r}\sum_n\sum_m \zeta_{\nu_{m,n}}(kr_0)\,\psi'_{\nu_{m,n}}(kr)\times\\
&\times\frac{P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta_0)\,\dfrac{d}{d\vartheta}\,P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta)}{\varepsilon_m N_{m,n}}\cos m(\varphi-\varphi_0),\\
\overset{p}{E}_\varphi &= -\frac{4ip_r}{r_0^2 r}\sum_n\sum_m \zeta_{\nu_{m,n}}(kr_0)\,\psi'_{\nu_{m,n}}(kr)\times\\
&\times\frac{P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta_0)\,\dfrac{1}{\sin\vartheta}\,P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta)}{\varepsilon_m N_{m,n}}\,m\sin m(\varphi-\varphi_0).
\end{aligned}\right\}\quad(84.33)$$

Функция (84.32) позволяет вычислить составляющие

$$\left.\begin{aligned}
\overset{m}{E}_\vartheta &= \frac{4m_r}{r_0^2 r}\sum_n\sum_m \zeta_{\mu_{m,n}}(kr)\,\psi_{\mu_{m,n}}(kr)\times\\
&\times\frac{P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta_0)\,\dfrac{1}{\sin\vartheta}\,P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta)}{\varepsilon_m \overline{N}_{m,n}}\,m\sin m(\varphi-\varphi_0)\\
\overset{m}{E}_\varphi &= \frac{4m_r}{r_0^2 r}\sum_n\sum_m \zeta_{\mu_{m,n}}(kr_0)\,\psi_{\mu_{m,n}}(kr)\times\\
&\times\frac{P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta_0)\,\dfrac{d}{d\vartheta}\,P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta)}{\varepsilon_m \overline{N}_{m,n}}\cos m(\varphi-\varphi_0).
\end{aligned}\right\}\quad(84.34)$$

Полученные выше выражения (84.33) и (84.34) позволяют решить задачу о поперечном диполе с компонентами p_ϑ и p_φ, находящемся в точке P_1 с координатами r_1, ϑ_1 и $\varphi_1=0$ и возбуждающем волны внутри конического рупора. Для этого обозначим искомое поле поперечного диполя через $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, поля вспомогательных радиальных диполей через $\overset{p}{\mathbf{E}}$, $\overset{p}{\mathbf{H}}$ [электрический диполь, см. формулу

...ое наследие России"

(84.33)] и $\overset{m}{\mathbf{E}}, \overset{m}{\mathbf{H}}$ [магнитный диполь, см. формулу (84.34)] и воспользуемся теоремами взаимности § 77 и 78

$$\left.\begin{aligned} p_r E_r(P_0) &= p_\vartheta \overset{p}{E}_\vartheta(P_1) + p_\varphi \overset{p}{E}_\varphi(P_1), \\ -m_r H_r(P_0) &= p_\vartheta \overset{m}{E}_\vartheta(P_1) + p_\varphi \overset{m}{E}_\varphi(P_1). \end{aligned}\right\} \quad (84.35)$$

Отсюда для диполя, ориентированного по $\vartheta (p_\vartheta = 0,\ p_\varphi = 0)$, имеем

$$\left.\begin{aligned} E_r(P_0) &= \frac{4ip_\vartheta}{r_0^2 r_1} \sum_n \sum_m \zeta_{\nu_{m,n}}(kr_0)\, \psi'_{\nu_{m,n}}(kr_1) \times \\ &\times \frac{P_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta_0)\, \frac{d}{d\vartheta} P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta_1)}{\varepsilon_m N_{m,n}} \cos m\varphi_0, \\ H_r(P_0) &= \frac{4p_\vartheta}{r_0^2 r_1} \sum_n \sum_m \zeta_{\mu_{m,n}}(kr_0)\, \psi_{\mu_{m,n}}(kr_1) \times \\ &\times \frac{P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta_0)\, \frac{1}{\sin\vartheta_1} P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta_1)}{\varepsilon_m \overline{N}_{m,n}} m \sin m\varphi_0. \end{aligned}\right\} \quad (84.36)$$

В этих формулах точку P_0 можно считать уже произвольной и писать r, ϑ и φ вместо r_0, ϑ_0 и φ_0. Кроме того, по составляющим E_r и H_r можно „восстановить“ функции U и V искомого поля, возбуждаемого поперечным диполем. В самом деле, если положить

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{4ip_\vartheta}{r_1} \sum_n \sum_m \frac{\psi'_{\nu_{m,n}}(kr_1)\, \zeta_{\nu_{m,n}}(kr)}{\nu_{m,n}(\nu_{m,n}+1)} \times \\ &\times \frac{\frac{d}{d\vartheta} P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta_1)\, P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta)}{\varepsilon_m N_{m,n}} \cos m\varphi, \\ V &= \frac{4p_\vartheta}{r_1} \sum_n \sum_m \frac{\psi_{\mu_{m,n}}(kr_1)\, \zeta_{\mu_{m,n}}(kr)}{\mu_{m,n}(\mu_{m,n}+1)} \times \\ &\times \frac{\frac{1}{\sin\vartheta_1} P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta_1)\, P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta)}{\varepsilon_m \overline{N}_{m,n}} m \sin m\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (84.37)$$

ЭБ „Научное наследие России“

то в силу уравнения (23.06) будем иметь

$$\frac{d^2\zeta_\nu}{dr^2}+k^2\zeta_\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{r^2}\zeta_\nu, \tag{84.38}$$

так что такие функции U и V соответствуют полю с составляющими (84.36) и вместе с тем позволяют вычислить все другие составляющие по формулам § 20.

Если электрический диполь ориентирован по φ, т. е. $p_\vartheta=0$, $p_\varphi\neq 0$, то вместо формул (84.36) получаем

$$\left.\begin{aligned}
E_r(P_0)&=\frac{4ip_\varphi}{r_0^2 r_1}\sum_n\sum_m \zeta_{\nu_{m,n}}(kr_0)\,\psi'_{\nu_{m,n}}(kr_1)\times\\
&\times\frac{P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta_0)\,\frac{1}{\sin\vartheta_1}\,P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta_1)}{\varepsilon_m N_{m,n}}\,m\sin m\varphi_0,\\
H_r(P_0)&=-\frac{4p_\varphi}{r_0^2 r_1}\sum_n\sum_m \zeta_{\mu_{m,n}}(kr_0)\,\psi_{\mu_{m,n}}(kr_1)\times\\
&\times\frac{P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta_0)\,\frac{d}{d\vartheta}\,P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta_1)}{\varepsilon_m \overline{N}_{m,n}}\cos m\varphi_0
\end{aligned}\right\} \tag{84.39}$$

и при $r>r_1$ будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
U&=\frac{4ip_\varphi}{r_1}\sum_n\sum_m\frac{\psi'_{\nu_{m,n}}(kr_1)\,\zeta_{\nu_{m,n}}(kr)}{\nu_{m,n}(\nu_{m,n}+1)}\times\\
&\times\frac{\frac{1}{\sin\vartheta_1}\,P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta_1)\,P^m_{\nu_{m,n}}(\cos\vartheta)}{\varepsilon_m N_{m,n}}\,m\sin m\varphi,\\
V&=-\frac{4p_\varphi}{r_1}\sum_n\sum_m\frac{\psi_{\mu_{m,n}}(kr_1)\,\zeta_{\mu_{m,n}}(kr)}{\mu_{m,n}(\mu_{m,n}+1)}\times\\
&\times\frac{\frac{d}{d\vartheta}P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta_1)\,P^m_{\mu_{m,n}}(\cos\vartheta)}{\varepsilon_m \overline{N}_{m,n}}\cos m\varphi,
\end{aligned}\right\} \tag{84.40}$$

где мы опять считаем $\varphi_1=0$.

Заметим, что ряды (84.37) и (84.40) имеют такой же вид, что и ряды (84.01), но коэффициенты A, B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ здесь уже имеют определенные значения. Заметим, что при $r<r_1$ нужно в формулах (84.37) и (84.40) поменять

...ое наследие России"

местами символы функций ψ и ζ. Полагая после этого $kr_1 \to \infty$, можно легко получить решение задачи о дифракции плоской волны на идеально проводящем конусе $\left(\text{при } \gamma > \frac{\pi}{2}, \text{ ср. начало } \S\ 60\right)$.

Выведенные выше формулы могут быть обобщены на системы, изображенные на рис. 115. Пусть внутри кони-

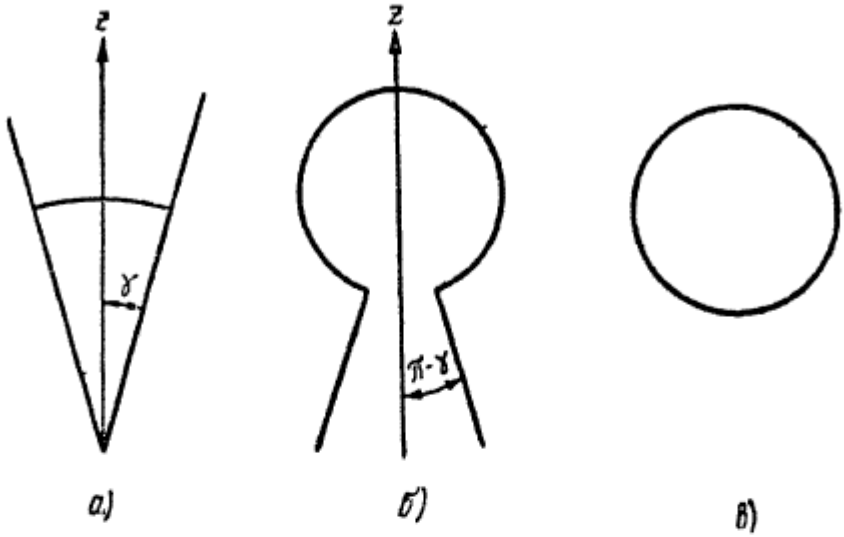


Рис. 115. Задачи, решаемые в сферической системе координат:
а — рупор со сферической перегородкой; *б*—конус со сферическим закруглением; *в* — сфера.

ческого рупора при $r = a$ имеется идеально проводящая сферическая перегородка (рис. 115,*а*), на которой должны выполняться граничные условия

$$E_\theta = E_\varphi = 0 \quad \text{при } r = a \tag{84.41}$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0; \quad V = 0 \quad \text{при} \quad r = a. \tag{84.42}$$

Если электромагнитное поле занимает область $a < r < \infty$, то выведенные выше формулы остаются в силе при замене

$$\left.\begin{aligned} \psi_\nu(kr) &\to \psi_\nu(kr) - \frac{\psi'_\nu(ka)}{\zeta'_\nu(ka)}\,\zeta_\nu(kr), \\ \psi_\mu(kr) &\to \psi_\mu(kr) - \frac{\psi_\mu(ka)}{\zeta_\mu(ka)}\,\zeta_\mu(kr), \end{aligned}\right\} \tag{84.43}$$

поскольку условия (84.42) удовлетворяются. Получаемые таким путем выражения при $\gamma > \frac{\pi}{2}$ определяют диффрак-

ЭБ "Научное наследие России"

ционное поле от конуса со сферическим закруглением (рис. 115,*б*). Если же в этих рядах индексы ν и μ считать целыми (ср. § 23), то они дадут диффракционное поле от сферы радиуса a (рис. 115,*в*), причем без ограничения общности можно для сферы положить $\vartheta_1 = 0$.

Если электромагнитное поле занимает область $0 < r < a$, то выведенные выше формулы остаются в силе при замене

$$\left.\begin{aligned} \zeta_\nu(kr) &\to \zeta_\nu(kr) - \frac{\zeta'_\nu(ka)}{\psi'_\nu(ka)}\psi_\nu(kr), \\ \zeta_\mu(kr) &\to \zeta_\mu(kr) - \frac{\zeta_\mu(ka)}{\psi_\mu(ka)}\psi_\mu(kr). \end{aligned}\right\} \qquad (84.44)$$

Таким образом мы получаем выражения для поля, возбуждаемого диполем в коническом объемном резонаторе с идеально проводящими стенками; при целых ν и μ получаем поле внутри сферического резонатора. К этим задачам можно подойти иначе (ср. гл. XVII).

Заметим в заключение, что приведенные выше ряды не всегда позволяют производить расчеты: эти ряды иногда сходятся медленно, а их преобразование к выражениям, пригодным для вычислений, обычно связано с преодолением серьезных математических трудностей.

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА XV

ДИФФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 85. Принцип Гюйгенса для электромагнитного поля

Для понимания волновых процессов весьма большое значение имеет так называемый принцип Гюйгенса, согласно которому распространение волн является результатом действия вторичных источников. По принципу Гюйгенса распространение сферической волны, излученной источником Q (рис. 116, *а*), нужно рассматривать так: каждая точка сферической поверхности S, до которой в момент t дошла волна, является вторичным источником, излучающим элементарную сферическую волну. Огибающая этих сферических волн S' в данном случае также является сферой. Она определяет положение волновой поверхности в более поздний момент времени t'.

Принцип Гюйгенса выражает то обстоятельство, что волновые явления подчиняются законам близкодействия. Действительно, по принципу Гюйгенса положение волновой поверхности S' в момент t' полностью определяется ее состоянием в предшествующий момент времени t и не зависит от „предыстории“ волнового процесса, от волн в других областях пространства и т. д.

Недостатком принципа Гюйгенса является его описательный, по преимуществу качественный характер. Определенным затруднением для принципа Гюйгенса явилось также то обстоятельство, что сферические волны от вторичных источников, кроме огибающей S', имеют вторую огибающую — волну, распространяющуюся обратно к источнику Q. Фактически эта обратная волна при распространении волн в однородном пространстве не наблюдается; она возникает лишь при наличии границ раздела, на которых происходит отражение волн и которые мы

ЭБ "Научное наследие России"

в данном изложении предполагаем отсутствующими. Это затруднение устраняется только в результате более глубокого анализа волновых процессов.

Френель уточнил принцип Гюйгенса, приняв во внимание интерференцию сферических волн, излученных вторич-

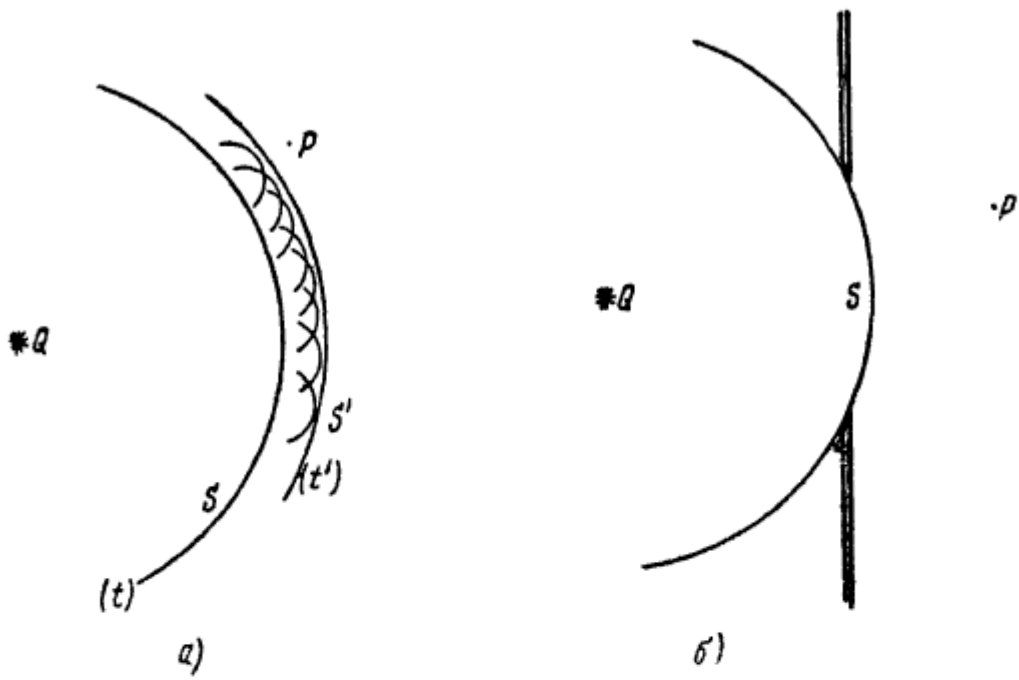


Рис. 116. Принцип Гюйгенса:
а — распространение волны в свободном пространстве; *б* — диффракция волны на отверстии.

ными источниками. Если характеризовать волновой процесс некоторой скалярной функцией ψ и ограничиться монохроматическими колебаниями, то этот уточненный принцип Гюйгенса, или принцип Гюйгенса — Френеля, можно сформулировать следующим образом

$$\psi = a \oint_S \psi^\circ \frac{e^{ikR}}{R} dS, \qquad (85.01)$$

где ψ° суть значения функций ψ на замкнутой поверхности S (например, на волновой поверхности S рис. 116, *а*), а R — расстояние между элементом dS этой поверхности и точкой наблюдения P, где вычисляется функция ψ. Согласно формуле (85.01) каждый элемент поверхности S является источником изотропной сферической волны $\frac{e^{ikR}}{R}$ с амплитудой $a\psi^\circ dS$, пропорциональной значению функции ψ в данной точке поверхности S. Коэффициент пропорциональности a можно найти, если вычислить интеграл

(85.01) для сферической или плоской волны и сравнить его со значением этой волны в точке P. Коэффициент a получается равным

$$a = -\frac{ik}{2\pi}, \tag{85.02}$$

т. е. фаза сферических волн, посылаемых каждой точкой поверхности S, опережает значение ψ в этой точке на четверть периода.

Принцип Гюйгенса — Френеля можно несколько уточнить, предположив, что излучаемые вторичными источниками сферические волны обладают некоторой диаграммой направленности. Тогда вместо формулы (85.01) будем иметь

$$\psi = a \oint_S K\psi^\circ \frac{e^{ikR}}{R}\, dS, \tag{85.03}$$

где функция K определяет зависимость амплитуды вторичных сферических волн от направления. Надлежащим подбором функции K можно, в частности, добиться отсутствия обратной волны, т. е. выполнения соотношения

$$\oint_S K\psi^\circ \frac{e^{ikR}}{R}\, dS = 0 \text{ внутри } S. \tag{85.04}$$

Френелю не удалось дать убедительного обоснования тому или иному выбору функции K и отсутствию обратной волны. К счастью, оказалось, что результаты вычислений по формуле (85.03) практически почти не зависят от конкретного вида функции K. Достаточно считать, что для излучения „прямо вперед“ — в направлении распространения первичной волны — функция $K = 1$, а при наклонном излучении K уменьшается.

В элементарном изложении основных понятий физической оптики анализ „поля вторичных источников“ (85.01) или (85.03) производится с помощью зон Френеля или спирали Корню. Более точное вычисление требует применения специальных функций, так называемых интегралов Френеля, к которым приближенно сводятся выражения (85.01) и (85.03). Принцип Гюйгенса — Френеля позволяет дать расчет дифракционных явлений, возникающих при наличии экранов и других непрозрачных тел. Если, например, сферическая волна от источника Q проходит через отверстие в экране (рис. 116, *б*), то при элементарном изложении поле

ЭБ "Научное наследие России"

в точке P вычисляют как результат действия зон Френеля (или их частей), не закрытых экраном. При более точном подходе интегралы (85.01) и (85.03) вычисляются для поверхности S, затягивающей отверстие в экране и далее продолжаемой по его теневой стороне, где приближенно принимают $\psi^\circ = 0$. Тем самым принцип Гюйгенса — Френеля позволяет свести задачи дифракции к расчету интерференции волн, испускаемых вторичными источниками и имеющих известную амплитуду и фазу.

Дальнейшее уточнение принципа Гюйгенса принадлежит Кирхгофу, который дал строгую формулировку принципа Гюйгенса, основываясь на волновом уравнении. Принцип Гюйгенса — Кирхгофа для монохроматических колебаний имеет вид

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_S \left(\psi^\circ \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{\partial \psi^\circ}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} \right) dS. \qquad (85.05)$$

Он выражает значения функции ψ в точке наблюдения P через значения этой функции ψ° и ее нормальной производной $\frac{\partial \psi^\circ}{\partial n}$ на поверхности S. Формула (85.05) является следствием волнового уравнения для монохроматических колебаний

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0. \qquad (85.06)$$

Эту формулу можно рассматривать как обобщение известной формулы теории потенциала, связывающей значение гармонической функции ψ во внутренней точке области со значениями этой функции и ее нормальной производной на границе области [последнюю формулу мы получим, если в выражении (85.05) положим $k = 0$].

Принцип Гюйгенса в формулировке Кирхгофа представляет собой существенный шаг вперед. Если брать интеграл (85.05) по замкнутой поверхности S и подставлять в него истинные значения ψ° и $\frac{\partial \psi^\circ}{\partial n}$ на поверхности, то этот интеграл во всех случаях удовлетворяет условию отсутствия обратной волны. Кроме того, оказывается, что интеграл (85.05) можно приближенно преобразовать в интеграл (85.03), причем функция K определяется однозначно. В современной теоретической оптике приближенное решение дифракционных задач производится почти исключительно с помощью принципа Гюйгенса — Кирхгофа. Приближенный характер

получаемых результатов связан лишь с тем, что в интеграл (85.05) подставляются приближенные значения ψ° и $\frac{\partial \psi^\circ}{\partial n}$.

Более подробное изложение данных вопросов можно найти в любой книге по физической (волновой) оптике. Сказанное выше является лишь историческим введением к электродинамическому принципу Гюйгенса, которым мы только и будем пользоваться в дальнейшем.

При формулировке принципа Гюйгенса в электродинамике нужно иметь в виду, что электромагнитные волны в общем случае нельзя характеризовать скалярной функцией ψ: это возможно лишь для продольных (или „скалярных“) волн, например для звуковых волн. Строго говоря, в оптике также нельзя описывать световые волны скалярной функцией ψ. Однако поперечный (или „векторный“) характер электромагнитных волн в большинстве оптических дифракционных задач не проявляется, и поэтому „скалярная“ теория дифракции оказывается достаточной.

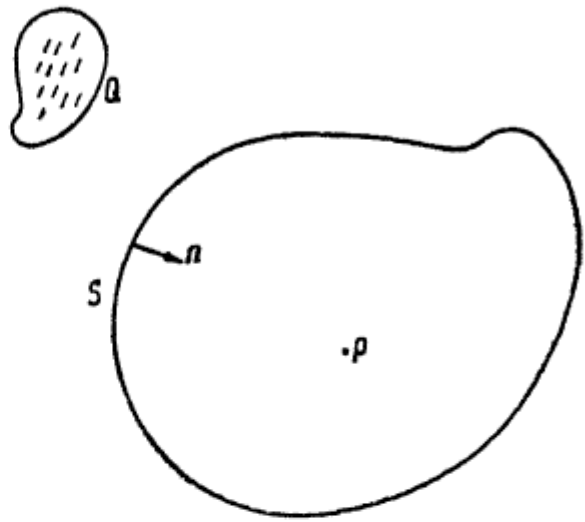


Рис. 117. Поверхность S, точка наблюдения P и источники поля Q в формулировке принципа Гюйгенса.

Действительно, большинство приборов, воспринимающих и измеряющих свет: глаз, фотопластинка, фотоэлемент, болометр и т. д., не реагирует на поляризацию световых волн. Наоборот, поляризация радиоволн обнаруживается в большинстве явлений и ее игнорировать нельзя. Поэтому в дальнейшем мы не будем пользоваться скалярными формулировками принципа Гюйгенса и рассмотрим его векторную электродинамическую формулировку.

Электродинамический принцип Гюйгенса формулируется для замкнутой поверхности S (рис. 117), внутри которой нет источников электромагнитного поля, т. е. $\mathbf{j}^e = \mathbf{j}^m = 0$. Электромагнитное поле в точке наблюдения P, расположенной внутри поверхности S, может быть выражено как результат сложения волн, излученных вторичными источниками, расположенными на поверхности S. Если же точка наблюдения P находится вне поверхности S, то электромагнитное поле, порождаемое этими вторичными источни-

ЭБ "Научное наследие России"

ками, должно исчезать в силу отсутствия обратной волны. При практическом применении принципа Гюйгенса поверхность S можно преобразовать в поверхность, охватывающую действительные источники поля или затягивающую отверстие в экране (рис. 116, *а* и 116, *б*) и, кроме того, включающую в себя бесконечно удаленную сферу или полусферу, действие которой равно нулю.

Обозначим через $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ поле вторичных источников, расположенных на поверхности S. Это поле совпадает с истинным полем лишь внутри S, а вне S тождественно исчезает. Таким образом, поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ терпит скачок на поверхности S, что эквивалентно наличию на ней поверхностных электрических и магнитных токов с плотностями

$$\mathbf{i}^e = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{H}^0]; \qquad \mathbf{i} = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{E}^0], \tag{85.07}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S, направленная в сторону области, занятой полем, $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ — фактические значения поля на поверхности S. Поверхностные токи (85.07) и являются теми вторичными источниками, о которых говорится в принципе Гюйгенса.

Мы получим электродинамический принцип Гюйгенса в явной форме, если выразим поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в точке наблюдения P внутри S через поверхностные токи (85.07). Если имеем не поверхностные, а объемные токи с плотностями $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$, то электромагнитное поле, возбуждаемое ими в безграничном пустом пространстве, находится интегрированием уравнений (17.15). Это поле выражается через электрический векторный потенциал (17.21) и магнитный векторный потенциал (17.25). Интересующее нас поле возбуждается поверхностными токами, поэтому введенные в § 17 векторные потенциалы $\mathbf{A}^e$ и $\mathbf{A}^m$ принимают вид

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{c}\oint\limits_S \frac{e^{ikR}}{R}\,\mathbf{i}^e\,dS; \quad \mathbf{A}^m = \frac{1}{c}\oint\limits_S \frac{e^{ikR}}{R}\,\mathbf{i}^m\,dS, \tag{85.08}$$

поскольку поверхностные токи можно рассматривать как предельный случай объемных. Здесь S означает поверхность, по которой текут поверхностные токи. Для поверхностных токов, определяемых формулами (85.07), векторные потенциалы равны

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{e^{ikR}}{R}[\mathbf{n}\mathbf{H}^0]\,dS; \quad \mathbf{A}^m = -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{e^{ikR}}{R}[\mathbf{n}\mathbf{E}^0]\,dS \tag{85.09}$$

Электронное наследие России

и полное электромагнитное поле дается выражениями (17.26)

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{1}{ik}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}^e + k^2\mathbf{A}^e) - \operatorname{rot}\mathbf{A}^m,\\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot}\mathbf{A}^e - \frac{1}{ik}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}^m + k^2\mathbf{A}^m).\end{aligned}\right\} \qquad (85.10)$$

Это и есть искомое поле вторичных источников (85.07), распределенных по поверхности S. Вторичные источники на каждом элементе dS поверхности S являются элементарными диполями: электрическим диполем с моментом $-\frac{1}{i\omega}\,\mathbf{i}^e\,dS$ и магнитным диполем с моментом $-\frac{1}{i\omega}\,\mathbf{i}^m\,dS$. По теореме единственности (§ 10) эти источники возбуждают во всем безграничном пространстве вполне определенное поле (85.10), которое при $R\to\infty$ имеет вид расходящихся волн и, следовательно, при наличии потерь достаточно быстро исчезает. Тем же свойством обладает искусственно образованное поле, равное истинному полю $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ внутри S, имеющее граничные значения $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ на S и обращающееся в нуль вне S. Согласно теореме единственности последнее поле должно совпадать с полем (85.10), которое в частности удовлетворяет условиям

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0 \quad \text{вне } S, \qquad (85.11)$$

т. е. не дает обратной волны.

Предыдущий вывод был основан на том, что в формулы (85.07) и (85.09) подставлялись точные значения $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ истинного поля на поверхности S. Посмотрим теперь, что получится при произвольном (или приближенном) задании тангенциальных полей $[\mathbf{n}\mathbf{E}^0]$ и $[\mathbf{n}\mathbf{H}^0]$ на поверхности S. Введем в этом случае (чисто формально) поверхностные токи по (85.07) и вычислим векторные потенциалы по (85.08) или (85.09). Тогда вычисленное по формулам (85.10) поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ будет тождественно удовлетворять однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\,\mathbf{H}; \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\,\mathbf{E}. \qquad (85.12)$$

Действительно, в этом случае источники отсутствуют всюду, за исключением поверхности S, и уравнения (17.15) сводятся к уравнениям (85.12). На самой поверхности S распреде-

ЭБ "Научное наследие России"

лены поверхностные токи и следовательно имеют место граничные условия

$$[\mathbf{n},\ \mathbf{H}^{(2)}-\mathbf{H}^{(1)}]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}^{e};\ [\mathbf{n},\ \mathbf{E}^{(2)}-\mathbf{E}^{(1)}]=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}^{m} \quad (85.13)$$

или, учитывая соотношения (85.07),

$$E_t^{(2)}-E_t^{(1)}=E_t^0;\quad H_t^{(2)}-H_t^{(1)}=H_t^0, \quad (85.14)$$

где индексом $^{(1)}$ обозначены поля с внешней стороны S, а индексом $^{(2)}$ — с внутренней.

Если бы E_t^0 и H_t^0 были точными значениями полей, то в силу условий (85.11) мы получили бы

$$E_t^{(1)}=0;\quad H_t^{(1)}=0, \quad (85.15)$$

откуда

$$E_t^{(2)}=E_t^0;\quad H_t^{(2)}=H_t^0. \quad (85.16)$$

В случае же произвольных или приближенных значений E_t^0, H_t^0 поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, вычисленное указанным выше способом, удовлетворяет лишь условиям (85.14), а равенства (85.15), (85.16) и (85.11) места не имеют. Это значит, что вычисленное поле на границе области отличается от заданного и что обратная волна не исчезает. Впрочем, эти нежелательные эффекты должны быть невелики, если заданное поле на поверхности S мало отличается от истинного.

Невыполнение условий (85.16) для „вычисленного“ поля при произвольном задании E_t^0 и H_t^0 вполне естественно: эти условия являются в общем случае противоречивыми, так как, например, одно тангенциальное поле E_t^0 уже определяет все поле внутри S единственным образом (ср. § 10). Поэтому на поверхности S можно задать произвольно лишь, например, магнитный поверхностный ток $\mathbf{i}^m$ по формуле (78.14), а электрический поверхностный ток определится по формуле

$$[\mathbf{nH}]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}^{e}\ \text{на}\ S \quad (85.17)$$

после того, как мы найдем поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, единственность которого доказана в § 10. Таким образом, в формулах (85.07) нельзя задавать произвольно тангенциальные составляющие как электрического, так и магнитного поля, поскольку это

Электронное наследие России

может привести к противоречию и отсутствию решения у данной электродинамической задачи. Поэтому формулы (85.09) и (85.10) фактически приводят к вычисленному полю, отличному от заданного (на поверхности S).

Электродинамическая формулировка принципа Гюйгенса, эквивалентная формулам (85.09) и (85.10), была дана впервые Котлером. Интересно, что до Котлера данным вопросом занимался ряд авторов, которые однако не смогли получить выражений, пригодных для приближенного решения электродинамических дифракционных задач. В настоящее время принцип Гюйгенса—Котлера широко применяется для приближенного расчета электромагнитного излучения из волноводов, рупоров, отверстий и т. д. В следующих параграфах мы приведем примеры таких расчетов.

§ 86. Дифракция на отверстии произвольной формы

Рассмотрим излучение из отверстия S_0, ограниченного плоской замкнутой кривой C (рис. 118), лежащей на плоскости $z=0$. Проведем поверхность S через плоскую площадку — отверстие S_0, ограниченное кривой C. Зададим на этой площадке S_0 тангенциальные поля E^0_x, E^0_y, H^0_x и H^0_y и будем считать, что на поверхности, дополняющей эту площадку до замкнутой поверхности, поля равны нулю. Если взять ось z в направлении нормали $\mathbf{n}$, то формулы (85.09) примут вид

$$\left.\begin{aligned} A^e_x &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\frac{e^{ikR}}{R}H^0_y\,dS; & A^m_x &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\frac{e^{ikR}}{R}E^0_y\,dS;\\ A^e_y &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\frac{e^{ikR}}{R}H^0_x\,dS; & A^m_y &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\frac{e^{ikR}}{R}E^0_x\,dS;\\ A^e_z &= 0; & A^m_z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (86.01)$$

Выберем начало координат $x=y=z=0$ на площадке S_0. Обозначим временно через x, y, z координаты точки наблюдения P, через ξ, η, 0 — координаты точки на площадке S_0 (точки истока). Расстояние между этими точками равно

$$R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}=$$
$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2(x\xi+y\eta)+\xi^2+\eta^2}. \qquad (86.02)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Введем обозначения

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\quad \rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2} \tag{86.03}$$

и

$$\cos\Omega=\frac{x\xi+y\eta}{r\rho}; \tag{86.04}$$

здесь r и ρ — радиусы-векторы точки наблюдения и точки истока соответственно, т. е. их расстояния от начала координат, а Ω — угол между этими радиусами-векторами.

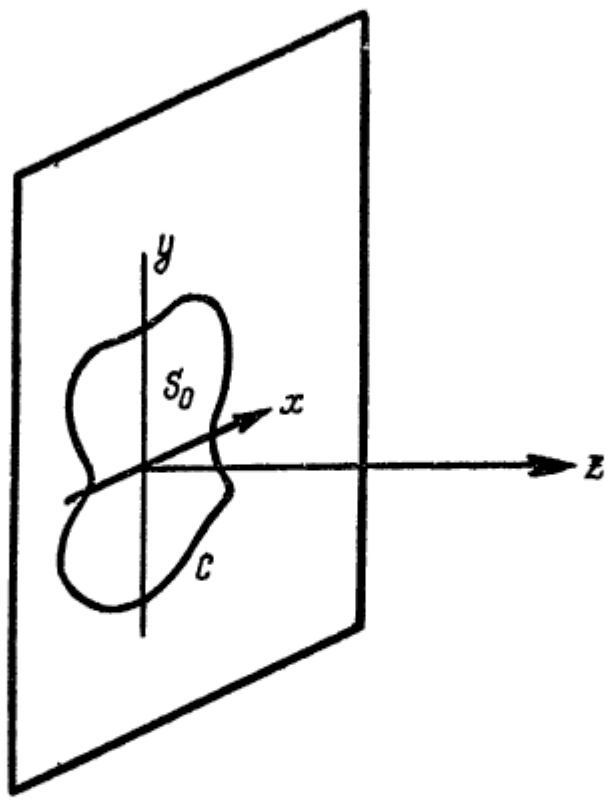


Рис. 118. Произвольное отверстие в плоском экране.

Расстояние R можно записать в виде

$$R=\sqrt{r^2-2r\rho\cos\Omega+\rho^2}. \tag{86.05}$$

В дальнейшем нас будет интересовать электромагнитное поле на больших расстояниях от излучающего отверстия. Считая r достаточно большим, будем иметь

$$R=r\sqrt{1-\frac{2\rho\cos\Omega}{r}+\frac{\rho^2}{r^2}}=$$

$$=r-\rho\cos\Omega+\frac{\rho^2}{r}\left(\frac{1}{2}-\cos^2\Omega\right)+\ldots, \tag{86.06}$$

Электронное наследие России

где мы радикал разложили в ряд по степеням отношения $\frac{\rho}{r}$. Так как отверстие S_0 имеет конечные размеры, то радиус-вектор ρ не превышает некоторого максимального значения ρ_{max}. Если выполняется условие

$$r \gg \rho_{max}, \tag{86.07}$$

то в интегралах (86.01) можно заменить $\frac{1}{R}$ просто на $\frac{1}{r}$ и вынести $\frac{1}{r}$ за знак интеграла. Если далее выполняется условие

$$\frac{k\rho_{max}^2}{r} \ll 1, \tag{86.08}$$

то в экспоненту e^{ikR} можно подставить выражение

$$kR = kr - k\rho\cos\Omega, \tag{86.09}$$

после чего выражения (86.01) упростятся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} A_x^e &= -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int\limits_{S_0} e^{-ik\rho\cos\Omega} H_y^0\, dS; \\ A_y^e &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int\limits_{S_0} e^{-ik\rho\cos\Omega} H_x^0\, dS; \\ A_x^m &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int\limits_{S_0} e^{-ik\rho\cos\Omega} E_y^0\, dS; \\ A_y^m &= -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int\limits_{S_0} e^{-ik\rho\cos\Omega} E_x^0\, dS. \end{aligned}\right\} \tag{86.10}$$

Формулы (86.10) показывают, что отверстие S_0 излучает сферические волны, зависящие от r по закону $\frac{e^{ikr}}{r}$. Для вычисления электромагнитного поля, связанного с этими волнами, удобно ввести сферическую систему координат r, φ, ϑ. Декартовы координаты точки наблюдения x, y, z выражаются через сферические координаты в виде

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi; \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi; \quad z = r\cos\vartheta, \tag{86.11}$$

причем направление „прямо вперед“ (вдоль оси z) соответствует значению $\vartheta = 0$.

Векторные потенциалы (86.10) имеют в сферической системе координат составляющие

$$\left.\begin{aligned} A_r &= A_x \sin\vartheta\cos\varphi + A_y \sin\vartheta\sin\varphi, \\ A_\vartheta &= A_x \cos\vartheta\cos\varphi + A_y \cos\vartheta\sin\varphi, \\ A_\varphi &= -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (86.12)$$

При подстановке этих составляющих в формулы (85.10) приходится пользоваться представлением основных операций векторного анализа в сферической системе координат. Формулы § 19 дают

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}; \qquad (86.13)$$

$$\operatorname{grad}_r\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r}; \quad \operatorname{grad}_\vartheta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}; \quad \operatorname{grad}_\varphi\Psi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}; \qquad (86.14)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}_r\mathbf{A} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right], \\ \operatorname{rot}_\vartheta\mathbf{A} &= \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\vartheta\, A_\varphi)\right], \\ \operatorname{rot}_\varphi\mathbf{A} &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right], \end{aligned}\right\} \qquad (86.15)$$

где $\mathbf{A}$ — произвольный вектор, Ψ — произвольный скаляр.

При расчете электромагнитного излучения в дальней зоне, т. е. при условии $kr \to \infty$, эти операции упрощаются: а именно, если $\mathbf{A}$ и Ψ зависят от r по закону $\frac{e^{ikr}}{r}$, то приближенно можно написать

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{A} = ikA_r \\ &\operatorname{grad}_r\Psi = ik\Psi; \quad \operatorname{grad}_\vartheta\Psi = 0; \quad \operatorname{grad}_\varphi\Psi = 0; \\ &\operatorname{rot}_r\mathbf{A} = 0; \quad \operatorname{rot}_\vartheta\mathbf{A} = -ikA_\varphi; \quad \operatorname{rot}_\varphi\mathbf{A} = ikA_\vartheta, \end{aligned}\right\} \qquad (86.16)$$

где выражения порядка $\frac{1}{kr}$ по сравнению с выписанными (члены, пропорциональные $\frac{1}{(kr)^2}$) мы заменили нулями.

ЭБ "Культурное наследие России"

С помощью соотношений (86.16) формулы (85.10) преобразуются к виду

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta &= H_\varphi = ik(A^e_\vartheta + A^m_\varphi), \\ E_\varphi &= -H_\vartheta = ik(A^e_\varphi - A^m_\vartheta), \\ E_r &= H_r = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (86.17)$$

В следующем параграфе мы рассмотрим излучение электромагнитных волн из прямоугольного отверстия, применив эти формулы.

§ 87. Дифракция на прямоугольном отверстии

Исследуем излучение электромагнитных волн из прямоугольного отверстия (см. 119,*а*)

$$-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}, \quad z = 0, \qquad (87.01)$$

тангенциальное поле на котором задано следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} E^0_y = Be^{ikx\sin\vartheta_0};\ H^0_x &= -\cos\vartheta_0 Be^{ikx\sin\vartheta_0} \\ E^0_x = H^0_y &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (87.02)$$

где B — постоянная, ϑ_0 — некоторый угол. Такое поле получается, если на плоскость $z=0$ падает плоская волна с углом падения ϑ_0 (ср. § 15). Если положить $\vartheta_0 = 0$, то это тангенциальное поле примет вид

$$E^0_y = B;\ H^0_x = -B. \qquad (87.03)$$

Такое поле получается при нормальном падении плоской волны на непрозрачный экран $z=0$ с прямоугольным отверстием (рис. 119,*а*). Если же по аналогии с формулой (48.05) положить

$$g = \frac{\pi}{a} = k\sin\vartheta_0; \quad h = \sqrt{k^2 - g^2} = k\cos\vartheta_0 \qquad (87.04)$$

и взять полусумму поля (87.02) и такого же поля с углом $-\vartheta_0$, то мы получим тангенциальное поле

$$E^0_y = B\cos\frac{\pi x}{a}; \quad H^0_x = -\frac{h}{k}B\cos\frac{\pi x}{a}. \qquad (87.05)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Это—поперечное поле волны H_{10} в прямоугольном волноводе со сторонами a и b. Действительно, составляющие (87.05) можно записать иначе

$$E_y^0 = B \sin \frac{\pi x'}{a}; \quad H_x^0 = -\frac{h}{k} B \sin \frac{\pi x'}{a}, \tag{87.06}$$

где $x' = \frac{a}{2} + x$ есть координата, отсчитываемая от стенки волновода, а x — от его середины [ср. неравенства (87.01)]. Если положить $B = ikgC$, то формулы (87.06) и (41.18) полностью совпадут.

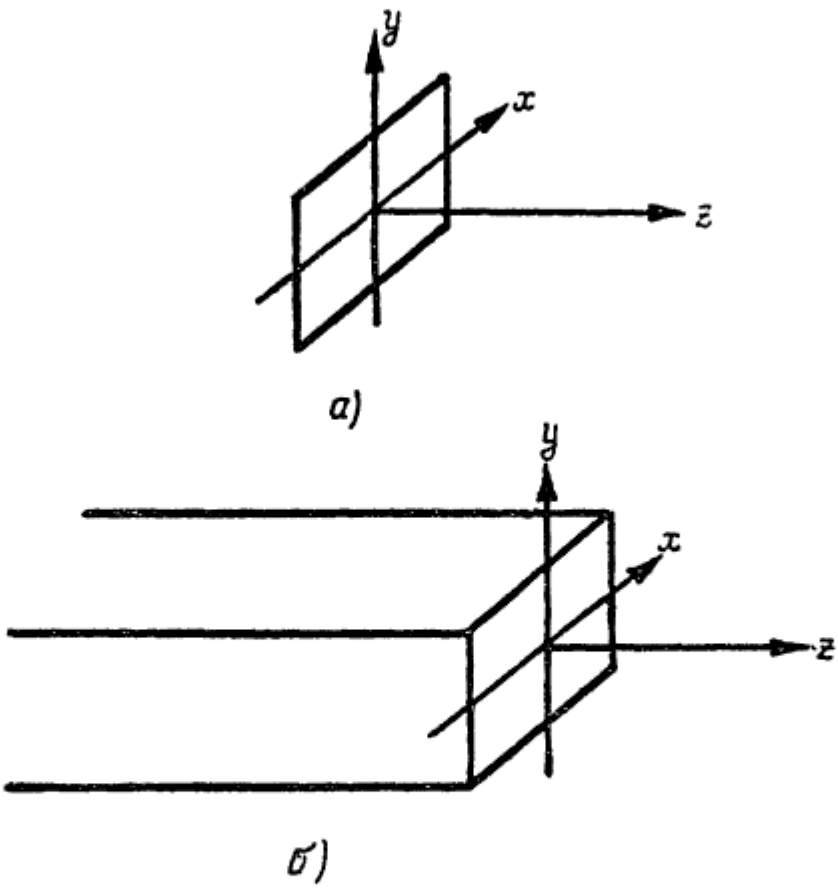


Рис. 119. Прямоугольное излучающее отверстие:
а — в плоском экране; *б* — открытый конец прямоугольного волновода.

Таким образом, тангенциальное поле (87.02) позволяет нам дать приближенное решение задачи о дифракции плоской волны на прямоугольном отверстии в плоском экране и задачи о дифракции волноводной волны H_{10} на открытом конце прямоугольного волновода (рис. 118,*б*). Приближенность этого решения вытекает из предположения, что набегающая волна доходит до излучающего отверстия без какого-либо изменения своей структуры, а также из того, что мы считаем электромагнитное поле на части поверхности, дополняющей площадку S_0, равным нулю. В § 90 мы рассмотрим

Электронное наследие России

более подробно пределы применимости получаемых таким способом результатов.

Если воспользоваться формулой (86.04) и обозначить через x, y (вместо ξ, τ_1) координаты точки истока, то получим

$$\rho \cos \Omega = x \sin \vartheta \cos \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi. \qquad (87.07)$$

Выражения (86.10) при подстановке в них тангенциального поля (87.02) приобретают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} A_y^e = -abB \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \cos \vartheta_0 F; \quad A_x^m = abB \frac{e^{ikr}}{4\pi r} F; \\ A_x^e = A_y^m = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (87.08)$$

где через F обозначен интеграл

$$F = \frac{1}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ik(x \sin \vartheta \cos \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi) + ikx \sin \vartheta_0} \, dx dy, \qquad (87.09)$$

к которому мы присоединили множитель $\frac{1}{ab}$, чтобы сделать его безразмерным. Интеграл F можно представить в виде произведения

$$F = F_a F_b, \qquad (87.10)$$

где

$$\left.\begin{aligned} F_a = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ikx(\sin \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta_0)} \, dx, \\ F_b = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-iky \sin \vartheta \sin \varphi} \, dy. \end{aligned}\right\} \qquad (87.11)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Интегралы F_a и F_b вычисляются элементарно. Они равны

$$F_a = \frac{2}{ka} \frac{\sin\left[\frac{ka}{2}(\sin\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta_0)\right]}{\sin\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta_0},$$
$$F_b = \frac{2}{kb} \frac{\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)}{\sin\vartheta\sin\varphi}. \qquad (87.12)$$

Заметим, что F_b получается из F_a, если заменить $\cos\varphi$ на $\sin\varphi$, ϑ_0 на нуль, a на b.

По формулам (86.12), (87.08) и (87.10) мы получаем

$$\left.\begin{aligned} A^e_\vartheta &= -abB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cos\vartheta_0\cos\vartheta F\sin\varphi; \\ A^m_\vartheta &= abB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cos\vartheta F\cos\varphi; \\ A^e_\varphi &= -abB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cos\vartheta_0 F\cos\varphi; \\ A^m_\varphi &= -abB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}F\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (87.13)$$

Поле излучения согласно формулам (86.17) равно

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta = H_\varphi &= -ikabB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(1+\cos\vartheta_0\cos\vartheta)F\sin\varphi, \\ E_\varphi = -H_\vartheta &= -ikabB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(\cos\vartheta_0+\cos\vartheta)F\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (87.14)$$

Для нормального падения плоской волны [формулы (87.03)] мы получим диффракционное поле на больших расстояниях от отверстия, полагая $\vartheta_0 = 0$ в выражениях (87.12) и (87.14). Это диффракционное поле имеет симметричный вид

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta = H_\varphi &= -ikabB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(1+\cos\vartheta)F\sin\varphi, \\ E_\varphi = -H_\vartheta &= -ikabB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(1+\cos\vartheta)F\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (87.15)$$

где функция F есть произведение двух однотипных функций

$$F_a = \frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\vartheta\cos\varphi\right)}{\frac{ka}{2}\sin\vartheta\cos\varphi}; \quad F_b = \frac{\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)}{\frac{kb}{2}\sin\vartheta\sin\varphi}. \tag{87.16}$$

При условиях

$$ka \gg 1; \quad kb \gg 1 \tag{87.17}$$

направленность излучения определяет функция $F = F_a F_b$, так как другие угловые множители по сравнению с ней меняются медленно. Можно показать, что сам метод приближенного расчета по принципу Гюйгенса дает правильные результаты лишь при выполнении условий (87.17), т. е. когда поперечные размеры отверстия гораздо больше длины волны. Физически это объясняется тем, что вблизи краев отверстия (на расстояниях порядка длины волны или менее) поле оказывается отличным от тех значений, которые мы задавали выше на поверхности S. Это обстоятельство приводит к малой относительной ошибке для поля излучения лишь при достаточно широком отверстии, т. е. при условиях (87.17).

Изучим более подробно электромагнитное поле в двух главных плоскостях: в магнитной (горизонтальной) плоскости — при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, и в электрической (вертикальной) плоскости — при $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. Названия плоскостей связаны с поляризацией набегающей волны (87.03).

При $\varphi = 0$ формулы (87.15) дают

$$\left.\begin{aligned} &E_\vartheta = H_\varphi = 0, \\ &E_\varphi = -H_\vartheta = -ikabB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(1+\cos\vartheta)F_a(\vartheta), \end{aligned}\right\} \tag{87.18}$$

где

$$F_a(\vartheta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta} \qquad \left(\frac{ka}{2} = \frac{\pi a}{\lambda}\right), \tag{87.19}$$

а при $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} &E_\vartheta = H_\varphi = -ikabB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(1+\cos\vartheta)F_b(\vartheta), \\ &E_\varphi = -H_\vartheta = 0, \end{aligned}\right\} \tag{87.20}$$

ЭБ "Научное наследие России"

где

$$F_b(\vartheta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\vartheta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\vartheta} \qquad \left(\frac{kb}{2} = \frac{\pi b}{\lambda}\right). \tag{87.21}$$

Таким образом, функция $F_a(\vartheta)$ определяет направленность излучения в горизонтальной плоскости, функция $F_b(\vartheta)$ — в вертикальной. Ход функции $F_a(\vartheta)$ схематически изобра-

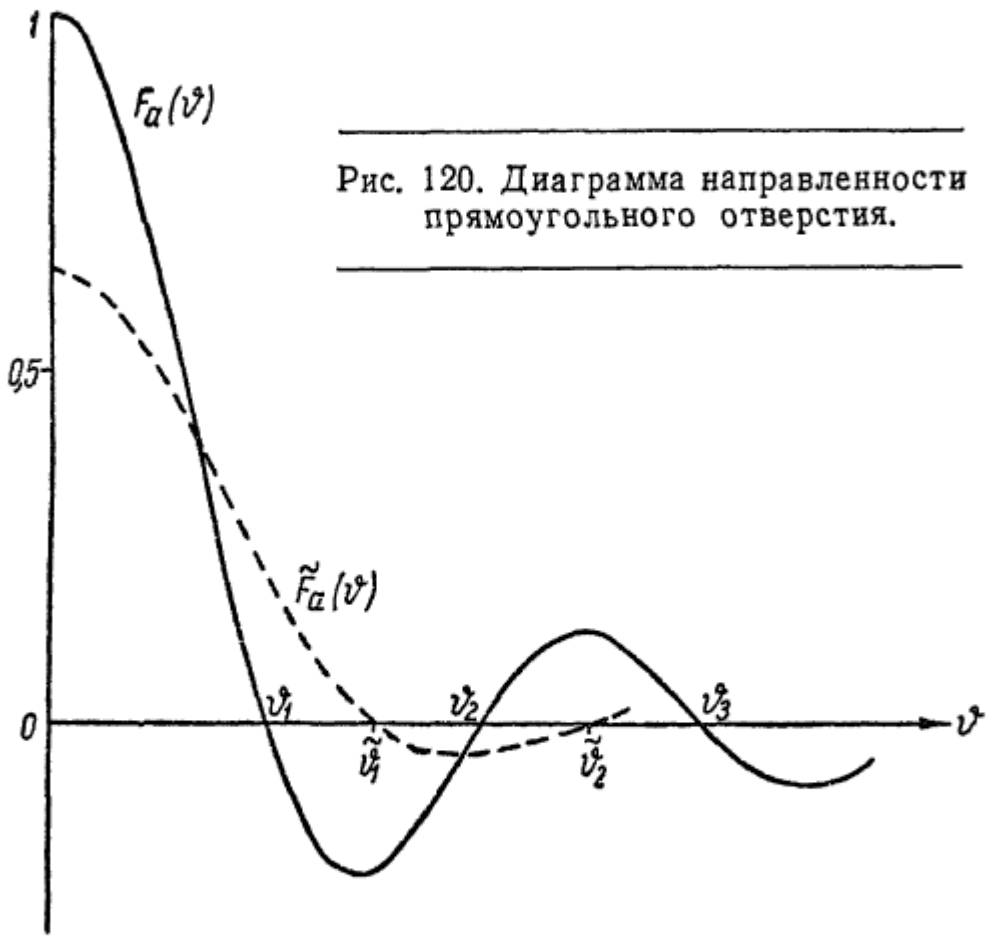


Рис. 120. Диаграмма направленности прямоугольного отверстия.

жен на рис. 120 сплошной кривой; такой же характер имеет и функция $F_b(\vartheta)$. Функция $F_a(\vartheta)$ обращается в нуль при $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$, где угол ϑ_n удовлетворяет уравнению

$$a\sin\vartheta_n = n\lambda \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{87.22}$$

которое можно вывести из элементарных соображений.

Перейдем к дифракции волны H_{10} на открытом конце прямоугольного волновода. В этом случае диффракционное

ЭБ "Научное наследие России"

поле определяется выражениями (87.14), причем в силу формул (87.12) для функции F_a нужно взять выражение

$$F_a = \frac{1}{ka}\left[\frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\vartheta\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta_0} + \frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\vartheta\cos\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta_0}\right]$$

или

$$F_a = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\vartheta_0\cos\left(\frac{ka}{2}\sin\vartheta\cos\varphi\right)}{\sin^2\vartheta_0 - \sin^2\vartheta\cos^2\varphi}, \qquad (87.23)$$

а функция F_b — та же, что в формулах (87.12) и (87.16). В магнитной плоскости, при $\varphi = 0$, поле излучения упрощается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &E_\vartheta = H_\varphi = 0,\\ &E_\varphi = -H_\vartheta = -ikabB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta)\,\widetilde{F}_a(\vartheta), \end{aligned}\right\} \qquad (87.24)$$

где

$$\widetilde{F}_a(\vartheta) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2\vartheta_0\cos\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta_0}. \qquad (87.25)$$

В электрической же плоскости, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} &E_\vartheta = H_\varphi = -ikabB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(1 + \cos\vartheta_0\cos\vartheta)\,\widetilde{F}_b(\vartheta),\\ &E_\varphi = -H_\vartheta = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (87.26)$$

где

$$\widetilde{F}_b(\vartheta) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\vartheta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\vartheta}. \qquad (87.27)$$

Функция $\widetilde{F}_a(\vartheta)$, определяющая направленность излучения волновода в горизонтальной плоскости, имеет следующие свойства:

$$\widetilde{F}_a(0) = \frac{2}{\pi}, \quad \widetilde{F}_a(\vartheta_0) = \frac{1}{2}; \qquad (87.28)$$

она обращается в нуль при $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$, где ϑ_n определяется из уравнения

$$a\sin\vartheta_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (87.29)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Ход функции $\tilde{F}_a(\vartheta)$ изображен на рис. 120 пунктиром. Из рисунка видно, что функция $\tilde{F}_a(\vartheta)$ дает излучение менее направленное, чем функция $F_a(\vartheta)$. Это вызвано тем, что функция $F_a(\vartheta)$ соответствует равномерному распределению амплитуды поля по отверстию согласно формулам (87.03), а функция $\tilde{F}_a(\vartheta)$ соответствует неравномерному — косинусоидальному — распределению [см. формулы (87.05)]. В теории антенн доказывается, что подобные „амплитудные искажения" всегда снижают направленность излучения.

Полученные выше формулы для поля излучения из открытого конца прямоугольного волновода могут быть непосредственно применимы к пирамидальному или секториальному рупору, выходное отверстие которого имеет вид прямоугольника со сторонами a и b. При этом сферическая или цилиндрическая волна, распространяющаяся в рупоре (ср. § 57), должна быть преобразована (с помощью рупорной линзы) в волну с плоским фазовым фронтом. Только тогда электромагнитное поле волны на открытом конце рупора можно уподобить полю волны H_{10} в прямоугольном волноводе.

Излучение из открытого конца рупора (без линзы) также можно исследовать с помощью электродинамического принципа Гюйгенса, однако вычисления значительно усложнятся. Не входя в детали этих вычислений, отметим лишь, что направленность излучения в этом случае будет меньше, чем при дифракции плоской волны на отверстии тех же размеров. В этом проявляется известное из теории антенн положение, согласно которому „фазовые искажения" (непостоянство фазы источников на излучающей площадке) приводят к снижению направленности.

§ 88*. Дифракция Фраунгофера и дифракция Френеля. Волны от краев

Выше мы рассмотрели дифракцию плоской электромагнитной волны на отверстии в плоском экране. При этом мы исследовали дифракционное поле на больших расстояниях от отверстия, удовлетворяющих условию $kr \gg 1$ и условиям (86.07) и (86.08). Иначе говоря, мы ограничились рассмотрением дифракционных явлений Фраунгофера.

ЭБ "Научное наследие России"

Полученное нами угловое распределение интенсивности диффракционного поля практически совпадает с результатами, даваемыми „скалярным“ принципом Гюйгенса — Кирхгофа, и согласуется с элементарными расчетами диффракции Фраунгофера. Однако электродинамический принцип Гюйгенса позволяет также вычислить *поляризацию* диффракционного поля, если известна поляризация набегающей волны.

На меньших расстояниях от излучающего отверстия имеет место диффракция Френеля. В то время как диффракция Фраунгофера относится к „дальней зоне“, где электромагнитная волна уже полностью сформировалась как волна сферическая, диффракция Френеля происходит в „ближней“ или „промежуточной зоне“, где плоская волна превращается в сферическую. Относящиеся к этой области закономерности гораздо сложнее, поэтому мы ограничимся их качественным рассмотрением.

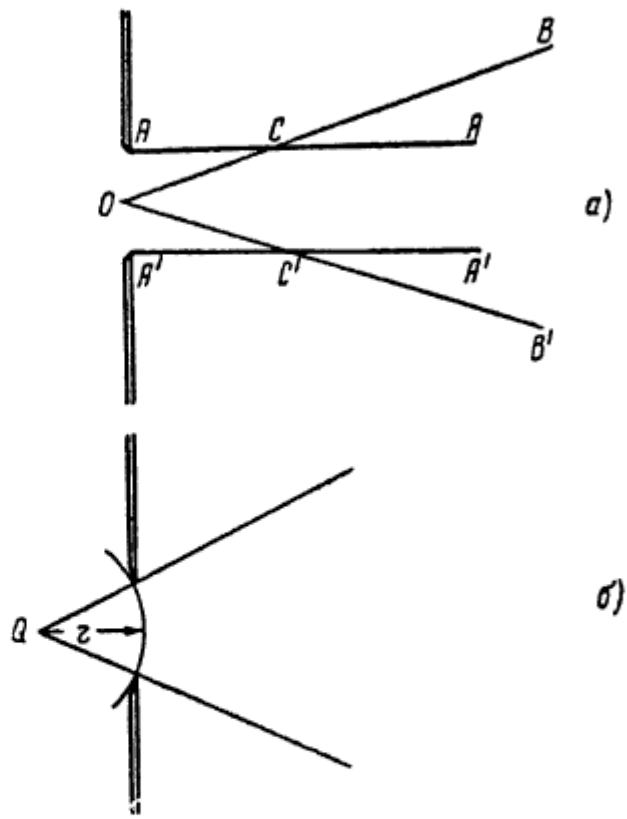


Рис. 121. Диффракция на отверстии: *а* — поле плоской волны; *б* — сферической волны.

Пусть на прямоугольное отверстие падает нормально плоская электромагнитная волна (см. выше § 87). Ясно, что при условиях (87.17) в отверстие проходит прямоугольный участок плоской волны. На рис. 121,*а* схематически изображена эта плоская волна в продольном сечении $y = 0$; она имеет резкие границы AA и $A'A'$. Из-за диффракции эти резкие границы расплываются по мере распространения волны вдоль оси z, энергия волны рассеивается в стороны, пока волна не превратится в сферическую волну, исследованную в § 87.

Согласно рис. 120 и формуле (87.22) основная часть энергии этой волны сосредоточена (рис. 121) внутри угла BOB', равного $2\vartheta_1$, где

$$\sin \vartheta_1 = \frac{\lambda}{a}. \qquad (88.01)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Прямые OB и OB' пересекают прямые AA и $A'A'$ (границы поля по геометрической оптике) в точках C и C', находящихся от центра отверстия O на расстоянии

$$r_0 = \frac{a}{2\sin\vartheta_1} = \frac{a^2}{2\lambda}. \qquad (88.02)$$

Очевидно, что при $r \ll r_0$ диффракционное поле является участком плоской волны, слегка размытым на краях. При условии $r \gg r_0$, по существу эквивалентном условию (86.08), диффракционное поле уже имеет характер сферической волны и подчиняется законам диффракции Фраунгофера. При $r \sim r_0$, в зоне диффракции Френеля, происходит превращение плоской волны в сферическую. Характер диффракционного поля здесь довольно сложен, однако в самом грубом приближении можно считать, что граница этого поля в плоскости $y = 0$ примерно идет по линиям ACB и $A'C'B'$. При этом часть энергии поля просачивается за эту границу, давая начало боковым лепесткам в характеристике излучения данного отверстия (см. рис. 120).

При удалении от отверстия *линейные* размеры диффракционного поля увеличиваются: чем больше z (или r), тем большую ширину (по оси x) имеет поле. Однако *угловые* размеры диффракционного поля при этом уменьшаются: при $r = \frac{a}{2}$ поле занимает угол π, а при увеличении r угол, занятый полем, падает до $2\vartheta_1$.

Если на отверстие падает сферическая волна от источника, находящегося на оси z, на расстоянии r от плоскости отверстия (рис. 121,*б*), то излучение из отверстия будет обладать меньшей направленностью, чем в случае плоской волны. Действительно, при исследовании поля излучения на бесконечности, т. е. на весьма больших расстояниях от отверстия, можно воспользоваться принципом взаимности; угловая направленность сферической волны (рис. 121,*б*) на бесконечности будет такая же, как угловая направленность плоской волны (рис. 121,*а*) на расстоянии r от начала координат. При $r \gg r_0$, где r_0 по-прежнему определяется формулой (88.02), сферическая волна будет давать практически ту же диаграмму направленности, что и плоская волна. Наоборот, при $r \ll r_0$ диаграмма направленности определяется законами геометрической оптики: диффракционное поле занимает угол $2\vartheta_0$, где

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{a}{2r}, \qquad (88.03)$$

Научное наследие России

так что ширина главного лепестка диаграммы направленности равна углу, под которым из источника видно отверстие. Этот результат показывает, например, что увеличение излучающего отверстия за счет удлинения пирамидального или конического рупоров, в которых распространяется сферическая электромагнитная волна, не всегда приводит к увеличению направленности излучения. Действительно, если обозначить угол раствора рупора в плоскости $y=0$ через ϑ_0, то величина r_0 будет равна

$$r_0=\frac{2r^2\operatorname{tg}^2\vartheta}{\lambda}. \tag{88.04}$$

При увеличении r отношение $\frac{r_0}{r}$ также увеличивается, и при $r\ll r_0$ направленность определяется лишь углом раствора рупора. При $r\sim r_0$ направленность зависит от отношения $\frac{a}{\lambda}$; по сравнению со случаем, когда на таком же отверстии диффрагирует плоская волна, направленность получается меньшей (ср. конец § 87).

Согласно принципу Гюйгенса поле излучения данного отверстия создается вторичными источниками, распределенными по его площади. Интересно отметить, что формулы для поля излучения допускают и другую интерпретацию, а именно, формулы (87.15) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta=H_\varphi&=iB\frac{e^{ikr}}{4\pi kr}(1+\cos\vartheta)\,G\sin\varphi,\\ E_\varphi=-H_\vartheta&=iB\frac{e^{ikr}}{4\pi kr}(1+\cos\vartheta)\,G\cos\varphi,\end{aligned}\right\} \tag{88.05}$$

где

$$G=-4\frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\vartheta\cos\varphi\right)\sin\left(\frac{kb}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)}{\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi}. \tag{88.06}$$

Применяя к синусам формулу Эйлера, можно представить функцию G в виде

$$G=\frac{1}{\sin^2\vartheta\cos\varphi\sin\varphi}\left[e^{ik\left(\frac{a}{2}\sin\vartheta\cos\varphi+\frac{b}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)}-\right.$$
$$-e^{ik\left(\frac{a}{2}\sin\vartheta\cos\varphi-\frac{b}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)}-e^{ik\left(-\frac{a}{2}\sin\vartheta\cos\varphi+\frac{b}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)}+$$
$$\left.+e^{ik\left(-\frac{a}{2}\sin\vartheta\cos\varphi-\frac{b}{2}\sin\vartheta\sin\varphi\right)}\right] \tag{88.07}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Это значит, что дифракционное поле в дальней зоне можно представить в виде суммы четырех сферических волн, расходящихся от четырех вершин прямоугольника на рис. 119,*а*. Действительно, фазы четырех слагаемых в квадратной скобке (88.07) как раз таковы, что вместе с множителем $\frac{e^{ikr}}{r}$ они согласно формуле (86.09) дают волны, расходящиеся от точек с координатами $x=\pm\frac{a}{2}$, $y=\pm\frac{b}{2}$. Таким же образом можно истолковать и формулы (87.14).

Полученный результат является частным случаем следующего общего положения теории дифракции: дифракционное поле можно рассматривать не только как результат действия вторичных источников, распределенных по площади отверстия, но и также как результат сложения полей от вторичных источников, находящихся на краю отверстия. Иначе говоря, можно отождествить дифракцию на отверстии с дифракцией на его крае — оба способа рассмотрения дифракционных явлений оказываются равноправными. Мы не будем исследовать дифракционных явлений с точки зрения волн, создаваемых краями отверстия, в общем виде и лишь проверим допустимость такого подхода для круглого отверстия (см. далее § 89).

§ 89*. Дифракция на круглом отверстии

В этом параграфе мы рассмотрим дифракцию электромагнитных волн на круговом отверстии радиуса a. Начнем с дифракции плоской волны, падающей нормально на отверстие

$$0<r'<a;\ 0\leqslant\varphi'\leqslant 2\pi;\ z=0 \qquad (89.01)$$

в плоском экране (рис. 122, *а*), где r', φ' и z — цилиндрические координаты. В декартовой системе координат тангенциальные составляющие поля по-прежнему определяются формулами (87.03), поэтому мы придем к следующим выражениям для поля излучения:

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta = H_\varphi &= -\frac{ika^2}{4}B\frac{e^{ikr}}{r}(1+\cos\vartheta)F\sin\varphi,\\ E_\varphi = -H_\vartheta &= -\frac{ika^2}{4}B\frac{e^{ikr}}{r}(1+\cos\vartheta)F\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (89.02)$$

где

$$F = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ik \sin \vartheta (x \cos \varphi + y \sin \varphi)} r' dr' d\varphi'. \qquad (89.03)$$

Эти выражения отличаются от формул (87.15) и (87.09) лишь тем, что в определении функции F мы взяли множитель $\frac{1}{\pi a^2}$, где πa^2 — площадь кругового отверстия, в си-

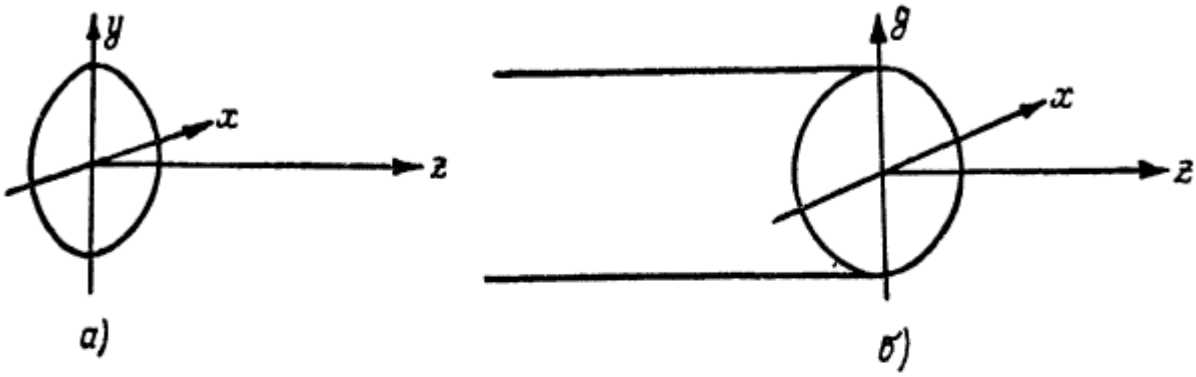


Рис. 122. Круглое излучающее отверстие:
а — в плоском экране; *б* — открытый конец круглого волновода.

лу чего поле излучения приобрело другой множитель. Для вычисления интеграла (89.03) декартовы координаты x, y в плоскости отверстия следует выразить через полярные координаты r', φ' по формулам

$$\left.\begin{aligned} x = r' \cos \varphi';\ y = r' \sin \varphi' \\ x \cos \varphi + y \sin \varphi = r' \cos (\varphi' - \varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (89.04)$$

и использовать следующее тождество теории бесселевых функций (см. Ватсон, стр. 29)

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} e^{-iz \sin \vartheta + im\vartheta} d\vartheta,$$

где $m = 0, 1, 2 \ldots$, а α — любое. Если положить $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \psi$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то это тождество примет вид

$$J_m(z) = \frac{i^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iz \cos \psi - im\psi} d\psi = \frac{i^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iz \cos \psi} \cos m\psi \, d\psi. \qquad (89.05)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Полагая $m=0$ и $z=kr'\sin\vartheta$, мы получаем для функции F интеграл

$$F=\frac{2}{a^2}\int_0^a J_0(kr'\sin\vartheta)r'dr', \tag{89.06}$$

который может быть вычислен тем же приемом, что и интеграл (27.11). В результате имеем

$$F=\frac{2J_1(ka\sin\vartheta)}{ka\sin\vartheta}. \tag{89.07}$$

Функция $F=F(\vartheta)$ определяет характеристику излучения отверстия как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях. Если произведение ka велико, то при условии

$$ka\sin\vartheta\gg 1 \tag{89.08}$$

мы можем функцию Бесселя $J_1(ka\sin\vartheta)$ заменить ее асимптотическим выражением (22.09) и получаем

$$F=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{(ka\sin\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\left[e^{-i\left(ka\sin\vartheta-\frac{3\pi}{4}\right)}+e^{i\left(ka\sin\vartheta-\frac{3\pi}{4}\right)}\right]. \tag{89.09}$$

Последнее выражение имест тот же физический смысл, что и формула (88.07): поле излучения есть сумма сферических волн, расходящихся от двух точек на краю отверстия ($r'=a$). Можно показать, что при невыполнении условия (89.08) поле излучения также представляется в виде наложения сферических волн, расходящихся от края отверстия, но в этом случае в данную точку наблюдения посылают свои волны все точки края.

При излучении волн из открытого конца круглого волновода (рис. 122, *б*) мы также имеем диффракцию на круглом отверстии. Однако структура поля набегающей на отверстие волны соответствует одной из волноводных волн. Рассмотрим наиболее важную для круглого волновода волну H_{11}, определяемую формулами (42.13) и (42.14). В плоскости отверстия $z=0$ поле этой волны имеет составляющие

$$\left.\begin{aligned} E_x^0&=ik\frac{\partial\Pi'}{\partial y}; & H_x^0&=ik\cos\vartheta_0\frac{\partial\Pi'}{\partial x},\\ E_y^0&=-ik\frac{\partial\Pi'}{\partial x}; & H_y^0&=ik\cos\vartheta_0\frac{\partial\Pi'}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{89.10}$$

...ное наследие России"

где

$$\Pi' = CJ_1(gr')\cos\varphi'. \tag{89.11}$$

и

$$g = \frac{\mu_{11}}{a} = k\sin\vartheta_0;\quad h = \sqrt{k^2 - g^2} = k\cos\vartheta_0 \tag{89.12}$$

[ср. формулы (87.04)]. Формулы (89.10) дают

$$\left.\begin{aligned} A_x^e &= -ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cos\vartheta_0 Y;\quad A_x^m = -ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r}X,\\ A_y^e &= ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cos\vartheta_0 X;\quad A_y^m = -ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r}Y, \end{aligned}\right\} \tag{89.13}$$

где

$$\left.\begin{aligned} X &= \int_S e^{-ikr'\sin\vartheta\cos(\varphi'-\varphi)}\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\,dS;\\ Y &= \int_S e^{-ikr'\sin\vartheta\cos(\varphi'-\varphi)}\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\,dS, \end{aligned}\right\} \tag{89.14}$$

и интегрирование производится в пределах (89.01). Производные $\frac{\partial\Pi'}{\partial x}$ и $\frac{\partial\Pi'}{\partial y}$ можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Pi'}{\partial x} &= \frac{\partial\Pi'}{\partial r'}\cos\varphi' - \frac{\partial\Pi'}{\partial\varphi'}\frac{\sin\varphi'}{r'} =\\ &= \frac{1}{2}gC\left[J_0(gr') - J_2(gr')\cos 2\varphi'\right]\\ \frac{\partial\Pi'}{\partial y} &= \frac{\partial\Pi'}{\partial r'}\sin\varphi' + \frac{\partial\Pi'}{\partial\varphi'}\frac{\cos\varphi'}{r'} =\\ &= -\frac{1}{2}gCJ_2(gr')\sin 2\varphi'. \end{aligned}\right\} \tag{89.15}$$

Здесь мы использовали тождества (см. Ватсон, стр. 56)

$$J_1'(z) + \frac{J_1(z)}{z} = J_0(z);\quad J_1'(z) - \frac{J_1(z)}{z} = -J_2(z). \tag{89.16}$$

Вводя в интегралах (89.14) вместо φ' переменную интегрирования $\psi = \varphi' - \varphi$ и пользуясь формулами

$$\cos 2\varphi' = \cos 2\varphi\cos 2\psi - \sin 2\varphi\sin 2\psi,$$
$$\sin 2\varphi' = \sin 2\varphi\cos 2\psi + \cos 2\varphi\sin 2\psi,$$

мы получаем

$$X = \frac{1}{2}gC(W_0 - W_2\cos 2\varphi);\quad Y = -\frac{1}{2}gCW_2\sin 2\varphi, \tag{89.17}$$

где

$$W_m = \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-ikr\sin\vartheta\cos\psi} J_m(gr)\cos m\psi r\,dr\,d\psi. \qquad (89.18)$$

Здесь интегрирование по ψ можно произвести, пользуясь тождеством (89.05), и мы приходим к интегралу

$$W_m = 2\pi i^{-m}\int_0^a J_m(kr\sin\vartheta)\,J_m(gr)\,r\,dr, \qquad (89.19)$$

который легко вычисляется с помощью формул Ломмеля (Ватсон, стр. 148)

$$W_m = 2\pi i^{-m} a\frac{gJ_m(ka\sin\vartheta)\,J_{m-1}(ga) - k\sin\vartheta J_{m-1}(ka\sin\vartheta)\,J_m(ga)}{k^2\sin^2\vartheta - g^2} =$$

$$= 2\pi i^{-m} a\frac{-gJ_m(ka\sin\vartheta)\,J_{m+1}(ga) + k\sin\vartheta\,J_{m+1}(ka\sin\vartheta)\,J_m(ga)}{k^2\sin^2\vartheta - g^2}. \qquad (89.20)$$

По формулам (86.12) мы легко получаем составляющие электрического и магнитного векторных потенциалов

$$\left.\begin{aligned} A_\vartheta^m &= -ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cdot\frac{1}{2}gC\cos\vartheta(W_0 - W_2)\cos\varphi,\\ A_\varphi^m &= ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cdot\frac{1}{2}gC(W_0 + W_2)\sin\varphi,\\ A_\vartheta^e &= ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cdot\frac{1}{2}gC\cos\vartheta_0\cos\vartheta(W_0 + W_2)\sin\varphi,\\ A_\varphi^e &= ik\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cdot\frac{1}{2}gC\cos\vartheta_0(W_0 - W_2)\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (89.21)$$

и по формулам (86.17) — поле излучения

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta = H_\varphi &= -k^2\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\times\\ &\times\frac{1}{2}gC(1 + \cos\vartheta_0\cos\vartheta)(W_0 + W_2)\sin\varphi,\\ E_\varphi = -H_\vartheta &= -k^2\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\times\\ &\times\frac{1}{2}gC(\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta)(W_0 - W_2)\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (89.22)$$

Электронное наследие России

При вычислении суммы $W_0 + W_2$ и разности $W_0 - W_2$ по формулам (§9.20) мы должны учесть, что

$$J_1'(ga) = 0, \tag{89.23}$$

так что при $z = ga$ формулы (89.16) дают

$$J_0(ga) = J_2(ga) = \frac{J_1(ga)}{ga} = \frac{\beta}{2}. \tag{89.24}$$

Для волны H_{11} имеем $ga = 1{,}841$ и $\beta = 0{,}632$. Далее получаем

$$\left.\begin{aligned} W_0 &= 2\pi a\beta \frac{-g^2 a J_0(ka\sin\vartheta) + k\sin\vartheta J_1(ka\sin\vartheta)}{k^2\sin^2\vartheta - g^2}, \\ W_2 &= 2\pi a\beta \frac{-g^2 a J_2(ka\sin\vartheta) + k\sin\vartheta J_1(ka\sin\vartheta)}{k^2\sin^2\vartheta - g^2}. \end{aligned}\right\} \tag{89.25}$$

Поскольку из формул (89.16) следуют соотношения

$$J_0(z) - J_2(z) = 2J_1'(z);\ J_0(z) + J_2(z) = \frac{2J_1(z)}{z}, \tag{89.26}$$

мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} W_0 - W_2 &= 2\pi g^2 a^2 \beta \frac{J_1'(ka\sin\vartheta)}{g^2 - k^2\sin^2\vartheta}, \\ W_0 + W_2 &= 2\pi a\beta \frac{J_1(ka\sin\vartheta)}{k\sin\vartheta}. \end{aligned}\right\} \tag{89.27}$$

Для удобства сравнения поля излучения из круглого отверстия, возбуждаемого плоской волной, и из конца круглого волновода введем величину

$$B = -ik\frac{1}{2}gC, \tag{89.28}$$

равную составляющей E_y^0 в центре излучающего круга, при $r' = 0$ [см. формулы (89.10) и (89.11)]. Тогда окончательные выражения для поля излучения волны из конца круглого волновода имеют вид

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta = H_\varphi &= -\frac{ika^2}{4}\beta B\frac{e^{ikr}}{r}(1 + \cos\vartheta_0\cos\vartheta)F\sin\varphi, \\ E_\varphi = -H_\vartheta &= -\frac{ika^2}{4}\beta B\frac{e^{ikr}}{r}(\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta)G\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{89.29}$$

Электронное наследие России

где функция F определяется формулой (89.07), а функция G равна

$$G = \frac{2\sin^2\vartheta_0 J_1'(ka\sin\vartheta)}{\sin^2\vartheta_0 - \sin^2\upsilon}. \qquad (89.30)$$

Входящий в эти функции угол ϑ_0 определяется формулами (89.12); согласно § 48 плоские волны, на которые распадается данная волноводная волна, распространяются под углом ϑ_0 к оси z.

Формулы (89.02) и (89.29) различаются между собой в следующем:

1. В формулы (89.29) входит угол ϑ_0, отсутствующий в формулах (89.02), относящихся к нормально падающей плоской волне (у которой $\vartheta_0 = 0$). Это отличие для достаточно высоких частот или для достаточно широких отверстий несущественно, поскольку тогда угол ϑ_0 мал.

2. В формулы (89.29) входит множитель $\beta = 0{,}632$, уменьшающий поле при $\vartheta = 0$, т. е. в направлении максимума излучения. Этот множитель появляется из-за неравномерного распределения поля по излучающему отверстию волновода (ср. рис. 37); при одинаковой напряженности электрического поля B в центре отверстия плоская волна создает при $\vartheta = 0$ более сильное поле.

3. Направленность излучения из волновода в горизонтальной и вертикальной плоскостях $\left(\text{при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ несколько различна, поскольку в формулах (89.29) стоят различные функции F и G. Можно показать, что функция G дает несколько меньшую направленность, чем функция F. Обе эти функции нормированы так, что при $\vartheta = 0$ имеем

$$F = G = 1. \qquad (89.31)$$

Согласно формулам (89.02), излучение плоской волны обладает (по крайней мере при $ka \gg 1$, когда эти формулы применимы) одинаковой направленностью во всех плоскостях $\varphi = \text{const}$.

Интересно, что при сравнении формул § 87 для прямоугольного отверстия мы приходим к аналогичным выводам. При этом роль множителя β играет множитель $\frac{2}{\pi}$ в формулах (87.23), а роль функции G — функция $\tilde{F}_a(\vartheta)$ по формуле (87.25).

Мы рассмотрели выше теорию диффракции на круглом отверстии, основанную на принципе Гюйгенса. Вывод фор-

мул для круглого отверстия, равно как и сам вид этих формул, отличаются некоторой сложностью, поскольку приходится пользоваться бесселевыми функциями, в то время как для прямоугольного отверстия поле выражается через тригонометрические функции.

Дифракция на круговом отверстии может быть рассчитана вполне строго. Действительно, с помощью современных методов математической теории дифракции можно получить строгое решение как для круглого отверстия в идеально проводящем и бесконечно тонком экране, так и для открытого конца круглого волновода. Сравнивая полученные таким образом точные результаты с приближенными результатами, основанными на принципе Гюйгенса, можно выяснить пределы применимости последнего. Этот вопрос мы обсудим в следующем параграфе.

§ 90*. Пределы применимости принципа Гюйгенса.

Выше мы рассчитали электромагнитное излучение из отверстия в плоском экране и из открытого конца волновода. Этот расчет был основан на ряде пренебрежений. Мы исходили из строгой электродинамической формулировки принципа Гюйгенса — из выражений (85.09) и (85.10). Замкнутую поверхность S в этом случае естественно провести так, чтобы она состояла из плоской площадки (излучающее отверстие) и далее продолжалась по теневой стороне экрана (не облучаемой падающей волной) или по внешней поверхности стенок волновода.

Принцип Гюйгенса даст вполне точное выражение для поля излучения, если на поверхности S взять точные значения тангенциальных полей. Однако последние обычно неизвестны, поэтому при фактическом расчете по принципу Гюйгенса делают следующие допущения (ср. § 86). Во-первых, считают, что поле в излучающем отверстии такое же, как у набегающей волны, т. е. пренебрегают возмущением поля на отверстии; в частности, не учитывают волны, отраженной от открытого конца волновода, и волн других номеров, всегда возбуждающихся в местах нарушения однородности волновода (ср. § 44). Во-вторых, принимают, что поле на остальной части поверхности S равно нулю, т. е. пренебрегают поверхностной плотностью $\mathbf{i}^e$ электрического тока, затекающего на теневую часть экрана или на внешнюю поверхность волновода (если считать экран или

ЭБ "Научное наследие России"

волновод идеально проводящими, то на этой части S имеем очевидно $\mathbf{i}^m = 0$).

Влияние этих допущений на рассчитанное поле излучения оценить довольно трудно. Поэтому большое значене для установления пределов применимости этих допущений имеют строгие решения диффракционных задач. Оказывается, что для круглого отверстия в идеально проводящей плоскости и для круглого волновода с открытым концом задачу о диффракции электромагнитных волн можно решить точно; для прямоугольного отверстия и прямоугольного волновода таких решений получить не удается. Сравнивая поле излучения, вычисленное строго, с полем излучения, приближенно рассчитанным по принципу Гюйгенса, можно выяснить надежность этого приближенного метода.

Для диффракции плоской волны на круговом отверстии радиуса a условие применимости принципа Гюйгенса имеет вид

$$ka \gg 1, \tag{90.01}$$

т. е. поперечные размеры отверстия дслжны быть доста точно велики по сравнению с длиной волны. Можно показать, что при малых значениях ka приближенный расчет по принципу Гюйгенса неправильно отображает диффракционное поле — его интенсивность, направленность и поляризацию.

Рассмотрим подробнее это расхождение. При падении плоской волны на отверстие мы задаем на нем поле по формулам (87.03) в виде невозмущенного поля плоской волны. Это „заданное“ поле должно переносить через отверстие ту часть мощности падающей волны, которая геометрически соответствует площади отверстия πa^2. Обозначим эту мощность через $P_{\text{геом}}$. Фактически же через отверстие проходит мощность P, которая рассеивается в виде сферической волны в правом полупространстве $z > 0$. Величину P можно найти, строго решив диффракционную задачу; отличие P от $P_{\text{геом}}$ связано, очевидно, с искажением поля на отверстии.

На рис. 123 изображена зависимость $\dfrac{P}{P_{\text{геом}}}$ от параметра ka. Мы видим, что при малых ka это отношение сильно отличается от единицы, и, следовательно, поле на отверстии претерпевает весьма сильные искажения. Принцип

Электронное наследие России

Гюйгенса дает интенсивность излучения, близкую к истине, лишь при $ka > 3$.

Поле излучения из круглого отверстия можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta = H_\varphi &= -ika^2 B \frac{e^{ikr}}{2r} V^{(1)}(\vartheta) \sin\varphi, \\ E_\varphi = -H_\vartheta &= -ika^2 B \frac{e^{ikr}}{2r} V^{(2)}(\vartheta) \cos\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (90.02)$$

где согласно приближенным формулам (89.02) мы имеем

$$V^{(1)}(\vartheta) = V^{(2)}(\vartheta) = \frac{1+\cos\vartheta}{2} F = (1+\cos\vartheta) \frac{J_1(ka\sin\vartheta)}{ka\sin\vartheta}, \quad (90.03)$$

а точные выражения для $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ отличаются большой сложностью. На рис. 124 сплошными кривыми изображены точные функции $|V^{(1)}(\vartheta)|$ и $|V^{(2)}(\vartheta)|$, вычисленные для $ka = 3$ и $ka = 5$ в работе М. Г. Белкиной, а пунктиром —

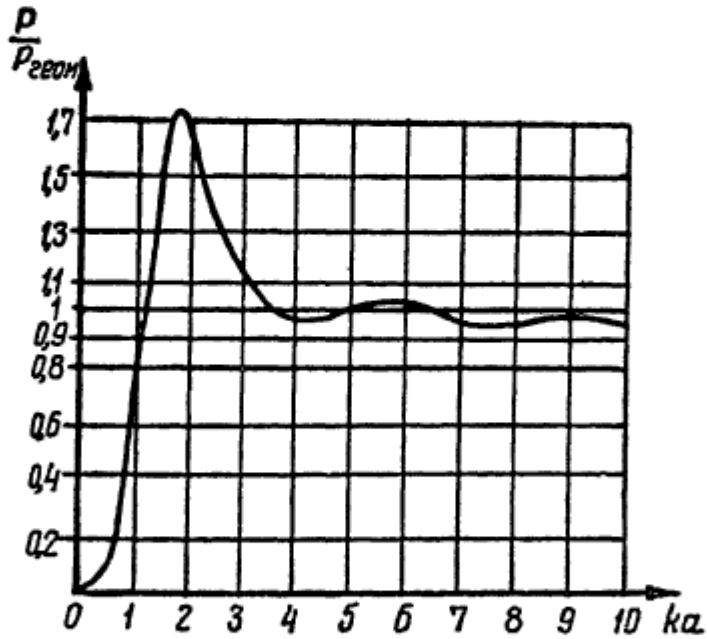


Рис. 123. Мощность, проходящая через круглое отверстие при нормальном падении плоской волны.

приближенные функции (90.03). Мы видим, что направленность и поляризация излучения из круглого отверстия при $ka \geqslant 3$ удовлетворительно передается приближенной теорией; при возрастании ka согласие между точной и приближенной теориями улучшается.

Таким образом, приближенный расчет по принципу Гюйгенса дает хорошие результаты лишь для отверстий, поперечные размеры которых велики по сравнению с дли-

ЭБ "Научное наследие России"

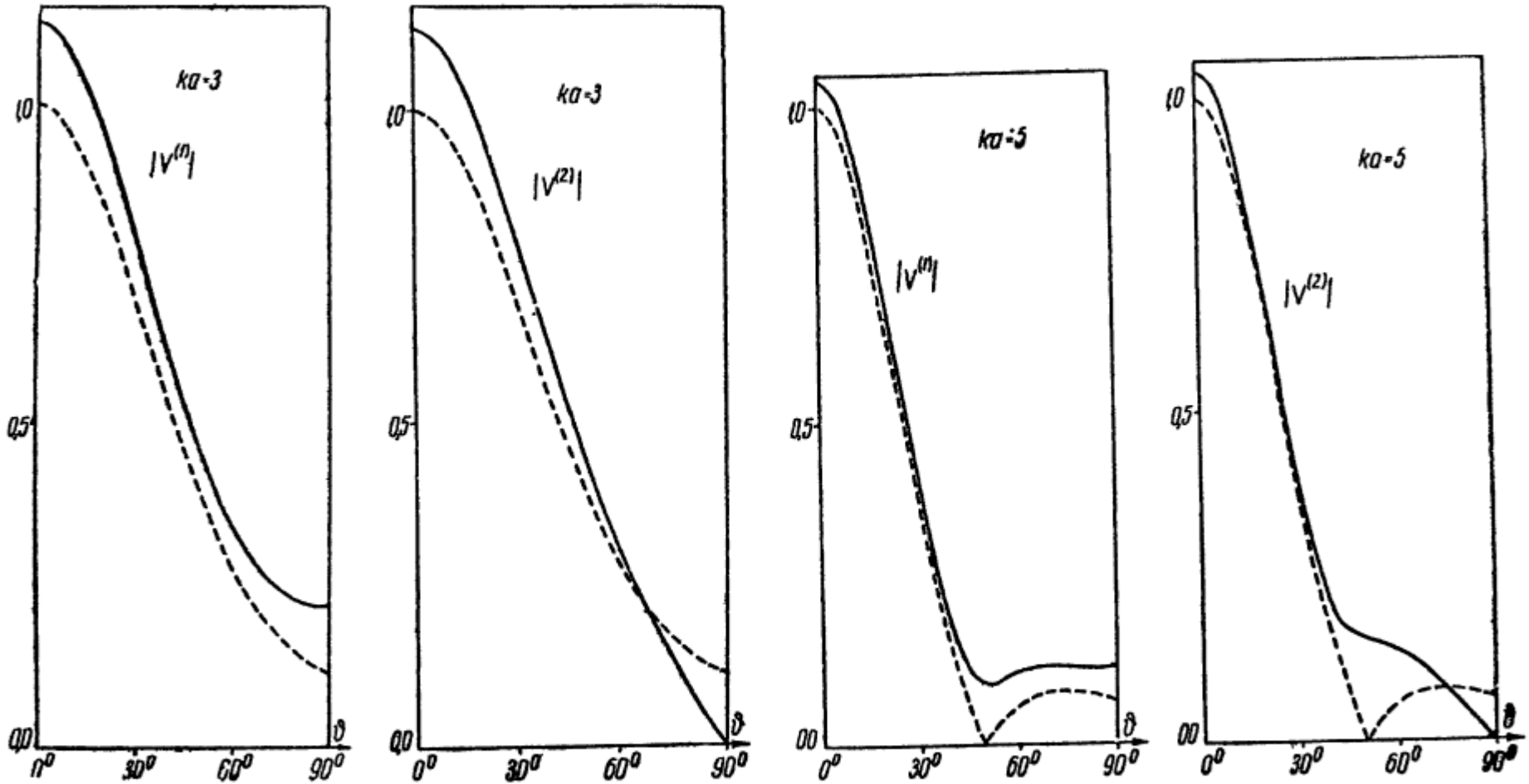


Рис. 124. Излучение из круглого отверстия. Сравнение приближенных расчетов с точными.

ной волны. Объясняется это тем, что сильное искажение поля на отверстии (по сравнению с полем падающей волны) происходит лишь вблизи краев отверстия, а поле в отверстии на расстоянии порядка длины волны от края практически сводится к неискаженному полю падающей волны. Такой же характер имеет и затекание токов. Эти токи существенны лишь вблизи края отверстия и при удалении от него на несколько длин волн уже сходят на нет. Поэтому площадь S' той части поверхности S, где несправедливы обычные допущения приближенной теории дифракции (см. начало параграфа), по порядку величины равна произведению периметра отверстия на длину волны. При выполнении условия (90.01) площадь S' мала по сравнению с площадью отверстия и ее действием можно пренебречь.

Для прямоугольного отверстия эти соображения приводят к условиям (87.17). Лишь при выполнении этих условий формулы § 87 дают надежные результаты. Если же, например, произведение kb мало, т. е. прямоугольное отверстие имеет вид узкой щели, то свойства отверстия резко меняются. Узкая щель имеет сильно выраженные резонансные свойства, подобные свойствам тонких вибраторов (ср. § 92), и ее излучение нельзя рассчитывать по формулам § 87.

Рассмотрим теперь излучение из открытого конца круглого волновода. Пусть в волноводе по направлению к открытому концу распространяется волна H_{11}, обладающая наинизшей критической частотой и простейшей структурой электромагнитного поля (рис. 37). Эта волна аналогична волне H_{10} в прямоугольном волноводе и согласно § 89 также дает максимальное излучение в направлении „прямо вперед“ (при $\vartheta = 0$). Обозначим через P угловую мощность излучения „прямо вперед“, вычисленную по строгой теории, через P_1 — такую же мощность, вычисленную приближенно по принципу Гюйгенса. Зависимость $\frac{P}{P_1}$ от ka изображена на рис. 125, который отличается от рис. 123 тем, что излучение волны H_{11} мы можем рассматривать лишь при $ka > 1{,}841$, в соответствии с формулой (42.14).

Рис. 125 показывает, что условие (90.01) существенно и для излучения из волноводов. Сравнение диаграмм направленности волны H_{11} и других волн круглого волновода показывает, что принцип Гюйгенса хорошо передает лишь излучение, в основном направленное вперед. Иначе можно

ЭБ "Научное наследие России"

сказать, что если характеристика излучения по принципу Гюйгенса в основном направлена вперед и дает лишь небольшое излучение назад, то такая характеристика должна быть близка к истинной, по крайней мере в переднем полупространстве $\left(\text{при } z>0, \text{ т. е. при } 0<\vartheta<\frac{\pi}{2}\right)$. Если же принцип Гюйгенса приводит к сильному излучению назад, то в этом случае результатам по принципу Гюйгенса вообще нельзя верить — ни для переднего, ни для заднего полупространства, так как эти результаты противоречат исходному допущению о том, что полем вблизи внешней поверхности стенок волновода (излучением назад) можно пренебречь. Отметим также, что излучения в заднее полупространство $\frac{\pi}{2}<\vartheta<\pi$ принцип Гюйгенса, как правило, не отображает.

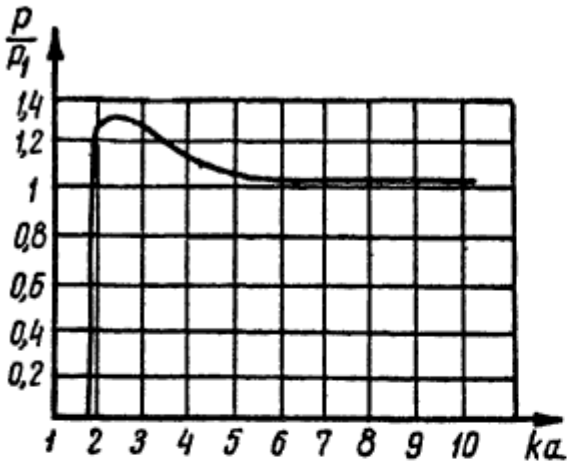


Рис. 125. Излучение „прямо вперед" из круглого волновода.

Диффракция на открытом конце волновода рассмотрена в другой книге автора, куда он и отсылает читателя за дальнейшими подробностями.

§ 91*. Диффракция на пластинке

Среди диффракционных задач, имеющих практический интерес, следует отметить вычисление электромагнитного поля от проводящей пластинки произвольной формы (см. рис. 126) при падении на нее плоской волны. Падающая волна испытывает диффракцию или „рассеяние" на пластинке; в результате возникает вторичное или „рассеянное" поле, которое возбуждается токами на пластинке. Вычисление этого поля сводится к вычислению токов, поскольку с помощью формул § 17 по токам нетрудно вычислить создаваемое ими поле.

Будем считать пластинку идеально проводящей и бесконечно тонкой. Тогда приближенное вычисление диффракционного поля можно произвести с помощью теоремы двойственности (см. ниже § 92), пользуясь связью между диффракцией на пластинке и диффракцией на „дополни-

Электронное наследие России

тельном" плоском экране с отверстием, а также результатами § 86—89. К приближенному решению данной задачи можно подойти проще, поскольку при достаточно больших (по сравнению с длиной волны) размерах пластинки естественно считать, что индуцированные в ней поверхностные токи мало отличаются от токов, которые возбуждались бы той же падающей волной в соответствующем месте бесконечной идеально проводящей плоскости. Плотность поверхностного тока оказывается поэтому согласно формуле (24.04) равной

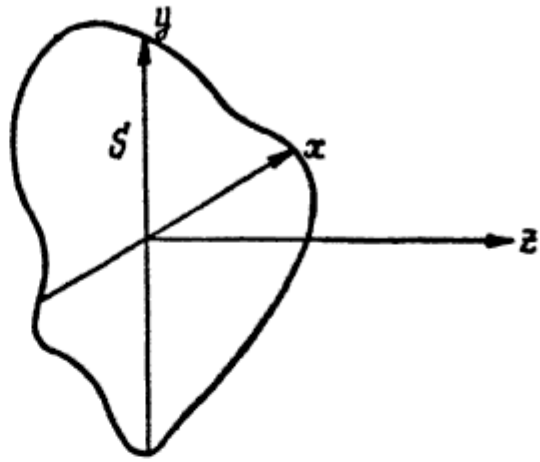


Рис. 126. Проводящая пластинка.

$$\mathbf{i} = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{nH}] = -\frac{c}{2\pi}[\mathbf{nH}^0], \tag{91.01}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к пластинке, направленная от „освещенной" стороны к теневой, а $\mathbf{H}^0$ — магнитное поле падающей волны. Мы положили в формуле (91.01)

$$[\mathbf{nH}] = 2[\mathbf{nH}^0], \tag{91.02}$$

поскольку коэффициент отражения от идеально проводящей плоскости по тангенциальному магнитному полю всегда равен 1, так что результирующее тангенциальное поле на плоскости равно удвоенному полю падающей волны.

Если считать, что пластинка лежит в плоскости $z = 0$, причем ось z направлена по нормали $\mathbf{n}$, то формулу (91.01) можно переписать в виде

$$i_x = \frac{c}{2\pi} H_y^0; \quad i_y = -\frac{c}{2\pi} H_x^0. \tag{91.03}$$

Соотношения (91.02) и (91.03) можно пояснить так. Полное поле $\mathbf{H}$ равно сумме первичного поля $\mathbf{H}^0$ падающей волны (необязательно плоской) и вторичного поля $\mathbf{H}^1$, вызываемого поверхностным током на идеально проводящей плоскости. Поле $\mathbf{H}^0$ при переходе через плоскость $z = 0$ остается непрерывным, а поле $\mathbf{H}^1$ терпит скачок

$$[\mathbf{n};\ \mathbf{H}^1(+0) - \mathbf{H}^1(-0)] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}, \tag{91.04}$$

ЭБ "Научное наследие России"

где $\mathbf{H}^1(+0)$ — вторичное поле на теневой стороне плоскости ($z=+0$), $\mathbf{H}^1(-0)$ — на освещенной ($z=-0$). Из соображений симметрии вытекает соотношение

$$[\mathbf{n}\mathbf{H}^1(+0)]=-[\mathbf{n}\mathbf{H}^1(-0)]. \tag{91.05}$$

Действительно, можно написать

$$\mathbf{H}^1=\operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{91.06}$$

где

$$A_x=\frac{1}{c}\int\frac{e^{ikR}}{R}\,i_x\,dS;\quad A_y=\frac{1}{c}\int\frac{e^{ikR}}{R}\,i_y\,dS;\quad A_z=0, \tag{91.07}$$

причем интегрирование производится по плоскости $z=0$. Из этих выражений видно, что A_x и A_y суть четные функции z (при фиксированных x и y)

$$A_x(-z)=A_x(z);\quad A_y(-z)=A_y(z), \tag{91.08}$$

а составляющие магнитного поля

$$H_x^1=\frac{\partial A_y}{\partial z};\quad H_y^1=-\frac{\partial A_y}{\partial z} \tag{91.09}$$

суть нечетные функции z:

$$H_x^1(-z)=-H_x^1(z);\quad H_y^1(-z)=-H_y^1(z). \tag{91.10}$$

Отсюда при $z\to 0$ вытекает соотношение (91.05), и мы получаем

$$[\mathbf{n}\mathbf{H}^1(+0)]=\frac{2\pi}{c}\mathbf{i}. \tag{91.11}$$

Так как на теневой стороне плоскости полное поле равно нулю

$$\mathbf{H}(+0)=\mathbf{H}^0(0)+\mathbf{H}^1(+0)=0, \tag{91.12}$$

то мы приходим к формуле (91.02).

Заметим, что для конечной пластинки или для плоскости с отверстием следует считать формулы (91.04) — (91.11) точными в математическом смысле, т. е. при идеальной проводимости и нулевой толщине. Соотношение (91.12) и соотношения (91.02) и (91.03) выполняются, однако, лишь приближенно, например, для достаточно больших пластин, за которые поле проникает слабо.

Электронное наследие России"

Применяя рассуждения § 86, можно вычислить векторный потенциал на достаточно больших расстояниях от пластинки по формулам

$$A_x = \frac{e^{ikr}}{2\pi r} \int_{S_0} e^{-ik\rho \cos \Omega} H_y^0 \, dS;$$

$$A_y = -\frac{e^{ikr}}{2\pi r} \int_{S_0} e^{-ik\rho \cos \Omega} H_x^0 \, dS, \qquad (91.13)$$

заменяющим выражения (86.10). Таким образом, для расчета дифракционного поля от пластинки не нужно вводить магнитных токов и магнитного векторного потенциала, а достаточно ограничиться электрическими поверхностными токами и соответствующим векторным потенциалом с составляющими (91.07). Составляющие поля вычисляются по формулам

$$E_\vartheta = H_\varphi = ikA_\vartheta; \quad E_\varphi = -H_\vartheta = ikA_\varphi. \qquad (91.14)$$

В качестве примера рассмотрим прямоугольную пластинку, определяемую условиями (87.01), и пусть на нее падает плоская волна с тангенциальными составляющими (87.02). Тогда будем иметь

$$\left.\begin{aligned} A_x &= 0; & A_y &= abB \frac{e^{ikr}}{2\pi r} \cos \vartheta_0 F; \\ A_\vartheta &= A_y \cos \vartheta \sin \varphi; & A_\varphi &= A_y \cos \varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (91.15)$$

где функция F по-прежнему определяется выражениями (87.09) — (87.12).

Электромагнитное поле, рассеянное прямоугольной пластинкой, равно

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta &= H_\varphi = ikabB \frac{e^{ikr}}{2\pi r} \cos \vartheta_0 \cos \vartheta F \sin \varphi, \\ E_\varphi &= -H_\vartheta = ikabB \frac{e^{ikr}}{2\pi r} \cos \vartheta_0 F \cos \varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (91.16)$$

Эти выражения напоминают полученные ранее формулы (87.14) для дифракционного поля от прямоугольного отверстия, но отличаются от них неприятной особенностью: они не удовлетворяют принципу взаимности. В самом деле, рассмотрим электромагнитное поле в плоскости $y = 0$. Направление распространения падающей волны (87.02) также

ЭБ "Научное наследие России"

лежит в этой плоскости, образуя с осью z угол ϑ_0. При $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ по формуле (87.12) получаем

$$F=\frac{2}{ka}\,\frac{\sin\frac{ka}{2}\,(\sin\vartheta\mp\sin\vartheta_0)}{\sin\vartheta\mp\sin\vartheta_0}\,, \qquad (91.17)$$

так что при перемещении источника падающей плоской волны и точки наблюдения функция F не меняется. Таким же свойством обладает и поле (87.14), но не поле (91.16): в выражении для составляющих $E_\varphi=-H_\vartheta$ углы ϑ и ϑ_0 входят несимметрично, поэтому теорема взаимности § 77 не выполняется. Это противоречие характерно для целого ряда задач, в которых поверхностные токи задаются по формуле (91.01), и сбъясняется приближенностью получаемого решения. Практически это противоречие оказывается не очень серьезным, поскольку при условиях (87.17) поля (91.16) удовлетворяют теореме взаимности приближенно, а при невыполнении условий (87.17) сами формулы оказываются неприменимыми (ср. § 90).

Отметим также, что составляющие $E_\vartheta=H_\varphi$ меняют свой знак при изменении ϑ на $\pi-\vartheta$, а составляющие $E_\varphi=-H_\vartheta$ при этом остаются прежними. Таким образом, создаваемое пластинкой поле симметрично относительно плоскости пластинки [ср. формулы (91.10)]. Из свойств функции F видно (см. § 87), что максимумы этого поля лежат в плоскости $\varphi=0$, при $\vartheta=\vartheta_0$ и $\vartheta=\pi-\vartheta_0$. Как легко видеть, $\vartheta=\vartheta_0$ есть направление распространения падающей волны, а $\vartheta=\pi-\vartheta_0$ есть направление зеркального отражения этой волны от пластинки. Можно показать, что в таких двух направлениях находятся максимумы дифракционного поля для пластинки любой формы.

§ 92*. Принцип двойственности

Принцип двойственности (или теорема двойственности) устанавливает связь между двумя следующими дифракционными задачами.

1. Дифракция на плоской пластинке, которую мы считаем бесконечно тонкой и идеально проводящей и обозначаем через s (рис. 127,*а*).

2. Дифракция на „дополнительном" плоском экране, который также является бесконечно тонким и идеально проводящим. Дополнительный экран есть бесконечная пло-

скость с отверстием s, точно воспроизводящим по форме и размерам пластинку в 1-ой задаче (см. рис. 127,*б*).

Будем считать, что пластинка и экран расположены в плоскости $z=0$, а источники электромагнитных полей—в полупространстве $z<0$ („верхнее" полупространство). В качестве источников можно взять сторонние электрические и магнитные токи, однако в формулировку принципа

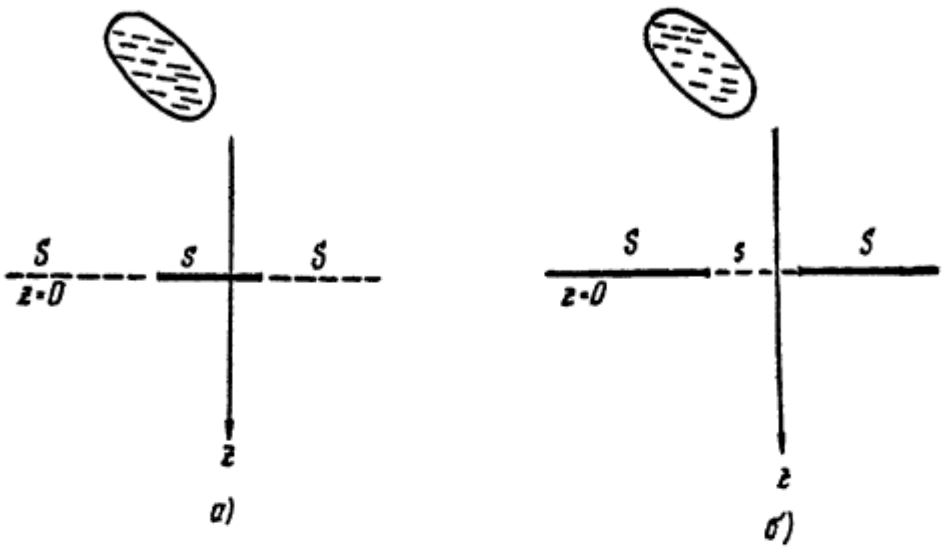


Рис. 127. К формулировке теоремы двойственности:
а — плоская пластинка; *б* — дополнительный экран.

двойственности входят не источники, а создаваемые ими „первичные" поля, т. е. поля, которые были бы при отсутствии пластинки и экрана, в безграничном пустом пространстве. Первичное поле в 1-ой задаче мы обозначим через $\mathbf{E}_1^0$, $\mathbf{H}_1^0$, во 2-ой задаче—через $\mathbf{E}_2^0$, $\mathbf{H}_2^0$.

Теорема двойственности утверждает, что если первичные поля удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{E}_2^0 = -\mathbf{H}_1^0;\ \mathbf{H}_2^0 = \mathbf{E}_1^0, \tag{92.01}$$

то полные поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ (в 1-ой задаче) и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ (во 2-ой задаче) связаны между ссбой в нижнем полупространстве $z>0$ следующим образом

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1^0;\ \ \mathbf{H}_2 = -(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1^0). \tag{92.02}$$

Теорему двойственности проще всего доказать, опираясь на теорему единственности § 10 для нижнего полупространства $z>0$. В сбласти $z>0$ источники отсутствуют, поэтому в 1-ой и 2-ой задачах поля определяются тангенциальными составляющими E_t или H_t при $z=0$

ЭБ "Научное наследие России"

однозначно. Электромагнитное поле 1-ой задачи в плоскости $z=0$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} &E_{1,t}=0 \text{ на пластинке } s,\\ &H_{1,t}=H^0_{1,t} \text{ на остальной части } S \text{ плоскости}\\ &\qquad z=0 \text{ (геометрическом продолжении}\\ &\qquad \text{пластинки),} \end{aligned}\right\} \quad (92.03)$$

а электромагнитное поле 2-ой задачи — условиям:

$$\left.\begin{aligned} &E_{2,t}=0 \quad \text{на экране } S,\\ &H_{2,t}=H^0_{2,t} \text{ на отверстии } s. \end{aligned}\right\} \quad (92.04)$$

Условия для магнитных полей в формулах (92.03) и (92.04) вытекают из формулы (91.11), согласно которой вторичное магнитное поле удовлетворяет соотношениям

$$H^1_{1,t}=0 \text{ на } S; \quad H^1_{2,t}=0 \text{ на } s. \quad (92.05)$$

Иначе говоря, поверхностные токи, текущие по плоскому экрану, создают на геометрическом продолжении экрана (где токов уже нет) магнитное поле, нормальное к плоскости экрана. Этот результат можно получить без всяких вычислений, если рассматривать магнитное поле на продолжении экрана как наложение полей элементарных электрических диполей, поскольку каждый элемент площади экрана, обтекаемого током, можно на конечном расстоянии от него считать элементарным диполем. Как известно, магнитное поле такого диполя перпендикулярно его оси и перпендикулярно радиусу-вектору, соединяющему диполь с точкой наблюдения, поэтому суммарное магнитное поле удовлетворяет соотношениям (92.05).

Пользуясь соотношениями (92.01), мы можем переписать условия (92.03) для поля 1-ой дифракционной задачи в виде

$$\left.\begin{aligned} &-(E_{1,t}-E^0_{1,t})=H^0_{2,t} \text{ на } s,\\ &H_{1,t}-H^0_{1,t}=0 \text{ на } S, \end{aligned}\right\} \quad (92.06)$$

откуда следует, что поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$, вычисленное по формулам (92.02), удовлетворяет граничным условиям (92.04). Согласно § 18 [см., например, формулу (18.06)] это поле удов-

Электронное наследие России

летворяет в области $z>0$ уравнениям Максвелла. Поэтому формулы (92.02) дают (единственное) решение 2-ой дифракционной задачи если $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ есть поле в 1-ой задаче. Тем самым теорема двойственности доказана.

Если в 1-ой и 2-ой задачах мы рассматриваем дифракцию плоских волн, то согласно формулам (92.01) эти волны должны иметь взаимно перпендикулярную поляризацию. Если же идет речь о дифракции волн, создаваемых сторонними токами $\mathbf{j}_1^e$ и $\mathbf{j}_1^m$ (в 1-ой задаче) и $\mathbf{j}_2^e$ и $\mathbf{j}_2^m$ (во 2-ой задаче), то эти последние должны быть связаны соотношениями

$$\mathbf{j}_2^e = -\mathbf{j}_1^m; \quad \mathbf{j}_2^m = \mathbf{j}_1^e. \tag{92.07}$$

Действительно, первичные поля $\mathbf{E}_\alpha^0$, $\mathbf{H}_\alpha^0$ ($\alpha = 1$ и 2) удовлетворяют во всем пространстве уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_\alpha^0 = ik\mathbf{H}_\alpha^0 - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\alpha^m; \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_\alpha^0 = -ik\mathbf{E}_\alpha^0 + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_\alpha^e. \tag{92.08}$$

В силу теоремы единственности для бесконечного пустого пространства при выполнении условий (92.07) соотношения (92.01) автоматически удовлетворяются.

Заметим, что принцип двойственности справедлив как для монохроматических, так и для произвольных электромагнитных процессов, поскольку в его формулировке зависимость от времени не фиксируется.

Формулы (92.02) показывают, что полное поле во 2-ой задаче связано со вторичным полем 1-ой задачи. Этот результат становится ясным, если в 1-ой задаче взять дифракцию плоской волны на конечной пластинке, а во 2-ой — на конечном отверстии. Поле, проникающее в нижнее полупространство $z>0$ во 2-ой задаче, имеет характер сферической волны, расходящейся от отверстия; его можно сопоставить лишь со сферической волной, возбуждаемой пластинкой в 1-ой задаче, т. е. со *вторичным* полем в нижнем полупространстве, куда проникает падающая плоская волна.

Принцип двойственности позволяет приближенную теорию дифракции на отверстиях (§ 86—89) перенести на пластинки, и, наоборот, приближенную теорию дифракции на пластинках (§ 91) применить к отверстиям в плоском экране. Таким образом, мы получаем для каждой из этих задач два варианта приближенных формул: один из них удовлетворяет принципу взаимности, другой—нет (ср. § 91).

Если на 2-ой диффракционной задаче в качестве отверстия s взять узкую щель (конечной длины), то 1-ая задача будет соответствовать диффракции на узкой ленте. Можно показать, что в электродинамическом отношении лента ширины b (предполагается, что b мала по сравнению с длиной ленты l и длиной волны λ) эквивалентна отрезку цилиндрического провода диаметром $\frac{b}{2}$ (ср. конец § 72).

Таким образом, принцип двойственности устанавливает связь между теорией щелей в плоском экране и теорией вибраторов антенн, кратко затронутой в § 37. Поэтому принцип двойственности послужил исходным пунктом для развития теории щелевых антенн.

Из теоремы двойственности вытекает следующее элементарное следствие: электрическое поле на узкой щели направлено поперек нее. Действительно, ток может течь лишь вдоль тонкого ленточного проводника и, следовательно, вторичное магнитное поле на проводнике направлено поперек; поэтому на дополнительной щели электрическое поле является поперечным в соответствии со сказанным в конце § 78.

Впервые принцип двойственности был доказан А. А. Пистолькорсом в 1944 г. в форме, несколько отличающейся от принятой выше. Так, первичные поля в 1-ой и 2-ой задачах совпадали, но зато в 1-ой задаче вместо идеально проводящей пластинки бралась пластинка s с идеальной *магнитной* проводимостью, для которой граничное условие имеет вид

$$H_t = 0 \text{ на } s. \tag{92.09}$$

Изложение принципа двойственности в этом параграфе базируется на статье Я. Н. Фельда (1948 г.).

Заметим, что теорему двойственности можно считать аналогом теоремы Бабине, известной в физической оптике и связывающей между собой диффракционные явления на „взаимно дополняющих“ экранах.

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА XVI

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

§ 93. Стоячие волны в прямоугольной полости

Объемным резонатором называется часть пространства, ограниченная металлической стенкой. В таком объеме могут происходить электромагнитные колебания, поэтому на сверхвысоких частотах он имеет свойства колебательного контура с высокой добротностью. Наряду с термином „объемный резонатор" в том же смысле применяются термины: резонансная полость, резонансный объем, полый резонатор, эндовибратор и т. д. Термин „эндовибратор" введен М. С. Нейманом, которому принадлежат фундаментальные исследования в данной области.

Изучение свойств объемных резонаторов мы начнем с собственных (или, иначе, свободных) колебаний резонаторов простейшей формы: прямоугольных, цилиндрических и сферических. При этом предположим, что стенки резонатора обладают идеальной проводимостью, а пространство внутри резонатора имеет электромагнитные свойства пустоты ($\varepsilon = \mu = 1$). В дальнейшем от этих предположений удается избавиться (ср. § 97 и § 98).

Собственные колебания прямоугольной полости были изучены еще в 1905 г. Джинсом в связи с теорией теплового излучения. Полученные при этом результаты представляют интерес для современной радиотехники, поскольку прямоугольные объемные резонаторы находят широкое применение в диапазоне сантиметровых волн.

Исследуем одно из собственных колебаний полости (рис. 128), определяемой неравенствами

$$0 < x < a;\ 0 < y < b;\ 0 < z < l, \qquad (93.01)$$

ЭБ "Научное наследие России"

т. е. имеющей вид прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, l. Электрическое поле на стенках полости должно удовлетворять граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} E_y = E_z = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a, \\ E_z = E_x = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b, \\ E_x = E_y = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = l. \end{aligned}\right\} \qquad (93.02)$$

По предположению, потерь в полости нет, поэтому каждое из собственных колебаний будет незатухающим. Обозначим через ω круговую частоту одного из таких колебаний и через k — соответствующее ей волновое число в пустоте. Электромагнитное поле собственного колебания мы найдем, интегрируя комплексные уравнения поля для пустоты с учетом граничных условий (93.02). Вместо этих уравнений можно воспользоваться также уравнениями электрического поля

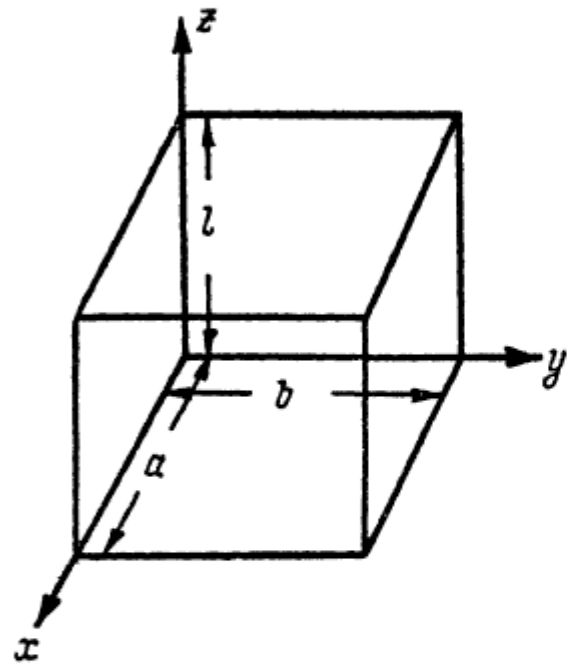


Рис. 128. Прямоугольный объемный резонатор.

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \qquad (93.03)$$

выведенными в § 14 [см. формулу (14.08)]. Первое из этих уравнений показывает, что декартовы составляющие E_x, E_y, E_z удовлетворяют скалярным волновым уравнениям; решая эти уравнения методом разделения переменных (ср. § 41), получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= A \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l}, \\ E_y &= B \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{l}, \\ E_z &= C \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{l}, \end{aligned}\right\} \qquad (93.04)$$

ЭБ "Научное наследие России"

где A, B, C — комплексные постоянные, а m, n, p — целые числа

$$m,\ n,\ p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{93.05}$$

В выражениях (93.04) синусы обеспечивают выполнение граничных условий (93.02), а косинусы поставлены для того, чтобы можно было удовлетворить второму уравнению (93.03) с помощью надлежащего подбора постоянных A, B, C. В самом деле, из выражений (93.04) получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} =$$

$$= -\pi\left(\frac{m}{a}A + \frac{n}{b}B + \frac{p}{l}C\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{l} = 0,$$

если постоянные удовлетворяют соотношению

$$\frac{m}{a}A + \frac{n}{b}B + \frac{p}{l}C = 0, \tag{93.06}$$

Подставляя выражения (93.04) в волновое уравнение (93.03), мы находим соответствующее значение волнового числа

$$k = \pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}, \tag{93.07}$$

а с помощью формулы

$$\mathbf{H} = \frac{1}{ik}\operatorname{rot}\mathbf{E} \tag{93.08}$$

получаем распределение магнитного поля в полости

$$\left.\begin{aligned}
H_x &= \frac{\pi}{ik}\left(\frac{n}{b}C - \frac{p}{l}B\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{l},\\
H_y &= \frac{\pi}{ik}\left(\frac{p}{l}A - \frac{m}{a}C\right)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{p\pi z}{l},\\
H_z &= \frac{\pi}{ik}\left(\frac{m}{a}B - \frac{n}{b}A\right)\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{l}.
\end{aligned}\right\} \tag{93.09}$$

Подведем итоги полученным результатам. Для каждой тройки чисел m, n, p мы получаем некоторое решение уравнений поля, определяемое формулами (93.04) и (93.09) и имеющее волновое число (93.07). Это значит, что каждой

ЭБ "Научное наследие России"

тройке чисел соответствует собственное колебание, имеющее собственную частоту f и собственную длину волны λ

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{l}\right)^2}; \\ \lambda &= \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (93.10)$$

Если среди чисел m, n, p нет нулей, то такой тройке чисел соответствуют *два* собственных колебания с одной и той же частотой, но с различной структурой поля. Действительно, в формулах для полей имеются две произвольные постоянные, скажем A и B, поскольку третья постоянная (C) выражается через A и B в силу соотношения (93.06). Полагая $A=1$, $B=0$, мы получаем одно электромагнитное колебание, а при $A=0$, $B=1$ — другое колебание с той же самой частотой, но иным распределением поля.

Если собственной частоте соответствует два или больше собственных колебания, то говорят о наличии вырождения, а данная собственная частота называется вырожденной или кратной. Таким образом, если индексы m, n, p все отличны от нуля, то соответствующая им собственная частота (93.10) оказывается по крайней мере двукратно вырожденной. Если размеры полости a, b, l являются соизмеримыми, т. е. их отношения являются рациональными числами, то возможно вырождение более высокой кратности. Так, например, при $a=b$ и $m\neq n$ частота (93.10) имеет не менее чем четырехкратное вырождение, поскольку тройкам чисел m, n, p и n, m, p соответствует одна частота, но разные поля.

Если к синусам и косинусам в формулах (93.04) применить формулы Эйлера, то мы получим комбинацию слагаемых вида

$$e^{i\left(\pm\frac{m\pi}{a}x\pm\frac{n\pi}{b}y\pm\frac{p\pi}{l}z\right)} = e^{ik(\alpha x+\beta y+\gamma z)}, \text{ где } \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \quad (93.11)$$

т. е. согласно § 14 сумму плоских волн, распространяющихся в пустоте. Характерная особенность этих плоских волн заключается в том, что на каждом ребре параллелепипеда каждая из этих волн приобретает дополнительную

ЭБ "Культурное наследие России"

фазу, кратную π; например, при переходе от $x=0$ к $x=a$ появляется фазовый множитель $e^{\pm im\pi}$ и т. д. В результате сложения этих бегущих плоских волн возникают стоячие плоские волны (93.04) с узлами тангенциального электрического поля на стенках.

Индексы m, n, p определяют направления распространения плоских волн, на которые разлагается поле собственных колебаний полости. Двукратное вырождение собственных частот, о котором мы говорили выше, физически связано с тем, что при данном направлении распространения плоской волны ее поляризация может быть произвольной. При сложении плоских волн с одной поляризацией мы получаем первое собственное колебание, при сложении волн с другой, перпендикулярной, поляризацией мы приходим ко второму собственному колебанию, имеющему ту же частоту.

Собственные колебания, у которых один из индексов равен нулю, занимают особое положение. Так, например, тройке чисел m, n, 0 соответствует электромагнитное поле

$$\left.\begin{aligned} E_z &= C \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ H_x &= \frac{\pi n}{ikb} C \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ H_y &= -\frac{\pi m}{ika} C \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ E_x &= E_y = H_z = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (93.12)$$

автоматически удовлетворяющее второму уравнению (93.03). Если в нуль обращаются два индекса, то поле тождественно исчезает, и такие тройки индексов собственных колебаний не дают.

Электромагнитное поле (93.12) колеблется с собственной частотой

$$f = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \qquad (93.13)$$

Эта частота уже может быть невырожденной, поскольку тройке чисел m, n, 0 соответствует лишь одно собственное колебание (93.12), которое зависит от единственной постоянной C, определяющей его амплитуду.

ЭБ "Научное наследие России"

Простейшее колебание в полости мы получим при $m=1$, $n=1$, $p=0$. Это колебание 110 имеет частоту

$$f=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}. \qquad (93.14)$$

Если выполняются условия

$$a>l;\ b>l, \qquad (93.15)$$

то частота (93.14) будет наименьшей среди всех частот (93.10) и притом невырожденной.

Колебание резонатора называется основным колебанием, если оно имеет наинизшую собственную частоту. Колеба-

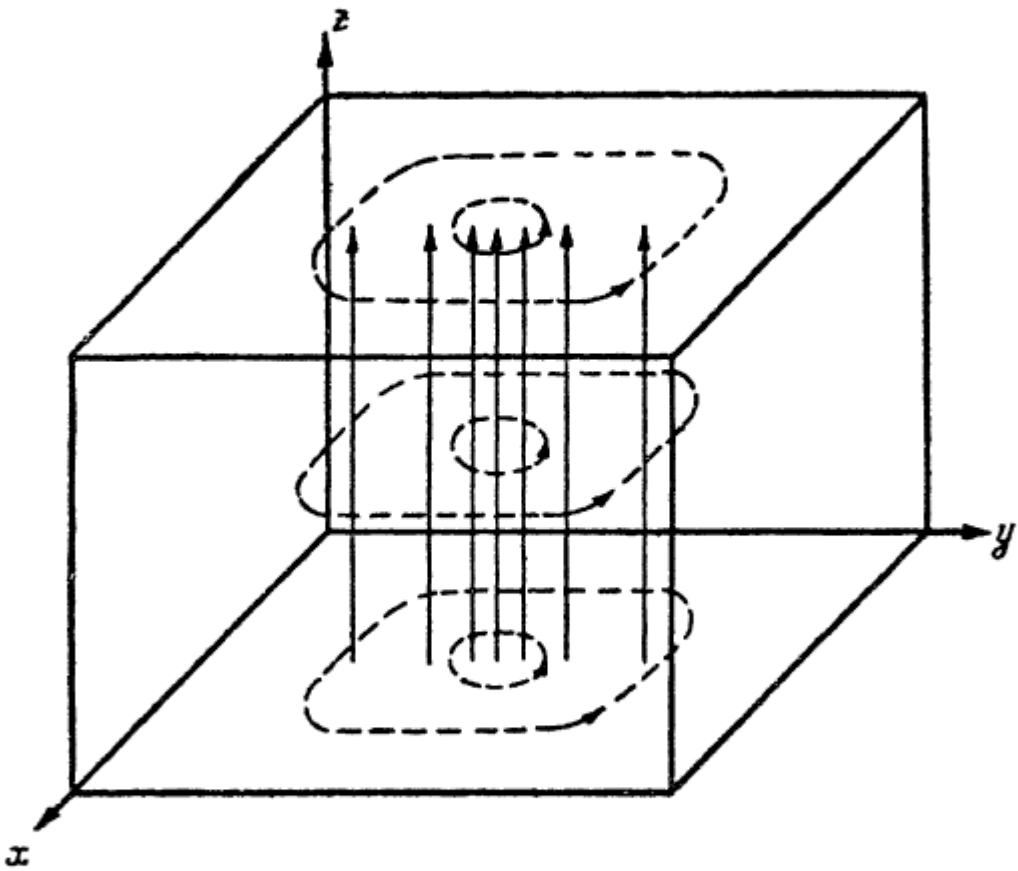


Рис. 129. Колебание 110 в прямоугольном резонаторе.

ние 110 является [при условиях (93.15)] основным колебанием прямоугольного резонатора; его широко применяют на практике. Структура электромагнитного поля этого колебания изображена на рис. 129: электрические силовые линии образуют пучок прямых, параллельных оси z, наиболее густой при $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$, а магнитные силовые линии охватывают этот пучок замкнутыми кольцами непра-

...ое наследие России"

вильной формы. Легко показать, что форма магнитных силовых линий та же, что у волны E_{11} в прямоугольном волноводе (рис. 34), да и само колебание 110 можно также назвать колебанием E_{110} (см. § 94).

В заключение отметим следующую особенность формул (93.12): в выражения для магнитного поля входит множитель $\pm i$, отсутствующий у электрического поля. Это значит, что магнитное поле находится „в квадратуре“ с электрическим, т. е. сдвинуто по фазе на $\pm\frac{\pi}{2}$. Возвращаясь от комплексных амплитуд к мгновенным значениям полей с помощью формул (2.01), мы видим, что при некоторых t электрическое поле исчезает во всем объеме резонатора, а магнитное поле при этом принимает максимальные значения (по абсолютной величине); через четверть периода исчезает магнитное поле, а электрическое достигает максимума и т. д. Таким образом, при собственных колебаниях электромагнитная энергия дважды за период является чисто электрической и дважды чисто магнитной, причем происходит непрерывной переход энергии из электрической формы в магнитную и наоборот. Как известно, те же энергетические процессы происходят при свободных колебаниях обычных резонансных контуров L, C.

§ 94. Цилиндрические резонаторы

Цилиндрическим резонатором общего вида называется отрезок волновода, ограниченный двумя металлическими поперечными стенками $z=\text{const}$. Рассмотренный выше прямоугольный объемный резонатор есть частный случай цилиндрического резонатора, поскольку его можно получить из прямоугольного волновода введением поперечных „закорачивающих“ стенок при $z=0$ и $z=l$. Цилиндрический резонатор в узком значении этого слова образован конечным отрезком круглого волновода, заключенным между двумя поперечными перегородками—основаниями кругового цилиндра (рис. 130).

Теорию собственных колебаний цилиндрического резонатора (при произвольной форме его поперечного сечения) можно развить, опираясь на теорию волн в волноводах с соответствующим поперечным сечением. Если основания цилиндрического объема имеют координаты $z=0$ и $z=l$, то следует рассматривать электромагнитное поле при

$$0<z<l, \qquad (94.01)$$

ЭБ "Научное наследие России"

причем оно должно удовлетворять граничным условиям

$$E_x = E_y = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = l \qquad (94.02)$$

и соответствующим условиям на боковой поверхности резонатора. Последние условия удовлетворятся, если мы возьмем поле в виде электрической или магнитной волны в соответствующем волноводе, причем для выполнения условий (94.02) нужно, очевидно, брать стоячую волну, а не бегущую.

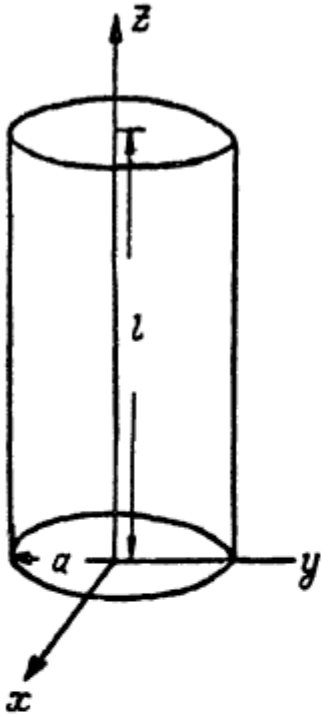


Рис. 130. Цилиндрический объемный резонатор (круговой цилиндр).

Стоячие электрические волны в цилиндрических резонаторах получаются с помощью электрического вектора Герца с единственной составляющей

$$\Pi_z = \Pi \cos hz, \qquad (94.03)$$

где $\Pi = \Pi(x, y)$ — та же функция, что и в § 39, а h — соответствующее продольное волновое число

$$h = \sqrt{k^2 - g^2}. \qquad (94.04)$$

Электромагнитное поле таких волн определяется формулами

$$\left.\begin{aligned} E_x &= -h \frac{\partial \Pi}{\partial x} \sin hz; \quad H_x = -ik \frac{\partial \Pi}{\partial y} \cos hz, \\ E_y &= -h \frac{\partial \Pi}{\partial y} \sin hz; \quad H_y = ik \frac{\partial \Pi}{\partial x} \cos hz, \\ E_z &= g^2 \Pi \cos hz; \qquad H_z = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (94.05)$$

заменяющими формулы (39.06).

В формуле (94.03) был взят $\cos hz$ (а не $\sin hz$), чтобы удовлетворить условию (94.02) при $z = 0$. Соответствующее условие при $z = l$ приводит к соотношению

$$\sin hl = 0, \qquad (94.06)$$

откуда

$$h = \frac{p\pi}{l} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (94.07)$$

При выполнении этих условий формулы (94.05) дают электромагнитное поле собственного колебания, имеющее в пустоте волновое число

$$k=\frac{\omega}{c}=\sqrt{g^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2};\quad p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{94.08}$$

где g — поперечное волновое число соответствующей электрической волны в волноводе.

Стоячие магнитные волны в цилиндрических резонаторах можно рассчитать с помощью магнитного вектора Герца, имеющего лишь составляющую

$$\Pi'_z=\Pi'\sin hz, \tag{94.09}$$

где $\Pi'=\Pi'(x, y)$ — та же функция, что и в § 40, а h — продольное волновое число соответствующей волны в волноводе, связанное с ее поперечным волновым числом той же формулой (94.04). Поле стоячей магнитной волны имеет составляющие

$$\left.\begin{aligned} E_x&=ik\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\sin hz; & H_x&=h\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\cos hz,\\ E_y&=-ik\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\sin hz; & H_y&=h\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\cos hz,\\ E_z&=0; & H_z&=g^2\Pi'\sin hz, \end{aligned}\right\} \tag{94.10}$$

автоматически удовлетворяющие условиям (94.02) при $z=0$. При $z=l$ составляющие E_x и E_y исчезают, если выполняется дополнительное условие (94.06), которое приводит к соотношению

$$h=\frac{p\pi}{l}\quad(p=1,\ 2,\ \ldots), \tag{94.11}$$

поскольку значение $p=0$ в данном случае надопустимо. Формулы (94.10) и (94.11) определяют колебание с волновым числом

$$k=\sqrt{g^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2};\quad p=1,\ 2\ldots \tag{94.12}$$

Волны в круглом и прямоугольном волноводах обозначаются обычно как E_{mn} и H_{mn} (ср. § 41 и § 42). Колебания соответствующего цилиндрического резонатора обозначаются аналогичным образом, но с добавлением третьего

ЭБ "Научное наследие России"

индекса p, входящего в формулы (94.07) и (94.11). Если g есть поперечное волновое число волны E_{mn}, то формула (94.08) определяет собственную частоту колебания E_{mnp} в цилиндрическом резонаторе, а формулы (94.05) — поле этого колебания. Если же g соответствует волне H_{mn} в волноводе, то по формуле (94.12) получаем частоту колебания H_{mnp} в резонаторе, а по формулам (94.10) — в его поле.

Так определяются колебания E_{mnp} и H_{mnp} в цилиндрических резонаторах, причем колебания E_{mn0} существуют, а колебания H_{mn0} — отсутствуют. Формула (94.08) показывает, что собственная частота колебания E_{mn0} совпадает с критической частотой волны E_{mn} в волноводе ($k=g$). Собственные частоты всех других колебаний E_{mnp} (или H_{mnp}) выше критических частот соответствующих волн E_{mn} (или H_{mn}) в волноводе.

Как уже отмечалось в § 93, основным колебанием резонатора называется колебание с наинизшей собственной частотой. Из формул (94.08) и (94.12) следует, что для „длинных" резонаторов (l велико) основным колебанием будет магнитная стоячая волна с индексом $p=1$; для „коротких" резонаторов (l мало) основным колебанием будет электрическая стоячая волна с индексом $p=0$, поскольку при $p\neq 0$ второе слагаемое под корнем в формулах (94.08) и (94.12) будет велико. Так, для кругового цилиндра основным колебанием может быть либо колебание E_{010} с волновым числом

$$k=\frac{2{,}405}{a}, \tag{94.13}$$

либо колебание H_{111} с волновым числом

$$k=\sqrt{\left(\frac{1{,}841}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{l}\right)^2}. \tag{94.14}$$

Собственные частоты этих колебаний совпадают при

$$\frac{l}{a}=\frac{\pi}{\sqrt{(2{,}405)^2-(1{,}841)^2}}=2{,}030. \tag{94.15}$$

При бо́льших отношениях $\frac{l}{a}$ колебание H_{111} является основным, причем его частота является двукратной (поляризационное вырождение, ср. § 42). При меньших отношениях $\frac{l}{a}$ основным будет колебание E_{010}, частоту которого не-

Электронное наследие России"

трудно вычислить по формуле (94.13). Эта частота не зависит от длины резонатора l и является невырожденной. Обычно в цилиндрических резонаторах применяются колебания E_{010}, причем $l<2a$. На рис. 131 и 132 изображено распределение электрических (сплошных) и магнитных (пунктирных) силовых линий в цилиндрическом резонаторе при колебаниях E_{010} и H_{111}.

Выведенные выше соотношения можно применить и к прямоугольной полости, рассматривая ее как отрезок прямоугольного волновода. Поскольку для волн E_{mn} и H_{mn} в прямоугольном волноводе

$$g^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \tag{94.16}$$

то при подстановке этого выражения в формулы (94.08) и (94.12) мы приходим к соотношению (93.07), полученному в § 93 несколько иным способом. В обозначениях этого параграфа собственное колебание (93.12) прямоугольной полости можно назвать колебанием E_{mn0} (и в частности колебание 110, изображенное на рис. 93, — колебанием E_{110}), поскольку поля (93.12) получаются из формул (94.05), если положить

$$\Pi=\frac{C}{g^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\quad h=0. \tag{94.17}$$

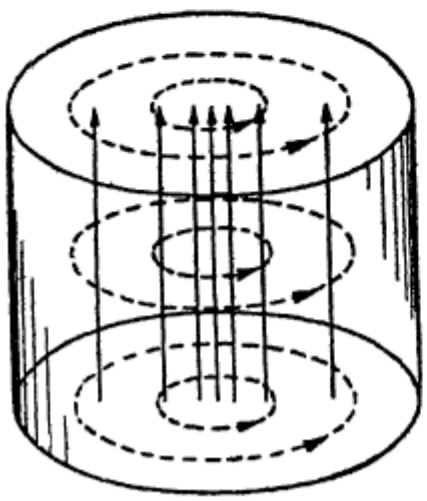


Рис. 131. Колебание E_{010} в цилиндрическом резонаторе.

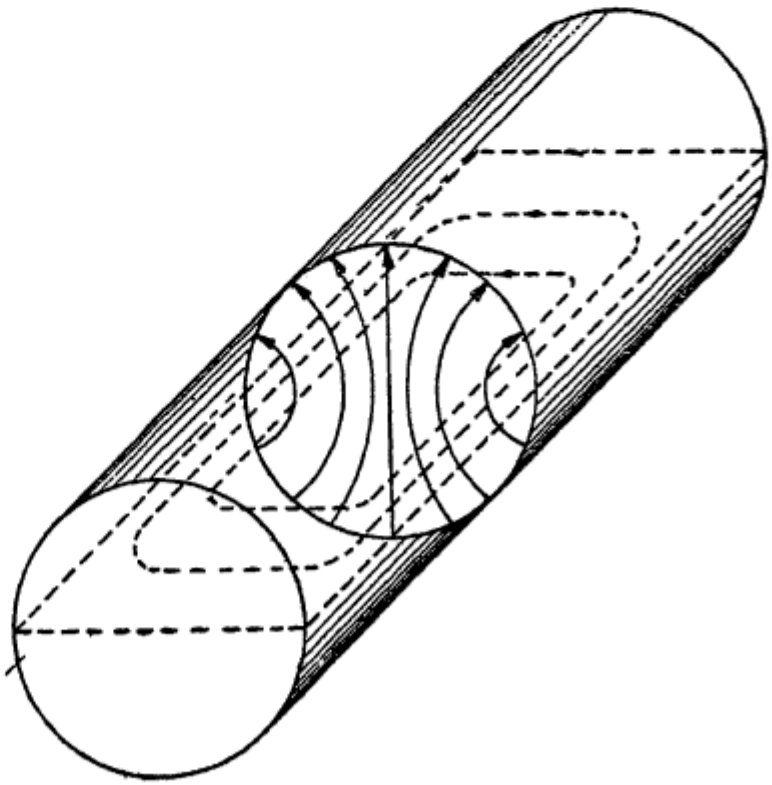


Рис. 132. Колебание H_{111} в цилиндрическом резонаторе.

ЭБ "Научное наследие России"

Отмеченное в § 93 двукратное вырождение собственных частот объясняется с волноводной точки зрения тем, что волны E_{mn} и H_{mn} имеют одинаковое поперечное волновое число (94.16). Этого вырождения нет при $p=0$, поскольку колебания H_{mn0} в резонаторе отсутствуют, и при $m=0$ или $n=0$, поскольку волн E_{0n} и E_{m0} в волноводе не бывает.

Следует, однако, признать, что волноводная трактовка прямоугольной полости является искусственной, так как ось z никак не отличается для этой полости от осей x и y; при выборе оси y в качестве оси волновода колебание 110 (рис. 129) придется назвать уже колебанием H_{101}. Поэтому данное в § 93 изложение вопроса представляется нам более естественным.

В заключение рассмотрим собственные колебания отрезка коаксиальной линии, закороченной с обоих концов поперечными перегородками $z=0$ и $z=l$. Рассматривая коаксиальную линию как особый случай волновода (§ 45), мы получим колебания E_{mnp} и H_{mnp} в таком „коаксиальном“ резонаторе. В коаксиальной линии существует также основная (поперечная) волна, поле которой вычисляется с помощью составляющей Π_z электрического вектора Герца (§ 29). Поэтому стоячую основную волну можно получить из формул (94.03) и (94.05), полагая в них $g=0$ и $h=k$. С учетом формулы (29.11) мы получаем

$$E_r=\frac{A}{r}\sin kz;\quad H_\varphi=-i\frac{A}{r}\cos kz, \tag{94.18}$$

причем из условия (94.06) следует формула

$$k=\frac{p\pi}{l};\ p=1,2,\ldots. \tag{94.19}$$

Если основную волну в коаксиальной линии назвать (условно) волной E_{00}, то соответствующие колебания в коаксиальном резонаторе будут обозначаться как E_{00p}. Собственная частота и собственная длина волны колебания E_{00p} равны

$$f=\frac{cp}{2l};\quad \lambda=\frac{2l}{p}. \tag{94.20}$$

Колебание E_{001} является основным лишь в достаточно длинном коаксиальном резонаторе (ср. выше соображения о цилиндрических резонаторах); для более коротких резонаторов основным будет колебание E_{010}.

Электронное наследие России

§ 95*. Сферический резонатор

Собственные колебания сферической полости радиуса a могут быть исследованы с помощью функций U и V, введенных в § 20. Функция U определяет по формулам (20.19) поле электрических колебаний в сферической полости, а функция V дает по формулам (20.20) поле магнитных колебаний. Сами функции U и V должны удовлетворять уравнению (20.21), подробно исследованному в § 23. Частные решения этого уравнения имеют вид

$$U = C\psi_\nu(kr)\,P_\nu^m(\cos\vartheta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix} \qquad (95.01)$$

и

$$V = C'\psi_\mu(kr)\,P_\mu^m(\cos\vartheta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}, \qquad (95.02)$$

причем функции $\zeta_\nu(kr)$ и $\zeta_\mu(kr)$, приводящие к бесконечно большим полям при $r=0$, исключаются. Индексы m должны быть целыми ($m=0, 1, 2\ldots$) в силу однозначности полей в каждой точке пространства внутри сферы. Индексы ν и μ также должны быть целыми ($\nu, \mu=1, 2, \ldots$) в силу конечности полей при $\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$ (ср. § 23). Поскольку

$$P_0(\cos\vartheta)=1 \quad \text{и} \quad P_0^m(\cos\vartheta)=0, \qquad (95.03)$$

то при обращении ν и μ в нуль электромагнитное поле по формулам (20.19) и (20.20) также равно нулю.

При $r=a$, на идеально проводящей стенке полости, должны выполняться граничные условия (84.41) и (84.42). Поэтому собственные частоты электрических волн находятся из уравнения

$$\psi_\nu'(ka)=0 \quad \nu=1, 2, \ldots, \qquad (95.04)$$

а собственные частоты магнитных волн — из уравнения

$$\psi_\mu(ka)=0 \quad \mu=1, 2, \ldots. \qquad (95.05)$$

Если целое число ν или μ обозначить через n, то p-ый положительный корень уравнения (95.04) *по определению* дает нам собственную частоту колебания E_{mnp}, а p-ый положительный корень уравнения (95.05) — частоту колебания H_{mnp} в сферическом резонаторе. Электромагнитное поле этих колебаний вычисляется с помощью функций (95.01) и (95.02) соответственно.

ЭБ "Научное наследие России"

Собственные частоты сферического резонатора, получаемые из уравнений (95.04) и (95.05), не зависят от индекса m, а зависят лишь от индексов n и p. Поскольку при каждом n существует $2n+1$ различных угловых функций $P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi$ или $P_n^m(\cos\vartheta)\sin m\varphi$ (ср. конец § 23), то каждая собственная частота имеет кратность $2n+1$. Все собственные колебания, соответствующие данной частоте, переходят друг от друга при повороте сферы, поэтому $2n+1$ — кратное вырождение каждой собственной частоты вызвано высокой степенью симметрии сферы.

Для грубой оценки корней уравнений (95.04) и (95.05) воспользуемся асимптотическими выражениями. В силу формул (23.10) при больших значениях ka имеем

$$\left.\begin{aligned}\psi'_\nu(ka) &= -\sin\left[ka-(\nu+1)\frac{\pi}{2}\right],\\ \psi_\mu(ka) &= \cos\left[ka-(\mu+1)\frac{\pi}{2}\right],\end{aligned}\right\} \qquad (95.06)$$

поэтому корни уравнения (95.04) приближенно равны

$$ka=\nu\frac{\pi}{2}+\left(p-\frac{1}{2}\right)\pi \quad (p=1,\ 2,\ldots) \qquad (95.07)$$

и корни уравнения (95.05) суть

$$ka=\mu\frac{\pi}{2}+p\pi \quad (p=1,\ 2,\ldots). \qquad (95.08)$$

Формулы (95.07) и (95.08) дают тем лучшее приближение, чем меньше ν и μ и чем больше p, т. е. чем больше получающееся значение ka. При малых p ($p=1$ или 2) эти формулы дают погрешность, но не очень большую. Так, при $\nu=1$ наименьший корень уравнения (95.04) равен

$$ka=2{,}75;\quad \lambda=2{,}28a, \qquad (95.09)$$

в то время как по формуле (95.07) при $p=1$ получаем $ka=\pi$. При $\mu=1$ наименьший корень уравнения (95.05) равен

$$ka=4{,}50;\quad \lambda=1{,}4a, \qquad (95.10)$$

в то время как формула (95.08) дает $ka=\frac{3\pi}{2}$ при $p=1$.

Согласно введенной выше классификации, формула (95.09) определяет нам частоту собственного колебания E_{011}, а формула (95.10)—частоту колебания H_{011}. Как видно из

Электронное наследие России

приближенных выражений (95.07) и (95.08), все остальные колебания имеют более высокие собственные частоты, так что колебание E_{011} является основным. Его частота является трехкратно вырожденной, поскольку оба колебания E_{111} (функция U которых пропорциональна $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$) имеют ту же собственную частоту. Собственному значению (95.10) соответствуют также еще два колебания H_{111}. Вырождение в данном случае трехкратное, поскольку при $n=1$ мы имеем $2n+1=3$.

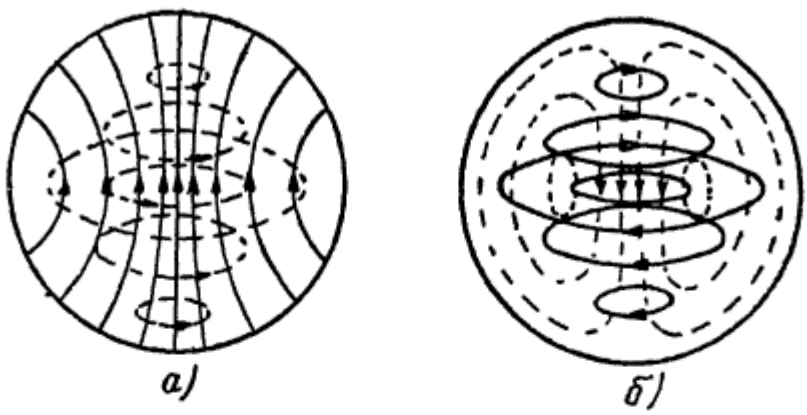


Рис. 133. Колебания E_{011} и H_{011} в сферическом резонаторе (ось z направлена вертикально).

На рис. 133 изображены силовые линии колебаний E_{011} и H_{011} в сферической полости. Легко показать, что поля колебаний E_{111} и H_{111} получаются поворотом полей E_{011} и H_{011} на угол $\frac{\pi}{2}$ в плоскости xz и yz.

§ 96. Квазистационарный расчет резонаторов сложной формы

Рассмотренные выше резонаторы простейшей формы имеют следующую особенность: длина волны основного колебания этих резонаторов равна (по порядку величины) их наибольшему размеру. Например, для кубической полости по формуле (93.14) получаем

$$\lambda=\sqrt{2}a, \tag{96.01}$$

где a — ребро куба.

Объемные резонаторы находят широкое применение в электронике сверхвысоких частот. Однако рассмотренное выше колебание не может эффективно взаимодействовать с электронным потоком ввиду того, что период колебания

$$T=\frac{\sqrt{2}a}{c} \tag{96.02}$$

составляет малую часть времени пролета электронов через резонатор

$$T_0 = \frac{a}{v}, \qquad (96.03)$$

где v — средняя скорость электронов, которая обычно значительно меньше c. При своем движении через резонатор (например в вертикальном направлении на рис. 129 — вдоль оси пучка электрических силовых линий) электрон подвергается попеременно то ускорению в одном полупериоде

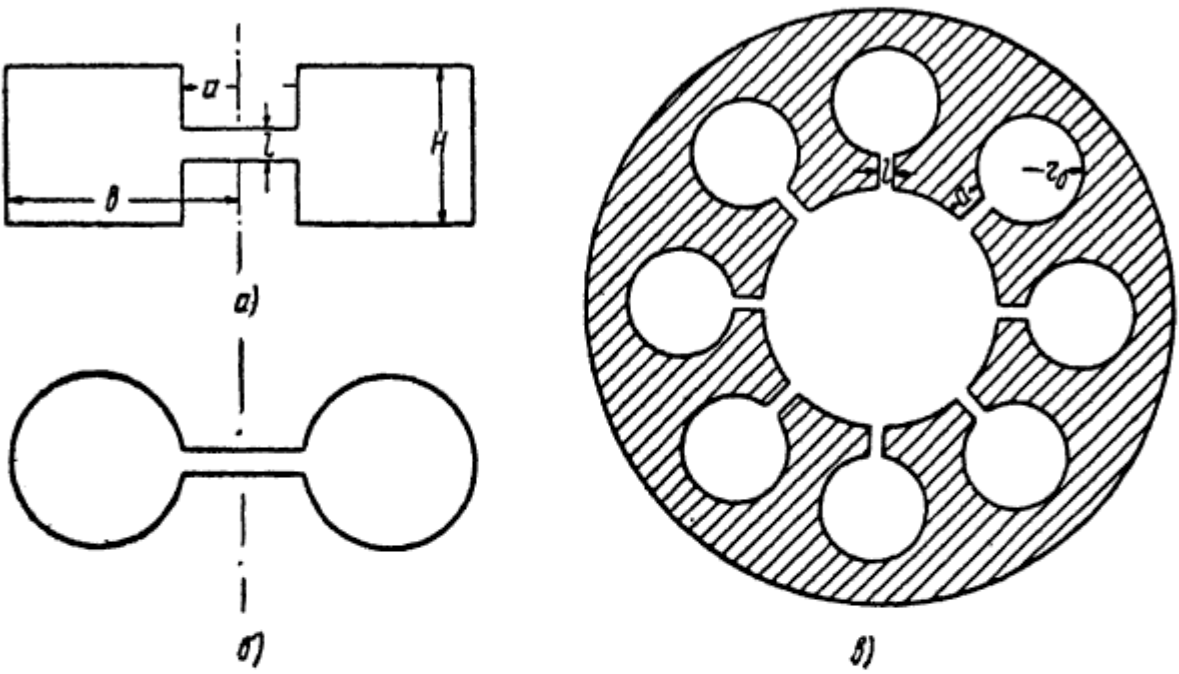


Рис. 134. Квазистационарные резонаторы:
а — тороидальный (тор прямоугольного сечения); *б* — тороидальный (тор кругового сечения); *в* — многокамерный резонатор магнетрона.

колебания, то замедлению в другом полупериоде. В результате не получается практически никакого обмена энергией между ним и полем.

Время пролета можно уменьшить, взяв вместо куба квадратную призму с достаточно малой высотой l: T_0 соответственно уменьшается, а T остается прежним (поскольку оно от l не зависит). Однако такие резонаторы имеют малую добротность (ср. § 99). Для увеличения объема резонатора и его добротности необходимо, оставляя длину l пролетного промежутка малой, создавать дополнительные „резервуары энергии". По такому принципу получаются тороидальные резонаторы для клистронов (рис. 134,*а* и 134,*б*) и каждая „камера" в резонаторе магнетрона (рис. 134,*в*). Эти резонансные полости сложной формы отличаются от рассмотренных ранее объемов про-

ЭБ "Научное наследие России"

стой формы тем, что длина волны основного колебания значительно превышает их размеры, т. е.

$$kD \ll 1, \tag{96.04}$$

где D — наибольший размер резонатора, k — волновое число, соответствующее частоте основного колебания.

Условие (96.04) есть, как известно, условие квазистационарности цепи. Оно показывает, что при частотах, меньших или примерно равных собственной частоте основного колебания, резонатор можно рассматривать как квазистационарный контур.

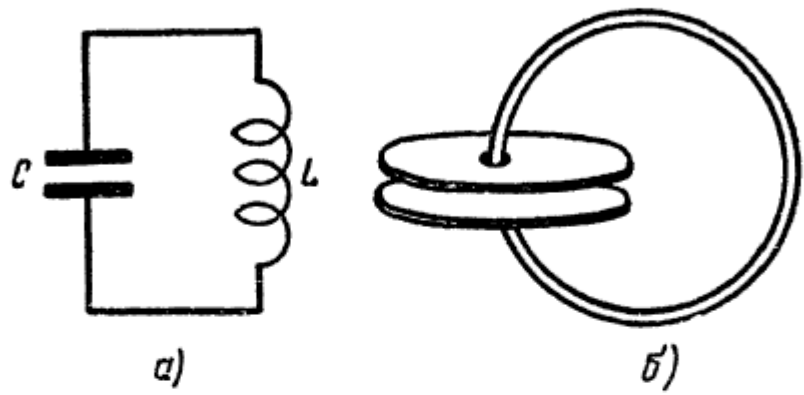


Рис. 135. К теории тороидальных резонаторов:
а — эквивалентная схема; *б* — одновитковый контур.

В тороидальных резонаторах, изображенных на рис. 134,*а* и 134,*б*, можно выделить „емкостной" объем, заключенный между параллельными пластинами, и „индуктивный" объем, т. е. собственно тороидальную часть резонатора. Эквивалентная схема такого резонатора изображена на рис. 135,*а* (мы пока не учитываем омических потерь), да и сам тороидальный резонатор можно себе представить как одновитковый резонансный контур (рис. 135,*б*), индуктивный виток которого превращен в тороидальную поверхность резонатора, защищающую электромагнитное поле от потерь на излучение.

Параметры C и L тороидального резонатора нетрудно вычислить. Емкость

$$C = \frac{e}{U} \tag{96.05}$$

(e — заряд на пластине конденсатора, U — напряжение между пластинами) можно, очевидно, вычислить по элементарной формуле

$$C = \frac{S_0}{4\pi l}, \tag{96.06}$$

Электронное наследие России

где

$$S_0 = \pi a^2 \tag{96.07}$$

есть площадь пластин, a — их радиус, l—расстояние между ними. Как известно, формула (96.06) не учитывает краевых эффектов и поэтому применима лишь при условии

$$a \gg l. \tag{96.08}$$

Индуктивность определяется по формуле

$$L = \frac{\Psi}{J}, \tag{96.09}$$

где J — ток, обтекающий внутреннюю поверхность тора, а

$$\Psi = \frac{1}{c} \int B_n dS \tag{96.10}$$

есть умноженный на $\frac{1}{c}$ магнитный поток через меридиональное сечение тора. При вычислении Ψ можно (в силу малости зазора l) считать тор замкнутым. Применяя известное соотношение теории квазистационарного поля

$$\oint H_\varphi \, ds = \frac{4\pi}{c} J \tag{96.11}$$

к окружности радиуса r, получим

$$H_\varphi = \frac{2J}{cr}. \tag{96.12}$$

Последнее выражение показывает, что магнитное поле непостоянно по сечению тора. В обычной катушке (соленоиде), изогнутой в виде тора, магнитное поле также неоднородно; лишь в прямой катушке осуществляется однородное поле.

Рассматривая поле в пустоте, мы можем в формуле (96.10) положить $B_n = H_\varphi$. Если для краткости обозначим через $\bar{r}$ средний радиус кривизны тора, определяемый формулой

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{S_1} \int \frac{dS}{r}, \tag{96.13}$$

где S_1 — площадь меридионального сечения тора, по которому происходит интегрирование, то мы получим

$$\Psi = \frac{2JS_1}{c^2 \bar{r}}, \tag{96.14}$$

ЭБ "Научное наследие России"

так что индуктивность тора будет равна

$$L=\frac{2S_1}{c^2\overline{\overline{r}}}. \qquad (96.15)$$

Для прямоугольного тора высоты H имеем

$$\frac{1}{\overline{\overline{r}}}=\frac{H}{S_1}\int_a^b\frac{dr}{r}=\frac{H}{S_1}\ln\frac{b}{a}$$

(радиусы a и b изображены на рис. 134,a) или

$$S_1=H(b-a);\quad \frac{1}{\overline{\overline{r}}}=\frac{1}{b-a}\ln\frac{b}{a}. \qquad (96.16)$$

Собственная круговая частота данного объемного резонатора ω и соответствующая длина волны λ вычисляются по формулам

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}};\quad \lambda=2\pi c\sqrt{LC}, \qquad (96.17)$$

т. е.

$$\lambda=2\pi\sqrt{\frac{S_0S_1}{2\pi l\overline{\overline{r}}}}. \qquad (96.18)$$

Это выражение справедливо, если имеет место соотношение

$$D\sqrt{\frac{2\pi l\overline{\overline{r}}}{S_0S_1}}\ll 1, \qquad (96.19)$$

вытекающее из условия квазистационарности (96.04). Для прямоугольного тора, используя соотношения (96.07) и (96.16), можно записать это условие в виде

$$\frac{D}{a}\sqrt{\frac{2l}{H\ln\frac{b}{a}}}\ll 1, \qquad (96.20)$$

причем оно должно выполняться при $D=2b$ и при $D=H$. Отсюда видно, что квазистационарный расчет дает правильные результаты при $l\ll H$, т. е. при достаточно малом „емкостном зазоре“ l. При $l=H$ левая часть неравенства (96.20) становится больше единицы, если положить $D=2b$: в этом случае тороидальный резонатор приобретает правильную цилиндрическую форму, и его нужно рассчитывать электродинамическим методом (§ 94). При слишком боль-

ЭБ "Научное наследие России"

ших H неравенство (96.20) начинает плохо выполняться (для $D=H$): в этом случае собственно тороидальный объем резонатора вытягивается в отрезок коаксиальной линии, внутренний проводник которого имеет зазор l, и необходимо учитывать стоячую волну на отрезке H. При увеличении внешнего радиуса тора b необходимо принимать во внимание волны в радиальном направлении (стоячая цилиндрическая волна).

За исключением отмеченных выше особых случаев, в которых необходим иной теоретический подход, формула (96.18) дает в первом приближении длину волны основного колебания. Все другие (более высокие) собственные частоты тороидального резонатора вычислять квазистационарным методом нельзя, поскольку из эквивалентной схемы на рис. 135,a мы можем найти лишь одну резонансную частоту.

При электродинамическом расчете собственных колебаний тороидального резонатора его объем мысленно разделяют на два объема простой формы. Например, прямоугольный тороидальный резонатор можно рассматривать как коаксиальный резонатор (длина H, радиусы a и b), связанный с цилиндрическим резонатором (длина l, радиус основания a) через боковую поверхность последнего. В результате электродинамического взаимодействия этих простых резонаторов получается новый резонатор со своим спектром собственных частот. Электромагнитное поле в таком резонаторе сложной формы обычно получают, взяв достаточно общие выражения для полей в каждой из частичных областей (в цилиндрическом и коаксиальном объеме) и „сшивая“ их на границе областей (ср. гл. XII).

Мы не будем здесь останавливаться на электродинамической теории резонаторов сложной формы, поскольку она ведет к весьма громоздким выражениям. Заметим лишь, что для основного колебания, представляющего наибольший практический интерес, электродинамическая теория дает поправки к изложенной выше квазистационарной теории. Во-первых, в формуле (96.18) появляются поправочные множители, зависящие лишь от геометрических параметров резонатора (l, H, a и b). Эти поправочные множители, по существу, учитывают наряду с емкостью (96.06) и индуктивностью (96.15), емкость и индуктивность рассеяния, возникающие вследствие проникания электрического поля в тор и магнитного поля—в емкостной промежуток. Во-вторых, электродинамический расчет дает и „волновые“ поправки,

Электронное наследие России

которыми уже нельзя пренебрегать при нарушении условия (96.20).

Квазистационарный метод позволяет рассчитать резонансную частоту каждой из „камер" магнетрона (рис. 134,*в*), имеющей ту же эквивалентную схему (см. рис. 135,*а*). Емкость конденсатора равна

$$C = \frac{ah}{4\pi l}, \tag{96.21}$$

где l — ширина зазора, a—его длина, h—высота камеры в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа (предполагается, что в этом направлении поле не меняется). Магнитное поле в индуктивной части камеры — такое же, как и в прямой катушке радиуса r_0. Рассуждая так же, как при выводе формул (96.12) и (96.14), получим

$$H = \frac{4\pi}{c}\frac{J}{h} \quad \text{и} \quad \Psi = \left(\frac{2\pi r_0}{c}\right)^2 \frac{1}{h}, \tag{96.22}$$

откуда

$$L = \left(\frac{2\pi r_0}{c}\right)^2 \frac{1}{h}. \tag{96.23}$$

Длина волны основного колебания равна

$$\lambda = 2\pi r_0 \sqrt{\frac{\pi a}{l}}. \tag{96.24}$$

Заметим в заключение, что критические частоты П- и Н-образных волноводов (см. § 43) также можно приближенно рассчитать с помощью квазистационарного метода.

§ 97. Свойства резонатора, заполненного однородным веществом

С помощью леммы § 21 можно перейти к резонаторам, заполненным однородным веществом с произвольными проницаемостями

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega); \quad \mu = \mu(\omega). \tag{97.01}$$

Для этого в качестве вспомогательного поля $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ нужно взять поле в пустом резонаторе, колеблющееся с собственной частотой $\tilde{\omega}$ (ω— вещественное число). Поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в заполненном резонаторе получается равным

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\tilde{\mathbf{E}}; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\tilde{\mathbf{H}}, \tag{97.02}$$

ЭБ "Научное наследие России"

так что на стенке резонатора удовлетворяется граничное условие

$$E_t = 0, \tag{97.03}$$

коль скоро вспомогательное поле ему удовлетворяет. Частота этого собственного колебания оказывается равной

$$\omega = \frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{97.04}$$

При наличии потерь (комплексные ε и μ) частота ω получается комплексной,

$$\omega = \omega' - i\omega'' \quad (\omega'' > 0), \tag{97.05}$$

т. е. соответствует затухающим собственным колебаниям. Это значит, что мгновенные значения полей, связанные с комплексными амплитудами $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\omega)$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\omega)$ формулами (2.01), равны

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}\, e^{-i\omega' t}\right\} e^{-\omega'' t}; \quad \mathbf{H}(t) = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}\, e^{-i\omega' t}\right\} e^{-\omega'' t}. \tag{97.06}$$

С помощью формулы (97.04) можно вычислить затухание собственных колебаний, вызванное, например, проводимостью воздуха, заполняющего резонатор. Для этого комплексную диэлектрическую проницаемость воздуха ε достаточно взять при частоте $\tilde{\omega}$ собственных колебаний пустого резонатора, поскольку она мало отличается от ω, а магнитную проницаемость μ положить равной единице.

Величина ω'' называется коэффициентом затухания. Поскольку период колебания равен $T = \frac{2\pi}{\omega'}$, декремент затухания δ определяется так:

$$\delta = \omega'' T = 2\pi \frac{\omega''}{\omega'}, \tag{97.07}$$

а добротность колебания

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega'}{2\omega''}. \tag{97.08}$$

Более тщательное исследование формулы (97.04) показывает, что она дает собственную частоту ω лишь в неявной форме, точнее, в силу зависимостей (97.01), является уравнением для ω. Исследование собственных колебаний в резонаторе с поглощающей и диспергирующей средой свя-

ЭБ "Научное наследие России"

зано с решением этого уравнения, для чего нужно знать функции (97.01) в широком диапазоне частот, в том числе комплексных. Эта трудность не является отличительной особенностью объемных резонаторов: она имеется в теории обычных резонансных контуров (рис. 135,*а*), если там

$$C = \varepsilon \tilde{C} \text{ и } L = \mu \tilde{L}, \tag{97.09}$$

где ε — комплексная диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего конденсатор, μ — комплексная магнитная проницаемость сердечника у катушки, $\tilde{C}$ — емкость „пустого“ конденсатора, $\tilde{L}$ — индуктивность „пустой“ катушки. Собственная частота такого контура по формуле (96.17) равна

$$\omega = \frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \text{ где } \tilde{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{L}\tilde{C}}}, \tag{97.10}$$

что согласуется с выражением (97.04).

Обычно уравнения вида (97.04) решать не приходится, поскольку собственные колебания объемных резонаторов и резонансных контуров имеют по большей части лишь теоретический интерес, а практически важны *вынужденные* колебания этих систем (ср. § 100). При изложении теории вынужденных (монохроматических) колебаний резонаторов мы увидим, что для получения решения нужны не собственные колебания реального резонатора с дисперсией, а собственные колебания некоторого вспомогательного резонатора, заполнение которого имеет при всех собственных частотах те же проницаемости ε и μ, которые данный резонатор имеет при частоте вынужденных колебаний (ср. § 101).

§ 98. Влияние конечной проводимости стенок на свободные колебания резонатора

Свободные колебания в пустых резонаторах затухают вследствие потерь в стенках. Поэтому собственные частоты резонаторов являются слегка комплексными, как и при наличии потерь в веществе, заполняющем резонатор [ср. формулу (97.05)]. Это значит, что мгновенные значения полей затухают по экспоненциальному закону (97.06), а энергия электромагнитного поля в резонаторе—по закону

$$\overline{W}(t) = \overline{W}(0)\, e^{-2\omega'' t}, \tag{98.01}$$

ЭБ "Научное наследие России"

так что

$$\frac{d\overline{W}}{dt} = -2\omega''\overline{W}. \qquad (98.02)$$

Приближенное значение коэффициента затухания ω'' можно найти, если использовать закон сохранения энергии (1.11), усреднив его по периоду колебания:

$$\frac{d\overline{W}}{dt} + \overline{P} + \overline{\Sigma} = 0, \qquad (98.03)$$

где усреднение обозначено чертой наверху. Этот закон удобно применить к объему резонатора V, ограниченному поверхностью стенки S. Токи в стенке расположены вне объема V, и потому $\overline{P} = 0$. Сочетая формулы (98.02) и (98.03), мы получаем „энергетическое" выражение для коэффициента затухания

$$\omega'' = \frac{\overline{\Sigma}}{2\overline{W}}. \qquad (98.04)$$

Величину $\overline{\Sigma}$ — среднюю мощность, вытекающую из объема V и поступающую в стенку резонатора—нетрудно вычислить с помощью теории сильного скин-эффекта. По формуле (26.18) получаем

$$\overline{\Sigma} = -\operatorname{Re}\Sigma^{\kappa} = \frac{c}{8\pi}\oint_S \operatorname{Re} w\,|[\mathbf{nH}]|^2\,dS, \qquad (98.05)$$

и для однородной стенки, волновое сопротивление w которой постоянно на поверхности S, будем иметь

$$\overline{\Sigma} = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re} w \oint |H_t|^2\,dS. \qquad (98.06)$$

Строго говоря, этими выражениями для расчетов пользоваться нельзя, поскольку распределение поля в резонаторе с неидеальными стенками обычно неизвестно; если же поле известно, то комплексная собственная частота также известна, а тогда все дальнейшие выкладки становятся излишними. Поэтому выведенные выше выражения применяют обычно для приближенных расчетов, принимая распределение поля таким же, как в резонаторе с идеальными стенками. Таким образом мы получаем по методу возмущений первое приближение для собственной частоты резонатора (см. ниже).

ЭБ "Научное наследие России"

Среднюю энергию поля

$$\overline{W}=\frac{1}{16\pi}\int(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{H}|^2)\,dV \qquad (98.07)$$

также приходится вычислять из распределения поля в идеальном резонаторе. Если к собственному колебанию такого резонатора применить теорему о реактивной мощности (6.26), то в силу идеальности стенок и отсутствия сторонних токов в объеме V мы получим

$$\int\limits_V |\mathbf{E}|^2\,dV=\int\limits_V |\mathbf{H}|^2\,dV \qquad (98.08)$$

и формулу (98.07) можно переписать в виде

$$\overline{W}=\frac{1}{8\pi}\int|\mathbf{H}|^2\,dV, \qquad (98.09)$$

более удобном для расчетов. Согласно соотношению (98.08) среднее значение электрической энергии равно среднему значению магнитной энергии, поэтому полная энергия (98.07) равна удвоенной средней магнитной энергии (98.09).

Окончательная формула для коэффициента затухания имеет вид

$$\omega''=\frac{c\,\mathrm{Re}w}{2D}, \qquad (98.10)$$

где для сокращения мы ввели обозначение

$$D=\frac{\int|\mathbf{H}|^2\,dV}{\oint|H_t|^2dS}. \qquad (98.11)$$

Смысл величины D мы рассмотрим в § 99.

Выше был, в сущности, изложен метод возмущений, использующий малость параметра w в граничных условиях Леонтовича (25.10) и то обстоятельство, что при $w=0$ эти условия переходят в граничные условия для идеального проводника. При систематическом применении метода возмущений следует поля представлять в виде ряда по степеням w:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+w\mathbf{E}_1+\ldots;\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0+w\mathbf{H}_1+\ldots, \qquad (98.12)$$

и в таком же виде искать собственную частоту

$$\omega=\omega_0+w\omega_1+\ldots. \qquad (98.13)$$

ЭБ "Научное наследие России"

Величины $\mathbf{E}_0$ $\mathbf{H}_0$ и ω_0 относятся к идеальному резонатору, вторые слагаемые дают поправку на конечную проводимость стенок. Эта поправка мала, поэтому можно брать значение волнового сопротивления w для частоты ω_0.

Взяв мнимую часть соотношения (98.13), получим

$$-\omega'' = \operatorname{Re} w \operatorname{Im} \omega_1 + \operatorname{Im} w \operatorname{Re} \omega_1. \qquad (98.14)$$

В результате сравнения с формулой (98.10) находим $\operatorname{Re}\omega_1 = 0$ и

$$\omega_1 = -\frac{ic}{2D}, \qquad (98.15)$$

так что формула (98.13) расшифровывается следующим образом:

$$\omega = \omega_0 - \frac{icw}{2D}, \qquad (98.16)$$

Величина D зависит от распределения поля данного колебания в нулевом приближении, поскольку в формулу (98.11) входит поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$. Выражение (98.16) позволяет вычислить вещественную часть комплексной частоты

$$\omega' = \omega_0 + \frac{c \operatorname{Im} w}{2D}, \qquad (98.17)$$

т. е. смещение собственной частоты колебаний, вызванное проникание поля в стенки резонатора. Согласно формуле (26.02) для металлических стенок резонатора (при $\mu = 1$) мы имеем

$$\operatorname{Re} w = -\operatorname{Im} w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{f}{\sigma}}, \qquad (98.18)$$

где f — частота колебаний, σ — проводимость металла. Поэтому собственная частота реального резонатора меньше, чем у идеального; смещение частоты численно равно затуханию

$$\omega_0 - \omega' = \omega''. \qquad (98.19)$$

Полученные результаты легко понять, если сравнить их с теорией обычных резонансных контуров. В самом деле, если в резонансном контуре на рис. 135,*а* учесть конечную проводимость катушки, то появится, во-первых, последовательное сопротивление R и, во-вторых, индуктивность L, равная внешней индуктивности L_e для идеально проводящей катушки, заменится суммой $L_e + L_i$, где L_i —

Электронное наследие России"

внутренняя индуктивность провода. Собственная частота такого контура ω (комплексная) определится из уравнения

$$(L_e + L_i)\,\omega^2 + iR\omega - \frac{1}{C} = 0, \tag{98.20}$$

которое можно переписать в виде

$$\omega^2 + \frac{\omega L_i + iR}{L_e}\,\omega - \omega_0^2 = 0;\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_e C}}. \tag{98.21}$$

Поскольку L_i и R зависят от частоты (скин-эффект), это уравнение приходится решать приближенно, считая, что ω мало отличается от ω_0. Заменяя слагаемое $\frac{\omega L_i + iR}{L_e}\omega$ его значением при $\omega = \omega_0$, мы получаем

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{L_i}{L_e} + i\,\frac{R}{\omega L_e}\right)}$$

или в том же приближении

$$\omega = \omega_0 \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L_i}{L_e} + i\,\frac{R}{\omega_0 L_e}\right)\right], \tag{98.22}$$

где L_i и R взяты при частоте ω_0. При сильном скин-эффекте, как мы показали в § 26, имеет место соотношение

$$R = \omega_0 L_i, \tag{98.23}$$

откуда сразу получается формула (98.19). Подчеркнем еще раз, что эта формула имеет место лишь при сильном скин-эффекте; если скин-эффект выражен слабо, то согласно формуле § 27 и рис. 16 имеем

$$R \gg \omega_0 L_i, \tag{98.24}$$

так что L_i в выражении (98.22) можно просто положить равным нулю. В этом случае конечная проводимость определяет в первом приближении лишь затухание собственных колебаний контура.

При отсутствии скин-эффекта внутренняя индуктивность L_i не зависит от частоты, поэтому ее можно объединить с внешней индуктивностью L_e и положить $L = L_e + L_i$. Так как сопротивление R тоже постоянно, то квадратное уравнение (98.20) можно решить точно

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} - i\alpha, \tag{98.25}$$

ЭБ "Научное наследие России"

где

$$\bar{\omega}_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{R}{2L}. \tag{98.26}$$

Второй корень квадратного уравнения отличается лишь знаком перед радикалом и ничего нового не дает. Сопротивление создает в первом приближении лишь затухание ($\omega'' = \alpha$), а смещение частоты появляется лишь во втором приближении. Это—хорошо известный результат теории цепей, однако при скин-эффекте отвлекаться от связи между L_i и R нельзя. Поскольку объемные резонаторы применяются в диапазоне дециметровых и более коротких волн, в них имеет место сильный скин-эффект, и влияние омического сопротивления на их комплексную собственную частоту учитывается по формулам, аналогичным (98.22). Разумеется, те же результаты можно получить из формулы (98.25), но более сложным путем. В самом деле, пренебрегая α^2, мы имеем

$$\omega = \bar{\omega}_0 - \alpha = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{L_i}{L_e}}} - \frac{iR}{2L_e\left(1 + \frac{L_i}{L_e}\right)} \tag{98.27}$$

или в том же приближении

$$\omega = \omega_0 - \frac{\omega_0 L_i}{2L_e} - \frac{iR}{2L_e}, \tag{98.28}$$

что совпадает с формулой (98.22).

Из формулы (98.22) вытекает соотношение

$$\omega'' = \frac{R}{2L_e}, \tag{98.29}$$

аналогичное соотношению (98.04). Действительно, $\frac{1}{2} R |J|^2$ есть активная мощность, поступающая в сопротивление из внешнего пространства (ср. § 27), а $\frac{1}{2} L_e |J|^2$ —полная энергия электромагнитного поля во внешнем пространстве, т. е. удвоенная средняя магнитная энергия [ср. формулу (34.01)].

§ 99. Добротность некоторых резонаторов (для основного колебания)

Добротность „пустого“ резонатора согласно формулам (97.08) и (98.10) равна

$$Q = \frac{kD}{\operatorname{Re} w}, \tag{99.01}$$

ЭБ "Научное наследие России"

где $k=\frac{\omega_0}{c}$ — волновое число, соответствующее собственной частоте ω_0 идеального резонатора; волновое сопротивление металла w взято при той же частоте. При этом в определении Q — в формуле (97.08) — мы заменили ω' на ω_0, что в первом приближении допустимо.

Для немагнитного металла ($\mu=1$) согласно формуле (26.02) имеем

$$\operatorname{Re} w=\frac{1}{2n''}, \tag{99.02}$$

где n'' — мнимая часть комплексного показателя преломления. Пользуясь далее формулами (11.07), (11.13) и (11.17), мы можем написать

$$kn''=K''=\frac{1}{d}, \tag{99.03}$$

так что выражение для добротности принимает вид

$$Q=\frac{2D}{d}, \tag{99.04}$$

где d — толщина скин-слоя. Величина D определяется формулой (98.11) и также имеет размерность длины. Для грубой оценки заменяем в числителе и знаменателе формулы (98.11) $|\mathbf{H}|^2$ и $|H_t|^2$ некоторым средним значением квадрата магнитного поля и приходим к следующему соотношению

$$D\sim\frac{V}{S}, \tag{99.05}$$

где V — объем резонатора, S — его поверхность. Если все размеры объемного резонатора имеют один и тот же порядок, то тот же порядок имеет и D: в этом случае добротность (99.04) по порядку величины равна размеру резонатора, деленному на толщину скин-слоя. Если резонатор имеет вид цилиндра с малой высотой, то

$$V\approx Sl \text{ и } D\sim l, \tag{99.06}$$

поэтому D имеет порядок меньшего размера резонатора. Такие цилиндрические резонаторы имеют пониженную добротность, о чем мы без доказательства упоминали в начале § 96.

Вычислим параметр D и добротность Q рассмотренных выше резонаторов, причем ограничимся основным колебанием каждого резонатора.

ЭБ "Научное наследие России"

1. Прямоугольная полость, колебание 110 (или E_{110}). Магнитное поле определяется формулой (93.12) при $m = n = 1$, причем для удобства вычислений мы положим $\frac{\pi}{ikab} C = 1$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \int |\mathbf{H}|^2 dV &= \frac{1}{4} abl\,(a^2 + b^2), \\ \oint |H_t|^2 dS &= (a^3 + b^3)\, l + \frac{1}{2} ab\,(a^2 + b^2), \end{aligned}\right\} \quad (99.07)$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{abl\,(a^2 + b^2)}{2\,(a^3 + b^3)\, l + ab\,(a^2 + b^2)} \quad (99.08)$$

и

$$Q = \frac{1}{d} \frac{ab\,(a^2 + b^2)\, l}{2\,(a^3 + b^3)\, l + ab(a^2 + b^2)}. \quad (99.09)$$

Для квадратной призмы ($a = b$) формулы немного упрощаются, и добротность равна

$$Q = \frac{1}{d} \frac{al}{2l + a}. \quad (99.10)$$

При вычислении интегралов (99.07) использованы соотношения

$$\int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \int_0^a \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{1}{2} a,$$

$$\int_0^b \sin^2 \frac{\pi y}{b} dy = \int_0^b \cos^2 \frac{\pi y}{b} dy = \frac{1}{2} b.$$

2. Цилиндрический резонатор, колебание E_{010} (высота цилиндра l, радиус основания a).

Полагая $h = 0$ в формуле (94.03) и беря функцию Π в виде

$$\Pi = CJ_0(gr), \quad ga = 2{,}405, \quad (99.11)$$

получим магнитное поле колебания E_{010}, имеющее единственную составляющую

$$H_\varphi = ik \frac{\partial \Pi}{\partial r} = -ikgCJ_1(gr); \quad (99.12)$$

Электронное наследие России

и $-ikgC = 1$ получаем

$$\left.\begin{aligned} \int |H_\varphi|^2 dV &= \pi a^2 l J_1^2(ga), \\ \oint |H_\varphi|^2 dS &= 2\pi a(a+l) J_1^2(ga), \end{aligned}\right\} \tag{99.13}$$

откуда

$$D = \frac{al}{2(a+l)} \tag{99.14}$$

и

$$Q = \frac{al}{d(a+l)}. \tag{99.15}$$

При вычислении интегралов (99.13) мы использовали известное соотношение теории бесселевых функций (см. Ватсон, стр. 149)

$$\int_0^a J_1^2(gr)\, r dr = \frac{1}{2}\, a^2 [J_1^2(ga) - J_0(ga) J_2(ga)].$$

3. Тороидальный резонатор (см. рис. 134, *а*). Магнитное поле в торе определяется формулой (96.12). Если в ней для удобства положить $\frac{2J}{c} = 1$, то получим

$$\left.\begin{aligned} \int |H_\varphi|^2 dV &= 2\pi H \ln \frac{b}{a}, \\ \oint |H_\varphi|^2 dS &= 2\pi \left(\frac{H}{a} + \frac{H}{b} + 2\ln \frac{b}{a}\right), \end{aligned}\right\} \tag{99.16}$$

откуда

$$D = \frac{H \ln \frac{b}{a}}{\frac{H}{a} + \frac{H}{b} + 2\ln \frac{b}{a}} \tag{99.17}$$

и

$$Q = \frac{2}{d} \cdot \frac{H \ln \frac{b}{a}}{\frac{H}{a} + \frac{H}{b} + 2\ln \frac{b}{a}}. \tag{99.18}$$

4. Отдельный резонатор магнетрона. (рис. 134, *в*). Поскольку согласно формуле (96.22) магнитное поле в „индуктивной“ части резонатора постоянно, можно в выражении

(98.11) магнитное поле вынести за знаки интегралов и сократить. Поэтому

$$D = \frac{V}{S}, \tag{99.19}$$

где $V = \pi r_0^2 h$ — объем индуктивной части резонатора, $S = 2\pi r_0 h$ — его боковая поверхность. Таким образом, в данном случае формула (99.05) является точной, и мы имеем

$$D = \frac{r_0}{2}; \quad Q = \frac{r_0}{d}. \tag{99.20}$$

Разумеется, эти простые формулы можно получить с помощью квазистационарного выражения

$$Q = \frac{\omega_0 L_e}{R}, \tag{99.21}$$

вытекающего из формулы (98.29), если индуктивность L_e определить по формуле (96.23), а R вычислить по теории сильного скин-эффекта

$$R = \frac{2\pi r_0}{h} \frac{4\pi}{c} \operatorname{Re} w = \frac{(2\pi)^2 r_0}{cn''h}. \tag{99.22}$$

Здесь мы воспользовались формулами (99.02), (99.03) и (26.06).

В заключение необходимо отметить, что все результаты § 98 и 99 относятся к *невырожденным* колебаниям. Если же данная собственная частота является вырожденной, то влияние конечной проводимости стенок на соответствующие ей колебания нужно в общем случае рассчитывать по более сложным формулам теории возмущений.

ЭБ "Научное наследие России"

ГЛАВА XVII

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

§ 100. О свободных и вынужденных колебаниях. Условия ортогональности

Рассмотренные выше свободные колебания в замкнутых резонансных объемах являются некоторой идеализацией и имеют лишь теоретический интерес. На практике в резонансных системах обычно используют вынужденные колебания. Это значит, что объемный резонатор связан с каким-то источником электромагнитной энергии, возбуждающим колебания в резонаторе. Кроме того, резонатор связан с системой, извлекающей из него электромагнитную энергию и потребляющей ее. Это положение схематизировано на рис. 136, *а*. К объемному резонатору присоединены две передающие линии (волновода) *1* и *2*; по одной из которых подводится энергия, а по другой отводится к соответствующей нагрузке. Если в каждой передающей линии может распространяться (эффективно переносить энергию) только одна волна, то система на рис. 136, *а* в принципе не отличается от четырехполюсника, к клеммам которого присоединены две длинные линии *1* и *2* (рис. 136, *б*). Можно даже сказать, что рис. 136, *б* есть „эквивалентная схема" объемного резонатора, представленного на рис. 136, *а*, или что объемный резонатор в данном случае действует как четырехполюсник, преобразующий электромагнитную энергию. Параметры этого „эквивалентного четырехполюсника" в принципе можно вычислить, используя теорию возбуждения волноводов (§ 79 и 80) и теорию возбуждения объемных резонаторов (§ 101). Однако получающиеся при этом выражения весьма сложны и громоздки, и выводить их здесь мы

Электронное наследие России

не будем. Причина такой сложности заключается в том, что приходится „сшивать" электромагнитные поля на границах областей разной геометрической формы (волновода и объемного резонатора), а это всегда приводит к математическим трудностям.

Указанная задача не исчерпывает всех применений объемных резонаторов. Перечислим различные способы связи с объемным резонатором, позволяющие возбуждать в нем колебания:

1) вибратор (или „штырек");
2) электронный поток;
3) петля (или „рамочная антенна");
4) щель или отверстие в стенке объемного резонатора.

Связь с волноводом через отверстие мы уже рассматривали выше (рис. 136, *а*). Заметим, что небольшие отверстия

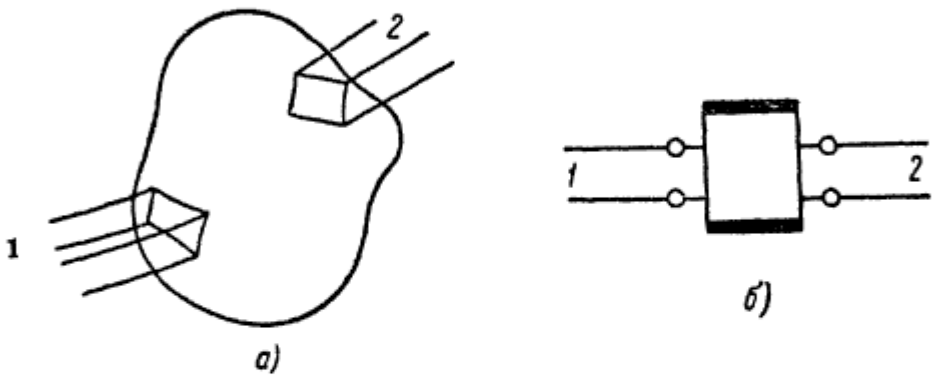


Рис. 133. Объемный резонатор как преобразователь электромагнитной энергии.
а — резонатор и две линии; *б* — эквивалентная схема.

в стенке приходится делать как для подвода энергии к вибратору или петле, так и для пропускания электронов. Те же элементы связи могут быть использованы и для извлечения энергии из резонатора.

Вибратор и электронный поток можно представить как сторонний электрический ток с некоторой объемной плотностью $\mathbf{j}^e$; если вибратор считать идеально проводящим, то сторонний ток в нем будет поверхностным. Петлю связи, возбуждающую объемный резонатор, можно согласно § 78 заменить сторонним электрическим током или же сторонним магнитным током. Щель или отверстие в идеально проводящей стенке резонатора можно трактовать как сторонний поверхностный магнитный ток на сплошной (неразрезанной) стенке резонатора: такое рассмотрение удобно, если тангенциальное электрическое поле на щели или отверстии известно (ср. § 78).

...ное наследие России"

Отметим еще раз, что сторонние токи заменяют собой действие „внешних“ устройств на данную часть системы — объемный резонатор (§ 3), т. е. учитывают его незамкнутость. Поэтому, введя сторонние токи, мы должны считать резонатор окруженным непроницаемой оболочкой, в которой уже нет отверстий и щелей и через которую поле не просачивается наружу.

Поскольку поверхностные токи можно рассматривать как предельный случай объемных токов, задача о возбуждении объемного резонатора заданными источниками сводится к интегрированию комплексных уравнений поля (см. конец § 3)

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mu\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^m;\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^e, \quad (100.01)$$

в которых $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$ заданы. Уравнения (100.01) написаны в предположении, что источники поля (сторонние токи $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$) являются монохроматическими и возбужденное поле—также монохроматическое $\left(\text{зависимость } e^{-i\omega t},\ k = \frac{\omega}{c}\right)$. В случае иной зависимости от времени следует пользоваться интегралом или рядом Фурье (ср. § 2) или понятием комплексной частоты (ср. § 97).

Если мы предполагаем, что объемный резонатор ограничен замкнутой идеально проводящей поверхностью S_0 произвольной формы („стенка“ резонатора), то решение уравнений (100.01) должно удовлетворять на S_0 граничному условию

$$[\mathbf{nE}] = 0. \quad (100.02)$$

Иногда имеет смысл рассматривать граничное условие вида

$$[\mathbf{nH}] = 0 \quad (100.03)$$

на части поверхности S_0, что соответствует поверхности с идеальной „магнитной“ проводимостью (ср. конец § 92). На остальной части поверхности выполняется условие (100.02).

Внутри поверхности S_0 комплексные проницаемости ε и μ, соответствующие частоте ω, могут изменяться от точки к точке по любому закону

$$\varepsilon = \varepsilon(x, y, z);\ \mu = \mu(x, y, z), \quad (100.04)$$

так что мы рассматриваем резонатор, заполненный произвольным неоднородным веществом. Проницаемости ε и μ

ЭБ "Научное наследие России"

могут, разумеется, терпеть скачок на некоторых поверхностях, тогда уравнения (100.01) должны быть дополнены граничными условиями (4.01); однако этот случай можно рассматривать как предел непрерывного распределения (100.04).

Если выполняются граничные условия (100.02) или (100.03), то электромагнитное поле резонатора занимает конечный объем с четкой границей — поверхностью S_0. Вне этой поверхности электромагнитное поле отсутствует. Если провести поверхность S_0 так, чтобы она содержала предыдущую поверхность внутри себя и, следовательно, целиком проходила внутри идеального проводника [или идеального „магнитного" проводника в случае условия (100.03)], то мы будем иметь

$$\mathbf{E}=0 \text{ и } \mathbf{H}=0 \text{ на } S_0. \qquad (100.05)$$

Это — не граничное условие, а выражение того факта, что внутри идеального проводника (или идеального магнитного проводника) электромагнитное поле отсутствует (ср. § 24).

Если учесть конечную проводимость стенок объемного резонатора, то граница области, занятой электромагнитным полем, становится несколько неопределенной. Однако, если провести поверхность S_0 внутри стенок резонатора на глубине Nd, то на ней с большой точностью будет выполняться соотношение (100.05); здесь N — достаточно большое число, d — толщина скин-слоя при частоте ω и при низшей частоте собственных колебаний данного резонатора, определенных далее. На такой поверхности S_0 можно поставить и граничное условие (100.02). Это граничное условие на электромагнитном поле в резонаторе заметно не отразится: внутри стенки, на большой глубине, поле практически исчезает, так что, помещая туда идеально проводящую оболочку (резкую границу поля), мы почти не возмущаем поля.

При решении сформулированной выше задачи о вынужденных колебаниях объемного резонатора, т. е. при интегрировании уравнений (100.01) с учетом соотношений (100.02), (100.03) или (100.05) на границе, мы будем исходить из того, что *свободные* (собственные) колебания данного резонатора с тем же самым распределением (100.04) электромагнитных параметров ε и μ *полностью исследованы.* Это значит, что известна полная система векторных функций $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ и собственных частот ω_s $(s=1,2,\ldots)$ данного объемного

Электронное наследие России

резонатора с распределением (100.04) т. е. известны все решения однородных уравнений поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_s = ik_s\mu\,\mathbf{H}_s; \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_s = -ik_s\varepsilon\,\mathbf{E}_s \qquad (100.06)$$

с временны́ми множителями $e^{-i\omega_s}$ $\left(k_s = \frac{\omega_s}{c}\right)$. Мгновенные значения полей $\mathbf{E}_s(t)$ и $\mathbf{H}_s(t)$ при s-ом собственном колебании даются формулами

$$\mathbf{E}_s(t) = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{E}_s e^{-i\omega_s t}\right\}; \quad \mathbf{H}_s(t) = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{H}_s e^{-i\omega_s t}\right\}, \qquad (100.07)$$

аналогичными формулам (97.06). Собственные частоты ω_s, вообще говоря, комплексны

$$\omega_s = \omega_s' - i\omega_s'', \qquad (100.08)$$

причем выполняется условие

$$\omega_s'' \geqslant 0, \qquad (100.09)$$

поскольку свободные колебания должны затухать. Для резонаторов без потерь $\omega_s'' = 0$, и тогда мы считаем, что

$$\omega_s' \geqslant 0. \qquad (100.10)$$

Для цилиндрических резонаторов с однородным заполнением (ср. § 94 и § 97) индекс s заменяет символы E_{mnp} и H_{mnp}. Заметим, что уравнения (100.06) относятся в общем случае не к собственным колебаниям реального резонатора, а к вспомогательному объемному резонатору, имеющему при всех собственных частотах ω_s в каждой точке те же параметры (100.04), которые рассматриваемый резонатор имеет при частоте возбуждения ω. Для ряда веществ, в частности для металлических стенок резонатора, комплексная диэлектрическая проницаемость определяется формулой (2.09), где ε_0 (диэлектрическая постоянная) и σ (проводимость) от частоты не зависят. Чтобы получить

$$\varepsilon(\omega_s) = \varepsilon(\omega), \qquad (100.11)$$

надо считать

$$\sigma(\omega_s) = \frac{\omega_s}{\omega}\sigma, \qquad (100.12)$$

т. е. взять проводимость вспомогательного резонатора для s-го колебания отличной от проводимости σ реального резонатора.

ЭБ "Научное наследие России"

Докажем ортогональность векторных функций $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$. Из уравнений (100.06) для полей $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ и $\mathbf{E}_{s'}$, $\mathbf{H}_{s'}$ легко получаются тождества (ср. начало § 77)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}[\mathbf{E}_s\mathbf{H}_{s'}] &= ik_{s'}\varepsilon\,\mathbf{E}_s\mathbf{E}_{s'} + ik_s\mu\mathbf{H}_s\mathbf{H}_{s'}, \\ \operatorname{div}[\mathbf{E}_{s'}\mathbf{H}_s] &= ik_s\varepsilon\mathbf{E}_s\mathbf{E}_{s'} + ik_{s'}\mu\mathbf{H}_s\mathbf{H}_{s'}. \end{aligned}\right\} \quad (100.13)$$

Интегрируя эти тождества по всему объему, занятому полем, и учитывая соотношения (100.02), (100.03) или (100.05) на поверхности S_0 этого объема, мы получаем формулы

$$\left.\begin{aligned} \omega_{s'}\int\varepsilon\,\mathbf{E}_s\mathbf{E}_{s'}\,dV + \omega_s\int\mu\,\mathbf{H}_s\mathbf{H}_{s'}\,dV &= 0, \\ \omega_s\int\varepsilon\,\mathbf{E}_s\mathbf{E}_{s'}\,dV + \omega_{s'}\int\mu\,\mathbf{H}_s\mathbf{H}_{s'}\,dV &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (100.14)$$

Если определитель

$$\begin{vmatrix} \omega_{s'} & \omega_s \\ \omega_s & \omega_{s'} \end{vmatrix} = \omega_{s'}^2 - \omega_s^2 \neq 0 \quad (100.15)$$

отличен от нуля, то из формул (100.14) вытекают условия ортогональности собственных колебаний

$$\int\varepsilon\,\mathbf{E}_s\mathbf{E}_{s'}\,dV = 0; \quad \int\mu\,\mathbf{H}_s\mathbf{H}_{s'}\,dV = 0 \text{ (при } s' \neq s) \quad (100.16)$$

Условие (100.15) может нарушаться только при $\omega_s = \omega_{s'}$, равенство $\omega_s = -\omega_{s'}$ невозможно в силу неравенств (100.09) и (100.10). Поэтому условия ортогональности (100.16) справедливы при отсутствии вырождения. Если же данная собственная частота ω_s является кратной, то соответствующие ей векторные функции $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$; $\mathbf{E}_{s'}$, $\mathbf{H}_{s'}$; и т. д. всегда можно выбрать так, чтобы соотношения (100.16) для них удовлетворялись. Этот выбор новых собственных функций называется ортогонализацией.

При $s' = s$ соотношения (100.14) дают

$$\int\varepsilon\,\mathbf{E}_s^2\,dV + \int\mu\,\mathbf{H}_s^2\,dV = 0. \quad (100.17)$$

Нормой s-го собственного колебания мы назовем величину

$$N_s = \frac{1}{4\pi}\int\varepsilon\,\mathbf{E}_s^2\,dV = -\frac{1}{4\pi}\int\mu\,\mathbf{H}_s^2\,dV. \quad (100.18)$$

"Научное наследие России"

Норма N_s имеет размерность энергии. Формула (98.09) показывает, что для пустого резонатора с идеально проводящими стенками норма N_s пропорциональна энергии его s-ого колебания. В других случаях норму N_s можно связать с колеблющейся частью электрической и магнитной энергии (см. § 101). Заметим, что при вычислении нормы учитывается и поле в стенках резонатора.

Доказанная выше ортогональность собственных колебаний позволит легко решить задачу о вынужденных колебаниях объемного резонатора.

§ 101. Поле, возбужденное источниками в объемном резонаторе

Электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, возбуждаемое источниками и удовлетворяющее уравнениям (100.01), естественно искать в виде

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^t+\mathbf{E}^l;\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}^t+\mathbf{H}^l. \tag{101.01}$$

Здесь $\mathbf{E}^t$ и $\mathbf{H}^t$ суть поперечные (или соленоидальные) части электрического и магнитного полей, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}^t)=0;\quad \operatorname{div}(\mu\mathbf{H}^t)=0, \tag{101.02}$$

а $\mathbf{E}^l$ и $\mathbf{H}^l$ суть продольные (или потенциальные) части электрического и магнитного полей, которые мы записываем в виде

$$\mathbf{E}^l=-\operatorname{grad}\Phi^e;\quad \mathbf{H}^l=-\operatorname{grad}\Phi^m. \tag{101.03}$$

Функции Φ^e и Φ^m можно назвать электрическим и магнитным потенциалами (скалярными).

Заметим, что поперечные и продольные части поля имеют здесь другой смысл, чем в теории возбуждения волноводов.

Так как векторные функции $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$ удовлетворяют, как легко доказать из уравнений (100.06), условиям (101.02), то поперечные части электрического и магнитного полей вынужденного колебания естественно искать в виде рядов

$$\mathbf{E}^t=\sum A_s\mathbf{E}_s;\quad \mathbf{H}^t=\sum B_s\mathbf{H}_s \tag{101.04}$$

где A_s и B_s — постоянные коэффициенты, которые мы определим в дальнейшем. Для электрического и магнитного полей нужно брать разложения с различными коэффициентами

ЭБ "Научное наследие России"

A_s и B_s; это вытекает, в частности, из сравнения с колебаниями в квазистационарном контуре (см. ниже § 102).

Почленно дифференцируя ряды (101.04) и пользуясь уравнениями (100.06), получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=i\mu\sum k_sA_s\mathbf{H}_s;\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\varepsilon\sum k_sB_s\mathbf{E}_s. \tag{101.05}$$

Подстановка этих тождеств в исходные уравнения (100.01) дает

$$\left.\begin{aligned} i\varepsilon\sum(kA_s-k_sB_s)\mathbf{E}_s&=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e-ik\varepsilon\mathbf{E}^l,\\ i\mu\sum(k_sA_s-kB_s)\mathbf{H}_s&=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m+ik\mu\mathbf{H}^l. \end{aligned}\right\} \tag{101.06}$$

Для выполнения последних соотношений прежде всего необходимо, чтобы их правые части были соленоидальными векторами, т. е. имели равную нулю расходимость (дивергенцию). Учитывая формулы (3.07) и (101.03), из этого требования соленоидальности мы получаем уравнения для электрического и магнитного потенциалов

$$\operatorname{div}(\varepsilon\operatorname{grad}\Phi^e)=-4\pi\rho^e;\quad \operatorname{div}(\mu\operatorname{grad}\Phi^m)=-4\pi\rho^m. \tag{101.07}$$

Эти соотношения имеют статический характер и являются обобщением уравнения Пуассона на случай неоднородной среды. Уравнения (101.07) можно получить более просто, применяя разложение (101.01) и формулы (3.08). Уравнения (101.07) решаются методами электростатики и магнитостатики, в частности методом отражений или разложением в ряды. На этом мы здесь останавливаться не будем, поскольку потенциалы Φ^e, Φ^m и связанная с ними продольная часть электромагнитного поля резонансными свойствами не обладают.

Перейдем к определению поперечной части поля. При соленоидальности правых частей соотношений (101.06) можно эти правые части разложить в ряды

$$\left.\begin{aligned} \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e-ik\varepsilon\mathbf{E}^l&=\frac{1}{c}\varepsilon\sum a_s\mathbf{E}_s,\\ -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m+ik\mu\mathbf{H}^l&=\frac{1}{c}\mu\sum b_s\mathbf{H}_s, \end{aligned}\right\} \tag{101.08}$$

если векторные функции $\varepsilon\mathbf{E}_s$ образуют полную систему (а также векторные функции $\mu\mathbf{H}_s$). Коэффициенты a_s и b_s

Электронное наследие России

этих разложений можно найти, пользуясь формулами (100.16) и (100.18), а также добавочными условиями ортогональности

$$\int \varepsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}^l dV = 0; \quad \int \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}^l dV = 0, \tag{101.09}$$

которые выводятся с помощью условия (101.05) следующим образом:

$$\int \varepsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}^l dV = -\int \varepsilon \mathbf{E}_s \operatorname{grad} \Phi^e dV = -\oint\limits_{S_0} \varepsilon \mathbf{E}_{s,n} \Phi^e dS +$$

$$+\int \Phi^e \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}_s) dV = -\oint\limits_{S_0} \varepsilon \mathbf{E}_{s,n} \Phi^e dS = 0.$$

Мы приходим к выражениям

$$a_s = \frac{1}{N_s} \int \mathbf{j}^e \mathbf{E}_s dV; \quad b_s = \frac{1}{N_s} \int \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s dV. \tag{101.10}$$

Подставляя разложения (101.08) в уравнения (101.06), мы видим, что последние выполняются, если коэффициенты A_s и B_s удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} i(\omega A_s - \omega_s B_s) &= a_s, \\ i(\omega_s A_s - \omega B_s) &= b_s, \end{aligned}\right\} \tag{101.11}$$

откуда находим

$$\left.\begin{aligned} A_s &= -i \frac{\omega a_s - \omega_s b_s}{\omega^2 - \omega_s^2}, \\ B_s &= -i \frac{\omega_s a_s - \omega b_s}{\omega^2 - \omega_s^2}. \end{aligned}\right\} \tag{101.12}$$

Поперечная часть электромагнитного поля в резонаторе определяется формулами (101.04), (101.10) и (101.12).

Формулы (101.12) можно получить несколько иным способом. Воспользуемся тождествами, вытекающими из уравнений (100.01) и (100.06)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}[\mathbf{E}_s \mathbf{H}] &= ik\varepsilon \mathbf{E}\mathbf{E}_s + ik_s \mu \mathbf{H}\mathbf{H}_s - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^e \mathbf{E}_s, \\ \operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}_s] &= ik_s \varepsilon \mathbf{E}\mathbf{E}_s + ik\mu \mathbf{H}\mathbf{H}_s - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s. \end{aligned}\right\} \tag{101.13}$$

ЭБ "Научное наследие России"

Эти тождества аналогичны соотношениям (100.13). Интегрируя по всему объему, занятому полем, мы получим

$$\left.\begin{aligned}\omega\int\varepsilon\mathbf{E}\mathbf{E}_s\,dV+\omega_s\int\mu\mathbf{H}\mathbf{H}_s\,dV&=\frac{4\pi}{c}\int\mathbf{j}^e\mathbf{E}_s\,dV,\\ \omega_s\int\varepsilon\mathbf{E}\mathbf{E}_s\,dV+\omega\int\mu\mathbf{H}\mathbf{H}_s\,dV&=\frac{4\pi}{c}\int\mathbf{j}^m\mathbf{H}_s\,dV.\end{aligned}\right\}\quad(101.14)$$

Пользуясь соотношениями (100.16), (100.18), (101.01), (101.04) и (101.09), мы приходим к выражениям

$$\left.\begin{aligned}A_s&=-\frac{i}{\omega^2-\omega_s^2}\frac{1}{N_s}\int(\omega\,\mathbf{j}^e\mathbf{E}_s-\omega_s\,\mathbf{j}^m\mathbf{H}_s)\,dV,\\ B_s&=-\frac{i}{\omega^2-\omega_s^2}\frac{1}{N_s}\int(\omega_s\,\mathbf{j}^e\mathbf{E}_s-\omega\,\mathbf{j}^m\mathbf{H}_s)\,dV,\end{aligned}\right\}\quad(101.15)$$

эквивалентным формулам (101.10) и (101.12). Заметим, что формулы (100.13) и (101.13) и получающиеся из этих формул интегральные соотношения можно рассматривать как обобщение леммы Лоренца (§ 77) на случай двух полей, колеблющихся с разными частотами.

Формулы (101.12) и (101.15) указывают на наличие резонанса, наступающего всякий раз, когда частота возбуждения ω близка к частоте ω_s одного из собственных колебаний резонатора (определенного согласно § 100). Если резонатор не имеет потерь, то частота ω_s вещественна, и при $\omega=\omega_s$ коэффициенты A_s и B_s и определяемое ими поле обращается в бесконечность. При учете потерь коэффициенты A_s и B_s остаются конечными, так как вещественная частота ω и комплексная частота ω_s не могут точно быть равными друг другу; однако при $\omega\approx\omega_s$ эти коэффициенты (и поля) принимают большие значения. Такие резонансные эффекты хорошо известны из теории колебательных контуров; в § 102 мы покажем, что эта теория является частным случаем полученных выше соотношений.

Из формул (101.12) и (101.15) видно, что при резонансе ($\omega\approx\omega_s$) коэффициенты A_s и B_s не только велики (значительно больше всех других, „нерезонансных“ коэффициентов), но и равны друг другу:

$$A_s\approx B_s\ \text{при}\ \omega\approx\omega_s.\quad(101.16)$$

Электронное наследие России

Пренебрегая всеми нерезонансными членами и считая частоту ω_s невырожденной, мы можем приближенно написать

$$\mathbf{E} \approx A_s \mathbf{E}_s; \quad \mathbf{H} \approx A_s \mathbf{H}_s \quad (\text{при } \omega \approx \omega_s). \qquad (101.17)$$

Таким образом, при резонансе вынужденное колебание практически не отличается по распределению своего электромагнитного поля от соответствующего свободного колебания; в этом случае роль источников поля сводится лишь к поддержанию амплитуды A_s на постоянном уровне, т. е. к компенсации потерь.

Формулы (101.15) показывают, как наиболее эффективно (с наибольшей амплитудой A_s или B_s) возбуждать данное колебание с номером s. При „электрическом" способе возбуждения (вибратором или электронным потоком), когда $\mathbf{j}^e \neq 0$ и $\mathbf{j}^m = 0$, необходимо сторонние электрические токи помещать в пучность электрического поля $\mathbf{E}_s$ параллельно ему. При „магнитном" способе возбуждения, когда $\mathbf{j}^e = 0$ и $\mathbf{j}^m \neq 0$, необходимо сторонний магнитный ток помещать в пучность магнитного поля параллельно ему. Это значит, что петля связи должна охватывать наиболее густые пучки магнитных силовых линий и быть к ним перпендикулярной, а щель нужно прорезать в той части стенки, где течет наиболее сильный поверхностный ток, т. е. имеется пучность тангенциального магнитного поля. При этом узкие щели должны быть прорезаны поперек линий тока, поскольку узкие щели, параллельные линиям тока, мало возмущают электромагнитное поле (по сравнению со сплошной металлической поверхностью, ср. § 72 или § 78) и дают слабую связь с резонатором. Подобные же выводы можно сделать из теории возбуждения волноводов (см. § 81 и конец § 80).

Заметим еще раз, что введенные выше собственные колебания с полями $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ и частотами ω_s в общем случае отличаются от изученных в гл. XVI свободных колебаний реальных резонаторов. Так, например, формула (97.04) может быть переписана в виде

$$\omega_s = \frac{\tilde{\omega}_s}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad (101.18)$$

где $\tilde{\omega}_s$ — собственная частота пустого резонатора, ω_s — собственная частота резонатора, заполненного однородным веществом с проницаемостями ε и μ. Для свободных

ЭБ "Научное наследие России"

колебаний реального резонатора ε и μ нужно брать при частоте ω_s, что весьма затрудняет исследование (ср. § 97). Однако для получения комплексных частот ω_s собственных колебаний, введенных в § 100, нужно в формуле (101.18) взять ε и μ при частоте возбуждения ω, что дает явное выражение для ω_s.

Аналогичным образом можно переписать и формулу (98.13)

$$\omega_s = \omega_s^0 + w\omega_s^1 + \ldots, \qquad (101.19)$$

где ω_s^0 — собственная частота резонатора с идеально проводящей оболочкой, w — волновое сопротивление оболочки, а ω_s^1 зависит от распределения магнитного поля s-го собственного колебания идеального резонатора. При исследовании свободных колебаний данного резонатора нужно w брать при частоте ω_s^0; для собственных колебаний, по векторным функциям которых мы разлагаем поле вынужденного колебания, следует брать w при частоте возбуждения ω.

Введенные в § 100 собственные колебания необходимы для расчета вынужденных колебаний. Очевидно, что поле вынужденных колебаний зависит лишь от проницаемостей ε и μ при частоте возбуждения ω, поэтому применяемые в разложении векторные функции должны определяться этими значениями проницаемостей. Если проницаемости ε и μ зависят от частоты, то разложений (101.04) с помощью полей $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$, соответствующих „истинным“ свободным колебаниям данного резонатора, написать в общем случае нельзя, так как соотношения (101.02) и (101.05) удовлетворяться не будут. По этой причине задача о возбуждении резонатора решена с помощью векторных функций $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$, определенных в § 100.

Рассмотрим следующий математический вопрос: почему в теории возбуждения волноводов (§ 80) коэффициенты разложения для электрического и магнитного полей должны быть одинаковыми (C_s), а в теории возбуждения резонаторов—разными (A_s и B_s). Ответ заключается в том, что для волноводов были введены как „прямые“ волны с полями $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$, так и „обратные“ волны с полями $\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$; при этом волновые числа h_s и h_{-s} отличались только знаком. В объемных резонаторах мы ввели лишь „затухающие“ колебания $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$, комплексные частоты которых удовлетворяют соотношениям (100.09) или (100.10). Если формально ввести для симметрии „нарастающие“ колебания с комплексными частотами

$$\omega_{-s} = -\omega_s, \qquad (101.20)$$

Электронное наследие России

то их комплексные амплитуды $\mathbf{E}_{-s}$ и $\mathbf{H}_{-s}$ можно согласно уравнениям (100.06) взять равными

$$\mathbf{E}_{-s} = \pm \mathbf{E}_s; \quad \mathbf{H}_{-s} = \mp \mathbf{H}_s, \tag{101.21}$$

тогда по формуле (100.18) получим

$$N_{-s} = N_s. \tag{101.22}$$

Выражения (101.04) можно теперь переписать так

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}^t &= \sum (C_s \mathbf{E}_s + C_{-s} \mathbf{E}_{-s}), \\ \mathbf{H}^t &= \sum (C_s \mathbf{H}_s + C_{-s} \mathbf{H}_{-s}), \end{aligned}\right\} \tag{101.23}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_s &= C_s \pm C_{-s}; \quad B_s = C_s \mp C_{-s}, \\ C_s &= \frac{1}{2}(A_s + B_s); \quad \pm C_{-s} = \frac{1}{2}(A_s - B_s). \end{aligned}\right\} \tag{101.24}$$

Определяя коэффициенты a_{-s} и b_{-s} по формулам, аналогичным (101.10), мы будем иметь

$$a_{-s} = \pm a_s; \quad b_{-s} = \mp b_s, \tag{101.25}$$

так что коэффициенты C_s и C_{-s} с помощью формул (101.12) можно представить в виде

$$C_s = -\frac{i}{2} \frac{a_s - b_s}{\omega - \omega_s}; \quad C_{-s} = -\frac{i}{2} \frac{a_{-s} - b_{-s}}{\omega - \omega_{-s}}. \tag{101.26}$$

Эта форма записи не дает, однако, каких-либо преимуществ.

В заключение отметим, что условие ортогональности (100.16) ведет к интересному физическому следствию. Для полей (101.01) и (101.04), возбуждаемых в резонаторе, мы в силу условий (100.16) и (101.09) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \int \varepsilon \mathbf{E}^2 \, dV &= \sum A_s^2 \int \varepsilon \mathbf{E}_s^2 dV + \int \varepsilon (\mathbf{E}^l)^2 \, dV, \\ \int \mu \mathbf{H}^2 \, dV &= \sum B_s^2 \int \mu \mathbf{H}_s^2 dV + \int \mu (\mathbf{H}^l)^2 \, dV, \end{aligned}\right\} \tag{101.27}$$

так что колеблющаяся энергия и колеблющаяся мощность потерь (ср. § 7) в резонансном объеме складываются из соответствующих величин для каждого собственного колебания и для продольного

ЭБ "Научное наследие России"

поля. В случае пустого резонатора с идеальной стенкой формулы (101.27) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}\int |\mathbf{E}|^2\,dV &= \sum |A_s|^2 \int |\mathbf{E}_s|^2\,dV + \int |\mathbf{E}^I|^2\,dV,\\ \int |\mathbf{H}|^2\,dV &= \sum |B_s|^2 \int |\mathbf{H}_s|^2\,dV + \int |\mathbf{H}^I|^2\,dV,\end{aligned}\right\} \tag{101.28}$$

так что средняя электрическая и магнитная энергия являются аддитивными величинами.

§ 102. Возбуждение резонансного контура

Чтобы иллюстрировать полученные выше формулы, применим их к колебаниям квазистационарных цепей. Для квазистационарных полей выведенные формулы сохраняют свою силу, причем в качестве поверхности S_0 можно взять бесконечно удаленную сферу. На этой сфере удовлетворяются условия (10.06), и все интегралы по S_0 исчезают. Действительно, квазистационарное электрическое поле от ограниченной в пространстве цепи убывает не медленнее, чем $\frac{1}{R^2}$ (закон Кулона), квазистационарное магнитное поле — не медленнее, чем $\frac{1}{R^2}$ (закон Био-Савара). При наличии излучения сравнивать объемный резонатор с контуром уже нельзя.

Рассмотрим сначала простейший колебательный контур L, C без потерь, обладающий единственной собственной частотой $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Электрическое поле такой системы определяется зарядом e в конденсаторе, магнитное поле — током J в катушке. Величины J и e связаны соотношением

$$J = \frac{de}{dt} \quad \text{или} \quad J = -i\omega e. \tag{102.01}$$

При свободных колебаниях с частотой ω_0 и при вынужденных колебаниях с частотой $\omega \neq \omega_0$ отношения заряда к току различны. Поэтому отношение амплитуд электрического и магнитного полей для вынужденных колебаний иное, чем для свободных. Этот пример показывает, что в общем случае поля электромагнитных колебательных систем следует искать в виде рядов (101.04) с различными коэффициентами A_s и B_s, которые становятся равными лишь при резонансе [формула (101.16)].

"Научное наследие России"

Рассмотрим колебательный контур из последовательно соединенных элементов L, C, R, не зависящих от частоты, и пусть на него действует сторонняя электродвижущая сила $\mathcal{E}$ с частотой ω (см. рис. 3). Эту электродвижущую силу можно, например, учесть как сторонний электрический ток, текущий в месте приложения электродвижущей силы с объемной плотностью

$$\mathbf{j}^e = \sigma \mathbf{E}^e, \tag{102.02}$$

где $\mathbf{E}^e$ — напряженность поля сторонней э. д. с. [ср. формулу (3.03)]. Применительно к данной колебательной системе мы получаем по формуле (101.10) при $s=1$

$$a_1 = \frac{1}{N_1}\int \sigma \mathbf{E}^e \mathbf{E}_1 dV = \frac{1}{N_1}\frac{\omega}{\omega_1}\int \mathbf{E}^e \sigma(\omega_1)\mathbf{E}_1\, dV \tag{102.03}$$

или

$$a_1 = \frac{1}{N_1}\frac{\omega}{\omega_1}\mathcal{E}J_1;\ b_1 = 0, \tag{102.04}$$

где J_1 — ток при собственных колебаниях контура [ср. формулу (100.12)], а ω_1 — частота этих колебаний.

Если считать участок цепи, где действует сторонняя э. д. с., идеально проводящим, то ее можно также рассматривать как магнитный ток, распределенный с поверхностной плотностью

$$\mathbf{i}^m = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{E}^e] = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{E}], \tag{102.05}$$

поскольку на идеально проводящей поверхности полное электрическое поле $\mathbf{E}+\mathbf{E}^e$ удовлетворяет условию

$$[\mathbf{n},\ \mathbf{E}+\mathbf{E}^e] = 0. \tag{102.06}$$

Здесь через $\mathbf{n}$ обозначена нормаль к поверхности идеального проводника, направленная внутрь него. Поверхностная плотность электрического тока согласно формуле (24.04) равна

$$\mathbf{i} = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{H}] \tag{102.07}$$

и

$$b_1 = \frac{1}{N_1}\int \mathbf{i}^m \mathbf{H}_1\, dS = -\frac{1}{N_1}\frac{c}{4\pi}\int [\mathbf{n}\mathbf{E}^e]\mathbf{H}_1\, dS =$$

$$= \frac{1}{N_1}\frac{c}{4\pi}\int [\mathbf{n}\mathbf{H}_1]\mathbf{E}^e dS = -\frac{1}{N_1}\int \mathbf{i}_1 \mathbf{E}^e dS, \tag{102.08}$$

так что

$$a_1 = 0; \quad b_1 = -\frac{1}{N_1}\mathcal{E}J_1, \tag{102.09}$$

Мы видим, что стороннюю э. д. с. можно учесть поразному, поскольку рамочную антенну также можно представить двояким образом: или как кольцо электрического тока, или как магнитный диполь (ср. § 78).

Подставляя выражения (102.04) или (102.09) в формулу (101.12), мы получаем

$$B_1 = -\frac{i\omega\mathcal{E}J_1}{N_1(\omega^2 - \omega_1^2)}, \tag{102.10}$$

где

$$N_1 = -\frac{1}{4\pi}\int \mu \mathbf{H}_1^2\, dV = -LJ_1^2. \tag{102.11}$$

Ток J при вынужденных колебаниях оказывается равным

$$J = B_1 J_1 = \frac{i\omega\mathcal{E}}{L(\omega^2 - \omega_1^2)}. \tag{102.12}$$

Эта формула имеет несколько необычный вид и на первый взгляд отличается от известной формулы для тока в резонансном контуре

$$J = \frac{i\omega\mathcal{E}}{L(\omega^2 - \bar{\omega}_0^2 + 2i\alpha\omega)}, \tag{102.13}$$

где $\bar{\omega}_0$ и α определяются выражениями (98.26). Однако это отличие является лишь кажущимся, так как ω_1 не есть комплексная частота свободных колебаний данного контура, которая определяется выражением (98.25), а является частотой колебаний некоторого вспомогательного контура, имеющего при собственных колебаниях согласно формуле (100.12) сопротивление

$$R(\omega_1) = \frac{\omega}{\omega_1}R. \tag{102.14}$$

Так как частота ω_1 определяется из уравнения

$$\omega_1^2 + i\omega_1\frac{R(\omega_1)}{L} - \frac{1}{LC} = 0, \tag{102.15}$$

то мы получаем

$$\omega_1 = \sqrt{\bar{\omega}_0^2 - 2i\alpha\omega}, \tag{102.16}$$

и формула (102.12) совпадает с формулой (102.13).

ЭБ "Научное наследие России"

Заметим, что частота ω_1 зависит от частоты возбуждения ω. В общих формулах § 101 частоты ω_s и соответствующие им векторные функции $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$ также зависят от ω, как это видно из формул (101.18) и (101.19). Если мы исследуем поведение резонатора с высокой добротностью вблизи данной резонансной частоты, то эта зависимость ω_s от ω обычно не сказывается.

Если резонансный контур имеет высокую добротность, то удовлетворяется условие

$$\alpha \ll \omega_0 \tag{102.17}$$

и вместо „резонансного знаменателя“ $\omega^2 - \bar{\omega}_0^2 + 2i\alpha\omega$ в формуле (102.13) можно взять знаменатель $\omega^2 - \bar{\omega}_0^2 + 2i\alpha\bar{\omega}_0$ или $\omega^2 - \left(\sqrt{\bar{\omega}_0^2 - \alpha^2} - i\alpha\right)^2$: все эти выражения дают при условии (102.17) практически одно и то же. Выведенные выше строгие формулы возбуждения резонансных объемов можно модифицировать аналогичным образом и получить приближенные выражения, предложенные различными авторами.

Таким образом, возбуждение резонаторов и резонансных контуров происходит по одним и тем же законам; различие заключается лишь в числе степеней свободы, или, что то же самое, в числе резонансных частот. Переходные процессы в этих системах также имеют между собой большое сходство. Напомним, однако, что согласно § 98 резонатор с конечной проводимостью стенок эквивалентен контуру, сопротивление R и внутренняя индуктивность L_i которого зависят от частоты (скин-эффект).

В § 101 мы показали, что при возбуждении резонатора наряду с поперечным полем возникает и продольное поле. С точки зрения теории цепей это явление легче всего понять, если рассмотреть возбуждение контура модулированным по плотности электронным потоком, проходящим через конденсатор (образованный, например, электродами электронной лампы). Такой поток индуцирует ток в цепи и в этом смысле эквивалентен сторонней электродвижущей силе или стороннему электрическому току. Однако объемный заряд электронов создает в конденсаторе дополнительное электрическое поле, которое мы и назвали продольным электрическим полем; оно может быть найдено с помощью первого уравнения (101.07).

ЭБ "Научное наследие России"

В клистронах обычно применяются резонаторы, расчет свободных колебаний которых может быть произведен квазистационарным методом (ср. § 96). Возбуждение таких резонаторов электронными сгустками можно рассчитывать как по эквивалентной схеме, так и с помощью электродинамической теории. В этом случае продольное поле обычно называют кулоновским полем; оно приводит к появлению расталкивательных сил в сгустке, стремящихся увеличить его размеры.

§ 103. Некоторые применения теории возбуждения объемных резонаторов

Теория возбуждения объемных резонаторов (§ 101) позволяет решить ряд вопросов, связанных со свободными и вынужденными колебаниями в резонаторах. Некоторые из этих вопросов мы и рассмотрим ниже.

Будем сначала считать стенки (пустого) объемного резонатора идеально проводящими и обозначим через ω_s — собственные частоты такого резонатора, а через $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ — соответствующие поля. Граничные условия Леонтовича (25.10) можно сформулировать так: конечная проводимость стенок приводит к появлению на них поверхностного магнитного тока

$$\mathbf{i}^m = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{nE}] = -\frac{c}{4\pi} w\,[\mathbf{n}[\mathbf{nH}]], \tag{103.01}$$

в первом приближении равного

$$\mathbf{i}^m = -\frac{c}{4\pi} w[\mathbf{n}[\mathbf{nH}_s]]. \tag{103.02}$$

Этот магнитный ток является причиной того, что колебания будут происходить не с частотой ω_s, а с неизвестной пока комплексной частотой ω. Подставляя $\mathbf{i}^m$ во вторую формулу (101.10), получим

$$b_s = -\frac{1}{N_s}\frac{c}{4\pi}\oint w[\mathbf{n}[\mathbf{nH}_s]]\,\mathbf{H}_s dS = \frac{1}{N_s}\frac{c}{4\pi}\oint w[\mathbf{nH}_s]^2 dS. \tag{103.03}$$

Предполагая, что $w = \text{const}$ на поверхности стенок, и пользуясь формулой (100.18), мы получим

$$a_s = 0;\ b_s = -\frac{cw}{D}, \tag{103.04}$$

ЭБ "Научное наследие России"

где величина

$$D = \frac{\int \mathbf{H}_s^2 dV}{\oint [\mathbf{n}\mathbf{H}_s]^2 \, dS} \tag{103.05}$$

совпадает с величиной (98.11). Подставляя выражения (103.04) в первую формулу (101.12), получим

$$A_s = -\frac{i\omega_s c w}{D(\omega^2 - \omega_s^2)}. \tag{103.06}$$

В этой формуле частота ω неизвестна, а коэффициент A_s обращается в единицу при $w = 0$, поскольку тогда $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s$. Поэтому при малых w можно считать

$$A_s = 1 + A_s^1 w + \ldots, \tag{103.07}$$

где величина A_s^1 от w не зависит, а многоточием указаны члены более высокого порядка относительно w, т. е. члены w^2 и т. д. Формулы (103.06) и (103.07) дают

$$\omega^2 = \omega_s^2 - \frac{ic\omega_s w}{D} + \ldots \tag{103.08}$$

или, извлекая квадратный корень в том же приближении,

$$\omega = \omega_s - \frac{icw}{2D} + \ldots, \tag{103.09}$$

что совпадает с полученной ранее формулой (98.16).

Аналогичным образом можно рассчитать возмущение собственной частоты резонатора при деформации его оболочки. Эта деформация может заключаться, например, в погружении металлического тела (настроечного винта) в резонатор, как показано на рис. 137,*а*. Обозначая плотность электрического тока в этом теле через $\mathbf{j}^e$, мы будем иметь

$$a_s = \frac{1}{N_s} \int_{V'} \mathbf{j}^e \mathbf{E}_s dV; \quad b_s = 0, \tag{103.10}$$

где интегрирование производится по объему тела V'. Подставляя это выражение во вторую формулу (101.12) и учитывая, что $B_s \to 1$ при $V' \to 0$, мы получим выражение

$$\omega^2 - \omega_s^2 = -\frac{i\omega_s}{N_s} \int_{V'} \mathbf{j}^e \mathbf{E}_s dV, \tag{103.11}$$

ЭБ "Научное наследие России"

позволяющее рассчитывать возмущение частоты при достаточной малости возмущающего объема V'. Считая для простоты объем V' идеально проводящим, преобразуем формулу (103.11) к виду

$$\omega^2 - \omega_s^2 = -\frac{i\omega_s}{N_s}\oint_{S'} \mathbf{i}^e \mathbf{E}_s dS, \qquad (103.12)$$

где S' — поверхность металлического тела, $\mathbf{i}^e$ — поверхностная плотность электрического тока на ней.

Интеграл, стоящий в правой части, вычисляется всего проще для так называемых пологих (или почти пологих) деформаций, когда поверхность S' составляет малые углы с близлежащим участком стенки (всюду, за исключением

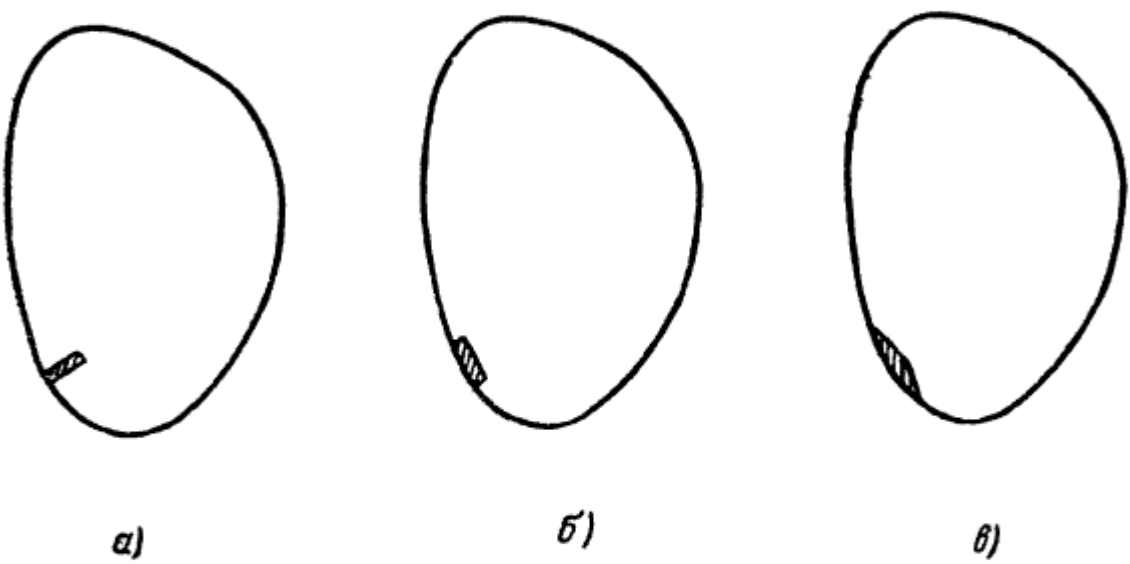


Рис. 137. Деформации объемного резонатора.

относительно малой части S'). Пологую деформацию мы получаем, вдвигая, например, в резонансную полость цилиндр, высота которого значительно меньше размеров основания (рис. 137,*б*), или просто прогибая поверхность стенки (рис. 137,*в*). При такой деформации магнитное поле у поверхности S можно отождествить с невозмущенным магнитным полем $\mathbf{H}_s$ в силу того, что S' лежит близко к невозмущенной поверхности резонатора и лишь слегка наклонена к ней (почти всюду). Полагая

$$\mathbf{i}^e = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{H}_s], \qquad (103.13)$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль, направленная внутрь объема V', получаем

$$\oint_{S'} \mathbf{i}^e \mathbf{E}_s dS = -\frac{c}{4\pi} \oint [\mathbf{n}\mathbf{H}_s]\, \mathbf{E}_s dS = \frac{c}{4\pi} \oint_{S'} [\mathbf{E}_s \mathbf{H}_s]\, \mathbf{n}\, dS =$$

$$= -\frac{i\omega_s}{4\pi} \int_{V'} (\mathbf{E}_s^2 + \mathbf{H}_s^2)\, dV, \qquad (103.14)$$

где мы применили формулу (100.13) при $s = s'$ и $\varepsilon = \mu = 1$. Подставляя выражение (100.18) для нормы N_s, мы приходим к формуле

$$\frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2} = \frac{\int_{V'} (\mathbf{H}_s^2 + \mathbf{E}_s^2)\, dV}{\int_V \mathbf{H}_s^2 dV}. \qquad (103.15)$$

При идеальной проводимости стенок векторную функцию $\mathbf{H}_s$ можно всегда выбрать вещественной ($\mathbf{H}_s^2 = |\mathbf{H}_s|^2$), тогда векторная функция $\mathbf{E}_s$ будет чисто мнимой ($\mathbf{E}_s^2 = -|\mathbf{E}_s|^2$). Поэтому формулу (103.15) можно переписать в виде

$$\frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2} = \frac{\int_{V'} (|\mathbf{H}_s|^2 - |\mathbf{E}_s|^2) dV}{\int_V |\mathbf{H}_s|^2\, dV}. \qquad (103.16)$$

Эта формула показывает, что собственная частота ω деформированного резонатора оказывается больше (или меньше) частоты ω_s невозмущенного резонатора, если в объеме V', занимаемом металлом при деформации, преобладает магнитная (или электрическая) энергия. В качестве иллюстрации можно привести квазистационарный резонатор (§ 96). Уменьшая емкостной объем, мы увеличиваем C и снижаем собственную частоту; уменьшая индуктивный объем, мы уменьшаем L и увеличиваем собственную частоту.

Формулы (103.15) и (103.16) пригодны лишь для пологих деформаций стенок. Если деформация имеет иной вид, например в объемный резонатор вводится тонкий металлический стерженек (рис. 137,*а*), то эти формулы уже применять нельзя. Действительно, вблизи вытянутого металлического тела возникает совершенно иное распределение электрического и магнитного полей и формула (103.13) ста-

ЭБ "Научное наследие России"

новится неправильной. В случае достаточно тонкого стерженька возмущение частоты можно рассчитать, вынося в интеграле $\oint_{S'} \mathbf{i}^e \mathbf{E}_s dS$ множитель $\mathbf{E}_s$ за знак интеграла; тогда

$$\oint_{S'} \mathbf{i}^e dS = -i\omega \mathbf{p}, \tag{103.17}$$

где согласно формуле (77.10) $\mathbf{p}$ есть дипольный момент стерженька. Если последний направлен перпендикулярно стенке, то вектор $\mathbf{p}$ также направлен по нормали к ней; очевидно, что дипольный момент $\mathbf{p}$ пропорционален $\mathbf{E}_s$, поскольку поляризация стержня обусловлена именно полем $\mathbf{E}_s$. Поэтому мы пишем

$$\mathbf{p} = \frac{\beta}{2} \mathbf{E}_s \tag{103.18}$$

и вместо выражения (103.16) получаем

$$\frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2} = -\frac{2\pi\beta |\mathbf{E}_s|^2}{\int |\mathbf{E}_s|^2 dV}. \tag{103.19}$$

Смысл коэффициента β заключается в следующем. Пусть данный стержень, стоящий перпендикулярно на бесконечной плоскости, подвергается действию однородного *электростатического* поля, также перпендикулярного плоскости. Вместо этой электростатической задачи можно рассмотреть „двойной" стержень, т. е. стержень вместе со своим „изображением" в плоскости, помещенный в однородное электростатическое поле, направленное вдоль оси стержня. Обозначая дипольный момент двойного стержня через $\mathbf{p}_2$, а электрическое поле через $\mathbf{E}$, мы можем, очевидно написать

$$\mathbf{p}_2 = \beta \mathbf{E}, \tag{103.20}$$

а дипольный момент $\mathbf{p}$ будет вдвое меньше [формула (103.18)].

Коэффициент β легко вычислить для вытянутого эллипсоида вращения. Если a есть большая полуось эллипсоида, а b — малая полуось, то

$$\beta = \frac{a^3}{\xi_0^3 \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\xi_0 + 1}{\xi_0 - 1} - \frac{1}{\xi_0} \right)} \approx \frac{a^3}{\ln \frac{2a}{b} - 1} \text{ при } b \ll a, \tag{103.21}$$

поскольку

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2. \qquad (103.22)$$

При использовании этой формулы нужно считать, что в объемный резонатор вводится половина эллипсоида. Для цилиндрического стержня соответствующая электростатическая задача точно не решается и влияние такого стержня учитывают приближенно, рассматривая близкий к нему эллипсоид. Формулы (103.19) и (103.21) показывают, что вытянутый стерженек снижает собственную частоту резонатора более эффективно, чем это можно было бы ожидать на основании формулы (103.16), не применимой к данному случаю.

Мы использовали законы электростатики (точнее, квазистационарного поля) и заменили стенку резонатора бесконечной плоскостью, так как нас интересовал дипольный момент стерженька, размеры которого мы предполагали малыми как по сравнению с длиной волны, так и по сравнению с размерами объемного резонатора.

Выше были выведены формулы для смещения частоты, вызванного малыми металлическими телами, имеющими весьма сплюснутую или, наоборот, весьма вытянутую форму. Промежуточные случаи требуют более детального исследования и, в частности, учета магнитного момента, возникающего в металлическом теле под действием переменного магнитного поля.

В заключение рассмотрим следующую задачу: объемный резонатор без потерь возбуждается элементарным диполем, находящимся в точке *1*; энергия из резонатора отводится через малую щель, прорезанную в стенке резонатора (в точке *2*). Электрический момент диполя $\mathbf{p}$ нам известен; что касается щели, то ее действие эквивалентно действию элементарного магнитного диполя с некоторым моментом $\mathbf{m}$ (ср. § 78), помещенного в резонатор со сплошной (неразрезанной) поверхностью. Этот момент легко определить для случая, когда частота возбуждения ω точно совпадает с одной из собственных частот (например ω_1) резонатора без щели. Действительно, в этом случае вследствие потерь на излучение через щель *2* электромагнитное поле в резонаторе конечно. Его коэффициенты A_1 и B_1 могут иметь (для $\omega = \omega_1$) конечные значения лишь при условии

$$a_1 = b_1, \qquad (103.23)$$

ЭБ "Научное наследие России"

что согласно формулам (101.10) дает

$$\mathbf{pE}_1(1) = \mathbf{mH}_1(2). \qquad (103.24)$$

Последнее соотношение позволяет вычислить магнитный момент $\mathbf{m}$, точнее, его проекцию на магнитное поле собственного колебания в точке 2. Так как электрическое поле в узкой щели направлено поперек щели (от одного ее края к другому), то определяемая формулой (78.14) поверхностная плотность магнитного тока направлена вдоль щели и магнитный момент также параллелен щели. Поэтому по скалярному произведению $\mathbf{mH}_1(2)$ можно найти сам момент $\mathbf{m}$ и, следовательно, рассчитать излучение из резонатора в свободное пространство, в волновод и т. д. — в зависимости от того, куда выходит данная щель.

Возбуждение „нагруженного" объемного резонатора (резонатора, связанного отверстием, щелью и т. д. с системой, потребляющей электромагнитную энергию) можно рассмотреть и другим путем. Прежде всего следует изучить собственные колебания нагруженного резонатора, т. е. его комплексные частоты ω_s и векторные функции $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$. При этом нужно иметь в виду, что наличие нагрузки не только приводит к дополнительному затуханию (увеличению ω_s''), но и к смещению собственной частоты (изменению ω_s'). Если соответствующее приращение ω_s'' достаточно велико, то влиянием омических потерь в стенках резонатора (§ 98) можно пренебречь и считать резонатор идеально проводящим.

С помощью новых векторных функций $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$ нетрудно уже построить теорию возбуждения нагруженного резонатора, причем сторонние токи $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$ будут относиться только к источникам, вводящим энергию в резонатор, в то время как в § 101 они характеризовали также „стоки" энергии, т. е. устройства, извлекающие энергию из резонатора. Основная трудность при таком способе рассмотрения заключается в исследовании свободных колебаний нагруженного резонатора.

§ 104*. Возбуждение цилиндрического резонатора, рассматриваемого как отрезок волновода

В § 94 мы показали, что собственные колебания цилиндрического резонатора можно рассматривать как стоячие волны в отрезке волновода. Эту точку зрения можно рас-

Электронное наследие России

пространить и на вынужденные колебания; таким путем мы приходим к новой формулировке теории возбуждения объемных резонаторов.

Цилиндрическим резонатором мы будем в дальнейшем называть отрезок произвольного волновода, заключенный между двумя поперечными перегородками $z=0$ и $z=l$. При этом под волноводом мы понимаем (в духе § 79) любую однородную по оси z передающую линию, электромагнитное поле которой в каждом поперечном сечении $z=\text{const}$ занимает конечную площадь S_p. Таким образом, под цилиндрическим резонатором мы понимаем не только рассмотренные в § 94 полости с идеально проводящими стенками, но и резонаторы, боковая поверхность и основания $z=0$ и $z=l$ которых имеют конечную проводимость, отрезки однородных по длине волноводов, частично заполненных диэлектриком и т. д.

Мы предполагаем, что возбуждение происходит на частоте ω электрическими и магнитными сторонними токами $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$. Предполагается также, что нам известна полная система собственных волн бесконечного волновода при частоте ω, причем через $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ обозначается электромагнитное поле s-ой собственной волны, распространяющейся в положительном направлении оси z (ось волновода) с волновым числом h_s, а через $\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$ — поле такой же волны, но распространяющейся в обратном направлении с волновым числом $h_{-s}=-h_s$ (ср. § 79). Обозначим через

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_s^r &= \mathbf{E}_s + R_s\mathbf{E}_{-s},\\ \mathbf{H}_s^r &= \mathbf{H}_s + R_s\mathbf{H}_{-s}\end{aligned}\right\} \qquad (104.01)$$

электромагнитное поле s-ой волны, набегающей на поперечную перегородку $z=l$ и отражающуюся от нее (с известным коэффициентом отражения R_s), а через

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}_{-s}^r &= \mathbf{E}_{-s} + R_{-s}\mathbf{E}_s,\\ \mathbf{H}_{-s}^r &= \mathbf{H}_{-s} + R_{-s}\mathbf{H}_s\end{aligned}\right\} \qquad (104.02)$$

поле s-ой волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси z и отражающейся (с коэффициентом отражения R_{-s}) от поперечной перегородки $z=0$.

Электромагнитные поля (104.01) и (104.02) удовлетворяют уравнениям поля и граничным условиям на боковой

ЭБ "Научное наследие России"

поверхности резонатора и на одном из его оснований: поле (104.01) — при $z=l$, поле (104.02)—при $z=0$. Пусть источники поля расположены при $z_1<z<z_2$, где $z_1>0$, а $z_2<l$. Тогда при $z_2<z<l$ возбуждаемое ими поле естественно искать в виде

$$\mathbf{E}=\sum C_s\mathbf{E}_s^r;\ \mathbf{H}=\sum C_s\mathbf{H}_s^r, \tag{104.03}$$

а при $0<z<z_1$ — в виде

$$\mathbf{E}=\sum C_{-s}\mathbf{E}_{-s}^r;\ \mathbf{H}=\sum C_{-s}\mathbf{H}_{-s}^r, \tag{104.04}$$

где C_s и C_{-s}—неизвестные пока (постоянные) коэффициенты. Их нетрудно определить, если воспользоваться условием ортогональности

$$\int\limits_{S_p}\left\{[\mathbf{E}_s^r\,\mathbf{H}_{s'}^r]-[\mathbf{E}_{s'}^r,\mathbf{H}_s^r]\right\}1\,dS=0 \text{ при } s'\neq -s, \tag{104.05}$$

непосредственно вытекающим из формулы (79.11).

Повторяя все выкладки § 80, мы получим

$$\left.\begin{aligned} C_s&=\frac{1}{N_s^r}\int(\mathbf{j}^e\,\mathbf{E}_{-s}^r-\mathbf{j}^m\mathbf{H}_{-s}^r)\,dV,\\ C_{-s}&=\frac{1}{N_s^r}\int(\mathbf{j}^e\mathbf{E}_s^r-\mathbf{j}^m\mathbf{H}_s^r)\,dV,\end{aligned}\right\} \tag{104.06}$$

где интегрирование производится по всему объему, занятому источниками, а через N_s^r обозначено выражение

$$N_s^r=\frac{c}{4\pi}\int\left\{[\mathbf{E}_s^r\,\mathbf{H}_{-s}^r]-[\mathbf{E}_{-s}^r\mathbf{H}_s^r]\right\}1\,dS. \tag{104.07}$$

Пользуясь формулами (104.01) и (104.02), мы легко получаем соотношение

$$N_s^r=(1-R_sR_{-s})\,N_s, \tag{104.08}$$

в котором N_s означает норму бегущей волны в волноводе, определенную формулой (79.12).

Обобщая рассуждения § 80, мы в области $z_1<z<z_2$ легко находим следующее выражение для полей

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}&=\sum(C_s\mathbf{E}_s^r+C_{-s}\mathbf{E}_{-s}^r)+\frac{4\pi}{i\omega\varepsilon}j_z^e\,\mathbf{1},\\ \mathbf{H}&=\sum(C_s\mathbf{H}_s^r+C_{-s}\mathbf{H}_{-s}^r)+\frac{4\pi}{i\omega\mu}j_z^m\mathbf{1},\end{aligned}\right\} \tag{104.09}$$

ЭБ "Научное наследие России"

где C_s и C_{-s} суть функции координаты z, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned} C_s &= \frac{1}{N_s^r}\int\limits_{(z_1,\ z)} (\mathbf{j}^e\mathbf{E}_{-s}^r - \mathbf{j}^m\mathbf{H}_{-s}^r)\,dV, \\ C_{-s} &= \frac{1}{N_s^r}\int\limits_{(z,\ z_2)} (\mathbf{j}^e\mathbf{E}_{s}^r - \mathbf{j}^m\mathbf{H}_{s}^r)\,dV, \end{aligned}\right\} \qquad (104.10)$$

соответствующими выражениям (80.05) и дающими правильные результаты при любых z.

Заметим, что при $R_s = R_{-s} = 0$ выписанные выше формулы дают теорию возбуждения бесконечного волновода (§ 80), а при $R_s = 0$, $R_{-s} \neq 0$ — теорию возбуждения полубесконечного волновода (ср. конец § 81).

Рассмотрим теперь резонанс в цилиндрическом объеме. Согласно формулам § 101 резонанс проявляется в том, что „резонансный знаменатель“ $\omega^2 - \omega_s^2$ обращается в нуль или принимает малые значения, вследствие чего соответствующие коэффициенты A_s и B_s становятся большими. В новом варианте теории возбуждения резонаторов большие значения коэффициентов C_s и C_{-s} достигаются при резонансе за счет того, что норма N_s^r обращается в нуль или становится малой. В качестве примера рассмотрим идеальные резонаторы § 94; так как волны полностью отражаются от сечений $z = 0$ и $z = l$, то

$$R_{-s} = 1;\ R_s = \mathrm{e}^{2ih_s l} \qquad (104.11)$$

и

$$1 - R_s R_{-s} = 1 - \mathrm{e}^{2ih_s l} = -2i\mathrm{e}^{ih_s l}\sin h_s l. \qquad (104.12)$$

На резонансной частоте имеем [ср. формулы (94.06) и (94.07)]

$$\sin h_s l = 0, \qquad (104.13)$$

и выражения (104.08) обращаются в нуль.

Аналогичным методом можно исследовать вынужденные колебания в резонаторах другой формы, например в сферическом и коническом (ср. конец § 84).

Не следует удивляться тому, что вынужденные колебания объемных резонаторов допускают двоякую математическую трактовку. Еще на первом этапе развития матема-

ЭБ "Научное наследие России"

тической физики оказалось, что решение задачи о свободных колебаниях струны, закрепленной на концах, можно получить как в виде разложения в ряд Фурье, т. е. в виде разложения по собственным функциям струны (решение Даниила Бернулли), так и путем анализа бегущих и отраженных волн (решение Даламбера). Решение задачи о вынужденных колебаниях струны также можно найти двумя различными способами, которые, разумеется, приводят к эквивалентным результатам.

Струна является простейшим примером системы с бесконечным дискретным спектром собственных частот, т. е. своего рода механическим резонатором. Решение задачи о вынужденных колебаниях электромагнитного резонатора, данное в § 101, аналогично решению Бернулли, а решение, полученное в этом параграфе, соответствует методу Даламбера.

ЭБ "Научное наследие России"

ЛИТЕРАТУРА*

И. Е. Тамм. Основы теории электричества. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, М., 1954.

Абрагам-Беккер. Теория электричества. Пер. с немец. под ред. Т. П. Кравца, ОНТИ, Л. М., 1936.

К главам I—II

Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг. Распространение радиоволн. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, М., 1953, § 68 (к § 8).

Я. Н. Фельд. О теореме единственности решений уравнений Максвелла для вынужденных гармонических колебаний. ЖЭТФ, 1938, **8**, № 6, стр. 754 (к § 10).

В. Л. Гинзбург и Г. П. Мотулевич. Оптические свойства металлов. УФН, 1955, **60**, № 4, стр. 469 (к § 12, а также к гл. IV).

К главе III

М. Л. Левин. О геометрическом смысле условий существования поперечно-электрических и поперечно-магнитных полей в криволинейных координатных системах**. ДАН, 1951, **79**, № 4, стр. 589 (к § 20).

Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. Пер. с англ. В. С. Бермана, ч. I и II. Издательство иностранной литературы, М., 1949 (к § 22, а также к §§ 55, 61, 66, 71, 73, 89 и 99).

К главе IV

М. А. Леонтович. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел. Исследования по распространению радиоволн, сборник второй. Издательство АН СССР, М. Л., 1948.

Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг. Распространение радиоволн, М., 1953 (ч. 1, гл. IV).

* Список литературы ни в коей мере не претендует на полноту. В ряде случаемы сознательно приводим ссылки на более поздние работы, по которым читатель может познакомиться с современным состоянием вопроса и предшествующей литературой.

** Поперечно-электрическим (TE) полем в литературе часто называют поле магнитного типа, поперечно-магнитным (TM)—поле электрического типа.

ЭБ "Научное наследие России"

К главам V—VI

М. А. Леонтович, М. Л. Левин. К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн. ЖТФ, 1944, **14**, стр. 481.

Erik Hallen. Об импедансах антенн. Trans. of the Roy. Inst. of Technology. Stockholm, № 13, 1947.

Kristen Lindroth. Отражение электромагнитных волн от тонких металлических лент. Trans. of the Roy. Inst. of Technology, Stockholm, № 91, 1955.

К главам VII—IX

Б. А. Введенский и А. Г. Аренберг. Радиоволноводы, ч. I. Гостехиздат, М. Л., 1946.

Справочник по волноводам. Пер. с англ. под ред. Я. Н. Фельда. Изд-во „Советское радио", М., 1952.

Л. Левин. Современная теория волноводов (методы расчета влияния неоднородностей). Пер. с англ. Э. Л. Бурштейна. Изд-во иностранной литературы, М., 1954.

Л. А. Вайнштейн. О возбуждении волны E_0 в круглом волноводе с помощью коаксиальной линии. ДАН СССР, 1948, **59**, № 8, стр. 1421 (к § 45).

А. А. Самарский и А. Н. Тихонов. О представлении поля в волноводе в виде суммы полей TE и TM. ЖТФ, 1948, **18**, стр. 959 (к § 40).

Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа. Пер. с англ. под ред. Г. М. Голузина. ГТТИ, Л. М., 1934, ч. II гл. 18 (к § 48).

Б. З. Каценеленбаум. Волноводы с неидеальными стенками. ДАН СССР, 1953, **88**, № 1, стр. 37 (к § 56).

Л. А. Вайнштейн. Групповая скорость затухающих волн. ЖТФ, в печати (к § 50).

К главе X

Антенны сантиметровых волн. I и II. Пер. с англ. под ред. Я. Н. Фельда. Изд-во „Советское радио", М., 1950 (также к гл. XV).

Л. А. Вайнштейн. Диффракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. Изд-во „Советское радио", М., 1953 (к § 57, а также к § 90).

Б. Л. Рождественский. Волны в плоском рупоре. ДАН СССР, 1951, **77**, стр. 221. К теории плоского рупора. ЖТФ, 1953, **23**, стр. 1609 (к § 59).

Л. А. Вайнштейн. Метод приближенного разделения переменных и его применение к граничным задачам электродинамики и акустики. ЖТФ. Печатается (к § 59).

К главам XI—XII

Ф. Франк и Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Пер. с немец. под ред. Л. Э. Гуревича, ОНТИ, М. Л., 1937, гл. XXII (к § 62, 63 и 66).

В. В. Владимирский. Распространение электромагнитных волн по одиночному проводу. Изд. АН СССР, сер. физ., 1944, **8**, № 3 стр. 139.

Georg Goubau. Поверхностные волны и их применение для передачи. Journal of Appl. Phys., **21**, стр. 1119, 1950.

Электронное наследие России

Б. З. Каценеленбаум. О распространении электромагнитных волн вдоль бесконечных диэлектрических цилиндров при низких частотах. ДАН СССР, 1947, **63**, № 7, стр. 1317. Симметричное возбуждение бесконечного диэлектрического цилиндра. ЖТФ, 1949, **19**, стр. 1168. Несимметричные колебания бесконечного диэлектрического цилиндра. ЖТФ, 1949, **19**, стр. 1182 (к § 66).

Л. А. Вайнштейн. Поверхностные электромагнитные волны над гребенчатой структурой. ЖТФ, 1956, **26**, стр. 385 (к § 69).

К главе XIII

С. Х. Коган. Распространение волн вдоль бесконечной спирали. ДАН СССР, 1949, **66**, № 5, стр. 867. Возбуждение спиральной линии. ДАН СССР, 1950, **74**, № 3, стр. 489.

Н. Н. Смирнов. Распространение волн вдоль бесконечно длинной спирали. ДАН СССР, 1956, **108**, № 2, стр. 243. Дисперсионные свойства многозаходных спиралей. ДАН СССР, 1956, **110**, № 2, стр. 212.

Л. А. Вайнштейн. Диффракция электромагнитных волн на решетке из параллельных проводящих полос. ЖТФ, 1955, **25**, стр. 847 (к § 72).

К главе XIV

Л. А. Вайнштейн. Возбуждение волноводов. ЖТФ, 1953, **23**, стр. 654. Электронные волны в замедляющих системах. ЖТФ, 1956, **26**, стр. 126.

К главе XV

К. Шефер. Теоретическая физика. Пер. с немец. под ред. К. Ф. Теодорчика, т. III, ч. 2. Оптика. ГОНТИ, М. Л., 1938.

А. Зоммерфельд. Оптика. Пер. с немец. под ред. М. А. Ельяшевича. Изд-во иностранной литературы, М., 1953.

М. Г. Белкина. Диффракция электромагнитных волн на диске. В сборнике „Диффракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения". Изд-во „Советское радио", М., 1957 (к § 90).

А. А. Пистолькорс. Общая теория диффракционных антенн. ЖТФ, 1944, **14**, № 12, стр. 693 (к § 92).

Я. Н. Фельд. О принципе двойственности в теории диффракции электромагнитных волн у плоских экранов. ДАН СССР, 1948, **60**, № 7, стр. 1165 (к § 92).

Я. Н. Фельд. Основы теории щелевых антенн. Изд-во „Советское радио", М., 1948 (к § 92).

К главе XVI—XVII

Дж. Слэтер. Электроника сверхвысоких частот. Пер. с англ. под ред. С. Д. Гвоздовера. Изд-во „Советское радио", М., 1948.

М. Л. Левин. К теории тороидальных эндовибраторов. ЖТФ, 1946, **16**, стр. 833.

Л. А. Вайнштейн. Возбуждение объемных резонаторов. ЖТФ, 1953, **23**, стр. 646.

В. Смайт. Электростатика и электродинамика. Пер. А. В. Гапонова и М. А. Миллера. Изд-во иностранной литературы, М., 1954 (§ 29б, к § 103).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I. **Общие положения теории электромагнитного поля** 7

§ 1. Основные законы электродинамики 7
§ 2. Уравнения электромагнитного поля в комплексной форме 12
§ 3. Сторонние токи 18
§ 4. Граничные условия 21
§ 5. Леммы о смысле квадратов и произведений комплексных амплитуд 22
§ 6. Теорема о комплексной мощности 26
§ 7*. Теорема о колеблющейся мощности 31
§ 8*. Электромагнитная энергия монохроматического поля . 35
§ 9. Энергетический смысл вещественной и мнимой частей ε и μ 40
§ 10. Теоремы единственности. Условия излучения 44

Глава II. **Плоские волны** 49

§ 11. Плоские волны в однородной изотропной среде 49
§ 12. Распространение электромагнитных волн в различных средах 55
§ 13. Нормальное падение волны на плоскую границу раздела 59
§ 14. Волновые уравнения. Обобщенные плоские волны . . . 62
§ 15. Отражение плоской волны от плоской границы раздела 67
§ 16. Структура электромагнитного поля прошедшей волны 75

Глава III. **Потенциалы электромагнитного поля. Цилиндрические и сферические волны** 80

§ 17. Векторные потенциалы 80
§ 18. Векторы Герца 84
§ 19. Криволинейные ортогональные координаты 88
§ 20*. Поля и потенциалы в криволинейных ортогональных координатах 91
§ 21. Лемма о пропорциональном изменении проницаемостей ε и μ во всем пространстве 100
§ 22. Цилиндрические волны 104
§ 23*. Сферические волны 108

ое наследие России"

Глава IV. **Теория скин-эффекта** 112
§ 24. Понятие идеального проводника и граничные условия на его поверхности 112
§ 25. Сильный скин-эффект. Граничные условия Леонтовича 115
§ 26. Сопротивление проводников при сильном скин-эффекте 119
§ 27. Скин-эффект в цилиндрическом проводе 127

Глава V. **Электродинамическая теория длинных линий** . . 136
§ 28. Классификация линий передачи 136
§ 29. Электромагнитные волны в идеально проводящих линиях 139
§ 30*. Волны в двухпроводной линии с конечным сопротивлением проводов 145

Глава VI. **Телеграфные уравнения** 150
§ 31. Основные свойства телеграфных уравнений 150
§ 32. Электродинамический вывод телеграфных уравнений . 153
§ 33. Расчет параметров длинных линий 159
§ 34*. Энергетический смысл параметров длинных линий . . . 166
§ 35. Зависимость свойств длинных линий от частоты . . . 170
§ 36. Пределы применимости телеграфных уравнений 173
§ 37. Однопроводная линия и телеграфные уравнения. Понятие о строгой теории вибраторов 177

Глава VII. **Волноводы** 181
§ 38. Особенности электромагнитных волн в волноводах . . 181
§ 39. Электрические волны в волноводах 183
§ 40. Магнитные волны в волноводах 187
§ 41. Система волн в прямоугольном волноводе 191
§ 42. Система волн в круглом волноводе 201
§ 43. О волноводах сложной формы 208
§ 44. Распространяющиеся и затухающие волны в волноводах 210
§ 45. Волноводные свойства коаксиальных линий 217

Глава VIII. **Скорость распространения** 222
§ 46. Фазовая и групповая скорости 222
§ 47. Скорость волн в волноводе 226
§ 48. Разложение волноводных волн на плоские волны . . . 230
§ 49*. Электромагнитная энергия в поглощающей диспергирующей среде 236
§ 50*. Скорость движения энергии как обобщение понятия групповой скорости 244
§ 51*. Скорость распространения сигналов в передающих линиях с потерями 251
§ 52*. Фазовая скорость и колеблющаяся энергия 258

Глава IX. **Потери в волноводах** 261
§ 53. Волноводы, заполненные веществом 261
§ 54. Затухание волн, вызванное потерями в стенках волновода 263
§ 55. Затухание важнейших волн в зависимости от частоты 272
§ 56*. Влияние конечной проводимости стенок на волны в волноводе 275

ЭБ "Электронное наследие России"

Глава X. **Рупоры** 283
§ 57. Электромагнитные волны в рупорах 283
§ 58. „Электрические" и „магнитные" волны в секториальном рупоре 286
§ 59. Сочленение волновода с рупором 295
§ 60*. Электрические и магнитные волны в коническом рупоре 301

Глава XI. **Замедление электромагнитных волн диэлектриками и проводниками** 306
§ 61. Медленные электромагнитные волны 306
§ 62. Распространение поверхностной волны вдоль провода с конечной проводимостью 311
§ 63. Поверхностная волна Ценнека 314
§ 64. Замедление волн диэлектрической пластиной 316
§ 65. Другие типы „гладких" замедляющих систем и их применение 326
§ 66*. Распространение волн вдоль диэлектрического стержня и родственные задачи 330
§ 67*. Распространение волн вдоль проводящего стержня с диэлектрической оболочкой 337

Глава XII. **Поверхностные волны в периодических структурах** 342
§ 68. Диафрагмированный волновод 342
§ 69. Замедление электромагнитных волн гребенчатой структурой 350
§ 70. Ребристый стержень 355
§ 71*. Общая теория поверхностных волн 358

Глава XIII. **Спиральный волновод** 384
§ 72. Спираль как замедляющая линия. Приближенные граничные условия 384
§ 73. Симметричная волна в спиральном волноводе 389
§ 74. Несимметричные волны в спиральном волноводе . . . 395
§ 75. Система волн спирального волновода. Пространственный резонанс 404
§ 76. Бифилярная спираль 413

Глава XIV. **Возбуждение электромагнитных волн заданными источниками** 418
§ 77. Лемма Лоренца и теорема взаимности для электрических диполей 418
§ 78. Магнитные диполи и теоремы взаимности для них . . 422
§ 79. Ортогональность волн в волноводе 428
§ 80. Возбуждение волноводов 436
§ 81. Некоторые применения теории возбуждения волноводов 441
§ 82*. Дополнения к теории возбуждения волноводов 448
§ 83*. Возбуждение поверхностных волн 454
§ 84*. Возбуждение конического рупора и родственные задачи 458

Глава XV. **Дифракция электромагнитных волн** 471
§ 85. Принцип Гюйгенса для электромагнитного поля . . . 471
§ 86. Дифракция на отверстии произвольной формы 479

§ 87. Диффракция на прямоугольном отверстии 483
§ 88*. Диффракция Фраунгофера и диффракция Френеля. Волны от краев 490
§ 89*. Диффракция на круглом отверстии 494
§ 90*. Пределы применимости принципа Гюйгенса 501
§ 91*. Диффракция на пластинке 506
§ 92*. Принцип двойственности 510

Глава XVI. **Свободные колебания объемных резонаторов** . . 515
§ 93. Стоячие волны в прямоугольной полости 515
§ 94. Цилиндрические резонаторы 521
§ 95*. Сферический резонатор 527
§ 96. Квазистационарный расчет резонаторов сложной формы 529
§ 97. Свойства резонатора, заполненного однородным веществом 535
§ 98. Влияние конечной проводимости стенок на свободные колебания резонатора 537
§ 99. Добротность некоторых резонаторов (для основного колебания) 542

Глава XVII. **Вынужденные колебания объемных резонаторов** 547
§ 100. О свободных и вынужденных колебаниях. Условия ортогональности 547
§ 101. Поле, возбужденное источниками в объемном резонаторе 553
§ 102. Возбуждение резонансного контура 560
§ 103. Некоторые применения теории возбуждения объемных резонаторов 564
§ 104*. Возбуждение цилиндрического резонатора, рассматриваемого как отрезок волновода 570

Литература 575

ЭБ "Научное наследие России"

Лев Альбертович Вайнштейн
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ
Редактор *А. А. Александрова*
Техн. редактор *Н. Н. Корузев*
Обложка художника *В. В. Волкова*

Сдано в набор 18/I 1957 г. Подписано к печати 23/VII 1957 г. Формат 84×108$^{1}/_{32}$. Печ. л. 29,93. Бум. л. 9,13. Уч.-изд. л. 29,55. Г-32412. Заказ 38.
Цена в переплете № 5 15 р. 80 к., в переплете № 7 16 р. 30 к.

Типография Госэнергоиздата.
Москва, Шлюзовая наб., 10.

ЭБ "Научное наследие России"