

Редакционный совет:

Главный редактор К. С. Басниев

Ответственный редактор А. В. Борисов

А. И. Владимиров (РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина)

В. И. Грайфер (РИТЭК)

В. А. Журавлев (Удмуртский государственный университет)

В. И. Кудинов (УдГУ)

О. Л. Кузнецов (РАЕН)

Н. Н. Лисовский (Министерство промышленности и природных ресурсов)

И. С. Мамаев (Институт компьютерных исследований)

Р. М. Тер-Саркисов (ВНИИГИЗ)

С. Холдич (США)

М. М. Хасанов (ЮКОС)

С. С. Григорян (МГУ)

**РГУ НЕФТИ
И ГАЗА**
имени И. М. Губкина



Вышли в свет:

Р. Д. Каневская

Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов

Б. Б. Лапук

Теоретические основы разработки месторождений природных газов

М. М. Хасанов, Г. Т. Булгакова

Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах

К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг

Нефтегазовая гидромеханика

Г. И. Фукс

Вязкость и пластичность нефтепродуктов

А. Х. Мирзаджанзаде, М. М. Хасанов, Р. Н. Бахтизин

Моделирование процессов нефтегазодобычи

Я. И. Хургин

Проблемы неопределенности в задачах нефти и газа

Х. Азиз, Э. Сеттари

Математическое моделирование пластовых систем

М. Маскет

Течение однородных жидкостей в пористой среде

М. Маскет

Физические основы технологии добычи нефти

В. А. Байков, А. Х. Мирзаджанзаде

Парадоксы нефтяной физики

Готовятся к публикации:

К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Р. Д. Каневская, В. М. Максимов

Подземная гидромеханика

Л. П. Дейк

Практическая разработка месторождений

Р. Эрлагер

Испытания скважин: достижения

**К 75-летию Российского
Государственного университета
нефти и газа им. И. М. Губкина**

**К. С. БАСНИЕВ
Н. М. ДМИТРИЕВ
Г. Д. РОЗЕНБЕРГ**

НЕФТЕГАЗОВАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Нефтегазовое дело»

Издание второе, дополненное

Под редакцией академика С. С. Григоряна



Москва ♦ Ижевск

2005

Интернет-магазин
MATHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
 - математика
 - биология
 - нефтегазовые технологии
-

Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д.

Нефтегазовая гидромеханика: Учебное пособие для вузов. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 544 с.

На базе основных представлений механики сплошной среды излагаются основы механики жидкости, газа и многофазных сред. Дан вывод законов сохранения в интегральном и дифференциальном виде, изложены элементы гидростатики, рассмотрены различные виды течения идеальных и вязких жидкостей, основные понятия теории турбулентности, теории размерностей и подобия. Рассмотрены вопросы установившегося и неустановившегося течения однофазных и многофазных сред в трубах, основы газовой динамики, теории движения неньютоновских жидкостей. Дана гидродинамическая теория фильтрации жидкостей и газов в однородных и неоднородных, изотропных и анизотропных средах.

Для студентов, обучающихся по направлению «Нефтегазовое дело», аспирантов и преподавателей нефтяных вузов и факультетов, широкого круга научных работников и инженеров, работающих в нефтегазовой отрасли.

ISBN 5-93972-405-1

© К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг, 2005

© Институт компьютерных исследований, 2005

<http://rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Предисловие	12
Введение	13
Часть I. Основы механики сплошной среды	16
Глава I. Основные понятия механики сплошной среды	16
Введение	16
§ 1. Гипотеза сплошности	16
§ 2. Методы описания движения сплошной среды	17
§ 3. Локальная и субстанциональная производная	20
§ 4. Скалярные и векторные поля	22
§ 5. Силы и напряжения в сплошной среде. Тензор напряжений	25
Глава II. Законы сохранения. Интегральные и дифференциальные уравнения сплошной среды	30
§ 1. Интегральные характеристики сплошной среды и законы сохранения	30
§ 2. Дифференцирование по времени интеграла, взятого по подвижному объему	34
§ 3. Уравнение неразрывности (закон сохранения массы)	37
§ 4. Уравнения движения в напряжениях (закон сохранения количества движения)	39
§ 5. Закон сохранения момента количества движения. Закон парности касательных напряжений	41
§ 6. Закон сохранения энергии	43
§ 7. Теорема об изменении кинетической энергии	46
§ 8. Уравнение притока тепла	48
§ 9. Система уравнений движения сплошной среды	48

Глава III. Скорость деформации сплошной среды	50
§ 1. Скорость деформации малой частицы. Теорема Гельмгольца . . .	50
§ 2. Тензор скоростей деформаций	54
§ 3. Физический смысл компонент тензора скоростей деформаций .	55
§ 4. Тензорная поверхность симметричного тензора второго ранга .	56
§ 5. Циркуляция скорости. Потенциальное движение жидкости	58
Глава IV. Жидкости	63
§ 1. Математическая модель идеальной жидкости	63
§ 2. Математическая модель идеальной несжимаемой жидкости . . .	65
§ 3. Вязкая жидкость. Тензор напряжений в вязкой жидкости	67
§ 4. Уравнения движения вязкой жидкости	73
§ 5. Математическая модель вязкой несжимаемой жидкости	75
§ 6. Работа внутренних сил. Уравнение притока тепла	77
Глава V. Основы теории размерностей и подобия	80
§ 1. Системы единиц измерения. Размерность	80
§ 2. О формуле размерности	82
§ 3. Величины с независимыми размерностями	85
§ 4. П-теорема	87
§ 5. Подобие физических явлений, моделирование	89
§ 6. Параметры, определяющие класс явлений	91
§ 7. Примеры на применение П-теоремы	92
§ 8. Приведение уравнений к безразмерному виду	98
Часть II. Гидромеханика	102
Глава VI. Гидростатика	102
§ 1. Уравнения равновесия жидкости и газа	102
§ 2. Равновесие жидкости в поле силы тяжести	103
§ 3. Относительный покой жидкости	107
§ 4. Статическое давление жидкости на твердые поверхности	110
§ 5. Элементы теории плавания	115
Глава VII. Течение идеальной жидкости	119
§ 1. Уравнения Эйлера в форме Громеко – Ламба	119
§ 2. Интеграл Бернулли	120
§ 3. Частные виды интеграла Бернулли	123
§ 4. Простейшие примеры приложения интеграла Бернулли	128
§ 5. Интеграл Коши – Лагранжа	131

§ 6. Теорема Томсона	133
§ 7. Уравнение Гельмгольца	136
§ 8. Потенциальное течение несжимаемой жидкости	140
§ 9. Обтекание сферы	143
§ 10. Некоторые примеры применения закона сохранения количества движения	147
Глава VIII. Плоскопараллельное течение идеальной несжимаемой жидкости	152
§ 1. Комплексный потенциал течения	152
§ 2. Примеры плоскопараллельных потенциальных течений	154
§ 3. Конформное отображение потоков	161
§ 4. Преобразование Жуковского	164
§ 5. Обтекание профиля произвольной формы	166
§ 6. Силы, действующие на профиль при стационарном обтекании	168
Глава IX. Течение вязкой несжимаемой жидкости по призматическим трубам	173
§ 1. Уравнения прямолинейного движения вязкой несжимаемой жидкости по призматическим трубам	174
§ 2. Прямолинейное течение между двумя параллельными стенками	177
§ 3. Прямолинейное течение в осесимметричных трубах	179
§ 4. Уравнение установившегося кругового движения вязкой несжимаемой жидкости	183
§ 5. Течение между двумя вращающимися цилиндрами	185
Глава X. Турбулентное течение жидкости в трубах	187
§ 1. Опыты О. Рейнольдса	187
§ 2. Осреднение характеристик турбулентного течения	188
§ 3. Уравнение Рейнольдса	190
§ 4. Полуэмпирическая теория турбулентности Л. Прандтля	192
§ 5. Применение соображений теории размерностей к построению полуэмпирических теорий турбулентности	195
§ 6. Логарифмический закон распределения скоростей	197
§ 7. Экспериментальные исследования коэффициента гидравлического сопротивления	200
Глава XI. Гидравлический расчет трубопроводов	204
§ 1. Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости	204
§ 2. Виды потерь напора	208
§ 3. Расчет простых трубопроводов	209

§ 4. Расчет сложных трубопроводов	211
§ 5. Трубопроводы, работающие под вакуумом	214
Глава XII. Истечение жидкости из отверстий и насадков	217
§ 1. Истечение из малого отверстия	217
§ 2. Истечение через насадки	220
§ 3. Истечение жидкости при переменном уровне	224
Глава XIII. Неустановившееся движение вязкой жидкости в трубах	228
§ 1. Уравнения неустановившегося движения жидкости по трубам	228
§ 2. Уравнения неустановившегося движения слабосжимаемой жидкости по трубам	234
§ 3. Уравнения неустановившегося движения газа по трубам с малыми дозвуковыми скоростями	236
§ 4. Интегрирование уравнений неустановившегося движения и газа методом характеристик	238
§ 5. Интегрирование линеаризованных уравнений неустановившегося движения с помощью преобразования Лапласа	240
§ 6. Примеры расчета нестационарных процессов в трубах	244
§ 7. Гидравлический удар	250
§ 8. Влияние нестационарности течения на силу трения	255
Глава XIV. Ламинарный пограничный слой	261
§ 1. Уравнения пограничного слоя	262
§ 2. Задача Блазиуса	266
§ 3. Отрыв пограничного слоя	270
Глава XV. Одномерные течения газа	272
§ 1. Скорость звука	272
§ 2. Закон сохранения энергии	275
§ 3. Число Маха. Коэффициент скорости	277
§ 4. Связь между площадью живого сечения трубки тока и скоростью течения	280
§ 5. Истечение газа через сходящийся насадок	282
§ 6. Сопло Лавалья	284
§ 7. Газодинамические функции	288
§ 8. Ударные волны	290
§ 9. Расчет газового эжектора	298
§ 10. Установившееся движение газа в трубах	302
§ 11. Формула Шухова	307

Глава XVI. Ламинарное течение неньютоновских жидкостей . . .	309
§ 1. Простой сдвиг	310
§ 2. Классификация неньютоновских жидкостей	312
§ 3. Вискозиметрия	314
§ 4. Течение жидкости по бесконечно длинной круглой трубе	316
§ 5. Вращательное течение жидкости в кольцевом зазоре	319
§ 6. Интегральный метод в вискозиметрии	321
§ 7. Коэффициент гидравлического сопротивления	327
§ 8. Дополнительные замечания о расчете течения неньютоновских жидкостей по трубам	332
Глава XVII. Двухфазное течение в трубах	333
§ 1. Уравнения законов сохранения	334
§ 2. Уравнения движения двухфазной смеси в трубах	335
§ 3. Преобразование уравнений движения двухфазной смеси в трубах	345
§ 4. Режимы течения	346
§ 5. Свободный дебит газоконденсатной скважины	348
Часть III. Нефтегазовая подземная гидромеханика	353
Глава XVIII. Основные определения и понятия фильтрации жидкостей и газов. Опыт и закон Дарси	353
§ 1. Особенности движения флюидов в природных пластах	353
§ 2. Исходные модельные представления подземной гидромеханики жидкости и газа	355
§ 3. Фильтрационно-емкостные свойства пористых сред. Коэффициенты пористости и просветности. Удельная поверхность	357
§ 4. Опыт и закон Дарси. Проницаемость. Понятие «истинной» средней скорости и скорости фильтрации	359
§ 5. Границы применимости закона Дарси. Анализ и интерпретация экспериментальных данных	365
§ 6. Нелинейные законы фильтрации	370
§ 7. Структурные модели пористых сред	373
§ 8. Закон Дарси для анизотропных сред	380
Глава XIX. Математические модели однофазной фильтрации . . .	388
§ 1. Вводные замечания. Понятие о математической модели физического процесса	388
§ 2. Закон сохранения массы в пористой среде	390

§ 3. Дифференциальное уравнение движения флюида	393
§ 4. Замыкающие уравнения. Математические модели изотермической фильтрации	395
§ 5. Модель фильтрации несжимаемой вязкой жидкости по закону Дарси в недеформируемом пласте	396
§ 6. Модель фильтрации газа по закону Дарси. Функция Л. С. Лейбензона	397
§ 7. Модели однофазной фильтрации в недеформируемом пласте при нелинейных законах фильтрации	400
§ 8. Зависимость параметров флюидов и пористой среды от давления	401

Глава XX. Одномерная установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости и газа в однородной пористой среде 410

§ 1. Схемы одномерных фильтрационных потоков	410
§ 2. Прямолинейно-параллельная фильтрация несжимаемой жидкости	411
§ 3. Плоскорадиальная фильтрация несжимаемой жидкости	416
§ 4. Радиально-сферическая фильтрация несжимаемой жидкости	421
§ 5. Аналогия между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа	423
§ 6. Фильтрационное одномерное течение совершенного газа	425
§ 7. Фильтрационное плоскорадиальное течение реального газа по закону Дарси	432
§ 8. Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и газа по двухчленному закону фильтрации	434
§ 9. Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и газа по степенному закону фильтрации	439

Глава XXI. Одномерные фильтрационные потоки по закону Дарси несжимаемой жидкости и газа в неоднородных пластах 443

§ 1. Основные типы неоднородности пластов	443
§ 2. Прямолинейно-параллельный поток в слоисто-неоднородном пласте	445
§ 3. Прямолинейно-параллельный поток в зонально-неоднородном пласте	447
§ 4. О расчете пластов с непрерывной неоднородностью	452
§ 5. Плоскорадиальный поток в слоисто-неоднородном пласте	453
§ 6. Плоскорадиальный поток в зонально-неоднородном пласте	454

Глава XXII. Плоские установившиеся фильтрационные потоки 458

§ 1. Основные определения и понятия	458
---	-----

§ 2. Потенциал точечного источника и стока на изотропной плоскости. Метод суперпозиции	459
§ 3. Приток жидкости к группе скважин в пласте с удаленным контуром питания	462
§ 4. Приток жидкости к скважине в пласте с прямолинейным контуром питания	464
§ 5. Приток жидкости к скважине в пласте вблизи прямолинейной непроницаемой границы	467
§ 6. Приток жидкости к скважине, эксцентрично расположенной в круговом пласте	468
§ 7. Об использовании метода суперпозиции при фильтрации газа .	470
Глава XXIII. Неустановившееся движение упругой жидкости в упругом пласте	474
§ 1. Упругий режим пласта и его характерные особенности	474
§ 2. Подсчет упругого запаса жидкости в пласте	475
§ 3. Математическая модель неустановившейся фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде	477
§ 4. Вывод дифференциального уравнения фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде по закону Дарси	479
§ 5. Одномерные фильтрационные потоки упругой жидкости. Точные решения уравнения пьезопроводности. Основная формула теории упругого режима	481
Глава XXIV. Приближенные методы решения задач теории упругого режима	494
§ 1. Метод последовательной смены стационарных состояний	494
§ 2. Метод А. М. Пирвердяна	500
§ 3. Метод интегральных соотношений	503
§ 4. Метод «усреднения»	506
Приложение	508
Литература	538

Предисловие

Это – хорошая книга. В ней представлены основные разделы гидромеханики и газовой динамики, имеющие прямое – непосредственное отношение к главным технологическим областям современной нефтегазовой отрасли экономики, имеющим дело с разработкой нефтяных и газовых месторождений, извлечением из недр земли и транспортировкой на большие расстояния нефти и газа.

Для научно-инженерного «обслуживания» этих действий, в частности и их оптимизации, требуется привлечение количественных методов подземной гидромеханики, исследующей процессы фильтрации жидкостей и газов в пористых средах (в природных коллекторах углеводородного сырья), трубной гидро-газодинамики и гидравлики, исследующих процессы транспорта реальных жидкостей и газов по протяженным трубопроводным сооружениям, а также методов гидростатики – для количественных оценок условий и состояний в хранилищах нефти и газа. Конечно, имеется значительная учебная и научная литература, в которой детально рассматриваются все эти вопросы и представлены соответствующие инженерные расчетные методики. Однако в них внимание учащихся и практических работников преимущественно сосредоточивается на «рецептурной» стороне дела, т.е. на умении проводить конкретные расчеты и оценки по готовым правилам и алгоритмам. Существенным недостатком и следствием такой методики обучения специалистов (не только в нефтегазовой отрасли) является «жесткость» получающейся квалификации – неумение специалиста правильно ориентироваться при «встрече» с нестандартной или новой задачей, для решения которых он оказывается вовсе не готовым.

Главное отличие этой книги – ее направленность на обучение фундаментальным вещам – научным началам, на обучение не умению применять рецептуру инженерных расчетов, а пониманию первичной природы изучаемых явлений и процессов и правильному выбору методов их исследований. Одним словом, основу идеологии этой учебной книги составляет университетский подход к обучению специалистов, и в этом – ее несомненное и очень значительное преимущество по сравнению со «стандартными» учебными пособиями. Ее издание и включение в практику преподавания в институтах нефтегазового профиля внесет существенное – качественное улучшение в процесс подготовки современных специалистов – нефтяников и газовиков.

Академик



С. С. Григорян

27.08.2003

Введение

Одной из основных научных дисциплин, объясняющих многие явления и факты природы, деятельности человека, техники и технологий, является гидромеханика – раздел механики, изучающий законы равновесия и движения жидкости. Гидромеханика находит свои приложения во многих областях: в авиации и кораблестроении, атомной энергетике и гидроэнергетике, гидрогеологии и водоснабжении, теплотехнике, метеорологии и химической технологии. Особое значение имеет применение гидромеханики в разнообразных технологических процессах нефтяной и газовой промышленности, включая фильтрацию жидкостей и газов в природных пластах, их движение в трубопроводах и аппаратах. Для этих применений она является базовой научной дисциплиной.

Гидродинамическое описание процессов в различных областях техники и технологий определяется специфическим для каждой области классом гидромеханических задач. В связи с этим получили развитие такие дисциплины, как теоретическая гидромеханика, техническая гидромеханика, аэромеханика, гидравлика, подземная гидромеханика и др. Каждой из этих дисциплин соответствует не только свой круг гидромеханических задач, но и свои специфические методы математического описания моделей и решения конкретных задач. В то же время, все дисциплины объединяет единый подход, основанный на гипотезе сплошности и законах сохранения, которые составляют основу механики сплошных сред.

В предлагаемом учебном пособии «Нефтегазовая гидромеханика» авторы впервые делают попытку изложить гидромеханические основы различных технологий нефтяной и газовой промышленности с позиций основных положений механики сплошной среды, обобщив при этом содержание ныне читающихся дисциплин гидромеханического цикла, (техническая и подземная гидромеханика), а также специальных курсов (прикладная газовая динамика гидродинамических задач нефтегазовой экологии и др.). Следует отметить, что преподавание гидромеханического цикла дисциплин в нефтегазовых вузах имеет прочные основы и разнообразные приложения. Начало преподавания гидромеханики при подготовке инженеров-нефтяников было заложено выдающимся механиком академиком Л.С. Лейбензоном в Московском нефтяном институте им. И.М. Губкина (ныне Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина) со времени его основания в 1930 году.

Известен выдающийся вклад Л.С. Лейбензона в создание теоретических основ нефтегазовой гидромеханики и теории фильтрации нефти и газа. Созданная им научная школа дала гидродинамическое обоснование новых технологий разработки нефтяных и газовых месторождений, что позволило вывести отечественную нефтедобычу на ведущие позиции в мире.

Ученики Л.С. Лейбензона: профессор И.А. Чарный, В.Н. Щелкачев, Б.Б. Лапук – создали первые учебники и организовали чтение курса подземной гидравлики, охватывающего основы теории фильтрации нефти и газа в пластах. Одновременно читался курс технической гидромеханики, в прикладном отношении направленный на изучение движения жидкости в трубопроводах и аппаратах. Преподавание гидромеханических дисциплин сосредоточено на кафедре нефтегазовой и подземной гидромеханики, созданной выпускником МГУ им. М.В. Ломоносова И.А. Чарным в 1946 г. Отличительной особенностью организации работы этой кафедры было сочетание в составе преподавателей выпускников МГУ и РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, что позволяло поддерживать на высоком уровне фундаментальность гидромеханического образования инженеров и тесную связь с развитием нефтегазовой науки.

Большое значение при этом имело тесное сотрудничество с кафедрой гидромеханики МГУ под руководством академика Л.И. Седова. Выпускники этой кафедры и МГУ профессора И.М. Астрахан, В.М. Максимов, В.И. Марон, М.В. Лурье, Я.И. Хургин, А.В. Колесниченко, доценты И.Н. Кочина, В.И. Исаев, М.Н. Кравченко, ст. преп. Е.Г. Разбегина внесли существенный вклад в создание научно-методических основ преподавания гидромеханических дисциплин в нефтегазовых вузах. Неоценимый вклад в развитие гидромеханических исследований и нефтегазового образования вносит постоянное сотрудничество с академиком РАН С.С. Григоряном. Выпускники РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина — профессора Б.Б. Лапук, А.П. Юфин, А.К. Курбанов, М.В. Филинов, В.Н. Николаевский, доценты А.Е. Евгеньев, А.М. Власов, В.Г. Иванников успешно решали фундаментальные и прикладные задачи нефтегазовой гидромеханики, а также создавали оригинальную учебно-лабораторную базу.

Авторами данного учебного пособия также являются выпускник РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина К.С. Басниев и выпускники МГУ им. М.В. Ломоносова Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг.

Работа над рукописью была завершена после кончины профессора Г.Д. Розенберга. Будучи одним из ближайших учеников И.А. Чарного, он посвятил свою деятельность развитию идей своего учителя в задачах трубопроводного транспорта нефти и газа, в подготовке инженеров-исследователей с углубленными знаниями гидромеханики.

Предлагаемое изложение курса «Нефтегазовой гидромеханики» основано на комплексном подходе к изучению гидромеханики в нефтегазовых вузах. В трех частях книги излагаются основы механики сплошной среды, гидромеханика и нефтегазовая подземная гидромеханика.

Актуальность подобного курса возрастает в связи с необходимостью «фундаментализации» нефтегазового образования и созданием нефтегазовых университетов, введением в новые учебные планы ряда специальностей курса механики сплошной среды.

Учебное пособие «Нефтегазовая гидромеханика» написано в основном на материале курсов лекций, прочитанных авторами в РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, и может быть использовано студентами, магистрантами, аспирантами, научными сотрудниками и специалистами нефтегазовой отрасли при изучении цикла гидромеханических дисциплин – механики сплошной среды, теоретической и технической гидромеханики, подземной гидромеханики, газовой динамики. В учебном пособии наряду с классическим материалом излагаются и некоторые новые результаты, полученные совместно с профессором И.М. Астрахан, доцентами В.И. Исаевым и М.Н. Кравченко. Содержание отдельных глав и параграфов обсуждалось на научно-методических семинарах кафедры нефтегазовой и подземной гидромеханики и кафедры разработки и эксплуатации газовых и газоконденсатных месторождений РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина. Авторы благодарны коллективам этих кафедр, с которыми их связывает многолетняя научно-педагогическая работа. Авторы признательны заведующему кафедрой нефтегазовой и подземной гидромеханики профессору В.В. Кадету за поддержку и внимание к работе.

Глубокую благодарность и признательность авторы приносят академику РАН С.С. Григоряну, внимательно прочитавшему рукопись и отредактировавшему ее.

Часть I

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Введение

Теоретическая механика представляет собой науку об общих законах равновесия, движения и взаимодействия материальных тел. При этом рассматриваются не реальные физические тела, а их *модели*: материальные точки, системы материальных точек, абсолютно твердые (недеформируемые) тела. Использование этих моделей позволяет существенно упростить описание тех или иных явлений, сохраняя при этом их важнейшие особенности. Однако при рассмотрении многих вопросов существенными являются не только движения тех или иных тел, но и их деформации, то есть изменения их формы и объема. В этих случаях модели, используемые в теоретической механике, оказываются непригодными.

Естественным продолжением и развитием теоретической механики является наука, изучающая поведение деформируемых сред. Эта наука – механика сплошных сред – рассматривает физические тела как сплошные деформируемые среды, то есть так же, как и теоретическая механика, оперирует *моделями*.

В ряде случаев, например, при движении газов, процессы, происходящие в деформируемых средах, тесно связаны с термодинамическими явлениями в этих средах. Поэтому в основе механики сплошных сред лежат как законы *теоретической механики*, так и законы *термодинамики*.

Механика сплошных сред является теоретической базой таких дисциплин как гидромеханика ньютоновских и неньютоновских жидкостей, газовая динамика, подземная гидромеханика, теория упругости, теория пластичности.

§1. Гипотеза сплошности

Явления, рассматриваемые в механике сплошных сред, в частности, в механике жидкости и газа, носят макроскопический характер. Это позво-

ляет абстрагироваться от молекулярного строения вещества и рассматривать физические тела как сплошные среды.

Сплошная среда представляет собой материальный континуум, то есть непрерывное множество материальных точек с непрерывным (в общем случае – кусочно-непрерывным) распределением по нему кинематических, динамических, термодинамических и иных физико-химических характеристик рассматриваемой среды.

С физической точки зрения принятие модели сплошной среды означает, что при макроскопическом описании всякий «бесконечно малый» объем содержит достаточно большое число молекул. Например, кубик воздуха с ребром 10^{-3} мм содержит $27 \cdot 10^6$ молекул. Отсюда видно, что предлагаемая идеализация не будет применимой лишь при очень больших разрежениях.

Отметим еще раз, что понятие «сплошная среда» представляет собой модель реальных сред. Использование такой модели в механике жидкости и газа и ряде других областей оправдывается тем, что полученные на ее основе результаты подтверждаются экспериментально и всесторонней апробацией на практике. В качестве примеров можно указать на расчеты течений в трубопроводах различного назначения, истечения жидкостей и газов через сопла, фильтрации через пористые среды и т.д.

§2. Методы описания движения сплошной среды

При количественном изучении движения всегда подразумевается, что фиксирована некоторая система координат, относительно которой это движение рассматривается. Пусть в пространстве фиксирована система координат $Ox_1x_2x_3$ с ортонормированным базисом* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (рис.1.1). Закон движения индивидуализированной материальной точки задается, как известно, в виде функций ее координат от времени t в виде

$$x_i = x_i(t), \tag{1.1}$$

или, в векторной форме** ,

$$\vec{R} = \vec{e}_i x_i(t). \tag{1.2}$$

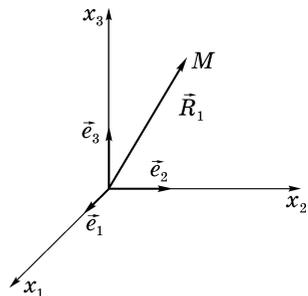


Рис. 1.1

* Ортонормированный базис - совокупность трех взаимно перпендикулярных единичных векторов.

** Здесь и далее, если специально не оговорено, буквенные индексы принимают значения 1, 2, 3 и по повторяющимся индексам производится суммирование, т.е. $\vec{e}_i x_i = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i x_i$.

Величины x_i называются *пространственными координатами точки*.

Описание движения сплошной среды означает, по определению, задание движения всех материальных точек, образующих рассматриваемый континуум. В качестве «меток», позволяющих отличать одну материальную точку от другой, можно использовать пространственные координаты этих точек в какой-либо момент времени $t = t_0$.

Обозначим пространственные координаты материальных точек сплошной среды при $t = t_0$ через X_i . Тогда закон движения сплошной среды можно представить в виде*

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(X_j, t), \quad (1.3)$$

или, в векторной форме,

$$\vec{R} = \vec{e}_i x_i(X_j, t). \quad (1.4)$$

Из правила задания «меток» следует, что соотношения (1.3) и (1.4) удовлетворяют равенствам

$$X_i = x_i(X_j, t_0), \quad \vec{R}_0 = \vec{e}_i x_i(X_j, t_0).$$

Координаты X_i называются *материальными координатами*.

Замечание: в качестве «меток» могут быть использованы любые взаимно однозначные функции материальных координат $q_i = q_i(X_j)$.

Функции (1.3) считаются непрерывными и имеющими непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Из физических соображений ясно, что в любой момент времени каждой материальной точке сплошной среды соответствует одна и только одна точка пространства и обратно – каждой точке пространства соответствует только одна материальная точка. Следовательно, при $t \geq t_0$ функции (1.3) задают взаимно однозначное соответствие между материальными X_i и пространственными x_i координатами. Последнее означает, что якобиан

$$J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0,$$

и соотношения (1.3) могут быть разрешены относительно материальных координат

$$X_j = X_j(x_i, t). \quad (1.5)$$

* Под выражением $a = a(b_j, t)$ в дальнейшем всюду подразумевается, что $a = a(b_1, b_2, b_3, t)$.

При описании движения сплошной среды могут быть использованы два разных метода.

В первом методе, *методе Лагранжа*** , для описания движения используются в качестве независимых переменных материальные координаты X_i – переменные Лагранжа и время t . Пусть физическая величина A (векторная или скалярная) задана как функция переменных Лагранжа и времени

$$A = A(X_j, t). \quad (1.6)$$

При фиксированных значениях материальных координат X_j зависимость (1.6) описывает изменение во времени величины A в фиксированной материальной точке сплошной среды. При фиксированном значении t соотношение (1.6) описывает распределение величины A в материальном объеме в фиксированный момент времени. Таким образом, физический смысл метода Лагранжа заключается в описании движения сплошной среды посредством описания движения индивидуализированных материальных точек.

Во втором методе, *методе Эйлера** , для описания движения используются пространственные координаты x_i – переменные Эйлера и время t . В этом случае различные характеристики сплошной среды (например, скорость, температура, давление и т.д.) должны быть заданы как функции Эйлеровых переменных. Пусть величина A (векторная или скалярная) задана как функция переменных Эйлера:

$$A = A(x_j, t). \quad (1.7)$$

При фиксированных пространственных координатах x_j зависимость (1.7) описывает изменение во времени величины A в заданной точке пространства. При фиксировании значения времени t соотношение (1.7) описывает распределение величины A в пространстве в этот момент времени. Таким образом, физический смысл метода Эйлера состоит в описании поведения сплошной среды в фиксированных точках пространства, а не в точках движущейся сплошной среды.

Использование того или иного метода зависит от постановки задачи. При выводе основных законов движения необходимо пользоваться методом Лагранжа, так как эти законы формулируются для фиксированных материальных объектов. В то же время при решении конкретных задач гидромеханики предпочтительным является метод Эйлера, так как в этом слу-

** Жозеф Луи Лагранж (1736-1813), французский математик и механик, иностранный почетный член Петербургской Академии Наук.

* Леонард Эйлер (1707-1783), математик, механик, физик и астроном. По происхождению швейцарец. Один из основоположников теоретической гидромеханики. Действительный, а затем иностранный почетный член Петербургской Академии Наук.

чае, как правило, важно знать распределение характеристик среды в пространстве.

Методы Лагранжа и Эйлера эквивалентны в том смысле, что если задано описание движения по одному из них, то всегда возможен переход к описанию движения по другому методу.

Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера в случае, когда величина A задана как функция лагранжевых координат, то есть задано соотношение (1.6) и известен закон движения (1.3), сводится к разрешению уравнений (1.3) относительно величин X_j , то есть к нахождению уравнений (1.5) и замене X_j на $X_j(x_i, t)$. Тогда из соотношений (1.5) и (1.6) имеем

$$A(X_j, t) = A(X_j(x_i, t), t) = A(x_i, t). \quad (1.8)$$

Если известен закон движения (1.3), а величина A задана как функция эйлеровых координат, то есть задано соотношение (1.7), то, проделывая преобразования в равенстве (1.8) в обратном порядке, имеем

$$A(x_i, t) = A(x_i(X_j, t), t) = A(X_j, t). \quad (1.9)$$

Если закон движения не задан, но известно распределение вектора скорости* $\vec{v} = \vec{e}_i v_i(x_j, t)$, то из равенств (1.3) или (1.4) следует, что

$$v_i(x_j, t) = \frac{\partial x_i}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Интегрируя уравнения (1.10) получим, что $x_i = x_i(C_1, C_2, C_3, t)$, где C_j – константы интегрирования, которые представляют значения x_i в некоторый момент времени t_0 и могут быть приняты за «метки», индивидуализирующие материальные точки сплошной среды. Следовательно, в результате интегрирования уравнений (1.10) определяется закон движения сплошной среды (1.3) и переход от метода Эйлера к методу Лагранжа выполняется в соответствии с равенством (1.9).

Таким образом, при переходе от метода Лагранжа к методу Эйлера и наоборот могут возникнуть лишь технические трудности при разрешении уравнений (1.1), или интегрировании соотношений (1.8), так как теоретически такой переход возможен всегда.

§3. Локальная и субстанциональная производная

Скорость изменения со временем *любого свойства* A , например, скорости, плотности, температуры фиксированной материальной точки

* Если описание по методу Эйлера известно, то известно распределение скоростей, т.е. известны функции $v_i(x_j, t)$.

движущейся сплошной среды называется субстанциональной (материальной, индивидуальной или полной) производной по времени и обозначается символом $\frac{dA}{dt}$.

Величина A может быть скаляром или вектором и задана как функция лагранжевых или эйлеровых координат, т.е. $A = A(X_i, t)$ или $A = A(x_i, t)$. Так как материальная точка движется по своей траектории, то величина A может быть задана также в виде $A = A(s, t)$, где s – длина дуги, отсчитываемая вдоль траектории.

При движении фиксированной точки ее материальные координаты не изменяются. Поэтому

$$\frac{d}{dt} A(X_i, t) = \frac{\partial A(X_i, t)}{\partial t}. \quad (1.11)$$

Наоборот, ее пространственные координаты являются функциями времени и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} A(x_i, t) = \frac{\partial A(x_i, t)}{\partial t} + \frac{\partial A(x_i, t)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t}, \quad (1.12)$$

или

$$\frac{d}{dt} A(s, t) = \frac{\partial A(s, t)}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial s} \frac{ds}{dt}. \quad (1.13)$$

Очевидно, что $\frac{ds}{dt} = v$ – модуль вектора скорости, а $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ – компоненты вектора скорости рассматриваемой точки. Тогда с учетом уравнений (1.10) формулы (1.12) и (1.13) могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dt} A(x_i, t) = \frac{\partial A(x_i, t)}{\partial t} + v_j \frac{\partial A(x_i, t)}{\partial x_j}, \quad (1.14)$$

$$\frac{d}{dt} A(s, t) = \frac{\partial A(s, t)}{\partial t} + v \frac{\partial A(s, t)}{\partial s}. \quad (1.15)$$

Если A – скалярная величина, то очевидно, что

$$v_j \frac{\partial A(x_i, t)}{\partial x_j} = \bar{v} \operatorname{grad} A = \bar{v} \nabla A, \quad (1.16)$$

а производная по направлению s равна

$$\frac{\partial A(s, t)}{\partial s} = \bar{s}^o \nabla A \quad \text{и} \quad v \frac{\partial A}{\partial s} = v \bar{s}^o \nabla A = \bar{v} \nabla A, \quad (1.17)$$

где \bar{s}^0 – единичный вектор касательной к траектории, $\bar{v} = \bar{e}_i v_i$ – вектор скорости.

С учетом выражений (1.16) и (1.17) формулы (1.14) и (1.15) могут быть представлены в виде

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \bar{v} \nabla A. \quad (1.18)$$

Если A – вектор, т.е. $\bar{A} = \bar{e}_i A_i$, то в соответствии с равенством (1.14)

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j},$$

откуда

$$\begin{aligned} \bar{e}_i \frac{dA_i}{dt} &= \frac{d\bar{e}_i A_i}{dt} = \frac{d\bar{A}}{dt}, & \bar{e}_i \frac{\partial A_i}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{e}_i A_i}{\partial t} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \\ \bar{e}_i v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} &= v_j \frac{\partial \bar{e}_i A_i}{\partial x_j} = v_j \frac{\partial \bar{A}}{\partial x_j} = (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{A} \end{aligned}$$

и

$$\frac{d\bar{A}}{dt} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{A}, \quad (1.19)$$

где $(\bar{v} \cdot \nabla)$ – символический оператор, равный

$$(\bar{v} \cdot \nabla) = v_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Первое слагаемое в формулах (1.12)-(1.15) и (1.18), (1.19) характеризует скорость изменения свойства A в фиксированной точке пространства и называется локальной производной. Второе слагаемое в этих формулах называется конвективной производной и характеризует изменение A за счет перемещения материальной точки в пространстве. Величина конвективной производной определяется как движением материальной точки ($\bar{v} \neq 0$), так и неоднородностью распределения величины A в пространстве ($\frac{\partial A}{\partial x_i} \neq 0$).

§4. Скалярные и векторные поля

Если в каждой точке области пространства D и каждому моменту времени t поставлено в соответствие значение скалярной (векторной) величины, то говорят, что в области D задано *скалярное (векторное) поле*.

Таким образом, *под полем* какой-либо величины понимается совокупность ее значений, заданных в каждой точке области D и в заданном интервале времени. Например, если заданы функции скалярных величин

$$\rho = \rho(x_i, t), \quad T = T(x_i, t), \quad (1.20)$$

где ρ – плотность, T – температура, то функции (1.20) определяют скалярные поля плотности и температуры. Если же дана векторная функция, например,

$$v_k = v_k(x_i, t) \quad \text{или} \quad \vec{v} = \vec{v}(x_i, t), \quad (1.21)$$

то функции (1.21) задают векторное поле скоростей.

Очевидно, что понятие поля физической величины применимо при описании движения только с помощью метода Эйлера.

Скалярное (векторное) поле называется *непрерывным*, если функция, его представляющая, непрерывна по x_i и t . Если функция, представляющая поле, не зависит от времени t , то поле называется *стационарным*.

Если все поля, описывающие движение сплошной среды, стационарны, то такое движение называется *установившимся или стационарным*. Если же эти поля (или хотя бы одно из них) зависят от времени, то движение называется *неустановившимся или нестационарным*. При установившемся движении все локальные производные (частные производные по времени) равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0, \quad \dots$$

Понятия установившегося или неустановившегося движения применимы только при описании движения методом Эйлера и являются относительными. Одно и то же движение может быть установившимся относительно одной системы координат и неустановившимся относительно другой. Например, при движении с постоянной скоростью твердого тела в жидкости движение жидкости будет установившимся в системе координат, связанной с телом, и неустановившимся в неподвижной системе координат.

Для любого векторного поля можно ввести понятие *векторной линии*. Векторной линией называется линия, касательная в каждой точке которой в данный момент времени совпадает с направлением вектора поля в этой точке. Из этого определения следует, что если задано векторное поле $\vec{A}(x_i, t)$, то в точках векторной линии в данный момент времени выполняется условие $\vec{A} \parallel d\vec{s}$, где $d\vec{s}$ – бесконечно малый вектор касательной, или $d\vec{s} = \vec{A}d\lambda$, где $d\lambda$ – скалярный параметр (рис. 1.2).

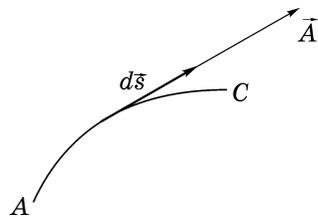


Рис. 1.2

Векторные линии поля скоростей называются *линиями тока*. Так как для них, по определению, $d\vec{s} = \vec{e}_i dx_i = \vec{v} d\lambda = \vec{e}_i v_i d\lambda$, то уравнения линий тока имеют вид

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i(x_j, t). \quad (1.22)$$

Заметим, что вдоль траектории движения материальной точки имеет место равенство

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_j, t). \quad (1.23)$$

В соотношении (1.22) время является параметром, а в (1.23) – независимой переменной.

Решение системы уравнений (1.22) имеет вид $x_i = x_i(c_j, \lambda, t)$, где c_j – константы интегрирования, и линии тока (векторные линии) в разные моменты времени могут иметь разный вид.

При установившемся движении уравнения (1.22) и (1.23) принимают, соответственно, вид

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = v_i(x_j), \quad \frac{dx_i}{dt} = v_i(x_j),$$

и отличие сводится к разному обозначению параметра, по которому ведется дифференцирование. Следовательно, при установившемся движении линии тока и траектории материальных точек совпадают.

Если решение системы уравнений (1.22) существует и единственно, то через каждую точку пространства проходит единственная линия тока. Однако в некоторых точках поля скоростей условия существования и единственности могут нарушаться. В частности, условия единственности решения могут нарушаться в точках, в которых компоненты вектора скорости обращаются в нуль или в бесконечность.

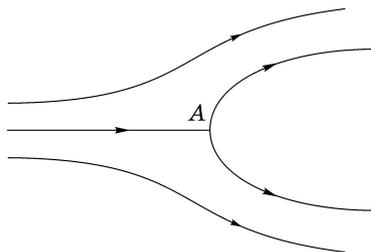


Рис. 1.3

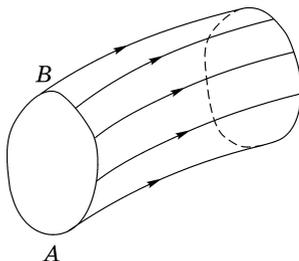


Рис. 1.4

Точки, в которых скорость обращается в нуль или в бесконечность, называются *особыми*. На рис.1.3 приведен пример поля скоростей, образующегося при обтекании жидкостью твердого тела. В точке A скорость равна нулю, и линия тока разветвляется.

Рассмотрим некоторую область поля скоростей, полагая, что в ней отсутствуют особые точки. Проведем в этой области кривую AB , не являющуюся линией тока. В этом случае через каждую точку кривой AB можно провести единственную линию тока. Совокупность этих линий тока образует поверхность, в каждой точке которой вектор скорости лежит в касательной плоскости к этой поверхности. Такая поверхность называется *поверхностью тока*. Так как через каждую точку поверхности тока проходит единственная линия тока, то эта поверхность непроницаема для частиц жидкости. Если линия AB замкнута (рис.1.4), то поверхность называется *трубкой тока*.

Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ – уравнение поверхности тока. Так как

$$\nabla f = \vec{e}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

есть вектор нормали к этой поверхности, а вектор скорости $\vec{v} = \vec{e}_i v_i$ лежит в касательной плоскости к поверхности тока, то

$$\vec{v} \nabla f = v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (1.24)$$

представляет собой условие, обязательно выполняющееся на поверхности тока.

Рассечем трубку тока какой-либо поверхностью. Если в каждой точке этой поверхности вектор скорости направлен по нормали, то такая поверхность называется *живым сечением*. Пусть $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ – уравнение поверхности живого сечения. Так как вектор скорости \vec{v} параллелен нормали к этому сечению, то $\nabla \varphi \parallel \vec{v}$, или $\vec{v} \times \nabla \varphi = 0$.

Если длина линии AB бесконечно мала, то трубка тока называется *элементарной*. Понятно, что параметры течения (скорость, плотность и т.д.) в элементарной трубке тока равномерно распределены по живому сечению.

§5. Силы и напряжения в сплошной среде. Тензор напряжений

Движение сплошной среды, как и абсолютно твердого тела, происходит под действием сил. Но если в теоретической механике, как правило, рассматриваются сосредоточенные силы, то в механике сплошной среды главным образом имеют дело с *распределенными силами*.

По характеру действия, вне зависимости от конкретной физической природы, в механике сплошной среды различают два класса сил: *массовые*

и поверхностные. Массовыми силами называют силы, величина которых пропорциональна массе среды, на которую они действуют. Примерами массовых сил могут служить гравитационные и электромагнитные силы, силы инерции. *Поверхностными силами* называют силы, величина которых пропорциональна площади поверхности, на которую они действуют. Примерами поверхностных сил могут служить силы давления и трения.

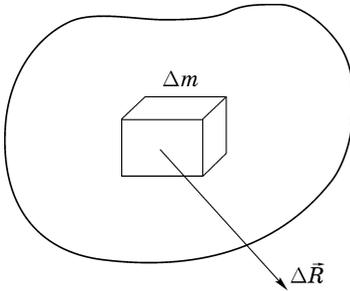


Рис. 1.5

Однако в механике сплошных сред рассматриваются не собственно массовые и поверхностные силы, а их *напряжения (плотности распределения)*. Напряжение массовых сил в точке M определяется как предел отношения

$$\lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta m} = \vec{F}(M),$$

где $\Delta \vec{R}$ – главный вектор массовых сил, действующих на массу Δm , заключенную в элементарном объеме ΔV , содержащем точку M (рис. 1.5).

Напряжение массовой силы имеет размерность ускорения. Для силы тяжести напряжение $\vec{F} = \vec{g}$, где \vec{g} – вектор ускорения силы тяжести.

Для определения напряжения поверхностных сил рассмотрим на поверхности S , проведенной в сплошной среде, элементарную площадку ΔS , содержащую точку M (рис.1.6). Напряжение поверхностной силы в точке M определяется как предел отношения

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S} = \vec{p}(M).$$

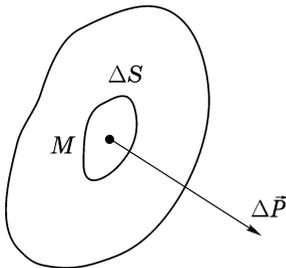


Рис. 1.6

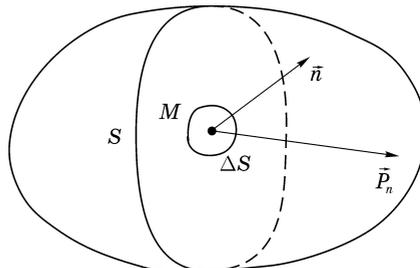


Рис. 1.7

Очевидно, что через точку M можно провести бесконечно много поверхностей S , и в общем случае напряжение в точке M для разных поверхностей может быть различным (рис. 1.7). Следовательно, напряжение поверхностной силы является не только функцией точки пространства, но и ориентации элементарной площадки ΔS . Это означает, что в отличие от напряжения массовых сил, являющегося функцией только точки пространства и, следовательно, образующего векторное поле, напряжение поверхностных сил векторного поля не образует.

Ориентация в пространстве площадки ΔS может быть задана единичным вектором нормали \vec{n} к поверхности S в точке M . Поэтому $\vec{p} = \vec{p}(\vec{n}, M)$ или, как это обычно принято, зависимость \vec{p} от \vec{n} обозначают в виде индекса: $\vec{p} = \vec{p}_n(M)$.

Однако поверхность S является двусторонней и в точке M можно провести две нормали: \vec{n} и $-\vec{n}$ (рис. 1.8). Поэтому необходимо принять соглашение о положительном направлении нормали. Будем считать, что положительное направление указывает на ту часть сплошной среды, со стороны которой на площадку ΔS воздействуют поверхностные силы. Из этого соглашения следует, что при совпадении направлений \vec{n} и \vec{p}_n поверхностные силы являются растягивающими, а если их направления противоположны – сжимающими.

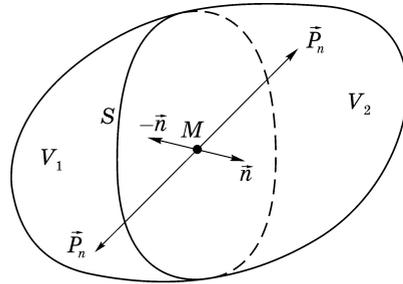


Рис. 1.8

Разделим объем сплошной среды V поверхностью S на части V_1 и V_2 (рис. 1.8) и рассмотрим поверхность S как границу объема V_1 . Сила, действующая на площадку ΔS со стороны объема V_2 , в соответствии с принятым соглашением о положительном направлении нормали, равна $\vec{p}_n(M)\Delta S$, а на всю поверхность S действует сила

$$\int_S \vec{p}_n(M) dS.$$

Если же рассматривать поверхность S как границу объема V_2 , то сила, действующая на площадку ΔS равна $\vec{p}_{-n}(M)\Delta S$, а на всю поверхность S действует сила

$$\int_S \vec{p}_{-n}(M) dS.$$

В соответствии с третьим законом Ньютона

$$\int_S [\vec{p}_n(M) + \vec{p}_{-n}(M)] dS = 0,$$

а так как поверхность S произвольна, то

$$\vec{p}_n(M) = -\vec{p}_{-n}(M). \quad (1.25)$$

Напряжение \vec{p}_n можно разложить на нормальную p_{nn} и тангенциальную p_τ составляющие:

$$\vec{p}_n = \bar{n}p_n + \vec{t}p_\tau, \quad (1.26)$$

где \vec{t} – единичный вектор и $\bar{n} \cdot \vec{t} = 0$.

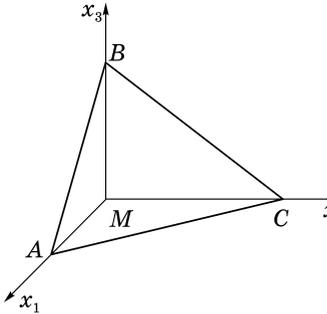


Рис. 1.9

Возьмем какую-либо точку M сплошной среды, проведем из этой точки координатные оси x_1, x_2, x_3 и построим на них бесконечно малый тетраэдр $ABCM$ (рис. 1.9) с ребрами dx_1, dx_2, dx_3 . Так как, по построению, грани тетраэдра BCM, ABM, CAM перпендикулярны соответствующим ортам базиса, то $\bar{n}_1 = -\bar{e}_1, \bar{n}_2 = -\bar{e}_2, \bar{n}_3 = -\bar{e}_3$. Ориентировка грани ABC произвольна и задается вектором нормали $\bar{n} = \bar{e}_i\alpha_{ni}$, где $\alpha_{ni} = \bar{n} \cdot \bar{e}_i$ – направляющие косинусы нормали. Тогда напряжения на соответствующих гранях будут \vec{p}_{-i} и \vec{p}_n .

Обозначим площадь грани ABC через dS . Площади остальных граней можно вычислить как площади проекций грани ABC на соответствующие координатные плоскости: $dS_1 = \alpha_{n1}dS$ для грани BCM , $dS_2 = \alpha_{n2}dS$ – для ABM , $dS_3 = \alpha_{n3}dS$ – для ACM , или

$$dS_i = (\bar{n} \cdot \bar{e}_i)dS = \alpha_{ni}dS. \quad (1.27)$$

На тетраэдр $ABCM$ будут действовать поверхностные силы $\vec{p}_{-i}dS_i$ и \vec{p}_ndS , а также массовая сила $d\vec{R} = \vec{F}dm = \rho\vec{F}dV = \rho\vec{F} \frac{1}{3}hdS$, где dm – масса в объеме тетраэдра dV , h – высота тетраэдра. В соответствии со вторым законом Ньютона сумма сил, действующих на тетраэдр $ABCM$, равна произведению его массы на ускорение, т.е. с учетом равенства (1.27)

$$\frac{1}{3}\rho h\vec{F}dS + \vec{p}_{-i}\alpha_{ni}dS + \vec{p}_ndS = \frac{d\vec{v}}{dt}dm = \frac{1}{3}\rho h \frac{d\vec{v}}{dt}dS. \quad (1.28)$$

Сокращая все члены равенства (1.28) на dS и стягивая тетраэдр в точку (то есть полагая $h \rightarrow 0$), получим

$$\vec{p}_{-i}\alpha_{ni} + \vec{p}_n = 0,$$

или, с учетом формулы (1.25),

$$\vec{p}_n = \vec{p}_i\alpha_{ni}. \quad (1.29)$$

Векторы \vec{p}_i можно представить в виде

$$\vec{p}_i = \vec{e}_j p_{ji}, \tag{1.30}$$

где через p_{ji} обозначена j -я компонента вектора \vec{p}_i .

Векторное равенство (1.30) эквивалентно следующим соотношениям в компонентах

$$\begin{aligned} p_{n1} &= p_{11}\alpha_{n1} + p_{21}\alpha_{n2} + p_{31}\alpha_{n3}, \\ p_{n2} &= p_{12}\alpha_{n1} + p_{22}\alpha_{n2} + p_{32}\alpha_{n3}, \\ p_{n3} &= p_{13}\alpha_{n1} + p_{23}\alpha_{n2} + p_{33}\alpha_{n3}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Таким образом, напряженное состояние в точке определяется совокупностью трех векторов напряжения p_i , или их девятью компонентами p_{ij} , определенными на трех взаимно перпендикулярных площадках. Соотношение (1.29) является определением тензора (сам термин «тензор» происходит от французского слова *tension*, означающего напряжение).

Компоненты p_{ij} образуют тензор второго ранга, которому можно поставить в соответствие матрицу

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.32}$$

Первый индекс компоненты p_{ij} тензора напряжений указывает на направление координатной оси, параллельно которой направлен вектор нормали \vec{n} , второй – направление координатной оси, на которую спроектирован вектор напряжения (рис. 1.10). Так, p_{21} представляет собой проекцию вектора \vec{p}_2 , приложенного к площадке, перпендикулярной оси x_2 , на ось x_1 .

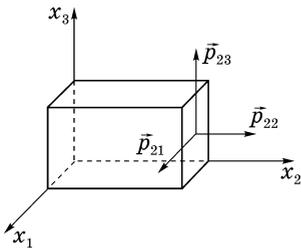


Рис.

Компоненты с одинаковыми индексами p_{ii} называются *нормальными напряжениями*, а компоненты $p_{ik} (i \neq k)$ – *касательными напряжениями*, или *напряжениями сдвига*.

Тензор напряжений p_{ij} зависит от координат x_i и времени t и образует тензорное поле.

Заметим, что помимо изложенной классической теории напряженного состояния, в которой считается, что моменты поверхностных и массовых сил в точке M равны нулю, существуют и более сложные теории, в которых рассматриваются сплошные среды с распределенными моментами поверхностных и массовых сил. Они рассматриваются в специальных разделах механики сплошной среды, например, при изучении жидких и упругих сред с микроструктурой.

Глава II

**ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ.
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

§1. Интегральные характеристики сплошной среды и законы сохранения

Основные уравнения для сплошной среды выводятся из законов сохранения, представляющих собой фундаментальные законы природы. В механике сплошных сред основными законами сохранения являются законы сохранения массы, изменения количества движения, изменения момента количества движения, энергии и баланса энтропии. Для математической формулировки законов сохранения рассматривают или *материальный (подвижный)*, или *контрольный объем*.

Под *материальным (подвижным)* объемом понимается объем, состоящий во все моменты времени из одних и тех же материальных точек.

Область пространства, через границы которой могут проходить вещество, энергия, количество движения и т.д., называется контрольным объемом, а поверхность, ограничивающая эту область – контрольной поверхностью. Контрольная поверхность может перемещаться в пространстве, но обычно считается неподвижной.

При рассмотрении материального объема считается, что он представляет собой единое физическое тело, обладающее

массой
$$M = \int_{V(t)} \rho dV, \quad (2.1)$$

количеством движения
$$\vec{J} = \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV, \quad (2.2)$$

моментом количества движения
$$\vec{M} = \int_{V(t)} (\vec{r} \times \rho \vec{v}) dV, \quad (2.3)$$

энергией
$$E = \int_{V(t)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV, \quad (2.4)$$

которая представляет собой сумму

кинетической энергии
$$K = \int_{V(t)} \rho \frac{v^2}{2} dV \tag{2.5}$$

и внутренней энергии
$$U = \int_{V(t)} \rho u dV, \tag{2.6}$$

энтропией
$$S = \int_{V(t)} \rho s dV, \tag{2.7}$$

где $\rho = \rho(x_j, t)$ – плотность, $\vec{v} = \vec{v}(x_j, t)$ – скорость, $u = u(x_j, t)$ – удельная (отнесенная к единице массы) внутренняя энергия, $s = s(x_j, t)$ – удельная (отнесенная к единице массы) энтропия, \vec{r} – радиус-вектор материальной частицы, отсчитываемый от точки, относительно которой определяется момент количества движения, $V(t)$ – материальный (подвижный) объем.

Закон сохранения массы утверждает, что масса материального объема (2.1) остается постоянной. Следовательно, полная производная от выражения (2.1) равна нулю, то есть

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0. \tag{2.8}$$

Согласно второму закону Ньютона, скорость изменения количества движения жидкого объема равна сумме всех внешних сил, действующих на этот объем. Поэтому материальная производная от величины (2.2) равна

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \vec{F}^{(e)}, \tag{2.9}$$

где $\vec{F}^{(e)}$ – сумма всех внешних массовых и поверхностных сил, приложенных к объему $V(t)$.

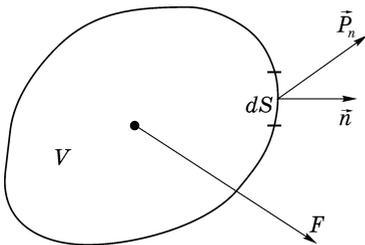


Рис. 2.1

Сумма внешних массовых сил может быть представлена в виде (рис. 2.1)

$$\int_{V(t)} \rho \vec{F} dV.$$

Сумма внешних поверхностных сил, очевидно, равна (рис. 2.1)

$$\int_{S(t)} \vec{p}_n dS,$$

где $S(t)$ – замкнутая поверхность, ограничивающая материальный объем $V(t)$.

С учетом этих замечаний закон изменения количества движения (2.9) можно представить в виде

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \int_{V(t)} \rho \vec{F} dV + \int_{S(t)} \vec{p}_n dS. \quad (2.10)$$

Закон изменения момента количества движения утверждает, что скорость изменения момента количества движения материального объема относительно любой точки равна главному моменту всех внешних массовых и поверхностных сил относительно той же точки. Так как эти моменты, по определению, равны

$$\int_{V(t)} (\vec{r} \times \rho \vec{F}) dV, \quad \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{p}_n dS,$$

то закон изменения момента количества движения для материального объема представляется соотношением

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} (\vec{r} \times \rho \vec{v}) dV = \int_{V(t)} (\vec{r} \times \rho \vec{F}) dV + \int_{S(t)} \vec{r} \times \vec{p}_n dS. \quad (2.11)$$

Закон сохранения энергии состоит в утверждении, что скорость изменения энергии материального объема $V(t)$ равна сумме механической работы внешних массовых и поверхностных сил W , совершенных в единицу времени (мощность внешних сил), и притока в единицу времени прочих видов энергии Q . Следовательно, материальная производная от выражения (2.4) будет связана с величинами W и Q соотношением

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV = W + Q. \quad (2.12)$$

В дальнейшем будем считать, что Q представляет собой только скорость притока тепла. Закон сохранения энергии иначе называется первым началом термодинамики.

Мощность внешних объемных сил W_1 равна, очевидно,

$$W_1 = \int_{V(t)} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dV,$$

а для мощности поверхностных сил W_2 имеем

$$W_2 = \int_{S(t)} \vec{p}_n \cdot \vec{v} dS.$$

Приток тепла в единицу времени Q можно представить как

$$Q = \int_{V(t)} \rho q_e dV,$$

где q_e – удельное по массе количество тепла, подводимое к жидкому объему $V(t)$ в единицу времени.

Тогда закон сохранения энергии (2.12) принимает вид

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_{V(t)} \rho \bar{F} \bar{v} dV + \int_{S(t)} \bar{p}_n \bar{v} dS + \int_{V(t)} \rho q_e dV. \quad (2.13)$$

Наряду с законами сохранения массы, изменения количества движения, момента количества движения и с законом сохранения энергии можно сформулировать теорему (закон) об изменении кинетической энергии (теорему живых сил)*. Эта теорема утверждает, что изменение кинетической энергии жидкого объема во времени равна сумме работ (мощностей) внешних и внутренних сил, действующих на этот объем. Поэтому материальная производная от выражения (2.5) представляется в виде

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \frac{v^2}{2} dV = \int_{V(t)} \rho \bar{F} \bar{v} dV + \int_{S(t)} \bar{p}_n \bar{v} dS + \int_{V(t)} \rho N^{(i)} dV, \quad (2.14)$$

где $N^{(i)}$ – удельная по массе мощность внутренних сил, то есть мощность, приходящаяся на единицу массы среды.

Подчеркнем особо, что в соотношении (2.14), в отличие от закона сохранения энергии (2.13), входят мощности как внешних, так и внутренних сил.

Закон баланса энтропии представляет собой второй закон термодинамики и формулируется следующим образом: скорость изменения энтропии жидкого объема $V(t)$ никогда не может быть меньше, чем сумма притока энтропии через его границу $S(t)$ и энтропии, производимой внутри объема внешними источниками. Математическая запись закона баланса энтропии в интегральной форме выражается неравенством

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho s dV \geq \int_{V(t)} \rho e dV - \int_{S(t)} \frac{\bar{q} \cdot \bar{n}}{T} dS, \quad (2.15)$$

которое носит название неравенства Клаузиуса-Дюгема. В неравенстве (2.15) приняты следующие обозначения: s – удельная по массе энтропия, e – мощность локальных внешних источников энтропии, отнесенная к единице массы, \bar{q} – вектор потока тепла через единицу площади в единицу времени. Равенство в формуле (2.15) осуществляется для обратимых процессов, а неравенство – для необратимых.

* В отличие от приведенных выше законов теорема об изменении кинетической энергии не является независимым законом. Как известно из теоретической механики, эта теорема выводится из теоремы (закона) об изменении количества движения.

Левые части соотношений (2.8), (2.10), (2.11), (2.13) и (2.14) можно записать в общем виде как

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varphi(x_j, t) dV = \Phi,$$

где $\varphi(x_j, t)$ может принимать одно из значений ρ , $\rho \bar{v}$, $\bar{r} \times \rho \bar{v}$, $\rho(u + v^2/2)$, $\rho v^2/2$, а Φ представляет собой правые части указанных выше равенств. Поэтому для придания соотношениям (2.8), (2.10), (2.11), (2.13), (2.14) соответствующей математической формулировки, необходимо вычислить полную (материальную) производную по времени от интеграла, взятого по материальному (подвижному) объему.

§2. Дифференцирование по времени интеграла, взятого по подвижному объему

Для вывода формулы дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному материальному объему, рассмотрим положение этого объема $V(t)$ в моменты времени t и $t + \Delta t$ (рис. 2.2). По определению полной производной,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varphi(x_j, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V(t+\Delta t)} \varphi(x_j, t + \Delta t) dV - \int_{V(t)} \varphi(x_j, t) dV \right], \quad (2.16)$$

где $V(t + \Delta t)$ – положение, занимаемое жидким объемом $V(t)$ в момент времени $t + \Delta t$.

Так как

$$\int_{V(t+\Delta t)} \varphi(x_j, t + \Delta t) dV = \int_{V(t)} \varphi(x_j, t + \Delta t) dV + \int_{V(t+\Delta t)-V(t)} \varphi(x_j, t + \Delta t) dV,$$

то равенство (2.16) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varphi(x_j, t) dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V(t)} \frac{\varphi(x_j, t + \Delta t) - \varphi(x_j, t)}{\Delta t} dV + \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{V(t+\Delta t)-V(t)} \varphi(x_j, t + \Delta t) dV. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Первое слагаемое в соотношении (2.17), очевидно, равно

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V(t)} \frac{\varphi(x_j, t + \Delta t) - \varphi(x_j, t)}{\Delta t} dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \varphi(x_j, t)}{\partial t} dV. \quad (2.18)$$

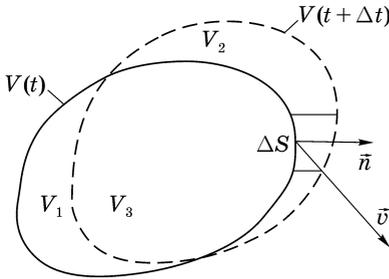


Рис. 2.2

Для вычисления второго слагаемого заметим, что, как это видно из рис. 2.2, $V(t + \Delta t) - V(t) = V_2 + V_3 - V_3 - V_1 = V_2 - V_1$, где V_1 и V_2 – объемы пространства, соответственно, освобожденные и вновь занятые за время Δt при движении материального объема, V_3 – общая часть объемов $V(t)$ и $V(t + \Delta t)$.

Для объема V_2 элемент объема dV может быть вычислен как объем цилиндра (рис. 2.2) с основанием dS и высотой $v_n \Delta t = \vec{v} \cdot \vec{n} \Delta t$, где v_n – проекция скорости на внешнюю нормаль \vec{n} к поверхности S_2 , разделяющей объемы V_2 и V_3 .

Тогда

$$\int_{V_2} \varphi(x_j, t + \Delta t) dV = \int_{S_2} \varphi(x_j, t + \Delta t) v_n \Delta t dS.$$

Проведя аналогичные рассуждения для объема V получим, что высота элементарного цилиндра равна $\vec{v} \cdot \vec{n} \Delta t = -v_n \Delta t$ и

$$\int_{V_1} \varphi(x_j, t + \Delta t) dV = - \int_{S_1} \varphi(x_j, t + \Delta t) v_n \Delta t dS,$$

где S_1 – поверхность, разделяющая объемы V_1 и V_2 .

Из приведенных рассуждений следует, что второе слагаемое в правой части (2.17) имеет вид

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{V(t+\Delta t)-V(t)} \varphi(x_j, t + \Delta t) dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_2} \varphi(x_j, t + \Delta t) dV - \int_{V_1} \varphi(x_j, t + \Delta t) dV \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\int_{S_2} \varphi(x_j, t + \Delta t) v_n dS + \int_{S_1} \varphi(x_j, t + \Delta t) v_n dS \right] = \int_{S(t)} \varphi(x_j, t) v_n dS, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $S(t)$ – замкнутая поверхность, ограничивающая объем $V(t)$.

Подставив выражения (2.18) и (2.19) в (2.17), получим окончательно

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varphi(x_j, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \varphi(x_j, t)}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \varphi(x_j, t) v_n dS. \quad (2.20)$$

Подчеркнем еще раз, что в соотношении (2.20) нормаль \vec{n} считается внешней по отношению к замкнутой поверхности $S(t)$.

Для дальнейшего преобразования соотношения (2.20) воспользуемся теоремой Гаусса–Остроградского* в виде

$$\int_S a_n dS = \int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_S a_i \alpha_{ni} dS = \int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV, \quad (2.21)$$

где $\vec{a} = \vec{e}_j a_j$, α_{ni} – направляющие косинусы нормали \vec{n} , а дивергенция вектора \vec{a} равна

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

Полагая в соотношении (2.21) $\vec{a} = \varphi \vec{v}$, из (2.20) получим

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varphi(x_j, t) dV = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \varphi \vec{v} \right) dV, \quad (2.22)$$

где для краткости записи опущены аргументы функции $\varphi(x_j, t)$.

Так как

$$\operatorname{div} \varphi \vec{v} = \varphi \operatorname{div} \vec{v} + v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

а

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{d\varphi}{dt},$$

то соотношение (2.22) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varphi dV = \int_{V(t)} \left(\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} \vec{v} \right) dV. \quad (2.23)$$

Легко видеть, что соотношения (2.20) и (2.23) сохраняют свой вид и в том случае, когда $\varphi(x_j, t)$ представляет собой векторную функцию своих аргументов**.

Полученное выражение для дифференцирования интеграла по времени позволяет вывести единообразным способом математические выражения законов сохранения массы, изменения количества движения, изменения момента количества движения, энергии и изменения кинетической энергии.

* Карл Фридрих Гаусс (1777–1855), немецкий математик, иностранный почетный член Петербургской Академии Наук.

Михаил Васильевич Остроградский (1801–1861), русский математик и механик, действительный член Петербургской Академии Наук.

** Более строгий вывод соотношения (2.23) приведен в приложении.

§3. Уравнение неразрывности (закон сохранения массы)

Уравнение неразрывности представляет собой дифференциальную форму закона сохранения массы сплошной среды. Полагая в равенстве (2.23) $\varphi = \rho$ и используя условие постоянства массы жидкого объема (2.8), получим

$$\int_{V(t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) dV = 0. \quad (2.24)$$

Так как это равенство справедливо для произвольного жидкого объема, то подынтегральное выражение в соотношении (2.24) равно нулю, то есть

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) называется уравнением неразрывности. Очевидно, что если вместо (2.23) использовать (2.22), то уравнение неразрывности можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \quad (2.26)$$

Для получения уравнения неразрывности для трубки тока воспользуемся соотношениями (2.8) и (2.20), положив в последнем $\varphi = \rho$. При этом получим

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \rho v_n dS = 0. \quad (2.27)$$

Соотношение (2.27) называется уравнением неразрывности в интегральной форме.

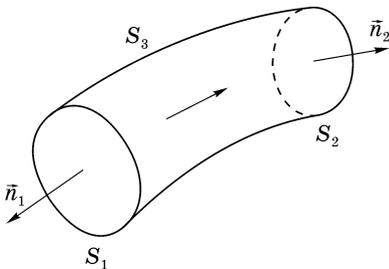


Рис. 2.3

Применим соотношение (2.27) к течению жидкости по трубке тока. Проведем живые сечения S_1 и S_2 (рис. 2.3). Контрольная поверхность S будет состоять из трех частей: живых сечений S_1 и S_2 , через которые жидкость втекает и вытекает из рассматриваемого участка трубки тока, и ее боковой поверхности S_3 .

В точках боковой поверхности S_3 , по определению трубки тока, $v_n = 0$, и соотношение (2.27) принимает вид

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S_1} \rho v_n dS + \int_{S_2} \rho v_n dS = 0. \quad (2.28)$$

Так как в (2.28) берется внешняя нормаль, то в сечении S_2 , по определению живого сечения, $v_n = v$, а в сечении S_1 $v_n = -v$, и соотношение (2.28) принимает вид

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_{S_1} \rho v dS - \int_{S_2} \rho v dS. \quad (2.29)$$

При установившемся движении $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, и из уравнения (2.29) имеем

$$\int_{S_1} \rho v dS = \int_{S_2} \rho v dS = Q_m = \text{const}. \quad (2.30)$$

Величина $Q_m = \int_S \rho v dS$ представляет собой массу жидкости, проходящей через живое сечение в единицу времени, и называется *массовым расходом*. Таким образом, соотношение (2.30) показывает, что при установившемся течении массовый расход вдоль трубки тока постоянен.

Для элементарной трубки тока соотношение (2.30) принимает вид

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \text{const}. \quad (2.31)$$

Жидкость называется несжимаемой, если плотность любой ее частицы есть величина постоянная, то есть если $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Из уравнения (2.25) для несжимаемой жидкости получается $\text{div } \vec{v} = 0^*$. Тогда в соответствии с теоремой Гаусса–Остроградского

$$\int_V \text{div } \vec{v} dV = \int_S v_n dS = 0. \quad (2.32)$$

Повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим, из (2.32) получим, что для трубки тока несжимаемой жидкости

$$\int_{S_1} v dS = \int_{S_2} v dS = Q \quad (t). \quad (2.33)$$

Величина $Q = \int_S v dS$ представляет собой объем жидкости, проходящей через живое сечение в единицу времени, и называется *расходом*. Следовательно, соотношение (2.33) показывает, что при течении несжимаемой жидкости по трубке тока расход во всех ее живых сечениях будет в данный

* Если $\text{div } \vec{v} = 0$, то так как $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$, то это условие будет равно справедливо как в случае $\vec{v} = \vec{v}(x_j)$, так и в случае $\vec{v} = \vec{v}(x_j, t)$.

момент времени одним и тем же вне зависимости от того, является течение установившимся или нет.

В случае элементарной трубки тока соотношение (2.33) принимает вид

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad (2.34)$$

откуда видно, что чем меньше площадь живого сечения, тем больше скорость течения и наоборот.

§4. Уравнения движения в напряжениях

В формулировку закона изменения количества движения (2.10) входят величина $\rho \vec{v}$, представляющая собой количество движения единицы объема, и напряжение поверхностных сил \vec{p}_n . Поэтому для вывода уравнений движения в напряжениях положим в соотношении (2.23) $\varphi = \rho \vec{v}$ и получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV &= \int_V \left(\frac{d(\rho \vec{v})}{dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} \right) dV = \\ &= \int_V \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) \right) dV = \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV, \end{aligned} \quad (2.35)$$

так как в соответствии с уравнением неразрывности (2.25) выражение в круглых скобках равно нулю. Подставив соотношение (2.35) в уравнение закона изменения количества движения (2.10), получим

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V \rho \vec{F} dV + \int_S \vec{p}_n dS, \quad (2.36)$$

где по формуле (1.29)

$$\vec{p}_n = \vec{p}_i \alpha_{ni}. \quad (2.37)$$

Положим в теореме Гаусса–Остроградского (2.21) $a_2 = a_3 = 0$. Тогда

$$\int_S a_1 \alpha_{n1} dS = \int_V \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dV. \quad (2.38)$$

Проводя аналогичные рассуждения для компонент a_2 и a_3 , получим

$$\int_S \vec{a} \alpha_{n1} dS = \int_V \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_1} dV. \quad (2.39)$$

Из формул (2.37) и (2.39) следует, что

$$\int_S \vec{p}_n dS = \int_S \vec{p}_i \alpha_{ni} dS = \int_V \frac{\partial \vec{p}_i}{\partial x_i} dV. \quad (2.40)$$

Подставив соотношение (2.40) в (2.36), получим

$$\int_V \left(\rho \frac{d\bar{v}}{dt} - \rho \bar{F} - \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_i} \right) dV = 0, \quad (2.41)$$

а так как это соотношение справедливо для произвольного материального объема, то подынтегральное выражение в нем равно нулю, то есть

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} + \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_i}, \quad (2.42)$$

или в координатной форме

$$\rho \frac{dv_j}{dt} = \rho F_j + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i}. \quad (2.43)$$

Уравнения (2.42) и (2.43) называются уравнениями движения сплошной среды в напряжениях и выражают собой закон изменения количества движения.

Закон изменения количества движения для трубки тока можно получить с помощью соотношений (2.10) и (2.20), положив в последнем $\varphi = \rho \bar{v}$. Из них следует, что

$$\int_V \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} dV + \int_S \rho \bar{v} v_n dS = \int_V \rho \bar{F} dV + \int_S \bar{p}_n dS. \quad (2.44)$$

Соотношение (2.44) представляет собой уравнение закона изменения количества движения в интегральной форме.

В качестве поверхности S возьмем замкнутую поверхность, состоящую из живых сечений трубки тока S_1 , S_2 и ее боковой поверхности S_3 (рис. 2.4). Повторяя рассуждения, приведенные при выводе соотношений (2.28) и (2.29), из уравнения (2.44) получим

$$\int_V \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} dV - \int_{S_1} \rho \bar{v} v dS + \int_{S_2} \rho \bar{v} v dS = \int_V \rho \bar{F} dV + \int_{S_3} \bar{p}_n dS. \quad (2.45)$$

Массовую силу, действующую на выделенный объем V трубки тока, обозначим через G :

$$\int_V \rho \bar{F} dV = \vec{G}, \quad (2.46)$$

а равнодействующую поверхностных сил, действующих со стороны жидкости в сечениях S_1 и S_2 , через \vec{P} :

$$\int_{S_1+S_2} \bar{p}_n dS = \vec{P}. \quad (2.47)$$

Для определения сил, действующих на поверхность S_3 (в частности, поверхность S_3 может быть твердой стенкой), воспользуемся разложением

ем (1.26). Обозначим

$$\vec{N} = \int_{S_3} \vec{n} p_{nn} dS, \quad \vec{T} = \int_{S_3} \vec{t} p_{n\tau} dS, \quad (2.48)$$

где \vec{N} – равнодействующая нормальных, а \vec{T} – тангенциальных сил, приложенных к поверхности S_3 .

Подставив выражения (2.46), (2.47) и (2.48) в уравнение (2.45), получим математическое выражение закона изменения количества движения для трубки тока в виде

$$\int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \int_{S_2} \rho \vec{v} v dS - \int_{S_1} \rho \vec{v} v dS = \vec{G} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}. \quad (2.49)$$

При установившемся движении $\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} = 0$, и формула (2.49) принимает вид

$$\int_{S_2} \rho \vec{v} v dS - \int_{S_1} \rho \vec{v} v dS = \vec{G} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}. \quad (2.50)$$

Используя теорему о среднем значении в интегральном исчислении, имеем

$$\int_S \rho \vec{v} v dS = \vec{v}^{(cp)} \int_S \rho v dS = \vec{v}^{(cp)} Q_m,$$

где $\vec{v}^{(cp)}$ – среднее интегральное значение вектора скорости в сечении S . Так как при установившемся движении $Q_m = \text{const}$, то равенство (2.50) можно представить в виде

$$Q_m (\vec{v}_2^{(cp)} - \vec{v}_1^{(cp)}) = \vec{G} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}, \quad (2.51)$$

где $\vec{v}_1^{(cp)}$, $\vec{v}_2^{(cp)}$ – средние значения скорости течения в сечениях S_1 и S_2 , соответственно. Подчеркнем особо, что соотношения (2.44), (2.45), (2.49), (2.50), (2.51) представляют собой векторные уравнения. Поэтому изменение количества движения может происходить не только при изменении величины скорости, но и при изменении ее направления.

Соотношение (2.51) оказывается удобным для решения ряда практических задач. Соответствующие примеры приведены в главе VII.

§5. Закон изменения момента количества движения. Закон парности касательных напряжений

Соотношение (2.11), представляющее собой закон изменения момента количества движения, содержит величину $\vec{r} \times \rho \vec{v}$. Подставив в соотноше-

ние (2.23) выражение $\varphi = \bar{r} \times \rho \bar{v}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V (\bar{r} \times \rho \bar{v}) dV &= \int_V \left[\frac{d}{dt} (\bar{r} \times \rho \bar{v}) + (\bar{r} \times \rho \bar{v}) \operatorname{div} \bar{v} \right] dV = \\ &= \int_V \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \times \rho \bar{v} + \bar{r} \times \bar{v} \frac{d\rho}{dt} + \bar{r} \times \rho \frac{d\bar{v}}{dt} + (\bar{r} \times \rho \bar{v}) \operatorname{div} \bar{v} \right] dV = \quad (2.52) \\ &= \int_V \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \times \rho \bar{v} + (\bar{r} \times \bar{v}) \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} \right) + \bar{r} \times \rho \frac{d\bar{v}}{dt} \right] dV. \end{aligned}$$

Используя уравнение неразрывности (2.25) и учитывая, что $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$ и, следовательно, $\frac{d\bar{r}}{dt} \times \rho \bar{v} = 0$, соотношение (2.52) можно привести к виду

$$\frac{d}{dt} \int_V (\bar{r} \times \rho \bar{v}) dV = \int_V \bar{r} \times \rho \frac{d\bar{v}}{dt} dV. \quad (2.53)$$

Из формул (2.37) и (2.39) следует, что

$$\int_S \bar{r} \times \bar{p}_n dS = \int_S (\bar{r} \times \bar{p}_i \alpha_{ni}) dS = \int_V \frac{\partial (\bar{r} \times \bar{p}_i)}{\partial x_i} dV. \quad (2.54)$$

Подставив соотношения (2.53) и (2.54) в уравнение (2.11), имеем

$$\int_V \left[\bar{r} \times \rho \frac{d\bar{v}}{dt} - \bar{r} \times \rho \bar{F} - \frac{\partial (\bar{r} \times \bar{p}_i)}{\partial x_i} \right] dV = 0, \quad (2.55)$$

а так как соотношение (2.53) справедливо для произвольного объема, то подинтегральное выражение должно быть равным нулю, то есть

$$\bar{r} \times \rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times \rho \bar{F} + \frac{\partial (\bar{r} \times \bar{p}_i)}{\partial x_i}. \quad (2.56)$$

Соотношение (2.56) представляет собой уравнение изменения момента количества движения.

Из этого уравнения вытекает одно весьма важное следствие. Действительно, умножим уравнение движения (2.42) векторно на радиус-вектор \bar{r} и получим

$$\bar{r} \times \rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times \rho \bar{F} + \bar{r} \times \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_i}. \quad (2.57)$$

Вычитая (2.57) из (2.56), имеем

$$\frac{\partial (\bar{r} \times \bar{p}_i)}{\partial x_i} - \bar{r} \times \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_i} \times \bar{p}_i = 0. \quad (2.58)$$

Так как $\vec{r} = \vec{e}_i x_i$, то $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} = \vec{e}_i$, и соотношение (2.58) можно представить в виде

$$\vec{e}_i \times \vec{p}_i = 0. \quad (2.59)$$

Используя известную формулу векторного исчисления

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

где a_i, b_i – проекции векторов \vec{a} и \vec{b} на координатные оси, получим из равенства (2.59)

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \times \vec{p}_i &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \vec{e}_1(p_{23} - p_{32}) + \vec{e}_2(p_{31} - p_{13}) + \vec{e}_3(p_{12} - p_{21}) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$p_{12} = p_{21}, p_{31} = p_{13}, p_{23} = p_{32} \text{ или } p_{ik} = p_{ki}. \quad (2.60)$$

Соотношения (2.60) представляют собой закон парности или взаимности касательных напряжений. Из этого закона следует, что тензор напряжений (1.33) является симметричным. Последнее означает, что тензор напряжений (1.33) содержит только шесть различных компонент. В соответствии с этим уменьшается число неизвестных в уравнениях движения (2.43).

§6. Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии, как было показано выше, имеет вид (2.13). Для преобразования этого соотношения положим в равенстве (2.23)

$\varphi = \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right)$ и получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV &= \int_V \left[\frac{d}{dt} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) + \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] dV = \\ &= \int_V \left[\rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) + \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] dV. \end{aligned} \quad (2.61)$$

С учетом уравнения неразрывности (2.25) соотношение (2.61) приведем к виду

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_V \rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV. \quad (2.62)$$

Из формулы (2.37) и теоремы Гаусса-Остроградского (2.39) следует, что

$$\int_S \bar{p}_n \bar{v} dS = \int_S \bar{p}_i \bar{v} \alpha_{ni} dS = \int_V \frac{\partial(\bar{p}_i \bar{v})}{\partial x_i} dV. \quad (2.63)$$

Подставив соотношения (2.62) и (2.63) в уравнение (2.13), получаем

$$\int_V \left[\rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) - \rho \bar{F} \bar{v} - \frac{\partial(\bar{p}_i \bar{v})}{\partial x_i} - \rho q_e \right] dV = 0, \quad (2.64)$$

а так как это соотношение справедливо для произвольного объема, то подынтегральное выражение должно быть равным нулю,

$$\rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \bar{F} \bar{v} + \frac{\partial(\bar{p}_i \bar{v})}{\partial x_i} + \rho q_e. \quad (2.65)$$

Соотношение (2.65) представляет собой математическую формулировку закона сохранения энергии для термомеханического континуума. Из этого уравнения видно, что скорость изменения полной энергии равна сумме мощностей всех внешних сил и количества тепла, подводимого в единицу времени. При этом необходимо иметь в виду, что в уравнение (2.65) входят *удельные по объему*, то есть рассчитанные на единицу объема величины.

Для того, чтобы получить закон сохранения энергии для трубки тока, положим в соотношении (2.20) $\varphi = \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right)$ и подставим полученное таким образом выражение в уравнение (2.13). Тогда

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_S \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) v_n dS = \int_V \rho \bar{F} \bar{v} dV + \int_S \bar{p}_n \bar{v} dS + \int_V \rho q_e dV. \quad (2.66)$$

Будем считать, что напряжение массовой силы обладает потенциалом, то есть что $\bar{F} = \nabla \Pi$. Тогда с учетом уравнения неразрывности (2.26) получим

$$\rho \bar{F} \bar{v} = \rho \bar{v} \nabla \Pi = \operatorname{div} \rho \Pi \bar{v} - \Pi \operatorname{div} \rho \bar{v} = \operatorname{div} \rho \Pi \bar{v} + \Pi \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

а на основании теоремы Гаусса-Остроградского (2.21)

$$\int_V \rho \bar{F} \bar{v} dV = \int_V \left(\operatorname{div} \rho \Pi \bar{v} + \Pi \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = \int_V \Pi \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \Pi v_n dS. \quad (2.67)$$

В качестве поверхности S возьмем замкнутую поверхность, состоящую из живых сечений трубки тока S_1 , S_2 и ее боковой поверхности S_3 (рис.2.4). В живом сечении S_1 $\vec{v} = -\vec{n}v$, в S_2 $\vec{v} = \vec{n}v$, на боковой поверхности S_3 $\vec{v} = \vec{\tau}_1 v$, где $\vec{\tau}_1$ – единичный вектор, лежащий в касательной плоскости к трубке тока. Тогда с учетом соотношения (1.26) получим

$$\int_S \vec{p}_n \vec{v} dS = - \int_{S_1} p_{nn} v dS + \int_{S_2} p_{nn} v dS + \int_{S_3} \vec{p}_n \vec{\tau}_1 v dS. \quad (2.68)$$

Подставив выражения (2.67) и (2.68) в уравнение (2.66) и повторяя рассуждения, приведенные при выводе соотношений (2.26) и (2.27), получим

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) - \Pi \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV + \int_{S_2} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) v dS - \int_{S_1} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) v dS = \\ & = \int_{S_2} (\Pi \rho + p_{nn}) v dS - \int_{S_1} (\Pi \rho + p_{nn}) v dS + \int_{S_3} \vec{p}_n \vec{\tau}_1 v dS + \int_V \rho q_e dV. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Соотношение (2.69) представляет собой выражение закона сохранения энергии для трубки тока при наличии потенциала напряжения массовых сил. При установившемся движении оно принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \rho v dS - \int_{S_1} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \rho v dS = \\ & = \int_{S_2} \left(\Pi + \frac{p_{nn}}{\rho} \right) \rho v dS - \int_{S_1} \left(\Pi + \frac{p_{nn}}{\rho} \right) \rho v dS + \int_{S_3} \vec{p}_n \vec{\tau}_1 v dS + \int_V \rho q_e dV. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Воспользовавшись теоремой о среднем значении в интегральном исчислении, имеем

$$\begin{aligned} \int_S \left(u + \frac{v^2}{2} \right) \rho v dS &= \left(u + \frac{v^2}{2} \right)^{cp} \int_S \rho v dS = \left(u + \frac{v^2}{2} \right)^{cp} Q_m, \\ \int_S \left(\Pi + \frac{p_{nn}}{\rho} \right) \rho v dS &= \left(\Pi + \frac{p_{nn}}{\rho} \right)^{cp} \int_S \rho v dS = \left(\Pi + \frac{p_{nn}}{\rho} \right)^{cp} Q_m, \end{aligned}$$

а так как при установившемся движении вдоль трубки тока $Q_m = \text{const}$, то уравнение (2.70) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \left(u + \frac{v^2}{2} \right)_2^{cp} - \left(u + \frac{v^2}{2} \right)_1^{cp} = \\ & = \left(\Pi + \frac{p_{nn}}{\rho} \right)_2^{cp} - \left(\Pi + \frac{p_{nn}}{\rho} \right)_1^{cp} + \frac{1}{Q_m} \int_{S_3} \vec{p}_n \vec{\tau}_1 v dS + \frac{1}{Q_m} \int_V \rho q_e dV, \end{aligned} \quad (2.71)$$

где индексы «1», «2» означают номера соответствующих сечений.

§7. Теорема об изменении кинетической энергии

Для получения математического выражения теоремы об изменении кинетической энергии положим в соотношении (2.23) $\varphi = \rho \frac{v^2}{2}$. Тогда с учетом уравнения неразрывности (2.25) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV &= \int_V \left[\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) + \rho \frac{v^2}{2} \operatorname{div} \bar{v} \right] dV = \\ &= \int_V \left[\rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} \right) \right] dV = \int_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dV. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Подставив в уравнение (2.14) соотношения (2.63) и (2.72), получим

$$\int_V \left[\rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} - \rho \bar{F} \bar{v} - \frac{\partial(\bar{p}_i \bar{v})}{\partial x_i} - \rho N^{(i)} \right] dV = 0, \quad (2.73)$$

а так как это соотношение справедливо для произвольного объема, то

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} = \rho \bar{F} \bar{v} + \frac{\partial(\bar{p}_i \bar{v})}{\partial x_i} + \rho N^{(i)}. \quad (2.74)$$

Из уравнения (2.74), то есть из теоремы живых сил для сплошной среды, следует, что скорость изменения кинетической энергии равна мощности всех внешних и внутренних сил. При этом в уравнение (2.74) так же, как и в уравнение (2.75), входят удельные по объему величины.

Для того, чтобы получить теорему живых сил для трубки тока, положим в соотношении (2.20) $\varphi = \rho \frac{v^2}{2}$ и, воспользовавшись уравнением (2.14), получим соотношение

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) dV + \int_S \frac{\rho v^2}{2} v_n dS = \int_V \rho \bar{F} \bar{v} dV + \int_S \bar{p}_n \bar{v} dS + \int_V \rho N^{(i)} dV, \quad (2.75)$$

представляющее собой интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии.

Выберем в качестве замкнутой поверхности S поверхность, ограниченную живыми сечениями трубки тока S_1 , S_2 и ее боковой поверхностью S_3 (рис. 2.3), и примем, что напряжение массовых сил обладает по-

тенциалом, то есть что $\vec{F} = \nabla\Pi$. Используя соотношения (2.67) и (2.68), после рассуждений, аналогичных проведенным при выводе (2.69), из равенства (2.75) получим соотношение

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) - \Pi \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV + \int_{S_2} \frac{v^2}{2} \rho v dS - \int_{S_1} \frac{v^2}{2} \rho v dS = \\ & = \int_{S_2} \left(\Pi + \frac{P_{nn}}{\rho} \right) \rho v dS - \int_{S_1} \left(\Pi + \frac{P_{nn}}{\rho} \right) \rho v dS + \int_{S_3} \bar{p}_n \bar{\tau}_1 v dS + \int_V \rho N^{(i)} dV, \end{aligned} \quad (2.76)$$

представляющее собой выражение теоремы об изменении кинетической энергии для трубки тока при наличии потенциала для напряжения массовых сил.

При установившемся движении соотношение (2.76) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \left(-\Pi - \frac{P_{nn}}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \rho v dS - \int_{S_1} \left(-\Pi - \frac{P_{nn}}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \rho v dS = \\ & = \frac{1}{Q_m} \int_{S_3} \bar{p}_n \bar{\tau}_1 v dS + \frac{1}{Q_m} \int_V \rho N^{(i)} dV \end{aligned} \quad (2.77)$$

или

$$\begin{aligned} & \left(-\Pi - \frac{P_{nn}}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right)_2^{\text{cp}} - \left(-\Pi - \frac{P_{nn}}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right)_1^{\text{cp}} = \\ & = \frac{1}{Q_m} \int_{S_3} \bar{p}_n \bar{\tau}_1 v dS + \frac{1}{Q_m} \int_V \rho N^{(i)} dV \end{aligned}, \quad (2.78)$$

где осреднение по сечениям S_1 и S_2 имеет тот же смысл, что и в (2.71).

Для вычисления удельной мощности внутренних сил $N^{(i)}$ вернемся к рассмотрению соотношения (2.68).

Умножив уравнения движения в напряжениях (2.42) скалярно на вектор скорости \vec{v} , получим

$$\rho \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \vec{v} + \vec{v} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_i}. \quad (2.79)$$

Вычитая почленно соотношение (2.79) из соотношения (2.78), имеем

$$\frac{\partial \bar{p}_i \vec{v}}{\partial x_i} + \rho N^{(i)} - \vec{v} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_i} = \bar{p}_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} + \rho N^{(i)} = 0$$

или, так как $\bar{p}_i = \bar{e}_j p_{ij}$, $\bar{v} = \bar{e}_k v_k$,

$$\rho N^{(i)} = -\bar{p}_i \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} = -\bar{e}_j p_{ij} \frac{\partial \bar{e}_k v_k}{\partial x_i} = -p_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}. \quad (2.80)$$

Из равенства (2.80) следует, что если все точки рассматриваемого объема сплошной среды движутся с одинаковыми скоростями, то есть если $v_k = v_k(x_j, t) = v_k(t)$, то $N^{(i)} = 0$. Следовательно, работа внутренних сил может быть отличной от нуля только в пространственно неоднородном поле скоростей, в котором $\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \neq 0$.

§8. Уравнение притока тепла

Для получения уравнения, описывающего изменение внутренней энергии, рассмотрим закон сохранения полной энергии (2.65) и вычтем из этого уравнения почленно уравнение (2.74). Тогда получим

$$\frac{du}{dt} = q_e - N^{(i)}. \quad (2.81)$$

Соотношение (2.81) содержит удельные (по массе) внутреннюю энергию u , тепловую мощность q_e , мощность внутренних сил $N^{(i)}$ и называется *уравнением притока тепла*. Из этого уравнения видно, что при адиабатическом процессе, то есть при $q_e = 0$, изменение внутренней энергии может происходить только за счет работы внутренних сил.

С помощью соотношения (2.80) уравнению притока тепла можно придать вид

$$\frac{du}{dt} = q_e + \frac{p_{ik}}{\rho} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (2.82)$$

Из уравнения (2.82) следует, что в однородном поле скоростей, т.е. при $v_i = v_i(t)$, изменение внутренней энергии определяется только внешним подводом тепла.

Заметим, что уравнение притока тепла, как и теорема об изменении кинетической энергии, не является независимым уравнением – оно есть следствие основных законов сохранения.

Примеры использования уравнения притока тепла приведены в гл. IV.

§9. Система уравнений движения сплошной среды

Из всего вышеизложенного следует, что движения сплошной среды, определяемые фундаментальными физическими законами сохранения массы, изменения количества движения, сохранения энергии, описываются

системой уравнений, состоящей из (2.25), (2.42), (2.65) и имеющей вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} &= 0, \\ \rho \frac{d\bar{v}}{dt} &= \rho \bar{F} + \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x_i}, \\ \rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) &= \rho \bar{F} \bar{v} + \frac{\partial (\bar{p}_i \bar{v})}{\partial x_i} + \rho q_e. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Таким образом, система уравнений движения любой сплошной среды состоит из одного векторного и двух скалярных уравнений или пяти скалярных уравнений. В общем случае система уравнений (2.83) содержит 11 скалярных неизвестных: v_i, p_{ij}, ρ, u . Следовательно, она является незамкнутой. Это обстоятельство отражает тот факт, что в законах сохранения не содержится никаких параметров, характеризующих свойства конкретных сплошных сред. Поэтому к полученным уравнениям необходимо добавить соответствующие соотношения (связи), задающие физические свойства той или иной сплошной среды. Очевидно, что для разных сплошных сред (таких, например, как жидкость, упругое тело, пластическое тело и т.д.) эти связи будут иметь различный вид, и полученные, уже замкнутые системы уравнений для разных сплошных сред также будут иметь различный вид.

Установление необходимых для конкретных сред связей требует предварительного изучения деформаций или скоростей деформаций сплошной среды.

Связи между напряжениями и деформациями или между напряжениями и скоростями деформаций называются *реологическими уравнениями*^{**}. Таким образом, различным сплошным средам соответствуют различные реологические уравнения.

В заключение заметим, что во всех рассуждениях настоящей главы предполагалось, что в классической механике сплошной среды принят постулат, согласно которому основные законы сохранения считаются справедливыми не только для всего рассматриваемого тела (в нашем случае – для материального объема), но и для каждой его части, сколь бы мала она ни была. Этот постулат носит название принципа локальности, а дифференциальные уравнения, являющиеся следствиями интегральных законов сохранения, называют локальными формулировками законов сохранения.

Заметим также, что если система координат, в которой рассматривается движение сплошной среды, подвижна, то все уравнения движения в этой системе координат сохраняют свой вид, только массовые силы будут включать в себя также и силы инерции, появляющиеся в относительном движении.

* Напряжение массовых сил \bar{F} и тепловая мощность q_e представляют собой внешние воздействия и считаются заданными.

** Реология (от греческого слова «течение») – наука о деформации материалов.

Глава III

СКОРОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§1. Скорость деформации малой частицы. Теорема Гельмгольца

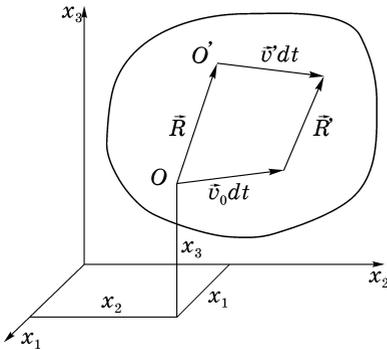


Рис. 3.1

Рассмотрим малую частицу сплошной среды, изображенную на рис. 3.1, где точка O – центр частицы с пространственными координатами x_j , точка O' – любая точка внутри частицы, вектор $\bar{R}(\xi_j) = \overline{OO'}$ целиком лежит внутри рассматриваемой частицы.

Распределение скоростей внутри частицы в фиксированный момент времени t_1 определяется полем скоростей, т.е. величинами скоростей точек O и O' , соответственно, $\bar{v}_0 = \bar{v}(x_i, t_1)$ и $\bar{v}' = \bar{v}(x_j + \xi_j, t_1)$, или $v_{oi} = v_i(x_j, t_1)$, $v'_i = v'_i(x_j + \xi_j, t_1)$. Движение в пределах

частицы предполагается непрерывным и дифференцируемым.

Разлагая v'_i в ряд Тейлора, получаем

$$v'_i = v_{oi} + \xi_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dots = v_i + \bar{R} \nabla v_i + \dots, \quad (3.1)$$

где все производные берутся в точке O . Так как частица предполагается малой, т.е. ξ предполагаются малыми в сравнении с характерным линейным размером в рассматриваемой задаче, то, ограничиваясь в формулах (3.1) членами первого порядка малости, имеем

$$v'_i = v_{oi} + \xi_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{oi} + \bar{R} \nabla v_i \quad (3.2)$$

или

$$\vec{v}' = \vec{v}_o + (\vec{R} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{v}_o + \Phi \vec{R}. \quad (3.3)$$

Из равенств (3.2) и (3.3) видно, что разность скоростей $\vec{v}' - \vec{v}_o$ определяется матрицей

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

элементы которой представляют собой коэффициенты при членах первого порядка малости в разложении v'_i в ряд Тейлора.

Матрица Φ всегда может быть представлена в виде суммы двух матриц, из которых одна симметрична, а другая антисимметрична. Действительно, введем обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), & \omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), & \omega_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Матрицу (3.4) представим в виде

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = D + \Omega. \quad (3.6)$$

Из формул (3.5) видно, что $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$.

Подставив соотношение (3.6) в формулу (3.3), получаем

$$\vec{v}' = \vec{v}_o + D \vec{R} + \Omega \vec{R}_o. \quad (3.7)$$

Переписывая равенство (3.7) в координатном виде, имеем

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_{o1} + \varepsilon_{11} \xi_1 + \varepsilon_{12} \xi_2 + \varepsilon_{13} \xi_3 - \omega_3 \xi_2 + \omega_2 \xi_3, \\ v'_2 &= v_{o2} + \varepsilon_{21} \xi_1 + \varepsilon_{22} \xi_2 + \varepsilon_{23} \xi_3 + \omega_3 \xi_1 - \omega_1 \xi_3, \\ v'_3 &= v_{o3} + \varepsilon_{31} \xi_1 + \varepsilon_{32} \xi_2 + \varepsilon_{33} \xi_3 - \omega_2 \xi_1 + \omega_1 \xi_2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из формул (3.5) следует, что величины ω_k представляют собой компоненты вектора $\vec{\omega} = \vec{e}_k \omega_k$, который может быть символически записан

как

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v}. \quad (3.9)$$

Вектор $\bar{\omega}$ называется вихрем скорости*.

Введем в рассмотрение квадратичную функцию

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_{ik} \xi_i \xi_k. \quad (3.10)$$

Благодаря тому, что $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, из формулы (3.10) следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i} = \varepsilon_{ik} \xi_k. \quad (3.11)$$

С помощью формул (3.9) и (3.11) равенства (3.8) можно переписать в виде

$$v'_i = v_{oi} + \frac{\partial F}{\partial \xi_i} + (\bar{\omega} \times \bar{R})_i$$

или

$$\bar{v}' = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{R} + \nabla F. \quad (3.12)$$

Если бы рассматриваемая малая частица была абсолютно твердой, то, как известно из теоретической механики, распределение скоростей в ней имело бы вид

$$v = v_o + \omega \times R, \quad (3.13)$$

где \bar{v}_o – скорость поступательного движения, а $\bar{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости. Таким образом, из формул (3.12) и (3.13) следует, что

$$\nabla F = v' - v,$$

то есть величина ∇F представляет собой скорость деформации.

Замечание: совокупность точек O_1 , окружающих точку O , образует частицу жидкости. За время dt точка O получает перемещение, равное $\bar{v}_o dt$, а точка O_1 – равное $\bar{v}' dt$. Из рис. 3.1 видно, что $\bar{R} + \bar{v}' dt = \bar{R}' + \bar{v}_o dt$ или, с учетом формулы (3.12),

$$d\bar{R} = \bar{R}' - \bar{R} = (\bar{v}' - \bar{v}_o) dt = (\bar{\omega} \times \bar{R} + \nabla F) dt. \quad (3.14)$$

Полагая $\bar{R}' = \bar{e}_k \xi'_k$, из формул (3.3) и (3.14) получаем

$$\bar{R}' = \bar{e}_k \xi'_k = \bar{R} + (\bar{v}' - \bar{v}_o) dt = \bar{R} + (\bar{R} \cdot \nabla) \bar{v} dt$$

* Некоторые авторы под вихрем скорости понимают величину $\text{rot } \bar{v} = 2\bar{\omega}$.

или в координатном виде

$$\xi'_i = \xi_i + \xi_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dt. \quad (3.15)$$

На равенства (3.15) можно смотреть как на преобразование координат точек жидкой частицы за время dt . Так как величины $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, как указывалось, вычисляются в точке 0 и, следовательно, от ξ_k не зависят, то преобразование (3.15) линейно. Поэтому за время dt этим преобразованием поверхности второго порядка переводятся в поверхности второго порядка, плоскости – в плоскости, прямые линии – в прямые линии. Например, сфера переходит в эллипсоид.

Обозначим

$$dR = R' - R (dR \neq d\vec{R}), \quad \varepsilon_R = \frac{dR}{Rdt}, \quad (3.16)$$

где ε_R – относительное удлинение вектора \vec{R} в единицу времени. Из формул (3.10), (3.11), (3.14) и (3.16) следует, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_R &= \frac{dR}{Rdt} = \frac{RdR}{R^2dt} = \frac{RdR}{R^2dt} = \frac{R(\omega \times R + \nabla F)}{R^2} = \frac{R\nabla F}{R^2} = \\ &= \frac{\varepsilon_{ik}\xi_i\xi_k}{R^2} = \frac{2F}{R^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Так как $\frac{\xi_i}{R} = \alpha_i$ – направляющие косинусы вектора \vec{R} , то

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon_{ik}\xi_i\xi_k}{R^2} = \varepsilon_{ik}\alpha_i\alpha_k = 2F(\alpha_j), \quad (3.18)$$

и относительное удлинение ε_R не зависит от длины вектора \vec{R} , а зависит только от его направления.

Пусть $\varepsilon_R = 0$. Тогда из равенства (3.17) следует, что

$$\varepsilon_R = \frac{\vec{R}}{R^2} \nabla F = \frac{\vec{R}^o}{R} \nabla F = 0, \quad (3.19)$$

где $\vec{R}^o = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{1}{R} \bar{e}_k \xi_k$ – единичный вектор направления \vec{R} . Так как соотношение (3.19) справедливо при любом \vec{R}^o , то с учетом формулы (3.11) получаем

$$\nabla F = \bar{e}_i \frac{\partial F}{\partial \xi_i} = \bar{e}_i \varepsilon_{ik} \xi_k = 0,$$

и, следовательно, $\varepsilon_{ik}\xi_k = 0$, откуда, так как ξ_k произвольны, $\varepsilon_{ik} = 0$. Обратное утверждение: если все $\varepsilon_{ik} = 0$, то $\varepsilon_\rho = 0$, и частица ведет себя как абсолютно твердая.

Из приведенных рассуждений следует, что $\bar{v}^* = \nabla F$ действительно является скоростью деформации.

Формула (3.12) может быть теперь переписана в виде

$$\bar{v}' = \bar{v}_m + \bar{v}^* = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times \bar{R} + \nabla F$$

и представляет собой содержание первой теоремы Гельмгольца*: движение элементарного объема жидкости можно в каждый данный момент времени представить разложенным на квазитвердое движение со скоростью \bar{v}_m , равной сумме поступательной скорости \bar{v}_o и вращательной $\bar{\omega} \times \bar{R}$, и деформационное движение со скоростью $\bar{v}^* = \nabla F$.

§2. Тензор скоростей деформаций

Рассмотрим скалярное произведение $\bar{R}\nabla F$. Из формулы (3.11) и определения вектора \bar{R} следует, что

$$\bar{R}\nabla F = \bar{e}_i \xi_i \bar{e}_k \frac{\partial F}{\partial \xi_k} = \varepsilon_{ik} \xi_i \xi_k.$$

Так как скалярное произведение по своему смыслу инвариантно относительно преобразования координат, то

$$\varepsilon_{ik} \xi_i \xi_k = \tilde{\varepsilon}_{mn} \tilde{\xi}_m \tilde{\xi}_n, \quad (3.20)$$

где ξ_i – координаты старой, а $\tilde{\xi}_i$ – новой систем координат.

Вектор \bar{R} в старой и новой системах координат имеет вид $\bar{R} = \bar{e}_k \xi_k = \tilde{e}_j \tilde{\xi}_j$, где \tilde{e}_j – орты новой системы координат. Умножив это соотношение на \bar{e}_k , получим формулы преобразования координат

$$\xi_k = \tilde{e}_j \bar{e}_k \tilde{\xi}_j = \tilde{\xi}_j \alpha_{jk} = \tilde{\xi}_m \alpha_{mk} = \tilde{\xi}_n \alpha_{nk}, \quad (3.21)$$

где α_{jk} – косинусы углов между осями новой и старой систем координат.

Подставив соотношения (3.21) в формулу (3.20), имеем

$$\varepsilon_{ik} \xi_i \xi_k = \varepsilon_{ik} \tilde{\xi}_m \alpha_{mi} \tilde{\xi}_n \alpha_{nk} = \tilde{\varepsilon}_{mn} \tilde{\xi}_m \tilde{\xi}_n,$$

а так как это равенство справедливо при любых $\tilde{\xi}_m, \tilde{\xi}_n$, то

$$\tilde{\varepsilon}_{mn} = \varepsilon_{ik} \alpha_{mi} \alpha_{nk}. \quad (3.22)$$

* Герман Людвиг Фердинанд Гельмгольд (1821–1894), немецкий ученый, иностранный член-корреспондент Петербургской Академии Наук.

Выражение (3.22) представляет собой определение аффинного ортогонального тензора второго ранга. Таким образом, скорости деформаций представляют собой *симметричный* ($\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$) *тензор второго ранга*, компоненты которого задаются матрицей

$$D = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

§3. Физический смысл компонент тензора скоростей деформаций

Для выяснения физического смысла компонент тензора скоростей деформаций ϵ_{ik} рассмотрим вектор \vec{R} , параллельный оси Ox_1 . Для этого вектора направляющие косинусы равны $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, и из формулы (3.18) в этом случае имеем $\epsilon_R = \epsilon_{11}$. Следовательно, ϵ_{11} представляет собой скорость относительного удлинения вектора, параллельного оси Ox_1 . Аналогично можно показать, что ϵ_{kk} – скорости относительного удлинения вдоль соответствующих координатных осей.

Положим, что поступательная и вращательная скорости жидкой частицы отсутствуют. Рассмотрим вектор \vec{R} , лежащий в плоскости x_1Ox_2 (рис. 3.2). За время dt этот вектор преобразуется в вектор \vec{R}' , который может и не лежать в плоскости x_1Ox_2 . Тогда (рис. 3.2) $O_1O_1 = v^* dt = F dt$. Разложим вектор $\vec{v}^* dt$ на векторы O_1O_2 и O_2O_1 так, чтобы вектор O_1O_2 был перпендикулярен \vec{R} и лежал в плоскости x_1Ox_2 . Очевидно, что

$O_1O_2 = \vec{v}_1^* dt$, \vec{v}_1^* – составляющая вектора \vec{v}^* в плоскости x_1Ox_2 .

Так как $O_1O_2 = R d\varphi = v_1^* dt$, то

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_1^*}{R} = \frac{n \nabla F}{R} = \frac{1}{R} \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi},$$

где \vec{n} – единичный вектор, направленный по O_1O_2 .

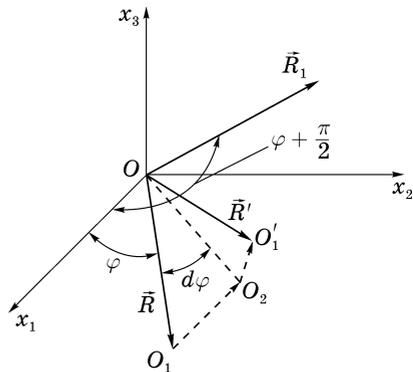


Рис. 3.2

В плоскости x_1Ox_2 координаты вектора \vec{R} равны $\xi_1 = R \cos \varphi$, $\xi_2 = R \sin \varphi$, $\xi_3 = 0$, и в соответствии с формулой (3.10)

$$F = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}\xi_1^2 + 2\varepsilon_{12}\xi_1\xi_2 + \varepsilon_{22}\xi_2^2) = \\ = \frac{1}{2}R^2(\varepsilon_{11}\cos^2\varphi + \varepsilon_{12}\sin 2\varphi + \varepsilon_{22}\sin^2\varphi),$$

откуда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11})\sin 2\varphi + \varepsilon_{12}\cos 2\varphi. \quad (3.23)$$

Рассмотрим вектор $\vec{R}_1 \perp \vec{R}$ и лежащий в плоскости x_1Ox_2 . Тогда $\varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}$ и, как следует из формулы (3.23), $d\varphi_1 = -d\varphi$. Следовательно, векторы \vec{R} и \vec{R}_1 либо расходятся, либо сходятся, но всегда вращаются в противоположные стороны. Скорость $\dot{\gamma}$ изменения угла между векторами \vec{R} и \vec{R}_1 , очевидно, равна $\dot{\gamma} = 2\frac{d\varphi}{dt}$. При $\varphi = 0$, как это следует из формул (3.23), $\dot{\gamma} = 2\varepsilon_{12}$.

Итак, ε_{12} представляет собой половину скорости скашивания координатного угла в плоскости x_1Ox_2 . Аналогичное значение имеют в соответствующих плоскостях компоненты ε_{ik} ($i \neq k$).

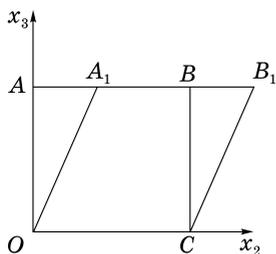


Рис. 3.3

Рассмотрим в качестве примера течение с полем скоростей $v_1 = 0$, $v_2 = kx_3$, $v_3 = 0$. Очевидно, что в этом случае бесконечно малый квадрат $OABC$ (рис. 3.3) за время t с точностью до малых второго порядка превратится в ромб OA_1B_1C . В соответствии с формулами (3.5) для заданного поля скоростей имеем

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{23} = \frac{k}{2}.$$

Следовательно, скорость скашивания прямого угла АОС равна $\dot{\gamma} = 2\varepsilon_{23} = k$.

§4. Тензорная поверхность симметричного тензора второго ранга

Рассмотрим поверхность второго порядка с центром в начале координат. Ее уравнение, как известно из курса аналитической геометрии, имеет

вид

$$a_{ij}x_i x_j = 1, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (3.24)$$

где x_i – декартовы координаты, a_{ij} – коэффициенты поверхности второго порядка. При переходе из одной системы координат в другую, декартовы координаты преобразуются по правилу

$$x_i = \alpha_{ki} \tilde{x}_k, \quad x_j = \alpha_{lj} \tilde{x}_l,$$

и в новой системе координат уравнение (3.24) запишется в виде

$$a_{ij} \alpha_{ki} \alpha_{lj} \tilde{x}_k \tilde{x}_l = \tilde{a}_{mn} \tilde{x}_m \tilde{x}_n = 1 \quad (3.25)$$

где \tilde{a}_{mn} – коэффициенты поверхности второго порядка в новой системе координат.

Из формулы (3.25) следует, что коэффициенты поверхности второго порядка в новой и старой системах координат связаны между собой равенствами

$$\tilde{a}_{mn} = a_{ij} \alpha_{mi} \alpha_{nj},$$

то есть коэффициенты a_{ij} поверхности второго порядка (3.24) представляют собой симметричный тензор второго ранга.

Итак, каждому симметричному тензору второго ранга можно поставить в соответствие поверхность второго порядка вида (3.24) и, наоборот, всякой поверхности второго порядка вида (3.24) можно поставить в соответствие симметричный тензор второго ранга. Поверхность $a_{ij}x_i x_j = 1$ называется *характеристической поверхностью* тензора второго ранга или *тензорной поверхностью*.

В курсах аналитической геометрии доказывается, что у всякой поверхности второго порядка вида (3.24) имеется по меньшей мере три таких взаимно-ортогональных направления, приняв которые за оси координат, квадратичную форму $a_{ij}x_i x_j$ приводят к каноническому виду. Эти направления называются *главными* или *собственными* направлениями, а координатные оси – *главными осями* тензорной поверхности.

Уравнение тензорной поверхности (3.24) в главных осях имеет вид

$$(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2) = 1, \quad (3.26)$$

матрица тензора a_{ik} –

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора a_{ij} , записанного в главных осях, называют главными компонентами и обозначаются одним индексом.

Главные оси тензорной поверхности в общем случае, как это следует из теоремы Гельмгольца, вращаются с мгновенной угловой скоростью $\bar{\omega}$.

Рассмотрим скорости деформаций бесконечно малой сферической частицы

$$\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}{R^2} = 1. \quad (3.27)$$

За время dt она преобразуется в эллипсоид вида*

$$\frac{\xi_1'^2}{a^2} + \frac{\xi_2'^2}{b^2} + \frac{\xi_3'^2}{c^2} = 1. \quad (3.28)$$

В соответствии с ранее доказанным, полуоси эллипсоида равны $a = R(1 + \varepsilon_1 dt)$, $b = R(1 + \varepsilon_2 dt)$, $c = R(1 + \varepsilon_3 dt)$.

Скорость Θ объемного расширения частицы равна

$$\Theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V' - V}{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}abc - \frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \bar{v},$$

где V' – объем эллипсоида (3.28), V – объем шара (3.27). Из определения скорости объемного расширения очевидно, что Θ и $\operatorname{div} \bar{v}$ являются инвариантами относительно преобразования координат.

§5. Циркуляция скорости. Потенциальное движение жидкости

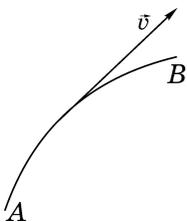


Рис. 3.4

Рассмотрим в объеме, занятом движущейся жидкостью, некоторую линию AB и в каждой ее точке построим вектор \bar{v} (рис. 3.4). Скалярное произведение $\bar{v} \cdot d\bar{s}$, где $d\bar{s}$ – элемент линии AB , не зависит, очевидно, от выбора координат. Величина

$$\Gamma = \int_{AB} \bar{v} d\bar{s} = \int_{AB} v_s ds \quad (3.29)$$

называется линейным интегралом вектора \bar{v} вдоль кривой AB или циркуляцией скорости вдоль этой кривой.

При интегрировании от B до A или при изменении направления обхода при интегрировании по замкнутой кривой, знак циркуляции меня-

* Главные оси эллипсоида могут не совпадать с координатными осями Ox_i за счет деформации поворота.

ется на обратный. Из этого следует, что циркуляция по замкнутому контуру (рис. 3.5) равна сумме циркуляций по контурам I и II, так как вдоль линии AB интеграл (3.29) вычисляется дважды, причем в противоположных направлениях.

В соответствии с теоремой Стокса* циркуляция скорости \vec{v} по замкнутому контуру L равна удвоенному потоку вихря $\vec{\omega}$ сквозь поверхность S , натянутую на этот контур, то есть

$$\Gamma = \int_L \vec{v} d\vec{s} = 2 \int_S \vec{\omega} d\vec{s} = 2 \int_S \omega_n ds. \quad (3.30)$$

Если существует функция $\varphi(x_j, t)$, удовлетворяющая условию

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \vec{v} = \nabla \varphi, \quad (3.31)$$

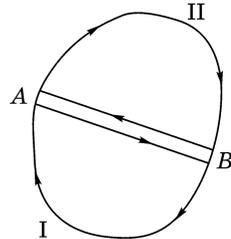


Рис. 3.5

то течение называется потенциальным, а функция φ – потенциалом скоростей. В курсах математического анализа доказывается, что для существования потенциала скоростей необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0, \quad i \neq j. \quad (3.32)$$

Вихрь скорости $\vec{\omega}$, по определению, равен

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad (3.33)$$

и из формул (3.36) и (3.37) следует, что если $\vec{v} = \nabla \varphi$, то $\vec{\omega} = 0$, и наоборот, если $\vec{\omega} = 0$, то $\vec{v} = \nabla \varphi$. Это значит, что условие $\vec{\omega} = 0$, то есть отсутствие вихрей, необходимо и достаточно для существования потенциального течения.

Так как элемент кривой AB $d\vec{s} = \vec{e}_k dx_k$, то при потенциальном течении в соответствии с формулами (3.31) и (3.32), имеем

$$\Gamma = \int_{AB} \vec{v} d\vec{s} = \int_A^B \vec{e}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \vec{e}_k dx_k = \int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \int_A^B d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A). \quad (3.34)$$

Следовательно, в этом случае циркуляция скорости зависит только от положения начальной и конечной точек кривой AB и не зависит от пути интегрирования.

* Джордж Габриэль Стокс (1819–1903), английский физик, математик и гидромеханик.

Если потенциал φ неоднозначен, то циркуляция по замкнутому контуру L отлична от нуля. Это может произойти, когда внутри области, ограниченной контуром L , существуют вихри.

При потенциальном течении циркуляция по замкнутому контуру L равна нулю только в том случае, если контур L не может быть стянут в точку непрерывным преобразованием, то есть в том случае, если область внутри L многосвязна (рис. 3.6). В многосвязной области потенциал может быть неоднозначным.

В качестве примера рассмотрим течение с потенциалом скоростей

$$\varphi = \frac{J}{2\pi} \theta = \frac{J}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}. \quad (3.35)$$

На контуре M функция φ однозначна, а на L – многозначна (рис. 3.7). После обхода точки O потенциал φ получает приращение, равное $2\pi n$, где n – число обходов вокруг точки O . Точка O – начало координат – особая. Потенциал сохраняет в ней конечное значение, но это значение зависит от пути, по которому совершается подход к точке O .

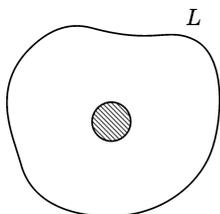


Рис. 3.6

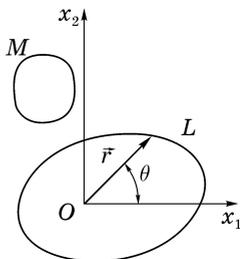


Рис. 3.7

Из формулы для потенциала скоростей имеем

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{J}{2\pi} \frac{x_2}{r^2}, \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{J}{2\pi} \frac{x_1}{r^2}, \quad v_3 = 0,$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{J}{2\pi r}, \quad r = \sqrt{x^2 + x_2^2}.$$

Вектор $\vec{v} = \nabla \varphi$ перпендикулярен линии $\varphi = \text{const}$ и направлен в сторону возрастания функции $\varphi = \varphi(\theta)$. Линии тока – окружности с центром в начале координат (рис. 3.8).

При $r \rightarrow 0 \ v \rightarrow \infty$, то есть начало координат – особая точка поля скоростей. В этой точке производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ терпят разрыв, и, следовательно, нарушаются условия теоремы Стокса. Если же точку $r = 0$ исключить, то область становится многосвязной. Особую точку можно рассматривать как концентрированный вихрь.

Циркуляция по окружности C с центром в точке O равна

$$\Gamma = \int_C v dr = \int_0^{2\pi} v r d\varphi = 2\pi r v = J.$$

Циркуляция по любой замкнутой кривой C_1 , охватывающей начало координат, равна J . Действительно, $\Gamma_{C_1} = \Gamma_{BA} + \Gamma_C + \Gamma_{AB} = \Gamma_C$, где индексы указывают на линии, вдоль которых выполняется интегрирование (рис. 3.9).

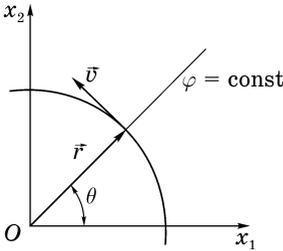


Рис. 3.8

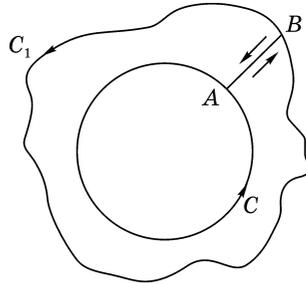


Рис. 3.9

Рассмотрим поле вихря $\vec{\omega}$. Для этого поля можно построить векторные линии* – линии вихря. Аналогично трубке тока можно построить вихревые трубки и их живые сечения (рис. 3.10).

Из формулы (3.33) следует, что $\text{div } \vec{\omega} = 0$ и в соответствии с теоремой Гаусса–Остроградского

$$\int_V \text{div } \vec{\omega} dV = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds = \int_S \omega_n ds = 0, \tag{3.36}$$

то есть поток вихря через замкнутую поверхность равен нулю.

Рассмотрим вихревую трубку, ограниченную поперечными сечениями S_1, S_2 и боковой поверхностью S_3 (рис. 3.10). По определению вихревой трубки, $\omega_n = 0$ на S_3 , и из формулы (3.36) имеем

$$\int_S \omega_n ds = \int_{S_1} \omega_n ds + \int_{S_2} \omega_n ds = 0. \tag{3.37}$$

* См. гл. I, § 4.

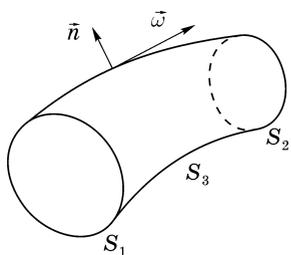


Рис. 3.10

Меняя на S_1 направление нормали на противоположное* и используя теорему Стокса (3.30), из формулы (3.37) получаем

$$\int_{S_1} \omega_n ds = \int_{S_2} \omega_n ds = \frac{1}{2} \int_C \vec{v} d\vec{s} = \frac{1}{2} \Gamma. \quad (3.38)$$

Из формулы (3.38) следует, что циркуляция по любому замкнутому контуру C , охватывающему вихревую трубку, есть величина постоянная. Этот вывод представляет собой вторую теорему Гельмгольца.

Для элементарной вихревой трубки из равенства (3.38) имеем

$$2\omega_1 \Delta S_1 = 2\omega_2 \Delta S_2 = \Gamma, \quad (3.39)$$

где S_1 , S_2 – площади сечений вихревой трубки. Величина $2\omega \Delta S$ называется напряжением вихревой трубки.

Из равенства (3.39) следует, что если величина $\vec{\omega}$ во всей области жидкости конечна, то и ΔS в этой области конечна. Следовательно, вихревые трубки не могут кончаться внутри жидкости. Они либо замкнуты, либо оканчиваются на поверхности жидкости, либо уходят в бесконечность. Очевидно, что этот вывод справедлив и для трубок тока.

* При использовании теоремы Стокса направление обхода на контурах, ограничивающих сечения S_1 и S_2 , должно быть одинаковым. Поэтому если на S_2 берется нормаль внешняя, то на S_1 необходимо взять внутреннюю.

Глава IV

ЖИДКОСТИ

§1. Математическая модель идеальной жидкости

Как уже указывалось в §2.9, система уравнений сплошной среды (2.90) является незамкнутой. Для ее замыкания необходимо добавить реологическое уравнение рассматриваемой сплошной среды или, иначе говоря, задать свойства этой среды. Простейшей моделью сплошной среды является идеальная жидкость.

Идеальной жидкостью (газом) называется изотропная сплошная среда, в которой отсутствуют касательные напряжения, то есть $p_{ik} = 0$ ($i \neq k$). При этом нормальные напряжения являются сжимающими и их величина зависит только от точки сплошной среды и не зависит от направления. Касательные напряжения в жидкости возникают благодаря трению. Поэтому можно сказать, что идеальная жидкость – это жидкость, лишенная внутреннего трения.

Пренебрежение внутренним трением существенно упрощает математическую постановку задач гидромеханики. Это в ряде случаев помогает разобраться в физике рассматриваемых процессов. Кроме того, модель идеальной жидкости позволяет достаточно хорошо описать такие важные с точки зрения практики, явления как гидравлический удар, возникновение ударных волн в газах, возникновение подъемной силы крыла, обтекание хорошо обтекаемых тел и многое другое.

Согласно определению идеальной жидкости имеем

$$p_{nn} = p_1 = p_2 = p_3 = -p. \quad (4.1)$$

Положительная скалярная величина p называется давлением*. Знак «минус» перед p указывает, что в жидкости допускаются только сжимающие нормальные напряжения. Напряжения в идеальной жидкости имеют вид: в векторной форме

$$\vec{p}_{nn} = -p\vec{n}, \quad (4.2)$$

* Обычно молчаливо предполагается, что введенная таким образом величина p тождественна давлению, используемому в термодинамике. Однако это обстоятельство нуждается в дополнительном обосновании.

в тензорной форме

$$p_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (4.3)$$

в матричной форме

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix},$$

где δ_{ij} – дельта Кронекера. Тензор напряжений в идеальной жидкости часто называют шаровым или изотропным, так как соответствующая ему тензорная поверхность, как легко видеть, представляет собой сферу, а физические свойства, задаваемые подобными тензорами, изотропны.

В уравнения (2.83) входят величины $\partial\bar{p}_i/\partial x_i$, $\partial(\bar{p}_i\bar{v})/\partial x_i$. На основании равенств (4.1) и (4.3) имеем

$$\frac{\partial\bar{p}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial\bar{e}_i p}{\partial x_i} = -\bar{e}_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\nabla p, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial(\bar{p}_i\bar{v})}{\partial x_i} = -\frac{\partial(\bar{e}_i p\bar{e}_k v_k)}{\partial x_i} = -\frac{\partial(pv_k)}{\partial x_k} = -\operatorname{div} p\bar{v} = -p \operatorname{div} \bar{v} - \bar{v}\nabla p. \quad (4.5)$$

Подставив соотношения (4.4), (4.5) в уравнения (2.83), получаем модель идеальной жидкости

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} &= 0, \\ \rho \frac{d\bar{v}}{dt} &= \rho\bar{F} - \nabla p, \\ \rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) &= \rho\bar{F}\bar{v} - \operatorname{div} p\bar{v} + \rho q_e, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где первое уравнение – уравнение неразрывности, второе – *уравнение движения Эйлера*, а третье представляет собой закон сохранения энергии.

Система (4.6) содержит пять скалярных уравнений и шесть неизвестных (ρ, v_i, p, u) . Для ее замыкания необходимо задать уравнение состояния

$$p = p(\rho, T), \quad (4.7)$$

связывающее между собой давление, температуру и плотность, и калорическое уравнение состояния

$$u = u(\rho, T). \quad (4.8)$$

Система (4.6), (4.7) и (4.8) содержит семь уравнений и семь неизвестных и представляет собой замкнутую систему уравнений, описывающих движения идеальной сжимаемой жидкости (газа).

Для получения теоремы об изменении кинетической энергии в идеальной жидкости подставим равенство (4.5) в соотношение (2.74). Тогда имеем

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho \bar{F} \bar{v} - \operatorname{div} p \bar{v} + \rho N^{(i)}, \quad (4.9)$$

где в соответствии с определением идеальной жидкости и формулой (2.87) для мощности внутренних сил $\rho N^{(i)}$ имеем

$$\rho N^{(i)} = -p_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = p \operatorname{div} \bar{v} \quad (4.10)$$

или, с учетом уравнения неразрывности (2.32),

$$\rho N^{(i)} = p \operatorname{div} \bar{v} = -\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \quad (4.11)$$

С учетом соотношений (4.10) и (4.11) уравнение притока тепла (2.88) может быть представлено в виде

$$\frac{du}{dt} = q_e + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}, \quad (4.12)$$

или

$$\frac{du}{dt} = q_e - \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \bar{v}. \quad (4.13)$$

Таким образом, как это видно из формул (4.12), (4.13), изменение внутренней энергии идеальной жидкости может происходить только за счет внешнего подвода тепла q_e и изменения ее плотности (объема).

§2. Математическая модель идеальной несжимаемой жидкости

При установившемся течении жидкости и при неустановившихся движениях с нерезкими изменениями скоростей изменение ее плотности настолько мало, что им можно пренебречь. Это же относится к установившемуся течению газа с малыми скоростями или его течению с плавными изменениями скоростей. В этих случаях обычно используется модель несжимаемой жидкости.

Жидкость называется *несжимаемой*, если для фиксированной материальной частицы $\rho = \text{const}$ или, в соответствии с определением материальной производной (1.14), если

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0. \quad (4.14)$$

Жидкость называется *несжимаемой и однородной*, если значение плотности постоянно и одинаково для всех материальных точек рассматриваемого объема жидкости. В этом случае, очевидно,

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial x_i} = 0, \quad (4.15)$$

и плотность является не искомой функцией, а известной величиной, задаваемой при постановке задачи.

Соотношение (4.14) (или (4.15)) представляет собой уравнение состояния несжимаемой жидкости.

Вне зависимости от того, является ли несжимаемая жидкость однородной или неоднородной, для нее, как это следует из равенств (4.6), (4.14), (4.15), система уравнений движения имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{v} &= 0, \\ \rho \frac{d\bar{v}}{dt} &= \rho \bar{F} - \nabla p. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В случае однородной несжимаемой жидкости система из четырех уравнений (4.16) содержит четыре неизвестных функции координат и времени (p, v_i) и, следовательно, является замкнутой. В случае неоднородной несжимаемой жидкости система (4.16) содержит пять неизвестных и для ее замыкания необходимо использовать уравнение (4.14).

Замкнутая система уравнений, описывающих движение несжимаемой жидкости, является чисто механической, то есть не содержит никаких термодинамических характеристик.

Закон изменения кинетической энергии (4.9) для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho \bar{F} \bar{v} - \bar{v} \nabla p, \quad (4.17)$$

так как в соответствии с равенством (4.10) или (4.11) в рассматриваемом случае $N^{(i)} = 0$.

Уравнение притока тепла (4.12) или (4.13) принимает вид

$$\frac{du}{dt} = q_e. \quad (4.18)$$

Умножив второе уравнение (4.6) скалярно на \bar{v} и вычитая полученное выражение из третьего уравнения (4.6), получим для идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{du}{dt} = q_e,$$

что совпадает с уравнением притока тепла (4.18). Таким образом, использование закона сохранения энергии или уравнения притока тепла, позволяет судить лишь об изменении внутренней энергии, то есть об изменении ее температуры.

Подчеркнем еще раз, что изменение температуры никак не может повлиять на течение несжимаемой идеальной жидкости.

Граничное условие на твердых стенках для уравнения Эйлера получается из условия непротекания жидкости через твердую поверхность, то есть в точках твердой поверхности должно выполняться условие

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{V} \cdot \vec{n}, \quad (4.19)$$

где \vec{V} – скорость движения точек твердой поверхности, \vec{n} – нормаль к этой поверхности. Если твердая поверхность неподвижна, то

$$v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0. \quad (4.20)$$

Необходимо отметить, что благодаря наличию нелинейных членов вида

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_i \frac{\partial A}{\partial x_i}, \quad \rho \operatorname{div} \vec{v}, \quad \operatorname{div} p\vec{v}$$

уравнения (4.6) и (4.16) представляют собой системы *нелинейных* дифференциальных уравнений в частных производных. Наличие нелинейностей существенно затрудняет получение точных решений уравнений гидромеханики даже для модели идеальной жидкости.

§3. Вязкая жидкость. Тензор напряжений в вязкой жидкости

Вязкой жидкостью называется сплошная среда, обладающая следующими свойствами: 1. жидкость есть изотропная сплошная среда, то есть все направления в ней физически равноправны (свойства не зависят от направления); 2. тензор напряжений в вязкой жидкости имеет вид

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}, \text{ или } p_{ik} = -p\delta_{ik} + \tau_{ik}, \quad (4.21)$$

где τ_{ik} вязкие напряжения, которые зависят от ε_{ik} , δ_{ik} – дельта Кронекера. Если дополнительно положить, что зависимость между тензорами τ_{ik} и ε_{ik} *линейна*, то вязкая жидкость называется *ньютоновской вязкой жидкостью*. Последнее означает, что каждая из девяти компонент тензора вязких напряжений должна линейным образом зависеть от всех девяти компонент

Условия симметрии (4.22) уменьшают число независимых компонент тензора a_{ijkl} :

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \\ \tau_{32} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1111}a_{1122}a_{1133}a_{1123}a_{1113}a_{1112}a_{1123}a_{1113}a_{1112} \\ a_{1122}a_{2222}a_{2233}a_{2223}a_{2213}a_{2212}a_{2223}a_{2213}a_{2212} \\ a_{1133}a_{2233}a_{3333}a_{3323}a_{3313}a_{3312}a_{3323}a_{3313}a_{3312} \\ a_{1123}a_{2223}a_{3323}a_{2323}a_{2313}a_{2312}a_{2323}a_{2313}a_{2312} \\ a_{1113}a_{2213}a_{3313}a_{1323}a_{1313}a_{1312}a_{1323}a_{1313}a_{1312} \\ a_{1112}a_{2212}a_{3312}a_{1223}a_{1213}a_{1212}a_{1223}a_{1213}a_{1212} \\ a_{1123}a_{2223}a_{3323}a_{2323}a_{2313}a_{2312}a_{2323}a_{2313}a_{2312} \\ a_{1113}a_{2213}a_{3313}a_{1323}a_{1313}a_{1312}a_{1323}a_{1313}a_{1312} \\ a_{1112}a_{2212}a_{3312}a_{1223}a_{1213}a_{1212}a_{1223}a_{1213}a_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} \\ \mathcal{E}_{22} \\ \mathcal{E}_{33} \\ \mathcal{E}_{23} \\ \mathcal{E}_{13} \\ \mathcal{E}_{12} \\ \mathcal{E}_{32} \\ \mathcal{E}_{31} \\ \mathcal{E}_{21} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что три последних строки и столбца в матрице совпадают с тремя предыдущими, и матричное представление можно упростить

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1111}a_{1122}a_{1133}a_{1123}a_{1113}a_{1112} \\ a_{1122}a_{2222}a_{2233}a_{2223}a_{2213}a_{2212} \\ a_{1133}a_{2233}a_{3333}a_{3323}a_{3313}a_{3312} \\ a_{1123}a_{2223}a_{3323}a_{2323}a_{2313}a_{2312} \\ a_{1113}a_{2213}a_{3313}a_{1323}a_{1313}a_{1312} \\ a_{1112}a_{2212}a_{3312}a_{1223}a_{1213}a_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11} \\ \mathcal{E}_{22} \\ \mathcal{E}_{33} \\ \mathcal{E}_{23} \\ \mathcal{E}_{13} \\ \mathcal{E}_{12} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Таким образом, при выполнении условий симметрии (4.22) в общем случае линейная связь между симметричными тензорами второго ранга содержит 21 независимый коэффициент (константу) a_{ijkl} . Пусть матричное равенство (4.23) записано в «старой системе координат» $Ox_1x_2x_3$ (рис. 4.1). Сделаем преобразование координат $x'_1 = x_1, x'_2 = -x_2, x'_3 = x_3$ (зеркальное отражение в плоскости Ox_1x_3), которое задается матрицей преобразования

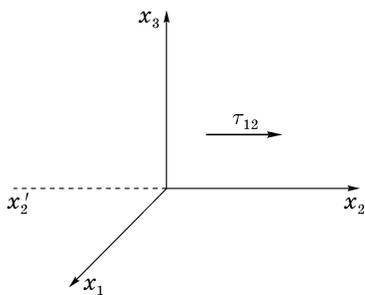


Рис. 4.1

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Согласно требованию, накладываемому на матрицу коэффициентов a_{ijkl} , компоненты матрицы не должны изменяться на любом ортогональном преобразовании. Поэтому должно выполняться равенство

$$a'_{ijkl} = \alpha_{in}\alpha_{jm}\alpha_{kl}\alpha_{lr}a_{nmtr} = a_{ijkl} \quad (4.25)$$

компонент в новой и старой системах координат. Рассмотрим, какое условие накладывает на компоненты матрицы a_{ijkl} равенство (4.25) на преобразовании (4.24). Для примера рассмотрим компоненту a_{1222} . Имеем

$$a_{1222} = \alpha_{1i} \alpha_{2j} \alpha_{2k} \alpha_{2l} a_{ijkl}.$$

После подстановки в последнее равенство компонент матрицы преобразования (4.24) получим

$$a_{1222} = -a_{1222}.$$

Поэтому условие (4.25) выполняется только при $a_{1222} = 0$. Аналогично можно показать, что для выполнения условия (4.25) на преобразовании (4.24) должны быть равны нулю все компоненты матрицы a_{ijkl} , которые содержат нечетное число индексов 2. Рассмотрев преобразования

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

получим новые ограничения на компоненты матрицы a_{ijkl} , которые сведутся к тому, что должны быть равны нулю все компоненты, содержащие нечетное число индексов 1 и 3. Следовательно, равенство (4.23) примет вид

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ a_{1122} & a_{2222} & a_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ a_{1133} & a_{2233} & a_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

Новые ограничения на компоненты матрицы можно получить, рассмотрев матрицы преобразования

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выполнение условия (4.25) на этих преобразованиях приведет к тому, что должны выполняться равенства

$$a_{1111} = a_{2222} = a_{3333}, \quad a_{1122} = a_{1133} = a_{2233}, \quad a_{2323} = a_{1313} = a_{1212},$$

и матричное равенство принимает вид

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ a_{1122} & a_{1111} & a_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ a_{1122} & a_{1122} & a_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Наконец, рассмотрев преобразование, представляющее поворот на угол 120° относительно оси z

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим, что должно выполняться равенство

$$a_{1212} = \frac{1}{2}(a_{1111} - a_{1122}).$$

Полагая $a_{1111} = \lambda + 2\mu$, $a_{1122} = \lambda$, получим, что $a_{1212} = \mu$ (коэффициенты λ и μ называются константами Ламе).

Матрица коэффициентов в равенстве (4.26) в индексной форме записи представляется в виде

$$a_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (4.27)$$

Подстановка тензора (4.27) в равенство (4.21) даст явный вид связи между тензорами ε_{ik} и τ_{ik} для изотропной вязкой жидкости. Представление тензора вязких напряжений в матричной форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \lambda \operatorname{div} \vec{v} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

а в индексной форме задается равенством

$$\tau_{ij} = \lambda \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{kk} = \operatorname{div} \vec{v}. \quad (4.29)$$

Подставив равенство (4.29) в формулу (4.21), получим окончательно

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \varepsilon_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (4.30)$$

Из формулы (4.29) видно, что вязкие свойства жидкости определяются двумя коэффициентами λ и μ . Если жидкость несжимаема, то $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, и для несжимаемой жидкости имеется только один коэффициент μ . Как следует из формулы (4.29), коэффициент μ влияет не только на касательные, но и на нормальные напряжения.

Просуммировав выражения (4.30) для нормальных напряжений p_{kk} , получим

$$\frac{p_{11} + p_{22} + p_{33}}{3} = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \vec{v} = -p + \zeta \operatorname{div} \vec{v}. \quad (4.31)$$

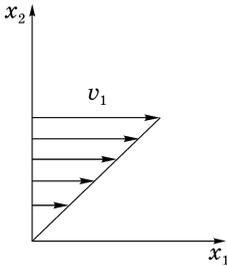


Рис. 4.2

Величина $\zeta = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ называется коэффициентом второй, или объемной, вязкости. В кинетической теории газов доказывается, что для одноатомных газов $\zeta = 0$, но вообще $\zeta \neq 0$.

Из формулы (4.31) следует, что для несжимаемой жидкости давление есть среднее арифметическое нормальных напряжений.

Рассмотрим в качестве примера установившееся течение, для которого поле скоростей имеет вид (рис. 4.2)

$$v_1 = kx_2, \quad v_2 = v_3 = 0. \quad (4.32)$$

Из равенств (4.32) следует, что

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0,$$

откуда, в соответствии с формулами (4.29), имеем

$$p_{12} = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \quad p_{11} = p_{22} = p_{33} = -p, \quad p_{13} = p_{23} = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом течении происходит только скашивание углов, и это течение называется простым сдвигом. Величина $2\varepsilon_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$, как было ранее доказано, представляет собой скорость скашивания координатного угла и называется скоростью сдвига.

Из формул (4.32) следует, что линии тока – прямые $x_2 = \text{const}$.

В соответствии с формулой (3.38) имеем

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ kx_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_3 k,$$

то есть рассматриваемое течение, несмотря на наличие прямолинейных линий тока, является вихревым.

Выражение $p_{12} = \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ представляет собой известный закон трения Ньютона, где μ – динамический коэффициент вязкости.

Для газов коэффициент μ часто определяется формулой $\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$, где T – абсолютная температура. Более точная формула (формула Сатерленда) имеет вид

$$\mu = \mu \frac{1 + C/T_0}{1 + C/T} \sqrt{\frac{T}{T_0}},$$

где C – константа, различная для разных газов.

Из приведенных формул видно, что с ростом температуры вязкость газа возрастает. Для жидкостей, наоборот, с ростом температуры вязкость уменьшается.

Так как при течении жидкостей (газов) температура зависит от координат и времени, то коэффициенты вязкости также являются функциями координат и времени.

§4. Уравнения движения вязкой жидкости

Для вывода уравнений движения вязкой жидкости воспользуемся уравнениями движения сплошной среды (2.43).

Учитывая, что $\lambda = \zeta - \frac{2}{3}\mu$, из формул (4.29) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[-p + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[-p + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) \operatorname{div} \vec{v} \right] \delta_{ij} + 2 \frac{\partial (\mu \varepsilon_{ij})}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

В соответствии с формулами (3.5) имеем

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial (\mu \varepsilon_{ij})}{\partial x_i} &= \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \\ &= \nabla \mu \nabla v_j + \nabla \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{div} \vec{v} + \mu \Delta v_j, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где Δ – оператор Лапласа*.

* Пьер Симон Лаплас (1749–1827), французский физик, астроном и математик. Иностраннный почетный член Петербургской Академии Наук.

Подставив соотношения (4.33) и (4.34) в уравнения (2.43), получим

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_j}{dt} = \rho F_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \Delta v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \bar{v} \right] + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{div} \bar{v} + \\ + \nabla \mu \nabla v_j + \nabla \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Уравнения (4.35) называются уравнениями Навье–Стокса* для вязкой сжимаемой жидкости. При $\mu = \zeta = 0$ они обращаются в уравнения Эйлера (4.6). Уравнения Навье–Стокса, в отличие от уравнений Эйлера, представляют собой нелинейные уравнения второго порядка.

Для вывода уравнения для закона сохранения энергии для вязкой сжимаемой жидкости вычислим предварительно величину

$$\frac{\partial(\bar{p}_i \bar{v})}{\partial x_i} = \frac{\partial(p_{ij} v_j)}{\partial x_i} = p_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + v_j \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i}. \quad (4.36)$$

Из формул (3.5) и (4.29) следует, что

$$\begin{aligned} p_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} &= \left\{ \left[-p + \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \bar{v} \right] \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \right\} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \\ &= \left[-p + \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \bar{v} \right] \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + 2\mu \varepsilon_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \\ &= \left[-p + \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \bar{v} \right] \operatorname{div} \bar{v} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

На основании формул (4.33) и (4.34) имеем

$$\begin{aligned} v_j \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} = \bar{v} \nabla \left[-p + \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \bar{v} \right] + v_j \nabla \mu \nabla v_j + v_j \nabla \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + \\ + \mu \bar{v} \nabla(\operatorname{div} \bar{v}) + \mu \bar{v} \Delta \bar{v}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Подставив выражения (4.37) и (4.38) в уравнение (2.65) и используя известную форму векторного анализа

$$\operatorname{div} \varphi \bar{v} = \varphi \operatorname{div} \bar{v} + \bar{v} \nabla \varphi,$$

получим

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \bar{F} \bar{v} + \operatorname{div} \left[-p + \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \bar{v} \right] \bar{v} + v_j \nabla \mu \nabla v_j + \\ + v_j \nabla \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} + \mu \bar{v} \nabla(\operatorname{div} \bar{v}) + \mu \bar{v} \Delta \bar{v} + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \rho q_e. \end{aligned} \quad (4.39)$$

* Анри Навье (1785–1836), французский инженер и ученый.

Уравнение (4.39) представляет собой закон сохранения энергии для вязкой сжимаемой жидкости. При $\mu = \zeta = 0$ оно обращается в уравнение для идеальной жидкости (4.6).

Система уравнений для вязкой сжимаемой жидкости содержит 9 неизвестных ($\rho, \mu, \zeta, u, p, v_i, T$) и семь уравнений: уравнение неразрывности (2.32), уравнения состояния (4.7) и (4.8), уравнения движения (4.35), закон сохранения энергии (4.39). Для ее замыкания необходимо добавить зависимости

$$\mu = \mu(T), \quad \zeta = \zeta(T). \quad (4.40)$$

§5. Математическая модель вязкой несжимаемой жидкости

Система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, как это следует из равенств (2.25), (4.8), (4.14), (4.35), (4.39) и (4.40), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial\rho}{\partial x_i} = 0, \\ \operatorname{div} v &= 0, \\ \rho \frac{dv_i}{dt} &= \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i + \nabla \mu \nabla v_i + \nabla \mu \frac{\partial v}{\partial x_i}, \\ \rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) &= \rho F v - v \nabla p + v_i \nabla \mu \nabla v_i + v_i \nabla \mu \frac{\partial v}{\partial x_i} + \mu v \Delta v + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \rho q_e, \\ u &= u(\rho, T), \quad \mu = \mu(T), \end{aligned} \quad (4.41)$$

Эта система из восьми уравнений содержит восемь неизвестных (ρ, μ, u, T, p, v_i) и является замкнутой.

Для однородной несжимаемой жидкости первое из уравнений (4.41) обращается в тождество, а плотность, как уже указывалось, является известной константой.

В отличие от несжимаемой идеальной жидкости, система уравнений (4.41) не является чисто механической. Действительно, так как вязкость есть функция температуры, то последняя влияет на характер течения.

При изотермическом режиме течения вязкой несжимаемой жидкости система уравнений (4.41) существенно упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \rho \frac{dv_i}{dt} &= \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Эта система из четырех уравнений содержит четыре неизвестных и является замкнутой*. Таким образом, задача об изотермическом течении несжимаемой жидкости, также как и задача о течении идеальной несжимаемой жидкости, является чисто механической.

Для теоремы об изменении кинетической энергии при изотермическом движении вязкой несжимаемой жидкости из формул (2.74), (2.80) и (4.38) имеем

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{F} \vec{v} + v_k \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i} = \rho \vec{F} \vec{v} - \vec{v} \nabla p + \mu \vec{v} \Delta \vec{v}. \quad (4.43)$$

Так как уравнения Навье-Стокса, в отличие от уравнений Эйлера, представляют собой уравнения второго порядка, то к граничным условиям (4.19) или (4.20) необходимо добавить еще одно условие. В качестве такого принимается гипотеза прилипания, которая заключается в том, что на твердой стенке полагается выполненным условие

$$v_\tau = V_\tau, \quad (4.44)$$

где v_τ, V_τ – касательные составляющие скорости жидкости и стенки. Следовательно, граничные условия для уравнений Навье-Стокса имеют вид

$$v_n = V_n, \quad v_\tau = V_\tau \quad (4.45)$$

или, если стенка неподвижна,

$$v_n = v_\tau = 0. \quad (4.46)$$

Различие граничных условий (4.19) и (4.45) для идеальной и вязкой жидкостей приводит к весьма важным последствиям. Действительно, при вязкости, стремящейся к нулю, уравнения Навье-Стокса в пределе переходят в уравнения Эйлера. Однако решения уравнений Навье-Стокса при $\mu = 0, \zeta = 0$ не переходят в решения уравнений Эйлера, так как они получены при разных граничных условиях, а граничные условия (4.45) от вязкости не зависят.

Более подробный анализ указанных обстоятельств показывает, что вязкость существенно влияет на характер течения лишь в достаточно тонком слое жидкости, прилегающем к твердой поверхности. Этот слой получил название пограничного слоя. Вне пограничного слоя вязкостью можно пренебречь и рассматривать жидкость как идеальную.

Данные выше факты привели к созданию целого раздела гидромеханики – теории пограничного слоя.

* В случае неоднородной несжимаемой жидкости к уравнениям (4.42) добавляется первое из уравнений (4.41).

§6. Работа внутренних сил. Уравнение притока тепла

Как было показано в §2.7, в уравнение для изменения кинетической энергии (2.74) входит удельная по массе мощность внутренних сил $N^{(i)}$, для которой была получена формула (2.80), справедливая для любой сплошной среды. Подставив в нее выражение (4.37), для сжимаемой вязкой жидкости получим

$$\rho N^{(i)} = - \left[-p + \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \bar{v} \right] \operatorname{div} \bar{v} - 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = p \operatorname{div} \bar{v} - W, \quad (4.47)$$

где

$$-W = - \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} \bar{v})^2 - 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (4.48)$$

– мощность (удельная по объему) внутренних сил, обусловленных вязкостью, или мощность диссипативных сил.

Используя преобразование

$$\begin{aligned} 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \bar{v})^2 &= 2\mu (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + 4\mu (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2) - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \bar{v})^2 = \\ &= 2\mu \left[\left(\varepsilon_{11} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \bar{v} \right)^2 + \left(\varepsilon_{22} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \bar{v} \right)^2 + \left(\varepsilon_{33} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \bar{v} \right)^2 \right] + 4\mu (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2), \end{aligned}$$

перепишем равенство (4.48) в виде

$$\begin{aligned} W &= \zeta (\operatorname{div} \bar{v})^2 + 2\mu \left[\left(\varepsilon_{11} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \bar{v} \right)^2 + \left(\varepsilon_{22} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \bar{v} \right)^2 + \left(\varepsilon_{33} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \bar{v} \right)^2 \right] + \\ &\quad + 4\mu (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Так как $\zeta > 0$, $\mu > 0$, то из формул (4.47) и (4.49) следует, что $W > 0$ и работа диссипативных сил всегда отрицательна. Если жидкость движется как твердое тело, то есть $\varepsilon_{ik} = 0$, то $W = 0$.

Подставив в общее уравнение притока тепла (2.88) соотношение (4.47), получим уравнение притока тепла для вязкой сжимаемой жидкости в виде

$$\frac{du}{dt} = q_e - \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \bar{v} + \frac{W}{\rho} \quad (4.50)$$

Из закона об изменении кинетической энергии (2.14) и формулы (4.47) следует, что при отсутствии внешних сил

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV = \int_V \rho N^{(i)} dV = \int_V (p \operatorname{div} \bar{v} - W) dV, \quad (4.51)$$

то есть кинетическая энергия в этом случае изменяется только за счет работы внутренних сил.

Для вязкой несжимаемой жидкости формула (4.51) на основании равенства (4.49) принимает вид

$$\frac{dK}{dt} = - \int_V W dV = - \int_V 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} dV.$$

Так как $W > 0$, то за счет работы внутренних сил кинетическая энергия убывает. Предельное значение $W = 0$ осуществляется при $\varepsilon_{ik} = 0$. Следовательно, при отсутствии внешних сил предельным движением вязкой несжимаемой жидкости будет движение твердого тела, при котором $\frac{dK}{dt} = 0$.

Рассмотрим некоторые частные виды уравнения притока тепла и работы диссипативных сил.

1. Жидкость идеальная и несжимаемая, то есть $\mu = 0$, $\zeta = 0$, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Из формул (4.47), (4.48) и (4.50) имеем

$$N^{(i)} = 0, \quad W = 0, \quad \frac{du}{dt} = q_e.$$

Следовательно, работа внутренних сил, в том числе диссипативных, равна нулю. Внутренняя энергия может изменяться только за счет подвода тепла.

2. Жидкость идеальная, сжимаемая. В соответствии с формулами (4.47), (4.48) и (4.50) имеем

$$N^{(i)} = \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \vec{v}, \quad W = 0, \quad \frac{du}{dt} = q_e - \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \vec{v}.$$

Из уравнения неразрывности следует, что $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{v}$. Тогда

$$N^{(i)} = - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}, \quad \frac{du}{dt} = q_e + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}.$$

При расширении $\frac{d\rho}{dt} < 0$ и $N^{(i)} > 0$. При сжатии $\frac{d\rho}{dt} > 0$ и $N^{(i)} < 0$. Если процесс адиабатический, то есть протекает без подвода тепла, то $q_e = 0$. При сжатии $\frac{du}{dt} > 0$ и происходит нагрев жидкости, при расширении – охлаждение.

3. Жидкость вязкая несжимаемая. Из формул (4.47), (4.48) и (4.50) получаем

$$N^{(i)} = -\frac{W}{\rho}, \quad W = 2\mu\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ik} = 2\mu(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + 4\mu(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{13}^2) > 0, \quad (4.50)$$

$$\frac{du}{dt} = q_e + \frac{W}{\rho}.$$

Работа внутренних сил обусловлена только диссипацией. При $q_e = 0$ работа диссипативных сил идет на увеличение внутренней энергии, то есть на нагревание жидкости.

Из рассмотренных примеров видно, что анализ работы внутренних сил приводит к важным результатам. Так, работа (мощность) равна нулю только при движении идеальной несжимаемой жидкости. В случае идеальной сжимаемой жидкости эта работа может приводить как к увеличению, так и к уменьшению внутренней энергии. При движении вязкой несжимаемой жидкости работа внутренних сил сводится к работе сил трения и всегда отрицательна. Наличие трения приводит к нагреванию жидкости.

Глава V

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ И ПОДОБИЯ

«В теории размерностей и подобия устанавливаются условия, которые затем соблюдаются в опытах с моделями, и выделяются характеристики и удобные параметры, определяющие основные эффекты и режимы процессов. Вместе с тем, сочетание соображений теории размерностей и подобия с общим качественным анализом механизма физических явлений в ряде случаев может служить плодотворным теоретическим методом исследования». Л.И.Седов*.

§1. Системы единиц измерения. Размерность

Для количественного описания какого-либо физического явления необходимо выразить его характеристики при помощи чисел. Эти числа получаются путем измерения, т.е. сравнения (прямого или косвенного) измеряемой физической величины с соответствующим эталоном, принятым за единицу измерения. При этом, очевидно, численное значение измеряемой величины зависит от единицы измерения, т.е. от величины принятого эталона. Так, продолжительность суток может быть выражена числами: 1 (сутки), 24 (часа), 1440 (минут), 86400 (секунд).

Если численное значение физической величины зависит от единиц измерения (величин эталонов), то такая величина называется размерной. Примерами размерных величин могут служить скорость, время, длина и т.п.

Величины, численное значение которых не зависит от единиц измерения, называются безразмерными. Примерами безразмерных величин могут служить отношение длины окружности к ее радиусу, отношение плотности какого-либо вещества к плотности воды и т.п. Если выбрать *независимо* друг от друга эталоны единиц измерения достаточного количества физичес-

* Леонид Иванович Седов (1907–1999) – крупнейший российский гидромеханик, действительный член Российской академии наук. Труды по механике сплошных сред, гидроаэродинамике, газовой динамике, теории размерностей и подобия.

ких величин, описывающих, например, механические явления, то на их основе с помощью физических законов и определений можно установить единицы измерения всех величин, входящих в описание рассматриваемых явлений. Например, в соответствии со вторым законом Ньютона, сила равна произведению массы на ускорение, следовательно, единица силы не нуждается во введении своего эталона, а может быть определена через единицы длины, массы и времени.

Единицы измерения, вводимые с помощью эталонов, которым, по определению, присваивается числовое значение, равное единице, называются основными единицами измерения.

Единицы измерения величин, которые получаются из основных единиц измерения с помощью соответствующих физических законов или из определений этих величин, называются производными единицами измерения.

Совокупность основных единиц измерения, достаточная для измерения всех физических величин, используемых для описания некоторого класса физических явлений, называется системой единиц измерения.

Выбор как основных единиц измерения, так и систем единиц измерения достаточно произволен. Например, в механике и ее приложениях используются системы см, г, сек (СГС), м, кг, сек (СИ), м, кгс, сек (МКСС). Немецким физиком Г.Герцем была предложена система единиц измерения, в основу которой были положены единицы длины, массы и энергии. Можно построить для механики системы единиц, содержащие как больше, так и меньше трех основных единиц измерения. Поэтому критерием выбора основных единиц измерения и их количества в системе единиц измерения является удобство их применения на практике.

В приведенных примерах системы СИ и СГС в качестве основных единиц измерения содержат эталоны одной физической природы – длины, массы, времени, которые отличаются друг от друга только величиной эталонов. Системы МКСС и Г.Герца имеют другой набор эталонов – длины, силы, времени или длины, массы, энергии.

Совокупность систем единиц измерения, отличающихся между собой только величиной эталонов, но не их физической природой, называется классом систем единиц измерения. В соответствии с данным определением системы СИ и СГС принадлежат к одному классу, а системы СИ и МКСС – к разным классам систем единиц измерения.

Введем для обозначения длины символ L , массы – M , времени – T , силы – F . Тогда класс систем единиц измерения, к которому принадлежат системы СИ и СГС, обозначим как LMT , класс, к которому принадлежит система МКСС – как LFT .

Размерность физической величины φ обычно обозначается символом $[\varphi]^*$ и представляет собой выражение производной единицы измерения через основные.

В соответствии со вторым законом Ньютона в классе МКСС размерность массы m равна $[m] = \frac{[F]}{[a]} = \frac{FT^2}{L}$, где F – сила, a – ускорение, а в классе MLT – $[m] = M$.

Плотность ρ вещества, по определению, представляет собой отношение массы m к объему V . Поэтому в классах MLT и МКСС имеем, соответственно,

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{M}{L^3}, \quad [\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{FT^2}{L^4}.$$

Из приведенных примеров видно, что в классе MLT единица массы является основной, а в классе МКСС – производной. Размерность плотности в классах MLT и МКСС имеет разный вид. Отсюда следует, что говорить о том, является ли какая-либо единица измерения основной или производной, а также говорить о ее размерности можно *только* применительно к рассматриваемому классу единиц измерения.

Уменьшим единицу измерения массы в α раз, а единицу измерения длины – в β раз. Тогда число, выражающее величину массы, увеличится в α раз, а длины – в β раз. Следовательно, число, выражающее величину плотности, как это вытекает из ее размерности в классе MLT , изменится в $\alpha\beta^{-3}$ раз. Аналогично можно рассмотреть масштабы пересчета численных значений и для других физических величин.

Таким образом, размерность физической величины представляет собой функцию, которая определяет, во сколько раз изменится численное значение этой величины при переходе от исходной системы единиц измерения к другой системе внутри данного класса.

§2. О формуле размерности

Исходным пунктом для вывода формулы размерности является утверждение, что внутри заданного класса все системы единиц измерения равноправны. Отсюда следует, что отношение двух численных значений какой-либо производной величины не зависит от выбора масштабов основных

* Это обозначение было введено Максвеллом.

единиц измерения внутри данного класса систем единиц измерения. Например,

$$\frac{S_{1M}^2}{S_{2M}^2} = \frac{S_{1CM}^2}{S_{2CM}^2}, \quad \frac{\rho_{1КГ/М^3}}{\rho_{2КГ/М^3}} = \frac{\rho_{1Г/СМ^3}}{\rho_{2Г/СМ^3}},$$

где S_1, S_2 – площади каких-либо фигур; ρ_1, ρ_2 – плотности двух различных сред.

Пусть $u = f(x, y, z)$ некоторая производная размерная величина, а x, y, z – численные значения основных единиц измерения, например, длины, массы и времени. Пусть u' – значение величины u , соответствующее значениям аргументов x', y', z' . Уменьшим основные единицы измерения, соответственно, в α, β, γ раз. Тогда на основании исходного утверждения

$$\frac{u}{u'} = \frac{f(x, y, z)}{f(x', y', z')} = \frac{f(\alpha x, \beta y, \gamma z)}{f(\alpha x', \beta y', \gamma z')},$$

откуда

$$\frac{f(\alpha x, \beta y, \gamma z)}{f(x, y, z)} = \frac{f(\alpha x', \beta y', \gamma z')}{f(x', y', z')} = \varphi(\alpha, \beta, \gamma). \quad (5.1)$$

Таким образом, отношение численных значений производной величины, полученных в разных масштабах основных единиц, зависит только от отношения этих масштабов. В соответствии с приведенным выше определением функция $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ представляет собой размерность величины u .

Из формулы (5.1) следует, что

$$\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \frac{f(\alpha_1 x, \beta_1 y, \gamma_1 z)}{f(x, y, z)}, \quad \varphi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = \frac{f(\alpha_2 x, \beta_2 y, \gamma_2 z)}{f(x, y, z)}$$

или

$$\frac{\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{\varphi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)} = \frac{f(\alpha_1 x, \beta_1 y, \gamma_1 z)}{f(\alpha_2 x, \beta_2 y, \gamma_2 z)}. \quad (5.2)$$

Положим $\alpha_2 x = x', \beta_2 y = y', \gamma_2 z = z'$. Тогда из формул (5.1) и (5.2) имеем

$$\frac{\varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{\varphi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)} = \frac{f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x', \frac{\beta_1}{\beta_2} y', \frac{\gamma_1}{\gamma_2} z'\right)}{f(x', y', z')} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \frac{\beta_1}{\beta_2}, \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right). \quad (5.3)$$

Дифференцируя равенство (5.3) по α_1 , получаем

$$\frac{1}{\varphi(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)} \frac{\partial \varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \frac{\beta_1}{\beta_2}, \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)}{\partial \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}.$$

Пусть теперь $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Тогда

$$\frac{1}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)} \cdot \frac{\partial \varphi(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} = \frac{m}{\alpha}, \quad (5.4)$$

где

$$m = \left[\frac{\partial \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \frac{\beta_1}{\beta_2}, \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)}{\partial \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} \right]_{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 1} = \text{const}.$$

Интегрируя равенство (5.4) по α , находим

$$\ln \varphi = m \ln \alpha + \ln C_1(\beta, \gamma),$$

откуда

$$\varphi = \alpha^m C_1(\beta, \gamma). \quad (5.5)$$

Подставив соотношение (5.5) в равенство (5.3), имеем

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^m \frac{C_1(\beta_1, \gamma_1)}{C_1(\beta_2, \gamma_2)} = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^m C_1\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}, \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right), \quad (5.6)$$

т.е. имеем уравнение того же вида, что и соотношение (5.3). Продолжая аналогичные рассуждения, т.е. дифференцируя выражение (5.6) по β_1 и т.д., получаем:

$$\varphi = C \alpha^m \beta^n \gamma^l.$$

Из формулы (5.1) следует, что при $\alpha = \beta = \gamma = 1$ $\varphi = 1$. Таким образом, $C=1$, и формула размерности приобретает вид

$$\varphi = \alpha^m \beta^n \gamma^l. \quad (5.7)$$

Таким образом, доказано, что формула размерности физической величины имеет вид степенного одночлена.

Из формулы (5.7) следует, что для безразмерных величин $m = n = l = 0$ $\varphi = 1$.

§3. Величины с независимыми размерностями

Рассмотрим две совокупности размерных величин: скорость v , давление p , плотность ρ и вязкость μ , расход Q , длина l . Их размерности в классе LMT таковы

$$[v] = \frac{L}{T}, [p] = \frac{M}{LT^2}, [\rho] = \frac{M}{L^3}; [\mu] = \frac{M}{LT}, [Q] = \frac{L^3}{T}, [l] = L.$$

Запишем равенство

$$[p] = [\rho]^\alpha [v]^\beta \quad \text{или} \quad \frac{M}{LT^2} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^\alpha \left(\frac{L}{T}\right)^\beta. \quad (5.8)$$

Так как единицы длины, массы и времени взаимно независимы, то приравнявая показатели степеней при L , M , T , из равенства (5.8) получим

$$\alpha = 1, \quad -3\alpha + \beta = -1, \quad -\beta = -2,$$

откуда $\alpha = 1$, $\beta = 2$ и $[p] = [\rho][v]^2$.

Запишем теперь аналогично для μ , Q , l

$$[\mu] = [Q]^\alpha [l]^\beta, \quad \text{или} \quad \frac{M}{LT} = \left(\frac{L^3}{T}\right)^\alpha L^\beta.$$

Очевидно, что последнее равенство не может соблюдаться ни при каких α и β .

Таким образом, размерность давления может быть выражена через размерности плотности и скорости, а размерность вязкости не может быть выражена через размерности расхода и длины.

Введем следующее определение. Пусть дана совокупность k размерных физических величин a_1, a_2, \dots, a_k . Если размерность ни одной из этих величин не может быть выражена через размерности остальных $k - 1$ величин, то совокупность величин a_1, a_2, \dots, a_k называется совокупностью параметров с независимыми размерностями.

Из приведенного определения следует, что μ, Q, l образуют совокупность параметров с независимыми размерностями, а p, ρ, v – совокупность параметров с зависимыми размерностями.

Пусть дана система единиц измерения из m основных единиц. Покажем, что в этой системе число k единиц с независимыми размерностями не превосходит m , т.е. $k \leq m$.

Примем для простоты рассуждений, что $m = 3$ и основными единицами являются L, M, T . Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 – размерные величины. Положим

$$[a_4] = [a_1]^x [a_2]^y [a_3]^z. \quad (5.9)$$

В соответствии с формулой размерности (5.7) $[a_i] = [M]^{m_i} [L]^{n_i} [T]^{l_i}$, и равенство (5.9) можно представить в виде

$$M^{m_4} L^{n_4} T^{l_4} = (M^{m_1} L^{n_1} T^{l_1})^x (M^{m_2} L^{n_2} T^{l_2})^y (M^{m_3} L^{n_3} T^{l_3})^z,$$

откуда, приравнивая показатели степеней при L , M , T , имеем

$$\begin{aligned} m_1 x + m_2 y + m_3 z &= m_4, \\ n_1 x + n_2 y + n_3 z &= n_4, \\ l_1 x + l_2 y + l_3 z &= l_4. \end{aligned} \quad (5.10)$$

По условию $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ не равны нулю одновременно ($[a_4] \neq 1$). Поэтому равенства (5.10) представляют собой неоднородную систему трех линейных уравнений относительно неизвестных x, y, z .

Рассмотрим определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta \neq 0$, то система (5.10) имеет единственное решение, и значит справедливо равенство (5.9). Следовательно, величина a_4 является размерно-зависимой, и $k = 3$.

Если $\Delta = 0$, то между столбцами детерминанта существует линейная зависимость, например,

$$\begin{aligned} \lambda m_1 &= \lambda m_2 + \nu m_3, \quad \lambda n_1 = \lambda n_2 + \nu n_3, \quad \lambda l_1 = \lambda l_2 + \nu l_3 \\ [a_1]^\lambda &= [a_2]^\mu [a_3]^\nu \end{aligned}$$

При этом случаи $\mu = \nu = 0$, $\mu = \lambda = 0$, $\lambda = \nu = 0$ исключаются, так как, по условию, a_1, a_2, a_3 – размерные величины. Таким образом, при $\Delta = 0$ величины a_1, a_2, a_3 размерно-зависимы, и $k < 3$.

Очевидно, что изложенные рассуждения могут быть без труда обобщены на случай $m > 3$.

Из приведенного доказательства следует, что если a_1, a_2, \dots, a_k при $k = m$ обладают независимыми размерностями, то размерность любой размерной величины a_{k+1} может быть выражена в виде

$$[a_{k+1}] = [a_1]^{m_1} [a_2]^{m_2} \dots [a_k]^{m_k}. \quad (5.11)$$

Из формулы (5.11) следует также, что при $k = m$ величины a_1, a_2, \dots, a_k могут быть приняты за новую систему единиц измерения.

Таким образом, сделанное утверждение доказано.

Перейдем к доказательству П-теоремы.

Пусть функция

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad (5.14)$$

у которой аргументы a_1, a_2, \dots, a_k обладают независимыми размерностями, представляет собой какую-либо физическую зависимость*.

Выбирая различные системы единиц измерения, можно, очевидно, произвольным образом менять численные значения аргументов функции f . Однако ясно, что физическая закономерность, т.е. вид функции f , не может зависеть от применяемой системы единиц измерения. Иначе говоря, физические закономерности должны быть инвариантны по отношению к применяемым системам единиц измерения.

Как было показано в §3, размерности величин a, a_{k+1}, \dots, a_n могут быть выражены через размерности величин с независимыми размерностями, то есть

$$\begin{aligned} [a] &= [a_1]^\alpha [a_2]^\beta \dots [a_k]^\gamma, & [a_{k+1}] &= [a_1]^{\alpha_{k+1}} [a_2]^{\beta_{k+1}} \dots [a_k]^{\gamma_{k+1}}, \\ [a_n] &= [a_1]^{\alpha_n} [a_2]^{\beta_n} \dots [a_k]^{\gamma_n}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Введем параметры

$$\Pi = \frac{a}{a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_k^\gamma}, \quad \Pi_i = \frac{a_{k+i}}{a_1^{\alpha_{k+i}} a_2^{\beta_{k+i}} \dots a_k^{\gamma_{k+i}}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-k. \quad (5.16)$$

Из формул (5.15) следует, что величины (5.16) являются безразмерными.

Подставив значения (5.16) в соотношение (5.14), получаем

$$\Pi a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_k^\gamma = f(a_1, a_2, \dots, a_k, \Pi_1 a_1^{\alpha_1} a_2^{\beta_1} \dots a_k^{\gamma_1}, \dots, \Pi_{n-k} a_1^{\alpha_{n-k}} a_2^{\beta_{n-k}} \dots a_k^{\gamma_{n-k}})$$

или

$$\Pi = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_k, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}). \quad (5.17)$$

Как было доказано, путем изменения масштабов основных единиц измерения можно численное значение величины a_1 изменить в произвольное число раз, причем так, чтобы численные значения величин a_2, a_3, \dots, a_k остались без изменения. Так как параметры $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$ являются безразмерными, то их численные значения тоже не изменяются. Это означает, что функция Φ от аргумента a_1 не зависит и

$$\Pi = \Phi(a_2, a_3, \dots, a_k, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}).$$

* Математический вид этой зависимости здесь не имеет значения.

Применяя эти же рассуждения последовательно к параметрам a_2, a_3, \dots, a_k , из формулы (5.17) получим, что

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}). \quad (5.18)$$

Полученный результат представляет собой содержание Π -теоремы, или теоремы Букингама. Пусть существует физическая закономерность, выраженная в виде зависимости некоторой, размерной величины от размерных же определяющих параметров. Эта зависимость всегда может быть представлена в виде зависимости некоторой безразмерной величины от безразмерных комбинаций определяющих параметров. Количество этих безразмерных комбинаций меньше общего числа определяющих параметров на число размерных определяющих параметров с независимыми размерностями.

Иначе говоря, пусть дана физическая зависимость (5.14) и пусть величины a_1, a_2, \dots, a_k обладают независимыми размерностями. Тогда зависимость (5.14) может быть приведена к виду (5.18), где безразмерные параметры $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$ вычисляются по формулам (5.16).

Из формул (5.14) и (5.18) следует, что при переходе от зависимости (5.14) между размерными величинами к безразмерной зависимости (5.18) число аргументов уменьшается на число k параметров с независимыми размерностями, и соотношение (5.18) является инвариантным относительно применяемых систем единиц измерения.

Особый интерес представляет случай $k = n$. Из формул (5.16) и (5.18) следует, что в этом случае

$$\Pi = \frac{a}{a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_k^\gamma} = C = \text{const}, \text{ или } a = C a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_k^\gamma. \quad (5.19)$$

Заметим, что из общего числа параметров a_1, a_2, \dots, a_n в формуле (5.14) совокупность параметров с независимыми размерностями a_1, a_2, \dots, a_k может быть выбрана разными способами. Поэтому, как это видно из формул (5.16), безразмерные параметры $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}$ могут иметь различный вид при одном и том же виде зависимости (5.14).

Заметим также, что смысл Π -теоремы сводится по существу к переходу к новой системе единиц измерения a_1, a_2, \dots, a_k .

§5. Подобие физических явлений, моделирование

Рассмотрим описание какого-либо физического явления в заданной системе единиц измерения, которую обозначим индексом (1). Изменим масшта-

бы основных единиц измерения и новую систему обозначим индексом (2). Тогда, очевидно,

$$\Pi_i^{(1)} = \Pi_i^{(2)}, \quad \Pi^{(1)} = \Pi^{(2)}.$$

По определению немецкого физика Р. Поля, «физическая величина – произведение числового значения на единицу этой величины». Иначе говоря, $Y = y[y]$, где Y – физическая величина, y – ее числовое значение в единице измерения $[y]$. Очевидно, что изменение параметра Y по тем же правилам, по которым изменяется единица измерения $[y]$, приводит к одинаковому изменению численного значения y . Действительно, например, плотность среды ρ определяется как отношение ее массы m к занимаемому объему V , то есть

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}.$$

Уменьшим единицу массы в 10 раз, а единицу измерения длины увеличим в 10 раз. Тогда численное значение плотности увеличится в $10/(10^{-1})^3 = 10^4$ раз. Увеличим теперь массу среды в 10 раз, а линейные размеры занимаемого ею объема уменьшим в 10 раз. Численное значение плотности изменится также в 10^4 раз.

Рассмотрим теперь два аналогичных физических явления (например, течение жидкостей в трубах), одно из которых обозначим (н) – натура, другое (м) – модель. Подберем физические параметры модели таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\Pi_i^{(м)} = \Pi_i^{(н)}. \quad (5.20)$$

Тогда, как это следует из П-теоремы, то есть из формулы (5.18),

$$\Pi^{(м)} = \Pi^{(н)}. \quad (5.21)$$

При выполнении условий (5.20) модельное и натурное явления называются подобными, а величины Π_i – критериями подобия.

«Два явления подобны, если по заданным характеристикам одного можно получить характеристики другого простым пересчетом, который аналогичен переходу от одной системы единиц измерения к другой системе единиц измерения». Л.И.Седов.

Из формул (5.16) и (5.21) для подобных явлений имеем

$$\left[\frac{a}{a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_k^\gamma} \right]^{(м)} = \left[\frac{a}{a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_k^\gamma} \right]^{(н)},$$

откуда

$$a^{(н)} = a^{(м)} \left(\frac{a_1^{(н)}}{a_1^{(м)}} \right)^\alpha \left(\frac{a_2^{(н)}}{a_2^{(м)}} \right)^\beta \dots \left(\frac{a_k^{(н)}}{a_k^{(м)}} \right)^\gamma \quad (5.22)$$

Таким образом, при соблюдении подобия экспериментальное исследование какого-либо физического явления может быть заменено исследованием его модели, что в ряде случаев является весьма целесообразным или даже единственно возможным.

Требование выполнения условий (5.20) показывает, какие значения параметров процесса должны быть подобраны при модельных исследованиях, то есть определяют характеристики модели, обеспечивающие соблюдение подобия.

Формула (5.22) дает правило пересчета результата модельных исследований $a^{(M)}$ на натуру $- a^{(H)}$.

§6. Параметры, определяющие класс явлений

Так как математическая зависимость величины a от величин a_1, a_2, \dots, a_n в формуле (5.14) может иметь разный вид, то есть описывать различные физические процессы, то величины a_1, a_2, \dots, a_n называются параметрами, определяющими класс явлений. Параметр a называется определяемым.

В тех случаях, когда известна математическая модель физического процесса, таблица параметров, определяющих класс явлений, выписывается из уравнений, начальных и граничных условий, его определяющих, то есть выписывается совокупность размерных и безразмерных величин, задание которых необходимо и достаточно для решения задачи. Размерные константы также входят в число определяющих параметров.

Если математическая модель явления отсутствует, то таблица определяющих параметров может быть составлена на основании общих качественных соображений и данных эксперимента (если таковые имеются).

Система параметров, определяющих класс явлений, должна обладать свойством *полноты*. Это значит, что она должна содержать параметры, через размерности которых могут быть выражены размерности определяемых параметров.

Так, нельзя утверждать, что сила F , действующая на какое-либо тело со стороны жидкости, есть функция только ее плотности ρ и скорости течения v , то есть, что $F = f(\rho, v)$. В самом деле, равенство

$$[F] = \frac{ML}{T^2} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^\alpha \left(\frac{L}{T}\right)^\beta,$$

как легко видеть, не может иметь места ни при каких значениях α и β . Однако можно утверждать, что $F = f(l, \rho, v)$, где l – какая-либо величина, имеющая размерность длины. Действительно, в этом случае

$$[F] = \frac{ML}{T^2} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^\alpha \left(\frac{L}{T}\right)^\beta L^\gamma,$$

и отсюда сразу получаем $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$ и $F = \rho v^2 l^2$.

Аналогично, нельзя сказать, что касательное напряжение τ есть функция плотности жидкости и градиента скорости, так как

$$[\tau] = \frac{M}{LT^2}, \quad [\nabla v] = \frac{1}{T} \quad \text{и} \quad \frac{M}{LT^2} \neq \left(\frac{M}{L^3}\right)^\alpha \left(\frac{1}{T}\right)^\beta.$$

В то же время можно утверждать, что $\tau = f(\rho, l, \nabla v)$, так как

$$[\tau] = \frac{M}{LT^2} = [\rho][l]^2[\nabla v].$$

§7. Примеры на применение П-теоремы

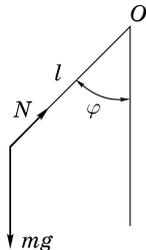


Рис. 5.1

1. Колебания математического маятника. Математический маятник представляет собой материальную точку массой m , которая подвешена на невесомой и нерастяжимой нити длиной l , неподвижно закрепленной в точке O (рис. 5.1). Уравнения плоских колебаний такого маятника при отсутствии сопротивления, как известно, имеют вид

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi, \quad m \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 l = N - mg \cos \varphi \quad (5.23)$$

с начальными условиями

$$\varphi = \varphi_0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \quad (5.24)$$

где φ – угол между нитью и вертикалью, N – натяжение нити, g – ускорение силы тяжести. Из уравнения (5.23) и начальных условий (5.24) следует, что система параметров, определяющих класс явлений, такова

$$\varphi_0, m, l, g, t$$

и, следовательно,

$$\varphi = \varphi(\varphi_0, m, l, g, t), \quad N = N(\varphi_0, m, l, g, t).$$

Примем в качестве параметров с независимыми размерностями величины m, g, l . Тогда в соответствии с П-теоремой, то есть равенствами (5.16) и (5.18), будем иметь

$$\Pi = \varphi(\Pi_1, \Pi_2), \quad \Pi' = N(\Pi'_1, \Pi'_2),$$

где

$$\Pi = \varphi, \quad \Pi_1 = \varphi_0, \quad \Pi_2 = \frac{t}{m^\alpha l^\beta g^\gamma}, \quad \Pi' = \frac{N}{m^{\alpha_1} l^{\beta_1} g^{\gamma_1}}, \dots \Pi'_1 = \Pi_1, \quad \Pi'_2 = \Pi_2, \quad (5.25)$$

так как φ и φ_0 – безразмерные величины, а аргументы у функций φ и N одинаковые.

Из формул (5.25) имеем

$$[t] = [m]^\alpha [l]^\beta [g]^\gamma, \quad [N] = [m]^{\alpha_1} [l]^{\beta_1} [g]^{\gamma_1},$$

или

$$T = M^\alpha L^\beta \left(\frac{L}{T^2}\right)^\gamma, \quad \frac{ML}{T^2} = M^{\alpha_1} L^{\beta_1} \left(\frac{L}{T^2}\right)^{\gamma_1},$$

откуда, приравнявая показатели степеней при M, L, T , получаем

$$\alpha = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad -2\gamma = 1, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 + \gamma_1 = 1, \quad -2\gamma_1 = -2,$$

$$\text{или } \alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 1,$$

и

$$\Pi_2 = t\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \Pi' = \frac{N}{mg}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \varphi\left(\varphi_0, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right), \quad \frac{N}{mg} = f\left(\varphi_0, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Из опыта известно, что колебания математического маятника имеют период τ . Тогда

$$\tau = \tau(\varphi_0, m, l, g),$$

или, после перехода к безразмерным величинам,

$$\tau\sqrt{\frac{g}{l}} = \tau(\varphi_0)$$

Так как из-за симметрии колебаний $\tau(\varphi_0) = \tau(-\varphi_0)$, то функция $\tau(\varphi_0)$ – четная, и, разлагая ее в ряд, имеем

$$\tau(\varphi_0) = C_1 + C_2\varphi_0^2 + C_3\varphi_0^4 + \dots$$

Пренебрегая для малых колебаний ($\varphi_0 \ll 1$) членами порядка φ_0^2 и выше, имеем

$$\tau = C_1 \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Из теории, то есть из решения уравнений (5.23) при $\varphi_0 \ll 1$, известно, что $C_1 = 2\pi$.

2. Уравнение Клапейрона*. Примем в качестве гипотезы, что давление p в газе полностью определяется его плотностью ρ , теплоемкостью c_v (или c_p) и абсолютной температурой Θ . Тогда

$$p = f(\rho, c_v, \Theta).$$

Величины ρ, c_v, Θ обладают размерностями

$$[\rho] = \frac{M}{L^3}, \quad [c_v] = \frac{L^2}{T^2 \circ K}, \quad [\Theta] = \circ K,$$

то есть образуют систему параметров с независимыми размерностями. Тогда в соответствии с формулой (5.19), можем записать

$$p = C \rho^\alpha c_v^\beta \Theta^\gamma, \quad C = \text{const}.$$

Легко видеть, что $\alpha = \beta = \gamma = 1$, и

$$p = C \rho c_v \Theta = R \rho \Theta, \quad R = C c_v.$$

Таким образом, уравнение Клапейрона основано на приведенной гипотезе.

Рассмотренные примеры хорошо иллюстрируют возможности и слабости теории размерностей. Действительно, путем анализа размерностей получена структура формул для τ и p , однако численное значение констант C_1 и C с помощью этого анализа определить нельзя.

3. Закон фильтрации Дарси**. Предположим, что модуль скорости фильтрации w в горизонтальном однородном пласте зависит только от модуля градиента давления $|\nabla p|$, вязкости μ , пористости m и характерного размера d . Тогда***

$$\bar{v} = f(\nabla p, \mu, m, d). \quad (5.26)$$

* Бенуа Поль Эмиль Клапейрон (1799–1864), французский физик и инженер, член-корреспондент Петербургской Академии Наук.

** Анри Дарси (1803–1858), французский гидравлик и инженер.

*** Плотность жидкости входит в уравнения движения только в виде множителя при ускорении. Ускорения же при фильтрации обычно пренебрежимо малы. Поэтому возможной зависимостью от плотности в соотношении (5.26) можно пренебречь.

Величины $|\nabla p|$, μ , m , d обладают размерностями

$$[\nabla p] = \frac{M}{L^2 T^2}, \quad [\mu] = \frac{M}{L T}, \quad [m] = 1, \quad [d] = L.$$

Следовательно, ∇p , μ , d образуют систему параметров с независимыми размерностями, и

$$\frac{w}{(|\nabla p|)^\alpha \mu^\beta d^\gamma} = f(m).$$

Выполняя анализ размерностей аналогично тому, как это было сделано в примере 1, получим

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{M}{L^2 T^2} \right)^\alpha \left(\frac{M}{L T} \right)^\beta L^\gamma, \quad \alpha + \beta = 0, \quad -2\alpha - \beta + \gamma = 1, \quad 2\alpha + \beta = 1,$$

откуда $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 2$, и

$$w = -\frac{d^2}{\mu} f(m) |\nabla p|$$

или в векторной форме

$$\vec{w} = -\frac{d^2}{\mu} f(m) \nabla p. \tag{5.27}$$

Знак «минус» введен в уравнение (5.27), так как \vec{v} и ∇p имеют противоположные направления.

4. Формула Дарси-Вейсбаха. Предположим, что при течении жидкости по горизонтальной круглой цилиндрической трубе перепад давления на единицу длины $\Delta p/l$ зависит от средней скорости течения v , вязкости жидкости μ , ее плотности ρ , диаметра трубы d и шероховатости ее стенок Δ .

Тогда

$$\frac{\Delta p}{l} = f(d, \Delta, \rho, \mu, v). \tag{5.28}$$

Величины ρ , v , d представляют собой систему параметров с независимыми размерностями. Следовательно, на основании П-теоремы соотношение (5.28) может быть переписано в виде

$$\Pi = \Phi(\Pi_1, \Pi_2), \tag{5.29}$$

где

$$\Pi = \frac{\Delta p}{l} \rho^{-\alpha} v^{-\beta} d^{-\gamma}, \quad \Pi_1 = \frac{\Delta}{d}, \quad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho^\alpha v^\beta d^\gamma}.$$

Выполняя анализ размерностей, получим $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$ и, следовательно,

$$\Pi = \frac{\Delta p \cdot d}{l \rho v^2}, \quad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho v d}.$$

Подставляя эти соотношения в равенство (5.29), имеем

$$\Delta p = \frac{l}{d} \rho v^2 \Phi\left(\frac{\Delta}{d}, \frac{\mu}{\rho v d}\right) = \frac{l}{d} \rho v^2 \Phi_1\left(\frac{\Delta}{d}, \frac{\rho v d}{\mu}\right).$$

Обозначив, как это обычно принято,

$$\frac{\Delta}{d} = \varepsilon, \quad \frac{\rho v d}{\mu} = \text{Re}, \quad \Phi_1\left(\frac{\Delta}{d}, \frac{\rho v d}{\mu}\right) = \frac{\lambda(\varepsilon, \text{Re})}{2},$$

где ε – относительная шероховатость стенок трубы, Re – число Рейнольдса, λ – коэффициент гидравлического сопротивления, получим формулу Дарси-Вейсбаха в виде

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}. \quad (5.30)$$

В рассмотренном случае коэффициенты ε и Re являются, очевидно, критериями подобия. Следовательно, определив величину $\lambda(\varepsilon, \text{Re})$ при течении какой-либо жидкости, получим, что при течении другой жидкости по другой трубе, коэффициент гидравлического сопротивления λ будет при условии $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)}$, $\text{Re}^{(1)} = \text{Re}^{(2)}$ иметь то же самое значение.

При ламинарном режиме движения ускорение равно нулю, и величина ρ не существенна. Из опыта известно, что величина Δ при этом режиме также не существенна. Поэтому при ламинарном режиме соотношение (5.28) принимает вид

$$\frac{\Delta p}{l} = f(d, \mu, v).$$

Так как параметры d, μ, v обладают независимыми размерностями, то в соответствии с формулой (5.19) получаем

$$\frac{\Delta p}{l} = C d^\alpha \mu^\beta v^\gamma.$$

Легко видеть, что $\alpha = -2$, $\beta = \gamma = 1$, и

$$\Delta p = C \frac{l}{d^2} \mu v. \quad (5.31)$$

Приравнивая правые части соотношений (5.30) и (5.31), получим, что коэффициент гидравлического сопротивления при ламинарном режиме равен

$$\lambda = \frac{2C\mu}{\rho v d} = \frac{2C}{\text{Re}}, \quad C = \text{const}.$$

Теоретический анализ дает значение $C = 32$.

5. Вытеснение из пласта жидкости газом. Рассмотрим однородный горизонтальный пласт, из которого жидкость вытесняется газом (рис. 5.2). Обозначим через α коэффициент вытеснения, равный $\alpha = \frac{V_r}{V}$, где V_r – объем пор в области I,



Рис. 5.2

занятых газом, V – объем всех пор в этой области.

На основании качественных соображений и результатов эксперимента можно написать

$$\alpha = \alpha(k, m, \sigma, \Theta, \Delta p, l, \mu_r, \mu_{ж}, h, \Delta \gamma, p, c, M, t), \quad (5.32)$$

где k , m – проницаемость и пористость пласта, σ – поверхностное натяжение жидкости, Θ – угол смачивания, $\Delta p = (p_1 - p_2)$ – разность давлений по концам пласта длиной l , μ_r , $\mu_{ж}$ – вязкость газа и жидкости, h – толщина пласта, $\Delta \gamma = \gamma_r - \gamma_{ж}$ – разность удельных весов жидкости и газа, p – абсолютное давление в каком-либо сечении пласта, c – концентрация поверхностно-активного вещества (ПАВ), M – минерализация пластовой воды, t – время.

Величины, входящие в формулу (5.32), имеют размерности

$$[k] = L^2, [\sigma] = \frac{M}{T^2}, [\Delta p] = [p] = \frac{M}{LT^2}, [l] = [h] = L, \\ [\mu_{ж}] = [\mu_r] = \frac{M}{LT}, [\Delta \gamma] = \frac{M}{L^2 T^2}.$$

Примем величины l , Δp , μ_r за параметры с независимыми размерностями. На основании П-теоремы выражение (5.32) может быть представлено в виде

$$\alpha = \alpha\left(\frac{k}{l^2}, m, \frac{\sigma}{l \Delta p}, \Theta, \frac{\mu_{ж}}{\mu_r}, \frac{h}{l}, \frac{l \Delta \gamma}{\Delta p}, \frac{p}{\Delta p}, c, M, \frac{t \Delta p}{\mu_r}\right). \quad (5.33)$$

При моделировании процесса вытеснения на натуральных флюидах и пористых средах (физико-химическое подобие) имеем

$$\mu_r^{(n)} = \mu_r^{(m)}, \quad \Delta \gamma^{(n)} = \Delta \gamma^{(m)}, \sigma^{(n)} = \sigma^{(m)}. \quad (5.34)$$

Для соблюдения подобия должны, в частности, как это видно из формулы (5.33), выполняться равенства

$$\left(\frac{l\Delta\gamma}{\Delta p}\right)^{(H)} = \left(\frac{l\Delta\gamma}{\Delta p}\right)^{(M)}, \quad \left(\frac{\sigma}{l\Delta p}\right)^{(H)} = \left(\frac{\sigma}{l\Delta p}\right)^{(M)},$$

откуда, при соблюдении условий (5.34) следует, что одновременно должны выполняться равенства

$$\frac{\Delta p^{(M)}}{\Delta p^{(H)}} = \frac{l^{(M)}}{l^{(H)}}, \quad \frac{\Delta p^{(M)}}{\Delta p^{(H)}} = \frac{l^{(H)}}{l^{(M)}}.$$

Это возможно только при $l^{(M)}=l^{(H)}$. Поэтому при работе с натурными средами соблюдение полного подобия модели и натуры невозможно, и приходится прибегать к частичному моделированию.

Под частичным моделированием понимается моделирование, при котором соблюдается равенство только какой-либо части критериев подобия. Влияние несоблюдения равенства остальных критериев подобия оценивается различными способами, зависящими от рассматриваемого явления. С проблемами, связанными с частичным моделированием, приходится сталкиваться также при исследовании задач авиации, судостроения и в ряде других областей.

При рассмотрении задач вытеснения в литературе встречаются критерии подобия вида

$$\Pi_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{k}{m}\Delta p}}, \quad \Pi_2 = \frac{\sigma l}{k\Delta p}, \quad \Pi_3 = \frac{\sigma}{h\sqrt{\frac{k}{m}\Delta\gamma}}, \quad \Pi_4 = \cos \Theta.$$

Обозначим критерии подобия в формуле (5.33), соответственно, через

$$\Pi'_1 = \frac{k}{l^2}, \quad \Pi'_2 = m, \quad \Pi'_3 = \frac{\sigma}{l\Delta p}, \quad \Pi'_4 = \Theta, \quad \Pi'_5 = \frac{h}{l}, \quad \Pi'_6 = \frac{l\Delta\gamma}{\Delta p}.$$

Легко видеть, что

$$\Pi_1 = \Pi'_3 \sqrt{\frac{\Pi'_2}{\Pi'_1}}, \quad \Pi_2 = \frac{\Pi'_3}{\Pi'_1}, \quad \Pi_3 = \frac{\Pi'_3}{\Pi'_5 \Pi'_6} \sqrt{\frac{\Pi'_2}{\Pi'_1}}, \quad \Pi_4 = \cos \Pi'_4.$$

Этот пример может служить иллюстрацией к замечанию в §4 о том, что выбор безразмерных параметров при использовании П-теоремы не является однозначным.

§8. Приведение уравнений к безразмерному виду

При выполнении численных расчетов соответствующие уравнения или их аналитические решения обычно приводятся к безразмерному виду.

Как следует из П-теоремы, это позволяет, с одной стороны, уменьшить число аргументов у определяемых функций, а с другой, путем выбора соответствующих характерных величин процесса подобрать наиболее удобные области изменения численных значений безразмерных параметров.

Действительно, пусть рассматриваемая задача содержит n определяющих параметров. Для ее полного численного исследования необходимо каждый из параметров проварьировать независимо от остальных m раз. Следовательно, необходимо выполнить m^n вычислений. После приведения к безразмерному виду число параметров будет равно $n - k$, где k – число параметров с независимыми размерностями. Поэтому число необходимых вычислений будет равно m^{n-k} .

Рассмотрим другой пример. В задаче о гидравлическом ударе одним из параметров является длина трубы l . Продольная координата x лежит в пределах $0 \leq x \leq l$. Полагая $x = \xi l$, получим, что независимо от длины трубы безразмерная координата ξ меняется в пределах $0 \leq \xi \leq 1$.

Рассмотрим задачу о приведении уравнений к безразмерному виду на примере системы уравнений движения однородной вязкой несжимаемой жидкости (4.42). Уравнения движения и граничные условия имеют в этом случае вид

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad \rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} - \nabla p + \mu \Delta \bar{v}, \quad \bar{v} = \bar{V} \text{ на } S. \quad (5.35)$$

Положим $x_i = L x'_i$, где L – характерный линейный размер в задаче, и подразумевается геометрическое подобие в задачах рассматриваемого класса. Пусть далее $\bar{v} = V_o \bar{v}'$, $p = \Pi p'$, $t = \Theta t'$, где V_o , Π , Θ – характерные скорость, давление, время в задаче. При течении жидкости по трубе в качестве L можно, например, взять ее диаметр, в качестве V_o – среднюю скорость в какой-либо момент времени, в качестве Π – разность давлений по ее концам, в качестве Θ – время переходного процесса (при неустановившемся движении). Аналогичным образом можно ввести характерные параметры L , V_o , Π , Θ при рассмотрении любого течения. Примем далее для определенности, что $\bar{F} = \bar{g}$. Подставляя значения x_i , \bar{v} , p , t в соотношения (5.35) и развертывая производную $\frac{d\bar{v}}{dt}$, получим

$$\frac{\partial v'_i}{\partial x'_i} = 0, \quad \rho \left(\frac{V_o}{\Theta} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t'} + \frac{V_o^2}{L} v'_i \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x'_i} \right) = \rho \bar{g} - \frac{\Pi}{L} \bar{e}_k \frac{\partial p'}{\partial x'_k} + \frac{\mu V_o}{L^2} \bar{e}_k \frac{\partial^2 v'_k}{\partial x'^2_k}, \quad \bar{v}' = \bar{V}'. \quad (5.36)$$

Из соотношений (5.36) видно, что уравнение неразрывности и граничное условие при переходе к безразмерным величинам сохраняют свой вид. Разделив все члены уравнения Навье–Стокса на $\rho V_o^2/L$, имеем

$$\frac{L}{V_o \Theta} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + v_i' \frac{\partial v_i'}{\partial x_i'} = \frac{gL}{V_o^2} \bar{g}^o - \frac{\Pi}{\rho V_o^2} \bar{e}_i \frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \frac{\mu}{\rho V_o L} \bar{e}_i \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_i'^2},$$

где \bar{g}^o – орт вектора \bar{g} .

Введем следующие обозначения:

$$\frac{L}{V_o \Theta} = \text{Sh} \text{ – число Струхала, } \frac{V_o^2}{gL} = \text{Fr} \text{ – число Фруда}^*,$$

$$\frac{\Pi}{\rho V_o^2} = \text{Eu} \text{ – число Эйлера, } \frac{\rho V_o L}{\mu} = \text{Re} \text{ – число Рейнольдса}^{**}.$$

С использованием этих обозначений уравнение Навье–Стокса может быть переписано в виде

$$\text{Sh} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + v_i' \frac{\partial v_i'}{\partial x_i'} = \frac{\bar{g}^o}{\text{Fr}} - \text{Eu} \bar{e}_i \frac{\partial p'}{\partial x_i'} + \frac{1}{\text{Re}} \bar{e}_i \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x_i'^2}.$$

Очевидно, что если при рассмотрении двух течений выполняются условия геометрического подобия областей течения и соотношения

$$\text{Sh}_1 = \text{Sh}_2, \quad \text{Fr}_1 = \text{Fr}_2, \quad \text{Re}_1 = \text{Re}_2,$$

то эти течения являются подобными (числа Sh, Fr, Re, как отмечалось выше, называются критериями подобия). Число Eu при течениях несжимаемой жидкости часто является несущественным. Это объясняется тем, что в уравнении Навье–Стокса для несжимаемой жидкости входит не давление, а его градиент. Поэтому изменение давления во всей области течения на постоянную величину, или, что то же самое, изменение характерного давления на постоянную величину, не сказывается на характере течения. Поэтому числу Эйлера можно придать любое значение. В частности, положив $\Pi = \rho V_o^2$, получим $\text{Eu} = 1$.

Для выяснения физического смысла критериев подобия рассмотрим в жидкости параллелепипед с ребрами dx_i и массой m . На него будут действовать:

$$\text{сила тяжести } F_g = mg = \rho g dx_1 dx_2 dx_3 \sim \rho g L^3,$$

$$\text{сила локальной инерции } F_{\text{лок}} = m \frac{\partial v}{\partial t} \sim \rho L^3 \frac{V_o}{\Theta},$$

* В литературе под числом Фруда часто понимают величину $\frac{V_o}{\sqrt{2gL}}$.

Вильям Фруд (1810–1879), английский гидромеханик и корабельный инженер.

** Осборн Рейнольдс (1842–1912), английский физик и инженер.

сила конвективной инерции $F_{\text{кон}} = mv \frac{\partial v}{\partial x} \sim \rho L^3 \frac{V_o^2}{L}$,

сила трения $F_{\text{тр}} = \frac{\partial \tau}{\partial x} dx dS = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx dS \sim \mu \frac{V_o}{L^2} L^3$.

Тогда

$$\frac{F_{\text{лок}}}{F_{\text{кон}}} = \frac{L}{\Theta V_o} = \text{Sh}, \quad \frac{F_{\text{кон}}}{F_g} = \frac{V_o^2}{gL} = \text{Fr}, \quad \frac{F_{\text{кон}}}{F_{\text{тр}}} = \frac{\rho V_o L}{\mu} = \text{Re}.$$

Часть II ГИДРОМЕХАНИКА

Глава VI ГИДРОСТАТИКА

§1. Уравнения равновесия жидкости и газа

В гидростатике рассматриваются законы равновесия жидкости (газа). Если жидкость (газ) находится в состоянии покоя относительно стенок сосуда, в котором она заключена, а сосуд покоится или движется с постоянной скоростью относительно Земли, то покой называется абсолютным. Если жидкость покоится относительно стенок сосуда, а сосуд движется относительно Земли с ускорением, то покой называется относительным. Движение жидкости в случае относительного покоя можно рассматривать как переносное. Из приведенных определений следует, что в случае абсолютного покоя на жидкость действует сила тяжести, а в случае относительного покоя – сила тяжести и сила инерции переносного движения.

Так как в покоящейся жидкости скорость деформации $\varepsilon_{ik} = 0$, то из реологического уравнения для вязкой жидкости (4.29) имеем

$$p_{ik} = -p\delta_{ik}, \quad (6.1)$$

то есть в покоящейся жидкости действуют только нормальные сжимающие напряжения*. Величина этих напряжений не зависит от направления и называется давлением. Это давление называется гидростатическим.

Подставив соотношения (6.1) в уравнения движения сплошной среды

в напряжениях (2.42), получаем $\left(\frac{dv_j}{dt} = 0\right)$

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} = \rho F_j, \text{ или } \nabla p = \rho \vec{F}. \quad (6.2)$$

Уравнения (6.2) называются уравнениями Эйлера в гидростатике.

* По Л.Прандтлю «жидкостью называется такое тело, в котором в состоянии равновесия всякое сопротивление деформации равно нулю». Из этого определения следует, что $p_{ik} = 0$, ($i \neq k$) и, в соответствии с (4.29), $\varepsilon_{ik} = 0$.

Людвиг Прандтль (1875–1953), немецкий ученый, один из основателей современной аэродинамики и прикладной гидромеханики.

Умножив скалярно векторное уравнение (6.2) на единичный вектор \vec{s}^o , имеем

$$\frac{\partial p}{\partial S} = \rho \vec{F} \vec{s}^o = \rho F_s, \quad (6.3)$$

то есть изменение давления в каком-либо направлении \vec{s} определяется проекцией напряжения массовой силы F_s на это направление.

Умножим скалярные уравнения (6.2) на dx_j . Так как при равновесии $p = p(x_j)$, то

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} dx_j = dp = \rho F_j dx_j, \quad \text{или} \quad dp = \rho \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (6.4)$$

Поверхности, вдоль которых $p = \text{const}$, называются изобарами. Из равенств (6.4) следует, что уравнение изобары имеет вид

$$F_j dx_j = 0, \quad \text{или} \quad \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (6.5)$$

где вектор $d\vec{r}$ лежит в плоскости, касательной к изобаре. Из формул (6.5) вытекает, что напряжение массовой силы направлено по нормали к изобаре. Этот же вывод следует непосредственно из равенств (6.2).

Очевидно, что соотношения (6.2)–(6.5) в равной мере справедливы как для сжимаемых, так и для несжимаемых жидкостей.

Из уравнений (6.4) имеем

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \int_{M_0}^M \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (6.6)$$

где M_0, M – точки, в которых гидростатическое давление равно, соответственно, p_0 и p . Если напряжение массовой силы обладает потенциалом, то есть $\vec{F} = -\nabla\Pi$, то соотношение (6.6) принимает вид

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \int_{M_0}^M d\Pi = \Pi(M) - \Pi(M_0). \quad (6.7)$$

§2. Равновесие жидкости в поле силы тяжести

При рассмотрении равновесия жидкости в поле силы тяжести введем систему координат $Oxyz$, в которой ось Oz направлена против ускорения силы тяжести \vec{g} (рис. 6.1). В этом случае $\Pi = -gz$, $F_x = F_y = 0$, $F_z = -g$, и соотношение (6.4) принимает вид

$$dp = -\rho g dz. \quad (6.8)$$

В случае однородной несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ из соотношения (6.8) получаем

$$p = -\rho g z + C, \quad C = \text{const}. \quad (6.9)$$

Соотношение (6.9) справедливо для любой точки в объеме жидкости. Уравнение изобары имеет в рассматриваемом случае вид

$$dz = 0, \quad \text{или} \quad z = C_1 = \text{const}. \quad (6.10)$$

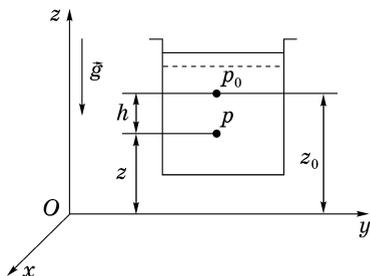


Рис. 6.1

Таким образом, при равновесии жидкости, находящейся в поле силы тяжести, изобара представляет собой горизонтальную плоскость.

Для определения константы C в соотношении (6.9) необходимо задать граничные условия. Пусть при $z = z_0$ $p = p_0$ (рис. 6.1). Тогда

$$p - p_0 = \rho g(z_0 - z), \quad (6.11)$$

или

$$\frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_0}{\rho g} + z_0. \quad (6.12)$$

Обозначив $z_0 - z = h$, соотношение (6.11) можно представить в виде

$$p = p_0 + \rho g h, \quad (6.13)$$

где $\rho g h$ – давление, создаваемое столбом жидкости высотой h .

Соотношения (6.8), (6.12) обычно называются основными уравнениями гидростатики. Из формулы (6.13) следует, что сила давления жидкости на дно сосуда с площадью основания S не зависит от его формы (рис. 6.2) и равна $(p_0 + \rho g h)S$. Данный результат обычно называется парадоксом Паскаля*.

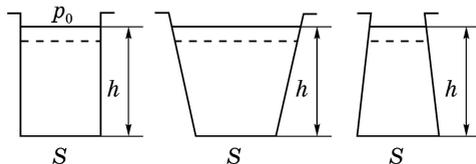


Рис. 6.2

* Блез Паскаль (1623–1662), французский физик и математик.

Превышение абсолютного давления $p_{\text{абс}}$ над атмосферным $p_{\text{ат}}$, то есть разность

$$p_{\text{и}} = p_{\text{абс}} - p_{\text{ат}},$$

называется избыточным давлением. Величина

$$p_{\text{в}} = p_{\text{ат}} - p_{\text{абс}} \text{ при } p_{\text{ат}} > p_{\text{абс}}$$

называется вакуумом.

Рассмотрим некоторые примеры на применение уравнений гидростатики.

1. Сообщающиеся сосуды (рис. 6.3). Давление на свободных поверхностях с координатами z_1 и z_2 одинаково. Следовательно, они представляют собой участки одной изобарической поверхности и в соответствии с соотношением (6.9) $z_1 = z_2$. Этот же вывод следует из уравнения изобары (6.10).

2. Равновесие разнородных жидкостей. Пусть две несмешивающиеся жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 находятся в состоянии равновесия. Давление при переходе через поверхность раздела остается непрерывным. На поверхности раздела из соотношения (6.8) имеем $dp = -\rho_1 g dz$, $dp = -\rho_2 g dz$ или $\rho_1 g dz = \rho_2 g dz$. Следовательно, $dz = 0$, и граница раздела представляет собой горизонтальную плоскость $z = \text{const}$.

3. Двухжидкостный манометр (рис. 6.4). Для определения разности давлений в системе, заполненной жидкостью плотности ρ_1 , используется манометр с рабочей жидкостью плотностью ρ_2 . В точках 4 и 5, лежащих на горизонтальной плоскости в одной и той же жидкости, $p_4 = p_5$. В соответствии с соотношением (6.13) $p_5 = p_1 + \rho_1 g H$, $p_4 = p_3 + \rho_2 g h$, $p_3 = p_2 + \rho_1 g(H - h)$, откуда сразу следует, что $p_1 - p_2 = gh(\rho_2 - \rho_1)$.

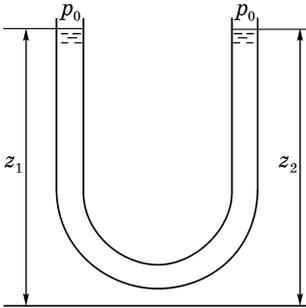


Рис. 6.3

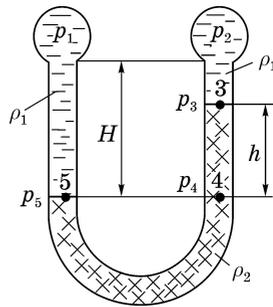


Рис. 6.4

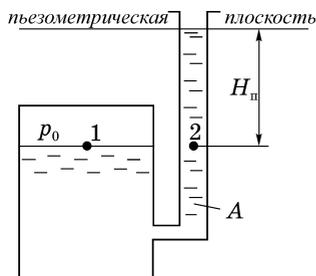


Рис. 6.5

4. Пьезометрическая высота (рис. 6.5). Давление в несжимаемой жидкости можно измерять высотой столба этой же жидкости $H_{\text{п}}$ с помощью трубки A . Такая трубка называется пьезометрической. Для точек 1 и 2 имеем $p_{1\text{абс}} = p_0$, $p_{2\text{абс}} = p_{\text{ат}} + \rho g H_{\text{п}}$, $p_{1\text{абс}} = p_{2\text{абс}}$. Тогда

$$H_{\text{п}} = \frac{p_0 - p_{\text{ат}}}{\rho g}. \quad (6.14)$$

Давление в любой точке сосуда равно $p = p_0 + \rho g h = p_{\text{ат}} + \rho g (H_{\text{п}} + h)$.

Высота $H_{\text{п}}$ называется пьезометрической, а поверхность, проходящая через уровень в пьезометре – пьезометрической плоскостью. Если $p_0 > p_{\text{ат}}$, то пьезометрическая плоскость лежит выше свободной поверхности в сосуде, если $p_0 < p_{\text{ат}}$, то ниже.

5. Равновесие тяжелого газа. Для газа, находящегося в равновесии в поле силы тяжести, из формулы (6.7) имеем

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = g(z_0 - z). \quad (6.15)$$

Для вычисления интеграла в равенстве (6.15) необходимо задать зависимость $p = p(\rho)$.

Ограничимся рассмотрением изотермического равновесия идеального газа при температуре T_0 . Тогда

$$\rho = \frac{p}{RT_0},$$

и из соотношения (6.15) получаем

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g(z - z_0)}{RT_0},$$

или

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{g(z - z_0)}{RT_0} \right].$$

Разлагая это выражение в ряд, имеем

$$p = p_0 \left\{ 1 - \frac{g(z - z_0)}{RT_0} + \frac{1}{2} \left[\frac{g(z - z_0)}{RT_0} \right]^2 - \dots \right\}.$$

Если $\frac{1}{2} \frac{g(z - z_0)}{RT_0} \ll 1$, то

$$p \approx p_0 \left[1 - \frac{g(z - z_0)}{RT_0} \right] = p_0 - \frac{p_0}{RT_0} g(z - z_0) = p_0 - \rho_0 g(z - z_0), \quad (6.16)$$

где ρ_0 – плотность газа при давлении p_0 и температуре T_0 . Из формулы (6.16) следует, что если $z - z_0$ мало, то распределение давления в газе будет практически таким же, как в несжимаемой жидкости.

Для воздуха газовая постоянная $R = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{°К}}$. Пусть $T_0 = 293^\circ\text{К}$. Тогда при $z - z_0 \leq 85$ м погрешность, даваемая формулой (6.16), будет меньше 1%.

§3. Относительный покой жидкости

Как уже указывалось, при рассмотрении относительного покоя жидкости под напряжением массовой силы в уравнениях (6.2) следует понимать равнодействующую напряжений силы тяжести и силы инерции переносного движения.

Рассмотрим задачу о вращении с постоянной угловой скоростью ω сосуда с жидкостью вокруг вертикальной оси Oz (рис. 6.6). На элемент жидкости с массой Δm действуют сила тяжести и центробежная сила, напряжения которых равны

$$\vec{F}_g = \vec{g}, \quad \vec{F}_ц = \vec{r}\omega^2,$$

где \vec{r} – вектор, направленный по кратчайшему расстоянию от оси вращения к рассматриваемому элементу. Проекции этих напряжений на выбранные оси координат $Oxyz$ равны

$$F_x = r\omega^2 \cos \varphi = x\omega^2, \quad F_y = r\omega^2 \sin \varphi = y\omega^2, \quad F_z = -g.$$

Подставив эти значения в соотношения (6.4) и (6.5), имеем

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz),$$

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0.$$

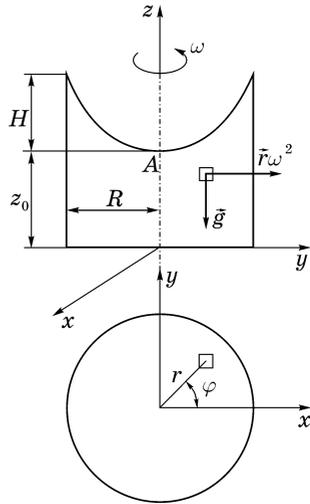


Рис. 6.6

Интегрируя эти соотношения, получаем

$$p = \rho \left(\omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} - gz \right) + C = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - \rho gz + C, \quad (6.17)$$

$$\omega^2 \frac{x^2 + y^2}{2} - gz = \frac{\omega^2 r^2}{2} - gz + C_1. \quad (6.18)$$

Соотношение (6.17) дает закон распределения давления в жидкости, а соотношение (6.18) представляет собой уравнение семейства изобар, являющихся параболоидами вращения.

Для определения константы C в формуле (6.17) и уравнении свободной поверхности (6.18) рассмотрим точку A пересечения свободной поверхности с осью Oz . Точка A имеет координаты $(0, 0, z_0)$, а давление в этой точке равно p_0 . Тогда из (6.17) и (6.18) имеем $C = p_0 + gz_0$, $C_1 = gz_0$ и, значит,

$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} - g(z - z_0), \quad (6.19)$$

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} = g(z - z_0). \quad (6.20)$$

Для определения высоты H параболоида положим в уравнении (6.20) $r = R$, где R – радиус сосуда. Тогда для H получится выражение

$$H = \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Уравнение (6.20) можно записать в виде

$$\frac{\omega^2 r_1^2}{2} = g(z_1 - z_0),$$

где z_1 – координата точки пересечения вертикальной прямой $r = r_1 = \text{const}$ со свободной поверхностью. Подставив это соотношение в (6.19), получим

$$p = p_0 + \rho g(z_1 - z). \quad (6.21)$$

Таким образом, если отсчитывать координату z от свободной поверхности, то распределение давления по вертикали во вращающемся сосуде будет таким же, как и в покоящейся жидкости. Это объясняется тем, что проекция силы инерции на ось Oz равна нулю.

Полученный результат следует также непосредственно из формулы (6.3). Действительно, в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

откуда после интегрирования сразу получается формула (6.21).

Рассмотрим теперь движение замкнутого сосуда, заполненного жидкостью, по наклонной плоскости с постоянным ускорением \vec{a} (рис. 6.7).

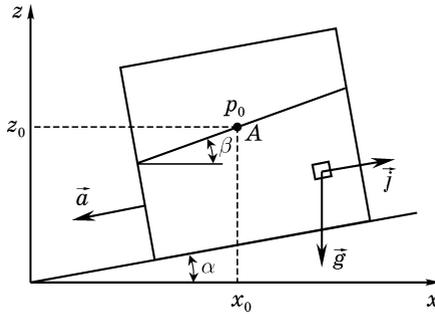


Рис. 6.7

Проекции напряжения массовых сил на координатные оси равны

$$F_x = j \cos \alpha, \quad F_y = 0, \\ F_z = j \sin \alpha - g,$$

где α – угол наклона плоскости к горизонту, $\vec{j} = -\vec{a}$. Подставив эти выражения в (6.4) и (6.5), имеем

$$dp = \rho [j \cos \alpha dx + (j \sin \alpha - g) dz], \tag{6.22}$$

$$j \cos \alpha dx + (j \sin \alpha - g) dz = 0. \tag{6.23}$$

Из соотношения (6.23), представляющего собой уравнение для семейства изобар, получаем

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \beta = \frac{j \cos \alpha}{g - j \sin \alpha} = \operatorname{const}, \tag{6.24}$$

то есть изобары представляют собой плоскости, наклоненные под углом β к горизонту.

Интегрируя уравнение (6.22), получаем закон распределения давления

$$p = \rho [xj \cos \alpha + z(j \sin \alpha - g)] + C, \quad C = \operatorname{const}.$$

Для определения константы интегрирования C положим, что в некоторой точке $H(x_0, 0, z_0)$ известно давление $p = p_0$. Тогда

$$p - p_0 = \rho [(x - x_0)j \cos \alpha + (z - z_0)(j \sin \alpha - g)]. \tag{6.25}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Спуск по вертикальной стене, то есть случай $\alpha = \pi / 2$. Из формулы (6.24) следует, что $\beta = 0$, $z = \text{const}$. Изобары представляют собой горизонтальные плоскости. Из формулы (6.25) имеем

$$p - p_o = (j - g)(z - z_o).$$

При свободном падении $j = g$ и $p = p_o$, то есть давление во всех точках жидкости одинаково.

б) Скольжение сосуда по плоскости без трения. В этом случае система движется («падает») с ускорением $j = g \sin \alpha$, и из формулы (6.24) получаем, что $\text{tg } \beta = \text{tg } \alpha$, то есть эквипотенциали параллельны плоскости скольжения. Из формулы (6.25) имеем

$$p - p_o = \rho g [(x - x_o) \sin \alpha - (z - z_o) \cos \alpha] \cos \alpha.$$

§4. Статическое давление жидкости на твердые поверхности

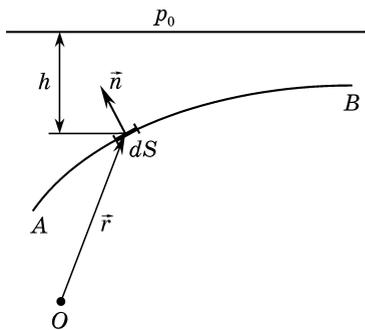


Рис. 6.8

Рассмотрим в жидкости какую-либо поверхность AB площадью S (рис. 6.8). Равнодействующая \vec{R} сил давления, действующих на эту поверхность, и их момент \vec{L} равны

$$\vec{R} = - \int_S \vec{n} p dS, \quad (6.26)$$

$$\vec{L} = - \int_S \vec{r} \times \vec{n} p dS, \quad (6.27)$$

где \vec{n} – внешняя к поверхности нормаль, направленная внутрь жидкости, \vec{r} – радиус-вектор точки на AB .

В случае несжимаемой жидкости, находящейся в поле сил тяжести, давление в точках поверхности AB в соответствии с формулой (6.13) равно

$$p = p_o + \rho g h, \quad (6.28)$$

где p_o – давление на поверхности жидкости. С учетом формулы (6.14) равенство (6.28) может быть представлено в виде

$$p = p_{\text{ат}} + \rho g (h + H_{\text{п}}). \quad (6.29)$$

Пусть поверхность AB представляет собой плоскость, наклоненную к горизонту под углом α (рис. 6.9). Все векторы \vec{n} параллельны друг дру-

гу, и из равенств (6.26), (6.28) и (6.29) имеем

$$\vec{R} = -\vec{n} \int_S (p_o + \rho gh) dS = -\vec{n} \int_S [p_{ar} + \rho g(h + H_n)] dS. \quad (6.30)$$

Так как

$$\int_S h dS = h_{цт} S,$$

где $h_{цт}$ – расстояние от поверхности жидкости до центра тяжести плоскости AB , то из формулы (6.30) следует, что

$$\vec{R} = -\vec{n}(p_o + \rho gh_{цт})S = -\vec{n}[p_{ar} + \rho g(h_{цт} + H_n)]S = -\vec{n}p_{цт}S, \quad R = p_{цт}S, \quad (6.31)$$

где $p_{цт} = p_o + \rho gh_{цт} = p_{ar} + \rho g(h_{цт} + H_n)$ – давление в центре тяжести AB .

Если сила \vec{R} рассчитывается не по абсолютному давлению, а по избыточному, то очевидно, что

$$\vec{R} = -\vec{n}(p_{цт} - p_{ar})S, \quad R = (p_{цт} - p_{ar})S. \quad (6.32)$$

Определим положение центра давления, то есть точки приложения равнодействующей \vec{R} . Момент M_x этой силы относительно оси Ox , проходящей через центр тяжести плоскости AB (рис. 6.9), равен

$$M_x = \lambda_d R = \int_S l p dS = \int_S l (p_o + \rho gh) dS, \quad (6.33)$$

где λ_d – расстояние от центра тяжести AB до центра давления, l – расстояние от центра тяжести до элемента dS .

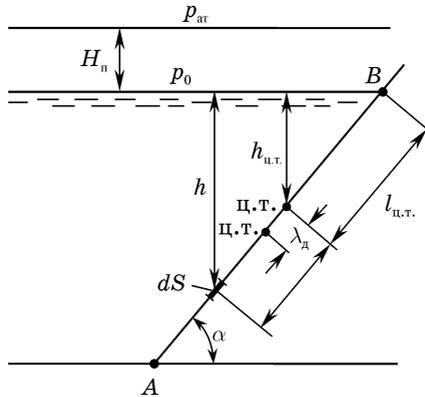


Рис. 6.9

Из рис. 6.9 видно, что $h = (l_{\text{цт}} + l) \sin \alpha$. Подставив это выражение в формулу (6.33), получим

$$\lambda_{\text{д}} R = (p_o + \rho g l_{\text{цт}} \sin \alpha) \int_S l dS + \rho g \sin \alpha \int_S l^2 dS. \quad (6.34)$$

Имея в виду, что статический момент площади S относительно оси, проходящей через ее центр тяжести, равен нулю, то есть

$$\int_S l dS = 0$$

и

$$\int_S l^2 dS = J,$$

где J – момент инерции площади S относительно той же оси, из формулы (6.34) получаем с учетом равенства (6.31)

$$\lambda_{\text{д}} = \frac{\rho g J}{R} \sin \alpha = \frac{\rho g J}{p_{\text{цт}} S} \sin \alpha.$$

Если расчет силы R ведется по избыточному давлению, то в соответствии с формулой (6.32)

$$\lambda_{\text{д}} = \frac{\rho g J}{(p_{\text{цт}} - p_{\text{ат}}) S} \sin \alpha.$$

Если $p_{\text{цт}} > p_{\text{ат}}$, то $\lambda_{\text{д}} > 0$ и центр давления лежит ниже центра тяжести.

Рассмотрим случай криволинейной поверхности AB . Проектируя равенство (6.26) на вертикальную ось Oz и какую-либо из горизонтальных осей, например, Ox , получим

$$R_{\text{в}} = - \int_S p \cos(n, z) dS = - \int_{S_{\text{г}}} p dS_{\text{г}}, \quad (6.35)$$

$$R_{\text{г}} = - \int_S p \cos(n, x) dS = - \int_{S_{\text{б}}} p dS_{\text{б}}, \quad (6.36)$$

где $dS_{\text{г}}$, $dS_{\text{б}}$ – проекции dS , соответственно, на горизонтальную плоскость, перпендикулярную Oz , и вертикальную плоскость, перпендикулярную Ox .

Подставив в равенства (6.35) и (6.36) значение p из формулы (6.29), имеем

$$R_{\text{в}} = - \int_{S_{\text{г}}} [p_{\text{ат}} + \rho g(h + H_{\text{н}})] dS_{\text{г}} = -p_{\text{ат}} S_{\text{г}} - \rho g \int_{S_{\text{г}}} (h + H_{\text{н}}) dS_{\text{г}}, \quad (6.37)$$

$$R_{\text{г}} = - \int_{S_{\text{б}}} [p_{\text{ат}} + \rho g(h + H_{\text{н}})] dS_{\text{б}} = -p_{\text{ат}} S_{\text{б}} - \rho g \int_{S_{\text{б}}} (h + H_{\text{н}}) dS_{\text{б}}. \quad (6.38)$$

Интеграл

$$\int_{S_\Gamma} (h + H_\Pi) dS_\Gamma = V_{\text{тд}}$$

представляет собой объем тела давления $V_{\text{тд}}$, образованный поверхностью AB , ее проекцией на пьезометрическую плоскость и вертикальными образующими. Формулу (6.37) можно представить в виде

$$R_B = -(p_{\text{ат}} S_\Gamma + \rho g V_{\text{тд}}). \quad (6.39)$$

Интеграл

$$\int_{S_B} (h + H_\Pi) dS_B = (h_{\text{цт}} + H_\Pi) S_B$$

представляет собой статический момент вертикальной проекции S_B относительно пьезометрической плоскости. Поэтому из формулы (6.38) имеем

$$R_\Gamma = -[p_{\text{ат}} + \rho g(h_{\text{цт}} + H_\Pi)] S_B = -p_{\text{цт}} S_B, \quad (6.40)$$

где $p_{\text{цт}}$ – давление в центре тяжести площади S_B .

Для сил, рассчитанных по избыточному давлению, вместо формул (6.39) и (6.40) имеем

$$R_B = -\rho g V_{\text{тд}}, \quad R_\Gamma = \rho g (h_{\text{цт}} + H_\Pi) S_B.$$

Заметим, что формула (6.31) совпадает с формулой (6.40), если в ней заменить S на S_B .

Примеры построения тел давления приведены на рис. 6.10. На рис. 6.10а объем тела давления, построенный на поверхности AB , находится в жидкости. На рис. 6.10б объем тела давления лежит вне жидкости. Такое тело давления называется фиктивным и ему присваивается знак «-». На рис. 6.10в представлен случай, когда вертикальные образующие пересекают поверхность ABC более, чем в одной точке. Поэтому тела давления строятся отдельно для участков AB (тело $ABED$) и BC (тело $CBED$). Вертикальная составляющая сил давления на ABC определяется как разность вертикальных составляющих сил, действующих на AB и BC .

Если поверхность S замкнутая и целиком погруженная в жидкость, то в соответствии с формулой (6.26) и теоремой Гаусса–Остроградского

$$\vec{R} = - \int_S \vec{n} p dS = - \int_V \nabla p dV, \quad (6.41)$$

где V – объем жидкости, ограниченный поверхностью S . В поле силы тяжести в соответствии с уравнением Эйлера (6.2) $\nabla p = \rho \vec{g}$, и из формулы (6.41) получаем

$$\vec{R} = -\vec{g} \int_V \rho dV = -\vec{G}, \quad (6.42)$$

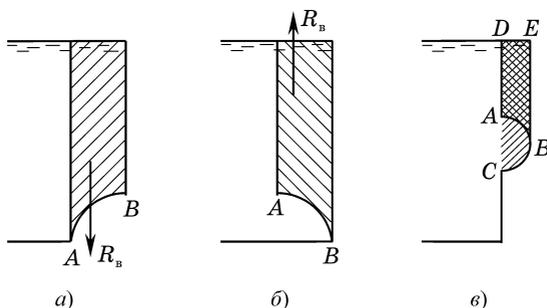


Рис. 6.10

где \vec{G} – вес жидкости в объеме V . Формула (6.42) выражает закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила \vec{R} , равная весу жидкости в объеме погруженного тела. Сила \vec{R} называется также гидростатической подъемной силой.

Из формулы (6.27) и теоремы Гаусса-Остроградского имеем

$$\vec{L} = - \int_S \vec{r} \times \vec{n} p \, dS = - \int_V \text{rot}(\vec{r}p) \, dV. \quad (6.43)$$

Радиус-вектор $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ и, следовательно,

$$\text{rot}(\vec{r}p) = -\vec{r} \times \nabla p.$$

Подставив это соотношение в формулу (6.43) и учитывая, что $\nabla p = \rho \vec{g}$,

а $\vec{g} = \frac{\vec{G}}{G} g$, получаем

$$\vec{L} = - \int_V \vec{r} \times \rho \vec{g} \, dV = - \int_V \vec{r} \times \rho \frac{\vec{G}}{G} g \, dV = \frac{\vec{G}}{G} \times \int_V \vec{r} \rho g \, dV. \quad (6.44)$$

Радиус-вектор центра тяжести объема V равен

$$\vec{r}_{\text{цт}} = \frac{1}{G} \int_V \vec{r} \rho g \, dV,$$

и формулу (6.44) с учетом равенства (6.42) можно представить в виде

$$\vec{L} = \vec{G} \times \vec{r}_{\text{цт}} = \vec{r}_{\text{цт}} \times \vec{R}, \quad (6.45)$$

откуда следует, что линия действия гидростатической подъемной силы \vec{R} проходит через центр тяжести объема V .

§5. Элементы теории плавания

Рассмотрим какое-либо тело (судно), плавающее в жидкости.

Объем жидкости, вытесненный телом, называется его объемным водоизмещением. Равнодействующая сил давления, действующих на это тело, как было показано в §4, сводится к направленной вертикально вверх силе Архимеда, называемой также поддерживающей силой. Линия действия поддерживающей силы, как это следует из формулы (6.45), проходит через центр тяжести вытесненного объема жидкости, который называется центром водоизмещения D . Принято считать, что поддерживающая сила приложена в центре водоизмещения.

В общем случае центр тяжести T плавающего тела не совпадает с центром давления D , однако очевидно, что в статическом положении эти точки находятся на одной вертикальной прямой, которая называется осью плавания. Очевидно также, что в статическом положении вес тела G равен по величине поддерживающей силе R и что $\vec{G} = -\vec{R}$.

Плоскость свободной поверхности жидкости, пересекающая плавающее тело, называется плоскостью плавания. Периметр сечения плавающего тела плоскостью плавания называется ватерлинией. Площадь, ограниченная ватерлинией, называется площадью ватерлинии.

Плаучестью тела называется его способность плавать при заданном весе G . Мерой плаучести является водоизмещение. Запасом плаучести называется допустимая перегрузка, при которой тело еще не будет тонуть. Поскольку при увеличении погружения тела в жидкость его водоизмещение растет, то запас плаучести определяется высотой *непроницаемой* части надводного борта над плоскостью плавания.

Под статической устойчивостью плавающего тела подразумевается его способность плавать в нормальном положении и в случае статического нарушения нормального положения из-за крена возвращаться в прежнее положение, как только силы, вызвавшие крен, прекратят свое действие.

Так как при статическом крене вес тела не изменяется, то его водоизмещение и, следовательно, поддерживающая сила R не изменяются. Однако, центр водоизмещения смещается относительно тела в точку D_1 , так как меняется форма его погруженной части (рис. 6.11). Центр тяжести самого тела при этом сохраняет свое положение на оси плавания*. Поэтому при возникновении крена вес тела и поддерживающая сила образуют пару сил. В зависимости от взаимного положения центра тяжести тела T и центра водоизмещения D_1 эта пара сил может быть как восстанавливающей, так и опрокидывающей.

* Случай незакрепленных грузов, или жидких незапрессованных грузов, здесь не рассматривается.

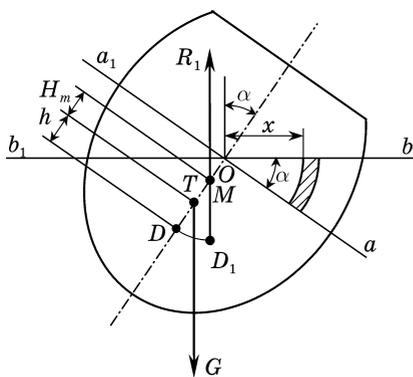


Рис. 6.11

Линия DD_1 , по которой при крене перемещается центр водоизмещения, называется линией центров водоизмещения.

Точка M пересечения поддерживающей силы R_1 с осью плавания при малых углах крена α называется начальным метацентром. Под углом крена α понимается угол между осью плавания и вертикалью.

Величина H_M – расстояние между центром тяжести T и начальным метацентром M называется начальной метацентрической высотой. Момент, создаваемый парой

сил G и R_1 , то есть восстанавливающий момент M_M , равен

$$M_M = R_1 H_M \sin \alpha = R H_M \sin \alpha, \quad (6.46)$$

так как при статическом крене поддерживающая сила не изменяется и равна весу плавающего тела G .

Из рис. 6.11 видно, что если точка M лежит выше точки T , то момент M_M стремится вернуть тело в начальное положение. Поэтому, если точка M лежит выше точки T , то начальная метацентрическая высота H_M считается положительной. При $H_M < 0$ момент M_M будет, очевидно, опрокидывающим. Иначе говоря, для статической остойчивости плавающего тела необходимо, чтобы начальная метацентрическая высота была положительной.

Расстояние $H_M + h$ от начального метацентра до начального центра водоизмещения, то есть длина отрезка MD , называется начальным метацентрическим радиусом.

Рассмотрим плавающее тело, наклоненное на малый угол α относительно своего нормального положения. Величина погрузившегося при этом объема Oav равна

$$V_1 = \int_{S_1} \alpha x dS, \quad (6.47)$$

где S_1 – часть площади новой ватерлинии, x – расстояние от линии пересечения площадей ватерлиний до элемента dS . Так как вес тела G и вели-

чина поддерживающей силы R не изменились, то величина всплывшего объема равна

$$V_2 = - \int_{S_2} \alpha x \, dS = -V_1, \quad S_2 = S - S_1, \quad (6.48)$$

где S – новая площадь ватерлинии.

Величина поддерживающей силы возрастает на величину

$$\delta R_1 = \rho g V_1$$

и уменьшается на

$$\delta R_2 = -\rho g V_2 = -\delta R_1.$$

Моменты, создаваемые этими силами, равны

$$M_1 = \alpha \rho g \int_{S_1} x^2 \, dS, \quad M_2 = \alpha \rho g \int_{S_2} x^2 \, dS. \quad (6.49)$$

В соответствии с формулами (6.47) и (6.48)

$$\int_{S_1} x \, dS + \int_{S_2} x \, dS = 0,$$

то есть статический момент площади новой ватерлинии относительно оси пересечения смежных площадей ватерлиний равен нулю, и эта ось проходит через центр тяжести новой площади ватерлинии (теорема Эйлера).

Из формул (6.49) имеем, что восстанавливающий момент M_M равен

$$M_M = M_1 + M_2 = \alpha \rho g \int_S x^2 \, dS = \alpha \rho g J, \quad (6.50)$$

где J – момент инерции новой площади ватерлинии относительно оси, проходящей через ее центр тяжести (M_1 и M_2 , как видно из рис. 6.11, направлены в одну сторону).

Восстанавливающую силу R_1 можно представить в виде

$$R_1 = R + \delta R_1 + \delta R_2.$$

Ее момент относительно центра давления D равен сумме моментов сил $\delta R_1, \delta R_2$, то есть равен M , так как линия действия силы R проходит через D . С другой стороны, момент силы R_1 равен

$$M_M = (H_M + h)R \sin \alpha \approx (H_M + h)R \alpha, \quad (6.51)$$

так как $R_1 = R$ и при малых углах $\sin \alpha = \alpha$.

Приравнявая выражения (6.50) и (6.51), получим

$$H_M = \frac{J}{W} - h, \quad (6.52)$$

где $W = \frac{R}{\rho g}$ – объемное водоизмещение.

Если центр тяжести тела T лежит ниже центра водоизмещения D , то $h < 0$, а начальная метацентрическая высота H_M всегда больше нуля.

Подставив соотношение (6.52) в формулу (6.46), получим выражение для восстанавливающего момента M_M в виде

$$M_M = R \left(\frac{J}{W} - h \right) \sin \alpha. \quad (6.53)$$

Формула (6.53) называется метацентрической формулой остойчивости.

Заметим, что формула (6.53) была получена для малых углов крена (для высокобортных судов $\alpha \leq 15\text{--}20^\circ$). При больших углах крена зависимость M_M от α становится более сложной, так как метациентр смещается относительно своего первоначального положения.

Под динамической остойчивостью понимается способность плавающего тела совершать колебания под действием сил, создающих кренящие моменты, в пределах заданных углов крена. Чем больше начальная метацентрическая высота, тем короче период этих колебаний.

Как показывают соответствующие исследования, размах динамического крена под действием внезапно приложенной силы равен удвоенному статическому крену, возникающему под действием такой же по величине силы.

Вопросы статической остойчивости при больших углах крена и динамической остойчивости рассматриваются подробно в курсах теории корабля.

Глава VII

ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

§1. Уравнения Эйлера в форме Громеко–Ламба

Система уравнений для идеальной жидкости имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (7.1)$$

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} - \nabla p, \quad (7.2)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(u + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \bar{F} \bar{v} - \operatorname{div} p \bar{v} + \rho q_e. \quad (7.3)$$

Уравнение притока тепла для идеальной жидкости записывается в виде

$$\frac{du}{dt} = q_e - \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \bar{v} = q_e + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (7.4)$$

Для преобразования уравнения Эйлера (7.2) рассмотрим полную производную $\frac{d\bar{v}}{dt}$. В соответствии с (1.19) имеем

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v_j \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}. \quad (7.5)$$

Проектируя вектор $(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = v_j \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}$ на координатную ось Ox_1 , получим

$$\left[(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} \right]_{x_1} = v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_j} = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}. \quad (7.6)$$

Выражение (7.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_j} &= v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + v_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + v_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (7.7)$$

В соответствии с формулой (3.9)

$$2\bar{\omega} = \text{rot}\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad (7.8)$$

и равенство (7.7) можно представить в виде

$$v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{v^2}{2} \right) - 2v_2\omega_3 + 2v_3\omega_2. \quad (7.9)$$

Благодаря изотропности среды все координатные оси равноправны, поэтому после циклической перестановки индексов имеем

$$v_j \frac{\partial v_2}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{v^2}{2} \right) - 2v_3\omega_1 + 2v_1\omega_3, \quad (7.10)$$

$$v_j \frac{\partial v_3}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{v^2}{2} \right) - 2v_1\omega_2 + 2v_2\omega_1, \quad (7.11)$$

где ω_i проекция вектора $\bar{\omega}$ на ось $0x_i$. Умножив соотношения (7.9), (7.10) и (7.11), соответственно, на $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и складывая с учетом формулы (7.8) получим

$$v_j \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j} = \nabla \frac{v^2}{2} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (7.12)$$

Подставив соотношения (7.5) и (7.12) в уравнение Эйлера (7.2), имеем окончательно

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - 2\bar{v} \times \bar{\omega} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (7.13)$$

Уравнение (7.13) представляет собой уравнение Эйлера в форме Громеко-Ламба*.

§2. Интеграл Бернулли

Уравнения движения сплошной среды в напряжениях (2.42) были получены из второго закона Ньютона. Поэтому уравнения Эйлера, являющиеся частным случаем уравнений (2.42), представляют собой математическое выражение второго закона Ньютона для идеальной жидкости. Из

* Ипполит Степанович Громека (1851–1889), русский гидромеханик
Горацио Ламб (1849–1934), английский гидромеханик.

теоретической механики известно, что уравнения движения при определенных условиях имеют первый интеграл, представляющий собой закон сохранения механической энергии. Из сказанного следует, что уравнения Эйлера при соответствующих условиях также должны иметь первый интеграл. Этот интеграл называется интегралом Бернулли*.

Для вывода интеграла Бернулли, представляющего собой одно из важнейших соотношений гидромеханики, введем следующие предположения:

а) течение установившееся, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$;

б) напряжение массовых сил обладает потенциалом, $\vec{F} = \nabla \Pi$.

В этих предположениях уравнение (7.13) принимает вид

$$\nabla \left(-\Pi + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}. \quad (7.14)$$

При установившемся движении линии тока и линии вихря неподвижны в пространстве, причем линии тока совпадают с траекториями частиц жидкости. Вдоль линии тока $\vec{v} = v \vec{s}_1^0$, а вдоль линии вихря $\text{rot } \vec{v} = |\text{rot } \vec{v}| \vec{s}_2^0$, где \vec{s}_1^0, \vec{s}_2^0 – орты касательных к линии тока и к линии вихря. Поэтому, умножая уравнение (7.14) последовательно на \vec{s}_1^0 и \vec{s}_2^0 , или, что то же самое, проектируя это уравнение на линию тока и линию вихря, получим**

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left(-\Pi + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s_1} = 0, \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_2} \left(-\Pi + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s_2} = 0. \quad (7.16)$$

При установившемся движении все характеристики движения (p, ρ, T, v) суть, функции координаты s_1 , отсчитываемой вдоль неподвижной в пространстве линии тока. Поэтому $p = p(s_1, L_1)$, $\rho = \rho(s_1, L_1)$, где L_1 – метка рассматриваемой линии тока. Исключая из этих соотношений s_1 , получим $p = f_1(\rho, L_1)$. Аналогично для линии вихря получим $p = f_2(\rho, L_2)$, где L_2 – метка соответствующей линии вихря.

* Даниил Бернулли (1700–1782), швейцарец по национальности, математик и механик. Действительный, а затем почетный член Петербургской Академии Наук.

** Смешанное произведение $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ при $\vec{c} \parallel \vec{b}$ или $\vec{c} \parallel \vec{a}$ равно нулю.

Наличие соотношений вида $p = f(\rho, L)$ позволяет ввести функцию давления

$$dP = \frac{dp}{\rho}, \text{ или } P = \int \frac{dp}{\rho}, \quad (7.17)$$

где интеграл берется вдоль линии тока (вихря). Функция давления P определена с точностью до аддитивной постоянной и в общем случае есть функция L , то есть функция выбранной линии тока (вихря). Из равенства (7.17) следует, что

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (7.18)$$

Подставив соотношение (7.18) в равенства (7.15) и (7.16), получим

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left(-\Pi + P + \frac{v^2}{2} \right) = 0, \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_2} \left(-\Pi + P + \frac{v^2}{2} \right) = 0, \quad (7.20)$$

откуда, после интегрирования вдоль линии тока (вихря) имеем

$$-\Pi + P + \frac{v^2}{2} = C_1(L_1), \quad (7.21)$$

$$-\Pi + P + \frac{v^2}{2} = C_2(L_2). \quad (7.22)$$

Интеграл Бернулли утверждает, что при установившемся движении и наличии потенциала напряжения массовых сил трехчлен

$$-\Pi + P + \frac{v^2}{2} \quad (7.23)$$

сохраняет постоянное значение вдоль линии тока (вихря). Константа $C_1(C_2)$ на разных линиях тока (вихря) может иметь разные значения.

Соотношения (7.21) и (7.22), справедливые, соответственно, вдоль всякой линии тока и линии вихря, называются интегралом Бернулли.

Рассмотрим какую-либо линию вихря и проведем через ее точки линии тока. Эти линии образуют поверхность тока. Так как вдоль фиксированной линии вихря $C_2(L_2) = \text{const}$, то вдоль всех линий тока, ее пересекающих, $C_1(L_1) = C_2(L_2) = \text{const}$. Таким образом, на построенной поверхности тока выполняется условие $C_1 = \text{const}$.

Аналогично, если через какую-либо линию тока провести линии вихря, то на образованной таким способом вихревой поверхности будет выполняться условие $C_2 = \text{const}$. В случае потенциального течения, то есть

при $\vec{v} = \nabla\varphi$, из формулы (7.8) следует, что $\text{rot } \vec{v} = 0$, и уравнение (7.14) принимает вид

$$\nabla\left(-\Pi + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0. \quad (7.25)$$

Отметим особо, что при $\vec{v} = \nabla\varphi$ равенство (7.25) справедливо во всей области течения. Поэтому

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla P, \quad (7.26)$$

причем функция давления P будет, очевидно, одной и той же во всей области течения. Следовательно, как это видно из ее определения (7.18), давление зависит только от плотности. Процесс, при котором давление зависит только от плотности, называется *баротропным*.

Примерами баротропных процессов могут служить течение несжимаемой жидкости, изотермические процессы. Ниже будут рассмотрены и другие примеры баротропных процессов.

Подставив соотношение (7.26) в уравнение (7.25), получим

$$\nabla\left(-\Pi + P + \frac{v^2}{2}\right) = 0,$$

или

$$-\Pi + P + \frac{v^2}{2} = C, \quad (7.27)$$

причем равенство (7.27) справедливо вдоль любой линии, проведенной в жидкости, а константа C имеет одно и то же значение во всей области, занятой жидкостью.

Итак, если течение установившееся и потенциальное, а напряжение массовых сил имеет потенциал, то процесс будет баротропным.

Обратно, из уравнения (7.13) и соотношения (7.26) следует, что если течение установившееся, потенциальное и баротропное, то

$$\nabla\left(P + \frac{v^2}{2}\right) = \vec{F},$$

то есть такое течение может существовать только при наличии потенциала напряжения массовых сил.

§3. Частные виды интеграла Бернулли

Рассмотрим установившееся течение идеальной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести. В этом случае $\rho = \text{const}$, $\vec{F} = \vec{g}$, $\Pi = -gz$, где z – вертикальная координата.

Из формулы (7.17) имеем для функции давления $P = \frac{p}{\rho} + \text{const}$, и интеграл Бернулли (7.21) (или (7.22)) принимает вид

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const}, \quad (7.28)$$

или

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = H = \text{const}. \quad (7.29)$$

Члены равенства (7.29) имеют размерность длины и называются: z – геометрическая (нивеллирная) высота или геометрический напор, $\frac{p}{\rho g}$ – пьезометрическая высота или пьезометрический напор; $\frac{v^2}{2g}$ – скоростная высота или скоростной напор; их сумма H – полный напор.

Из равенства (7.29) следует, что при установившемся движении идеальной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести полный напор сохраняет постоянное значение вдоль любой линии тока или вихря.

В живом сечении элементарной трубки тока все характеристики течения, по определению, постоянны. Поэтому можно считать, что равенство (7.29) справедливо для элементарной трубки тока. Рассмотрим горизонтальную трубку тока $z = \text{const}$. Тогда из уравнения (7.29) следует, что с ростом скорости давление падает.

При увеличении скорости течения давление может стать достаточно малым и равным давлению насыщенного пара p_y . При этом жидкость начинает кипеть, и в ней образуются каверны, заполненные парами жидкости. Это явление называется кавитацией.

Из равенства (7.28) имеем

$$gz_0 + \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} = gz + \frac{p_y}{\rho} + \frac{v^{*2}}{2},$$

или

$$v^{*2} = 2 \frac{\rho g (z_0 - z) + p_0 - p_y}{\rho} + \frac{v_0^2}{2},$$

где v^* – скорость, при которой начинается кавитация.

С кавитацией приходится сталкиваться при расчете насосов, всасывающих линий трубопроводов, сифонов, гребных винтов и т.п. Возникновение кавитации приводит к нарушению нормальной работы перечисленных устройств и в крайних случаях к их разрушению.

При установившемся движении расход вдоль трубки тока в соответствии с равенством (2.41) постоянен ($v_1 S_1 = v_2 S_2$), и, следовательно, при сужении трубки скорость растет, а давление падает. По этому принципу действуют водоструйный насос, пульверизатор и другие устройства.

Перейдем к рассмотрению установившегося движения идеального невязкого газа. Его уравнение состояния – уравнение Клапейрона – имеет вид

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad (7.30)$$

где R – газовая постоянная, T – абсолютная температура.

Из формул (7.17) и (7.30) видно, что для вычисления функции давления необходимо задать термодинамический процесс.

Из уравнения притока тепла (7.4) имеем

$$q_e dt = du - \frac{p}{\rho^2} d\rho = du + p d\frac{1}{\rho} = du + p dV, \quad (7.31)$$

где $V = \frac{1}{\rho}$ – удельный объем. Таким образом, для невязкого газа уравнение притока тепла совпадает с первым началом термодинамики.

При $\rho = \text{const}$ $V = \text{const}$, и

$$q_e dt = C_V dT = du, \quad (7.32)$$

где C_V – теплоемкость при постоянном объеме. При $p = \text{const}$ из формул (7.30) и (7.32) имеем

$$q_e dt = C_p dT = du + d\frac{p}{\rho} = C_V dT + R dT,$$

откуда следует формула Майера*

$$R = C_p - C_V, \quad (7.33)$$

где C_p – теплоемкость при постоянном давлении.

Подставив в уравнение (7.31) уравнение состояния (7.30) и учитывая равенства (7.32) и (7.33), получим

$$\begin{aligned} q_e dt = C_V dT + p d\frac{1}{\rho} &= \frac{C_V}{C_p - C_V} d\frac{p}{\rho} + p d\frac{1}{\rho} = \frac{1}{k-1} \left(k p d\frac{1}{\rho} + \frac{dp}{\rho} \right) = \\ &= \frac{\rho^{k-1}}{k-1} \left(\frac{k}{\rho^{k-1}} p d\frac{1}{\rho} + \frac{dp}{\rho^k} \right) = \frac{\rho^{k-1}}{k-1} d\frac{p}{\rho^k}, \end{aligned} \quad (7.34)$$

где $k = \frac{C_p}{C_V}$ – показатель адиабаты.

* Юлиус Роберт Майер (1814–1878), немецкий естествоиспытатель и врач. Показал эквивалентность механической работы и теплоты.

При адиабатическом процессе, то есть при отсутствии притока тепла извне, $q_e = 0$, и

$$\frac{p}{\rho^k} = \Theta \quad \text{или} \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k. \quad (7.35)$$

Заметим, что при выводе соотношения (7.35), называющегося *адиабатой Пуассона**, использовалось уравнение притока тепла (7.31) для идеальной жидкости. Следовательно, адиабата Пуассона справедлива при адиабатическом процессе без трения.

Покажем, что адиабатический процесс без трения является изэнтропическим, то есть что при этом процессе энтропия сохраняет постоянное значение.

Энтропия s , как известно, определяется соотношением

$$ds = \frac{dq}{T}. \quad (7.36)$$

Пусть в рассматриваемом объеме жидкости тепло поступает только извне, то есть $dq = q_e dt$. Тогда в соответствии с уравнением состояния (7.30) и формулами (7.33), (7.34) и (7.36) имеем

$$\begin{aligned} ds &= \frac{q_e dt}{T} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} d \frac{1}{\rho} = C_V \frac{dT}{T} + (C_P - C_V) \rho d \frac{1}{\rho} = \\ &= C_V \left[d \ln T + (k - 1) d \ln \frac{1}{\rho} \right] = C_V d \ln \frac{T}{\rho^{k-1}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$s_2 - s_1 = C_V \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{k-1} \right] = C_V \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right]. \quad (7.37)$$

При изэнтропическом процессе $s_2 = s_1$ и из равенства (7.37) имеем

$$\ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right] = 0, \quad \text{или} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k. \quad (7.38)$$

Из формул (7.35) и (7.38) следует, что адиабатический процесс без трения, действительно, является изэнтропическим.

В общем случае неадиабатического процесса уравнение притока тепла (7.31) можно с учетом равенств (7.30), (7.32) и (7.33) представить в виде

$$q_e dt = CdT = C_V dT + p d \frac{1}{\rho},$$

* Симон Дени Пуассон (1781–1840), французский математик и физик. Иностраннный почетный член Петербургской Академии Наук.

или

$$\frac{C - C_V}{C_P - C_V} d \frac{p}{\rho} - p d \frac{1}{\rho} = 0, \quad (7.39)$$

где C – теплоемкость при рассматриваемом термодинамическом процессе. Обозначив

$$\frac{C - C_V}{C_P - C_V} = \frac{1}{n - 1}, \quad n \neq 1,$$

из соотношения (7.39) получим

$$npd \frac{1}{\rho} + \frac{dp}{\rho} = \rho^{n-1} \left(\frac{np}{\rho^{n-1}} d \frac{1}{\rho} + \frac{dp}{\rho^n} \right) = \rho^{n-1} d \frac{p}{\rho^n} = 0,$$

откуда

$$p = A \rho^n. \quad (7.40)$$

Соотношение (7.40) представляет собой уравнение политропического процесса. В общем случае величины A и n (через теплоемкость C) могут меняться от частицы к частице, что определяется характером подвода тепла и свойствами частиц (при неоднородной жидкости). Следовательно, A и n являются функциями лагранжевых координат частицы X_j и t . При установившемся движении линия тока совпадает с траекторией, и если бы A и n зависели от X_j , то давление в фиксированной точке линии тока (пространства) менялось бы со временем, то есть движение было бы неустановившимся. Следовательно, A и n при установившемся движении могут зависеть только от L .

Если параметры A и n имеют одни и те же значения во всей области, занятой жидкостью, то политропический процесс будет баротропным.

Воспользовавшись для вычисления функции давления P формулами (7.17), (7.30), (7.33), (7.35) и (7.40), получим для адиабатического процесса с точностью до постоянных интегрирования выражения

$$P = \frac{k}{k-1} \Theta \rho^{k-1} = \frac{k}{k-1} \Theta^{\frac{1}{k}} p^{\frac{k-1}{k}} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} = C_P T, \quad (7.41)$$

а для политропического процесса – выражения

$$P = \frac{n}{n-1} A \rho^{n-1} = \frac{n}{n-1} A^n p^{\frac{1}{n} \frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n-1} \frac{p}{\rho}. \quad (7.42)$$

Для изотермического процесса

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = RT_0 = \text{const}, \quad (7.43)$$

где p_0, ρ_0 – давление и плотность при температуре T_0 , и из равенств (7.17) и (7.43) имеем

$$P = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (7.44)$$

Подставив соотношение (7.41) в равенство (7.21) и полагая $\Pi = -gz$, получим следующие виды интеграла Бернулли для адиабатического процесса:

$$gz + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C = \text{const}, \quad (7.45)$$

$$gz + \frac{k}{k-1} \Theta^{\frac{1}{k}} p^{\frac{k-1}{k}} + \frac{v^2}{2} = C = \text{const}, \quad (7.46)$$

$$gz + \frac{k}{k-1} \Theta \rho^{k-1} + \frac{v^2}{2} = C = \text{const}, \quad (7.47)$$

$$gz + C_p T + \frac{v^2}{2} = C = \text{const}. \quad (7.48)$$

Для политропического процесса из формул (7.21) и (7.42) имеем

$$gz + \frac{n}{n-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C = \text{const}, \quad n \neq 1, \quad (7.49)$$

$$gz + \frac{n}{n-1} A^n p^{\frac{n-1}{n}} + \frac{v^2}{2} = C = \text{const}, \quad n \neq 1, \quad (7.50)$$

$$gz + \frac{n}{n-1} A \rho^{n-1} + \frac{v^2}{2} = C = \text{const}, \quad n \neq 1, \quad (7.51)$$

Для изотермического процесса из равенств (7.21) и (7.44) получаем

$$gz + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0} + \frac{v^2}{2} = \text{const}, \quad (7.52)$$

$$gz + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{v^2}{2} = \text{const}. \quad (7.53)$$

Из формул (7.45)–(7.51) видно, что при адиабатическом и политропическом процессах величины $\frac{p}{\rho}$, p , ρ с ростом скорости уменьшаются. При адиабатическом процессе с ростом скорости уменьшается также абсолютная температура T . При изотермическом процессе, как это следует из формул (7.43), (7.52) и (7.53), с ростом скорости величины p и ρ уменьшаются, а отношение $\frac{p}{\rho}$ остается постоянным.

§4. Простейшие примеры приложения интеграла Бернулли

Рассмотрим некоторые простейшие примеры приложения интеграла Бернулли к течениям идеальной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести.

1. Истечение жидкости из малого отверстия в сосуде. Будем считать, что $S_0 \gg S$, где S_0 – площадь свободной поверхности жидкости, S – площадь отверстия в сосуде (рис. 7.1). Тогда скоростью изменения уровня в сосуде можно пренебречь и считать, что $z_0 = \text{const}$.

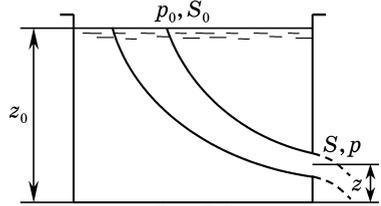


Рис. 7.1

Из формулы (7.28) имеем

$$gz_0 + \frac{p_0}{\rho} = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}, \tag{7.54}$$

где p_0 – давление на свободной поверхности, z , p , v – параметры струи на выходе из отверстия. Из формулы (7.54) следует, что скорость истечения из отверстия равна

$$v = \sqrt{2gh + 2 \frac{p_0 - p}{\rho}}, \tag{7.55}$$

где $h = z_0 - z$. Если $p_0 = p$, то из формулы (7.55) имеем известную формулу Торричелли

$$v = \sqrt{2gh},$$

то есть скорость истечения равна скорости падения тяжелого тела с высоты h .

Так как на поверхности вытекающей струи $p = \text{const}$, то из интеграла Бернулли следует, что с опусканием струи ее скорость растёт.

2. Скоростная трубка (трубка Пито). Пусть в жидкости находится осесимметричное тело, направление оси которого совпадает с направлением скорости течения (рис. 7.2). В точке A , расположенной на достаточном расстоянии от носика тела B , скорость равна v_A , а давление – p_A . В точке B скорость $v_B = 0$, линии тока разветвляются. Таким образом, точка B является особой. Можно считать, что в точке C , также достаточно удаленной от точки B , возмущения потока, вызванные носиком трубки, исчезли, так что $v_C = v_A$, $p_C = p_A$ (для простоты предполагается, что поток направлен горизонтально).

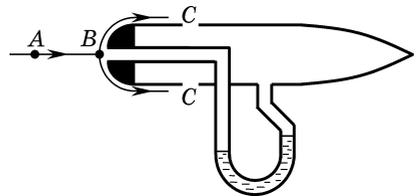


Рис. 7.2

Записав уравнение (7.28) для линии тока AB , имеем

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{p_B}{\rho},$$

откуда

$$v_A = v_C = \sqrt{2 \frac{p_B - p_A}{\rho}} = \sqrt{2 \frac{p_B - p_C}{\rho}}. \quad (7.56)$$

Таким образом, измерив разность давлений $p_B - p_C$, можно определить скорость v_A .

На практике в формулу (7.56) вводится поправочный коэффициент скорости φ , учитывающий искажение потока и наличие сил трения. Коэффициент φ определяется путем градуировки, и для хороших трубок $\varphi = 0,99-1,02$.

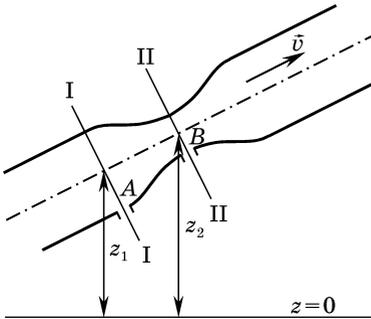


Рис. 7.3

3. Водемер Вентури. Выберем в трубке (рис. 7.3) сечения I – I и II – II и будем считать, что скорости в этих сечениях распределены равномерно, то есть, что там $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$. Тогда из уравнения Эйлера (7.2) следует, что при установившемся течении в каждом из этих сечений $\nabla p = \rho \vec{g}$, то есть давления распределены по гидростатическому закону*

$$\rho g z + p = \text{const}. \quad (7.57)$$

Будем обозначать все величины, относящиеся к сечению I – I, индексом 1, а к сечению II – II – индексом 2. Запишем для линии тока, проходящей по оси трубы, интеграл Бернулли (7.28)

$$g z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = g z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}. \quad (7.58)$$

Так как скорости распределены по сечениям равномерно, то в соответствии с уравнением неразрывности (2.41)

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = Q. \quad (7.59)$$

* Этот же вывод следует из уравнения Навье–Стокса (4.42).

Из равенств (7.58) и (7.59) следует, что

$$\frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) = g(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\rho}. \quad (7.60)$$

С другой стороны, из формулы (7.57) имеем

$$\rho g z_A + p_A = \rho g z_1 + p_1, \quad \rho g z_B + p_B = \rho g z_2 + p_2, \quad (7.61)$$

где индексы A и B относятся к отверстиям A и B .

Подставив соотношения (7.61) в формулу (7.60), получим

$$Q = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2}{S_1^2 - S_2^2} \left[g(z_A - z_B) + \frac{p_A - p_B}{\rho} \right]}. \quad (7.62)$$

Из формулы (7.62) видно, что, измерив разность давлений $p_A - p_B$, можно определить расход Q . При практическом использовании формулы (7.62) в нее вводится поправочный коэффициент расхода μ , учитывающий неравномерность поля скоростей в сечениях и наличие сил трения.

§5. Интеграл Коши–Лагранжа

Для вывода интеграла Коши–Лагранжа, представляющего собой аналог интеграла Бернулли для случая неустановившегося движения, примем следующие предположения:

- а) течение потенциальное, $\vec{v} = \nabla \varphi$;
- б) напряжение массовых сил обладает потенциалом, $\vec{F} = \nabla \Pi$;
- в) процесс баротропный, $p = p(\rho)$.

Последнее требование обусловлено тем, что при неустановившемся движении линии тока не совпадают с траекториями. Следовательно, нельзя считать, что $p = p(L, s)$, $\rho = \rho(L, s)$ и исключать s , как это было сделано при выводе интеграла Бернулли. Поэтому для небаротропного движения в общем случае не представляется возможным вычислить функцию давления P .

При сделанных предположениях $\text{rot } \vec{v} = 0$, и уравнение Эйлера в форме Громеко–Ламба (7.13) принимает вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} = \nabla \Pi - \nabla P, \quad (7.63)$$

где функция давления P вычисляется по формулам (7.18).

Так как

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) = \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

то уравнение (7.63) может быть переписано в виде

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Pi + P + \frac{v^2}{2} \right) = 0. \quad (7.64)$$

Поскольку оператор Гамильтона ∇ содержит только пространственные производные, а функции, входящие в равенство (7.64), в общем случае

зависят от времени, то из равенства (7.64) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Pi + P + \frac{v^2}{2} = f(t). \quad (7.65)$$

Равенство (7.65) называется интегралом Коши-Лагранжа. Из его вывода следует, что функция $f(t)$ имеет один и тот же вид во всей области, занятой жидкостью. При установившемся движении интеграл Коши-Лагранжа переходит в интеграл Бернулли (7.27) для случая баротропного потенциального движения.

Для определения функции $f(t)$ необходимо знать движение в какой-либо одной точке жидкости, например, на границе области.

Введем вместо потенциала φ функцию φ_1 , определенную равенством

$$\varphi_1 = \varphi + \int f(t) dt.$$

Тогда

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(t), \quad \nabla \varphi_1 = \nabla \varphi,$$

и интеграл Коши-Лагранжа можно переписать в виде

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \Pi + P + \frac{v^2}{2} = 0.$$

Для несжимаемой жидкости в поле сил тяжести интеграл Коши-Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = 0. \quad (7.66)$$

Для идеальных газов при изэнтропическом процессе в соответствии с формулой (7.37) имеем

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + gz + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = 0.$$

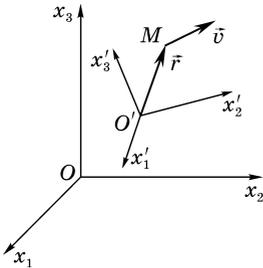


Рис. 7.4

В ряде случаев рассматриваемое движение в неподвижной системе координат удобнее описывать в подвижной системе координат. Пусть, кроме неподвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$, имеется подвижная система $O'x'_1x'_2x'_3$ (рис. 7.4). Фиксирование значений x'_j означает фиксирование положения точки M относительно подвижной системы.

Если известен закон движения точки M относительно неподвижной системы координат, то

$$x_i = x_i(x'_j, t). \quad (7.67)$$

* Напомним, что сокращенная запись $x_i(x'_j, t)$ означает $x_i = x_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $j = 1, 2, 3$.

Тогда при фиксированных значениях x'_j

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial x_i(x'_j, t)}{\partial t} = v_{i \text{ пер}}, \quad (7.68)$$

где $v_{i \text{ пер}}$ – проекции скорости переносного движения $\vec{v}_{\text{пер}}$. По формуле Эйлера

$$v_{\text{пер}} = v_0 + \omega \times r,$$

где v_0 – скорость начала координат O' , $\bar{\omega}$ – мгновенная угловая скорость вращения координатной системы $O'x'_1x'_2x'_3$, \vec{r} – радиус-вектор точки M в этой системе.

В неподвижной системе $Ox_1x_2x_3$ потенциал скоростей зависит от x_i, t – $\varphi = \varphi(x_i, t)$. Подставив в это выражение закон движения (7.76), получим потенциал $\varphi_1 = \varphi[x_i(x_j, t)]$, выраженный через координаты подвижной системы. Тогда

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t},$$

или, с учетом формул (7.68),

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v}_{\text{пер}} \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v}_{\text{пер}} \vec{v}.$$

Теперь интеграл Коши–Лагранжа (7.65) может быть представлен в виде

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \vec{v}_{\text{пер}} \vec{v} - \Pi + P + \frac{v^2}{2} = f(t). \quad (7.69)$$

Положим что система $O'x'_1x'_2x'_3$ движется относительно неподвижной системы $Ox_1x_2x_3$ со скоростью $\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{e}_1 V(t)$. Тогда равенство (7.69) принимает вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \vec{e}_1 V \vec{v} - \Pi + P + \frac{v^2}{2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - V \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \Pi + P + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = f(t).$$

§6. Теорема Томсона

Возьмем в жидкости некоторую линию AB и будем считать, что все ее точки движутся вместе с жидкостью, то есть что AB – жидкая линия. Ее уравнение можно представить в виде $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$, где s – некоторый параметр, изменяющийся вдоль линии, например, длина дуги. При $s = \text{const}$ $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – закон движения какой-либо точки жидкой линии AB .

Рассмотрим циркуляцию скорости

$$\Gamma = \int_{AB} \vec{v} d\vec{r}, \quad (7.70)$$

взятую вдоль AB и вычислим производную $\frac{d\Gamma}{dt}$. При этом необходимо учитывать, что с течением времени меняется не только скорость точек, образующих линию AB , но и вид самой линии AB .

Вычислим предварительно производную по времени от интеграла, взятого вдоль жидкой линии. С учетом определения интеграла имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{AB} \varphi d\vec{r} = \frac{d}{dt} \lim_{\Delta\vec{r} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \Delta\vec{r}_i = \lim_{\Delta\vec{r} \rightarrow 0} \left(\frac{d\varphi_i}{dt} \Delta\vec{r}_i + \varphi_i \frac{d\Delta\vec{r}_i}{dt} \right).$$

Так как $\Delta\vec{r}_i = \vec{s}^0 \Delta s$, где \vec{s}^0 – единичный вектор касательной к AB (рис. 7.5), то

$$\frac{d\Delta\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_{B_i} - \vec{v}_{A_i} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} ds \quad (7.71)$$

и

$$\frac{d}{dt} \int_{AB} \varphi d\vec{r} = \int_{AB} \frac{d\varphi}{dt} d\vec{r} + \int_{AB} \varphi \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} ds. \quad (7.72)$$

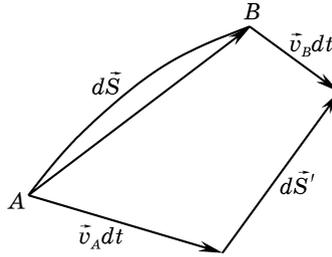


Рис. 7.5

Полагая в формуле (7.72) $\varphi = \vec{v}$, из формулы (7.70) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} + \int_{AB} \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} ds = \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dt} dr + \int_{AB} \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} ds = \\ &= \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dr} dr + \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2). \end{aligned} \quad (7.73)$$

Заметим, что формула (7.73) чисто кинематическая, то есть справедлива при любых движениях любой жидкости.

Если AB – замкнутый контур, то второй член в формуле (7.73) пропадает.

Подставив в формулу (7.73) уравнение Эйлера (7.3), получаем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{AB} \vec{F} d\vec{r} - \int_{AB} \frac{1}{\rho} \nabla p d\vec{r} + \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2). \quad (7.74)$$

При наличии потенциала напряжения массовых сил, когда $\vec{F} = \nabla\Pi$, формула (7.74) приобретает вид

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{AB} d\Pi - \int_{AB} \frac{1}{\rho} dp + \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2), \quad (7.75)$$

где $d\Pi$, dp – дифференциалы, взятые вдоль дуги кривой AB .

Если кривая AB замкнутая, а потенциал Π – однозначная функция, то из равенства (7.75) получается

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint \frac{1}{\rho} dp. \quad (7.76)$$

В случае баротропного процесса

$$\frac{1}{\rho} dp = dP, \quad \oint dP = 0,$$

и из формулы (7.76) имеем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (7.77)$$

Равенство (7.77) выражает собой теорему Томсона*: если жидкость идеальная, напряжение массовых сил обладает однозначным потенциалом и процесс баротропный, то циркуляция по любому замкнутому жидкому контуру не зависит от времени.

Натянем на замкнутый контур C произвольную поверхность S . По теореме Стокса (3.35) будем иметь

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} d\vec{r} = 2 \int_S \omega_n dS. \quad (7.78)$$

Из формул (7.77) и (7.78) следует, что при выполнении условий теоремы Томсона поток вихря не зависит от времени, или

$$2 \int_S \omega_n dS = \int_S (\text{rot } \vec{v})_n dS = \text{const}, \quad (7.79)$$

* Уильям Томсон, лорд Кельвин (1824–1907), английский физик. Иностраннный почетный член Петербургской Академии Наук.

причем равенства (7.78) и (7.79) справедливы для любого контура C , который может быть непрерывным образом стянут в точку, и любой поверхности S , натянутой на этот контур.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ во всей области, занятой жидкостью, нет вихрей — $\vec{\omega} = 0$. Тогда в соответствии с равенством (7.79)

$$\int_S (\text{rot } \vec{v})_n dS = 0,$$

а так как поверхность S произвольная, то во всей области, занятой жидкостью

$$(\text{rot } \vec{v})_n = 0. \quad (7.80)$$

Произвольность выбора поверхности S означает также произвольность выбора направления нормали \vec{n} . Поэтому из формулы (7.80) получаем

$$\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega} = 0. \quad (7.81)$$

Из равенства (7.81) следует теорема Лагранжа: если жидкость идеальная, процесс баротропный, напряжение массовых сил обладает потенциалом и в некоторый момент времени вихрь скорости во всей области течения был равен нулю, то движение останется безвихревым и в любой последующий момент времени.

Условие (7.81) является условием потенциальности течения (гл. III, §5). Поэтому в жидкости, отвечающей условиям теоремы Томсона, потенциальное движение остается таковым всегда, если оно было потенциальным в какой-либо момент времени. Совершенно аналогичным образом можно показать, что если движение было вихревым, то оно останется вихревым и в дальнейшем.

Из теоремы Лагранжа следует, что движение, возникшее непрерывным образом из состояния покоя, будет потенциальным. Подчеркнем еще раз, что этот вывод справедлив лишь при выполнении условий теоремы Томсона. В частности, это справедливо для однородной идеальной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести. В вязкой жидкости, а также при нарушении баротропности, вихри могут возникать и исчезать.

§7. Уравнение Гельмгольца

Уравнение движения идеальной жидкости в форме Громеко–Ламба (7.13) в предположении, что напряжение массовых сил обладает потенциалом, а процесс баротропный, имеет вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(-\Pi + P + \frac{v^2}{2} \right) - 2\vec{v} \times \vec{\omega} = 0, \quad (7.82)$$

где $\nabla \Pi = \vec{F}$, а P — функция давления: $P = \int \frac{dp}{\rho}$.

Применяя к уравнению (7.82) операцию rot и имея в виду, что $\text{rot}(\nabla\varphi) = 0$, $\text{rot}\vec{v} = 2\vec{\omega}$, получаем

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{v}) = 0. \quad (7.83)$$

Проектируя равенство (7.83) на ось Ox_1 , имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\omega_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\vec{\omega} \times \vec{v})_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}(\vec{\omega} \times \vec{v})_2 = \\ & = \frac{\partial\omega_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\omega_1 v_2 - \omega_2 v_1) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\omega_3 v_1 - \omega_1 v_3) = \\ & = \frac{\partial\omega_1}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} - \omega_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - v_1 \frac{\partial\omega_2}{\partial x_2} - \omega_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - v_1 \frac{\partial\omega_3}{\partial x_3} + \\ & + \omega_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + v_3 \frac{\partial\omega_1}{\partial x_3} + \omega_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \omega_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} = \\ & = \frac{\partial\omega_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial\omega_1}{\partial x_3} + \omega_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) - \\ & - v_1 \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\omega_3}{\partial x_3} \right) - \omega_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \omega_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \omega_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \\ & = \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_1 \text{div}\vec{v} - \vec{v}_1 \text{div}\vec{\omega} - \vec{\omega} \nabla v_1 = 0. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Легко проверить прямой подстановкой, что $\text{div}\vec{\omega} = 0$. Кроме того, из уравнения неразрывности (7.1) следует, что $\text{div}\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$. Поэтому уравнение (7.84) можно представить в виде

$$\frac{d\omega_1}{dt} - \frac{\omega_1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \vec{\omega} \nabla v_1,$$

или

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\omega_1}{dt} - \frac{\omega_1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\vec{\omega}}{\rho} \nabla v_1,$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_1}{\rho} \right) = \frac{\vec{\omega}}{\rho} \nabla v_1. \quad (7.85)$$

Соотношение (7.85) представляет собой уравнение Гельмгольца в проекции на ось Ox_1 . Очевидно, что в векторной форме оно имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{v}. \quad (7.86)$$

Уравнение Гельмгольца (7.85) или (7.86) позволяет найти изменение поля вихрей во времени.

Заметим, что уравнения (7.83) и (7.86) представляют собой чисто кинематические соотношения. Для уравнения (7.83) это очевидно. Уравнение же (7.86) является прямым следствием уравнения (7.84), которое, с учетом равенства $\operatorname{div} \bar{\omega} = 0$, в векторной форме принимает вид

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} + \bar{\omega} \operatorname{div} \bar{v} = (\bar{\omega} \cdot \nabla) \bar{v}.$$

Возьмем в жидкости какую-либо вихревую линию. Рассмотрим ее элемент $d\bar{s} = \varepsilon \frac{\bar{\omega}}{\rho}$ (по определению вихревой линии, $d\bar{s} \parallel \bar{\omega}$), где ε – малая константа. Концы вектора $d\bar{s}$ обозначим через A и B (рис. 7.5). Частицы жидкости (материальные точки), образовавшие в момент t элемент $d\bar{s}$, образуют в момент $t + dt$ элемент $d\bar{s}'$.

Очевидно, что

$$d\bar{s}' = d\bar{s} + \bar{v}_B dt - \bar{v}_A dt. \quad (7.87)$$

Заметим, что формула (7.87) по своему смыслу совпадает с равенством (7.71).

В соответствии с формулой (3.3) и определением вектора $d\bar{s}$

$$\bar{v}_B - \bar{v}_A = (d\bar{s} \cdot \nabla) \bar{v} = \left(\varepsilon \frac{\bar{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \bar{v},$$

и формула (7.87) принимает вид

$$d\bar{s}' = \varepsilon \left[\frac{\bar{\omega}}{\rho} + \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \bar{v} dt \right]. \quad (7.88)$$

Рассмотрим теперь вектор вихря $d\bar{s} = \varepsilon \frac{\bar{\omega}}{\rho}$. В момент времени $t + \Delta t$ он равен

$$d\bar{s}'' = \varepsilon \frac{\bar{\omega}'}{\rho'} = d\bar{s} + \frac{d\bar{s}}{dt} dt = \varepsilon \frac{\bar{\omega}}{\rho} + \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \right) dt. \quad (7.89)$$

Так как в формуле (7.89) берется полная производная, то второй член в этой формуле (с точностью до членов более высокого порядка малости) представляет собой приращение жидкого вихревого элемента $d\bar{s} = \varepsilon \frac{\bar{\omega}}{\rho}$ за время dt .

Воспользовавшись уравнением Гельмгольца (7.86), формулу (7.89) можно представить в виде

$$d\bar{s}'' = \varepsilon \left[\frac{\bar{\omega}}{\rho} + \left(\frac{\bar{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \bar{v} dt \right]. \quad (7.90)$$

Вектор $d\vec{s}'$ – элемент жидкой линии, в который перейдет элемент $d\vec{s}$ за время dt . Вектор $d\vec{s}''$ – элемент вихревой линии в момент времени $t + dt$. Из формул (7.88) и (7.90) видно, что $d\vec{s}' = d\vec{s}''$. Следовательно, элементы вихревой линии все время совпадают с элементами жидкой линии, из которых эта вихревая линия составлена. Таким образом, если напряжение массовых сил обладает потенциалом, жидкость идеальная и процесс баротропный (условия справедливости уравнения Гельмгольца), то вихри движутся вместе с частицами жидкости (вторая теорема Гельмгольца).

Возьмем элементарную вихревую трубку сечением $d\sigma$. Ее напряжение равно $\omega d\sigma$. За время dt она перейдет в вихревую трубку сечением $d\sigma'$. Так как, по доказанному, она состоит все время из одних и тех же частиц, то из закона сохранения массы имеем

$$\rho d\sigma ds = \rho' d\sigma' ds'.$$

Заменяя ds на $\varepsilon \frac{\omega}{\rho}$ и ds' на $\varepsilon \frac{\omega'}{\rho'}$, получим

$$\omega d\sigma = \omega' d\sigma',$$

или, что напряжение вихревой трубки сохраняется во времени.

Из уравнения Гельмгольца (7.86) следует, что если в какой-либо момент времени $\vec{\omega} = 0$, то $\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = 0$, то есть если вихрей не было, то они не могут возникнуть.

Для вязкой жидкости это утверждение неверно.

Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости при $\mu = \text{const}$ имеет вид (4.42). При наличии потенциала массовых сил это уравнение можно представить в виде

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - 2\vec{v} \times \vec{\omega} = \nabla \Pi - \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (7.91)$$

Продельвая с уравнением (7.91) те же операции, что с уравнением (7.82), и учитывая, что $\text{rot}(\Delta \vec{a}) = \Delta \text{rot} \vec{a}$, получаем

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{\omega}. \quad (7.92)$$

Благодаря наличию добавочного члена $\frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{\omega}$ вихревые линии не будут жидкими линиями и вихри могут распространяться от частицы к частице.

При малых возмущениях нелинейные члены $v_i \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_i}$ и $(\bar{\omega} \cdot \nabla) \bar{v}$ в уравнении (7.92) будут величинами второго порядка малости, и это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \Delta \bar{\omega},$$

которое в точности имеет вид уравнения теплопроводности. Следовательно, при малых возмущениях завихренность в вязкой жидкости ведет себя, также как температура неравномерно нагретого тела. Она имеет тенденцию распределяться по всему нагретому телу. Происходит диффузия вихря.

§8. Потенциальное течение несжимаемой жидкости

При потенциальном течении однородной несжимаемой жидкости интеграл Коши–Лагранжа (7.66) может быть представлен в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = 0, \quad (7.93)$$

а из уравнения неразрывности и условия потенциальности течения имеем

$$\operatorname{div} \bar{v} = \operatorname{div}(\nabla \varphi) = \Delta \varphi = 0, \quad (7.94)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Из уравнения (7.94) следует, что φ – гармоническая функция, а уравнение (7.93) при известном φ позволяет найти распределение давления. Ограничений на решение уравнения Лапласа уравнение (7.93) не накладывает. Поэтому всякому потенциальному течению несжимаемой жидкости соответствует своя гармоническая функция φ , а всякой гармонической функции соответствует свое потенциальное течение несжимаемой жидкости.

Таким образом, изучение потенциальных движений однородной несжимаемой жидкости сводится к изучению решений уравнения Лапласа, то есть к поиску его решений при заданных краевых условиях.

Рассмотрим область пространства, в которой задана любая гармоническая функция. На основании теоремы Гаусса–Остроградского и формулы (7.94) имеем

$$\int_V \operatorname{div} \bar{v} dV = \int_V \operatorname{div}(\nabla \varphi) dV = \int_S \bar{n} \nabla \varphi dS = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0. \quad (7.95)$$

Пусть гармоническая функция φ достигает максимума во внутренней точке M области D . Окружим точку M бесконечно малой поверхностью S .

Так как φ достигает максимума в точке M , то в точках поверхности S должно быть $\frac{\partial \varphi}{\partial n} < 0$, а равенство (7.95) не может иметь места. Следовательно, функция φ не может иметь максимума во внутренней точке области D . Аналогичным образом доказывается, что φ не может иметь минимума во внутренней точке области. Таким образом, гармоническая функция может достигать максимума или минимума только на границе области D .

Пусть скорость течения достигает максимума во внутренней точке M области и равна v_M . Выберем в этой точке оси координат так, чтобы $v_M = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$. Так как φ – гармоническая функция, то $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ также гармоническая функция, а поэтому она не может иметь максимума в точке M . Тогда в малой окрестности точки M найдется такая точка N , в которой

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)_N > \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)_M,$$

откуда

$$v_N = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)_N^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)_N^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right)_N^2} > \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)_N > \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)_M = v_M. \quad (7.96)$$

Из неравенства (7.96) видно, что скорость течения не может достигать максимума во внутренней точке области. Аналогично доказывается, что она не может достигать и минимума во внутренней точке области. Следовательно, скорость потенциального течения несжимаемой жидкости может достигать максимума или минимума только на границах области D .

Рассмотрим некоторые примеры потенциальных течений несжимаемой жидкости.

1. Пусть

$$\varphi = -\frac{Q(t)}{4\pi r}, \quad r = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2}. \quad (7.97)$$

Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{Q(t)}{4\pi} \cdot \frac{x_i - x_{i0}}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \frac{Q(t)}{4\pi} \cdot \frac{r^2 - 3(x_i - x_{i0})^2}{r^5},$$

откуда сразу следует, что

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0.$$

Следовательно, φ – гармоническая функция, которая описывает течение несжимаемой жидкости.

Эквипотенциальные поверхности $\varphi = \text{const}$ представляют собой сферы с центром в точке (x_{10}, x_{20}, x_{30}) . Скорость течения $\vec{v} = \nabla\varphi$ направлена по нормальям к этим сферам, то есть по радиусам, которые являются линиями тока. При этом

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Q(t)}{4\pi r^2}, \quad (7.98)$$

и при $r = \text{const}$ $v_r = \text{const}$.

При $r \rightarrow 0$ $v_r \rightarrow \infty$, то есть центр сферы является особой точкой, в которой пересекается бесконечное множество линий тока.

Расход через поверхность S сферы произвольного радиуса равен

$$\int_S v_r d\sigma = v_r \int_S dS = 4\pi r^2 v_r = Q(t).$$

Если $Q(t) > 0$, то скорости течения направлены от центра сферы, в центре имеется источник жидкости с интенсивностью $Q(t)$; если $Q(t) < 0$, то там имеется сток.

Из формулы (7.98) видно, что если интенсивность источника (стока) меняется во времени, то одновременно меняются скорости во всей области, занятой жидкостью, то есть возмущения в несжимаемой жидкости передаются с бесконечно большой скоростью (мгновенно).

Итак, формула (7.97) определяет потенциал скорости от источника (стока) в пространстве.

Благодаря линейности уравнения Лапласа функция

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k(t)}{r_k}, \quad r_k = \sqrt{(x_1 - x_{1k})^2 + (x_2 - x_{2k})^2 + (x_3 - x_{3k})^2}$$

также является его решением и описывает течение, возникающее при наличии n источников (стоков).

Возьмем некоторый объем V_0 вне области D , занятой движущейся жидкостью. Пусть x_{i0} соответствуют точкам объема V_0 . Тогда функция

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{q(x_{i0}, t)}{r} dV_0, \quad r = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2},$$

как легко видеть, является гармонической и описывает течение в области D от непрерывно распределенных в объеме V_0 источников с плотностью q . Аналогично можно определить для поверхности S_0 , линии l_0 , не принадлежащих D , потенциалы

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{m(x_{i0}, t)}{r} dS_0, \quad \varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{l_0} \frac{n(x_{i0}, t)}{r} dl_0,$$

где m, n – плотности распределения поверхностных и линейных источников.

2. Рассмотрим в точке $N(x_{i0})$ сток, а в точке $N_1(x_{i0} + dx_i)$ источник.

При этом будем считать, что интенсивности источника и стока Q по величине одинаковы. Потенциал в точке $M(x_j)$, которую считаем неподвижной (рис. 7.6), от совокупности источника и стока равен

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r_1} + \frac{Q}{4\pi r} = -\frac{Q\Delta s}{4\pi\Delta s} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right), \quad r = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2}. \quad (7.99)$$

Пусть теперь точка N_1 неограниченно приближается к точке N , а произведение $Q\Delta s = m$ остается постоянным. Тогда из формулы (7.99) получим

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) = -\frac{m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{m}{4\pi} \bar{s}^o \nabla \left(\frac{1}{r} \right),$$

где \bar{s}^o – единичный вектор прямой, соединяющей точки N и N_1 . Величина $\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$ вычисляется в точке $N(x_{i0})$,

причем, так как точка M неподвижна, то дифференцирование производится по координатам x_{i0} , и

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_{k0}} \left(\frac{1}{r} \right) = \bar{e}_k \frac{x_k - x_{k0}}{r^3} = \frac{\bar{r}}{r^3}.$$

Тогда

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi} \frac{\bar{r} \cdot \bar{s}^o}{r^3} = -\frac{m}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (7.100)$$

Такая комбинация источника и стока называется диполем, величина m – моментом диполя, а ось, проходящая через точки N и N_1 – осью диполя.

Совместив ось диполя с одной из координатных осей, легко показать, что и функция φ , определяемая равенством (7.100), является гармонической.

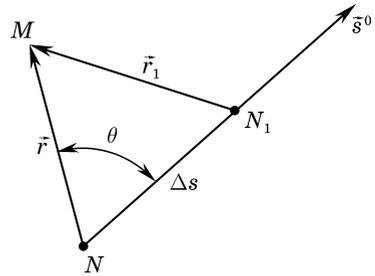


Рис. 7.6

§9. Обтекание сферы

Рассмотрим движение сферы в бесконечной несжимаемой идеальной жидкости. Предположим, что в бесконечности жидкость покоится. Вблизи сферы будет существовать некоторая возмущенная область. Если движе-

ния сферы и жидкости возникли непрерывным образом из состояния покоя, то, как это следует из теоремы Томсона, движение жидкости будет потенциальным.

Составим условия для определения потенциала этого движения. В соответствии с равенством (7.94) внутри жидкости $\Delta\varphi = 0$. Так как жидкость на бесконечности покоится, там $\nabla\varphi = 0$. На поверхности сферы из условия непротекания жидкости (4.20) имеем $v_n = u_n$, где u_n – нормальная составляющая скорости сферы u в точках ее поверхности. Так как $\vec{v} = \nabla\varphi$,

то это условие приобретает вид $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = u_n$.

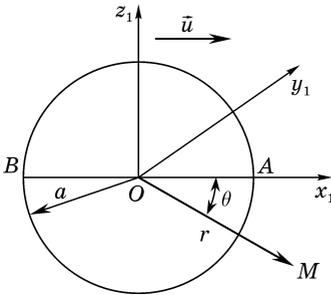


Рис. 7.7

Таким образом, задача об отыскании потенциала скоростей при обтекании сферы свелась к решению уравнения Лапласа, когда на границе задана нормальная производная. Эта задача представляет собой классическую задачу Неймана.

Пусть сфера радиуса a движется поступательно со скоростью U . Введем систему координат $Ox_1y_1z_1$, жестко связанную со сферой, и направим ось Ox_1 параллельно скорости U (рис. 7.7).

Возьмем диполь с осью, параллельной оси Ox_1 , и поместим его в начало координат.

Из формулы (7.100) имеем*

$$\varphi = -\frac{m \cos \theta}{4\pi r^2}. \quad (7.101)$$

В любой точке пространства M

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{m \cos \theta}{2\pi r^3},$$

и при $\theta = 0$ (рис. 7.7) в точке A сферы

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U = \frac{m}{2\pi a^3},$$

* Формула (7.101) имеет место и в неподвижной системе координат в момент времени, когда центр сферы находится в ее начале. В любой другой момент времени t_0 в неподвижной системе координат

$$\varphi = -\frac{m \cos \theta}{4\pi (r - r_0)^2},$$

где r_0 – координата центра сферы при $t = t_0$.

откуда

$$\varphi = -\frac{Ua^3 \cos \theta}{2r^2} = -\frac{Ua^3 x_1}{2r^3}. \quad (7.102)$$

Легко проверить, что потенциал φ , определяемый формулой (7.102), отвечает всем поставленным условиям.

Придадим всей системе скорость, противоположную скорости сферы, то есть скорость $-U$. Это движение имеет потенциал $-Ux_1$. Потенциал относительного движения (сфера покоится, а жидкость на нее набегаёт со скоростью $-U$) получим, сложив потенциалы абсолютного и переносного движений. Тогда

$$\varphi_{\text{отн}} = -\frac{Ua^3 x_1}{2r^3} - Ux_1 = -\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right)Ux_1 = -U\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right)\cos \theta. \quad (7.103)$$

Из формулы (7.103) следует, что нормальная составляющая скорости жидкости v_n на поверхности сферы равна*

$$v_n = -\left(\frac{\partial \varphi_{\text{отн}}}{\partial r}\right)_{r=a} = 0,$$

то есть неподвижная сфера является поверхностью тока. Поэтому скорость жидкости v_s , направленная по касательной к ней, есть полная величина скорости, и

$$v = v_s = \frac{\partial \varphi_{\text{отн}}}{\partial s} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \varphi_{\text{отн}}}{r \partial \theta} \Big|_{r=a} = \frac{3}{2}U \sin \theta. \quad (7.104)$$

Как видно из формулы (7.104), в точках A и B (рис. 7.7) $v = 0$, а при $\theta = \frac{\pi}{2}$ (на экваторе) $v = \frac{3}{2}U$. Следовательно, на экваторе скорость обтекания сферы на 50% больше скорости набегающего потока.

При установившемся движении, пренебрегая массовыми силами, из интеграла Бернулли (7.28) имеем

$$p = p_0 + \rho \frac{U^2 - v^2}{2}, \quad (7.105)$$

где p_0, U – давление и скорость на бесконечности. Подставив в формулу (7.105) значение скорости на экваторе, получим

$$p = p_0 - \frac{5}{8}\rho U^2.$$

* На поверхности сферы внешняя нормаль к жидкости и радиус сферы направлены в противоположные стороны.

Так как скорости распределены симметрично относительно экватора, следовательно, и давления также распределены симметрично, то сопротивление движению сферы и подъемная сила равны нулю. Этот результат представляет собой частный случай парадокса Даламбера (см. ниже).

Хотя теория потенциальных непрерывных движений идеальной жидкости и приводит к парадоксу Даламбера, благодаря ей можно вычислять распределения скоростей для хорошо обтекаемых тел, близкие к действительности, что позволяет вычислять и силы трения с использованием теории пограничного слоя, в котором проявляются силы вязкого трения (см. гл. XIV).

Придем к рассмотрению неустановившегося движения сферы. Пусть сфера радиуса a движется поступательно со скоростью $U = U(t)$ параллельно оси Ox . В подвижной системе координат, связанной со сферой, потенциал течения имеет вид (7.102). Интеграл Коши–Лагранжа (7.69) в предположении, что жидкость несжимаема и что массовыми силами можно пренебречь, в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} U + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} = \text{const}, \quad (7.106)$$

так как на бесконечности жидкость покоится, давление равно p_0 (φ_1 – потенциал в подвижной системе координат).

Из формулы (7.102) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{Ua^3}{2} \frac{r^2 - 3x_1^2}{r^5}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{3Ua^3}{2} \frac{x_1 y_1}{r^5}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \frac{3Ua^3}{2} \frac{x_1 z_1}{r^5}.$$

Следовательно, в точках M и M_1 , симметрично расположенных относительно плоскости $y_1 0 z_1$ (рис. 7.8),

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_M = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_{M_1}, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)_M = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \right)_{M_1}, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \right)_M = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \right)_{M_1}, \quad (7.107)$$

поэтому

$$v_M^2 = v_{M_1}^2, \quad \left(U \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_M = \left(U \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_{M_1}. \quad (7.108)$$

На сферу при ее движении будет действовать гидродинамическая сила

$$\vec{R} = - \int_{\sigma} p \vec{n} d\sigma, \quad (7.109)$$

где σ – поверхность сферы. Площадь элементарного шарового пояса

$$d\sigma = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta, \quad (7.110)$$

$$\int_{\sigma} p_0 \cos \theta d\sigma = 2\pi a^2 p_0 \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0. \quad (7.111)$$

Проектируя равенство (7.109) на ось Ox , с учетом формул (7.109) и (7.111) получим

$$R_x = -2\pi a^2 \int_0^{\pi} (p - p_0) \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (7.112)$$

Подставив в соотношение (7.108) разность $(p - p_0)$ из интеграла Коши–Лагранжа (7.106), с учетом равенств (7.107) и (7.108) имеем

$$R_x = -2\pi a^2 \rho \int_0^{\pi} \left(-\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right) \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad (7.113)$$

где при вычислении интеграла необходимо принять $r = a$, так как p – давление в точках сферы.

Из формулы для потенциала в подвижной системе координат (7.98) при $r = a$, $x_1 = r \cos \theta$ имеем

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -\frac{a}{2} \frac{dU}{dt} \cos \theta.$$

Подставив это соотношение в формулу (7.109), получаем

$$R_x = -\pi a^3 \rho \frac{dU}{dt} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = -\frac{3}{2} \pi a^3 \rho \frac{dU}{dt}.$$

Если $\frac{dU}{dt} > 0$, то сила сопротивления R_x отрицательна, то есть препятствует увеличению скорости U . При $\frac{dU}{dt} < 0$ сила R_x мешает торможению. Идеальная жидкость как бы повышает инертность тела.

Действительно, в идеальной жидкости уравнение движения шара может быть записано в виде

$$m \frac{dU}{dt} = F^{(e)} - \frac{2\pi}{3} \rho a^3 \frac{dU}{dt}, \quad \text{или} \quad \left(m + \frac{2\pi}{3} \rho a^3 \right) \frac{dU}{dt} = F^{(e)},$$

а в пустоте

$$m \frac{dU}{dt} = F^{(e)}.$$

Величина $\frac{2\pi}{3}\rho a^3$ называется присоединенной массой и для шара равна половине массы жидкости в его объеме.

При движении тела в вязкой жидкости задачу в общем случае уже нельзя свести к расчету присоединенных масс. Однако при движении хорошо обтекаемых тел с большими скоростями свойством вязкости можно пренебречь, и эффект действия переменной скорости будет в первом приближении таким же, как и в идеальной жидкости.

§9. Некоторые примеры применения закона об изменении количества движения

1. Рассмотрим плоскую неподвижную стенку, на которую направлена струя (рис. 7.9). Будем считать, что движение установившееся и массовыми силами можно пренебречь. В этих предположениях закон об изменении количества движения (2.51) имеет вид

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{v} v_n d\Sigma = \int_{\Sigma} \vec{p}_n d\Sigma, \quad (7.114)$$

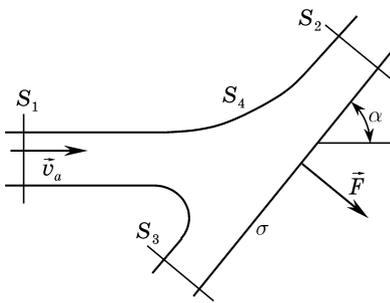


Рис. 7.9

где Σ – замкнутая поверхность, ограниченная сечениями S_1, S_2, S_3 , поверхностью струи S_4 и поверхностью стенки σ .

Примем также, что давление на поверхности струи S_3 постоянно: $p = p_0 = \text{const}$, и что скорость в сечениях S_1, S_2, S_3 распределена равномерно. Из этих соображений в соответствии с интегралом Бернулли следует, что скорость на поверхности струи постоянна, а из уравнений Эйлера – что давление в сечениях S_1, S_2, S_3 тоже постоянно и равно $p = p_0$.

Так как для несжимаемой идеальной жидкости $\rho = \text{const}$, $\vec{p}_n = -p\vec{n}$, где \vec{n} – нормаль к Σ , то равенство (7.114) можно переписать в виде

$$\rho \int_{\Sigma} \vec{v} v_n d\Sigma = - \int_{\Sigma} (p - p_0) \vec{n} d\Sigma, \quad (7.115)$$

поскольку для замкнутой поверхности Σ в соответствии с теоремой Гаусса-Остроградского

$$\int_{\Sigma} p_0 \vec{n} d\Sigma = 0.$$

Так как $p \neq p_0$ только в точках поверхности σ , то из равенства (7.115) имеем

$$\rho \int_{\Sigma} \vec{v} v_n d\Sigma = - \int_{\sigma} (p - p_0) \vec{n} d\sigma = -\vec{F} = -F\vec{n}, \quad (7.116)$$

где \vec{F} – сила, с которой струя действует на стенку. Благодаря тому, что жидкость идеальная, эта сила перпендикулярна стенке.

Спроектируем равенство (7.116) на ось $0x$, перпендикулярную стенке. При этом учтем, что на S_4 и σ $v_n = 0$, на S_2 и S_3 $v_x = 0$, а на S_1 $v_n = -v_0 = \text{const}$, $v_x = v_0 \sin \alpha$, где α – угол между стенкой и направлением струи. Тогда

$$F = \rho \int_{S_1} v_0^2 \sin \alpha dS = \rho v_0^2 S \sin \alpha.$$

Так как сила \vec{F} возникает из-за изменения количества движения струи, то есть из-за поворота вектора скорости, то сечения S_2, S_3 надо выбирать там, где поверхность струи и, следовательно, ее скорость станут параллельными стенке.

2. Рассмотрим расположенный горизонтально участок трубы, изогнутой под 90° (колено), по которому течет жидкость (газ) (рис. 7.10). Будем считать, что движение установившееся, и воспользуемся законом об изменении количества движения (2.58) в виде

$$Q_m (\vec{v}_2^{(cp)} - \vec{v}_1^{(cp)}) = \vec{G} + \vec{P} + \vec{R}, \quad (7.117)$$

где $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ – сила, с которой колено действует на жидкость.

Полагая $\vec{p}_n = -p\vec{n}$ и проектируя равенство (7.117) на оси Ox и Oy , с учетом формулы (2.54) получим

$$\begin{aligned} Q_m (v_{2x}^{(cp)} - v_{1x}^{(cp)}) &= P_x + R_x = -p_2 S_2 + R_x, \\ Q_m (v_{2y}^{(cp)} - v_{1y}^{(cp)}) &= P_y + R_y = -p_1 S_1 + R_y. \end{aligned} \quad (7.118)$$

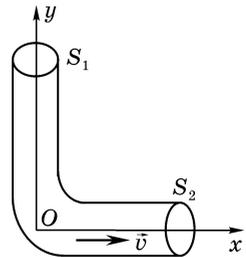


Рис. 7.10

В сечении S_1 $v_{1x}^{(cp)}=0$, $v_{1y}^{(cp)}=-v_1^{(cp)}$. В сечении S_2 $v_{2x}^{(cp)}=v_2^{(cp)}$, $v_{2y}^{(cp)}=0$, и соотношения (7.118) принимают вид

$$\begin{aligned} F_x &= -R_x = -Q_m v_2^{(cp)} - p_2 S_2, \\ F_y &= -R_y = -Q_m v_1^{(cp)} - p_1 S_1, \end{aligned}$$

где F_x, F_y – компоненты силы, с которой жидкость действует на колено.

Заметим, что из-за наличия члена \vec{T} полученный вывод будет справедливым и для вязкой среды.

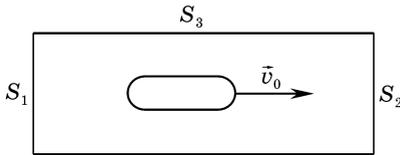


Рис. 7.11

3. Рассмотрим бесконечно длинную трубу, заполненную идеальной жидкостью, и пусть в ней движется какое-либо тело с постоянной скоростью \vec{v}_0 (рис.7.11). Примем гипотезу, что далеко впереди тела и далеко за ним жидкость не возмущена, то есть ее скорость равна нулю.

Обратим задачу, сообщив всей системе скорость $-\vec{v}_0$. Тогда тело окажется неподвижным, скорость на бесконечности перед и за телом будет равна $-\vec{v}_0$, а течение установившимся.

Из-за закона об изменении количества движения (2.44), пренебрегая массовыми силами, имеем

$$\int_S \rho \vec{v} v_n dS = \int_S \vec{p}_n dS. \quad (7.119)$$

Рассматриваемое тело находится внутри трубки тока, ограниченной сечениями S_1 и S_2 , причем $S_1 = S_2$, и боковой поверхности S_3 . Поэтому замкнутая поверхность S , ограничивающая жидкость, такова: $S = S_1 + S_2 + S_3 + \sigma$, где σ – поверхность тела.

Рассмотрим распределение нормальной составляющей скорости v_n по поверхности S . На S_3 $v_n = 0$, по определению трубки тока. На σ $v_n = 0$ из условия непроницаемости поверхности тела. В сечении S_1 далеко перед телом $v_n = v_0$, в сечении S_2 далеко за телом $v_n = -v_0$. Кроме того, в сечениях S_1 и S_2 $\vec{v} = -\vec{v}_0$.

Тогда

$$\int_S \rho \vec{v} v_n dS = - \int_{S_1} \rho \vec{v}_0 v_0 dS + \int_{S_2} \rho \vec{v}_0 v_0 dS. \quad (7.120)$$

Так как жидкость, по условию, идеальная, то $\vec{p}_n = -p\vec{n}$, и

$$\int_S \vec{p}_n dS = - \int_{S_1} p\vec{n} dS - \int_{S_2} p\vec{n} dS - \int_{S_3} p\vec{n} dS - \vec{R}, \quad (7.121)$$

где

$$\vec{R} = \int_{\sigma} p\vec{n} d\sigma$$

– сила, с которой поток действует на тело.

Будем считать, что жидкость либо несжимаема, либо процесс адиабатический. Так как скорости в сечениях S_1 и S_2 равны по величине, то из интеграла Бернулли (7.28), или (7.46) и (7.47), следует, что $p_1 = p_2 = p_0$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$, а p_1, p_2, ρ_1, ρ_2 – давления и плотности в сечениях S_1 и S_2 . При этих условиях из равенства (7.120) имеем

$$\int_S \rho \vec{v} v_n dS = 0,$$

и из соотношений (7.119) и (7.121) получаем

$$\vec{R} = \int_{S_3} p\vec{n} dS, \quad (7.122)$$

так как $S_1 = S_2$, а нормали на этих поверхностях направлены в противоположные стороны.

Нормаль на поверхности S_3 перпендикулярна направлению скорости \vec{v}_0 . Поэтому, проектируя равенство (7.122) на направление скорости, получаем

$$R = 0.$$

Итак, если в идеальной жидкости, не имеющей свободной поверхности, движется с постоянной скоростью тело произвольной формы, жидкость несжимаема или процесс адиабатический, а движение жидкости непрерывно, при этом на бесконечности перед и за телом жидкость не возмущена, то сопротивление движению тела равно нулю. Это утверждение представляет собой парадокс Даламбера.

Этот парадокс возник благодаря предположению, что далеко перед телом и далеко за ним жидкость покоится, жидкость идеальна и течение жидкости непрерывно. Реально эти условия не соблюдаются, и парадокс Даламбера не наблюдается.

Глава VIII

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

§1. Комплексный потенциал течения

Течение, при котором все его характеристики одинаковы в параллельных плоскостях, то есть зависят только от двух координат и времени, называется плоскопараллельным. Такое течение обычно рассматривается в плоскости xOy . Каждая линия, проведенная в этой плоскости, в действительности является направляющей цилиндрической поверхности с образующей, перпендикулярной к плоскости xOy . Все величины расходов жидкости, сил, приложенных к телам, относятся к единице высоты соответствующих цилиндрических поверхностей.

Рассмотрим плоскопараллельное течение несжимаемой жидкости. Из уравнения неразрывности (2.25) имеем

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (8.1)$$

Положим

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (8.2)$$

Функция $\psi = \psi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению неразрывности (8.1), и*

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = v_x dy - v_y dx. \quad (8.3)$$

Функция $\psi = \psi(x, y, t)$ называется функцией тока. Из равенства (8.3) при $d\psi = 0$ имеем

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}. \quad (8.4)$$

Соотношение (8.4), как это видно из формул (1.22), представляет собой уравнение линий тока, на которых $\psi = \text{const}$.

* Время t рассматривается как параметр.

Рассмотрим линии тока $\psi(x, y) = \psi_0$ и $\psi(x, y) = \psi_1$ (рис. 8.1). Расход Q через линию S равен

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_S [v_x \cos(n, x) dx + v_y \cos(n, y)] dS.$$

Так как $\cos(n, x) = \frac{dy}{dS}$, $\cos(n, y) = -\frac{dx}{dS}$, то в соответствии с формулой (8.3)

$$Q = \int_S v_y dx - v_x dy = \int_S d\psi = \psi_1 - \psi_0, \tag{8.5}$$

то есть разность $\psi_1 - \psi_0$ представляет собой расход жидкости между линиями тока $\psi_0 = \text{const}$ и $\psi_1 = \text{const}$.

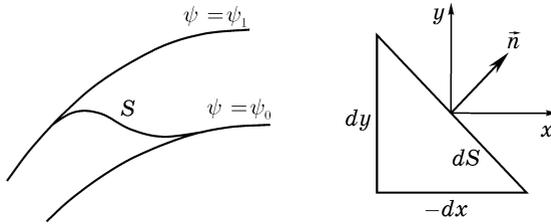


Рис. 8.1

При потенциальном течении

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{8.6}$$

Из формул (8.2) и (8.6) следует, что при потенциальном течении

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{8.7}$$

Соотношения (8.7) представляют собой условия Коши–Римана, при выполнении которых функция комплексного переменного z

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy \tag{8.8}$$

является аналитической. Функция $W(z)$ называется комплексным потенциалом.

Из уравнения неразрывности (8.1), соотношений (8.6) и условий Коши–Римана (8.7) следует, что $\Delta \varphi = 0$, $\Delta \psi = 0$, то есть и потенциал скоростей, и функция тока являются гармоническими функциями.

Соотношения

$$\varphi(x, y) = \text{const}, \quad \psi(x, y) = \text{const}$$

представляют собой, соответственно, уравнения семейств эквипотенциалей и линий тока. Из формул (8.2) и (8.6) имеем

$$\nabla\varphi\nabla\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = -v_x v_y + v_y v_x \equiv 0,$$

то есть векторы $\nabla\varphi$ и $\nabla\psi$ взаимно перпендикулярны. Следовательно, линии тока и эквипотенциали образуют семейство взаимно ортогональных линий.

Дифференцируя комплексный потенциал (8.7) и учитывая формулы (8.2) и (8.7), получим

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_x - iv_y = ve^{-i\theta}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad (8.9)$$

откуда

$$\left|\frac{dW}{dz}\right| = v, \quad \arg\frac{dW}{dz} = -\theta, \quad (8.10)$$

где θ – угол между направлением скорости и осью Ox .

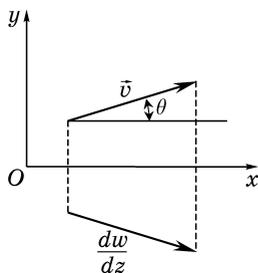


Рис. 8.2

Таким образом, модуль производной комплексного потенциала равен величине скорости, а аргумент – аргументу скорости, взятому с обратным знаком. Иначе говоря, производная комплексного потенциала есть величина, комплексно-сопряженная скорости течения (рис. 8.2).

Итак, для плоскопараллельного потенциального течения можно построить комплексный потенциал, представляющий собой аналитическую функцию. Обратно, всякой аналитической функции соответствует некоторое плоскопараллельное потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости.

Поэтому для исследования таких течений может быть использован весь аппарат теории аналитических функций.

§2. Примеры плоскопараллельных потенциальных течений

Рассмотрим простейшие аналитические функции комплексного переменного и соответствующие им течения.

- $W(z) = (a + ib)z = (a + ib)(x + iy) = \varphi + i\psi, \quad a > 0, \quad b > 0.$

Из равенств (8.8), (8.9) и (8.10) имеем

$$\varphi = ax - by, \quad \psi = bx + ay, \quad \frac{dW}{dz} = a + ib = ve^{-i\theta}, \quad \arg \frac{dW}{dz} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = -\theta, \\ v = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Линии тока $\psi = \text{const}$ и эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ образуют семейство взаимно ортогональных прямых. Комплексный потенциал W описывает поступательное движение со скоростью, направленной под углом $\theta = -\operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ к оси Ox (рис. 8.3).

2. $W(z) = z^2 = (x + iy)^2 = \varphi + i\psi.$

В этом случае

$$\varphi = x^2 - y^2, \quad \psi = 2xy, \quad \frac{dW}{dz} = 2z = 2(x + iy) = ve^{-i\theta}, \\ \arg \frac{dW}{dz} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -\theta, \quad v = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Линии тока $\psi = \text{const}$ – равносторонние гиперболы с асимптотами $x = 0, y = 0$; эквипотенциалы – равносторонние гиперболы с асимптотами $y = x$ и $y = -x$. В начале координат пересекаются линии тока $x = 0$ и $y = 0$, то есть начало координат – особая точка, в которой $v = 0$.

Так как при течении идеальной жидкости линии тока можно заменить твердыми стенками, то комплексный потенциал можно трактовать как обтекание прямого угла (рис. 8.4).

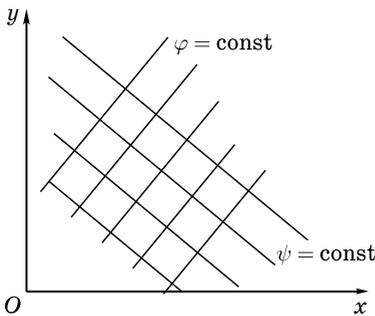


Рис. 8.3

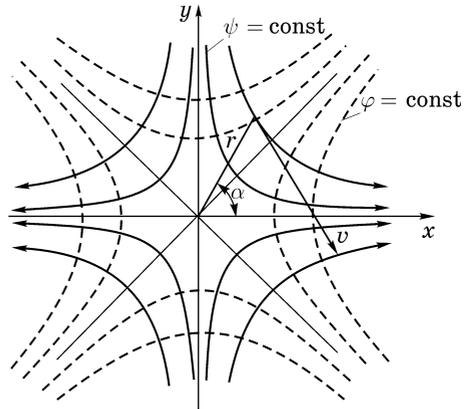


Рис. 8.4

3. $W(z) = z^n$, где n – любое вещественное число. По формуле Муавра

$$z^n = r^n e^{in\alpha} = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha),$$

откуда

$$\varphi = r^n \cos n\alpha, \quad \psi = r^n \sin n\alpha,$$

$$\frac{dW}{dz} = z^{n-1}.$$

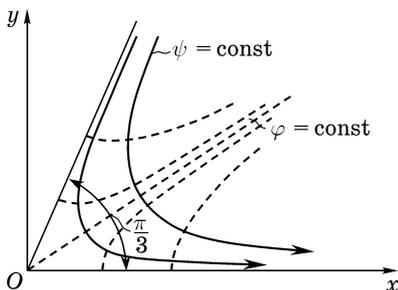


Рис. 8.5

Пусть $\psi = r^n \sin n\alpha = 0$. Так как $r \neq 0$, то $\alpha = \frac{k\pi}{n}$, где k – целое

число, и линии тока представляют собой прямые, проходящие через начало координат, которое является особой точкой. При $\psi = \text{const} \neq 0$ получим линии тока внутри угла α . Это течение (рис. 8.5) можно толковать как обтекание угла $\alpha = \frac{\pi}{n}$. Ри-

сунок 8.5 соответствует случаю $n = 3$.

Течение, соответствующее функции $W(z) = z^n$ можно рассматривать для любых $n \geq \frac{1}{2}$. Если рассматривается течение во всей плоскости, то,

очевидно, должно выполняться условие $\frac{k\pi}{n} = 2\pi$. В противном случае внутри жидкости окажутся точки, в которых скорость многозначна, чего физически быть не может. Такие точки могут существовать только на границе области.

Рассмотрим случай $n = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\frac{\pi}{n} = 2\pi, \quad \frac{dW}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{r}} e^{-i\frac{\alpha}{2}}, \quad \theta = \frac{\alpha}{2}.$$

На оси Ox в точке P_1 (рис. 8.6) $\alpha = 0$, $\theta = 0$, $v = \frac{1}{2\sqrt{r}}$, то есть скорость направлена по оси Ox . При $r \rightarrow 0$ $v \rightarrow \infty$, при $r \rightarrow \infty$ $v \rightarrow 0$. В точке P_2 $\alpha = 2\pi$, $\theta = \pi$ и скорость направлена вдоль оси Ox , но в противоположную сторону. Вдоль оси скорость терпит разрыв – ее модуль со-

храняется, а направление меняется на противоположное. Течение представляет собой обтекание бесконечно тонкой пластины (рис. 8.6).

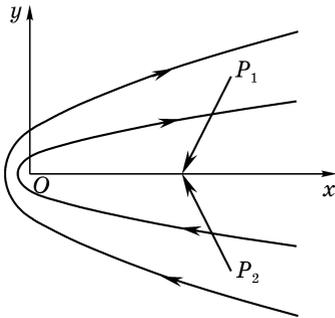


Рис. 8.6

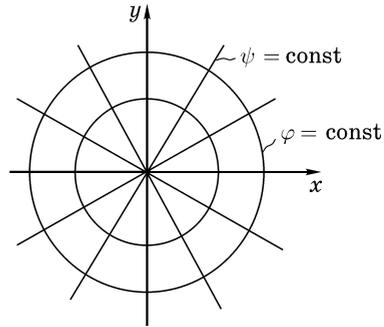


Рис. 8.7

$$4. W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(re^{i\alpha}) = \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\alpha) = \varphi + i\psi.$$

Значит,

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \alpha, \quad \frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi z} = \frac{\Gamma}{2\pi r} e^{-i\alpha}, \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad \theta = \alpha.$$

Линии тока $\psi = \text{const}$ (рис. 8.7) – прямые, проходящие через начало координат, эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ – окружности с центром в начале координат. Начало координат представляет собой особую точку. При $r \rightarrow 0$ $v \rightarrow \infty$, при $r \rightarrow \infty$ $v \rightarrow 0$. Расход через окружность радиуса $r = \text{const}$ (а также через любую замкнутую кривую, охватывающую начало координат) равен $Q = 2\pi r v = \Gamma$. При $\Gamma > 0$ в начале координат имеется источник, при $\Gamma < 0$ – сток.

$$5. W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln re^{i\alpha} = \frac{\Gamma}{2\pi} (\alpha - i \ln r) = \varphi + i\psi.$$

Имеем

$$\varphi = \frac{\Gamma\alpha}{2\pi}, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r, \quad \frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi iz} = \frac{\Gamma}{2\pi r} e^{-i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad \theta = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

Линии тока $\psi = \text{const}$ – окружности с центром в начале координат, эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ – прямые, проходящие через начало координат.

нат. По сравнению с рис. 8.7 линии тока и эквипотенциали поменялись местами*.

Циркуляция вдоль линии тока $r = \text{const}$ равна

$$\int v dr = \int_0^{2\pi} v r d\varphi = 2\pi r \frac{\Gamma}{2\pi r} = \Gamma,$$

то есть в начале координат имеется вихрь с интенсивностью Γ .

$$6. W = \frac{-m^2}{z} = \frac{-m^2 \bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{-m^2(x-iy)}{x^2+y^2} = \varphi + i\psi.$$

В этом случае имеем

$$\varphi = \frac{m^2 x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = -\frac{m^2 y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dW}{dz} = -\frac{m^2}{z^2} = +\frac{m^2}{r^2} e^{-i(2\alpha+\pi)},$$

$$v = \frac{m^2}{r^2}, \quad \theta = 2\alpha + \pi.$$

Полагая $\psi = \frac{1}{2C}$, $\varphi = \frac{1}{2C_1}$, получаем

$$x^2 + y^2 + 2Cm^2 y = 0, \quad x^2 + y^2 - 2C_1 m^2 x = 0.$$

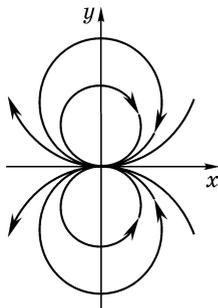


Рис. 8.8

Таким образом, линии тока – окружности с центрами на оси Oy и радиусами $R = |C|m^2$, эквипотенциали – окружности с центрами на оси Ox и радиусами $R_1 = |C_1|m^2$ (рис. 8.8). Ось Ox также является линией тока $\psi = 0$, а ось Oy – эквипотенциалью $\varphi = 0$. В этом примере функция $W = m^2 z^{-1}$ представляет собой комплексный потенциал плоского диполя с осью Ox .

Комбинируя описанные простейшие случаи, можно получить более сложные течения.

* Так как $\frac{1}{i}W(z) = W(z)e^{-\frac{\pi}{2}}$, а линии тока и эквипотенциали взаимно ортогональны, то всегда линии тока для течения $W(z)$ переходят в эквипотенциали для течения $\frac{1}{i}W(z)$, а эквипотенциали – в линии тока.

Рассмотрим комбинацию поступательного движения параллельно оси Ox , диполя и вихря, то есть функцию

$$W = -V\left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z = -V\left(re^{i\alpha} + \frac{R^2}{r}e^{-i\alpha}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}(\ln r + i\alpha). \quad (8.11)$$

Скорость поступательного движения, очевидно, равна $-V$, момент диполя равен $m^2 = -VR^2$, а циркуляция равна Γ .

В соответствии с формулой (8.11) имеем

$$\varphi = -\left(r + \frac{R^2}{r}\right)V \cos \alpha + \frac{\Gamma\alpha}{2\pi}, \quad \psi = -\left(r - \frac{R^2}{r}\right)V \sin \alpha - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r, \quad (8.12)$$

$$\frac{dW}{dz} = -V\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi iz} = -V\left(1 - \frac{R^2}{r^2}e^{-2i\alpha}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}e^{-i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (8.13)$$

Из формулы (8.12) следует, что при $r = R$ $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R = \text{const}$, то есть окружность радиуса R с центром в начале координат является линией тока. Из формулы (8.13) имеем $\left(\frac{dW}{dz}\right)_{z=\infty} = -V$. Итак, комплексный потенциал (8.11) описывает обтекание окружности (цилиндра с осью, перпендикулярной плоскости xOy) потоком, имеющим на бесконечности скорость, равную $-V$ (рис. 8.9).

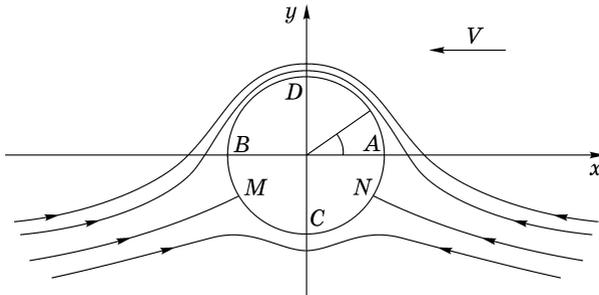


Рис. 8.9

В соответствии с формулой (8.13), квадрат скорости v в точках окружности $r = R$ равен

$$v^2 = \left(\frac{dW}{dz} \frac{d\bar{W}}{d\bar{z}}\right)_{r=R} = \left(2V \sin \alpha + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2.$$

Так как скорость, вызванная циркуляцией $\left(\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, направлена против часовой стрелки, то в верхней полуплоскости

$$v = -2V \sin \alpha - \frac{\Gamma}{2\pi R}, \quad (\alpha < \pi), \quad (8.14)$$

а в нижней –

$$v = 2V \sin \alpha + \frac{\Gamma}{2\pi R}, \quad (\alpha > \pi), \quad (8.15)$$

При безциркуляционном обтекании скорость в точках $A(\alpha = 0)$ и $B(\alpha = \pi)$ равна нулю, и эти точки – особые. При $\Gamma \neq 0$ скорость в этих точках отлична от нуля. Максимальное значение модуля скорости, как это видно из формул (8.14) и (8.15), достигается в точке D и равно $|v| = 2V + \frac{\Gamma}{2\pi R}$.

Положение критических точек M и N , как это следует из формулы (8.14), определяется из условия

$$2V \sin \alpha^* = \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad \text{или} \quad \sin \alpha^* = -\frac{\Gamma}{4\pi VR}, \quad \sin \alpha^* \geq -1. \quad (8.16)$$

При $\Gamma = 4\pi VR$ точки M и N сливаются с точкой C . При дальнейшем росте Γ критическая точка сходит с окружности.

Интеграл Коши–Лагранжа (7.65) при потенциальном течении несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = f(t). \quad (8.17)$$

Если $\Gamma = \Gamma(t)$, то, как это следует из формулы (8.12), в уравнение (8.17) войдет член $\frac{\alpha}{2\pi} \frac{d\Gamma}{dt}$. Следовательно, при $\Gamma = \Gamma(t)$ давление перестает быть однозначной функцией координат (r, α) , что физически невозможно. Поэтому потенциальное обтекание возможно только при $\Gamma = \text{const}$.

При $V = \text{const}$ $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ и давление в потоке вычисляется через его скорость и условия на бесконечности (или любые другие условия, позволяющие определить константу в интеграле Бернулли). Из формул (8.14) и (8.15) видно, что скорости над цилиндром больше, чем под ним. Поэтому давление над цилиндром меньше, чем под ним. Благодаря этому при цир-

куляционном обтекании цилиндра возникает подъемная сила. Сопротивление отсутствует, так как поток симметричен относительно оси Oy .

Таким образом, при циркуляционном обтекании цилиндра модель идеальной жидкости позволяет вычислить подъемную силу (и не только цилиндра), причем, как показывает эксперимент, с достаточно высокой степенью точности.

§3. Конформное отображение потоков

Рассмотрим функцию комплексного переменного $\zeta = F(z)$. С помощью этой функции каждой точке в комплексной плоскости z ставится в соответствие точка в комплексной плоскости ζ . Поэтому функцию $\zeta = F(z)$ можно рассматривать как отображение некоторой области D в плоскости z на некоторую область D_1 в плоскости ζ (рис. 8.10).

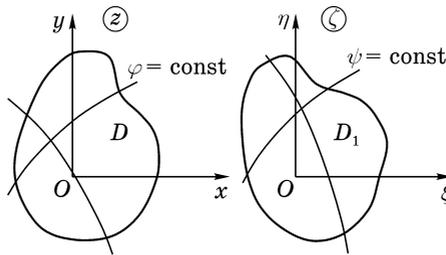


Рис. 8.10

Отображение, при котором сохраняются углы между кривыми в точках их пересечения и бесконечно малые элементы преобразуются подобным образом, называется конформным. Для того, чтобы функция $F(z)$ реализовала конформное отображение области D , необходимо и достаточно, чтобы она была взаимно однозначной, аналитической и чтобы в области D производная $F'(z)$ была отличной от нуля и бесконечности. Важное значение конформных отображений в гидромеханике определяется тем, что если известны комплексные потенциалы каких-либо простейших течений, то можно с помощью этих отображений строить комплексные потенциалы более сложных течений.

Пусть в плоскости z задано течение с комплексным потенциалом $W = W(z)$. Так как при конформном отображении функция $\zeta = \xi + i\eta = F(z)$ должна быть взаимно однозначной, то всегда можно найти функцию

$z = f(\zeta)$. Тогда

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = W(f(\zeta)) = W^*(\zeta) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta). \quad (8.18)$$

Из равенства (8.18) сразу следует, что при $\varphi(x, y) = \text{const}$ имеем $\varphi = \varphi(\xi, \eta) = \text{const}$ и при $\psi(x, y) = \text{const}$ $\psi(\xi, \eta) = \text{const}$. Таким образом, эквипотенциали и линии тока в плоскости z переходят, соответственно, в эквипотенциали и линии тока в плоскости ζ (рис. 8.10).

Рассмотрим выражение

$$W(z) = \int \frac{dW}{dz} dz = \int (v_x - iv_y)(dx + idy) = \int v_x dx + v_y dy + i \int v_x dy - v_y dx. \quad (8.19)$$

В соответствии с формулами (3.39), (8.3), (8.5) и (8.6) имеем

$$\int v_x dx + v_y dy = \int d\varphi = \Gamma, \quad \int v_x dy - v_y dx = \mathcal{Q},$$

то есть действительная часть интеграла (8.19) представляет собой циркуляцию скорости вдоль кривой, а мнимая – расход жидкости через эту кривую и

$$W(z) = \int \frac{dW}{dz} dz = \Gamma + i\mathcal{Q}. \quad (8.20)$$

Выполняя в формуле (8.19) замену переменных $z = f(\zeta)$, имеем

$$W(z) = W[f(\zeta)] = \int \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} dz = \int \frac{dW}{d\zeta} d\zeta = \Gamma + i\mathcal{Q}. \quad (8.21)$$

Из формул (8.20) и (8.21) видно, что циркуляция скорости вдоль какой-либо линии в плоскости z и вдоль соответствующей линии в плоскости ζ совпадают. Это же справедливо и для расхода жидкости через соответствующие линии.

Установим связь между скоростями потоков в соответствующих точках плоскостей z и ζ .

Воспользовавшись формулой (8.9), имеем

$$\frac{dW}{dz} = v_z e^{-i\theta_z} = \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} F'(z), \quad (8.22)$$

где v_z, θ_z – модуль и аргумент скорости в плоскости z . Так как

$$\frac{dW}{d\zeta} = v_\zeta e^{-i\theta_\zeta},$$

то

$$v_z = v_\zeta |F'(z)|, \quad \theta_z = \theta_\zeta - \arg F'(z). \quad (8.23)$$

Формула (8.23) дает связь между скоростями потока в плоскостях z и ζ . Так как, по условию, $F'(z) \neq 0$ и $F'(z) \neq \infty$, то из этого следует, что при конформном преобразовании критические точки переходят в критические точки и никаких новых критических точек возникнуть не может.

Зависимость $W = W(z)$ можно рассматривать как отображение области D в плоскости z на область D^* в плоскости W (рис. 8.11). Так как функция $W(z)$ аналитическая, то всюду, где $\frac{dW}{dz} \neq 0$ и $\frac{dW}{dz} \neq \infty$, это отображение будет конформным. В плоскости W линии тока $\psi = \text{const}$ суть прямые, параллельные оси $O\varphi$, а эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ – прямые, параллельные оси $O\psi$. Следовательно, $W = W(z)$ представляет собой отображение потока в плоскости z на прямолинейное поступательное движение в плоскости W .

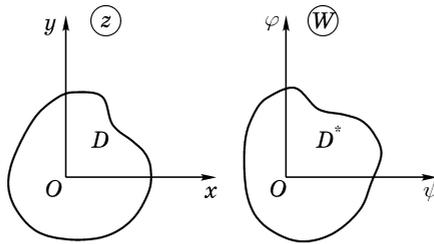


Рис. 8.11

Пусть в плоскости z имеется линия тока $\psi = \text{const}$ с угловыми точками A и B (рис. 8.12) и пусть $W(z)$ – комплексный потенциал этого течения. В плоскости W все линии тока перейдут в прямые линии, то есть в точках A и B конформность нарушается.

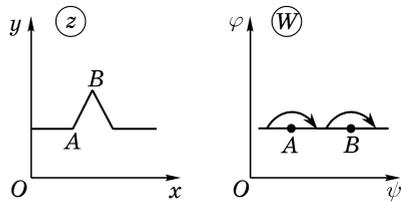


Рис. 8.12

В примере 3 настоящего параграфа было показано, что комплексный потенциал вида

$$W - W_0 = (z - z_0)^n \tag{8.24}$$

описывает обтекание угла $\alpha = \frac{\pi}{n}$ с вершиной в точке $z = z_0$. В точке A $\alpha < \pi$, $n > 1$, а в точке B $\alpha > \pi$, $n < 1$. Тогда из формулы (8.24) следует, что $\frac{dW}{dz} = 0$ при $z = z_A$, $\frac{dW}{dz} = \infty$ при $z = z_B$, то есть при обтекании выдающегося угла $v = 0$, а при обтекании острия $v = \infty$.

Из интеграла Коши–Лагранжа вытекает, что при $v = \infty$ $p = -\infty$ и, следовательно, потенциальное обтекание острия физически невозможно.

§4. Преобразование Жуковского

Рассмотрим комплексный потенциал

$$W = k \left(z + \frac{R^2}{z} \right) = \varphi + i\psi, \quad (8.25)$$

описывающий симметричное обтекание цилиндра радиуса R (рис. 8.13). Область течения – вся плоскость z , внешняя по отношению к цилиндру. Найдем соответствующую ей область в плоскости W .

Линии тока $\psi = \text{const}$ в плоскости W суть прямые. Из формулы (8.25) имеем

$$\varphi = k \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \psi = k \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta.$$

Линии тока $\psi = 0$ в плоскости z соответствуют окружность радиуса R с центром в начале координат и полусегменты $[R \leq x < \infty)$ и $(-\infty < x \leq -R]$.

Точкам A и B с координатами $z_A = -R$, $z_B = R$ (рис. 8.13) в плоскости W соответствуют точки A_1 , B_1 на оси $\psi = 0$ с координатами $\varphi_{A_1} = -2kR$, $\varphi_{B_1} = 2kR$. Для точки C с координатами $z_C = Re^{i\theta}$ на плоскости W имеем

$$\psi = 0, \quad \varphi = 2kR \cos \theta,$$

то есть точка C отображается на плоскости W во внутренность сегмента $[-2kR, 2kR]$.

Итак, функция (8.25) представляет собой отображение плоскости z на плоскость W , при котором внешность цилиндра отображается на внешность отрезка A_1B_1 , а обтекание цилиндра преобразуется в обтекание отрезка A_1B_1 .

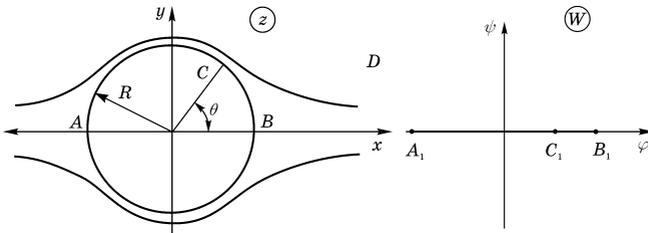


Рис. 8.13

При $z = \pm R$ производная

$$\frac{dW}{dz} = k \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right)$$

обращается в нуль, то есть в точках A и B конформность отображения нарушается. Бесконечно удаленная точка плоскости z переходит в бесконечно удаленную точку плоскости W . Направление скорости в бесконечности сохраняется, так как $\left(\frac{dW}{dz} \right)_{\infty} = k$, а $k > 0$ – действительное число.

Преобразование вида (8.25) называется преобразованием Жуковского*.

Возьмем в плоскости z окружность с центром в начале координат и радиусом $r > R$. Тогда $z = re^{i\theta}$ и в соответствии с формулой (8.25)

$$\varphi = k \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta, \quad \psi = k \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta, \quad (8.26)$$

то есть преобразование Жуковского отображает внешность окружности в плоскости z на внешность эллипса в плоскости W , причем точки A_1 и B_1 суть фокусы этого эллипса.*

Можно показать, что окружности с центром в точке $(x, 0)$ соответствует в плоскости W симметричный крылообразный профиль C – руль Жуковского, окружности с центром в точке $(0, y)$ – дуга окружности, окружности с центром в точке (x, y) – несимметричный крылообразный профиль G – профиль Жуковского (рис. 8.14). Угол у задней кромки профилей Жуковского равен 2π , что и является их отличительной особенностью.

* Николай Егорович Жуковский (1847–1921), один из основоположников современной аэромеханики.

* Формулы (8.26) представляют собой параметрические уравнения эллипса с полуосями

$$a = k \left(r + \frac{R^2}{r} \right), \quad b = k \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \text{ и фокусами в точках } \varphi = \pm 2kR.$$

§5. Обтекание профиля произвольной формы

Пусть в комплексной плоскости ζ задан контур C . Требуется построить его потенциальное обтекание так, чтобы в бесконечности движение было поступательным со скоростью V_ζ , направленной под углом α к оси $O\xi$. Угол α называется углом атаки (рис. 8.15).

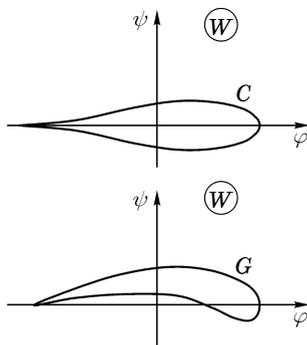


Рис. 8.14

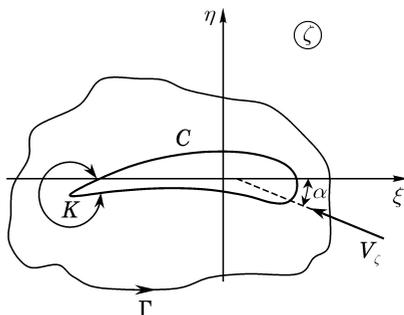


Рис. 8.15

Для решения поставленной задачи необходимо найти комплексный потенциал $W(\zeta) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$. Рассмотрим наряду с плоскостью ζ плоскость комплексного переменного z и возьмем в плоскости z окружность радиуса R (рис. 8.16). Определим функцию $\zeta = F(z)$, дающую отображение внешности окружности S на внешность профиля C так, чтобы точке $z = \infty$ соответствовала точка $\zeta = \infty$ и чтобы производная $\left(\frac{ds}{dz}\right)_\infty = k$ была вещественной и положительной. При этих условиях функция $\zeta = F(z)$ существует для всякого контура C и определяется единственным образом.

Будем считать, что функция $\zeta = F(z)$ известна. Так как контур C представляет собой линию тока, то окружность S – также линия тока. В соответствии с формулами (8.20) и (8.21) циркуляция Γ в плоскостях z и ζ имеет одно и то же значение.

Из формул (8.22) и (8.23) имеем

$$\left|\frac{dW}{dz}\right|_\infty = \left|\frac{dW}{d\zeta}\right|_\infty \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_\infty = k \left|\frac{dW}{d\zeta}\right|_\infty, \quad V_z = kV_\zeta,$$

а так как k , по условию, вещественно и $k > 0$, то

$$\arg\left(\frac{dW}{dz}\right)_\infty = \arg\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)_\infty.$$

Следовательно, на бесконечности скорость V_z составляет с осью Ox тот же угол α .

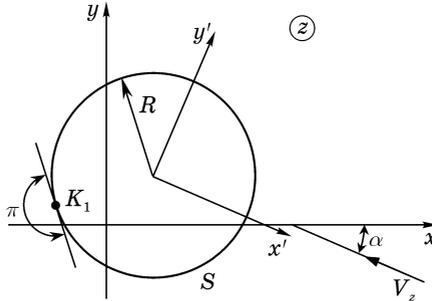


Рис. 8.16

Выберем систему координат $x'Oy'$ таким образом, чтобы ее начало совпадало с центром окружности S , а ось Ox' была параллельна скорости V_z . Тогда в соответствии с формулой (8.11) для циркуляционного обтекания окружности S имеем

$$W(z') = -V_z \left(z' + \frac{R^2}{z'} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z'.$$

Функция $W(z')$ описывает обтекание в системе координат $x'Oy'$. Переходя от z' к z путем поворота системы координат на угол α , получим комплексный потенциал $W(z)$.

Так как функция $\zeta = F(z)$ взаимно однозначная, то можно найти функцию $z = f(\zeta)$ и

$$W(z) = W(f(\zeta)) = W^*(\zeta),$$

то есть, зная комплексный потенциал $W(z)$ и функцию $\zeta = F(z)$, можно построить комплексный потенциал обтекания контура C .

Предположим, что обтекаемый контур C имеет угловую точку K (рис. 8.15). Этой точке на окружности S соответствует точка K_1 (рис. 8.16). Так как угол в точке K_1 равен π , а в точке K больше π , то конформность отображения в точке K нарушается, и в этой точке $\zeta' = F'(z) = 0$.

Модуль скорости в любой точке профиля C в соответствии с формулой (8.22) равен

$$\left| \frac{dW}{d\zeta} \right| = \left| \frac{dW}{dz} \right| \cdot \frac{1}{|F'(z)|},$$

откуда видно, что при $\frac{dW}{dz} \neq 0$ скорость в точке K обращается в бесконечность. Выше было показано, что это характерно для обтекания выступа и что это физически невозможно. Следовательно, в точке K_1 должно выполняться условие $\frac{dW}{dz} = 0$, то есть точка K_1 должна быть критической.

Выбором величины циркуляции Γ можно добиться того, чтобы любая точка окружности S была критической, а также, чтобы в ней выполнялось условие $\frac{dW}{dz} = 0$. Тогда скорость в точке K будет иметь конечное значение. Это требование было сформулировано в постулате Чаплыгина–Жуковского: циркуляция должна быть определена таким образом, чтобы в угловой точке K скорость имела конечное значение.

Из формулы (8.16) видно, что при циркуляционном обтекании окружности критические точки расположены так, что их стягивающая хорда параллельна V_z (рис. 8.17) и

$$\Gamma = 4\pi R V_z |\sin \alpha^*| = 4\pi R V_k (\sin(\alpha + \gamma)). \quad (8.27)$$

Величины k, R, γ представляют собой константы, определяемые выбранной окружностью и конформным отображением. Угол атаки α и скорость на бесконечности V_z могут задаваться произвольным образом*, а циркуляция Γ определяется по формуле (8.27).

§6. Силы, действующие на профиль при стационарном обтекании

Пусть в плоскости z имеется некоторый контур C (рис. 8.18), обтекаемый потоком жидкости, причем комплексный потенциал течения $W(z) = \varphi + i\psi$ известен, действующее на контур C давление в соответствии с интегралом Бернулли (7.28) равно (массовыми силами пренебрегаем)

$$p = p_0 - \rho \frac{v^2}{2},$$

где p_0 – давление при $v = 0$.

* Для каждого профиля имеется предельное значение угла атаки, при превышении которого происходит срыв обтекания. Поэтому угол атаки можно задавать непревышающим этот предел.

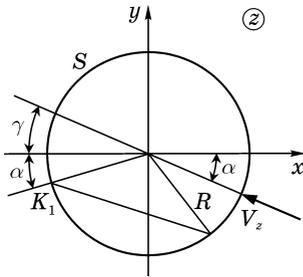


Рис. 8.17

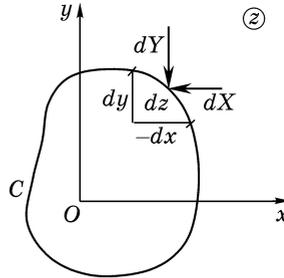


Рис. 8.18

Так как

$$v^2 = (v_x - iv_y)(v_x + iv_y) = \frac{dW}{dz} \overline{\frac{dW}{dz}},$$

то

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2} \frac{dW}{dz} \overline{\frac{dW}{dz}}. \tag{8.28}$$

На элемент контура dz действует элементарная сила с проекциями

$$dX = -p dy, \quad dY = p dx$$

(обход контура C происходит против часовой стрелки, а давление направлено внутрь контура). Тогда с учетом формулы (8.28) будем иметь

$$dX - idY = -ip(dx - idy) = -ipd\bar{z} = -i \left(p_0 - \frac{\rho}{2} \frac{dW}{dz} \overline{\frac{dW}{dz}} \right) d\bar{z}. \tag{8.29}$$

Интегрируя соотношение (8.29) по замкнутому контуру C , получим

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{dW}{dz} \overline{\frac{dW}{dz}} d\bar{z}. \tag{8.30}$$

Для преобразования формулы (8.30) заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{W}}{dz} d\bar{z} &= v_x dx + v_y dy + i(v_y dx - v_x dy), \\ \frac{dW}{dz} dz &= v_x dx + v_y dy - i(v_y dx - v_x dy). \end{aligned}$$

Обтекаемый контур C представляет собой линию тока, а вдоль линии тока, как известно, $v_x dy - v_y dx = 0$. Поэтому вдоль контура C

$$\frac{d\overline{W}}{dz} d\bar{z} = \frac{dW}{dz} dz, \tag{8.31}$$

и формулу (8.30) можно представить в виде

$$X - iY = i \frac{\rho}{2} \int_C \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz. \quad (8.32)$$

Выражение (8.32) представляет собой первую формулу Чаплыгина*.

Элементарный момент силы относительно начала координат (рис. 8.18) дается выражением

$$dM = x dY - y dX = \operatorname{Re} iz (dX - idY),$$

откуда с учетом равенства (8.29) и (8.31) после интегрирования по замкнутому контуру C получаем вторую формулу Чаплыгина

$$M = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int_C z \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz. \quad (8.33)$$

Для вычисления интегралов в формулах (8.32) и (8.33) заметим, что функция $\frac{dW}{dz}$ вблизи бесконечно удаленной точки представляет собой однозначную аналитическую функцию. Поэтому она может быть разложена в ряд Лорана, а так как при $z = \infty$ она имеет конечное значение, то это разложение имеет вид

$$\frac{dW}{dz} = C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \dots \quad (8.34)$$

Полагая в формуле (8.34) $z = \infty$, получим

$$\left(\frac{dW}{dz} \right)_{z=\infty} = C_0.$$

С другой стороны, в соответствии с формулой (8.9)

$$\left(\frac{dW}{dz} \right)_{z=\infty} = V_z e^{-i\theta},$$

где V_z – модуль скорости потока в бесконечности, следовательно,

$$C_0 = V_z e^{-i\theta}. \quad (8.35)$$

Так как в соответствии с теоремой о вычетах интегралы по замкнутому контуру равны

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i, \quad \int_C \frac{dz}{z^n} = 0, \quad n > 1,$$

* Сергей Алексеевич Чаплыгин (1869–1942), один из основоположников аэромеханики. Действительный член АН СССР.

то из формул (8.34) и (8.20) имеем

$$\int_C \frac{dW}{dz} dz = 2\pi i C_1 = \Gamma + iQ.$$

Расход несжимаемой жидкости через замкнутый контур при отсутствии источников равен нулю, и, следовательно,

$$C_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}. \quad (8.36)$$

Возводя равенство (8.34) в квадрат, получим

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = C_0^2 + 2\frac{C_0 C_1}{z} + (C_1^2 + 2C_0 C_2)\frac{1}{z^2} + \dots,$$

или, учитывая формулы (8.35) и (8.36),

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 = V_z^2 e^{-2i\theta} + \frac{\Gamma}{\pi i z} V_z e^{-i\theta} + \left(-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + V_z C_2 e^{-i\theta}\right)\frac{1}{z^2} + \dots \quad (8.37)$$

Подставив выражение (8.37) в формулу (8.32), после интегрирования по замкнутому контуру C имеем

$$X - iY = i\rho\Gamma V_z e^{-i\theta},$$

или

$$X + iY = -i\rho\Gamma V_z e^{i\theta} = -\rho\Gamma V_z e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (8.38)$$

Равенство (8.38) выражает собой теорему Жуковского: равнодействующая сил давления равна произведению плотности ρ , циркуляции Γ и скорости набегающего потока V_z и направлена под прямым углом к этой скорости. Поэтому величина

$$P = |X + iY| = \rho\Gamma V_z \quad (8.39)$$

называется подъемной силой.

При безотрывном обтекании циркуляция в формулах (8.38) и (8.39) определяется из соотношения (8.27).

Подставив ряд (8.37) в формулу (8.33), после соответствующих преобразований получаем

$$M = 2\pi\rho \operatorname{Re}(iC_2 V_z e^{-i\theta}), \quad (8.40)$$

то есть получаем формулу для определения момента подъемной силы относительно начала координат.

Из формул (8.38) и (8.40) видно, что для вычисления подъемной силы и ее момента достаточно знать V_z , Γ и C_2 , то есть достаточно знать первые три члена разложения (8.34).

Заметим, что при циркуляционном обтекании контура, то есть при $\Gamma \neq 0$, модель идеальной жидкости позволяет вычислить величину подъемной силы, и результаты расчета достаточно хорошо согласуются с экспериментом. При $\Gamma = 0$ и $P = 0$ – имеет место парадокс Даламбера.

Глава IX

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО ПРИЗМАТИЧЕСКИМ ТРУБАМ

Давно известно, что существуют две формы (два режима) течения жидкости. Первые фундаментальные исследования в этой области были опубликованы немецким ученым Г. Гагеном в 1839 и 1854 гг. Им было показано, что при течении воды в трубах существует режим, при котором частицы жидкости движутся параллельно стенкам трубы, то есть жидкость движется несмешивающимися слоями. Для другого режима характерно перемешивание частиц жидкости в направлении, поперечном по отношению к оси трубы. Впоследствии указанные режимы течения были названы, соответственно, ламинарным и турбулентным.

Ламинарным течением называется течение, при котором траектории частиц жидкости представляют собой плавные кривые. Вид этих кривых определяется геометрией области течения. В частности, при течении по призматическим трубам траектории представляют собой прямые линии, параллельные образующим трубы. Из сказанного следует, что при ламинарном течении жидкости по призматическим трубам вектор скорости должен быть направлен параллельно оси трубы.

Условие существования ламинарного режима течения было установлено Осборном Рейнольдсом в 1883 г. Ламинарный режим имеет место, если число Рейнольдса Re удовлетворяет условию

$$Re = \frac{\rho w l}{\mu} < Re_{кр},$$

где w – характерная скорость течения, l – характерный размер, μ – динамический коэффициент вязкости жидкости, $Re_{кр}$ – критическое число Рейнольдса. Численное значение $Re_{кр}$ существенно зависит от геометрии области течения.

§1. Уравнения прямолинейного движения вязкой несжимаемой жидкости по призматическим трубам

Уравнения изотермического движения вязкой несжимаемой жидкости в общем случае имеют вид (4.42), или

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \Delta \vec{v}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (9.1)$$

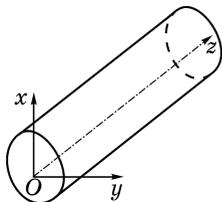


Рис. 9.1

Введем систему координат $Oxyz$ и направим ось Oz по оси рассматриваемой призматической трубы (рис. 9.1). Будем считать, что вектор скорости течения направлен параллельно оси трубы, то есть, что

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = u, \quad \vec{v} = \vec{k}u, \quad (9.2)$$

где \vec{k} – единичный вектор оси Oz . Из уравнения неразрывности (9.1) и равенств (9.2) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = u(x, y, t).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{k} \frac{du}{dt},$$

и уравнение движения может быть записано в виде

$$\vec{k} \rho \frac{du}{dt} = \rho \vec{F} - \nabla p + \vec{k} \mu \Delta u. \quad (9.3)$$

Необходимо особо отметить, что из-за отсутствия конвективных членов уравнение (9.3) является линейным, что существенно упрощает проблему его интегрирования. Проектируя уравнение (9.3) на оси координат, имеем

$$\rho F_x = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho F_y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho \frac{du}{dt} = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta u. \quad (9.4)$$

Полагая $\vec{F} = \vec{g} = \text{const}$, получаем, что первые два уравнения (9.4) совпадают с уравнениями (6.2). Следовательно, в плоскости xOy , перпендикулярной оси трубы, имеет место гидростатический закон распределения давления.

Так как $u = u(x, y, t)$, то из последнего уравнения (9.4) следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f(x, y, t).$$

Из первых двух равенств (9.4) и последней формулы видно, что в каждый данный момент времени давление линейно зависит от координат, то есть

$$p = \rho F_x x + \rho F_y y + C(t)z + D(t), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = C(t). \quad (9.5)$$

Граничное условие для уравнения движения (9.4) имеет вид

$$u(x_1, y_1, t) = V, \quad (9.6)$$

где x_1, y_1 – координаты точек контура трубы S (рис. 9.2), а V – скорость ее движения вдоль оси Oz . Если труба неподвижна, то $V = 0$.

Введем функцию

$$\tilde{u} = u - \int_0^t \left(F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) dt. \quad (9.7)$$

Так как $F_z = \text{const}$, а $\frac{\partial p}{\partial z} = C(t)$, то, подставив соотношение (9.7) в уравнение (9.4) и используя граничное условие (9.6), получим

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right), \quad (9.8)$$

$$\tilde{u}(x_1, y_1, t) = V - \int_0^t \left(F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) dt, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = C(t). \quad (9.9)$$

Следовательно, задача о неустановившемся движении вязкой несжимаемой жидкости по призматической трубе может быть сведена к решению уравнения (9.8), имеющему вид уравнения теплопроводности при граничных условиях (9.9). В случае установившегося движения $\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$, и уравнение (9.4) принимает вид

$$\Delta u = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) = \text{const}, \quad (9.10)$$

то есть уравнение движения сводится к уравнению Пуассона.

Введем функцию ψ с помощью соотношения

$$u = \psi + \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) (x^2 + y^2).$$

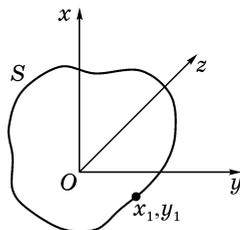


Рис. 9.2

Подставив это выражение в уравнение (9.10) и граничное условие (9.6), имеем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad \psi(x_1, y_1) = V - \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) (x_1^2 + y_1^2). \quad (9.11)$$

Таким образом, задача об установившемся течении вязкой несжимаемой жидкости по призматической трубе может быть сведена к решению уравнения Лапласа, когда на границе области задано значение искомой функции, то есть к задаче Дирихле.

Рассмотрим плоскопараллельное безвихревое движение идеальной несжимаемой жидкости внутри контура S (рис. 9.2), ограничивающего поперечное сечение призматической трубы. Пусть этот контур вращается с угловой скоростью ω вокруг оси Oz . Проекции скорости точек контура S равны

$$v_x = -\omega y_1, \quad v_y = \omega x_1. \quad (9.12)$$

С другой стороны, в соответствии с формулами (8.2) и (8.7)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (9.13)$$

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (9.14)$$

где ψ – функция тока. Из формул (9.12) и (9.14) имеем, что в точках контура S

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy = -\omega(x_1 dx + y_1 dy),$$

откуда

$$\psi_1 = -\frac{\omega}{2} (x_1^2 + y_1^2) + C. \quad (9.15)$$

Равенства (9.13) и (9.15) при $C = V$ и $\omega = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right)$ совпадают с соотношениями (9.11). Следовательно, изучение установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости по призматическим трубам может быть заменено рассмотрением плоскопараллельного потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости внутри вращающегося контура S и наоборот. Заметим также, что уравнения вида (9.13) с граничными условиями (9.15) описывают кручение призматических стержней.

§2. Прямолинейное течение между двумя параллельными стенками

Течение в узких щелях (зазорах) можно моделировать как течение между параллельными стенками.

Рассмотрим установившееся течение между двумя неподвижными параллельными плоскостями, расположенными на расстоянии $2h$ друг от друга (рис. 9.3). Скорость течения, как и раньше, принимаем равной $\vec{u} = \vec{k}u$. Граничные условия имеют вид:
при $x = h$ $u = 0$, при $x = -h$ $u = 0$. (9.16)

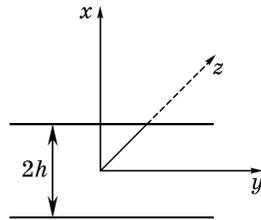


Рис. 9.3

Благодаря симметрии движение в плоскостях, параллельных плоскости xOz , одинаково, и, следовательно, $u = u(x)$. Тогда уравнение движения (9.10) принимает вид

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) = \text{const},$$

откуда

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) x^2 + C_1 x + C_2. \quad (9.17)$$

Подставив решение (9.17) в граничные условия (9.16), получим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) h^2$$

и

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) (x^2 - h^2) = -\frac{h^2}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right). \quad (9.18)$$

Из формулы (9.18) следует, что максимальная скорость течения u_{\max} равна

$$u_{\max} = -\frac{h^2}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) \quad (9.19)$$

и

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right), \quad (9.20)$$

то есть в зазоре между рассматриваемыми плоскостями возникает параболическое распределение скоростей. В безразмерных координатах $\frac{u}{u_{\max}}, \frac{x}{h}$ это распределение имеет универсальный характер (рис. 9.4) и не зависит ни от перепада давления, ни от свойств жидкости. Расход жидкости Q на единицу ширины канала равен

$$Q = \int_{-h}^h u \, dx = -\frac{2h^3}{3\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) = \frac{4h}{3} u_{\max}. \quad (9.21)$$

Средняя скорость течения u_{cp} равна

$$u_{\text{cp}} = \frac{Q}{2h} = -\frac{h^2}{3\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) = \frac{2}{3} u_{\max}. \quad (9.22)$$

Напряжения трения для несжимаемой жидкости в соответствии с формулами (4.28) и (3.5) даются формулами

$$\tau_{ik} = 2\mu \varepsilon_{ik}, \quad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (9.23)$$

В рассматриваемом случае вектор скорости имеет единственную отличную от нуля компоненту $v_3 = v_z = u$, и из формулы (9.18) имеем

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) \frac{x}{\mu}, \quad (9.24)$$

а все остальные компоненты тензора скоростей деформаций равны нулю. Обозначив через τ_h напряжение трения на стенке, из формул (9.23) и (9.24) получаем

$$\tau_h = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) h. \quad (9.25)$$

Подставив соотношение (9.25) в формулы (9.18), (9.19), (9.21) и (9.22), имеем

$$u = -\frac{h}{2\mu} \tau_h \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right), \quad u_{\max} = -\frac{h}{2\mu} \tau_h, \quad (9.26)$$

$$Q = -\frac{2h^2}{3\mu} \tau_h, \quad u_{\text{cp}} = -\frac{h}{3\mu} \tau_h.$$

Заметим, что положительное направление оси Oz выбрано так, чтобы было $u > 0$. Поэтому из формул (9.26) следует, что $\tau_h < 0$.

§3. Прямолинейное течение в осесимметричных трубах

Рассмотрим установившееся незакрученное осесимметричное течение несжимаемой вязкой жидкости. Выберем цилиндрическую систему координат $Orz\theta$ так, чтобы ось Oz совпадала с осью симметрии потока, и пусть положительное направление на оси Oz совпадает с направлением скорости течения. Тогда $\vec{u} = \bar{k}u(r)$ и оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (9.27)$$

Подставив равенство (9.27) в уравнение движения (9.10), имеем

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z = \text{const}.$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$u = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) \frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln r + C_2. \quad (9.28)$$

Решение (9.28), очевидно, справедливо для любого незакрученного осесимметричного потока в цилиндрических трубах. Для определения констант интегрирования C_1 и C_2 необходимо задать соответствующие крайние условия.

Рассмотрим течение в круглой цилиндрической трубе радиуса R . При $r = 0$ величина скорости имеет конечное значение. Отсюда следует, что $C_1 = 0$. В соответствии с гипотезой прилипания при $r = R$ $u = 0$. Тогда

$$C_2 = - \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) \frac{R^2}{4\mu}$$

и

$$u = - \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) (R^2 - r^2) = - \frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (9.29)$$

Из формулы (9.29) видно, что максимальное значение скорости u_{\max} достигается на оси трубы и равно

$$u_{\max} = - \frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right). \quad (9.30)$$

В соответствии с этим формула (9.29) может быть представлена в виде

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

то есть, как и в случае течения между параллельными плоскостями (см. формулу (9.20)), имеет место параболический закон распределения скоростей, который в безразмерных координатах $\frac{u}{u_{\max}}$, $\frac{r}{R}$ также имеет универсальный характер.

Для определения расхода жидкости рассмотрим в поперечном сечении трубы кольцо площадью $dS = 2\pi r dr$. Тогда расход Q в соответствии с формулами (9.29) и (9.30) будет равен

$$Q = \int_S u dS = 2\pi \int_0^R u r dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) = \frac{\pi R^2}{2} u_{\max}. \quad (9.31)$$

Средняя скорость течения u_{cp} равна

$$u_{\text{cp}} = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) = \frac{u_{\max}}{2}. \quad (9.32)$$

Формула (9.31) представляет собой известную формулу Пуазейля* для ламинарного режима течения в круглых трубах.

При $u = u(r)$ тензор скоростей деформаций имеет единственную отличную от нуля компоненту (см. приложение)

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r},$$

и в соответствии с формулой (9.23) для напряжения трения получаем

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (9.33)$$

Подставив в (9.33) выражение (9.29), получаем

$$\tau_{rz} = \frac{r}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right). \quad (9.34)$$

Из формулы (9.34) видно, что напряжение трения линейно зависит от радиуса. Полагая в формуле (9.34) $r = R$, получим напряжение трения на стенке трубы

$$\tau_R = \frac{R}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right). \quad (9.35)$$

* Жан Луи Мари Пуазейль (1799–1869), французский врач и физик.

Подставив соотношение (9.35) в формулы (9.29)–(9.32), получаем

$$u = -\frac{R\tau_R}{2\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad u_{\max} = -\frac{R\tau_R}{2\mu},$$

$$Q = -\frac{\pi R^3}{4\mu} \tau_R, \quad u_{\text{cp}} = -\frac{R\tau_R}{4\mu}.$$

В случае горизонтальной трубы $F_z = 0$, и из формулы (9.32) имеем

$$u_{\text{cp}} = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (9.36)$$

Рассмотрим участок трубы длиной l . Так как $\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$, то

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_2 - p_1}{l} = -\frac{p_1 - p_2}{l} = -\frac{\Delta p}{l}, \quad (9.37)$$

где p_1, p_2 – давления в начале и в конце рассматриваемого участка трубы. Подставив соотношения (9.36) и (9.37) в формулу Дарси–Вейсбаха (5.30), получаем для коэффициента гидравлического сопротивления λ формулу

$$\lambda = \frac{64\mu}{\rho u_{\text{cp}} d} = \frac{64}{\text{Re}}, \quad d = 2R.$$

Заметим, что с помощью теории размерностей и подобия было получено

$$\lambda = \frac{2C}{\text{Re}}, \quad C = \text{const},$$

т.е. точное решение задачи дает значение $C = 64$.

Перейдем к рассмотрению течения в канале, образованном двумя круглыми соосными цилиндрами. Обозначим радиус внешнего цилиндра через R_1 , внутреннего – через R_2 (рис. 9.5).

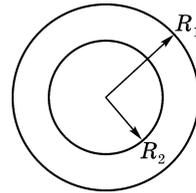


Рис. 9.5

Краевые условия в рассматриваемом случае, очевидно, имеют вид:

$$\text{при } r = R_1 \quad u = 0, \quad \text{при } r = R_2 \quad u = 0. \quad (9.38)$$

Подставив эти условия в решение (9.28), получим

$$C_1 = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln R_1/R_2}, \quad C_2 = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) \frac{R_2^2 \ln R_1 - R_1^2 \ln R_2}{\ln R_1/R_2}$$

и

$$u = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) \left(r^2 - \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln R_1/R_2} \ln r - \frac{R_2^2 \ln R_1 - R_1^2 \ln R_2}{\ln R_1/R_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) \left[r^2 - R_2^2 - (R_1^2 - R_2^2) \frac{\ln r/R_2}{\ln R_1/R_2} \right]. \quad (9.39)$$

Расход Q через сечение кольцевой трубы равен

$$Q = 2\pi \int_{R_2}^{R_1} ur \, dr = \frac{\pi}{8\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) (R_1^2 - R_2^2) \left[\frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln R_1/R_2} - (R_1^2 + R_2^2) \right]. \quad (9.40)$$

Рассмотрим течение в узком кольцевом зазоре, когда $R_2 \rightarrow R_1$. Положим

$$r = R_2 + y, \quad R_1 = R_2 + h, \quad \frac{h}{R_2} \ll 1.$$

Ограничиваясь членами не выше второго порядка малости, имеем

$$\ln \frac{r}{R_2} = \ln \left(1 + \frac{y}{R_2} \right) \approx \frac{y}{R_2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{R_2} \right), \quad \ln \frac{R_1}{R_2} = \ln \left(1 + \frac{h}{R_2} \right) \approx \frac{h}{R_2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h}{R_2} \right).$$

Далее

$$r^2 - R_2^2 - (R_1^2 - R_2^2) \frac{\ln r/R_2}{\ln R_1/R_2} = \frac{2y(y-h)}{1 - \frac{1}{2} \frac{h}{R_2}} \approx 2y(y-h) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h}{R_2} \right) \approx 2y(y-h).$$

Подставив последнее выражение в формулу (9.39), получаем

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) (y^2 - hy). \quad (9.41)$$

Заметим, что если граничные условия (9.16) задать в виде:

$$\text{при } x = 0 \quad u = 0, \quad \text{при } x = 2h = h_1 \quad u = 0,$$

то формула (9.18) примет вид

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho F_z \right) (x^2 - h_1 x). \quad (9.42)$$

Формула (9.42) с точностью до обозначений совпадает с выражением (9.41). Следовательно, решение (9.41) представляет собой также решение о движении вязкой жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями, расположенными на расстоянии $h_1 = 2h$ друг от друга.

§4. Уравнение установившегося кругового движения вязкой несжимаемой жидкости

Уравнения установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах $Or\phi z$ имеют вид (см. приложение)

$$\begin{aligned}
 & v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} = \\
 & = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\
 & v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r} = \\
 & = F_\phi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r^2} \right), \quad (9.43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\
 & = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right),
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0. \quad (9.44)$$

Будем считать, что ось Oz направлена вертикально вверх и что из массовых сил действует только сила тяжести. Тогда

$$F_r = F_\phi = 0, \quad F_z = -g = \text{const}. \quad (9.45)$$

Примем также, что

$$v_r \equiv 0, \quad v_z \equiv 0, \quad (9.46)$$

то есть рассмотрим течение, при котором траектории всех частиц представляют собой концентрические окружности с центрами на оси Oz .

Из уравнения неразрывности (9.44) и условий (9.46) следует, что

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \equiv 0, \quad (9.47)$$

то есть модуль скорости вдоль круговой траектории сохраняет свое значение.

Уравнения движения (9.43) с учетом равенств (9.45), (9.46) и (9.47) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{v_\varphi^2}{r} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\ 0 &= \rho g + \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Из первого и третьего равенств (9.48) имеем

$$2 \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial z} = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0. \quad (9.49)$$

Таким образом, рассматриваемое круговое движение является плоскопараллельным, и в соответствии с формулами (9.47) и (9.49) имеем

$$v_\varphi = v_\varphi(r). \quad (9.50)$$

Из формул (9.45) и (9.47) следует, что течение обладает осевой симметрией, благодаря чему

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0. \quad (9.51)$$

На основании равенств (9.50) и (9.51) второе уравнение (9.48) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dv_\varphi}{dr} + \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_\varphi) \right] = 0. \quad (9.52)$$

Интегрируя уравнение (9.52) получаем

$$v_\varphi = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}, \quad C_1, C_2 = \text{const}. \quad (9.53)$$

Из первого уравнения (9.48) для давления имеем

$$p = \rho \int \frac{v_\varphi^2}{r} dr + C_3, \quad C_3 = \text{const}. \quad (9.54)$$

§5. Течение между двумя вращающимися цилиндрами

Рассмотрим установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя неограниченными в направлении вертикальной оси Oz круговыми соосными цилиндрами.

Пусть внутренний цилиндр имеет радиус R_2 и вращается с угловой скоростью ω_2 , а внешний имеет радиус R_1 и вращается с угловой скоростью ω_1 (рис. 9.6). Граничные условия, очевидно, имеют вид:

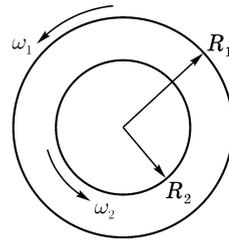


Рис. 9.6

$$\text{при } r = R_1 \quad v_\varphi = R_1 \omega_1 \quad \text{при } r = R_2 \quad v_\varphi = R_2 \omega_2. \tag{9.55}$$

Подставив граничные условия (9.55) в равенство (9.53), получаем

$$C_1 = 2 \frac{R_1^2 \omega_1 - R_2^2 \omega_2}{R_1^2 - R_2^2}, \quad C_2 = \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{R_1^2 - R_2^2}.$$

Следовательно, выражение (9.53) для скорости v_φ имеет вид

$$\begin{aligned} v_\varphi &= \frac{R_1^2 \omega_1 - R_2^2 \omega_2}{R_1^2 - R_2^2} r + \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{(R_1^2 - R_2^2) r} = \\ &= \frac{(R_1^2 \omega_1 - R_2^2 \omega_2) r^2 + R_1^2 R_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{(R_1^2 - R_2^2) r}. \end{aligned} \tag{9.56}$$

Подставив равенство (9.56) в формулу (9.54), после элементарных вычислений получаем

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho}{(R_1^2 - R_2^2)^2} \times \\ &\times \left[(R_1^2 \omega_1 - R_2^2 \omega_2)^2 \frac{r^2}{2} + 2 R_1^2 R_2^2 (R_1^2 \omega_1 - R_2^2 \omega_2) (\omega_2 - \omega_1) \ln r - \frac{R_1^4 R_2^4 (\omega_2 - \omega_1)^2}{2 r^2} \right] + C_3. \end{aligned}$$

При $v_r = v_z = 0$, $v_\varphi = v_\varphi(r)$ тензор скоростей деформаций имеет единственную отличную от нуля компоненту (см. приложение)

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right),$$

и в соответствии с формулой (9.23) напряжение трения $\tau_{r\varphi}$ равно

$$\tau_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right). \quad (9.57)$$

Подставив в формулу (9.57) выражение (9.56), получаем

$$\tau_{r\varphi} = -2\mu \frac{R_1^2 R_2^2 (\omega_2 - \omega_1)}{(R_1^2 - R_2^2) r^2}. \quad (9.58)$$

Из формулы (9.58) видно, что с ростом радиуса напряжение трения убывает как $\frac{\text{const}}{r^2}$.

Сила трения на поверхности цилиндра радиуса r и высотой H равна, очевидно, $2\pi r H \tau_{r\varphi}$, а ее момент относительно оси Oz равен

$$M = 2\pi r^2 H \tau_{r\varphi} = -4\pi\mu H \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} (\omega_2 - \omega_1). \quad (9.59)$$

Таким образом, момент сил трения не зависит от радиуса цилиндра.

Так как при вычислении компонент тензора напряжений нормаль считается внешней по отношению к рассматриваемому объему, то формулы (9.58) и (9.59) дают значение напряжения и момента сил трения на поверхности радиуса r при ее трении о поверхность радиуса $r + dr$. При рассмотрении трения поверхности радиуса r о поверхность радиуса $r - dr$ внешняя нормаль имеет направление $-r$ и знак в формулах (9.58) и (9.59) должен быть изменен на противоположный.

Из сказанного следует, что момент сил трения на цилиндрах радиусов R_1 и R_2 будет одинаковым по величине, но противоположным по знаку.

Особый интерес представляет случай, когда внутренний цилиндр покоится, то есть $\omega_2 = 0$. При этом из формулы (9.59) имеем

$$M = 4\pi\mu H \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \omega_1. \quad (9.60)$$

Формула (9.60) используется для определения вязкости с помощью ротационных вискозиметров с соосными цилиндрами. Действительно, измерив угловую скорость ω_1 вращения внешнего цилиндра и момент M на внутреннем цилиндре, с помощью формулы (9.60) можно вычислить динамический коэффициент вязкости μ .

Глава X

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Теория турбулентных течений представляет собой самостоятельный раздел гидромеханики. Исследованию турбулентных течений посвящена весьма обширная литература. Поэтому в настоящей главе рассматриваются лишь наиболее простые и в то же время весьма важные вопросы турбулентных течений в трубах.

§1. Опыты О. Рейнольдса

Классические исследования течения жидкости в круглых трубах были проведены в 1876–1883 годах английским физиком Осборном Рейнольдсом. Схема его экспериментальной установки приведена на рис. 10.1. В поток жидкости, вытекающей из большого бака *A* по длинной стеклянной трубе *B*, через сопло подавалась из бачка *C* тонкая струйка краски.

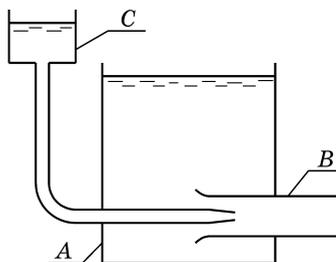


Рис. 10.1

Наблюдения за окрашенной стружкой показали, что при малых скоростях течения она вытягивается вдоль оси тру-

бы, то есть течение происходит без поперечного перемешивания. Слои жидкости движутся параллельно друг другу. Выше указывалось, что такое течение называется ламинарным.

При больших скоростях течения окрашенная стружка размывалась в поперечном направлении по всему сечению трубы, то есть наблюдалось интенсивное перемешивание потока, имевшее ярко выраженный неустановившийся характер. Такое течение называется турбулентным. Характерной особенностью турбулентного течения является наличие беспорядочных поперечных составляющих вектора скорости. Таким образом, турбулентное течение является по своей сути неустановившимся.

Проведенные эксперименты показали, что переход от ламинарного режима течения к турбулентному определяется не диаметром трубы d ,

средней скоростью течения w , вязкостью μ и плотностью ρ , взятыми по отдельности, а безразмерной комбинацией

$$\text{Re} = \frac{\rho w d}{\mu},$$

получившей название числа Рейнольдса. С точки зрения теории размерностей и подобия этот вывод представляется очевидным.

Значение числа Re , при котором происходит переход от ламинарного режима течения к турбулентному, называется критическим – $\text{Re}_{\text{кр}}$. При $\text{Re} < \text{Re}_{\text{кр}}$ течение ламинарное, а при $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$ – турбулентное.

Рейнольдс предполагал, что и подтвердилось в дальнейшем, что значение $\text{Re}_{\text{кр}}$ тем больше, чем меньше возмущение в потоке. Для труб с хорошо закругленным входом при течении воды им были получены значения $\text{Re}_{\text{кр}}$ порядка 12000–13000. В более поздних исследованиях других авторов в результате ряда мер, принятых с целью уменьшения начальных возмущений, было достигнуто значение $\text{Re}_{\text{кр}}$ порядка 50000. Однако создание даже небольших возмущений приводило к немедленной турбулизации таких потоков.

В то же время различные опыты показали, что при числах Рейнольдса порядка 2200 имеющиеся в потоке (или создаваемые искусственно) возмущения затухают, и течение становится ламинарным.

В технических устройствах всегда имеются те или иные возмущения. Поэтому при расчете течений в круглых цилиндрических трубах принято считать, что $\text{Re}_{\text{кр}} = 2320$.

§2. Средние характеристики турбулентного течения

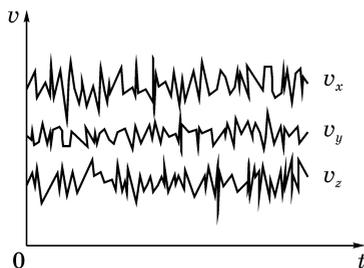


Рис. 10.2

При измерениях в какой-либо точке турбулентного потока безинерционным датчиком получается зависимость скорости от времени, представленная на рис. 10.2, где v_x, v_y, v_z – составляющие вектора скорости. Из этих данных видно, что величина скорости хаотично пульсирует около некоторого среднего значения.

Рейнольдсом было предложено рассматривать мгновенное значение ско-

рости и всех остальных характеристик турбулентного потока в виде суммы осредненных во времени значений и пульсационных составляющих.

Пусть $\varphi(x, y, z, t)$ – какая-либо характеристика турбулентного потока (скорость, давление и т.д.). Тогда ее мгновенное значение записывается в виде

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi', \tag{10.1}$$

где $\bar{\varphi}$ – значение, осредненное во времени, φ' – пульсация.

Осредненное значение $\bar{\varphi}$ вычисляется как

$$\bar{\varphi}(x, y, z, t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(x, y, z, \tau) d\tau, \tag{10.2}$$

где период осреднения T много больше характерного периода пульсаций, но много меньше характерного времени процесса.

Если величина $\bar{\varphi}$, вычисленная для различных значений t , имеет одинаковое значение, то турбулентное течение называется квазистационарным (или стационарным). Если $\bar{\varphi}$ зависит от времени (рис. 10.3), то процесс нестационарный.

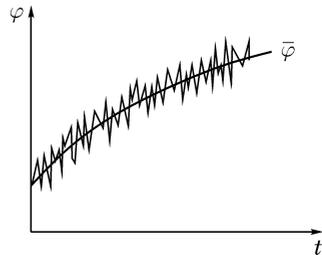


Рис. 10.3

В случае стационарного течения при повторном осреднении параметра φ на основании формулы (10.2) имеем

$$\bar{\bar{\varphi}} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \bar{\varphi}(x, y, z) d\tau = \bar{\varphi}. \tag{10.3}$$

Для нестационарных процессов соотношение (10.3) постулируется.

Из формулы (10.2) непосредственно следует, что

$$\overline{\varphi + \psi} = \bar{\varphi} + \bar{\psi}. \tag{10.4}$$

В соответствии с формулами (10.1), (10.3) и (10.4) имеем

$$\bar{\varphi} = \overline{\bar{\varphi} + \varphi'} = \bar{\bar{\varphi}} + \bar{\varphi}' = \bar{\varphi} + \bar{\varphi}', \quad \bar{\varphi}' = 0, \tag{10.5}$$

то есть осредненное значение пульсации равно нулю.

В случае квазистационарного течения, как это следует из определения осреднения (10.2),

$$\overline{\varphi\psi} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \overline{\varphi}(x, y, z) \psi(x, y, z, \tau) d\tau = \overline{\varphi} \overline{\psi}. \quad (10.6)$$

Для нестационарных процессов соотношение (10.6) постулируется.

Из формул (10.5) и (10.6) следует, что

$$\overline{\varphi\psi'} = \overline{\varphi}\overline{\psi'} = 0. \quad (10.7)$$

В соответствии с правилом дифференцирования интеграла с переменными пределами имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} &= \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial t} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \varphi(x, y, z, \tau) d\tau = \frac{1}{T} \left[\varphi\left(x, y, z, t + \frac{T}{2}\right) - \varphi\left(x, y, z, t - \frac{T}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} d\tau = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}, \end{aligned} \quad (10.8)$$

то есть производная по времени осредненного значения равна осредненному значению производной.

Равенство

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} \quad (10.9)$$

очевидно.

§3. Уравнение Рейнольдса

Уравнения Рейнольдса представляют собой уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости, записанные для осредненных параметров потока.

Рассмотрим уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (4.42), или

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad \rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i. \quad (10.10)$$

Положим в соответствии с гипотезой Рейнольдса, что

$$p = \bar{p} + p', \quad v_i = \bar{v}_i + v'_i. \quad (10.11)$$

Для удобства дальнейших преобразований заметим, что в случае несжимаемой жидкости можно записать

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{dv_i}{dt} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial(v_i v_j)}{\partial x_j}. \quad (10.12)$$

Подставив в равенство (10.12) соотношение (10.11) для скорости, на основании правил осреднения (10.3)–(10.9) с учетом уравнения неразрывности получим

$$\frac{d\bar{v}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}'_i \bar{v}'_j}{\partial x_j} = \frac{d\bar{v}_i}{dt} + \frac{\partial \bar{v}'_i \bar{v}'_j}{\partial x_j}. \quad (10.13)$$

Далее очевидно, что на основании правил осреднения

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}, \quad \Delta \bar{v}_i = \Delta \bar{v}_i, \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}. \quad (10.14)$$

Из равенств (10.13), (10.14) и уравнений (10.10) имеем окончательно

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0, \quad \rho \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \Delta \bar{v}_i - \rho \frac{\partial(\bar{v}'_i \bar{v}'_j)}{\partial x_j}, \quad (10.15)$$

или в векторном виде

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{F}} - \nabla \bar{p} + \mu \Delta \bar{\mathbf{v}} - \rho \frac{\partial(\bar{\mathbf{v}}' \bar{\mathbf{v}}'_j)}{\partial x_j}. \quad (10.16)$$

Таким образом, в результате проведенного осреднения уравнение неразрывности сохранило свой вид, а в уравнениях движения появились дополнительные члены вида $\rho \overline{v'_i v'_j}$.

Для понимания полученного результата воспользуемся уравнениями движения сплошной среды в напряжениях (2.49)

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{F}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_i}{\partial x_i} \quad (10.17)$$

или

$$\rho \frac{dv_j}{dt} = \rho F_j + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i}. \quad (10.18)$$

Осредняя уравнения (10.17) и (10.18) по времени, с учетом равенства (10.13) получим

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p}_i - \rho \overline{v'v'_i}), \quad (10.19)$$

$$\rho \frac{d\bar{v}_j}{dt} = \rho F_j + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p}_{ij} - \rho \overline{v'_j v'_i}). \quad (10.20)$$

Уравнения (10.15), (10.16), (10.19), (10.20) представляют собой различные формы записи уравнений Рейнольдса.

Из уравнений Рейнольдса следует, что при временном осреднении турбулентного течения дополнительно к тензору осредненных вязких напряжений

$$\bar{p}_{ji} = -\bar{p} \delta_{ji} + 2\mu \bar{\epsilon}_{ji}$$

возникает симметричный тензор турбулентных напряжений

$$\begin{pmatrix} -\rho \overline{v'_1 v'_1} & -\rho \overline{v'_1 v'_2} & -\rho \overline{v'_1 v'_3} \\ -\rho \overline{v'_2 v'_1} & -\rho \overline{v'_2 v'_2} & -\rho \overline{v'_2 v'_3} \\ -\rho \overline{v'_3 v'_1} & -\rho \overline{v'_3 v'_2} & -\rho \overline{v'_3 v'_3} \end{pmatrix}. \quad (10.21)$$

Таким образом, уравнения Рейнольдса содержат 6 дополнительных неизвестных – компонент тензора турбулентных напряжений (10.21) и, следовательно, являются незамкнутыми. Вопрос об их замыкании, то есть вопрос об отыскании связи между тензором турбулентных напряжений и осредненными характеристиками потока, представляет собой до настоящего времени одну из основных проблем теории турбулентности.

§4. Полуэмпирическая теория турбулентности Л.Прандтля

Полуэмпирические теории турбулентности основываются на каких-либо гипотезах, связывающих турбулентные напряжения с полем осредненных скоростей. Основой для формулирования этих гипотез является обобщение экспериментального материала и введение в получающиеся таким образом соотношения эмпирических констант.

При построении полуэмпирических теорий используется изложенная выше идея О.Рейнольдса о представлении поля скоростей турбулентного потока в виде суммы поля осредненных скоростей \bar{v} и поля пульсационных составляющих \bar{v}' . При этом вводятся линии тока осредненного движения, непроницаемые для осредненных скоростей, но проницаемые для

пульсационных составляющих, благодаря которым происходит поперечное перемешивание в турбулентном потоке.

Пульсационные составляющие скорости переносят сквозь линии тока осредненного течения некоторое количество движения, что приводит в соответствии со вторым законом Ньютона к возникновению дополнительных – турбулентных – напряжений.

Рассмотрим плоское квазистационарное турбулентное течение между неподвижными плоскостями $y = 0$ и $y = h$ (рис. 10.4). Очевидно, что в этом случае $\bar{v}_y = 0$ из-за непроницаемости стенок, а $\bar{v}_z = v'_z = 0$ – по определению плоского течения. Линии тока осредненного течения – прямые, параллельные оси Ox . Ясно, что отличными от нуля компонентами тензора турбулентных напряжений будут $-\rho\overline{v'_x v'_x}$, $-\rho\overline{v'_y v'_y}$, $-\rho\overline{v'_x v'_y} = -\rho\overline{v'_y v'_x}$. Как показывают эксперименты, величинами $\rho\overline{v'_x v'_x}$ и $\rho\overline{v'_y v'_y}$ можно пренебречь.

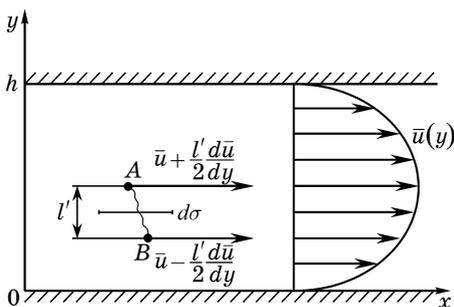


Рис. 10.4

Введем обозначения

$$\bar{v}_x = \bar{u}, \quad v'_y = v', \quad -\rho\overline{v'_x v'_y} = \tau$$

и будем считать, что трение приложено от верхнего слоя к нижнему, то есть будем рассматривать нижний слой жидкости (рис. 10.4). При этом, очевидно, перенос количества движения сверху вниз необходимо учитывать со знаком «+», а снизу вверх – со знаком «-». Из-за наличия пульсационной составляющей v' частица жидкости, находящаяся в точке A с координатой $y + \frac{l'}{2}$, будет перенесена через площадку $d\sigma$, нормальную к оси Ox_1 в точку B с координатой $y - \frac{l'}{2}$.

В точке A рассматриваемая частица имела осредненную скорость $\bar{u} = \bar{u}\left(y + \frac{l'}{2}\right)$. В соответствии с гипотезой Л.Прандтля*, скорость частицы на пути l' не меняется, а в точке B становится равной $\bar{u} = \bar{u}\left(y - \frac{l'}{2}\right)$. Так как поток массы через площадку $d\sigma$ равен $\rho v' d\sigma$, то изменение осредненного по времени количества движения нижнего слоя равно**

$$\rho v' \left[\bar{u}\left(y + \frac{l'}{2}\right) - \bar{u}\left(y - \frac{l'}{2}\right) \right] d\sigma.$$

Следовательно, осредненная во времени сила турбулентного трения $\tau d\sigma$ равна

$$\tau d\sigma = \rho v' \left[\bar{u}\left(y + \frac{l'}{2}\right) - \bar{u}\left(y - \frac{l'}{2}\right) \right] d\sigma. \quad (10.22)$$

Величина l' называется длиной пути перемешивания.

Так как величина l' предполагается малой, то с точностью до членов более высокого порядка малости

$$\bar{u}\left(y \pm \frac{l'}{2}\right) = \bar{u}(y) \pm \frac{l'}{2} \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (10.23)$$

Подставив разложение (10.23) в равенство (10.22), получим

$$\tau = \rho \overline{v'l'} \frac{d\bar{u}}{dy} = A \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (10.24)$$

где $A = \rho \overline{v'l'}$ – динамический коэффициент турбулентной вязкости.

Выражение для дополнительного турбулентного напряжения в виде $\tau = A \frac{d\bar{u}}{dy}$ было предложено, по аналогии с законом трения Ньютона для ламинарного течения, французским ученым Ж.Буссинеском*** в 1887 г. Однако необходимо особо подчеркнуть, что коэффициент турбулентной вязкости A , в отличие от динамического коэффициента вязкости μ , не есть константа, характеризующая жидкость, а зависит от координаты y и параметров потока.

* Людвиг Прандтль (1875–1953), немецкий ученый, один из основателей аэромеханики.

** В соответствии с законом сохранения массы переход частицы из точки A в точку B сопровождается переходом другой частицы из B в A .

*** Жозеф Валантен Буссинеск (1842–1929), французский ученый в области механики.

В тонком пристенном слое $A \ll \mu$. Этот слой называется вязким подслоем, и толщина его имеет порядок 1% от поперечного размера канала. Вне этого подслоя, в так называемом турбулентном ядре, $A \gg \mu$.

Полное, осредненное во времени касательное напряжение \bar{p}_{xy} имеет, очевидно, вид

$$\bar{p}_{xy} = (\mu + A) \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (10.25)$$

Для определения длины пути перемешивания Л.Прандтлем была предложена гипотеза, в соответствии с которой

$$v' \sim l' \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (10.26)$$

Подставив соотношение (10.26) в равенство (10.24), получим

$$A = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|, \quad \tau = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (10.27)$$

где знак модуля использован для того, чтобы подчеркнуть, что $A > 0$, а τ – знакопеременная величина. Коэффициент пропорциональности, который должен присутствовать в формуле (10.26), включен в величину l , которая также называется длиной пути перемешивания.

Теория, построенная на идее существования пути перемешивания, называется полуэмпирической теорией Л.Прандтля.

§5. Применение соображений теории размерностей к построению полуэмпирических теорий турбулентности

Л.Прандтль при построении своей теории исходил из естественного предположения, что турбулентная вязкость должна зависеть от плотности жидкости и закона распределения осредненной скорости \bar{u} по сечению канала. Так как это распределение в первом приближении определяется производной $\frac{d\bar{u}}{dy}$, то

$$A = f\left(\rho, \frac{d\bar{u}}{dy}\right). \quad (10.28)$$

Поскольку размерности величин, входящих в выражение (10.28), имеют вид

$$[A] = \frac{M}{LT}, \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}, \quad \left[\frac{d\bar{u}}{dy} \right] = \frac{1}{T},$$

то система параметров, определяющих класс явлений, то есть ρ и $\frac{d\bar{u}}{dy}$, не обладает свойством полноты. Поэтому зависимость вида (10.28) физически невозможна. Добавив в число определяющих параметров некоторый линейный размер l' , положим

$$A = f\left(\rho, \frac{d\bar{u}}{dy}, l'\right). \quad (10.29)$$

Легко видеть, что параметры ρ , $\frac{d\bar{u}}{dy}$, l' обладают независимыми размерностями. Тогда в соответствии с П-теоремой теории размерностей из функциональной зависимости (10.29) имеем

$$A = C\rho^\alpha \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^\beta l'^\gamma, \quad C = \text{const}.$$

Выполняя необходимые вычисления, ход которых подробно изложен в гл. V, получаем

$$A = Cl'^2 \rho \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| = \rho l'^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|, \quad \tau = A \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho l'^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (10.30)$$

что в точности совпадает с формулами (10.27).

Так как форма кривой $\bar{u} = \bar{u}(y)$ определяется не только первой производной, но и производными более высокого порядка, то предположим, что

$$A = f\left(\rho, \frac{d\bar{u}}{dy}, \frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right).$$

Параметры ρ , $\frac{d\bar{u}}{dy}$, $\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}$ обладают независимыми размерностями. Поэтому на основании П-теоремы можем записать

$$A = C\rho^\alpha \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^\beta \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^\gamma.$$

После соответствующих вычислений имеем

$$A = \kappa^2 \rho \frac{\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|^3}{\left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^2}, \quad \tau = \kappa^2 \rho \frac{\left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right|^3}{\left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\right)^2} \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (10.31)$$

где $\kappa = \text{const}$ – некоторая эмпирическая константа.

Формулы (10.31) были получены иным, более сложным путем, немецким гидромехаником Т. фон Карманом в 1930 г.

Как было выше показано, формулы Прандтля (10.30) получены из рассмотрения двух точек в турбулентном потоке. Формулы Кармана (10.31) не содержат линейного размера и, следовательно, свободны от этого условия.

Соотношения (10.30) и (10.31) представляют собой различные реологические модели для турбулентного течения вязкой жидкости.

Заметим, что формулы (10.30) и (10.31) получены, исходя из предположения, что поле осредненных скоростей зависит только от одной, поперечной по отношению к направлению потока, координаты. Поэтому они равно справедливы как для плоской, так и для круглой трубы (в предположении осесимметричности течения).

§6. Логарифмический закон распределения скоростей

Рассмотрим, используя схему Прандтля, квазистационарное турбулентное течение по круглой цилиндрической трубе радиуса a . В этом случае

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = -\frac{d\bar{u}}{dr}$$

(y отсчитывается от стенки трубы к ее оси), и в соответствии с формулами (10.25) и (10.27) полное касательное напряжение \bar{p}_{xy} равно

$$\bar{p}_{xy} = -(\mu + A)\frac{d\bar{u}}{dr} = -\left(\mu + \rho l^2\left|\frac{d\bar{u}}{dr}\right|\right)\frac{d\bar{u}}{dr}.$$

Так как в ядре потока $A \gg \mu$, то примем, что

$$\bar{p}_{xy} \approx \tau = -\rho l^2\left|\frac{d\bar{u}}{dr}\right|\frac{d\bar{u}}{dr}. \quad (10.32)$$

Будем для простоты считать трубу горизонтальной и рассмотрим в ней элемент радиуса r и длиной L (рис. 10.5). Так как движение установившееся, то сумма сил, действующих на выделенный элемент, равна нулю, то есть

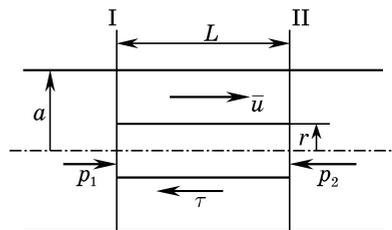


Рис. 10.5

$$\pi r^2(p_1 - p_2) - 2\pi r L \tau = 0,$$

откуда

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{2L} r = \frac{\Delta p}{2L} r. \quad (10.33)$$

Тогда напряжение трения на стенке трубы τ_a равно

$$\tau_a = \frac{\Delta p}{2L} a, \quad (10.34)$$

или, в соответствии с формулой Дарси–Вейсбаха (5.30),

$$\tau_a = -\frac{\lambda \rho |w|}{8} w. \quad (10.35)$$

Из равенств (10.33) и (10.34) имеем

$$\tau = \tau_a \frac{r}{a},$$

и формула (10.32) может быть представлена в виде

$$\frac{\tau_a}{\rho} \frac{r}{a} = -l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dr} \right| \frac{d\bar{u}}{dr}. \quad (10.36)$$

Соотношение (10.36) представляет собой дифференциальное уравнение для определения осредненной скорости \bar{u} .

Очевидно, что длина пути перемешивания l у стенки трубы и на оси потока (из соображений осевой симметрии) должна обращаться в нуль. А.А. Саткевичем для ее определения была предложена формула

$$l = \kappa \sqrt{\frac{r}{a}} (a - r), \quad (10.37)$$

где κ – эмпирическая константа.

Подставив равенство (10.37) в уравнение (10.36), получим

$$\frac{\tau_a}{\rho} = -\kappa^2 (a - r)^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dr} \right| \frac{d\bar{u}}{dr}. \quad (10.38)$$

Величина $v_* = \sqrt{\frac{\tau_a}{\rho}}$ имеет размерность скорости и называется динамической скоростью.

Так как $v_* > 0$, $\frac{d\bar{u}}{dr} < 0$, то из формулы (10.38) имеем

$$\sqrt{\frac{\tau_a}{\rho}} = v_* = -\kappa (a - r) \frac{d\bar{u}}{dr}. \quad (10.39)$$

Интегрируя соотношение (10.39) и учитывая при этом, что скорость \bar{u} достигает максимума на оси трубы, то есть при $r = 0$, получим

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = \frac{\bar{u}_{\max}}{v_*} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{a-r}{a}. \quad (10.40)$$

Из формулы (10.40) видно, что при сделанных предположениях в трубе имеет место логарифмический закон распределения скоростей. Вблизи стенки при $r \rightarrow a$ $\bar{u} \rightarrow -\infty$, что физически лишено смысла. Этот результат объясняется тем, что при выводе формулы (10.40) мы пренебрегли величиной молекулярной вязкости μ по сравнению с A , что для пристенного слоя неправомерно.

Обозначив $a-r = y$, представим равенство (10.40) в виде

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = \frac{\bar{u}_{\max}}{v_*} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yv_*}{av_*} = \frac{\bar{u}_{\max}}{v_*} - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{av_*}{v} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yv_*}{v} = B + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yv_*}{v}, \quad (10.41)$$

где $v = \frac{\mu}{\rho}$ – кинематический коэффициент вязкости, а $B = \text{const}$ для рассматриваемого течения, то есть для течения по трубе заданного радиуса r и с заданным градиентом давления $\frac{\Delta p}{L}$.

Учитывая малую толщину пристенного слоя, а также то, что при $x \rightarrow 0$ величина $x \ln x \rightarrow 0$, из формулы (10.41) получим

$$\begin{aligned} \frac{w}{v_*} &= \frac{Q}{\pi a^2 v_*} = \frac{1}{\pi a^2 v_*} \int_0^a 2\pi r \bar{u}(r) dr = \frac{2}{a^2} \int_0^a r \left(B + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yv_*}{v} \right) dr = \\ &= B + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{av_*}{v} - \frac{3}{2} \kappa. \end{aligned} \quad (10.42)$$

где w – средняя скорость течения, Q – расход.

Из определения динамической скорости v_* , равенства (10.34) и формулы Дарси–Вейсбаха (5.30) или непосредственно из формулы (10.35) имеем

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_a}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} w. \quad (10.43)$$

Подставив соотношение (10.43) в формулу (10.42), получим

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = B - \frac{3}{2\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1}{2} \text{Re} \sqrt{\frac{\lambda}{8}}, \quad (10.44)$$

где число Рейнольдса определяется по формуле

$$\text{Re} = \frac{2aw}{v} = \frac{wd}{v},$$

d – диаметр трубы.

Из приведенного вывода следует, что закон распределения скоростей (10.41) позволяет получить формулу для определения коэффициента гидравлического сопротивления λ . По экспериментальным данным Никурадзе

$$B \approx 5,5; \quad \kappa \approx 0,4.$$

Подставляя эти значения в формулу (10.44) и переходя к десятичным логарифмам, получим

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,035 \lg \operatorname{Re} \sqrt{\lambda} - 0,913.$$

Более точно результаты эксперимента описываются формулой

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}) - 0,8 = 2 \lg \frac{\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}}{2,51}.$$

Заметим особо, что при выводе формулы (10.44) не учитывалось влияние шероховатости стенок трубы. Таким образом, эта формула справедлива только для гладких труб.

Необходимо также заметить, что в настоящее время при выполнении технических расчетов для вычисления λ предпочтение отдается эмпирическим формулам, то есть формулам, полученным при обработке результатов экспериментов.

§7. Экспериментальные исследования коэффициента гидравлического сопротивления

Экспериментальным определением зависимости падения давления от расхода жидкости в трубах и каналах начали заниматься более 200 лет тому назад. Почти каждый исследователь получал свой, отличный от других, закон сопротивления. Это было связано с тем, что в опытах различных авторов не соблюдался закон подобия, установленный О.Рейнольдсом в конце XIX века. Кроме того, не учитывалось, что в разных опытах стенки имели различную шероховатость.

Первые систематические опыты для выяснения зависимости коэффициента гидравлического сопротивления λ от Re и шероховатости стенок труб были проделаны Никурадзе в конце 20-х – начале 30-х годов XX века в Геттингенском университете. Опыты производились на гладких латунных трубах и трубах с искусственной равномерной шероховатостью. Такая шероховатость получалась путем наклейки на стенки трубы песчинок определенного размера, для чего песок предварительно просеивался через специальные сита. Размер зерен песка принимался за размер зерен шероховатости Δ .

Результаты опытов Никурадзе в координатах $\lg Re - \lg 100\lambda$ представлены на рис. 10.6, где $\varepsilon = \Delta/d$. Из этих опытов, проведенных в широком диапазоне значений числа Рейнольдса, следует, что существует 5 областей для коэффициента гидравлического сопротивления.

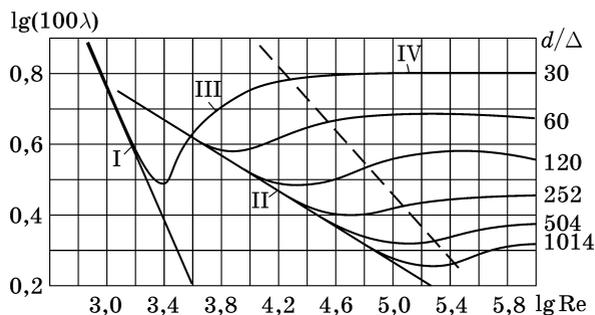


Рис. 10.6

В первой области (прямая I) при $Re < 2300$ режим течения ламинарный и λ зависит от Re , но не зависит от ε .

Во второй области имеет место переходный режим от ламинарного к турбулентному. Коэффициент λ возрастает и зависит только от Re .

Третья область (прямая II) – так называемая область гидравлически гладких труб. Трубы с различной шероховатостью ведут себя как гладкие, то есть λ зависит только от Re . При этом границы области зависят от ε . Чем больше ε , тем уже эта область. При достаточно больших ε третья область исчезает.

Четвертая область – область смешанного трения. Коэффициент λ зависит как от Re , так и от ε .

Пятая область – область квадратичного трения. Коэффициент λ зависит только от ε .

В конце 40-х годов XX века в Москве Г.А.Муриным были проведены опыты, аналогичные опытам Никурадзе. Однако их существенным отличием было использование стальных труб не с искусственной, а с естественной шероховатостью, определяемой технологией их изготовления и рядом других факторов.

Результаты опытов Г.А.Муриня представлены на рис. 10.7. Из этих опытов следует, что для труб с естественной шероховатостью также имеется 5 областей изменения коэффициента гидравлического сопротивления. Однако, в отличие от труб с искусственной шероховатостью, коэффициент гидравлического сопротивления λ в турбулентной области с ростом числа Рейнольдса монотонно убывает.

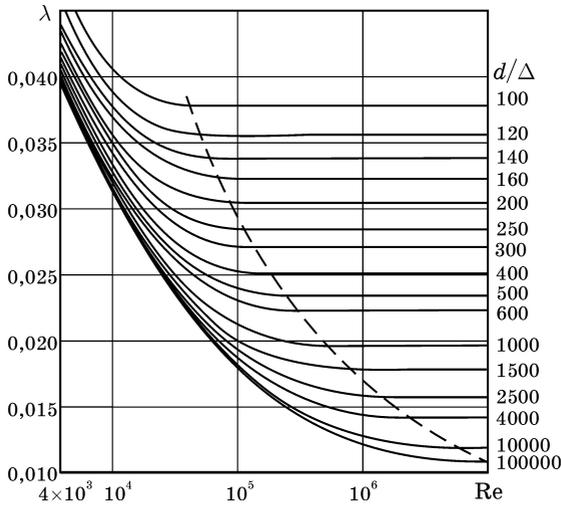


Рис. 10.7

Для определения коэффициента гидравлического сопротивления λ в круглых трубах существует большое число эмпирических и полуэмпирических формул. Рассмотрим наиболее употребительные из них.

Ламинарный режим течения:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}, \quad \text{Re} < 2300.$$

Формула получена теоретически и подтверждена экспериментально.

Турбулентный режим течения, область гидравлически гладких труб:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{100 \text{Re}}}, \quad \text{Re} < 10^5, \quad \text{формула Блазиуса};$$

$$\lambda = \frac{1}{(1,8 \lg \text{Re} - 1,5)^2}, \quad \text{формула Конакова}.$$

Обе формулы получены при обработке результатов экспериментов. Формула Конакова не имеет ограничений по числу Рейнольдса.

Область смешанного трения:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}, \quad 10 \frac{d}{\Delta} < \text{Re} < 500 \frac{d}{\Delta}, \quad \text{формула Альтшуля}.$$

Формула Альтшуля получена путем видоизменения эмпирической формулы Колбрука.

Область квадратичного трения:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0,25}, \quad \text{Re} > 500 \frac{d}{\Delta}, \quad \text{формула Шифринсона.}$$

Заметим, что при малых $\frac{\Delta}{d}$ формула Альтуля переходит в формулу Блазиуса, а при больших Re – в формулу Шифринсона.

При выполнении вычислений на ЭВМ удобно использовать формулу Черчила, справедливую во всем диапазоне чисел Рейнольдса, включая ламинарный режим течения:

$$\lambda = 8 \left[\left(\frac{8}{\text{Re}} \right)^{12} + \frac{1}{(A + B)^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{12}},$$

$$A = \left\{ 2,457 \ln \left[\frac{1}{(7/\text{Re})^{0,9} + 0,27(\Delta/d)} \right] \right\}^{16}, \quad B = \left(\frac{37530}{\text{Re}} \right)^{16}.$$

Глава XI

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ

§1. Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости

Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости представляет собой одно из основных соотношений, используемых для гидравлического расчета трубопроводов. Для его вывода введем следующие предположения:

- а) движение установившееся;
- б) жидкость несжимаемая, $\rho = \text{const}$;
- в) из массовых сил действует только сила тяжести, $\vec{F} = \vec{g}$.

В этих предположениях закон изменения кинетической энергии (2.82) имеет вид

$$\int_S \rho \frac{v^2}{2} v_n dS = \int_V \rho \vec{g} \vec{v} dV + \int_S \bar{p}_n \vec{v} dS + \int_V \rho N^{(i)} dV, \quad (11.1)$$

где для несжимаемой жидкости в соответствии с формулой (4.50)

$$\rho N^{(i)} = -2\mu \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik}. \quad (11.2)$$

Так как движение установившееся, то $\text{div } \rho \vec{v} = 0$ и

$$\rho \vec{g} \vec{v} = -\rho g v_z - g z \text{div } \rho \vec{v} = -\text{div } \rho g z \vec{v}.$$

Тогда на основании теоремы Гаусса–Остроградского получаем

$$\int_V \rho \vec{g} \vec{v} dV = -\int_V \text{div } \rho g z \vec{v} dV = -\int_S \rho g z v_n dS. \quad (11.3)$$

Далее, для несжимаемой жидкости в соответствии с формулами (1.31), (4.21), (4.28) имеем

$$\begin{aligned} \bar{p}_n &= \bar{e}_k p_{ik} \alpha_{ni} = \bar{e}_k (-p \delta_{ik} + \tau_{ik}) \alpha_{ni} = -p \bar{n} + \bar{e}_k \tau_{ik} \alpha_{ni}, \\ \tau_{ik} &= 2\mu \varepsilon_{ik}, \end{aligned}$$

и

$$\int_S \bar{p}_n \vec{v} dS = -\int_S p \bar{n} \vec{v} dS + \int_S \bar{e}_k \vec{v} \tau_{ik} \alpha_{ni} dS = -\int_S p v_n dS + \int_S 2\mu v_k \varepsilon_{ik} \alpha_{ni} dS. \quad (11.4)$$

Из формул (11.2) и (11.4) следует, что сумма членов

$$\int_S 2\mu v_k \varepsilon_{ik} \alpha_{ni} dS + \int_V \rho N^{(i)} dV = -N_{\text{тр}} \quad (11.5)$$

представляет собой мощность сил трения, а так как эта мощность всегда отрицательна, то $N_{\text{тр}} > 0$.

Подставив соотношения (11.3) и (11.4) в уравнение (11.1), с учетом равенства (11.5) получим

$$\int_{S_1} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) g \rho v dS = -N_{\text{тр}}. \quad (11.6)$$

Рассмотрим поток в трубе, ограниченный поперечными сечениями S_1, S_2 и стенкой трубы S_3 . Очевидно, что $v_n = -v$ на S_1 , $v_n = v$ на S_2 , $v_n = 0$ на S_3 . Тогда для рассматриваемого участка трубы уравнение (11.6) принимает вид

$$\int_{S_1} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) g \rho v dS = \int_{S_2} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) g \rho v dS + N_{\text{тр}}. \quad (11.7)$$

Будем считать, что в сечениях S_1 и S_2 имеется гидростатическое распределение давления

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}. \quad (11.8)$$

В § 9.1 показано, что такое распределение давления имеет место при ламинарном режиме течения в призматических трубах. Однако приближенно этот закон может быть распространен также на осредненное прямолинейное турбулентное течение и на плавно изменяющиеся течения, то есть на течения, при которых площадь и форма поперечного сечения мало меняются по длине трубы.

В соответствии с равенством (11.8) имеем

$$\int_S \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) g \rho v dS = \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) g \int_S \rho v dS = \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) g Q_m. \quad (11.9)$$

Произведение ускорения силы тяжести на массовый расход Q_m представляет собой весовое количество жидкости, протекающей через поперечное сечение в единицу времени, и называется *весовым расходом*.

Для вычисления интеграла

$$\int_S \frac{v^2}{2g} g \rho v dS = g \int_S \rho \frac{v^2}{2} v dS$$

рассмотрим фиктивный поток с тем же массовым расходом Q_m , но с равномерным распределением скорости по поперечному сечению трубы. Скорость течения такого потока, очевидно, равна *средней скорости* течения w , то есть

$$w = \frac{Q_m}{\rho S}.$$

Кинетическая энергия K такого потока, переносимая в единицу времени через сечение трубы (поток кинетической энергии), равна

$$K = \int_S \rho \frac{w^2}{2} w dS = \frac{w^2}{2} \rho w S = \frac{w^2}{2} Q_m.$$

Поток кинетической энергии реального течения равен

$$\int_S \rho \frac{v^2}{2} v dS = \alpha K = \alpha \frac{w^2}{2} Q_m, \quad (11.10)$$

где α – поправочный коэффициент, возникающий за счет неравномерности распределения скоростей по поперечному сечению – так называемый *коэффициент Кориолиса*.

Подставив соотношения (11.9) и (11.10) в уравнение (11.7) и учитывая, что при установившемся движении $Q_m = \text{const}$, получаем

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{w_2^2}{2g} + h_{1-2}, \quad (11.11)$$

где

$$h_{1-2} = \frac{N_{\text{тр}}}{gQ_m}$$

– *удельная по весу работа сил трения, совершаемая в единицу времени – удельная мощность этих сил*, затрачиваемая на участке трубы между сечениями S_1 и S_2 .

Уравнение (11.11) представляет собой уравнение Бернулли для потока вязкой несжимаемой жидкости.

Из равенства (11.8) следует, что p_1, p_2 – давления в произвольно взятых точках сечений S_1 и S_2 с координатами z_1 и z_2 , соответственно. Иначе говоря, значения p и z должны соответствовать одной и той же точке сечения S .

Для ламинарного режима течения в круглой трубе радиуса R в соответствии с формулами (9.29), (9.30) и (9.32) имеем

$$v = 2w \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Тогда

$$\int_S \rho \frac{v^2}{2} v dS = 2\pi \int_0^R \rho \frac{v^2}{2} v r dr = 8\pi\rho w^3 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = \pi R^2 \rho w^3,$$

и из формулы (11.10) следует, что

$$\alpha = \frac{2\pi R^2 \rho w^3}{w^2 Q_m} = \frac{2\pi R^2 \rho w^3}{w^2 \rho w \pi R^2} = 2.$$

Для турбулентного режима течения $\alpha = 1,1 \div 1,2$.

Так как в технических трубопроводах различного назначения режим течения, как правило, турбулентный, а $\frac{w^2}{2g} \ll \frac{p}{\rho g}$, то при выполнении расчетов обычно принимают $\alpha \approx 1$.

Члены уравнения Бернулли так же, как и члены интеграла Бернулли (7.29), имеют размерность длины и называются:

z – геометрический напор, или геометрическая высота;

$\frac{p}{\rho g}$ – пьезометрический напор, или пьезометрическая высота;

$\alpha \frac{w^2}{2g}$ – скоростной напор, или скоростная высота;

h_{1-2} – потери напора на участке 1–2;

$H = z + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{w^2}{2}$ – полный напор.

Уравнение Бернулли допускает простую графическую интерпретацию. Будем откладывать вдоль оси абсцисс расстояние, отсчитываемое вдоль оси потока, а вдоль оси ординат – напоры. Линия A на рис. 11.1 характеризует положение оси потока относительно плоскости отсчета $z = 0$. Расстояние от линии B до оси абсцисс равно $z + \frac{p}{\rho g}$, а от линии C до оси – полному напору H .

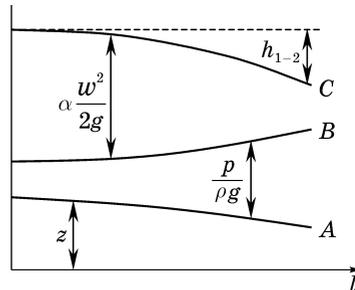


Рис. 11.1

В зависимости от геометрии потока и его расположения в пространстве сумма $z + \frac{p}{\rho g}$ может как убывать, так и возрастать в направлении движения жидкости. Полный напор из-за наличия трения всегда убывает.

Из уравнения (11.11) следует, что если зафиксировать сечение потока 1–1, а расстояние l до сечения 2–2 считать переменным, то

$$H_1 = H + h = \text{const},$$

откуда

$$i = \frac{dh}{dl} = -\frac{dH}{dl}. \quad (11.12)$$

Величина i , определяемая по формуле (11.12), называется *гидравлическим уклоном*.

§2. Виды потерь напора

При движении жидкости по трубопроводу различают два вида потерь: *потери по длине* h_τ и *потери в местных сопротивлениях* h_m .

Местными сопротивлениями называются различные устройства малой длины (по сравнению с длиной трубы), в которых происходит резкое изменение скорости по величине или направлению, или по величине и направлению. К местным сопротивлениям относятся различные запорные устройства, повороты, клапаны и т.д.

Потери по длине, или, как их называют, *потери на трение*, возникают благодаря трению в потоке и линейно зависят от длины трубы. Потери в местных сопротивлениях обусловлены усиленным перемешиванием жидкости, сопровождаемым вихреобразованием и большими градиентами скорости.

Рассмотрим горизонтальный участок цилиндрической трубы диаметром d и длиной l , расположенный между сечениями 1–1 и 2–2. Так как сечения одинаковы, то скоростные напоры также одинаковы, и из уравнения Бернулли (11.11) имеем

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h_\tau.$$

Тогда в соответствии с формулой (5.30) можно написать

$$h_\tau = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}. \quad (11.13)$$

Формула (11.13) представляет собой одну из форм записи формулы Дарси–Вейсбаха. Так как длина местных сопротивлений мала, то перепад давле-

ния на них не зависит от длины и шероховатости. Поэтому можно написать

$$\Delta p = f(d, \mu, \rho, w). \quad (11.14)$$

Применяя к соотношению (11.14) П-теорему, после элементарных вычислений получим

$$\Delta p = \zeta(\text{Re}) \frac{\rho w^2}{2}, \quad h_m = \frac{\Delta p}{\rho g} = \zeta \frac{w^2}{2g}. \quad (11.15)$$

Формула (11.15) называется формулой Вейсбаха, а $\zeta(\text{Re})$ – коэффициентом местного сопротивления.

Суммарные потери в трубопроводе между сечениями 1–1 и 2–2 принято определять на основании принципа наложения потерь, или принципа суперпозиции, то есть

$$h_{1-2} = \sum_{i=1}^n h_{ai} + \sum_j^m h_{mj}, \quad (11.16)$$

где n – число прямолинейных участков труб, m – число местных сопротивлений. Однако при использовании принципа суперпозиции необходимо иметь в виду, что величина потерь в местных сопротивлениях зависит от распределения скоростей перед ними.

Вихреобразование и отрывные течения за местным сопротивлением деформируют эпюру скоростей. Ее восстановление до вида, характерного для прямого участка длинной трубы, происходит на участке стабилизации, длина которого l_{ct} по опытным данным равна 30–40 диаметрам подводящего трубопровода (при турбулентном режиме течения). Если расстояние между соседними местными сопротивлениями меньше l_{ct} , то между ними возникает интерференция. При этом коэффициенты местных сопротивлений ζ и коэффициенты гидравлических сопротивлений λ соединяющих их труб будут отличаться от значений, полученных при местных сопротивлениях, расположенных на значительном расстоянии друг от друга. Из сказанного следует, что если расстояние между местными сопротивлениями меньше l_{ct} , то использование принципа суперпозиции (11.16) может приводить к погрешностям.

§3. Расчет простых трубопроводов

Простым называется трубопровод постоянного диаметра без разветвлений и местных сопротивлений. Все остальные трубопроводы называются сложными. Рассмотрим три основных схемы расчета простых трубопроводов.

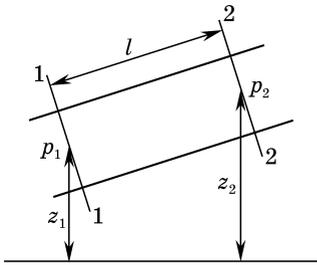


Рис. 11.2

1. Определение давления p_1 при заданных расходе жидкости Q и давлении p_2 (рис. 11.2).

2. Определение расхода Q при заданных давлениях p_1 и p_2 .

3. Определение диаметра трубопровода d при заданных расходе Q и давлениях p_1 и p_2 .

Во всех трех случаях считается, что геометрические отметки z_1 и z_2 , длина l , шероховатость труб Δ , плотность ρ и вязкость жид-

кости μ известны. Составим уравнение Бернулли для участка между сечениями 1–1 и 2–2. Так как $d = \text{const}$, то $w_1 = w_2$, и уравнение (11.11) с учетом формулы (11.13) принимает вид (местных сопротивлений нет)

$$p_1 = p_2 + \rho g(z_2 - z_1) + \rho g h_\tau = p_2 + \rho g(z_2 - z_1) + \rho g \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}. \quad (11.17)$$

Перейдем к рассмотрению первой схемы расчета.

Величина средней скорости w равна

$$w = \frac{4Q}{\pi d^2}.$$

Число Рейнольдса Re и относительная шероховатость ε равны

$$Re = \frac{\rho w d}{\mu}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{d}.$$

Вычислив значения числа Рейнольдса и относительной шероховатости, определим режим течения, область течения и выберем соответствующую формулу для вычисления коэффициента гидравлического сопротивления λ . После этого по формуле Дарси–Вейсбаха (11.13) находим потери h_τ и из уравнения (11.17) – давление p_1 . Таким образом, расчетная схема сводится к цепочке вычислений, схема которой символически может быть представлена в виде

$$Q \rightarrow w \rightarrow Re \rightarrow \text{область течения} \rightarrow \lambda \rightarrow h_\tau \rightarrow p_1. \quad (11.18)$$

Вторая схема расчета связана с необходимостью разрешения уравнения (11.17) относительно скорости w . Так как вид зависимости $\lambda = \lambda(\varepsilon, Re)$ заранее неизвестен, то это может быть сделано либо методом последовательных приближений, либо графоаналитическим методом.

Для решения поставленной задачи графоаналитическим методом зададимся серией значений расхода Q_1, Q_2, \dots, Q_n и для каждого из них, используя схему (11.18), подсчитаем потери напора $h_{\tau 1}, h_{\tau 2}, \dots, h_m$ и построим расходную характеристику трубопровода (рис. 11.3). Так как значения p_1, p_2, z_1, z_2 известны, то из уравнения (11.17) можно определить потери h_τ . Отложив эту величину на оси ординат (рис. 11.3), найдем соответствующее ей значение искомого расхода жидкости.

В третьей схеме расчета искомой величиной является диаметр трубопровода d . Так как этот диаметр неизвестен, то невозможно вычислить ни среднюю скорость w , ни число Re , ни коэффициент λ . Решение уравнения (11.17) может быть получено либо методом последовательных приближений, либо графоаналитическим способом, аналогичным использованному при рассмотрении второй схемы расчета. Зададимся рядом значений диаметров трубопровода d_1, d_2, \dots, d_n и для каждого из них по известному расходу Q подсчитаем значения скоростей w_1, w_2, \dots, w_n . После этого, пользуясь расчетной схемой (11.18), для каждого d_i найдем потери напора h_n и построим зависимость $h_\tau = h_\tau(d)$ (рис. 11.4). Так как значения p_1, p_2, z_1, z_2 известны, то из уравнения (11.17) можно найти значение h_τ . Отложив эту величину на графике рис. 11.4, определим искомый диаметр трубопровода d .

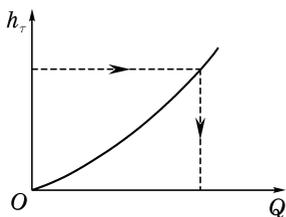


Рис. 11.3

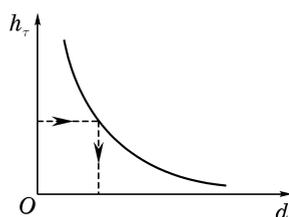


Рис. 11.4

§4. Расчет сложных трубопроводов

Трубопроводы, в которых имеются местные сопротивления, либо состоящие из труб разного диаметра, либо имеющие разветвления, называются сложными.

Рассмотрим схемы расчета наиболее типичных сложных трубопроводов. Начнем с рассмотрения последовательного соединения. Это сложный

трубопровод, состоящий из последовательного соединения труб, между которыми находятся местные сопротивления. При этом трубы могут быть как одного, так и разных диаметров (рис. 11.5).

Трубопровод рассчитывают как систему из простых трубопроводов с местными сопротивлениями. Расход жидкости на всех участках одинаков. Потери на участке рассчитываются так же, как для простого трубопровода, а суммарные потери на участке между сечениями 1–1 и 2–2 – по формуле (11.16). При этом предполагается, что все геометрические элементы трубопровода и свойства жидкости известны.

Для последовательного соединения можно построить расходную характеристику, используя схему вычислений для простого трубопровода. Расходная характеристика позволяет, как и в случае простого трубопровода, найти расход жидкости, если заданы давления в начале и конце трубопровода.

При решении ряда технических задач (увеличение пропускной способности, повышение надежности перехода через реку и т.д.) используются параллельные соединения. Параллельное соединение представляет собой трубопровод, состоящий из нескольких труб, имеющих общее начало и конец (рис. 11.6).

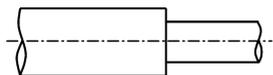


Рис. 11.5

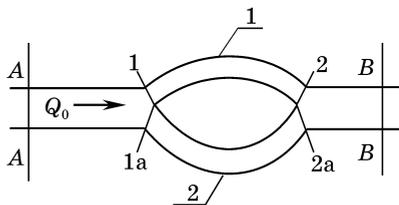


Рис. 11.6

Рассмотрим параллельное соединение, состоящее из двух труб, и для каждой из них запишем уравнение Бернулли (11.11) между сечениями 1–2 и 1а–2а, соответственно. Тогда*

$$\begin{aligned} z_1^{(1)} + \frac{p_1^{(1)}}{\rho g} + \frac{(w_1^{(1)})^2}{2g} &= z_2^{(1)} + \frac{p_2^{(1)}}{\rho g} + \frac{(w_2^{(1)})^2}{2g} + h_r^{(1)}, \\ z_1^{(2)} + \frac{p_1^{(2)}}{\rho g} + \frac{(w_1^{(2)})^2}{2g} &= z_2^{(2)} + \frac{p_2^{(2)}}{\rho g} + \frac{(w_2^{(2)})^2}{2g} + h_r^{(2)}, \end{aligned} \quad (11.19)$$

где верхние индексы означают номер трубы.

* Как уже указывалось, при выполнении технических расчетов обычно принимают $\alpha = 1$.

Так как сечения 1 и 1а, а также сечения 2 и 2а расположены в непосредственной близости друг от друга, то можно считать, что

$$z_1^{(1)} = z_1^{(2)}, \quad z_2^{(1)} = z_2^{(2)}, \quad p_1^{(1)} = p_1^{(2)}, \quad p_2^{(1)} = p_2^{(2)}. \quad (11.20)$$

Кроме того, так как диаметры труб постоянны, можно написать

$$w_1^{(1)} = w_2^{(1)}, \quad w_1^{(2)} = w_2^{(2)}. \quad (11.21)$$

Из соотношений (11.19), (11.20) и (11.21) следует, что

$$h_\tau^{(1)} = h_\tau^{(2)} = h_\tau. \quad (11.22)$$

Перейдем к определению потерь напора на участке $A-B$ (рис. 11.6). Применять для этого уравнение Бернулли нельзя, так как на рассматриваемом участке имеются разветвления. Однако, можно утверждать, что потери энергии $\Delta\mathcal{E}$ на участке $A-B$ равны

$$\Delta\mathcal{E}^{(A-B)} = \Delta\mathcal{E}^{(A-1)} + \Delta\mathcal{E}^{(1)} + \Delta\mathcal{E}^{(2)} + \Delta\mathcal{E}^{(2-B)}, \quad (11.23)$$

где индексы означают соответствующие участки трубопровода.

Так как h_τ – удельные по весу потери, то

$$\Delta\mathcal{E} = h_\tau \rho g Q dt,$$

и равенство (11.23) можно переписать в виде

$$h_\tau^{(A-B)} \rho g Q_0 dt = h_\tau^{(A-1)} \rho g Q_0 dt + h_\tau^{(1)} \rho g Q_1 dt + h_\tau^{(2)} \rho g Q_2 dt + h_\tau^{(2-B)} \rho g Q_0 dt. \quad (11.24)$$

Расход жидкости до разветвления Q_0 равен сумме расходов в ветвях, то есть

$$Q_0 = Q_1 + Q_2.$$

После подстановки этого соотношения в равенство (11.24) с учетом формулы (11.22) получим

$$h_\tau^{(A-B)} = h_\tau^{(A-1)} + h_\tau + h_\tau^{(2-B)}.$$

Совершенно аналогичные выводы получаются для разветвлений с любым числом параллельных ветвей.

Таким образом, расчет параллельных соединений из n ветвей сводится к решению системы уравнений

$$Q_0 = \sum_{i=1}^n Q_i, \quad h_\tau = h_\tau^{(1)} = h_\tau^{(2)} = \dots = h_\tau^{(n)}. \quad (11.25)$$

Решение системы (11.25) удобнее всего выполнять графоаналитическим методом. Рассмотрим в качестве примера случай $n = 2$. Зададимся

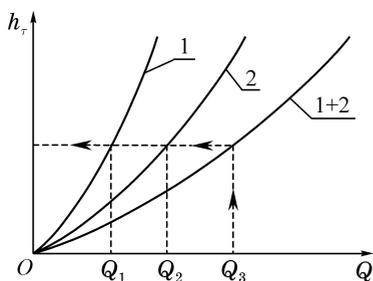


Рис. 11.7

серией значений расхода $Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, \dots, Q_n^{(1)}$ в ветви 1, пользуясь расчетной схемой (11.18) для каждого из этих значений посчитаем потери $h_r^{(1)}, h_r^{(2)}, \dots, h_r^{(n)}$. По результатам расчетов построим расходную характеристику (на рис. 11.7, кривая 1). Аналогичным образом рассчитаем расходную характеристику для ветви 2 (рис. 11.7, кривая 2). Суммируя абсциссы кривых 1 и 2, построим суммарную характеристику (кривая 1+2). Отложив на оси абсцисс полный расход Q_0 , на пересечении с кривой 1+2 найдем потери напора. Из приведенного построения ясно, что $h_r^{(1)} = h_r^{(2)}$, $Q_1 + Q_2 = Q_0$, то есть система уравнений (11.25) решена.

Подчеркнем еще раз, что при определении напора на участке $A-B$ фактически учитываются потери только в какой-либо одной из труб, образующей параллельное соединение.

§5. Трубопроводы, работающие под вакуумом

Трубопроводы, работающие под вакуумом, то есть такие, в которых давление ниже атмосферного, в технике встречаются часто. К ним относятся всасывающие линии насосов, сифонные трубопроводы и т.п.

Если в каком-либо сечении такого трубопровода давление становится равным давлению насыщенного пара перекачиваемой жидкости, то она начинает кипеть. В результате образуются полости (каверны), заполненные паром. Такое явление, как уже отмечалось, называется кавитацией.

Заметим, что из уравнения Бернулли следует, что при увеличении скорости в каком-либо сечении потока давление в этом сечении падает. Таким образом, кавитация может возникнуть в любом сужении потока, например, в местных сопротивлениях или в проточных частях гидромашин.

Образование кавитационных каверн приводит к росту потерь напора и, следовательно, к уменьшению расхода. Снижение расхода, в свою очередь, приводит к уменьшению потерь напора, то есть к росту давления в месте возникновения кавитации, конденсации пара и схлопыванию каверны. Схлопывание каверны сопровождается ударами (давление в центре каверны при ее схлопывании может достигать 50 МПа), вызывающими вибрацию трубопровода. Режим течения восстанавливается, давление снова падает, и вновь возникают кавитационные области.

Таким образом, понижение давления в каком-либо сечении трубопровода до значения давления насыщенного пара p_y приводит к неустойчивому режиму течения, вибрациям и, в конечном счете, к разрушению трубопровода. Аналогичные явления могут происходить и в гидромашинах. Из сказанного следует, что основным принципом расчета трубопроводов, работающих под вакуумом, является соблюдение требования

$$p_{\min} > p_y, \tag{11.26}$$

где p_{\min} – минимальное абсолютное давление в трубопроводе.

Рассмотрим в качестве примера применения этого принципа расчет сифона постоянного диаметра, схема которого представлена на рис. 11.8. Очевидно, что наименьшее давление будет в сечении $k-k$. Примем за плоскость отсчета $z = 0$ плоскость сечения $0-0$, совпадающую со свободной поверхностью жидкости в баке слева. Тогда уравнение Бернулли для участка между сечениями $0-0$ и $k-k$ примет вид

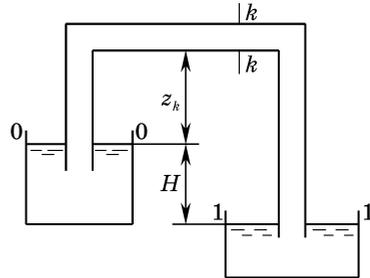


Рис. 11.8

$$\frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} + \frac{w_0^2}{2g} = z_k + \frac{p_k}{\rho g} + \frac{w_k^2}{2g} + h_{0-k}, \quad h_{0-k} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta \right) \frac{w_k^2}{2g}, \tag{11.27}$$

где $p_{\text{ат}}$ – атмосферное давление, а под ζ подразумевается сумма всех коэффициентов местных сопротивлений на участке $0-k$. Так как площадь свободной поверхности в баке много больше площади поперечного сечения трубы, то

$$\frac{w_0^2}{2g} \ll \frac{w_k^2}{2g},$$

и уравнение (11.27) можно переписать в виде*

$$\frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} = z_k + \frac{p_k}{\rho g} + \frac{w_k^2}{2g} \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \zeta \right). \tag{11.28}$$

Длину трубопровода l от его начала до сечения $k-k$ можно представить как

$$l = L + z_k,$$

* Пусть диаметр бака $D = 10d$. Так как $\frac{\pi D^2}{4} w_0^2 = \frac{\pi d^2}{4} w_k^2$, то $\frac{w_0^2}{w_k^2} = \frac{d^4}{D^4} = 10^{-4}$.

где L не изменяется при изменении z_k . Тогда из уравнения (11.28) с учетом неравенства (11.26) имеем

$$\frac{p_k}{\rho g} = \frac{p_{ат}}{\rho g} - \left(1 + \lambda \frac{l}{d} \frac{w_k^2}{2g}\right) z_k - \left(1 + \lambda \frac{L}{d} + \zeta\right) \frac{w_k^2}{2g} > \frac{p_y}{\rho g},$$

откуда

$$z_k < \frac{\frac{p_{ат} - p_y}{\rho g} - \left(1 + \lambda \frac{L}{d} + \zeta\right) \frac{w_k^2}{2g}}{1 + \lambda \frac{l}{d} \frac{w_k^2}{2g}}. \quad (11.29)$$

Таким образом, допустимая высота z_k подъема жидкости в сифоне заведомо меньше $\frac{p_{ат}}{\rho g}$.

Допустимая высота всасывания для насоса рассчитывается точно таким же образом.

Запишем уравнение Бернулли для участка между свободными поверхностями жидкости в баках 0 – 0 и 1 – 1. Пренебрегая скоростными напорами $\frac{w_0^2}{2g}$, $\frac{w_1^2}{2g}$ и учитывая, что на свободных поверхностях $p_0 = p_1 = p_{ат}$, получим

$$-H + h_{1-2} = 0. \quad (11.30)$$

Таким образом, потери напора в сифоне равны разности геометрических отметок H свободных поверхностей в баках.

Формула (11.30) позволяет рассчитать расход, используя вторую схему расчета простого трубопровода.

Глава XII

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

При рассмотрении многих технических вопросов, таких, например, как истечение жидкости из резервуаров различного назначения, утечки через свищи в трубопроводах, распыление жидкости через форсунки котельных агрегатов и двигателей внутреннего сгорания, приходится сталкиваться с истечением жидкости через отверстия и насадки различной формы.

§1. Истечение из малого отверстия

Рассмотрим резервуар (рис. 12.1), в днище которого имеется круглое отверстие диаметра d . Как известно из теоретической механики, материальные частицы при отсутствии ударных сил не могут двигаться по траекториям, имеющим угловые точки*. Благодаря этому поверхность струи, вытекающей из отверстия, примыкает к краю отверстия под нулевым углом к поверхности дна резервуара, далее струя сжимается и на некотором расстоянии l приобретает площадь сечения ω_c , меньшую, чем площадь отверстия ω (рис. 12.2).

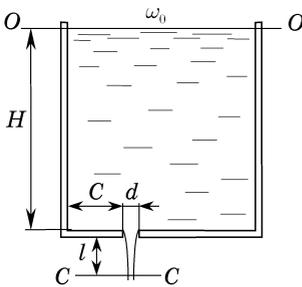


Рис. 12.1

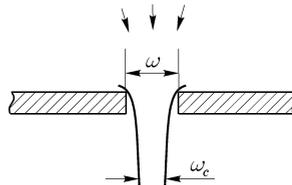


Рис. 12.2

* Предполагается, что в этих точках скорость частицы отлична от нуля.

Величина

$$\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega} < 1 \quad (12.1)$$

называется *коэффициентом сжатия* струи.

Если стенки резервуара не влияют на формирование струи, то сжатие называется *совершенным*. В противном случае сжатие будет *несовершенным*. Из эксперимента известно, что для того, чтобы сжатие было совершенным, необходимо, чтобы расстояние от стенки C было больше, чем $3d$, то есть должно выполняться условие $C > 3d$ (рис. 12.1). Если по части периметра отверстия имеются направляющие козырьки (рис. 12.2), то сжатие называется *неполным*. При отсутствии козырьков сжатие называется *полным*.

Для определения скорости истечения из отверстия проведем сечения $O - O$ через свободную поверхность жидкости в резервуаре и $C - C$ – в том месте, где заканчивается сжатие струи (рис. 12.1). Запишем теперь уравнение Бернулли для участка между этими сечениями, приняв сечение $C - C$ за плоскость отсчета. Тогда

$$l + H + \frac{p_o}{\rho g} + \alpha_o \frac{w_o^2}{2g} = \frac{p_c}{\rho g} + \alpha_c \frac{w_c^2}{2g} + h_{o-c}. \quad (12.2)$$

Кроме того, из уравнения неразрывности следует, что

$$\omega_o w_o = \omega_c w_c = \varepsilon \omega w_c,$$

где ω_o – площадь резервуара в сечении $O - O$.

Из эксперимента известно, что расстояние l , на котором завершается сжатие струи, примерно равно диаметру отверстия d , то есть $l \approx d$. Поэтому в подавляющем большинстве случаев можно принять $l \ll H$ и пренебречь величиной l в уравнении (12.2).

Так как скорость течения в отверстии много больше скорости течения в резервуаре, то можно принять, что все потери напора сосредоточены в отверстии, которое является местным сопротивлением. Поэтому в соответствии с формулой (11.15)

$$h_{o-c} = h_m = \zeta \frac{w_c^2}{2g}. \quad (12.4)$$

Исключая с помощью равенства (12.3) скорость w_o из уравнения Бернулли (12.2), пренебрегая величиной l и учитывая формулу (12.4), получим

$$H + \frac{p_o}{\rho g} + \alpha_o \left(\varepsilon \frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \frac{w_c^2}{2g} = \frac{p_c}{\rho g} + \alpha_c \frac{w_c^2}{2g} + \zeta \frac{w_c^2}{2g},$$

или

$$H + \frac{P_o - P_c}{\rho g} = \left[\alpha_c + \zeta - \alpha_o \left(\varepsilon \frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right] \frac{w_c^2}{2g}. \quad (12.5)$$

Из формулы (12.5) следует, что скорость истечения w_c равна

$$w_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta - \alpha_o \left(\varepsilon \frac{\omega}{\omega_o} \right)^2}} \sqrt{2g \left(H + \frac{P_o - P_c}{\rho g} \right)}. \quad (12.6)$$

Величина $H_{\text{ист}}$, равная

$$H_{\text{ист}} = H + \frac{P_o - P_c}{\rho g}, \quad (12.7)$$

называется *напором истечения*.

Величина φ , равная

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta - \alpha_o \left(\varepsilon \frac{\omega}{\omega_o} \right)^2}}, \quad (12.8)$$

называется *коэффициентом скорости*.

В приведенных с помощью равенств (12.7) и (12.8) обозначениях формула (12.6) может быть представлена в виде

$$w_c = \varphi \sqrt{2gH_{\text{ист}}}. \quad (12.9)$$

Величины α_o и α_c отличны от единицы, а величина ζ больше нуля благодаря вязкости жидкости. Величина $\varepsilon < 1$ из-за наличия инерции. Поэтому можно сказать, что коэффициент скорости φ учитывает вязкостные и инерционные свойства жидкости.

Известно (см. §11.1), что $\alpha_c > 1$, $\alpha_o > 1$. Кроме того, очевидно, что $\zeta > 0$.

Если отношение площади отверстия ω к площади свободной поверхности в резервуаре ω_o мало, то есть если $\left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \ll 1$, то отверстие называется *малым*.

Для малого отверстия формула (12.9) сохраняет свой вид, но, в отличие от формулы (12.8), коэффициент скорости φ равен

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta}},$$

и так как $\alpha_c > 1$, $\zeta > 0$, то $\varphi < 1$.

Для идеальной жидкости из-за отсутствия трения $\alpha_c = 1$, $\zeta = 0$. Тогда $\varphi = 1$ и формула (12.9) принимает вид

$$w_T = \sqrt{2gH_{\text{ист}}}. \quad (12.10)$$

Скорость, определяемая формулой (12.10), называется *теоретической* скоростью истечения. Следовательно, как это видно из формул (12.9) и (12.10), коэффициент скорости представляет собой отношение действительной скорости истечения и теоретической.

Расход жидкости Q через отверстие равен, очевидно, произведению скорости струи на площадь ее сечения, то есть

$$Q = w_c \omega_c = \varepsilon \omega w_c,$$

или, с учетом формулы (12.9),

$$Q = \omega \varepsilon \varphi \sqrt{2gH_{\text{ист}}} \quad (12.11)$$

или

$$Q = \omega \mu \sqrt{2gH_{\text{ист}}}. \quad (12.12)$$

Величина $\mu = \varepsilon \varphi$ называется *коэффициентом расхода*.

Таким образом, коэффициенты сжатия ε , скорости φ , расхода μ не являются независимыми, а связаны между собой равенством (12.12). Следовательно, для расчета истечения из отверстия достаточно знать два любых коэффициента из трех.

Назовем *теоретическим расходом* величину

$$Q_T = \omega w_T = \omega \sqrt{2gH_{\text{ист}}}. \quad (12.13)$$

Из формул (12.11) и (12.13) следует, что коэффициент расхода представляет собой отношение действительного расхода к теоретическому.

Коэффициенты ε , φ , μ определяются экспериментально и являются функциями числа Рейнольдса. Примерный вид этих зависимостей приведен на рис. 12.3.

С помощью уравнения Бернулли легко показать, что для малого отверстия формулы (12.9) и (12.12) будут справедливы и в том случае, если отверстие находится в боковой стенке резервуара. При этом под H следует понимать расстояние от оси отверстия до свободной поверхности.

§2. Истечение через насадки

Короткая трубка, присоединенная к отверстию, называется *насадком*. Длина насадка составляет 3–5 диаметров отверстия. Характер истечения

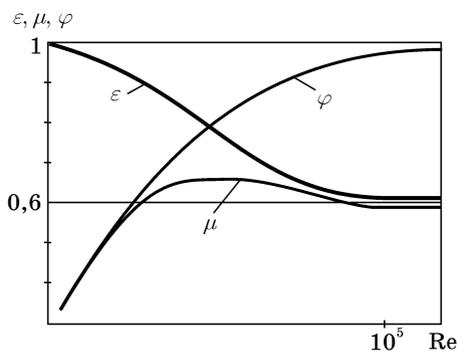


Рис. 12.3

жидкости через насадок существенно зависит от формы насадка. Из вывода формул (12.9) и (12.12) видно, что они будут справедливы и для истечения через насадки. Однако коэффициенты φ и μ будут иметь для различных насадков разные значения.

На рис. 12.4 показаны различные типы насадков: 1 – внешний цилиндрический, 2 – внутренний цилиндрический, 3 – конический сходящийся, 4 – конический расходящийся, 5 – коноидальный.

Значения коэффициентов скорости φ и расхода μ при квадратичном* законе истечения приведены в таблице

Тип насадка	Таблица	
	μ	φ
Круглое отверстие	0,62	0,97
Внешний цилиндрический	0,82	0,82
Внутренний цилиндрический	0,71	0,71
Конический сходящийся (угол конусности 13°24')	0,95	0,96
Конический расходящийся (угол конусности 5°)	0,48	0,48
Конoidalный	0,98	0,98

Из приведенной таблицы видно, что для некоторых насадков $\varphi = \mu$, то есть $\varepsilon = 1$. Это объясняется тем, что сжатие струи происходит внутри этих насадков, а значения коэффициентов φ и μ приведены для выходных сечений. Из этой таблицы также видно, что при прочих равных условиях

* При истечении из отверстий и насадков так же, как и при течении по трубам, существует квадратичный режим, то есть режим, при котором φ и μ не зависят от числа Рейнольдса.

расход через внешний цилиндрический насадок на 30% больше, чем через круглое отверстие того же диаметра. В связи с этим рассмотрим более подробно истечение жидкости через внешний цилиндрический насадок.

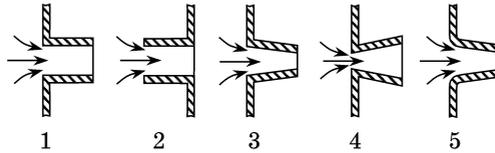


Рис. 12.4

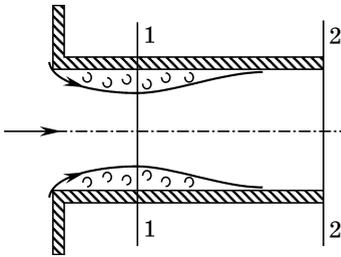


Рис. 12.5

Для того, чтобы струя после расширения могла полностью заполнить сечение насадка, его длина, как показывают соответствующие эксперименты, должна составлять не менее трех диаметров. Схема струи внутри насадка представлена на рис. 12.5. Из этой схемы видно, что струя при входе в асадок сжимается, а затем расширяется. При этом в области сжатия образуется застойная зона, заполненная вихрями.

Проведем внутри насадка сечения 1–1 и 2–2 (рис. 12.5) и запишем уравнение Бернулли для участка между этими сечениями, считая для простоты ось насадка горизонтальной. Тогда

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + h_{1-2}. \tag{12.14}$$

Ввиду малости расстояния между выбранными сечениями потерями по длине можно пренебречь. Следовательно, потери на участке 1–2 определяются потерями на внезапное расширение струи. Для определения потерь напора на такое расширение струи рассмотрим закон изменения количества движения (2.51), то есть рассмотрим уравнение

$$Q_m (\bar{v}_2^{(cp)} - \bar{v}_1^{(cp)}) = \vec{G} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}. \tag{12.15}$$

Силы тяжести \vec{G} , давления \vec{P} , нормальных реакций \vec{N} , приложенных к боковой поверхности струи, и трения \vec{T} определяются, соответственно, из соотношений (2.46), (2.47) и (2.48).

Проектируя уравнение (12.15) на горизонтальную ось насадка Ox и пренебрегая ввиду малости ее длины силой трения \vec{T} , получим

$$Q_m(w_2 - w_1) = P_x + N_x. \quad (12.16)$$

Принимая распределение давления в сечениях 1 – 1 и 2 – 2 гидростатическим, имеем

$$P_x = p_1\omega_1 - p_2\omega_2, \quad N_x = p_1(\omega_2 - \omega_1), \quad (12.17)$$

где ω_1, ω_2 – площади сечения струи в сечениях 1 – 1 и 2 – 2, соответственно. Учитывая, что массовый расход Q_m можно представить в виде $Q_m = \rho w_2 \omega_2$, после подстановки соотношений (12.17) в уравнение (12.16) получим

$$\rho w_2(w_2 - w_1) = p_1 - p_2. \quad (12.18)$$

Исключая из соотношений (12.14) и (12.18) разность давлений $p_1 - p_2$, после элементарных преобразований имеем

$$h_{1-2} = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}. \quad (12.19)$$

Полученное выражение называется формулой Борда*.

Из уравнения неразрывности для струи имеем

$$w_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} w_2 = \frac{1}{\varepsilon_{\text{вх}}} w_2, \quad (12.20)$$

где $\varepsilon_{\text{вх}} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ – коэффициент сжатия струи при входе в насадок.

Подставив соотношения (12.19) и (12.20) в уравнение Бернулли (12.14), получим

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} - \frac{1 - \varepsilon_{\text{вх}}}{\varepsilon_{\text{вх}}} \frac{w_2^2}{2g}. \quad (12.21)$$

Так как $\varepsilon_{\text{вх}} < 1$, то из формулы (12.21) видно, что $p_1 < p_2$, то есть в сечении 1–1 имеет место разрежение, что и приводит к увеличению расхода по сравнению с круглым отверстием.

Воспользовавшись равенством (12.9), формулу (12.21) можно представить в виде

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} - 2\varphi^2 \frac{1 - \varepsilon_{\text{вх}}}{\varepsilon_{\text{вх}}} H_{\text{ист}}. \quad (12.22)$$

* Жан Шарль Борда (1733–1799), французский физик.

При истечении в атмосферу $p_2 = p_{ат}$, и в сечении 1-1 образуется вакуум. Величина этого вакуума ($p_v = p_{ат} - p_1$) равна

$$\frac{p_v}{\rho g} = \frac{p_{ат} - p_1}{\rho g} = 2\varphi^2 \frac{1 - \varepsilon_{вх}}{\varepsilon_{вх}} H_{ист}$$

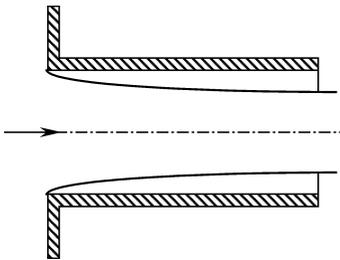


Рис. 12.6

и тем больше, чем больше напор истечения $H_{ист}$. Однако существует предельное значение $H_{ист} = H_{кр}$, выше которого работа насадка нарушается, происходит отрыв струи от его стенок и расход резко уменьшается (рис. 12.6). При этом истечение происходит так же, как через отверстие. Явление отрыва струи от стенок называется *срывом истечения*. Для воды $H_{кр} \approx 14,5$ м.

С увеличением длины насадка начинает сказываться увеличение потерь на трение по его длине. Так как потери на трение h_τ в соответствии с формулой Дарси-Вейсбаха равны

$$h_\tau = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g},$$

то из уравнения Бернулли (12.5) сразу следует, что для насадка

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta + \lambda \frac{l}{d}}}. \tag{12.23}$$

Из формулы (12.23) можно определить значение $\frac{l}{d}$, при котором расход через насадок равен расходу через отверстие.

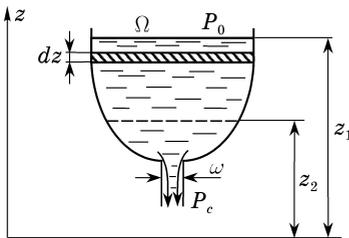


Рис. 12.7

§3. Истечение жидкости при переменном уровне

Рассмотрим истечение жидкости через малое отверстие или насадок при переменном уровне в резервуаре. Течение будет при этом неустановившимся, так как напор и, следовательно, скорость истечения меняются во времени. Будем считать, что площадь поперечного сечения

резервуара Ω зависит от высоты, то есть, что $\Omega = \Omega(z)$ (рис. 12.7). За промежуток времени dt уровень жидкости в резервуаре опустится на ве-

личину dz . Следовательно, объем вытекшей жидкости будет равен $V = -\Omega dz$. С другой стороны, за время dt через отверстие (насадок) вытечет объем $V = Q dt$. Приравнявая эти объемы, получим

$$Q dt = -\Omega(z) dz. \quad (12.24)$$

Принимая, что формула (12.12) справедлива и при неустановившемся движении, равенство (12.24) можно представить в виде

$$dt = -\frac{\Omega(z) dz}{\omega\mu\sqrt{2gH_{\text{ист}}}} \quad (12.25)$$

или, так как в рассматриваемом случае

$$H_{\text{ист}} = z + \frac{P_o - P_c}{\rho g},$$

в виде

$$dt = -\frac{\Omega(z) dz}{\omega\mu\sqrt{2g\left(z + \frac{P_o - P_c}{\rho g}\right)}}. \quad (12.26)$$

Из равенства (12.26) следует, что время t опускания уровня в резервуаре от отметки z_1 до отметки z_2 равно

$$t = -\int_{z_1}^{z_2} \frac{\Omega(z) dz}{\omega\mu\sqrt{2g\left(z + \frac{P_o - P_c}{\rho g}\right)}} = \int_{z_2}^{z_1} \frac{\Omega(z) dz}{\omega\mu\sqrt{2g\left(z + \frac{P_o - P_c}{\rho g}\right)}}. \quad (12.27)$$

Примем, что коэффициент расхода μ при истечении с переменным уровнем имеет то же значение, что и при истечении с постоянным уровнем. Кроме того, будем считать, что $\mu = \text{const}$. Опыт показывает, что все введенные допущения приводят к весьма незначительным погрешностям. В соответствии со сказанным формулу (12.27) можно представить в виде

$$t = \frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}} \int_{z_2}^{z_1} \frac{\Omega(z) dz}{\sqrt{z + \frac{P_o - P_c}{\rho g}}}. \quad (12.28)$$

Рассмотрим некоторые примеры, принимая для простоты, что $p_o = p_c$.

1. Истечение из вертикального цилиндра (рис. 12.8). В этом случае $\Omega = \text{const}$, и из формулы (12.28) имеем

$$t = \frac{2\Omega(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})}{\omega\mu\sqrt{2g}}.$$

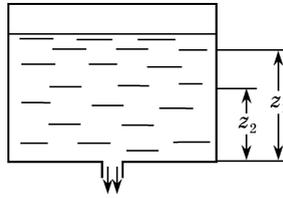


Рис. 12.8

2. Истечение из горизонтального кругового цилиндра (рис. 12.9)

Из рис. 12.9 видно, что

$$b = 2\sqrt{R^2 - (z - R)^2} = 2\sqrt{2Rz - z^2}, \quad (12.29)$$

а площадь свободной поверхности Ω равна

$$\Omega = bL = 2L\sqrt{2Rz - z^2}.$$

Тогда из формулы (12.28) имеем при $p_o = p_c$

$$\begin{aligned} t &= \frac{2L}{\omega\mu\sqrt{2g}} \int_{z_2}^{z_1} \frac{\sqrt{2Rz - z^2}}{\sqrt{z}} dz = \frac{2L}{\omega\mu\sqrt{2g}} \int_{z_2}^{z_1} \sqrt{2R - z} dz = \\ &= \frac{4L}{3\omega\mu\sqrt{2g}} (\sqrt{2R - z_2} - \sqrt{2R - z_1}). \end{aligned}$$

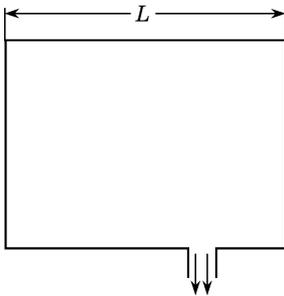


Рис. 12.9

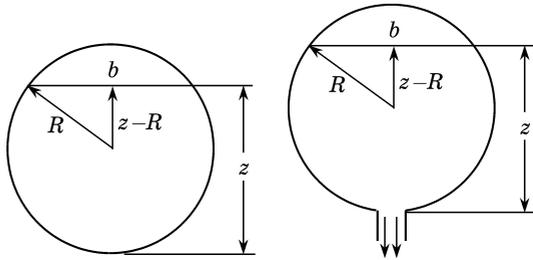


Рис. 12.10

3. Истечение из сферического резервуара (рис. 12.10). В этом случае

$$\Omega = \frac{\pi b^2}{4},$$

где величина b определяется по формуле (12.29). Тогда

$$\Omega = \pi(2Rz - z^2),$$

и из формулы (12.28) имеем

$$t = \frac{\pi}{\omega\mu\sqrt{2g}} \int_{z_2}^{z_1} \frac{2Rz - z^2}{\sqrt{z}} dz = \frac{2\pi}{\omega\mu\sqrt{2g}} \left[\frac{2}{3} R(z_1^{3/2} - z_2^{3/2}) - \frac{1}{5} (z_1^{5/2} - z_2^{5/2}) \right].$$

Глава XIII

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Обширный класс инженерных задач, таких как расчет трубопроводов различного назначения, связан с необходимостью изучения неустановившегося движения жидкости по трубам. Однако методы, использующие модель несжимаемой жидкости и недеформируемого трубопровода, приводят к существенным расхождениям с результатами эксперимента, особенно при рассмотрении длинных линий или быстропротекающих процессов. Действительно, из уравнения (2.41) следует, что указанная модель в принципе не может описывать волновые процессы, возникающие в трубах. Для их описания необходимо учитывать упругость жидкости и податливость стенок трубопровода. Это привело к выделению теории неустановившихся движений жидкости по трубам в более или менее самостоятельный раздел гидромеханики.

Законченная теория неустановившихся движений идеальной сжимаемой жидкости по трубам была построена Н.Е.Жуковским. В дальнейшем рядом авторов были разработаны различные приближенные методы, позволившие учесть влияние сил трения в виде поправок, вводимых в решение для идеальной жидкости. Используя гипотезу квазистационарности, предложенную С.А.Христиановичем, И.А.Чарный* впервые осуществил учет сил трения непосредственно в уравнениях движения жидкости. В настоящее время теория, основанная на гипотезе квазистационарности, является общепринятой. Однако, как было показано в ряде экспериментальных и теоретических работ, гипотеза квазистационарности представляет собой лишь первое приближение и имеет ограниченную область применений.

§1. Уравнения неустановившихся движений жидкости по трубам

Для вывода уравнений неустановившихся движений жидкости по трубам воспользуемся уравнением неразрывности (2.27) и законом изменения

* Исаак Абрамович Чарный (1909–1967), ученый в области гидромеханики.

количества движения (2.44), то есть уравнениями

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho v_n dS = 0, \quad (13.1)$$

$$\int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{v} v_n dS = \int_V \rho \vec{F} dV + \int_S \vec{p}_n dS. \quad (13.2)$$

Полагая

$$\vec{p}_n = -p\vec{n} + \vec{\tau}_n,$$

где $\vec{\tau}_n$ – напряжение трения, и используя теорему Гаусса–Остроградского, уравнение (13.2) можно представить в виде

$$\int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{v} v_n dS = \int_V (\rho \vec{F} - \nabla p) dV + \int_S \vec{\tau}_n dS. \quad (13.3)$$

Рассмотрим в качестве объема V участок трубы с прямолинейной осью Ox (гидравлическая ось), ограниченный сечениями f и f_1 , расположенными на расстоянии dx друг от друга (рис. 13.1). Будем считать, что $f = f(x, t)$, то есть, что площадь поперечного сечения трубы зависит от координаты и времени. Так как в сечении f $v_n = -v_x$, а в сечении f_1 $v_n = v_x$, то для выделенного элемента V уравнение (13.1) может быть представлено в виде

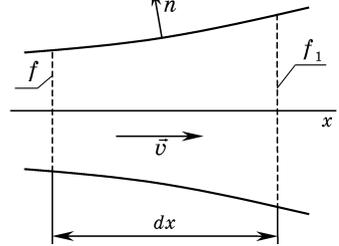


Рис. 13.1

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV - \int_f \rho v_x df + \int_{f_1} \rho v_x df + \int_\omega \rho v_n d\omega = 0, \quad (13.4)$$

где ω – боковая поверхность элемента V .

Уравнение (13.3) в проекции на ось Ox принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} dV - \int_f \rho v_x^2 df + \int_{f_1} \rho v_x^2 df + \int_\omega \rho v_x v_n d\omega = \\ & = \int_V \left(\rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right) dV - \int_f \tau_{xx} df + \int_{f_1} \tau_{xx} df + \int_\omega \tau_{nx} d\omega. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Очевидно, что для рассматриваемого объема с точностью до членов более высокого порядка малости

$$\int_V \varphi dV = \int_f \varphi df dx, \quad \int_{f_1} \varphi df - \int_f \varphi df = \frac{\partial}{\partial x} \int_f \varphi df dx. \quad (13.6)$$

Будем также считать, что площадь и форма поперечного сечения трубы f изменяются достаточно плавно, то есть что (рис. 13.1)

$$\cos^2(n, x) \ll 1.$$

Тогда

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} \int_{\omega} \varphi d\omega = \int_{\chi} \varphi d\chi, \quad (13.7)$$

где χ – периметр сечения потока.

Используя соотношения (13.6) и (13.7) и переходя в уравнениях (13.4), (13.5) к пределу при $dx \rightarrow 0$, получим

$$\int_f \frac{\partial \rho}{\partial t} df + \frac{\partial}{\partial x} \int_f \rho v_x df + \int_{\chi} \rho v_n d\chi = 0, \quad (13.8)$$

$$\int_f \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} df + \frac{\partial}{\partial x} \int_f \rho v_x^2 df + \int_{\chi} \rho v_x v_n d\chi =$$

$$\int_f \left(\rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right) df + \frac{\partial}{\partial x} \int_f \tau_{xx} df + \int_{\chi} \tau_{nx} d\chi.$$

Для дальнейшего преобразования уравнений (13.8) и (13.9) вычислим величину

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_f \varphi df,$$

где $\varphi(x, y, z, t)$ – некоторая дифференцируемая функция координат и времени.

Так как $f = f(x, t)$, то $df = v'_n d\chi \Delta t$, где v'_n – проекция скорости \vec{v} на внешнюю нормаль \vec{n}'

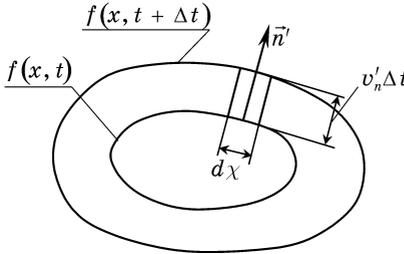


Рис. 13.2

к плоскому контуру χ (рис. 13.2). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_f \varphi df &= \lim \left[\int_{f(x, t + \Delta t)} \frac{\varphi(x, y, z, t + \Delta t)}{\Delta t} df - \int_{f(x, t)} \frac{\varphi(x, y, z, t)}{\Delta t} df \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{f(x, t)} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} df + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)} \frac{\varphi(t + \Delta t)}{\Delta t} df = \\ &= \int_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} df + \int_{\chi} \varphi v'_n d\chi. \end{aligned} \quad (13.10)$$

При течении вязкой жидкости на боковой поверхности ω касательная составляющая скорости $v_\tau = 0$, а нормальная составляющая $v_n = \pm|\vec{v}|$. Поскольку нормаль \vec{n}' лежит в плоскости, перпендикулярной Ox , а $\cos^2(n, x) \ll 1$ по условию, то

$$v'_n = v_n \cos(\vec{v}, \vec{n}') = v_n \sqrt{1 - \cos^2(n, x)} \approx v_n,$$

и формула (13.10) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_f \varphi df = \int_f \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \int_x \varphi v_n d\chi. \quad (13.11)$$

Подставив выражение (13.11) в уравнения (13.8) и (13.9), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_f \rho df + \frac{\partial}{\partial x} \int_f \rho v_x df = 0, \quad (13.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_f \rho v_x df + \frac{\partial}{\partial x} \int_f \rho v_x^2 df = \int_f \left(\rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right) df + \frac{\partial}{\partial x} \int_f \tau_{xx} df + \int_x \tau_{nx} d\chi. \quad (13.13)$$

Примем далее, что единственной действующей массовой силой является сила тяжести, то есть $\rho F_x = -\rho g \frac{\partial z_1}{\partial x}$, где z_1 – координата точки жидкости, отсчитываемая от произвольной горизонтальной плоскости вертикально вверх. Тогда

$$\int_f \left(\rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right) df = - \int_f \left(\rho g \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) df = - \int_f \left[\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z_1) - g z_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] df.$$

Как для газа, так и для слабо сжимаемой жидкости величина $g z_1 \frac{\partial \rho}{\partial x}$ мала по сравнению с $\frac{\partial p}{\partial x}$. Поэтому

$$\int_f \left(\rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} \right) df \approx - \int_f \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z_1) df = -f \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z_1), \quad (13.14)$$

поскольку для плавно изменяющегося потока ($\cos^2(n, x) \ll 1$), как это следует из уравнений Навье-Стокса, в поперечном сечении f $p + \rho g z_1 \approx \text{const}$.

Далее, очевидно, можно написать

$$\int_x \tau_{nx} d\chi = \tau_\chi \chi, \quad (13.15)$$

где τ_χ – среднее по периметру сечения потока значение τ_{nx} . Величиной

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_f \tau_{xx} df$$

принято при выполнении гидравлических расчетов пренебрегать*. Кроме того, будем считать, что плотность жидкости пренебрежимо мало меняется по сечению потока.

Подставляя выражения (13.14) и (13.15) в уравнение (13.13) и учитывая последние замечания, из уравнений (13.12) и (13.13) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho f)}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} &= -f \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho g z_1) + \chi \tau_\chi, \end{aligned} \quad (13.16)$$

где $M = \int_f \rho v_x df = \rho w f$ – массовый расход жидкости, $J = \int_f \rho v_x^2 df = \beta \rho w^2 f = \beta M w$ – проекция на ось Ox количества движения массы M , w – средняя в сечении скорость жидкости, β – поправка Кориолиса на неравномерное распределение плотности и скорости в выражении для количества движения потока**. При выводе уравнений (13.16) не делалось никаких предположений о виде закона трения. Поэтому эти уравнения являются справедливыми для любого потока газа или жидкости (как ньютоновской, так и неньютоновской) при условии, что $\cos^2(n, x) \ll 1$. Уравнения (13.16) содержат в качестве неизвестных пять величин: p, ρ, w, f, τ_χ (β считается известной функцией w , свойств жидкости, вида нестационарности и геометрии трубы). Для получения замкнутой системы к уравнениям (13.16) необходимо добавить зависимость τ_χ от w , уравнение состояния жидкости (газа) и связь между площадью сечения трубы и давлением.

Стенки трубы будем считать упругими, площадь поперечного сечения зависящей от давления согласно закону Гука, то есть

$$f = f_0 \left(1 + e \frac{p - p_0}{E} \right), \quad (13.17)$$

где $f_0 = f_0(x)$ – площадь поперечного сечения трубы при давлении p_0 , E – модуль Юнга материала трубы, e – безразмерный коэффициент, зависящий от формы сечения и толщины стенок трубы. Влиянием продольных сил

* Последнее вытекает из того, что в соответствии с формулами (4.21) и (4.28) для слабосжимаемой жидкости $p_{xx} = -p + \tau_{xx} = -p + \mu \frac{\partial v}{\partial x}$, а в обычных условиях $\mu \frac{\partial v}{\partial x} \ll p$.

** При турбулентном режиме движения $\beta \approx 1,03 - 1,1$, при ламинарном – $\beta = 1,33$.

упругости и сил инерции стенок трубы можно пренебречь. В случае слабо-сжимаемой жидкости будем предполагать, что она также следует закону Гука, то есть

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K_{\text{ж}}} \right), \quad (13.18)$$

где ρ_0 – плотность при давлении p_0 , $K_{\text{ж}}$ – модуль объемного сжатия жидкости.

Так как выражения (13.17) и (13.18) справедливы лишь при

$$e \frac{p - p_0}{E} \ll 1, \quad \frac{p - p_0}{K_{\text{ж}}} \ll 1, \quad (13.19)$$

то

$$\rho f = \rho_0 f_0 \left[1 + \left(\frac{1}{K_{\text{ж}}} + \frac{e}{E} \right) (p - p_0) \right] = \rho_0 f_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K} \right), \quad (13.20)$$

где

$$K = \frac{K_{\text{ж}}}{1 + e \frac{K_{\text{ж}}}{E}}$$

– приведенный модуль объемного сжатия, учитывающий упругость как жидкости, так и стенок трубы. Для тонкостенной круглой трубы

$$e = \frac{d}{h},$$

где d – внутренний диаметр, h – толщина стенки трубы. По определению, скорость звука* в системе «упругая жидкость», текущая по упругой трубе, равна

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}. \quad (13.21)$$

Из формул (13.20) и (13.21) следует, что

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial t} = \frac{\rho_0 f_0}{K} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{f_0}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (13.22)$$

С другой стороны, в соответствии с законом Гука (13.18), имеем

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (p + \rho g z_1) = \frac{\partial p}{\partial x} + g z_1 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{g z_1 \rho_0}{K_{\text{ж}}} \frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (13.23)$$

где $\bar{p} = p + \rho g z_1$ – приведенное давление.

* Под скоростью звука понимается скорость распространения малых возмущений, то есть таких, для которых выполняются условия (13.19).

Подставив соотношения (13.22) и (13.23) в уравнения (13.16), получаем

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{c^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} &= -f \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \chi \tau_\chi. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Для случая течения газа в трубе можно принять $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, то есть пренебречь изменением площади сечения трубы. Тогда, воспользовавшись известной формулой $\frac{dp}{\rho} = c_o^2$, где c_o – скорость звука в газе, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial(\rho f)}{\partial t} = \frac{f}{c_o^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (p + \rho g z_1) = \frac{\partial p}{\partial t} + g z_1 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{g z_1}{c_o^2} \frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned} \quad (13.25)$$

откуда сразу следует, что уравнения (13.24) справедливы и для газа. В дальнейшем не будем пользоваться разными обозначениями c и c_o .

Для установления зависимости τ_χ от свойств жидкости и параметров течения воспользуемся гипотезой квазистационарности, то есть предположением, что характеристики сопротивлений, установленные для стационарных течений, сохраняются и для нестационарных. Тогда, в соответствии с формулой (10.35), будем иметь

$$\tau_\chi = -\lambda \frac{|w|}{8} \rho w,$$

и уравнения (13.24) примут окончательный вид

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{c^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} &= -f \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \chi \lambda \frac{|w|}{8} \rho w. \end{aligned} \quad (13.26)$$

§2. Уравнения неустановившихся движений слабосжимаемой жидкости по трубам

Интегрируя второе уравнение (13.26) по x , имеем

$$\int_0^x \frac{\partial M}{\partial t} dx + J(x) - J(0) = -f_{\text{cp}} [\bar{p}(x) - \bar{p}(0)] + \int_0^x \chi \lambda \frac{|w|}{8} \rho w dx,$$

где f_{cp} – среднее значение площади f на участке $[0, x]$. Из определения J следует, что величина

$$\frac{J}{f} = \beta \rho w^2$$

представляет собой динамическое давление, соответствующее удвоенному скоростному напору. Очевидно, что при движении слабосжимаемой жидкости можно пренебречь изменением этого давления по сравнению с изменением приведенного давления $\bar{p}(x) - \bar{p}(0)$. Последнее эквивалентно пренебрежению членом $\frac{\partial J}{\partial x}$ в уравнениях (13.26). Далее, в соответствии с формулами (13.20) и (13.21) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{\partial(\rho f w)}{\partial x} = \rho f \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial(\rho f)}{\partial x} = \rho f \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{f_0 w}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} \approx \rho f \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial(\rho f w)}{\partial t} = \rho f \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial(\rho f)}{\partial t} = \rho f \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{f_0 w}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \approx \rho f \frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Подставив соотношения (13.27) в уравнения (13.26), пренебрегая членом $\frac{\partial J}{\partial x}$ и полагая $f \approx f_0$, $\rho \approx \rho_0$, получим уравнения движения вязкой, слабосжимаемой жидкости в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} &= \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \\ -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\lambda |w|}{8\delta} w \right), \end{aligned} \quad (13.28)$$

где $\delta = \frac{f}{\lambda}$ – гидравлический радиус потока. Для оценки полученного результата рассмотрим уравнение Навье-Стокса (9.3), описывающее течение несжимаемой жидкости по призматической трубе. Полагая трубу круглой (поток осесимметричный) и $\vec{F} = \vec{g}$, из уравнения (9.3) в проекции на ось Ox имеем

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho g z_1 + p) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (13.29)$$

Средняя скорость течения в этом случае равна

$$w = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r u \, dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R r u \, dr, \quad (13.30)$$

где R – радиус трубы. Умножив уравнение (13.29) на $2\pi r \, dr$ и интегрируя по радиусу от 0 до R , с учетом равенства (13.30) получим

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \rho \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{2\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R},$$

или, так как для круглой трубы $\delta = \frac{R}{2}$, $\tau_\chi = \mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R}$,

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \rho \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\tau_k}{\delta}. \quad (13.31)$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет, очевидно, вид

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (13.32)$$

Из сравнения уравнений (13.31) и (13.32) с системой уравнений (13.28) следует, что сжимаемость жидкости и упругость стенок трубы учтены в уравнениях (13.28) только в том, что в них, в отличие от несжимаемой жидкости, $w = w(x, t)$, и скорость звука c имеет конечное значение. Однако, указанные отличия имеют принципиальное значение. Действительно, система уравнений (13.28) является гиперболической, то есть допускает, в отличие от уравнений для несжимаемой жидкости, волновые решения. Следовательно, уравнения (13.28) позволяют описывать волновые процессы, возникающие в трубах при неустановившемся движении. Уравнения (13.28) содержат в общем случае нелинейный член $\lambda \frac{|w|}{8\delta} w$, что существенно затрудняет их интегрирование. Различные способы линеаризации, заключающиеся в представлении нелинейного члена в виде

$$\lambda \frac{|w|}{8\delta} w = 2aw, \quad 2a = \left(\frac{\lambda |w|}{8\delta} \right)_{\text{cp}} = \text{const} > 0, \quad (13.33)$$

рассмотрены в монографиях, представленных в списке литературы. Там же приведены некоторые оценки погрешностей, возникающих в результате линеаризации. При ламинарном режиме течения $\lambda = \frac{A}{\text{Re}}$, откуда

$$\lambda \frac{|w|}{8\delta} = \frac{A|w|\mu}{\rho|w|4\delta \cdot 8\delta} = \frac{A\mu}{32\rho\delta^2} = 2a.$$

В случае круглых труб $A = 64$, $\delta = \frac{d}{4}$ и $2a = \frac{32\mu}{\rho d^2}$, где d – диаметр трубы. Подставив соотношение (13.33) в уравнения (13.28), получим окончательно

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} &= \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \\ -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + 2aw \right). \end{aligned} \quad (13.34)$$

Отметим еще раз, что в этих уравнениях принимается $\rho = \text{const}$.

§3. Уравнения неустановившихся движений газа по трубам с малыми дозвуковыми скоростями

При рассмотрении течения газа необходимо к уравнениям (13.26) добавить уравнение состояния, например,

$$\frac{p}{\rho} = ZRT, \quad (13.35)$$

где Z – коэффициент сверхсжимаемости, R – газовая постоянная, T – абсолютная температура.

Подставив равенство (13.35) в выражение $\bar{p} = p + \rho g z_1$, имеем

$$\bar{p} = p + \rho g z_1 = p \left(1 + \frac{g z_1}{ZRT} \right),$$

откуда видно, что даже при достаточно больших z_1 ($z_1 < 200$ м) можно принимать $\bar{p} \approx p$. Как показывают соответствующие оценки, при движении газа в длинных газопроводах с малыми дозвуковыми скоростями можно пренебрегать динамическим давлением, соответствующим удвоенному скоростному напору, и тем более – его изменением, то есть пренебречь членом $\frac{\partial J}{\partial x}$ в уравнениях (13.24).

Учитывая эти оценки, а также полагая $f = f_0$, из уравнений (13.26) имеем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial(\rho w)}{\partial x}, \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\lambda|w|}{8\delta} \rho w = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\lambda|\rho w|}{8\delta} \frac{\rho w}{\rho}. \end{aligned} \quad (13.36)$$

Так как коэффициент гидравлического сопротивления зависит от числа Re ,

$$\lambda = \lambda(Re) = \lambda \left(\frac{4\delta\rho w}{\mu} \right),$$

а коэффициент вязкости – от температуры, $\mu = \mu(T)$, то система из трех уравнений (13.35) и (13.36) содержит четыре неизвестных: p, ρ, w, T . При течении газа в длинных газопроводах обычно предполагают, что режим течения является изотермическим, то есть полагают $T = T_0 = \text{const}$. В этом случае рассматриваемая система уравнений (13.35), (13.36) становится замкнутой.

Для линейризации второго из уравнений (13.36) может быть использовано соотношение (13.33). Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial(\rho w)}{\partial x}, \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + 2a\rho w, \end{aligned} \quad (13.37)$$

где при малых дозвуковых скоростях течения можно принимать $c = \text{const}$. При этой линейризации уравнения (13.37) совпадают с уравнениями (13.34) для жидкости, когда $\rho = \text{const}$. Такая линейризация является более грубой, нежели для жидкости, так как в длинных газопроводах скорость по длине может заметно меняться, что не имеет места при течении жидкости.

Для того, чтобы указать другой способ линейризации уравнений (13.36), воспользуемся следующим приемом. Учтывая (13.25), перепишем уравнения (13.36) в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \rho \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\lambda|w|}{8\delta} \rho w. \end{aligned} \quad (13.38)$$

Исключая из второго уравнения (13.38) $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, получим

$$-\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial w}{\partial t} - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{\lambda|w|}{8\delta} \rho w. \quad (13.39)$$

Выше мы условились рассматривать малые дозвуковые скорости и пренебрегать скоростным напором и его производными. Поэтому первое из уравнений (13.37) и уравнение (13.39) можно с учетом соотношений (13.25) и уравнения состояния (13.35) переписать в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} &= \rho \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{p}{ZRT} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\lambda|w|}{8\delta} w \right) = \frac{p}{ZRT} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\lambda|w|}{8\delta} w \right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \ln p}{\partial t} &= \frac{c^2}{ZRT} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ -\frac{\partial \ln p}{\partial x} &= \frac{1}{ZRT} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\lambda|w|}{8\delta} w \right). \end{aligned} \quad (13.40)$$

Уравнения (13.40) совпадают с уравнениями (13.28) для жидкости, если в последние подставить вместо $\bar{p} \ln p$, а вместо $\rho - 1/(ZRT)$. Линейризация уравнений (13.40) может быть произведена с помощью соотношения (13.33).

§4. Интегрирование уравнений неустановившихся движений жидкости и газа методом характеристик

Системы уравнений – нелинейная

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial t} &= \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\lambda |w|}{8\delta} w \right) \end{aligned} \tag{13.41}$$

и линеаризованная

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial t} &= \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + 2aw \right) \end{aligned} \tag{13.42}$$

относятся к гиперболическому типу. В дальнейшем при движении жидкости, как это следует из уравнений (13.28) и (13.34), под p будем понимать приведенное давление $\bar{p} = p + \rho g z_1$. При движении газа в соответствии с уравнениями (13.40) под p будем понимать $\ln p$, а под $\rho - \frac{1}{ZRT} = \text{const}$.

Для численного интегрирования нелинейной системы (13.41) наиболее удобным является метод характеристик. Используя стандартные методы, получим, что уравнения характеристик и соотношения на них имеют вид

$$\begin{aligned} x - ct = \text{const}, \quad dp + \rho c dw + \rho \frac{\lambda |w|}{8\delta} w dx &= 0, \\ x + ct = \text{const}, \quad dp - \rho c dw + \rho \frac{\lambda |w|}{8\delta} w dx &= 0. \end{aligned} \tag{13.43}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае уравнения характеристик не зависят от решения. Поэтому их сетка может быть построена до начала решения, что существенно упрощает процедуру численного интегрирования. Характеристика, описываемая соотношением $x - ct = \text{const}$, называется прямой, а соотношением $x + ct = \text{const}$ – обратной. Заменяя в дифференциальных соотношениях (13.43) дифференциалы конечными разностями, чим систему уравнений для определения приближенных значений p и w в точке 7

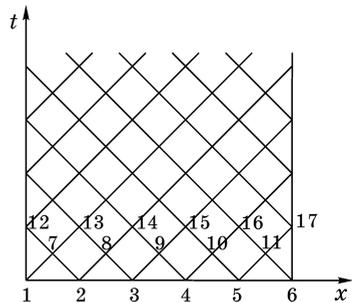


Рис. 13.3

(рис. 13.3), которые обозначим через p_7, w_7 . Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} p_7 - p_1 + \rho c(w_7 - w_1) + \rho \frac{\lambda_1 |w_1|}{8\delta} w_1 (x_7 - x_1) &= 0, \\ p_7 - p_2 - \rho c(w_7 - w_2) + \rho \frac{\lambda_2 |w_2|}{8\delta} w_2 (x_7 - x_2) &= 0, \end{aligned} \quad (13.44)$$

где $p_1, p_2, w_1, w_2, \lambda_1, \lambda_2$ – значения p, w, λ в точках 1 и 2, соответственно. Для того, чтобы эти значения были известны, необходимо, очевидно, задать начальные условия

$$w(x,0) = f_1(x), \quad p(x,0) = f_2(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

где l – длина трубы. Аналогичным образом вычисляются значения p и w в точках 8, 9, 10 и 11. Найденные из уравнений (13.44) значения p_7, w_7 представляют собой первое приближение функций p и w в точке 7. Для их уточнения можно прибегнуть к обычным итерационным методам. Другой способ повышения точности заключается в уменьшении шага сетки характеристик. В граничную точку 12 приходит только обратная характеристика. Поэтому из уравнений (11.43) имеем только одно соотношение

$$p_{12} - p_7 - \rho c(w_{12} - w_7) + \rho \frac{\lambda_7 |w_7|}{8\delta} w_7 (x_{12} - x_7) = 0,$$

содержащее две неизвестные p_{12} и w_{12} . Для получения второго уравнения необходимо задать граничное условие при $x = 0$, то есть одно из соотношений вида

$$w = w(t), \quad p = p(t), \quad f(p, w) = 0 \text{ при } x = 0, \quad t > 0. \quad (13.45)$$

Решение в граничной точке 17 получается аналогичным образом. Для этого необходимо выписать конечно-разностное соотношение на характеристике и задать граничное условие типа (13.45), но при $x = l$. Очевидно, что метод характеристик может быть использован и для численного интегрирования линеаризованной системы уравнений (13.42).

§5. Интегрирование линеаризованных уравнений неустановившегося движения с помощью преобразования Лапласа

Изображение по Лапласу функции двух переменных $u(x, t)$ и ее частных производных по координате и времени имеют, соответственно,

ВИД

$$U(x, s) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt, \quad \frac{dU}{dx} = \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} e^{-st} dt, \quad (13.46)$$

$$sU(x, s) - u(x, 0) = \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-st} dt,$$

где $u(x, 0)$ – начальное условие для функции $u(x, t)$, s – комплексный параметр, причем $\operatorname{Re} s > 0$. При этом предполагается, что интегралы в формулах (13.46) существуют, операции интегрирования и дифференцирования по координате перестановочны и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) e^{-st} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-st} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} e^{-st} = 0.$$

Переход от изображения к оригиналу выполняется при помощи формулы обращения

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} U(x, s) ds, \quad (13.47)$$

причем прямая $\gamma - i\infty, \gamma + i\infty$ проводится так, чтобы все особые точки изображения $U(x, s)$ лежали слева от нее.

Рассмотрим применение интегрального преобразования Лапласа к решению системы линеаризованных уравнений (13.42). Предварительно сделаем следующее замечание. Пусть при $t \leq 0$ движение является установившимся. Тогда из уравнений (13.42) следует, что

$$w_0 = w(x, 0) = \text{const}, \quad p_0 = p(x, 0) = p(0, 0) - 2a\rho w_0 x,$$

где w_0, p_0 – скорость и давление при установившемся движении.

Положим

$$w(x, t) = w_0 + w^*(x, t), \quad p(x, t) = p_0 + p^*(x, t),$$

где w^*, p^* – возмущения скорости и давления – их отклонения от стационарных значений. Легко видеть, что w^*, p^* удовлетворяют уравнениям (13.42). Так как всякое неустановившееся движение можно рассматривать как возникшее из установившегося, то начальные условия для возмущений имеют вид

$$t \leq 0, \quad w^*(x, 0) = 0, \quad p^*(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x \leq l). \quad (13.48)$$

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать уравнения (13.42) при начальных условиях (13.48) и, опуская индекс *, под $w(x, t), p(x, t)$ будем пони-

мать *возмущения* скорости и давления. Очевидно, что при этом краевые условия также должны быть сформулированы для возмущений.

Применив преобразование Лапласа по переменной t к уравнениям (13.42), получим с учетом формул (13.46) и начальных условий (13.48)

$$\begin{aligned} \frac{dV(x,s)}{dx} + \frac{s}{\rho c^2} P(x,s) &= 0, \\ \frac{dP(x,s)}{dx} + \rho(s+2a)V(x,s) &= 0, \end{aligned} \quad (13.49)$$

где

$$P(x,s) = \int_0^{\infty} p(x,t) e^{-st} dt, \quad V(x,s) = \int_0^{\infty} w(x,t) e^{-st} dt$$

– изображения по Лапласу давления $p(x,t)$ и скорости $w(x,t)$. Общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (13.49) имеет вид

$$P(x,s) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}, \quad V(x,s) = -\frac{1}{Z(s)} (Ae^{\lambda x} - Be^{-\lambda x}), \quad (13.50)$$

где

$$\lambda = \frac{s}{c} \sqrt{1 + \frac{2a}{s}}, \quad Z(s) = \rho c \sqrt{1 + \frac{2a}{s}}. \quad (13.51)$$

Полагая в формулах (13.50) последовательно $x=0$ и $x=l$, получим

$$P(0,s) = A + B, \quad V(0,s) = -\frac{1}{Z(s)} (A - B), \quad (13.52)$$

$$P(l,s) = Ae^{\lambda l} + Be^{-\lambda l}, \quad V(l,s) = -\frac{1}{Z(s)} (Ae^{\lambda l} - Be^{-\lambda l}).$$

Исключая из равенств (13.52) постоянные интегрирования A и B , имеем

$$\begin{aligned} P(0,s) \operatorname{ch} \lambda l - P(l,s) - V(0,s) Z(s) \operatorname{sh} \lambda l &= 0, \\ P(0,s) \frac{\operatorname{sh} \lambda l}{Z(s)} + V(0,s) \operatorname{ch} \lambda l - V(l,s) &= 0. \end{aligned} \quad (13.53)$$

Соотношения (13.53) представляют собой уравнения гидравлического четырехполюсника, связывающие между собой изображения давления и скорости по концам трубопровода. Подчеркнем особо, что вид соотношений (13.53) не зависит от граничных условий рассматриваемой задачи.

Для получения решения уравнений (13.42) в изображениях, или, что то же самое, решения уравнений (13.49), при произвольных граничных условиях необходимо определить константы A и B . Из соотношений (13.52) видно, что для этого достаточно знать любую пару величин $P(0,s)$, $V(0,s)$, $P(l,s)$, $V(l,s)$. Из равенств (13.53) следует, что достаточно иметь еще два независимых соотношения относительно этих величин. Такие соотношения могут быть

получены из дополнительных условий, связывающих между собой значения давления, скорости и их производных по концам трубопровода.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением только линейных дополнительных условий. Так как, согласно уравнениям (13.42), производные по координате могут быть выражены через скорость и производные по времени, то любые линейные дополнительные условия для этих уравнений можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}p(0, t) + \alpha_{12} \frac{\partial p(0, t)}{\partial t} + \alpha_{13}w(0, t) + \alpha_{14} \frac{\partial w(0, t)}{\partial t} + \\ & + \beta_{11}p(l, t) + \beta_{12} \frac{\partial p(l, t)}{\partial t} + \beta_{13}w(l, t) + \beta_{14} \frac{\partial w(l, t)}{\partial t} = \varphi(t), \\ & \alpha_{21}p(0, t) + \alpha_{22} \frac{\partial p(0, t)}{\partial t} + \alpha_{23}w(0, t) + \alpha_{24} \frac{\partial w(0, t)}{\partial t} + \\ & + \beta_{21}p(l, t) + \beta_{22} \frac{\partial p(l, t)}{\partial t} + \beta_{23}w(l, t) + \beta_{24} \frac{\partial w(l, t)}{\partial t} = \psi(t), \end{aligned} \quad (13.54)$$

где α_{ij} , β_{ij} , φ , ψ – известные функции времени.

Полагая в условиях (13.54)

$$\alpha_{2j} = \beta_{1j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

получим общий вид линейной краевой задачи, а принимая

$$\beta_{1j} = \beta_{2j} = 0 \text{ или } \alpha_{1j} = \alpha_{2j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

получим общий вид линейной задачи Коши при $x = 0$ или $x = l$, соответственно.

Далее будем рассматривать только стационарные дополнительные условия, то есть будем считать коэффициенты α_{ij} , β_{ij} константами. Применяя к условиям (13.54) преобразование Лапласа по времени, с учетом начальных условий (13.48) получим

$$\begin{aligned} & \alpha_1 P(0, s) + \beta_1 P(l, s) + \alpha_2 V(0, s) + \beta_2 V(l, s) = \Phi(s), \\ & \alpha_3 P(0, s) + \beta_3 P(l, s) + \alpha_4 V(0, s) + \beta_4 V(l, s) = \Psi(s), \end{aligned} \quad (13.55)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{11} + \alpha_{12}s, & \beta_1 &= \beta_{11} + \beta_{12}s, \\ \alpha_2 &= \alpha_{13} + \alpha_{14}s, & \beta_2 &= \beta_{13} + \beta_{14}s, \\ \alpha_3 &= \alpha_{21} + \alpha_{22}s, & \beta_3 &= \beta_{21} + \beta_{22}s, \\ \alpha_4 &= \alpha_{23} + \alpha_{24}s, & \beta_4 &= \beta_{23} + \beta_{24}s, \end{aligned} \quad (13.55)$$

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-st} dt, \quad \Psi(s) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-st} dt.$$

Выражения (13.53) и (13.56) образуют замкнутую систему четырех линейных алгебраических уравнений, из которых имеем

$$P(0, s) = \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}, \quad V(0, s) = \frac{\Delta_3(s)}{\Delta(s)}, \quad (13.57)$$

где

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \lambda l & -1 & -Z(s) \operatorname{sh} \lambda l & 0 \\ -\operatorname{sh} \lambda l & 0 & \operatorname{ch} \lambda l & -1 \\ Z(s) & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1(s) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -Z(s) \operatorname{sh} \lambda l & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} \lambda l & -1 \\ \Phi(s) & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \Psi(s) & \beta_3 & \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix}, \quad (13.58)$$

$$\Delta_3(s) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \lambda l & -1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh} \lambda l & 0 & 0 & -1 \\ Z(s) & \alpha_1 & \beta_1 & \Phi(s) & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \Psi(s) & \beta_4 \end{vmatrix}.$$

Из первого равенства (13.52) с учетом формул (13.57) имеем

$$A = \frac{\Delta_1(s) - Z(s)\Delta_3(s)}{2\Delta(s)}, \quad B = \frac{\Delta_1(s) + Z(s)\Delta_3(s)}{2\Delta(s)}. \quad (13.59)$$

Подставляя формулы (13.59) в равенства (13.50), получим

$$P(x, s) = \frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)} \operatorname{ch} \lambda x - \frac{\Delta_3(s)}{\Delta(s)} Z(s) \operatorname{sh} \lambda x, \quad (13.60)$$

$$V(x, s) = -\frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)} \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{Z(s)} + \frac{\Delta_3(s)}{\Delta(s)} \operatorname{ch} \lambda x.$$

Переходя в соотношениях (13.60) от изображений $P(x, s)$, $V(x, s)$ к их оригиналам $p(x, t)$, $w(x, t)$, получим искомое решение уравнений (13.42) при начальных (13.48) и дополнительных (13.54) условиях. Этот переход может быть выполнен либо с помощью таблиц соответствия, либо по формуле обращения (13.47). Помимо таблиц соответствия для преобразования Лапласа имеются обширные таблицы для преобразования Лапласа–Карсона.

Изображение по Лапласу функции $f(t)$, то есть $L[f(t)]$ и ее изображение по Лапласу–Карсону $K[f(t)]$ связаны между собой соотношением

$$K[f(t)] = sL[f(t)].$$

Эта формула позволяет находить оригинал $f(t)$, если известно его изображение $L[f(t)]$, с помощью таблиц обращения для преобразования Лапласа–Карсона. Рассмотрим некоторые примеры использования формулы обращения (13.47).

§6. Примеры расчета нестационарных процессов в трубах

Расчет нестационарных процессов в трубопроводах различного назначения, в частности, расчет гидравлического удара, часто сводится к задачам, когда по концам трубы заданы давление или скорость течения как функции времени.

Рассмотрим следующие случаи:

$$\begin{aligned} A. \quad & t \geq 0, \quad p(0,t) = \varphi_1(t), \quad w(l,t) = \psi_2(t), \\ B. \quad & t \geq 0, \quad p(0,t) = \varphi_1(t), \quad p(l,t) = \varphi_2(t), \\ C. \quad & t \geq 0, \quad w(0,t) = \psi_1(t), \quad w(l,t) = \psi_2(t), \\ D. \quad & t \geq 0, \quad w(0,t) = \psi_1(t), \quad p(l,t) = \varphi_2(t), \end{aligned} \tag{13.61}$$

Начальные условия во всех четырех случаях принимаются нулевыми, то есть определяются по формулам (13.48).

Очевидно, что случай D сводится к случаю A заменой $y = l - x$, $\varphi_2(t) = \varphi_1(t)$, $\psi_1(t) = -\psi_2(t)$. В дальнейшем будем считать, что граничные функции $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ могут иметь разрывы при $t = +0$. Из формул (13.54), (13.56), (13.61) следует, что

$$\text{в случае } A \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_4 = 1,$$

$$\text{в случае } B \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_3 = 1,$$

$$\text{в случае } C \quad \alpha_2 = 1, \quad \beta_4 = 1.$$

Остальные α_i , β_i во всех трех случаях равны нулю.

Вычислив с помощью этих соотношений определители (13.58) из формул (13.60), получим:

случай *A*

$$\begin{aligned}
 P(x, s) &= [s\Phi_1(s) - \varphi_1(+0) + \varphi_1(+0)]F_1(l-x, s) - \\
 &\quad - \rho c^2 [s\Psi_2(s) - \psi_2(+0) + \psi_2(+0)]F_2(x, s), \\
 V(x, s) &= \frac{1}{\rho c^2} [s\Phi_1(s) - \varphi_1(+0) + \varphi_1(+0)]F_3(l-x, s) + \\
 &\quad + [s\Psi_2(s) - \psi_2(+0) + \psi_2(+0)]F_1(x, s);
 \end{aligned} \tag{13.62}$$

случай *B*

$$\begin{aligned}
 P(x, s) &= [s\Phi_1(s) - \varphi_1(+0) + \varphi_1(+0)]F_4(l-x, s) + \\
 &\quad + [s\Phi_2(s) - \varphi_2(+0) + \varphi_2(+0)]F_4(x, s), \\
 V(x, s) &= \frac{1}{\rho c^2} [s\Phi_1(s) - \varphi_1(+0) + \varphi_1(+0)]F_5(l-x, s) - \\
 &\quad - \frac{1}{\rho c^2} [s\Phi_2(s) - \varphi_2(+0) + \varphi_2(+0)]F_5(x, s);
 \end{aligned} \tag{13.63}$$

случай *C*

$$\begin{aligned}
 P(x, s) &= \rho c^2 [s\Psi_1(s) - \psi_1(+0) + \psi_1(+0)]F_6(l-x, s) - \\
 &\quad - \rho c^2 [s\Psi_2(s) - \psi_2(+0) + \psi_2(+0)]F_6(x, s), \\
 V(x, s) &= [s\Psi_1(s) - \psi_1(+0) + \psi_1(+0)]F_4(l-x, s) + \\
 &\quad + [s\Psi_2(s) - \psi_2(+0) + \psi_2(+0)]F_4(x, s),
 \end{aligned} \tag{13.64}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi_i(s) &= \int_0^{\infty} \varphi_i(t) e^{-st} dt, \quad \Psi_i(s) = \int_0^{\infty} \psi_i(t) e^{-st} dt, \quad i = 1, 2, \\
 F_1(y, s) &= \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{s \operatorname{ch} \lambda l}, \quad F_2(y, s) = \frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda y}{s^2 \operatorname{ch} \lambda l}, \quad F_3(y, s) = \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\lambda \operatorname{ch} \lambda l}, \\
 F_4(y, s) &= \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{s \operatorname{sh} \lambda l}, \quad F_5(y, s) = \frac{\operatorname{ch} \lambda y}{\lambda \operatorname{sh} \lambda l}, \quad F_6(y, s) = \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda y}{s^2 \operatorname{sh} \lambda l}.
 \end{aligned} \tag{13.65}$$

При выводе формул (13.65) было использовано вытекающее из формул (13.51) соотношение

$$Z(s) = \frac{\rho c^2}{s} \lambda.$$

Так как выражение $s\Phi(s) - \varphi(+0)$ представляет собой изображение функции $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, то в соответствии с теоремой о свертке и формулами (13.62), (13.63), (13.64) имеем:

случай *A*

$$\begin{aligned}
 p(x, t) &= \int_0^t \left[\varphi_1'(\theta) N_1(l-x, t-\theta) - \rho c^2 \psi_2'(\theta) N_2(x, t-\theta) \right] d\theta + \\
 &\quad + \varphi_1(+0) N_1(l-x, t) - \rho c^2 \psi_2(+0) N_2(x, t), \\
 w(x, t) &= \int_0^t \left[\frac{1}{\rho c^2} \varphi_1'(\theta) N_3(l-x, t-\theta) + \psi_2'(\theta) N_1(x, t-\theta) \right] d\theta + \\
 &\quad + \frac{1}{\rho c^2} \varphi_1(+0) N_3(l-x, t) + \psi_2(+0) N_1(x, t);
 \end{aligned} \tag{13.66}$$

случай *B*

$$\begin{aligned}
 p(x, t) &= \int_0^t \left[\varphi_1'(\theta) N_4(l-x, t-\theta) + \varphi_2'(\theta) N_4(x, t-\theta) \right] d\theta + \\
 &\quad + \varphi_1(+0) N_4(l-x, t) + \varphi_2(+0) N_4(x, t), \\
 w(x, t) &= \frac{1}{\rho c^2} \int_0^t \left[\varphi_1'(\theta) N_5(l-x, t-\theta) - \varphi_2'(\theta) N_5(x, t-\theta) \right] d\theta + \\
 &\quad + \frac{1}{\rho c^2} \left[\varphi_1(+0) N_5(l-x, t) - \varphi_2(+0) N_5(x, t) \right];
 \end{aligned} \tag{13.67}$$

случай *C*

$$\begin{aligned}
 p(x, t) &= \rho c^2 \int_0^t \left[\psi_1'(\theta) N_6(l-x, t-\theta) - \psi_2'(\theta) N_6(x, t-\theta) \right] d\theta + \\
 &\quad + \rho c^2 \left[\psi_1(+0) N_6(l-x, t) - \psi_2(+0) N_6(x, t) \right], \\
 w(x, t) &= \int_0^t \left[\psi_1'(\theta) N_4(l-x, t-\theta) + \psi_2'(\theta) N_4(x, t-\theta) \right] d\theta + \\
 &\quad + \psi_1(+0) N_4(l-x, t) + \psi_2(+0) N_4(x, t),
 \end{aligned} \tag{13.68}$$

где в соответствии с формулой обращения (13.47)

$$N_i(y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_i(y, s) e^{st} ds, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \tag{13.69}$$

Функции F_1, F_2, F_3 обладают простыми полюсами s_n , соответствующими корням уравнения

$$\operatorname{ch} \lambda l = \cos i \lambda l = 0, \quad (13.70)$$

а функции F_4, F_5, F_6 – простыми полюсами s_m , соответствующими корням уравнения

$$\operatorname{sh} \lambda l = -i \sin i \lambda l = 0. \quad (13.71)$$

Кроме того, функции F_1, F_2, F_4 обладают простым полюсом $s_0 = 0$, функция F_5 – простыми полюсами $s_0 = 0$ и $s_0^{(1)} = -2a$, функция F_6 – полюсом $s_0 = 0$ второго порядка.

Из уравнений (13.70) и (13.71) и первой формулы (13.51) следует, что простые полюса s_n и s_m определяются по формулам

$$s_n = -a \pm i \nu_n, \quad s_m = -a \pm i \gamma_m, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\ \nu_n = \sqrt{\left(\frac{n-1}{2} \frac{\pi c}{l}\right)^2 - a^2}, \quad \gamma_m = \sqrt{\left(\frac{m \pi c}{l}\right)^2 - a^2}, \quad (13.72)$$

то есть каждому n и каждому m соответствуют два полюса.

Все корни s_n и s_m отвечают условиям $\operatorname{Re} s_n < 0$, $\operatorname{Re} s_m < 0$ и, следовательно, в формуле (13.69) можно положить $\gamma = 0$.

Для замыкания контура интегрирования в формуле (13.69) рассмотрим при вычислении функций N_1, N_2, N_3 последовательность дуг радиуса

$$R_n = \frac{\pi c}{l} n,$$

а при вычислении N_4, N_5, N_6 – радиуса

$$R_m = \frac{\pi c}{l} \frac{2m-1}{2}$$

с центрами в начале координат и лежащих слева от мнимой оси комплексной плоскости s . Из формул (13.72) видно, что ни один из полюсов s_n не лежит на дугах радиуса R_n и ни один из полюсов s_m не лежит на дугах радиуса R_m . Покажем, что на дуге радиуса R_n при $n \rightarrow \infty$ величина

$$A = \left| \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda l} \right|$$

ограничена. На дуге радиуса R_n

$$s = R_n e^{i\theta}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Тогда, в соответствии с формулой (13.51), значение λ_n на этой дуге будет равно

$$\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n = \frac{R_n}{c} \sqrt{e^{i\theta} \left(e^{i\theta} + \frac{2a}{R_n} \right)},$$

откуда после элементарных преобразований имеем

$$\alpha_n^2 = \frac{R_n^2}{2c^2} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{a^2}{R_n^2} + 4 \frac{a}{R_n} \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - 1} + 2 \frac{a}{R_n} \cos \theta \right),$$

$$\beta_n^2 = \frac{R_n^2}{2c^2} \left(\sqrt{1 + 4 \frac{a^2}{R_n^2} + 4 \frac{a}{R_n} \cos \theta - 2 \cos^2 \theta + 1} - 2 \frac{a}{R_n} \cos \theta \right). \quad (13.73)$$

Из первой формулы (13.73) видно, что при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, $R_n \rightarrow \infty$ имеем $-\infty < \alpha_n < +\infty$.

Так как

$$\left| \frac{\operatorname{ch} \lambda_n x}{\operatorname{ch} \lambda_n l} \right| = \left| \frac{e^{-\lambda_n(l-x)} + e^{-\lambda_n(l+x)}}{1 + e^{-2\lambda_n l}} \right| = \left| \frac{e^{\lambda_n(l+x)} + e^{\lambda_n(l-x)}}{1 + e^{2\lambda_n l}} \right| =$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_n x + \cos^2 \beta_n x}{\operatorname{sh}^2 \alpha_n l + \cos^2 \beta_n l}} = A,$$

то при $x < l$ $\operatorname{Re} \lambda_n = \alpha_n \rightarrow \pm \infty$ $A \rightarrow 0$. При $x = l$ $A = 1$. При α_n конечном A – конечная величина. Условие $\alpha_n = 0$ выполняется, как это видно из формулы (13.73), только при $\cos \theta = -\frac{a}{R_n}$. При этом $\beta_n = \pm \frac{R_n}{c}$ и $\cos^2 \beta_n l = \cos^2 \pi m = 1$, то есть A и в этом случае – конечная величина. Аналогично можно показать, что на дугах радиуса R_n при $n \rightarrow \infty$ величина

$$\left| \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda l} \right|,$$

а на дугах радиуса R_m при $m \rightarrow \infty$ величины

$$\left| \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda l} \right|, \left| \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda l} \right|$$

ограничены. Из доказанного следует, как это видно из формул (13.65), что при $R_n \rightarrow \infty$ величины $|F_1|, |F_2|, |F_3|$ равномерно стремятся к нулю, а при $R_m \rightarrow \infty$ равномерно стремятся к нулю величины $|F_4|, |F_5|, |F_6|$. Теперь, в соответствии с леммой Жордана, для $t > 0$ интеграл (13.69) на основании интегральной теоремы Коши можно представить в виде

$$N_i(y, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} F_j(y, s) e^{st} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} s [F_j(y, s) e^{st}]_{s=s_n},$$

где Γ_k ($k = n, m$) – замкнутый контур, образованный дугой радиуса R_k и мнимой осью комплексной плоскости s . Применяя стандартную процедуру нахождения вычетов, после соответствующих вычислений получим

$$\begin{aligned}
 N_1(y, t) &= 1 + \frac{4}{\pi} e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\operatorname{ch} i v_n t + \frac{a}{i v_n} \operatorname{sh} i v_n t \right) \cos \frac{2n-1}{2} \frac{\pi y}{l}, \\
 N_2(y, t) &= \frac{2ay}{c^2} + \frac{8l}{\pi^2 c^2} e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \left(\frac{a^2 - v_n^2}{i v_n} \operatorname{sh} i v_n t + 2a \operatorname{ch} i v_n t \right) \sin \frac{2n-1}{2} \frac{\pi y}{l}, \\
 N_3(y, t) &= -2 \frac{c^2}{l} e^{-at} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{i v_n} \operatorname{sh} i v_n t \sin \frac{2n-1}{2} \frac{\pi y}{l}, \\
 N_4(y, t) &= \frac{y}{l} + \frac{2}{\pi} e^{-at} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left(\operatorname{ch} i \gamma_m t + \frac{a}{i \gamma_m} \operatorname{sh} i \gamma_m t \right) \sin m \pi \frac{y}{l}, \\
 N_5(y, t) &= \frac{c^2}{2al} (1 - e^{-2at}) + \frac{2c^2}{l} e^{-at} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{i \gamma_m} \operatorname{sh} i \gamma_m t \cos m \pi \frac{y}{l}, \\
 N_6(y, t) &= \frac{t}{l} - \frac{al}{3c^2} + \frac{ay^2}{c^2 l} - \frac{2l}{\pi^2 c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \left(\frac{a^2 - \gamma_m^2}{i \gamma_m} \operatorname{sh} i \gamma_m t + 2a \operatorname{ch} i \gamma_m t \right) \cos m \pi \frac{y}{l}.
 \end{aligned} \tag{13.74}$$

Формулы (13.66)–(13.68) и (13.74) дают решение задач (13.61). Заметим, что при больших длинах трубопровода может иметь место случай, когда для малых значений n

$$\frac{2n-1}{2} \frac{\pi c}{l} < a.$$

Тогда величина v_n будет мнимой, и

$$i v_n = -v_n^* = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi c}{l} \right)^2}, \quad \operatorname{sh} i v_n t = -\operatorname{sh} v_n^* t, \quad \operatorname{ch} i v_n t = \operatorname{ch} v_n^* t.$$

При

$$\frac{2n-1}{2} \frac{\pi c}{l} > a$$

v_n – вещественная величина, и

$$\operatorname{sh} i v_n t = i \sin v_n t, \quad \operatorname{ch} i v_n t = \cos v_n t.$$

Аналогичные замечания будут справедливы и для случаев

$$\frac{m\pi c}{l} < a \quad \text{и} \quad \frac{m\pi c}{l} > a.$$

§7. Гидравлический удар

Резкое изменение скорости в трубопроводе, например, при закрытии задвижки, сопровождается соответствующим изменением давления. Это явление называется гидравлическим ударом. Впервые гидравлический удар в идеальной жидкости был подробно исследован в 1898 г. Н.Е. Жуковским. Рассмотрим применение формул, полученных в предыдущем параграфе, к классической задаче о гидравлическом ударе. При $x = 0$ расположен резервуар большой емкости, давление в котором считается постоянным. При $x = l$ происходит изменение скорости по заданному закону. При мгновенной остановке потока граничные условия для возмущений имеют, очевидно, вид

$$t \geq 0, \quad p(0, t) = \varphi_1(t) = 0, \quad w(l, t) = \psi_2(t) = -w_0,$$

где w_0 – скорость стационарного течения.

Подставив граничные условия в формулы (13.65), получим

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \rho c^2 w_0 N_2(x, t), \\ w(x, t) &= -w_0 N_1(x, t). \end{aligned} \tag{13.75}$$

Из формул (13.74) и (13.75) следует, что решение рассматриваемой задачи имеет вид медленно сходящихся рядов.

При $a = 0$, то есть для идеальной жидкости,

$$v_n = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi c}{l}, \quad \text{sh } i v_n t = i \sin v_n t$$

и при $x = l$ в соответствии с формулами (13.74)

$$N_2(l, t) = \frac{4}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{2} \frac{\pi c}{l} t = \frac{1}{c}, \quad 0 < t < \frac{2l}{c}, \tag{13.76}$$

откуда

$$p(l, t) = \rho c w_0, \quad 0 < t < \frac{2l}{c}. \tag{13.77}$$

Соотношение (13.77) представляет собой классическую формулу Н.Е. Жуковского для гидравлического удара в идеальной жидкости. График зависимости $\Pi = \frac{p(l, t)}{\rho c w_0}$ от $\tau = \frac{ct}{l}$, то есть в безразмерных координатах, представлен на рис. 13.4. Графики зависимостей $\Pi = \frac{p(l, t)}{\rho c w_0}$ от

$\tau = \frac{ct}{l}$ при $a = 0,125 \frac{c}{l}$, $a = 0,25 \frac{c}{l}$, $a = 0,5 \frac{c}{l}$ представлены на рис. 13.5,

13.6 и 13.7. Заметим, что величина $\frac{2a\rho w_0 l}{\rho w_0 c}$ представляет собой отношение потерь давления на длине l к ударному давлению, по Н.Е.Жуковскому. Из приведенных графиков видно, что при наличии трения давление в сечении $x = l$ продолжает возрастать до момента времени $t = \frac{2l}{c}$, то есть до момента прихода волны, отраженной от сечения $x = 0$. Этот факт был установлен И.А. Чарным. При $a \geq c/l$ волновые явления практически исчезают.

Рассмотрим гидравлический удар при граничных условиях

$$t \geq 0, \quad p(0, t) = \varphi_1(t) = 0, \quad w(l, t) = \psi_2(t) = \begin{cases} -\frac{w_0 t}{T}, & 0 \leq t \leq T, \\ -w_0, & t \geq T, \end{cases} \quad (13.78)$$

где T – время торможения потока.

Из формул (13.66) и (13.78) имеем при $0 \leq t \leq T$

$$p(l, t) = \frac{\rho c^2 w_0}{T} \int_0^t N_2(l, t - \theta) d\theta = \frac{\rho c^2 w_0}{T} \int_0^t N_2(l, \theta) d\theta,$$

при $t > T$

$$p(l, t) = \frac{\rho c^2 w_0}{T} \int_0^T N_2(l, t - \theta) d\theta = \frac{\rho c^2 w_0}{T} \int_{t-T}^t N_2(l, \theta) d\theta.$$

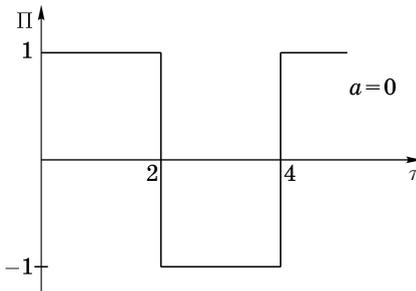


Рис. 13.4

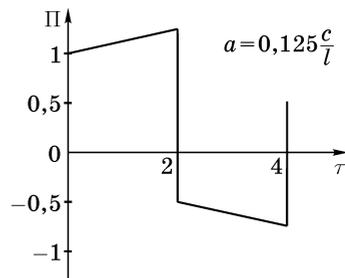


Рис. 13.5

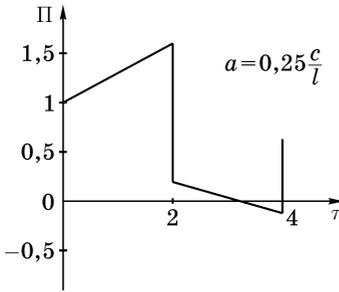


Рис. 13.6

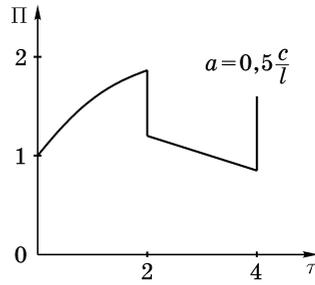


Рис. 13.7

Для простоты положим в дальнейших вычислениях $a = 0$. Тогда, с учетом формулы (13.76), получим

$$p(l, t) = -\frac{8\rho\omega_0 l}{\pi^2 T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{2n-1}{2} \frac{\pi c}{l} t \Big|_{t_1}^t, \quad (13.79)$$

где при $t \leq T$ $t_1 = 0$, а при $t \geq T$ $t_1 = t - T$.

Сумма ряда (13.79) известна и равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{2n-1}{2} \frac{\pi c}{l} t = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \left| \frac{\pi c t}{2l} \right| \right), \quad -\pi \leq \frac{\pi c t}{2l} \leq \pi. \quad (13.80)$$

С учетом периодичности формула (13.80) может быть представлена в более удобном виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{2n-1}{2} \frac{\pi c}{l} t = \frac{\pi^2}{8} F(t),$$

где

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \frac{ct}{l} + 4k, & 4k \leq \frac{ct}{l} \leq 4k + 2, \\ 1 + \frac{ct}{l} - 4k - 4, & 4k + 2 \leq \frac{ct}{l} \leq 4k + 4, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13.81)$$

Теперь формула (13.79) может быть представлена в виде

$$p(l, t) = -\frac{\rho\omega_0 l}{T} [F(t) - F(t_1)]. \quad (13.82)$$

Для иллюстрации применения формул (13.81) и (13.82) рассмотрим случай $T = l/c$.

$$\text{При } t \leq T \quad 0 \leq \frac{ct}{l} \leq 1, \quad k=0, \quad F(t) = 1 - \frac{ct}{l}, \quad F(t_1) = F(0) = 1 \text{ и } p = \rho c w_0 \frac{t}{T}.$$

При $t \geq T$ область изменения величин $\frac{ct}{l}$ и $\frac{ct_1}{l} = \frac{c}{l}(t - T) = \frac{ct}{l} - 1$ разобьем на отрезки и получим

$$1 \leq \frac{ct}{l} \leq 2, \quad k=0, \quad F(t) = 1 - \frac{ct}{l}; \quad 0 \leq \frac{ct_1}{l} \leq 1, \quad k=0, \quad F(t_1) = 2 - \frac{ct}{l},$$

$$p = \rho c w_0;$$

$$2 \leq \frac{ct}{l} \leq 3, \quad k=0, \quad F(t) = 1 + \frac{ct}{l} - 4; \quad 1 \leq \frac{ct_1}{l} \leq 2, \quad k=0, \quad F(t_1) = 2 - \frac{ct}{l},$$

$$p = -\rho c w_0 \left(2 \frac{ct}{l} - 5 \right);$$

$$3 \leq \frac{ct}{l} \leq 4, \quad k=0, \quad F(t) = 1 + \frac{ct}{l} - 4; \quad 2 \leq \frac{ct_1}{l} \leq 3, \quad k=0, \quad F(t_1) = -4 + \frac{ct}{l},$$

$$p = -\rho c w_0;$$

$$4 \leq \frac{ct}{l} \leq 5, \quad k=1, \quad F(t) = 5 - \frac{ct}{l}; \quad 3 \leq \frac{ct_1}{l} \leq 4, \quad k=0, \quad F(t_1) = -4 + \frac{ct}{l},$$

$$p = -\rho c w_0 \left(9 - 2 \frac{ct}{l} \right)$$

и т.д. График зависимости $\Pi = \frac{p}{\rho c w_0}$ от $\tau = (ct)/l$ приведен на рис. 13.8.

Зависимости Π от τ при $T = \frac{2l}{c}$ и $T = \frac{3l}{c}$ представлены на рис. 13.9 и рис. 13.10, соответственно.

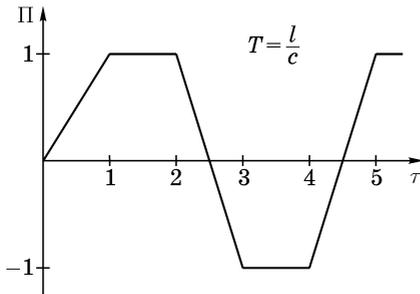


Рис. 13.8

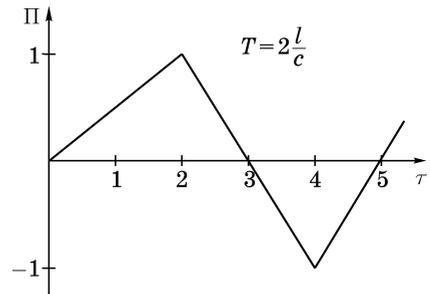


Рис. 13.9

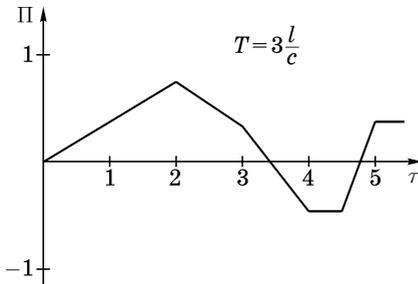


Рис. 13.10

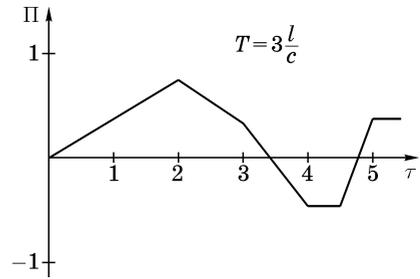


Рис. 13.11

Особый интерес представляет случай $T = \frac{4l}{c}$. При $0 \leq \frac{ct}{l} \leq 2$ $F(t) = 1 - \frac{ct}{l}$, $F(t_1) = F(0) = 1$, $p = \rho c w_0 \frac{t}{T}$. При $2 \leq \frac{ct}{l} \leq 4$ $F(t) = 1 + \frac{ct}{l} - 4$, $F(t_1) = F(0) = -1$, $p = \frac{\rho c w_0}{4} \left(4 - \frac{ct}{l} \right)$. При $t > T$ $t_1 = \frac{ct}{l} - 4$, на отрезке $4 \leq \frac{ct}{l} \leq 6$, $k = 1$, $F(t) = 5 - \frac{ct}{l}$; на отрезке $0 \leq \frac{ct_1}{l} \leq 2$, $k = 0$ и $F(t_1) = 5 - \frac{ct}{l}$, откуда следует, что $p(l, t) = 0$.

Легко видеть, что и при $6 \leq \frac{ct}{l} \leq \infty$ $p(l, t) = 0$. Зависимость $\Pi = \frac{p}{\rho c w_0}$ от $\tau = \frac{ct}{l}$ при $T = \frac{4l}{c}$ представлена на рис. 13.11. Можно показать, что если $T = 4n \frac{l}{c}$, то при $t \geq T$ $p(l, t) = 0$. Заметим, что величина $\frac{l}{c}$ представляет собой время пробега волны гидравлического удара по трубе длиной l .

§8. Влияние нестационарности течения на силу трения

Выведенные в §1 настоящей главы уравнения неустановившегося движения по трубам, например (13.24), связывают между собой средние в сечении скорость w , плотность ρ , давление p и среднее по периметру трубы касательное напряжение τ_x . Для замыкания этой системы уравнений

обычно используется гипотеза квазистационарности. Расчеты, выполненные на базе этой гипотезы, как правило, хорошо подтверждаются экспериментом. Тем не менее, в ряде случаев, особенно при наличии крутых фронтов давления (скорости), а также при течении неньютоновских жидкостей, были обнаружены заметные расхождения между экспериментальными и теоретическими результатами. Это обстоятельство заставляет обратить особое внимание на правомерность гипотезы квазистационарности. Действительно, τ_{χ} , как известно, есть функция реологических характеристик жидкости и распределения местных скоростей по сечению потока. В то же время распределение скоростей при нестационарном течении существенно отличается от такового при стационарном. Для случая ламинарного неустановившегося течения несжимаемой жидкости этот факт был теоретически установлен в работах И.С.Громеки, П.Лямбосси и ряда других авторов и экспериментально исследован Е.Ричардсоном и Е. Тайлером. Очевидно, что уравнения для осредненных величин в принципе не позволяют оценить влияние нестационарности на величину силы трения. Поэтому для уточнения связи τ_{χ} с осредненными параметрами течения необходимо обратиться к рассмотрению соответствующих дифференциальных уравнений для местных величин, то есть к уравнениям Навье–Стокса.

Оставаясь в рамках тех же допущений, что и при выводе уравнений (13.28), то есть пренебрегая сжимаемостью жидкости и упругостью трубы в уравнении движения, запишем уравнение Навье–Стокса в виде

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} - \nabla p + \mu \Delta \bar{v}. \quad (13.83)$$

Рассмотрим осесимметричное течение по круглой цилиндрической трубе, считая, что из массовых сил действует только сила тяжести. В этом случае уравнение (13.83) в проекции на ось трубы Ox имеет вид (13.29), или

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho g z_1 + p) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad u = v_x. \quad (13.84)$$

Полагая $p(x, t) = p_0(x) + p^*(x, t)$, $u(x, r, t) = u_0(x, r) + u^*(x, r, t)$, где u_0 , p_0 – стационарные значения скорости и давления, а u^* , p^* – их возмущения, перепишем уравнение (13.84) в виде

$$\rho \frac{\partial u^*}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^*}{\partial r} \right). \quad (13.85)$$

Начальные условия для возмущений имеют, очевидно, вид

$$t \leq 0, \quad u^*(x, r, 0) = 0, \quad p^*(x, t) = 0. \quad (13.86)$$

В дальнейшем индекс * будем опускать и под p, u понимать возмущения давления и скорости.

Применяя к уравнению (13.85) и начальным условиям (13.86) преобразование Лапласа по времени, получим

$$\frac{\partial^2 U(x, r, s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U(x, r, s)}{\partial r} - \frac{s}{\nu} \left[U(x, r, s) + \frac{1}{\rho s} \frac{dP(x, s)}{dx} \right] = 0, \quad (13.87)$$

где

$$U(x, r, s) = \int_0^{\infty} u(x, r, t) e^{-st} dt, \quad P(x, s) = \int_0^{\infty} p(x, t) e^{-st} dt, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (13.88)$$

Вводя функцию

$$\Phi(x, r, s) = U(x, r, s) + \frac{1}{\rho s} \frac{dP(x, s)}{dx}, \quad (13.89)$$

из уравнения (13.87) после умножения на r^2 и замены переменной

$$z = \sqrt{\frac{s}{\nu}} r, \quad (13.90)$$

получим

$$z^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z} - z^2 \Phi = 0. \quad (13.91)$$

Уравнение (13.91) представляет собой однородное уравнение Бесселя нулевого порядка. Его решение, ограниченное при $r = z = 0$, имеет вид

$$\Phi(x, z, s) = C(x, s) I_0(z), \quad (13.92)$$

где $I_0(z)$ – функция Бесселя от мнимого аргумента нулевого порядка.

Подставив решение (13.92) в соотношение (13.89), с учетом равенства (13.90) получаем

$$U(x, r, s) = C(x, s) I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} r\right) - \frac{1}{\rho s} \frac{dP(x, s)}{dx}. \quad (13.93)$$

Функция $U(x, r, s)$ должна удовлетворять условию прилипания жидкости на стенке трубы, то есть при $r = R$

$$U(x, R, s) = 0,$$

откуда в соответствии с равенством (13.93) получаем

$$\frac{1}{\rho s} \frac{dP(x, s)}{dx} = C(x, s) I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} R\right), \quad (13.94)$$

Исключая из формул (13.93) и (13.94) $C(x, s)$, получаем

$$U(x, r, s) = \frac{1}{\rho s} \left[\frac{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} r\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} R\right)} - 1 \right] \frac{dP(x, s)}{dx}. \quad (13.95)$$

Умножая равенство (13.95) на $\frac{2\pi r dr}{\pi R^2}$ и интегрируя полученное выражение от 0 до R , то есть осредняя решение по радиусу, получаем*

$$\frac{dP(x, s)}{dx} = -\rho s V(x, s) \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} R\right)}{I_2\left(\sqrt{\frac{s}{\nu}} R\right)} = -\rho s V(x, s) \frac{I_0\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}{I_2\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}, \quad (13.96)$$

где I_2 – функция Бесселя от мнимого аргумента второго порядка,

$$V(x, s) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r U(x, r, s) dr, \quad a = \frac{4\nu}{R^2}. \quad (13.97)$$

Из формул (13.30), (13.88) и (13.97) следует, что

$$\begin{aligned} V(x, s) &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r \int_0^\infty u(x, r, t) e^{-st} dt dr = \\ &= \int_0^\infty \frac{2}{R^2} \int_0^R r u(x, r, t) e^{-st} dr dt = \int_0^\infty w(x, t) e^{-st} dt, \end{aligned}$$

то есть $V(x, s)$ представляет собой изображение по Лапласу средней скорости $w(x, t)$.

Применяя преобразование Лапласа к первому из уравнений (13.41), то есть к уравнению неразрывности, с учетом начальных условий (13.86) получаем

$$\frac{dV(x, s)}{dx} = -\frac{s}{\rho c^2} P(x, s). \quad (13.98)$$

Уравнения (13.96) и (13.98) представляют собой записанные в изображении по Лапласу уравнения ламинарного неустановившегося движения вязкой слабосжимаемой жидкости по круглой цилиндрической трубе для средних в сечении величин скорости и давления при начальных условиях (13.86).

Перейдем к определению связи между средней скоростью w и касательным напряжением τ_x . Осреднив уравнение (13.85) по сечению трубы,

* При выводе формулы (13.96) были использованы известные соотношения для функций Бесселя

$$\int_z I_0(z) dz = I_1(z), \quad I_2(z) = I_0(z) - \frac{2I_1(z)}{z}.$$

получим

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\tau_\chi}{R}. \quad (13.99)$$

Применив к уравнению (13.99) преобразование Лапласа, с учетом начальных условий (13.86) имеем

$$\frac{2T}{R} = \frac{dP(x, s)}{dx} + \rho s V(x, s), \quad (13.100)$$

где

$$T = \int_0^\infty \tau_\chi(x, t) e^{-st} dt.$$

Подставив в соотношение (13.100) значение $\frac{dP(x, s)}{dx}$ из уравнения (13.96), получаем

$$T = \frac{\rho R}{2} s V(x, s) \left[1 - \frac{I_0\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}{I_2\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right)} \right], \quad (13.101)$$

то есть получаем связь между изображениями касательного напряжения T и средней скорости $V(x, s)$. Так как

$$sV(x, s) = \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial t} e^{-st} dt,$$

то в соответствии с теоремой о свертке из равенства (13.101) имеем

$$\tau_\chi = \frac{\rho R}{2} \int_0^t \frac{\partial w(x, \theta)}{\partial \theta} \kappa(t - \theta) d\theta, \quad (13.102)$$

где

$$\kappa(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[1 - \frac{I_0\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}{I_2\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right)} \right] e^{st} ds,$$

или, так как $I_0(z) = J_0(iz)$, $I_2(z) = J_2(iz)$,

$$\kappa(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left[1 - \frac{J_0\left(2i\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}{J_2\left(2i\sqrt{\frac{s}{a}}\right)} \right] e^{st} ds.$$

В результате получено, что

$$\kappa(t) = -2a - a \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{az_k^2}{4} t\right), \quad (13.103)$$

где z_k ($k \neq 0$) – корни уравнения $J_2(z) = J_2\left(2i\sqrt{\frac{s}{a}}\right) = 0$. Подставив соотношения (13.102) и (13.103) в уравнение (13.99) и используя уравнение неразрывности из (13.41), или (13.42), которое, очевидно, остается без изменений, имеем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial t} &= \rho c^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + 2aw \right) + \rho a \int_0^t \frac{\partial w(x, \theta)}{\partial \theta} W(t - \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (13.104)$$

где

$$W(\bar{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{az_k^2}{4} \bar{t}\right), \quad \bar{t} = at.$$

График функции $W(\bar{t})$ представлен на рис. 13.12. Коэффициент $2a$, как это видно из формулы (13.33), при ламинарном режиме течения по круглой трубе равен

$$2a = \frac{\lambda|w|}{8\delta} = \frac{64|w|}{\text{Re} \cdot 8\delta} = \frac{8\nu}{R^2} = \text{const},$$

что совпадает с формулой (13.97). Таким образом, при ламинарном режиме течения нет необходимости в линеаризации уравнений (13.41), то есть име-

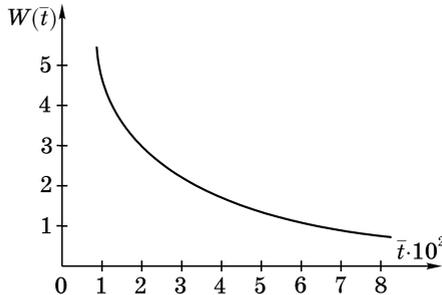


Рис. 13.12

ют место уравнения (13.42). Отказ от гипотезы квазистационарности приводит к появлению в уравнении движения интегрального члена

$$a\rho \int_0^t \frac{\partial w(x, \theta)}{\partial \theta} W(t - \theta) d\theta,$$

учитывающего с определенным весом всю предысторию нестационарного процесса. Анализ решений уравнений (13.104) показал, что при периодических процессах коэффициент затухания высокочастотных гармоник пропорционален корню квадратному из частоты. Это приводит к сглаживанию импульсов давления (скорости) и «размазыванию» крутых фронтов. Данные факты имеют экспериментальное подтверждение. В то же время из решения уравнений (13.42) следует, что коэффициент затухания высокочастотных гармоник практически не зависит от частоты. Таким образом, использование гипотезы квазистационарности не позволяет учесть указанные выше явления. Позади фронта гидравлического удара кривые повышения давления, рассчитанные по уравнениям (13.42) и (13.104), постепенно сближаются. Поэтому расчет давления позади фронта, в том числе и расчет максимального повышения давления, может быть выполнен с достаточно высокой точностью по формулам, полученным в предположении справедливости гипотезы квазистационарности.

Глава XIV

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Рассмотрим обтекание потоком жидкости неподвижной стенки C . В случае идеальной жидкости оно описывается уравнениями Эйлера

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (14.1)$$

и граничным условием

$$v_n|_C = 0. \quad (14.2)$$

В случае несжимаемой вязкой жидкости необходимо использовать уравнения Навье–Стокса

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta v_i \quad (14.3)$$

и граничные условия

$$v_\tau|_C = 0, \quad v_n|_C = 0. \quad (14.4)$$

Очевидно, что при $\mu \rightarrow 0$ уравнения Навье–Стокса (14.3) в пределе совпадают с уравнениями Эйлера (14.1). Однако решение уравнений Навье–Стокса не стремится при этом к решению уравнений Эйлера, так как граничные условия (14.4), при которых оно было получено, не зависят от величины вязкости и не могут стремиться к граничному условию (14.2).

Эти соображения, а также некоторые экспериментальные данные привели Л.Прандтля к мысли, что при малой вязкости, или, что то же самое, при больших числах Рейнольдса, ее действие проявляется лишь в достаточно тонком слое у стенки, получившем название пограничного слоя. Вне пограничного слоя вязкость сказывается весьма незначительно, и жидкость можно рассматривать как идеальную.

Уравнения Навье–Стокса для течения в пограничном слое, учитывая малую толщину последнего, могут быть существенно упрощены. Теории пограничного слоя посвящена весьма обширная литература.

§1. Уравнения пограничного слоя

Для вывода уравнений пограничного слоя рассмотрим, пренебрегая массовыми силами, плоскопараллельное обтекание вязкой несжимаемой жидкостью тонкого цилиндрического тела (рис. 14.1). При этом будем считать, что обтекаемая стенка плоская, и направим ось Ox вдоль стенки, а ось Oy – по нормали к ней.

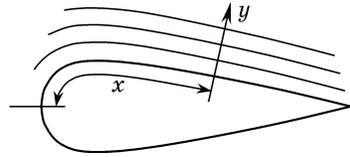


Рис. 14.1

Из формул (4.42) следует, что уравнения течения в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Для приведения уравнений (14.5) к безразмерному виду положим

$$x = L\xi, \quad y = L\eta, \quad v_x = Vu, \quad v_y = Vv, \quad p = \rho V^2 \bar{p}, \quad t = \frac{L}{V} \bar{t},$$

где L – характерная длина обтекаемого тела, V – характерная скорость потока. Подставив эти соотношения в уравнения (14.5) и опуская для сокращения записи черточки над безразмерными временем и давлением, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \tag{14.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \tag{14.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0, \tag{14.8}$$

где

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{L}, \quad \text{Re} = \frac{\rho VL}{\mu},$$

δ – толщина пограничного слоя, а под членами этих уравнений приведены их оценки внутри пограничного слоя по величине $\bar{\delta}$.

Перейдем к рассмотрению справедливости этих оценок. Примем, что на длине L скорость v_x изменяется на величину порядка V . Тогда $u \sim 1$ и

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{V}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} \sim \frac{V}{L}, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} \sim 1.$$

Аналогичным образом можно показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \sim 1$.

Из уравнения неразрывности (14.8) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} \sim 1.$$

Далее, очевидно,

$$v = -\int_0^{\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta \sim \bar{\delta},$$

так как внутри пограничного слоя $0 < \eta < \bar{\delta}$. Из этого неравенства также следует, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \sim \frac{1}{\bar{\delta}}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \sim \frac{1}{\bar{\delta}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \sim \frac{1}{\bar{\delta}^2}.$$

Так как $v \sim \bar{\delta}$, то

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} \sim \bar{\delta}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \sim \bar{\delta}.$$

Примем также, что $\frac{\partial u}{\partial t} \sim 1$. Это означает, что внезапные ускорения типа гидравлического удара исключаются из рассмотрения. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim \bar{\delta}.$$

Таким образом, подтверждена справедливость выписанных выше оценок отдельных членов в уравнениях (14.6), (14.7), (14.8).

Из этих оценок следует, что при учете влияния вязкости определяющим в уравнении (14.6) является член $\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$. Поэтому отношение сил

инерции к силам трения можно представить в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} : \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Л.Прандтль предположил, что в пограничном слое отношение сил инерции к силам трения есть величина порядка 1, то есть

$$\text{Re} \sim \frac{1}{\bar{\delta}^2}. \quad (14.9)$$

Соотношение (14.9) позволяет дать оценку толщины пограничного слоя в виде

$$\bar{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (14.10)$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть характерный размер обтекаемого тела $L = 1$ м, характерная скорость потока $V = 1$ м/с, а динамический коэффициент вязкости $\mu = 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$ (вода, 20°C), плотность $\rho = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Тогда

$$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} = 10^6,$$

и в соответствии с формулой (14.10)

$$\bar{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} = 10^{-3},$$

или $\bar{\delta} \sim 1$ мм. В этом тонком слое и происходит изменение скорости v_x от нуля до ее значения во внешнем течении.

Возникает вопрос о характере течения в пограничном слое при таких значениях числа Re . Как показывают наблюдения, течение вдоль пластины остается ламинарным при $\text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} < (5 \cdot 10^5 \div 10^6)$.

Пренебрегая в уравнениях (14.6), (14.7), (14.8) малыми членами и учитывая при этом формулу (14.9), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} &= - \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Уравнения (14.11) представляют собой уравнения Л.Прандтля для пограничного слоя, записанные в безразмерном виде. Возвращаясь в уравне-

ниях (14.11) к размерным величинам, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Из этих уравнений видно, что давление в поперечном направлении пограничного слоя можно считать постоянным и равным тому давлению, которое существует на его внешней границе. Течение, внешнее по отношению к пограничному слою, как уже указывалось, может быть описано с помощью модели идеальной жидкости.

Как было показано, на внешней границе пограничного слоя $v \sim \bar{\delta}$ или $v_y \sim \frac{V}{L} \delta$. Производная $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ из-за пренебрежения вязкостью во внешнем сечении на этой границе также мала, и продольная скорость v_x переходит в скорость внешнего течения $U(x, t)$. Поэтому на границе пограничного слоя уравнение движения можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (14.13)$$

В случае установившегося движения из уравнения (14.13) имеем

$$p + \frac{\rho}{2} U^2 = \text{const}. \quad (14.14)$$

Граничные условия для внешнего течения благодаря малости толщины пограничного слоя и тому, что $v_y \sim \frac{V}{L} \delta$, можно принять такими же, как при непосредственном обтекании тела идеальной жидкостью. Иначе говоря, для расчета внешнего потока можно рассматривать обтекание тела идеальной жидкостью, пренебрегая при этом толщиной пограничного слоя.

Итак, система уравнений (14.12) сводится к

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (14.15)$$

где $p = p(x, t)$ следует рассматривать как известную функцию. В случае установившегося движения оно может быть определено из равенства (14.14). Уравнения (14.15) называются уравнениями Прандтля для пограничного слоя.

Граничные условия для системы уравнений (14.15) имеют вид

$$v_x = v_y = 0 \text{ при } y = 0, \quad v_x = U(x, t) \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

Последнее условие надо понимать в том смысле, что v_x асимптотически стремится к функции $U(x, t)$, которая считается наперед заданной.

С помощью формулы (14.10) можно получить лишь оценку порядка величины толщины пограничного слоя. Так как в действительности граница между пограничным слоем и внешним течением достаточно условна, то для ее уточнения используются различные критерии. Наиболее простым из них является условие того, что скорость на внешней границе пограничного слоя равна 99% от скорости внешнего течения.

§2. Задача Блазиуса

Для иллюстрации применения уравнений пограничного слоя (14.15) рассмотрим обтекание тонкой неподвижной пластинки (рис. 14.2). Начало координат совместим с началом пластинки, а ось Ox направим вдоль нее параллельно скорости набегающего потока. Длину пластинки будем считать бесконечной, а течение – стационарным. Скорость набегающего потока примем равной U_0 . Сформулированная таким образом задача называется задачей Блазиуса.

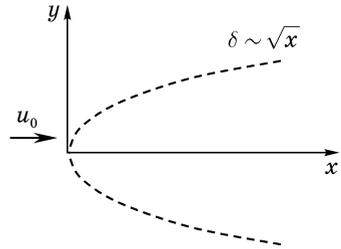


Рис. 14.2

Так как скорость внешнего течения по условию постоянна, то $\frac{dp}{dx} = 0$, и уравнения (14.15) принимают вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (14.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

где

$$u \equiv v_x, \quad v \equiv v_y, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Граничные условия для уравнений (14.16) имеют вид

$$u = v = 0 \text{ при } y = 0, \quad u = U_0 \text{ при } y \rightarrow \infty. \quad (14.17)$$

Обратимся к построению решения задачи Блазиуса. Уравнения (14.16) и граничные условия (14.17) содержат систему определяющих параметров

$$x, y, \nu, U_0,$$

из которых только два обладают независимыми размерностями. Следовательно, из этой системы можно составить две безразмерных комбинации, например,

$$\frac{y}{x}, \quad y\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}.$$

Тогда искомые функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ можно представить через безразмерные функции f и Φ как

$$u = U_0 f\left(\frac{y}{x}, y\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}\right), \quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \Phi\left(\frac{y}{x}, y\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}\right). \quad (14.18)$$

Сделаем в уравнениях (14.16) и граничных условиях (14.17) замену переменных

$$x = lx_1, \quad y = \sqrt{\frac{\nu l}{U_0}} y_1, \quad u = U_0 u_1, \quad v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{l}} v_1, \quad (14.19)$$

где l – некоторый линейный размер.

Подставив соотношения (14.19) в уравнения (14.16) и граничные условия (14.17), получим

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2}, \quad (14.20)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0, \quad (14.21)$$

$$u_1 = v_1 = 0 \text{ при } y_1 = 0, \quad u_1 = 1 \text{ при } y_1 \rightarrow \infty. \quad (14.22)$$

Из формул (14.19) следует, что

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{\nu}{l U_0}} \frac{y_1}{x_1}, \quad y\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} = \sqrt{\frac{l}{x}} y_1 = \frac{y_1}{\sqrt{x_1}}, \quad v\sqrt{\frac{x}{\nu U_0}} = v_1 \sqrt{\frac{x}{l}} = v_1 \sqrt{x_1},$$

и равенства (14.18) могут быть представлены в виде

$$u_1 = f\left(\sqrt{\frac{\nu}{l U_0}} \frac{y_1}{x_1}, \frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right), \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{x_1}} \Phi\left(\sqrt{\frac{\nu}{l U_0}} \frac{y_1}{x_1}, \frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right).$$

В то же время уравнения (14.20), (14.21) и граничные условия (14.22) не содержат в себе длины l . Следовательно, решение этих уравнений не

может зависеть от l , то есть от аргумента $\sqrt{\frac{\nu}{lU_0}}$, поэтому

$$u_1 = f\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right), \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{x_1}} \Phi\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right),$$

или

$$u_1 = f(\xi), \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{x_1}} \Phi(\xi), \quad \xi = \frac{y_1}{\sqrt{x_1}} = y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}. \quad (14.23)$$

Из уравнения неразрывности (14.21) следует, что существует функция тока $\psi(x_1, y_1)$, так что

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \quad v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

Положим

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y_1} = f(\xi) = \varphi'(\xi) = \varphi'\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1}}\right). \quad (14.24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi &= \int u_1 dy_1 = \int \varphi'(\xi) dy_1 = \sqrt{x_1} \int \varphi'(\xi) d\xi = \sqrt{x_1} \varphi(\xi), \\ v_1 &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\frac{1}{2\sqrt{x_1}} \varphi(\xi) - \sqrt{x_1} \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} [\xi \varphi'(\xi) - \varphi(\xi)]. \end{aligned} \quad (14.25)$$

Подставив соотношения (14.24) и (14.25) в уравнение (14.20), получим

$$\varphi' \frac{d\varphi'}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{1}{2\sqrt{x_1}} (\xi \varphi' - \varphi) \frac{d\varphi'}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y_1} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\varphi'}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y_1} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y_1},$$

или, после дифференцирования и приведения подобных членов,

$$2\varphi'' - \varphi\varphi'' = 0. \quad (14.26)$$

Из граничных условий (14.22) и формул (14.24), (14.25) следует, что граничные условия для уравнения (14.26) имеют вид

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\infty) = 1. \quad (14.27)$$

Таким образом, уравнения в частных производных (14.16) с граничными условиями (14.17) свелись к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению (14.26) с краевыми условиями (14.27). Решение этой задачи может быть построено численно с высокой точностью, что и было сделано давно.

Из формул (14.19), (14.23), (14.24) и (14.25) следует, что

$$\frac{u}{U_0} = \varphi' \left(y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \right), \quad \frac{v}{U_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{U_0 x}} \left[y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \varphi' \left(y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \right) - \varphi \left(y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \right) \right]. \quad (14.28)$$

Графики распределения продольной и поперечной составляющих скорости в пограничном слое представлены на рис. 14.3 и 14.4, соответственно.

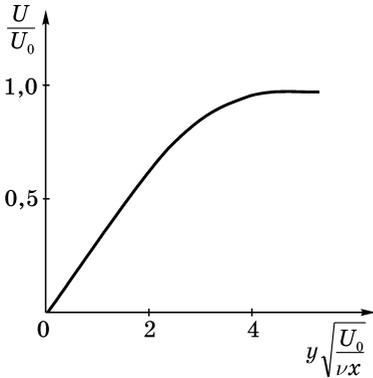


Рис. 14.3

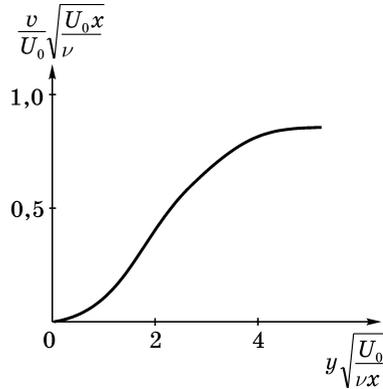


Рис. 14.4

Принимая, что на внешней границе пограничного слоя $\frac{u}{U_0} = 0,99$ из первой формулы (14.28) имеем

$$0,99 = \varphi' \left(y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \right).$$

Тогда из таблицы функции $\varphi'(\xi)$ следует, что

$$y = \delta \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}.$$

Подставляя это значение во вторую формулу (14.28) и используя таблицы функций $\varphi(\xi)$, $\varphi'(\xi)$, получим на внешней границе пограничного слоя

$$\frac{v}{U_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{U_0 x}} [5\varphi'(5) - \varphi(5)] \approx 0,837 \sqrt{\frac{\nu}{U_0 x}}.$$

Полученное решение для распределения скоростей в пограничном слое позволяет вычислить напряжение трения τ_0 на пластине.

Действительно, при ламинарном течении

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}.$$

Подставив в это соотношение первую из формул (14.28), получаем

$$\tau_0 = \mu U_0 \left[\frac{\partial}{\partial y} \varphi \left(y \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \right) \right]_{y=0} = \mu U_0 \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \varphi''(0).$$

Обращаясь к таблице численных значений функции $\varphi''(\xi)$, имеем $\varphi''(0) = 0,332$, и

$$\tau_0 = 0,332 \rho \sqrt{\frac{\nu U_0^3}{x}}. \quad (14.29)$$

Из формулы (14.29) следует, что сила трения W на одной стороне пластины, приходящаяся на единицу ее ширины, равна

$$W = \int_0^x \tau_0 dx = 0,664 \rho \sqrt{\nu U_0^3 x}.$$

§3. Отрыв пограничного слоя

В §8.2 было показано, что при стационарном обтекании окружности идеальной жидкостью скорость течения вдоль ее дуги сначала возрастает, а затем убывает. В соответствии с интегралом Бернулли давление при этом также сначала возрастает, а затем убывает. Аналогичное явление имеет место при обтекании любого выпуклого контура. Течение жидкости в диффузоре также происходит при положительном градиенте давления.

При течении идеальной жидкости ее кинетической энергии достаточно для преодоления положительного градиента давления. В пограничном слое благодаря вязкости происходит замедление течения. Поэтому кинетической энергии жидкости оказывается недостаточно для того, чтобы частицы продвинулись далеко в область повышенного давления. В результате возникает возвратное течение и связанное с ним вихреобразование. Толщина пограничного слоя при этом резко возрастает, и условия, при которых были введены уравнения Прандтля, перестают выполняться.

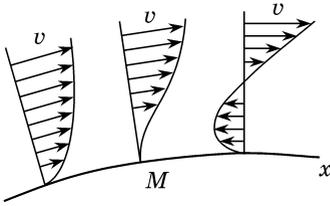


Рис. 14.5

Рассмотрим обтекание криволинейного контура C и будем вдоль него отсчитывать координату x (рис. 14.5). В соответствии со сказанным существует точка M с координатой x_M , такая, что при $x < x_M$ $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$, а при $x > x_M$ $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$.

Так как в точках контура C , то есть при $y = 0$, $v_x = v_y = 0$, то в соответствии с уравнениями (14.15)

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} < 0 \quad \text{при } x < x_M, \quad (14.30)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} > 0 \quad \text{при } x > x_M,$$

и в точке M

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0. \quad (14.31)$$

Так как кривизна k кривой $y = l(x)$ равна

$$k = \frac{d^2 l}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dl}{dx} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}},$$

то из неравенств (14.30) и формулы (14.31) следует, что в точке M кривизна эпюры скоростей $v_x = v_x(x)$ меняет свой знак (рис. 14.5). Поэтому при $x > x_M$ возникает возвратное течение и, как следствие, – отрыв пограничного слоя.

Из приведенных рассуждений ясно, что если всюду в потоке $\frac{\partial p}{\partial x} \leq 0$, то отрыва пограничного слоя не происходит.

Глава XV

ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

Рассмотрение одномерных течений позволяет изучить основные закономерности, присущие движению газов с большими скоростями. Одномерными течениями газа (жидкости) называются такие течения, характеристика которых (скорость v , плотность ρ , давление p , абсолютная температура T) зависят только от одной координаты и времени. Примером одномерного течения может служить течение по трубке тока, если скорость, плотность, давление и температура распределены равномерно по ее сечению. В этом случае

$$v = v(l, t), \quad \rho = \rho(l, t), \quad p = p(l, t), \quad T = T(l, t),$$

где l – координата, отсчитываемая вдоль оси трубки.

Для простоты и наглядности последующих выводов будем считать, что газ совершенный, то есть его уравнение состояния имеет вид

$$\frac{p}{\rho} = RT. \quad (15.1)$$

§1. Скорость звука

Скорость распространения звука в газе является одним из важнейших понятий газовой динамики. Для ее определения рассмотрим длинную цилиндрическую трубу, закрытую с одной стороны поршнем и заполненную газом (рис. 15.1). При этом предполагается, что в начальный момент времени газ в трубе покоится, а давление p_0 и плотность ρ_0 во всех сечениях трубы одинаковы.

Приведем поршень в движение – начнем вдвигать его в трубу. Газ перед поршнем начнет сжиматься и двигаться со скоростью v , а возникшее возмущение будет распространяться по трубе слева направо с некоторой скоростью c .

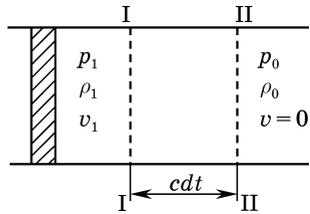


Рис. 15.1

Пусть это возмущение в момент времени t достигло сечения I – I, а в момент $t + dt$ – сечения II – II. За время dt между указанными сечениями параметры течения газа меняются, то есть рассматриваемое течение будет неустановившимся. Для его изучения воспользуемся законом сохранения массы (2.29) и законом изменения количества движения (2.49).

В течение промежутка времени dt скорость, давление и плотность газа в сечении I – I изменяются и достигают значений v_1 , p_1 и ρ_1 , а в сечении II – II скорость равна нулю, а давление и плотность постоянны – p_0 , ρ_0 (возмущение еще не успело дойти до этого сечения). Поэтому в момент $t + dt$, то есть в конце рассматриваемого промежутка времени, уравнение (2.29) и уравнение (2.49) в проекции на ось трубы Ox запишутся в виде

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_{S_1} \rho_1 v_1 dS, \quad (15.2)$$

$$\int_V \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dV - \int_{S_1} \rho_1 v_1^2 dS = P_x + T_x, \quad (15.3)$$

где S_1 – площадь поперечного сечения трубы. Проекция главного вектора \vec{N} нормальных составляющих реакций стенок трубы на ее ось, очевидно, равна нулю, а весом газа пренебрегаем.

Сила давления, действующая на объем газа между сечениями I–I и II–II в момент $t + dt$, равна

$$P_x = \int_{S_1} (p_1 - p_0) dS_1, \quad (15.4)$$

а сила трения

$$T_x = -\tau_{cp} \chi c dt, \quad (15.5)$$

где τ_{cp} – среднее за время dt и на длине $c dt$ напряжение трения на стенке трубы, χ – ее смоченный периметр. За время dt плотность газа на рассматриваемом участке трубы меняется в пределах значений ρ_0 до ρ_1 , а скорость – от нуля до v_1 . Поэтому на интервале dt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt \approx \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{cp} dt = \rho_1 - \rho_0, \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dt = \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \right)_{cp} = \rho_1 v_1, \quad (15.6)$$

где значок «ср» также означает среднее значение за время dt и по объему V .

Элемент объема dV можно представить в виде

$$dV = c dt dS. \quad (15.7)$$

Подставив соотношения (15.4) – (15.7) в уравнения (15.2) и (15.3), получаем приближенно (из-за несовпадения средних и точных величин)

$$\int_{S_1} [(\rho_1 - \rho_0)c - \rho_1 v_1] dS = 0, \quad (15.8)$$

$$\int_{S_1} (\rho_1 v_1 c - \rho_1 v_1^2) dS = (p_1 - p_0)S - \tau_{\text{ср}} \chi c dt. \quad (15.9)$$

Учитывая теперь, что рассматриваемое течение одномерное, то есть все параметры распределены по сечению трубы равномерно, и считая газ идеальным ($\tau = \tau_{\text{ср}} = 0$), переходим к пределу при $dt \rightarrow 0$ и из равенств (15.8) и (15.9) получаем

$$(\rho_1 - \rho_0)c = \rho_1 v_1, \quad \rho_1 v_1 c - \rho_1 v_1^2 = p_1 - p_0. \quad (15.10)$$

Исключив из соотношений (15.10) скорость v_1 , имеем

$$c^2 = \frac{\rho_1}{\rho_0} \cdot \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0}. \quad (15.11)$$

Скоростью звука a называется скорость бесконечно малых возмущений, то есть

$$a = \lim_{\substack{p_1 \rightarrow p_0 \\ \rho_1 \rightarrow \rho_0}} c,$$

поэтому в соответствии с формулой (15.11) получаем

$$a^2 = \lim_{\substack{p_1 \rightarrow p_0 \\ \rho_1 \rightarrow \rho_0}} \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0} = \frac{dp}{d\rho}. \quad (15.12)$$

Заметим, что при выводе формулы (15.12) нигде не использовалось то обстоятельство, что рассматриваемая среда является газом. Следовательно, эта формула справедлива для любой сжимаемой среды. Так как давление p и плотность газа ρ связаны между собой уравнением состояния (15.1), то для вычисления скорости звука a необходимо задать вид термодинамического процесса, связанного с распространением звука.

Предположим, что этот процесс изотермический, то есть что $T = \text{const}$. Обозначив через a_T скорость звука, вычисленную в этом предположении, из уравнений (15.1) и (15.12) получаем

$$a_T = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{RT}. \quad (15.13)$$

Для воздуха газовая постоянная $R = 287 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \text{град}}$, и для температуры $T = 293^\circ \text{К}$ имеем $a_T = 290 \text{ м/с}$, что заметно отличается от результатов эксперимента, и, следовательно, формула (15.13) непригодна для опре-

деления скорости звука. Предположим поэтому, что процесс распространения звука является изэнтропическим, то есть в этом процессе соблюдается уравнение (7.38), или

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k. \quad (15.14)$$

Тогда с учетом уравнения состояния (15.1) получаем

$$a_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = kp_0 \frac{\rho^{k-1}}{\rho_0^k} = k \frac{p_0}{\rho_0^k} \frac{\rho^k}{\rho} = \frac{kp}{\rho} = kRT, \quad (15.15)$$

где a_s – скорость звука, подсчитанная в предположении изэнтропичности процесса. Для воздуха показатель адиабаты $k = 1,4$, и при $R = 287 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \text{град}}$, $T = 293^\circ \text{K}$ по формуле (15.15) получаем $a = 343 \text{ м/с}$, что очень хорошо согласуется с результатами измерений. Поэтому в дальнейшем для определения скорости звука в газе будем пользоваться формулой (15.15).

§2. Закон сохранения энергии

Для вывода закона сохранения энергии при установившемся одномерном течении идеального, то есть невязкого, газа воспользуемся уравнением (2.70) и соотношением (4.3), в соответствии с которым для идеального газа $\bar{p}_n = p_{nn} \bar{n} = -p \bar{n}$. В этом случае $\bar{p}_n \cdot \bar{\tau}_1 = 0$, и уравнение (2.70) принимает вид

$$\int_{S_2} \left(-\Pi + u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \rho v dS - \int_{S_1} \left(-\Pi + u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \rho v dS = \int_V \rho q_e dV. \quad (15.16)$$

Так как течение, по условию, одномерное, то выражения в скобках могут быть вынесены из-под знака интеграла. Кроме того, при установившемся течении

$$\int_{S_2} \rho v dS = \int_{S_1} \rho v dS = Q_m. \quad (15.17)$$

С учетом сказанного и формулы (15.17) уравнение (15.16) может быть переписано в виде

$$\left(-\Pi + u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right)_2 - \left(-\Pi + u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right)_1 = \frac{1}{Q_m} \int_V \rho q_e dV. \quad (15.18)$$

Уравнение (15.18) выражает собой закон сохранения энергии при одномерном установившемся движении идеального газа. В дальнейшем при изучении движения газа будем пренебрегать влиянием массовых сил, в частности весом, то есть считать, что $\Pi = 0$.

При адиабатическом процессе $q_e = 0$, и из уравнения (15.18) имеем

$$u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (15.19)$$

Введем тепловую функцию – энтальпию i , по определению, равную

$$i = u + \frac{p}{\rho}. \quad (15.20)$$

Подставив это соотношение в уравнение (15.19), получим

$$i + \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (15.21)$$

Для газа, подчиняющегося уравнению состояния (15.1), удельная внутренняя энергия u пропорциональна его абсолютной температуре T и равна

$$u = C_V T. \quad (15.22)$$

Кроме того, для такого газа имеет место формула Майера (7.33)

$$C_p - C_V = R. \quad (15.23)$$

Из формул (15.22) и (15.23) следует, что

$$i = C_V T + RT = C_p T, \quad (15.24)$$

и закон сохранения энергии (15.21) может быть представлен в виде

$$C_p T + \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (15.25)$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона (15.1) и формулы Майера (15.23) имеем

$$C_p T = \frac{C_p p}{R \rho} = \frac{C_p p}{C_p - C_V \rho} = \frac{k p}{k - 1 \rho}, \quad k = \frac{C_p}{C_V}. \quad (15.26)$$

Подставив соотношение (15.26) в уравнение (15.25), получим

$$\frac{k p}{k - 1 \rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const.} \quad (15.27)$$

Заметим, что с точностью до члена gz , которым мы пренебрегаем, уравнение (15.27) совпадает с интегралом Бернулли (7.45). Из этого следует, что интеграл Бернулли представляет собой частный случай закона сохранения энергии.

Введем понятие параметров торможения. Под параметрами торможения в данном поперечном сечении одномерного потока (трубки тока) подразумеваются параметры, которыми будет характеризоваться газ при приведении его *мысленно* к состоянию покоя изэнтропическим путем, то есть с сохранением той энтропии, которую имеет движущийся газ в рассматриваемом поперечном сечении. Температура, давление, энтальпия торможения, плотность заторможенного газа обозначаются, соответственно, через T_0, p_0, i_0, ρ_0 .

Уравнения (15.21), (15.25), (15.27), то есть различные виды закона сохранения энергии, можно, очевидно, используя параметры торможения, записать в виде

$$i + \frac{v^2}{2} = i_0, \quad (15.28)$$

$$C_p T + \frac{v^2}{2} = C_p T_0, \quad (15.29)$$

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (15.30)$$

Из уравнений (15.28), (15.29), (15.30) следует, что при адиабатическом течении идеального газа с ростом скорости течения его температура, энтальпия, отношение $\frac{p}{\rho}$ убывают. Из уравнений (7.46) и (7.47) видно, что при этом убывают и p и ρ ($k > 1$). Отметим, что если энтропия вдоль потока меняется, то параметры торможения в различных сечениях, вообще говоря, будут различными. Отметим также, что адиабатическое течение невязкого газа является изэнтропическим.

§3. Число Маха. Коэффициент скорости

Из закона сохранения энергии (15.29) видно, что при адиабатическом течении изменение скорости потока от сечения к сечению приводит к соответствующему изменению температуры. С другой стороны, как это следует из формулы (15.15), изменение температуры приводит к изменению скорости звука. Таким образом, скорость звука в каком-либо месте потока зависит от скорости течения газа в том же месте. При этом увеличение местной скорости течения v приводит к уменьшению местной скорости звука a .

Отношение скорости v течения газа в данном месте потока к скорости звука в том же месте, то есть величина M , равная

$$M = \frac{v}{a}, \quad (15.31)$$

называется числом Маха*.

- При $v < a$, или $M < 1$, режим называется дозвуковым;
- при $v > a$, или $M > 1$, режим называется сверхзвуковым;
- при $v = a$, или $M = 1$, режим называется критическим.

Параметры течения газа при критическом режиме называются критическими и обозначаются $v_{кр}$, $p_{кр}$, $\rho_{кр}$, $T_{кр}$, $a_{кр}$.

* Эрнст Мах (1838–1916), австрийский физик и философ.

Отношение местной скорости течения газа v к критической скорости $v_{\text{кр}} = a_{\text{кр}}$, то есть величина λ , равная

$$\lambda = \frac{v}{a_{\text{кр}}} = \frac{v}{v_{\text{кр}}}, \quad (15.32)$$

называется коэффициентом скорости.

Из закона сохранения энергии (15.29) следует, что максимально возможная скорость адиабатического потока v_{max} достигается при $T = 0$ и

$$v_{\text{max}} = \sqrt{2c_p T_0}. \quad (15.33)$$

Скорость звука, как это видно из формулы (15.15), при $T = 0$ также равна нулю. Таким образом, число Маха может изменяться в пределах $0 \leq M < \infty$.

Подставив в уравнение закона сохранения энергии (15.30) скорость звука по формуле (15.31), получаем

$$\frac{a^2}{k-1} + \frac{v^2}{2} = \frac{a_0^2}{k-1}, \quad (15.34)$$

где $a_0 = \sqrt{k \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{kRT_0}$ – скорость звука при температуре торможения $T = T_0$.

Полагая в уравнении (15.34) $a = v = a_{\text{кр}}$, имеем

$$a_{\text{кр}} = v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} a_0 = \sqrt{\frac{2k}{k+1}} \sqrt{RT_0} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}} \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (15.35)$$

откуда видно, что в адиабатическом потоке с температурой торможения T_0 критическая скорость есть величина постоянная для всего потока. Полагая в уравнении (15.34) $a = 0$, получим еще одно выражение для v_{max} :

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} a_0. \quad (15.36)$$

Из определения a_0 и формулы Майера (15.23) следует, что выражения (15.33) и (15.36) идентичны. Из формул (15.32), (15.35) и (15.36) видно, что коэффициент скорости λ может изменяться в пределах

$$0 \leq \lambda < \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Для того, чтобы установить зависимость параметров потока от числа Маха и параметров торможения, воспользуемся законом сохранения энергии в виде (15.34). Из этого уравнения имеем

$$1 + \frac{k-1}{2} \frac{v^2}{a^2} = \frac{a_0^2}{a^2},$$

или, с учетом формул (15.15) и (15.31),

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2. \quad (15.37)$$

Из уравнения состояния Менделеева–Клапейрона (15.1) и адиабаты Пуассона (15.14) следует, что

$$\frac{p_0}{p} = \frac{\rho_0 T_0}{\rho T} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^k, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad \frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (15.38)$$

Подставив в формулу (15.37) равенства (15.38), получаем

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad (15.39)$$

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (15.40)$$

Формулы (15.37), (15.39) и (15.40) представляют собой искомые зависимости. Заметим, что если величины p, ρ, T и p_0, ρ_0, T_0 берутся в одном и том же сечении, то, как это следует из определения параметров торможения, формулы (15.37), (15.39) и (15.40) справедливы и при неадиабатических процессах.

Полагая в формулах (15.37), (15.39), (15.40) $M = 1$, имеем

$$\frac{T_{\text{кр}}}{T_0} = \frac{2}{k+1}, \quad \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad \frac{p_{\text{кр}}}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (15.41)$$

Для метана $k = 1,3$, для воздуха $k = 1,4$. Поэтому для метана

$$\frac{T_{\text{кр}}}{T_0} = 0,870, \quad \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_0} = 0,628, \quad \frac{p_{\text{кр}}}{p_0} = 0,546.$$

Для воздуха

$$\frac{T_{\text{кр}}}{T_0} = 0,833, \quad \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_0} = 0,634, \quad \frac{p_{\text{кр}}}{p_0} = 0,528.$$

Из приведенного примера видно, что критическое течение возникает при относительно небольших перепадах давления.

Из формул (15.15), (15.31), (15.32), (15.35) и (15.37) следует, что

$$\lambda^2 = \frac{v^2}{a_{\text{кр}}^2} = \frac{v^2}{a^2} \frac{a^2}{a_0^2} \frac{a_0^2}{a_{\text{кр}}^2} = M^2 \frac{T}{T_0} \frac{k+1}{2} = \frac{k+1}{2} \cdot M^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{-1}, \quad (15.42)$$

откуда

$$M^2 = \frac{2\lambda^2}{k+1 - (k-1)\lambda^2}.$$

Подставив это выражение в формулы (15.37), (15.39) и (15.40), получаем

$$\tau(\lambda) = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2, \quad (15.43)$$

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad (15.44)$$

$$\pi(\lambda) = \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (15.45)$$

то есть зависимости, связывающие между собой параметры потока, параметры торможения и коэффициент скорости.

§4. Связь между площадью поперечного сечения трубки тока и скоростью течения

При установившемся одномерном течении газа уравнение неразрывности (2.30), или (15.17), имеет вид

$$Q_m = \rho v S = \text{const}. \quad (15.46)$$

Дифференцируя это выражение, получаем

$$v S d\rho + \rho S dv + \rho v dS = 0,$$

или

$$\frac{dS}{S} = -\left(\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v}\right). \quad (15.47)$$

Дифференцируя закон сохранения энергии (15.30), имеем

$$\frac{k}{k-1} \frac{\rho dp - p d\rho}{\rho^2} + v dv = 0, \quad (15.48)$$

а так как в соответствии с формулами (15.12) и (15.15)

$$dp = a^2 d\rho, \quad p = \frac{1}{k} \rho a^2,$$

то равенство (15.48) можно представить в виде

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} + v dv = 0. \quad (15.49)$$

Исключив из выражений (15.47) и (15.49) величину $d\rho/\rho$, получаем

$$\frac{dS}{S} = -\left(\frac{dv}{v} - \frac{v dv}{a^2}\right) = -\frac{dv}{v} \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = -\frac{dv}{v} (1 - M^2). \quad (15.50)$$

Из формулы (15.50) видно, что при $M = 1$ $dS = 0$. Следовательно, экстремум функции $S = S(x)$, где координата x отсчитывается вдоль оси трубки тока, соответствует критическому режиму. При $M < 1$ $1 - M^2 > 0$, и знаки dv и dS противоположны. Это означает, что в дозвуковом режиме скорость потока возрастает при уменьшении площади поперечного сечения трубки. В сверхзвуковом потоке $M > 1$, $1 - M^2 < 0$, и знаки dv и dS совпадают. Следовательно, в этом случае скорость потока возрастает с ростом площади сечения. Таким образом, экстремум S является минимумом*, и критический режим ($M = 1$) может возникнуть только в самом узком, так называемом критическом сечении трубки тока. Из уравнения (15.46) следует, что при $S = S_{\min} = S_{\text{кр}}$ массовая скорость ρv достигает максимума. Примерный график зависимости S/S_{\min} от M представлен на рис. 15.2.

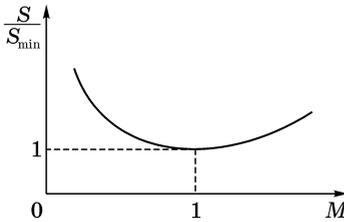


Рис. 15.2

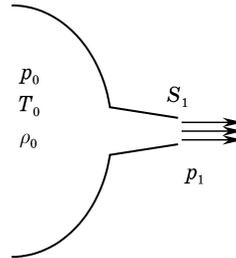


Рис. 15.3

Из формулы (15.39) видно, что при сверхзвуковом течении рост числа Маха сопровождается резким снижением плотности газа. Поэтому для того, чтобы выполнялся закон сохранения массы (15.46), необходимо увеличивать площадь сечения трубки тока. Отметим особо, что при дозвуковом течении зависимость скорости от площади сечения имеет качественно такой же вид, что и при течении несжимаемой жидкости. В сверхзвуковом потоке эта зависимость имеет принципиально иной характер.

* Условие $dS = 0$ не может соответствовать максимуму S , так как дозвуковой поток при подходе к S_{\max} будет замедляться, то есть число Маха, которое меньше единицы, будет далее уменьшаться. Если $M > 1$, то при подходе к S_{\max} поток будет ускоряться. Следовательно, критическое течение ($M = 1$) может быть только при $S = S_{\min}$.

§5. Истечение газа через сходящийся насадок

Рассмотрим установившееся адиабатическое истечение газа из резервуара через сходящийся насадок (рис. 15.3). Как уже указывалось, адиабатическое течение невязкого газа является изэнтропическим. Поэтому параметры покоящегося в резервуаре газа – p_0, T_0, ρ_0 – можно рассматривать как параметры торможения. Из закона сохранения энергии (15.30) имеем, что скорость газа в любом сечении насадка равна

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho}\right)},$$

или, с учетом адиабаты Пуассона (15.14),

$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}. \quad (15.51)$$

Массовый расход в рассматриваемом сечении в соответствии с формулами (15.1), (15.14) и (15.51) равен

$$\begin{aligned} Q_m &= \rho v S = \frac{\rho}{\rho_0} \rho_0 v S = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}} \rho_0 v S = \\ &= \frac{S p_0}{\sqrt{R T_0}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \end{aligned} \quad (15.52)$$

Обозначив площадь выходного сечения насадка через S_1 , а давление в резервуаре через p_1 , из формулы (15.52) имеем

$$Q_m = \frac{S_1 p_0}{\sqrt{R T_0}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (15.53)$$

Для исследования формулы (15.53) положим

$$\frac{p_1}{p_0} = x, \quad \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}} = x^{\frac{2}{k}} - x^{\frac{k+1}{k}} = y.$$

Очевидно, что $0 \leq p_1 \leq p_0$, или $0 \leq x \leq 1$. Внутри этого промежутка $y > 0$, так как $(k+1)/k > 2/k$, а на его концах $y = 0$. Следовательно, функция $y(x)$ имеет на отрезке $[0,1]$ максимум. Приравнявая первую производную нулю, имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{k} x^{\frac{2}{k}-1} - \frac{k+1}{k} x^{\frac{1}{k}} = 0,$$

откуда массовый расход Q_m достигает максимума при

$$x = \frac{p_1}{p} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (15.54)$$

и

$$Q_m^{\max} = \frac{S_1 p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}. \quad (15.55)$$

Сравнивая формулу (15.54) с соответствующим равенством (15.41), видим, что

$$\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{p_{кр}}{p_0}.$$

Таким образом, при снижении наружного давления p_1 массовый расход Q_m возрастает от $Q = 0$ при $p_1 = p_0$ до Q_m^{\max} при $p_1 = p_{кр}$. При $p = p_{кр}$ скорость газа в выходном сечении насадка равна критической, то есть $v = v_{кр} = a_{кр}$. Такое истечение называется критическим. Дальнейшее снижение давления p_1 должно в соответствии с формулой (15.53) приводить к уменьшению массового расхода, что противоречит физическому смыслу процесса. Опыт показывает, что при $0 \leq p_1 \leq p_{кр}$ массовый расход остается постоянным, давление и скорость в выходном сечении остаются равными $p = p_{кр}$, $v = v_{кр}$, а струя по выходе из насадка расширяется. При этом между давлением в выходном сечении $p_{кр}$ и давлением в окружающем пространстве p_1 образуется разрыв.

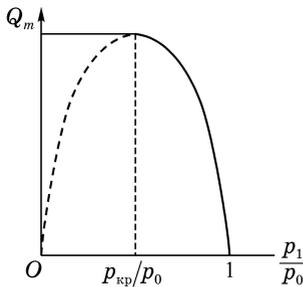


Рис. 15.4

Итак, массовый расход через сходящийся насадок определяется при $p_{кр} \leq p_1 \leq p_0$ по формуле (15.53), а при $0 \leq p_1 \leq p_{кр}$ — по формуле (15.55). График зависимости Q_m от $\frac{p_1}{p_0}$ представлен на рис. 15.4. Пунктирная линия на этом графике отвечает части решения, даваемого формулой (15.53), не имеющей физического смысла.

Постоянство расхода в области $0 \leq p_1 \leq p_{кр}$ можно объяснить сле-

дующим образом. Когда в выходном сечении насадка скорость течения газа становится равной скорости звука, изменение давления во внешней среде не может проникнуть внутрь насадка. Действительно, это возмущение (изменение давления) распространяется со скоростью звука и, следовательно, не может пройти через сечение, в котором скорость равна критической. Создается динамический барьер, изолирующий внутреннюю часть насадка от внешних возмущений, что и приводит к постоянству массового расхода.

§6. Сопло Лавалья

Сопло Лавалья* (рис. 15.5) состоит из сужающейся и расширяющейся частей и служит для получения сверхзвуковых скоростей течения газа. При рассмотрении работы сопла Лавалья будем считать течение установившимся и изэнтропическим. Тогда вдоль сопла выполняется закон сохранения массы в виде (15.46), а массовая скорость ρv в любом сечении сопла в соответствии с формулой (15.52) равна

$$\rho v = \frac{Q_m}{S(x)} = \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (15.56)$$

Из формулы (15.56) видно, что $\rho v = f\left(\frac{p}{p_0}\right)$, то есть массовая скорость

зависит только от распределения давления вдоль сопла (трубки тока) и не зависит явно от его геометрии. Иначе говоря, массовая скорость есть универсальная функция давления. На основании проведенного в предыдущем параграфе анализа имеем, что $\max(\rho v)$ достигается при $p = p_{\text{кр}}$, то есть при критическом режиме, и

$$\max(\rho v) = \rho_{\text{кр}} v_{\text{кр}} = \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}.$$

График зависимости $\frac{\rho v}{\rho_{\text{кр}} v_{\text{кр}}} = f\left(\frac{p}{p_0}\right)$ схематически показан на рис. 15.6.

* Карл Густав Лаваль (1845–1913), шведский инженер и изобретатель.

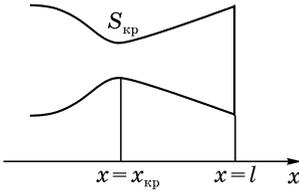


Рис. 15.5

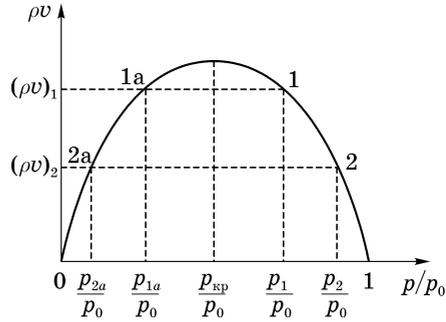


Рис. 15.6

Итак, если заданы закон распределения площади $S(x)$ и массовый расход Q_m , то с помощью формулы (15.56) можно найти $\frac{P}{p_0} = f(x)$, то есть

можно найти распределение давления по длине сопла Лаваля. Для получения решения удобно воспользоваться графиком рис. 15.6. Будем считать, что форма сопла Лаваля, то есть функция $S = S(x)$ известна. Массовый расход Q_m будем также считать известным. Возьмем какое-либо сечение сопла x_1 слева от сечения $x = x_{кр}$ (рис. 15.5). Тогда в соответствии с формулой (15.56) величина

$$(\rho v)_1 = \frac{Q_m}{S(x_1)}$$

будет известна. На графике (15.6) этому значению массовой скорости соответствуют точки 1 и 1a. В точке 1 имеем $\frac{p_1}{p_0} > \frac{p_{кр}}{p_0}$, а в точке 1a –

$\frac{p_{1a}}{p_0} < \frac{p_{кр}}{p_0}$. Следовательно, точка 1 соответствует дозвуковому течению,

а точка 1a – сверхзвуковому. В сужающейся части сопла происходит разгон потока, а при $x = x_{кр}$ течение не может быть сверхзвуковым. Поэтому при $x = x_1$ может существовать только дозвуковое течение, котором реализуется только одно значение давления – $\frac{p_1}{p_0}$.

Возьмем теперь сечение x_2 справа от сечения $x = x_{кр}$. Массовая скорость в этом сечении равна

$$(\rho v)_2 = \frac{Q_m}{S(x_2)}.$$

На графике рис. 15.6 значению $\rho v = (\rho v)_2$ соответствуют точки 2 ($\frac{p_2}{p_0} > \frac{p_{кр}}{p_0}$ – дозвуковой режим) и 2а ($\frac{p_{2а}}{p_0} < \frac{p_{кр}}{p_0}$ – сверхзвуковой режим).

В расширяющейся части сопла могут происходить как разгон, так и торможение потока, то есть могут существовать как дозвуковой, так и сверхзвуковой режимы. Какой из них фактически имеет место, зависит от давления на выходе сопла. Проводя указанные построения для различных сечений, можно построить кривые распределения давлений по длине сопла Лаваля (рис. 15.7).

Из приведенных рассуждений следует, что при $p_e = p_0$, где p_e – давление во внешнем пространстве, газ в сопле покоится. Снижение p_e приводит к возникновению течения, причем в сужающейся части сопла происходит разгон, а в расширяющейся – торможение потока. Скорость течения при этом остается всюду дозвуковой, распределение давлений имеет вид пунктирной кривой на рис. 15.7. По мере дальнейшего снижения p_e ($p_e > p_c$) скорость во всех сечениях и массовый расход через сопло возрастают. При $p_e = p_c$ скорость течения в сечении $x = x_{кр}$ становится равной скорости звука $a_{кр} = v_{кр}$, а в расширяющейся части сопла плавно уменьшается. Массовый расход достигает максимального значения $Q_m^{max} = \rho_{кр} v_{кр} S_{кр}$, давление в расширяющейся части возрастает от $p = p_{кр}$ до $p = p_c$ (кривая А, рис. 15.7).

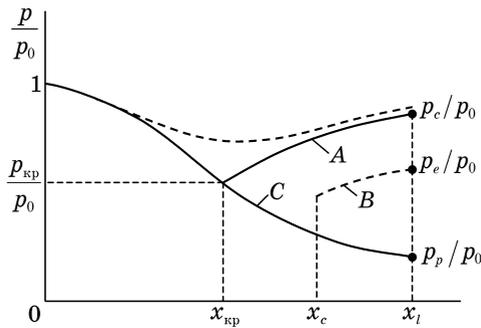


Рис. 15.7

Дальнейшее снижение p_e ($p_p < p_e < p_c$) приводит к возникновению в расширяющейся части сопла скачков давления (кривая В, рис. 15.7). На участке $x_{кр} < x < x_c$ течение будет сверхзвуковым, а при $x_c < x < l$ – дозвуковым.

При $p = p_p$ течение всюду в расширяющейся части сопла будет сверхзвуковым, а распределение давления будет описываться кривой C на рис. 15.7.

При $p_e < p_p$ параметры газа (v, p, ρ, T) в выходном сечении сопла будут такими же, как при $p = p_p$, а по выходе из сопла струя газа будет расширяться. Выравнивание давления от значения p_p до значения p_e будет сопровождаться многократными расширениями и сжатиями струи с возникновением системы косых скачков. Отметим особо, что из построения кривых A и C следует, что при $Q_m = Q_m^{\max}$ давления на срезе сопла p_c и p_p определяются только геометрией сопла и не зависят от противодействия p_e .

Режимы, при которых $p_c = p_e$ или $p_p = p_e$, называются расчетными. Первый – режим адиабатического сжатия, второй – адиабатического расширения. Все прочие режимы работы сопла Лаваля – нерасчетные.

§7 Газодинамические функции

Соотношения (15.43), (15.44), (15.45), то есть функции $\tau(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ называются газодинамическими функциями. Для этих функций составлены подробные таблицы, что существенно облегчает выполнение различных газодинамических расчетов.

Между газодинамическими функциями $\tau(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ существуют очевидные связи

$$\frac{T}{T_0} = \tau(\lambda) = \frac{\pi(\lambda)}{\varepsilon(\lambda)}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \varepsilon(\lambda) = [\tau(\lambda)]^{\frac{1}{k-1}}, \quad \frac{p}{p_0} = \pi(\lambda) = [\tau(\lambda)]^{\frac{k}{k-1}} = [\varepsilon(\lambda)]^k. \quad (15.57)$$

Пользуясь газодинамическими функциями, массовый расход можно представить в виде

$$Q_m = \rho v S = \frac{\rho}{\rho_0} \rho_0 \frac{v}{a_{кр}} a_{кр} S = \rho_0 a_{кр} S \lambda \varepsilon(\lambda). \quad (15.58)$$

Введем новую газодинамическую функцию

$$q(\lambda) = C \lambda \varepsilon(\lambda) \quad (15.59)$$

и определим константу C так, чтобы $q(1) = 1$. Из формул (15.44) и (15.59) следует, что

$$C = \frac{q(1)}{\varepsilon(1)} = \frac{1}{\varepsilon(1)} = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

и формула (15.59) принимает вид

$$q(\lambda) = \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda \varepsilon(\lambda). \quad (15.60)$$

Представим функцию $q(\lambda)$, учитывая, что $\varepsilon(1) = \frac{\rho_{кр}}{\rho_0}$, в виде

$$q(\lambda) = \frac{\lambda \varepsilon(\lambda)}{\varepsilon(1)} = \frac{v}{v_{кр}} \frac{\rho_0}{\rho_{кр}} \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho v}{\rho_{кр} v_{кр}}. \quad (15.61)$$

Из формулы (15.61) видно, что $q(\lambda)$ представляет собой отношение массовой скорости к критической массовой скорости.

График $q(\lambda)$ представлен на рис. 15.8. Отметим особо, что каждому значению $q(\lambda) \neq 1$ соответствуют два значения λ : одно в дозвуковом режиме, другое – в сверхзвуковом.

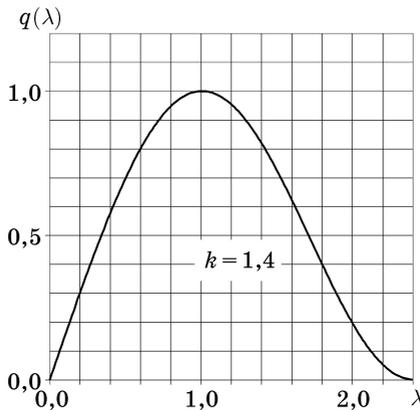


Рис. 15.8

С введением функции $q(\lambda)$ формулу (15.58) можно представить в виде

$$Q_m = \frac{p_0 S}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} q(\lambda)}. \quad (15.62)$$

При этом значение $q(\lambda)$ в формуле (15.62) надо брать в том же сечении, что и S . Например, при работе сопла Лаваля в расчетном режиме при $x = x_{кр}$ $\lambda = 1$, и надо принимать $S = S_{кр}$. Для иллюстрации возможных

применений газодинамических функций рассмотрим работу сопла Лавала в расчетном режиме. В этом случае

$$Q_m = \rho_{кр} v_{кр} S_{кр} = \rho_{вых} v_{вых} S_{вых}, \quad (15.63)$$

где $\rho_{вых}, v_{вых}$ – плотность и скорость в выходном сечении сопла, $S_{вых}$ – площадь этого сечения.

Из формул (15.62) и (15.63) имеем

$$\frac{\rho_{вых} v_{вых}}{\rho_{кр} v_{кр}} = q(\lambda_{вых}) = \frac{S_{кр}}{S_{вых}}. \quad (15.64)$$

Примем, что $p_0 = 10^7$ Па, $T_0 = 293^\circ\text{К}$, $S_{кр} = 0,5\text{ см}^2$, $S_{вых} = 2\text{ см}^2$, $R = 287 \frac{\text{М}^2}{\text{с}^2 \text{град}}$, показатель адиабаты $k = 1,4$. Требуется определить

λ, M, p, T в выходном сечении сопла. Из формулы (15.64) имеем $q(\lambda_{вых}) = 0,25$. По таблицам газодинамических функций для $k = 1,4$ находим, что значению $q(\lambda) = 0,25$ соответствуют

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0,16, \quad M_1 = 0,146, \quad \tau(\lambda_1) = 0,996, \quad \pi(\lambda_1) = 0,985, \\ \lambda_2 = 1,95, \quad M_2 = 2,94, \quad \tau(\lambda_2) = 0,366, \quad \pi(\lambda_2) = 0,0297. \end{aligned}$$

Так как $\lambda_1 < 1$, а $\lambda_2 > 1$, то первый режим соответствует адиабатическому сжатию, а второй – адиабатическому расширению.

В соответствии с формулами (15.57) получаем

$$\begin{aligned} T_1 = \tau(\lambda_1) T_0 = 292^\circ\text{К}, \quad p_1 = \pi(\lambda_1) p_0 = 9,85 \cdot 10^6 \text{ Па}; \\ T_2 = \tau(\lambda_2) T_0 = 107^\circ\text{К}, \quad p_2 = \pi(\lambda_2) p_0 = 2,97 \cdot 10^5 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Из формулы (15.62) имеем

$$Q_m = \frac{p_0 S}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} q(1) = 1,18 \text{ кг/с}.$$

§8. Ударные волны

Ранее рассматривались течения, при которых распределение всех величин (ρ, v, p, T) в газе непрерывно. Возможны, однако, и такие движения, в которых характеристики потока терпят разрыв. Эти разрывы возникают вдоль некоторых поверхностей – поверхностей разрыва. При пересечении поверхности разрыва характеристики течения испытывают скачок. Для объяснения причины возникновения скачков, иначе называемых удар-

ными волнами, рассмотрим трубу, закрытую с одной стороны поршнем и заполненную газом (рис. 15.1). В начальный момент времени поршень и газ неподвижны. Когда поршень начинает вдвигаться в трубу, перед ним возникает возмущение (сжатие газа). Можно считать, что скорость распространения возмущений в каждом сечении равна местной скорости звука. Распространение возмущений, создаваемых поршнем, можно рассматривать как последовательность непрерывно следующих друг за другом звуковых волн, причем каждая последующая волна распространяется по газу, возмущенному предыдущими волнами. Сжатие газа сопровождается его нагревом, а скорость распространения возмущений возрастает вместе с температурой. Отсюда следует, что каждая последующая волна будет перемещаться относительно стенок трубы быстрее предыдущей. Волны будут догонять друг друга, складываться и образовывать одну сильную волну сжатия – ударную волну.

При движении поршня внутри трубы за ним образуются волны разрежения. Но в этом случае волны уже не будут догонять друг друга, так как последующая волна пойдет по газу, охлажденному в результате прохождения предыдущей, и скорость распространения последующей волны будет меньше скорости волны, ей предшествующей. Таким образом, волны разрежения не могут образовывать ударных волн.

Прямой скачок уплотнения

Неподвижная в пространстве ударная волна, фронт которой перпендикулярен скорости потока, называется прямым скачком (рис. 15.9). Для расчета прямого скачка, то есть установления связи между параметрами газа до и после скачка, воспользуемся законами сохранения массы, изменения количества движения и сохранения энергии. Движение будем считать установившимся, а процесс адиабатическим. Примем площадь поперечного сечения трубы постоянной, $S = 1$. да получим в соответствии с формулой (15.46)

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = m. \quad (15.65)$$

Здесь m – массовый расход на единицу площади трубы, индекс 1 относится к параметрам газа перед скачком, индекс 2 – за скачком. Закон изменения количества движения (2.58) в рассматриваемом случае, то есть при пренебрежении силой тяжести и трением, в проекции на ось потока Ox

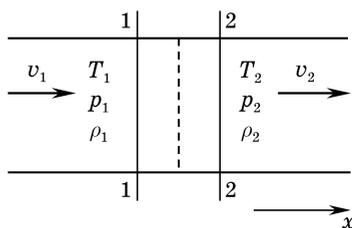


Рис. 15.9

принимает вид

$$m(v_2 - v_1) = P_x = p_1 - p_2. \quad (15.66)$$

Из закона сохранения энергии (15.30) имеем

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (15.67)$$

Из уравнения (15.65) имеем

$$v_1 = \frac{m}{\rho_1}, \quad v_2 = \frac{m}{\rho_2}.$$

Подставив эти соотношения в равенства (15.66) и (15.67), получаем

$$m^2 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) = p_1 - p_2, \quad (15.68)$$

$$\frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{m^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right).$$

Исключая m^2 из формул (15.68), имеем

$$\frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}} \left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_1^2} \right) = \frac{p_1 - p_2}{2} \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right). \quad (15.69)$$

Умножив равенство (15.69) на $\frac{\rho_2}{p_2}$, получаем

$$\frac{k}{k-1} \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right),$$

или, после приведения подобных членов –

$$\frac{k+1}{k-1} \frac{p_1}{p_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1} + \frac{p_1}{p_2} - \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (15.70)$$

Разрешив уравнение (15.70) относительно $\frac{p_2}{p_1}$ имеем

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}, \quad (15.71)$$

или, разрешив относительно $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, –

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1} + 1 \right) / \left(\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_2}{p_1} \right). \quad (15.72)$$

Соотношение (15.71), или (15.72), называется ударной адиабатой, или адиабатой Гюгоню. Из (15.71) следует, что

$$\frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty \text{ при } \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{k+1}{k-1} \quad \text{и} \quad \frac{p_2}{p_1} \rightarrow -\frac{k-1}{k+1} \text{ при } \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow 0.$$

На рис. 15.10 представлены графики адиабаты Гюгоню и адиабаты Пуассона. При рассмотрении этих адиабат возникает ряд вопросов. Во-первых, при $\rho_2/\rho_1 = 0$ отношение давлений p_2/p_1 в соответствии с формулой (15.71) становится отрицательным, что физически бессмысленно. Во-вторых, почему в соответствии с адиабатой Пуассона $\rho_2/\rho_1 \rightarrow \infty$ при $p_2/p_1 \rightarrow \infty$, а по адиабате Гюгоню предельное сжатие ограничено величиной $\frac{k+1}{k-1}$?

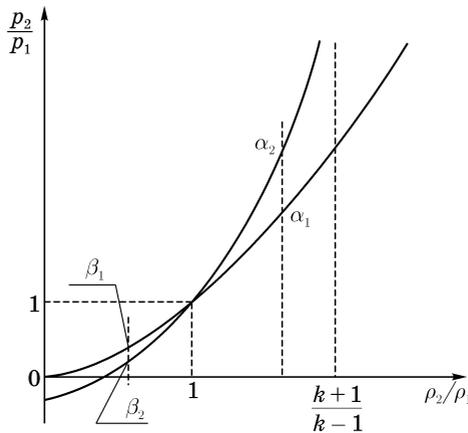


Рис. 15.10

Рассмотрим на рис. 15.10 точки α_1 и α_2 , отвечающие какому-либо значению $\frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$, и β_1, β_2 , соответствующие значению $\frac{\rho_2}{\rho_1} < 1$. В соответствии с формулой (7.37) изменение энтропии равно

$$s_2 - s_1 = C_V \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right]. \tag{15.73}$$

Из графика рис. 15.10 видно, что при $\frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_\Gamma > \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_\Pi, \quad (15.74)$$

где $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_\Gamma$ – соотношение давлений, определенное по адиабате Гюгонио,

а $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_\Pi$ – по адиабате Пуассона. Следовательно, в соответствии с неравенством (15.74)

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_\Gamma \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k > \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_\Pi \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k = 1. \quad (15.75)$$

Из формул (15.73) и (15.75) имеем, что при $\frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$

$$s_2 - s_1 = C_V \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_\Gamma \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k \right] > 0. \quad (15.76)$$

Повторив аналогичные рассуждения для точек β_1 и β_2 , то есть при $\frac{\rho_2}{\rho_1} < 1$, получаем, что в этом случае

$$S_2 - S_1 = c_V \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_\Gamma \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^k \right] < 0. \quad (15.77)$$

Неравенства (15.76) и (15.77) показывают, что процесс сжатия в адиабате Гюгонио сопровождается ростом энтропии, а процесс разрежения – ее уменьшением. Таким образом, в ударной волне сжатия происходят рост энтропии и необратимый переход механической энергии в тепло. Это обстоятельство препятствует неограниченному росту величины $\frac{\rho_2}{\rho_1}$.

В ударной волне разрежения происходит убывание энтропии, что физически невозможно – это противоречит второму закону термодинамики, то есть ударные волны разрежения невозможны, и часть адиабаты Гюгонио, соответствующая $\frac{\rho_2}{\rho_1} < 1$, не имеет физического смысла.

Вернемся к уравнениям (15.65), (15.66) и (15.67) и исключим из них давления и плотности.

Из равенства (15.65) имеем

$$\rho_1 = \frac{m}{v_1}, \quad \rho_2 = \frac{m}{v_2}.$$

Подставив эти выражения в соотношение (15.66), получаем

$$m(v_2 - v_1) = \frac{p_1}{\rho_1} \rho_1 - \frac{p_2}{\rho_2} \rho_2 = m \left(\frac{p_1}{\rho_1} \frac{1}{v_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \frac{1}{v_2} \right). \quad (15.78)$$

Исключая с помощью равенств (15.67) величины $\frac{p_1}{\rho_1}$ и $\frac{p_2}{\rho_2}$ из формулы (15.78), после элементарных преобразований получим

$$v_1 v_2 = \frac{2k}{k+1} \frac{p_0}{\rho_0} \quad (15.79)$$

или с учетом формулы (15.35) –

$$v_1 v_2 = a_{кр}^2. \quad (15.80)$$

Соотношение (15.80), связывающее значения скорости до и после прямого скачка, называется соотношением или формулой Прандтля.

Формулу Прандтля можно представить в виде

$$\frac{v_1}{a_{кр}} \cdot \frac{v_2}{a_{кр}} = \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (15.81)$$

Из соотношения (15.81) следует, что формально возможны случаи:

- 1) $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 < 1$; 2) $\lambda_1 = \lambda_2$; 3) $\lambda_1 < 1$, $\lambda_2 > 1$.

В соответствии с уравнением неразрывности (15.65) и формулой (15.80) имеем

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1^2}{v_1 v_2} = \frac{v_1^2}{a_{кр}^2} = \lambda_1^2. \quad (15.82)$$

Случай 3) соответствует условию $\frac{\rho_2}{\rho_1} < 1$, то есть скачку разрежения, что, как было показано, невозможно. Случай 2) означает, что $\rho_1 = \rho_2$ – нет скачка. Случай 1) соответствует условию $\frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$, то есть ударной волне сжатия.

Условия $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 < 1$ означают, что перед скачком течение сверхзвуковое, а позади скачка – дозвуковое.

Итак, скачки уплотнения (прямые ударные волны) могут возникать только в сверхзвуковом потоке. При прохождении через прямую ударную волну сверхзвуковой поток переходит в дозвуковой. Обратное невозможно.

Рассмотрим, как меняются параметры газа при его прохождении через прямой скачок уплотнения.

Из условия адиабатичности процесса следует, что температура торможения до скачка T_{01} равна температуре торможения после скачка T_{02} , то есть

$$T_{01} = T_{02} = T_0. \quad (15.83)$$

Следовательно,

$$a_{01} = \sqrt{kRT_{01}} = a_{02} = \sqrt{kRT_{02}} = a_0.$$

Для определения изменения давления воспользуемся адиабатой Гюгонио (15.71) и формулой (15.82). Тогда

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{k+1}{k-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} - 1 = 2k \frac{\lambda_1^2 - 1}{k+1 - (k-1)\lambda_1^2}. \quad (15.84)$$

Заменяя в формуле (15.84) λ_1 с помощью соотношения (15.42), имеем

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2k}{k+1} (M_1^2 - 1). \quad (15.85)$$

При $M \rightarrow \infty$ или $\lambda \rightarrow \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ будет $\frac{\Delta p}{p} \rightarrow \infty$.

Изменение плотности, как это следует из формулы (15.82), равно

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \lambda_1^2 - 1.$$

Для определения изменения температуры воспользуемся соотношениями (15.43) и (15.83). Тогда, с учетом формулы Прандтля (15.81), получим

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_0} \frac{T_0}{T_1} = \frac{\tau(\lambda_2)}{\tau(\lambda_1)} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}.$$

При $\lambda_1 \rightarrow \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$, то есть при $v \rightarrow v_{\max}$, $\frac{T_2}{T_1} \rightarrow \infty$. Однако это не означает, что $T_2 \rightarrow \infty$, так как при $v \rightarrow v_{\max}$ $T_1 \rightarrow 0$. Поскольку при прохождении газа через ударную волну энтропия возрастает, этот процесс сопро-

вождается изменением давления торможения. Так как температура торможения при этом сохраняется, то в соответствии с уравнением состояния Менделеева–Клапейрона

$$\frac{p_{02}}{\rho_{02}} = \frac{p_{01}}{\rho_{01}},$$

и

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\rho_1}{\rho_{01}}.$$

На основании формул (15.44), (15.81), (15.82) последнее равенство можно представить в виде

$$\sigma = \lambda_1^2 \frac{\varepsilon(\lambda_1)}{\varepsilon(\lambda_2)} = \lambda_1^2 \left(\frac{1 - \frac{k-1}{2} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{2} \frac{1}{\lambda_1^2}} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{15.86}$$

Из формулы (15.86) видно, что при $\lambda_1 > 1$ всегда $\sigma < 1$, то есть $p_{02} < p_{01}$. Следовательно, механическая энергия необратимо переходит в тепло, как это и должно быть при росте энтропии.

Косой скачок уплотнения

При изменении направления потока газа, например, при обтекании клина (рис. 15.11), образуются так называемые косые скачки уплотнения. Фронт таких скачков расположен наклонно по отношению к направлению набегающего потока. В этом случае массовый расход через единицу площади фронтальной поверхности OA , очевидно, равен

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2} = m, \tag{15.87}$$

где v_{n1}, v_{n2} – проекции скорости на нормаль к плоскости скачка.

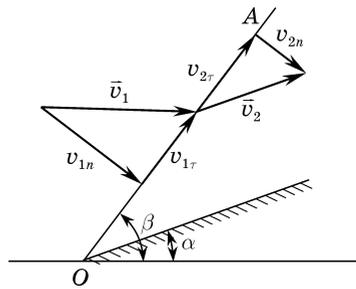


Рис. 15.11

Закон изменения количества движения (2.54) запишем в виде

$$m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{n}(p_1 - p_2), \tag{15.88}$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к OA .

Закон сохранения энергии сохраняет свой вид (15.67).

Проектируя уравнение (15.88) на плоскость скачка OA и на нормаль к ней, имеем

$$v_{2\tau} - v_{1\tau} = 0, \quad m(v_{2n} - v_{1n}) = p_1 - p_2, \quad (15.89)$$

где $v_{1\tau}, v_{2\tau}$ – проекции скорости на плоскость скачка.

Из первого равенства (15.89) следует, что при переходе через плоскость скачка касательная составляющая скорости v_τ не терпит разрыва, то есть

$$v_{1\tau} = v_{2\tau} = v_\tau.$$

Так как

$$v_1^2 = v_{1n}^2 + v_\tau^2, \quad v_2^2 = v_{2n}^2 + v_\tau^2,$$

то, подставляя эти соотношения в закон сохранения энергии (15.67), получим

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_{1n}^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_{2n}^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{v_\tau^2}{2} = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{k-1}{2k} v_\tau^2 \right). \quad (15.90)$$

Сравнивая между собой группы уравнений (15.65), (15.66), (15.67) и (15.87), (15.89) и (15.90) видим, что эти системы уравнений совпадают между собой, если в уравнениях для прямого скачка (15.65), (15.66), (15.67) заменить скорости v_1, v_2 , соответственно, на v_{1n}, v_{2n} , а величину

$\frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}$ на $\frac{k}{k-1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{k-1}{2k} v_\tau^2 \right)$. Следовательно, все формулы, полученные для прямого скачка, остаются в силе, если в них произвести указанную замену.

Адиабата Гюгонио, то есть формулы (15.71) и (15.72), сохраняет свой вид, так как эти формулы не содержат скоростей. Формула Прандтля (15.80) с учетом равенств (15.79) и (15.89) принимает вид

$$v_{1n} v_{2n} = \frac{2k}{k+1} \left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{k-1}{2k} v_\tau^2 \right) = a_{\text{кр}}^2 - \frac{k-1}{k+1} v_\tau^2. \quad (15.91)$$

Анализ формулы (15.91) показывает, что на косом скачке всегда $v_1 > v_2$, но могут реализовываться случаи $v_1 > a_{\text{кр}}$, $v_2 > a_{\text{кр}}$. Таким образом, в отличие от прямого скачка, скорость за косым скачком может оставаться сверхзвуковой. Формула (15.85) для косого скачка принимает вид (см. рис. 15.11)

$$\frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2k}{k+1} \left(\frac{v_{1n}^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{2k}{k+1} \left(\frac{v_1}{a^2} \sin^2 \beta - 1 \right) = \frac{2k}{k+1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1),$$

то есть изменение давления на косом скачке меньше, чем на прямом. Чем меньше β , тем слабее скачок.

§9. Расчет газового эжектора

В газовых эжекторах используется свойство струи газа, движущейся в газовой среде, увлекать за собой частицы этой среды. Таким образом, газовый эжектор представляет своего рода насос и находит широкое применение в технике. В эжекторах поток с большей скоростью (активный газ) и поток с меньшей скоростью (пассивный газ) вводятся через отдельные входные сопла в смесительную камеру. Смешение происходит до тех пор, пока в конце смесительной камеры поток не становится практически однородным. Из смесительной камеры поток попадает в выходной диффузор. В простейших случаях активный и пассивный газы представляют собой одно и то же (или практически одно и то же) вещество. В других случаях оба газовых потока могут иметь различные физико-химические свойства. Различия в химической природе газов может приводить при смешении потоков к химическим реакциям, например, к горению. Эжектор (рис. 15.12) состоит из четырех основных элементов: сопла 1 для газа высокого давления (активного газа), сопла 2 для газа низкого давления (пассивного газа), камеры смешения 3, диффузора 4.

В дальнейшем отмечены индексами: 1 – параметры активного газа на выходе из сопла, 2 – пассивного газа в том же сечении, 3 – параметры смеси на выходе из камеры смешения. Индексом 0, как и раньше, обозначаются параметры торможения в рассматриваемых сечениях.

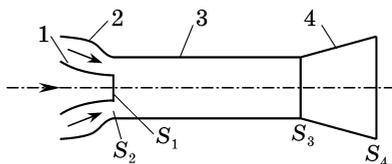


Рис. 15.12

При истечении высоконапорной струи из сопла 1 во входном сечении камеры смешения устанавливается давление p_2 , которое всегда ниже давления торможения низконапорного газа p_{02} . Под действием разности этих давлений низконапорный газ втекает через сопло 2 в камеру смешения. Соотношение массовых расходов эжектирующего Q_{m1} и эжектируемого Q_{m2} газов зависит от соотношения площадей сопел, плотностей газов, режима работы эжектора. Выбором геометрических размеров эжектора коэффициент эжекции n ,

$$n = \frac{Q_{m2}}{Q_{m1}}, \quad (15.92)$$

можно варьировать в широких пределах.

Закон сохранения массы в рассматриваемом случае имеет, очевидно, вид

$$Q_{m3} = Q_{m1} + Q_{m2},$$

или, в соответствии с формулой (15.92),

$$\frac{Q_{m3}}{Q_{m1}} = 1 + n. \quad (15.93)$$

Закон сохранения энергии при пренебрежении теплопередачей через стенки эжектора можно записать в виде

$$Q_{m1} \left(c_{p1} T_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + Q_{m2} \left(c_{p2} T_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) = Q_{m3} \left(c_{p3} T_3 + \frac{v_0^2}{2} \right). \quad (15.94)$$

Будем здесь и далее считать, что термодинамические параметры активного и пассивного газов, а значит и их смеси, имеют одинаковые значения, то есть $c_{p1} = c_{p2} = c_{p3}$, $k_1 = k_2 = k_3$. Тогда, переходя в уравнении (15.94) к температурам торможения, получаем

$$Q_{m1} T_{01} + Q_{m2} T_{02} = Q_{m3} T_{03}. \quad (15.95)$$

С учетом равенств (15.92) и (15.93) уравнение (15.95) можно представить в виде

$$T_{01} + n T_{02} = (1 + n) T_{03}. \quad (15.96)$$

Введем обозначение

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \theta.$$

Тогда

$$\frac{a_{2\text{кр}}}{a_{1\text{кр}}} = \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{01}}} = \sqrt{\theta}, \quad (15.97)$$

и в соответствии с формулой (15.96)

$$\frac{a_{3\text{кр}}}{a_{1\text{кр}}} = \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{01}}} = \sqrt{\frac{1 + n\theta}{1 + n}}. \quad (15.98)$$

Закон изменения количества движения при пренебрежении трением о стенки цилиндрической камеры смешения можно представить в виде

$$Q_{m3} v_3 - Q_{m1} v_1 - Q_{m2} v_2 = p_1 S_1 + p_2 S_2 - p_3 S_3. \quad (15.99)$$

Рассмотрим выражение

$$Q_m v + p S = Q_m \left(v + \frac{p}{\rho v} \right).$$

Используя соотношения (15.1), (15.32), (15.35), (15.43), имеем

$$\frac{p}{\rho} = RT = RT_0 \tau(\lambda) = \frac{k+1}{2k} a_{\text{кр}}^2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right), \quad v = a_{\text{кр}} \lambda.$$

Тогда

$$Q_m v + pS = Q_m a_{кр} \frac{k+1}{2k} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right). \quad (15.100)$$

Из формул (15.99) и (15.100) следует, что

$$Q_{m1} a_{1кр} \left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) + Q_{m2} a_{2кр} \left(\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} \right) = Q_{m3} a_{3кр} \left(\lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3} \right).$$

Разделив это равенство на $Q_{m1} a_{1кр}$, и учитывая формулы (15.92), (15.93), (15.97), (15.98), имеем

$$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} + n\sqrt{\theta} \left(\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2} \right) = \sqrt{(1+n)(1+n\theta)} \left(\lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3} \right). \quad (15.101)$$

Второе уравнение, которое наряду с равенством (15.101) является основным в расчете эжектора, получим из условия цилиндричности камеры смешения, то есть соотношения

$$S_3 = S_1 + S_2. \quad (15.102)$$

В соответствии с формулой (15.62) массовый расход газа Q_m равен

$$Q_m = \frac{p_0 S}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} q(\lambda). \quad (15.103)$$

Выразив из этого соотношения площадь S и подставив результат в равенство (15.102), с учетом формул (15.92), (15.93), (15.97) и (15.98) получим

$$\frac{\sqrt{(1+n)(1+n\theta)}}{p_{03} q(\lambda_3)} = \frac{1}{p_{01} q(\lambda_1)} + \frac{n\sqrt{\theta}}{p_{02} q(\lambda_2)}. \quad (15.104)$$

Из формул (15.92), (15.97) и (15.103) следует, что

$$n = \frac{1}{\alpha\sqrt{\theta}} \frac{p_{02} q(\lambda_2)}{p_{01} q(\lambda_1)}, \quad (15.105)$$

где $\alpha = \frac{S_1}{S_2}$.

Пять соотношений (15.97), (15.98), (15.101), (15.104) и (15.105) содержат 12 величин: $p_{01}, p_{02}, p_{03}, T_{01}, T_{02}, T_{03}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, n, \alpha, \theta$. Таким образом, если задать параметры потоков на входе в камеру смешения, то есть величины $p_{01}, p_{02}, T_{01}, T_{02}, \lambda_1, \lambda_2$ и, кроме того, задать значение n (или α), то указанные формулы позволят определить параметры смеси на выходе из

камеры смешения, то есть величины $p_{03}, T_{03}, \lambda_3$, а также значения θ и α (или n). По параметрам потока на выходе из камеры смешения можно вычислить параметры потока на выходе из диффузора. Для этого необходимо знать отношение выходной и входной площадей сечений диффузора

$\beta = \frac{S_4}{S_3}$ и коэффициент потери давления торможения в диффузоре

$$\sigma = \frac{p_{04}}{p_{03}}.$$

Так как $T_{04} = T_{03}$, то из условия $Q_{m3} = Q_{m4}$ и формулы (15.103) имеем

$$p_{04} S_4 q(\lambda_4) = p_0 S_3 q(\lambda_3),$$

или

$$q(\lambda_4) = \frac{1}{\beta \sigma} q(\lambda_3).$$

Определив из этого соотношения величину λ_4 и зная p_{04}, T_{04} , можно определить все остальные параметры потока на выходе из диффузора.

§10. Установившиеся движения газа в трубах*

Для вывода уравнений, описывающих установившиеся движения газа по трубам, воспользуемся законом изменения кинетической энергии (2.75), то есть

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) dV + \int_S \rho \frac{v^2}{2} v_n dS = \int_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} dV + \int_S \vec{p}_n \vec{v} dS + \int_V \rho N_i dV, \quad (15.106)$$

где в соответствии с формулой (4.43)

$$\rho N_i = p \operatorname{div} \vec{v} - W. \quad (15.107)$$

Произведение $\vec{p}_n \cdot \vec{v}$ можно представить как

$$\vec{p}_n \vec{v} = (-p \vec{n} + \vec{\tau}_n) \vec{v} = -p v_n + \tau^*. \quad (15.108)$$

Величины W и τ^* представляют собой члены, обусловленные вязкостью газа, или, что то же самое, трением. Подставив равенства (15.107) и (15.108) в уравнение (15.106) и учитывая, что в соответствии с теоремой Гаусса–Остроградского

$$\int_S p v_n dS = \int_V \operatorname{div} p \vec{v} dV,$$

* В этом параграфе для удобства читателя частично повторяются рассуждения и преобразования соотношений, которые были приведены в главе XI.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) dV + \int_S \rho \frac{v^2}{2} v_n dS = \int_V (\rho \vec{F} \vec{v} - \operatorname{div} p \vec{v} + p \operatorname{div} \vec{v}) dV - \frac{dA}{dt}, \quad (15.109)$$

где

$$\frac{dA}{dt} = \int_V W dV - \int_S \tau^* dS$$

– мощность сил трения.

Введем функцию

$$P = \frac{dp}{\rho} \quad \text{или} \quad \nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (15.110)$$

Тогда

$$p \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{div} p \vec{v} = -\vec{v} \nabla p = -\rho \vec{v} \nabla P,$$

и уравнение (15.109) можно представить в виде

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) dV + \int_S \rho \frac{v^2}{2} v_n dS = \int_V (\rho \vec{F} \vec{v} - \rho \vec{v} \nabla P) dV - \frac{dA}{dt}. \quad (15.111)$$

Введем следующие предположения:

1) движение установившееся, то есть

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0, \quad \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0;$$

2) массовая сила обладает потенциалом, $\vec{F} = \nabla \Pi$.

На основании этих предположений

$$(\vec{F} - \nabla P) \rho \vec{v} = \nabla(\Pi - P) \rho \vec{v} = \nabla(\Pi - P) \rho \vec{v} + (\Pi - P) \operatorname{div} \rho \vec{v} = \operatorname{div} [\rho(\Pi - P) \vec{v}],$$

и уравнение (15.111) принимает вид

$$\int_S \rho \frac{v^2}{2} v_n dS = \int_V \operatorname{div} [\rho(\Pi - P) \vec{v}] dV - \frac{dA}{dt}, \quad (15.112)$$

или на основании теоремы Гаусса–Остроградского –

$$\int_S \left(\frac{v^2}{2} - \Pi + P \right) \rho v_n dS = - \frac{dA}{dt}. \quad (15.113)$$

Рассмотрим участок трубы, ограниченный сечениями S_1 и S_2 (рис. 15.13) и боковой поверхностью S_3 . Так как

$$\text{на } S_1 \quad v_n = -v, \quad \text{на } S_2 \quad v_n = v, \quad \text{на } S_3 \quad v_n = 0,$$

то уравнение (15.113) можно представить в виде

$$\int_{S_2} \left(\frac{v^2}{2} - \Pi + P \right) \rho v_n dS - \int_{S_1} \left(\frac{v^2}{2} - \Pi + P \right) \rho v_n dS = - \frac{dA}{dt}. \quad (15.114)$$

В соответствии с теоремой о среднем значении

$$\int_S \left(\frac{v^2}{2} - \Pi + P \right) \rho v_n dS = \left(\frac{v^2}{2} - \Pi + P \right)_{\text{cp}} \int_S \rho v_n dS = \left(\frac{v^2}{2} - \Pi + P \right)_{\text{cp}} Q_m. \quad (15.115)$$

Массовый расход Q_m равен

$$Q_m = \frac{dm}{dt}, \quad (15.116)$$

где dm – масса газа, протекшего через сечение за время dt . При установившемся течении $Q_{m1} = Q_{m2}$.

Из соотношений (15.114), (15.115), (15.116) имеем*

$$\left(\frac{v^2}{2} - \Pi + P \right)_2 - \left(\frac{v^2}{2} - \Pi + P \right)_1 = -\frac{1}{Q_m} \frac{dA}{dt} = -\frac{dA}{dm} = -\bar{h}_{1-2}, \quad (15.117)$$

где \bar{h}_{1-2} – удельная по массе работа сил трения.

Пусть расстояние между сечениями S_1 и S_2 равно dx . Тогда при $dx \rightarrow 0$ из равенства (15.117) следует, что

$$d \left(\frac{v^2}{2} - \Pi + P \right) + d\bar{h} = -d\Pi + \frac{dp}{\rho} + v dv + d\bar{h} = 0. \quad (15.118)$$

Уравнение (15.118) называется уравнением энергии в механической форме, или обобщенным уравнением Бернулли. Для применения этого уравнения необходимо задать зависимость $p(\rho)$, то есть необходимо задать вид термодинамического процесса, имеющего место при движении газа по трубопроводу. Примем в качестве такого процесса политропический с постоянным показателем политропы $n = \text{const}$, то есть

$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{p}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^n. \quad (15.119)$$

Потери напора на длине dx в соответствии с формулой Дарси–Вейсбаха (11.13) равны

$$d\bar{h} = \lambda \frac{dx}{D} \frac{v^2}{2g}, \quad (15.120)$$

где D – диаметр трубы.

Опытами установлено, что зависимости λ от числа Рейнольдса Re и относительной шероховатости ε , установленные для жидкостей, можно перенести на движение газа, пренебрегая в первом приближении зависимостью λ от числа Маха M . При турбулентном течении можно положить $\lambda \approx \text{const}$. Действительно, зависимость динамического коэффици-

* Для сокращения записи здесь и далее индекс «cp» опущен.

ента вязкости μ от температуры имеет вид

$$\mu = \mu_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}},$$

где $\mu = \mu_0$ при $T = T_0$. Тогда, учитывая, что $Q_m = \frac{\pi D^2}{4} \rho v$, имеем

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{\rho v D \sqrt{T_0}}{\mu_0 \sqrt{T}} = \frac{4 Q_m \sqrt{T_0}}{\pi D \mu_0 \sqrt{T}} = \frac{A}{\sqrt{T}},$$

причем $A = \text{const}$.

Наиболее сильно зависимость λ от Re при турбулентном режиме течения проявляется в зоне гидравлически гладких труб, когда λ определяется по формуле Блазиуса

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{\text{Re}}} = \frac{T^{\frac{1}{8}}}{\sqrt{100A}} \approx T^{\frac{1}{8}}.$$

При изменении температуры газа на $\pm 30^\circ\text{C}$ абсолютная температура изменяется на $\pm 10\%$, следовательно, λ меняется на $\pm 2\%$. Таким образом, действительно, можно считать $\lambda = \text{const}$. Подставив равенство (15.120) в уравнение (15.118) и пренебрегая, как обычно, массовыми силами, имеем

$$\frac{dp}{\rho} + v dv + \lambda \frac{dx}{D} \frac{v^2}{2} = 0. \quad (15.121)$$

Умножая уравнение (15.121) на ρ^2 и выражая ρ через p с помощью соотношения (15.119), получим

$$\rho_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{n}} dp + (\rho v)^2 \frac{dv}{v} + \lambda \frac{dx}{D} \frac{(\rho v)^2}{2} = 0.$$

Так как $\rho v = \text{const}$ при $D = \text{const}$, то, интегрируя это уравнение в полных дифференциалах по x от $x = 0$ до x , по v от $v = v_1$ до v , по p от p_1 до p , имеем

$$\frac{n}{n+1} \frac{\rho_1}{p_1^{1/n}} \left(p^{\frac{n+1}{n}} - p_1^{\frac{n+1}{n}} \right) + (\rho v)^2 \ln \frac{v}{v_1} + \lambda \frac{x}{D} \frac{(\rho v)^2}{2} = 0. \quad (15.122)$$

Поскольку при $D = \text{const}$

$$\rho v = \rho_1 v_1,$$

то

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho} = \left(\frac{p_1}{p} \right)^{\frac{1}{n}},$$

и уравнение (15.122) можно представить в виде

$$\frac{n}{n+1} \frac{\rho_1}{p_1^{1/n}} \left(p^{\frac{n+1}{n}} - p_1^{\frac{n+1}{n}} \right) + \frac{(\rho v)^2}{n} \ln \frac{p_1}{p} + \lambda \frac{x}{D} \frac{(\rho v)^2}{2} = 0. \quad (15.123)$$

Для магистральных газопроводов

$$\frac{1}{n} \ln \frac{p_1}{p} \ll \lambda \frac{x}{2D}.$$

Рассмотрим следующий типичный пример. Пусть $D = 1$ м, $x = l = 10^5$ м, $\lambda = 1,5 \cdot 10^{-2}$, $n = 1,2$, $p = p_2$, $\frac{p_1}{p_2} = 2$. Тогда

$$\lambda \frac{l}{2D} = 0,75 \cdot 10^3, \quad \frac{1}{n} \ln \frac{p_1}{p_2} = 0,58.$$

Таким образом, в уравнении (15.123) членом с логарифмом можно пренебречь по сравнению с остальными членами. Положив $x = l$, $p = p_2$, из уравнения (15.123) получим

$$\frac{n}{n+1} \frac{\rho_1}{p_1^{1/n}} \left(p_1^{\frac{n+1}{n}} - p_2^{\frac{n+1}{n}} \right) = \lambda \frac{l}{d} \frac{(\rho v)^2}{2}. \quad (15.124)$$

Тогда массовый расход будет равен

$$Q_m = \frac{\pi}{4} D^2 \rho v = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2n}{n+1} \frac{\rho_1 D^5}{p_1^{1/n} \lambda l} \left(p_1^{\frac{n+1}{n}} - p_2^{\frac{n+1}{n}} \right)}. \quad (15.125)$$

Из формулы (15.125) видно, что $Q \sim D^{2,5}$, то есть массовый расход сильно зависит от диаметра трубопровода. Если в формулах (15.124) и (15.125) положить $n = k$, то получим формулы для распределения давления и расхода для адиабатического течения. В длинных газопроводах обычно имеет место изотермический режим течения. В этом случае $n = 1$, и условие для λ выполняется не приближенно, а точно.

Подставив значение $n = 1$ в формулы (15.124) и (15.125), получим

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{p_1} (p_1^2 - p^2) &= \lambda \frac{l}{d} (\rho v)^2, \\ Q_m &= \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\rho_1 D^5}{p_1 \lambda l} (p_1^2 - p^2)}. \end{aligned} \quad (15.126)$$

Из формулы (15.126) следует, что при изотермическом течении давление по длине газопровода изменяется по параболическому закону.

§11. Формула Шухова

Если на входе в газопровод температура газа T_1 отличается от наружной температуры $T_{нар}$, то течение газа будет неизотермическим. Рассмотрим участок трубопровода рис. 15.13. Пренебрегая массовыми силами и учитывая формулы (15.20) и (15.24), из уравнения закона сохранения энергии (4.18) имеем

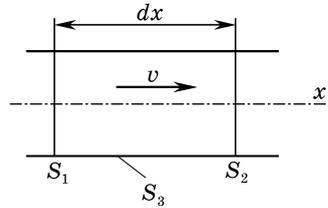


Рис. 15.13

$$\left(C_p T + \frac{v^2}{2} \right)_2 - \left(C_p T + \frac{v^2}{2} \right)_1 = \frac{1}{Q_m} \int_V \rho q_e dV. \quad (15.127)$$

Величина

$$\int_V \rho q_e dV$$

представляет собой внешнее тепло, подведенное в единицу времени к газу между сечениями S_1 и S_2 . Будем считать, пренебрегая теплопроводностью газа, что тепло проводится только через боковую поверхность S_3 . Тогда

$$\int_V \rho q_e dV = \int_{S_3} q_e^* dS = \int_{\chi} q_e^* d\chi dx, \quad (15.128)$$

где q_e^* – тепло, подведенное в единицу времени через единицу площади поверхности S_3 , $\chi = \pi D$ – периметр газопровода.

Подставив соотношение (15.127) в уравнение (15.126) и полагая $dx \rightarrow 0$, получим

$$d \left(C_p T + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{q_e^*}{Q_m} \pi D dx. \quad (15.129)$$

Величину q_e^* можно представить в виде

$$q_e^* = \alpha (T_{нар} - T_1), \quad (15.130)$$

где α – коэффициент теплопередачи, $T = T(x)$ – температура газа в газопроводе.

Пренебрегая изменением скоростного напора по длине газопровода, из равенств (15.129) и (15.130) имеем

$$C_p dT = \frac{\pi D}{Q_m} \alpha (T_{\text{нар}} - T) dx. \quad (15.131)$$

Интегрируя соотношение (15.130), при условии, что в начале трубопровода при $x = 0$ $T = T_1$, получим

$$C_p Q_m \ln \frac{T - T_{\text{нар}}}{T_1 - T_{\text{нар}}} = -\alpha \pi D x \quad (15.132)$$

или

$$T = T_{\text{нар}} + (T_1 - T_{\text{нар}}) \exp\left(-\frac{\alpha \pi D}{C_p Q} x\right). \quad (15.133)$$

Формула (15.133) представляет собой известную формулу В.Г. Шухова*. Эта формула была получена при расчете остывания нагретой нефти, перекачиваемой по трубопроводу, без учета тепла, выделяющегося вследствие наличия гидравлических сопротивлений. Формула Шухова оказывается вполне точной для идеального газа, движущегося в трубе с дозвуковой скоростью. Из формулы (15.132) следует, что $T \rightarrow T_{\text{нар}}$ при $x \rightarrow \infty$. Значение $x = x_1$, при котором температура газа в трубопроводе отличается от $T_{\text{нар}}$ меньше, чем на 1%, определяется из формулы (15.132) в виде

$$x_1 > \frac{c_p Q_m}{\alpha \pi D} \ln \frac{T_1 - T_{\text{нар}}}{0,01 \cdot T_{\text{нар}}}.$$

Оценки, выполненные по этой формуле, показывают, что величина x достаточно мала, то есть течение в магистральном газопроводе можно считать изотермическим.

* Владимир Григорьевич Шухов (1853–1939), инженер и изобретатель, почетный член АН СССР.

Глава XVI

ЛАМИНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

В предыдущих главах рассматривалось течение вязкой жидкости, то есть жидкости, у которой связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций имеет вид

$$p_{ik} = (-p + \lambda \operatorname{div} \vec{v}) \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}, \quad (16.1)$$

или для несжимаемой жидкости –

$$p_{ik} = -p \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}. \quad (16.2)$$

Таким образом, одной из основных отличительных особенностей вязкой жидкости является линейная связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций. В то же время существует широкий класс разнообразных сред, общим свойством которых является отклонение от обобщенного закона Ньютона (16.1) или (16.2). Такие жидкости называются неньютоновскими.

В нефтегазовой промышленности неньютоновские жидкости весьма распространены. К ним относятся многие тяжелые нефти, мазуты, глинистые и цементные растворы, растворы полимеров. Многие неньютоновские жидкости, например, глинистые растворы, обладают внутренними пространственными структурами. Они могут быть образованы кристаллами парафина в нефти, частицами глины в глинистых растворах и т.д. При увеличении напряжения эти структуры разрушаются. Очевидно, что при этом свойства среды будут меняться. Напомним, что математическая зависимость напряжения от характера деформации сплошной среды называется реологическим уравнением, а входящие в нее коэффициенты – реологическими константами. Так, соотношения (16.1) представляют собой реологические уравнения для линейно-вязкой сжимаемой жидкости, а величины λ и μ – реологические константы.

Следует отметить, что одна и та же жидкость может вести себя как ньютоновская и как неньютоновская в зависимости от значений температуры, давления и ряда других параметров. Поэтому выбор модели (реологического уравнения) для данной среды является важной и достаточно сложной проблемой.

§1. Простой сдвиг

Рассмотрим тензор скоростей деформаций

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

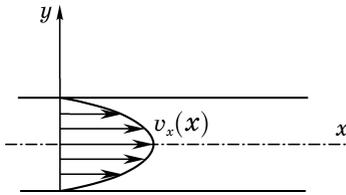


Рис. 16.1

и пусть $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$, а из величин $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$, $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}$ только одна отлична от нуля. Такая деформация называется *простым сдвигом*, а соответствующее течение – течением с простым сдвигом. Очевидно, что простой сдвиг представляет собой простейший вид деформации. В §3.3 было показано, что скорость $\dot{\gamma}$ скашивания прямого угла меж-

ду осями x_i и x_k равна $2\varepsilon_{ik}$. Таким образом, при течении с простым сдвигом происходит скашивание прямого угла между двумя взаимно ортогональными осями, а объем рассматриваемой частицы жидкости остается без изменений, так как $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \operatorname{div} \vec{v} = 0$. Рассмотрим некоторые примеры течений с простым сдвигом.

1. Ламинарное плоскопараллельное течение несжимаемой жидкости между двумя параллельными плоскостями (рис. 16.1). В этом случае

$$v_x = v_x(y), \quad v_y = v_z = 0. \quad (16.3)$$

Из соотношений (16.3) имеем

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y},$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = 0, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = 0.$$

Следовательно, рассматриваемое течение – это течение с простым сдвигом. Скорость скашивания прямого угла xOy , или скорость сдвига $\dot{\gamma} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$. При этом касательное напряжение в линейно-вязкой жидкости будет равно

$$\tau = 2\mu\varepsilon_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu\dot{\gamma}. \quad (16.4)$$

2. Ламинарное течение несжимаемой жидкости по круглой трубе. Введем цилиндрическую систему координат $Ox r \varphi$ и совместим ось Ox с осью трубы. Тогда

$$v_x = v_x(r), \quad v_r = v_\varphi = 0. \quad (16.5)$$

Компоненты тензора скоростей деформаций в цилиндрической системе координат имеют вид (см. приложение)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}, \quad \varepsilon_{xr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \quad \varepsilon_{\varphi x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (16.6)$$

Подставив соотношения (16.5) в равенства (16.6), имеем

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = 0, \quad \varepsilon_{xr} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi x} = 0,$$

то есть имеем течение с простым сдвигом. Скорость скашивания прямого угла xOr равна

$$\dot{\gamma} = 2\varepsilon_{xr} = \frac{\partial v_x}{\partial r}, \quad (16.7)$$

а касательное напряжение в линейно-вязкой жидкости –

$$\tau = 2\mu\varepsilon_{xr} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial r} = \mu \dot{\gamma}. \quad (16.8)$$

3. Ламинарное плоскопараллельное вращательное течение между двумя соосными цилиндрами (рис. 16.2). В цилиндрической системе координат $Ox r \varphi$ имеем

$$v_x = v_r = 0, \quad v_\varphi = \omega r, \quad (16.9)$$

где $\omega = \omega(r)$ – угловая скорость вращательного течения.

Подставив значения скорости (16.9) в формулы (16.6), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = 0, \quad \varepsilon_{\varphi x} = \varepsilon_{xr} = 0, \\ \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\omega r)}{\partial r} - \omega \right) = \frac{1}{2} r \frac{\partial \omega}{\partial r}, \end{aligned} \quad (16.10)$$

и, следовательно, опять имеем простой сдвиг. В соответствии с формулой (16.10) скорость скашивания прямого угла $rO\varphi$ равна

$$\dot{\gamma} = 2\varepsilon_{r\varphi} = r \frac{\partial \omega}{\partial r}, \quad (16.11)$$

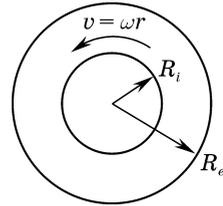


Рис. 16.2

а касательное напряжение в линейно-вязкой жидкости –

$$\tau = 2\mu\epsilon_{r\varphi} = \mu r \frac{\partial \omega}{\partial r} = \mu \dot{\gamma}. \quad (16.12)$$

Формулы (16.4), (16.8), (16.12) представляют собой уже отмечавшийся ранее закон вязкого трения Ньютона, причем $\mu = \text{const}$ при $T = \text{const}$, где T – абсолютная температура. Величина $\varphi = \frac{1}{\mu}$ называется текучестью.

Как уже указывалось, течения с простым сдвигом представляют собой простейшие течения. Поэтому они широко используются для проведения вискозиметрических исследований, то есть для экспериментальной проверки той или иной модели для рассматриваемой жидкости и для определения ее реологических констант.

§2. Классификация неньютоновских жидкостей

Классификация неньютоновских жидкостей обычно основывается на виде зависимости скорости сдвига $\dot{\gamma}$ от величины касательного напряжения τ . Все неньютоновские жидкости могут быть разбиты на три класса.

1. Системы, для которых скорость сдвига зависит только от величины касательного напряжения, то есть

$$\dot{\gamma} = f(\tau). \quad (16.13)$$

Это – неньютоновские вязкие жидкости, или нелинейно-вязкие жидкости.

2. Системы, для которых скорость сдвига зависит как от величины касательного напряжения, так и от времени t , то есть $\dot{\gamma} = f(\tau, t)$.

Если с течением времени при заданной величине $\dot{\gamma}$ напряжение в жидкости уменьшается, то такая жидкость называется тиксотропной, а если возрастает – реопектической. Соответствующие кривые течения (зависимости касательного напряжения от скорости сдвига) представлены на рис. 16.3, где стрелками указано направление процесса (нагружения).

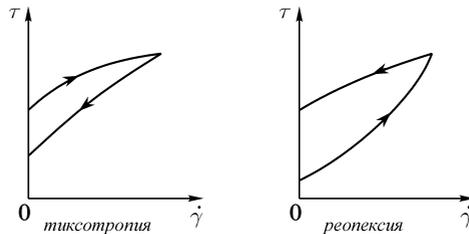


Рис. 16.3

3. Системы, обладающие свойствами как твердого тела, так и жидкости, и частично проявляющие упругое восстановление формы после снятия напряжения (вязкоупругие жидкости). Для них

$$f_1(\gamma, \gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(n)}) = f_2(\tau, \tau', \tau'', \dots, \tau^{(m)}).$$

Неньютоновские вязкие жидкости, в свою очередь, могут быть разделены на две группы:

а) жидкости, обладающие начальным напряжением сдвига τ_0 , то есть жидкости, которые начинают течь (деформироваться) лишь после того как касательное напряжение превысит некоторый предел τ_0 ;

б) жидкости, не обладающие пороговым (начальным) касательным напряжением τ_0 .

Для неньютоновских вязких жидкостей так же, как для ньютоновских, можно формально ввести понятия вязкости и текучести, а именно

$$\mu_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}, \quad \varphi_a = \frac{\dot{\gamma}}{\tau} = \frac{1}{\mu_a}. \tag{16.14}$$

В отличие от ньютоновской жидкости величины μ_a и φ_a не константы, а функции касательного напряжения τ . Поэтому будем называть эти величины кажущейся вязкостью и кажущейся текучестью.

Если известна кривая течения (рис. 16.4), то кажущаяся вязкость μ_a легко может быть найдена графически. Действительно, в точке A

$$\mu_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{AB}{OB} = \operatorname{tg} \alpha.$$

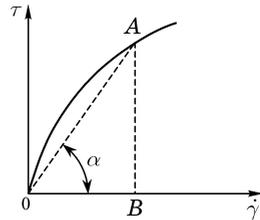


Рис. 16.4

Из формул (16.13) и (16.14) следует, что

$$\varphi_a = \varphi_a(\tau) = \frac{f(\tau)}{\tau}. \tag{16.15}$$

Так как при смене знака напряжения должен меняться знак скорости сдвига, то есть

$$f(\tau) = -f(-\tau),$$

то функция $f(\tau)$ – нечетная. Тогда, в соответствии с формулой (16.15) функция $\varphi_a(\tau)$ будет четной.

Примером жидкостей с начальным напряжением сдвига является вязкопластичная жидкость, или жидкость Бингама–Шведова. Ее реологичес-

кое уравнение имеет вид

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} 0, & \tau \leq \tau_0 \\ \frac{\tau - \tau_0}{\eta}, & \tau \geq \tau_0 \end{cases}, \quad (16.16)$$

где τ_0 – начальное напряжение сдвига, η – коэффициент пластической вязкости. Модель вязкопластичной жидкости широко используется для описания поведения глинистых растворов, буровых шламов и т.д.

Примерами жидкостей, не обладающих начальным напряжением сдвига, могут служить так называемые «степенные» жидкости, то есть жидкости, для которых реологическое уравнение имеет вид

$$\tau = k \dot{\gamma}^n. \quad (16.17)$$

Величина k называется консистентностью, а n – индексом течения.

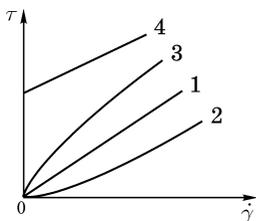


Рис. 16.5

Для жидкостей с разным индексом течения n величина k имеет разную размерность, откуда следует, что k не имеет явно выраженного физического смысла, а уравнение (16.17) представляет собой лишь удобную в инженерном отношении аппроксимацию. При $n < 1$ жидкость называется псевдопластичной, а при $n > 1$ – дилатантной. При $n = 1$ соотношение (16.15) переходит в закон трения Ньютона, то есть в обычное соотношение для ньютоновской вязкой жидкости, а k совпадает с динамическим

коэффициентом вязкости. Кривые течения представлены на рис. 16.5, где кривая 1 соответствует ньютоновской жидкости, 2 – дилатантной, 3 – псевдопластичной, 4 – вязкопластичной.

В дальнейшем будут рассматриваться только неньютоновские вязкие жидкости.

§3. Вискозиметрия

Под вискозиметрией понимается совокупность методов определения вязкостных свойств жидкости, то есть построение кривой течения. Вискозиметрия ньютоновских жидкостей просто сводится к определению величины коэффициента вязкости. В случае неньютоновской жидкости задачей вискозиметрии является определение вида зависимости между скоростью сдвига и касательным напряжением, а также численных значений констант (реологических параметров), входящих в эту зависимость. Наиболее распространенными типами вискозиметров, то есть приборов, на которых вы-

полняются вискозиметрические исследования, являются капиллярные и ротационные вискозиметры.

Принципиальная схема капиллярного вискозиметра представлена на рис. 16.6, где 1 – резервуар для исследуемой жидкости, 2 – калиброванная измерительная трубка, 3 – датчик давления. Меняя высоту налива жидкости H или давление над свободной поверхностью p_0 (в случае герметично замкнутого резервуара), можно получить экспериментальную зависимость перепада давления Δp_l на трубке длиной l от расхода Q , то есть зависимость вида $\Delta p_l = f(Q)$. Этот перепад складывается из перепада Δp_m на мерном участке l_m и перепада $\Delta p_{вх}$ на входном участке длиной $l_{вх}$ ($l_m = l - l_{вх}$)

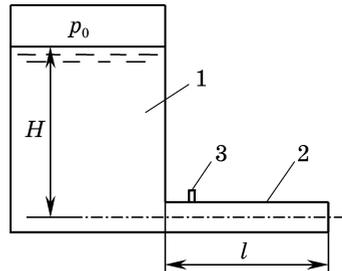


Рис. 16.6

Повторив эксперимент на трубке того же диаметра, но при длине L , получим кривую $\Delta p_L = f(Q)$, причем опять

$$\Delta p_L = \Delta p_{вх}^{(1)} + \Delta p_m^{(1)},$$

где $\Delta p_{вх}^{(1)}$ – перепад давления на входном участке трубки длиной $l_{вх}$, а $\Delta p_m^{(1)}$ – перепад на длине $L - l_{вх}$. Так как диаметры обеих трубок и условия входа в них жидкости одинаковы, то при равных расходах $\Delta p_{вх} = \Delta p_{вх}^{(1)}$. Поэтому величина

$$\Delta p = \Delta p_L - \Delta p_l = \Delta p_m^{(1)} - \Delta p_m$$

будет представлять собой перепад давления на участке длиной $L - l$ для условий бесконечно длинной трубы*.

Принципиальная схема ротационного вискозиметра представлена на рис. 16.7. При вращении наружного цилиндра 1 с угловой скоростью Ω в жидкости 2 возникают касательные напряжения, создающие на внутреннем цилиндре 3 крутящий момент M . Под действием этого момента цилиндр 3 поворачивается на угол θ , величина которого зависит от M и упругих характеристик нити 4. Измеряя этот угол, получают значение действующего момента M . Проводя эксперимент при различных значениях уг-

* Участок бесконечно длинной трубы представляет собой участок реальной трубы, на котором не сказываются концевые эффекты.

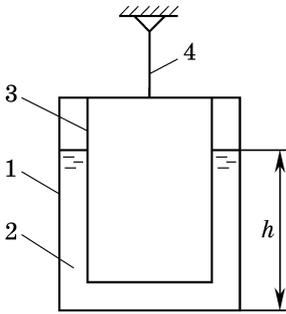


Рис. 16.7

ловой скорости Ω , можно получить зависимость $M = f(\Omega)$. Здесь, как и в случае капиллярного вискозиметра, возникают концевые эффекты вблизи свободной поверхности жидкости и дна цилиндра 2. Для их устранения можно повторить эксперимент при другом уровне жидкости h . Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным при рассмотрении концевых эффектов в капиллярном вискозиметре.

Итак, с помощью капиллярного вискозиметра можно получить зависимость вида

$$\Delta p = f_1(Q), \quad (16.18)$$

а с помощью ротационного – вида

$$\Omega = f_2(M), \quad (16.19)$$

справедливые для бесконечно длинной трубы и зазора бесконечной высоты. Для того, чтобы по соотношениям (16.18) или (16.19) можно было найти реологические параметры исследуемой жидкости, необходимо иметь теоретический вид этих выражений для неньютоновских жидкостей различных типов.

§4. Течение жидкости по бесконечно длинной круглой трубе

Рассмотрим установившееся ламинарное течение жидкости по участку бесконечно длинной трубы длиной l и радиусом a . Распределение касательного напряжения по радиусу трубы описывается формулами* (10.33) и (10.34), то есть

$$\tau = \frac{r}{a} \tau_a, \quad \tau_a = \frac{p_1 - p_2}{2l} a. \quad (16.20)$$

Так как в рассматриваемом случае $v_x = v = v(r)$ и $\frac{dv}{dr} < 0$, то из формул (16.7) и (16.19) имеем

$$\dot{\gamma} = \frac{dv}{dr} = -f(\tau). \quad (16.21)$$

При таком выборе знака $f(\tau) > 0$. Подставив выражение (16.20) в равенство (16.21), получим

$$\frac{dv}{dr} = -f\left(\tau_a \frac{r}{a}\right), \quad (16.22)$$

* Из вывода формул (10.33) и (10.34) видно, что результат не зависит от вязкостных характеристик. Следовательно, они справедливы и для неньютоновских жидкостей.

то есть получим дифференциальное уравнение для определения скорости жидкости $v(r)$.

Для дальнейшего использования уравнения (16.22) необходимо иметь в виду следующее. При течении неньютоновских жидкостей наличие стенки трубы может приводить к возникновению особых направлений в жидкости, изотропной вдали от стенки. Например, возможное распределение ориентации коллоидных частиц или длинных полимерных цепей вблизи стенки ограничено присутствием самой стенки. Аномалия течения вблизи стенки может также возникать благодаря физико-химическому взаимодействию жидкости с материалом стенки трубы. Аномалия течения, возникающая вблизи стенки, называется пристенным скольжением. Она заключается в резком изменении величины $\frac{dv}{dr}$ в пристенном слое при сохранении непрерывности распределения скорости вдоль радиуса.

При наличии пристенного скольжения уравнение (16.22) будет справедливо лишь в области $0 \leq r \leq a - h$, где h – толщина пристенного слоя, в котором происходит аномальное течение. Так как обычно $h \ll a$, то вместо того, чтобы рассматривать течение в пристенном слое, можно задать на стенке трубы значение $v(a) = v(a - h)$, то есть значение скорости, отличное от нуля и равное скорости на границе пристенного слоя.

Можно показать, что введенная таким образом фиктивная скорость есть функция касательного напряжения τ_a . Скорость $v(a) = v(\tau_a) = s(\tau_a)$ называется скоростью скольжения. Интегрируя выражение (16.22), имеем

$$\int_a^r dv = v(r) - s(\tau_a) = - \int_a^r \left(\tau_a \frac{r}{a} \right) dr = \frac{a}{\tau_a} \int_{\tau}^{\tau_a} f(\tau) d\tau. \quad (16.23)$$

Расход жидкости через сечение трубы равен

$$Q = 2\pi \int_0^a v(r) r dr.$$

Следуя Олдройду, проинтегрируем это соотношение по частям. Тогда с учетом равенств (16.22) и (16.23) получим

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \left[\frac{r^2}{2} v(r) \right]_0^a - \pi \int_0^a r^2 \frac{dv}{dr} dr = \pi a^2 s(\tau_a) + \pi \int_0^a r^2 f \left(\tau_a \frac{r}{a} \right) dr = \\ &= \pi a^2 s(\tau_a) + \frac{\pi a^3}{\tau_a^3} \int_0^{\tau_a} \tau^2 f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (16.24)$$

Формула (16.24) представляет собой основное соотношение для определения скорости скольжения. Наличие скорости скольжения и вид зависимости $s(\tau_a)$ могут быть установлены с помощью эксперимента на капиллярном вискозиметре. Для этого необходимо получить зависимости $\Delta p(Q)$ на нескольких трубках разного диаметра. Полученные результаты представим в координатах $\frac{Q}{\pi a^3}$, $\tau_a = \frac{\Delta p}{2l} a$ (рис. 16.8), где различные кривые соответствуют экспериментам, проведенным на трубках различных диаметров.

Из формулы (16.24) следует, что

$$\frac{Q}{\pi a^3} = \frac{s(\tau_a)}{a} + \frac{1}{\tau_a^3} \int_0^{\tau_a} \tau^2 f(\tau) d\tau = \frac{s(\tau_a)}{a} + F(\tau_a). \quad (16.25)$$

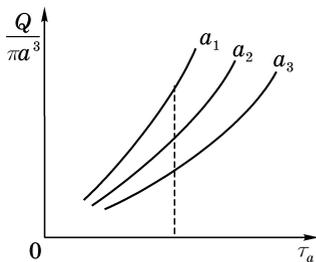


Рис. 16.8

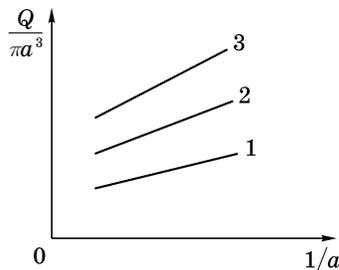


Рис. 16.9

Если $s(\tau_a) = 0$, то есть скольжение отсутствует, то $\frac{Q}{\pi a^3} = F(\tau_a)$ и кривые на рис. 16.8, полученные для трубок различных диаметров, должны совпадать между собой. Если $s(\tau_a) \neq 0$, то $\frac{Q}{\pi a^3}$ зависит от τ_a и a , то есть имеет место картина, представленная на рис. 16.8. Проведя на графике рис. 16.8 сечения прямыми $\tau_a = \text{const}$, можно построить график, представленный на рис. 16.9, где линии 1, 2, 3 соответствуют различным значениям τ_a . Из формулы (16.25) следует, что при $\tau_a = \text{const}$ величина $\frac{Q}{\pi a^3}$ линейно зависит от $\frac{1}{a}$, причем $s(\tau_a)$ представляет собой тангенс угла наклона прямых 1, 2, 3. После того как зависимость $s(\tau_a)$ определена, можно

с помощью формулы (16.25) вычислить функцию

$$F(\tau_a) = \frac{1}{\tau_a^3} \int_0^{\tau_a} \tau^2 f(\tau) d\tau,$$

откуда после дифференцирования имеем

$$f(\tau_a) = \frac{1}{\tau_a^2} \frac{d[\tau_a^3 F(\tau_a)]}{d\tau_a}.$$

Таким образом, функция $f(\tau)$ может быть найдена с помощью экспериментов на капиллярном вискозиметре. Однако это сопряжено с необходимостью проведения обширных экспериментальных исследований и дифференцирования функции, полученной опытным путем. Как ниже будет показано, задача определения коэффициентов функции $f(\tau)$ значительно упрощается, если заранее известен ее аналитический вид.

§5. Вращательное течение жидкости в кольцевом зазоре

Рассмотрим установившееся ламинарное вращательное движение жидкости между двумя соосными цилиндрами бесконечной высоты. При этом жидкость движется по круговым траекториям, плоскости которых перпендикулярны оси цилиндров (рис. 16.2). В §1 настоящей главы было показано, что такое течение представляет собой течение с простым сдвигом, причем скорость сдвига определяется по формуле (16.11). Выделим в потоке элемент радиуса r , толщиной dr и высотой h . Сила, приложенная к цилиндрической поверхности радиуса r , равна, очевидно,

$$F_1 = 2\pi r h \tau,$$

а приложенная к поверхности радиуса $r + dr$ –

$$F_2 = 2\pi(r + dr)h(\tau + d\tau).$$

Так как выделенный элемент вращается с постоянной во времени угловой скоростью ω , то сумма моментов сил, приложенных к этому элементу, равна нулю, то есть

$$F_2(r + dr) - F_1 r = 2\pi h [(r + dr)^2(\tau + d\tau) - r^2\tau] = 0. \quad (16.26)$$

После элементарных преобразований и перехода к пределу при $dr \rightarrow 0$, из равенства (16.26) получим

$$\frac{d\tau}{\tau} = -2 \frac{dr}{r}, \quad (16.27)$$

или, после интегрирования,

$$\tau = \frac{C}{r^2}. \quad (16.28)$$

Для определения константы интегрирования C обозначим момент сил трения на внутреннем цилиндре радиуса R_i и единичной высоты через M . Тогда

$$M = 2\pi R_i \tau_i R_i, \quad (16.29)$$

где τ_i – напряжение трения на радиусе R_i .

Из формул (16.28) и (16.29) имеем

$$\tau_i = \frac{C}{R_i^2} = \frac{M}{2\pi R_i^2},$$

откуда $C = \frac{M}{2\pi}$, и формула (16.28) принимает вид

$$\tau = \frac{M}{2\pi r^2}. \quad (16.30)$$

Подставив соотношения (16.10), (16.11) и (16.30) в равенство (16.13), получаем

$$r \frac{d\omega}{dr} = f\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right), \quad (16.31)$$

то есть получаем дифференциальное уравнение вращательного движения жидкости в кольцевом зазоре.

Для интегрирования уравнения (16.31) примем, что внутренний цилиндр покоится, а внешний вращается с угловой скоростью Ω . Тогда, с учетом пристенного скольжения, можем для скорости течения на поверхности внутреннего цилиндра радиуса R_i записать

$$v(R_i) = s(\tau_i), \quad (16.32)$$

а для скорости на поверхности внешнего цилиндра радиуса R_e –

$$v(R_e) = \Omega R_e - s(\tau_e), \quad (16.33)$$

где τ_e – напряжение сил трения на поверхности внешнего цилиндра. Так

как угловая скорость $\omega = \frac{v}{r}$, то из уравнения (16.31) имеем

$$\int_{\frac{v_i}{R_i}}^{\frac{v}{R}} d\frac{v}{r} = \frac{v}{r} - \frac{v_i}{R_i} = \int_{R_i}^r f\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right) \frac{dr}{r},$$

или, с учетом формул (16.27), (16.30) и (16.32),

$$\frac{v}{r} = \frac{s(\tau_i)}{R_i} + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\tau_i} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (16.34)$$

Выражение (16.34) дает закон распределения скоростей по радиусу. Из этого закона и формулы (16.33) получаем

$$\Omega = \frac{s(\tau_e)}{R_e} + \frac{s(\tau_i)}{R_i} + \frac{1}{2} \int_{\tau_e}^{\tau_i} f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (16.35)$$

§6. Интегральный метод в вискозиметрии

Интегральный метод в вискозиметрии заключается в том, что на основании тех или иных физических предположений заранее задается вид функций $f(\tau)$ и $s(\tau_a)$. Это позволяет вычислить интегралы в уравнениях (16.24) и (16.35) и получить, с учетом формул (16.20) и (16.30) теоретические зависимости вида

$$Q = Q(\Delta p, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (16.36)$$

для течения в трубе и

$$\Omega = \Omega(M, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (16.37)$$

для течения в кольцевом зазоре, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – реологические параметры (константы в функциях $f(\tau)$ и $s(\tau_a)$) рассматриваемой жидкости.

Пусть теперь при эксперименте на капиллярном вискозиметре получено n пар значений $Q_j, \Delta p_j$. Подставив эти значения в формулу (16.36), получим n уравнений для определения численных значений n реологических параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Аналогично, получив на ротационном вискозиметре n пар значений Ω_j, M_j и подставив их в равенство (16.37), получим опять n уравнений для определения реологических параметров жидкости. Очевидно, что значения реологических параметров, найденных путем измерений на обоих типах вискозиметров, должны совпадать между собой. Несоблюдение этого условия свидетельствует о том, что принятые зависимости $f(\tau)$ и $s(\tau_a)$ не описывают поведения рассматриваемой жидкости.

Перейдем к рассмотрению некоторых простейших примеров.

I. Вязкая ньютоновская жидкость. Для такой жидкости в соответствии с формулой (16.12) имеем

$$\dot{\gamma} = f(\tau) = \frac{\tau}{\mu}, \quad s(\tau_a) = 0. \quad (16.38)$$

Подставив эти выражения в равенство (16.23), с учетом соотношений (16.20) получим

$$v(r) = \frac{a}{\mu\tau_a} \int_{\tau}^{\tau_a} \tau d\tau = \frac{a}{\mu\tau_a} \left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_a^2}\right) = \frac{a\Delta p}{4\mu l} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right). \quad (16.39)$$

Из равенств (16.24), (16.38) и формулы (16.20) имеем

$$Q = \frac{\pi a^3}{\mu\tau_a^3} \int_0^{\tau_a} \tau^3 d\tau = \frac{\pi a^3 \tau_a}{4\mu} = \frac{\pi a^4}{8\mu l} \Delta p. \quad (16.40)$$

Так как при течении по горизонтальной трубе $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho F_x = -\frac{\Delta p}{l}$, то легко видеть, что формулы (16.39) и (16.40) совпадают с полученными ранее выражениями (9.29) и (9.31). Поскольку значения a и l для капиллярного вискозиметра известны, то из формулы (16.40) следует, что для определения величины динамического коэффициента вязкости достаточно сделать одно измерение величин Δp и Q .

Для ротационного вискозиметра в соответствии с формулами (16.30), (16.34), (16.38) получим закон распределения скоростей в кольцевом зазоре в виде

$$\frac{v}{r} = \frac{1}{2\mu} \int_{\tau}^{\tau_i} d\tau = \frac{\tau_i - \tau}{2\mu} = \frac{M}{4\pi\mu} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{r^2}\right). \quad (16.41)$$

Используя формулы (16.30), (16.35), (16.38) или полагая в формуле (16.41) $r = R_e$, находим

$$\frac{v_e}{R_e} = \Omega = \frac{M}{4\pi\mu} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e}\right).$$

Так как радиусы R_i и R_e известны, то так же, как и в случае капиллярного вискозиметра, для определения μ достаточно сделать одно измерение пары значений Ω , M .

II. Жидкость Бингама–Шведова. Для такой жидкости в соответствии с формулой (16.16)

$$f(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \leq \tau_0, \\ \frac{\tau - \tau_0}{\eta}, & \tau \geq \tau_0, \end{cases} \quad s(\tau_a) = 0. \quad (16.42)$$

Подставив выражение (16.42) в формулу (16.23), получим

$$v(r) = \frac{a}{\tau_a} \int_{\tau}^{\tau_0} f(\tau) d\tau + \frac{a}{\tau_a} \int_{\tau_0}^{\tau_a} f(\tau) d\tau = \frac{a}{\tau_a} \int_{\tau_0}^{\tau_a} \frac{\tau - \tau_0}{\eta} d\tau + \frac{a}{\tau_a} \int_{\tau}^{\tau_0} f(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{a(\tau_a - \tau_0)^2}{2\eta\tau_a} + \frac{a}{\tau_a} \int_{\tau}^{\tau_0} f(\tau) d\tau. \tag{16.43}$$

В соответствии с формулой (16.42)

при $\tau \leq \tau_0$ $\frac{a}{\tau_a} \int_{\tau}^{\tau_0} f(\tau) d\tau = 0,$ (16.44)

при $\tau \geq \tau_0$ $\frac{a}{\tau_a} \int_{\tau}^{\tau_0} f(\tau) d\tau = \frac{a}{\tau_a} \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{\tau - \tau_0}{\eta} d\tau = -\frac{a(\tau - \tau_0)^2}{2\eta\tau_a}.$ (16.45)

Из формулы (16.20) следует, что

$$\frac{\tau}{\tau_a} = \frac{r}{a}, \quad \frac{\tau_0}{\tau_a} = \frac{r_0}{a}, \tag{16.46}$$

где r_0 – радиус, на котором $\tau = \tau_0$. Тогда из формул (16.43), (16.44), (16.45), (16.46) имеем

$$v(r) = \frac{a\tau_a}{2\eta} \left(1 - \frac{r_0}{a}\right)^2 \text{ при } 0 \leq r \leq r_0,$$

$$v(r) = \frac{a\tau_a}{2\eta} \left[\left(1 - \frac{r_0}{a}\right)^2 - \frac{r_0^2}{a^2} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2 \right] \text{ при } r_0 \leq r \leq a.$$

Таким образом, при $0 \leq r \leq r_0$ $v(r) = \text{const}$, то есть в потоке имеется «ядро течения», в котором все частицы движутся с одинаковой скоростью, то есть как твердое тело (рис. 16.10).

Можно показать, что наличие ядра течения присуще любой жидкости с начальным напряжением сдвига, а не только жидкости Бингама–Шведова. Подставив соотношение (16.42) в формулу (16.24), получим

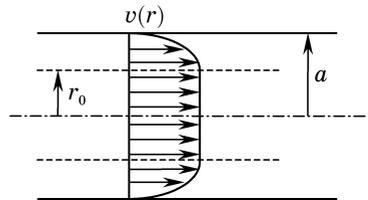


Рис. 16.10

$$Q = \frac{\pi a^3}{\mu \tau_a^3} \int_{\tau_0}^{\tau_a} \tau^2 \frac{\tau - \tau_0}{\eta} d\tau = \frac{\pi a^3 \tau_a}{4\eta} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\tau_0}{\tau_a} + \frac{1}{3} \frac{\tau_0^4}{\tau_a^4}\right) \tag{16.47}$$

или, с учетом формул (16.20) и (16.46),

$$Q = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8\eta l} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{r_0}{a} + \frac{1}{3} \frac{r_0^4}{a^4} \right). \quad (16.48)$$

Выражения (16.47) и (16.48) представляют собой различную форму записи формулы Букингама. При $\tau_0 = r_0 = 0$ формула переходит в формулу Пуазейля (16.40). Из формул (16.47) и (16.48) видно, что для определения констант τ_0 и η необходимо измерить две пары значений Δp , Q .

Рассмотрим теперь течение жидкости Бингама–Шведова в кольцевом зазоре ротационного вискозиметра. Так как $R_i < R_e$, то в соответствии с формулой (16.30) всегда $\tau_e < \tau_i$. Поэтому до тех пор, пока $\tau_i \leq \tau_0$, то есть в соответствии с формулой (16.30) $M \leq 2\pi R_i^2 \tau_0 = M_0$, сдвига не происходит, $\Omega = 0$ и жидкость между цилиндрами неподвижна. Пусть теперь $\tau_i > \tau_0 > \tau_e$. Так как вдоль радиуса $M = \text{const}$, то из формулы (16.30) следует, что

$$R_i^2 \tau_i = r_0^2 \tau_0 = R_e^2 \tau_e,$$

где r_0 – радиус, на котором $\tau = \tau_0$. Тогда очевидно, что при $R_i < r < r_0$ имеем $\tau > \tau_0$, а при $r_0 < r < R_e$ – $\tau < \tau_0$. Следовательно, в интервале $R_i < r < r_0$ будет происходить сдвиговое течение, а при $r_0 < r < R_e$ жидкость будет вести себя как твердое тело, то есть вращаться с постоянной угловой скоростью. Подставив выражение (16.42) в формулу (16.34), с учетом равенства (16.30) получим

$$\frac{v}{r} = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\tau_i} \frac{\tau - \tau_0}{\eta} d\tau = \frac{M}{4\pi\eta} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r_0^2} \ln \frac{R_i}{r} \right) \quad \text{при } R_i < r < r_0,$$

$$\frac{v}{r} = \Omega = \frac{M}{4\pi\eta} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{r_0^2} - \frac{2}{r_0^2} \ln \frac{R_i}{r_0} \right) = \text{const} \quad \text{при } r_0 < r < R_e.$$

В соответствии с формулой (16.30) $r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi\tau_0}}$, то есть с ростом M величина r_0 и, следовательно, область, охваченная сдвиговым течением, возрастают. При $\tau_0 > \tau_e$ сдвиговым течением охвачен весь интервал $R_i < r < R_e$, и в соответствии с формулами (16.30) и (16.35) угловая скорость вращения внешнего цилиндра равна

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_{\tau_e}^{\tau_i} \frac{\tau - \tau_0}{\eta} \frac{d\tau}{\tau} = \frac{M}{4\pi\eta} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) - \frac{\tau_0}{\eta} \ln \frac{R_i}{R_e}. \quad (16.49)$$

Из формулы (16.49) видно, что для определения констант η и τ_0 необходимо измерить две пары значений M, Ω .

III. Степенная жидкость. Для степенной жидкости в соответствии с формулой (16.17)

$$\dot{\gamma} = f(\tau) = \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad s(\tau_a) = 0. \quad (16.50)$$

Подставив выражение (16.50) в формулы (16.23) и (16.24), с учетом равенства (16.20), получим, соответственно,

$$v(r) = \frac{n}{n+1} a \left(\frac{\tau_a}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^{\frac{1+n}{n}}\right] = \frac{n}{n+1} a^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\Delta p}{2kl}\right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right],$$

$$Q = \frac{n}{3n+1} \pi a^3 \left(\frac{\tau_a}{k}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{3n+1} \pi a^{\frac{3n+1}{n}} \left(\frac{\Delta p}{2kl}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (16.51)$$

то есть получим формулы для распределения скоростей и расхода при течи по круглой трубе.

Для ротационного вискозиметра в соответствии с формулами (16.30), (16.34), (16.35) имеем

$$\frac{v}{r} = \frac{n}{2} \left(\frac{\tau_i}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = \frac{n}{2} \left(\frac{M}{2\pi k R_i^2}\right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{R_i}{r}\right)^{\frac{2}{n}}\right],$$

$$\Omega = \frac{n}{2} \left(\frac{\tau_i}{k}\right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{\tau_e}{\tau_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = \frac{n}{2} \left(\frac{M}{2\pi k R_i^2}\right)^{\frac{1}{n}} \left[1 - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^{\frac{2}{n}}\right].$$

IV. Ряд Рейнера. Предполагается, что для жидкости с начальным напряжением сдвига τ_0 функция $f(\tau - \tau_0)$ может быть разложена в степенной ряд. Так как эта функция нечетная, то ряд может содержать только нечетные степени $\tau - \tau_0$. Следовательно,

$$\dot{\gamma} = f(\tau - \tau_0) = \begin{cases} 0, & \tau \leq \tau_0, \\ \sum_{k=0}^n b_k (\tau - \tau_0)^{2k+1}, & \tau \geq \tau_0, \quad s(\tau_a) = 0, \end{cases} \quad (16.52)$$

где b_k, τ_0 – реологические параметры жидкости. Подставив выражение (16.52) в формулу (16.23), после рассуждений, совершенно аналогич-

ных приведенным при рассмотрении жидкости Бингама–Шведова, получаем

$$v(r) = \frac{a}{2\tau_a} \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k+1} (\tau_a - \tau_0)^{2k+2} = \frac{a}{2} \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k+1} \tau_a^{2k+1} \left(1 - \frac{r_0}{a}\right)^{2k+2} = \text{const}, \quad 0 \leq r \leq r_0,$$

$$v(r) = \frac{a}{2\tau_a} \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k+1} [(\tau_a - \tau_0)^{2k+2} - (\tau - \tau_0)^{2k+2}] =$$

$$= \frac{a}{2} \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k+1} \tau_a^{2k+1} \left[\left(1 - \frac{r_0}{a}\right)^{2k+2} - \left(\frac{r_0}{a}\right)^{2k+2} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{2k+2} \right], \quad r_0 \leq r \leq a.$$

Из полученных формул видно, что картина распределения скоростей по радиусу качественно аналогична представленной на рис. 16.10, то есть и в этом случае существует ядро течения радиуса r_0 .

Подставив выражение (16.52) в формулу (16.24), получим

$$Q = \frac{\pi a^3}{\tau_a^3} \sum_{k=0}^n b_k (\tau_a - \tau_0)^{2k+2} \left[\frac{(\tau_a - \tau_0)^2}{2k+4} + \frac{2\tau_0(\tau_a - \tau_0)}{2k+3} + \frac{\tau_0^2}{2k+2} \right]. \quad (16.53)$$

При течении в кольцевом зазоре так же, как в случае жидкости Бингама–Шведова, при $\tau_i < \tau_0$ течения не происходит. При $M > M_0 = 2\pi R_i^2 \tau_0$ сдвиговое течение происходит в зазоре

$$R_i < r < r_0 = \sqrt{\frac{M}{2\pi\tau_0}},$$

а при $r_0 < r < R_e$ жидкость вращается с постоянной угловой скоростью, то есть как твердое тело. При $M \geq 2\pi R_e^2 \tau_0$ сдвиговое течение охватывает всю область $R_i < r < R_e$. В соответствии с формулами (16.34) и (16.49) при $\tau_i > \tau > \tau_e$

$$\frac{v}{r} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n b_k \int_{\tau}^{\tau_i} \frac{(\tau - \tau_0)^{2k+1}}{\tau} d\tau, \quad R_i < r < r_0,$$

$$\frac{v}{r} = \Omega = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n b_k \int_{\tau_0}^{\tau_i} \frac{(\tau - \tau_0)^{2k+1}}{\tau} d\tau = \text{const}, \quad r_0 < r < R_e. \quad (16.54)$$

При $\tau_e > \tau_0$ распределение скоростей во всем зазоре ($R_i < r < R_e$) будет определяться формулой (16.54), где интеграл необходимо брать в пределах τ_0, τ_i , а угловая скорость вращения внешнего цилиндра Ω будет

равна

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n b_k \int_{\tau_e}^{\tau_i} \frac{(\tau - \tau_0)^{2k+1}}{\tau} d\tau. \quad (16.55)$$

Реологическое уравнение (16.52) содержит $n + 2$ реологических параметра: $\tau_0, b_0, b_1, \dots, b_n$. Из формул (16.53) и (16.55) видно, что для их определения необходимо сделать $n + 2$ измерения пар значений $\Delta p, Q$ или M, Ω .

§7. Коэффициент гидравлического сопротивления

Рассмотрим жидкость с реологическим уравнением

$$\dot{\gamma} = f(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (16.56)$$

где, как и раньше, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – реологические параметры. По аналогии с соображениями, приведенными при выводе формулы Дарси–Вейсбаха (5.30), можно утверждать, что перепад давления Δp на длине l в трубе диаметром d представляется соотношением вида

$$\Delta p = \varphi(l, d, \rho, w, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (16.57)$$

Приняв величины d, ρ, w в качестве параметров с независимыми размерностями, после рассуждений, тождественных использованным при получении формулы (5.30), из формулы (16.57) получаем

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho w^2}{2},$$

где

$$\lambda = \lambda(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n), \quad (16.58)$$

причем величины

$$\Pi_i = \frac{\alpha_i}{d^\beta \rho^\gamma w^\delta}$$

представляют собой критерии подобия. Из формул (16.56) и (16.58) следует, что число критериев подобия равно числу реологических параметров жидкости.

Рассмотрим в качестве примера жидкость Бингама–Шведова. В этом случае формула (16.57) принимает вид

$$\Delta p = \varphi(l, d, \rho, \eta, \tau_0, w),$$

а выражение (16.58) –

$$\lambda = \lambda(\Pi_1, \Pi_2), \quad (16.59)$$

где

$$\Pi_1 = \frac{\rho w d}{\eta}, \quad \Pi_2 = \frac{\tau_0}{\rho w^2}. \quad (16.60)$$

Для получения аналитического вида зависимости (16.59) рассмотрим формулу (16.47). С помощью равенства (16.20) ее можно представить в виде

$$Q = \pi a^2 w = \frac{\pi a^4 \Delta p}{8 \eta l} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{2l}{a} \frac{\tau_0}{\Delta p} + \frac{1}{3} \left(\frac{2l}{a} \frac{\tau_0}{\Delta p} \right)^4 \right] \quad (16.61)$$

или

$$w = \frac{d^2 \Delta p}{32 \eta l} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{4l}{d} \frac{\tau_0}{\Delta p} + \frac{1}{3} \left(\frac{4l}{d} \frac{\tau_0}{\Delta p} \right)^4 \right]. \quad (16.62)$$

Очевидно, что для получения соотношения вида (16.37) необходимо соотношение (16.62) разрешить относительно Δp . Положим

$$\Delta p = \frac{4l \tau_0}{d} z \quad (16.63)$$

и подставим это выражение в формулу (16.62). Тогда после элементарных преобразований получим

$$z^4 - \frac{4}{3} \alpha z^3 + \frac{1}{3} = 0, \quad (16.64)$$

где

$$\alpha = 1 + \frac{6}{A}, \quad A = \frac{\tau_0 d}{\eta w}. \quad (16.65)$$

Используя стандартную методику решения уравнений четвертой степени, получаем выражение для корней уравнения (16.64)

$$z_{1,2} = \frac{c}{3} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{3b}{c(c-\alpha)}} \right], \quad (16.66)$$

$$z_{3,4} = -\frac{c-2\alpha}{3} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{3b}{(c-\alpha)(c-2\alpha)}} \right], \quad (16.67)$$

где

$$b = \sqrt[3]{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 - 1}} + \sqrt[3]{\alpha^2 - \sqrt{\alpha^4 - 1}} = \alpha^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \alpha^{-4}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \alpha^{-4}}} \right) = \alpha^{\frac{2}{3}} \beta, \quad (16.68)$$

$$c = \alpha + \sqrt{\frac{3}{2} \beta + \alpha^2}. \quad (16.69)$$

Рассмотрим подкоренное выражение в формуле (16.67). В соответствии с равенством (16.69)

$$3b = 2(c - \alpha)^2 - 2\alpha^2,$$

то после элементарных преобразований имеем

$$1 - \frac{3b}{(c - \alpha)(c - 2\alpha)} = -\frac{c + \alpha}{c - \alpha}.$$

Так как в соответствии с формулой (16.65) $\alpha > 1$, то из равенств (16.68) и (16.69) следует, что b и c величины вещественные, причем $b > 0$, $c > \alpha$. Таким образом,

$$1 - \frac{3b}{(c - \alpha)(c - 2\alpha)} = -\frac{c + \alpha}{c - \alpha} < 0,$$

и корни $z_{3,4}$ – комплексные.

Перейдем к рассмотрению корней $z_{1,2}$. Непосредственной проверкой, используя равенство (16.68), можно убедиться, что

$$b^3 - 3b - 2\alpha^2 = 0,$$

и из формулы (16.69) имеем

$$c = \alpha + \sqrt{\frac{b^3}{2}}. \quad (16.70)$$

Подставив это выражение в формулу (16.66), получаем

$$z_{1,2} = \frac{c}{3} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{6}{c\sqrt{2b}}} \right). \quad (16.71)$$

Из формул (16.68) и (16.69) следует, что при $\alpha = 1$ $b = 2$, $c = 3$ и

$$\frac{db}{d\alpha} = \frac{2\alpha}{3\sqrt{\alpha^4 - 1}} \left(\sqrt[3]{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 - 1}} - \sqrt[3]{\alpha^2 - \sqrt{\alpha^4 - 1}} \right),$$

откуда $\frac{db}{d\alpha} > 0$ при $\alpha > 1$. Таким образом, функции $b(\alpha)$ и $c(\alpha)$ монотонно возрастают с ростом α и $\frac{6}{c\sqrt{2b}} < 1$.

Итак, корни $z_{1,2}$ – вещественные. Для их дальнейшего анализа перепишем, используя формулы (16.63), (16.65), (16.68) и (16.70), соотношение (16.71) в виде

$$\frac{\Delta p d}{4l} = \frac{1}{3} \left(\tau_0 + \frac{6\eta w}{d} \right) \left(1 + \sqrt{\frac{\beta^3}{2}} \right) \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{6}{c\sqrt{2b}}} \right). \quad (16.72)$$

Переходя в равенстве (16.72) к пределу при $\tau_0 \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\Delta p d}{4l} = 4 \frac{\eta w}{d} (1 \pm 1).$$

Из выражения (16.61) видно, что этот предельный переход должен привести к формуле Пуазейля. Следовательно, в формулах (16.71) и (16.72) необходимо выбрать знак «+» и окончательно

$$z = \frac{c}{3} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{6}{c\sqrt{2b}}} \right),$$

или, с учетом равенства (16.63),

$$\Delta p = \frac{4}{3} \frac{l}{d} \tau_0 c \left(1 + \sqrt{1 - \frac{6}{c\sqrt{2b}}} \right). \quad (16.73)$$

Как следует из формул (16.65), (16.68) и (16.69), $b = b(A)$, $c = c(A)$. Сравнивая выражение (16.73) с формулой Дарси–Вейсбаха, получаем

$$\lambda = \frac{8}{3} B \varphi(A),$$

где $B = \frac{\tau_0}{\rho w^2}$ – безразмерный параметр,

$$\varphi(A) = c \left(1 + \sqrt{1 - \frac{6}{c\sqrt{2b}}} \right).$$

Таким образом, коэффициент гидравлического сопротивления при течении жидкости Бингама–Шведова есть функция двух независимых критериев подобия A и B , причем B совпадает с Π_2 в формуле (16.60), а $A = \Pi_1 \Pi_2$.

Численные значения функции $\varphi(A)$ приведены в таблице. Можно показать, что при $\frac{1}{A} = \frac{\eta w}{\tau_0 d} \geq 0,1$ функция $\varphi(A)$ может быть аппроксимирована с погрешностью менее 2% выражением

$$\varphi(A) = 4 \left(1 + \frac{6}{A} \right).$$

				Таблица			
1/A	$\varphi(A)$	1/A	$\varphi(A)$	1/A	$\varphi(A)$	1/A	$\varphi(A)$
0,0000	3,00	0,0060	3,53	0,0250	4,25	0,0700	5,52
0,0005	3,14	0,0080	3,63	0,0300	4,40	0,0800	5,78
0,0010	3,20	0,0100	3,71	0,0350	4,55	0,1000	6,29
0,0020	3,29	0,0120	3,79	0,0400	4,70	0,1500	7,54
0,0030	3,36	0,0140	3,87	0,0450	4,84	0,2000	8,76
0,0040	3,42	0,0160	3,94	0,0500	4,98	0,2500	9,97
0,0050	3,48	0,0200	4,08	0,0600	5,25	0,3000	11,18

В качестве следующего примера рассмотрим степенную жидкость. Для такой жидкости формула (16.54) принимает вид

$$\Delta p = \varphi(l, d, \rho, k, n, w).$$

Приняв в качестве параметров с независимыми размерностями величины d, ρ, w , используя П-теорему и учитывая, что в соответствии с формулой (16.17) $[k] = MT^{n-2}L^{-1}$, получаем

$$\Delta p = f\left(n, \frac{d^n \rho w^{2-n}}{k}\right) \frac{l}{d} \rho w^2,$$

откуда

$$\lambda = 2f\left(n, \frac{d^n \rho w^{2-n}}{k}\right).$$

Безразмерными критериями подобия являются величины

$$n, \quad \frac{d^n \rho w^{2-n}}{k} = \text{Re}' ,$$

где Re' – аналог числа Рейнольдса для линейно-вязкой жидкости. Для выяснения вида зависимости $\lambda(n, \text{Re}')$ рассмотрим выражение (16.51) или

$$w = \frac{n}{3n+1} \left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\Delta p}{2kl}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (16.74)$$

Разрешив соотношение (16.74) относительно Δp , получим

$$\Delta p = 2klw^n \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n \left(\frac{2}{d}\right)^{n+1}.$$

Сравнивая это выражение с формулой Дарси–Вейсбаха, получаем

$$\lambda = 2^{n+3} \left(\frac{3n+1}{n} \right)^n \frac{k}{\rho w^{2-n} d}.$$

§8. Дополнительные замечания к расчету течения неньютоновских жидкостей по трубам

Основными соотношениями, описывающими установившееся движение вязкой жидкости по трубам являются:

уравнение неразрывности

$$Q = wS = \text{const}, \quad (16.75)$$

уравнение Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{w_2^2}{2g} + h_{1-2}, \quad (16.76)$$

формулы Дарси–Вейсбаха и Вейсбаха

$$h_\tau = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g}, \quad h_m = \zeta \frac{w^2}{2g}. \quad (16.77)$$

Так как уравнение неразрывности не содержит вязкостных характеристик жидкости, то оно имеет одинаковый вид как для линейно-вязкой, так и для любой неньютоновской жидкости. Уравнение Бернулли, представляющее собой закон сохранения механической энергии, также, очевидно, сохраняет свой вид, однако коэффициенты Кориолиса α и величины потерь h_{1-2} будут иными, чем в случае линейно-вязкой жидкости. Действительно, значение величины α определяется законом распределения скоростей по сечению трубы, а величина потерь h_{1-2} зависит от вязкостных характеристик среды. Формулы Дарси–Вейсбаха и Вейсбаха получены из общих соображений теории размерностей. Поэтому их структура сохраняется и для неньютоновских жидкостей, однако зависимости коэффициента гидравлического сопротивления λ и коэффициента местных сопротивлений ζ от критериев подобия будут иметь свой вид для каждого типа неньютоновской жидкости. Из изложенного следует, что все схемы расчета трубопроводов, опирающиеся на соотношения (16.75) – (16.77), с учетом приведенных выше оговорок могут быть использованы для расчета течения неньютоновских вязких жидкостей.

Глава XVII

ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ В ТРУБАХ

С течением двухфазных (многофазных) сред в трубах приходится сталкиваться почти во всех отраслях нефтегазового производства. При бурении скважин – это течение аэрированных промывочных и тампонажных жидкостей и вынос шлама. При эксплуатации нефтяных и газовых месторождений – эрлифтная добыча нефти, течение газоконденсатных, водонефтяных и газоводонефтяных смесей в стволе скважины. В сборных сетях месторождений также могут иметь место многофазные течения. Этот список может быть существенно продолжен.

Под фазой подразумевается отдельная часть однородной системы, ограниченная поверхностью раздела. Так, смесь нефти и воды представляет собой двухфазную систему жидкость-жидкость. Смесь газа и конденсата, или газа и нефти – двухфазная система газ-жидкость. Смесь воды, нефти и газа – трехфазная система.

Фаза может состоять из одного вещества, например, воды. Такая фаза называется однокомпонентной. Если фаза состоит из нескольких химических веществ, например, смеси углеводородных газов, то она называется многокомпонентной.

Истинные растворы (соли в воде, смеси газов и т.д.) представляют собой однофазные многокомпонентные системы.

При описании движения многофазных сред обычно вводятся следующие предположения.

1. Размеры включений или неоднородностей в смеси (отдельных частей неоднородной системы) много больше расстояний между молекулами, длин свободного пробега молекул и т.д. Иначе говоря, размеры включений таковы, что к каждой отдельной части неоднородной системы приложимы методы механики сплошной среды.

2. Размеры указанных включений много меньше расстояний, на которых макроскопические параметры смеси или фаз меняются существенным образом, то есть эти размеры много меньше характерных размеров рассматриваемой системы.

Указанные ограничения позволяют использовать для описания движения многофазных сред модель многоскоростного континуума. Много-

скоростной континуум представляет собой совокупность N континуумов, каждый из которых относится к своей составляющей (фазе или компоненте) и заполняет один и тот же объем, занятый смесью. Таким образом, в каждой точке многоскоростного континуума имеется N плотностей, N скоростей и т.д.

§1. Уравнения законов сохранения

Исходя из общих принципов, использованных в главе II для получения уравнений законов сохранения для однофазной среды, и модели многоскоростного континуума, можно выписать уравнения законов сохранения массы, изменения количества движения и энергии для каждой составляющей смеси.

В интегральном представлении эти законы имеют вид:

закон сохранения массы

$$\int_V \frac{\partial(\alpha_i \rho_i)}{\partial t} dV + \int_S \alpha_i \rho_i v_{in} dS = \int_V \sum_{j=1}^N J_{ji} dV, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (17.1)$$

закон изменения количества движения

$$\int_V \frac{\partial(\alpha_i \rho_i \bar{v}_i)}{\partial t} dV + \int_S \alpha_i \rho_i \bar{v}_i v_{in} dS = \int_V \alpha_i \rho_i \bar{F}_i dV + \int_S \bar{p}_{ni} dS + \int_V \sum_{j=1}^N \bar{P}_{ji} dV, \quad (17.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, N;$$

закон сохранения энергии

$$\int_V \frac{\partial(\alpha_i \rho_i E_i)}{\partial t} dV + \int_S \alpha_i \rho_i E_i v_{in} dS = \int_V \alpha_i \rho_i \bar{F}_i \bar{v}_i dV + \int_S \bar{p}_{ni} \bar{v}_i dS +$$

$$+ \int_V \sum_{j=1}^N E_{ji} dV - \int_S q_i^{(n)} dS, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (17.3)$$

$$E_i = u_i + \frac{v_i^2}{2}.$$

В уравнениях (17.1) – (17.3) i – номер фазы (компоненты), $\alpha_i \geq 0$ – доля объема смеси, занимаемая фазой в данной точке, остальные обозначения имеют тот же смысл, что в гл. II. При этом, очевидно,

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1. \quad (17.4)$$

Величина J_{ji} представляет собой (благодаря возможности фазовых превращений) интенсивность перехода массы из j -й в i -ю составляющую в единице объема смеси и в единицу времени.

\bar{P}_{ji} – интенсивность обмена импульсами между j -й и i -й составляющими смеси. E_{ji} – интенсивность обмена энергией между j -й и i -й составляющими смеси.

Из законов сохранения следует, что

$$J_{ji} = -J_{ij}, \quad J_{ii} \equiv 0; \quad \bar{P}_{ji} = -\bar{P}_{ij}, \quad \bar{P}_{ii} \equiv 0; \quad E_{ji} = -E_{ij}, \quad E_{ii} \equiv 0. \quad (17.5)$$

Заметим особо, что i – номер фазы, поэтому суммирование по индексу i не производится.

Суммируя по i уравнения (17.1)–(17.3), с учетом соотношений (17.5) получаем

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i dV + \int_S \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i v_{in} dS = 0, \quad (17.6)$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \bar{v}_i dV + \int_S \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \bar{v}_i v_{in} dS = \int_V \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \bar{F}_i dV + \int_S \sum_{i=1}^N \bar{p}_{ni} dS, \quad (17.7)$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i E_i dV + \int_S \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i E_i v_{in} dS = \int_V \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \bar{F}_i \bar{v}_i dV +$$

$$+ \int_S \sum_{i=1}^N \bar{p}_{ni} \bar{v}_i dS - \int_S \sum_{i=1}^N q_i^{(n)} dS. \quad (17.8)$$

Плотность ρ_m смеси определяется как

$$\rho_m = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i, \quad (17.9)$$

а среднemasовая скорость – из соотношения

$$\bar{v} = \frac{1}{\rho_m} \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \bar{v}_i. \quad (17.10)$$

§2. Уравнения движения двухфазной смеси в трубах

Для вывода уравнений движения двухфазной смеси в трубах введем следующие допущения:

- а) движение установившееся;
 б) давление и температура в обеих фазах одинаковы и постоянны по сечению трубы;
 в) относительным движением компонент внутри фазы можно пренебречь;
 г) в каждом сечении выполняются условия локального термодинамического равновесия для объема смеси, проходящего через сечение в единицу времени;
 д) из массовых сил действует только сила тяжести.

В этих предположениях уравнения (17.6) – (17.8) с учетом равенств (17.9) и (17.10) принимают вид

$$\int_S \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i v_{in} dS = 0, \quad (17.11)$$

$$\int_S \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \bar{v}_i v_{in} dS = \int_V \rho \bar{g} dV + \int_S \sum_{i=1}^N \bar{p}_{ni} dS, \quad (17.12)$$

$$\int_S \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i E_i v_{in} dS = \int_V \rho_m \bar{v} \bar{g} dV + \int_S \sum_{i=1}^N \bar{p}_{ni} \bar{v}_i dS - \int_S \sum_{i=1}^N q_i^{(n)} dS. \quad (17.13)$$

Рассмотрим в качестве поверхности S участок трубы, наклоненный к вертикали под углом θ и ограниченный сечениями S_1, S_2 и боковой поверхностью S_3 (рис. 17.1). Для общности вывода будем считать, что поверхность S_3 проницаема и через нее в трубу поступает непрерывно распределенная газожидкостная смесь. В сечениях S_1, S_2 и S_3 в соответствии с рис. 17.1 имеем:

$$\begin{aligned} \text{на } S_1 \quad \bar{v}_i &= -\bar{n}v_i, \quad \bar{n} = -\bar{e}_3, \quad \alpha_{n1} = \alpha_{n2} = 0, \quad \alpha_{n3} = -1, \quad i = 1, 2; \\ \text{на } S_2 \quad \bar{v}_i &= \bar{n}v_i, \quad \bar{n} = \bar{e}_3, \quad \alpha_{n1} = \alpha_{n2} = 0, \quad \alpha_{n3} = 1, \quad i = 1, 2; \\ \text{на } S_3 \quad \bar{v}_i &= -\bar{n}v_i, \quad \bar{n} = \bar{e}_1\alpha_{n1} + \bar{e}_2\alpha_{n2}, \quad \alpha_{n3} = 0, \quad i = 3, 4. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Здесь и далее индексы «3», «4» относятся, соответственно, к газовой и жидкой фазам смеси, поступающей в трубу через поверхность S_3 , \bar{e}_m – орты координатных осей, $\alpha_{nm} = \bar{n} \cdot \bar{e}_m$ – косинусы углов между координатными осями и нормалью.

Подставив соотношения (17.14) в уравнение (17.11), получим

$$\int_{S_2} (\alpha_1 \rho_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2) dS - \int_{S_1} (\alpha_1 \rho_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2) dS = \int_{S_3} (\alpha_3 \rho_3 v_3 + \alpha_4 \rho_4 v_4) dS. \quad (17.15)$$

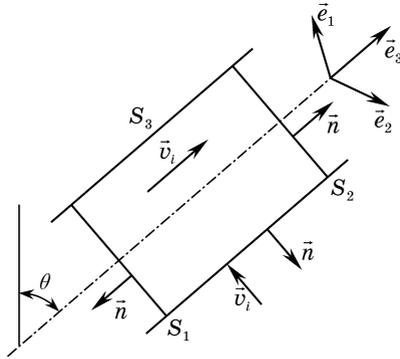


Рис. 17.1

Для преобразования уравнения (17.12) рассмотрим тензор поверхностных напряжений. Примем, что

$$p_i^{kl} = -\alpha_i p \delta_{kl} + \tau_i^{kl}, \quad \tau_i^{kl} = \tau_i^{lk}, \quad \tau_i^{kk} = 0. \tag{17.16}$$

С учетом равенства (1.31) из формул (17.16) имеем

$$\bar{p}_{ni} = -\alpha_i p \vec{n} + \bar{\tau}_{ni}, \quad \bar{\tau}_{ni} = \vec{e}_m \tau_i^{km} \alpha_{nk}, \tag{17.17}$$

где \$\tau_i^{km}\$ – компоненты тензора добавочных напряжений, приложенных к \$i\$-й фазе.

Так как по принятому выше условию давление в фазах одинаково, то из соотношений (17.17) с учетом равенства (17.4) имеем

$$\begin{aligned} \bar{p}_n &= \sum_{i=1}^N \bar{p}_{ni} = -p \vec{n} + \bar{\tau}_n, \quad \bar{\tau}_n = \vec{e}_m \tau^{km} \alpha_{nk}, \\ \tau^{km} &= \sum_{i=1}^N \tau_i^{km}, \quad \tau^{km} = \tau^{mk}, \quad \tau^{kk} = 0. \end{aligned} \tag{17.18}$$

В формулах (17.18) подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу.

Из формул (17.14) и (17.18) имеем:

$$\begin{aligned} \text{на } S_1 \quad \bar{p}_n &= \vec{e}_3 p - \vec{e}_1 \tau^{31} - \vec{e}_2 \tau^{32}; \\ \text{на } S_2 \quad \bar{p}_n &= -\vec{e}_3 p + \vec{e}_1 \tau^{31} + \vec{e}_2 \tau^{32}; \\ \text{на } S_3 \quad \bar{p}_n &= -(\vec{e}_1 \alpha_{n1} + \vec{e}_2 \alpha_{n2}) p + \vec{e}_1 \tau^{21} \alpha_{n2} + \vec{e}_2 \tau^{12} \alpha_{n1} + \vec{e}_3 (\tau^{13} \alpha_{n1} + \tau^{23} \alpha_{n2}). \end{aligned} \tag{17.19}$$

Спроектировав уравнение (17.12) на ось трубы Oz , с учетом соотношений (17.14) и (17.19) получим

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} (\alpha_1 \rho_1 v_1^2 + \alpha_2 \rho_2 v_2^2) dS - \int_{S_1} (\alpha_1 \rho_1 v_1^2 + \alpha_2 \rho_2 v_2^2) dS = \\ & = \int_V \rho_m \vec{g} \vec{e}_3 dV + \int_{S_1} p dS - \int_{S_2} p dS + \int_{S_3} \tau dS, \end{aligned} \quad (17.20)$$

где

$$\tau = \tau^{13} \alpha_{n1} + \tau^{23} \alpha_{n2}$$

– проекция добавочных напряжений на ось Oz .

Для преобразования уравнения (17.13) рассмотрим выражения вида $\vec{p}_{ni} \cdot \vec{v}_i$. Из формул (17.14) и (17.17) имеем:

$$\begin{aligned} \text{на } S_1 \quad \vec{p}_{ni} \cdot \vec{v}_i &= \alpha_i p v_i, \quad i = 1, 2; \\ \text{на } S_2 \quad \vec{p}_{ni} \cdot \vec{v}_i &= -\alpha_i p v_i, \quad i = 1, 2; \\ \text{на } S_3 \quad \vec{p}_{ni} \cdot \vec{v}_i &= \alpha_i p v_i - 2\alpha_{n1} \alpha_{n2} \tau_i^{12} v_i, \quad \alpha_{n1}^2 + \alpha_{n2}^2 = 1, \quad i = 3, 4. \end{aligned} \quad (17.21)$$

Подставив соотношения (17.14) и (17.21) в уравнение (17.13) и считая, что притоком тепла через сечения S_1, S_2 можно пренебречь, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} (\alpha_1 \rho_1 E_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 E_2 v_2) dS - \int_{S_1} (\alpha_1 \rho_1 E_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 E_2 v_2) dS - \\ & - \int_{S_3} (\alpha_3 \rho_3 E_3 v_3 + \alpha_4 \rho_4 E_4 v_4) dS = \int_V \rho_m \vec{v} \vec{g} dV + \int_{S_1} p (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) dS - \\ & - \int_{S_2} p (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) dS + \int_{S_3} [(\alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4) p - 2\alpha_{n1} \alpha_{n2} (\tau_3^{12} v_3 + \tau_4^{12} v_4)] dS - \\ & - \int_{S_3} \sum_{i=1}^N q_i^{(n)} dS. \end{aligned} \quad (17.22)$$

Уравнения (17.15), (17.20), (17.22) содержат интегралы вида

$$\int_{S_1} f_1 dS, \quad \int_{S_2} f_1 dS, \quad \int_{S_3} f_2 dS, \quad \int_V f_3 dV.$$

Устремляя к нулю расстояние между сечениями $S_1 = S(z)$ и $S_2 = S(z + dz)$, получим

$$\lim \left(\int_{S_2} f_1 dS - \int_{S_1} f_1 dS \right) = \frac{d}{dz} \int_S f_1 dS dz, \quad (17.23)$$

$$\lim \int_{S_3} f_2 dS = \int_{\chi} f_2 d\chi dz, \quad \lim \int_V f_3 dV = \int_S f_3 dS dz,$$

где χ – смоченный периметр сечения трубы S .

Переходя в уравнениях (17.15), (17.20), (17.22) к пределу при $dz \rightarrow 0$, с учетом соотношений (17.23) имеем

$$\frac{d}{dz} \int_S (\alpha_1 \rho_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2) dS = \int_{\chi} (\alpha_3 \rho_3 v_3 + \alpha_4 \rho_4 v_4) d\chi, \quad (17.24)$$

$$\frac{d}{dz} \int_S (\alpha_1 \rho_1 v_1^2 + \alpha_2 \rho_2 v_2^2) dS = \int_S \rho_m \bar{g} \bar{e}_3 dS - \frac{d}{dz} \int_S p dS + \int_{\chi} \tau d\chi, \quad (17.25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \int_S (\alpha_1 \rho_1 E_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 E_2 v_2) dS - \int_{\chi} (\alpha_3 \rho_3 E_3 v_3 + \alpha_4 \rho_4 E_4 v_4) d\chi = \\ & = \int_S \rho_m \bar{v} \bar{g} dS - \frac{d}{dz} \int_S (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) p dS + \int_{\chi} (\alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4) p d\chi - \\ & - 2 \int_{\chi} (\tau_3^{12} v_3 + \tau_4^{12} v_4) \alpha_{n1} \alpha_{n2} d\chi - \int_{\chi} q^{(n)} d\chi, \end{aligned} \quad (17.26)$$

где*

$$q^{(n)} = \sum_{i=1}^N q_i^{(n)}.$$

Рассмотрим интегралы, входящие в уравнения (17.24)–(17.26). Очевидно, что

$$\int_S \alpha_i \rho_i v_i dS = G_i, \quad i = 1, 2, \quad \int_{\chi} \alpha_i \rho_i v_i d\chi = J_i, \quad i = 3, 4, \quad (17.27)$$

где G_i – массовый расход i -й фазы, J_i – массовый приток i -й фазы через поверхность S_3 , рассчитанный на единицу длины.

* При вычислении $\int_{\chi} q^{(n)} d\chi$ и $\int_{\chi} \tau d\chi$ считается, что χ – периметр сечения трубы.

Далее

$$\int_S \alpha_i \rho_i v_i^2 dS = \bar{v}_i \int_S \alpha_i \rho_i v_i dS = \bar{v}_i G_i, \quad i = 1, 2, \quad (17.28)$$

где \bar{v}_i – некоторое среднее значение скорости v_i .

Из допущения б) следует, что давление, плотность и внутренняя энергия фазы распределены равномерно по сечению трубы. Поэтому с учетом равенств (17.9) и (17.27) получим

$$\int_S \rho_m \vec{g} \bar{e}_3 dS = g_z \rho_m S, \quad \rho_m S = \rho_1 \int_S \alpha_1 dS + \rho_2 \int_S \alpha_2 dS, \quad \int_S p dS = pS, \quad (17.29)$$

$$\int_S \alpha_i \rho_i E_i v_i dS = \int_S \alpha_i \rho_i \left(u_i + \frac{v_i^2}{2} \right) v_i dS = \left(u_i + \frac{v_{i\text{cp}}^2}{2} \right) G_i, \quad i = 1, 2, \quad (17.30)$$

$$\int_S \alpha_i v_i p dS = \int_S \alpha_i \rho_i v_i \frac{p}{\rho_i} dS = \frac{p}{\rho_i} G_i, \quad i = 1, 2, \quad (17.31)$$

где g_z – проекция ускорения силы тяжести на ось трубы, $v_{i\text{cp}}$ – некоторое отличное от \bar{v}_i осредненное значение скорости v_i .

В соответствии с формулами (17.10) и (17.27) имеем

$$\int_S \rho_m \vec{v} \vec{g} dS = \vec{g} \int_S (\alpha_1 \rho_1 v_1 + \alpha_2 \rho_2 v_2) dS = g_z (G_1 + G_2). \quad (17.32)$$

Приток через поверхность S_3 будем считать осесимметричным. Тогда с учетом равенства (17.27) получим

$$\int_\chi \alpha_i \rho_i E_i v_i d\chi = E_i \int_\chi \alpha_i \rho_i v_i d\chi = \left(u_i + \frac{v_i^2}{2} \right) J_i, \quad i = 3, 4, \quad (17.33)$$

$$\int_\chi \alpha_i \rho_i p d\chi = \int_\chi \alpha_i \rho_i v_i \frac{p}{\rho_i} d\chi = \frac{p}{\rho_i} \int_\chi \alpha_i \rho_i v_i d\chi = \frac{p}{\rho_i} J_i, \quad i = 3, 4, \quad (17.34)$$

$$\int_\chi \tau_i^{l2} v_i \alpha_{n1} \alpha_{n2} d\chi = \tau_i^{l2} v_i \int_\chi \alpha_{n1} \alpha_{n2} d\chi = \tau_i^{l2} v_i \int_0^{2\pi} \sin \gamma \cos \gamma R d\gamma = 0, \quad i = 3, 4, \quad (17.35)$$

где R – радиус трубы, γ – угол между нормалью \vec{n} к поверхности S_3 и ортом \vec{e}_1 (рис. 17.2).

Очевидно также, что

$$\int_{\chi} \tau d\chi = \tau_{\text{cp}} \chi, \quad \int_{\chi} q^{(n)} d\chi = q_{\text{cp}}^{(n)} \chi, \quad (17.36)$$

где τ_{cp} , $q_{\text{cp}}^{(n)}$ – средние по периметру значения τ и $q^{(n)}$.

Часть площади сечения трубы S , занятую i -й фазой, обозначим через S_i . Тогда

$$S_i = \int_S \alpha_i dS, \quad i = 1, 2, \quad (17.37)$$

и массовый расход G_i можно представить в виде

$$G_i = \int_S \alpha_i \rho_i v_i dS = \rho_i w_i \int_S \alpha_i dS = \rho_i w_i S_i = \rho_i Q_i, \quad i = 1, 2, \quad (17.38)$$

где w_i , Q_i – средние по сечению скорость и объемный расход i -й фазы.

Будем считать, что скорость фазы мало меняется по сечению трубы, поэтому можно принять

$$\bar{v}_i^2 = v_{i\text{cp}}^2 = w_i^2, \quad i = 1, 2. \quad (17.39)$$

В соответствии с условием б) давление и температура постоянны по сечению трубы. Поэтому

$$\rho_1 = \rho_3 = \rho_g, \quad \rho_2 = \rho_4 = \rho_l, \quad u_1 = u_3 = u_g, \quad u_2 = u_4 = u_l, \quad (17.40)$$

где индекс «g» относится к газовой фазе, индекс «l» – к жидкой. Кроме того, обозначим

$$G_1 = G_g, \quad G_2 = G_l, \quad J_4 = J_l, \quad w_1 = w_g, \quad w_2 = w_l. \quad (17.41)$$

Из формулы (17.37) имеем

$$S_1 = S_g = \int_S \alpha_1 dS = \varphi S. \quad (17.42)$$

Величина φ называется *истинным газосодержанием*.

Так как в соответствии с формулой (17.4) $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, то

$$S_2 = S_l = \int_S \alpha_2 dS = (1 - \varphi)S. \quad (17.43)$$

На основании формул (17.38) и (17.40) – (17.43) средние скорости фаз можно представить в виде

$$w_g = \frac{G_g}{\varphi \rho_g S}, \quad w_l = \frac{G_l}{(1 - \varphi) \rho_l S}. \quad (17.44)$$

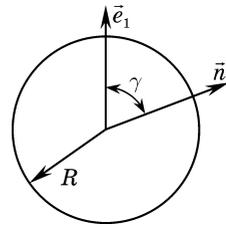


Рис. 17.2

Из формул (17.29), (17.40), (17.42) и (17.43) следует, что

$$\rho_m = \varphi \rho_g + (1 - \varphi) \rho_l. \quad (17.45)$$

Касательное напряжение на стенке трубы задается в виде*

$$\tau_{\text{ср}} = -\frac{\lambda_m}{8} \left[\varphi \rho_g w_g^2 + (1 - \varphi) \rho_l w_l^2 \right] = -\frac{\lambda_m}{8S^2} \left[\frac{G_g^2}{\varphi \rho_g} + \frac{G_l^2}{(1 - \varphi) \rho_l} \right], \quad (17.46)$$

а приток тепла

$$q_{\text{ср}}^{(n)} = k(T - T_n), \quad (17.47)$$

где λ_m – коэффициент гидравлического сопротивления смеси, k – коэффициент теплопередачи через стенку трубы, T – температура смеси в трубе, T_n – наружная температура. Подставив интегралы (17.27) – (17.36) и соотношения (17.46), (17.47) в уравнения (17.24) – (17.26), учитывая выражения (17.39) – (17.41), (17.45), после элементарных преобразований получаем

$$\frac{dG_m}{dz} = J_m,$$

$$\frac{dp}{dz} = \rho_m g_z - \frac{1}{S^2} \frac{d}{dz} \left[\frac{G_g^2}{\varphi \rho_g} + \frac{G_l^2}{(1 - \varphi) \rho_l} \right] - \frac{\chi \lambda_m}{8S^3} \left[\frac{G_g^2}{\varphi \rho_g} + \frac{G_l^2}{(1 - \varphi) \rho_l} \right], \quad (17.48)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\left(h_g + \frac{w_g^2}{2} \right) G_g + \left(h_l + \frac{w_l^2}{2} \right) G_l \right] = \left(h_g + \frac{v_3^2}{2} \right) J_g + \left(h_l + \frac{v_4^2}{2} \right) J_l + g_z G_m - \chi k (T - T_n),$$

где

$$G_m = G_g + G_l, \quad J_m = J_g + J_l$$

– суммарные массовые расход и приток,

$$h_g = u_g + \frac{p}{\rho_g}, \quad h_l = u_l + \frac{p}{\rho_l} \quad (17.49)$$

– энтальпии газовой и жидкой фаз.

Наряду с истинным газосодержанием φ , равным в соответствии с формулой (17.42)

$$\varphi = \frac{S_l}{S} = \frac{S_g}{S}, \quad (17.50)$$

* Вид формулы (17.46) определяется тем, что такое соотношение обычно используется при экспериментальном определении λ_m .

в теории двухфазных течений по трубам используется *расходное газосодержание* β , равное, по определению,

$$\beta = \frac{Q_g}{Q_g + Q_l}, \quad (17.51)$$

где Q_g, Q_l – объемные расходы газовой и жидкой фаз. На основании формул (17.44) имеем

$$Q_g = \frac{G_g}{\rho_g} = \varphi w_g S, \quad Q_l = \frac{G_l}{\rho_l} = (1 - \varphi) w_l S. \quad (17.52)$$

Из формул (17.51) и (17.52) следует, что

$$\frac{1 - \varphi}{\varphi} = \frac{1 - \beta}{\beta} \frac{w_g}{w_l}.$$

Подставив в равенство (17.51) выражения (17.52), получаем

$$\beta = \frac{G_g}{\rho_g} \left(\frac{G_g}{\rho_g} + \frac{G_l}{\rho_l} \right)^{-1}.$$

Так как через боковую поверхность S_3 поступает такой же состав смеси, что течет по трубе, то из условия локального термодинамического равновесия Γ следует, что

$$\frac{J_g}{\rho_g} \left(\frac{J_g}{\rho_g} + \frac{J_l}{\rho_l} \right)^{-1} = \beta = \frac{G_g}{\rho_g} \left(\frac{G_g}{\rho_g} + \frac{G_l}{\rho_l} \right)^{-1}. \quad (17.53)$$

Учитывая, что $G_m = G_g + G_l$, $J_m = J_g + J_l$, из формулы (17.53) после элементарных преобразований имеем

$$\begin{aligned} G_g &= \frac{\beta \rho_g G_m}{\beta \rho_g + (1 - \beta) \rho_l}, & G_l &= \frac{(1 - \beta) \rho_l G_m}{\beta \rho_g + (1 - \beta) \rho_l}, \\ J_g &= \frac{\beta \rho_g J_m}{\beta \rho_g + (1 - \beta) \rho_l}, & J_l &= \frac{(1 - \beta) \rho_l J_m}{\beta \rho_g + (1 - \beta) \rho_l}, \end{aligned} \quad (17.54)$$

а из формул (17.44) и (17.54) –

$$w_g = \frac{\beta G_m}{S \varphi [\beta \rho_g + (1 - \beta) \rho_l]}, \quad w_l = \frac{(1 - \beta) G_m}{S (1 - \varphi) [\beta \rho_g + (1 - \beta) \rho_l]}. \quad (17.55)$$

Плотности газовой и жидкой фаз определяются с помощью уравнений состояния

$$\rho_g = \rho_g(p, T), \quad \rho_l = \rho_l(p, T). \quad (17.56)$$

Истинное газосодержание φ и коэффициент гидравлического сопротивления λ_m находятся из эмпирических соотношений. Примем, что

$$\varphi = \varphi(\beta, \text{Re}_m, \text{Fr}_m, \text{We}_m, \bar{\rho}, \bar{\mu}), \quad (17.57)$$

$$\lambda_m = \lambda_m(\varphi, \text{Re}_m, \text{Fr}_m, \text{We}_m, \bar{\rho}, \bar{\mu}, \varepsilon), \quad (17.58)$$

где $\text{Re}_m, \text{Fr}_m, \text{We}_m$ – числа Рейнольдса, Фруда и Вебера смеси, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} \text{Re}_m &= D \frac{\beta \rho_g w_g + (1 - \beta) \rho_l w_l}{\beta \mu_g + (1 - \beta) \mu_l}, \\ \text{Fr}_m &= \frac{[\varphi w_g + (1 - \varphi) w_l]^2}{gD}, \\ \text{We}_m &= 2D [\varphi w_g + (1 - \varphi) w_l]^2 \frac{\rho_l - \rho_g}{\sigma}. \end{aligned}$$

Выше принятые обозначения: отношение плотностей фаз $\bar{\rho} = \rho_g / \rho_l$, μ_g, μ_l – динамические коэффициенты вязкости газовой и жидкой фаз, приведенная вязкость жидкой фазы $\bar{\mu} = \mu_l / \mu_v$, μ_v – вязкость воды, σ – коэффициент поверхностного натяжения, D – диаметр трубы, ε – относительная шероховатость стенок трубы.

Для определения притока J_m необходимо задать соотношение вида

$$J_m = J_m(p, p_n), \quad (17.59)$$

где p_n – наружное давление.

Система из 15 уравнений (17.45), (17.48), (17.54) – (17.59), в дальнейшем именуемая системой A , содержит 23 неизвестных: $G_m, G_g, G_l, J_m, J_g, J_l, p, T, \rho_m, \rho_g, \rho_l, w_g, w_l, v_3, v_4, \lambda_m, \beta, \varphi, h_g, h_l, \mu_g, \mu_l, \sigma$.

Величины $h_g, h_l, \beta, \mu_g, \mu_l, \sigma$ могут быть вычислены как функции p, T и состава двухфазной смеси с помощью соответствующих термодинамических расчетов. Квадраты скоростей v_3 и v_4 обычно много меньше соответствующих энтальпий и ими можно пренебречь. Поэтому система A является замкнутой и содержит 15 уравнений с 15 неизвестными.

С помощью соотношений (17.45), (17.54)–(17.59) 12 неизвестных $G_g, G_l, J_m, J_g, J_l, \rho_m, \rho_g, \rho_l, w_g, w_l, \lambda_m, \varphi$, входящих как явным, так и неявным образом в уравнения (17.48), могут быть исключены из этих урав-

нений. Следовательно, система A может быть сведена к системе уравнений (17.48), содержащей в качестве неизвестных величины p, T, G_m .

§3. Преобразование уравнений движения двухфазной смеси в трубах

Для преобразования системы уравнений (17.48) введем функции

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{S^2} \left[\frac{G_g^2}{\varphi \rho_g} + \frac{G_l^2}{(1-\varphi) \rho_l} \right], \quad \Phi_2 = \rho_m g_z - \frac{\lambda_m}{2D} \Phi_1 \left(\chi = \pi D, S = \frac{1}{4} \pi D^2 \right), \\ \Phi_3 &= \left(h_g + \frac{w_g^2}{2} \right) G_g + \left(h_l + \frac{w_l^2}{2} \right) G_l, \quad \Phi_4 = h_g J_g + h_l J_l, \\ \Phi_5 &= g_z G_m - \pi D k (T - T_u). \end{aligned} \quad (17.60)$$

На основании равенств (17.54) – (17.57) формулы (17.60) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= G_m^2 \Psi_1(p, T, G_m), \quad \Psi_1 = \frac{(1-\varphi)\beta^2 \rho_g + \varphi(1-\beta)^2 \rho_l}{S^2 [\beta \rho_g + (1-\beta)\rho_l]^2}, \\ \Phi_3 &= G_m \Psi_3(p, T, G_m), \quad \Psi_3 = \frac{1}{\beta \rho_g + (1-\beta)\rho_l} \left[\beta \rho_g \left(h_g + \frac{w_g^2}{2} \right) + (1-\beta)\rho_l \left(h_l + \frac{w_l^2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (17.61)$$

Подставив формулы (17.60) и (17.61) в уравнения (17.48), имеем ($v_3^2 \ll h_g, v_4^2 \ll h_l$)

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= \Phi_2 - \frac{d\Phi_1}{dz} = \Phi_2 - \frac{d}{dz} (G_m^2 \Psi_1), \\ \frac{d\Phi_3}{dz} &= \frac{d}{dz} (G_m \Psi_3) = \Phi_4 + \Phi_5, \end{aligned}$$

откуда после дифференцирования и подстановки $\frac{dG_m}{dz} = J_m$ получаем

$$\begin{aligned} \left(1 + G_m^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial p} \right) \frac{dp}{dz} + G_m^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial T} \frac{dT}{dz} &= \Phi_2 - G_m J_m \left(2\Psi_1 + G_m \frac{\partial \Psi_1}{\partial G_m} \right), \\ G_m \frac{\partial \Psi_3}{\partial p} \frac{dp}{dz} + G_m \frac{\partial \Psi_3}{\partial T} \frac{dT}{dz} &= \Phi_4 + \Phi_5 - J_m \left(\Psi_3 + G_m \frac{\partial \Psi_3}{\partial G_m} \right). \end{aligned} \quad (17.62)$$

Решая систему уравнений (17.62) относительно $\frac{dp}{dz}$, $\frac{dT}{dz}$ и учитывая первое уравнение (17.48), имеем окончательно

$$\begin{aligned} \frac{dG_m}{dz} &= J_m, \\ \frac{dp}{dz} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[\Phi_2 - G_m J_m \left(2\Psi_1 + G_m \frac{\partial \Psi_1}{\partial G_m} \right) \right] \frac{\partial \Psi_3}{\partial T} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\Phi_4 + \Phi_5 - J_m \left(\Psi_3 + G_m \frac{\partial \Psi_3}{\partial G_m} \right) \right] G_m \frac{\partial \Psi_1}{\partial T} \right\}, \\ \frac{dT}{dz} &= \frac{1}{G_m \Delta} \left\{ \left[\Phi_4 + \Phi_5 - J_m \left(\Psi_3 + G_m \frac{\partial \Psi_3}{\partial G_m} \right) \right] \left(1 + G_m^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial p} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left[\Phi_2 - G_m J_m \left(2\Psi_1 + G_m \frac{\partial \Psi_1}{\partial G_m} \right) \right] G_m \frac{\partial \Psi_3}{\partial p} \right\}, \end{aligned} \quad (17.63)$$

где

$$\Delta = \left(1 + G_m^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial p} \right) \frac{\partial \Psi_3}{\partial T} - G_m^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial T} \frac{\partial \Psi_3}{\partial p}. \quad (17.64)$$

В рамках принятых допущений уравнения (17.63) описывают течение двухфазных смесей по перфорированным трубам. Угол наклона трубы учитывается в этих уравнениях величиной g_z и видом зависимостей (17.57) и (17.58). Если стенка трубы непроницаема, то $J_m = 0$, и система уравнений (17.63) существенно упрощается. При $G_l = J_l = 0$ уравнения (17.63) описывают однофазное движение жидкости, а при $G_g = J_g = 0$ — однофазное движение газа.

§4. Режимы течения

Как уже указывалось, отличительной особенностью двухфазных (многофазных) течений является наличие межфазовых границ раздела. Эти границы могут иметь самую разнообразную форму. Степень дисперсности фазы также может быть весьма различной. Поэтому для классификации двухфазных потоков «газ-жидкость» вводится понятие режимов течения. При экспериментальном исследовании таких потоков было обнаружено множество режимов, для которых были предложены различные названия и классификации. Наиболее широкое распространение для вертикальных потоков получила следующая классификация.

Пузырьковое течение. Пузырьки газа более или менее равномерно распределены в жидкости (рис. 17.3, 1).

Снарядное течение. При высокой концентрации пузырьков происходит их слияние, диаметр пузырьков приближается к диаметру канала, а сами пузырьки приобретают снарядообразную форму (рис. 17.3, 2).

Вспененное течение. С ростом скорости течения газовой фазы снарядное течение становится неустойчивым. На стенках канала образуется жидкая пленка, а газожидкостное ядро представляет собой пену (рис. 17.3, 3).

Кольцевой режим. Жидкость течет по стенке трубы в виде непрерывной пленки, а газовая фаза движется в центре. Обычно газовое ядро содержит некоторое количество капель жидкости (рис. 17.3, 4).

Клочковато-кольцевой режим. Газовый поток несет с собой капли жидкости (рис. 17.3, 5).

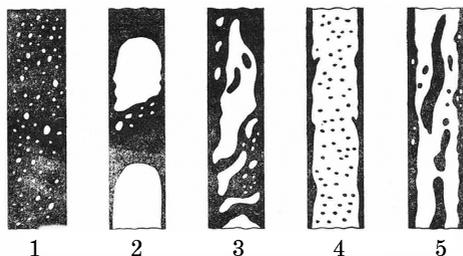


Рис. 17.3

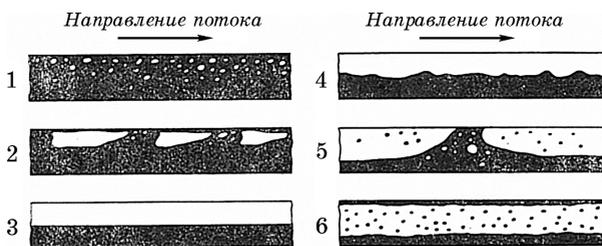


Рис.17.4

Несколько иная классификация используется для горизонтальных потоков.

Пузырьковое течение. Пузырьки газа движутся у верхней образующей трубы (рис. 17.4, 1).

Пробковое течение. У верхней образующей трубы движутся газовые пузыри снарядообразной формы (рис. 17.4, 2).

Расслоенное течение. Имеет место гравитационное расслоение потока. По дну канала движется жидкость, а над ней – газ (рис. 17.4, 3).

Волновое течение. С ростом скорости течения газа на свободной поверхности жидкости образуются волны (рис. 17.4, 4).

Снарядное течение. Волны на поверхности жидкости становятся настолько велики, что достигают верхней образующей трубы. Газовая фаза движется у верхней образующей в виде отдельных включений (рис. 17.4, 5).

Кольцевое течение. Наблюдается при больших расходах газа. Некоторое количество жидкости в виде отдельных капель движется в газовой фазе (рис. 17.4, 6).

Вид зависимостей (17.57), (17.58), то есть истинное газосодержание φ и коэффициент гидравлического сопротивления λ_m , существенно зависит от режима течения.

§5. Свободный дебит газоконденсатной скважины

Для глушения аварийного фонтана необходимо знать свободный (аварийный) дебит скважины. При этом весьма важной представляется возможность прогнозирования аварийных дебитов на конкретном месторождении. Наличие таких прогнозных расчетов позволяет заранее разработать технологические мероприятия для глушения аварийных фонтанов в случае их возникновения. Прогнозный расчет дебита фонтанирующей газоконденсатной скважины может быть выполнен с помощью системы уравнений (17.63).

Примем, что вскрытая толщина пласта много меньше глубины скважины, поэтому приток можно считать сосредоточенным. Тогда $J_m = 0$, и уравнения (17.63) для вертикальной скважины принимают вид

$$\begin{aligned} G_m &= \text{const}, \\ \frac{dp}{dz} &= \frac{1}{\Delta} \left(\Phi_2 \frac{\partial \Psi_3}{\partial T} - \Phi_5 G_m \frac{\partial \Psi_1}{\partial T} \right), \\ \frac{dT}{dz} &= \frac{1}{G_m \Delta} \left[\Phi_5 \left(1 + G_m^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial p} \right) - \Phi_2 G_m \frac{\partial \Psi_3}{\partial p} \right], \end{aligned} \quad (17.65)$$

где Δ определяется по формуле (17.64).

Для учета взаимодействия скважины и пласта вместо соотношения (17.59) используем двучленное уравнение притока флюида к скважине в виде

$$p_{\text{пл}}^2 - p_3^2 = A Q_m + B Q_m^2, \quad (17.66)$$

где $p_{пл}$ – пластовое давление, p_3 – давление на забое скважины, A и B – коэффициенты фильтрационного сопротивления, определяемые по данным исследования газоконденсатных скважин, Q_m – суммарный объемный расход, приведенный к стандартным условиям.

Система уравнений (17.65) совместно с соотношениями (17.45) и (17.54) – (17.58) позволяет рассчитывать распределения давления, температуры и других характерных параметров течения по стволу скважины при эксплуатационных режимах, то есть в случаях, когда величина массового расхода G_m известна. Так как эта система содержит два дифференциальных уравнения первого порядка, то для ее решения необходимо задать два краевых условия. Этими условиями могут быть давление и температура на забое, то есть $p(0) = p_3$, $T(0) = T_3$, либо давление и температура на устье – $p(H) = p_y$, $T(H) = T_y$, где H – глубина скважины. Могут быть также заданы условия вида $p(0) = p_3$, $T(H) = T_y$ или $p(H) = p_y$, $T(0) = T_3$.

В случае аварийного фонтанирования величина G_m неизвестна, и к соотношениям (17.45), (17.54)–(17.58) и уравнениям (17.65) необходимо добавить соотношение (17.66), выражающее связь между пластом и скважиной.

Аварийный режим истечения может быть как критическим (скорость потока на устье скважины равна местной скорости звука), так и докритическим. Это зависит от суммарного сопротивления пласта и скважины.

При докритическом истечении давление на устье равно атмосферному, то есть $p_y = p_{ат}$. Кроме того, необходимо задать либо T_y , либо T_3 .

При критическом истечении на устье возникает разрыв давления и температуры. Математически это означает, что при $z \rightarrow H$ $\frac{dp}{dz} \rightarrow \infty$ и $\frac{dT}{dz} \rightarrow \infty$. Из уравнений (17.63) и формулы (17.64) следует, что для этого необходимо, чтобы было

$$\Delta = \left(1 + G_m^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial p}\right) \frac{\partial \Psi_3}{\partial T} - G_m^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial T} \frac{\partial \Psi_3}{\partial T} = 0 \text{ при } z = H. \quad (17.67)$$

Кроме условия (17.67), необходимо задать $T(0) = T_y$.

Дебит, определяемый выполнением условия (17.67), называется *критическим*.

При различных режимах течения двухфазной смеси эмпирические соотношения (17.57) и (17.58) имеют различный вид.

Для расчета истинного газосодержания φ и коэффициента гидравлического сопротивления λ_m можно использовать результаты эксперимен-

тальных исследований ВНИИГаза. В соответствии с этими исследованиями в зависимости от среднеобъемной скорости движения смеси w_m , равной

$$w_m = \frac{Q_g + Q_l}{S} = \varphi w_g + (1 - \varphi)w_l,$$

выделяются четыре режима движения смеси: 1 – пузырьковый и снарядный ($w_m < w_a$), 2 – кольцевой ($w_a \leq w_m < w_r$), 3 – дисперсно-кольцевой ($w_r \leq w_m < w_{cr}$), 4 – дисперсный ($w_{cr} < w_m$). Значения w_a и w_{cr} вычисляются по формулам

$$w_a = \frac{0,86 \exp[9(1 - \beta)]w_r}{3,3(1 + 0,0027(\bar{\mu} - 1))},$$

$$w_r = 3,3 \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_g}} \left(\frac{\sigma g}{\rho_l - \rho_g} \right)^{0,25}.$$

Величина w_{cr} принимается равной 5 м/с. Истинное газосодержание для указанных режимов рассчитывается по следующим зависимостям:

$$\varphi = \begin{cases} A\beta f_1(\text{Fr}_m) & \text{при } w_m < w_a, \\ A\beta f_1(\text{Fr}_m) + f_2(\beta) & \text{при } w_a \leq w_m < w_r, \\ A\beta f_1(\text{Fr}_m) - f_3(\beta) & \text{при } w_r \leq w_m < w_{cr}, \\ \beta & \text{при } w_{cr} \leq w_m, \end{cases}$$

где

$$A = 0,5 + 0,3 \exp[0,067(1 - \bar{\mu})],$$

$$f_1(\text{Fr}_m) = 1 - \exp\left(-4,4\sqrt{\text{Fr}_m/\text{Fr}^*}\right),$$

$$f_2(\beta) = \left[\frac{(1 - A)(w_m - w_a^*)}{w_r - w_a^*} - 2(1 - \beta) \right] \exp(-7,5\sqrt{1 - \beta}),$$

$$f_3(\beta) = (1 + A - 2\beta) \exp(-7,5\sqrt{1 - \beta}),$$

$$w_a^* = \frac{0,86}{1 + 0,00275(\bar{\mu} - 1)} \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_g}} \left(\frac{g\sigma}{\rho_l - \rho_g} \right)^{0,25},$$

$$\text{Fr}^* = 4[1 - \exp(0,1\bar{\mu})] - 3[1 - \exp(1 - 0,05\bar{\mu})].$$

Коэффициент гидравлического сопротивления λ_m находится по формуле

$$\lambda_m = \psi \lambda(\text{Re}_m, \varepsilon),$$

где $\lambda(\text{Re}_m, \varepsilon)$ – коэффициент гидравлического сопротивления, рассчитанный для однофазного потока, ψ – поправочный коэффициент на двухфазность, определяемый соотношениями

$$\psi = \begin{cases} f_4(\beta) & \text{при } w_m < w_a, \\ E[f_4(\beta) - f_5(\kappa)] & \text{при } w_a \leq w_m < w_{cr}, \\ 1 & \text{при } w_{cr} \leq w_m, \end{cases}$$

где

$$E = 1 + 0,03\bar{\mu},$$

$$f_4(\beta) = \frac{1 - 0,78\beta f_1(\text{Fr}_m) - 0,22\beta[1 - \exp(-15\bar{\rho})]}{1 - \beta + 0,03 \exp[-1350(1 - \beta)^3]},$$

$$f_5(\kappa) = w_m \left(\frac{\rho_l - \rho_g}{g\sigma} \right)^{0,25}.$$

Плотности фаз ρ_g, ρ_l рассчитываются по уравнениям состояния, например, уравнению Пенга–Робинсона. Энтальпии, вязкости фаз, расходное газосодержание, поверхностное натяжение, то есть величины $h_g, h_l, \mu_g, \mu_l, \beta, \sigma$, вычисляются с помощью соответствующих термодинамических соотношений.

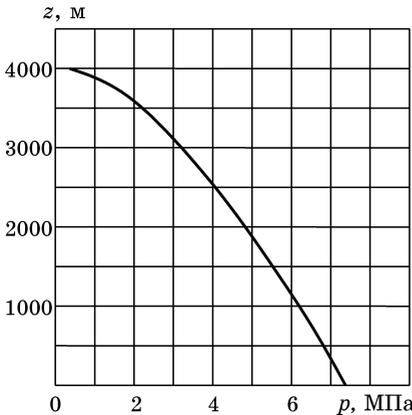


Рис. 17.5

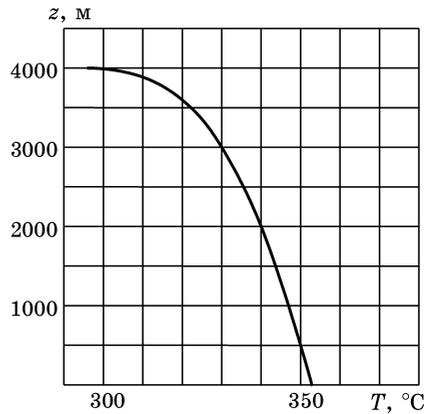


Рис. 17.6

Для расчета вязкости газовой фазы использовались корреляции Дина и Стила. Вязкость жидкой фазы находилась с помощью метода Литтл и Кеннеди. Идеально-газовые энтальпии для чистых компонент определя-

лись с помощью корреляций Пассата и Даннера, а для фракций – Кесслера и Ли. Приращение энтальпии в зависимости от p и T находилось с помощью известных методов. Для расчета коэффициента межфазного натяжения σ использовалась корреляция Маклеода–Сагдена. Типичные кривые распределения давления и температуры по стволу скважины при критическом истечении представлены на рис. 17.5, 17.6.

Часть III

НЕФТЕГАЗОВАЯ ПОДЗЕМНАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

Глава XVIII

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ. ОПЫТ И ЗАКОН ДАРСИ

§1. Особенности движения флюидов в природных пластах

Нефть и природные газы заключены в недрах Земли. Их скопления связаны с вмещающими горными породами – пористыми и проницаемыми образованиями, имеющими непроницаемые кровлю и подошву. Горные породы, которые могут служить вмещающими нефти и газа и отдавать их при разработке, называются коллекторами. В свою очередь, коллекторы называют пористыми или трещиноватыми в зависимости от геометрии пустот.

Природные жидкости: нефть, газ, подземные воды и их смеси – находятся в пустотах, т.е. порах и трещинах коллекторов. Часто находящиеся в пустотном пространстве коллектора природные жидкости, газы и их смеси обозначают общим термином «флюид», подразумевая под этим любой из компонентов. Флюид, находящийся в коллекторе, может пребывать в состоянии покоя или двигаться. Движение флюидов через твердые (деформируемые или недеформируемые) тела по связанным между собой порам и/или трещинам называется фильтрацией. Фильтрация может быть обусловлена воздействием различных сил: градиентами давления, концентрации, температуры, а также гравитационными, капиллярными, электромолекулярными и другими силами. Например, движение (фильтрация) расплавленного воска в фитиле свечи, или керосина в фитиле керосиновой лампы, обусловлено капиллярными силами. Однако в дальнейшем будут рассмотрены течения, вызываемые действием градиента давления и/или силы тяжести.

Теория фильтрации получила большое развитие в связи с потребностями гидротехники, гидромелиорации, гидрогеологии, горного и нефтега-

зового дела, химической технологии, аэрокосмической техники и т.п. В нефтегазовом деле теория фильтрации является теоретической основой разработки месторождений углеводородного сырья и в силу своей специфики носит название «подземная гидромеханика». Подземная гидромеханика является специальным разделом гидромеханики, в котором рассматривается равновесие и/или движение флюидов в специфической области – в твердом скелете, сложенном из частиц (цементированных или нецементированных) разнообразной формы и различных размеров. Таким образом, нефтегазовая подземная гидромеханика изучает законы равновесия и движения флюидов в нефтегазоносных пластах применительно к технологическим процессам их извлечения из недр.

Характерные особенности движения флюидов в природных пластах обусловлены как спецификой строения коллекторов, так и методами разработки месторождений углеводородного сырья.

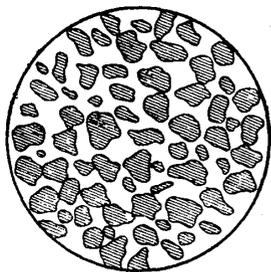


Рис. 18.1. Шлиф нефтяного песчаника

Поровое пространство осадочных горных пород – сложная система сообщающихся и не сообщающихся межзернистых пустот, в которой трудно выделить отдельные поровые каналы (рис. 18.1). Размеры пор в песчаных породах составляют обычно единицы или десятки микрометров (мкм).

Так как движение флюидов в пласте происходит с очень малыми скоростями, порядка микрометров в секунду (в гидромеханике движения со столь малыми скоростями называются ползущими), и при наличии теплоотводящих поверхностей большого размера

процесс фильтрации с высокой степенью точности в большинстве случаев можно считать изотермическим. В то же время при фильтрации в горных породах возникает значительная сила трения. При движении флюидов в пустотном пространстве коллектора соприкосновение между твердым скелетом и жидкостью происходит по огромной поверхности. Например, в 1 м^3 пористой среды (песчаника) площадь поверхности пустотного пространства может достигать порядка 10^4 м^2 . Поэтому основным свойством флюида, которое влияет на фильтрацию, является его вязкость. В связи с этим вязкость учитывается даже при фильтрации газа, а так как сила трения распределена по всему объему коллектора, то Н.Е.Жуковским было предложено при описании фильтрации силу трения считать массовой силой.

Строение нефтяных и газовых залежей осложняется значительной неоднородностью и анизотропией свойств пород, слагающих продуктивный пласт коллектора, их слоистостью, наличием так называемых тектоничес-

ких и стратиграфических нарушений (разрывов сплошности горной породы). Разведка месторождений, исследование пластов, извлечение нефти и газа осуществляются через отдельные скважины диаметром 10–20 см и более, отстоящие друг от друга на сотни, а иногда и тысячи метров.

Кроме перечисленных особенностей фильтрации нефти и газа в природных пластах, можно еще отметить следующее:

- невозможность изучать движение флюидов в пластах прямым применением классических методов гидродинамики, т.е. решением уравнений движения вязкой жидкости для области, представляющей собой совокупность всех пор;

- сочетание значительно различающихся масштабов фильтрационных процессов, определяемых характерными размерами, отличающимися по величине на многие порядки: размер пор (единицы и десятки микрометров), диаметр скважин (десятки сантиметров), протяженность месторождений (десятки километров); масштаб неоднородности пластов вдоль и поперек простираения может иметь практически любые значения;

- ограниченность и неточность сведений о строении и свойствах пласта и пластовых флюидов, что часто не позволяет построить однозначную модель флюидонасыщенной пластовой залежи.

Перечисленные особенности нефтегазовой подземной гидромеханики приводят к формулировке основных модельных представлений и разработке методов, направленных прежде всего на установление качественных закономерностей процессов и на создание расчетных схем, мало чувствительных к точности исходных данных. При этом познавательная и практическая ценность результатов в значительной степени определяется четкостью постановки расчетной задачи и глубиной предварительного анализа имеющихся данных.

§2. Исходные модельные представления подземной гидромеханики жидкости и газа

Нефтегазовая подземная гидромеханика, как уже отмечалось, является специальным разделом гидромеханики. Это означает, что при определении физических величин, характеризующих процесс фильтрации, и написании законов сохранения будет использоваться гипотеза сплошности, согласно которой изучаемые объекты (например, движущийся флюид) считаются заполняющими всю область (пространство, в котором ставится и решается задача) непрерывно. Но под пористой средой понимается множество твердых частиц, тесно прилегающих друг к другу, сцементированных или несцементированных, пространство между которыми (поры, трещины) запол-

нено жидкостью и/или газом. Таким образом, фильтрационное течение пластовых флюидов представляет собой совокупность множества отдельных микродвижений в неупорядоченной системе поровых каналов (рис. 18.2). Следовательно, истинное фильтрационное течение не является «сплошным», и при определении физических характеристик вводятся эффективные (фиктивные) величины, которые «размазываются» по всему объему непрерывным образом (рис. 18.3). Реальные скорости, давления и т.д., заменяются на эффективные, которые представлены на рисунке в виде равномерной сетки из квадратов.

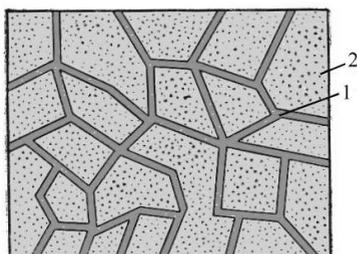


Рис 18.2. Схематическое представление пористой среды. 1 – поровые каналы, 2 – твердый скелет

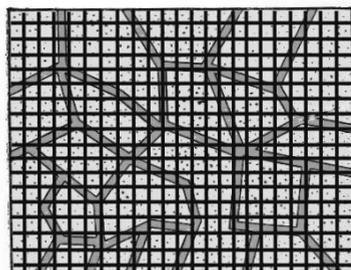


Рис. 18.3. Схематическое представление эффективного описания

Из статистической физики известно, что системы типа пористых сред могут быть описаны как сплошные среды, эффективные свойства которых выражаются не через свойства отдельных составляющих элементов, а являются усредненными характеристиками достаточно больших объемов этих сред.

Переход к макроскопическому описанию процессов в подземной гидромеханике означает, что все вводимые характеристики и параметры, используемые в постановке и решении задач, являются в общем случае функциями *точек пористой среды*. Выделение курсивом данного термина связано с тем, что далее понятия пористой среды и точек пористой среды будут употребляться в модельном смысле, то есть в смысле математической модели и характеристики математической модели, используемой для описания физического процесса (в данном случае – фильтрации).

Понятия точки в математическом и физическом смыслах представляются совершенно разными объектами. Если вырезать объем пористой среды и ввести систему координат, связанную с образцом, то каждому бесконечно малому элементу объема можно приписать упорядоченную тройку

чисел, которые и будут задавать «математическую точку» пористой среды. Однако, объем «математической точки» настолько мал, что она всегда будет полностью находиться или в поре (тогда, например, скорость флюида отлична от нуля), или в твердом скелете (тогда скорость флюида будет равна нулю). Поэтому при вычислении физических модельных характеристик в подземной гидромеханике используется «физическая точка». Под «физической точкой» подразумевается такой объем пористой среды, который является достаточно большим для того, чтобы вводимая физическая характеристика не зависела от объема образца, но достаточно малым по сравнению со всей областью, в которой вводится эта характеристика. Последнее обстоятельство – малость объема образца по сравнению со всей рассматриваемой областью – позволяет говорить о том, что рассматривается физически бесконечно малый объем – «физическая точка». Объем пористой среды, который можно принять за физическую точку, называется элементарным или представительным объемом. Все вводимые далее характеристики будут определяться на элементарных объемах и для элементарных объемов. Рассмотренная ситуация с введением физических и материальных характеристик в подземной гидромеханике представляется обычной для всех моделей механики сплошных сред. Например, газ так же, как и жидкость, состоит из отдельных молекул и атомов. Поэтому при введении в гидромеханике и газовой динамике физических характеристик также рассматриваются физические точки, но величины элементарных объемов много меньше, чем в подземной гидромеханике. В самом деле, в кубике воздуха с ребром 10^{-3} мм при нормальных условиях содержится $27 \cdot 10^6$ молекул, и элементарный объем составляет доли миллиметра. В подземной гидромеханике вместо молекул, например, в песчанике, выступают песчинки, и элементарный объем может составлять уже кубические сантиметры, а для других типов коллекторов десятки кубических сантиметров и даже метров. Однако по сравнению с объемом залежи элементарный объем все равно очень мал. Подобное введение характеристик практически всегда возможно.

§3. Фильтрационно-емкостные свойства пористых сред. Коэффициенты пористости и прорсветности. Удельная поверхность

Понятно, что фильтрация определяется свойствами флюида и пустотного пространства (типа грунта или коллектора), в котором она происходит. Поэтому перейдем к определению емкостных и фильтрационных характеристик пористой среды. Одной из важнейших характеристик пористой среды является пористость, которую в дальнейшем будем обозначать через m .

Под пористостью однородного пустотного пространства понимают отношение объема пустот V_n образца пористой среды ко всему объему образца V :

$$m = \frac{V_n}{V}. \quad (18.1)$$

Таким образом, определенная пористость постоянна для всех точек однородной пористой среды. В случае неоднородной пористой среды соотношение (18.1) определяет среднее значение пористости в образце. Значение пористости в физической точке M для неоднородной пористой среды будет определяться выражением

$$m(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V_n}{\Delta V} = \frac{dV_n}{dV}. \quad (18.2)$$

Следовательно, в общем случае пористость является скалярной функцией точки (физической точки).

В физике нефтегазового пласта различают полную и эффективную пористость. При определении эффективной пористости учитываются лишь соединенные между собой поры, которые могут быть заполнены жидкостью извне. При изучении процессов фильтрации важна именно эффективная пористость. Поэтому в дальнейшем под пористостью будем понимать активную или эффективную пористость.

Другой важной характеристикой пористой среды является просветность или поверхностная пористость, которую в дальнейшем будем обозначать через s . Под просветностью плоского сечения однородной пористой среды понимают отношение площади просветов в сечении к площади S всего сечения:

$$s(n) = \frac{S_n}{S} \quad (18.3)$$

В случае неоднородной пористой среды соотношение (18.3) определяет среднее значение просветности в сечении, а значение просветности в физической точке M будет определяться выражением:

$$s(M, n) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta S_n}{\Delta S} = \frac{dS_n}{dS}. \quad (18.4)$$

Понятно, что значения пористости и просветности могут изменяться в пределах от единицы до нуля. Крайние значения этого интервала, очевидно, являются чисто модельными.

В соотношениях (18.3) и (18.4) n – вектор нормали к плоскости сечения. Из приведенных

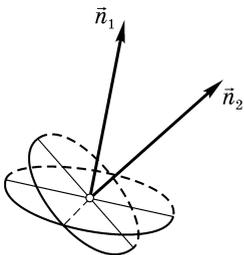


Рис. 18.4. Изменение ориентации сечения и вектора нормали

определений и соотношений следует, что просветность в точке пористой среды зависит не только от точки, но и от ориентации сечения. Следовательно, просветность, в приведенном определении, является скалярной функцией векторного аргумента. Уже одно это показывает, что пористость и просветность являются различными математическими объектами, хотя между ними, очевидно, существует связь, но обычное отождествление этих понятий является ошибочным. Понятие просветности является более сложным, чем обычно оно трактуется в ряде учебных пособий и монографий.

В самом деле, обычно после введения с помощью равенства (18.3) понятия просветности следует утверждение о том, что среднее по всем направлениям значение просветности равно пористости, но из этого верного утверждения делается неверный вывод: «поэтому в дальнейшем между двумя этими понятиями не будет делаться никаких различий». Однако данное выше определение просветности имеет более сложный физический смысл, чем тот, который обычно вкладывается в это понятие, а то обстоятельство, что среднее по всем направлениям значение просветности равно пористости, не является достаточным для отождествления этих понятий. Развитие понятия просветности и доказательство невозможности отождествления его с пористостью будет дано далее, при рассмотрении результатов опыта Дарси и определении скорости фильтрации.

Еще одной часто используемой и важной характеристикой пористой среды является удельная поверхность пор, приходящаяся на единицу объема пористой среды. Под удельной поверхностью пор Σ , рассчитанной на единицу объема пористой среды, понимают отношение площади поверхности пустотного пространства пористой среды S_n ко всему объему пористой среды V :

$$\Sigma = \frac{S_n}{V}. \quad (18.5)$$

Как следует из определения (18.5), удельная поверхность пор в отличие от пористости и просветности, которые, по определению, безразмерны, является размерной характеристикой с размерностью m^{-1} .

§4. Опыт и закон Дарси. Проницаемость. Понятие «истинной» средней скорости и скорости фильтрации

Обратимся теперь к описанию движения жидкости в пористой среде. Первые экспериментальные наблюдения за движением воды в трубах, заполненных песком, произвели А. Дарси (1856 г.) и Ж. Дюпюи (1848–1863 гг.). Этими работами было положено начало теории фильтрации. Именем Дарси назван линейный закон фильтрации, который он установил будучи мэ-

ром города и создавая первую совершенную систему водоснабжения в г. Дижоне (Франция).

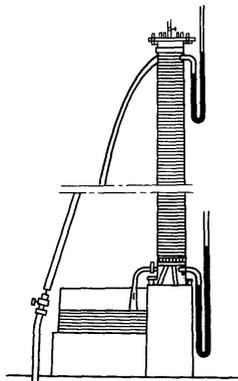


Рис. 18.5. Установка Анри Дарси для исследования течения воды через вертикальные песчаные фильтры

Анри Дарси исследовал течение воды через вертикальные песчаные фильтры (см. рис. 18.5). В результате тщательно проведенных экспериментов был установлен получивший широкую известность закон

$$Q = k_{\phi} \frac{H_1 - H_2}{L} S = k_{\phi} \frac{\Delta H}{L} S, \quad (18.6)$$

где Q – объемный расход жидкости через песчаный фильтр, длина которого L , а площадь сечения S , $\Delta H = H_1 - H_2$ – разность гидравлических напоров воды над фильтром и у его основания, k_{ϕ} – коэффициент пропорциональности. Коэффициент пропорциональности в формуле (18.6) первоначально был назван коэффициентом водопроницаемости, а затем коэффициентом фильтрации, который зависит как от природы пористой среды, так и от свойств фильтрующейся жидкости. Как уже отмечалось, скорости фильтрации очень малы (порядка 10^{-4} – 10^{-5} м/с и менее), поэтому скоростными напорами при вычислении гидравлических напоров в равенстве (18.6) пренебрегают:

$$H = \frac{\alpha v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \approx \frac{p}{\rho g} + z. \quad (18.7)$$

В равенстве (18.7) используются общепринятые в технической гидромеханике обозначения: v_{α} – средние скорости в капилляре, α_i – коэффициенты Кориолиса (в нашем случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$), p – давление, z – геометрический напор, ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения.

Коэффициент фильтрации, как следует из равенства (18.6), имеет размерность скорости и характеризует скорость потока через единицу площади сечения, перпендикулярного к потоку, под действием единичного градиента напора.

Коэффициент фильтрации k_{ϕ} используется обычно в гидротехнических расчетах, где приходится иметь дело с одной жидкостью – водой. При исследовании фильтрации газа, нефти и их смесей необходимо разделить

влияние свойств пористой среды и флюида. Поэтому для разделения свойств флюида и пористой среды равенство (18.6) представляют в ином виде

$$Q = \frac{k}{\mu} \rho g \frac{\Delta H}{L} S \quad (18.8)$$

или

$$Q = \frac{k}{\mu} \frac{p_1^* - p_2^*}{L} S, \quad (18.9)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости флюида, $p^* = \rho g H = p + \rho g z$ – приведенное давление, k – коэффициент проницаемости, который не зависит от свойств жидкости и является динамической характеристикой только пористой среды. Размерность коэффициента проницаемости определяется из формулы

$$[k] = \frac{[Q][\mu][L]}{[\Delta p^*][\Omega]} = \frac{\text{М}^3 \text{С}^{-1} \text{ПаСМ}}{\text{ПаМ}^2} = \text{М}^2$$

и равна размерности площади, то есть в системе единиц измерения СИ – метр в квадрате. Проницаемость большинства горных пород выражается весьма малыми числами. Так, проницаемость крупнозернистых песчаников составляет $10^{-12} - 10^{-13} \text{ м}^2$ ($1 - 0,1 \text{ мкм}^2$), проницаемость плотных песчаников – 10^{-14} м^2 ($0,01 \text{ мкм}^2$). В виду этого в нефтепромысловой практике получила распространение единица измерения проницаемости 1 Д (Дарси) = $1,02 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$.

Из сравнения равенств (18.6) и (18.8) следует, что коэффициент фильтрации и коэффициент проницаемости связаны между собой соотношением

$$k_\phi = \frac{\rho g}{\mu} k. \quad (18.10)$$

Коэффициент фильтрации k_ϕ или коэффициент проницаемости k определяют экспериментально на специальном приборе – пермеатре, содержащем образец исследуемого грунта (рис. 18.6). Общий расход Q фильтрационного потока поддерживается постоянным, напоры H_1 и H_2 измеряются двумя пьезометрами, соединенными с пористой средой в сечениях 1 и 2. Превышение центров сечений над плоскостью сравнения равны z_1 и z_2 , а давления – p_1 и p_2 ; расстояние между сечениями по оси цилиндра составляет L .

В соответствии с формулами (18.6) или (18.8) имеем

$$k_\phi = \frac{Q}{S(\Delta H/L)} \quad \text{или} \quad k = \frac{\mu Q}{S \rho g (\Delta H/L)},$$

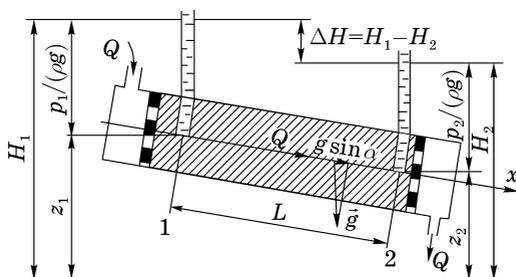


Рис. 18.6. Схема пермеаметра

где перепад напора, приходящийся на единицу длины (модуль градиента давления), можно представить в виде

$$\frac{\Delta H}{L} = \frac{z_1 - z_2}{L} + \frac{p_1 - p_2}{\rho g L} = \frac{p_1^* - p_2^*}{\rho g L}.$$

В промышленных условиях коэффициент проницаемости определяется в результате специального исследования скважин, в котором также используется устанавливаемая в опыте связь между изменением давления в скважинах и их дебитом.

Обычно соотношения (18.6) или (18.9) называют законом Дарси. Однако, эти соотношения представляют собой следствие из закона Дарси – решение одной из простейших задач одномерного течения, реализуемого в пермеатре или установке типа установки А. Дарси. Сам же закон Дарси связывает между собой вектор скорости фильтрации и градиент фильтрационного давления и будет рассмотрен далее, после введения понятия скорости фильтрации.

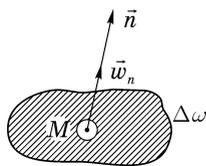


Рис. 18.7. Схема к определению скорости фильтрации

если через \vec{n} обозначить единичный вектор, перпендикулярный этой поверхности (или параллельный скорости), то будем иметь $\vec{w} = w\vec{n}$. Отличие

Разделим обе части равенства (18.9) на площадь сечения S и получим

$$w = \frac{Q}{S} = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p}{L}. \quad (18.11)$$

Выражение $w = Q/S$ имеет размерность скорости и определяет модуль вектора скорости фильтрации. При определении расхода считается, что вектор скорости фильтрации направлен перпендикулярно плоскости (галерее), через которую фильтруется флюид (рис. 18.7). Поэтому

вектора \vec{w} от обычной скорости состоит в том, что скорость фильтрации – фиктивная скорость, так как она, по своему смыслу, определена в любой точке сечения пористой среды – и в порах, и в твердом скелете, в то время как на самом деле течение происходит только по поровым каналам с некоторой «истинной средней скоростью» \mathbf{v} . Понятно, что между скоростями \mathbf{w} и \mathbf{v} существует связь, которая следует из равенства расхода, протекающего с истинной средней скоростью через площадь просветов и все сечение в целом со скоростью фильтрации

$$wS = vS_{\text{пор}} = Q.$$

Эта связь, следующая из последнего равенства, такова

$$\vec{w} = w\vec{n} = s\vec{v} = sv\vec{n}. \quad (18.12)$$

Таким образом, скорость фильтрации равна истинной средней скорости умноженной на просветность. Но заменять просветность на пористость в равенстве (18.12) нельзя.

Для доказательства сделанного утверждения используем следующие рассуждения. Соотношение (18.12) справедливо в предположении, что фильтрационные свойства пористой среды изотропны и однородны, то есть проницаемость не зависит от направления и постоянна для всех точек. Если предположить, что пористая среда однородна, но анизотропна, то можно сделать следующий эксперимент. Вырежем куб, грани которого будут перпендикулярны главным направлениям проницаемости (то есть при приложении градиента давления перпендикулярно граням куба векторы скорости фильтрации также будут перпендикулярны граням куба). Введем декартову систему координат, оси которой направлены вдоль ребер куба, и сделаем серию экспериментов, направляя фильтрацию последовательно вдоль каждой оси. В результате для каждого эксперимента получим

$$w_x = \frac{Q_x}{S} = \frac{k_x}{\mu} \frac{\Delta p}{L}, \quad w_y = \frac{Q_y}{S} = \frac{k_y}{\mu} \frac{\Delta p}{L}, \quad w_z = \frac{Q_z}{S} = \frac{k_z}{\mu} \frac{\Delta p}{L},$$

где w_x, w_y, w_z – компоненты вектора скорости фильтрации, Q_x, Q_y, Q_z и k_x, k_y, k_z – значения расходов и проницаемостей вдоль соответствующих координатных осей. Таким образом, при одинаковых перепадах давления и площади сечения образца (галереи) в общем случае необходимо вводить разные значения просветности при построении связи между скоростями фильтрации и средними истинными скоростями, то есть принять соотношения

$$w_x S = v_x S_{\text{хпор}}, \quad w_y S = v_y S_{\text{ypор}}, \quad w_z S = v_z S_{\text{zпор}}$$

или

$$w_x = s_x v_x, \quad w_y = s_y v_y, \quad w_z = s_z v_z, \quad (18.13)$$

где v_x, v_y, v_z и s_x, s_y, s_z – значения истинных средних скоростей и просветностей вдоль соответствующих координатных осей. В самом деле, связь (18.12) задает линейную зависимость между двумя векторами, которая в наиболее общем виде при записи в главных осях задается формулой

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (18.14)$$

Частный случай равенства (18.14) – $s_1 = s_2 = s_3 = s$ приводит к соотношению (18.12), а в общем случае имеем матрицу коэффициентов просветности.

Таким образом, при переходе от средних истинных скоростей к скоростям фильтрации необходимо использовать не скалярную функцию векторного аргумента, которая выше была определена как просветность, а матрицу.

Переход от экспериментального соотношения (18.9) к равенству (18.11) показывает, что в эксперименте А.Дарси была установлена линейная зависимость между двумя векторными характеристиками – вектором скорости фильтрации и вектором градиента фильтрационного давления в однородном, изотропном, недеформируемом пласте (пористой среде). Однако равенство (18.11) представлено в скалярном виде, поэтому нужно восстановить его в векторной форме записи.

В случае изотропных фильтрационных свойств векторы скорости фильтрации и градиента фильтрационного давления лежат на одной прямой. Поэтому, если умножим равенство (18.9) на орт \mathbf{n} , задающий направление фильтрации, получим

$$\bar{w} = w\bar{n} = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p^*}{L} \bar{n}. \quad (18.15)$$

В равенстве (18.15) множитель $\Delta p^*/L$ представляет собой модуль градиента давления при линейном законе распределения давления. Следовательно, дальнейшее обобщение экспериментального результата приводит к векторному уравнению вида

$$\bar{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p^*. \quad (18.16)$$

Векторное уравнение (18.16) представляет собой закон Дарси для изотропной пористой среды. Знак минус в правой части равенства появляется из-за того, что скорость фильтрации направлена в сторону уменьшения давления. Поэтому векторы скорости фильтрации и градиента фильтрационного давления направлены в противоположные стороны (напомним, градиент направлен в сторону роста давления, а скорость фильтрации, следовательно, в обратную сторону – от большего давления к меньшему).

Равенство (18.16) задает закон Дарси в универсальной безиндексной форме записи, справедливой для любой системы координат. В декартовой системе координат это равенство записывается в виде

$$w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} + w_z \mathbf{k} = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} + \rho g \mathbf{k} \right), \quad (18.17)$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты декартовой системы координат, при этом ось z направлена вертикально вверх. Последнее векторное равенство может быть спроектировано на оси координат и переписано в виде системы соотношений

$$w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad w_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad w_z = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right). \quad (18.18)$$

Однако закон Дарси имеет границы применимости, которые рассмотрим в следующем параграфе.

§5. Границы применимости закона Дарси. Анализ и интерпретация экспериментальных данных

Проверке и исследованию применимости закона Дарси посвящено значительное число работ отечественных и зарубежных специалистов. В процессе исследований было установлено, что закон Дарси имеет верхнюю и нижнюю границы применимости. Верхняя граница применимости закона Дарси определяется группой причин, связанных с проявлением инерционных сил при высоких скоростях фильтрации. Нижняя граница определяется проявлением неньютоновских реологических свойств жидкости, ее взаимодействием с твердым скелетом пористой среды при достаточных малых скоростях фильтрации.

Рассмотрим каждый из этих предельных случаев, которые приводят к появлению нелинейности в законе фильтрации.

Верхняя граница применимости закона Дарси. Наиболее полно изучены отклонения закона Дарси, вызванные проявлением инерционных сил при увеличении скорости фильтрации. Верхнюю границу применимости закона Дарси обычно связывают с некоторым критическим (предельным)

значением числа Рейнольдса Re :

$$Re = \frac{wd}{\nu},$$

где d – некоторый характерный линейный размер пористой среды, ν – кинематический коэффициент вязкости флюида ($\nu = \mu/\rho$).

Многочисленные экспериментальные исследования, в частности, опыты Дж.Фэнчлера, Дж.Льюиса и К.Бернса, Линдквиста, Г.Ф.Требина, Н.М.Жаворонкова, М.Э.Аэрова, А.И.Абдулвагабова и других были направлены на построение для пористой среды универсальной зависимости (по аналогии с трубной гидравликой) коэффициента гидравлического сопротивления λ от числа Рейнольдса. Однако вследствие различной структуры и состава пористых сред получить такую универсальную зависимость не удастся.

При обработке результатов экспериментов значительное внимание обращалось на такой выбор характерного размера поровой структуры, чтобы отклонения от закона Дарси возникали при одинаковых значениях числа Рейнольдса, а закон фильтрации в нелинейной области допускал универсальное представление.

Первая количественная оценка верхней границы применимости закона Дарси была дана более 60-ти лет назад Н.Н.Павловским, который, опираясь на результаты Ч.Слихтера, полученные для модели идеального грунта, и полагая характерный линейный размер d равным эффективному диаметру $d_{эф}$ частиц, вывел следующую формулу для числа Рейнольдса

$$Re = \frac{wd_{эф}}{(0,75m + 0,23)\nu}. \quad (18.19)$$

Используя эту формулу и данные экспериментов, Н.Н.Павловский установил, что критическое значение числа Рейнольдса находится в пределах $7,5 < Re_{кр} < 9$.

Достаточно узкий диапазон изменения значений $Re_{кр}$ объясняется тем, что в опытах использовались не слишком разнообразные образцы пористых сред.

Для удобства обработки результатов многочисленных экспериментальных данных различных авторов В.Н.Щелкачев предложил использовать безразмерный параметр, названный им параметром Дарси и определяемый равенством

$$Da = \frac{w \mu/k}{\Delta p/L} = \frac{w \mu L}{k \Delta p}. \quad (18.20)$$

Из определения (18.20) видно, что параметр Дарси представляет собой отношение силы вязкого трения к силе давления, и при выполнении закона

Дарси значение параметра Дарси должно быть равно единице –

$$Da = 1. \quad (18.21)$$

Таким образом, равенство (18.21) должно выполняться при $Re < Re_{кр}$.

Введение параметра Da упрощает исследование границы применимости линейного закона фильтрации. Действительно, если на оси абсцисс откладывать $\lg Re$, а по оси ординат – $\lg Da$, то поскольку $\lg Da = 0$, при $Re < Re_{кр}$ графиком зависимости $\lg Re$ от $\lg Da$ будет прямая линия, совпадающая с осью абсцисс до тех пор, пока $Re < Re_{кр}$. Как только на этом графике линия начнет отклоняться от оси абсцисс, сразу же обнаружится и отклонение от закона Дарси (это соответствует $Da < 1$, $\lg Da < 0$). Значение Re , при котором станет заметным отклонение упомянутой линии от оси абсцисс, и будет критическим.

Для иллюстрации сказанного на рис. 18.8 на логарифмической сетке показаны зависимости $\lg Da$ от $\lg Re$, представляющие результат обработки опытов по формулам В.Н.Щелкачева (табл. 18.1). Данные на этом графике соответствуют области нелинейной фильтрации для различных образцов пористых сред.

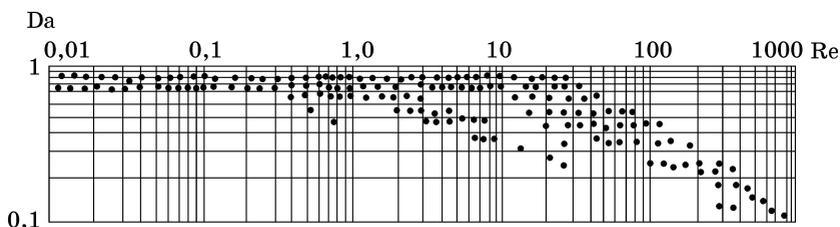


Рис. 18.8. Зависимости $\lg Da$ от $\lg Re$ на логарифмической сетке

Основываясь на этих соображениях, В.Н.Щелкачев провел критический анализ и сравнение формул, полученных разными исследователями, для определения Re в подземной гидромеханике и оценки возможных критических значений числа Рейнольдса, соответствующих верхней границе применимости закона Дарси. Результаты такого сопоставления приведены в таблице 18.1. В первых двух строках таблицы даны, соответственно, формулы для числа Рейнольдса и коэффициента гидравлического сопротивления, полученные разными авторами. В четвертой и пятой строках приведены критические значения числа Рейнольдса, полученные самими авторами, и их уточненные значения.

Таблица 18.1. Определение верхней границы применимости закона Дарси по данным различных исследований

№ п/п	Параметры	Н.Н.Павловский	Фэнчер, Льюис, Бернс	В.Н.Щелкачев	М.Д.Миллиончиков	Ф.И.Котьяков (Г.Ф.Требин)	Е.М.Минский	А.И.Абдулгабаев
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Re	$\frac{w d_{эф}}{(0,75m + 0,23)v}$	$\frac{w d_{эф}}{v}$	$\frac{10}{m^{2,3}} \frac{w \sqrt{k}}{v}$	$\frac{10}{m^{3/2}} \frac{w \sqrt{k}}{v}$	$\frac{4 \sqrt{2} w \sqrt{k}}{m^{3/2} v}$	$\frac{w \sqrt{k}}{v}$	$\frac{12(1-m)w \sqrt{k}}{m^2 v}$
2	λ	–	$\frac{d_{эф} \Delta p}{2L \rho w^2}$	$\frac{2m^{2,3} \sqrt{k} \Delta p}{L \rho w^2}$	$\frac{m^{3/2} \sqrt{k} \Delta p}{2L \rho w^2}$	$\frac{2m^{3/2} \sqrt{k} \Delta p}{L \rho w^2}$	$\frac{\sqrt{k} \Delta p}{2L \rho w^2}$	$\frac{4,6(1-m)m^2 \sqrt{k} \Delta p}{L \rho w^2}$
3	Re λ	–	$\frac{0,5}{f(m)} Da$	$\frac{20}{Da}$	$\frac{0,5}{Da}$	$\frac{8\sqrt{2}}{Da}$	$\frac{0,5}{Da}$	$\frac{55,2(1-m)^2}{Da}$
4	Re _{кр} авторов (по данным формул)	7,5–9	1–4	1–12	0,022–0,29	0,3	–	0,019–8,1
5	Re _{кр} (уточненные значения)	–	–	0,032–14	0,0015–0,60	0,0085–3,4	–	0,019–8,1

Наличие третьей строки табл. 18.1, в которой приведено произведение $Re \lambda$, объясняется следующим. В области линейного закона фильтрации ($Re < Re_{кр}$) справедливо равенство (18.21). Поэтому если произведение $Re \lambda$ зависит только от параметра Дарси (см. графы 5–8 табл. 18.1), то оно имеет постоянное значение (не зависящее от свойств пористой среды) в случае, если $Re < Re_{кр}$. И только в этом случае можно получить «универсальный» прямолинейный график в координатах $(lg Re, lg \lambda)$, соответствующий фильтрации разных флюидов через различные по свойствам пористые среды. Результаты обработки опытов подтверждают такой вывод.

На основании анализа данных, приведенных в таблице 18.1, можно сделать следующие выводы.

1. Несмотря на отмеченные недостатки результатов Н.Н.Павловского, есть основания для их сопоставления с соответствующими результатами трубной гидравлики. Важно подчеркнуть, что критические значения фильтрационного числа Рейнольдса, подсчитанные по формуле (18.19), намного меньше тех, которые в трубной гидравлике соответствуют переходу ламинарного движения в турбулентное. Это служит одним из доводов в пользу того, что причины нарушения закона Дарси при высоких скоростях фильтрации (увеличение влияния сил инерции по мере увеличения числа Рейнольдса) не следует связывать с турбулизацией течения. Отсутствие турбулентности при нарушении закона Дарси было доказано также прямыми опытами, проведенными Г.Шнобели.

Формулы Фэнчера, Льюиса и Бернса получены формальным введением в выражение для числа Рейнольдса эффективного диаметра $d_{эф}$ в качестве характерного внутреннего линейного размера пористой среды. Они не сопоставимы с результатами трубной гидравлики, дают слишком узкий диапазон изменения значений $Re_{кр}$ (см. графу 4 табл. 18.1), мало обоснованы.

2. Во все другие формулы табл. 18.1 (графы 5–8) в качестве характерного линейного размера входят величины, пропорциональные \sqrt{k} (k – коэффициент проницаемости породы), методы определения которых хорошо известны. Формулы этой группы не имеют принципиальных преимуществ и одинаково удобны для практического использования. Для этих формул характерно то, что все они приводят к очень широким диапазонам измерения $Re_{кр}$ для различных пористых сред. Это представляется вполне естественным ввиду разнообразия свойств испытанных пористых сред. Кроме того, это свидетельствует о том, что ни в одну из предложенных формул для определения Re не входит полный набор параметров, позволяющий характеризовать сложную структуру пористых сред. Использование для

этой цели коэффициентов пористости и проницаемости явно недостаточно.

Вместе с тем, широкий диапазон изменения значений $Re_{кр}$ можно разбить на сравнительно узкие интервалы, соответствующие различным группам образцов пористых сред. Это означает указание возможной верхней границы справедливости закона Дарси при движении флюида в какой-либо пористой среде.

Результаты такого разбиения для формулы В.Н.Щелкачева (см. табл. 18.1, первая строка, пятая графа) приведены в табл. 18.2.

Таблица 18.2. Интервалы критических значений Re для образцов пористых сред.

№ п/п	Образец пористой среды	Диапазон критических значений
1	Однородная дробь	13–14
2	Однородный крупнозернистый песок	3–10
3	Неоднородный мелкозернистый песок с преобладанием фракций диаметром менее 0,1 мм	0,34–0,23
4	Сцементированный песчаник	0,05–1,4

§6. Нелинейные законы фильтрации

Как было показано в предыдущем параграфе, основное уравнение теории фильтрации, закон Дарси, имеет верхнюю и нижнюю границы применимости, поэтому необходимо его обобщение. Первое обобщение закона Дарси при $Re \geq Re_{кр}$ было предложено Дюпюи, который сформулировал двухчленный закон, получивший имя австрийского ученого Ф.Форхгеймера, независимо предложившего этот закон несколько позднее. Двухчленный закон, разрешенный относительно градиента давления, в векторной форме записывается в виде

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{k} \bar{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |w| \bar{w}, \quad (18.22)$$

где $|w|$ – модуль вектора скорости фильтрации, β – константа пористой среды, определяемая экспериментально, ρ – плотность флюида. Для одномерного течения, когда модуль градиента давления не изменяется вдоль потока (см. §4, формула (18.15)), уравнение можно спроектировать на координатную ось и записать в скалярном виде

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\mu}{k} |w| + \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |w|^2. \quad (18.23)$$

Из последнего равенства становится понятно, почему обычно соотношение (18.23) трактуется как разложение в ряд Тейлора закона фильтрации по степеням вектора скорости фильтрации.

Необходимо отметить, что представление нелинейного закона фильтрации в виде (18.22) является неединственным. В учебниках и монографиях приводится и иное представление коэффициента при квадратичном члене. Например, вместо константы β и проницаемости фигурирует введенный Е.М.Минским коэффициент макрошероховатости l

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{k} \bar{w} - \frac{\rho}{l} |w| \bar{w}$$

или иной коэффициент проницаемости (коэффициент проницаемости весовой жидкости)

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{k_\mu} \bar{w} - \frac{\rho}{k_\rho} |w| \bar{w},$$

где k_μ – коэффициент проницаемости для вязкой жидкости, k_ρ – коэффициент проницаемости весовой жидкости.

Перечисленные представления нелинейных законов фильтрации лишь один из вариантов обобщения закона Дарси при больших скоростях фильтрации. Другой распространенный вариант нелинейного закона фильтрации, разрешенного относительно скорости фильтрации, имеет вид

$$\bar{w} = c |\text{grad } p|^{\frac{1-n}{n}} \text{grad } p, \quad (18.24)$$

где $|\text{grad } p|$ – модуль вектора градиента фильтрационного давления, c , n – материальные константы пористой среды, определяемые в результате обработки экспериментальных данных. Обычно константа n лежит в пределах от единицы до двух. При $n = 2$ формула (18.24) называется формулой Краснопольского, предположившего, что зависимость между градиентом давления и скоростью фильтрации при отклонении от закона Дарси квадратичная. В самом деле, для одномерного течения уравнение (18.24) можно спроектировать на координатную ось и записать в скалярном виде

$$|w| = c |\text{grad } p|^{\frac{1}{n}},$$

откуда при $n = 2$ получается

$$|w|^2 = c |\text{grad } p|.$$

Соотношение (18.22) представляется более универсальным, чем (18.24), и обычно считается, что его можно использовать при любых скоростях фильтрации. При малых скоростях фильтрации второе слагаемое имеет второй порядок малости (по скорости фильтрации), и им можно пренебречь. В то время как степенной закон фильтрации (18.24), очевидно, можно

использовать только при нарушении закона Дарси (то есть при $\text{Re} \geq \text{Re}_{\text{кр}}$).

Введение в представление множителя при второй степени скорости фильтрации в формуле (18.22) в качестве множителя ρ следует как из теории размерности, так и по физическому смыслу, вкладываемому в причину отклонения закона фильтрации от линейности (плотность ρ – мера инерции, удельная масса).

Для изотропных пористых сред несложно получить общий вид нелинейного закона фильтрации. Умножим векторное уравнение (18.16) скалярно вначале на орт, направленный вдоль скорости фильтрации. В результате получим равенство

$$|w| = \frac{k}{\mu} |\text{grad } p|.$$

Далее, разрешая последнее равенство относительно k , будем иметь

$$k = \frac{\mu |w|}{|\text{grad } p|}. \quad (18.25)$$

В эксперименте находится зависимость $|w| = Q/S = F(|\text{grad } p|)$. Поэтому, выбрав класс функций, в которых определяется аппроксимация $F(|\text{grad } p|)$, можно получить выражение того или иного нелинейного закона фильтрации.

Аналогичные выкладки и рассуждения можно проделать и при определении закона фильтрации, разрешенного относительно градиента фильтрационного давления. Выражение, аналогичное (18.25), для коэффициента фильтрационного сопротивления имеет вид

$$r = \frac{|\text{grad } p|}{\mu |w|}.$$

В этом случае полученная экспериментальная зависимость обрабатывается уже как

$$|\text{grad } p| = \Psi(|w|).$$

Обратимся теперь к отмеченному выше отклонению от закона Дарси, экспериментально наблюдаемому при малых скоростях фильтрации (так как скорости фильтрации очень малы, то это отклонения вблизи нуля). Отклонения при малых скоростях фильтрации имеют другую физическую природу и обуславливаются, как уже отмечалось, неньютоновскими свойствами жидкости и действием значительных поверхностных сил (сил взаимодействия между флюидом и твердым скелетом). При очень малых скоростях фильтрации неньютоновскими свойствами в пористой среде могут

обладать даже ньютоновские жидкости. Но с ростом скорости этот эффект в ньютоновских жидкостях быстро исчезает.

В нефтегазовом деле к жидкостям, проявляющим неньютоновские свойства, относятся так называемые аномальные нефти и буровые растворы.

Классическим примером выражения закона фильтрации для неньютоновской жидкости является закон фильтрации с предельным (начальным) градиентом. Этот закон фильтрации выписывается для вязкопластичной жидкости Бингама–Шведова и имеет вид

$$w_i = -\frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{\gamma}{|\text{grad } p|} \right) \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \text{при } |\text{grad } p| \geq \gamma, \quad (18.26)$$

$$w_i = 0 \quad \text{при } |\text{grad } p| < \gamma.$$

Как следует из соотношений (18.26), фильтрационное течение возможно лишь при градиентах давления, превышающих некоторое значение γ , которое называется начальным (предельным) градиентом. При меньших значениях градиента давления фильтрационное течение отсутствует. Величина начального градиента зависит от начального напряжения сдвига жидкости τ_0 и эффективного диаметра капилляра $d_{\text{эф}}$. На рисунке 18.9 приведены графики зависимости скорости фильтрации от градиента фильтрационного давления, соответствующие линейным и нелинейным законам фильтрации.

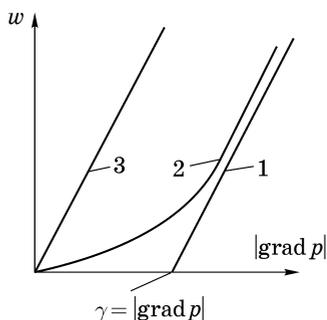


Рис. 18.9. Графики зависимости w от $|\text{grad } p|$:

- 1 — для вязкопластической жидкости с предельным градиентом;
- 2 — для реальных неньютоновских нефтей;
- 3 — для закона Дарси.

§7. Структурные модели пористых сред

Как уже отмечалось выше, реальные коллекторы углеводородного сырья имеют сложное строение пустотного пространства, которое образуется поровыми каналами с резко изменяющимися диаметрами и направлениями, состоят из частиц различной формы и размеров и т.д. Поэтому построение аналитических решений, учитывающих все перечисленные особенности реальных пористых сред, практически, невозможно. В связи с этим в подземной гидромеханике часто пользуются упрощенными идеа-

лизированными моделями пористой среды. К таким моделям относятся идеальные (капиллярные) и фиктивные (корпускулярные) грунты (среды). В корпускулярных моделях пористая среда моделируется шарами, а в капиллярных – капиллярными трубками.

Простейшая корпускулярная модель, в которой пористая среда моделируется упаковкой шаров постоянного диаметра, называется фиктивным грунтом (или фиктивной пористой средой). Простейшая капиллярная модель, в которой пористая среда моделируется капиллярными трубками постоянного диаметра, уложенными с постоянным периодом, называется идеальным грунтом (или идеальной пористой средой). Наиболее популяр-

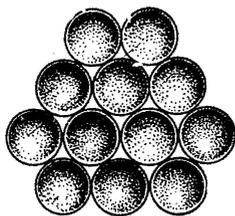


Рис. 18.10. Слой шаров, плотнейшим образом прилегающих друг к другу

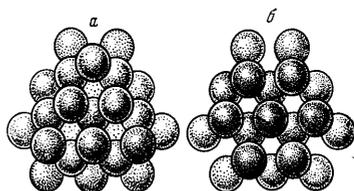


Рис. 18.11. Проекция двух основных плотнейших упаковок шаров: а – кубическая, б – гексагональная

ные модели фиктивного грунта соответствуют наиболее плотным упаковкам шаров. Две основные упаковки – кубическая и гексагональная получают следующим образом: первый плоский слой уложен так, что каждый шар касается шести соседних, каждый шар второго слоя помещается в углубление между тремя шарами первого слоя (рис. 18.10, 18.11). При наложении третьего слоя возможны два варианта.

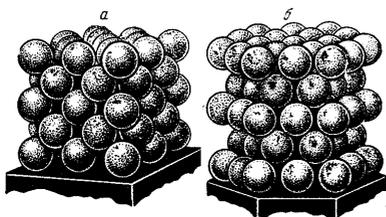


Рис. 18.12. Плотнейшие упаковки шаров по кубической (а) и гексагональной (б) схемам

В первом варианте (кубическая упаковка) каждый шар третьего слоя лежит на трех шарах второго слоя таким образом, что под шаром третьего слоя нет шара первого слоя (рис. 18.12). Во втором варианте (гексагональная упаковка) каждый шар третьего слоя лежит на трех шарах второго, но под каждым шаром третьего слоя оказывается шар первого слоя. Кроме указанной

наиболее плотной упаковки с кубической симметрией рассматривают и такую упаковку, когда в первом слое каждый шар касается только четырех шаров, а все последующие слои повторяют первый. Назовем последнюю кубическую упаковку шаров рыхлой кубической упаковкой.

Для капиллярных моделей идеального грунта наиболее простые модели получаются при взаимно перпендикулярном расположении капилляров.

Введение в рассмотрение идеальных и фиктивных грунтов и получаемое в результате упрощение структуры порового пространства позволяют находить аналитические формулы, связывающие между собой фильтрационно-емкостные характеристики таких упрощенных пористых сред, и далее обобщать полученные соотношения на реальные пористые среды. Рассмотрим в начале основные соотношения для фиктивного грунта.

Для фиктивного грунта достаточно просто получается соотношение, связывающее удельную поверхность с пористостью упаковки m и диаметром шаров D . Возьмем объем, в котором имеется n шаров. Тогда весь объем можно представить как сумму объема пустот и шаров –

$$V_{\text{пор}} + \frac{\pi D^3}{6} n = V.$$

Отсюда для m получаем

$$m = 1 - \frac{\pi D^3 n}{6V}. \tag{18.27}$$

Удельная поверхность, очевидно, равна площади поверхности одного шара умноженной на число шаров в упаковке

$$\Sigma = \frac{\pi D^2 n}{V}. \tag{18.28}$$

Из соотношений (18.27) и (18.28) следует, что

$$\Sigma = \frac{6(1 - m)}{D}. \tag{18.29}$$

Более детальное исследование модели фиктивного грунта было предпринято С.Слихтером, который схематизировал наиболее плотные упаковки шаров, введя элементарную ячейку упаковок шаров (рис. 18.13) и нашел следующие аналитические формулы для пористости и просветности:

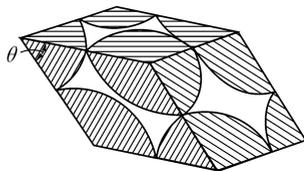


Рис 18.13. Элементарная ячейка упаковки шаров

$$m = 1 - \frac{\pi}{6(1 - \cos \theta)\sqrt{1 + 2 \cos \theta}} \tag{18.30}$$

и

$$s = 1 - \frac{\pi}{4 \sin \theta}, \quad (18.31)$$

где θ – острый угол боковой грани элементарной ячейки ромбоэдра в укладке шаров. Значение этого угла, по С.Слихтеру, изменяется в пределах от 60^0 до 90^0 , и, следовательно, пористость и просветность изменяются в пределах $0,259 \leq m \leq 0,476$ и $0,0931 \leq s \leq 0,2146$. Как следует из соотношений (18.30) и (18.31), ни пористость, ни просветность не зависят от диаметра шаров и определяются только углом θ . Поэтому, исключив из соотношений угол, можно найти связь между пористостью и просветностью. К сожалению, система этих уравнений относительно θ является трансцендентной и не решается в явном виде, поэтому связь между пористостью и просветностью задается с помощью приближенных формул

$$s = 0,61m^{1,4} \quad \text{или} \quad s = 0,56m - 0,052, \quad (18.32)$$

которые на указанном выше диапазоне пористости укладок шаров дает погрешность менее 2%.

Дальнейшее развитие изучение фиктивного грунта получило в работах И.Козени и П.Кармана, которые предложили для вычисления проницаемости пористых сред формулу

$$k = \frac{m^3}{c\Sigma^2}, \quad (18.33)$$

где c – число Кармана. В результате многочисленных экспериментальных исследований было установлено, что для упаковок шаров число Кармана приблизительно равно 5.

Подстановка в равенство (18.33) формулы (18.29) приводит к следующему выражению для проницаемости фиктивного грунта

$$k = \frac{m^3 D^2}{36c(1-m)^2}. \quad (18.34)$$

Для идеального грунта структура порового пространства допускает аналитическое определение основных фильтрационно-емкостных характеристик. Для представления идеального грунта использовались разные схемы элементарных ячеек – одномерные (рис. 18.14) и трехмерные (рис. 18.15).

Вычислим значения пористости, просветности, удельной поверхности и проницаемости для идеального грунта, образованного тремя системами взаимно перпендикулярных капилляров с диаметрами $d_\alpha = 2r_\alpha$ и периодами укладки a_α , $\alpha = 1, 2, 3$.

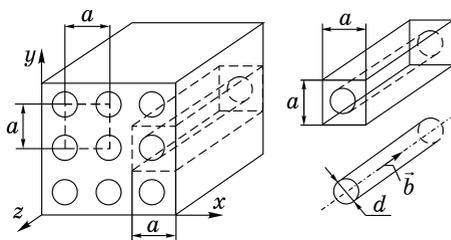


Рис. 18.14. Схема укладки и элементарная ячейка одномерной модели идеального грунта

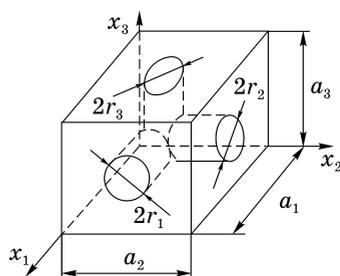


Рис. 18.15. Элементарная ячейка трехмерной модели идеального грунта

Все вычисления можно проделать на элементарной ячейке, образованной тремя взаимно перпендикулярными периодами укладки (рис. 18.15). Введем декартову систему координат, оси которой параллельны осям симметрии капилляров, которые, в свою очередь, параллельны периодам укладки. Значение индекса в обозначении диаметров и периодов соответствует номеру оси координат, которой параллельны капилляр и период. Тогда для пористости, просветности, удельной поверхности и проницаемости, соответственно, получим следующие значения:

$$m = \frac{\pi d_i^2 a_i}{4 a_1 a_2 a_3}, \quad s_\alpha = \frac{\pi d_\alpha^2}{4 a_\beta a_\gamma}, \quad \Sigma = \frac{\pi d_i a_i}{a_1 a_2 a_3}, \quad k_\alpha = \frac{\pi d_\alpha^4}{128 a_\beta a_\gamma} = \frac{d_\alpha^2}{32} s_\alpha. \quad (18.35)$$

В формулах (18.35) под повторяющимся латинским индексом i подразумевается суммирование, греческие индексы α, β, γ образуют циклическую перестановку из чисел 1,2,3. Вычисления пористости, просветности и удельной поверхности являются чисто геометрическими и поэтому опускаются. Единственное замечание – при вычислении пористости и удельной поверхности считалось, что объем «узла» (пересечения капилляров) мал, поэтому им можно пренебречь.

Для вычисления проницаемости рассмотрим движение жидкости в капилляре и воспользуемся известными гидравлическими соотношениями – уравнением Бернулли для потока вязкой жидкости и формулой Дарси–Вейсбаха для определения потерь напора

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_{1-2}, \quad h_\tau = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Здесь использованы обозначения: h_{1-2} – потеря напора между сечениями 1 и 2, h_r – потеря напора по длине, λ – коэффициент гидравлического сопротивления, l – длина капилляра между сечениями 1 и 2.

Так как при фильтрации скорости очень малы, то пренебрежем скоростными напорами, для вычисления коэффициента гидравлического сопротивления примем формулу для ламинарного режима течения в круглой трубе

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64\mu}{vd\rho}.$$

Для упрощения выкладок положим, что капилляры расположены горизонтально, то есть $z_1 = z_2$. Далее можно принять, что потери напора определяются только потерями на трение по длине, поэтому $h_{1-2} = h_r$, и после несложных преобразований получим

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{64\mu}{vd\rho} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Разрешая формулу относительно средней скорости жидкости в капилляре (истинной средней скорости движения флюида), будем иметь

$$v = \frac{d^2}{32\mu} \frac{\Delta p}{l}.$$

Для того, чтобы перейти к скорости фильтрации w , воспользуемся определением (18.12) – подсчитаем расход, соответствующий скорости v , а затем «размажем» его по всей площади сечения образца. Умножив v на площадь сечения капилляра $\pi d^2/4$, получим объемный расход Q , разделив который на площадь элементарной ячейки a^2 , получим уравнение движения фильтрующейся жидкости

$$w = \frac{d^2}{32} \frac{\pi d^2}{4a^2} \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{l}, \quad (18.36)$$

которое, как легко видеть, по форме совпадает с законом Дарси (18.15).

Структура численного коэффициента в правой части (18.36) сохранена для того, чтобы подчеркнуть физический смысл входящих в него множителей. Из закона Дарси в форме (18.15) видно, что результирующий коэффициент $\pi d^4/128a^2$ представляет собой проницаемость «одномерного» идеального грунта. При этом первый множитель $d^2/32$ задает «проводимость» капилляров, и его вид определяется формой поперечного сечения каналов. Если вместо цилиндрических трубок кругового сечения, которые использовались в приведенном примере, взять плоские щели или капилля-

ры эллиптического сечения, то, очевидно, пропорциональность этого множителя квадрату характерного размера сечения сохранится, но будет содержать иной численный коэффициент. Второй множитель – $\pi d^2/4a^2$ задает просветность, которая выступает в качестве масштаба осреднения.

Следовательно, проницаемость является комплексной характеристикой пористой среды, учитывающей как форму и размеры сечения поровых каналов, так и их концентрацию в среде. Часто в расчетные формулы для определения проницаемости включают коэффициент извилистости α , который равен отношению длины проводящего порового канала или «истинного» пути флюида в образце (траектории меченой частицы) к длине образца (например, керна). В различных модификациях модели одномерного идеального грунта $\alpha=1-3$.

При получении соотношения (18.36) рассуждения проводились для одномерной модели идеального грунта. Очевидно, что они сохранятся и при рассмотрении трехмерной модели с той лишь разницей, что необходимо проставить индексы, для того чтобы указать, какому капилляру соответствует выписанная формула поэтому, равенство (18.36) примет вид

$$w_\alpha = \frac{d_\alpha^2}{32} \frac{\pi d_\alpha^2}{4a_\beta a_\gamma} \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{l}, \quad (18.37)$$

где индексы α, β, γ образуют циклическую перестановку.

Из равенства (18.37) получаем выражение для коэффициента проницаемости в трехмерной модели идеальной пористой среды

$$k = \frac{\pi d_\alpha^4}{128 a_\beta a_\gamma}. \quad (18.38)$$

Из соотношений (18.35) следует, что $m = s_1 + s_2 + s_3$, а равенство просветности и пористости выполняется лишь при $s_2 = s_3 = 0$. Таким образом, равенство $m = s$ выполняется только для одномерной модели идеального грунта.

При решении прикладных задач часто возникает необходимость определить характерный линейный размер, который трактуется как эффективный диаметр пор, или диаметр капилляров в модели идеального грунта. В общем виде из (18.38) имеем следующее равенство для определения диаметра капилляра

$$d_\alpha = \sqrt{\frac{32k}{s_\alpha}}. \quad (18.39)$$

Обычно в формуле (18.39), из-за отождествления просветности и пористости, используется пористость

$$d_\alpha = \sqrt{\frac{32k}{m}}. \quad (18.40)$$

Однако, как было показано, равенство (18.40) справедливо только для одномерной модели, в которой $m = s$. В трехмерной модели идеального грунта равенство (18.40) не выполняется. Для перехода от просветности к пористости можно ввести структурный коэффициент $\varphi_\alpha = m/s_\alpha$. Тогда формула (18.39) примет вид

$$d_\alpha = \sqrt{\frac{32\varphi_\alpha k}{m}}. \quad (18.41)$$

Если в трехмерной модели идеального грунта положить, что выполняются равенства $d_1 = d_2 = d_3 = d$ и $s_1 = s_2 = s_3 = s$, то будет $m = 3s$ и, следовательно, $\varphi = 3$, и формула для диаметра капилляра примет вид:

$$d = \sqrt{\frac{96k}{m}}. \quad (18.42)$$

В общем случае значение φ ограничено только снизу – $\varphi \geq 1$, и значение структурного коэффициента может изменять значения эффективного диаметра капилляра в широком диапазоне.

В заключение отметим, что выше были рассмотрены лишь простейшие структурные модели пористых сред, модели, для которых наиболее просто вычислить фильтрационно-емкостные характеристики с помощью геометрических и гидравлических соотношений, не привлекая стохастических и иных методов. В настоящее время для моделирования пористых сред используются разнообразные статистические структурные модели с хаотично уложенными сферами, со случайными решетками и со сложной геометрией капиллярных каналов.

§8. Закон Дарси для анизотропных сред

Рассмотрим особенности фильтрационных течений в средах, обладающих сложной геометрией порового пространства и анизотропией фильтрационных свойств.

В зависимости от структурных особенностей и геометрии порового пространства различают однородные и неоднородные, изотропные и анизотропные среды. Анизотропия свойств (в том числе и фильтрационных) означает неодинаковость физических или геометрических свойств по различным направлениям (термин происходит от двух греческих слов: *anisos* –

неравный и тропос – свойства). В реальных коллекторах нефти и газа анизотропия может быть обусловлена трещиноватостью, слоистостью, наличием различного вида включений в коллекторах, которые приводят к неодинаковости свойств по различным направлениям. Например, в слоистых пористых средах фильтрационные свойства в плоскости слоев отличаются от фильтрационных свойств в направлении, перпендикулярном слоям, в трещиновато-пористых средах фильтрационные потоки по трещинам значительно превосходят потоки в других направлениях и т.п.

Для описания фильтрационных течений в анизотропных коллекторах углеводородного сырья постулируется обобщенный закон Дарси, справедливость которого подтверждена как многочисленными экспериментальными, так и теоретическими исследованиями. Обобщение закона Дарси на случай анизотропных сред производится с математической точки зрения формально. Так как закон Дарси постулирует линейную зависимость между двумя векторными полями – вектора скорости фильтрации и вектора градиента фильтрационного давления, то соотношения (18.16) – (18.18) задают наиболее простую зависимость, когда оба вектора лежат на одной прямой и отличаются друг от друга направлением и длиной. Такая зависимость определяет и задает изотропные фильтрационные свойства. В общем случае линейная зависимость между двумя векторными полями определяется таким образом, что каждая компонента одного вектора зависит от всех компонент другого. Поэтому в самом общем случае линейная зависимость вектора скорости фильтрации и градиента фильтрационного давления (самый общий случай закона Дарси для анизотропных сред) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{1}{\mu} \left(k_{11} \frac{\partial p^*}{\partial x_1} + k_{12} \frac{\partial p^*}{\partial x_2} + k_{13} \frac{\partial p^*}{\partial x_3} \right), \\ w_2 &= -\frac{1}{\mu} \left(k_{12} \frac{\partial p^*}{\partial x_1} + k_{22} \frac{\partial p^*}{\partial x_2} + k_{23} \frac{\partial p^*}{\partial x_3} \right), \\ w_3 &= -\frac{1}{\mu} \left(k_{13} \frac{\partial p^*}{\partial x_1} + k_{21} \frac{\partial p^*}{\partial x_2} + k_{33} \frac{\partial p^*}{\partial x_3} \right), \end{aligned} \quad (18.43)$$

где w_i – компоненты вектора скорости фильтрации, $\partial p^*/\partial x_i$ – компоненты вектора градиента приведенного давления, k_{ij} ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$) – компоненты симметричной матрицы (тензора), которая называется матрицей (тензором) коэффициентов проницаемости. Она определяет и задает фильтрационные свойства пористой среды, которые могут быть как изотропными, так и анизотропными, с разными типами анизотропии. Явный вид матрицы коэффициентов проницаемости зависит от типа анизотропии

и системы координат, в которой записан обобщенный закон Дарси. Всегда можно выбрать хотя бы одну систему координат $Ox_1x_2x_3$, в которой запись обобщенного закона Дарси имеет наиболее простой вид

$$w_1 = -\frac{k_1}{\mu_1} \frac{\partial p^*}{\partial x_1}, \quad w_2 = -\frac{k_2}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x_2}, \quad w_3 = -\frac{k_3}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x_3}. \quad (18.44)$$

Соотношение (18.43) может быть записано и в матричном виде

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial p^* / \partial x_1 \\ \partial p^* / \partial x_2 \\ \partial p^* / \partial x_3 \end{pmatrix}. \quad (18.45)$$

Если принять соглашение о суммировании, согласно которому по повторяющемуся в записи индексу подразумевается суммирование, то соотношение (18.43) можно записать более компактно

$$w_i = -\frac{1}{\mu} k_{ij} \frac{\partial p^*}{\partial x_j}, \quad (18.46)$$

где i и j принимают значения 1, 2, 3.

Система координат, в которой матрица коэффициентов проницаемости имеет диагональный вид и обобщенный закон Дарси записывается в виде (18.44), называется главной системой координат, а значения диагональных коэффициентов проницаемости k_i – главными значениями тензора проницаемости. В главной системе координат компоненты матрицы обозначаются одним индексом, если система координат не главная – двумя. Первый индекс соответствует номеру строки, второй – столбца.

В соотношении (18.46) выписано самое общее представление закона Дарси для анизотропных пористых сред. Уменьшая число отличных от нуля компонент матрицы коэффициентов проницаемости, можно получить все возможные типы анизотропии и изотропию. В самом деле, если положить, что все недиагональные элементы матрицы равны нулю, а все диагональные равны друг другу, то получим случай изотропных свойств. Все остальные варианты будут задавать разные типы анизотропии. Прежде чем их классифицировать, определим свойство проницаемости в самом общем виде.

Проницаемостью пористой среды, по определению, (или направленной проницаемостью) называется величина $k(\vec{n})$, которая определяется по формуле

$$k(\vec{n}) = -\frac{\mu w_i n_i}{|\text{grad} p|}, \quad (18.47)$$

где n_i – единичный вектор, задающий направление в пористой среде, вдоль которого определяется направленная проницаемость, $w_i n_i = (\vec{w} \cdot \mathbf{n})$ – скалярное произведение вектора скорости фильтрации и единичного вектора, $|\text{grad } p|$ – модуль градиента фильтрационного давления. Как следует из определения, в общем случае проницаемость может зависеть от направления.

Определение (18.47) имеет прозрачный физический смысл – проницаемость, по определению, является скалярной величиной, которая вычисляется вдоль некоторого направления. Поэтому для того, чтобы ее вычислить, необходимо найти отношение скалярных величин специальным образом определенных вдоль направления.

В равенстве (18.47) в качестве направления, вдоль которого определяется свойство, рассматривается направление приложения градиента давления ($\text{grad } p = |\text{grad } p| \vec{n}$), а скалярные величины определяются проектированием на это направление векторов скорости фильтрации и градиента фильтрационного давления. При проектировании на это направление векторов \vec{w} и $\text{grad } p$ получаем – $w_i n_i$ и $|\text{grad } p|$, а их отношение, умноженное на вязкость и взятое с обратным знаком, равно проницаемости. Знак минус берется потому, что скалярное произведение $w_i n_i$ отрицательно (угол между векторами \vec{w} и n_i тупой). Иллюстрация определения направленной проницаемости приведена на рис. 18.16.

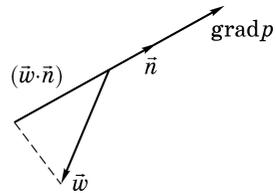


Рис. 18.16

Подставляя запись обобщенного на случай анизотропных сред закона Дарси (18.46) в равенство (18.47), получим

$$k(\vec{n}) = -\frac{\mu}{|\text{grad } p|} \left(-\frac{k_{ij} n_i n_j}{\mu} |\text{grad } p| \right) = k_{ij} n_i n_j. \quad (18.48)$$

Соотношение (18.48) дает общее правило вычисления проницаемости, которое справедливо как для изотропных, так и для анизотропных пористых сред. В самом деле, для изотропных пористых сред, по определению (18.47) и правилу (18.48) вычисления проницаемости в линейном законе фильтрации, имеем

$$k(\vec{n}) = k n_i n_i = k.$$

Следовательно, проницаемость для изотропных сред не зависит от направления (она для всех направлений одинакова и равна k).

Равенство (18.48) расшифровывает и смысл утверждения, согласно которому матрица коэффициентов проницаемости k_{ij} определяет и задает

фильтрационные свойства пористой среды. В самом деле, матрицы определяют тип свойств – изотропные или анизотропные, а численные значения ее элементов – величины, характеризующие их.

Как было показано, изотропные фильтрационные свойства задаются матрицей вида

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad (18.49)$$

следовательно, все возможные другие типы матриц задают анизотропные фильтрационные свойства. С помощью методов линейной алгебры можно показать, что все возможные варианты «анизотропных» матриц имеют вид

$$k_{ij} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, \quad k_{ij} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, \quad k_{ij} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{12} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, \quad k_{ij} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix}. \quad (18.50)$$

Первый тип матриц (18.50) задает фильтрационные свойства, например, слоистых (как правило, осадочных) пористых сред, у которых проницаемость в поверхностях напластований одинакова (плоскость с изотропными фильтрационными свойствами) и отличается от проницаемости в направлении, перпендикулярном к поверхностям напластований. Так как матрица имеет диагональный вид, то главные направления тензора коэффициентов проницаемости у данного типа пористых сред известны априори – одно главное направление перпендикулярно слоистости, два других – лежат в плоскости слоистости. В представлении матрицы коэффициентов проницаемости (18.50) направление, перпендикулярное напластованию, соответствует координатной оси Ox_3 .

Второй тип анизотропии задает пористую или трещиноватую среду, у которой априори, как и в первом случае, известны направления всех главных осей матрицы k_{ij} , но проницаемости по всем главным направлениям различны. Подобной анизотропией могут обладать трещиноватые коллекторы с тремя взаимно перпендикулярными системами трещин, или уже упомянутые осадочные породы, образованные частицами вытянутой формы.

Первые два типа анизотропии имеют специальные названия – первый тип называется трансверсально-изотропным, второй – ортотропным.

В оставшихся двух типах анизотропии априори неизвестно положение главных осей. В третьем типе неизвестно положение двух главных осей, в последнем случае неизвестно положение всех трех главных осей. По-видимому, реальные пористые и трещиноватые среды, как правило, к этим

типам и относятся, но при решении задач обычно рассматриваются два первых. Специальных названий два последних типа не имеют. Подстановка матриц (18.50) в равенство (18.45) или (18.46) дает явный вид закона Дарси для всех типов анизотропии.

Равенства (18.43) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений, которая может быть разрешена относительно компонент вектора $\text{grad } p$ и переписана в виде

$$\frac{\partial p^*}{\partial x_i} = -\mu r_{ij} w_j.$$

В этом случае фильтрационные свойства определяет и задает симметричная матрица коэффициентов фильтрационного сопротивления r_{ij} . Явный вид матриц r_{ij} , для всех рассмотренных случаев анизотропии и изотропии, такой же, как и у матриц коэффициентов проницаемости, с точностью до замены k_α , $k_{\alpha\beta}$ на соответствующие компоненты r_α , $r_{\alpha\beta}$.

Все соотношения (18.49) и (18.50), представленные в виде матриц, допускают и другую, индексную форму записи. Для индексного представления законов фильтрации в анизотропных пористых средах введем понятие диадного произведения двух векторов (см. приложение П.68)

$$\bar{a}\bar{b} \equiv a_i b_j \equiv \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}, \quad (18.51)$$

где a_i, b_i – компоненты векторов \bar{a} и \bar{b} .

Далее в качестве векторов \bar{a} и \bar{b} возьмем векторы декартова базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, координаты которых обозначим через $e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, e_i^{(3)}$, соответственно. Нетрудно убедиться, что с помощью базисных тензоров можно составить девять диад, которые будут представлять собой девять специальных матриц типа (2.9), у которых все компоненты, кроме одной будут равны нулю, единственная отличная от нуля компонента будет стоять на « ij -й позиции» при умножении i -го базисного вектора на j -й базисный вектор. В самом деле, рассмотрим для примера диадное произведение \mathbf{e}_1 на \mathbf{e}_2 . Тогда имеем $e_i^{(1)} = (1, 0, 0)$, $e_j^{(2)} = (0, 1, 0)$, и, согласно определению (18.51), матрица для этой диады будет представляться соотношением

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = e_i^{(1)} e_j^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя диадные произведения базисных векторов, матричное представление можно переписать в индексной форме, разложив матрицы по базису из диад $e_i^{(k)}e_j^{(l)}$. Например, для самого общего типа анизотропии такое представление будет иметь вид

$$w_i = -\frac{1}{\mu} \left[k_{11}e_i^{(1)}e_j^{(1)} + k_{12}(e_i^{(1)}e_j^{(2)} + e_i^{(2)}e_j^{(1)}) + k_{22}e_i^{(2)}e_j^{(2)} + k_{33}e_i^{(3)}e_j^{(3)} + \right. \\ \left. + k_{13}(e_i^{(1)}e_j^{(3)} + e_i^{(3)}e_j^{(1)}) + k_{23}(e_i^{(2)}e_j^{(3)} + e_i^{(3)}e_j^{(2)}) \right] \frac{\partial p^*}{\partial x_j}. \quad (18.52)$$

Уменьшая число отличных от нуля коэффициентов тензора k_{ij} , можно получить закон фильтрации для любого типа анизотропных и изотропных пористых сред. Например, для ортотропных сред закон фильтрации будет иметь вид

$$w_i = -\frac{1}{\mu} \left[k_1 e_i^{(1)} e_j^{(1)} + k_2 e_i^{(2)} e_j^{(2)} + k_3 e_i^{(3)} e_j^{(3)} \right] \frac{\partial p^*}{\partial x_j}, \quad (18.53)$$

для трансверсально-изотропных –

$$w_i = -\frac{1}{\mu} \left[k_1 e_i^{(1)} e_j^{(1)} + k_1 e_i^{(2)} e_j^{(2)} + k_3 e_i^{(3)} e_j^{(3)} \right] \frac{\partial p^*}{\partial x_j}, \quad (18.54)$$

для изотропных –

$$w_i = -\frac{k}{\mu} \left[e_i^{(1)} e_j^{(1)} + e_i^{(2)} e_j^{(2)} + e_i^{(3)} e_j^{(3)} \right] \frac{\partial p^*}{\partial x_j}. \quad (18.55)$$

Последнее выражение можно преобразовать, заметив, что в квадратных скобках стоят три матрицы, которые в сумме дают единичную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для обозначения единичной матрицы используется специальный символ δ_{ij} , который называется дельтой Кронекера. Поэтому последнее равенство (18.55) можно переписать в виде

$$w_i = -\frac{k}{\mu} \delta_{ij} \frac{\partial p^*}{\partial x_j}$$

или, после проведения суммирования –

$$w_i = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p^*}{\partial x_i}.$$

Используя правило вычисления направленной проницаемости (18.48), несложно вычислить ее для самого общего случая (18.50):

$$\begin{aligned}
 k_{ij}n_i n_j = & \left[k_{11}e_i^{(1)}e_j^{(1)} + k_{12}\left(e_i^{(1)}e_j^{(2)} + e_i^{(2)}e_j^{(1)}\right) + k_{22}e_i^{(2)}e_j^{(2)} + k_{33}e_i^{(3)}e_j^{(3)} + \right. \\
 & \left. + k_{13}\left(e_i^{(1)}e_j^{(3)} + e_i^{(3)}e_j^{(1)}\right) + k_{23}\left(e_i^{(2)}e_j^{(3)} + e_i^{(3)}e_j^{(2)}\right) \right] n_i n_j = \\
 & + k_{11} \cos^2 \alpha + 2k_{12} \cos \alpha \cos \beta + k_{22} \cos^2 \beta + k_{33} \cos^2 \gamma + \\
 & + 2k_{13} \cos \alpha \cos \gamma + 2k_{23} \cos \beta \cos \gamma,
 \end{aligned}$$

где α, β, γ – углы, которые образует единичный вектор \mathbf{n} с координатными линиями.

Уменьшая число отличных от нуля коэффициентов тензора k_{ij} , можно поучить выражение для направленной проницаемости для любого типа анизотропных и изотропных пористых сред.

Глава XIX

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

§1. Вводные замечания. Понятие о математической модели физического процесса

Для количественного описания реальных физических процессов используются различные уравнения и методы их решения для конкретных задач. Как отмечалось выше, в качестве наиболее используемого и разработанного метода такого описания процессов в подземной гидромеханике применяется макроскопический, в основе которого лежат гипотеза сплошности, законы и методы механики сплошной среды. Поэтому нефтегазовую подземную гидромеханику следует рассматривать как специальный раздел механики сплошной среды.

Повторим основные положения, используемые в механике сплошной среды при построении математических моделей, но с учетом специфики нефтегазовой подземной гидромеханики.

В сплошной среде определяются различные по своей физической природе поля, которые формируются под воздействием внешних и внутренних факторов и могут изменяться во времени и в пространстве. Изменение полей основных физических величин подчиняется законам сохранения, которые представляют собой фундаментальные законы природы. В нефтегазовой подземной гидромеханике, как и в других разделах механики сплошной среды, основными законами сохранения являются законы сохранения массы, изменения количества движения (импульса) и момента количества движения (момента импульса), сохранения энергии и баланса энтропии. Однако законы сохранения выполняются для всех сплошных сред, свойства которых могут быть весьма различными. Поэтому одним из законов сохранения для описания физических процессов и решения конкретных задач недостаточно для получения замкнутой системы уравнений. Для того чтобы задать свойства конкретных сплошных сред, к законам сохранения добавляются определяющие уравнения и законы, которые задают особенности поведения данной среды. В результате объединения законов сохранения и определяющих уравнений получается замкнутая система уравнений, в ко-

торой число уравнений равно числу неизвестных функций и которая определяет и задает математическую модель сплошной среды, описывающую конкретные физические процессы.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только таких процессов, для которых температура движущегося в пористой среде флюида равна температуре пористой среды и остается неизменной. Действительно, из-за того, что фильтрация представляет собой очень медленный процесс, изменение температуры флюида, возникающее в ходе движения вследствие наличия сопротивления стенок поровых каналов и трещин, а также из-за расширения флюида при уменьшении давления, успевает компенсироваться теплообменом с окружающими горными породами. Для таких изотермических процессов, как было показано Б.Б.Лапуком, уравнение энергии можно не рассматривать.

Однако в ряде случаев при разработке нефтяных и газовых месторождений неизотермичность фильтрации проявляется локально в призабойной зоне скважин вследствие значительных перепадов давления. Изучение неизотермических процессов имеет важное значение в связи с повышением нефтеотдачи путем закачки в пласт теплоносителей (горячей воды, пара), разработки газогидратных месторождений и в некоторых других случаях. При этом в модель должно быть добавлено уравнение закона сохранения энергии.

Для описания конкретных физических процессов и получения решений соответствующих задач, необходимо сформулировать постановку задачи, то есть задать условия в начальный момент времени и условия на границах области пласта. В результате имеем дифференциальные уравнения с начальными и граничными условиями, интегрируя которые можно определить распределение давления и скоростей фильтрации по пласту в любой момент времени, т.е. построить функции

$$\begin{aligned} p &= p(x, y, z, t), & w_x &= w_x(x, y, z, t), \\ w_y &= w_y(x, y, z, t), & w_z &= w_z(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Если рассматривается несжимаемая жидкость ($\rho = \text{const}$) в недеформируемом пласте ($m = \text{const}$, $k = \text{const}$), то число искомых функций ограничивается только этими четырьмя. Для описания фильтрации сжимаемого флюида в сжимаемой пористой среде, кроме упомянутых функций, нужно определить еще плотность флюида ρ . Для более сложных процессов в число неизвестных функций включают вязкость μ , пористость m и проницаемость k . В этом случае необходимо иметь восемь уравнений – дифференциальных и конечных – для определения восьми характеристик фильтрационного потока, жидкости и пористой среды.

Аналитическое решение системы дифференциальных уравнений удастся получить лишь в ограниченном числе простейших случаев, например, в задаче о притоке упругой жидкости к скважине в пласте бесконечной протяженности с постоянным дебитом.

В более сложных случаях система уравнений решается численными методами с применением компьютеров. Существуют хорошо разработанные численные методы решения самых разнообразных и очень сложных задач подземной гидромеханики. Упомянутые аналитические решения играют очень важную роль: на них опробуются численные методы.

Систему дифференциальных уравнений можно использовать также для качественного исследования процесса. Если полученные уравнения привести к безразмерному виду, то в качестве коэффициентов будут фигурировать безразмерные параметры подобия. Анализируя их строение и численные значения, можно судить о том, какие силы играют решающую роль в процессе, какие члены в уравнениях можно отбросить и т.д.

Перейдем теперь к формулировке основных законов сохранения с учетом специфики подземной гидромеханики.

§ 2. Закон сохранения массы в пористой среде

При написании закона сохранения массы в интегральной формулировке воспользуемся контрольным объемом и вычислим массу флюида в контрольном объеме пористой среды.

Масса жидкости, содержащаяся в бесконечно малом (физическом) объеме пористой среды равна $m\rho dV$. В самом деле, объем пор в элементарном объеме пористой среды, равен $dV_{\text{п}} = mdV$. Умножив его на плотность, получим массу флюида в элементарном объеме пористой среды –

$$dM = \rho dV_{\text{п}} = \rho mdV.$$

Проинтегрировав выписанное соотношение по всему контрольному объему, получим массу флюида в контрольном объеме

$$M = \int_V m\rho dV.$$

Так как через контрольную поверхность флюид может втекать и вытекать (см. рис. 19.1), то масса флюида изменяется во времени. Изменение массы по времени вычисляется следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial t} M = \frac{\partial}{\partial t} \int_V m\rho dV.$$

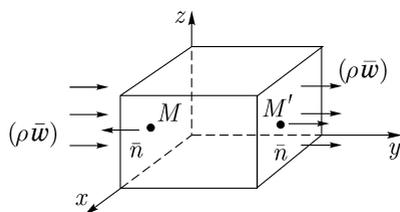


Рис. 19.1. К выводу закона сохранения массы

Изменение массы равно притоку массы через контрольную поверхность, который равен

$$\oint_{S_{\Pi}} \rho v_i n_i dS_{\Pi} = \oint_S \rho w_i n_i dS,$$

где n_i – внешняя нормаль к контрольной поверхности.

Действительно, поток массы через элементарную площадку dS , по определению, равен

$$\rho \bar{w} \bar{n} dS \text{ или } \rho w_i n_i dS,$$

то есть, равен скалярному произведению вектора массовой скорости и вектора нормали к площадке, умноженному на величину площадки. Для вычисления потока массы через всю поверхность нужно проинтегрировать эти элементарные потоки по всей поверхности.

Следовательно, можно составить балансовое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V m \rho dV = - \oint_S \rho w_i n_i dS, \quad (19.1)$$

которое читается следующим образом: изменение массы в контрольном объеме равно притоку флюида через контрольную поверхность. Появление знака «минус» в правой части уравнения обусловлено ориентацией вектора нормали к контрольной поверхности. Так как нормаль внешняя к контрольной поверхности, то «втеканию» флюида в контрольный объем должно соответствовать увеличение массы, положительное значение производной по времени в левой части равенства (19.1) и отрицательное значение скалярного произведения $w_i n_i$ под интегралом в правой части этого равенства. Для уравнивания знаков необходимо поставить минус. Аналогичное рассуждение справедливо для «вытекания» флюида.

Уравнение (19.1) представляет собой интегральную формулировку закона сохранения массы флюида в пористой среде. Нетрудно увидеть, что по сравнению с интегральной формулировкой закона сохранения массы, полученной во второй главе, интегральное уравнение для пористой среды

содержит вместо плотности ρ величину $m\rho$, представляющую собой фиктивную плотность флюида – плотность, размазанную по всему объему пористой среды.

При установившемся движении производная по времени равна нулю, и из равенства (19.1) следует

$$\oint_S \rho w_i n_i dS = 0.$$

Поэтому если в качестве контрольного объема взять трубку тока для скорости фильтрации, то получим

$$\int_{S_1} \rho_1 w_{1n} ds = \int_{S_2} \rho_2 w_{2n} ds, \quad (19.2)$$

где S_α ($\alpha = 1, 2$) – площади двух сечений трубки тока (на «входе» и на «выходе»). При выводе равенства (19.2) было использовано, что скалярное произведение вектора скорости фильтрации и вектора нормали равно $w_i n_i = w_n$, где w_n – проекция вектора скорости на нормаль, и что в одном случае она положительна (например, в сечении с индексом 2), а в другом – отрицательна. Для несжимаемой жидкости $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, поэтому

$$\int_{S_1} w_{1n} ds = \int_{S_2} w_{2n} ds.$$

Если скорости в обоих сечениях по всему сечению постоянны, то получаем равенство

$$w_{1n} S_1 = w_{2n} S_2.$$

Выписанные соотношения по своему физическому смыслу и по форме записи аналогичны формулам, полученным ранее в первой части этой книги.

От интегральной формулировки закона сохранения массы можно перейти к дифференциальной. Для этого сначала в силу фиксированности контрольного объема в пространстве внесем оператор $\partial/\partial t$ под знак интеграла, а затем с помощью теоремы Гаусса–Остроградского преобразуем поверхностный интеграл в объемный. В результате преобразований получим

$$\int_V \left(\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{w} \right) dV = 0. \quad (19.3)$$

Из условия, что равенство (19.3) выполняется для любого объема V , следует, что выражение под знаком интеграла равно нулю, то есть

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{w} = 0. \quad (19.4)$$

Уравнение (19.4) выражает закон сохранения массы в пористой среде в дифференциальной форме или *уравнение неразрывности при фильтрации флюида в пористой среде*.

Если пористость m постоянна, то ее можно вынести за знак производной и переписать уравнение неразрывности в виде

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{w} = 0.$$

Для несжимаемого флюида $\rho = \text{const}$, поэтому уравнение неразрывности принимает еще более простой вид

$$\operatorname{div} \bar{w} = 0.$$

При выводе как интегрального, так и дифференциального законов сохранения массы считалось, что в объеме пористой среды нет ни источников, ни стоков флюида, не происходит химических реакций, фазовых переходов и так далее. Если же это не так, то в правую часть уравнения (19.4) необходимо добавить функцию q , которая будет задавать массу флюида, поступающего (уходящего) в единицу времени в единицу объема, то есть оно приобретет вид

$$\frac{\partial m \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{w} = q.$$

При этом q будет положительной величиной, если флюид поступает в объем, и отрицательной, если флюид уходит из объема.

§3. Дифференциальное уравнение движения флюида

Другой универсальный закон сохранения механики – закон изменения количества движения (импульса). В механике сплошной среды этот закон, записанный в дифференциальной форме, имеет вид уравнения движения сплошной среды в напряжениях. Дальнейшая его трансформация определяется реологическими (или определяющими) уравнениями среды. В нашем случае в качестве определяющих уравнений выступает закон вязкого трения Ньютона, приводящий к уравнениям Навье-Стокса. Но так как в подземной гидромеханике изучается движение осредненное по всему объему пористой среды, то уравнения необходимо осреднить. В результате осреднения получается обсуждавшийся выше закон Дарси. Однако применяемые при подобном выводе закона Дарси математические методы выходят за рамки курса подземной гидромеханики. В первой главе был рассмотрен вывод, основанный на гидравлических соотношениях. Здесь рассмотрим еще один вывод, который был сделан Н.Е.Жуковским.

В основу рассуждений Н.Е.Жуковский положил уравнение движения идеальной жидкости Эйлера. Для упрощения рассуждений рассмотрим случай одномерного течения, когда уравнение движения имеет вид

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f,$$

где f – проекция плотности объемных (массовых) сил на направление движения, v – истинная средняя скорость движения.

При течении жидкости в пористой среде возникает сила трения на границе раздела «среда–жидкость». Поскольку поверхность поровых каналов достаточно велика и при переходе от истинной средней скорости фильтрации к скорости фильтрации сила трения «размазывается» по всей области, то силу трения можно считать объемной силой. Поэтому плотность объемных сил можно представить в виде

$$f = f_1 + f_2,$$

где f_1 – проекция плотности объемной силы тяжести, $f_1 = g \sin \alpha = (z_1 - z_2)g/l$, если ось потока наклонена к горизонтали под углом α (см. рис. 18.6), f_2 – проекция объемной силы вязкого трения, обусловленной течением в пористой среде.

Далее, считая, что среда изотропна и просветность постоянна, перейдем от истинной средней скорости к скорости фильтрации

$$\frac{\rho}{s} \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \frac{w}{s^2} \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho (f_1 + f_2).$$

Положим, что изменения скорости во времени малы и пренебрежем членом $\partial w/\partial t$. Второе слагаемое в левой части, представляющее инерционный член, при малых скоростях фильтрации тоже оказывается пренебрежимо малым. Тогда получается

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho(f_1 + f_2). \quad (19.5)$$

Считая, что сила вязкого трения пропорциональна скорости фильтрации w в первой степени, то есть принимая $f_2 = \rho\lambda w$, получаем из (19.5) соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\lambda w + \rho \frac{z_1 - z_2}{l} g.$$

Теперь достаточно положить $\lambda = -\mu/\rho k$, тогда получится закон Дарси.

§4. Замыкающие уравнения. Математические модели изотермической фильтрации

Выпишем полученные законы сохранения:
для изотропной пористой среды –

$$\begin{aligned} \frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\bar{w} &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} (\operatorname{grad} p + \rho\bar{f}); \end{aligned} \quad (19.6)$$

для анизотропной пористой среды –

$$\begin{aligned} \frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\bar{w} &= 0, \\ w_i &= -\frac{k_{ij}}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho f_j \right). \end{aligned} \quad (19.7)$$

Полученные четыре скалярных уравнения (три уравнения задаются законом Дарси, одно выражает закон сохранения массы) содержат шесть неизвестных скалярных функций – три компоненты вектора скорости, плотность, давление и пористость (в общем случае в число неизвестных функций еще можно добавить проницаемость и вязкость). Поэтому ясно, что системы (19.6) и (19.7) незамкнуты. Более того, понятно, почему только одних законов сохранения недостаточно для получения замкнутой системы уравнений. Законы сохранения справедливы при фильтрации вязкой жидкости во всех пористых средах, а сами пористые среды и вязкие жидкости могут обладать различными свойствами – жидкость может быть сжимаемой и несжимаемой, пористая среда – деформируемой и недеформируемой и так далее. Следовательно, для задания свойств конкретной пористой среды и жидкости необходимо иметь еще уравнения, определяющие эти дополнительные свойства (поэтому уравнения и называются определяющими).

В рассматриваемых изотермических фильтрационных течениях определяющие уравнения обычно имеют вид зависимости плотности, пористости (проницаемости, вязкости) от давления, например, $\rho = \rho(p)$ и так далее. В этом случае наиболее общий вид замкнутой системы уравнений (математической модели) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\bar{w} &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} (\operatorname{grad} p + \rho\bar{f}), \\ \rho &= \rho(p), \quad m = m(p), \quad k = k(p), \quad \mu = \mu(p). \end{aligned} \quad (19.8)$$

Вид функций от давления в (19.8) подразумевается заданным. Ниже рассмотрим некоторые варианты задания этих функций и соответствующие математические модели.

§5. Модель фильтрации несжимаемой вязкой жидкости по закону Дарси в недеформируемом пласте

Наиболее простая модель изотермической фильтрации получается, когда жидкость считается несжимаемой, вязкость – постоянной, а пласт – недеформируемым. В этом случае определяющие уравнения задаются равенствами:

$$\rho = \text{const}, m = \text{const}, k = \text{const}, \mu = \text{const}, \quad (19.9)$$

и замкнутая система уравнений для фильтрации в изотропном пласте приобретает вид

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{w} &= 0, \\ \vec{w} &= -\frac{k}{\mu} (\text{grad } p + \rho \vec{f}). \end{aligned} \quad (19.10)$$

Система уравнений (19.10) содержит четыре уравнения и четыре неизвестных функции – три компоненты вектора скорости и давление. Плотность перестает быть искомой функцией, так как она не изменяется и задается, если необходимо, при постановке задачи, так же как и вектор массовых сил.

Система (19.10) может быть преобразована. Для упрощения рассуждений пренебрежем массовыми силами и подставим закон Дарси в уравнение неразрывности. В результате получим

$$\text{div} \left(-\frac{k}{\mu} \text{grad } p \right) = -\frac{k}{\mu} \text{div grad } p = -\frac{k}{\mu} \Delta p = 0, \quad \text{или} \quad \Delta p = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа.

Следовательно, систему (19.10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0, \\ \vec{w} &= -\frac{k}{\mu} \text{grad } p. \end{aligned} \quad (19.11)$$

Замкнутые системы уравнений (19.10) и (19.11) представляют собой математическую модель теории фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в недеформируемой изотропной пористой среде.

Системы уравнений для математической модели теории фильтрации вязкой несжимаемой жидкости в недеформируемой анизотропной пористой среде выглядят аналогично и получаются заменой в системах (19.10)

и (19.11) закона Дарси для изотропных сред на закон Дарси для анизотропных пористых сред (18.46).

Уравнения в системах (19.10) и (19.11) записаны в универсальной безиндексной форме, справедливой для любой системы координат. Проектируя эти уравнения, например, на декартову систему координат, будем иметь, соответственно, для уравнений (19.10) –

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} &= 0, \\ w_1 &= -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho f_1 \right), \\ w_2 &= -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho f_2 \right), \\ w_3 &= -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho f_3 \right), \end{aligned} \quad (19.12)$$

и для уравнений системы (19.11) –

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} &= 0, \\ w_1 &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \\ w_2 &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2}, \\ w_3 &= -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (19.13)$$

Для сжимаемого флюида математическая модель включает еще уравнение состояния. Рассмотрим, к каким особенностям приводит данное обстоятельство.

§6. Модель фильтрации газа по закону Дарси. Функция Л.С.Лейбензона

Как было сказано, при учете сжимаемости жидкости (газа) в процессе фильтрации в недеформируемом пласте необходимо задать в явном виде уравнение состояния (определяющее уравнение), связывающее между собой плотность и давление. Уравнения состояния могут быть различными, однако построение модели и все необходимые при этом математические преобразования можно проделать в общем виде.

Математическая модель фильтрации сжимаемой жидкости (газа) в недеформируемой изотропной пористой среде без учета силы тяжести в общем виде определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{w} &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p, \\ \rho &= \rho(p). \end{aligned} \quad (19.14)$$

Систему (19.14) можно преобразовать к виду, более удобному для решения задач, когда система приводится к одному уравнению относительно одной неизвестной функции. Для вывода такого уравнения подставим закон Дарси в уравнение неразрывности и получим

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left(-\rho \frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p \right) = m \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} p) = 0.$$

Дальнейшее преобразование связано с введением функции P , позволяющей провести линеаризацию выражения под оператором дивергенции:

$$\operatorname{grad} P = \rho \operatorname{grad} p. \quad (19.15)$$

Функция P называется функцией Лейбензона. Из (19.15) с учетом того, что $\rho = \rho(p)$, интегрированием получаем

$$P = \int \rho(p) dp. \quad (19.16)$$

Равенство (19.16) позволяет определить явный вид функции Лейбензона при заданном уравнении состояния $\rho = \rho(p)$, а подстановка уравнения состояния в полученное выше уравнение

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \operatorname{div}(\operatorname{grad} P) = 0$$

позволяет получить уравнение относительно лишь одной функции – давления p . Проведенные преобразования в более общем виде далее будут использованы при рассмотрении теории упругого режима.

После введения функции Лейбензона систему (19.14) уравнений можно переписать в виде

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{k}{\mu} \Delta P &= 0, \\ \rho \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} P, \\ \rho &= \rho(p), \\ P &= \int \rho dp. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Замкнутые системы уравнений (19.14) и (19.17) определяют математическую модель теории фильтрации вязкой сжимаемой жидкости (газа) в недеформируемой изотропной пористой среде.

Математические модели (19.14) и (19.17), очевидно, эквивалентны и описывают неустановившееся фильтрационное течение. Для установившегося процесса системы упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \rho \bar{w} &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p, \\ \rho &= \rho(p) \end{aligned} \quad (19.18)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta P &= 0, \\ \rho \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} P, \\ \rho &= \rho(p), \\ P &= \int \rho dp, \end{aligned} \quad (19.19)$$

соответственно.

Таким образом, при установившейся фильтрации первое уравнение системы (19.19) представляется уравнением Лапласа для функции Лейбензона, интегрируя которое можно найти эту функцию и, далее, определить распределение скоростей и давлений в пласте. Первое уравнение системы (19.17) содержит две неизвестных функции – плотность и функцию Лейбензона, но при задании уравнения состояния (предпоследнего соотношения в системе), его тоже можно представить в виде дифференциального уравнения только для функции Лейбензона.

Для математической модели (19.8) пласт считается деформируемым, так как пористость и проницаемость полагаются функциями давления. При этом изменение давления в пласте столь существенно, что и вязкость тоже полагается функцией давления. Поэтому подстановка закона Дарси в уравнение неразрывности приводит к обобщенной функции Лейбензона. В самом деле, при такой подстановке получаем

$$\frac{\partial m(p)\rho}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\frac{k(p)}{\mu(p)} \rho(p) \operatorname{grad} p \right) = 0.$$

Поэтому функцию Лейбензона, определенную равенством (18.16), можно обобщить, полагая

$$\operatorname{grad} P = \frac{k(p)}{\mu(p)} \rho(p) \operatorname{grad} p.$$

Разрешив последнее равенство относительно обобщенной функции Лейбнера, получим формулу для вычисления P

$$P = \int \frac{k(p)}{\mu(p)} \rho(p) dp. \quad (19.20)$$

Система уравнений (19.8) после проведенных преобразований приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial m \rho}{\partial t} - \Delta P &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p, \\ \rho &= \rho(p), \quad m = m(p), \quad k = k(p), \quad \mu = \mu(p), \\ P &= \int \frac{k(p)}{\mu(p)} \rho(p) dp. \end{aligned} \quad (19.21)$$

Конкретная реализация модели (19.21) будет рассмотрена в XXI главе при выводе основного уравнения теории упругого режима.

§7. Модели однофазной фильтрации в недеформируемом пласте при нелинейных законах фильтрации

Как уже отмечалось, закон Дарси имеет верхний и нижний пределы применимости. Построенные в предыдущих пунктах математические модели справедливы лишь для фильтрационных потоков при выполнении закона Дарси. Поэтому при нарушении линейного закона фильтрации эти модели уже неприменимы, и их необходимо обобщить на случай нелинейных законов фильтрации. Как было показано, закон фильтрации получается из закона об изменении количества движения. Общий принцип построения математической модели остается прежним – математическая модель представляет собой замкнутую систему уравнений, выражающих законы сохранения, к которым добавляются определяющие уравнения. И в нелинейном случае закон Дарси необходимо заменить на нелинейный закон фильтрации.

При нелинейной фильтрации несжимаемой жидкости (без учета силы тяжести) по закону Форхгеймера система уравнений (19.10) заменяется на

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{w} &= 0, \\ \operatorname{grad} p &= -\frac{\mu}{k} \bar{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\bar{w}| \bar{w}, \end{aligned}$$

а при фильтрации по степенному закону – на

$$\operatorname{div} \bar{w} = 0,$$

$$\bar{w} = c |\operatorname{grad} p|^{\frac{1-n}{n}} \operatorname{grad} p.$$

Аналогично переписывается и математическая модель при установившейся фильтрации газа:

$$\operatorname{div} \rho \bar{w} = 0,$$

$$\operatorname{grad} p = -\frac{\mu}{k} \bar{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |w| \bar{w},$$

$$\rho = \rho(p)$$

и

$$\operatorname{div} \rho \bar{w} = 0,$$

$$\bar{w} = c |\operatorname{grad} p|^{\frac{1-n}{n}} \operatorname{grad} p,$$

$$\rho = \rho(p).$$

Анализ этих систем и их интегрирование будут рассмотрены в следующей главе.

§8. Зависимость параметров флюидов и пористой среды от давления

Понятно, для возможности использования построенных моделей теории однофазной фильтрации при решении конкретных задач необходимо в явном виде задать зависимости $\rho = \rho(p)$, $m = m(p)$, $k = k(p)$, $\mu = \mu(p)$. Поэтому выпишем основные зависимости параметров флюидов и пористой среды от давления.

В неустановившихся процессах часто большое количество нефти можно отобрать за счет расширения ее объема при снижении давления. В этих процессах необходим учет сжимаемости жидкости. При движении газа необходимо учитывать зависимость плотности газа от давления. Поэтому в качестве основных уравнений состояния рассматривают *уравнения состояния упругой жидкости, совершенного и реального газов*.

В дальнейшем будем считать, что давление является функцией только плотности. Процессы, в которых $p = f(\rho)$, называются, как уже ранее отмечалось, баротропными. Примерами баротропных процессов могут служить изотермические фильтрационные течения.

По определению, коэффициент объемного сжатия жидкости $\beta_{\text{ж}}$ равен отношению относительного изменения объема жидкости $dV_{\text{ж}}/V_{\text{ж}}$ к изменению давления dp

$$\beta_{\text{ж}} = -\frac{1}{V_{\text{ж}}} \frac{dV_{\text{ж}}}{dp}. \quad (19.22)$$

Знак минус поставлен для того, чтобы коэффициент объемного сжатия жидкости был положительной величиной. В самом деле, при увеличении давления ($dp > 0$) объем жидкости уменьшается ($dV_{\text{ж}} < 0$) и наоборот, то есть дифференциалы в числителе и знаменателе равенства (19.22) имеют разные знаки. Коэффициент объемного сжатия жидкости обычно считается универсальной постоянной, то есть считается, что он не зависит ни от температуры, ни от давления, но для разных жидкостей он принимает разные значения.

По данным В.Н.Щелкачева, для нефти отечественных месторождений $\beta_{\text{ж}}$ изменяется в диапазоне от $7 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ до $30 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, а для пластовых вод диапазон изменения лежит в пределах от $2,7 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ до $5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$.

Соотношение (19.22) в неявном виде задает связь между давлением и плотностью в упругой жидкости (то есть уравнение состояния). Чтобы получить уравнение состояния из равенства (19.22) в явном виде, перейдем от объемов к плотности жидкости. Для однородной жидкости масса жидкости и объем связаны соотношением $M = \rho V_{\text{ж}}$, поэтому при $M = \text{const}$

$$dV_{\text{ж}} = d \frac{M}{\rho} = -\frac{M}{\rho^2} d\rho,$$

Следовательно, подставляя выписанные выражения в (19.22), получаем

$$\beta_{\text{ж}} = \frac{\rho}{M} \frac{M}{\rho^2} \frac{d\rho}{dp} = \frac{d\rho}{\rho dp},$$

откуда

$$\frac{d\rho}{\rho} = \beta_{\text{ж}} dp.$$

Проинтегрируем последнее соотношение от заданных значений ρ_0 , p_0 до переменных ρ , p , то есть запишем

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \beta_{\text{ж}} \int_{p_0}^p dp,$$

в результате получим

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \beta_{\text{ж}} (p - p_0).$$

Из этого соотношения найдем

$$\rho = \rho_0 e^{\beta_{\text{ж}}(p-p_0)}. \quad (19.23)$$

Показатель степени $\beta_{\text{ж}}(p-p_0)$ обычно мал, и экспоненту можно разложить в ряд. Ограничиваясь только линейным членом разложения, будем иметь

$$e^{\beta_{\text{ж}}(p-p_0)} \approx 1 + \beta_{\text{ж}}(p-p_0),$$

Используя проведенные преобразования, получим уравнение состояния упругой слабосжимаемой жидкости при небольших перепадах давления

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_{\text{ж}}(p-p_0)]. \quad (19.24)$$

Для больших значений $\beta_{\text{ж}}(p-p_0)$ необходимо использовать уравнение состояния (19.23). Наряду с коэффициентом объемного сжатия часто используют обратную величину, $K_{\text{ж}} = 1/\beta_{\text{ж}}$, которая называется модулем упругости жидкости.

Для природных газов в качестве уравнения состояния часто используют уравнение состояния совершенного газа (уравнение состояния Менделеева–Клапейрона)

$$p = \rho RT, \quad (19.25)$$

где R – газовая постоянная, T – абсолютная температура. Уравнение состояния (19.25) для изотермических процессов принимает вид

$$\frac{p}{\rho} = RT = \text{const}.$$

Обычно константу в уравнении состояния определяют заданием плотности газа и давления при атмосферных условиях, принимая при этом, что температура T равна температуре в пласте $T_{\text{пл}}$ –

$$\frac{p_{\text{ат}}}{\rho_{\text{ат}}} = \text{const},$$

где $\rho_{\text{ат}}$ – плотность газа при атмосферном давлении $p_{\text{ат}}$. Следовательно, уравнение состояния совершенного газа, которым мы будем пользоваться в дальнейшем, запишется в виде

$$\rho = \frac{\rho_{\text{ат}}}{p_{\text{ат}}} p. \quad (19.26)$$

Для газовых месторождений с большими пластовыми давлениями (порядка 40–60 МПа) используется уравнение состояния, которое называется уравнением состояния реального газа и имеет вид

$$p = z\rho RT, \quad (19.27)$$

где z – коэффициент сверхсжимаемости газа, равный отношению плотности совершенного газа к плотности реального при заданных P и T . Коэффициент сверхсжимаемости учитывает отклонения состояния реального газа от предписываемого уравнением состояния для совершенного газа. Коэффициент z зависит от приведенных значений давления p_r и температуры T_r

$$p_r = \frac{P}{P_{\text{ср.кр.}}}, \quad T_r = \frac{T}{T_{\text{ср.кр.}}} \quad (19.28)$$

и может быть определен как аналитически, так и графически с помощью графиков, представленных на рис. 19.2. В равенствах (19.28) $P_{\text{ср.кр.}}$ и $T_{\text{ср.кр.}}$ – среднекритические давление и температура. Как известно, природный газ состоит из различных компонентов (метан, этан, пропан и др.), и среднекритические давление и температура определяются по формулам

$$P_{\text{ср.кр.}} = \frac{\sum n_j P_{\text{кр.}j}}{\sum n_j}, \quad T_{\text{ср.кр.}} = \frac{\sum n_j T_{\text{кр.}j}}{\sum n_j},$$

где n_j – содержание j -го компонента в газе, в объемных процентах; $P_{\text{кр.}j}$ и $T_{\text{кр.}j}$ – критические давление и температура j -го компонента, соответственно.

Для изотермических фильтрационных течений величина RT постоянна и для уравнения состояния реального газа может быть определена при атмосферных условиях

$$\frac{P_{\text{ат}}}{\rho_{\text{ат}}} = z(p_{\text{ат}})RT.$$

Уравнение состояния реального газа в этом случае примет вид

$$\rho = \frac{\rho_{\text{ат}} z(p_{\text{ат}}) P}{p_{\text{ат}} z(p)}. \quad (19.29)$$

Используя приведенные уравнения состояния (19.23), (19.24), (19.26) и (19.29), нетрудно вычислить функцию Лейбензона для каждого случая.

Для упругой жидкости с уравнением состояния (19.23) функция Лейбензона имеет вид

$$\begin{aligned} P &= \int \rho_0 e^{\beta_{\text{ж}}(p-p_0)} dp = \frac{\rho_0}{\beta_{\text{ж}}} \int e^{\beta_{\text{ж}}(p-p_0)} d\beta_{\text{ж}}(p-p_0) = \\ &= \frac{\rho_0}{\beta_{\text{ж}}} e^{\beta_{\text{ж}}(p-p_0)} + C = \frac{\rho}{\beta_{\text{ж}}} + C. \end{aligned} \quad (19.30)$$

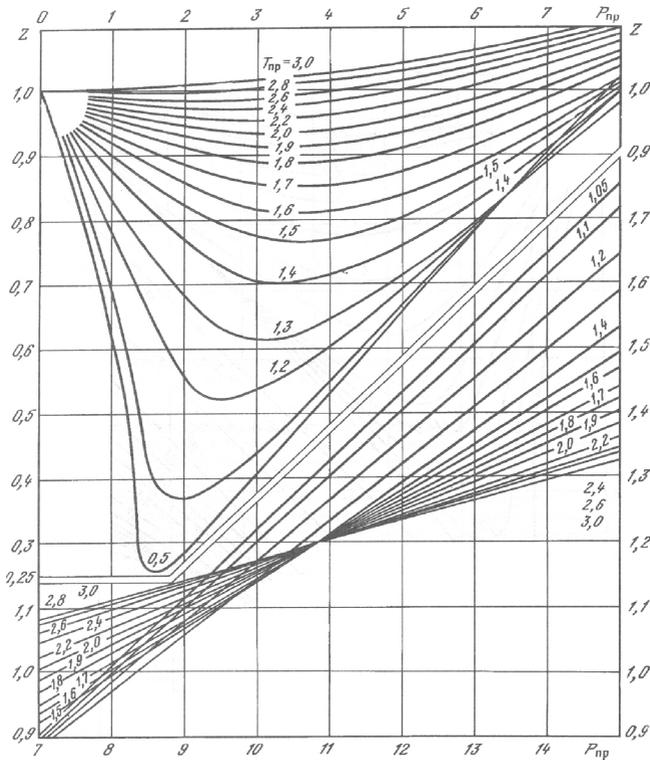


Рис. 19.2. Зависимость коэффициента сверхсжимаемости от приведенного давления и температуры для природных газов

При малых значениях $\beta_{ж}(p - p_0)$ равенство (19.30) можно преобразовать, разложив экспоненту в ряд, так что получится

$$P = \frac{\rho_0}{\beta_{ж}} [1 + \beta_{ж}(p - p_0)] + C = \frac{\rho_0}{\beta_{ж}} + \rho_0 p - \rho_0 p_0 + C = \rho_0 p + C^*, \quad (19.31)$$

где $C^* = C + \rho_0/\beta_{ж} - \rho_0 p_0$.

Для упругой жидкости с уравнением состояния (19.24) имеем

$$P = \int \rho_0 [1 + \beta_{ж}(p - p_0)] dp = \rho_0 p + \rho_0 \beta_{ж} \left(\frac{p^2}{2} - p_0 p \right) + C,$$

или, учитывая, что жидкость слабосжимаемая и коэффициент $\beta_{ж}$ мал,

$$P = \rho_0 p + C.$$

Таким образом, функция Лейбензона для уравнений состояния (19.23) и (19.24) при малых изменениях давления в слабосжимаемой жидкости, как и следовало ожидать, одинакова и совпадает с функцией Лейбензона для несжимаемой жидкости. В самом деле, для несжимаемой жидкости $\rho = \rho_0 = \text{const}$ и функция Лейбензона определяется равенством

$$P = \int \rho dp = \rho p + C.$$

Для совершенного газа с уравнением состояния (19.25) функция Лейбензона имеет вид

$$P = \int \frac{\rho_{ат} P}{p_{ат}} dp = \frac{\rho_{ат} P^2}{2 p_{ат}} + C. \quad (19.32)$$

Для реального газа в случае изотермической фильтрации функция Лейбензона определяется равенством

$$P = \frac{\rho_{ат} z(p_{ат})}{p_{ат}} \int \frac{p}{z(p)} dp.$$

Зависимость $z(p)$ при постоянной температуре можно считать линейной при малых изменениях давления

$$z = z_0 [1 - a_z (p_0 - p)], \quad (19.33)$$

где z_0 – коэффициент сверхсжимаемости при $p = p_0$; и экспоненциальной при больших изменениях давления

$$z = z_0 e^{-a_z (p_0 - p)}, \quad (19.34)$$

причем константа a_z должна быть подобрана так, чтобы кривая (19.33) или (19.34) как можно ближе подходила к соответствующей эмпирической кривой на графиках Д.Брауна для $z = z(p)$.

Здесь был приведен простейший способ учета изменения свойств реального газа при изменении давления и температуры. В сложных термобарических условиях, при фильтрации многокомпонентных газов следует пользоваться более совершенными уравнениями состояния.

Эксперименты показывают, что коэффициенты вязкости нефти (при давлениях выше давления насыщения) и газа увеличиваются с повышением давления. При изменении давления в значительных пределах (до 100 МПа) зависимость вязкости пластовых нефтей и природных газов от давления можно принять экспоненциальной:

$$\mu = \mu_0 e^{-a_\mu (p_0 - p)}. \quad (19.35)$$

При малых изменениях давления эта зависимость близка к линейной

$$\mu = \mu_0 \left[1 - a_\mu (p_0 - p) \right], \quad (19.36)$$

где μ_0 – вязкость при зафиксированном давлении p_0 , a_μ – коэффициент, определяемый экспериментально и зависящий от состава нефти или газа.

Чтобы выяснить, как зависит от давления коэффициент пористости, рассмотрим вопрос о напряжениях, действующих в пористой среде, заполненной жидкостью.

Масса горных пород, расположенных над кровлей продуктивного пласта, создает так называемое горное давление $p_{\text{горн}}$, которое обычно можно считать неизменным в процессе разработки пласта. Горное давление определяется по формуле $p_{\text{горн}} = \rho_{\text{горн}} g H$, где $\rho_{\text{горн}}$ – средняя плотность горных пород, слагающих вышележащие пласты, H – глубина залегания пласта. Если предположить, что кровля и подошва пласта абсолютно непроницаемы и полностью воспринимают нагрузку вышележащих пород, то горное давление уравнивается напряжением в скелете пласта σ и давлением p в жидкости, то есть соблюдается соотношение

$$p_{\text{горн}} = (1 - m)\sigma + mp. \quad (19.37)$$

Здесь σ – истинное напряжение в скелете пористой среды, рассчитанное на единицу горизонтальной площади, мысленно выделенной в любой точке пласта; оно действует на части площади $(1 - m)$. Поровое давление p действует на остальной части площади m . Удобнее ввести еще так называемое эффективное напряжение $\sigma_{\text{эф}}$, определяемое как разность напряжений в твердом скелете и жидкой фазе и связанное с истинным напряжением соотношением

$$\sigma_{\text{эф}} = (1 - m)(\sigma - p). \quad (19.38)$$

Тогда из формулы (19.37) следует, что

$$p_{\text{горн}} = \sigma_{\text{эф}} + p. \quad (19.39)$$

Эффективное напряжение физически интерпретируется как та часть истинного напряжения σ в твердой фазе, которая передается по контакту между зернами скелета, не зависит от присутствия жидкости и будет существовать также в сухой среде. Понятие эффективного напряжения удобно еще и потому, что его можно определить из опыта: можно измерить нагрузку Γ , моделирующую горное давление $p_{\text{горн}}$ и поровое давление p , и найти $\sigma_{\text{эф}} = \Gamma - p$.

При разработке залежи пластовое давление p падает, и напряжение в скелете $\sigma_{\text{эф}}$ возрастает.

Изменение пористости обусловлено как изменением внутрипорового давления p , так и изменением эффективного напряжения $\sigma_{\text{эф}}$: $m = m(p, \sigma_{\text{эф}})$. При падении давления уменьшаются усилия, сжимающие каждое из зерен породы, поэтому увеличивается объем зерен и уменьшается объем пор. Увеличение $\sigma_{\text{эф}}$ приводит к тому, что зерна породы испытывают дополнительную деформацию – поверхность контактов между зёрнами увеличивается, происходит уплотнение упаковки зерен (схематично этот процесс показан на рис. 19.3), возможна также перегруппировка зерен, разрушение цементирующего вещества и самих зерен, дробление зерен и т.д.

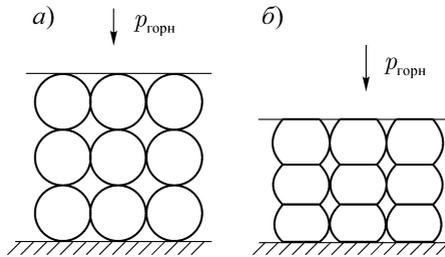


Рис. 19.3. Упрощенная схема деформации зерен пористой среды: *а* – до деформации, *б* – после деформации

В тех случаях, когда $p_{\text{горн}} = \text{const}$, обычно принимают, что пористость зависит только от давления $m = m(p)$.

Вследствие малой деформации твердой фазы обычно считают, что изменение пористости зависит от изменения давления линейно. Закон сжимаемости породы записывают, вводя коэффициент упругости пласта β_c , в виде

$$\beta_c = \frac{dV_n}{V dp}, \quad (19.40)$$

где dV_n – изменение объема пор в элементе пласта, имеющем объем V , при изменении давления на величину dp . Если объем элемента пласта считается неизменным, то $dV_n/V = d \frac{V_n}{V} = dm$, и закон сжимаемости породы примет вид

$$dm = \beta_c dp. \quad (19.41)$$

Интегрируя соотношение (19.41), получаем

$$m = m_0 + \beta_c(p - p_0), \quad (19.42)$$

где m_0 – коэффициент пористости при $p = p_0$.

Лабораторные эксперименты для разных зернистых пористых сред и промышленные исследования показывают, что коэффициент объемной упругости пласта составляет величины порядка $\beta_c = (0,3 - 2) \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$.

При значительных изменениях давления изменение пористости описывается уравнением

$$m = m_0 e^{-\beta_c(p_0 - p)/m_0}. \quad (19.43)$$

Экспериментами установлено, что не только пористость, но и проницаемость существенно меняется с изменением пластового давления, причем часто проницаемость изменяется в более сильной степени, чем пористость. При малых изменениях давления эта зависимость может быть принята линейной

$$k = k_0 [1 - a_k(p - p_0)], \quad a_k(p - p_0) \ll 1, \quad (19.44)$$

а при больших – экспоненциальной

$$k = k_0 e^{-a_k(p - p_0)}. \quad (19.45)$$

Заметим, что выше рассматривались только пористые среды. В трещиноватых пластах проницаемость изменяется в зависимости от давления интенсивнее, чем в пористых.

Глава XX

ОДНОМЕРНАЯ УСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В ОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§1. Схемы одномерных фильтрационных потоков

Как уже отмечалось, реальные коллекторы углеводородного сырья обладают сложной геометрией, строением, условиями залегания и т.д. Поэтому для моделирования фильтрационных течений часто используют упрощенные постановки краевых задач, которые часто называют модельными. В наиболее простых модельных задачах рассчитываются одномерные установившиеся фильтрационные течения в однородном недеформируемом изотропном пласте (коллекторе).

К простейшим одномерным задачам относятся такие, в которых надлежащим выбором системы координат можно сделать так, что фильтрационные характеристики (скорость, давление) будут функциями только одной координаты. Одномерные фильтрационные потоки обладают различной симметрией. В зависимости от симметрии фильтрационного потока различают прямолинейно-параллельное, плоскорадиальное и радиально-сферическое течение.

В прямолинейно-параллельном потоке траектории частиц (линии тока) представляют собой прямые линии, параллельные друг другу. В качестве примеров прямолинейно-параллельных фильтрационных течений можно привести следующие: течение жидкости в экспериментальной установке Дарси, течение жидкости или газа в лабораторных установках по определению проницаемости (см. рис. 18.6) и т.д.

В случае плоскорадиального течения линии тока представляют собой лучи, лежащие на плоскости и исходящие из общего центра (полюса). Примером подобной схемы фильтрационного течения является приток флюида к центральной скважине в круговом пласте (рис. 20.1).

При радиально-сферической фильтрации траектории частиц направлены к центру (от центра) полусферы. Подобное фильтрационное течение можно представить в случае, когда вскрыта кровля пласта и приток флюида направлен к полусфере (рис. 20.2).

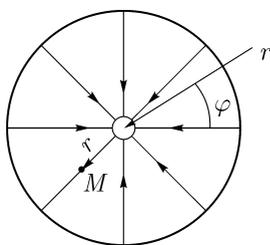


Рис. 20.1. Линии тока при плоскорадиальном потоке

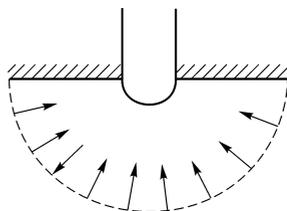


Рис. 20.2. Радиально-сферический фильтрационный поток

Заметим, что при определении схем одномерных потоков использовались такие понятия, как траектории частиц и линии тока. В определениях использовались кинематические характеристики фильтрационного течения, которые отражают не истинную, а осредненную картину течения, т.е. истинные траектории частиц и линии тока могут не совпадать со средними, модельными характеристиками фильтрационного потока.

§ 2. Прямолинейно-параллельная фильтрация несжимаемой жидкости

Рассмотрим решение задач по определению характеристик одномерных фильтрационных течений несжимаемой однородной ньютоновской жидкости в изотропном однородном недеформируемом пласте. Математическая модель в данном случае задается системой уравнений

$$\Delta p = 0, \quad \bar{w} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p. \quad (20.1)$$

Проектируя уравнения (20.1) на декартову систему координат, получим

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (20.2)$$

$$w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad w_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad w_z = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Пусть пласт представляет собой прямоугольный параллелепипед шириной B и толщиной h , ограниченный сверху и снизу непроницаемыми плоскостями, слева – контуром питания, справа – галереей. Выберем систему координат так, как это показано на рис. 20.3, то есть начало координат

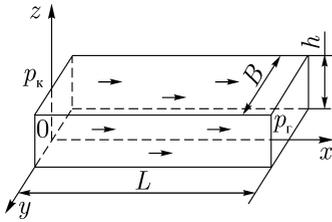


Рис. 20.3. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток

поместим на плоскость контура питания. Название – контур питания – обусловлено тем, что согласно постановке задачи через плоскость $x = 0$ происходит приток в пласт жидкости, которая далее фильтруется к галерее $x = L$. Ось Ox направим параллельно вектору скорости фильтрации. Тогда можно принять, что искомые функции – давление и скорость фильтрации – зависят только от координаты x , и уравнения

(20.2) запишутся в виде

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = 0, \quad w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad w_y = w_z = 0. \quad (20.3)$$

Проинтегрировав первое уравнение (20.3) получим

$$\frac{dp}{dx} = C_1, \quad \text{откуда } dp = C_1 dx, \quad \text{и, далее, } p = C_1 x + C_2.$$

Для нахождения констант интегрирования C_1 и C_2 необходимо задать граничные условия, то есть значения давления в двух точках на линии тока. Обычно известны значения давления на контуре питания p_k и галерее p_r ($p_k > p_r$). Поэтому для нахождения C_1 и C_2 имеем граничные условия

$$p = p_k \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и} \quad p = p_r \quad \text{при } x = L.$$

Подставив граничные условия в выражение для давления, получим

$$p_k = C_2 \quad \text{и} \quad p_r = C_1 L + C_2,$$

откуда найдем, что

$$C_1 = -\frac{p_k - p_r}{L} \quad \text{и} \quad C_2 = p_k.$$

Далее, подставив найденные значения постоянных интегрирования в выражения для давления и скорости фильтрации, получим решение задачи при прямолинейно-параллельной фильтрации

$$\begin{aligned} p(x) &= p_k - \frac{p_k - p_r}{L} x, \\ w_x &= -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{k}{\mu} C_1 = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L}. \end{aligned} \quad (20.4)$$

Данный результат можно представить и в несколько ином виде. Умножив скорость фильтрации на площадь галереи $S = Bh$ (см. рис. 20.3),

получим значение расхода Q

$$w_x S = Q = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L} S. \quad (20.5)$$

Выразив из равенства (20.5) перепад давления

$$\frac{p_k - p_r}{L} = \frac{Q\mu}{kS}$$

и подставив результат в формулу для распределения давления в пласте, будем иметь

$$p(x) = p_k - \frac{Q\mu}{kS} x. \quad (20.6)$$

Проанализируем полученные результаты. Как следует из соотношений (20.4), давление в пласте при прямолинейно-параллельной фильтрации распределено по координате x по линейному закону, а скорость фильтрации во всем пласте постоянна. Важно отметить также, что соотношение (20.5), полученное в результате решения задачи для сформулированной выше математической модели фильтрации несжимаемой жидкости, в точности соответствует экспериментальному результату, полученному А.Дарси.

Для прикладных исследований (при определении фильтрационных характеристик пласта в промысловых условиях) часто используют еще и другую интерпретацию полученного результата (20.4). При определении фильтрационных характеристик пласта по методу установившихся отборов строится индикаторная линия, которая представляет собой график зависимости расхода от разности давлений на контуре питания и галерее (эта разность называется депрессией на пласт). Таким образом, индикаторная линия представляет собой график зависимости вида

$$Q = C\Delta p,$$

где коэффициент пропорциональности C называется коэффициентом продуктивности. Очевидно, он равен

$$C = \frac{kS}{\mu L}.$$

Следовательно, при выполнении закона Дарси индикаторная линия представляется в виде прямой.

Еще одна промысловая задача связана с определением времени движения в пласте «меченых частиц». С целью определения фильтрационных и емкостных параметров нефтегазового пласта в фильтрационный поток можно закачать изотопы некоторых атомов или другие частицы, которые можно идентифицировать в потоке с помощью специальных методов. Время движения «меченых частиц» определяется из закона движения с помощью определения истинной средней скорости.

Вначале приведем вывод формулы, используя стандартный подход, согласно которому пористость равна просветности, а далее внесем коррективы, которые получаются в результате использования при определении связи между скоростью фильтрации и истинной средней скоростью вместо пористости – просветности (см. (18.12)).

Пусть выражение для истинной средней скорости имеет вид

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{w}{m}. \quad (20.7A)$$

Разделим переменные в равенстве (20.7.A)

$$dt = \frac{m}{w} dx$$

и подставим в последнее равенство найденное выше выражение для модуля вектора скорости фильтрации (20.4). В результате получим

$$dt = \frac{m\mu}{k} \frac{L}{p_k - p_r} dx.$$

Далее это соотношение можно проинтегрировать и найти время, за которое «меченая частица» переместится от контура питания ($x = 0$ при $t = 0$) до произвольной точки в пласте ($x = x_1$ и $t = t_1$):

$$t_1 = \frac{m\mu}{k} \frac{Lx_1}{p_k - p_r}. \quad (20.8A)$$

Приняв, что $x_1 = L$, получим время прохождения «меченой частицей» всего пласта, от контура питания до галереи –

$$T = \frac{m\mu}{k} \frac{L^2}{p_k - p_r}. \quad (20.9A)$$

Однако в исходном соотношении вместо пористости необходимо было использовать просветность. В результате в качестве исходного будем иметь иное соотношение

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{w}{s_\alpha}. \quad (20.7B)$$

Теперь для перехода от пористости к просветности воспользуемся структурным коэффициентом, который был введен в первой главе при определении диаметра капилляра в идеальной пористой среде

$$s_\alpha = \frac{m}{\varphi_\alpha},$$

преобразуем формулу (20.7B) к виду

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\varphi_\alpha w}{m}.$$

Так как φ_α в однородной пористой среде – постоянная величина, все дальнейшие выкладки остаются теми же, что и выше, и конечный результат, учитывающий то, что пористость не равна просветности, приводит к равенствам

$$t_1 = \frac{m\mu}{\varphi_\alpha k} \frac{Lx_1}{p_k - p_r} \quad (20.8B)$$

и

$$T = \frac{m\mu}{\varphi_\alpha k} \frac{L^2}{p_k - p_r}. \quad (20.9.B)$$

Формулы (20.8B) и (20.9B) отличаются от обычно используемых (20.8A) и (20.9A) на величину структурного коэффициента φ_α , значения которого удовлетворяют неравенству $\varphi_\alpha \geq 1$. Поэтому учет структурного коэффициента приводит к уменьшению времени движения «меченых частиц».

Еще одной важной характеристикой, используемой при решении прикладных задач, является средневзвешенное по объему порового пространства пластовое давление \hat{p} , которое обычно определяется по формуле

$$\hat{p} = \frac{1}{V_n} \int_{V_n} p dV_n, \quad (20.10)$$

где V_n – общий объем порового пространства пласта. Однако подобное определение является не совсем корректным. В самом деле, согласно определению пористости ($m = dV_{пн}/dV$) объем пор представляется функцией вида

$$V_n = \int_V m dV,$$

которая определена на том же множестве «физических точек», что и объем пласта V , по которому непрерывно «размазаны» пустоты. Поэтому корректное определение (20.10) должно выглядеть следующим образом

$$\hat{p} = \frac{1}{V_n} \int_V mp dV, \quad (20.11)$$

то есть необходимо изменить область, по которой ведется интегрирование. Понятно, что можно ввести и другую характеристику – среднее по пласту давление

$$\hat{p}_{пл} = \frac{1}{V} \int_V p dV. \quad (20.12)$$

Введенные характеристики можно сравнить. Для однородного пласта ($dV_{\Pi} = mdV$ и $m = \text{const}$) имеем

$$\hat{p} = \frac{1}{mV} \int_V pm \, dV = \hat{p}_{\text{пл}} = \frac{1}{V} \int_V p \, dV.$$

Следовательно, для однородного пласта среднее по пласту давление равно средневзвешенному по объему пор. Если же пласт не является однородным, то среднее по пласту давление может и не совпадать со средневзвешенным по объему пор:

$$\hat{p} = \frac{\int_V pm \, dV}{\int_V m \, dV} \neq \hat{p}_{\text{пл}} = \frac{\int_V p \, dV}{\int_V m \, dV}.$$

Подставим теперь формулу (20.4) для распределения давления в пласте в выражение (20.11) и вычислим средневзвешенное по объему пор давление (которое в данном случае равно среднему по пласту давлению)

$$\hat{p} = \frac{1}{BhL} \int_0^L Bh \left(p_k - \frac{p_k - p_r}{L} x \right) dx = \frac{p_k + p_r}{2}. \quad (20.13)$$

Таким образом, основные фильтрационные характеристики при прямолинейно-параллельной фильтрации несжимаемой жидкости определяются формулами (20.4), (20.8А), (20.8В) и (20.13).

§3. Плоскорadiaльная фильтрация несжимаемой жидкости

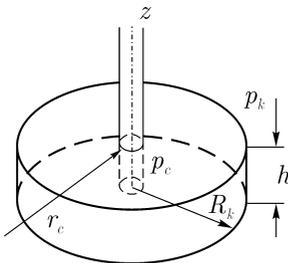


Рис. 20.4. Плоскорadiaльный поток в круговом пласте

Определим теперь распределение давления и скорости фильтрации в пласте при плоскорadiaльной симметрии задачи. Пусть имеется в круговом пласте толщиной h и радиуса R_K (см. рис. 20.4) центральная скважина радиуса r_c , на забое которой поддерживается постоянное давление. На боковой поверхности $r = R_K$ также поддерживается постоянное давление p_K ($p_k > p_c$), и через нее происходит приток флюида, равный дебиту скважины.

Фильтрация установившаяся. Боковая поверхность, через которую происходит приток, называется контуром питания. Система уравнений остается прежней и в безиндексной форме представляется уравнениями (20.1). При проектировании уравнений (20.1) на цилиндрическую систему координат (см. приложение П.52) получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (20.14)$$

$$w_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad w_\varphi = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad w_z = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Согласно принятой схеме течения искомые функции не зависят ни от φ (течение осесимметричное), ни от z (течение плоское), поэтому в рассматриваемой задаче $\partial p / \partial \varphi = \partial p / \partial z = 0$, и, значит, $p = p(r)$ и $w_\varphi = w_z = 0$, $w_r = w(r)$. Система уравнений (20.14) при этих условиях принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0, \quad w = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr}. \quad (20.15)$$

Обратим внимание на то, что в проекции закона Дарси (второго равенства (20.15)) на координатную ось r знаки в левой и правой частях совпадают. Это обусловлено тем, что движение происходит к скважине, и скорость фильтрации проектируется со знаком «минус».

Проинтегрируем первое уравнение $r \frac{dp}{dr} = C$, и далее, разделяя переменные и интегрируя последнее выражение, получим

$$p_K - p = C \ln \frac{R_K}{r}. \quad (20.16)$$

При интегрировании было использовано граничное условие

$$p = p_K \quad \text{при} \quad r = R_K.$$

Можно было использовать и другое граничное условие –

$$p = p_c \quad \text{при} \quad r = r_c,$$

тогда получилось бы

$$p - p_c = C \ln \frac{r}{r_c}. \quad (20.17)$$

Очевидно, что оба выражения (20.16) и (20.17) эквивалентны.

Для нахождения константы C можно поступить следующим образом. Умножим формулу для скорости фильтрации (20.15) на площадь боковой поверхности цилиндра произвольного радиуса r ($r_c \leq r \leq R_K$)

и получим

$$2\pi r h w = 2\pi r h \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr},$$

или

$$Q = 2\pi h \frac{k}{\mu} C.$$

Из последнего соотношения следует выражение для C

$$C = \frac{Q\mu}{2\pi k h}.$$

Можно было поступить и иначе: в формуле (20.17) положить $r = R_k$ и получить

$$p_k - p_c = C \ln \frac{R_k}{r_c}.$$

Разрешив это соотношение относительно C , получим

$$C = \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Подставляя первое найденное значение постоянной интегрирования в (20.16) и (20.17), получаем формулы для распределения давления в пласте

$$p = p_k - \frac{Q\mu}{2\pi k h} \ln \frac{R_k}{r} \quad \text{и} \quad p = p_c + \frac{Q\mu}{2\pi k h} \ln \frac{r}{r_c}. \quad (20.18)$$

Из соотношений (20.18), при $r = r_c$ для первого равенства и при $r = R_k$ для второго, можно получить выражение для дебита (объемного расхода) скважины

$$Q = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (20.19)$$

Равенство (20.19) называется формулой Дюпюи, по имени ее автора – французского инженера гидравлика XIX века.

С помощью формулы Дюпюи равенства (20.18) для распределения давления в пласте можно преобразовать к виду

$$p = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r} \quad \text{и} \quad p = p_c + \frac{p_k - p_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{r}{r_c}. \quad (20.20)$$

Формулы (20.18) и (20.20), очевидно, эквивалентны, и из них следует, что давление в пласте распределено по логарифмическому закону. Поэтому

при значениях радиуса, близких к радиусу контура питания, значения давления изменяются незначительно, но при приближении к скважине давление изменяется резко (см. рис. 20.5). Формулы (20.18) и (20.20) в пространстве определяют поверхности, которые получаются вращением образующей вокруг оси симметрии скважины. Эта поверхность, соответствующая распределению давления, носит название воронки депрессии.

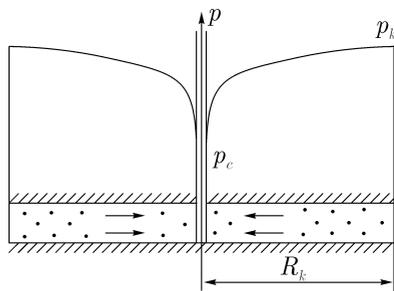


Рис. 20.5. Распределение давления в плоскорадиальном потоке

Понятно, что аналогично ведет себя и градиент давления, а следовательно, и скорость фильтрации (с той лишь разницей, что давление при приближении к скважине резко уменьшается, а скорость резко возрастает). Подобное поведение скорости можно установить при анализе связывающей скорость и расход формулы

$$w = \frac{Q}{2\pi h} \frac{1}{r}. \quad (20.21)$$

Из физических соображений подобное поведение функций, определяющих изменение в пласте давления и скорости фильтрации, легко объяснимо. В самом деле, через любую цилиндрическую поверхность, концентрично расположенную относительно скважины, в единицу времени протекает один и тот же объем несжимаемой жидкости ($Q = \text{const}$). Поскольку вблизи контура питания площадь боковой поверхности цилиндра очень велика, скорости там малы. При приближении к скважине площадь поверхности постоянно уменьшается, а скорость возрастает (см. рис. 20.6). Чтобы скорость возрастала необходимо увеличение градиента давления, которое и имеется по построенному решению.

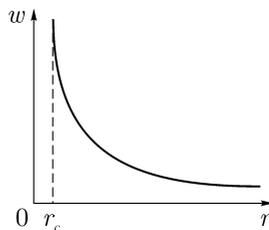


Рис. 20.6. Зависимость скорости фильтрации жидкости в плоскорадиальном потоке от радиуса

Как следует из формулы Дюпюи, уравнение индикаторной линии при плоскорадиальном потоке так же, как и в случае фильтрации в галерее, задается уравнением прямой (см. рис. 20.7):

$$Q = C \Delta p = \frac{2\pi k h}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}} (p_k - p_c) \quad (20.22)$$

с коэффициентом продуктивности $C = 2\pi k h / (\mu \ln R_k / r_c)$.

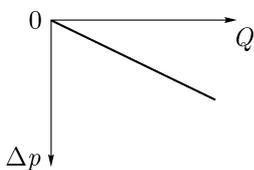


Рис. 20.7. Индикаторная линия для потока несжимаемой жидкости по закону Дарси

Получим теперь расчетные соотношения для определения времени движения «меченой частицы» в плоскорадиальном потоке. Как и в случае прямолинейно-параллельной фильтрации, рассмотрим два варианта. В первом варианте положим, что пористость равна просветности, во втором внесем коррективы, которые следуют из уточнения понятия просветности. Согласно формулам (20.7А) и (20.21) для определения времени движения «меченой частицы» от контура питания до произ-

вольной точки пласта имеем уравнение

$$\frac{dr}{dt} = v = \frac{w}{m} = \frac{Q}{2\pi r h m}.$$

Разделив переменные в этом дифференциальном уравнении и проинтегрировав его с пределами интегрирования от 0 до произвольного момента времени t_1 и от радиуса контура питания до r_1 , получим соотношение

$$t_1 = \frac{\pi h m (R_k^2 - r_1^2)}{Q}.$$

Отсюда после использования формулы Дюпюи (20.19) найдем

$$t_1 = \frac{\mu m \ln(R_k/r_c)(R_k^2 - r_1^2)}{2k(p_k - p_c)}. \quad (20.23)$$

Из равенства (20.23) следует, что «меченая частица» пройдет расстояние от контура питания до скважины за время T , определяемое формулой

$$T = \frac{\mu m \ln(R_k/r_c)(R_k^2 - r_c^2)}{2k(p_k - p_c)}. \quad (20.24)$$

Введение вместо пористости просветности, как и в случае прямолинейно-параллельной фильтрации, приводит к появлению в формулах (20.23) и (20.24) структурного коэффициента

$$t_1 = \frac{\mu m \ln(R_k/r_c)(R_k^2 - r_1^2)}{2k\varphi_\alpha(p_k - p_c)} \quad \text{и} \quad T = \frac{\mu m \ln(R_k/r_c)(R_k^2 - r_c^2)}{2k\varphi_\alpha(p_k - p_c)}.$$

Далее определим средневзвешенное по поровому пространству давление при плоскорадиальной фильтрации. Для этого подставим в равенство (20.10) формулу для распределения давления (20.20) и получим

$$\bar{p} = \frac{1}{\pi h m (R_k^2 - r_c^2)} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_c}^{R_k} \left[p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln(R_k/r_c)} \ln \frac{R_k}{r} \right] m r dr.$$

После выполнения интегрирования по z и φ получаем

$$\hat{p} = \frac{2}{R_k^2 - r_c^2} \left[\int_{r_c}^{R_k} \left(p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln(R_k/r_c)} \ln R_k \right) r dr + \int_{r_c}^{R_k} \frac{p_k - p_c}{\ln(R_k/r_c)} r \ln r dr \right].$$

Первый интеграл в квадратных скобках легко вычисляется, а второй интегрируется по частям. В результате получаем

$$\hat{p} = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln(R_k/r_c)} \ln R_k + \frac{2}{R_k^2 - r_c^2} \frac{p_k - p_c}{\ln(R_k/r_c)} \left[\frac{R_k^2}{2} \ln R_k - \frac{r_c^2}{2} \ln r_c - \frac{1}{4} (R_k^2 - r_c^2) \right].$$

Преобразуем полученное выражение, добавляя и вычитая в квадратных скобках выражение $R_k^2 \ln r_c / 2$. В результате очевидных преобразований получаем

$$\hat{p} = p_k + \frac{r_c^2 (p_k - p_c)}{R_k^2 - r_c^2} - \frac{p_k - p_c}{2 \ln(R_k/r_c)}.$$

Поскольку $R_k/r_c \gg 1$ вторым слагаемым в полученном выражении можно пренебречь и переписать выражение для среднего по поровому пространству давления в виде

$$\hat{p} = p_k - \frac{p_k - p_c}{2 \ln(R_k/r_c)}. \tag{20.25}$$

§4. Радиально-сферическая фильтрация несжимаемой жидкости

Перейдем к рассмотрению радиально-сферической фильтрации несжимаемой жидкости в изотропном недеформируемом пласте. Пусть имеется скважина радиуса r_c , вскрывшая кровлю пласта, на забое которой поддерживается постоянное давление p_c . Если предположить, что толщина пласта h достаточно большая, то можно выделить полусферу радиуса R_k (см. рис. 20.8), на поверхности которой поддерживается постоянное давление p_k и через которую происходит приток флюида, равный дебиту скважины. Течение

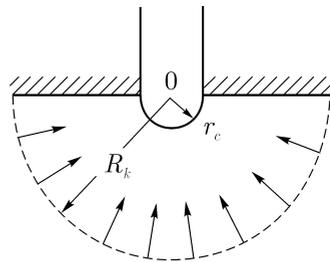


Рис. 20.8. Радиально-сферический фильтрационный поток

установившееся, и поверхность полусферы представляет собой контур питания. Можно еще принять, что вскрытие кровли пласта имеет форму полусферы, вектор скорости фильтрации в любой точке пласта между контуром питания и забоем скважины направлен к центру сферы. В этом случае задача имеет сферическую симметрию, и ее удобно решать в сферической системе координат.

Система уравнений для решения задачи остается прежней и в безиндексной форме представляется уравнениями (20.1). В сферической системе координат (см. приложение П.53) уравнения (20.1) имеют следующий вид

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} \right] = 0, \quad (20.26)$$

$$w_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad w_\varphi = -\frac{k}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad w_\theta = -\frac{k}{\mu} \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

При сделанном предположении о сферической симметрии процесса все искомые функции зависят только от r . В этом случае система уравнений (20.26) упрощается и принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dp}{dr} \right) = 0, \quad w_r = \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr}. \quad (20.27)$$

Интегрирование первого уравнения системы (20.27) приводит к равенству

$$r^2 \frac{dp}{dr} = C,$$

где C – постоянная интегрирования. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int_p^{p_k} dp = C \int_r^{R_k} \frac{dr}{r^2}, \quad \text{откуда} \quad p_k - p = C \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right).$$

Для определения C можно в последнем равенстве положить $r = r_c$. В результате будем иметь

$$C = (p_k - p_c) / (1/r_c - 1/R_k),$$

но так как $R_k \gg r_c$, можно положить

$$C = r_c (p_k - p_c),$$

и формула для распределения давления примет вид

$$p = p_k - r_c (p_k - p_c) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right). \quad (20.28)$$

Используя второе уравнение (20.27) и соотношение (20.28), получим формулу для расчета дебита

$$Q = 2\pi r^2 w_r = -2\pi r^2 \frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{2\pi k}{\mu} r_c (p_k - p_c).$$

Остальные параметры радиально-сферического фильтрационного течения могут быть получены аналогично тому, как это сделано в двух первых случаях рассмотренных одномерных течений.

В заключение отметим одно обстоятельство. Нетрудно заметить, что оператор Лапласа для всех трех рассмотренных случаев одномерных течений можно записать с помощью единой формулы

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^\alpha \frac{dp}{d\xi} \right) = 0, \quad (20.29)$$

где показатель степени $\alpha = 0, 1, 2$ и может быть назван коэффициентом формы. При $\alpha = 0$ имеем прямолинейно-параллельное течение ($\xi = x$), при $\alpha = 1$ плоскорадиальное течение ($\xi = r$), при $\alpha = 2$ радиально-сферическое течение ($\xi = r$). Однако, используя общую для всех трех случаев запись, нельзя получить универсальную форму представления решений, потому что интеграл, задающий распределение давления, вычисляется неоднозначно:

$$\int \frac{d\xi}{\xi^\alpha} = \frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C \quad \text{при } \alpha \neq 1 \quad \text{и} \quad \int \frac{d\xi}{\xi^\alpha} = \ln \xi + C \quad \text{при } \alpha = 1.$$

Но представление (20.29) можно использовать как мнемоническое правило для запоминания вида оператора Лапласа в разных вариантах одномерных течений.

§5. Аналогия между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа

Решения, которые получены в предыдущем параграфе для одномерных схем течения, справедливы при фильтрации несжимаемой жидкости. Обобщим их на случай фильтрации газа. Для этого рассмотрим математические модели установившейся фильтрации несжимаемой жидкости и газа и установим между ними аналогию. Системы уравнений для моделей несжимаемой жидкости и газа имеют, как было показано в предыдущей главе (системы уравнений (19.10) и (19.18) без учета массовых сил, соответственно), следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{w} &= 0, & \operatorname{div} \rho \bar{w} &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p, & \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p, \\ \rho &= \text{const}; & \rho &= \rho(p). \end{aligned}$$

Переходя к функции Лейбензона, для чего нужно умножить закон Дарси в модели для газа на плотность и вместо $\rho \text{ grad } p$ записать $\text{grad } P$, а в уравнение неразрывности подставить закон Дарси, получим системы уравнений (19.11) и (19.19)

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0, & \Delta P &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \text{grad } p, & \rho \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \text{grad } P, \\ \rho &= \text{const}; & P &= \int \rho dp, \\ & & \rho &= \rho(p). \end{aligned} \quad (20.30)$$

Напомним, что уравнение состояния для газа считается известным. Из сравнения первых двух уравнений в моделях (20.30) видно, что они эквивалентны с точностью до замены искоемых функций – давления p на функцию Лейбензона P и скорости фильтрации \mathbf{w} на массовую скорость фильтрации $\rho \mathbf{w}$. Поэтому если геометрия пласта и граничные условия в постановках задач совпадают, то и решения имеют одинаковый вид. Таким образом, если в полученных ранее решениях для одномерных фильтрационных течений несжимаемой жидкости произвести указанную замену функций, то получим решения, которые будут справедливы при фильтрации газа. Например, решения для распределения давления в пласте и скорости фильтрации, полученные для прямолинейно-параллельного течения (20.4) несжимаемой жидкости, при фильтрации газа преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\text{для несжимаемой жидкости} && \text{для газа} \\ p(x) &= p_k - \frac{p_k - p_r}{L} x, && P = P_k - \frac{P_k - P_r}{L} x, \\ w &= \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L}; && \rho w = \frac{k}{\mu} \frac{P_k - P_r}{L}. \end{aligned} \quad (20.31)$$

Однако, чтобы получить явный вид выражений для распределения давления и массовой скорости при фильтрации газа, необходимо задать уравнение состояния. Понятно, что после подстановки функции Лейбензона, для каждого из уравнений состояния, рассмотренных в третьей главе, будем получать различные выражения для распределений давления и скорости, а также формулы для среднего по пласту давления. Поэтому далее рассмотрим каждый случай отдельно.

§6. Фильтрационное одномерное течение совершенного газа

После установления аналогии между установившейся фильтрацией несжимаемой жидкости и газа и задания уравнений состояния, можно выписать в явном виде решения для каждой из одномерных фильтрационных схем. Положим, что фильтруется совершенный газ.

Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток совершенного газа. Для совершенного газа подстановка функции Лейбенсона (19.32) в равенства (20.31) дает следующее решение для распределений давления и скорости фильтрации, соответственно,

$$\frac{\rho_{\text{ат}} p^2}{2 p_{\text{ат}}} + C = \frac{\rho_{\text{ат}} p_k^2}{2 p_{\text{ат}}} + C - \frac{\frac{\rho_{\text{ат}} p_k^2}{2 p_{\text{ат}}} - \frac{\rho_{\text{ат}} p_{\Gamma}^2}{2 p_{\text{ат}}}}{L} x,$$

$$\rho w = \frac{k}{\mu} \frac{\frac{\rho_{\text{ат}} p_k^2}{2 p_{\text{ат}}} - \frac{\rho_{\text{ат}} p_{\Gamma}^2}{2 p_{\text{ат}}}}{L}.$$

После очевидных преобразований и умножения скорости фильтрации на площадь галереи, получаем

$$p(x) = \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_{\Gamma}^2}{L} x}, \quad (20.32)$$

$$\rho w = \frac{k}{\mu} \frac{\rho_{\text{ат}} (p_k^2 - p_{\Gamma}^2)}{2 p_{\text{ат}} L}, \quad (20.33)$$

$$\rho w B h = Q_m = \frac{k}{\mu} \frac{\rho_{\text{ат}} (p_k^2 - p_{\Gamma}^2)}{2 p_{\text{ат}} L} B h. \quad (20.34)$$

Формулы (20.32)–(20.34) позволяют рассчитать основные фильтрационные характеристики при прямолинейно-параллельной фильтрации совершенного газа. Анализируя формулу для массового расхода (20.34), нетрудно заметить, что и она может быть получена из формулы для дебита несжимаемой жидкости путем замены давления на функцию Лейбенсона и объемного расхода на массовый. Таким образом, полная аналогия между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа устанавливается с помощью следующей замены переменных:

<i>для несжимаемых жидкостей</i>	<i>для газа</i>
$p(x)$	$P(x)$
w	ρw
Q	Q_m

При изучении фильтрации газа, кроме массового дебита, широко используется понятие объемного расхода $Q_{\text{ат}}$, приведенного к атмосферным условиям, который определяется равенством

$$Q_{\text{ат}} = \frac{Q_m}{\rho_{\text{ат}}}.$$

Формула для приведенного к атмосферным условиям объемного дебита газа имеет вид

$$Q_{\text{ат}} = \frac{k}{\mu} \frac{p_k^2 - p_r^2}{2p_{\text{ат}}L} Bh. \quad (20.35)$$

Используя полученное решение для массовой скорости фильтрации, можно получить формулу для времени движения «меченых частиц» в газовом пласте. Для определения этого времени подставим в формулу (20.7) выражение для скорости фильтрации газа (20.33):

$$t = m \int_0^x \frac{dx}{w} = \frac{2m\mu L}{k(p_k^2 - p_r^2)} \int_0^x p(x) dx = \frac{2m\mu L p_k}{k(p_k^2 - p_r^2)} \int_0^x \sqrt{1 - \frac{p_k^2 - p_r^2}{p_k^2 L} x} dx, \quad (20.36)$$

где использовано выражение (20.32) для $p(x)$.

Выполнив интегрирование в (20.36), будем иметь

$$t = \frac{4m\mu L^2 p_k^3}{3k(p_k^2 - p_r^2)^2} \left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{p_k^2 - p_r^2}{p_k^2 L} x \right)^3} \right].$$

Полученное выражение можно преобразовать, внося p_k^3 в выражение в квадратных скобках. В результате получим

$$t = \frac{4m\mu L^2 (p_k^3 - p^3(x))}{3k(p_k^2 - p_r^2)^2}. \quad (20.37)$$

Формула (20.37) позволяет определить время движения «меченой частицы» до любой точки пласта. В частности, при $x = L$ из (20.37) следует

$$T = \frac{4m\mu L^2 (p_k^3 - p_r^3)}{3k(p_k^2 - p_r^2)^2}. \quad (20.38)$$

Выражение (20.38) можно упростить, используя формулу для средневзвешенного пластового давления. Средневзвешенное по объему порового пространства пластовое давление при фильтрации совершенного газа оп-

ределяется формулой

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \frac{1}{V_{\Pi}} \int_V p m dV = \frac{1}{BhL} \int_0^L \int_0^h \int_0^B p(x) dx dy dz = \\ &= \frac{1}{L} \int_0^L p(x) dx = \frac{p_k}{L} \int_0^L \sqrt{1 - \frac{p_k^2 - p_r^2}{L p_k^2} x} dx\end{aligned}$$

в которой необходимо вычислить тот же интеграл, что и в равенстве (20.36). Используя полученный выше результат, будем иметь

$$\bar{p} = \frac{2}{3} \frac{p_k^3 - p_r^3}{p_k^2 - p_r^2}. \quad (20.39)$$

Таким образом, формулу (20.38) можно переписать в виде

$$T = \frac{2m\mu L^2 \bar{p}}{k(p_k^2 - p_r^2)}. \quad (20.40)$$

Как уже отмечалось, функция Лейбензона для упругой жидкости при малых изменениях давления совпадает с функцией Лейбензона для несжимаемой жидкости. Поэтому для упругой жидкости при малых изменениях давления решения имеют тот же вид, что и для несжимаемой жидкости.

Представляет интерес сравнение решений, полученных для прямолинейно-параллельной фильтрации несжимаемой жидкости и совершенного газа. Из формулы (20.32) следует, что давление в газовом пласте изменяется не по линейному закону, как это было при фильтрации несжимаемой жидкости, а пропорционально квадратному корню от координаты (см. рис. 20.9). При этом градиент давления (угол наклона к координатной оси x кривой 2 на рис. 20.9) возрастает по мере продвижения газа по пласту и максимальное значение принимает на галерее. Нелинейность изменения давления в пласте приводит к изменению значений градиента давления и, по закону Дарси, скорости фильтрации. Сравнение скоростей для прямолинейно-параллельной фильтрации при движении несжимаемой жидкости и совершенного газа приведено на рис. 20.10. Скорость фильтрации совершенного газа при приближении к галерее возрастает. Поэтому нелинейной становится и формула для времени движения «меченой частицы». Сравнение формул для времени движения «меченых частиц» при фильтрации несжимаемой жидкости и совершенного газа приведено на рис. 20.11.

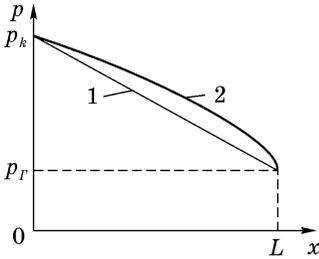


Рис. 20.9. Кривые распределения давления для прямолинейно-параллельной фильтрации: 1 – несжимаемая жидкость, 2 – газ

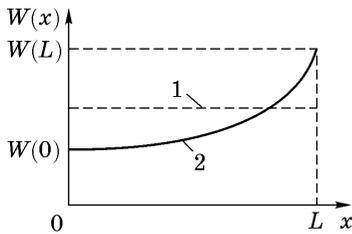


Рис. 20.10. Графики зависимости скорости от координаты для прямолинейно-параллельной фильтрации: 1 – несжимаемая жидкость, 2 – газ

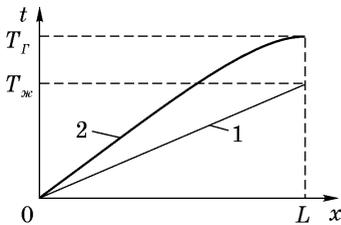


Рис. 20.11. Графики зависимости времени движения «меченой частицы» для прямолинейно-параллельной фильтрации: 1 – несжимаемая жидкость, 2 – газ

Плоскорadiaльный фильтрационный поток совершенного газа. Используя аналогию между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, преобразуем найденные выше решения (20.19), (20.20) и (20.21), заменив давление на функцию Лейбензона, скорость фильтрации на массовую скорость фильтрации и объемный дебит на массовый. В результате получим

$$P = P_k - \frac{P_k - P_c}{\ln(R_k/r_c)} \ln \frac{R_k}{r},$$

$$\rho w = \frac{Q_m}{2\pi k h} \frac{1}{r}, \quad (20.41)$$

$$Q_m = \frac{2\pi k h}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln(R_k/r_c)}.$$

Заменяя в равенствах (20.41) функцию Лейбенсона на ее представление для совершенного газа (формула (19.32), из которого следует $P = \rho_{\text{ат}} p^2 / 2p_{\text{ат}} + C$, $P_k = \rho_{\text{ат}} p_k^2 / 2p_{\text{ат}} + C$, $P_c = \rho_{\text{ат}} p_c^2 / 2p_{\text{ат}} + C$), будем иметь

$$p^2 = p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln(R_k/r_c)} \ln \frac{R_k}{r},$$

$$\rho w = \frac{Q_m}{2\pi h} \frac{1}{r},$$

$$Q_m = \frac{\pi k h \rho_{\text{ат}}}{\mu \rho_{\text{ат}}} \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln(R_k/r_c)}.$$

Следовательно, при плоскорадиальной фильтрации совершенного газа распределение давления в пласте определяется формулой

$$p = \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln(R_k/r_c)} \ln \frac{R_k}{r}}. \quad (20.42)$$

Сравнение кривых распределения давления в пласте при установившейся фильтрации несжимаемой жидкости (20.20) и совершенного газа (20.42) при одинаковых граничных условиях и одинаковых размерах пласта приведено на рис. 20.12. Из графиков видно, что в газовом пласте давление медленнее изменяется вблизи контура питания и более резко падает вблизи скважины, чем в нефтяном, для расчетов которых обычно принимается модель несжимаемой жидкости. А так как скорость изменения давления определяет градиент

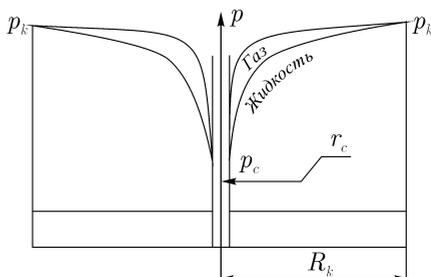


Рис. 20.12. Сравнение кривых распределения давления в пласте при установившейся фильтрации несжимаемой жидкости и совершенного газа

давления, который, в свою очередь, определяет скорость фильтрации, то указанное поведение давления в газовом пласте приводит к нарушению закона Дарси в прискважинной зоне при разработке газовых месторождений. Поэтому для прикладных расчетов фильтрационных течений совершенного газа более актуальными являются решения, которые получаются при использовании нелинейных законов фильтрации. Решение соответствующих задач и их анализ будут рассмотрены далее.

Формулу для массового дебита в газовом пласте обычно преобразуют к формуле для объемного дебита, приведенного к атмосферным условиям делением на плотность газа при атмосферном давлении,

$$Q_{\text{ат}} = \frac{Q_m}{\rho_{\text{ат}}} = \frac{\pi k h}{\mu p_{\text{ат}}} \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}}. \quad (20.43)$$

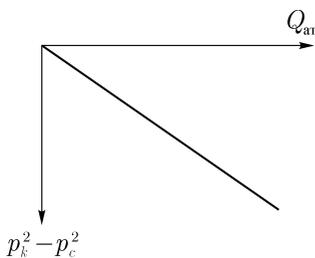


Рис. 20.13. Индикаторная линия для газовых скважин

Индикаторная линия для газовых скважин строится как график зависимости объемного дебита от $(p_k^2 - p_c^2)$. Поэтому из формулы (20.43) следует, что индикаторная линия представляет собой прямую (рис. 20.13), а коэффициент продуктивности равен

$$\frac{\pi k h}{\mu p_{\text{ат}}} \frac{1}{\ln R_k/r_c}.$$

Формулу для массовой скорости при плоскорадиальной фильтрации совершенного газа после подстановки выражения для массового дебита можно преобразовать к виду

$$\rho w = \frac{k}{\mu} \frac{\rho_{\text{ат}}}{2 p_{\text{ат}}} \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln(R_k/r_c)} \frac{1}{r}. \quad (20.44)$$

Формулы для объемного расхода и скорости фильтрации при радиальном течении в пласте совершенного газа имеют вид

$$Q(r) = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{Q_m p_{\text{ат}}}{\rho_{\text{ат}} \rho} = \frac{\pi k h}{\mu p_{\text{ат}}} \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln \frac{R_k}{r_c}} p(r), \quad (20.45)$$

$$w = \frac{Q(r)}{2\pi r h} = \frac{k}{\mu} \frac{p_k^2 - p_c^2}{2 \ln R_k/r_c} \frac{1}{p(r)r}. \quad (20.46)$$

Определим теперь средневзвешенное по поровому пространству давление при плоскорадиальной фильтрации совершенного газа

$$p = \frac{1}{V_{\Pi}} \int_V p m dV = \frac{1}{\pi h (R_k^2 - r_c^2)} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_c}^{R_k} \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln R_k/r_c} \ln \frac{R_k}{r_c}} r dr.$$

Проинтегрируем выписанное выражение по z, φ и вынесем из под знака интеграла p_k^2 , в результате получим

$$p = \frac{2p_k}{R_k^2 - r_c^2} \int_{r_c}^{R_k} \sqrt{1 - \frac{1 - p_c^2/p_k^2}{\ln R_k/r_c} \ln \frac{R_k}{r_c}} r dr. \quad (20.47)$$

Интеграл (20.47) не берется в конечном виде, поэтому вычисляется приближенно. Для наглядности проведения приближенного вычисления и упрощения выкладок введем обозначение

$$y = \frac{1 - p_c^2/p_k^2}{\ln R_k/r_c} \ln \frac{R_k}{r}.$$

Нетрудно видеть, что при $r_c < r < R_k$ для новой переменной выполняется неравенство $0 < y < 1$ (в самом деле, при $r = R_k$ имеем $\ln R_k/r = \ln 1 = 0$ и $y = 0$, при $r_c < r < R_k$ имеем $0 < \ln R_k/r / \ln R_k/r_c < 1$ и $0 < 1 - p_c^2/p_k^2 < 1$, поэтому $0 < y < 1$). Разложим радикал в ряд

$$\sqrt{1 - y} = 1 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} - \dots$$

Ограничиваясь только линейным по y членом, получим

$$\sqrt{1 - y} \approx 1 - \frac{1 - p_c^2/p_k^2}{2 \ln R_k/r_c} \ln \frac{R_k}{r}.$$

После проведенного упрощения формула (20.47) примет вид

$$p = \frac{2p_k}{R_k^2 - r_c^2} \int_{r_c}^{R_k} \left[1 - \frac{1 - p_c^2/p_k^2}{2 \ln R_k/r_c} \ln \frac{R_k}{r} \right] r dr.$$

Полученный интеграл вычисляется по частям (см. вычисление средневзвешенного по поровому пространству давления при радиальной фильтрации несжимаемой жидкости в §2), и, пренебрегая слагаемым, содержащим r_c^2/R_k^2 , получаем

$$p \approx p_k \left[\frac{1 - p_c^2/p_k^2}{4 \ln R_k/r_c} \right]. \quad (20.48)$$

Определим теперь время движения «меченых частиц» в газовом пласте при радиальной фильтрации. Подставим в формулу для определения этого времени

$$t = m \int_{r_c}^r \frac{dr}{w(r)}$$

выражение для скорости фильтрации (20.46) и получим

$$t = m \int_{r_c}^R \frac{2\mu \ln(R_k/r_c)}{k(p_k^2 - p_c^2)} p(r) dr.$$

Преобразуем выражение, подставив под знак интеграла формулу для распределения давления (20.42) при радиальной фильтрации совершенного газа, вычислим время движения «меченой частицы» от контура питания до скважины

$$T = \frac{2m\mu \ln(R_k/r_c)}{k(p_k^2 - p_c^2)} p_k \int_{r_c}^{R_k} \sqrt{\left[1 - \frac{1 - p_c^2/p_k^2}{2 \ln R_k/r_c} \ln \frac{R_k}{r}\right]} r dr.$$

Возникший здесь интеграл уже встречался при вычислении средне-взвешенного по поровому пространству давления (20.47). Поэтому, как и в предыдущем случае, проведем приближенное вычисление, раскладывая в ряд выражение под знаком интеграла. В результате получим

$$T \approx \frac{m\mu \ln(R_k/r_c)(R_k^2 - r_c^2)}{k(p_k^2 - p_c^2)} p. \quad (20.49)$$

При выводе формулы (20.49) полагалось, что пористость равна просветности. Если отказаться от этого допущения и принять связь между пористостью и просветностью в виде $m = \varphi_\alpha s_\alpha$, то формула (20.49) переписется в виде

$$T \approx \frac{m\mu \ln(R_k/r_c)(R_k^2 - r_c^2)}{\varphi_\alpha k(p_k^2 - p_c^2)} p.$$

Введение структурного коэффициента уменьшает время движения «меченых частиц».

Замечание о радиально-сферическом фильтрационном потоке совершенного газа. Используя соотношения (20.27), (20.28) и аналогию между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, можно получить основные фильтрационные характеристики и для радиально-сферического фильтрационного потока совершенного газа.

§7. Фильтрационное плоскорадиальное течение реального газа по закону Дарси

В главе XIX была введена обобщенная функция Лейбензона посредством формулы (19.20). Положим теперь, что проницаемость постоянна, а плотность связана с давлением уравнения состояния для реального га-

за (19.27). Тогда функция Лейбенсона будет иметь вид

$$P = \frac{k\rho_{\text{ат}}z(p_{\text{ат}})}{p_{\text{ат}}} \int \frac{p}{\mu(p)z(p)} dp. \quad (20.50)$$

После задания зависимостей (20.33), (20.34) и (20.35), (20.36) функцию Лейбенсона (20.50) можно использовать для решения одномерных задач фильтрации сжимаемых флюидов с учетом коэффициента сверхсжимаемости и зависимости от вязкости давления. Для примера рассмотрим решение задачи по определению дебита скважины при плоскорадиальной фильтрации.

Для расчета дебита нужно воспользоваться аналогией между фильтрацией несжимаемой жидкости и сжимаемого флюида и записать формулу для массового дебита, используя функцию Лейбенсона,

$$Q_m = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{P_k - P_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Подставив в это соотношение функцию Лейбенсона в виде (20.49), получим

$$Q_m = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{\rho_{\text{ат}}z(p_{\text{ат}})}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \int_{P_c}^{P_k} \frac{p}{\mu(p)z(p)} dp.$$

Для вычисления интеграла в полученной формуле можно воспользоваться разными методами. Наиболее простой способ состоит в том, что по графикам, представленным на рис. 19.2, определяются значения $z(p_k) = z_k$, $z(p_c) = z_c$ и $\mu(p_k) = \mu_k$, $\mu(p_c) = \mu_c$, а переменные $z(p)$ и $\mu(p)$ под знаком интеграла заменяются постоянными значениями, равными средним арифметическим

$$\tilde{z} = \frac{z_k + z_c}{2} \quad \text{и} \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu_k + \mu_c}{2}. \quad (20.51)$$

Тогда формула для массового дебита принимает вид

$$Q_m = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{\rho_{\text{ат}}z(p_{\text{ат}})}{\tilde{\mu}\tilde{z} \ln \frac{R_k}{r_c}} \int_{P_c}^{P_k} p dp.$$

Теперь интеграл вычисляется, и для массового дебита реального газа с учетом зависимости от давления и вязкости получаем формулу

$$Q_m = \frac{\pi kh}{\mu} \frac{\rho_{\text{ат}}z(p_{\text{ат}})(p_k^2 - p_c^2)}{\tilde{\mu}\tilde{z} p_{\text{ат}} \ln \frac{R_k}{r_c}}.$$

Учет отклонений свойств реального газа от определяемых по уравнению состояния совершенного газа и зависимости вязкости от давления приводит к уточнению дебита до 30% .

Замечание о расчете фильтрационных характеристик для одномерных течений упругой жидкости. Как было отмечено при выводе формулы (19.31), при малых изменениях давления функция Лейбензона для упругой жидкости совпадает с функцией Лейбензона для несжимаемой жидкости. Поэтому при установившихся фильтрационных течениях упругую жидкость можно считать несжимаемой и использовать для вычислений и расчетов решения, которые были получены для несжимаемого флюида. Однако при больших изменениях давления, например, в пласте с высоким пластовым давлением и при большой депрессии, использование уравнения состояния для несжимаемого флюида может привести к большим погрешностям. В этом случае нужно пользоваться уравнением состояния (19.23) и соответствующей ему функцией Лейбензона (19.30). Но тогда решения будут представляться экспонентами и в таком виде они обычно не используются. Поэтому рассматриваются модели совершенного или реального газа. Модель упругой жидкости в теории фильтрации используется при решении задач для неустановившихся течений.

§8. Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и газа по двухчленному закону фильтрации

Рассмотрим способы определения основных характеристик фильтрационных потоков при плоскорадиальном движении жидкости и газа с большими скоростями, когда причиной отклонения от закона Дарси являются значительные инерционные составляющие общего фильтрационного сопротивления.

Математические модели фильтрации несжимаемой жидкости и газа в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{w} &= 0, & \operatorname{div} \rho \vec{w} &= 0, \\ \operatorname{grad} p &= -\frac{\mu}{k} \vec{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\vec{w}| \vec{w}, & \operatorname{grad} p &= -\frac{\mu}{k} \vec{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\vec{w}| \vec{w}, \\ \rho &= \text{const}; & \rho &= \rho(p). \end{aligned}$$

С помощью введения функции Лейбензона обе модели допускают установления аналогии между фильтрацией жидкости и газа и при нелинейном законе фильтрации. В самом деле, умножим на плотность закон фильтрации в модели для газа и введем функцию Лейбензона. В результате

для первых двух уравнений будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{w} &= 0, & \operatorname{div} \rho \bar{w} &= 0, \\ \operatorname{grad} p &= -\frac{\mu}{k} \bar{w} - \beta \frac{\rho}{\sqrt{k}} |\bar{w}| \bar{w}; & \operatorname{grad} P &= -\frac{\mu}{k} \rho \bar{w} - \frac{\beta}{\sqrt{k}} |\rho \bar{w}| \rho \bar{w}. \end{aligned}$$

Таким образом, обе модели допускают такую же аналогию, как и при линейном законе фильтрации.

Для общности представления результатов получим решение задачи об установившейся плоскорадиальной фильтрации по двучленному закону для газа, а решение для несжимаемой жидкости выпишем, как частный случай при функции Лейбензона для уравнения состояния $\rho = \text{const}$.

Спроектируем двучленный закон фильтрации на линию тока (на координатную ось r цилиндрической системы координат) и в результате получим

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\mu}{k} \rho w_r + \frac{\beta}{\sqrt{k}} (\rho w_r)^2. \quad (20.52)$$

Чтобы дифференциальное уравнение (20.52) преобразовать к виду, удобному для интегрирования, рассмотрим уравнение неразрывности и найдем связь между расходом и скоростью фильтрации, интегрируя уравнение неразрывности. Уравнение неразрывности для установившегося течения в цилиндрической системе координат имеет вид (см. приложение П.52)

$$\frac{\partial \rho w_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho w_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \rho w_z}{\partial z} = 0.$$

Так как течение одномерное, плоскорадиальное, то все искомые функции зависят только от r , уравнение неразрывности упрощается – приводится к виду

$$\frac{d\rho w_r}{dr} = 0$$

и после интегрирования дает равенство

$$\rho w_r = C = \text{const}.$$

Умножим результат на $2\pi h$, где h – толщина пласта, и получим

$$2\pi \rho w_r h = Q_m = \text{const}.$$

Из последнего соотношения можно выразить массовую скорость фильтрации формулой

$$\rho w_r = \frac{Q_m}{2\pi h} \frac{1}{r},$$

подставить ее в (20.52) и получить

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\mu}{k} \frac{Q_m}{2\pi h} \frac{1}{r} + \frac{\beta}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q_m}{2\pi h} \right)^2 \frac{1}{r^2}.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от радиуса контура до произвольной точки в пласте, получим

$$P = P_k - \frac{\mu}{k} \frac{Q_m}{2\pi h} \ln \frac{R_k}{r} - \frac{\beta}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q_m}{2\pi h} \right)^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right). \quad (20.53)$$

Так как $r \ll R_k$, то последним выражением в круглых скобках можно пренебречь. Положив $r = r_c$, последнее соотношение перепишем в виде

$$P_k - P_c = \frac{\mu}{k} \frac{Q_m}{2\pi h} \ln \frac{R_k}{r_c} + \frac{\beta}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q_m}{2\pi h} \right)^2 \frac{1}{r_c}. \quad (20.54)$$

Формулы (20.53) и (20.54) дают распределение функции Лейбензона в пласте и связь между депрессией на пласт и дебитом, соответственно. Переходя от функции Лейбензона к давлению по формулам

$$P = \frac{\rho_{\text{ат}} P^2}{2\rho_{\text{ат}}} + C \quad \text{— для совершенного газа,}$$

$$P = \rho_0 p + C \quad \text{— для несжимаемой жидкости,}$$

найдем из (20.53) и (20.54) соотношения, для распределения давления и связи между расходом и депрессией при плоскорадиальной фильтрации по двухчленному закону. Для несжимаемой жидкости распределение давления в пласте определяется формулой

$$p = p_k - \frac{\mu}{k} \frac{Q}{2\pi h} \ln \frac{R_k}{r} - \frac{\beta\rho_0}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right), \quad (20.55)$$

связь между депрессией на пласт и расходом — формулой

$$p_k - p_c = \frac{\mu}{k} \frac{Q}{2\pi h} \ln \frac{R_k}{r_c} + \frac{\beta\rho_0}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^2 \frac{1}{r_c}. \quad (20.56)$$

Для совершенного газа распределение давления в пласте дается формулой

$$p = \sqrt{p_k - \frac{\mu}{k} \frac{Q_{\text{ат}} p_{\text{ат}}}{\pi h} \ln \frac{R_k}{r} - \frac{\beta\rho_{\text{ат}} p_{\text{ат}}}{2\sqrt{k}} \left(\frac{Q_m}{\pi h} \right)^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right)}, \quad (20.57)$$

связь между депрессией на пласт и расходом — формулой

$$p_k^2 - p_c^2 = \frac{\mu}{k} \frac{Q_{\text{ам}} p_{\text{ат}}}{\pi h} \ln \frac{R_k}{r_c} + \frac{\beta\rho_{\text{ат}} p_{\text{ат}}}{2\sqrt{k}} \left(\frac{Q_{\text{ам}}}{\pi h} \right)^2 \frac{1}{r_c}. \quad (20.58)$$

Из формул (20.56) и (20.58) видно, что индикаторные линии, построенные в координатах $Q, \Delta p$ для жидкости и $Q_{ат}, (p_k^2 - p_c^2)$ для газа, являются параболами (рис. 20.14 и 20.15).

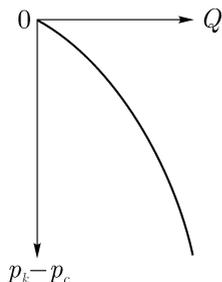


Рис. 20.14. Индикаторная линия при фильтрации жидкости по двучленному закону

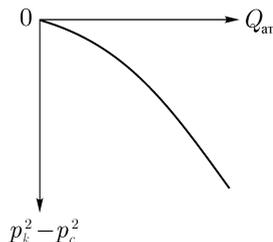


Рис. 20.15. Индикаторная линия при фильтрации газа по двучленному закону

Запишем уравнения притока к скважине в ином виде:

для несжимаемой жидкости

$$p_k - p_c = AQ + BQ^2, \quad (20.59)$$

для газа

$$p_k^2 - p_c^2 = A_1 Q_{ат} + B_1 Q_{ат}^2. \quad (20.60)$$

Здесь

$$A = \frac{\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_k}{r}, \quad B = \frac{\beta \rho_0}{\sqrt{k}(2\pi h)^2} \frac{1}{r_c},$$

$$A = \frac{\mu p_{ат}}{\pi kh} \ln \frac{R_k}{r}, \quad B = \frac{\beta \rho_{ат} p_{ат}}{2\sqrt{k}\pi^2 h^2} \frac{1}{r_c}.$$

Коэффициенты фильтрационных сопротивлений, постоянные для данной скважины. Они определяются опытным путем по данным исследования скважин при установившихся режимах. Скважины исследуются на пяти–шести режимах, на каждом из которых измеряется дебит и определяется забойное давление. Затем скважину закрывают, а установившееся давление на забое остановленной скважины принимают за контурное давление p_k . Для интерпретации результатов исследования скважин уравнения (20.59) и (20.60) делением на Q и $Q_{ат}$, соответственно, приводят к уравнению

прямой

$$\frac{p_k - p_c}{Q} = A + BQ, \quad (20.61)$$

$$\frac{p_k^2 - p_c^2}{Q} = A_1 + B_1 Q_{\text{ат}}. \quad (20.62)$$

Графики в координатах $Q, (p_k - p_c)/Q$ и $Q_{\text{ат}}, (p_k^2 - p_c^2)/Q_{\text{ат}}$ представляют собой прямые линии, для которых $A(A_1)$ – отрезок, отсекаемый на оси ординат, $B(B_1)$ – тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс (рис. 20.16).

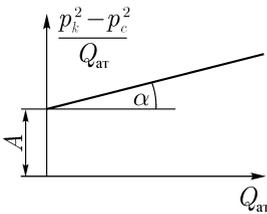


Рис. 20.16. График зависимости $(p_k^2 - p_c^2)/Q_{\text{ат}}$ от $Q_{\text{ат}}$ при фильтрации по двучленному закону

Уравнения притока (20.59) и (20.60) с экспериментально определяемыми коэффициентами широко используются в расчетах при проектировании разработки месторождений. Кроме того, по значению $A(A_1)$, найденному в результате исследования скважины, можно определить коллекторские свойства пласта, например, коэффициент гидропроводности:

для нефтяной скважины

$$\frac{kh}{\mu} = \frac{1}{2\pi A} \ln \frac{R_k}{r_c};$$

для газовой скважины

$$\frac{kh}{\mu} = \frac{p_{\text{ат}}}{\pi A_1} \ln \frac{R_k}{r_c}.$$

Уравнение притока реального газа к скважине по двучленному закону фильтрации имеет вид

$$p_k^2 - p_c^2 = \frac{\tilde{\mu}\tilde{z}}{k} \frac{Q_{\text{ам}} p_{\text{ат}}}{\pi h} \ln \frac{R_k}{r} + \frac{\beta\tilde{z} \rho_{\text{ат}} p_{\text{ат}}}{2\sqrt{k}} \left(\frac{Q_{\text{ам}}}{\pi h} \right)^2 \frac{1}{r_c}, \quad (20.63)$$

где $\tilde{\mu}$ и \tilde{z} определяются по соотношениям (20.51).

В заключение параграфа отметим, что в реальных условиях нельзя считать, что во всем пласте – от стенки скважины до контура питания – справедлив единый нелинейный закон фильтрации. При значительных дебитах закон Дарси нарушается в некоторой области вблизи забоя скважины, в то время как в остальной области пласта по-прежнему соблюдается

линейный закон. При увеличении дебита область, в которой нарушается закон Дарси, увеличивается.

§9. Плоскорадиальный фильтрационный поток несжимаемой жидкости и газа по степенному закону фильтрации

Спроектируем степенной закон фильтрации (18.45) на цилиндрическую систему координат и для плоскорадиального фильтрационного потока получим

$$w_r = c \left(\frac{dp}{dr} \right)^{1/n}, w_\varphi = w_z = 0.$$

Математическая модель, кроме закона фильтрации, содержит и уравнение неразрывности. Интегрирование уравнения неразрывности аналогично проведенному выше в §8 данной главы и приводит к тому же результату

$$2\pi\rho w_r r h = Q_m = \text{const}.$$

Поэтому выражение для массового расхода имеет вид

$$Q_m = 2\pi\rho w_r r h = 2\pi r h c \rho \left(\frac{dp}{dr} \right)^{\frac{1}{n}} = \text{const}.$$

Чтобы проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение, возведем его в степень n

$$Q_m^n = (2\pi h c)^n r^n \rho^n \left(\frac{dp}{dr} \right)$$

и преобразуем к виду

$$A = r^n \rho^n \frac{dp}{dr},$$

где $A = (Q_m / 2\pi h c)^n = \text{const}$.

Разделим переменные

$$A \frac{dr}{r^n} = \rho^n dp \tag{20.64}$$

и введем функцию давления P^\bullet

$$P^\bullet = \int \rho^n dp, \tag{20.65}$$

так что

$$dP^\bullet = d \int \rho^n dp = \rho^n p.$$

Таким образом, уравнение (20.64) можно переписать в виде

$$A \frac{dr}{r^n} = dP^*. \quad (20.66)$$

После интегрирования от забоя до контура питания, т.е. используя для интегрирования уравнения (20.66) граничные условия

$$r = r_c, P^* = P_c^* \quad \text{и} \quad r = R_k, P^* = P_k^*,$$

получаем

$$\int_{P_c^*}^{P_k^*} dP^* = P_k^* - P_c^* = \int_{r_c}^{R_k} A \frac{dr}{r^n} = \frac{A}{n-1} \left(\frac{1}{r_c^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right) \approx \frac{A}{(n-1)r_c^{n-1}}. \quad (20.67)$$

Подставив вместо A его представление через параметры пласта и фильтрационного потока, будем иметь из (20.67)

$$P_k^* - P_c^* = \frac{Q_m^n}{(2\pi h c)^n (n-1) r_c^{n-1}}.$$

Из последнего равенства получаем формулу для дебита

$$Q_m = 2\pi h c r_c^{\frac{n-1}{n}} \left[(n-1)(P_k^* - P_c^*) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (20.68)$$

Если в равенстве (20.67) в качестве нижнего предела интегрирования принять произвольную точку (r, P^*) , то получим формулу для распределения в пласте функции давления

$$P_k^* - P^* = \frac{A}{n-1} \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right) \quad (20.69)$$

или, исключив A с помощью равенства (20.67),

$$P^*(r) = P_k^* - (P_k^* - P_c^*) r_c^{n-1} \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right), \quad r_c \leq r \leq R_k. \quad (20.70)$$

Функция давления, определенная по формуле (20.65), имеет вид: для несжимаемой жидкости

$$P^* = \rho_0^n p + C, \quad (20.71)$$

для совершенного газа (при изотермической фильтрации)

$$P^* = \int \left(\frac{\rho_{\text{ат}} p}{P_{\text{ат}}} \right)^n dp = \left(\frac{\rho_{\text{ат}}}{P_{\text{ат}}} \right)^n \frac{p^{n+1}}{n+1} + C. \quad (20.72)$$

Подставляя (20.71) и (20.72) в (20.68) и (20.70), получим формулы для дебита и распределения давления для жидкости и совершенного газа, соот-

ответственно; из формулы для дебита получается и формула для скорости фильтрации.

Выпишем теперь все расчетные формулы для плоскорадиальной фильтрации по степенному закону для несжимаемой жидкости.

Для массового дебита

$$Q_m = 2\pi h \rho_0 c r_c^{\frac{n-1}{n}} \left[(n-1)(p_k - p_c) \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (20.73)$$

для объемного дебита

$$Q = 2\pi h c r_c^{\frac{n-1}{n}} \left[(n-1)(p_k - p_c) \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (20.74)$$

для распределения давления в пласте

$$p(r) = p_k - (p_k - p_c) r_c^{n-1} \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right), \quad r_c \leq r \leq R_k, \quad (20.75)$$

для скорости фильтрации

$$w = \frac{Q}{2\pi r h} = \frac{c r_c^{\frac{n-1}{n}}}{r} \left[(n-1)(p_k - p_c) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (20.76)$$

Если в формулах (20.73)–(20.76) положить $n = 2$, то получим расчетные формулы для закона фильтрации Краснопольского:

для массового дебита

$$Q_m = 2\pi h \rho_0 c \sqrt{r_c (p_k - p_c)}, \quad (20.77)$$

для распределения давления в пласте

$$p(r) = p_k - (p_k - p_c) r_c \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_k} \right), \quad r_c \leq r \leq R_k, \quad (20.78)$$

для скорости фильтрации

$$w = \frac{Q}{2\pi r h} = \frac{c r_c^{\frac{1}{2}}}{r} \left[(p_k - p_c) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (20.79)$$

Расчетные формулы для плоскорадиальной фильтрации по степенному закону для совершенного газа:

для массового дебита

$$Q_m = 2\pi h \rho_0 c r_c^{\frac{n-1}{n}} \frac{\rho_{\text{ар}}}{p_{\text{ар}}} \left[\frac{(n-1)}{(n+1)} (p_k^{n+1} - p_c^{n+1}) \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (20.80)$$

для объемного дебита, приведенного к атмосферным условиям,

$$Q_{\text{ам}} = \frac{2\pi h \rho_0 c r_c^{\frac{n-1}{n}}}{p_{\text{ар}}} \left[\frac{(n-1)}{(n+1)} (p_k^{n+1} - p_c^{n+1}) \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (20.81)$$

для распределения давления в пласте

$$p(r) = \left[p_k^{n+1} - (p_k^{n+1} - p_c^{n+1}) r_c^{n-1} \left(\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{R_k^{n-1}} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad r_c \leq r \leq R_k, \quad (20.82)$$

для скорости фильтрации

$$w = \frac{Q}{2\pi r h} = \frac{c r_c^{n-1}}{r p(r)} \left[\frac{(n-1)}{(n+1)} (p_k^{n+1} - p_c^{n+1}) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (20.83)$$

Если в формулах (20.80)–(20.83) положить $n = 2$, то получим расчетные формулы для закона фильтрации Краснопольского.

Как следует из формулы (20.75), кривая распределения давления для несжимаемой жидкости имеет формулу гиперболы степени $n - 1$, т.е. воронка депрессии, будет гиперболоидом вращения. Крутизна воронки депрессии у стенки скважины будет больше, чем у логарифмической кривой. Кривая $p(r)$ для газа (формула (20.82)) располагается еще выше, чем для жидкости (при тех же значениях p_k и p_c). Расчеты показывают, что для любых значений p_c, p_k, r_c, R_k на расстоянии одного метра до стенки скважины теряется более 80% от общей депрессии ($p_k - p_c$). Массовый расход для жидкости (формула (20.73)) пропорционален депрессии в степени $1/n$, поэтому индикаторная линия $Q = f(\Delta p)$ при $1 < n < 2$ будет иметь вид выпуклой к оси дебита степенной кривой с дробным показателем, меньшим 2-х. В случае фильтрации по закону Краснопольского, как показывает формула (20.76), индикаторная линия является параболой. На рис. 20.17 при-

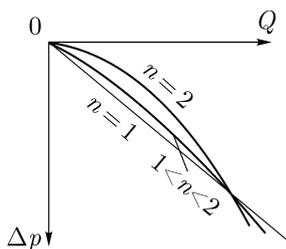


Рис. 20.17. Индикаторные линии, соответствующие различным законам фильтрации жидкости

ведены индикаторные линии для течения несжимаемой жидкости при линейном законе фильтрации ($n = 1$) и при нелинейных законах фильтрации $1 < n < 2$ и $n = 2$. Все сказанное относится также к индикаторным линиям для газа, если их строить в координатах Q_m (или $Q_{ат}$) и $p_k^{n-1} - p_c^{n-1}$. Отметим, что и для жидкости, и для газа величина расхода пропорциональна радиусу скважины в степени $(n - 1)/n$ (для закона фильтрации Краснопольского $\sqrt{r_c}$), т.е. эта зависимость гораздо более сильная, чем в случае соблюдения закона Дарси.

Скорость фильтрации вдоль линии тока изменяется при нелинейном законе фильтрации так же, как и при линейном; для жидкости w обратно пропорциональна радиусу, а для газа — обратно пропорциональна $r p(r)$.

Глава XXI

ОДНОМЕРНЫЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ ПО ЗАКОНУ ДАРСИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ

§1. Основные типы неоднородности пластов

В природных условиях продуктивные коллекторы углеводородного сырья редко бывают однородными, т.е. такими, что их фильтрационно-емкостные свойства одинаковы для всего пласта. Если проницаемость, пористость, просветность, удельная поверхность и т.д. изменяются в пласте, то такие пласты называются неоднородными.

Однако часто изменение проницаемости по пласту носит столь хаотичный характер, что значительные области пласта можно считать в среднем однородно проницаемыми. Характеристики фильтрационных потоков в таких пластах с большой точностью отвечают характеристикам потоков, рассмотренных в предыдущих параграфах для однородных пластов. Но нередко встречаются такие пласты, значительные области которых сильно отличаются друг от друга по своим фильтрационно-емкостным характеристикам. Это, так называемые макронеоднородные пласты, различие в параметрах которых существенно влияет на характеристики фильтрационных течений. При расчетах элементарных фильтрационных потоков в макронеоднородных пластах также бывает удобно прибегнуть к схематизации геометрии движения и найти такие эквивалентные значения коэффициентов фильтрационного сопротивления, применив которые, можно использовать полученные в предыдущем параграфе формулы для однородного пласта.

В пластах-коллектрах углеводородного сырья выделяют следующие основные типы макронеоднородности.

1. Слоистая неоднородность. При слоистой неоднородности пласт разделяется по толщине на несколько слоев, в каждом из которых фильтрационные характеристики считаются однородными, но различными от фильтрационных характеристик соседних слоев. Такие пласты называют также неоднородными по толщине. Границы раздела слоев с различными проницаемостями считаются плоскими. Таким образом, в модели пласта со слоистой неоднородностью предполагается, что проницаемость, пористость и т.д. изменяются только по толщине пласта и являются кусочно-постоянными функциями вертикальной координаты. При этом можно счи-

тать, что отдельные слои – пропластки разделены непроницаемыми границами (случай гидравлически изолированных слоев), либо учитывать перетоки между слоями (случай гидродинамически сообщающихся пропластков). В первом случае возможен расчет характеристик фильтрационных потоков по одномерным схемам течения. Во втором случае точный расчет требует, вообще говоря, решения двумерных задач фильтрации.

2. Зональная неоднородность. При зональной неоднородности пласта фильтрационные свойства меняются в плоскости залегания, т.е. пласт состоит из нескольких зон (областей пласта). В пределах каждой из зон фильтрационные свойства в среднем считаются одинаковыми, но на границе двух зон фильтрационно-емкостные свойства меняются скачкообразно.

3. Пласты с непрерывной или случайной неоднородностью. На практике встречаются пласты, в которых фильтрационно-емкостные свойства изменяются непрерывным или случайным образом при переходе от одной точки пласта к другой. Так как при решении прямых задач подземной гидромеханики фильтрационно-емкостные свойства считаются заданными, то для пластов с непрерывной или случайной неоднородностью эти свойства считаются заданными известными непрерывными или случайными функциями координат точек области фильтрации.

Например, при бурении скважин буровой раствор фильтруется в пласт с углеводородным сырьем и ухудшает его фильтрационные свойства. Проникновение раствора в пласт происходит равномерно при бурении, и фильтрационные свойства ухудшаются непрерывно от скважины в глубину пласта. Но подобную неоднородность можно моделировать и как зональную, и как с непрерывной неоднородностью.

Таким образом, в результате схематизации фильтрационных потоков можно выделить:

1) прямолинейно-параллельный, плоскорадиальный и радиально-сферический потоки в слоисто-неоднородном пласте;

2) прямолинейно-параллельный, плоскорадиальный и радиально-сферический потоки в зонально-неоднородном пласте;

3) прямолинейно-параллельный, плоскорадиальный и радиально-сферический потоки в пластах, в которых проницаемость является непрерывной или случайной функцией точек области фильтрации.

Очевидно, что для полноты изучения необходимо рассмотреть фильтрацию в неоднородных пластах для различных флюидов: несжимаемой и сжимаемой жидкостей и газа, а также для неньютоновской жидкости при линейном и нелинейном законах фильтрации. Однако рамки учебника не позволяют представить столь детальное рассмотрение, поэтому ограничимся изучением наиболее характерных случаев и отметим, что методологический подход при этом остается единым.

Рассмотрим одномерные потоки несжимаемой жидкости и газа в неоднородных пластах по закону Дарси.

§2. Прямолинейно-параллельный поток в слоисто-неоднородном пласте

Пусть горизонтальный пласт толщины h и ширины B состоит из n пропластков толщиной h_i с проницаемостью k_i и пористостью m_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (рис. 21.1). Пласт насыщен жидкостью или газом. На контуре питания поддерживается постоянное давление p_k , на другой его границе – на галерее, отстоящей от контура питания на расстоянии L , поддерживается постоянное давление p_r (при этом $p_k > p_r$). Тогда при отсутствии перетоков между пропластками в каждом из них имеем прямолинейно-параллельный фильтрационный поток с расчетными формулами (20.4) и (20.5) для давления, скорости фильтрации и дебита при фильтрации несжимаемой жидкости, полученными в предыдущей главе,

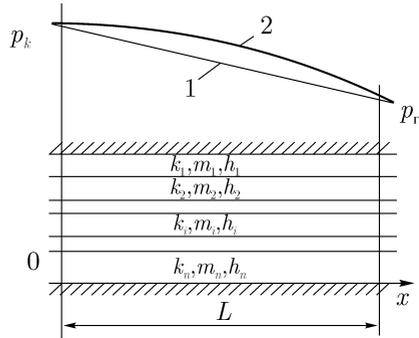


Рис. 21.1. Прямолинейно неоднородный поток в слоисто неоднородном пласте: 1 – $p(x)$ для жидкости, 2 – $p(x)$ для газа

$$p(x) = p_k - \frac{p_k - p_r}{L} x,$$

$$w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{k}{\mu} C_1 = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L},$$

$$w_x S = Q = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L} S,$$

но с той разницей, что формула для распределения давления будет одинаковой для всех пропластков, а скорость фильтрации и дебит будут в каждом пропластке свои:

$$p(x) = p_k - \frac{p_k - p_r}{L} x, \tag{21.1}$$

$$w^i = \frac{k_i}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L}, \tag{21.2}$$

$$Q^i = \frac{k_i}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L} h_i B. \tag{21.3}$$

В формулах (21.1)–(21.3) и далее в этой главе индекс i обозначает номер пропластка и изменяется от 1 до n .

Различие в формулах (21.2) и (21.3) обусловлено, очевидно, тем, что несмотря на то, что депрессия на пласт во всех пропластках одинакова, фильтрационные свойства и размеры пропластков различны. Понятно, что там, где выше проницаемость, будет больше скорость фильтрации, а дебит будет больше там, где больше размеры сечения пропластка и выше проницаемость.

Используя аналогию между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, из соотношений (21.1)–(21.3) получим формулы, выраженные через функцию Лейбенсона, которые справедливы и при фильтрации газа,

$$P(x) = P_k - \frac{P_k - P_r}{L} x, \quad (21.4)$$

$$\rho w^i = \frac{k_i}{\mu} \frac{P_k - P_r}{L}, \quad (21.5)$$

$$Q_m^i = \frac{k_i}{\mu} \frac{P_k - P_r}{L} h_i B. \quad (21.6)$$

Следовательно, если положить, что фильтруется совершенный газ и подставить в (21.4)–(21.6) выражение для функции Лейбенсона (19.32), то получим формулы для расчета фильтрации совершенного газа в слоисто-неоднородном пласте

$$p(x) = \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_r^2}{L} x}, \quad (21.7)$$

$$\rho w^i = \frac{k_i \rho_{\text{ат}}}{2\mu p_{\text{ат}}} \frac{p_k^2 - p_r^2}{L} = \frac{k_i \rho(x)}{2\mu p(x)} \frac{p_k^2 - p_r^2}{L}, \quad (21.8)$$

$$Q_m^i = \frac{k_i \rho_{\text{ат}}}{2\mu p_{\text{ат}}} \frac{p_k^2 - p_r^2}{L} h_i B. \quad (21.9)$$

Для дальнейших рассуждений опять воспользуемся аналогией между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа и проведем выкладки в общем виде и для жидкости, и для газа.

Массовый расход всего пласта можно вычислить как сумму расходов во всех отдельных пропластках

$$Q_m = \sum_{i=1}^n Q_m^i = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{\mu} \frac{P_k - P_r}{L} h_i B = \frac{B(P_k - P_r)}{\mu L} \sum_{i=1}^n k_i h_i. \quad (21.10)$$

Для гидродинамических расчетов удобно заменить формулу для потока флюида в неоднородном пласте на формулу в однородном пласте тех же

размеров, но со средней проницаемостью k_{cp} , величину которой можно определить из условия равенства дебитов, то есть из соотношения

$$Q_m = \frac{k_{cp}(P_k - P_r)}{\mu L} B h = \frac{B(P_k - P_r)}{\mu L} \sum_{i=1}^n k_i h_i, \quad (21.11)$$

откуда

$$k_{cp} = \sum_{i=1}^n k_i h_i / h, \quad h = \sum_{i=1}^n h_i. \quad (21.12)$$

Следовательно, средняя проницаемость в слоисто-неоднородном пласте не зависит от флюида и одинакова как для несжимаемой жидкости, так и для газа.

Подставив в (21.11) значения функции Лейбензона для несжимаемой жидкости и совершенного газа, получим формулы для дебита всего слоисто-неоднородного пласта:

для несжимаемой жидкости

$$Q_m = \frac{B \rho_0 (p_k - p_r)}{\mu L} \sum_{i=1}^n k_i h_i, \quad (21.13)$$

для газа

$$Q_m = \frac{B \rho_{ат} (p_k^2 - p_r^2)}{2 \mu p_{ат} L} \sum_{i=1}^n k_i h_i. \quad (21.14)$$

Время движения частиц флюида для несжимаемой жидкости, без учета разницы между пористостью и просветностью, будет определяться по формулам (20.8А) и (20.9А), но в каждом пропластке формула будет содержать свое значение пористости и проницаемости

$$t_i = \frac{m_i \mu}{k_i} \frac{L x}{p_k - p_r} \quad \text{и} \quad T_i = \frac{m_i \mu}{k_i} \frac{L^2}{p_k - p_r}.$$

Аналогично для газа формулы (20.37) и (20.38) преобразуются с учетом фильтрационных свойств каждого пропластка:

$$t_i = \frac{4 m_i \mu L^2 (p_k^3 - p^3(x))}{3 k_i (p_k^2 - p_r^2)^2} \quad \text{и} \quad T_i = \frac{4 m_i \mu L^2 (p_k^3 - p_r^3)}{3 k_i (p_k^2 - p_r^2)^2}.$$

§3. Прямолинейно-параллельный поток в зонально-неоднородном пласте

Пусть горизонтальный пласт постоянной толщины h и постоянной ширины B состоит из n зон различной проницаемости k_i , пористости m_i ,

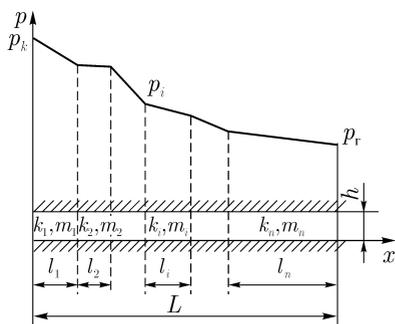


Рис. 21.2. Прямолинейно-параллельный поток в зонально-неоднородном пласте. Показана кривая $p(x)$ для жидкости

скорости фильтрации и дебита. Например, при фильтрации несжимаемой жидкости

$$p(x) = p_k - \frac{p_k - p_r}{L} x,$$

$$w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{k}{\mu} C_1 = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L},$$

$$w_x S = Q = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L} S,$$

где в качестве давления на контуре питания и галерее принимаются давления в начале и в конце зоны, соответственно, а длина равна длине зоны. По сравнению со слоисто-неоднородным пластом, в котором формула для распределения давления была одинаковой для всех пропластков, но в разных пропластках были разные скорости фильтрации и дебиты, в данном случае в каждой зоне будут одинаковы скорость фильтрации и дебит, а формула для распределения давления для каждой зоны будет своя. В самом деле, сколько втекает в пласт через контур питания, столько и вытекает из пласта через галерею. Такой вывод следует из закона сохранения массы при установившемся течении для трубки тока. Следовательно, объемный дебит во всех зонах один и тот же, но сечение пласта имеет постоянную площадь, поэтому и скорость фильтрации во всех зонах тоже одинакова. Таким образом, формулы для распределения давления, скорости фильтрации и дебита при зонально-неоднородной прямолинейно-параллельной фильтрации в каждой зоне неоднородности

длины l_i , $i = 1, 2, \dots, n$. На границах пласта поддерживаются постоянные давления p_k и p_r ($p_k > p_r$), рис. 21.2. Границы каждой зоны пласта перпендикулярны фильтрационному потоку, направленному вдоль оси x .

В пласте происходит одномерное установившееся фильтрационное течение однородного флюида. Поэтому в каждой из зон зонально-неоднородного пласта имеем прямолинейно-параллельный фильтрационный поток все с теми же расчетными формулами для давления,

пласта ($1 \leq i \leq n$) имеют вид

$$p_i(x) = p_i - \frac{p_i - p_{i+1}}{l_i} x, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (21.15)$$

$$w = \frac{k_i}{\mu} \frac{p_i - p_{i+1}}{l_i}, \quad (21.16)$$

$$Q = \frac{k_i}{\mu} \frac{p_i - p_{i+1}}{l_i} hB. \quad (21.17)$$

Из равенства (21.15) можно получить значения градиента давления в каждой зоне

$$\frac{dp_i(x)}{dx} = -\frac{p_i - p_{i+1}}{l_i}, \quad x_i < x < x_{i+1}.$$

Таким образом, градиент давления в каждой зоне постоянный, но неодинаковых в разных зонах. Поэтому график распределения давления представляется в виде ломаной линии, состоящей из отрезков прямых, наклоненных под разными углами (рис. 21.2).

Для постановки задачи достаточно задать давления только на контуре питания и на галерее. Поэтому известны только $p_1 = p_k$ при $x_1 = 0$ и

$p_{n+1} = p_r$ при $x_{n+1} = L = \sum_{i=1}^n l_i$. Следовательно, чтобы воспользоваться

для расчета формулами (21.15)–(21.17), необходимо вычислить давления на границе всех зон. Для определения этих давлений найдем формулу для дебита, выраженную через заданные в задаче параметры. Разрешим относительно депрессии формулы (21.17) для всех зон

$$\begin{aligned} p_k - p_2 &= Q\mu l_1 / k_1 Bh, \\ p_2 - p_3 &= Q\mu l_2 / k_2 Bh, \\ &\dots\dots\dots \\ p_n - p_r &= Q\mu l_n / k_n Bh. \end{aligned} \quad (21.18)$$

Нетрудно видеть, что после сложения равенств (21.18), получим

$$p_k - p_r = \frac{Q\mu}{Bh} \sum_{i=1}^n l_i / k_i.$$

Разрешив это соотношение относительно Q , получим формулу для дебита в зонально-неоднородном пласте при прямолинейно-параллельной фильтрации несжимаемой жидкости

$$Q = \frac{Bh}{\mu} \frac{p_k - p_r}{\sum_{i=1}^n l_i / k_i}. \quad (21.19)$$

С помощью формул (21.17) и (21.19) можно определить значения давления на границах зон. Для нахождения p_2 используем формулу (21.17) для первой зоны и формулу (21.19). Получим равенство

$$k_1 \frac{p_k - p_2}{l_1} = \frac{p_k - p_r}{\sum_{i=1}^n l_i / k_i},$$

в котором единственной неизвестной величиной является давление на границе первой и второй зон (все остальные величины заданы в постановке задачи). Поэтому разрешив его относительно p_2 , получим

$$p_2 = p_k - \frac{l_1}{k_1} \frac{p_k - p_r}{\sum_{i=1}^n l_i / k_i}.$$

В случае, когда неоднородный пласт состоит из двух зон неоднородности, из полученного соотношения имеем выражение для определения давления на границе зон

$$p_2 = \frac{p_k \frac{l_2}{k_2} - p_r \frac{l_1}{k_1}}{\sum_{i=1}^2 l_i / k_i}.$$

Аналогично можно определить давление и на остальных границах зон неоднородности.

Используя равенство (21.19), определим теперь среднюю проницаемость неоднородного пласта

$$Q = \frac{Bh}{\mu} \frac{p_k - p_r}{\sum_{i=1}^n l_i / k_i} = \frac{k_{\text{ср}}}{\mu} \frac{p_k - p_r}{L} Bh.$$

Из последнего соотношения следует формула для $k_{\text{ср}}$

$$k_{\text{ср}} = L / \sum_{i=1}^n l_i / k_i. \quad (21.20)$$

Таким образом, среднее значение проницаемости в зонально-неоднородном пласте определяется по иному закону, отличному от закона (21.12) для средней проницаемости в слоисто-неоднородном пласте.

Используя аналогию между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, из (21.15) – (21.17) и (21.19) получим формулы, выраженные через функцию Лейбенсона, для установившейся прямолинейно-параллельной филь-

рации газа в зонально-неоднородном пласте

$$P_i(x) = P_i - \frac{P_i - P_{i+1}}{l_i} x, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (21.21)$$

$$\rho w = \frac{k_i}{\mu} \frac{P_i - P_{i+1}}{l_i}, \quad (21.22)$$

$$Q_m = \frac{k_i}{\mu} \frac{P_i - P_{i+1}}{l_i} hB, \quad (21.23)$$

$$Q_m = \frac{Bh}{\mu} \frac{P_k - P_r}{\sum_{i=1}^n l_i / k_i}. \quad (21.24)$$

Подставив в равенства (21.21)–(21.24) функцию Лейбензона для совершенного газа, получим формулы для распределения давления, массовой скорости, массового расхода и объемного расхода, приведенного к атмосферным условиям, при установившейся прямолинейно-параллельной фильтрации совершенного газа в зонально-неоднородном пласте

$$p_i(x) = \sqrt{p_i^2 - \frac{p_i^2 - p_{i+1}^2}{l_i} x}, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (21.25)$$

$$\rho w = \frac{k_i \rho_{\text{ат}}}{2\mu \rho_{\text{ат}}} \frac{p_i^2 - p_{i+1}^2}{l_i}, \quad (21.26)$$

$$Q_m = \frac{k_i \rho_{\text{ат}}}{2\mu \rho_{\text{ат}}} \frac{p_i^2 - p_{i+1}^2}{l_i} hB, \quad (21.27)$$

$$Q_m = \frac{Bh \rho_{\text{ат}}}{2\mu \rho_{\text{ат}}} \frac{p_k^2 - p_r^2}{\sum_{i=1}^n l_i / k_i}. \quad (21.28)$$

Заметим, что с помощью формулы (21.28) можно определить среднее значение проницаемости в зонально-неоднородном пласте при фильтрации газа. Нетрудно видеть, что получим то же соотношение (21.20), что и при фильтрации несжимаемой жидкости. Такой результат представляется очевидным, если вспомнить, что проницаемость является характеристикой пористой среды и не зависит от свойств флюида.

С помощью формул (21.27) и (21.28) можно определить давления на границах зон при фильтрации газа. Для нахождения p_2 приравняем выражения по формулам (21.28) и (21.27) для дебита в первой зоне и получим равенство

$$k_1 \frac{p_k^2 - p_2^2}{l_1} = \frac{p_k^2 - p_r^2}{\sum_{i=1}^n l_i / k_i},$$

в котором единственной неизвестной величиной является давление на границе первой и второй зон (все остальные величины заданы в постановке задачи). Аналогично можно определить и остальные значения давления на границах зон неоднородности.

Время движения частиц флюида для модели несжимаемой жидкости в i -й зоне будет определяться по формулам

$$t_i = \frac{m_i \mu}{k_i} \frac{x l_i}{p_i - p_{i+1}} \quad \text{и} \quad T_i = \frac{m_i \mu}{k_i} \frac{l_i^2}{p_i - p_{i+1}}. \quad (21.29)$$

Аналогично для модели газа имеем

$$t_i = \frac{4m_i \mu l_i^2 (p_i^3 - p_{i+1}^3)}{3k_i (p_i^2 - p_{i+1}^2)^2} \quad \text{и} \quad T_i = \frac{4m_i \mu l_i^2 (p_i^3 - p_{i+1}^3)}{3k_i (p_i^2 - p_{i+1}^2)^2}. \quad (21.30)$$

Во всех формулах для определения t_i значение x изменяется в пределах $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Общее время движения частиц T в зонально-неоднородном пласте, очевидно, равно $T = \sum_{i=1}^n T_i$.

§4. О расчете пластов с непрерывной неоднородностью

Если установившееся прямолинейное движение флюида происходит в пласте, проницаемость которого изменяется непрерывно, то есть $k = k(x)$, то для расчета дебита такого пласта при фильтрации несжимаемой жидкости и газа имеем, соответственно, формулы

$$Q = -\frac{k(x)}{\mu} \frac{dp}{dx} Bh \quad \text{и} \quad Q_m = -\frac{k(x)}{\mu} \frac{dP}{dx} Bh.$$

Разделив в дифференциальных уравнениях переменные:

$$dp = -\frac{Q\mu}{Bh} \frac{dx}{k(x)} \quad \text{и} \quad dP = -\frac{Q_m \mu}{Bh} \frac{dx}{k(x)}$$

и проинтегрировав их

$$\int_{P_k}^{P_r} dp = -\frac{Q\mu}{Bh} \int_0^L \frac{dx}{k(x)} \quad \text{и} \quad \int_{P_k}^{P_r} dP = -\frac{Q_m \mu}{Bh} \int_0^L \frac{dx}{k(x)},$$

получим формулы для распределения по пласту давления и функции Лейбница, соответственно

$$P_k - P_r = \frac{Q\mu}{Bh} \int_0^L \frac{dx}{k(x)} \quad \text{и} \quad P_k - P_r = \frac{Q_m \mu}{Bh} \int_0^L \frac{dx}{k(x)}. \quad (21.31)$$

Таким образом, и в этом случае можно определить все характеристики течения флюидов, если задана функция $k(x)$.

§5. Плоскорадialный поток в слоисто-неоднородном пласте

Пусть круглый горизонтальный пласт толщины h состоит из n пропластков толщиной h_i с проницаемостью k_i и пористостью m_i , где $i = 1, 2, \dots, n$ (рис. 21.3). Пласт насыщен жидкостью или газом и в нем происходит установившийся плоскорадialный приток к центральной скважине. Контур питания удален от скважины на расстояние R_k и на нем поддерживается постоянное давление p_k , на скважине радиуса r_c поддерживается постоянное давление p_c (при этом $p_k > p_c$). Тогда, при отсутствии перетоков между пропластками, в каждом из них имеем плоскорадialный фильтрационный поток с расчетными формулами (20.20)–(20.22):

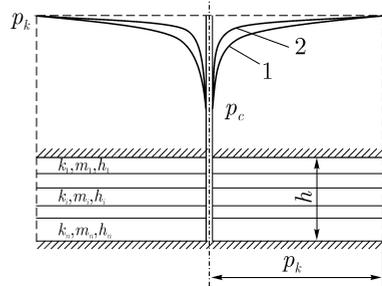


Рис. 21.3. Кривые распределения давления для жидкости (1) и для газа (2) в плоскорадialном потоке в слоисто-неоднородном пласте

$$p(r) = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln R_k/r_c} \ln \frac{R_k}{r}$$

$$w_r = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{k(p_k - p_c)}{\mu \ln R_k/r_c} \frac{1}{r}$$

$$w_r S = Q = \frac{2\pi k h (p_k - p_c)}{\mu \ln R_k/r_c}$$

для давления, скорости фильтрации и дебита при фильтрации несжимаемой жидкости с той лишь разницей, что формула для распределения давления будет одинаковой для всех пропластков, а скорость фильтрации и дебит будут в каждом пропластке свои:

$$p(r) = p_k - \frac{p_k - p_c}{\ln R_k/r_c} \ln \frac{R_k}{r}, \tag{21.32}$$

$$w_r^i = -\frac{k_i}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{k_i(p_k - p_c)}{\mu \ln R_k/r_c} \frac{1}{r},$$

$$w_r^i S_i = Q^i = \frac{2\pi k_i h_i (p_k - p_c)}{\mu \ln R_k/r_c}.$$

Дебит всего пласта определяется как сумма дебитов всех пропластков

$$Q = \sum_{i=1}^n w_r^i S_i = \sum_{i=1}^n Q^i = \frac{2\pi(p_k - p_c)}{\mu \ln R_k/r_c} \sum_{i=1}^n k_i h_i. \quad (21.33)$$

Среднее значение проницаемости пласта k_{cp} определяется из условия равенства дебитов в слоисто-неоднородном и однородном пластах

$$\frac{2\pi k_{cp} h (p_k - p_c)}{\mu \ln R_k/r_c} = \frac{2\pi (p_k - p_c)}{\mu \ln R_k/r_c} \sum_{i=1}^n k_i h_i$$

и дается выражением $k_{cp} = \sum_{i=1}^n k_i h_i / h$, где $h = \sum_{i=1}^n h_i$ – толщина всего пласта. Формулы для средней проницаемости в слоисто-неоднородном пласте оказываются одинаковыми при радиальной фильтрации и при прямолинейно-параллельной.

Используя аналогию между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, из соотношений (21.32) можно получить формулы для фильтрации в слоисто-неоднородном пласте совершенного газа

$$\begin{aligned} p(r) &= \sqrt{p_k^2 - \frac{p_k^2 - p_c^2}{\ln R_k/r_c} \ln \frac{R_k}{r}}, \\ w_r^i \rho &= -\frac{k_i}{\mu} \frac{dP}{dr} = \frac{k_i \rho_{ат} (p_k^2 - p_c^2)}{2\mu \rho_{ат} \ln R_k/r_c} \frac{1}{r}, \\ w_r^i \rho S_i &= Q_m^i = \frac{\pi k_i h_i \rho_{ат} (p_k^2 - p_c^2)}{\mu \rho_{ат} \ln R_k/r_c}. \end{aligned} \quad (21.34)$$

§6. Плоскорадialный поток в зонально-неоднородном пласте

Пусть имеется горизонтальный пласт толщиной h , состоящий из n кольцеобразных зон с различной проницаемостью k_i и пористостью m_i ($i = 1, 2, \dots, n$), при этом граница каждой зоны имеет форму боковой поверхности цилиндра, соосного скважине. На внешней границе n -й зоны, являющейся контуром питания пласта, $r = R_k$ ($r_{n+1} = R_k$), поддерживается постоянное давление p_k ($p_n = p_k$), на внутренней границе пласта, т.е. на забое скважины, $r = r_c$ ($r_1 = r_c$), поддерживается постоянное давление p_c ($p_c = p_1$) (рис. 21.4).

Из постановки задачи следует, что в пласте происходит одномерное установившееся фильтрационное течение однородного флюида. Поэтому в каж-

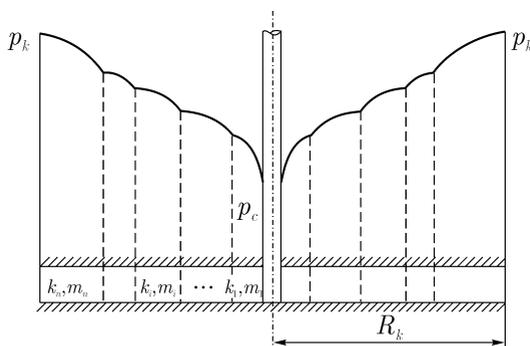


Рис. 21.4. Распределение давления в плоскорадиальном потоке несжимаемой жидкости в зонально-неоднородном пласте

дой из зон зонально-неоднородного пласта имеем плоскорадиальный фильтрационный поток с теми же расчетными формулами для давления, скорости фильтрации и дебита, что и в случае однородного пласта. Например, при фильтрации несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned}
 p_i(r) &= p_{i+1} - \frac{p_{i+1} - p_i}{\ln r_{i+1}/r_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r}, \\
 w_r^i &= -\frac{k_i}{\mu} \frac{dp}{dr} = \frac{k_i(p_{i+1} - p_i)}{\mu \ln r_{i+1}/r_i} \frac{1}{r}, \\
 w_r^i S &= Q = \frac{2\pi k_i h (p_{i+1} - p_i)}{\mu \ln r_{i+1}/r_i},
 \end{aligned}
 \tag{21.35}$$

где в качестве давлений на контуре питания и на скважине принимаются давления в начале и в конце зоны, соответственно, и вместо радиусов контура питания и скважины принимаются радиусы начала и конца зоны.

По сравнению со слоисто-неоднородным пластом, в котором формула для распределения давления была одинаковой для всех пропластков, но в каждом пропластке были разные скорости фильтрации и дебит, в данном случае во всех зонах будет одинаков только дебит, а формула для распределения давления и скорости для каждой зоны будет своя. В самом деле, сколько втекает в пласт через контур питания, столько и вытекает из пласта через скважину. Такой вывод следует из закона сохранения массы при установившемся течении. Следовательно, объемный дебит в каждой зоне один и тот же, но сечения пласта имеют различную площадь, поэтому скорость фильтрации в каждой зоне будет изменяться, даже внутри зоны она не будет постоянна. Таким образом, формулы для распределения давления,

скорости фильтрации и дебита при зонально-неоднородной плоскорадиальной фильтрации в каждой из зон неоднородности пласта ($0 \leq i \leq n$) имеют вид (21.35).

Как и в случае прямолинейно-параллельной фильтрации, формулами (21.35) воспользоваться для вычислений невозможно, так как в постановке задачи заданы давления только на контуре питания и скважины. Поэтому найдем вначале формулу для дебита, выраженную через давления, заданные в постановке задачи. Для этого разрешим формулы для дебита в каждой зоне относительно разности давлений

$$\begin{aligned} p_k - p_n &= \frac{Q\mu}{2\pi k_i h} \ln \frac{R_k}{r_n}, \\ p_n - p_{n-1} &= \frac{Q\mu}{2\pi k_{i-1} h} \ln \frac{r_n}{r_{n-1}}, \\ &\dots\dots\dots \\ p_1 - p_c &= \frac{Q\mu}{2\pi k_i h} \ln \frac{r_1}{r_c}. \end{aligned}$$

Сложив все равенства, получим уравнение

$$p_k - p_c = \frac{Q\mu}{2\pi h} \sum_{i=1}^n \frac{\ln r_{i+1}/r_i}{k_i},$$

из которого следует

$$Q = \frac{2\pi h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\sum_{i=1}^n \frac{\ln r_{i+1}/r_i}{k_i}}. \quad (21.36)$$

Используя равенство (21.36), выведем формулу для средней проницаемости

$$Q = \frac{2\pi h}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\sum_{i=1}^n \frac{\ln r_{i+1}/r_i}{k_i}} = \frac{2\pi k_{\text{cp}} h (p_k - p_c)}{\mu \ln \frac{R_k}{r_c}},$$

откуда

$$k_{\text{cp}} = \ln \frac{R_k}{r_c} / \sum_{i=1}^n \frac{\ln r_{i+1}/r_i}{k_i}. \quad (21.37)$$

С помощью формул (21.35) и (21.36) можно определить давления на границах зон. Для нахождения $p_{(2)}$ приравняем формулу (21.35), записан-

ную для дебита в первой зоне, и (21.36). Получим равенство

$$k_2 \frac{p_2 - p_c}{\ln r_2/r_c} = \frac{p_k - p_c}{\sum_{i=1}^n \frac{\ln r_{i+1}/r_i}{k_i}}, \quad (21.38)$$

в котором единственной неизвестной величиной является давление на границе первой и второй зон (все остальные величины заданы в постановке задачи). Аналогично можно определить и остальные значения давления на границах зон неоднородности.

Используя аналогию между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа, из соотношений (21.35) можно получить формулы для фильтрации совершенного газа в зонально-неоднородном пласте

$$p_i(r) = \sqrt{p_{i+1}^2 - \frac{p_{i+1}^2 - p_i^2}{\ln r_{i+1}/r_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r}}, \quad r_{i+1} \leq r \leq r_i, \quad (21.39)$$

$$w_r^i \rho = -\frac{k_i}{\mu} \frac{dP}{dr} = \frac{k_i \rho_{\text{ат}} (p_{i+1}^2 - p_i^2)}{2\mu p_{\text{ат}} \ln r_{i+1}/r_i} \frac{1}{r},$$

$$w_r^i \rho S_i = Q_m = \frac{\pi k_i h \rho_{\text{ат}} (p_{i+1}^2 - p_i^2)}{\mu p_{\text{ат}} \ln r_{i+1}/r_i}.$$

Для нахождения давлений на границах зон можно воспользоваться рассуждениями, аналогичными тем, которые были проведены для несжимаемой жидкости: получить формулу для дебита, выраженную через давления p_k и p_c , и далее получить выражение типа (21.38).

Время движения частиц может быть в каждой зоне вычислено по формулам (20.23) и (20.24) для несжимаемой жидкости и (20.49) для газа, с той лишь разницей, что в качестве контура питания и скважины выступают границы зоны неоднородности.

Не рассмотренные здесь случаи радиально-сферического притока, а также фильтрация в неоднородных пластах по нелинейным законам могут быть изучены студентами самостоятельно.

Глава XXII

ПЛОСКИЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ПОТОКИ

§1. Основные определения и понятия

В предыдущих главах рассматривались модельные задачи, в которых описывался приток флюида или к галерее, или к единственной центральной скважине в круговом пласте. Понятно, что реальные месторождения разрабатываются не одной скважиной, их количество определяется из условия обеспечения заданного отбора из месторождения углеводородного сырья. Поэтому в фильтрационных расчетах, связанных с разработкой месторождений, необходимо рассматривать множество скважин, размещенных определенным образом на площади нефтегазоносности. При этом возникают гидродинамические задачи определения давления на забоях скважин при заданных дебитах, или наоборот, дебитов при заданных давлениях.

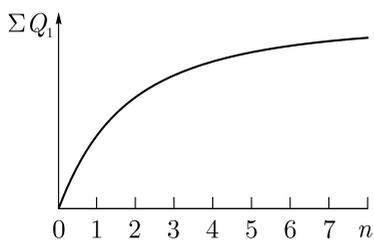


Рис. 22.1. Зависимость суммарного дебита от числа скважин

При решении этих задач нужно учитывать, что при работе нескольких скважин наблюдается их взаимное влияние друг на друга – интерференция скважин. Это влияние приводит к тому, что при вводе в эксплуатацию новых скважин суммарная добыча на месторождении растет медленнее, чем увеличивается число скважин (рис. 22.1).

Поэтому, усложняя задачи с целью более адекватного описания процессов, происходящих на месторождениях углеводородного сырья, необходимо рассмотреть постановки и решения задач, когда одновременно работают не одна, а группы скважин. Наиболее простые постановки задач получаются в том случае, когда пласт предполагается плоским, а скважины считаются точечными источниками или стоками. При решении подобных задач не только в подземной гидромеханике, но и в других разделах гидромеханики

широко используется предположение о потенциальности течения и метод суперпозиции (потенциала).

Течение называется потенциальным, если существует такая скалярная функция Φ , что градиент от нее равен вектору скорости \mathbf{v} , т.е. выполняется равенство

$$\vec{v} = -\text{grad } \Phi,$$

при этом скалярная функция Φ называется потенциалом.

Последнее равенство устроено аналогично закону Дарси

$$\vec{w} = -(k/\mu) \text{grad } p.$$

В самом деле, если k и μ константы, то

$$\vec{w} = -\text{grad}(kp/\mu) \quad (22.1)$$

и

$$\Phi = kp/\mu. \quad (22.2)$$

Поэтому фильтрационные течения в недеформируемых пластах ($k = \text{const}$) жидкостей с постоянной вязкостью потенциальны.

§2. Потенциал точечного источника и стока на изотропной плоскости. Метод суперпозиции

Назовем точечным стоком на плоскости точку, которая поглощает жидкость. В качестве стока можно рассматривать добывающую скважину, считая, что ее диаметр бесконечно мал. На плоскости вокруг точечного стока линии тока будут представлять собой прямые линии, направленные к скважине, а линии равного потенциала будут окружностями (рис. 22.2 а). Нагнетательная скважина, из которой жидкость попадает в пласт, представляет собой источник (рис. 22.2 б.).

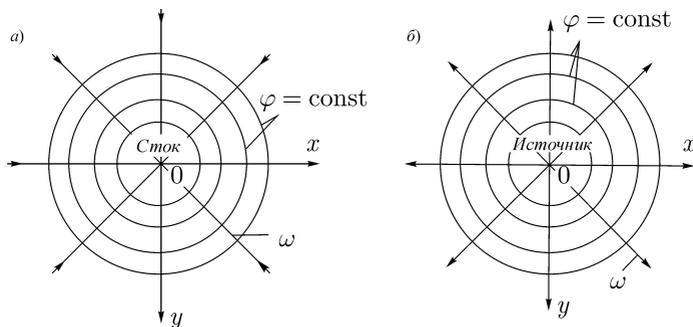


Рис. 22.2. Источник и сток на плоскости

Найдем потенциал добывающей скважины (стока). Для этого спроектируем уравнение (22.1) на цилиндрическую систему координат. В результате получим

$$w = \frac{d\Phi}{dr}. \quad (22.3)$$

Заметим, что рассматривается добывающая скважина, поэтому при проектировании скорость, направленная к полюсу полярной системы координат, проектируется на ось Or со знаком «минус», поэтому в равенстве (22.3) знак минус отсутствует. Далее, введем удельный дебит q , приходящийся на единицу толщины пласта $q = Q/h$, и выразим его через скорость фильтрации

$$q = \frac{Q}{h} = \frac{2\pi rhw}{h} = 2\pi rw.$$

Следовательно, равенство (22.3) можно переписать в виде

$$\frac{q}{2\pi r} = \frac{d\Phi}{dr}.$$

Разделим переменные в уравнении

$$\frac{q dr}{2\pi r} = d\Phi$$

и проинтегрируем его. В результате получим

$$\Phi = (q/2\pi) \ln r + C, \quad (22.4)$$

где C – постоянная интегрирования. Очевидно, что аналогичные рассуждения можно повторить и для случая, когда на плоскости находится источник, в этом случае получим

$$\Phi = -(q/2\pi) \ln r + C. \quad (22.5)$$

Уравнению Лапласа, очевидно, удовлетворяет не только давление, но и введенные равенствами (22.4) и (22.5) потенциалы

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (22.6)$$

Поскольку уравнение Лапласа линейное и однородное, его решения обладают очень важным свойством: сумма частных решений уравнения и произведение частного решения на константу также являются решением. Это свойство позволяет использовать при решении задач метод, который называется суперпозицией. Математический смысл метода суперпозиции сводится к тому, что если имеется N фильтрационных потоков с потенциалами

$$\Phi_i = (q_i/2\pi) \ln r + C_i, \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, N,$$

каждый из которых удовлетворяет уравнению Лапласа, то и линейная комбинация этих потенциалов $\Phi = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i$, где c_i – произвольные постоянные, также удовлетворяет уравнению Лапласа (22.6).

С гидродинамических позиций данный факт означает, что если найден потенциал i -ой скважины для случая, когда на пласте работает одна единственная i -ая скважина, то при совместной работе в пласте всех N скважин, решение находится алгебраическим суммированием. Суммарная скорость в пласте определяется как сумма векторов скоростей фильтрации, вызванных работой каждой из скважин. Таким образом, при совместной работе в пласте N скважин результирующий потенциал в произвольной точке M находится как сумма потенциалов всех скважин (см. рис. 22.2 а):

$$\Phi_M = \sum_{i=1}^N (q_i/2\pi) \ln r_i + C \quad \text{при} \quad C = \sum_{i=1}^N C_i \quad (22.7)$$

где r_i – расстояние от точки M до i -ой скважины ($i = 1, 2, \dots, N$), C_i – постоянные.

Вектор скорости фильтрации \vec{w} в точке M равен сумме скоростей фильтрации к каждой скважине (рис. 22.2 б).

$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \dots + \vec{w}_N, \quad (22.8)$$

где модуль вектора скорости $|\vec{w}_i|$ равен

$$|\vec{w}_i| = q_i/2\pi r_i.$$

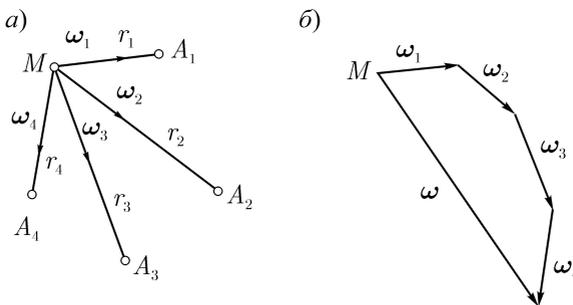


Рис. 22.3. Схема скоростей фильтрации в точке M при работе четырех скважин-стоков (а) и вычисление результирующей скорости в точке M (б)

Метод суперпозиции можно использовать как в случае бесконечного пласта, так и в случаях, когда имеется контур питания или непроницаемая граница. В последних случаях для решения задач вводятся фиктивные скважины (источники или стоки), с помощью которых удастся удовлетворить необходимым граничным условиям. Далее рассматривается работа совокупности реальных и фиктивных скважин в бесконечном пласте. Такой метод называется методом отображения источников и стоков.

Рассмотрим несколько примеров, решение которых находится с помощью метода суперпозиции и метода отображения источников и стоков, которые имеют практическое применение в теории разработки нефтяных и газовых месторождений.

§3. Приток жидкости к группе скважин в пласте с удаленным контуром питания

Используя принцип суперпозиции, рассчитаем дебиты, забойные потенциалы (давления), скорости фильтрации и т.д. для группы скважин, работающих в пласте с удаленным контуром питания.

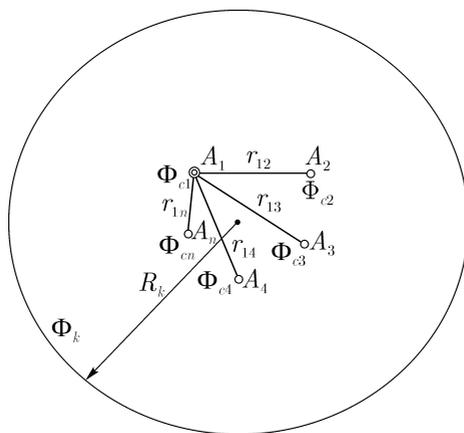


Рис. 22.4. Схема группы скважин с удаленным контуром питания

Пусть имеется n скважин (рис. 22.4) с радиусами r_i , на которых заданы потенциалы Φ_i (забойные давления p_{ci}), а также задан радиус контура питания R_k и потенциал на нем Φ_k (контурное давление p_k), известны и все расстояния между скважинами r_{ij} – расстояние между i -ой до j -ой

скважинами (очевидно, $r_{ij} = r_{ji}$). Требуется определить дебиты скважин (стоков) q_i .

Выражение для потенциала в произвольной точке М задается формулой (22.7). Поместим вначале точку М на забой каждой скважины и получим n уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_{c1} &= \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln r_{c1} + q_2 \ln r_{12} + \dots + q_n \ln r_{1n}) + C, \\ \Phi_{c2} &= \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln r_{12} + q_2 \ln r_{c2} + \dots + q_n \ln r_{2n}) + C, \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_{cn} &= \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln r_{1n} + q_2 \ln r_{2n} + \dots + q_n \ln r_{cn}) + C, \end{aligned} \quad (22.9)$$

в которые входит $n + 1$ неизвестное q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и C . Поэтому для замыкания системы уравнений добавим еще одно, которое получается при помещении точки M на контур питания:

$$\Phi_k = \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln R_k + q_2 \ln R_k + \dots + q_N \ln R_k) + C \quad (22.10)$$

Очевидно, что при написании уравнения (22.10) расстояние от всех скважин до контура питания считалось одинаковым и равным R_k .

Полученная система уравнений (22.9) и (22.10) содержит $n + 1$ уравнение и может быть разрешена. При нахождении q_i исключим из системы C . Для этого вычтем последовательно каждое из равенств (22.9) из равенства (22.10) и получим n уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_k - \Phi_{c1} &= \frac{1}{2\pi} \left(q_1 \ln \frac{R_k}{r_{c1}} + \dots + q_i \ln \frac{R_k}{r_{1i}} + \dots + q_n \ln \frac{R_k}{r_{1n}} \right), \\ &\dots\dots\dots \\ \Phi_k - \Phi_{cn} &= \frac{1}{2\pi} \left(q_1 \ln \frac{R_k}{r_{1n}} + \dots + q_i \ln \frac{R_k}{r_{in}} + \dots + q_n \ln \frac{R_k}{r_{cn}} \right). \end{aligned} \quad (22.11)$$

Система (22.11), после подстановки численных значений, представляет собой линейную систему уравнений относительно q_i и может быть разрешена с помощью любого известного метода решения линейных систем (Крамера, Гаусса и т.д.).

Рассмотрим теперь примеры на метод отображения источников и стоков.

§4. Приток жидкости к скважине в пласте с прямолинейным контуром питания

Пусть эксплуатационная скважина находится в пласте с прямолинейным контуром питания, то есть пласт представляет собой полуплоскость, через границу которой происходит приток к скважине. Расстояние от скважины до контура питания равно a , заданы потенциалы на контуре питания Φ_k и на скважине Φ_c (рис.22.5). Требуется определить дебит скважины и потенциал в любой точке пласта. В этом случае реальную скважину зеркально отображают относительно прямолинейного контура питания, но дебиту отображенной скважины приписывается знак, обратный по отношению к знаку дебита у реальной скважины.

Напишем потенциал для произвольной точки M

$$\Phi_M = \frac{1}{2\pi} (q \ln r_1 - q \ln r_2) + C$$

а затем поместим точку M сначала на стенку скважины, а потом на контур питания. В результате получим систему уравнений

$$\Phi_c = \frac{1}{2\pi} (q \ln r_c - q \ln 2a) + C,$$

$$\Phi_k = \frac{1}{2\pi} (q \ln r_k - q \ln r_k) + C.$$

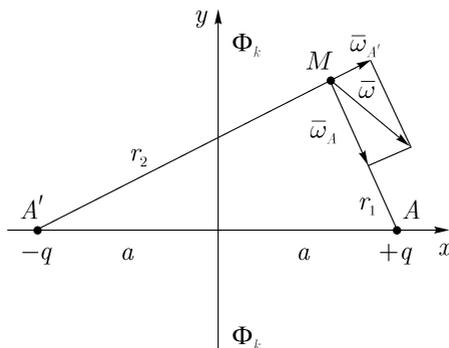


Рис. 22.5. Схема притока жидкости к скважине, работающей вблизи прямолинейного контура питания

Разрешив полученную систему уравнений относительно q , будем иметь

$$q = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln 2a/r_c}. \tag{22.12}$$

Формулу (22.12), используя выражения для потенциала (22.4), можно переписать в виде

$$Q = \frac{2\pi kh(p_k - p_c)}{\mu \ln 2a/r_c}. \tag{22.13}$$

После того, как найден дебит скважины, можно определить потенциал в любой точке пласта

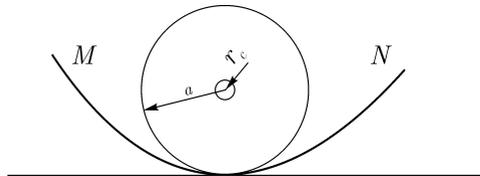
$$\Phi_M = \frac{1}{2\pi} q \ln r_1/r_2 + \Phi_k, \tag{22.14}$$

где q – определяется по формуле (22.12).

Если бы контур питания был окружностью радиуса a , то дебит определялся бы по формуле Дюпюи

$$Q = \frac{2\pi kh(p_k - p_c)}{\mu \ln a/r_c}.$$

Рис. 22.6. Схема пласта с различными контурами питания



На практике часто форма контура питания бывает неизвестна, но, очевидно, что контур питания MN (рис. 22.6) располагается между окружностью и прямой линией. Следовательно, дебит скважины в этих условиях будет находиться в пределах

$$\frac{2\pi kh(p_k - p_c)}{\mu \ln a/r_c} \geq Q \geq \frac{2\pi kh(p_k - p_c)}{\mu \ln 2a/r_c}.$$

Скорость фильтрации в точке М определяется как геометрическая сумма скоростей фильтрации, вызванная работой реальной скважины-стока и фиктивной скважины-источника (рис. 22.5), т.е.

$$\vec{w} = \vec{w}_A + \vec{w}_{A'},$$

где $|\vec{w}_A| = q/2\pi r_1$ и направлена к скважине А; $|\vec{w}_{A'}| = q/2\pi r_2$ и направлена от скважины А'. На контуре питания, где $r_1 = r_2$, очевидно, вектор скорости фильтрации перпендикулярен линии контура питания.

Из формулы (22.14) следует, что уравнение эквипотенциалей имеет вид

$$r_1/r_2 = const \quad \text{или} \quad r_1^2/r_2^2 = c$$

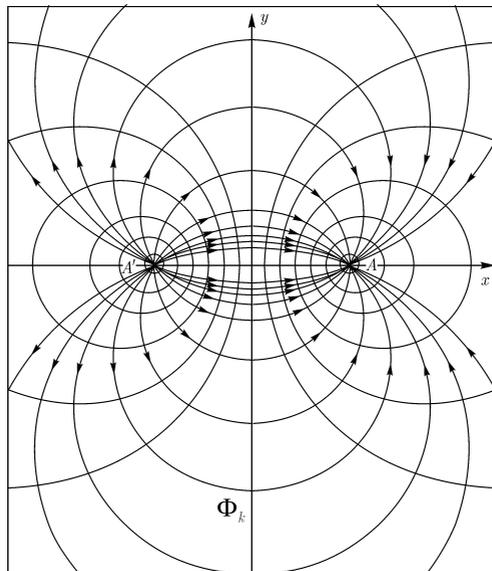


Рис. 22.7. Семейства линий тока и эквипотенциалей в потоке жидкости к скважине-стоку в пласте с прямолинейным контуром питания (или в бесконечном пласте к источнику и стоку).

Выразив r_1^2 и r_2^2 через координаты точки М(х,у) и координаты центров скважин А(0,а) и А'(0,-а), получим $r_1^2 = (x-a)^2 + y^2$ и $r_2^2 = (x+a)^2 + y^2$. Подставив эти выражения в формулу для эквипотенциалей и произведя преобразования, получим:

$$\left(x - a \frac{1+c}{1-c}\right)^2 + y^2 = \frac{4a^2c}{(1-c)^2}$$

– уравнение окружности с центром в точке $x_0 = a \frac{1+c}{1-c}$, $y = 0$ и с радиусом $R = 2a\sqrt{c}/(1-c)$.

Изменяя значения константы c , получим семейство эквипотенциалей – окружностей с разными радиусами и центрами, расположенными в разных точках оси x . Семейство линий тока представляет собой окружности, проходящие через центры обеих скважин, центры которых лежат на прямолинейном контуре питания. При этом эквипотенциали (изобары) всегда ортогональны линиям тока (рис. 22.7).

§5. Приток жидкости к скважине в пласте вблизи прямолинейной непроницаемой границы

Пусть эксплуатационная скважина находится в пласте с непроницаемой границей, то есть пласт представляет собой полуплоскость. Расстояние от скважины до непроницаемой границы равно a , заданы потенциалы на контуре питания Φ_k и на скважине Φ_c , радиус контура питания R_k (рис. 22.8). Требуется определить дебит скважины. Такая задача на практике может возникнуть в случае, когда добывающая скважина расположена вблизи сброса или границы выклинивания продуктивного пласта. В этом случае реальную скважину зеркально отображают относительно непроницаемой границы, и дебиту отображенной скважины приписывается тот же знак, что и реальной скважине.

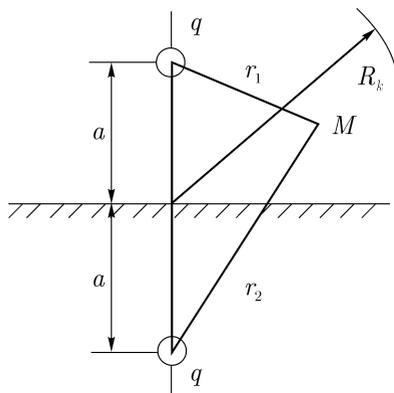


Рис. 22.8. Схема притока жидкости к скважине, работающей вблизи непроницаемой прямолинейной границы

Тогда потенциал в произвольной точке M определяется по формуле

$$\Phi_M = \frac{1}{2\pi} (q \ln r_1 + q \ln r_2) + C.$$

Поместим точку M сначала на стенку скважины, а потом на контур питания. В результате получим уравнения

$$\Phi_c = \frac{1}{2\pi} (q \ln r_c + q \ln 2a) + C \quad \text{и} \quad \Phi_k = \frac{1}{2\pi} (q \ln R_k + q \ln R_k) + C.$$

Разрешая полученную систему уравнений относительно q , будем иметь

$$q = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln R_k^2 / 2ar_c}. \quad (22.15)$$

Формулу (22.15), используя выражения для потенциала (22.4), можно переписать в виде

$$Q = \frac{2\pi kh(p_k - p_c)}{\mu \ln R_k^2 / 2ar_c}. \quad (22.16)$$

§6. Приток жидкости к скважине, эксцентрично расположенной в круговом пласте

Пусть эксплуатационная скважина находится в пласте с круговым контуром питания, но расположена на расстоянии δ от центра круга (рис.22.9). Расстояние от центра пласта до контура питания равно R_k , зада-

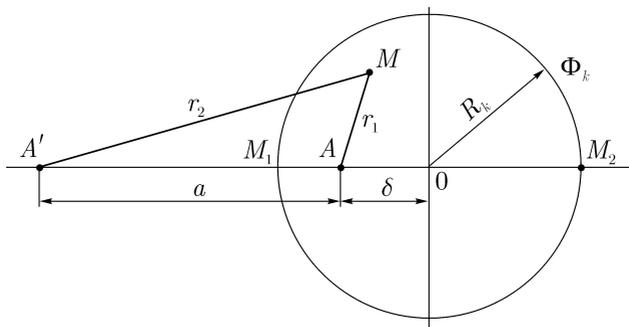


Рис. 22.9. Схема притока жидкости к скважине, эксцентрично расположенной в круговом пласте

даны потенциалы на контуре питания Φ_k и на скважине Φ_c . Требуется определить дебит скважины и потенциал в любой точке пласта. В этом случае, как и в предыдущих, реальную скважину-сток A отобразим в фиктивную скважину-источник A' , расположенную на расстоянии a от скважины

A и лежащую на продолжении линии OA . Расстояние a определим из условия постоянства потенциала на контуре и, следовательно, в точках M_1 и M_2 , лежащих на контуре питания.

По методу суперпозиции для потенциалов в точках M_1 и M_2 имеем следующие выражения

$$\Phi_k = \Phi_{M_1} = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R_k - \delta}{a - (R_k - \delta)} + C, \quad (22.17)$$

$$\Phi_k = \Phi_{M_2} = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R_k + \delta}{a + (R_k + \delta)} + C. \quad (22.18)$$

Из условия равенства потенциалов в точках M_1 и M_2 получаем уравнение для определения a

$$\frac{R_k - \delta}{a - (R_k - \delta)} = \frac{R_k + \delta}{a + (R_k + \delta)},$$

откуда

$$a = (R_k^2 - \delta^2) / \delta. \quad (22.19)$$

Для того, чтобы определить дебит скважины A , определим потенциал на ее забое

$$\Phi_c = \Phi_A = \frac{q}{2\pi} (\ln r_c - \ln a) + C. \quad (22.20)$$

Вычитая из равенства (22.17) соотношение (22.20), получим

$$\Phi_k - \Phi_c = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{a(R_k - \delta)}{r_c [a - (R_k - \delta)]}$$

или, подставив вместо a его выражение (22.19)

$$\Phi_k - \Phi_c = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{(R_k^2 - \delta^2)(R_k - \delta)}{r_c \delta \left[\frac{R_k^2 - \delta^2}{\delta} - (R_k - \delta) \right]}.$$

Преобразуя в последнем равенстве выражение под знаком логарифма и разрешая его относительно q , найдем формулу для дебита скважины, эксцентрично расположенной в круговом пласте

$$q = \frac{2\pi(\Phi_k - \Phi_c)}{\ln \frac{R_k}{r_c} \left(1 - \frac{\delta^2}{R_k^2} \right)}. \quad (22.21)$$

Заметим, что если эксцентриситет равен нулю ($\delta = 0$), то формула (22.21) превращается в формулу Дюпюи.

Для того чтобы найти потенциал во всех точках пласта, воспользуемся методом суперпозиции и выпишем потенциал в произвольной точке М

$$\Phi_M = \frac{q}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_2) + C = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + C. \quad (22.22)$$

Вычитая из равенства (22.20) соотношение (22.22) и используя равенство (22.19), получим

$$\Phi_M = \Phi_c + \frac{q}{2\pi} \left(\ln \frac{r_1}{r_2} \frac{R_k^2 - \delta^2}{r_c \delta} \right). \quad (22.23)$$

Формулу для потенциала в произвольной точке пласта можно получить и вычитая равенство (22.22) из равенства (22.17). В этом случае будем иметь

$$\Phi_M = \Phi_k - \frac{q}{2\pi} \left(\ln \frac{r_2}{r_1} \frac{\delta}{R_k} \right). \quad (22.24)$$

Очевидно, что формулы (22.23) и (22.24) эквивалентны.

§7. Об использовании метода суперпозиции при фильтрации газа

В рассмотренных выше задачах построены решения для случая установившейся фильтрации несжимаемой жидкости, а теперь обобщим полученные результаты на случай установившейся фильтрации газа.

Напомним, что метод суперпозиции основан на линейности и однородности уравнения Лапласа. Как было показано в предыдущей главе, при установившейся фильтрации уравнению Лапласа в случае фильтрации несжимаемой жидкости удовлетворяет распределение давления, а при фильтрации сжимаемой жидкости и газа - функция Лейбенсона. Поэтому и при фильтрации газа можно использовать метод суперпозиции, но для потенциалов, определенных через функцию Лейбенсона.

Напомним, что системы уравнений для моделей несжимаемой жидкости и сжимаемого флюида имеют, соответственно, вид

$$\begin{aligned} \Delta p &= 0, & \Delta P &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \text{grad } p, & \rho \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} \text{grad } P, \\ \rho &= \text{const}, & \rho &= \rho(p). \end{aligned}$$

Поэтому нужно ввести потенциал не для вектора скорости фильтрации \mathbf{w} , а для вектора массовой скорости фильтрации $\rho \mathbf{w}$, т.е. должно выполнять-

ся равенство

$$\rho \bar{w} = -\text{grad } \Phi^* . \quad (22.25)$$

Следовательно, при фильтрации газа имеем

$$\rho \bar{w} = -\text{grad } \Phi^* = -\frac{k}{\mu} \text{grad } P ,$$

откуда

$$\Phi^* = \frac{k}{\mu} P . \quad (22.26)$$

Таким образом, при установившейся фильтрации газа потенциал линейно связан с функцией Лейбензона.

Для нахождения потенциала добывающей газовой скважины (стока) спроектируем уравнение (22.25) на цилиндрическую систему координат

$$\rho w = \frac{d\Phi^*}{dr} . \quad (22.27)$$

Далее введем удельный массовый дебит q_m , приходящийся на единицу толщины пласта $q_m = Q_m/h$, и выразим его через массовую скорость фильтрации

$$q_m = \frac{Q_m}{h} = \frac{2\pi r h \rho w}{h} = 2\pi r \rho w$$

Тогда равенство (22.27) можно переписать в виде

$$\frac{q_m}{2\pi r} = \frac{d\Phi^*}{dr} .$$

Разделив переменные

$$\frac{q_m dr}{2\pi r} = d\Phi^*$$

и интегрировав последнее равенство, получим

$$\Phi^* = \frac{q_m}{2\pi} \ln r + C , \quad (22.28)$$

где C – постоянная интегрирования.

Очевидно, что аналогичные рассуждения можно повторить для случая, когда на плоскости находится источник. Тогда будем иметь

$$\Phi^* = -\frac{q_m}{2\pi} \ln r + C .$$

Подобным образом введенный потенциал также как и потенциал, введенный равенством (22.28), удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^2} = 0. \quad (22.29)$$

Поэтому для построения решений с помощью метода суперпозиции при установившейся фильтрации газа можно использовать ранее найденные решения для установившейся фильтрации несжимаемой жидкости. Аналогия между фильтрацией несжимаемой жидкости и газа устанавливается с помощью следующей замены переменных:

<i>для несжимаемой жидкости</i>	<i>для газа</i>	
$p(x)$	$P(x)$	
w	ρw	
q	q_m	(22.30)
$\Phi = \frac{k}{\mu} p$	$\Phi^* = \frac{k}{\mu} P$	

Следовательно, произведя указанную замену переменных в решениях, полученных для установившейся фильтрации несжимаемой жидкости, будем иметь формулы, описывающие установившуюся фильтрацию газа.

Система уравнений (22.11) для определения притока жидкости к группе скважин, работающих в пласте с удаленным контуром питания, для случая газовых скважин, согласно аналогии, определяемой соотношениями (22.30), преобразуется следующим образом

$$\Phi_k^* - \Phi_{c1}^* = \frac{1}{2\pi} \left(q_{m1} \ln \frac{R_k}{r_{c1}} + \dots + q_{mi} \ln \frac{R_k}{r_{1i}} + \dots + q_{mN} \ln \frac{R_k}{r_{1n}} \right), \quad (22.31)$$

.....

$$\Phi_k^* - \Phi_{cn}^* = \frac{1}{2\pi} \left(q_{m1} \ln \frac{R_k}{r_{1n}} + \dots + q_{mi} \ln \frac{R_k}{r_{in}} + \dots + q_{mN} \ln \frac{R_k}{r_{cn}} \right).$$

Формула для определения удельного дебита нефтяной скважины, работающей в пласте с непроницаемой границей (22.12), в случае работы газовой скважины, преобразуется к виду

$$q_m = \frac{2\pi(\Phi_k^* - \Phi_c^*)}{\ln R_k^2 / 2ar_c}. \quad (22.32)$$

Формулы (22.15) и (22.16) для определения удельного дебита и дебита нефтяной скважины в пласте с прямолинейным контуром питания, для га-

зовой скважины преобразуются к виду

$$q_m = \frac{2\pi(\Phi_k^* - \Phi_c^*)}{\ln 2a/r_c}, \quad (22.33)$$

$$Q_m = \frac{2\pi kh(P_k - P_c)}{\mu \ln 2a/r_c}. \quad (22.34)$$

Выражение для определения потенциала в любой точке газового пласта с прямолинейным контуром питания будет иметь вид

$$\Phi_m^* = \frac{1}{2\pi} q_m \ln r_1/r_2 + \Phi_k^*,$$

где q определяется по формуле (22.33).

Аналогичные изменения необходимо внести и в формулы для дебита скважины, эксцентрично расположенной в круговом пласте (22.21), и для определения потенциала в произвольной точке пласта (22.23) и (22.24). В результате формулы примут вид

$$q_m = \frac{2\pi(\Phi_k^* - \Phi_c^*)}{\ln \frac{R_k}{r_c} \left(1 - \frac{\delta^2}{R_k^2}\right)}, \quad (22.35)$$

$$\Phi_m^* = \Phi_c^* + \frac{q_m}{2\pi} \left(\ln \frac{r_1}{r_2} \frac{R_k^2 - \delta^2}{r_c \delta} \right),$$

$$\Phi_m^* = \Phi_k^* - \frac{q_m}{2\pi} \left(\ln \frac{r_2}{r_1} \frac{\delta}{R_k} \right). \quad (22.36)$$

Формулы (22.35) и (22.36) (также как и (22.21) – (22.24)) при $\delta \rightarrow 0$ имеют предельный переход и становятся формулами для потенциала произвольной точки в случае центральной скважины. В самом деле, имеем

$$a = \frac{R_k^2}{\delta} - \delta$$

следовательно, при $\delta \rightarrow 0$ получаем

$$r_2 \approx a \rightarrow \frac{R_k^2}{\delta} \quad \text{и} \quad r_1 \rightarrow r$$

где r расстояние от центральной скважины до произвольной точки M . Поэтому

$$\Phi_m \rightarrow \Phi_c + \frac{q}{2\pi} \left(\ln \frac{r}{r_2} \left(\frac{r_2}{r_c} \right) \right) = \Phi_c + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_c} = \Phi_k - \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R_k}{r}$$

Глава XXIII

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОМ ПЛАСТЕ

§1. Упругий режим пласта и его характерные особенности

При разработке и эксплуатации месторождений углеводородного сырья в пластах часто возникают неустановившиеся процессы, обусловленные пуском или остановкой скважин, изменением темпов отбора флюида из скважин и т.д. Для неустановившихся процессов характерно перераспределение пластового давления, изменение во времени скоростей фильтрационных потоков, дебитов скважин. Количественные характеристики неустановившихся процессов (величины изменения давления, скоростей, дебитов) зависят от упругих свойств пластов и насыщающих их жидкостей. Последнее означает, что основной формой пластовой энергии, обеспечивающей приток жидкости к скважинам в рассматриваемых неустановившихся процессах, является энергия упругой деформации жидкостей (нефти и/или воды) и твердого скелета пласта.

Математическая модель, которая будет сформулирована далее, учитывает проявление упругих сил в однофазном фильтрационном потоке, т.е. далее будет считаться, что давление в любой точке потока выше давления насыщения жидкости газом.

При пуске скважины в эксплуатацию в условиях упругого режима движение жидкости начинается за счет использования потенциальной энергии упругой деформации пласта и жидкости сначала в ближайших окрестностях забоя, затем во все более удаленных областях пласта. В самом деле, при снижении пластового давления упругое противодействие пласта вышележащему горному массиву уменьшается, и это приводит к уменьшению объема порового пространства, что, в свою очередь, увеличивает сжатие жидкости. Все это способствует вытеснению жидкости из пласта в скважину. И несмотря на то, что коэффициенты объемной упругой деформации жидкости и твердого скелета пласта очень малы, из-за того, что очень велики объемы пласта и насыщающих его флюидов, объемы жидкости, извлекаемой из пласта за счет упругости пласта и жидкости, могут быть весьма значительными.

В некоторых случаях приток жидкости к забоям скважин поддерживается и напором воды, поступающей в пласт из области питания. Тогда ре-

жим пласта следует называть упруговодонапорным. Различают и вторую разновидность упругого режима – замкнуто-упругий режим. Встречаются залежи нефти в закрытых со всех сторон пластовых «ловушках», когда на небольших расстояниях от нефтяной залежи продуктивный пласт либо выклинивается, либо экранирован сбросом. В начальной стадии разработки такой залежи, до тех пор, пока пластовое давление не снизилось до давления насыщения, имеет место замкнуто-упругий режим движения флюида.

Характерная особенность проявления упругого режима в процессе разработки нефтяных месторождений проявляется в длительности во времени процесса перераспределения пластового давления после начала работы скважины или изменения темпа отбора жидкости из скважины. Это связано с тем, что при фильтрации вязкой жидкости в пласте возникают очень большие силы сопротивления. Неустановившиеся процессы протекают тем быстрее, чем больше коэффициент проницаемости k , и тем медленнее, чем больше вязкость жидкости μ и коэффициенты объемной упругости жидкости β_j и твердого скелета пласта β_c .

Первыми исследователями, разрабатывавшими теорию упругого режима в 30-х годах 20-го века, были Маскет, Шилсуиз, Херст, Тсейс и Джекоб. Однако они не учитывали объемную упругость пласта. Наиболее полно теория упругого режима с учетом упругих свойств твердого скелета пласта и насыщающих жидкостей была разработана В.Н.Щелкачевым.

§2. Подсчет упругого запаса жидкости в пласте

Под упругим запасом жидкости в пласте понимают количество жидкости, которое можно извлечь из пласта при снижении давления в нем за счет объемной упругости твердого скелета пласта и насыщающих его жидкостей. Хотя коэффициенты объемной упругой деформации жидкости и твердого скелета пласта очень малы (см. гл. XIX), очень велики объемы пласта, поэтому упругий запас жидкости в пласте может быть весьма существенным. При снижении давления в пласте упругий запас жидкости естественно убывает, а при повышении давления происходит накопление упругого запаса жидкости в нем.

Упругий запас жидкости в пласте можно подсчитать следующим образом. Выделим мысленно элемент объема пласта V_0 . Пусть $V_{0ж}$ есть объем жидкости, насыщающей этот элемент объема пласта V_0 при начальном давлении p_0 . Упругий запас жидкости будем определять по ее объему, измеряемому при начальном пластовом давлении. Обозначим через ΔV_3 изменение упругого запаса жидкости внутри объема пласта V_0 при изменении давления во всех его точках на величину Δp . В соответствии с форму-

лами (19.22) и (19.40), заменив дифференциалы давления и объемов пор и жидкости на конечные разности, имеем

$$-\beta_{\text{ж}}V_{0\text{ж}}\Delta p = \Delta V_{\text{ж}} \quad \text{и} \quad \beta_{\text{с}}V_0\Delta p = \Delta V_{\text{п}}.$$

Для дальнейшего использования этих формул необходимо внести некоторые уточнения. При определении формулы для коэффициента объемного сжатия жидкости $\beta_{\text{ж}}$ считалось, что на жидкость действует только сжимающее гидростатическое давление, поэтому при увеличении давления (сжатие) объем жидкости уменьшается и, наоборот, при уменьшении давления объем возрастает. В результате перед коэффициентом $\beta_{\text{ж}}$ стоит знак «минус». В случае упругого режима при падении давления в пласте объем жидкости уменьшается. Такое поведение жидкости обуславливается тем, что рассматривается жидкость в порах и, как следует из формулы для $\beta_{\text{с}}$, при уменьшении давления объем пор уменьшается, а жидкость испытывает сжимающее воздействие со стороны твердого скелета. Поэтому знак минус перед $\beta_{\text{ж}}$ опускается. Полагая, что изменение упругого запаса складывается из $\Delta V_{\text{ж}}$ и $\Delta V_{\text{п}}$ получаем:

$$\Delta V_3 = \beta_{\text{ж}}V_{0\text{ж}}\Delta p + \beta_{\text{с}}V_0\Delta p. \quad (23.1)$$

Учтем, что начальный объем жидкости, насыщающей элемент объема пласта V_0 , равен полному объему пор в этом элементе

$$V_{0\text{ж}} = mV_0, \quad (23.2)$$

m – пористость пласта.

Тогда формулу (23.1) с учетом равенства (23.2) можно переписать в следующем виде:

$$\Delta V_3 = (m\beta_{\text{ж}} + \beta_{\text{с}})V_0\Delta p, \quad (23.3)$$

или

$$\Delta V_3 = \beta^*V_0\Delta p, \quad (23.4)$$

где

$$\beta^* = m\beta_{\text{ж}} + \beta_{\text{с}}. \quad (23.5)$$

Коэффициент β^* называется коэффициентом упругоэластичности пласта. Из формулы (23.4) следует, что коэффициент упругоэластичности пласта β^* численно равен изменению упругого запаса жидкости в единице объема пласта при изменении пластового давления в нем на единицу

$$\beta^* = \frac{\Delta V_3}{V_0\Delta p}.$$

Если формулы (23.3) или (23.4) относить к разрабатываемому в условиях замкнуто-упругого режима нефтяному месторождению, то под V_0 следует понимать объем пласта, в котором к данному моменту времени про-

изошло изменение давления на величину Δp , при этом, по определению, полагается что

$$\Delta p = p_k - \bar{p}, \quad (23.6)$$

где p_k – начальное пластовое давление; \bar{p} – средневзвешенное по объему возмущенной части пласта V_0 давление.

Вычислить средневзвешенное пластовое давление \bar{p} можно, если известна геометрия возмущенной части пласта и конкретное распределение давления в ней.

Дифференцируя равенство (23.4), получим

$$d(\Delta V_3) = \beta^* d[V_0(t)\Delta p].$$

С другой стороны, изменение упругого запаса жидкости в пласте за время dt , равное объему отобранной из пласта нефти, дается выражением

$$d(\Delta V_3) = Q(t)dt,$$

где $Q(t)$ – дебит всех скважин, эксплуатирующих данную нефтяную залежь.

Приравняв правые части двух последних равенств, получим дифференциальное уравнение истощения нефтяной залежи в условиях замкнуто-упругого режима

$$\beta^* d[V_0(t)\Delta p] = Q(t)dt. \quad (23.7)$$

Полученное соотношение далее будет использоваться при построении приближенных решений теории упругого режима.

§3. Математическая модель неустановившейся фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде

Изучение гидродинамики упругого режима фильтрации имеет важнейшее значение как для теории, так и для практики разработки нефтяных и газовых месторождений. Знание этих основ позволяет в наиболее полной мере использовать упругий запас пластовых флюидов для обеспечения притока к скважинам, правильно определять потенциальные возможности упругой водонапорной системы для вытеснения флюидов, ставить и решать так называемые обратные задачи определения коллекторских свойств пластов по наблюдениям за изменением дебитов или давлений и т.д. Как правило, при естественном упругом режиме добывается незначительная часть извлекаемых запасов (до 2–5%). Однако известны случаи, когда упругий запас настолько велик, что позволяет отобрать гораздо больший

процент от извлекаемых запасов. Так, например, на крупнейшем месторождении Тенгиз при упругом режиме будет отобрано до 20% запасов нефти.

Для вывода основных дифференциальных уравнений фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде необходимо воспользоваться уравнением неразрывности потока, уравнениями движения (законом Дарси) и уравнениями состояния пористой среды и насыщающей ее жидкости. При этом воспользуемся математической моделью, описанной в главе XIX, с системой уравнений (19.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{w} &= 0, \\ \bar{w} &= -\frac{k}{\mu} (\operatorname{grad} p + \rho \bar{f}), \\ \rho &= \rho(p), \quad m = m(p), \quad k = k(p), \quad \mu = \mu(p), \end{aligned} \quad (23.8)$$

которая после пренебрежения массовыми силами и введения обобщенной функции Лейбензона, преобразуется к виду (19.21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial m\rho}{\partial t} - \Delta P &= 0, \\ \rho \bar{w} &= -\operatorname{grad} P, \\ \rho &= \rho(p), \quad m = m(p), \quad k = k(p), \quad \mu = \mu(p), \\ P &= \int \frac{k(p)}{\mu(p)} \rho(p) dp. \end{aligned} \quad (23.9)$$

В качестве уравнений состояния среды и жидкости воспользуемся уравнениями состояния упругой жидкости и упругой пористой среды в ранее полученной форме (19.24) и (19.42):

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_j (p - p_0)], \quad (23.10)$$

$$m = m_0 + \beta_c (p - p_0). \quad (23.11)$$

Для проницаемости и вязкости примем $k = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$, однако заметим, что, как показывают результаты лабораторных экспериментов, а также опыт разработки месторождений, в ряде случаев наряду с изменением пористости вследствие возникающих деформаций, происходят и изменения проницаемости пластов. Особенно это относится к глубоко залегающим месторождениям углеводородов. Понятно, что данное обстоятельство не учитывается в рассматриваемой модели. Однако введение еще одного уравнения состояния $k = k(m(p))$ приведет к существенному усложнению модели. Поэтому, несмотря на то, что развитию теории упругого

режима с учетом зависимости $k = k(m(p))$ посвящено большое число исследований, изложение этого раздела в более общей постановке заметно усложнило бы изложение, и авторы считают целесообразным, сохранив традиционный подход, рекомендовать читателям обратиться к посвященным этому вопросу монографиям самостоятельно.

§4. Вывод дифференциального уравнения фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде по закону Дарси

Обратимся теперь к математической модели неустановившегося движения упругого флюида, подчиняющегося закону Дарси, в деформируемой пористой среде (23.9) с уравнениями состояния (23.10) и (23.11) и при $k = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. Полная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial m\rho}{\partial t} - \Delta P &= 0, \\ \rho\vec{w} &= -\text{grad } P, \\ \rho &= \rho_0[1 + \beta_{\text{ж}}(p - p_0)], \\ m &= m_0 + \beta_{\text{с}}(p - p_0), \\ k &= \text{const}, \mu = \text{const}, \\ P &= \frac{k}{\mu} \int \rho dp. \end{aligned}$$

Понятно, что все уравнения системы определяют математическую модель, но для постановки и решения задач в рамках модели желательно преобразовать уравнения и получить одно дифференциальное уравнение для одной искомой функции. Для этой цели рассмотрим первое уравнение системы.

Подставив в него функцию Лейбензона, получим

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \Delta \int \rho dp. \quad (23.12)$$

Теперь преобразуем выражение в левой части уравнения (23.12), для чего используем уравнения состояния упругой жидкости и упругой пористой среды (23.10) и (23.11)

$$\rho = \rho_0[1 + \beta_{\text{ж}}(p - p_0)], \quad m = m_0 + \beta_{\text{с}}(p - p_0),$$

и вычислим произведение $m\rho$

$$m\rho = m_0\rho_0 + (m_0\rho_0\beta_{\text{ж}} + \rho_0\beta_{\text{с}})(p - p_0) + \rho_0\beta_{\text{с}}\beta_{\text{ж}}(p - p_0)^2.$$

Последним слагаемым в правой части полученного выражения ввиду его малости по сравнению с двумя другими слагаемыми можно пренебречь

(напомним, что для нефтей $\beta_{\text{ж}}$ изменяется в диапазоне от $7 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ до $30 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, а для пластовых вод диапазон изменения лежит в пределах от $2,7 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ до $5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, и что коэффициент объемной упругости пласта составляет $\beta_{\text{с}} = (0,3 - 2) \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$). Тогда, с учетом (23.5), получим

$$m\rho = m_0\rho_0 \left[1 + \beta^* (p - p_0)/m_0 \right],$$

откуда после дифференцирования выражения по времени t находим

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = \rho_0\beta^* \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (23.13)$$

Теперь преобразуем правую часть равенства (23.12)

$$\frac{k}{\mu} \Delta \left(\int \rho dp \right).$$

Подставив под знак интеграла уравнение состояния упругой жидкости (23.10), получим

$$\frac{k}{\mu} \Delta \left(\int \rho dp \right) = \frac{k}{\mu} \Delta \left(\rho_0 p + \rho_0 \beta_{\text{ж}} \left(\frac{p^2}{2} - p_0 p \right) + C \right), \quad (23.14)$$

но снова учитывая, что жидкость слабосжимаемая и коэффициент $\beta_{\text{ж}}$ мал, пренебрежем вторым слагаемым и в результате получим

$$\frac{k}{\mu} \Delta \left(\int \rho dp \right) = \frac{k}{\mu} \rho_0 \Delta p. \quad (23.15)$$

Подставив (23.13) и (23.15) в исходное дифференциальное уравнение (23.12), получим дифференциальное уравнение относительно давления

$$\beta^* \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \Delta p, \quad (23.16)$$

или в декартовой системе координат

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right), \quad (23.17)$$

где введено обозначение

$$\kappa = k/(\mu\beta^*). \quad (23.18)$$

Уравнение (23.16) – основное дифференциальное уравнение теории упругого режима фильтрации. По предложению В.Н.Щелкачева, оно названо уравнением пьезопроводности. Дифференциальное уравнение пьезопроводности относится к уравнениям типа уравнения теплопроводности (уравнения Фурье), которое является одним из основных уравнений математической физики.

Коэффициент κ , характеризующий скорость перераспределения пластового давления при неустановившейся фильтрации упругой жидкости в

упругой пористой среде, В.Н.Щелкачев назвал коэффициентом пьезопроводности пласта по аналогии с коэффициентом температуропроводности в уравнении теплопроводности.

Размерность коэффициента пьезопроводности κ можно установить из (23.18):

$$[\kappa] = \frac{k}{[\mu][\beta^*]} = \frac{L^2}{L^{-1}MT^{-1}LM^{-1}T^2} = \frac{L^2}{T},$$

где L , M , T – соответственно, размерности длины, массы и времени. Наиболее часто встречающиеся в нефтепромысловой практике значения коэффициента пьезопроводности заключены в пределах от 0,1 до 5 м²/с.

Отметим, что уравнение пьезопроводности (23.16) применимо только для слабосжимаемой упругой жидкости, для которой $\beta_*(p - p_0) \ll 1$. Если же это условие не выполняется, то при переходе от (23.14) к (23.15) нельзя пренебрегать слагаемым с β_* . Данное обстоятельство приведет к тому, что дифференциальное уравнение значительно усложнится и станет нелинейным.

§5. Одномерные фильтрационные потоки упругой жидкости. Точные решения уравнения пьезопроводности. Основная формула теории упругого режима

Рассмотрим наиболее простые точные решения уравнения пьезопроводности (23.16) для одномерных потоков.

5.1. Прямолинейно-параллельный фильтрационный поток упругой жидкости

Случай 1. Приток к галерее, на которой поддерживается постоянное давление. Пусть в полубесконечном горизонтальном пласте постоянной толщины h и ширины B начальное пластовое давление всюду постоянно и равно p_k . На галерее (при $x = 0$) давление мгновенно снижено до p_r и в дальнейшем поддерживается постоянным (т.е. $p_r = \text{const}$). В удаленных точках ($x \rightarrow \infty$) давление в любой момент времени остается равным p_k .

При этих условиях в упругом (деформируемом) пласте образуется неустановившийся прямолинейно-параллельный поток упругой жидкости. Давление в любой точке потока x и в любой момент времени t можно определить, интегрируя уравнение пьезопроводности (23.17), которое для одномерного течения в декартовой системе координат запишется в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty. \quad (23.19)$$

Начальные и граничные условия, сформулированные выше и записанные в виде математических соотношений, будут следующие:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_k \text{ при } t = 0; \\ p(x, t) &= p_r \text{ при } x = 0, \quad t > 0; \\ p(x, t) &= p_k \text{ при } x = \infty, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (23.20)$$

Задача заключается в определении дебита галереи $Q(t)$ и давления в любой точке потока, в любой момент времени, то есть функции $p(x, t)$.

Используя анализ размерностей, покажем, что поставленная задача автомодельна, т. е. из аргументов, от которых зависит давление, можно составить один безразмерный комплекс, от которого будет зависеть искомая функция $p(x, t)$.

Обозначим через $P = (p - p_r)/(p_k - p_r)$ безразмерное давление, которое, как следует из соотношений (23.19) и (23.20), зависит от времени t , координаты x и коэффициента пьезопроводности κ , т. е.

$$P = f(x, t, \kappa).$$

Размерности этих аргументов следующие: $[x] = L$, $[t] = T$, $[\kappa] = L^2 T^{-1}$, и из них можно составить безразмерный комплекс $x/\sqrt{\kappa t}$. Приняв за новую переменную безразмерную величину $u = x/(2\sqrt{\kappa t})$, сведем задачу к нахождению безразмерного давления P , зависящего только от u (автомодельной переменной), $P = f(u)$. В результате подобного перехода граничные условия (23.20) запишутся в виде

$$\begin{aligned} P &= 0 \text{ при } u = 0, \\ P &= 1 \text{ при } u = \infty. \end{aligned} \quad (23.21)$$

В силу линейности дифференциального уравнения (23.19) для безразмерного давления P имеем такое же уравнение, как и для размерного p ,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (23.22)$$

Используя правило дифференцирования сложных функций, частные производные по координате и времени можно выразить через производные по безразмерной (автомодельной) переменной. Выполняя дифференцирование, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{dP}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dP}{du} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{dP}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dP}{du} \frac{x}{2\sqrt{\kappa}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{t^3}} \right) = \frac{dP}{du} \left(-\frac{u}{2t} \right), \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dP}{du} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{d^2 P}{du^2} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2 P}{du^2}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения производных в уравнение (23.22), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2P}{du^2} + 2u \frac{dP}{du} = 0, \tag{23.23}$$

которое должно быть решено при условиях (23.21). Для решения уравнения (23.23) обозначим $dP/du = \xi$, тогда уравнение (23.23) принимает вид

$$\frac{d\xi}{du} + 2u\xi = 0. \tag{23.24}$$

Разделив переменные в (23.24), будем иметь

$$\frac{d\xi}{\xi} = -2udu$$

и далее, проинтегрировав, получим

$$\ln \xi = -u^2 + \ln C_1,$$

потенцируя которое, найдем

$$\xi = \frac{dP}{du} = C_1 e^{-u^2}, \tag{23.25}$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Проинтегрировав (23.25) с учетом первого из условий (23.21), получим:

$$P = C_1 \int_0^u e^{-u^2} du.$$

Вторым условием (23.20) воспользуемся для нахождения константы интегрирования C_1 . Устремим переменный верхний предел u в интеграле к бесконечности и получим

$$1 = C_1 \int_0^\infty e^{-u^2} du.$$

Из интегрального исчисления известно, что $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$, поэтому предыдущее соотношение дает $C_1 = 2/\sqrt{\pi}$, и окончательно получим

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-u^2} du. \tag{23.26}$$

Интеграл (23.26) называется интегралом вероятности, является табулированной функцией, изменяющейся в пределах от 0 до 1 и имеет специ-

альное обозначение

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} e^{-u^2} du = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right).$$

Таким образом, $P = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)$, и закон распределения давления в неустановившемся прямолинейно-параллельном фильтрационном потоке упругой жидкости имеет вид

$$p = p_r + (p_k - p_r) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right). \quad (23.27)$$

Типичные кривые распределения давления в различные моменты времени в неустановившемся прямолинейно-параллельном потоке упругой жидкости в галерее, пущенной в эксплуатацию с постоянным забойным давлением $p_r = \text{const}$, приведены на рис. 23.1.

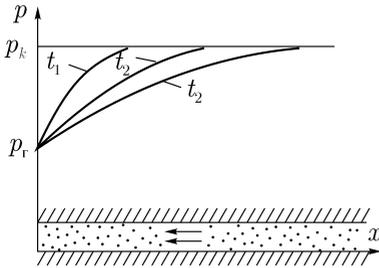


Рис. 23.1. Кривые распределения давления в различные моменты времени в неустановившемся прямолинейно-параллельном потоке упругой жидкости при условии $p_r = \text{const}$

Найдем дебит галереи Q . Будем считать положительным дебит, отбираемый из галереи ($x = 0$), когда поток движется против оси x и $\partial p / \partial x > 0$. Согласно закону Дарси

$$w = \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0}, \quad Q = \frac{k}{\mu} Bh \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0}, \quad (23.28)$$

где B, h – соответственно, ширина и толщина пласта. Продифференцировав выражение (23.27), получим

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0} = (p_k - p_r) \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)^2} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}\right)_{x=0} = \frac{p_k - p_r}{\sqrt{\pi \kappa t}}. \quad (23.29)$$

Дебит галереи в любой момент времени найдем, подставив значение градиента давления $\partial p / \partial x$ из (23.29) в выражение (23.28),

$$Q = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{\sqrt{\pi \kappa t}} Bh. \quad (23.30)$$

Из формулы (23.30) следует, что дебит галереи убывает с течением времени, как $1/\sqrt{t}$, и при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю. В момент времени $t = 0$ формула (23.30) дает бесконечное значение дебита, и это обстоятельство является следствием скачка давления на галерее (от p_k до p_r) в начальный момент времени.

Накопленная к моменту t добыча (объем добытой нефти) $V_{\text{доб}}$ определяется по формуле

$$V_{\text{доб}} = \int_0^t Q(t)dt = \frac{k(p_k - p_r)Bh}{\mu\sqrt{\pi k t}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2k(p_k - p_r)Bh}{\mu\sqrt{\pi k}} \sqrt{t},$$

т.е. сразу после начала отбора из галереи она быстро возрастает, а в дальнейшем растет очень медленно (рис. 23.2).

Случай 2. Приток к галерее, на которой поддерживается постоянный дебит. Пусть в таком же полубесконечном пласте, что и в случае 1, в момент времени $t = 0$ пущена в эксплуатацию галерея, но теперь будем считать, что на галерее поддерживается постоянный объемный дебит Q . Требуется найти давление в любой точке пласта в любой момент времени.

Математически задача заключается в интегрировании того же уравнения (23.22), но с иными начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_k \quad \text{при } t = 0; \\ w(x, t) &= \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = w_1 = \text{const} \quad \text{при } x = 0, t > 0; \\ p(x, t) &= p_k \quad \text{при } t > 0, x \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{23.31}$$

Первое условие, как и в первом случае, задает распределение давления в пласте до пуска галереи, из него следует, что давление во всех точках пласта в начальный момент времени постоянно и равно контурному. Второе условие задает постоянство дебита на галерее после ее пуска. Из третьего условия следует, что граница возмущенной зоны с ростом времени перемещается к бесконечности.

Для интегрирования уравнения пьезопроводности в данном случае умножим обе части уравнения (23.22) на k/μ и далее продифференцируем

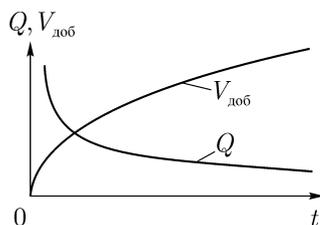


Рис. 23.2. Зависимости дебита и добычи жидкости от времени после пуска галереи при условии $p_r = \text{const}$

по x . В результате получим

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = \frac{k}{\mu} \kappa \frac{\partial^3 p}{\partial x^3},$$

откуда, поменяв порядок вычисления производных, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (23.32)$$

Так как

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = w(x, t),$$

то уравнение (23.32) можно переписать в виде

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}. \quad (23.33)$$

Уравнение (23.33) по форме также совпадает с уравнением теплопроводности (23.22). Следовательно, решением уравнения (23.33) будет решение, аналогичное (23.26), с заменой давления p на скорость фильтрации w

$$w = C_1 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + C_2. \quad (23.34)$$

При этом следует иметь в виду, что начальные и граничные условия для w имеют вид:

$$w(x, 0) = 0, \quad w(0, t) = w_1.$$

Используя эти условия, найдем константы интегрирования.

При $t = 0$ из (23.34) следует

$$0 = C_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du + C_2.$$

Так как $\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$, получаем

$$0 = C_1 + C_2.$$

Второе условие, при $x = 0$, дает

$$w_1 = C_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^0 e^{-u^2} du + C_2.$$

Из этих двух равенств имеем $C_2 = w_1$, $C_1 = -w_1$ и, следовательно,

$$w(x, t) = w_1 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right] = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (23.35)$$

Чтобы найти распределение давления в потоке, необходимо проинтегрировать уравнение (23.35) по x при фиксированном времени t .

$$\frac{k}{\mu} \int_0^x \frac{\partial p}{\partial x} dx = w_1 \int_0^x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{kt}}} e^{-u^2} du \right) dx .$$

Выполнив интегрирование, получаем

$$p(x, t) - p(0, t) = \frac{\mu}{k} w_1 x - \frac{\mu}{k} \frac{2}{\sqrt{\pi}} w_1 \int_0^x \left(\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{kt}}} e^{-u^2} du \right) dx . \quad (23.36)$$

Последнее слагаемое в (23.36) интегрируется по частям

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{k} \frac{2}{\sqrt{\pi}} w_1 \int_0^x \left(\int_0^{\frac{x/2\sqrt{kt}}{}} e^{-u^2} du \right) dx = \\ & = \frac{\mu}{k} \frac{2}{\sqrt{\pi}} w_1 \left[x \times \int_0^{x/2\sqrt{kt}} e^{-u^2} du \Big|_0^x - \int_0^x x e^{-x^2/4kt} \frac{dx}{2\sqrt{kt}} \right] = \\ & = \frac{2\mu w_1}{k\sqrt{\pi}} \left[x \times \int_0^{x/2\sqrt{kt}} e^{-u^2} du - \sqrt{kt} (1 - e^{-x^2/4kt}) \right]. \end{aligned}$$

Поэтому уравнение (23.36) можно записать в виде

$$p(x, t) - p(0, t) = \frac{\mu w_1}{k} x \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{1 - e^{-x^2/4kt}}{\frac{\sqrt{\pi} x}{2\sqrt{kt}}} \right]. \quad (23.37)$$

С учетом того, что $p(0, t)$ есть давление на галерее, т.е. $p(0, t) = p_r(t)$, из (23.37) запишем выражение для давления в любой точке потока:

$$p(x, t) = p_r + \frac{\mu w_1}{k} \left[x \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} \right) \right) + \frac{2\sqrt{kt}}{\sqrt{\pi}} (1 - e^{-x^2/4kt}) \right]. \quad (23.38)$$

Чтобы найти закон изменения давления на галерее $p_r(t)$, подставим в (23.38) граничное условие $p(x, t) = p_k$ при $x \rightarrow \infty$. Так как при $x \rightarrow \infty$ $\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} \right) \rightarrow 1$, то произведение $x \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} \right) \right)$ дает неопределенность вида $\infty \times 0$. Раскрывая ее по правилу Лопиталья, можно показать, что

это произведение стремится к нулю. Учитывая также, что $e^{-x^2/4\kappa t} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, получаем

$$p_r(t) = p_k - \frac{2\mu w_1}{k\sqrt{\pi}} \sqrt{\kappa t}$$

или

$$p_r(t) = p_k - \frac{Q\mu}{Bh} \frac{2}{k} \frac{\sqrt{\kappa t}}{\sqrt{\pi}}. \quad (23.39)$$

Нетрудно видеть, что решение (23.39) при очень больших значениях времени теряет физический смысл. В самом деле, так как процесс во времени не ограничен, то можно указать такие значения t , при которых $p_r(t) < 0$. Полученный результат означает, что принятое граничное условие – задание $w(0, t) = \text{const} = w_1$ является слишком «жестким», для его реализации требуются отрицательные давления при больших временах t . Реально эти давления возникать не будут – возникнет кавитация вблизи галереи.

5.2. Плоскорadiaльный фильтрационный поток упругой жидкости. Основная формула теории упругого режима фильтрации

Пусть в неограниченном горизонтальном пласте постоянной толщины h имеется добывающая скважина «нулевого» радиуса (точечный сток). Начальное пластовое давление во всем пласте одинаково и равно p_k . В момент времени $t = 0$ скважина пущена в эксплуатацию с постоянным объемным дебитом Q_0 . В результате в пласте образуется неустановившийся плоскорadiaльный поток упругой жидкости.

Распределение давления в пласте (в любой его точке в любой момент времени) $p(r, t)$ определяется интегрированием уравнения (23.16), которое для радиального течения в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (23.40)$$

Начальные и граничные условия задачи следующие:

$$\begin{aligned} p(r, t) &= p_k \quad \text{при } t = 0, \\ p(r, t) &= p_k \quad \text{при } t > 0 \text{ и } r \rightarrow \infty, \\ Q &= \frac{2\pi k h}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} = Q_0 = \text{const} \quad \text{при } t > 0. \end{aligned} \quad (23.41)$$

Первое условие означает, что до момента времени $t = 0$ во всем пласте давление было постоянным и равным контурному. Второе условие показывает, что граница возмущенной зоны (т.е. значение радиуса, на котором давление равно контурному) перемещается с ростом времени и для больших времен стремится к бесконечности. Из третьего условия следует, что дебит скважины поддерживается постоянным.

Последнее условие запишем в виде

$$\left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} = \frac{Q_0 \mu}{2\pi k h}. \tag{23.42}$$

Так же, как в предыдущем случае, проведем анализ размерностей. Искомое распределение давления в пласте зависит от пяти определяющих параметров: $r, t, \kappa, p_\kappa, Q_0 \mu / (2\pi k h)$, размерности которых следующие:

$$[r] = L, [t] = T, [\kappa] = L^2 T^{-1}, [p_\kappa] = [p],$$

$$\left[\frac{Q_0 \mu}{2\pi k h} \right] = [p],$$

где $[p]$ – размерность давления. Из этого следует, что давление, приведенное к безразмерному виду, $P = p/p_\kappa$, зависит только от двух безразмерных параметров (так как из пяти параметров три имеют независимые размерности (r, t, p_κ)), то есть можно записать

$$P = f \left(\xi, \frac{Q_0 \mu}{2\pi k h p_\kappa} \right), \quad \xi = \frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}. \tag{23.43}$$

Таким образом, задача автомодельна, и уравнение (23.40) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению. Продифференцируем (23.43) и найдем представление частных производных по независимым переменным t и r через производные по автомодельной переменной:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{dP}{d\xi} \frac{\xi}{2t}, \quad \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{dP}{d\xi} \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2 P}{d\xi^2}.$$

Подставив полученные выражения в уравнение (23.40), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 P}{d\xi^2} + \left(\frac{1}{\xi} + 2\xi \right) \frac{dP}{d\xi} = 0, \tag{23.44}$$

которое нужно проинтегрировать при условиях, полученных из (23.41) преобразованием к безразмерному виду,

$$P(\xi) = 1 \text{ при } \xi \rightarrow \infty,$$

$$\left(\xi \frac{dP}{d\xi} \right)_{\xi=0} = \frac{Q_0 \mu}{2\pi k h p_\kappa}. \tag{23.45}$$

Воспользуемся подстановкой

$$\frac{dP}{d\xi} = v$$

и из уравнения (23.44) получим

$$\frac{dv}{d\xi} + \left(\frac{1}{\xi} + 2\xi \right) v = 0,$$

или

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{dv}{v} = -2\xi d\xi. \quad (23.46)$$

Проинтегрировав (23.46), получим

$$\ln \xi + \ln v = -\xi^2 + \ln C_1, \quad (23.47)$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Потенцируя (23.47), найдем:

$$v = \frac{dP}{d\xi} = C_1 \frac{e^{-\xi^2}}{\xi}. \quad (23.48)$$

Проинтегрируем (23.48) в пределах от ξ до бесконечности, утя первое из условий (23.41), и получим

$$P(\xi) = -C_1 \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} d\xi + 1. \quad (23.49)$$

Умножая равенство (23.49) на ξ , устремляя $\xi \rightarrow 0$ и используя второе условие (23.45), найдем величину C_1

$$C_1 = \frac{Q_0 \mu}{2\pi k h p_k}.$$

Тогда (23.49) преобразуется к виду

$$P(\xi) = 1 - \frac{Q_0 \mu}{2\pi k h p_k} \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} d\xi \quad (23.50)$$

Интеграл в последней формуле легко свести к табличному подстановкой

$$u = \xi^2 = \frac{r^2}{4\kappa t}, \quad \frac{d\xi}{\xi} = \frac{du}{2u}.$$

Перейдя также от безразмерного давления P к размерному $p = P p_k$, будем иметь окончательно

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q_0 \mu}{2\pi k h} \int_{r^2/(4\kappa t)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du. \quad (23.51)$$

Интеграл в формуле (23.51) называется интегральной показательной функцией, которая табулирована и имеет специальное обозначение

$$- \text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa t} \right) = \int_{r^2/(4\kappa t)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Таким образом, давление в любой точке плоскорадиального потока в условиях упругого режима фильтрации определяется по формуле

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q_0 \mu}{4\pi k h} \left[-\text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa t} \right) \right]. \tag{23.52}$$

Формула (23.52) получила название основной формулы теории упругого режима фильтрации. Она имеет широкое практическое применение, в частности, используется при интерпретации результатов исследования скважин, в расчетах распределения давления при фильтрации упругой жидкости и т.д.

Интегральную показательную функцию можно представить в виде ряда

$$-\text{Ei}(-x) = \ln \frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot n!} x^n,$$

который сходится при всех значениях x ($0 < x < \infty$), γ – постоянная Эйлера – иррациональное число, приближенное значение которого при вычислениях в подземной гидромеханике принимается равным 0,5772.

При изменении аргумента x от 0 до ∞ функция $-\text{Ei}(-x)$ быстро убывает от ∞ до 0. График этой функции приведен на рис. 23.3. При малых значениях x суммой ряда можно пренебречь, тогда

$$-\text{Ei}(-x) = \ln \frac{1}{x} - 0,5772.$$

При этом погрешность не превосходит:

- 0,25%, если $x = \frac{r^2}{4\kappa t} \leq 0,01$;
- 5,7%, если $x \leq 0,1$;
- 9,7%, если $x \leq 0,14$.

Следовательно, для значений $r^2/(4\kappa t) \leq 1$ давление можно определять по формуле

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q_0 \mu}{4\pi k h} \left(\ln \frac{4\kappa t}{r^2} - 0,5772 \right). \tag{23.53}$$

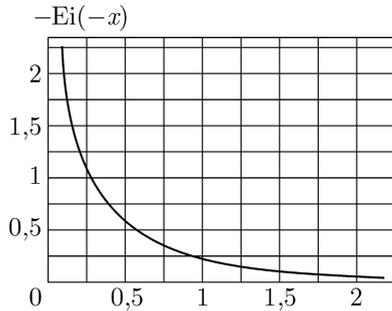


Рис. 23.3. График интегральной показательной функции

Из (23.52) находим, что расход жидкости через любую цилиндрическую поверхность радиусом r и скорость фильтрации там определяются, соответственно, по формулам

$$Q(r, t) = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} 2\pi r h = Q_0 e^{-r^2/4\kappa t}, \quad (23.54)$$

$$w = \frac{Q_0}{2\pi r h} e^{-r^2/4\kappa t}. \quad (23.55)$$

Из последней формулы следует, что стационарная скорость $w_{\text{стат}} = Q_0 / (2\pi r h)$ достигается очень быстро на небольших расстояниях от скважины, так как значение коэффициента пьезопроводности обычно велико.

При теоретическом исследовании неустановившихся процессов перераспределения пластового давления удобно пользоваться безразмерными параметрами Фурье fo и Fo , играющими роль безразмерного времени и определяемыми по формулам:

$$fo = \frac{\kappa t}{r_c^2}, \quad Fo = \frac{\kappa t}{R_k^2}. \quad (23.56)$$

В зависимости от специфики решаемой задачи удобно пользоваться тем или другим из указанных параметров Фурье.

Строго говоря, основная формула теории упругого режима (23.52) справедлива лишь для случая точечного стока (при $r_c = 0$) в неограниченном пласте ($R_k = \infty$).

Для оценки влияния конечности радиуса возмущающей скважины r_c на результаты расчетов давления В.Н.Щелкачев сравнил результаты расчетов по формуле (23.52) и по точной формуле (Ван-Эвердинген и Херст), учитывающей конечный радиус скважины r_c . В.Н.Щелкачев установил, что погрешность подсчетов давления по формуле (23.52) составляет 0,6% при $fo = 100$; 2,3% при $fo = 25$, 5% при $fo = 10$, 9,4%; при $fo = 5$ контура питания или радиус круговой непроницаемой границы пласта.

Оценим практическое значение этой погрешности. Допустим, что $\kappa = 1$ м²/с, $r_c = 0,1$ м. Тогда, полагая $fo = 100$, найдем

$$t = fo \frac{r_c^2}{\kappa} = 100 \frac{0,1^2}{1} = 1 \text{ с.}$$

Следовательно, уже через 1 с после пуска скважины расчеты забойного давления, выполненные по формуле (23.52), будут иметь погрешность, не превышающую 0,6%. Отсюда следует, что для скважин обычных размеров формула (23.52) обеспечивает высокую степень точности уже на самой ранней (а тем более на поздней) стадии процесса перераспределения давления.

Непосредственными расчетами В.Н.Щелкачевым было установлено, что в громадном большинстве практически интересных случаев изменение давления при работе скважины в конечном открытом пласте можно в течение

ние достаточно длительного времени изучать при помощи простой формулы (23.52) для бесконечного пласта. При этом погрешность в подсчетах забойного давления не превзойдет 0,08% при $Fo \leq 0,2$; 1% при $Fo \leq 0,35$; 1,9% при $Fo \leq 0,5$.

Для расчетов пластового давления в любой точке открытого кругового пласта в случае $r \leq 0,1 R_k$, можно с высокой степенью точности (до 0,2%) пользоваться формулой (23.52) для бесконечного пласта, если при этом $R_k \geq 10^5 r_c$, $Fo \leq 0,2$.

В дополнение к указанным оценкам можно еще отметить, что различие в величинах забойных давлений в условиях конечного (открытого и закрытого) и бесконечного пластов не превзойдет 1%, если $Fo \leq 0,33$, $R_k \geq 50 r_c$ или если $Fo \leq 0,35$, $R_k \geq 1000 r_c$.

Решения дифференциального уравнения Фурье (23.40) для различных случаев фильтрации упругой жидкости в ограниченных открытых и закрытых пластах представляются бесконечными рядами по специальным функциям Бесселя.

В заключение покажем, как ведут себя пьезометрические кривые вблизи скважины, которая эксплуатируется с постоянным дебитом Q_0 (рис. 23.4). Для точек вблизи забоя можно пользоваться формулой (23.53). Продифференцировав ее по координате r , найдем градиент давления

$$\partial p / \partial r = Q_0 \mu / (2\pi k r).$$

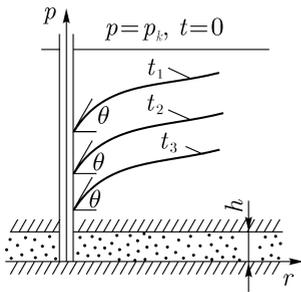


Рис. 23.4. Пьезометрические кривые при пуске скважины с постоянным дебитом Q_0 ; r_c – радиус скважины; R_k – радиус кругового контура питания или радиус круговой непроницаемой границы пласта.

Из этой формулы следует, что градиент давления для значений r , удовлетворяющих неравенству $r^2 \leq 0,03 \cdot 4\pi k t$, практически не зависит от времени и определяется по той же формуле, что и для установившейся плоскорадиальной фильтрации несжимаемой жидкости. Для указанных значений r пьезометрические кривые представляют собой логарифмические линии (рис. 23.4). Давление на забое скважины падает с течением времени, углы наклона касательных θ на забое одинаковы для всех кривых.

Глава XXIV

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОГО РЕЖИМА

Как было показано в предыдущей главе, решения краевых задач неустановившейся фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде в условиях как бесконечного, так и конечного пластов можно получить при помощи хорошо известных методов интегрирования дифференциального уравнения пьезопроводности (теплопроводности) (23.16). Однако во многих случаях эти решения представляются громоздкими формулами в виде бесконечного медленно сходящегося ряда или несобственного интеграла, содержащего специальные функции. В связи с этим были предприняты поиски приближенных эффективных решений задач неустановившейся фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде. Рассмотрим здесь некоторые из разработанных приближенных методов, получивших широкое применение при решении задач теории упругого режима.

§1. Метод последовательной смены стационарных состояний

Одним из наиболее простых по своей идее приближенных методов решения задач теории упругого режима является метод последовательной смены стационарных состояний (ПССС), развитый И.А.Чарным и широко применяющийся в практических расчетах. Метод основан на предположении, что давление в пласте меняется во времени значительно медленнее, чем по координатам. Поэтому производную по времени можно в первом приближении отбросить, в результате чего для давления получается уравнение Лапласа, описывающее стационарный процесс.

В каждый момент времени весь пласт условно разделяется на две области – возмущенную и невозмущенную. При этом предполагается, что в возмущенной области пласта, начинающейся от стенки скважины, давление распределяется так, как будто бы движение жидкости в ней установившееся и внешняя граница этой области служит в данный момент контуром питания. В невозмущенной области пласта давление всюду постоянно и равно начальному контурному давлению. Закон движения подвижной границы, разделяющей возмущенную и невозмущенную области, определяется при помощи уравнения материального баланса и граничных условий.

Разделение фильтрационного потока на две области – возмущенную и невозмущенную – вызывает необходимость рассматривать процесс перераспределения пластового давления протекающим в две фазы. В течение первой фазы граница возмущенной области непрерывно расширяется. И в тот момент, когда она достигает естественной границы пласта, начинается вторая фаза. При теоретическом исследовании процесса в условиях бесконечного пласта приходится, естественно, иметь дело только с первой фазой, продолжительность которой не ограничивается.

Рассмотрим теперь расчет неустановившихся одномерных потоков упругой жидкости при помощи метода ПССС.

Прямолинейно-параллельный неустановившийся фильтрационный поток упругой жидкости.

Случай 1. Приток к галерее, на которой поддерживается постоянный дебит Q . Пусть в момент времени $t = 0$ в горизонтальном пласте постоянной толщины h и ширины B пущена в эксплуатацию прямолинейная галерея, на которой поддерживается постоянный дебит Q . До пуска галереи давление во всем пласте было одинаковым и равным p_k .

К моменту времени t после пуска галереи граница возмущенной области распространится на длину $l(t)$ (рис 24.1). Распределение давления в этой области считается установившимся (см. гл. XX, §2), т.е. описывается линейной зависимостью:

$$p(x, t) = p_k - \frac{Q\mu}{k Bh} (l(t) - x), \quad 0 \leq x \leq l(t). \quad (24.1)$$

Требуется найти закон перемещения во времени внешней границы возмущенной области $l(t)$.

Воспользуемся соотношением (23.7), которое выражает условие того, что количество добытой продукции за время dt равно изменению упругого запаса жидкости в возмущенной зоне пласта за тот же промежуток времени,

$$Q dt = \beta^* d[V(t)\Delta p], \quad (24.2)$$

где $V(t)$ – объем возмущенной зоны пласта,

$$V(t) = B h l(t); \quad (24.3)$$

$$\Delta p = p_k - \tilde{p} = p_k - \frac{p_k + p_r}{2} = \frac{p_k - p_r}{2}. \quad (24.4)$$

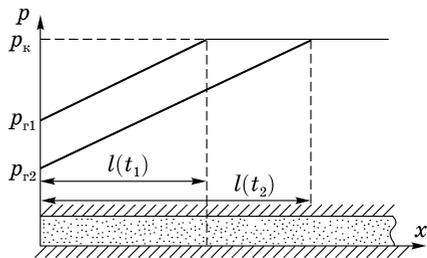


Рис. 24.1. Кривые распределения давления в прямолинейно-параллельном потоке по методу ПССС

Приняв во внимание, что $p(x, t) = p_r(t)$ при $x = 0$, из (24.1) найдем

$$Q = \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{l(t)} Bh,$$

откуда

$$\frac{Q\mu l(t)}{2kBh} = \frac{p_k - p_r}{2}. \quad (24.5)$$

Подставив равенства (24.3)–(24.5) в соотношение (24.2), получим

$$Q = \beta^* \frac{d}{dt} \left(Bh l \frac{Q\mu l}{2kBh} \right),$$

или, так как $Q = \text{const}$,

$$2Q = \frac{\beta^* \mu}{k} Q \frac{d}{dt} (l^2),$$

откуда следует

$$2\kappa dt = dl^2 \quad (\kappa = k/(\mu\beta^*)).$$

Проинтегрируем полученное соотношение и найдем

$$l(t) = \sqrt{2\kappa t}. \quad (24.6)$$

Следовательно, формула для распределения давления в пласте (24.1) будет иметь вид

$$p(x, t) = p_k - \frac{Q\mu}{kBh} (\sqrt{2\kappa t} - x), \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2\kappa t}, \quad (24.7)$$

$$p(x, t) = p_k, \quad x > \sqrt{2\kappa t}.$$

Значения депрессии $p_k - p_r$ по приближенной формуле (24.7) значительно отличаются от данных расчета по точной формуле (24.39): погрешность составляет 25%.

Случай 2. Приток к галерее, на которой поддерживается постоянное забойное давление $p_r = \text{const}$. В таком же пласте, как и в случае 1, в момент времени $t = 0$ пущена эксплуатационная галерея с постоянным забойным давлением $p_r = \text{const}$. До пуска галереи давление во всем пласте было одинаковым и равным p_k . Требуется найти распределение давления, закон перемещения границы возмущенной области $l(t)$ и изменение дебита галереи во времени $Q(t)$.

Дебит галереи в условиях установившегося движения, очевидно, можно выразить следующим образом:

$$Q(t) = \frac{k(p_k - p_r)}{\mu l(t)} Bh = \frac{k}{\mu} Bh \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Задача решается аналогично предыдущему случаю с той лишь разницей, что в уравнение для упругого запаса жидкости (24.2) нужно подставить выражения

$$V(t) = B h l(t),$$

$$\Delta p = p_k - \tilde{p} = p_k - \frac{p_k + p_r}{2} = \frac{p_k - p_r}{2},$$

$$Q(t) = \frac{k(p_k - p_r)}{\mu l(t)} B h.$$

Таким образом, в результате получим

$$\frac{k(p_k - p_r)}{\mu l(t)} B h dt = \beta^* d \left[B h l \frac{p_k - p_r}{2} \right].$$

Проведя арифметические преобразования в этом соотношении, и выполнив интегрирование, найдем закон движения границы возмущенной области

$$l(t) = 2\sqrt{kt}.$$

Следовательно, распределение давления в возмущенной зоне пласта определяется соотношением

$$p(x, t) = p_k - (p_k - p_r) \left(1 - \frac{x}{2\sqrt{kt}} \right), \quad 0 < x \leq 2\sqrt{kt}, \quad (24.8)$$

$$p(x, t) = p_k, \quad x > 2\sqrt{kt},$$

а дебит галереи – соотношением

$$Q(t) = \frac{k(p_k - p_r)}{\mu 2\sqrt{kt}} B h. \quad (24.9)$$

Погрешность расчета дебита галереи по приближенной формуле (24.8) по сравнению с расчетами по точной формуле (23.27) составляет 11%. Следовательно, методом последовательной смены стационарных состояний лучше пользоваться в случае неустановившихся прямолинейно-параллельных потоков при заданной постоянной депрессии.

Плоскорадиальный неустановившийся фильтрационный поток упругой жидкости.

Случай 1. Приток к скважине, на которой поддерживается постоянный дебит Q . Пусть в неограниченном горизонтальном пласте постоянной толщины h в момент времени $t = 0$ пущена добывающая скважина радиусом r_c с постоянным дебитом Q . До пуска скважины давление во всем пласте было одинаковым и равным p_k .

В соответствии с методом ПССС принимаем, что через время t после пуска скважины вокруг нее образуется возмущенная область радиусом $R(t)$,

в которой давление будет распределено по стационарному закону

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R(t)}{r}. \quad (24.10)$$

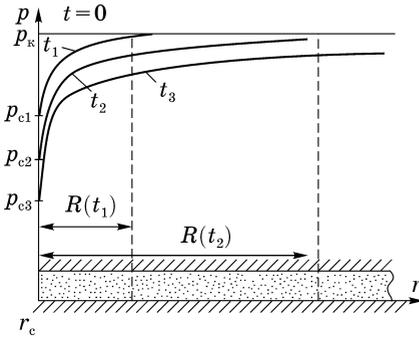


Рис. 24.2. Кривые распределения давления в плоскорадиальном потоке в разные моменты времени по методу ПССС (отбор осуществляется при условии $Q = \text{const}$)

В остальной части пласта сохраняется начальное пластовое давление p_k .

Требуется найти закон движения границы возмущенной области $R(t)$.

Кривые распределения давления в разные моменты времени в таком потоке приведены на рис. 24.2. Дебит скважины, очевидно, будет описываться формулой, аналогичной формуле Дюпюи,

$$Q = \frac{2\pi kh(p_k - p_c(t))}{\mu \ln(R(t)/r_c)}. \quad (24.11)$$

Размеры возмущенной области найдем из уравнения материального баланса (24.2) при

$$V(t) = \pi(R^2(t) - r_c^2)h, \quad \Delta p = p_k - \tilde{p}. \quad (24.12)$$

Средневзвешенное пластовое давление \tilde{p} в установившемся плоскорадиальном потоке (см. гл. XX, §3) определяется по формуле (20.25)

$$\tilde{p} = p_k - \frac{p_k - p_c}{2 \ln(R(t)/r_c)},$$

откуда, учитывая (24.11), находим

$$\Delta p = p_k - \tilde{p} = \frac{p_k - p_c}{2 \ln(R(t)/r_c)} = \frac{Q\mu}{4\pi kh}. \quad (24.13)$$

Закон движения границы возмущенной области $R(t)$ найдем, подставив выражения (24.12) и (24.13) в уравнение материального баланса (24.2),

$$4\kappa dt = d(R^2(t) - r_c^2),$$

откуда после интегрирования в пределах от 0 до t и от r_c до $R(t)$ найдем

$$R(t) = \sqrt{r_c^2 + 4\kappa t}. \quad (24.14)$$

Тогда из равенства (24.10) можно определить давление в любой точке пласта в любой момент времени t

$$p(r, t) = p_k - \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{\sqrt{r_c^2 + 4\kappa t}}{r}, \quad r_c \leq r \leq \sqrt{r_c^2 + 4\kappa t}; \quad (24.15)$$

$$p(r, t) = p_k, \quad r > \sqrt{r_c^2 + 4\kappa t}.$$

Депрессия в момент времени t :

$$\Delta p_c \equiv p_k - p_c(t) = \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{\sqrt{r_c^2 + 4\kappa t}}{r_c}. \quad (24.16)$$

Сравнивая (24.16) с депрессией, определенной по точной формуле (23.52), можно убедиться, что относительная погрешность уменьшается с течением времени и составляет, по вычислениям, 10,6%, если $fo = \kappa t/r_c^2 = 100$; 7,5%, если $fo = 10^3$; 5,7%, если $fo = 10^4$.

Случай 2. Приток к скважине, на которой поддерживается постоянное давление $p_c = \text{const}$. В случае плоскорадиального потока жидкости к скважине, пущенной в эксплуатацию с постоянным забойным давлением $p_c = \text{const}$, закон движения границы возмущенной области выражается интегралом, представляемым в виде медленно сходящегося ряда, поэтому решение здесь не приводится. Расчет движения границы возмущенной области в этом случае можно определить по графику (рис. 24.3).

Дебит скважины определяется по формуле Дюпюи (24.11) при $p_c = \text{const}$.

Сравнение с результатами точных расчетов, выполненных К.А.Царевичем и И.Ф.Курановым, показывает, что погрешность определения дебита по методу ПССС составляет около 5%.

Заметим, что как в случае линейной, так и радиальной фильтрации в точке перехода от возмущенной к невозмущенной области градиент давления терпит разрыв, что служит одной из причин расхождения между результатами расчетов по методу ПССС и по точному решению. Однако этот метод служит достаточно эффективным расчетным приемом, позволяющим найти решение в простом виде, чем и объясняется его применение в некоторых случаях не только для задач фильтрации однофазного флюида,

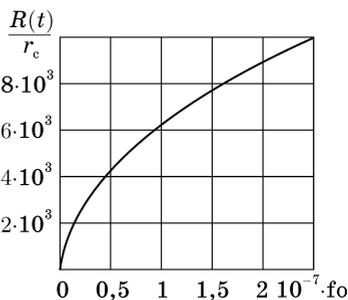


Рис. 24.3. Зависимость безразмерного радиуса возмущенной области $R(t)/r_c$ от безразмерного времени fo при отборе жидкости с постоянным забойным давлением $p_c = \text{const}$

но и для задач о движении газированной жидкости и о перемещении границы раздела жидкостей и газов.

Распределение давления в области фильтрации, получаемое по методу ПССС, является довольно грубым приближением; гораздо точнее этим методом дается связь между дебитом и депрессией, особенно в случае радиальной фильтрации.

§2. Метод А.М.Пирвердяна

Этот метод аналогичен методу ПССС и уточняет его. В методе А.М.Пирвердяна, как и в методе ПССС, неустановившийся фильтрационный поток в каждый момент времени мысленно разбивается на две области – возмущенную и невозмущенную. Граница между этими областями также определяется из уравнения материального баланса. Но в отличие от метода ПССС распределение давления в возмущенной области по методу А.М.Пирвердяна задается в виде квадратичной параболы так, чтобы пьезометрическая кривая на границе областей касалась горизонтальной линии, представляющей давление в невозмущенной области. Распределение давления уже не будет стационарным, а градиент давления на границе областей становится равным нулю, что обеспечивает плавное смыкание профиля давления в возмущенной и невозмущенной областях.

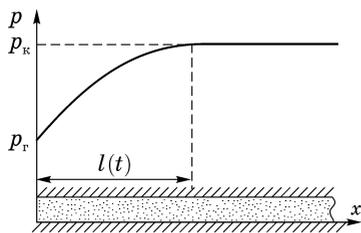


Рис. 24.4. Кривая распределения давления в прямолинейно-параллельном потоке по методу А.М.Пирвердяна

Рассмотрим прямолинейно-параллельный неустановившийся фильтрационный поток упругой жидкости.

Случай 1. Приток к галерее, на которой поддерживается постоянный дебит Q . Пусть в горизонтальном пласте постоянной толщины h и ширины B пущена в эксплуатацию галерея с постоянным дебитом Q . До пуска галереи давление во всем пласте было одинаковым и равным p_k .

К моменту времени t после пуска граница возмущенной области продвинется на длину $l(t)$, при этом кривая распределения давления в этой области будет иметь вид параболы. График распределения давления в пласте ко времени t после пуска галереи представлен на рис. 24.4. Уравнение параболы, задающей распределение давления в возмущенной области, оп-

ределяется равенством

$$p(x, t) = p_k - (p_k - p_r) \left(1 - \frac{x}{l(t)}\right)^2, \quad 0 < x \leq l(t). \quad (24.17)$$

Дебит галереи определяется по закону Дарси

$$Q = \frac{k}{\mu} Bh \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (24.18)$$

Значение градиента давления на галерее $\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0}$ найдем, продифференцировав формулу (24.17) и подставив в полученное выражение $x = 0$. В результате будем иметь

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{2(p_k - p_r)}{l(t)}. \quad (24.19)$$

Подставив равенство (24.19) в (24.18), найдем формулу для дебита галереи

$$Q = 2 \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{l(t)} Bh. \quad (24.20)$$

Закон движения границы возмущенной области определяется из уравнения материального баланса (24.2) с учетом (24.3), при $\Delta p = p_k - \tilde{p}$. Значение средневзвешенного пластового давления в возмущенной области к моменту времени t определим теперь, используя распределение (24.17),

$$\tilde{p} = \frac{1}{V(t)} \int_{V(t)} p(x, t) dV = \frac{1}{l(t)} \int_0^{l(t)} \left[p_k - (p_k - p_r) \left(1 - \frac{x}{l(t)}\right)^2 \right] dx = p_k - \frac{p_k - p_r}{3}.$$

Следовательно, изменение давления равно

$$\Delta p = p_k - \tilde{p} = \frac{p_k - p_r}{3}.$$

Используя формулу (24.20), преобразуем последнее равенство к виду

$$\Delta p = \frac{p_k - p_r}{3} = \frac{Q\mu l(t)}{6kBh} \quad (24.21)$$

и далее, подставив (24.3) и (24.21) в уравнение материального баланса (24.2), получим

$$Q dt = \beta^* d \left[Bh l^2(t) \frac{Q\mu}{6kBh} \right],$$

откуда

$$6\kappa dt = dl^2(t),$$

и после интегрирования в пределах от 0 до t и от 0 до l найдем

$$l(t) = \sqrt{6\kappa t}. \quad (24.22)$$

Таким образом, формула для распределения давления (24.17) в возмущенной области пласта принимает вид

$$p(x, t) = p_k - \frac{Q\mu}{2khBh} \sqrt{6\kappa t} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{6\kappa t}}\right)^2, \quad 0 < x \leq \sqrt{6\kappa t}, \quad (24.23)$$

$$p(x, t) = p_k, \quad x > \sqrt{6\kappa t}.$$

Расчет депрессии $p_k - p_r$ по формуле (24.23) дает погрешность по сравнению с точным решением примерно 9%, т. е. в 2,5 раза меньше, чем по методу ПССС.

Случай 2. Приток к галерее, на которой поддерживается постоянное давление $p_r = \text{const}$. Пусть имеем прямолинейно-параллельный фильтрационный поток упругой жидкости к галерее, которая пущена в эксплуатацию с постоянным забойным давлением $p_r = \text{const}$. До пуска галереи давление во всем пласте было одинаковым и равным p_k .

Для построения приближенного решения по методу А.М.Пирвердяна используем ту же методику, что и для случая 1. Подставим в уравнение материального баланса (23.2) выражения для расхода, объема и перепада давления

$$Q = 2 \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{l(t)} Bh, \quad V(t) = Bh l(t), \quad \Delta p = p_k - \tilde{p} = \frac{p_k - p_r}{3},$$

в результате получим дифференциальное уравнение

$$6\kappa dt = l(t) dl(t),$$

интегрируя которое получим закон движения границы возмущенной области

$$l(t) = \sqrt{12\kappa t}.$$

Подставляя найденный закон движения границы возмущенной области в формулы для распределения давления (24.17) и дебита (24.20), получим для давления в возмущенной области пласта соотношение

$$p(x, t) = p_k - (p_k - p_r) \left(1 - \frac{x}{\sqrt{12\kappa t}}\right)^2,$$

а для дебита галереи формулу

$$Q = 2 \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{l(t)} Bh = 2 \frac{k}{\mu} \frac{p_k - p_r}{\sqrt{12\kappa t}} Bh. \quad (24.24)$$

Погрешность расчета дебита галереи по приближенной формуле (24.24) по сравнению с точным решением составляет около 2,5%, т.е. и в этом случае расчет по методу А.М.Пирвердяна более, чем в 2 раза точнее, чем по методу ПССС.

§3. Метод интегральных соотношений

Метод интегральных соотношений, предложенный Г.И.Баренблаттом, по аналогии с методами пограничного слоя в потоке вязкой жидкости позволяет получить приближенные решения некоторых задач нестационарной фильтрации упругой жидкости с нужной точностью.

Метод основан на следующих предположениях.

1. В каждый момент времени пласт делится на конечную возмущенную область и невозмущенную область, где движение отсутствует.

2. В возмущенной области распределение давления представляется в виде многочлена по степеням координаты x или r (в случае радиального потока добавляется еще логарифмический член) с коэффициентами, зависящими от времени, так что

для прямолинейно-параллельного потока

$$p(x, t) = a_0(t) + a_1(t) \frac{x}{l(t)} + \dots + a_n(t) \frac{x^n}{l^n(t)}, \quad 0 \leq x \leq l(t), \quad (24.25)$$

для плоскорадиальной фильтрации

$$p(r, t) = a_0(t) \ln \frac{r}{R(t)} + a_1(t) + a_2(t) \frac{r}{R(t)} + \dots + a_{n+1}(t) \frac{r^n}{R^n(t)}, \quad r_c \leq r \leq R(t), \quad (24.26)$$

где число членов n выбирается в зависимости от желаемой точности решения.

3. Коэффициенты многочлена $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, а также размер области возмущения $l(t)$ (или $R(t)$) находятся из условий на галерее (или на забое скважины), из условий непрерывности давления и гладкости кривой давления на границе области возмущения, а также из особых интегральных соотношений, которые получаются следующим образом.

В случае притока к галерее правая и левая части уравнения пьезопроводности (23.19) умножаются на x^k (где $k = 0, 1, 2, \dots$) и интегрируются

по всей возмущенной области:

$$\int_0^{l(t)} x^k \frac{\partial p}{\partial t} dx = \kappa \int_0^{l(t)} x^k \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dx. \quad (24.27)$$

Для случая притока к скважине берется дифференциальное уравнение (23.40), его правая и левая части умножаются на r^k (где $k = 1, 2, \dots$) и проводится интегрирование по всей возмущенной области:

$$\int_{r_c}^{R(t)} r^k \frac{\partial p}{\partial t} dr = \kappa \int_{r_c}^{R(t)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) r^k dr. \quad (24.28)$$

Если в уравнения (24.27) и (24.28) подставить соответственно выражения (24.25) и (24.26) и проинтегрировать, то получатся недостающие соотношения для определения коэффициентов $a_0(t)$, $a_1(t)$, ... и $l(t)$ (или $R(t)$).

Первое из этих интегральных соотношений (при $k = 0$, если рассматривается приток к галерее, и при $k = 1$ для притока к скважине) представляет собой уравнение материального баланса, из которого находится координата границы возмущенной области $l(t)$ или $R(t)$.

Если принять в формуле (24.25) $n = 1$, а в формуле (24.26) $n = 0$, то получатся решения, соответствующие методу ПССС (24.7), (24.8), (24.15) – в зависимости от условий на галерее или на забое скважины; если же $n = 2$ в (24.25), то из метода интегральных соотношений вытекает, как частный случай, метод А.М.Пирвердяна.

В качестве примера решим методом интегральных соотношений задачу о плоскорадиальной неустановившейся фильтрации упругой жидкости к скважине радиусом r_c , пущенной в эксплуатацию в момент $t = 0$ с постоянным дебитом Q . В начальный момент давление во всем пласте постоянно и равно p_k .

Распределение давления в возмущенной области пласта $r_c \leq r \leq R(t)$ зададим в виде

$$p(r, t) = a_0 \ln \frac{r}{R(t)} + a_1 + a_2 \frac{r}{R(t)}, \quad (24.29)$$

т.е. возьмем многочлен первой степени.

Коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 определяются из условий на забое скважины и на границе возмущенной области.

Условие на забое согласно (23.41) имеет вид

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu} r \frac{dp}{dr} \quad \text{при} \quad r = r_c. \quad (24.30)$$

На границе возмущенной области имеем:

$$\begin{aligned} p &= p_k & \text{при } r &= R(t), \\ \partial p / \partial r &= 0 & \text{при } r &= R(t), \end{aligned} \quad (24.31)$$

второе условие представляет собой условие гладкости кривой давления.

Определенные из этих условий коэффициенты имеют вид

$$a_0 = \frac{Q\mu}{2\pi kh}, \quad a_1 = p_k + \frac{Q\mu}{2\pi kh}, \quad a_2 = -\frac{Q\mu}{2\pi kh} \quad (24.32)$$

(слагаемые, пропорциональные r_c или r_c^2 , отброшены вследствие их малости).

Подставив выражения (24.32) в правую часть формулы (24.28), получаем

$$p(r, t) = p_k + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \left[\ln \frac{r}{R(t)} + 1 - \frac{r}{R(t)} \right]. \quad (24.33)$$

Закон движения границы возмущенной области $R(t)$ находится из уравнения материального баланса (24.2) с учетом (24.12) (это уравнение можно получить из интегрального соотношения (24.28) при $k = 1$).

Значение средневзвешенного пластового давления \tilde{p} в возмущенной области определяется при использовании распределения давления (24.29)

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \frac{1}{V(t)} \int_{V(t)} p(r, t) dV = \frac{1}{\pi(R^2(t) - r_c^2)} \int_{r_c}^{R(t)} \left[p_k - \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{r}{R(t)} + \right. \\ &\left. + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \left(1 - \frac{r}{R(t)} \right) \right] 2\pi hr \, dr. \end{aligned}$$

Проведя интегрирование и пренебрегая в полученном выражении членами, содержащими r_c^2 (вследствие их малости), получаем

$$\tilde{p} = p_k - \frac{Q\mu}{12\pi kh},$$

а тогда согласно (24.12)

$$\Delta p = p_k - \tilde{p} = \frac{Q\mu}{12\pi kh}. \quad (24.34)$$

Подставив выражения (24.12) для $V(t)$ и (24.34) в уравнение материального баланса (24.2), после несложных преобразований найдем:

$$12\kappa \, dt = d(R^2(t) - r_c^2),$$

откуда после интегрирования получим

$$R(t) = \sqrt{r_c^2 + 12\kappa t}.$$

Следовательно, распределение давления (24.29) в возмущенной области будет иметь вид

$$p(r, t) = p_{\kappa} - \frac{Q\mu}{2\pi kh} \left[\ln \frac{\sqrt{r_c^2 + 12\kappa t}}{r} - 1 + \frac{r}{\sqrt{r_c^2 + 12\kappa t}} \right], \quad (24.35)$$

$$r_c \leq r \leq \sqrt{r_c^2 + 12\kappa t}, \quad p(r, t) = p_{\kappa}, \quad r > \sqrt{r_c^2 + 12\kappa t}.$$

Относительная погрешность δ при расчетах депрессии $p_{\kappa} - p_c(t)$ по формуле (24.35) для различных значений параметра Фурье $fo = \kappa t / r_c^2$ составляет: $\delta = -4,9\%$ при $fo = 100$; $\delta = -4\%$ при $fo = 10^3$; $\delta = -3,2\%$ при $fo = 10^4$.

Таким образом, приближенное значение депрессии Δp_c по методу интегральных соотношений занижено по сравнению с точным.

§4. Метод «усреднения»

Суть метода «усреднения», предложенного для решения задач фильтрации Ю.Д.Соколовым и Г.И.Гусейновым заключается в том, что в дифференциальном уравнении упругого режима (23.40) производная от давления по времени $\partial p / \partial t$ усредняется по всей возмущенной области и заменяется некоторой функцией времени

$$F(t) = \frac{2}{R^2(t) - r_c^2} \int_{r_c}^{R(t)} \frac{\partial p}{\partial t} r dr, \quad (24.36)$$

значение которой определяется из начальных и граничных условий. Тогда уравнение (23.40) принимает вид

$$F(t) = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (24.37)$$

Эта замена упрощает дифференциальное уравнение и облегчает его интегрирование.

Будем определять распределение давления при неустановившемся притоке упругой жидкости к скважине при постоянном дебите Q . При этом условия на забое и на границе возмущенной области имеют вид (24.30) и (24.31). Интегрируя уравнение (24.37) по r и учитывая условия (24.30) и (24.31), можно получить

$$p = p_{\kappa} + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{r}{R(t)} + \frac{F(t)}{2\kappa} \left[\frac{1}{2} (r^2 - R^2(t)) - r_c^2 \ln \frac{r}{R(t)} \right]. \quad (24.38)$$

Из второго условия (24.31) определяется функция $F(t)$ в виде

$$F(t) = -\frac{Q\mu\kappa}{\pi kh(R^2(t) - r_c^2)}. \quad (24.39)$$

Подставляя выражение (24.39) в (24.38) и пренебрегая членами с r_c^2 , найдем

$$p = p_\kappa + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{r}{R(t)} + \frac{Q\mu}{2\pi kh} \left(1 - \frac{r^2}{R^2(t)} \right), \quad r_c \leq r \leq R(t). \quad (24.40)$$

Для определения координаты возмущенной области $R(t)$ надо продифференцировать по t равенство (24.40), результат подставить в (24.36) и учесть выражение (23.53) для $F(t)$. В результате получается

$$R(t) = \sqrt{r_c^2 + 8\kappa t}. \quad (24.41)$$

Сопоставление формулы (24.40) с учетом (24.41) с точным решением (23.53) показывает, что относительная погрешность определения депрессии $p_\kappa - p_c$ не превосходит 5%.

В заключение отметим приближенный результат, полученный Э.Б.Чекалюком. Для скважины, пущенной в эксплуатацию с постоянным забойным давлением, он предлагает определять дебит по формуле Дюпюи (24.11), в которой радиус возмущенной области задается формулой

$$R(t) = r_c + \sqrt{\pi\kappa t}.$$

Эта формула очень важна для практики, поскольку простого точного решения задачи об отборе упругой жидкости при условии $p_c = \text{const}$ не существует. Расчетами показано, что формула Э.Б.Чекалюка очень точна, относительная погрешность при определении дебита по этой формуле не превышает 1%.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В настоящем приложении приводятся некоторые важные математические формулы. При этом предполагается, что все встречающиеся в тексте пределы существуют. Также предполагается, что все функции достаточно гладкие, так что все производные и интегралы существуют и все используемые математические операции законны. Во всех формулах, если обратное не оговорено особо, подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу. Например,

$$c_k = \sum_{i=1}^3 a_i b_{ik} = a_i b_{ik}, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3.$$

Индексы, по которым производится суммирование, называются «немыми». Очевидно, что

$$c_k = a_i b_{ik} = a_m b_{mk},$$

то есть обозначение немых индексов можно менять произвольным образом. Индексы, по которым не производится суммирование (например, k в предыдущей формуле), называются свободными.

Произведение векторов

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = \vec{e}_k a_k$ и $\vec{b} = \vec{e}_i b_i$, где единичные векторы \vec{e}_k ($k = 1, 2, 3$) взаимно перпендикулярны, то есть образуют ортонормированный базис, равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_k b_k. \quad (\text{П.1})$$

Из равенства (П.1) имеем

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a}, \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \quad \text{при} \quad |\vec{a}| \neq 0, \quad |\vec{b}| \neq 0 \quad \text{только если} \quad \vec{a} \perp \vec{b}, \\ \vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}|^2, \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k &= \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$, как это следует из формулы (П.1), представляет собой инвариант относительно преобразования координат.

Векторное произведение векторов $\vec{a} = \vec{e}_k a_k$ и $\vec{b} = \vec{e}_i b_i$ равно

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}). \quad (\text{П.2})$$

Векторное произведение, как это видно из формулы (П.2), обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a}, \\ \vec{a} \times \vec{b} &= 0 \text{ при } |\vec{a}| \neq 0, \quad |\vec{b}| \neq 0 \text{ только если } \vec{a} \parallel \vec{b}, \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{c}, \quad \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}, \quad \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b}, \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2. \end{aligned}$$

В координатном виде векторное произведение может быть представлено как

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1(a_2b_3 - a_3b_2) + \vec{e}_2(a_3b_1 - a_1b_3) + \vec{e}_3(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Производная по направлению

Полем функции φ называется область пространства, в каждой точке $M(x_1, x_2, x_3)$ которого задано значение функции $\varphi = \varphi(M)$. Если $\varphi(M)$ – скалярная функция, то поле называется скалярным. Если $\varphi(M)$ – векторная функция, то поле называется векторным.

Рассмотрим скалярную функцию $\varphi(M) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ и точки $M(x_1, x_2, x_3)$ и $M_0(x_{10}, x_{20}, x_{30})$, лежащие на прямой, задаваемой вектором \vec{s} (рис. П.1).

Предел

$$\lim_{MM_0 \rightarrow 0} \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{MM_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

называется производной функции φ по направлению s .

Длина s , отсчитываемая вдоль рассматриваемой прямой, есть, очевидно, функция координат, то есть $s = s(x_1, x_2, x_3)$. Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds},$$

а так как $\frac{dx_k}{ds} = \cos(x_k, \vec{s})$, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \cos(x_k, \vec{s}). \tag{П.3}$$

Для векторной функции $\vec{a}(M) = \vec{e}_k a_k(M)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{a}}{\partial s} &= \lim_{MM_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(M) - \vec{a}(M_0)}{MM_0} = \vec{e}_k \lim_{MM_0 \rightarrow 0} \frac{a_k(M) - a_k(M_0)}{MM_0} = \\ &= \vec{e}_k \frac{\partial a_k}{\partial s} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_k} \frac{dx_k}{ds} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_k} \cos(x_k, \vec{s}). \end{aligned} \tag{П.4}$$

Рассмотрим векторную функцию $\vec{a}(s)$ скалярного аргумента s . Годографом вектора $\vec{a}(s)$ называется геометрическое место концов векторов

$\vec{a}(s)$, откладываемых от общего начала 0 (рис. П.2). Тогда

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(s + \Delta s) - \vec{a}(s)}{\Delta s}. \quad (\text{П.5})$$

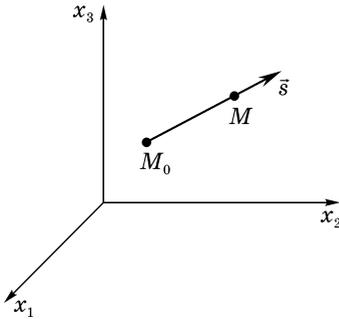


Рис. П.1

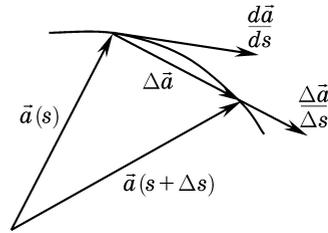


Рис. П.2

Из этого определения следует, что направление вектора $\frac{\partial \vec{a}}{\partial s}$ совпадает с направлением касательной к годографу вектора $\vec{a}(s)$ (рис. П.2).

Градиент, дивергенция, вихрь

Вектор

$$\text{grad } \varphi = \vec{e}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \quad (\text{П.6})$$

называется градиентом скалярной функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$.

Скаляр

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \quad (\text{П.7})$$

называется дивергенцией вектора $\vec{a} = \vec{e}_k a_k(x_1, x_2, x_3)$.

Вектор

$$\text{rot } \vec{a} = \vec{e}_1 \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) + \vec{e}_2 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) + \vec{e}_3 \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \quad (\text{П.8})$$

называется вихрем, или ротором, вектора \vec{a} . Вихрь вектора \vec{a} может быть представлен в виде символического определителя

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Символический оператор «набла», или оператор Гамильтона, определяется как

$$\nabla = \bar{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (\text{П.9})$$

С помощью оператора Гамильтона выражения (П.6), (П.7), (П.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \nabla \varphi, \\ \text{div } \bar{a} &= \nabla \cdot \bar{a}, \\ \text{rot } \bar{a} &= \nabla \times \bar{a}. \end{aligned}$$

В соответствии с определением оператора Гамильтона

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \bar{e}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \left(\bar{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = \Delta \varphi, \quad (\text{П.10})$$

где Δ – оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \quad (\text{П.11})$$

Так как

$$\bar{e}_k \cos(\bar{s}, x_k) = \bar{s}^\circ, \quad (\text{П.12})$$

где \bar{s}° – единичный вектор оси (направления) \bar{s} , то с учетом равенства (П.1) из формулы (П.3) имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \bar{s}^\circ \nabla \varphi = |\nabla \varphi| \cos(\nabla \varphi, \bar{s}^\circ). \quad (\text{П.13})$$

Из формулы (П.13) видно, что $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ достигает наибольшего значения, когда $\bar{s}^\circ \parallel \nabla \varphi$, и это наибольшее значение равно

$$|\nabla \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right)^2}.$$

Поэтому, в соответствии с формулой (П.13), можно дать следующее определение: градиентом φ называется вектор, имеющий направление быстрого увеличения функции φ и по величине равный производной по этому направлению.

Рассмотрим поверхность

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const}, \quad (\text{П.14})$$

или поверхность уровня функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. Вдоль всякого направления, лежащего в касательной плоскости к поверхности уровня (П.14), имеем $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$. Из этого, в соответствии с формулой (П.13), следует, что век-

тор $\nabla\varphi$ направлен по нормали \vec{n} к этой поверхности в ту сторону, куда φ возрастает. Тогда

$$\nabla\varphi = \vec{n} \frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

Так как

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} dx_k,$$

а приращение радиус-вектора $d\vec{r} = \vec{e}_k dx_k$, то в соответствии с формулой (П.1)

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \nabla\varphi. \quad (\text{П.15})$$

Умножив вектор $\vec{b} = \vec{e}_k b_k$ на оператор Гамильтона, получим новый оператор

$$\vec{b} \cdot \nabla = b_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Так как в соответствии с формулой (П.12) $s_k^0 = \cos(x_k, \vec{s})$, то производную вектора по направлению, то есть равенство (П.4), можно представить в виде

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial s} = (\vec{s} \cdot \nabla) \vec{a}.$$

Теорема Гаусса–Остроградского

Рассмотрим некоторый объем V , ограниченный замкнутой поверхностью S , и пусть $P = P(x_1, x_2, x_3)$, $Q = Q(x_1, x_2, x_3)$, $R = R(x_1, x_2, x_3)$. В соответствии с теоремой Гаусса–Остроградского

$$\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_S P dx_2 dx_3 + Q dx_3 dx_1 + R dx_1 dx_2. \quad (\text{П.16})$$

Так как

$$dx_2 dx_3 = \cos(\vec{n}, x_1) dS, \quad dx_3 dx_1 = \cos(\vec{n}, x_2) dS, \quad dx_1 dx_2 = \cos(\vec{n}, x_3) dS,$$

то формулу Гаусса–Остроградского (П.16) можно представить в виде

$$\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) dV = \int_S [P \cos(\vec{n}, x_1) + Q \cos(\vec{n}, x_2) + R \cos(\vec{n}, x_3)] dS. \quad (\text{П.17})$$

Полагая $P = a_1$, $Q = a_2$, $R = a_3$, получим

$$\int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV = \int_S a_k \cos(\vec{n}, x_k) dS,$$

или, с учетом формул (П.1), (П.7) и (П.12),

$$\int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_V \nabla \cdot \vec{a} dV = \int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_S a_n dS, \quad (\text{П.18})$$

где \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности S .

Интеграл

$$\int_S \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S a_n \, dS \quad (\text{П.19})$$

называется потоком вектора \vec{a} через поверхность S .

Из равенства (П.17) следует, что

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \, dV = \int_S \varphi \cos(\vec{n}, x_k) \, dS, \quad (\text{П.20})$$

и в соответствии с формулами (П.6) и (П.12)

$$\int_V \nabla \varphi \, dV = \int_S \varphi \vec{n} \, dS. \quad (\text{П.21})$$

При $\varphi = \text{const}$ на основании этого равенства имеем

$$\int_S \varphi \vec{n} \, dS = \varphi \int_S \vec{n} \, dS = 0.$$

Очевидно, что соотношение (П.20) справедливо и для вектора, то есть

$$\int_V \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_k} \, dV = \int_S \vec{a} \cos(\vec{n}, x_k) \, dS. \quad (\text{П.22})$$

В соответствии с определением (П.9) оператора Гамильтона

$$(\nabla \cdot \vec{b}) \vec{a} = \frac{\partial (b_k \vec{a})}{\partial x_k},$$

где $\vec{b} = \vec{e}_k b_k$. Тогда, с учетом равенств (П.1) и (П.12) из формулы (П.22) получим

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{b}) \vec{a} \, dV = \int_V \frac{\partial (b_k \vec{a})}{\partial x_k} \, dV = \int_S \vec{a} b_k \cos(\vec{n}, x_k) \, dS = \int_S \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{n}) \, dS. \quad (\text{П.23})$$

Перейдем к рассмотрению вектора вихря. Из соотношения (П.8) имеем

$$\text{rot}_1 \vec{a} = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3},$$

и на основании равенств (П.2) и (П.20)

$$\int_V \text{rot}_1 \vec{a} \, dV = \int_S [a_3 \cos(\vec{n}, x_2) - a_2 \cos(\vec{n}, x_3)] \, dS = \int_S (\vec{n} \times \vec{a})_1 \, dS. \quad (\text{П.24})$$

Следовательно,

$$\int_V \text{rot} \vec{a} \, dV = \int_V (\nabla \times \vec{a}) \, dV = \int_S (\vec{n} \times \vec{a}) \, dS. \quad (\text{П.25})$$

Для оператора Лапласа в соответствии с формулой (П.10) имеем

$$\int_V \Delta \varphi \, dV = \int_V \nabla \cdot \nabla \varphi \, dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \, dV,$$

откуда на основании формул (П.3), (П.13), (П.20)

$$\int_V \nabla \cdot \nabla \varphi \, dV = \int_V \Delta \varphi \, dV = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \cos(\vec{n}, x_k) \, dS = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS = \int_S \vec{n} \nabla \varphi \, dS. \quad (\text{П.26})$$

Формулы (П.18), (П.20)–(П.25) представляют собой частные случаи теоремы Гаусса–Остроградского

$$\int_V L(\nabla) \, dV = \int_S L(\vec{n}) \, dS,$$

где $L(\vec{a})$ – линейный однородный оператор, то есть

$$L(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha L(\vec{a}) + \beta L(\vec{b});$$

\vec{a}, \vec{b} – какие-либо векторы; α, β – какие-нибудь числа.

Возьмем некоторый малый объем V , ограниченный замкнутой поверхностью S . В соответствии с теоремой о среднем значении

$$\int_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV = (\operatorname{div} \vec{a})_{\text{cp}} \int_V dV = V(\operatorname{div} \vec{a})_{\text{cp}},$$

и из формулы (П.18) имеем

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) \, dS, \quad (\text{П.27})$$

где $V \rightarrow 0$ обозначает, что V стягивается к точке.

Аналогичным образом из формулы (П.21) получим

$$\nabla \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \varphi \vec{n} \, dS, \quad (\text{П.28})$$

$$\Delta \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{n} \nabla \varphi \, dS, \quad (\text{П.29})$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S (\vec{n} \times \vec{a}) \, dS. \quad (\text{П.30})$$

Выражения (П.27)–(П.30) можно рассматривать как определения операций $\operatorname{div} \vec{a}$, $\nabla \varphi$, $\Delta \varphi$, $\operatorname{rot} \vec{a}$. Эти определения, очевидно, не зависят от выбора системы координат. Следовательно, выражения (П.6)–(П.8) и (П.11) инвариантны по отношению ко всем переходам от одной прямолинейной прямоугольной системы координат к другой.

Теорема Стокса

Пусть L – какая-либо кривая. Интеграл

$$\int_L \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

называется линейным интегралом вектора \vec{a} вдоль кривой L .

В соответствии с формулой (П.1)

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = |\vec{a}| |d\vec{r}| \cos(\vec{a}, d\vec{r}).$$

Вектор $d\vec{r}$ направлен по касательной к кривой L и $|d\vec{r}| = ds$, где ds – элемент длины кривой. Произведение $|\vec{a}| \cos(\vec{a}, d\vec{r}) = a_s$ представляет собой проекцию вектора \vec{a} на направление касательной к кривой L . Поэтому

$$\int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_L a_s ds.$$

Линейный интеграл вектора по замкнутой кривой называется циркуляцией вектора по этой кривой.

Рассмотрим какую-нибудь поверхность S , ограниченную замкнутой кривой C (рис. П.3).

Теорема Стокса гласит: циркуляция вектора \vec{a} по замкнутому контуру C равна потоку вихря этого вектора через поверхность, ограниченную данным контуром, то есть

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot}_n \vec{a} \, ds,$$

где $\text{rot}_n \vec{a}$ – проекция вектора $\text{rot} \vec{a}$ на нормаль к поверхности S .

В результате рассуждений, аналогичных проведенным при выводе формулы (П.27), получим

$$\text{rot}_n \vec{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int_C a_s \, ds, \tag{П.31}$$

где $S \rightarrow 0$ означает, что поверхность стягивается в точку.

Криволинейные координаты

Положение точки M в пространстве может быть определено ее радиус-вектором \vec{r} относительно неподвижной точки O или тремя числами x_1, x_2, x_3 в прямолинейной системе координат. Однако во многих задачах удобнее определять положение этой же точки и ее радиус-вектора тремя другими числами q_1, q_2, q_3 , которые называются криволинейными координатами точки M .

В прямоугольных декартовых координатах

$$\vec{r} = \vec{e}_k x_k, \quad \vec{e}_k \cdot \vec{e}_j = \delta_{kj}. \tag{П.32}$$

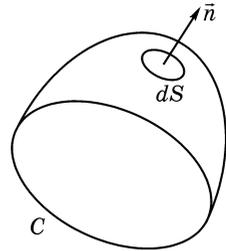


Рис. П.3

В криволинейных координатах

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3). \quad (\text{П.33})$$

Из равенств (П.32) и (П.33) следует, что

$$x_k = x_k(q_1, q_2, q_3), \quad q_k = q_k(x_1, x_2, x_3). \quad (\text{П.34})$$

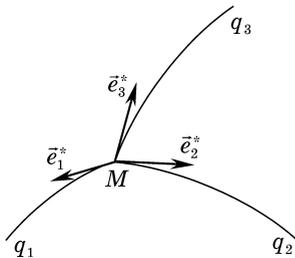


Рис. П4

Поверхности уровня

$$q_k(x_1, x_2, x_3) = const$$

образуют три семейства координатных поверхностей. Линия пересечения двух координатных поверхностей представляет собой координатную линию. Например, линия пересечения поверхностей $q_2 = const$ и $q_3 = const$ представляет собой координатную линию q_1 , то есть линию, вдоль которой меняется значение только q_1 (рис. П.4).

Введем в отличие от единичных векторов \vec{e}_k прямолинейной прямоугольной системы координат единичные векторы \vec{e}_k^* , направленные по касательным к координатным линиям в точке M в сторону возрастания переменных q_k . Если

$$\vec{e}_i^* \cdot \vec{e}_j^* = \delta_{ij}, \quad (\text{П.35})$$

то такая система криволинейных координат называется ортогональной.

Ниже рассматриваются только ортогональные системы координат.

Подчеркнем особо, что в отличие от прямолинейных координат направление векторов \vec{e}_k^* зависит от того, для какой точки M они определяются.

Вектор \vec{a} , приложенный в точке M , может быть представлен в виде

$$\vec{a} = \vec{e}_k^* a_k.$$

Рассмотрим радиус-вектор (П.33). При $q_2 = const$, $q_3 = const$ его графом является координатная линия q_1 . Поэтому в соответствии с равенством (П.5) производная $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}$ имеет направление касательной к координатной линии q_k , то есть

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = H_k \vec{e}_k^* \quad (\text{по } k \text{ не суммировать!}). \quad (\text{П.36})$$

Так как \vec{e}_k^* — единичный вектор, то

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right)^2 = H_k^2.$$

Из формул (П.32) и (П.33) имеем

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = \vec{e}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k},$$

откуда

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\right)^2 = H_k^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_k}\right)^2.$$

Величины H_k называются коэффициентами Ламе.

Рассмотрим две бесконечно близкие точки M и N . Проведем через точку M три координатные поверхности, которые вместе с тремя координатными поверхностями, проходящими через точку N , образуют бесконечно малый криволинейный параллелепипед (рис. П.5).

Пусть $\overline{MN} = d\vec{r}$. В соответствии с равенством (П.33)

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i,$$

откуда, с учетом формул (П.35) и (П.36),

$$(\overline{MN})^2 = (d\vec{r})^2 = (ds)^2 = (H_i dq_i)^2.$$

Вдоль линии MM_1 $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ и, следовательно,

$$MM_1 = ds_1 = H_1 dq_1.$$

Аналогично

$$ds_i = H_i dq_i \quad (\text{по } i \text{ не суммировать!}), \tag{П.37}$$

то есть формулы (П.37) позволяют определить длины ребер рассматриваемого параллелепипеда.

Параметрам Ламе можно дать и другое определение. Из рассмотрения параллелепипеда на рис. П.5 и формулы (П.36) имеем

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 = \vec{e}_1^* H_1 dq_1,$$

откуда

$$ds_1 = H_1 dq_1. \tag{П.38}$$

Площади граней $MN_2N_3M_3$, $MM_1M_2M_3$, $MM_1N_1N_2$, перпендикулярных соответственно осям q_1, q_2, q_3 , равны

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= ds_2 ds_3 = H_2 H_3 dq_2 dq_3, \\ d\sigma_2 &= ds_3 ds_1 = H_3 H_1 dq_3 dq_1, \\ d\sigma_3 &= ds_1 ds_2 = H_1 H_2 dq_1 dq_2. \end{aligned} \tag{П.39}$$

Объем параллелепипеда равен

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \tag{П.40}$$

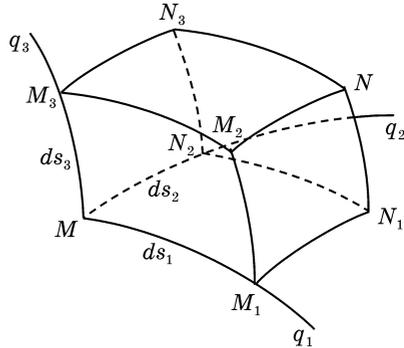


Рис. П.5

Векторные операции в криволинейных координатах

По определению градиента (П.13) проекция вектора $\nabla\varphi$ на координатную ось q_i равна $\frac{\partial\varphi}{\partial s_i}$, а так как $ds_i = H_i dq_i$ (по i не суммировать), то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} \quad (\text{по } i \text{ не суммировать!})$$

и

$$\nabla\varphi = \bar{e}_i^* \frac{\partial\varphi}{\partial s_i} = \frac{e_i^*}{H_i} \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}. \quad (\text{П.41})$$

Для вычисления $\text{div } \bar{a}$ удобно воспользоваться формулой (П.27), приняв за объем V объем параллелепипеда, представленного на рис. П.5.

На грани $MN_2N_3M_3$ $\bar{n} = -\bar{e}_1^*$, и в соответствии с формулами (П.19) и (П.38) поток через нее (с точностью до малых более высокого порядка) равен

$$-a_1 ds_2 ds_3 = -a_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3,$$

а через грань $M_1M_2NN_1$ –

$$\left(a_1 H_2 H_3 + \frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 \right) dq_2 dq_3.$$

Поэтому суммарный поток через грани, перпендикулярные оси q_1 , равен

$$\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3. \quad (\text{П.42})$$

Для граней, перпендикулярных осям q_2 и q_3 , циклической перестановкой индексов имеем

$$\frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3, \quad \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3. \quad (\text{П.43})$$

Подставив в формулу (П.27) соотношение (П.40) и сумму выражений (П.42), (П.43), после перехода к пределу получим

$$\text{div } \bar{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right]. \quad (\text{П.44})$$

Для вычисления $\text{rot } \bar{a}$ воспользуемся формулой (П.31).

Чтобы получить $\text{rot}_1 \bar{a}$, то есть проекцию вектора $\text{rot } \bar{a}$ на координатную линию q_1 , нужно взять контур, ограничивающий поверхность, нормальную к q_1 , то есть контур $MN_2N_3M_3$ (рис. П.5), который обозначим через C_1 .

Очевидно, что с точностью до членов более высокого порядка малости

$$\int_{MN_2} \bar{a} d\bar{r} = a_2 ds_2 = a_2 H_2 dq_2,$$

на кривой N_2N_3 имеем

$$\int_{N_2N_3} \bar{a} d\bar{r} = a_3 ds_3 + \frac{\partial a_3 ds_3}{\partial q_2} dq_2 = \left(a_3 H_3 + \frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_2} dq_2 \right) dq_3,$$

на N_3M_3

$$\int_{N_3M_3} \bar{a} d\bar{r} = - \left(a_2 ds_2 + \frac{\partial a_2 ds_2}{\partial q_3} dq_3 \right) = - \left(a_2 H_2 + \frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_3} dq_3 \right) dq_2,$$

на M_3M

$$\int_{M_3M} \bar{a} d\bar{r} = -a_3 ds_3 = a_3 H_3 dq_3.$$

Суммируя эти выражения, получим

$$\int_{C_1} \bar{a} d\bar{r} = \left(\frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_3} \right) dq_2 dq_3. \quad (\text{П.45})$$

Подставив соотношение (П.45) и первое из равенств (П.39) в формулу (П.31), после перехода к пределу имеем

$$\text{rot}_1 \bar{a} = \frac{1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_3} \right), \quad (\text{П.46})$$

и далее циклической перестановкой индексов получим

$$\text{rot}_2 \bar{a} = \frac{1}{H_3 H_1} \left(\frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_3} - \frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_1} \right), \quad (\text{П.47})$$

$$\text{rot}_3 \bar{a} = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_2} \right). \quad (\text{П.48})$$

Из формул (П.46)–(П.47) следует, что

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{a} &= \frac{\bar{e}_1^*}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_3} \right) + \frac{\bar{e}_2^*}{H_3 H_1} \left(\frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_3} - \frac{\partial a_3 H_3}{\partial q_1} \right) + \frac{\bar{e}_3^*}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial a_2 H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1 H_1}{\partial q_2} \right) = \\ &= \begin{vmatrix} \bar{e}_1^* & \bar{e}_2^* & \bar{e}_3^* \\ \frac{\partial}{\partial q_3} & \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} \\ H_2 H_3 & H_3 H_1 & H_1 H_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \bar{e}_1^* & H_2 \bar{e}_2^* & H_3 \bar{e}_3^* \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 a_1 & H_2 a_2 & H_3 a_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.49})$$

Для вычисления оператора Лапласа в криволинейных координатах воспользуемся тем, что

$$\Delta \varphi = \text{div}(\nabla \varphi). \quad (\text{П.50})$$

Подставив в формулу (П.50) выражения (П.41) для $\nabla\varphi$ и (П.44) для $\operatorname{div} \bar{a}$, получим

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial\varphi}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (\text{П.51})$$

Векторные операции в цилиндрической и сферической системах координат

В цилиндрической системе координат (рис. П.6) положение точки определяется координатами $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$. При этом $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Формулы (П.33) имеют вид

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi, \quad x_3 = z.$$

Очевидно, что

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\varphi, \quad ds_3 = dz,$$

и из формул (П.37) имеем

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1.$$

Обозначив координатные орты через \bar{e}_r , \bar{e}_φ , \bar{e}_z , а координаты вектора \bar{a} через a_r , a_φ , a_z , из равенств (П.41), (П.44), (П.49), (П.51) получим

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \bar{e}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \bar{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \bar{e}_z \frac{\partial\psi}{\partial z}, \\ \operatorname{div} \bar{a} &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{a_r}{r}, \\ \operatorname{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \bar{e}_r & \bar{e}_\varphi & \frac{1}{r} \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & r a_\varphi & a_z \end{vmatrix}, \\ \Delta\psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.52})$$

В сферической системе координат (рис. П.7) положение точки определяется координатами $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$. Область изменения координат — $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Формулы (П.33) имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ x_3 &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

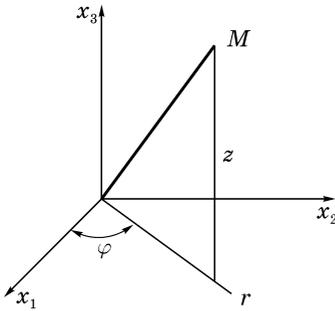


Рис. П6

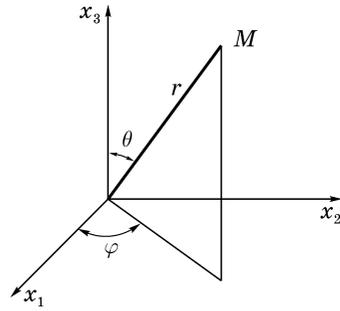


Рис. П7

Так как

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\theta, \quad ds_3 = r \sin \theta d\varphi,$$

то

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta.$$

Тогда из формул (П.41), (П.44), (П.49), (П.51) имеем

$$\nabla \psi = \bar{e}_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \bar{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \bar{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (a_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{e}_r & \bar{e}_\theta & \bar{e}_\varphi \\ r^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} & r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r a_\theta & r a_\varphi \sin \theta \end{vmatrix}, \tag{П.53}$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right].$$

Производные единичных векторов

Для вычисления производных единичных векторов рассмотрим вектор $\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial q_1 \partial q_2}$. Из формул (П.36) следует, что

$$\frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 r}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} (\bar{e}_2^* H_2) = \frac{\partial}{\partial q_2} (\bar{e}_1^* H_1),$$

или

$$\vec{e}_2^* \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + H_2 \frac{\partial \vec{e}_2^*}{\partial q_1} = \vec{e}_1^* \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + H_1 \frac{\partial \vec{e}_1^*}{\partial q_2}. \quad (\text{П.54})$$

Очевидно, что годографом для вектора $\frac{\partial \vec{e}_2^*}{\partial q_1}$ служит координатная линия q_1 , и в соответствии с определением производной вектора по направлению (П.5)

$$\frac{\partial \vec{e}_2^*}{\partial q_1} = C_1 \vec{e}_1^*.$$

Аналогичным образом имеем

$$\frac{\partial \vec{e}_1^*}{\partial q_2} = C_2 \vec{e}_2^*.$$

Подставив эти соотношения в формулу (П.54), получим

$$\vec{e}_2^* \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + H_2 C_1 \vec{e}_1^* = \vec{e}_1^* \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + H_1 C_2 \vec{e}_2^*,$$

откуда

$$H_1 C_2 = \frac{\partial H_2}{\partial q_1}, \quad H_2 C_1 = \frac{\partial H_1}{\partial q_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \vec{e}_1^*}{\partial q_2} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_2^*, \quad \frac{\partial \vec{e}_2^*}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_1^*. \quad (\text{П.55})$$

При циклической перестановке индексов имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_2^*}{\partial q_3} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_3^*, & \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial q_2} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \vec{e}_2^*, \\ \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial q_1} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_1^*, & \frac{\partial \vec{e}_1^*}{\partial q_3} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_3^*. \end{aligned} \quad (\text{П.56})$$

Так как $\vec{e}_1^* = \vec{e}_2^* \times \vec{e}_3^*$, то с учетом формул (П.55) и (П.56) получим

$$\frac{\partial \vec{e}_1^*}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \vec{e}_2^* - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \vec{e}_3^*,$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_2^*}{\partial q_2} &= -\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \vec{e}_3^* - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \vec{e}_1^*, \\ \frac{\partial \vec{e}_3^*}{\partial q_3} &= -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \vec{e}_1^* - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \vec{e}_2^*. \end{aligned}$$

Преобразование координат

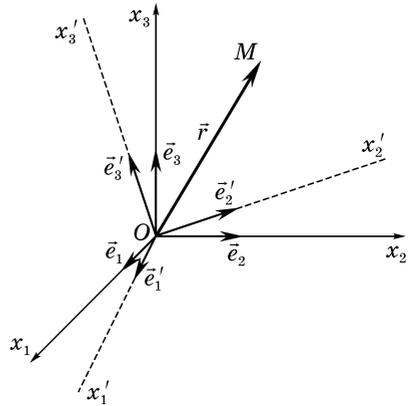
Рассмотрим две прямолинейные прямоугольные системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Ox'_1x'_2x'_3$ с координатными единичными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ соответственно (рис. П.8). Назовем систему координат $Ox_1x_2x_3$ старой, а $Ox'_1x'_2x'_3$ – новой системой координат.

Поскольку положение точки M в пространстве, или величина и направление вектора \vec{a} , при переходе к новой системе координат не изменяется, то

$$M(x_1, x_2, x_3) = M(x'_1, x'_2, x'_3), \quad (П.57)$$

$$\vec{a} = \vec{e}_k x_k = \vec{e}'_k x'_k,$$

Рис. П8



или, что то же самое,

$$\vec{a} = \vec{e}_i x_i = \vec{e}'_k x'_k. \quad (П.58)$$

Умножив равенство (П.54) на \vec{e}_k , а (П.55) на \vec{e}'_k , получим

$$x_k = \vec{e}'_i \vec{e}_k x'_i = \alpha_{ik} x'_i, \quad x'_k = \vec{e}_i \vec{e}'_k x_i = \alpha_{ki} x_i, \quad (П.59)$$

где

$$\alpha_{ik} = \vec{e}'_i \vec{e}_k = \cos(x'_i, x_k). \quad (П.60)$$

Для единичных векторов имеем очевидные формулы

$$\vec{e}_k = \alpha_{ik} \vec{e}'_i, \quad \vec{e}'_k = \alpha_{ki} \vec{e}_i. \quad (П.61)$$

Из формул (П.60) следует, что $\alpha_{ik} \neq \alpha_{ki}$ и что первый индекс в символе α_{mn} относится к новым, а второй – к старым координатным осям.

В соответствии с равенствами (П.61)

$$\vec{e}_k = \alpha_{mk} \vec{e}'_m = \alpha_{mk} \alpha_{mi} \vec{e}_i,$$

$$\vec{e}'_k = \alpha_{km} \vec{e}_m = \alpha_{km} \alpha_{im} \vec{e}'_i,$$

откуда

$$\alpha_{mk} \alpha_{mi} = \delta_{ik}, \quad \alpha_{km} \alpha_{im} = \delta_{ik},$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases}$$

Очевидно, что формулы (П.61) справедливы и для компонент векторов.

Из формул (П.61) видно, что переход от старой системы координат к новой определяется девятью коэффициентами, из которых можно составить матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{П.62})$$

Переход от новой системы координат к старой определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{П.63})$$

Матрица, в которой строки заменены столбцами, называется транспонированной. Таким образом, матрицы (П.62) и (П.63) являются взаимно транспонированными.

Тензоры

Для описания геометрических, или физических, объектов или процессов, происходящих в природе, используются геометрические или физические величины, которые обычно рассматриваются в той или иной произвольно выбранной системе координат. Так как реальные объекты и процессы существуют, очевидно, независимо от выбора системы координат, то и геометрические и физические величины, описывающие эти процессы, не должны зависеть от выбранной системы координат. Таким образом, геометрическая, или физическая, величина, должна быть определена в каждой системе координат и должна задаваться в виде некоторой совокупности величин (компонент), но как математический объект должна быть независима от выбора системы координат. Это возможно в том случае, если задан закон преобразования компонент при переходе от одной системы координат к другой. В общем случае абстрактные математические объекты, инвариантные относительно преобразования координат, называются тензорами. Следовательно, геометрические (физические) величины являются тензорами. Простейшие тензоры – скаляр и вектор. Введем понятие тензора в наиболее простом случае, а именно, в прямоугольной декартовой системе координат.

Тензором ранга n называется совокупность 3^n компонент $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$, которые при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по закону

$$a'_{j_1 j_2 \dots j_n} = \alpha_{j_1 i_1} \alpha_{j_2 i_2} \dots \alpha_{j_n i_n} a_{i_1 i_2 \dots i_n}. \quad (\text{П.64})$$

При этом подразумевается, что компоненты $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ занумерованы индексами i_1, i_2, \dots, i_n , каждый из которых независимо друг от друга пробегает значения 1, 2, 3, а преобразование координат задается формулами (П.59).

Из приведенного определения следует, что тензор нулевого ранга определяется одним членом, который сохраняет свое значение во всех системах координат. Следовательно, тензоры нулевого ранга представляют собой скаляры. Они определяют физические или геометрические величины, характеризующиеся только численным значением. Примерами скаляров являются температура, плотность, расстояние между двумя точками и т.д.

Тензоры первого ранга имеют три компонента, которые преобразуются по формулам

$$a'_j = \alpha_{ij} a_i. \quad (\text{П.65})$$

Так как формулы (П.65) совпадают с формулами (П.59) преобразования координат вектора, то тензоры первого ранга часто называют векторами. Однако вектор является лишь одним из примеров тензора первого ранга. Другим примером может служить плоскость в трехмерном пространстве. Ее положение задается тремя коэффициентами, которые, как легко видеть, преобразуются по закону (П.65). Следовательно, эти три коэффициента образуют тензор первого ранга.

Тензор второго ранга определяется девятью компонентами, каждая из которых имеет два индекса, взятых в определенном порядке. Для тензора второго ранга из формулы (П.64) имеем

$$a'_{j_1 j_2} = \alpha_{j_1 i_1} \alpha_{j_2 i_2} a_{i_1 i_2}. \quad (\text{П.66})$$

Суммирование в формуле (П.65) производится по неммым индексам i_1, i_2 . Поэтому, полагая $j_1 = i, j_2 = j$, эту формулу можно переписать в виде

$$a'_{ij} = \alpha_{im} \alpha_{jn} a_{mn}. \quad (\text{П.67})$$

В дальнейшем рассматриваются только тензоры второго ранга.

В качестве примера тензора второго ранга рассмотрим тензор, построенный с помощью двух векторов. Пусть в системе координат $0x_1x_2x_3$ заданы векторы $\vec{a} = \vec{e}_k a_k$ и $\vec{b} = \vec{e}_i b_i$. Рассмотрим совокупность всех произведений, содержащих на первом месте компоненту вектора \vec{a} , а на втором – вектора \vec{b} , то есть совокупность девяти величин $a_i b_k$. В соответствии с формулами (П.59) имеем

$$a'_i b'_j = \alpha_{im} a_m \alpha_{jn} a_n = \alpha_{im} \alpha_{jn} a_m a_n,$$

то есть величины $a_i b_k$ действительно являются компонентами тензора второго ранга. Тензор второго ранга, образованный по указанному правилу двумя векторами, называется диадой.

Тензору A с компонентами a_{ik} соответствует его матрица, в которой первым индексом принято обозначать номер строки матрицы, а вторым – номер столбца. Таким образом, матрица тензора A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{П.68})$$

а матрица диады –

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

Тензор A^* , определяемый транспонированной матрицей (П.68), то есть матрицей

$$A^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad (\text{П.69})$$

называется тензором, сопряженным с тензором A^* .

Тензор, компоненты которого удовлетворяют равенствам $a_{ik} = a_{ki}$, называется симметричным. Если выполняются равенства $a_{ik} = -a_{ki}$, то тензор называется антисимметричным.

Если тензор a_{ij} симметричный, то в соответствии с формулой (П.67)

$$a'_{ij} = \alpha_{im} \alpha_{jn} a_{mn} = \alpha_{jn} \alpha_{im} a_{nm} = a'_{ji}.$$

Если тензор a_{ij} антисимметричный, то

$$a'_{ij} = \alpha_{im} \alpha_{jn} a_{mn} = -\alpha_{jn} \alpha_{im} a_{nm} = -a'_{ji}.$$

Таким образом, свойства симметричности и антисимметричности тензоров не зависят от принятой системы координат.

Из формул (П.68) и (П.69) следует, что для симметричного тензора $A^* = A$, то есть симметричный тензор является самосопряженным. Легко видеть, что для антисимметричного тензора $A^* = -A$.

Алгебраические операции над тензорами

Пусть даны тензоры с компонентами a_{ij} и b_{ij} . Складывая их покомпонентно, имеем

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (\text{П.70})$$

В соответствии с формулами (П.67)

$$\begin{aligned} c'_{ij} &= a'_{ij} + b'_{ij} = \alpha_{im} \alpha_{in} a_{mn} + \alpha_{im} \alpha_{in} b_{mn} = \\ &= \alpha_{im} \alpha_{in} (a_{mn} + b_{mn}) = \alpha_{im} \alpha_{in} c_{mn}, \end{aligned}$$

то есть сумма тензоров также является тензором.

Аналогичным образом доказывается, что если умножить все компоненты тензора a_{ij} на скаляр β , то получится новый тензор с компонентами $c_{ij} = \beta a_{ij}$.

Рассмотрим тензор с компонентами a_{ij} . В соответствии с правилом сложения тензоров (П.70) имеем очевидное тождество

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = b_{ij} + c_{ij},$$

где

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = b_{ji}, \quad c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = -c_{ji}.$$

Таким образом, всякий тензор второго ранга может быть разложен на симметричную и антисимметричную части.

Умножение тензора A с компонентами a_{ik} на вектор $\vec{x} = \vec{e}_k x_k$ справа определяется как

$$A \cdot \vec{x} = \vec{e}_k a_{ki} x_i = \vec{b} \quad (\text{П.71})$$

или, в координатной форме,

$$a_{ki} x_i = b_k. \quad (\text{П.72})$$

Переходя к системе координат $0x'_1 x'_2 x'_3$ из равенства (П.72), с учетом формул (П.59) и (П.67) имеем

$$a'_{ki} x'_i = b'_k = \alpha_{km} \alpha_{in} a_{mn} x'_i = \alpha_{km} a_{mn} x_n = \alpha_{km} b_m.$$

Полученное выражение представляет собой формулу преобразования компонент вектора при переходе к новой системе координат, и, следовательно, величина \vec{b} действительно является вектором. Таким образом, умножение тензора на вектор справа представляет собой преобразование одного вектора в другой.

Так как векторы представляют собой величины, инвариантные относительно преобразования системы координат, то и тензор есть объект, инвариантный относительно такого преобразования.

Умножение тензора A на вектор \vec{x} слева определяется как

$$\vec{x} \cdot A = \vec{e}_k x_i a_{ik}. \quad (\text{П.73})$$

Из равенств (П.71) и (П.73) следует, что

$$A\vec{x} = \vec{x}A^*, \quad A^* \vec{x} = \vec{x}A.$$

Рассмотрим тензор с компонентами a_{ij} . Операция, при которой полагается $j = i$ и производится суммирование, то есть

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

называется свертыванием тензора. В результате свертки тензора второго ранга образуется скаляр, который называется следом и обозначается $\text{tr } a_{ij}$ или $\text{Sp } a_{ij}$.

Тензор второго ранга, след которого равен нулю, называется девиатором. Например, тензор с компонентами

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{1}{3} a \delta_{ij},$$

где $a = \text{tr } a_{ij}$ является девиатором.

Тензор второго ранга называется шаровым, или изотропным, если в любой системе координат его компоненты имеют одни и те же значения, то есть если $a'_{ij} = a_{ij}$. Введем новую систему координат $x'_1 = -x_1$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$. В соответствии с формулами (П.67) получим $a'_{12} = -a_{12}$, $a'_{13} = -a_{13}$, откуда $a_{12} = a_{13} = 0$. Аналогичным образом доказывается равенство нулю остальных недиагональных компонент. С помощью преобразования $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_3$, $x'_3 = -x_2$ показывается, что $a_{ij} = \lambda \delta_{ij}$, где λ – скаляр.

Линейная векторная функция и тензор второго ранга

Закон L , с помощью которого в пространстве устанавливается соответствие между векторами, называется векторной функцией. В символическом обозначении векторная функция имеет вид

$$\vec{u} = L\vec{x}.$$

Если для любых векторов \vec{x} и \vec{y} и любого скаляра β выполняется равенство

$$L(\vec{x} + \vec{y}) = L\vec{x} + L\vec{y}, \quad (\text{П.74})$$

$$L(\beta\vec{x}) = \beta L\vec{x}, \quad (\text{П.75})$$

то векторная функция L называется линейной, или аффинором.

Пусть аффинор L ставит в соответствие базисным векторам \vec{e}_i векторы \vec{u}_i , то есть

$$\vec{u}_i = L\vec{e}_i. \quad (\text{П.76})$$

Так как рассматривается не преобразование системы координат $0x_1x_2x_3$, а закон, устанавливающий соответствие между векторами в одной и той же системе, то любой вектор \vec{u}_i однозначно разлагается по векторам базиса и

$$\vec{u}_i = a_{ji}\vec{e}_j. \quad (\text{П.77})$$

Рассмотрим произвольный вектор-аргумент \vec{x} с компонентами x_1, x_2, x_3 . Тогда для линейной векторной функции $\vec{u} = L\vec{x}$ в соответствии с правилами (П.74), (П.75) и формулами (П.76), (П.77) имеем

$$\vec{u} = L\vec{x} = L(\vec{e}_i x_i) = x_i L\vec{e}_i = x_i \vec{u}_i = x_i a_{ji} \vec{e}_j = u_j \vec{e}_j,$$

откуда

$$u_j = a_{ji} x_i. \quad (\text{П.78})$$

Таким образом, аффинор в базисе \vec{e}_i представляется в виде матрицы a_{ij} .

В системе координат $0x'_1x'_2x'_3$ векторы \bar{u} и \bar{x} имеют компоненты u'_i, x'_i , а равенство (П.78) принимает вид

$$u'_j = \alpha'_{ji} x'_i,$$

где α'_{ji} – компоненты аффинора в новой системе координат.

Используя формулы преобразования компонент вектора (П.59) и формулы (П.78), из равенств (П.79) имеем

$$u'_j = \alpha_{jm} u_m = \alpha_{jm} a_{mn} x_n = \alpha_{jm} a_{mn} \alpha_{in} x'_i = \alpha'_{ji} x'_i,$$

откуда

$$\alpha'_{ji} = \alpha_{jm} \alpha_{in} a_{mn}.$$

Таким образом, при переходе к новой системе координат компоненты a_{ji} преобразуются по тензорному закону. Следовательно, всякой линейной векторной функции соответствует тензор второго ранга.

С другой стороны, из совпадения формул (П.78) и (П.72) вытекает, что всякому тензору может быть поставлен в соответствие аффинор.

Главные значения и главные направления симметричного тензора второго ранга

Как было показано, тензор второго ранга может быть истолкован как аффинор, то есть тензор A ставит в соответствие вектору \bar{b} вектор \bar{n} . Следовательно, на основании формулы (П.78)

$$b_k = a_{ki} n_i. \tag{П.80}$$

Если векторы \bar{b} и \bar{n} коллинеарны, то есть $b_j = \lambda n_j$, то вектор \bar{n} называется собственным вектором тензора A , а задаваемое им направление – главным или собственным направлением тензора A . Если \bar{n} – собственный вектор тензора A , то любой вектор $l\bar{n}$ ($l \neq 0$) также будет собственным. Поэтому без ограничения общности можно принять $|\bar{n}| = 1$.

Для собственного вектора \bar{n} соотношение (П.80) принимает вид

$$\lambda n_k = a_{ki} n_i. \tag{П.81}$$

Число λ называется главным, или собственным, значением тензора A , соответствующим данному собственному вектору \bar{n} .

Переписывая покоординатно систему уравнений (П.81), получим

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)n_1 + a_{12}n_2 + a_{13}n_3 &= 0, \\ a_{21}n_1 + (a_{22} - \lambda)n_2 + a_{23}n_3 &= 0, \\ a_{31}n_1 + a_{32}n_2 + (a_{33} - \lambda)n_3 &= 0, \end{aligned} \tag{П.82}$$

то есть получим систему из трех линейных однородных уравнений относительно неизвестных n_i . Для того, чтобы получить решение этой системы,

кроме тривиального решения $\vec{n} = 0$, которое не определяет никакого направления, необходимо, чтобы детерминант системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{П.83})$$

Раскрывая определитель (П.83), получим кубическое уравнение относительно λ в виде

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0, \quad (\text{П.84})$$

где

$$J_1 = a_{ii}, \quad J_2 = \frac{1}{2}(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}), \quad J_3 = \det a_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (\text{П.85})$$

Уравнение (П.85) называется вековым, или характеристическим уравнением тензора A .

Так как величины J_1, J_2, J_3 скаляры, то они представляют собой инварианты относительно преобразования координат и называются первым, вторым и третьим инвариантами тензора A .

Кубическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет, как известно, по крайней мере один вещественный корень. Обозначим его через λ_1 . Подставив значение λ_1 в систему (П.82) и решив ее, найдем вектор $\vec{n}^{(1)}$, определяющий собой собственное направление тензора A , соответствующее собственному значению λ_1 .

Сделаем теперь преобразование координат, при котором новая ось x'_1 совместится с собственным направлением $\vec{n}^{(1)}$. В новой системе с осями $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ для любого вектора $l\vec{e}'_i$ ($l \neq 0$) из равенства (П.81) имеем

$$\lambda_1 l = a'_{11} l, \quad 0 = a'_{21} l, \quad 0 = a'_{31} l,$$

где a'_{ij} — компоненты тензора A в новой системе координат. Следовательно, в этой системе тензор A будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

а характеристическое уравнение —

$$(\lambda - \lambda_1)[(a'_{22} - \lambda)(a'_{33} - \lambda) - a'_{23}a'_{32}] = 0.$$

Примем теперь, что тензор A симметричный, то есть $a'_{23} = a'_{32}$. Тогда два других собственных значения тензора равны

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left[(a'_{22} + a'_{33}) \pm \sqrt{(a'_{22} - a'_{33})^2 + 4(a'_{23})^2} \right]. \quad (\text{П.86})$$

Из равенства (П.86) видно, что $\lambda_{2,3}$ – вещественные числа.

Итак, симметричный тензор второго ранга имеет три вещественных собственных значения и соответственно этому три собственных направления.

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда из уравнений (П.82) имеем

$$a_{ij}n_j^{(1)} = \lambda_1 n_i^{(1)}, \quad a_{ij}n_j^{(2)} = \lambda_2 n_i^{(2)},$$

где $\vec{n}^{(2)}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_2 . Умножив первую из этих систем на $n_i^{(2)}$, а вторую на $n_i^{(1)}$, получим

$$a_{ij}n_j^{(1)}n_i^{(2)} = \lambda_1 n_i^{(1)}n_i^{(2)}, \quad a_{ij}n_j^{(2)}n_i^{(1)} = \lambda_2 n_i^{(2)}n_i^{(1)},$$

откуда

$$a_{ij}(n_j^{(1)}n_i^{(2)} - n_j^{(2)}n_i^{(1)}) = (\lambda_1 - \lambda_2)n_i^{(1)}n_i^{(2)}. \quad (\text{П.87})$$

Так как $a_{ij} = a_{ji}$, то левая часть выражения (П.87) равна нулю, и, следовательно,

$$n_i^{(1)}n_i^{(2)} = 0,$$

то есть векторы $\vec{n}^{(1)}$ и $\vec{n}^{(2)}$ взаимно перпендикулярны. Аналогичным образом доказывается ортогональность векторов $\vec{n}^{(2)}$ и $\vec{n}^{(3)}$.

Из доказанного следует, что единичные собственные векторы симметричного тензора второго ранга образуют ортонормированный базис. В этом базисе матрица тензора имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

а формулы (П.85) для инвариантов тензора –

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \quad J_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Если два собственных значения тензора совпадают, например, $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, то в этом случае любой вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной собственному вектору $\vec{n}^{(1)}$, является собственным. Это означает, что имеется целая плоскость собственных векторов.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то матрица тензора в любой прямолинейной прямоугольной системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а сам тензор $A = \lambda_1 \delta_{ij}$. Такой тензор называется шаровым, так как соответствующая ему поверхность второго порядка – сфера (см. гл. III, §4). Из

формулы (П.81) следует, что в этом случае $a_{ki}n_i = \lambda_1\delta_{ij}n_i = \lambda_1n_i$, любое направление и любой вектор являются собственным для тензора.

Некоторые дифференциальные операции

Рассмотрим вектор $\vec{a} = \vec{e}_i a_i$. В соответствии с формулой (П.4)

$$\frac{\partial a_i}{\partial s} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \cos(x_k, \vec{s}),$$

то есть производная вектора по направлению определяется девятью выражениями вида $\frac{\partial a_i}{\partial x_k}$.

Переходя от системы координат $0x_1x_2x_3$ к системе $0x'_1x'_2x'_3$, в соответствии с формулами (П.59) имеем

$$\frac{\partial a'_i}{\partial x'_k} = \alpha_{ij} \frac{\partial a_j}{\partial x'_k} = \alpha_{ij} \frac{\partial a_j}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x'_k} = \alpha_{ij} \alpha_{km} \frac{\partial a_j}{\partial x_m}.$$

Следовательно, совокупность величин $\frac{\partial a_j}{\partial x_m}$ образует тензор второго ранга.

Дивергенция тензора $A = \{a_{ij}\}$ по определению равна

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x_i} = \vec{e}_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}. \quad (\text{П.88})$$

В соответствии с формулой (П.22)

$$\int_V \frac{\partial \vec{a}_i}{\partial x_i} dV = \int_S \vec{a}_i \alpha_{ni} dS = \int_S \vec{e}_j \alpha_{ni} a_{ij} dS. \quad (\text{П.89})$$

С другой стороны, как это следует из соотношения (П.72),

$$\vec{n}A = \vec{e}_k n_i a_{ik} = \vec{e}_k \alpha_{ni} a_{ik}. \quad (\text{П.90})$$

Подставив в соотношение (П.89) равенства (П.85) и (П.90), получим

$$\int_V \operatorname{div} A dV = \int_S \vec{n}A dS.$$

Пусть компоненты a_{ij} тензора A представляют собой функции скалярного аргумента t . Тогда величины

$$b_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} = \dot{a}_{ij}$$

образуют, очевидно, тензор

$$B = \dot{A} = \begin{pmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \dot{a}_{13} \\ \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{31} & \dot{a}_{32} & \dot{a}_{33} \end{pmatrix}.$$

Компоненты симметричного тензора в цилиндрической и сферической системах координат

Рассмотрим симметричный тензор с компонентами

$$b_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right). \tag{П.91}$$

В цилиндрической системе координат $0r\varphi z$ (рис. П.6) компоненты этого тензора равны

$$\begin{aligned} b_{rr} &= \frac{\partial a_r}{\partial r}, & b_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r} \right), \\ b_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{a_r}{r}, & b_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} \right), \\ b_{zz} &= \frac{\partial a_z}{\partial z}, & b_{zr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_z}{\partial r} + \frac{\partial a_r}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

В сферической системе координат $0r\theta\varphi$ компоненты тензора (П.91) имеют вид

$$\begin{aligned} b_{rr} &= \frac{\partial a_r}{\partial r}, & b_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + \frac{\partial a_\theta}{\partial r} - \frac{a_\theta}{r} \right), \\ b_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{a_r}{r}, & b_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} - \frac{a_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta \right), \\ b_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{a_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{a_r}{r}, & b_{\varphi r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{a_\varphi}{r} \right). \end{aligned}$$

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в криволинейных системах координат

В соответствии с формулами (4.41), (7.8), (7.12) уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости при изотермическом режиме течения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} \right) &= \rho \vec{F} - \nabla p + \mu \Delta \vec{v}. \end{aligned} \tag{П.92}$$

Так как

$$\Delta \vec{a} = \nabla \operatorname{div} \vec{a} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a},$$

то для несжимаемой жидкости имеем

$$\Delta \vec{a} = - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a},$$

и уравнения (П.92) можно представить в виде

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (\text{П.93})$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \bar{v} \times \operatorname{rot} \bar{v} \right) = \rho \bar{F} - \nabla p - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{v}. \quad (\text{П.94})$$

Подставив в уравнение (П.93) вторую формулу (П.51), получим уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат в виде

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0. \quad (\text{П.95})$$

Выражения для проекций $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{v}$ на координатные оси в соответствии с третьей формулой (П.52) равны

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{v})_r &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) - r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right], \\ (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{v})_\varphi &= \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \right], \\ (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{v})_z &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial z} - r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.96})$$

Вычитая из соответствующих равенств (П.96) выражения $\frac{\partial}{\partial r} \operatorname{div} \bar{v}$, $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{div} \bar{v}$, $\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \bar{v}$, получим

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{v})_r &= - \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{v})_\varphi &= - \left(\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \\ (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{v})_z &= -\Delta v_z, \end{aligned} \quad (\text{П.97})$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Спроектировав уравнение (П.94) на координатные оси и подставив в эти проекции равенства (П.97), с учетом формул (П.52) получим

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) &= \rho F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) &= \rho F_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left(\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta v_z. \end{aligned} \quad (\text{П.98})$$

Уравнения (П.98) представляют собой систему уравнений изотермического движения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической системе координат $0r\varphi z$.

В сферической системе координат $0r\theta\varphi$ (рис. П.7) уравнение неразрывности в соответствии со вторым равенством (П.52) имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta = 0.$$

Выполняя преобразования, аналогичные приведенным для цилиндрической системы координат, получим

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) = \rho F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \\ & + \mu \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2v_\theta}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \right), \\ & \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) = \rho F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ & + \mu \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right), \\ & \rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta \right) = \rho F_\varphi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \\ & \mu \left(\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi}{R^2 \sin^2 \theta} \right), \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Дифференцирование по времени интеграла, взятого по подвижному объему (второй способ доказательства)

В функции Φ , определенной равенством

$$\Phi(x_i, t) = \int_{V(t)} \varphi(x_i, t) dV$$

произведем замену переменных. От переменных Эйлера x_i, t , перейдем к переменным Лагранжа X_i, t . Тогда, используя формулу замены переменных в тройном интеграле, получим следующее равенство

$$\int_{V(t)} \varphi(x_i, t) dV = \int_{V_0} \varphi(x_i(X_j), t) J dV_0$$

где $J = \left| \partial x_i / \partial X_j \right|$ - якобиан преобразования переменных (определитель матрицы Якоби из производных $\partial x_i / \partial X_j$), V_0 - область интегрирования, которую после замены переменных переходит $V(t)$ (напомним, что $V_0 = V(t_0)$). Поскольку в переменных Лагранжа область интегрирования не зависит от времени (интегрирование ведется по материальному объему), то операции интегрирования и дифференцирования можно поменять местами и написать

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \varphi(X_j, t) J dV_0 = \int_{V_0} \frac{d}{dt} [\varphi(X_j, t) J] dV_0 = \int_{V_0} \left[J \frac{d\varphi(X_j, t)}{dt} + \varphi(X_j, t) \frac{dJ}{dt} \right] dV_0$$

Теперь вычислим материальную производную от якобиана dJ/dt . Согласно правилу дифференцирования определителей, материальная производная от определителя третьего порядка равна сумме трех определителей третьего порядка, у которых продифференцированы элементы первой, второй и третьей строки соответственно, а две другие строки остаются без изменений.

Так как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad (\text{П.99})$$

то каждый из трех определителей, полученных после дифференцирования, может быть представлен в виде суммы трех определителей, в силу равенства строк, равны нулю. В самом деле, рассмотрим для примера результат дифференцирования и один из трех определителей.

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(X_1, X_2, X_3)} = \frac{d}{dt} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим теперь первый определитель. Как следует из равенства (П.99) имеем

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Аналогично расписываются и два других определителя. В результате имеем

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \mathbf{v}$$

и интеграл можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \varphi(X_j, t) J dV_0 = \int_{V_0} \left[\frac{d\varphi(X_j, t)}{dt} + \varphi(X_j, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] J dV_0$$

или, возвращаясь к эйлеровым переменным, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varphi(x_j, t) J dV_0 = \int_{V(t)} \left[\frac{d\varphi(x_j, t)}{dt} + \varphi(x_j, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV .$$

Так как полная производная равна сумме локальной и конвективной производных

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} ,$$

то выражение в квадратных скобках можно преобразовать

$$\int_{V(t)} \left[\frac{d\varphi(x_j, t)}{dt} + \varphi(x_j, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \varphi(x_j, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \varphi(x_j, t) \mathbf{v} \right] dV .$$

Литература

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика.– М.: Наука, 1976.-888 с.
2. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй.– М.: Физматгиз, 1960. – 715 с.
3. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – М.: Недра, 1982. – 407 с.
4. Алишаев М.Г., Розенберг М.Д., Теслюк Е.В. Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений.– М.: Недра, 1985. – 271 с.
5. Альтшуль А.Д., Киселев П.Г. Гидравлика и аэродинамика. – М.: Издательство литературы по строительству, 1965. – 274 с.
6. Аравин В.Н., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде.– М.: Гостехтеориздат, 1953. – 616 с.
7. Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
8. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. – Л.: Гидрометеониздат, 1982. – 255 с.
9. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах.– М.: Недра, 1984. – 207 с.
10. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика.– М.: Недра, 1993. – 416 с.
11. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей.– М.: Наука, 1975. – 199 с.
12. Биркгоф Г. Гидродинамика.– М.: ИЛ, 1963. – 244 с.
13. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации.– М.: Мир, 1971. – 452 с.
14. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973. – 758 с.
15. Вахитов Г.Г., Кузнецов О.Л., Симкин Э.М. Термодинамика призабойной зоны нефтяного пласта.– М.: Недра, 1978. – 216 с.
16. Вулис Л.А., Кашкаров В.П. Теория струй вязкой жидкости.– М.: Наука, 1965. – 431 с.

17. Гиматудинов Ш.К., Ширковский А.И. Физика нефтяного и газового пласта.– М.: Недра, 1982. – 308 с.
18. Гинсбург И.П. Аэрогазодинамика.– М.: Высшая школа, 1966. – 404 с.
19. Гинсбург И.П. Прикладная гидрогазодинамика.– Изд-во ЛГУ, 1958.– 338 с.
20. Гинсбург И.П. Теория сопротивления и теплопередачи.– Изд-во ЛГУ, 1970.– 375 с.
21. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды.– М.: Наука, 1978. – 304 с.
22. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред.– М.: Высшая школа, 1972. – 368 с.
23. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами.– Новосибирск.: Наука, 1989. – 336 с.
24. Голф-рахт Т.Д. Основы нефтепромысловой геологии и разработки трещиноватых коллекторов: Пер. с англ.– М.: Недра, 1986. – 608 с.
25. Гриценко А.И., Клапчук О.В., Харченко Ю.А. Гидродинамика газожидкостных смесей в скважинах и трубопроводах.– М.: Недра, 1994. – 238 с.
26. Гусейн-Заде М.А., Колосовская А.К. Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах.– М.: Недра, 1972. – 454 с.
27. Данилов В.Л., Кац Р.М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде.– М.: Недра, 1980. – 264 с.
28. Двухшерстов Г.И. Гидравлический удар в трубах некругового сечения и потоке жидкости между упругими стенками.– Ученые записки МГУ, сер. Механика, т. II, 1948. – С.17–76
29. Дейч М.Е., Филиппов Г.А. Газодинамика двухфазных сред.– М.: Энергоиздат, 1981. – 472 с.
30. Евдокимова В.А., Кочина И.Н. Сборник задач по подземной гидравлике.– М.: Недра, 1979. – 169 с.
31. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. – М.: Машиностроение, 1987. – 440 с.
32. Ентов В.М., Заковский А.Ф. Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи.– М.: Недра, 1989.– 232 с.
33. Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта.– М.: Недра, 1975. – 216 с.
34. Жермен П. Механика сплошных сред.– М.: Мир, 1965. – 479 с.

35. Жуковский Н.Е. Собрание сочинений. Т. 3.– М.–Л.: Гослитиздат, 1949. – 700 с.
36. Зельдович А.Б. Теория ударных волн и введение в газодинамику.– М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1946. – 185 с.
37. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред.– М.: ИЛ, 1954. – 486 с.
38. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям.– М.: Машиностроение, 1975.
39. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы: пер. с англ.– М.: Мир, 1964. – 350 с.
40. Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости.– Новосибирск: Наука, 1988. – 165 с.
41. Котяхов Ф.И. Физика нефтяных и газовых коллекторов.– М.: Недра, 1997. – 287 с.
42. Кочин Н.Б., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч.1.– М.: Физматгиз, 1963. – 583 с.
43. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч.2.– М.: Физматгиз, 1963. – 727 с.
44. Кутателадзе С.С., Стырикович М.А. Гидродинамика двухфазных систем.– М.: Энергия, 1976. – 296 с.
45. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.– М.: Наука, 1973. – 416 с.
46. Ламб Г. Гидродинамика.– М.–Л.: ГИТТЛ, 1947. – 928 с.
47. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика.– М.: Наука, 1986. – 736 с.
48. Лапук Б.Б. Теоретические основы разработки месторождений природных газов.– М.–Л.: Гостоптехиздат, 1948. – 295 с.
49. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде.– М.–Л.: Гостехиздат, 1947. – 244 с.
50. Лодж А. Эластичные жидкости.– М.: Наука, 1969. – 463 с.
51. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987. – 840 с.
52. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде.– М.–Л.: Гостоптехиздат, 1949. – 628 с.
53. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред.– М.: Мир, 1974. – 518 с.
54. Механика насыщенных пористых сред/В.Н.Николаевский, К.С.Басниев, А.Т.Горбунов, Г.А.Зотов.– М.: Недра, 1970. – 335 с.

55. Механика сплошных сред в задачах. Т. I. Теория и задачи/Под ред. М.Э.Эглит.– М.: Изд-во Московский лицей, 1996. – 395с.
56. Механика сплошных сред в задачах. Т. II. Ответы и решения/Под ред. М.Э.Эглит.– М.: Изд-во Московский лицей, 1996. – 394 с.
57. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 655 с.
58. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика ч.1.– М.: Наука, 1965. – 639 с.
59. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика ч.2.– М.: Наука, 1967.– 720 с.
60. Наказная Л.Г. Фильтрация жидкости и газа в трещиноватых коллекторах.– М.: Недра, 1972. – 184 с.
61. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред т. I.– М.: Наука, 1087. – 464 с.
62. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред т. II.– М.: Наука, 1987. – 359 с.
63. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика.– М.: Недра, 1996. – 447 с.
64. Новожилов В.В. Теория турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.– Л.: Судостроение, 1977. – 165 с.
65. Пирвердян А.М. Физика и гидравлика нефтяного пласта.– М.: Недра, 1982.– 192 с.
66. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод.– М.: Наука, 1977.– 664 с.
67. Прагер В. Введение в механику сплошных сред.– М.: ИЛ, 1968.– 311 с.
68. Прандтль Л. Гидроаэромеханика.– М.: ИЛ, 1949.– 520 с.
69. Пыхачев Г.Б., Исаев Р.Г. Подземная гидравлика.– М.: Недра, 1973. – 360 с.
70. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР/Отв. редактор П.Я.Полубаринова-Кочина.– М.: Наука, 1969. – 545 с.
71. Рахматулин Х.А., Сагомоян А.Я., Бунимович А.И., Зверев И.Н. Газовая динамика.– М.: Высшая школа, 1965. – 722 с.
72. Рейнер М. Реология.– М.: Наука, 1965. – 223 с.
73. Реология. Теория и приложения/Под ред. Ф.Эйриха.– М.: ИЛ, 1962. – 824 с.
74. Розенберг М.Д., Кундин С.А. Многофазная многокомпонентная фильтрация при добыче нефти и газа.– М.: Недра, 1976. – 335 с.

75. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород.– Л.: Недра, 1985. – 240 с.
76. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. I.– М.: Наука, 1994. – 528 с.
77. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. II.– М.: Наука, 1994. – 560 с.
78. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике.– М.: Наука, 1987. – 430 с.
79. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости.– М.: ГИТТЛ, 1955. – 519 с.
80. Соу С. Гидродинамика многофазных систем.– М.: Мир, 1971. – 536 с.
81. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений.– М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. – 420 с.
82. Теплопередача в двухфазном потоке/Под ред. Д.Баттерворса и Г.Хьюитта.– М.: Энергия, 1980. – 328 с.
83. Трудсэлл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.– М.: Мир, 1975. – 592 с.
84. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости.– М.: Мир, 1964. – 216 с.
85. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения.– М.: Мир, 1972. – 440 с.
86. Хейфец Л.И., Неймарк А.В. Многофазные процессы в пористых средах.– М.: Химия, 1982. – 319 с.
87. Хинце И.О. Турбулентность.– М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1963. – 680 с.
88. Христианович С.А. Неустановившееся движение в каналах и реках. В кн.: Некоторые новые вопросы механики сплошной среды/Под ред. Н.Е.Кочина.– М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1938. – С. 15–154.
89. Чарный И.А. Основы газовой динамики.– М.: Гостопиздат, 1961. – 200 с.
90. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975.– 296 с.
91. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика.– М.: Гостоптехиздат, 1963. – 396 с.
92. Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта.– М.: Недра, 1965. – 238 с.
93. Черный Г.Г. Газовая динамика.– М.: Наука, 1988. – 424 с.
94. Чисхолм Д. Двухфазные течения в трубопроводах и теплообменниках.– М.: Недра, 1986. – 204 с.
95. Швидлер М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред.– М.: Недра, 1985. – 288 с.

96. Шейдеггер А.Э. Физика течения жидкостей через пористые среды: Пер. с англ.– М.: Гостоптехиздат, 1960. – 249 с.
97. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1974. – 711 с.
98. Штеренлихт Д.В. Гидравлика.– М.: Энергоатомиздат, 1984. – 639 с.
99. Щелкачев В.Н. Избранные труды.– М.: Недра, 1990. – Т. I–II.
100. Щелкачев В.Н., Лапук Б.Б. Подземная гидравлика. М.: Гостоптехиздат, 1949. – 358 с.
101. Щелкачев В.Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. В 2-х ч.– М.: Нефть и газ, 1995, ч. I – 586 с., ч. II – 493 с.
102. Эфрос Д.А. Исследования фильтрации неоднородных систем.– Л.: Гостоптехиздат, 1963. – 351 с.
103. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks.– Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1990. – 395 p.
104. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. N.Y.: Amer. Elsevier, 1967. 764 p.
105. Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon.– Paris, 1856.
106. Dupuit J. Etudes théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans le canaux dé et à travers les terrains permeables, 2-eme ed.– Paris: 1863.
107. Greenkorn R.A. Flow phenomena in porous media.– N.–Y., Basel: M. Dekker, Inc. 1983. – 550 p.
108. Houpeurt A. Eléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux. Paris, Editions Technic., 1958. – 231 p.
109. Ikkoku C.V., Ramey H.J. Transient flow of non-newtonian power-law fluids in porous media.– Stanford University, 1979. – 220 p.
110. Nikolaevskij V.N. Mechanics of Porous and Fractured Media.– Singapore: World Scientific, 1990. – 472 p.
111. Scheidegger A.E. The physics of flow through porous media. Toronto: Univ. of Toronto Press. 1974. 3d edition. – 353 p.

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

http://shop.rcd.ru

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307,
тел.: 332-48-92 (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34)
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135-54-37
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж)
4. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги» (Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)

Книжный магазин «ФИЗМАТКНИГА» (г. Долгопрудный,
Новый корпус МФТИ, 1 этаж, тел. 409-93-28)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

Басниев Каплан Сафербиевич
Дмитриев Николай Михайлович
Розенберг Генрих Давидович

НЕФТЕГАЗОВАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

Дизайнер М. В. Ботя

Технический редактор А. В. Ширококов

Компьютерная верстка Д. П. Вакуленко

Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 11.02.2005. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Усл. печ. л. 31,62. Уч. изд. л. 29,34. Печать офсетная.

Гарнитура Times. Бумага офсетная №1. Тираж 1500 экз. Заказ №

АНО «Институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов в ОАО «Дом печати-Вятка».

610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
