Сибирский федеральный университет

СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Институт вычислительного моделирования СО РАН

В. К. АНДРЕЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

ЛАНЬ®

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2015

ББК 22.25я73
А 65

Андреев В. К.

А 65 Математические модели механики сплошных сред: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2015. — 240 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1998-2

Учебное пособие является основой курсов «Математические основы механики сплошных сред» и «Модели механики сплошных сред», а также курсов по выбору в вузах, где имеется специализация студентов, магистрантов и аспирантов в области естественных и технических наук. В нем дается синтез алгебраического и геометрического описания тензорного аппарата, его приложение к часто используемым в механике и физике результатам дифференциальной геометрии, к построению замкнутых моделей механики сплошных сред. Большое число заданий для самостоятельной работы, приведенных в пособии, позволяют студенту оценить уровень полученных знаний.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям: «Механика и математическое моделирование», «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», «Прикладная механика» и другим математическим и техническим направлениям подготовки. Пособие может быть использовано при чтении учебных курсов по механике жидкости и газов, механике твердого деформируемого тела, сопротивлению материалов и т. д.

ББК 22.25я73

Рецензенты:

Г. В. АЛЕКСЕЕВ — доктор физико-математических наук, профессор Школы естественных наук Дальневосточного федерального университета;

В. М. САДОВСКИЙ — доктор физико-математических наук, профессор базовой кафедры вычислительных и информационных технологий Сибирского федерального университета;

С. В. ХАБИРОВ — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Уфимского государственного авиационного технического университета.

Обложка

Е. А. ВЛАСОВА

ВВЕДЕНИЕ

Механика сплошной среды (МСС) играет важную роль в современном естествознании и технике благодаря тому, что она рассматривает основные понятия и принципы. Настоящее пособие представляет собой необходимое введение к специальным дисциплинам: гидрогазодинамике, теории упругости и пластичности, вязкоупругости, магнитной гидродинамики. Оно состоит из трёх разделов. В первом из них излагается математический аппарат: тензорный анализ и алгебра, с помощью которого не только сокращаются многочисленные выкладки, но и концентрируется физическая идея, так как использование тензорного анализа позволяет отодвинуть на второй план сложную геометрическую картину физического явления. В основном рассматриваются трёхмерные пространства. Во втором разделе приведены некоторые сведения из дифференциальной геометрии, необходимые при изучении задач теории оболочек и движения жидких сред при наличии поверхностей раздела. Собственно механике сплошных сред посвящён довольно объёмный третий раздел. Модели механики сплошных сред рассматриваются как некоторые математические структуры, задаваемые чётко сформулированной системой определений и аксиом. Приведены классические модели жидкостей и газов, деформируемых твёрдых тел, а также некоторые модели сред со сложными свойствами. Предлагаемые упражнения в большинстве являются необходимой составной частью курса, и их результаты используются в дальнейшем изложении.

Пособие возникло из курса лекций, которые автор читал на протяжении ряда лет аспирантам Института вычислительного моделирования СО РАН, а также студентам и магистрантам Института математики и фундаментальной информатики

Сибирского федерального университета. В настоящее время в СФУ, как и во многих других вузах страны, отсутствуют, как правило, обязательные курсы по основам МСС: тензорной алгебре и анализу, дифференциальной геометрии — и это нашло своё отражение в пособии.

Автор благодарит Н. Ф. Ильину за большую помощь, оказанную при оформлении рукописи.

Раздел I

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

1.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. КОВАРИАНТНЫЕ И КОНТРВАРИАНТНЫЕ КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Пусть имеется прямоугольная система координат в трёхмерном пространстве R^3. Обозначим через $\mathbf{k}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ единичные орты в направлении координатной прямой y^α, рис. 1.1.

Орты $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ образуют базис, причём

$$\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{k}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha,\ \beta = 1, 2, 3), \tag{1.1.1}$$

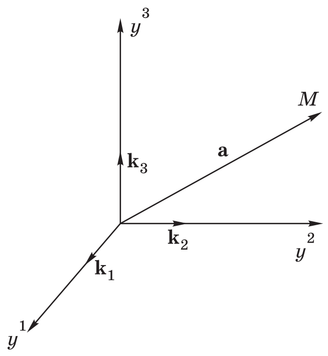

Рис. 1.1
Прямоугольная система координат

где $\delta_{\alpha\beta}$ есть символ Кронекера. Радиус-вектор **a** любой точки $M \in R^3$ можно представить в виде

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{k}_1 + a^2\mathbf{k}_2 + a^3\mathbf{k}_3 \tag{1.1.2}$$

и $a^\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_\alpha$ – прямоугольные декартовы координаты вектора **a**.

Если оси координат y^α не являются взаимно ортогональными, то вектор **a** можно задать двумя способами: представить в виде (1.1.2) (числами y^α) или с помощью ортогональных проекций **a** на оси косоугольной системы, см. рис. 1.2.

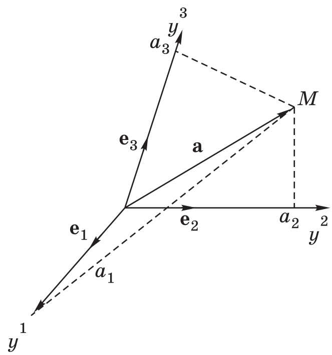

Рис. 1.2
Косоугольная система координат

Пусть векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (вообще говоря, различной длины) направлены по y^1, y^2, y^3 (рис. 1.2). Тогда для вектора **a** имеет место соотношение вида (1.1.2)

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3.$$

Числа a^1, a^2, a^3 называются *контрвариантными* координатами вектора **a**. Рассмотрим скалярные произведения

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 = a_1, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 = a_2, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 = a_3. \tag{1.1.3}$$

Они представляют собой ортогональные проекции вектора **a** на оси y^α и называются *ковариантными* координатами вектора **a**.

Условимся в дальнейшем считать, что когда один и тот же индекс встречается дважды один раз вверху, а другой раз внизу, то по нему происходит суммирование. Например

$$a_\alpha y^\alpha = a_1 y^1 + a_2 y^2 + a_3 y^3 \equiv a_\beta y^\beta.$$

Индекс суммирования называют немым, что является аналогом свойства переменной интегрирования под знаком определённого интеграла. Вектор **a** в косоугольной системе координат определяется своими ковариантными a_α и контрвариантными a^α компонентами,

$$\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad a_\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\alpha. \tag{1.1.4}$$

Рассмотрим криволинейную систему координат x^α $(\alpha = 1, 2, 3)$ и зададим радиус-вектор **r** точки M в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^\alpha), \tag{1.1.5}$$

или

$$y^\beta = y^\beta(x^\alpha), \quad \beta = 1, 2, 3. \tag{1.1.6}$$

Предполагается, что $\mathbf{r}(x^\alpha)$ дифференцируема по x^α. Векторы $\partial\mathbf{r}/\partial x^\alpha$ являются касательными к линиям x^α, см. рис. 1.3. Значит, в каждой точке пространства M тройку векторов $\partial\mathbf{r}/\partial x^\alpha$ можно принять за векторы базиса, если они не

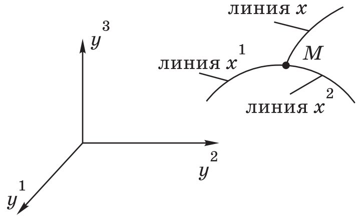

Рис. 1.3
Криволинейные координаты

компланарны:

$$\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^1}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^2}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^3}\right) \equiv \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^1}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^2}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^3}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial y^1}{\partial x^3} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^3} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} = J \neq 0. \quad (1.1.7)$$

По теореме о неявных функциях существует обратное преобразование формул (1.1.6)

$$x^\alpha = x^\alpha(y^\beta), \qquad (1.1.8)$$

так что матрицы $\partial x^\alpha/\partial y^\beta$, $\partial y^\beta/\partial x^\alpha$ — взаимно обратные и

$$\det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right) = \frac{1}{J} \neq 0.$$

Введём обозначения

$$\mathbf{e}_\alpha \equiv \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \qquad (1.1.9)$$

тогда $\mathbf{e}_\alpha$ образуют базис, связанный с криволинейной системой координат, — он называется *локальным*. Если $\mathbf{k}_\alpha$ — тройка единичных векторов, то

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}\mathbf{k}_\beta, \quad \mathbf{k}_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha}\mathbf{e}_\beta. \qquad (1.1.10)$$

Задача 1.1. Найти матрицы $\partial y^\beta/\partial x^\alpha$, $\partial x^\alpha/\partial y^\beta$ и локальный базис $\mathbf{e}_\alpha$ цилиндрической ($y^1 = x^1\cos x^2$, $y^2 = x^1\sin x^2$, $y^3 = x^3$) и сферической ($y^1 = x^1\cos x^2\cos x^3$, $y^2 = x^1\sin x^2\cos x^3$, $y^3 = x^1\sin x^3$) систем координат.

Таким образом, в каждой точке вектор $\mathbf{a}(x^1, x^2, x^3)$ может быть представлен в локальном базисе $\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{a} = a^\alpha\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^\alpha} = a^\alpha\mathbf{e}_\alpha, \qquad (1.1.11)$$

где a^α — контрвариантные компоненты.

Ковариантные компоненты вектора $\mathbf{a}$ даются формулами

$$a_\beta = \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\beta} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_\beta = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta. \qquad (1.1.12)$$

Это следует из равенств (1.1.4).

Введём матрицу $g_* = (g_{\alpha\beta})$:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta. \qquad (1.1.13)$$

Она является симметричной и носит название *фундаментальной* матрицы. Её определитель $g = \det(g_{\alpha\beta}) \neq 0$ (см. формулу (1.1.7)). Поэтому существует обратная к ней матрица $g^{\alpha\beta}$ $(g^* = (g^{\alpha\beta}))$:

$$g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = \delta_\alpha^{\ \beta}, \qquad (1.1.14)$$

где $\delta_\alpha^{\ \beta}$ есть дельта Кронекера и

$$\delta_\alpha^{\ \beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta; \\ 1, & \alpha = \beta. \end{cases} \qquad (1.1.15)$$

Ниже $g_1 = \det(g^{\alpha\beta}) = 1/g$.

Формулы (1.1.12) и (1.1.13) дают связь ковариантных и контрвариантных компонент вектора $\mathbf{a}$

$$a_\beta = a^\alpha g_{\alpha\beta}. \qquad (1.1.16)$$

Умножим обе части этого равенства на $g^{\beta\gamma}$ и возьмём сумму по β. Используя (1.1.14), находим

$$a^\gamma = a_\beta g^{\beta\gamma}, \qquad (1.1.17)$$

т. е. соотношение, обратное к (1.1.16).

Замечание 1.1. Имеет место мнемоническое правило $a^\gamma = a^\alpha \delta_\alpha^{\ \gamma}$. У компоненты a^α надо просто заменить индекс, по которому происходит суммирование, на свободный индекс (по нему нет суммирования).

Скалярное произведение двух векторов теперь записывается четырьмя различными способами:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^\alpha b^\beta g_{\alpha\beta} = a^\alpha b_\alpha = g^{\beta\alpha} a_\beta b_\alpha = a_\alpha b^\alpha. \qquad (1.1.18)$$

Возьмём тройку векторов $\mathbf{e}^\beta$, образованных по правилу

$$\mathbf{e}^\beta = g^{\beta\alpha}\mathbf{e}_\alpha. \tag{1.1.19}$$

Умножая скалярно (1.1.19) на $\mathbf{e}_\gamma$ и $\mathbf{e}^\gamma$ последовательно, получим

$$\mathbf{e}^\beta \cdot \mathbf{e}_\gamma = \delta^\beta_{\ \gamma}; \tag{1.1.20}$$

$$\mathbf{e}^\beta \cdot \mathbf{e}^\gamma = g^{\beta\gamma}. \tag{1.1.21}$$

Например, вектор $\mathbf{e}^1 \perp \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}^1 \perp \mathbf{e}_3$, но $\mathbf{e}^1 \perp \mathbf{e}_1 = 1$. Формулы (1.1.20) называются соотношениями взаимности.

Ясно, что векторы $\mathbf{e}^\beta$ не компланарны. Действительно, смешанное произведение $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) = \nabla x^1 \cdot (\nabla x^2 \times \nabla x^3) = 1/J \neq$ $\neq 0$ в силу (1.1.14) $(\nabla x^\alpha = (\partial x^\alpha/\partial y^1, \partial x^\alpha/\partial y^2, \partial x^\alpha/\partial y^3))$.

Систему векторов $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ называют базисом, взаимным (или сопряжённым) с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, см. рис. 1.4.

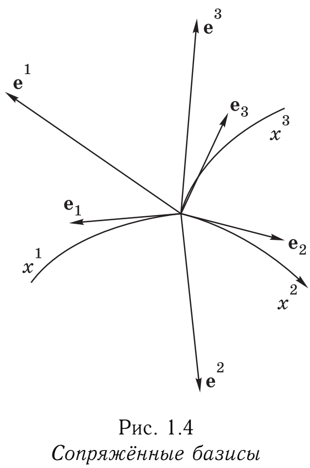

Рис. 1.4
Сопряжённые базисы

Задача 1.2. Вывести формулу

$$\mathbf{e}_\alpha = g_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\beta. \tag{1.1.22}$$

Для любого вектора $\mathbf{a}$ из (1.1.17) и определения (1.1.19) выводим разложения

$$\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha = a_\beta g^{\beta\alpha}\mathbf{e}_\alpha = a_\beta \mathbf{e}^\beta. \tag{1.1.23}$$

Умножая скалярно (1.1.23) на $\mathbf{e}^\gamma$, получим

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}^\gamma = a_\beta\mathbf{e}^\beta\cdot\mathbf{e}^\gamma = a_\beta g^{\beta\gamma} = a^\gamma. \qquad (1.1.24)$$

Поэтому любой вектор $\mathbf{a}$ может быть разложен как по базису $\mathbf{e}_\alpha$ (в этом случае компоненты являются контрвариантными), так и по базису $\mathbf{e}^\alpha$ с ковариантными компонентами. В последней формуле (1.1.23) индекс β можно заменить на α. При этом

$$a_\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\alpha, \quad a^\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}^\alpha, \qquad (1.1.25)$$

что и оправдывает название базиса $\mathbf{e}^\alpha$ как взаимного по отношению к базису $\mathbf{e}_\alpha$.

Однако есть и *существенная разница* между этими базисами. Векторы $\mathbf{e}_\alpha$ связаны с системой координат и являются касательными к координатным линиям. Векторы $\mathbf{e}^\alpha$, вообще говоря, не являются касательными ни к каким координатным линиям. Соотношения (1.1.16), (1.1.17) показывают, что с помощью матриц $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ можно опускать и поднимать индексы у компонент вектора – операция *жонглирования* индексами.

Для *прямоугольной* системы координат

$$\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}^\alpha = \mathbf{k}_\alpha, \quad g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\beta. \qquad (1.1.26)$$

Действительно, здесь $x^\alpha = y^\alpha$, радиус-вектор $\mathbf{r} = y^\alpha\mathbf{k}_\alpha$ и $\mathbf{e}_\alpha = \partial\mathbf{r}/\partial y^\alpha = \mathbf{k}_\alpha$. По формулам (1.1.13), (1.1.14) $g_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\beta = g^{\alpha\beta}$ и из (1.1.19) получим $\mathbf{e}^\beta = \mathbf{e}_\beta$.

Замечание 1.2. Сравнивая формулы (1.1.19) и (1.1.22) с формулами (1.1.16), (1.1.17), видим, что каждому нижнему индексу слева в (1.1.16) соответствуют коэффициенты из (1.1.19), а каждому верхнему — из (1.1.22). По нижнему индексу вектор сопреобразуется (является ковариантным) с системой координат, по верхнему — противопреобразуется (является контрвариантным) с ней. Термины «ковариантный» и «контрвариантный» как раз и означают «сопреобразующийся» и «противопреобразующийся».

Замечание 1.3. С помощью элементов матрицы g_* легко найдём модули векторов ковариантного базиса

$$|\mathbf{e}_\alpha| = \sqrt{\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\alpha} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}. \qquad (1.1.27)$$

Эти модули носят название коэффициентов Ламе. Аналогично, для модулей контрвариантного базиса получим

$$|\mathbf{e}^\alpha| = \sqrt{\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\alpha} = \sqrt{g^{\alpha\alpha}}. \tag{1.1.28}$$

Задача 1.3. Найти $|\mathbf{e}_\alpha|$, $|\mathbf{e}^\alpha|$ для цилиндрической и сферической систем координат, см. задачу 1.1.

Пусть имеются две точки пространства M и M' с координатами x^α, $x^\alpha + dx^\alpha$ соответственно. Тогда малый вектор $\mathbf{MM}' = d\mathbf{r}$ определяет направленный отрезок, не зависящий от выбора системы координат, и называется *вектором элементарного перемещения*. Расстояние между точками M и M' есть $ds = |d\mathbf{r}|$. Для $d\mathbf{r}$ из (1.1.5) и (1.1.9) имеем выражение

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha = \mathbf{e}_\alpha dx^\alpha, \tag{1.1.29}$$

т. е. разложение по ковариантному базису. Величины dx^α, равные дифференциалам локальных координат, суть контрвариантные компоненты вектора $d\mathbf{r}$. Ясно, что

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_3, \tag{1.1.30}$$

где $d\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha dx^\alpha$ — векторы элементарного перемещения вдоль координатной линии x^α, см. рис. 1.5.

С помощью представления (1.1.29) получим

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{1.1.31}$$

Квадратичная форма (1.1.31) называется *основной квадратичной формой*.

Аналогично формуле (1.1.29) можно представить вектор элементарных перемещений в виде разложения по контрвариантному базису

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}^\beta \delta x_\beta, \tag{1.1.32}$$

где величины δx_β называются *ковариантными компонентами* этого вектора и, вообще говоря, не являются дифференциалами некоторой системы координат x_β. Из (1.1.32) для ds^2 найдём

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g^{\alpha\beta} \delta x_\alpha \delta x_\beta. \tag{1.1.33}$$

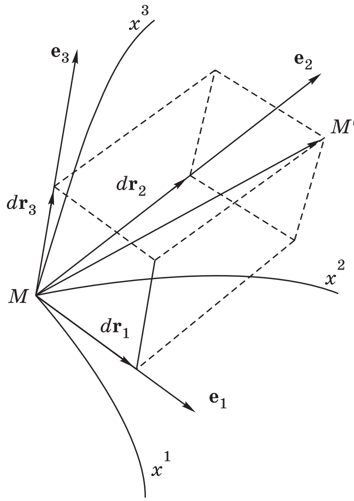

Рис. 1.5
Вектор элементарных перемещений

Установим связь между различными компонентами вектора $d\mathbf{r}$. Из (1.1.29) и (1.1.32) имеем $d\mathbf{r} = dx^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \delta x_\beta \mathbf{e}^\beta$ и перепишем это равенство с помощью формул (1.1.19) так: $(dx^\alpha - \delta x_\beta g^{\beta\alpha})\mathbf{e}_\alpha = 0$. В силу линейной независимости векторов $\mathbf{e}_\alpha$ получим формулы, дающие выражения контрвариантных компонент вектора $d\mathbf{r}$ через его ковариантные компоненты:

$$dx^\alpha = g^{\beta\alpha}\delta x_\beta. \tag{1.1.34}$$

Обратные зависимости таковы (достаточно воспользоваться формулой (1.1.22)):

$$\delta x_\beta = g_{\beta\alpha}dx^\alpha. \tag{1.1.35}$$

Соотношения (1.1.34), (1.1.35) можно трактовать также как *операции поднятия и опускания индекса* у компонент вектора $d\mathbf{r}$. Кроме того, из (1.1.35) следует, что ковариантные компоненты δx_β нельзя рассматривать как полные дифференциалы соответствующих функций $x_\beta = x_\beta(x^\alpha)$, поскольку условия интегрируемости

$$\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \tag{1.1.36}$$

не выполняются в общем случае. Значит, для произвольной криволинейной системы координат невозможно определить ковариантные координаты x_β как однозначные функции от x^α.

Задача 1.4. Проверьте, выполняются ли условия (1.1.36) для цилиндрической и сферической систем координат.

Система координат x^α называется *ортогональной*, если в каждой точке пространства координатные линии взаимно ортогональны, т. е.

$$\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = 0, \quad \alpha \neq \beta \quad (g_{\alpha\beta} = 0,\ \alpha \neq \beta). \tag{1.1.37}$$

В этом случае матрица $g_* = \mathrm{diag}(g_{11}, g_{22}, g_{33})$ и её определитель $g = g_{11}g_{22}g_{33}$. Матрица g^* является обратной к g_*, т. е. $g^* = \mathrm{diag}(g_{11}^{-1}, g_{22}^{-1}, g_{33}^{-1})$ и $g_1 = \det g^* = (g_{11}, g_{22}, g_{33})^{-1}$. Следовательно, в такой системе координат

$$\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad g^{\alpha\alpha} = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \tag{1.1.38}$$

и координатные поверхности также ортогональны. Далее, формулы (1.1.22) и (1.1.19) упрощаются

$$\mathbf{e}_\alpha = g_{\alpha\alpha}\mathbf{e}^\alpha, \quad \mathbf{e}^\alpha = g^{\alpha\alpha}\mathbf{e}_\alpha, \tag{1.1.39}$$

т. е. элементы разных базисов параллельны друг другу (имеющие одинаковый номер) и их модули взаимно обратны

$$|\mathbf{e}_\alpha| = \frac{1}{|\mathbf{e}^\alpha|}\,. \tag{1.1.40}$$

Координаты точек M пространства, координатные линии, векторные базисы и связанные с ними величины *зависят от выбора системы координат*. Посмотрим, как преобразуются эти величины при переходе к другой системе координат. Для этого возьмём две системы координат: K и $\widehat{K}$. Пусть в системе

K координатами являются x^α, а в $\widehat{K}$ — ξ^σ $(\alpha, \sigma = 1, 2, 3)$ и переход задаётся системой функций

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^1, x^2, x^3), \tag{1.1.41}$$

причём

$$\left|\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma}\right| = J \neq 0. \tag{1.1.42}$$

Тогда существует обратное преобразование

$$x^\sigma = x^\sigma(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \tag{1.1.43}$$

и справедливо соотношение

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} = \delta^\alpha_{\ \beta}, \quad \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau} = \delta^\sigma_{\ \tau}. \tag{1.1.44}$$

Посмотрим, как преобразуются базисы $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{e}^\beta$ системы K и $\widehat{\mathbf{e}}_\sigma$, $\widehat{\mathbf{e}}^\tau$ системы $\widehat{K}$. По определению

$$\widehat{\mathbf{e}}_\sigma = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\sigma} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\sigma}, \quad \widehat{\mathbf{e}}^\tau = \nabla \xi^\tau = \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\beta}\nabla x^\beta,$$

или

$$\widehat{\mathbf{e}}_\sigma = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\sigma}, \quad \widehat{\mathbf{e}}^\tau = \frac{\partial \xi^\tau}{\partial x^\beta}\mathbf{e}^\beta. \tag{1.1.45}$$

Обратные зависимости таковы:

$$\mathbf{e}_\alpha = \widehat{\mathbf{e}}_\sigma \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\alpha}, \quad \mathbf{e}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\tau}\widehat{\mathbf{e}}^\tau. \tag{1.1.46}$$

Первые формулы (1.1.45), (1.1.46) дают закон преобразования элементов ковариантного базиса при переходе от одной системы координат к другой, а вторые формулы — контрвариантного базиса. Их и называют ковариантными и контрвариантными законами преобразования.

Что касается коэффициентов основной квадратичной формы (1.1.31), (1.1.33), то они преобразуются так:

$$\widehat{g}_{\alpha\beta} = \widehat{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \widehat{\mathbf{e}}_\beta = \mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}_\tau \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^\beta} = g_{\sigma\tau}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^\beta}; \tag{1.1.47}$$

$$\widehat{g}^{\alpha\beta} = g^{\sigma\tau}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\tau}\,. \tag{1.1.48}$$

Использованы равенства (1.1.45), (1.1.46). Обратные зависимости имеют вид

$$g_{\alpha\beta} = \widehat{g}_{\sigma\tau}\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\xi^\tau}{\partial x^\beta}\,, \quad g^{\alpha\beta} = \widehat{g}^{\sigma\tau}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^\sigma}\frac{\partial x^\beta}{\partial\xi^\tau}\,. \tag{1.1.49}$$

Заметим, что законы преобразования либо ковариантные (индексы внизу), либо контрвариантные (индексы вверху).

Для определителей из (1.1.42), (1.1.47), (1.1.48) получим

$$\widehat{g} = gJ^{-2}, \quad \widehat{g}_1 = g_1 J^2, \tag{1.1.50}$$

где J даётся равенством (1.1.42).

Найдём, наконец, закон преобразования компонент вектора элементарного перемещения $d\mathbf{r}$. Из выражений (1.1.29), (1.1.32) имеем представления

$$d\mathbf{r} = dx^\beta\mathbf{e}_\beta = d\xi^\tau\widehat{\mathbf{e}}_\tau, \quad d\mathbf{r} = \delta x_\alpha\mathbf{e}^\alpha = \delta\xi_\sigma\widehat{\mathbf{e}}^\sigma.$$

Используя формулы (1.1.46), из этих соотношений выводим

$$\left(d\xi^\tau - dx^\beta\frac{\partial\xi^\tau}{\partial x^\beta}\right)\widehat{\mathbf{e}}_\tau = 0, \quad \left(\delta\xi_\sigma - \delta x_\alpha\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^\sigma}\right)\widehat{\mathbf{e}}^{\,\sigma} = 0,$$

или, так как $\mathbf{e}_\tau$, $\mathbf{e}^{\,\sigma}$ — базисы,

$$d\xi^\tau = dx^\beta\frac{\partial\xi^\tau}{\partial x^\beta}\,, \quad \delta\xi_\sigma = \delta x_\alpha\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^\sigma}\,. \tag{1.1.51}$$

Для обратных зависимостей найдём

$$dx^\beta = d\xi^\tau\frac{\partial x^\beta}{\partial\xi^\tau}\,, \quad \delta x_\alpha = \delta\xi_\sigma\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\alpha}\,. \tag{1.1.52}$$

Значит, ковариантные компоненты вектора $d\mathbf{r}$ преобразуются по ковариантному закону, контрвариантные компоненты — по контрвариантному.

1.2. ТЕНЗОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Напомним сначала, что *скаляром* называется величина, не зависящая от выбора системы координат и задаваемая в фиксированной координатной системе одним числом. Пусть в системе K скаляр определён числом $f = f(x^\alpha)$, а в системе $\widehat{K}$ — числом $\widehat{f} = \widehat{f}(\xi^\sigma)$, тогда, согласно определению, $f(x^\alpha) = \widehat{f}(\xi^\sigma)$. Скалярами могут быть величины различной природы. Например, расстояние между точками пространства есть геометрический скаляр, а давление, плотность, температура и концентрация — физические скаляры.

Далее в качестве объектов будем рассматривать элементы координатных базисов $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}^\beta$ системы K, для которых выполняются следующие операции:

1) умножение на скаляр $\forall\, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}^\beta$, т. е. для некоторого скаляра q и объекта $\mathbf{e}_\alpha$ символ $q\mathbf{e}_\alpha$ означает вектор, направленный при $q > 0$ в ту же сторону, что и $\mathbf{e}_\alpha$ (в противоположную при $q < 0$), и имеющий модуль $|q||\mathbf{e}_\alpha|$;

2) сложение определено для любой пары объектов $\mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta$, $\mathbf{e}^\alpha + \mathbf{e}^\beta$, $\mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}^\beta$ и т. д. Операция сложения коммутативна и подчиняется дистрибутивному закону $q(\mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\beta) = q(\mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\alpha) = q\mathbf{e}_\alpha + q\mathbf{e}_\beta = q\mathbf{e}_\beta + q\mathbf{e}_\alpha$;

3) для любой пары объектов определено скалярное умножение $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = g_{\alpha\beta}$, $\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{\alpha\beta}$, $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = \delta_\alpha^{\ \beta}$, $\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta^\alpha_{\ \beta}$. Операция коммутативна и $q(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta) = (q\mathbf{e}_\alpha) \cdot \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\alpha \cdot (q\mathbf{e}_\beta)$ для любого скаляра q;

4) для произвольных двух объектов определено векторное умножение, являющееся вектором, который можно разложить по одному из координатных базисов системы K,

$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = e_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}^\gamma, \quad \mathbf{e}^\alpha \times \mathbf{e}^\beta = e^{\alpha\beta\sigma}\mathbf{e}_\sigma,$$
$$\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}^\beta = e_\alpha^{\ \beta}{}_\tau \mathbf{e}^\tau = e_\alpha^{\ \beta\sigma}\mathbf{e}_\sigma.$$

Операция не коммутативна, $\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta \neq \mathbf{e}_\beta \times \mathbf{e}_\alpha$, однако скалярный множитель перед векторным произведением можно отнести к любому сомножителю;

5) индефинитное умножение. В результате применения этой операции к двум или нескольким (*конечному числу*)

объектов получается новый, более сложный объект, называемый *полиадой*, именно $\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta$, $\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^\beta$, $\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}^\beta$, $\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}_\beta$, $\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta\mathbf{e}^\gamma$, $\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^\beta\mathbf{e}_\gamma\mathbf{e}^\sigma$ и т. п. Полиада, полученная перемножением двух объектов, называется *диадой*; трёх элементов — *триадой* и т. д. Операция не коммутативна, т. е. $\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta \neq \mathbf{e}_\beta\mathbf{e}_\alpha$. Две полиады считаются равными тогда и только тогда, когда они получены перемножением одних и тех же объектов в одной и той же последовательности.

Количество объектов в полиаде, совпадающее с числом индексов, называется её *рангом*. Разные полиады одинакового ранга и определённой структуры, например $\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^\beta\mathbf{e}^\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$, считаются *линейно независимыми*. Полиаду можно умножать на скалярный множитель и относить его к любому сомножителю.

Между полиадами первого ранга — элементами координатных базисов — имеются связи вида $\mathbf{e}^\alpha = g^{\alpha\beta}\mathbf{e}_\beta$, $\mathbf{e}_\sigma = g_{\sigma\tau}\mathbf{e}^\tau$ (см. формулы (1.1.19), (1.1.22)). Аналогичные связи есть и между полиадами разных типов, но *одинакового* ранга. Действительно, $\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}_\beta = g^{\alpha\sigma}\mathbf{e}_\sigma\mathbf{e}_\beta$, $\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}^\beta = g^{\alpha\sigma}\mathbf{e}_\sigma\mathbf{e}^\beta$, $\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}^\sigma\mathbf{e}^\tau g_{\sigma\alpha}g_{\tau\beta}$ и т. д. Сложение определено для полиад *только равных рангов*; при скалярном (векторном) умножении полиад скалярно (векторно) перемножаются *соседние элементы* этих полиад, $(\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta)\cdot(\mathbf{e}_\gamma\mathbf{e}_\delta) = \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{e}_\beta\cdot\mathbf{e}_\gamma)\mathbf{e}_\delta = g_{\beta\gamma}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\delta$, $(\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta)\times(\mathbf{e}_\gamma\mathbf{e}_\delta) = \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{e}_\beta\times\mathbf{e}_\gamma)\mathbf{e}_\delta = e_{\beta\gamma\sigma}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^\sigma\mathbf{e}_\delta$. При индефинитном перемножении полиад получится новая полиада, ранг которой равен *сумме рангов* старых полиад, например, $(\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta)(\mathbf{e}_\gamma\mathbf{e}_\sigma) = \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta\mathbf{e}_\gamma\mathbf{e}_\sigma$ — полиада четвёртого ранга.

Перейдём к рассмотрению других объектов, которые, подобно вектору перемещений, трактуются как инвариантные величины, не зависящие от выбора системы K. Одним из таких объектов является вектор.

Вектором называется объект, не зависящий от выбора системы координат и представимый в фиксированной системе x^α в виде линейной формы

$$\boldsymbol{a} = a^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha = a_\beta\boldsymbol{e}^\beta, \tag{1.2.1}$$

где a^α, a_β — контрвариантные и ковариантные компоненты вектора. Примеры векторов: скорость, ускорение, сила, объёмные плотности потоков, напряжённость электрического поля. Компоненты даются формулами (1.1.11), (1.1.12), а связь между ними — равенствами (1.1.16), (1.1.17). Итак, для задания вектора в некоторой системе координат достаточно задать три его компоненты определённого типа. При переходе к другой системе координат $\widehat{K}$ компоненты вектора изменяются. Действительно, пусть $\widehat{a}_\sigma$ и $\widehat{a}^\tau$ — компоненты вектора в новой системе координат ξ^σ. Тогда из (1.1.45)

$$\widehat{a}^\sigma = \mathbf{a}\cdot\widehat{\mathbf{e}}^\sigma = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}^\gamma\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\gamma}\,, \quad \widehat{a}_\tau = \mathbf{a}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_\gamma = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_\gamma\frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\tau}\,,$$

или

$$\widehat{a}^\sigma = a^\gamma\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\gamma}\,, \quad \widehat{a}_\sigma = a_\gamma\frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\sigma}\,. \tag{1.2.2}$$

Обратные зависимости имеют вид (с учётом формул (1.1.46))

$$a^\gamma = \widehat{a}^\sigma\frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\sigma}\,, \quad a_\gamma = \widehat{a}_\tau\frac{\partial\xi^\tau}{\partial x^\gamma}\,. \tag{1.2.3}$$

Значит, ковариантные и контрвариантные компоненты вектора преобразуются по одноимённым законам. Это свойство вектора является характеристическим и полагается в основу *другого его определения.*

Вектором $\boldsymbol{a}$ *называют объект, определённый в фиксированной системе координат тремя числами — компонентами a^α (или a_α), которые при переходе к новой системе координат в том же пространстве преобразуются по формулам* (1.2.2).

Приведённые два определения эквивалентны друг другу. Уже было показано, как из первого определения можно получить второе. Обратно, имеем

$$\widehat{a}^\sigma\widehat{\mathbf{e}}_\sigma = a^\gamma\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^\gamma}\,\widehat{\mathbf{e}}_\sigma = a^\gamma\mathbf{e}_\gamma = \mathbf{a},$$

что и даёт первое определение вектора.

Введём нормированные ковариантный и контрвариантный базисы

$$\mathbf{e}^1_\alpha = (g_{\alpha\alpha})^{-1/2}\mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{e}^\alpha_1 = (g^{\alpha\alpha})^{-1/2}\mathbf{e}^\alpha \tag{1.2.4}$$

и рассмотрим разложение вектора по этим базисам

$$\mathbf{a} = a^{\alpha}_{*}\mathbf{e}^{1}_{\alpha} = a^{*}_{\beta}\mathbf{e}^{\beta}_{1}. \qquad (1.2.5)$$

Величины a^{α}_{*} и a^{*}_{β} называют *физическими компонентами* соответственно первого и второго типа. Между ними имеется тесная связь. В самом деле,

$$\mathbf{a} = a^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} = a^{\alpha}\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,\mathbf{e}^{1}_{\alpha} = a_{\beta}\mathbf{e}^{\beta} = a_{\beta}\sqrt{g^{\beta\beta}}\,\mathbf{e}^{\beta}_{1}.$$

Сравнивая последние соотношения с (1.2.5), найдём

$$a^{\alpha}_{*} = a^{\alpha}\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,, \quad a^{*}_{\beta} = a_{\beta}\sqrt{g^{\beta\beta}}\,. \qquad (1.2.6)$$

В ортогональной системе координат разного типа физические компоненты совпадают: $a^{*}_{\alpha} = a^{\alpha}_{*}$.

Из компонент вектора **a** можно образовать одну инвариантную величину, называемую *модулем вектора* и обозначаемую просто «a» (иногда $|a|$). Для квадрата модуля

$$a^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = g^{\alpha\beta}a_{\alpha}a_{\beta} = g_{\sigma\tau}a^{\sigma}a^{\tau} = a^{\omega}a_{\omega}. \qquad (1.2.7)$$

Ранее величины $|\mathbf{e}_{\alpha}|$, $|\mathbf{e}^{\beta}|$ были названы параметрами Ламе, обозначим их соответственно H_{α} и H^{β}:

$$H_{\alpha} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}\,, \quad H^{\beta} = \sqrt{g^{\beta\beta}}\,. \qquad (1.2.8)$$

С учётом обозначений (1.2.8) из (1.2.7) найдём другое представление для квадрата модуля

$$a^2 = \sum_{\alpha,\beta}\frac{g^{\alpha\beta}}{H^{\alpha}H^{\beta}}\,a^{*}_{\alpha}a^{*}_{\beta} = \\ = \sum_{\sigma,\tau}\frac{g_{\sigma\tau}}{H_{\sigma}H_{\tau}}\,a^{\sigma}_{*}a^{\tau}_{*} = \sum_{\omega}\frac{1}{H_{\omega}H^{\omega}}\,a^{\omega}_{*}a^{*}_{\omega}. \qquad (1.2.9)$$

В частности, для ортогональной системы координат получим

$$a^2 = \sum_{\alpha}(a^{*}_{\alpha})^2 = \sum_{\sigma}(a^{\sigma}_{*})^2 = a^{\omega}_{*}a^{*}_{\omega}. \qquad (1.2.10)$$

Теперь рассмотрим объекты более сложной природы — тензоры.

Тензором ранга n называют объект $\boldsymbol{T}$, не зависящий от выбора системы координат и представимый в фиксированной координатной системе в виде линейной формы полиад ранга n определённой структуры:

$$\mathbf{T} = T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\mathbf{e}_{\alpha_1}\mathbf{e}_{\alpha_2}\ldots\mathbf{e}_{\alpha_n} = \\ = T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}\mathbf{e}^{\alpha_1}\mathbf{e}_{\alpha_2}\ldots\mathbf{e}_{\alpha_n} = \ldots = \\ = T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\mathbf{e}^{\alpha_1}\mathbf{e}^{\alpha_2}\ldots\mathbf{e}^{\alpha_n}. \quad (1.2.11)$$

(Иногда используется специальная операция диадного произведения $\bigotimes$ базисных векторов, например $T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\mathbf{e}_{\alpha_1}\bigotimes\ldots\ldots\bigotimes\mathbf{e}_{\alpha_2}\bigotimes\ldots\bigotimes\mathbf{e}_{\alpha_n}$.) Ясно, что для тензора ранга n справедливы различные представления, являющиеся его разложениями по полиадам ранга n определённого вида. Коэффициенты $T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$, $T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}, \ldots, T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ называются компонентами тензора. Они бывают ковариантными, контрвариантными и смешанными, в зависимости от того, имеет ли компонента только нижние индексы или только верхние, или те и другие вместе. Всего имеется 3^n компонент тензора ранга n.

Между компонентами тензора разного типа существуют связи. Действительно,

$$\mathbf{T} = T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\mathbf{e}_{\alpha_1}\mathbf{e}_{\alpha_2}\ldots\mathbf{e}_{\alpha_n} = \\ = T_{\beta_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}\mathbf{e}^{\beta_1}\mathbf{e}_{\alpha_2}\ldots\mathbf{e}_{\alpha_n} = \\ = T_{\beta_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}g^{\beta_1\alpha_1}\mathbf{e}_{\alpha_1}\mathbf{e}_{\alpha_2}\ldots\mathbf{e}_{\alpha_n},$$

откуда

$$T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = T_{\beta_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}g^{\alpha_1\beta_1}. \quad (1.2.12)$$

Точно так же получаются соотношения

$$T_{\beta_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n} = g_{\beta_1\alpha_1}T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}. \quad (1.2.13)$$

Формулы (1.2.12), (1.2.13) выражают операции опускания и поднятия индекса — *жонглирования* индексами.

Для прямоугольной декартовой системы координат $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ и из (1.2.12), (1.2.13) выводим равенства

$$\begin{aligned} T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} &= T_{\beta_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}\delta^{\alpha_1\beta_1} = T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}, \\ T_{\beta_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n} &= \delta_{\beta_1\alpha_1}T^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = T^{\beta_1\alpha_2\ldots\alpha_n}, \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

т. е. в этой системе положение индекса не существенно и поэтому нет различного типа компонент.

Итак, в фиксированной системе координат тензор ранга n определяется заданием его компонент конкретного типа. Конечно, эти компоненты зависят от выбранной системы координат. Установим зависимости между компонентами тензора в системах координат $K(x^\alpha)$ и $\widehat{K}(\xi^\sigma)$. Пусть в первой системе компоненты имеют вид $T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}$, а во второй — $\widehat{T}_{\beta_1}^{\ \beta_2\ldots\beta_n}$. В силу инвариантности тензора и законов преобразования базисных векторов получим

$$\mathbf{T} = \widehat{T}_{\beta_1}^{\ \beta_2\ldots\beta_n}\widehat{\mathbf{e}}^{\beta_1}\widehat{\mathbf{e}}_{\beta_2}\ldots\widehat{\mathbf{e}}_{\beta_n} = T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}\mathbf{e}^{\alpha_1}\mathbf{e}_{\alpha_2}\ldots\mathbf{e}_{\alpha_n} =$$

$$= T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \xi^{\beta_1}}\frac{\partial \xi^{\beta_2}}{\partial x^{\alpha_2}}\ldots\frac{\partial \xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}}\widehat{\mathbf{e}}^{\beta_1}\widehat{\mathbf{e}}_{\beta_2}\ldots\widehat{\mathbf{e}}_{\beta_n}. \quad (1.2.15)$$

Отсюда, ввиду линейной независимости полиад ранга n определённой структуры, находим формулы преобразования компонент:

$$\widehat{T}_{\beta_1}^{\ \beta_2\ldots\beta_n} = T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \xi^{\beta_1}}\frac{\partial \xi^{\beta_2}}{\partial x^{\alpha_2}}\ldots\frac{\partial \xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}}. \quad (1.2.16)$$

Обратные формулы получаются аналогичным способом:

$$T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n} = \widehat{T}_{\beta_1}^{\ \beta_2\ldots\beta_n}\frac{\partial \xi^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial \xi^{\beta_2}}\ldots\frac{\partial x^{\alpha_n}}{\partial \xi^{\beta_n}}. \quad (1.2.17)$$

Формулы (1.2.16), (1.2.17) показывают, что каждый ковариантный или контрвариантный индекс компоненты тензора преобразуется по одноимённому закону. Кроме того, компоненты тензора в новых переменных есть линейные комбинации всех компонент в старых переменных. Поэтому тензор будет *нулевым*, если *все его компоненты равны нулю* в одной из систем координат. Теперь можно дать и другое определение.

Тензором ранга n называют объект, который в фиксированной системе координат определяется 3^n числами — компонентами, преобразующимися при переходе к другой *системе координат в том же пространстве по формулам* (1.2.16).

Первое определение удобно использовать в тензорном анализе, а второе — в тензорной алгебре.

Формулы преобразования коэффициентов основной квадратичной формы

$$\widehat{g}_{\alpha\beta} = g_{\sigma\tau}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^\beta}$$

показывают их тензорную природу. Значит, совокупность девяти величин $g_{\alpha\beta}$ определяет тензор второго ранга

$$\mathbf{G} = g_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}^\beta. \tag{1.2.18}$$

Он носит название *метрического* тензора.

Частные виды тензоров. При $n = 0$, $N = 1$ ($N = 3^n$ — число компонент) получим тензор нулевого ранга — инвариантный объект, определяемый в некоторой системе координат одним числом. Это есть скаляр. При $n = 1$, $N = 3$ получаем тензор 1-го ранга — инвариантный объект $\mathbf{T} = T^\alpha\mathbf{e}_\alpha = T_\beta\mathbf{e}^\beta$, т. е. вектор. При $n = 2$, $N = 9$ имеем тензор второго ранга, для которого справедливы четыре различных представления

$$\mathbf{T} = T^{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta = T_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}^\beta = T^\alpha_{\ \beta}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^\beta = T_\alpha^{\ \beta}\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}_\beta. \tag{1.2.19}$$

При $n = 3$, $N = 27$ — тензор третьего ранга и т. д. С ростом ранга быстро возрастает число компонент и число различных представлений тензора.

Введём, аналогично векторам, физические компоненты тензоров. Пусть $(\mathbf{e}^1_{\alpha_1}, \ldots, \mathbf{e}^1_{\alpha_n})$, $(\mathbf{e}^{\alpha_1}_1, \ldots, \mathbf{e}^{\alpha_n}_1)$ — нормированные элементы координатных базисов системы K. Тогда

$$\mathbf{T} = \overset{*}{T}{}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\mathbf{e}^1_{\alpha_1}\ldots\mathbf{e}^1_{\alpha_n} = \overset{*}{T}{}_{\alpha_1}^{\ \ \alpha_2\ldots\alpha_n}\mathbf{e}^{\alpha_1}_1\ldots\mathbf{e}^{\alpha_n}_1 = \ldots =$$
$$= \overset{*}{T}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\,\mathbf{e}^{\alpha_1}_1\ldots\mathbf{e}^{\alpha_n}_1. \tag{1.2.20}$$

Поскольку $\mathbf{e}_\alpha = H_\alpha\mathbf{e}^1_\alpha$, $\mathbf{e}^\beta = H^\beta\mathbf{e}^\beta_1$, то из представлений (1.2.15) и (1.2.20) найдём связи физических компонент через обычные компоненты

$$
\begin{aligned}
\overset{*}{T}{}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} &= T^{\alpha_1\ldots\alpha_n} H_{\alpha_1}\ldots H_{\alpha_n},\\
\overset{*}{T}{}_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n} &= T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n} H^{\alpha_1} H_{\alpha_2}\ldots H_{\alpha_n},\\
\overset{*}{T}{}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} &= T_{\alpha_1\ldots\alpha_n} H^{\alpha_1}\ldots H^{\alpha_n}.
\end{aligned}
\tag{1.2.21}
$$

Для ортогональной системы координат $\mathbf{e}^\alpha = \mathbf{e}_\alpha$ и все физические компоненты различных типов совпадают.

Можно расширить понятие тензора следующим образом: распространим название тензора на объект $T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}$, который преобразуется по закону

$$
\widehat{T}{}_{\beta_1}^{\ \beta_2\ldots\beta_n} = J^M T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial\xi^{\beta_1}} \frac{\partial\xi^{\beta_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \ldots \frac{\partial\xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}}, \tag{1.2.22}
$$

отличающемуся от (1.2.16) только множителем J^M, где $J = \left|\partial\xi^\sigma/\partial x^\alpha\right|$. Новое определение тензора включает в себя старое при $M = 0$. Объект, преобразующийся по закону (1.2.22), называется *псевдотензором* ранга n, а число M — *его весом*. Тензоры, рассматривавшиеся ранее, имеют нулевой вес и часто называются *абсолютными*, или истинными тензорами.

Псевдотензоры нулевого и первого ранга называют соответственно псевдоскалярами и псевдовекторами.

Отметим, что любому псевдотензору ранга n и веса M можно сопоставить истинный тензор. Действительно,

$$
\widehat{f}^{-M}\widehat{T}{}_{\beta_1}^{\ \beta_2\ldots\beta_n} = (f^{-M} T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}) \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial\xi^{\beta_1}} \frac{\partial\xi^{\beta_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \ldots \frac{\partial\xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}},
$$

т. е. $f^{-M} T_{\alpha_1}^{\ \alpha_2\ldots\alpha_n}$ уже истинный тензор (использовано правило преобразования псевдоскаляра $\widehat{f} = Jf$, $\widehat{f}^M = J^M f^M$).

Далее рассматриваются только истинные тензоры.

Операции с тензорами. Введём некоторые операции с тензорами, которые снова приводят к тензорам, при этом будем пользоваться вторым определением тензора.

Возьмём два тензора $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ одного и того же ранга n и сложим почленно формулы преобразования одинаковых компонент

$$\widehat{P}^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = P^{\sigma_1\ldots\sigma_n}\frac{\partial\xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\ldots\frac{\partial\xi^{\alpha_n}}{\partial x^{\sigma_n}},$$
$$\widehat{Q}^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = Q^{\sigma_1\ldots\sigma_n}\frac{\partial\xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\ldots\frac{\partial\xi^{\alpha_n}}{\partial x^{\sigma_n}},$$

приходим к равенству

$$\widehat{P}^{\alpha_1\ldots\alpha_n} + \widehat{Q}^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = (P^{\sigma_1\ldots\sigma_n} + Q^{\sigma_1\ldots\sigma_n})\frac{\partial\xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\ldots\frac{\partial\xi^{\alpha_n}}{\partial x^{\sigma_n}}.$$

Оно означает, что объект

$$T^{\sigma_1\ldots\sigma_n} = P^{\sigma_1\ldots\sigma_n} + Q^{\sigma_1\ldots\sigma_n}$$

есть тензор ранга n (по второму определению). Данный тензор и называется *суммой исходных тензоров*, т. е.

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}.$$

Видно, что складывать можно только тензоры одинакового ранга и операция сложения коммутативна.

Пусть имеются два тензора: **P** ранга p и **Q** ранга q, и их какие-либо компоненты, например

$$\widehat{P}^{\alpha_1\ldots\alpha_p} = P^{\sigma_1\ldots\sigma_p}\frac{\partial\xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\ldots\frac{\partial\xi^{\alpha_p}}{\partial x^{\sigma_p}},$$
$$\widehat{Q}_{\beta_1\ldots\beta_q} = Q_{\tau_1\ldots\tau_q}\frac{\partial x^{\tau_1}}{\partial\xi^{\beta_1}}\ldots\frac{\partial x^{\tau_q}}{\partial\xi^{\beta_q}}.$$

Перемножив эти формулы, придём к равенству

$$\widehat{P}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\widehat{Q}_{\beta_1\ldots\beta_q} = P^{\sigma_1\ldots\sigma_p}Q_{\tau_1\ldots\tau_q}\frac{\partial\xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_1}}\ldots\frac{\partial\xi^{\alpha_p}}{\partial x^{\sigma_p}}\cdot\frac{\partial x^{\tau_1}}{\partial\xi^{\beta_1}}\ldots\frac{\partial x^{\tau_q}}{\partial\xi^{\beta_q}},$$

из которого следует, что объект

$$T^{\sigma_1\ldots\sigma_p}{}_{\tau_1\ldots\tau_q} = P^{\sigma_1\ldots\sigma_p}Q_{\tau_1\ldots\tau_q}$$

есть тензор ранга $p+q$, называемый произведением исходных тензоров, и записывают в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{Q}.$$

Таким образом, умножение тензоров определено для двух тензоров произвольных рангов, и ранг произведения равен сумме рангов сомножителей. Произведение тензоров существенно зависит от порядка сомножителей и оно, вообще говоря, не коммутативно: $\mathbf{PQ} \neq \mathbf{QP}$. В частности, если f — скаляр, то компонентами $\mathbf{T} = f\mathbf{P}$ будут $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = fP^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$. Если перемножаются два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то получается тензор 2-го ранга

$$\mathbf{T} = \mathbf{ab}, \quad T^{\alpha\beta} = a^\alpha b^\beta,$$

т. е. диада. Если перемножаются n векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, получим тензор ранга n

$$\mathbf{T} = \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \quad T^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = a_{(1)}^{\alpha_1} a_{(2)}^{\alpha_2} \ldots a_{(n)}^{\alpha_n},$$

т. е. полиаду.

Свёртывание тензора. Пусть $\mathbf{T}$ — тензор ранга $n \geqslant 2$ и одна из его смешанных компонент преобразуется по формуле

$$\widehat{T}_{\alpha_1}^{\ \alpha_2 \ldots \alpha_n} = T_{\sigma_1}^{\ \sigma_2 \ldots \sigma_n} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \frac{\partial \xi^{\alpha_2}}{\partial x^{\sigma_2}} \ldots \frac{\partial \xi^{\alpha_n}}{\partial x^{\sigma_n}}, \tag{1.2.23}$$

где $\alpha_1 \ldots \alpha_n = 1, 2, 3$. Возьмём теперь только те равенства, в которых индексы α_1 и α_2 одинаковы, и образуем их сумму:

$$\widehat{T}_{\alpha_1}^{\ \alpha_1 \alpha_3 \ldots \alpha_n} = T_{\sigma_1}^{\ \sigma_2 \sigma_3 \ldots \sigma_n} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial \xi^{\alpha_1}} \frac{\partial \xi^{\alpha_1}}{\partial x^{\sigma_2}} \frac{\partial \xi^{\alpha_3}}{\partial x^{\sigma_3}} \ldots \frac{\partial \xi^{\alpha_n}}{\partial x^{\sigma_n}} =$$

$$= T_{\sigma_1}^{\ \sigma_1 \sigma_3 \ldots \sigma_n} \frac{\partial \xi^{\alpha_3}}{\partial x^{\sigma_3}} \ldots \frac{\partial \xi^{\alpha_n}}{\partial x^{\sigma_n}}, \tag{1.2.24}$$

так как $(\partial x^{\sigma_1}/\partial \xi^{\alpha_1})(\partial \xi^{\alpha_1}/\partial x^{\sigma_2}) = \delta^{\sigma_1}{}_{\sigma_2}$. Получили закон преобразования тензора ранга $n - 2$, который называется *свёрткой тензора* $\mathbf{T}$ по двум индексам. Таким образом, операция свёртывания тензора $T_{\sigma_1}^{\sigma_2 \ldots \sigma_n}$ по различного типа индексам σ_1, σ_2 состоит в сопоставлении исходному тензору тензора $T_{\sigma_1}^{\sigma_1 \ldots \sigma_n}$, ранг которого на две единицы ниже. Ясно, что можно образовывать несколько различных свёрток, важно только, чтобы один из индексов был верхним, а другой нижним. Операция свёртывания может быть повторена несколько раз, и тензору чётного ранга можно сопоставить тензор нулевого ранга, называемый *инвариантом* исходного тензора.

Заметим, что

$$T_{\sigma}{}^{\sigma\sigma_3\ldots\sigma_n} = T^{\tau}{}_{\omega}{}^{\sigma_3\ldots\sigma_n} g_{\tau\sigma} g^{\sigma\omega} = \\ = T^{\tau}{}_{\omega}{}^{\sigma_3\ldots\sigma_n} \delta_{\tau}^{\omega} = T^{\tau}_{\tau}{}^{\sigma_3\ldots\sigma_n}, \quad (1.2.25)$$

т. е. если в свёртке поднимаем нижний индекс суммирования, то верхний индекс следует опустить.

Скалярное умножение тензоров. Скалярным произведением тензора $\mathbf{P}$ ранга p и тензора $\mathbf{Q}$ ранга q является результат последовательного выполнения двух операций: 1) умножение $\mathbf{P}$ на $\mathbf{Q}$; 2) свёртывание произведения по последнему индексу первого сомножителя и по первому индексу второго. Другими словами, $\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ и

$$T^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}{}_{\beta_2\ldots\beta_q} = P^{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}\sigma} Q_{\sigma\beta_2\ldots\beta_q},$$

причём $r_T = r_P + r_Q - 2$, где через r_T, r_P, r_Q обозначены ранги тензоров. Ясно, что степени тензора 2-го ранга снова являются тензором 2-го ранга: если $\mathbf{T} = T^{\alpha}_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}\mathbf{e}^{\beta}$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^2 &= \mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = T^{\alpha}_{\sigma}T^{\sigma}_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}\mathbf{e}^{\beta}, \\ \mathbf{T}^3 &= \mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^2 = T^{\alpha}_{\sigma}T^{\sigma}_{\tau}T^{\tau}_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}\mathbf{e}^{\beta}, \ldots \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

Для полноты ряда (1.2.26) условно считают, что нулевая степень

$$\mathbf{T}^0 = g_{\alpha\beta}\mathbf{e}^{\alpha}\mathbf{e}^{\beta} = \mathbf{G} \quad (1.2.27)$$

совпадает с метрическим тензором.

Как уже отмечалось, свёртыванием можно получить инварианты. Из последовательности (1.2.26) найдём их:

$$\begin{aligned} &J_1 = T^{\alpha}_{\alpha}, \ J_2 = T^{\alpha}_{\sigma}T^{\sigma}_{\alpha}, \ J_3 = T^{\alpha}_{\sigma}T^{\sigma}_{\tau}T^{\tau}_{\alpha}, \\ &J_4 = T^{\alpha}_{\sigma}T^{\sigma}_{\tau}T^{\tau}_{\omega}T^{\omega}_{\alpha}, \ldots \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Эта неограниченная последовательность инвариантов образована из компонент исходного тензора; они называются ещё *свёртками.* Можно видеть, что J_1, J_2,... являются однородными функциями компонент и номер свёртки даёт порядок однородности. Далее будет показано, что есть только три функционально независимых инварианта, например J_1, J_2, J_3.

Симметрия и антисимметрия тензоров. После перестановки у компонент каких-либо двух верхних или двух нижних индексов, вообще говоря, получается другой тензор. Если после такой перестановки тензор не изменяется, то он называется *симметричным*. Если каждые две компоненты с переставленными индексами отличаются только знаком, то тензор — *антисимметричный* по этим индексам. Так, если тензор третьего ранга $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$ симметричен по α и β, то $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = T^{\beta\alpha}{}_{\gamma}$. Если он антисимметричен, то $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = -T^{\beta\alpha}{}_{\gamma}$. Компоненты антисимметричного тензора, в котором переставляемые индексы одинаковы, равны нулю: $T^{\alpha\alpha}{}_{\gamma} = -T^{\alpha\alpha}{}_{\gamma}$, откуда $T^{\alpha\alpha}{}_{\gamma} = 0$. Тензор симметричен или антисимметричен по какой-либо группе одинаково расположенных индексов, если он является таковым по каждой паре индексов этой группы. Пусть, например, тензор 3-го ранга симметричен по верхним индексам, тогда $T_{\sigma\tau\gamma} = T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} g_{\sigma\alpha} g_{\tau\beta} = T^{\beta\alpha}{}_{\gamma} g_{\tau\beta} g_{\sigma\alpha} = T_{\tau\sigma\gamma}$ — симметричен по нижним индексам. Значит, при определении симметрии тензора по двум индексам *существенны номера этих индексов* и не важно, расположены они оба вверху или оба внизу.

Свойство симметрии или антисимметрии является инвариантным, хотя компоненты тензора и зависят от выбора системы координат. В самом деле, например для тензора 3-го ранга, если $T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = T^{\beta\alpha}{}_{\gamma}$, то

$$\widehat{T}^{\sigma\tau}{}_{\omega} = T^{\alpha\beta}{}_{\gamma} \frac{\partial\xi^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial\xi^{\tau}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial\xi^{\omega}} = T^{\beta\alpha}{}_{\gamma} \frac{\partial\xi^{\tau}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial\xi^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial\xi^{\omega}} = \widehat{T}^{\tau\sigma}{}_{\omega}.$$

Аналогично доказывается инвариантность свойства антисимметричного тензора.

Симметрирование и альтернирование. Из компонент $T_{\alpha\beta}$ тензора второго ранга образуем симметричный $T_{(\alpha\beta)}$ и антисимметричный $T_{[\alpha\beta]}$ тензоры $T_{(\alpha\beta)} = (T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha})/2$, $T_{[\alpha\beta]} =$ $= (T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha})/2$. Тензору третьего ранга $T_{\alpha\beta\gamma}$ аналогичным способом можно сопоставить тензоры

$$T_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{1}{3!}\,(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} + T_{\beta\alpha\gamma} + T_{\alpha\gamma\beta} + T_{\gamma\beta\alpha}),$$

$$T_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{3!}\,(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} - T_{\beta\alpha\gamma} - T_{\alpha\gamma\beta} - T_{\gamma\beta\alpha}),$$

из которых первый является симметричным, а второй — антисимметричным по всем трём индексам. Легко видеть, что симметричный тензор определяется как среднее арифметическое тензоров, получающихся из исходного путём всевозможных перестановок индексов; антисимметричный тензор есть среднее арифметическое тензоров, полученных всевозможными подстановками индексов у исходного тензора, причём в случае чётной подстановки берётся знак плюс, а в случае нечётной — минус.

Подобная операция применима к тензорам 4-го и более высоких рангов.

Операция сопоставления данному тензору тензора того же ранга, симметричного по некоторой группе одинаково расположенных индексов — симметрирование, а операция сопоставления данному тензору тензора того же ранга, антисимметричного по какой-либо группе индексов — альтернирование.

Теорема 1.1 (свойства двойной свёртки). *Двойная свёртка тензора произвольного ранга, симметричного по свёртываемым индексам, с тензором произвольного ранга, антисимметричным по этим же индексам, равна нулю. Обратно: если равна нулю двойная свёртка двух тензоров произвольных рангов и если один из тензоров есть произвольный тензор, симметричный (антисимметричный) по свёртываемым индексам, то другой тензор антисимметричен (симметричен) по этим индексам.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{S}$, $\mathbf{A}$ — тензоры рангов s и a соответственно, свёртываются по двум первым индексам и

$$S^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} = S^{\alpha_2\alpha_1\ldots\alpha_s}; \tag{1.2.29}$$

$$A_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_a} + A_{\beta_2\beta_1\ldots\beta_a} = 0. \tag{1.2.30}$$

Тогда двойная свёртка симметричного тензора **S** и антисимметричного тензор **A** равна нулю. Действительно, в силу (1.2.29), (1.2.30)

$$
\begin{aligned}
&S^{\beta_1\beta_2\alpha_3\ldots\alpha_s}A_{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_a} = \\
&\quad = \frac{1}{2}\,(S^{\beta_1\beta_2\alpha_3\ldots\alpha_s}A_{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_a} + S^{\beta_2\beta_1\alpha_3\ldots\alpha_s}A_{\beta_2\beta_1\beta_3\ldots\beta_a}) = \\
&\qquad = \frac{1}{2}\,S^{\beta_1\beta_2\alpha_3\ldots\alpha_s}(A_{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_a} + A_{\beta_2\beta_1\beta_3\ldots\beta_a}) = 0. \qquad (1.2.31)
\end{aligned}
$$

Для доказательства обратного заметим, что из (1.2.31) для произвольного тензора **S** следуют равенства (1.2.30), выражающие антисимметричность тензора **A**.

Пусть теперь **A** — произвольный антисимметричный тензор и свёртка **S** и **A** равна нулю. Тогда

$$
\begin{aligned}
&0 = S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_s}A_{\alpha_1\alpha_2\beta_3\ldots\beta_a} = \\
&\quad = \frac{1}{2}\,(S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_s}A_{\alpha_1\alpha_2\beta_3\ldots\beta_a} + S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_s}A_{\alpha_2\alpha_1\beta_3\ldots\beta_a}) = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{2}\,A_{\alpha_1\alpha_2\beta_3\ldots\beta_a}(S^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_s} - S^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_s}) = 0
\end{aligned}
$$

и в силу произвольности тензора **A** получим симметричность тензора **S** по свёртываемым индексам. Теорема доказана.

Эта теорема часто используется при различных преобразованиях тензорных выражений.

Теорема 1.2 (деления тензоров). *Объект **T**, задаваемый в системе координат x^α с помощью 3^n чисел — компонент $T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}$, является тензором ранга n, если при умножении его на произвольный тензор **S** ранга $m \leqslant n$ и свёртки по m индексам получается тензор **P** ранга $n-m$:*

$$
P^{\alpha_{m+1}\ldots\alpha_n} = T^{\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_n}S_{\alpha_1\ldots\alpha_m}. \qquad (1.2.32)
$$

Доказательство. Запишем равенство (1.2.32) в системе $\widehat{K}(\xi^\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{T}^{\beta_1\ldots\beta_m\beta_{m+1}\ldots\beta_n}\widehat{S}_{\beta_1\ldots\beta_m} = \\
&\qquad = \widehat{P}^{\beta_{m+1}\ldots\beta_n} = P^{\alpha_{m+1}\ldots\alpha_n}\frac{\partial\xi^{\beta_{m+1}}}{\partial x^{\alpha_{m+1}}}\cdots\frac{\partial\xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}} = \\
&\qquad = T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}S_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\frac{\partial\xi^{\beta_{m+1}}}{\partial x^{\alpha_{m+1}}}\cdots\frac{\partial\xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}} = \\
&\qquad = T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\widehat{S}_{\beta_1\ldots\beta_m}\frac{\partial\xi^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial\xi^{\beta_m}}{\partial x^{\alpha_m}}\,\frac{\partial\xi^{\beta_{m+1}}}{\partial x^{\alpha_{m+1}}}\cdots\frac{\partial\xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}},
\end{aligned}
$$

откуда

$$
\left(\widehat{T}^{\beta_1\ldots\beta_n} - T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\frac{\partial\xi^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial\xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}}\right)\widehat{S}_{\beta_1\ldots\beta_m} = 0.
$$

Так как $\mathbf{S}$ — произвольный тензор, то компоненты $\widehat{S}_{\beta_1\ldots\beta_m}$ — произвольные величины. Значит,

$$
\widehat{T}^{\beta_1\ldots\beta_n} = T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\frac{\partial\xi^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial\xi^{\beta_n}}{\partial x^{\alpha_n}},
$$

т. е. тензорный закон преобразования и объект $\mathbf{T}$ суть тензор ранга n. Теорема доказана.

Данная теорема даёт критерий, устанавливающий тензорный характер объектов. Для иллюстрации рассмотрим основную квадратичную форму $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$. В ней $dx^\alpha dx^\beta$ — произвольный тензор 2-го ранга, ибо сами дифференциалы могут быть произвольными; величина ds^2 — скаляр — тензор нулевого ранга. По теореме двухиндексный объект $g_{\alpha\beta}$ есть тензор 2-го ранга, названный выше метрическим тензором.

1.3. МЕТРИЧЕСКИЙ И ДИСКРИМИНАНТНЫЙ ТЕНЗОРЫ

Метрический тензор тесно связан с метрикой пространства и имеет вид

$$
\mathbf{G} = g_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}^\beta. \tag{1.3.1}
$$

Формула (1.3.1) даёт представление с помощью ковариантных компонент $G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, совпадающих с коэффициентами основной квадратичной формы. Компоненты другого вида получаются путём поднятия индексов:

$$G^{\alpha}_{\ \beta} = g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\beta} = \delta^{\alpha}_{\ \beta}, \quad G_{\alpha}^{\ \beta} = g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = \delta_{\alpha}^{\ \beta},$$
$$G^{\alpha\beta} = G^{\alpha}_{\ \sigma} g^{\sigma\beta} = \delta^{\alpha}_{\ \sigma} g^{\sigma\beta} = g^{\alpha\beta},$$

т. е. смешанные компоненты представляют собой дельты Кронекера. Таким образом,

$$\mathbf{G} = g_{\alpha\beta} \mathbf{e}^{\alpha} \mathbf{e}^{\beta} = \delta^{\alpha}_{\ \beta} \mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{e}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\ \beta} \mathbf{e}^{\alpha} \mathbf{e}_{\beta} = g^{\alpha\beta} \mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{e}_{\beta} \tag{1.3.2}$$

и метрический тензор симметричен. Далее, в любой другой системе координат

$$\widehat{G}^{\alpha}_{\ \beta} = \delta^{\sigma}_{\ \tau} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial \xi^{\beta}} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \xi^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\ \beta}$$

и смешанные компоненты тоже есть дельты Кронекера.

Возьмём любой тензор $\mathbf{T}$, например 3-го ранга, и образуем скалярное произведение $\mathbf{S} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{T}$. Для контрвариантных компонент тензора $\mathbf{S}$ имеем

$$S^{\alpha\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\ \sigma} T^{\sigma\beta\gamma} = T^{\alpha\beta\gamma}, \quad \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}. \tag{1.3.3}$$

Другими словами, при умножении метрический тензор играет роль единичного тензора и любая степень $\mathbf{G}$ совпадает с самим $\mathbf{G}$.

Как уже отмечалось, векторные произведения базисных элементов можно разложить по векторам контрвариантного или ковариантного базисов

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_{\alpha} \times \mathbf{e}_{\beta} = e_{\alpha\beta\sigma} \mathbf{e}^{\sigma}, \quad \mathbf{e}^{\lambda} \times \mathbf{e}^{\mu} = e^{\lambda\mu\rho} \mathbf{e}_{\rho}, \\ \mathbf{e}_{\sigma} \times \mathbf{e}^{\tau} = e_{\sigma}^{\ \tau\omega} \mathbf{e}_{\omega}. \end{gathered} \tag{1.3.4}$$

Рассмотрим первую из формул (1.3.4) и умножим её скалярно на $\mathbf{e}_{\gamma}$:

$$(\mathbf{e}_{\alpha}, \mathbf{e}_{\beta}, \mathbf{e}_{\gamma}) = e_{\alpha\beta\sigma} \delta^{\sigma}_{\ \gamma} = e_{\alpha\beta\gamma}. \tag{1.3.5}$$

Найдём закон преобразования величин $e_{\alpha\beta\gamma}$ при переходе к новой системе координат. Имеем

$$\widehat{e}_{\sigma\tau\omega} = (\widehat{\mathbf{e}}_\sigma, \widehat{\mathbf{e}}_\tau, \widehat{\mathbf{e}}_\omega) = \left(\mathbf{e}_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\sigma}, \mathbf{e}_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\tau}, \mathbf{e}_\gamma \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\omega}\right) = \\ = e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\sigma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\tau} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \xi^\omega}, \quad (1.3.6)$$

откуда вытекает, что $e_{\alpha\beta\gamma}$ есть компоненты тензора 3-го ранга. Он обозначается через $\mathbf{E}$ и называется *дискриминантным* тензором:

$$\mathbf{E} = e_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}^\beta\mathbf{e}^\gamma = e^\alpha_{\ \beta\gamma}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^\beta\mathbf{e}^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta\mathbf{e}_\gamma = \ldots \quad (1.3.7)$$

Из свойств смешанного произведения (1.3.5) следует его антисимметричность по всей тройке индексов:

$$e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\gamma\beta\alpha}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\alpha\gamma\beta}. \quad (1.3.8)$$

Значит, все компоненты тензора, у которых два или все три индекса одинаковы, равны нулю. Ненулевые компоненты отличаются от e_{123} только знаком. Так как

$$(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\gamma)^2 = g, \quad (1.3.9)$$

то $e_{123} = \sqrt{g}$, и ковариантные компоненты тензора $\mathbf{E}$ имеют значения

$$e_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} \sqrt{g}, & \alpha\beta\gamma \text{ – чётная перестановка из } 1,2,3; \\ -\sqrt{g}, & \alpha\beta\gamma \text{ – нечётная перестановка из } 1,2,3; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.3.10)$$

Заметим, что коэффициенты во всех разложениях (1.3.4) есть компоненты дискриминантного тензора. Так, для левой части второго равенства имеем

$$\mathbf{e}^\lambda \times \mathbf{e}^\mu = g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}(\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta) = \\ = g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}e_{\alpha\beta\sigma}\mathbf{e}^\sigma = g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}g^{\rho\sigma}e_{\alpha\beta\sigma}\mathbf{e}_\rho.$$

Сравнение этого выражения с правой частью показывает, что

$$e^{\lambda\mu\rho} = g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} g^{\rho\sigma} e_{\alpha\beta\sigma}, \tag{1.3.11}$$

т. е. коэффициенты $e^{\lambda\mu\rho}$ получаются из компонент $e_{\alpha\beta\sigma}$ с помощью операции поднятия индексов и, значит, являются контрвариантными компонентами тензора $\mathbf{E}$. Поскольку $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)^2 = g_1$, то

$$e^{123} = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) = \sqrt{g_1}, \tag{1.3.12}$$

и для $e^{\alpha\beta\gamma}$ получим выражения вида (1.3.10) с заменой g на g_1.

Замечание 1.4. В трёхмерном пространстве произвольный антисимметричный тензор $\mathbf{S}$ третьего ранга тоже имеет только одну независимую компоненту $S_{123} \neq 0$. Поэтому существуют связи

$$e_{123} S_{\alpha\beta\gamma} = S_{123} e_{\alpha\beta\gamma}, \quad e^{123} S^{\alpha\beta\gamma} = S^{123} e^{\alpha\beta\gamma}. \tag{1.3.13}$$

Метрический и дискриминантный тензоры участвуют в скалярном и векторном произведении тензоров. Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$f = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_\alpha \mathbf{e}^\alpha) \cdot (b_\beta \mathbf{e}^\beta) = a_\alpha b_\beta (\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta) = g^{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta = a_\alpha b^\alpha.$$

Если $\mathbf{T}$ — тензор 2-го ранга и $\mathbf{a}$ — вектор, то

$$\begin{aligned} &\mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = (T_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\beta) \cdot (a_\gamma \mathbf{e}^\gamma) = \\ &\qquad = T_{\alpha\beta} a_\gamma \mathbf{e}^\alpha (\mathbf{e}^\beta \cdot \mathbf{e}^\gamma) = T_{\alpha\beta} a_\gamma g^{\beta\gamma} \mathbf{e}^\alpha, \\ &b_\alpha = T_{\alpha\beta} a_\gamma g^{\beta\gamma} = T_{\alpha\beta} a^\beta. \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

Векторное произведение двух векторов

$$\begin{aligned} &\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_\alpha \mathbf{e}^\alpha) \times (b_\beta \mathbf{e}^\beta) = \\ &\qquad = a_\alpha b_\beta \mathbf{e}^\alpha \times \mathbf{e}^\beta = e^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta \mathbf{e}_\gamma, \\ &c^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha b_\beta. \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Аналогично, векторное произведение вектора **a** на тензор **T**

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \mathbf{a}\times\mathbf{T} = \\ &= (a_\alpha \mathbf{e}^\alpha)\times(T_{\beta\gamma}\mathbf{e}^\beta\mathbf{e}^\gamma) = a_\alpha T_{\beta\gamma}(\mathbf{e}^\alpha\times\mathbf{e}^\beta)\,\mathbf{e}^\gamma = \\ &= e^{\alpha\beta\sigma}a_\alpha T_{\beta\gamma}\mathbf{e}_\sigma\mathbf{e}^\gamma, \quad Q^\sigma_{\ \gamma} = e^{\alpha\beta\sigma}a_\alpha T_{\beta\gamma}.\end{aligned} \qquad (1.3.16)$$

Итак, при скалярном и векторном произведении векторов получаются тензоры, ранги которых ниже суммы рангов сомножителей соответственно на две и одну единицы.

Существует тесная связь между дискриминантным тензором и определителями. Действительно, смешанное произведение векторов

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &\equiv (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{e}_\alpha,\mathbf{e}_\beta,\mathbf{e}_\gamma)a^\alpha b^\beta c^\gamma = \\ &= e_{\alpha\beta\gamma}a^\alpha b^\beta c^\gamma = e_{123}a^1b^2c^3 + e_{132}a^1b^3c^2 + \\ &+ e_{231}a^2b^3c^1 + e_{213}a^2b^1c^3 + e_{312}a^3b^1c^2 + \\ &+ e_{321}a^3b^2c^1 = \sqrt{g}\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix},\end{aligned} \qquad (1.3.17)$$

где применены равенства (1.3.10). Если пользоваться ковариантными компонентами векторов, то получим

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = e^{\sigma\tau\omega}a_\sigma b_\tau c_\omega = \sqrt{g_1}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (1.3.18)$$

Пусть теперь в формуле (1.3.17) $a^\alpha = T^\alpha_{\ 1}$, $b^\beta = T^\beta_{\ 2}$, $c^\gamma = T^\gamma_{\ 3}$, где $T^\alpha_{\ \beta}$ — компоненты тензора 2-го ранга. Тогда

$$e_{\alpha\beta\gamma}T^\alpha_{\ \ 1}T^\beta_{\ \ 2}T^\gamma_{\ \ 3} = \sqrt{g}\,|T^l_{\ m}|, \qquad (1.3.19)$$

а из (1.3.18) —

$$e^{\lambda\mu\nu}T^1_{\ \ \lambda}T^2_{\ \ \mu}T^3_{\ \ \nu} = \sqrt{g_1}|\,T^l_{\ m}|. \qquad (1.3.20)$$

Видно, что

$$e_{\alpha\beta\gamma}T^\alpha_{\ \ \lambda}T^\beta_{\ \ \mu}T^\gamma_{\ \ \nu} \qquad (1.3.21)$$

есть антисимметричный тензор 3-го ранга, и когда λ, μ, ν принимают частные значения $1, 2, 3$, то величина (1.3.21) есть $\sqrt{g}|T^l{}_m|$. Отсюда и из (1.3.10) делаем вывод, что

$$e_{\alpha\beta\gamma} T^\alpha{}_\lambda T^\beta{}_\mu T^\gamma{}_\nu = |T^l{}_m| e_{\lambda\mu\nu}. \tag{1.3.22}$$

Аналогично,

$$e^{\sigma\tau\omega} T^\lambda{}_\sigma T^\mu{}_\tau T^\nu{}_\omega = |T^l{}_m| e^{\lambda\mu\nu}. \tag{1.3.23}$$

Последние два равенства показывают, что перемена мест двух строк или столбцов изменяет знак определителя. В частности, при равенстве двух строк или столбцов определитель обращается в ноль.

Если перемножить два дискриминантных тензора, получим тензор шестого ранга. Обращаясь к формулам (1.3.11, 1.3.12), нетрудно убедиться в том, что смешанные компоненты тензора 6-го ранга

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}{}_{\sigma\tau\omega} = e^{\alpha\beta\gamma} e_{\sigma\tau\omega} = \begin{cases} 1, & \text{когда } \alpha\beta\gamma \text{ и } \sigma\tau\omega \\ & \text{отличаются на чётное} \\ & \text{число перестановок;} \\ -1, & \text{когда } \alpha\beta\gamma \text{ и } \sigma\tau\omega \\ & \text{отличаются на нечётное} \\ & \text{число перестановок;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Оказывается, что полученный тензор может быть выражен через смешанные компоненты метрического тензора. Для этого воспользуемся равенствами (1.3.22) и (1.3.23)

$$e_{\sigma\tau\omega} = e_{\lambda\mu\nu} \delta^\lambda{}_\sigma \delta^\mu{}_\tau \delta^\nu{}_\omega = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \delta^1{}_\sigma & \delta^2{}_\sigma & \delta^3{}_\sigma \\ \delta^1{}_\tau & \delta^2{}_\tau & \delta^3{}_\tau \\ \delta^1{}_\omega & \delta^2{}_\omega & \delta^3{}_\omega \end{vmatrix},$$

$$e^{\alpha\beta\gamma} = e^{\lambda\mu\nu}\delta^{\alpha}_{\ \lambda}\delta^{\beta}_{\ \mu}\delta^{\gamma}_{\ \nu} = \sqrt{g_1}\begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\ 1} & \delta^{\alpha}_{\ 2} & \delta^{\alpha}_{\ 3} \\ \delta^{\beta}_{\ 1} & \delta^{\beta}_{\ 2} & \delta^{\beta}_{\ 3} \\ \delta^{\gamma}_{\ 1} & \delta^{\gamma}_{\ 2} & \delta^{\gamma}_{\ 3} \end{vmatrix}.$$

Перемножая эти равенства и учитывая, что $gg_1 = 1$, получим выражение

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\ \ \ \sigma\tau\omega} = \begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\ \nu}\delta^{\nu}_{\ \sigma} & \delta^{\alpha}_{\ \nu}\delta^{\nu}_{\ \tau} & \delta^{\alpha}_{\ \nu}\delta^{\nu}_{\ \omega} \\ \delta^{\beta}_{\ \nu}\delta^{\nu}_{\ \sigma} & \delta^{\beta}_{\ \nu}\delta^{\nu}_{\ \tau} & \delta^{\beta}_{\ \nu}\delta^{\nu}_{\ \omega} \\ \delta^{\gamma}_{\ \nu}\delta^{\nu}_{\ \sigma} & \delta^{\gamma}_{\ \nu}\delta^{\nu}_{\ \tau} & \delta^{\gamma}_{\ \nu}\delta^{\nu}_{\ \omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta^{\alpha}_{\ \sigma} & \delta^{\alpha}_{\ \tau} & \delta^{\alpha}_{\ \omega} \\ \delta^{\beta}_{\ \sigma} & \delta^{\beta}_{\ \tau} & \delta^{\beta}_{\ \omega} \\ \delta^{\gamma}_{\ \sigma} & \delta^{\gamma}_{\ \tau} & \delta^{\gamma}_{\ \omega} \end{vmatrix},$$

откуда, в развёрнутой записи,

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\ \ \ \sigma\tau\omega} = \delta^{\alpha}_{\ \sigma}\delta^{\beta}_{\ \tau}\delta^{\gamma}_{\ \omega} + \delta^{\beta}_{\ \sigma}\delta^{\gamma}_{\ \tau}\delta^{\alpha}_{\ \omega} + \delta^{\gamma}_{\ \sigma}\delta^{\alpha}_{\ \tau}\delta^{\beta}_{\ \omega} -$$
$$- \delta^{\beta}_{\ \sigma}\delta^{\alpha}_{\ \tau}\delta^{\gamma}_{\ \omega} - \delta^{\alpha}_{\ \sigma}\delta^{\gamma}_{\ \tau}\delta^{\beta}_{\ \omega} - \delta^{\gamma}_{\ \sigma}\delta^{\beta}_{\ \tau}\delta^{\alpha}_{\ \omega}. \quad (1.3.24)$$

Рассмотрим свёртки этого тензора. При свёртывании по индексам α и σ получим тензор 4-го ранга

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\ \ \ \alpha\tau\omega} = 3\delta^{\beta}_{\ \tau}\delta^{\gamma}_{\ \omega} + \delta^{\gamma}_{\ \tau}\delta^{\beta}_{\ \omega} + \delta^{\gamma}_{\ \tau}\delta^{\beta}_{\ \omega} - 3\delta^{\gamma}_{\ \tau}\delta^{\beta}_{\ \omega} -$$
$$- \delta^{\beta}_{\ \tau}\delta^{\gamma}_{\ \omega} - \delta^{\gamma}_{\ \omega}\delta^{\beta}_{\ \tau} = \delta^{\beta}_{\ \tau}\delta^{\gamma}_{\ \omega} - \delta^{\gamma}_{\ \tau}\delta^{\beta}_{\ \omega}. \quad (1.3.25)$$

Свернём ещё раз по паре индексов β и τ, получим тензор 2-го ранга

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\ \ \ \alpha\beta\omega} = 3\delta^{\gamma}_{\ \omega} - \delta^{\gamma}_{\ \omega} = 2\delta^{\gamma}_{\ \omega}. \quad (1.3.26)$$

Последняя свёртка по индексам γ и ω даёт инвариант

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\ \ \ \alpha\beta\gamma} = 2\delta^{\gamma}_{\ \gamma} = 6. \quad (1.3.27)$$

Объекты (1.3.24)–(1.3.27) называют символами Кронекера; все они выражаются через дельты Кронекера. Символ (1.3.26) используется для подстановки индекса

$$\frac{1}{2}\, e^{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\omega}T^{\sigma\omega} = \delta^{\gamma}_{\ \omega}T^{\sigma\omega} = T^{\sigma\gamma};$$

символ (1.3.25) может быть связан с операцией альтернирования по двум индексам:

$$\frac{1}{2}\,e^{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\tau\omega}T^{\tau\omega} = \frac{1}{2}\,(T^{\beta\gamma} - T^{\gamma\beta}) = T^{[\beta\gamma]},$$

а символ (1.3.24) — с альтернированием по трём индексам:

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\,e^{\alpha\beta\gamma}e_{\sigma\tau\omega}T^{\sigma\tau\omega} = \frac{1}{6}\,(T^{\alpha\beta\gamma} + T^{\beta\gamma\alpha}+&\\ + T^{\gamma\alpha\beta} - T^{\beta\alpha\gamma} - T^{\alpha\gamma\beta} - T^{\gamma\beta\alpha}) &= T^{[\alpha\beta\gamma]}.\end{aligned}$$

Отметим ещё два полезных результата, связанных с дискриминантным тензором. Пусть $A_{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор 2-го ранга и

$$a^{\gamma} = e^{\alpha\beta\omega}A_{\alpha\beta}. \tag{1.3.28}$$

Данная формула допускает обращение. Действительно, по формуле (1.3.25)

$$\begin{aligned}e_{\sigma\tau\gamma}a^{\gamma} = e^{\alpha\beta\gamma}e_{\sigma\tau\gamma}A_{\alpha\beta} =&\\ = (\delta^{\alpha}_{\ \sigma}\delta^{\beta}_{\ \tau} - \delta^{\beta}_{\ \sigma}\delta^{\alpha}_{\ \tau})A_{\alpha\beta} &= A_{\sigma\tau} - A_{\tau\sigma} = 2A_{\sigma\tau},\end{aligned}$$

откуда

$$A_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}\,e_{\sigma\tau\gamma}a^{\gamma}. \tag{1.3.29}$$

Тензоры $A_{\alpha\beta}$ и a^{γ}, связанные формулами (1.3.28), (1.3.29), называются *двойственными*, или *дуальными*, тензорами.

Умножим обе части равенства (1.3.22) на $e^{\lambda\mu\nu}$ и просуммируем по индексам λ, μ, ν, используя формулу (1.3.27):

$$e^{\lambda\mu\nu}e_{\alpha\beta\gamma}T^{\alpha}_{\lambda}T^{\beta}_{\mu}T^{\gamma}_{\nu} = |T^{l}_{\ m}|e^{\lambda\mu\nu}e_{\lambda\mu\nu} = 6|T^{l}_{\ m}|,$$

отсюда

$$|T^{l}_{\ m}| = \frac{1}{6}\,\delta^{\lambda\mu\nu}_{\quad\ \alpha\beta\gamma}T^{\alpha}_{\lambda}T^{\beta}_{\mu}T^{\gamma}_{\nu}. \tag{1.3.30}$$

Таким образом, определитель $|T^{l}_{\ m}|$ является инвариантом тензора 2-го ранга. В его образовании участвует тензор 6-го ранга — символ Кронекера.

1.4. ТЕНЗОРЫ ВТОРОГО РАНГА И ТЕНЗОРНЫЕ ФУНКЦИИ

Для тензора 2-го ранга имеем следующие четыре формы:

$$\mathbf{T} = T_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}^\beta = T^\alpha_{\ \beta}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^\beta = T_\alpha^{\ \beta}\mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}_\beta = T^{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta. \qquad (1.4.1)$$

Поэтому в фиксированной системе координат этому тензору соответствуют четыре различные квадратные матрицы 3-го порядка, составленные из компонент тензора,

$$A_1 = (T_{\alpha\beta}),\ \ A_2 = (T^\alpha_{\ \beta}),\ \ A_3 = (T_\alpha^{\ \beta}),\ \ A_4 = (T^{\alpha\beta}), \qquad (1.4.2)$$

причём первый индекс соответствует номеру строки, второй — номеру столбца матрицы. Поскольку $T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\sigma}T^\sigma_{\ \beta} = T_\alpha^{\ \sigma}g_{\sigma\beta} = g_{\alpha\sigma}T^{\sigma\tau}g_{\tau\beta}$, то между матрицами (1.4.2) существуют связи

$$A_1 = g_*A_2 = A_3g_* = g_*A_4g_*, \qquad (1.4.3)$$

где матрица $g_* = (g_{\alpha\beta})$, см. (1.1.13).

Ясно, что если задана одна из матриц (1.4.3) в фиксированной системе координат, то в этой системе известны компоненты тензора с некоторым строением индексов, значит, известен и сам тензор. Другими словами, между тензорами 2-го ранга и квадратными матрицами 3-го порядка имеется взаимно однозначное соответствие.

Любому тензору 2-го ранга можно сопоставить две линейные вектор-функции

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T}, \quad b^\alpha = T^\alpha_{\ \beta}a^\beta, \quad b'^\alpha = T_\beta^{\ \alpha}a^\beta. \qquad (1.4.4)$$

Очевидно, что задание линейной вектор-функции (1.4.4) или задание тензора эквивалентны друг другу.

Тензору 2-го ранга $\mathbf{T}$ сопоставляется билинейная форма ($\mathbf{x} = x^\alpha\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{y} = y^\alpha\mathbf{e}_\alpha$)

$$f(x^\sigma, y^\tau) = T_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta \qquad (1.4.5)$$

с инвариантной величиной f. Обратно, задание формы (1.4.5) определяет матрицу A_1 из (1.4.3) или, что эквивалентно, тензор $\mathbf{T}$.

Значит, характеристика тензора как инвариантной величины совпадает с инвариантными свойствами матрицы, линейной вектор-функции или билинейной формы.

Произвольный тензор 2-го ранга $\mathbf{T}$ представляется единственным способом в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{A}, \tag{1.4.6}$$

где компоненты симметричного тензора $\mathbf{S}$ и антисимметричного тензора $\mathbf{A}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= T_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\,(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}), \\ A_{\alpha\beta} &= T_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}\,(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}). \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Введём для первых инвариантов — свёрток тензоров $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{A}$ — обозначения

$$J_1^T \equiv \mathrm{tr}\mathbf{T} = T^{\alpha}_{\ \alpha}, \ \ J_1^S \equiv \mathrm{tr}\mathbf{S} = S^{\alpha}_{\ \alpha}, \ \ J_1^A \equiv \mathrm{tr}\mathbf{A} = A^{\alpha}_{\ \alpha}. \tag{1.4.8}$$

По теореме о свойствах двойной свёртки

$$J_1^A = A^{\alpha}_{\ \alpha} = g^{\alpha\beta} A_{\beta\alpha} = 0,$$

и из (1.4.6) вытекает равенство

$$J_1^T = J_1^S + J_1^A = J_1^S. \tag{1.4.9}$$

Тензор $\mathbf{P}$ второго ранга называется *шаровым*, если

$$\mathbf{P} = f\mathbf{G}, \quad P^{\alpha}_{\ \beta} = f\delta^{\alpha}_{\ \beta}, \tag{1.4.10}$$

где $\mathbf{G}$ — метрический тензор, f — скаляр. Первый инвариант шарового тензора

$$J_1^P \equiv \mathrm{tr}\mathbf{P} = P^{\alpha}_{\ \alpha} = f\delta^{\alpha}_{\ \alpha} = 3f.$$

Симметричный тензор 2-го ранга $\mathbf{D}$ называется *девиатором*, если равен нулю его первый инвариант, $J_1^D = 0$. Любому симметричному тензору **S** второго ранга можно сопоставить девиатор по формуле

$$\mathbf{D} = \mathbf{S} - \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{3}\, J_1^S \mathbf{G}, \tag{1.4.11}$$

так как $J_1^D = D^\alpha_{\ \alpha} = S^\alpha_{\ \alpha} - P^\alpha_{\ \alpha} = S^\alpha_{\ \alpha} - J_1^S \delta^\alpha_{\ \alpha}/3 = J_1^S - J_1^S = 0$. Поэтому симметричный тензор представляется в виде суммы шарового тензора и девиатора:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} + \mathbf{D}. \tag{1.4.12}$$

Тем самым произвольный тензор **T** второго ранга имеет вид

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} + \mathbf{D} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{3}\, J_1^T \mathbf{G}. \tag{1.4.13}$$

Последнее вытекает из формулы (1.4.11).

Два тензора **T** и $\mathbf{T}^{-1}$ называются *взаимно обратными*, если их скалярное произведение совпадает с метрическим тензором: $\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{G}$.

Пусть **T** — тензор 2-го ранга, имеющий левый $\mathbf{T}_1^{-1}$ и правый $\mathbf{T}_2^{-1}$ тензоры: $\mathbf{T}_1^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{G}$, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}_2^{-1} = \mathbf{G}$. Тогда $\mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{T}_2^{-1}$ и существует только один тензор, обратный данному.

Если **Q** — правый обратный тензор, то $T^\alpha_\sigma Q^\sigma_{\ \beta} = \delta^\alpha_\beta$. Разлагая определитель $|T^l_m|$ по элементам α строки: $T^\alpha_\sigma t^\sigma_{\ \beta} = |T^l_{\ m}|\delta^\alpha_{\ \beta}$, $t^\sigma_{\ \beta}$ — суть алгебраические дополнения (это формула Лапласа), легко находим

$$Q^\sigma_{\ \beta} = \frac{t^\sigma_{\ \beta}}{|T^l_{\ m}|}\,, \tag{1.4.14}$$

$$t^\lambda_{\ \alpha} = \frac{1}{2}\, \delta^{\lambda\mu\nu}_{\quad\ \alpha\beta\gamma} T^\beta_{\ \mu} T^\gamma_{\ \nu}\,.$$

Пусть вектор **a** идёт *в главном направлении тензора* **T**, т. е.

$$\lambda\mathbf{a} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{a}, \quad (\lambda\mathbf{G} - \mathbf{T})\cdot\mathbf{a} = 0, \quad (\lambda\delta^\alpha_{\ \beta} - T^\alpha_{\ \beta})a^\beta = 0; \tag{1.4.15}$$

$$\mu\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T}, \quad \mathbf{a}\cdot(\mu\mathbf{G} - \mathbf{T}) = 0, \quad (\mu\delta_\beta^{\ \alpha} - T_\beta^{\ \alpha})a^\beta = 0. \tag{1.4.16}$$

Ненулевые решения систем линейных алгебраических уравнений (1.4.15), (1.4.16) существуют лишь при условии обращения в ноль определителей

$$|\lambda\delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}| = 0, \quad |\mu\delta_{\beta}^{\ \alpha} - T_{\beta}^{\ \alpha}| = 0. \tag{1.4.17}$$

Поскольку $\lambda\delta_{\beta}^{\ \alpha} - T_{\beta}^{\ \alpha} = g_{\alpha\beta}(\lambda\delta^{\sigma}_{\ \tau} - T^{\sigma}_{\ \tau})g^{\tau\alpha}$, то

$$|\lambda\delta_{\beta}^{\ \alpha} - T_{\beta}^{\ \alpha}| = g|\lambda\delta^{\sigma}_{\ \tau} - T^{\sigma}_{\ \tau}|g_1 = |\lambda\delta^{\sigma}_{\ \tau} - T^{\sigma}_{\ \tau}|,$$

так как $gg^{-1} = 1$ и, на самом деле, два уравнения (1.4.17) представляют собой одно уравнение

$$|\lambda\delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}| = 0. \tag{1.4.18}$$

Оно называется *характеристическим для тензора* **T** и является инвариантным. Действительно, в системе координат $\widehat{K}$

$$\lambda\widehat{\delta}^{\mu}_{\ \nu} - \widehat{T}^{\mu}_{\ \nu} = (\lambda\delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta})\frac{\partial\xi^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\,\frac{\partial x^{\beta}}{\partial\xi^{\nu}}$$

и переход к определителям в этом матричном равенстве даёт

$$|\lambda\widehat{\delta}^{\mu}_{\ \nu} - \widehat{T}^{\mu}_{\ \nu}| = |\lambda\delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}|JJ^{-1} = |\lambda\delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}|.$$

Ясно, что λ есть решение кубического уравнения. Раскрывая определитель (1.4.18), получим

$$\Delta(\lambda) \equiv |\lambda\delta^{\alpha}_{\ \beta} - T^{\alpha}_{\ \beta}| = \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \tag{1.4.19}$$

$$I_1 = T^{\sigma}_{\ \sigma}, \quad I_2 = t^{\alpha}_{\ \alpha}, \quad I_3 = |T^{l}_{\ m}|. \tag{1.4.20}$$

Величины I_1, I_2, I_3 носят название *основных инвариантов тензора* **T**. Они выражаются через свёртки (1.2.28) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&I_1 = T^{\sigma}_{\ \sigma} = J_1,\\
&I_2 = t^{\alpha}_{\ \alpha} = \frac{1}{2}\,\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\ \ \ \sigma\tau\omega}T^{\sigma}_{\ \beta}T^{\omega}_{\ \sigma} = \frac{1}{2}\,(J_1^2 - J_2),\\
&I_3 = \frac{1}{6}\,\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\ \ \ \sigma\tau\omega}T^{\sigma}_{\ \alpha}T^{\tau}_{\ \beta}T^{\omega}_{\ \gamma} = \frac{1}{6}\,(J_1^3 - 3J_1J_2 + 2J_3).
\end{aligned} \tag{1.4.21}$$

При выводе этих формул нужно воспользоваться свойством тензора 6-го ранга (1.3.24)–(1.3.27). Обратные к (1.4.21) формулы имеют вид

$$J_1 = I_1, \quad J_2 = I_1^2 - 2I_2, \quad J_3 = I_1^3 - 3I_1 I_2 + 3I_3. \qquad (1.4.22)$$

Если все корни характеристического уравнения действительные и различные, то соответствующие им собственные вектора линейно независимы. Выберем тройку таких векторов в качестве координатного базиса:

$$\mathbf{e}_\alpha \equiv \mathbf{a}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \qquad (1.4.23)$$

и посмотрим, какой вид принимают, например, смешанные компоненты тензора в этом базисе. Имеем $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\beta = T^{\sigma}_{\ \tau}\mathbf{e}_\sigma\mathbf{e}^\tau \times \times \mathbf{e}_\beta = T^{\sigma}_{\ \beta}\mathbf{e}_\sigma$, $\mathbf{e}^\alpha \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\beta) = T^{\sigma}_{\ \beta}\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\sigma = T^{\alpha}_{\ \beta}$; аналогично $(\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{e}^\beta = T_{\alpha}^{\ \beta}$, значит,

$$T^{\alpha}_{\ \beta} = \mathbf{e}^\alpha \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\beta), \quad T_{\alpha}^{\ \beta} = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{e}^\beta. \qquad (1.4.24)$$

В силу выбора базиса (1.4.23) $\lambda_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_\alpha$, и смешанные компоненты $T^{\alpha}_{\ \beta}$, согласно (1.4.24), будут иметь значения

$$T^{\alpha}_{\ \beta} = \mathbf{e}^\alpha \cdot (\lambda_\beta \mathbf{e}_\beta) = \lambda_\beta \delta^{\alpha}_{\ \beta}, \qquad (1.4.25)$$

т. е. матрица A_2 этих компонент является диагональной:

$$A_2 = (T^{\alpha}_{\ \beta}) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \qquad (1.4.26)$$

Однако матрицы A_1, A_3, A_4 в этом базисе не обязательно диагональные.

Если взять за базис другую тройку векторов $\mathbf{a}'_\alpha \equiv \mathbf{e}_\alpha$, $\lambda_\alpha \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{T}$, то к диагональному виду приведётся матрица A_3:

$$T_{\alpha}^{\ \beta} = \lambda_\alpha \delta_{\alpha}^{\ \beta}, \quad A_3 = (T_{\alpha}^{\ \beta}) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \qquad (1.4.27)$$

а матрицы A_1, A_2, A_4, вообще говоря, не диагональны в этом базисе.

Представления (1.4.24), (1.4.27) в главных осях называются *каноническими*, а ненулевые величины λ_α — *главными значениями* тензора $\mathbf{T}$; часто их обозначают $T_\alpha \equiv \lambda_\alpha$.

Ясно, что основные инварианты тензора выражаются через его главные значения по формулам (теорема Виета)

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1,$$
$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \tag{1.4.28}$$

откуда тензор 2-го ранга имеет три независимых инварианта I_1, I_2, I_3.

Из (1.4.22) и (1.4.28) для свёрток получим выражение через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad J_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$
$$J_3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3, \quad J_4 = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4, \ldots \tag{1.4.29}$$

Значит, из всей последовательности J_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, в (1.4.29) независимыми будут только три.

Особенности симметричных тензоров. Для симметричного тензора 2-го ранга $\mathbf{T}$ $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$, $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ и, значит, симметричны матрицы $A_1 = (T_{\alpha\beta})$, $A_4 = (T^{\alpha\beta})$.

Для смешанных компонент имеем

$$T_\beta{}^\alpha = T_{\beta\sigma} g^{\sigma\alpha}, \quad T^\alpha_{\ \beta} = T_{\sigma\beta} g^{\sigma\alpha} \tag{1.4.30}$$

и матрицы $A_2(T^\alpha_{\ \beta})$, $A_3(T_\alpha{}^\beta)$ совпадают. Далее, для такого тензора вместо билинейной формы достаточно рассмотреть квадратичную форму

$$f = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}, \quad f(x^\sigma) = T_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta. \tag{1.4.31}$$

Кроме того, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}$ и тройки главных направлений $\mathbf{a}_\alpha$ и $\mathbf{a}'_\alpha$ совпадают; для различных корней характеристического уравнения $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ векторы $\mathbf{a}_\mu$ и $\mathbf{a}_\nu$ взаимно ортогональны: $\mathbf{a}_\mu \cdot \mathbf{a}_\nu = 0$. Можно показать, что если среди трёх корней два одинаковы, то существует целая плоскость главных направлений и ещё одно направление, перпендикулярное этой плоскости. При равенстве всех трёх корней любое направление является главным. Что касается корней характеристического уравнения, то все они действительные.

Изотропные тензорные функции. Пусть $\mathbf{H}$ — тензор ранга r_H, $\mathbf{T}$ — тензор ранга r_T; эти тензоры считаем переменными с областями значений R_H и R_T. Если каждому элементу множества R_T каким-либо способом поставлен в соответствие элемент множества R_H, то говорят, что тензор $\mathbf{H}$ является функцией тензора $\mathbf{T}$, и обозначают эту функцию

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{T}). \tag{1.4.32}$$

Из данного определения тензорной функции следует её инвариантность. В фиксированной системе координат тензорная функция изображается системой равенств, число которых равно числу компонент тензора $\mathbf{H}$.

Функция (1.4.32) может зависеть ещё от некоторых тензоров $\mathbf{A}_i$, $i = \overline{1, n}$, тогда

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{T}, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) \tag{1.4.33}$$

— тензорная функция нескольких переменных тензоров.

Тензорная функция называется *изотропной*, если все параметрические тензоры являются шаровыми, т. е. $\mathbf{A}_i = \mu_i \mathbf{G}$, где μ_i — скаляры.

Далее, имея в виду приложения к механике сплошных сред, будем считать $\mathbf{T}$ тензором 2-го рода.

Пусть $r_H = 0$, тогда имеем скалярную функцию тензорного аргумента, например таковыми являются инварианты тензора $J_1 = T^{\alpha}_{\ \alpha}$, $J_2 = T^{\alpha}_{\ \sigma} T^{\sigma}_{\ \alpha}$, $J_3 = T^{\alpha}_{\ \sigma} T^{\sigma}_{\ \tau} T^{\tau}_{\ \alpha}$, или $I_1 = T^{\alpha}_{\ \alpha}$, $I_2 = 2^{-1} \delta^{\alpha\beta\gamma}_{\alpha\tau\omega} T^{\tau}_{\ \beta} T^{\omega}_{\ \gamma}$, $I_3 = 6^{-1} \delta^{\alpha\beta\gamma}_{\sigma\tau\omega} T^{\sigma}_{\ \tau} T^{\tau}_{\ \beta} T^{\omega}_{\ \gamma}$. В этих равенствах символы Кронекера суть параметрические тензоры.

При $r_H = 1$ имеем векторную функцию тензорного аргумента, например $\mathbf{b} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{b}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}$. В этих функциях $\mathbf{a}$ — параметрический вектор — тензор 1-го ранга.

При $r_H = 2$ получим тензорную функцию тензорного аргумента, например $\mathbf{H}_0 = k_0 \mathbf{G}$, $\mathbf{H}_1 = k_0 \mathbf{G} + k_1 \mathbf{T}$, $\mathbf{H}_2 = k_0 \mathbf{G} + k_1 \mathbf{T} + k_2 \mathbf{T}^2, \ldots$, $\mathbf{H}_n = k_0 \mathbf{G} + k_1 \mathbf{T} + \ldots + k_n \mathbf{T}^n$, где коэффициенты полиномов можно считать шаровыми тензорами $k_i \mathbf{G}$.

Обобщая предыдущие примеры, рассмотрим ряд

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{T}) = k_0\mathbf{G} + k_1\mathbf{T} + \ldots + k_n\mathbf{T}^n + \ldots, \tag{1.4.34}$$

соответствующий аналитической функции

$$f(z) = k_0 + k_1 z + \ldots + k_n z^n + \ldots,$$

в предположении, что все девять рядов (1.4.34) сходятся. Так для показательной функции

$$f(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

тензорная функция

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{T}) = e^{\mathbf{T}} = \mathbf{G} + \frac{\mathbf{T}}{1!} + \frac{\mathbf{T}^2}{2!} + \ldots + \frac{\mathbf{T}^n}{n!} + \ldots$$

и все девять рядов сходятся для любых конечных значений $T^{\sigma}_{\cdot\tau}$. Можно видеть, что $\mathbf{H}^2 = e^{\mathbf{T}} \cdot e^{\mathbf{T}} = e^{2\mathbf{T}}, \ldots, \mathbf{H}^m = e^{m\mathbf{T}}$, а для обратного $\mathbf{H}^{-1} = e^{-\mathbf{T}}$. Однако $e^{\mathbf{T}_1}e^{\mathbf{T}_2} \neq e^{\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2}$ при $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2 \neq \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1$.

Тензорные функции удобно изучать в *канонических системах координат* тензора $\mathbf{T}$. Предположим, что главные значения $\lambda_\alpha = T_\alpha$ различны, тогда в главных осях для компонент имеют место соотношения $T^{\alpha}_{\cdot\beta} = T_\beta \delta^{\alpha}_{\cdot\beta}$ и тензорная функция (1.4.34) перепишется в виде

$$H^{\alpha}_{\cdot\beta} = f(T_\beta)\delta^{\alpha}_{\cdot\beta}, \quad f(T_\beta) = k_0 + k_1 T_\beta + k_2 T_\beta^2 + \ldots, \tag{1.4.35}$$

или

$$(H^{\alpha}_{\cdot\beta}) = \mathrm{diag}(f(T_1), f(T_2), f(T_3)).$$

Значит, если тензорная функция изотропна, то её аргумент и она сама одновременно приводятся к диагональному виду — их главные оси совпадают, причём главные значения тензора $\mathbf{H}$ есть $H_\beta = f(T_\beta)$.

Конечно, можно считать, что коэффициенты k_i $(i = 0, 1, \ldots)$ зависят от главных значений тензора $\mathbf{T}$: $k_i = k_i(T_1,$

$T_2, T_3)$. Тогда

$$(H^\alpha_{\ \beta}) = \mathrm{diag}(f(T_1, T_2, T_3; T_1),\\ f(T_1, T_2, T_3; T_2), f(T_1, T_2, T_3; T_3)). \quad (1.4.36)$$

Следовательно, можно построить тензорную функцию с произвольными главными значениями $H_\beta = f(T_1, T_2, T_3; T_\beta) \equiv \equiv \varphi_\beta(T_1, T_2, T_3)$. Например, когда все T_α различны, то в качестве f можно взять функцию

$$f(T_1, T_2, T_3, z) = \frac{(z - T_2)(z - T_3)}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_3)}\,\varphi_1(T_1, T_2, T_3) + \\ + \frac{(z - T_3)(z - T_1)}{(T_2 - T_3)(T_2 - T_1)}\,\varphi_2(T_1, T_2, T_3) + \\ + \frac{(z - T_1)(z - T_2)}{(T_3 - T_1)(T_3 - T_2)}\,\varphi_3(T_1, T_2, T_3). \quad (1.4.37)$$

Очевидно, $f(T_1, T_2, T_3, T_\beta) = \varphi_\beta(T_1, T_2, T_3)$.

Таким образом, изотропные тензорные функции с точностью до преобразования координат сводятся к функциональным связям между главными значениями. Главные оси тензоров $\mathbf{T}$ и $\mathbf{H}$ совпадают. В этих осях главными значениями тензоров будут T_β и φ_β, а формула (1.4.37) даёт связь между ними и, значит, $\mathbf{H}$ — изотропная функция тензора $\mathbf{T}$. Данное свойство соосных тензоров называют *свойством изотропии*.

Возьмём в качестве аналитической функции характеристический полином тензора $\mathbf{T}$:

$$f(T_1, T_2, T_3, z) \equiv \Delta z = z^3 - I_1 z^2 + I_2 z - I_3,$$

где I_α — основные инварианты тензора $\mathbf{T}$. Тогда тензорная функция $\mathbf{H} = \Delta(\mathbf{T})$ имеет нулевые главные значения $H_\beta = = \Delta(T_\beta) = 0$ и $\mathbf{H}$ есть нулевой тензор, или

$$\mathbf{T}^3 - I_1\mathbf{T}^2 + I_2\mathbf{T} - I_3\mathbf{G} = 0. \quad (1.4.38)$$

Равенство (1.4.38) выполнено для любого тензора 2-го ранга и носит название *тождества Гамильтона–Кели*.

Любой полином $\mathbf{H} = k_0\mathbf{G} + k_1\mathbf{T} + \ldots + k_n\mathbf{T}^n$ можно представить в виде квадратичного трёхчлена. Действительно, из (1.4.38) $\mathbf{T}^3 = I_1\mathbf{T}^2 - I_2\mathbf{T} + I_3\mathbf{G}$, $\mathbf{T}^4 = \mathbf{T}\cdot(\mathbf{T}^3) = (I_1^2 - I_2)\mathbf{T}^2 + (I_3 - I_1I_2)\mathbf{T} + I_1I_3\mathbf{G}$ и т. д. В результате получим формулу $\mathbf{H} = e_0\mathbf{G} + e_1\mathbf{T} + e_2\mathbf{T}^2$, где коэффициенты e_0, e_1, e_2 суть функции инвариантов I_1, I_2, I_3.

Оказывается, что любую изотропную функцию $\mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{T})$ можно представить в виде квадратичного полинома. Пусть сначала главные значения T_α тензора $\mathbf{T}$ различны, а функция $f(z)$ есть аналитическая в точках $z = T_\alpha$. Возьмём квадратичный полином $P(z) = k_0 + k_1z + k_2z^2$, принимающий в точках $z = T_\alpha$ значения $f(T_\alpha)$. Он имеет вид (1.4.37)

$$P(z) = \frac{(z-T_2)(z-T_3)}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}f(T_1) + \frac{(z-T_3)(z-T_1)}{(T_2-T_3)(T_2-T_1)}f(T_2) + \frac{(z-T_1)(z-T_2)}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}f(T_3). \quad (1.4.39)$$

Функция $g(z) = f(z) - P(z)$ в точках $z = T_\alpha$ обращается в ноль, значит, $g(z) = (z-T_1)(z-T_2)(z-T_3)g_1(z) = \Delta(z)g_1(z)$, где $\Delta(z)$ — характеристический полином (1.4.19), поэтому $f(z) = P(z) + \Delta(z)g_1(z)$. Аналитической функции $f(z)$ соответствует тензорная функция $\mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{T})$ и, в силу тождества (1.4.38), $\mathbf{H} = \mathbf{P}(\mathbf{T}) + \Delta(\mathbf{T})g_1(\mathbf{T}) = \mathbf{P}(\mathbf{T})$, или

$$\mathbf{H} = k_0\mathbf{G} + k_1\mathbf{T} + k_2\mathbf{T}^2 \quad (1.4.40)$$

— формула Лагранжа–Сильверста.

Согласно (1.4.37) тензорная функция $\mathbf{F}(\mathbf{T})$ имеет конкретное представление

$$\mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{T}) = \frac{(\mathbf{T}-T_2\mathbf{G})\cdot(\mathbf{T}-T_3\mathbf{G})}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)}f(T_1) + \frac{(\mathbf{T}-T_3\mathbf{G})\cdot(\mathbf{T}-T_1\mathbf{G})}{(T_2-T_3)(T_2-T_1)}f(T_2) + \frac{(\mathbf{T}-T_1\mathbf{G})\cdot(\mathbf{T}-T_2\mathbf{G})}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}f(T_3). \quad (1.4.41)$$

Сравнение формул (1.4.40), (1.4.41) показывает, что

$$k_0 = -\frac{T_2T_3(T_2-T_3)f(T_1)+T_3T_1(T_3-T_1)f(T_2)+T_1T_2(T_1-T_2)f(T_3)}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)(T_3-T_1)},$$

$$k_1 = \frac{(T_2^2-T_3^2)f(T_1)+(T_3^2-T_1^2)f(T_2)+(T_1^2-T_2^2)f(T_3)}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)(T_3-T_1)}, \qquad (1.4.42)$$

$$k_2 = -\frac{(T_2-T_3)f(T_1)+(T_3-T_1)f(T_2)+(T_1-T_2)f(T_3)}{(T_1-T_2)(T_2-T_3)(T_3-T_1)}.$$

На случай равных главных значений T_α формула Лагранжа–Сильверста (1.4.40) обобщается с помощью предельного перехода.

Приведём пример представления изотропной тензорной функции в виде квадратичного трёхчлена. Компоненты обратного тензора $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^{-1}$ определяются равенствами (1.4.14):

$$Q^{\sigma}{}_{\beta} = \frac{t^{\alpha}{}_{\beta}}{|T^{l}{}_{m}|} = \frac{1}{2|T^{l}{}_{m}|}\,\delta^{\alpha\mu\nu}{}_{\beta\sigma\tau}T^{\sigma}{}_{\mu}T^{\tau}{}_{\nu},$$

значит, $\mathbf{Q}$ является изотропной функцией тензора $\mathbf{T}$, именно, $\mathbf{Q} = \mathbf{F}(\mathbf{T})$. Из тождества Гамильтона–Кели (1.4.38) получим

$$\mathbf{T}\cdot\frac{1}{I_3}\left(\mathbf{T}^2 - I_1\mathbf{T} + I_2\mathbf{G}\right) = \mathbf{G},$$

откуда и следует искомое представление

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^{-1} = \frac{I_2}{I_3}\,\mathbf{G} - \frac{I_1}{I_3}\,\mathbf{T} + \frac{1}{I_3}\,\mathbf{T}^2, \qquad (1.4.43)$$

причём коэффициенты k_0, k_1, k_2 имеют вид

$$k_0 = \frac{I_2}{I_3}, \quad k_1 = -\frac{I_1}{I_3}, \quad k_2 = \frac{1}{I_3}. \qquad (1.4.44)$$

1.5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ТЕНЗОРОВ

Векторы базисов зависят от выборов точек пространства: $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha(x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{e}^\alpha = \mathbf{e}^\alpha(x^1, x^2, x^3)$, $\alpha = 1, 2, 3$. Темп изменения этих величин при переходе от одной точки к другой характеризуется производными по координатам. Имеем разложение

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\tau\alpha\beta}\mathbf{e}^\tau = \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\sigma, \tag{1.5.1}$$

коэффициенты которых называются *символами Кристоффеля* первого и второго рода, соответственно.

Свойства символов Кристоффеля.

1) Умножая соотношение (1.5.1) скалярно на векторы $\mathbf{e}_\gamma$ и $\mathbf{e}^\gamma$, приходим к формулам

$$\mathbf{e}_\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\tau\alpha\beta}\mathbf{e}^\tau \cdot \mathbf{e}_\gamma, \quad \mathbf{e}^\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}^\gamma,$$

откуда

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \mathbf{e}_\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \mathbf{e}^\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{1.5.2}$$

где использованы *соотношения взаимности* $\mathbf{e}^\tau \cdot \mathbf{e}_\gamma = \delta^\tau{}_\gamma$, $\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}^\gamma = \delta_\sigma{}^\gamma$.

2) Поскольку

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \mathbf{e}_\gamma \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \quad \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \mathbf{e}^\gamma \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta},$$

то символы Кристоффеля симметричны по двум последним символам

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} = \Gamma_{\gamma\beta\alpha}, \quad \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}. \tag{1.5.3}$$

3) Имеют место связи между символами:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma\alpha\beta} &= g_{\gamma\omega}\mathbf{e}^\omega \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = g_{\gamma\omega}\Gamma^\omega{}_{\alpha\beta}, \\ \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} &= g^{\gamma\omega}\mathbf{e}_\omega \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = g^{\gamma\omega}\Gamma_{\omega\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

т. е. у символов Кристоффеля можно поднимать и опускать индексы по обычному правилу.

4) Оказывается, что эти символы выражаются через компоненты метрического тензора. Продифференцируем равенство $\mathbf{e}_\gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha = g_{\gamma\alpha}$ по координатам x^β, получим

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta}\,. \tag{1.5.5}$$

Циклической перестановкой индексов $\alpha\beta\gamma$ выводим из (1.5.5) равенства

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\,; \tag{1.5.6}$$

$$\Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\gamma\beta\alpha} = \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}\,. \tag{1.5.7}$$

Складывая (1.5.6), (1.5.7) и вычитая из полученной суммы равенство (1.5.5), приходим к искомой формуле (использовано свойство симметрии (1.5.3))

$$\Gamma_{\beta\gamma\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta}\right). \tag{1.5.8}$$

Символы Кристоффеля второго рода в силу равенств (1.5.4) имеют вид

$$\Gamma^\beta_{\ \gamma\alpha} = \frac{1}{2}\,g^{\beta\omega}\left(\frac{\partial g_{\omega\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\omega\alpha}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^\omega}\right). \tag{1.5.9}$$

5) Для производных по координатам от элементов контрвариантного базиса имеем представления

$$\frac{\partial \mathbf{e}^\alpha}{\partial x^\beta} = G^\alpha_{\ \beta\sigma}\mathbf{e}^\sigma = G^{\alpha\ \ \tau}_{\ \beta}\mathbf{e}_\tau, \tag{1.5.10}$$

откуда, пользуясь равенствами (1.1.20),

$$G^\alpha_{\ \beta\gamma} = \frac{\partial \mathbf{e}^\alpha}{\partial x^\beta}\cdot\mathbf{e}_\gamma, \quad G^{\alpha\ \ \gamma}_{\ \beta} = \frac{\partial \mathbf{e}^\alpha}{\partial x^\beta}\cdot\mathbf{e}^\gamma. \tag{1.5.11}$$

Левые части в (1.5.11) можно выразить через символы Кристоффеля:

$$G^\alpha_{\ \beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\mathbf{e}^\alpha\cdot\mathbf{e}_\gamma\right) - \mathbf{e}^\alpha\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\gamma}{\partial x^\beta} = -\Gamma^\alpha_{\ \gamma\beta} = -\Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma}; \tag{1.5.12}$$

$$G^{\alpha}_{\beta}{}^{\gamma} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} g^{\sigma\gamma}, \tag{1.5.13}$$

и формулы (1.5.10) перепишутся так:

$$\frac{\partial \mathbf{e}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\mathbf{e}^{\gamma} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} g^{\sigma\gamma}\mathbf{e}_{\gamma}. \tag{1.5.14}$$

Существует связь символов Кристоффеля с величиной $\sqrt{g} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Дифференцируя последнее равенство по координатам и используя формулы (1.5.2), найдём

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\sigma\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\sqrt{g})}{\partial x^{\alpha}}\,. \tag{1.5.15}$$

Последнее соотношение часто используется при различных тензорных преобразованиях.

В новой системе координат $\widehat{K}(\xi^{\sigma})$ символы Кристоффеля имеют вид

$$\widehat{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv \widehat{\mathbf{e}}^{\lambda}\cdot\frac{\partial\widehat{\mathbf{e}}_{\mu}}{\partial \xi^{\nu}} = \left(\mathbf{e}^{\alpha}\frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \xi^{\nu}}\left(\mathbf{e}_{\beta}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu}}\right) =$$

$$= \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \xi^{\mu}\partial \xi^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu}}\,\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \xi^{\nu}}\right). \tag{1.5.16}$$

Точно так же

$$\widehat{\Gamma}_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{\lambda}}\left(g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu}\partial \xi^{\nu}} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{\mu}}\,\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \xi^{\nu}}\right). \tag{1.5.17}$$

Видно, что законы преобразования (1.5.16), (1.5.17) не тензорные и символы Кристоффеля тензора не образуют. Тензорами оно являются только при линейном преобразовании координат $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$.

Упражнение. Доказать, что в ортогональной системе координат имеют место равенства

$$\begin{gathered}
\Gamma_{\beta\gamma\alpha} = 0 \quad (\beta \neq \gamma \neq \alpha \neq \beta), \\
\Gamma_{\beta\alpha\alpha} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}} \quad (\alpha \neq \beta), \\
\Gamma_{\beta\beta\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}}\,, \quad \Gamma_{\beta\beta\beta} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\beta}}\,;
\end{gathered} \tag{1.5.18}$$

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{\beta}_{\ \gamma\alpha} = 0(\beta \neq \gamma \neq \alpha \neq \beta), \\
&\Gamma^{\beta}_{\ \alpha\alpha} = -\frac{1}{2g_{\beta\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}} = -\frac{H_\alpha}{H_\beta^2}\frac{\partial H_\alpha}{\partial x^{\beta}} \quad (\alpha \neq \beta), \\
&\Gamma^{\beta}_{\ \alpha\beta} = \frac{1}{2g_{\beta\beta}}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{H_\beta}\frac{\partial H_\beta}{\partial x^{\alpha}},
\end{aligned} \tag{1.5.19}$$

где в последнем равенстве нет суммирования по β, H_α — коэффициенты Ламе: $H_\alpha^2 = g_{\alpha\alpha}$.

Если система координат декартова, то $g_{\alpha\beta} = \text{const}$ и из (1.5.18), (1.5.19) следует равенство нулю всех символов Кристоффеля. В криволинейной системе координат они все в ноль не обращаются. Данный факт и отражает нетензорную природу этих объектов. Для тензора из равенства нулю всех компонент в одной системе координат следует их равенство нулю в любой другой системе координат.

Пусть $\varphi = \varphi(x^1, x^2, x^3)$ — скалярная однозначная дифференцируемая функция своих координат в некоторой области трёхмерного пространства. Возьмём две близкие точки $M(x^\alpha)$ и $M'(x^\alpha + dx^\alpha)$, тогда при переходе от M к M' скаляр φ получает приращение $d\varphi = dx^\alpha\, \partial\varphi/\partial x^\alpha$. Здесь левая часть — скаляр, а правая — скалярное произведение объекта первого ранга $\partial\varphi/\partial x^\alpha$ на dx^α — произвольный вектор (точка M' произвольная). По теореме деления тензоров $\mathbf{e}^\alpha\, \partial\varphi/\partial x^\alpha$ есть вектор — скалярный градиент. Для него употребляют обозначения

$$\nabla\varphi \equiv \operatorname{grad}\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\,\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\,\mathbf{e}^\beta.$$

Компоненты скалярного градиента есть

$$\nabla_\alpha\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}, \quad \nabla^\beta\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}.$$

Так как $dx^\alpha = g^{\alpha\beta}dx_\beta$, $dx_\beta = g_{\beta\alpha}dx^\alpha$, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\,g^{\alpha\beta}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\,g_{\beta\alpha}. \tag{1.5.20}$$

Квадрат модуля скалярного градиента есть инвариант и

$$|\nabla\varphi|^2 = g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta} = g_{\sigma\tau}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}. \tag{1.5.21}$$

Итак, изменение скаляра в окрестности данной точки M характеризуется вектором — скалярным градиентом.

Если некоторый вектор **a** есть градиент скаляра, то его называют *потенциальным вектором*, а скаляр — *потенциалом*.

Пусть $\varphi(x^1, x^2, x^3) = \mathrm{const}$ есть поверхность уровня, тогда скалярный градиент направлен по нормали к этой поверхности, поскольку $d\varphi = dx^\alpha\, \partial\varphi/\partial x^\alpha = 0$.

Рассмотрим теперь однозначную дифференцируемую вектор-функцию $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x^1, x^2, x^3)$; её ещё называют *векторным полем*. Приращение вектора при переходе из точки M в точку M' даётся выражением

$$d\mathbf{a} = dx^\alpha \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^\alpha} = dx_\alpha \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_\alpha}\,, \tag{1.5.22}$$

отсюда по теореме деления тензоров заключаем, что объект $\mathbf{e}^\alpha\, \partial\mathbf{a}/\partial x^\alpha$ есть тензор 2-го ранга. Его называют *векторным градиентом* и обозначают символами

$$\nabla\mathbf{a} \equiv \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{e}^\alpha \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^\alpha} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_\alpha}\,. \tag{1.5.23}$$

Таким образом, изменение вектора в окрестности точки характеризуется тензором 2-го ранга — векторным градиентом.

Используя формулы (1.5.1), найдём

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\,(a^\sigma \mathbf{e}_\sigma) =$$
$$= \left(\frac{\partial a^\beta}{\partial x^\alpha} + a^\sigma \Gamma^\beta{}_{\sigma\alpha}\right) \mathbf{e}_\beta \equiv \nabla_\alpha a^\beta \mathbf{e}_\beta, \tag{1.5.24}$$

т. е.

$$\nabla\mathbf{a} = \nabla_\alpha a^\beta \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}_\beta\,. \tag{1.5.25}$$

Величины

$$\nabla_\alpha a^\beta = \frac{\partial a^\beta}{\partial x^\alpha} + a^\sigma \Gamma^\beta{}_{\sigma\alpha} \tag{1.5.26}$$

носят название *ковариантных производных* от *контрвариантных компонент* вектора и являются компонентами тензора $\nabla\mathbf{a}$. Для декартовой системы координат ковариантная производная совпадает с обычной производной по координате $\nabla_\alpha a^\beta = \partial a^\beta / \partial x^\alpha$.

Если представить вектор $\mathbf{a}$ через его ковариантные компоненты, то получим (см. равенства (1.5.14))

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(a_\sigma \mathbf{e}^\sigma) = \nabla_\alpha a_\beta \mathbf{e}^\beta, \quad \nabla \mathbf{a} = \nabla_\alpha a_\beta \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\beta; \tag{1.5.27}$$

$$\nabla_\alpha a_\beta = \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha} - a_\sigma \Gamma^\sigma{}_{\beta\alpha}, \tag{1.5.28}$$

где последние величины называют *ковариантными производными* от *ковариантных компонент вектора*.

Используя связи (1.1.34) между компонентами dx^α и dx_β, можно получить ещё два представления векторного градиента

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^\beta} g^{\beta\alpha} = \nabla^\alpha a^\sigma \mathbf{e}_\sigma = \nabla^\alpha a_\tau \mathbf{e}^\tau, \\ \nabla \mathbf{a} = \nabla^\alpha a^\sigma \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\sigma = \nabla^\alpha a_\tau \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}^\tau, \end{gathered} \tag{1.5.29}$$

где величины

$$\nabla^\alpha a^\sigma = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta a^\sigma, \quad \nabla^\alpha a_\tau = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta a_\tau \tag{1.5.30}$$

суть *контрвариантные производные* от *контрвариантных* и *ковариантных компонент* вектора, соответственно. На формулу (1.5.30) также можно смотреть как на операцию жонглирования индексами.

Таким образом, векторный градиент имеет следующие формы (представления):

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{a} = \nabla_\alpha a_\beta \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\beta = \nabla_\alpha a^\beta \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}_\beta = \\ = \nabla^\alpha a_\beta \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}^\beta = \nabla^\alpha a^\beta \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta. \end{aligned} \tag{1.5.31}$$

Если $\mathbf{a}$ — постоянное векторное поле, то $\nabla_\alpha a_\beta = 0$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Рассмотрим некоторые дифференциальные выражения. Первый инвариант векторного градиента называют *дивергенцией вектора*:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv \nabla_\alpha a^\alpha = \frac{\partial a^\alpha}{\partial x^\alpha} + a^\sigma \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (a^\alpha \sqrt{g})}{\partial x^\alpha}, \tag{1.5.32}$$

где использовано равенство (1.5.15).

В ортогональной системе координат, полагая $a^*_\alpha = H_\alpha a^\alpha$ и учитывая равенство $g^2 = H_1 H_2 H_3$, получим из (1.5.32)

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial(H_2 H_3 a^*_1)}{\partial x^1} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial(H_1 H_3 a^*_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(H_1 H_2 a^*_3)}{\partial x^3}\right]. \qquad (1.5.33)$$

Для декартовой системы координат y^1, y^2, y^3 $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, $a^*_\alpha = a^\alpha = a_\alpha$, и формула (1.5.33) упрощается:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial y^1} + \frac{\partial a_2}{\partial y^2} + \frac{\partial a_3}{\partial y^3}\,.$$

Векторное поле, в каждой точке которого дивергенция вектора равна нулю, называется *соленоидальным полем* (вектором).

Введём ещё один вектор $\boldsymbol{\omega}$ по формуле

$$\omega^\alpha = e^{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta a_\gamma. \qquad (1.5.34)$$

Он называется *вихрем векторного поля* и обозначается так: $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{a}$. Контрвариантные компоненты вихря имеют вид

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \sqrt{g_1}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right), \\ \omega^2 &= \sqrt{g_1}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right), \qquad (1.5.35) \\ \omega^3 &= \sqrt{g_1}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right), \end{aligned}$$

поскольку члены с символами Кристоффеля взаимно уничтожаются. В ортогональной системе координат $g_1^2 = (H_1 H_2 H_3)^{-1}$ и, вводя физические компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$: $\omega^*_\alpha = H_\alpha \omega^\alpha$,

$a^*_\alpha = a_\alpha/H_\alpha$, будем иметь

$$
\begin{aligned}
\omega^*_1 &= \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(H_3a^*_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial(H_2a^*_2)}{\partial x^3}\right],\\
\omega^*_2 &= \frac{1}{H_1H_3}\left[\frac{\partial(H_1a^*_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial(H_3a^*_3)}{\partial x^1}\right],\\
\omega^*_3 &= \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(H_2a^*_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(H_1a^*_1)}{\partial x^2}\right].
\end{aligned}
\tag{1.5.36}
$$

Для прямоугольной декартовой системы координат компоненты вихря равны

$$
\omega_1 = \frac{\partial a_3}{\partial y^2} - \frac{\partial a_2}{\partial y^3}, \quad \omega_2 = \frac{\partial a_1}{\partial y^3} - \frac{\partial a_3}{\partial y^1},
\quad
\omega_3 = \frac{\partial a_2}{\partial y^1} - \frac{\partial a_1}{\partial y^2}.
\tag{1.5.37}
$$

Векторное поле, вихрь которого равен нулю в некоторой области, называется *безвихревым*. Если область односвязна, то векторное поле является безвихревым тогда и только тогда, когда оно потенциально.

Пусть векторное поле $\mathbf{a} = \nabla\varphi$. Его дивергенция $\operatorname{div}\mathbf{a} = \operatorname{div}\nabla\varphi = \nabla_\alpha\nabla^\alpha\varphi$ обозначается специальным символом $\Delta\varphi \equiv \nabla_\alpha\nabla^\alpha\varphi$ и называется оператором Лапласа. Из (1.5.32) следует формула

$$
\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\,\nabla^\alpha\varphi)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta}\right),
\tag{1.5.38}
$$

пригодная для использования в произвольной системе координат. В ортогональной системе координат

$$
\Delta\varphi = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)\right],
\tag{1.5.39}
$$

в частности, в декартовой системе оператор Лапласа имеет простое выражение

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{(\partial y^1)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial y^2)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial y^3)^2}\,. \tag{1.5.40}$$

Перейдём к рассмотрению тензорных полей. В произвольной системе координат функциями точки области будут как компоненты тензора, так и элементы полиад

$$T^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = T^{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x^1, x^2, x^3), \quad \mathbf{e}_{\alpha_j} = \mathbf{e}_{\alpha_j}(x^1, x^2, x^3).$$

Замечание 1.5. На самом деле тензор может зависеть и от некоторых дополнительных параметров.

Изучим вначале изменение тензора второго ранга $\mathbf{T} = T^{\alpha}_{\beta}\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^\beta$ в окрестности произвольной точки M. Его приращение при переходе от точки M к близлежащей точке M' есть

$$d\mathbf{T} = dx^\alpha\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial x^\alpha} = dx_\alpha\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial x_\alpha}\,. \tag{1.5.41}$$

По теореме деления тензоров объект $\mathbf{e}^\alpha\partial\mathbf{T}/\partial x^\alpha$ есть тензор 3-го ранга, называемый *тензорным градиентом* и обозначаемый символами

$$\nabla\mathbf{T} \equiv \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\mathbf{r}} = \mathbf{e}^\alpha\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial x^\alpha} = \mathbf{e}_\alpha\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial x_\alpha}\,. \tag{1.5.42}$$

Этот градиент и определяет поведение тензора 2-го ранга $\mathbf{T}$ в окрестности точки M.

Получим, используя формулы (1.5.1), (1.5.14),

$$\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(T^{\beta}{}_{\gamma}\mathbf{e}_\beta\mathbf{e}^\gamma\right) = \frac{\partial T^{\beta}_{\gamma}}{\partial x^\alpha}\,\mathbf{e}_\beta\mathbf{e}^\gamma +$$
$$+ T^{\beta}_{\gamma}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\alpha}\mathbf{e}_\sigma\mathbf{e}^\gamma - T^{\beta}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\sigma}\mathbf{e}_\beta\mathbf{e}^\sigma \equiv \nabla_\alpha T^{\beta}_{\gamma}\mathbf{e}_\beta\mathbf{e}^\gamma, \tag{1.5.43}$$

где

$$\nabla_\alpha T^{\beta}_{\gamma} = \frac{\partial T^{\beta}_{\gamma}}{\partial x^\alpha} + T^{\sigma}_{\gamma}\Gamma^{\beta}{}_{\sigma\alpha} - T^{\beta}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}{}_{\gamma\alpha}, \tag{1.5.44}$$

значит,

$$\nabla \mathbf{T} = \nabla_\alpha T^{\beta}_{\ \gamma} \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}^\gamma. \tag{1.5.45}$$

Величины (1.5.44) суть компоненты тензорного градиента, они называются *ковариантными производными от смешанных компонент тензора* $\mathbf{T}$. В декартовой системе координат ковариантные производные совпадают с обычными: $\nabla_\alpha T^{\beta}_{\ \gamma} = \partial T^{\beta}_{\ \gamma}/\partial x^\alpha$, так как $\Gamma^{\beta}_{\ \sigma\alpha} = 0$, $\Gamma^{\sigma}_{\ \gamma\alpha} = 0$.

Для другого представления тензора, например через контрвариантные компоненты, $\mathbf{T} = T^{\beta\gamma}\mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\gamma$, имеем

$$\nabla \mathbf{T} = \nabla_\alpha T^{\beta\gamma} \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\gamma,$$

где величины

$$\nabla_\alpha T^{\beta\gamma} = \frac{\partial T^{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + T^{\sigma\gamma}\Gamma^{\beta}_{\ \sigma\alpha} + T^{\beta\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\ \sigma\alpha} \tag{1.5.46}$$

называются *ковариантными производными от контрвариантных компонент тензора* $\mathbf{T}$.

Используя второе равенство (1.5.42), находим

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x_\alpha} = \nabla^\alpha T^{\sigma}_{\ \tau}\mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}^\tau,$$
$$\nabla^\alpha T^{\sigma}_{\ \tau} = g^{\alpha\beta}\nabla_\beta T^{\sigma}_{\ \tau}, \quad \nabla \mathbf{T} = \nabla^\alpha T^{\sigma}_{\ \tau}\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}^\tau. \tag{1.5.47}$$

Величины $\nabla^\alpha T^{\sigma}_{\ \tau}$ называются *контрвариантными производными тензора* $\mathbf{T}$ и выражаются через ковариантные производные с помощью операции поднятия индекса.

Аналогично могут быть получены и другие производные.

Установленные выше правила дифференцирования очевидным образом обобщаются на случай тензора ранга $n > 2$. При этом тензорный градиент есть тензор порядка $n + 1$.

Упражнение. Доказать, что для метрического и дискриминантного тензоров имеют место равенства

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0, \quad \nabla_\sigma e_{\alpha\beta\gamma} = 0. \tag{1.5.48}$$

Нетрудно убедиться, что аналогичными свойствами обладают компоненты тензоров $\mathbf{G}$ и $\mathbf{E}$ с иными строениями индексов. Другими словами, поля этих тензоров однородные, следовательно, их компоненты можно вносить и выносить за знак производной.

Введённое выше ковариантное дифференцирование обладает некоторыми свойствами обычного дифференцирования:

а) ковариантная производная суммы двух тензоров равна сумме их ковариантных производных;

б) ковариантная производная индефинитного произведения двух тензоров подчиняется обычному правилу дифференцирования произведения:

$$\nabla_\sigma(a^\alpha b^\beta) = (\nabla_\sigma a^\alpha)b^\beta + a^\alpha(\nabla_\sigma b^\beta); \tag{1.5.49}$$

в) операции ковариантного дифференцирования и свёртывания переместительны: если, например, вычислить $\nabla_\alpha T^\lambda_{\ \mu\nu}$ и свернуть по λ и μ, или сначала свернуть $T^\lambda_{\ \mu\nu}$ по λ и μ, а затем вычислить $\nabla_\alpha T^\lambda_{\ \mu\nu}$, то результат будет одинаковым;

г) умножение формулы (1.5.49) сначала на $g_{\alpha\beta}$, а затем на $e_{\alpha\beta\gamma}$ и суммирование по индексам α, β даёт равенства (учтены свойства (1.5.48))

$$\nabla_\sigma(g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta) = g_{\alpha\beta}(\nabla_\sigma a^\alpha)b^\beta + g_{\alpha\beta}a^\alpha(\nabla_\sigma b^\beta),$$

$$\nabla_\sigma(e_{\alpha\beta\gamma}a^\alpha b^\beta) = e_{\alpha\beta\gamma}(\nabla_\sigma a^\alpha)b^\beta - e_{\beta\alpha\gamma}a^\alpha(\nabla_\sigma b^\beta),$$

или в инвариантной форме

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) &= (\nabla\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} + (\nabla\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}, \\ \nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= (\nabla\mathbf{a})\times\mathbf{b} - (\nabla\mathbf{b})\times\mathbf{a}. \end{aligned} \tag{1.5.50}$$

Пусть $T^{\alpha\beta}$ — тензор второго ранга, а $\nabla_\gamma T^{\alpha\beta}$ — тензорный градиент. Его свёртки

$$t^\alpha = \nabla_\beta T^{\alpha\beta}, \quad t'^\alpha = \nabla_\beta T^{\beta\alpha} \tag{1.5.51}$$

называются *дивергенциями* тензора $\mathbf{T}$ соответственно первого и второго рода. Они являются векторами. Пользуясь формулой (1.5.46), получим выражения

$$\begin{aligned} t^\alpha = \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + T^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\ \sigma\beta} + T^{\alpha\sigma}\Gamma^\beta_{\ \sigma\beta} = \\ = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\sqrt{g}\,T^{\alpha\beta})}{\partial x^\beta} + T^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\ \sigma\beta}, \end{aligned} \tag{1.5.52}$$

$$t'^{\alpha} = \frac{\partial T^{\beta\alpha}}{\partial x^{\beta}} + T^{\sigma\alpha}\Gamma^{\beta}_{\ \sigma\beta} + T^{\beta\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\ \sigma\beta} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\sqrt{g}\,T^{\beta\alpha})}{\partial x^{\beta}} + T^{\beta\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\ \sigma\beta}. \qquad (1.5.53)$$

Если тензор **T** симметричен, то $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ и из (1.5.51) следует совпадение дивергенций первого и второго рода, и такому тензору соответствует только одна дивергенция. Используя симметрию **T** и свойства символов Кристоффеля, получим

$$t_{\alpha} = \nabla_{\beta} T_{\alpha}^{\ \beta} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\sqrt{g}\,T_{\alpha}^{\ \beta})}{\partial x^{\beta}} - T^{\sigma\beta}\Gamma_{\sigma\alpha\beta} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\sqrt{g}\,T_{\alpha}^{\ \beta})}{\partial x^{\beta}} - \frac{1}{2}\,T^{\sigma\beta}\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}}\,; \qquad (1.5.54)$$

д) для ортогональной системы координат $\sqrt{g} = H_1 H_2 H_3$,

$$\frac{1}{2}\,T^{\sigma\beta}\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{2}\,T^{\beta\beta}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}} = T^{\beta\beta}H_{\beta}\frac{\partial H_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} =$$
$$= T_{\beta}^{\ \beta}\frac{1}{H_{\beta}}\,\frac{\partial H_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = T_{\beta}^{\ \beta}\frac{\partial \ln H_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\,,$$

и формула (1.5.54) упрощается:

$$t_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\sqrt{g}\,T_{\alpha}^{\ \beta})}{\partial x^{\beta}} - \sum_{\beta=1}^{3} T_{\beta}^{\ \beta}\frac{\partial \ln H_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\,. \qquad (1.5.55)$$

Вводя физические компоненты $\overset{*}{T}{}_{\alpha}^{\ \beta} = H_{\beta}H_{\alpha}^{-1}T_{\alpha}^{\ \beta}$, будем иметь

$$t_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{3}\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{H_{\alpha}}{H_{\beta}}\sqrt{g}\ \overset{*}{T}{}_{\alpha}^{\ \beta}\right) - \overset{*}{T}{}_{\beta}^{\ \beta}\,\frac{\partial \ln H_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right], \qquad (1.5.56)$$

отсюда для декартовой системы координат

$$t_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T_{\alpha}^{\ \beta}}{\partial y^{\beta}} = \frac{\partial T_{\alpha}^{\ 1}}{\partial y^{1}} + \frac{\partial T_{\alpha}^{\ 2}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial T_{\alpha}^{\ 3}}{\partial y^{3}}\,. \qquad (1.5.57)$$

Если тензор 2-го ранга является шаровым: $\mathbf{T} = \varphi\mathbf{G}$, то $T_\alpha^{\ \beta} = \varphi\delta_\alpha^{\ \beta}$, где φ — скаляр и

$$t_\alpha = \nabla_\beta T_\alpha^{\ \beta} = \nabla_\beta(\varphi\delta_\alpha^{\ \beta}) = \nabla_\alpha\varphi, \quad \mathbf{t} = \nabla\varphi, \tag{1.5.58}$$

т. е. дивергенция шарового тензора равна градиенту скаляра φ.

Возьмём теперь в качестве тензора 2-го ранга векторный градиент гладкого поля $\mathbf{a}$: $\mathbf{T} = \nabla\mathbf{a} = \nabla^\alpha a^\beta \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta$. Ему соответствуют векторы $\mathbf{T}^\beta = \nabla^\alpha a^\beta \mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{T}'^\beta = \nabla^\beta a^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \nabla^\beta \mathbf{a}$. Согласно формулам (1.5.52), (1.5.53) инвариантный вид дивергенций 1-го и 2-го рода таков:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &\equiv \operatorname{div}\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\sqrt{g}\,\mathbf{T}^\beta)}{\partial x^\beta}, \quad \mathbf{T}^\beta = T^{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha, \\ \mathbf{t}' &\equiv \operatorname{div}'\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\sqrt{g}\,\mathbf{T}'^\beta)}{\partial x^\beta}, \quad \mathbf{T}'^\beta = T^{\beta\alpha}\mathbf{e}_\alpha. \end{aligned} \tag{1.5.59}$$

Для рассматриваемого случая дивергенция 2-го рода тензора $\nabla\mathbf{a}$ имеет специальную структуру и обозначается через

$$\Delta\mathbf{a} = \mathbf{t}' = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\sqrt{g}\,\nabla^\beta\mathbf{a})}{\partial x^\beta}\,. \tag{1.5.60}$$

Она носит название оператора Лапласа от вектора и является также вектором. Компоненты этого вектора имеют вид (см. (1.5.53))

$$\Delta\mathbf{a}^\alpha = \mathbf{t}'^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial(\sqrt{g}\,\nabla^\beta a^\alpha)}{\partial x^\beta} + \sqrt{g}\,\nabla^\beta a^\sigma \Gamma^\alpha_{\sigma\beta}\right] \tag{1.5.61}$$

и для декартовой системы координат

$$\Delta\mathbf{a}^\alpha = \frac{\partial^2 a^\alpha}{(\partial y^1)^2} + \frac{\partial^2 a^\alpha}{(\partial y^2)^2} + \frac{\partial^2 a^\alpha}{(\partial y^3)^2}\,. \tag{1.5.62}$$

Подобно тому, как вводились потенциальные векторы, можно ввести и потенциальные тензоры. Рассмотрим скалярную функцию тензорного аргумента $f = f(\mathbf{T})$, где $\mathbf{T}$ —

тензор 2-го ранга. Её приращение при переходе от точки M к близлежащей точке M' есть

$$df = dT^{\alpha}_{\ \beta}\frac{\partial f}{\partial T^{\alpha}_{\ \beta}}\,.$$

Поскольку $dT^{\alpha}_{\ \beta} = dx^{\sigma}\nabla_{\sigma}T^{\alpha}_{\ \beta}$, то

$$df = dx^{\sigma}\nabla_{\sigma}T^{\alpha}_{\ \beta}\frac{\partial f}{\partial T^{\alpha}_{\ \beta}}\,. \tag{1.5.63}$$

По теореме деления тензоров объект $\partial f/\partial T^{\alpha}_{\ \beta}$ есть тензор второго ранга, называемый *тензорным градиентом скаляра*. Его обозначают так:

$$H^{\beta}_{\ \alpha} = \frac{\partial f}{\partial T^{\alpha}_{\ \beta}}\,, \quad \mathbf{H} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \tag{1.5.64}$$

и тензор $\mathbf{H}$ называют *потенциальным тензором*, а f — *скалярным потенциалом*.

Соотношение (1.5.63) является тензорным. В системе координат $\widehat{K}(\xi^{\sigma})$ оно имеет тот же вид $df = d\xi^{\tau}\widehat{\nabla}_{\tau}\widehat{T}^{\lambda}_{\ \mu}\partial f/\partial\widehat{T}^{\lambda}_{\ \mu}$, т. е.

$$\widehat{H}^{\mu}_{\ \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \widehat{T}^{\lambda}_{\ \mu}}\,.$$

Если воспользоваться очевидными формулами

$$T^{\lambda\mu} = \delta^{\lambda}_{\ \alpha}T^{\alpha}_{\ \sigma}g^{\sigma\mu}, \quad \frac{\partial T^{\lambda\mu}}{\partial T^{\alpha}_{\ \sigma}} = \delta^{\lambda}_{\ \alpha}g^{\sigma\mu}, \quad g_{\beta\sigma}g^{\sigma\mu} = \delta_{\beta}^{\ \mu},$$

то легко получить выражения для других компонент потенциального тензора

$$H_{\beta\alpha} = \frac{\partial f}{\partial T^{\alpha\beta}}\,, \quad H^{\beta\alpha} = \frac{\partial f}{\partial T_{\alpha\beta}}\,, \quad H_{\beta}^{\ \alpha} = \frac{\partial f}{\partial T_{\alpha}^{\ \beta}}\,. \tag{1.5.65}$$

Видим, что операции поднятия и опускания индексов применимы и к потенциальным тензорам.

Пусть теперь тензор 2-го ранга $\mathbf{H}$ есть изотропная тензорная функция тензора 2-го ранга $\mathbf{T}$: $\mathbf{H} = \mathbf{F}(\mathbf{T})$. Справедлива

Теорема 1.3. *Для потенциальности тензора* $\boldsymbol{H}$ *необходимо и достаточно выполнения следующих равенств*:

$$\frac{\partial H_{\beta\alpha}}{\partial T^{\lambda\mu}} = \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial T^{\alpha\beta}}\,. \tag{1.5.66}$$

Доказательство очевидно, так как последние соотношения являются условиями интегрируемости линейной дифференциальной формы $H_{\beta\alpha}dT^{\alpha\beta}$.

Упражнения. Пусть скалярный потенциал f зависит от тензора 2-го ранга $\mathbf{T}$ только через его основные инварианты: $f = f(I_1, I_2, I_3)$.

1. Доказать, что

$$H^{\beta}_{\ \alpha} = \frac{\partial f}{\partial I_\sigma}\,\frac{\partial I_\sigma}{\partial T^{\alpha}_{\ \beta}}\,.$$

2. Используя формулы (1.4.21)

$$I_1 = J_1, \quad I_2 = \frac{1}{2}\,({J_1}^2 - J_2), \quad I_3 = \frac{1}{6}\,({J_1}^3 - 3J_1J_2 + 2J_3),$$

$$J_1 = T^{\sigma}_{\ \tau}\delta^{\tau}_{\ \sigma}, \quad J_2 = T^{\sigma}_{\ \tau}T^{\tau}_{\ \sigma}, \quad J_3 = T^{\sigma}_{\ \tau}T^{\tau}_{\ \omega}T^{\omega}_{\ \sigma},$$

установить равенство

$$H^{\beta}_{\ \alpha} = \left(\frac{\partial f}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial f}{\partial I_2} + I_2\frac{\partial f}{\partial I_3}\right)\delta^{\beta}_{\ \alpha} - \\ - \left(\frac{\partial f}{\partial I_2} + I_1\frac{\partial f}{\partial I_3}\right)T^{\beta}_{\ \alpha} + \frac{\partial f}{\partial I_3}\,T^{\beta}_{\ \sigma}T^{\sigma}_{\ \alpha}, \tag{1.5.67}$$

т. е. формулу Лагранжа–Сильверста (1.4.40), где

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{\partial f}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial f}{\partial I_2} + I_2\frac{\partial f}{\partial I_3}\,, \\ k_1 &= -\frac{\partial f}{\partial I_2} - I_1\frac{\partial f}{\partial I_3}\,, \quad k_2 = \frac{\partial f}{\partial I_3}\,. \end{aligned} \tag{1.5.68}$$

В частности, если $f = f(I_1)$, то тензор $\mathbf{H}$ является шаровым: $\mathbf{H} = (\partial f/\partial I_1)\mathbf{G}$.

1.6. ТЕНЗОР РИМАНА И ЕГО СВОЙСТВА

Введём в трёхмерном пространстве метрику с помощью положительно определённой квадратичной формы

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{1.6.1}$$

Если $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, то такое пространство называют римановым. Риманово пространство называют евклидовым, если во всём пространстве можно ввести одну и ту же декартову систему координат.

Теорема 1.4. *Система координат будет декартовой тогда и только тогда, когда все символы Кристоффеля равны нулю.*

Доказательство следует из формул (1.5.8) и равенства

$$\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - g_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma} = 0.$$

Установим теперь условия, при которых риманово пространство будет евклидовым. Пусть $K(x^\sigma)$ — произвольная криволинейная система координат, а $\widehat{K}(\xi^\sigma)$ — декартова, так что $x^\alpha = x^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ есть формулы перехода от системы $\widehat{K}$ к системе K. Тогда

$$\widehat{\Gamma}^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^{æ}} \left(\frac{\partial^2 x^{æ}}{\partial \xi^\mu \partial \xi^\nu} + \Gamma^{æ}{}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\nu} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 x^{æ}}{\partial \xi^\mu \partial \xi^\nu} + \Gamma^{æ}{}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\nu} = 0. \tag{1.6.2}$$

Соотношения (1.6.2) есть система из 27 дифференциальных уравнений для определения трёх функций $x^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$. Для получения условий её совместности продифференцируем уравнения (1.6.2) по ξ^λ и исключим вторые производные в новой системе по формулам (1.6.2). В результате получим систему уравнений

$$\frac{\partial^3 x^{æ}}{\partial\xi^\mu\partial\xi^\nu\partial\xi^\lambda}+\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial\xi^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\lambda}\times\\ \times\left(\frac{\partial\Gamma^{æ}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}-\Gamma^{æ}{}_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma}-\Gamma^{æ}{}_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma}\right)=0. \quad (1.6.3)$$

Меняя в этой системе индексы λ и ν местами, индекс суммирования β на γ, γ на β, получим

$$\frac{\partial^3 x^{æ}}{\partial\xi^\mu\partial\xi^\lambda\partial\xi^\nu}+\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial\xi^\lambda}\frac{\partial x^\beta}{\partial\xi^\nu}\times\\ \times\left(\frac{\partial\Gamma^{æ}{}_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}-\Gamma^{æ}{}_{\sigma\gamma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{æ}{}_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\gamma\beta}\right)=0. \quad (1.6.4)$$

Поскольку преобразование $\xi^\sigma\to x^\alpha$ предполагается невырожденным, то из (1.6.3), (1.6.4) и следуют условия совместности:

$$R_{\beta\gamma\alpha}{}^{æ}\equiv\frac{\partial\Gamma^{æ}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial\Gamma^{æ}{}_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta}+\Gamma^{æ}{}_{\sigma\gamma}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{æ}{}_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma}=0. \quad (1.6.5)$$

Значит, если $R_{\beta\gamma\alpha}{}^{æ}=0$, то система уравнений (1.6.2) совместна и её можно проинтегрировать и установить формулы перехода от произвольной системы $K(x^\sigma)$ к декартовой системе $\widehat{K}(\xi^\sigma)$. Если же $R_{\beta\gamma\alpha}{}^{æ}\neq 0$, то в пространстве нельзя ввести единую декартову систему координат и риманово пространство будет неевклидовым.

Покажем, что объект $R_{\beta\gamma\alpha}{}^{æ}$ есть тензор 4-го ранга. Возьмём произвольный гладкий вектор **a** и образуем вторые ковариантные производные от его компонент:

$$\nabla_\beta\nabla_\gamma a_\alpha=\frac{\partial(\nabla_\gamma a_\alpha)}{\partial x^\beta}-\nabla_\sigma a_\alpha\Gamma^\sigma{}_{\gamma\beta}-\nabla_\gamma a_\sigma\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta},$$

$$\nabla_\gamma\nabla_\beta a_\alpha=\frac{\partial(\nabla_\beta a_\alpha)}{\partial x^\gamma}-\nabla_\sigma a_\alpha\Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma}-\nabla_\beta a_\sigma\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma}.$$

Используя выражение (1.5.28), после простых преобразований найдём

$$\nabla_\beta\nabla_\gamma a_\alpha-\nabla_\gamma\nabla_\beta a_\alpha=R_{\beta\gamma\alpha}{}^{\tau}a_\tau. \quad (1.6.6)$$

В силу произвольности вектора **a**, по теореме деления тензоров выводим, что $R_{\beta\gamma\alpha}{}^{\tau}$ — тензор 4-го ранга. Формула (1.6.6), в частности, утверждает, что в евклидовом пространстве можно менять порядок ковариантного дифференцирования.

Для получения ковариантных компонент тензора Римана применим операцию опускания индекса в формуле (1.6.5):

$$R_{\beta\gamma\alpha\lambda} = R_{\beta\gamma\alpha}{}^{\text{æ}} g_{\text{æ}\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\lambda\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \\ - \frac{\partial \Gamma_{\lambda\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + g^{\sigma\omega}(\Gamma_{\omega\alpha\gamma}\Gamma_{\sigma\lambda\beta} - \Gamma_{\omega\alpha\beta}\Gamma_{\sigma\lambda\gamma}), \quad (1.6.7)$$

где использовано равенство (1.5.9).

Чтобы установить другие свойства тензора Римана, удобно рассматривать некоторую специальную систему координат, где он имеет наиболее простой вид. Это не может быть декартова система координат. Вводится так называемая *геодезическая система координат* ξ^{σ}, такая, что в заданной точке пространства x_0^{α}, соответствующей ξ_0^{α}, обращаются в ноль все символы $\widehat{\Gamma}^{\text{æ}}_{\ \beta\gamma}$ (но не их производные). Возьмём, например, квадратичные многочлены

$$x^{\text{æ}} = x_0^{\text{æ}} + \delta^{\text{æ}}_{\ \nu}(\xi^{\nu} - \xi_0^{\nu}) - \frac{1}{2}\ \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\text{æ}}_{\ \alpha\beta}\ (\xi^{\alpha} - \xi_0^{\alpha})(\xi^{\beta} - \xi_0^{\beta}),$$

где $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\text{æ}}_{\ \alpha\beta}$ — значения $\Gamma^{\text{æ}}_{\ \alpha\beta}$ в точке ξ_0^{σ}. Тогда

$$\left.\frac{\partial^2 x^{\text{æ}}}{\partial \xi^{\mu}\partial \xi^{\nu}}\right|_{\xi_0^{\sigma}} = -\ \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\text{æ}}_{\ \nu\mu}$$

и уравнение (1.6.2) в точке ξ_0^{σ} выполнено, и, значит, в этой точке $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\text{æ}}_{\ \nu\mu} = 0$, $\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\sigma}\ \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\sigma}_{\ \beta\gamma} = 0$. Тензор Римана для рассматриваемой точки имеет вид

$$R_{\beta\gamma\alpha\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\lambda\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\lambda\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\beta}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\right). \quad (1.6.8)$$

Из (1.6.8) выводим равенства

$$
\begin{aligned}
&R_{\gamma\beta\alpha\lambda} = -R_{\beta\gamma\alpha\lambda}, \;\; R_{\beta\gamma\lambda\alpha} = -R_{\beta\gamma\alpha\lambda},\\
&R_{\alpha\lambda\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\alpha\lambda}, \;\; R_{\beta\gamma\alpha\lambda} + R_{\gamma\alpha\beta\lambda} + R_{\alpha\beta\gamma\lambda} = 0,\\
&R_{\beta\beta\alpha\lambda} = 0, \;\; R_{\beta\gamma\alpha\alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{1.6.9}
$$

В трёхмерном пространстве тензор Римана имеет 81 компоненту, так как $\alpha, \beta, \gamma, \lambda = 1, 2, 3$.

В силу свойств симметрии (1.6.9) не все компоненты этого тензора независимы. Легко видеть, что возможны три ситуации: либо у компонент все индексы одинаковы, либо два индекса различны, либо различны три индекса. Ясно, что $R_{\alpha\alpha\alpha\alpha} = 0$, в частности, для одномерного пространства

$$\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 1 \quad \text{и} \quad R_{1111} = 0,$$

т. е. одномерное пространство всегда евклидово. Если у компонент только два различных индекса α и β, то будет независима только компонента $R_{\alpha\beta\alpha\beta}$, и в трёхмерном пространстве имеем R_{1212}, R_{2323}, R_{3131} — три независимых компоненты. Для двумерного пространства индексы принимают значения 1, 2 и отлична от нуля компонента R_{1212}. Как будет видно в дальнейшем, эта компонента связана с кривизной поверхности, отсюда происходит другое название тензора Римана $\mathbf{R}$ — тензор кривизны.

Пусть у компонент различны три индекса α, β, γ, тогда среди четырёх два индекса должны совпасть, например индексы α. Причём они должны находиться на первом и третьем местах (иначе компонента равна нулю по свойству (1.6.9)). В результате получим три ненулевых независимых компоненты R_{1213}, R_{2321}, R_{3132}. Значит, в трёхмерном римановом пространстве есть только шесть независимых ненулевых компонент

$$R_{1212}, \; R_{2323}, \; R_{3131}, \; R_{1213}, \; R_{2321}, \; R_{3132}. \tag{1.6.10}$$

Свёртка тензора $\mathbf{R}$ по первому и последнему индексам называется *тензором Эйнштейна*:

$$R_{\gamma\alpha} = g^{\beta\lambda} R_{\beta\gamma\alpha\lambda}. \tag{1.6.11}$$

Это симметричный тензор 2-го ранга, поскольку из (1.6.9)

$$R_{\alpha\gamma} = g^{\beta\lambda} R_{\beta\alpha\gamma\lambda} = g^{\lambda\beta} R_{\gamma\lambda\beta\alpha} = g^{\lambda\beta} R_{\lambda\gamma\alpha\beta} = R_{\gamma\alpha}.$$

1.7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО ПАРАМЕТРУ ТЕНЗОРОВ

Будем теперь считать, что формулы перехода от системы $K(x^\alpha)$ к системе $\widehat{K}(\xi^\sigma)$ имеют вид $x^\alpha = x^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ с некоторым скалярным параметром t. Считается, что t не зависит от системы координат (в физических задачах роль параметра t часто играет время). Также предполагается, что для любого t якобиан перехода от системы $\widehat{K}$ к системе K отличен от нуля:

$$J = \left| \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\beta} \right) \right| \neq 0.$$

Ясно, что в системе координат $\widehat{K}$ базисные вектора суть вектор-функции координат и параметра: $\widehat{\mathbf{e}}_\alpha(\xi^\tau, t)$, $\widehat{\mathbf{e}}^\alpha(\xi^\tau, t)$. При изменении параметра будет меняться и сама координатная система $\widehat{K}$. Её называют *подвижной системой координат*, а систему K — *неподвижной*. Далее, изменение системы $\widehat{K}$ трактуется как изменение связанного с нею пространства. Тогда каждому значению параметра t будет соответствовать своё пространство, совпадающее с неподвижным пространством системы K. Подвижные пространства, соответствующие значениям t^0 и t, будем называть *начальным* и *актуальным* пространствами. Базисные векторы в начальном пространстве есть $\overset{0}{\widehat{\mathbf{e}}}_\alpha = \widehat{\mathbf{e}}_\alpha(\xi^\tau, t^0)$, $\overset{0}{\widehat{\mathbf{e}}}{}^\alpha = \widehat{\mathbf{e}}^\alpha(\xi^\tau, t^0)$, $\alpha = 1, 2, 3$.

Рассмотрим теперь тензоры, зависящие и от параметра. Тензор можно отнести к базисам неподвижной или подвижной системы координат. В первом случае от параметра будут зависеть только компоненты тензора, а во втором — компоненты тензора и полиады. Поэтому и возникают производные от тензора по параметру в разных смыслах.

Пусть сначала имеется скалярное поле $\varphi = \varphi(M, t)$. В подвижных координатах $\varphi = \varphi(\xi^\sigma, t)$, а в неподвижных — $\varphi = \varphi(x^\tau, t)$, поэтому можно рассматривать различные производные от скаляра по параметру: *индивидуальную* и *локальную*. Индивидуальная производная по параметру t есть частная производная при фиксированных ξ^σ:

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv \frac{\partial \varphi(\xi^\sigma, t)}{\partial t}\bigg|_{\xi^\sigma = \mathrm{const}}. \tag{1.7.1}$$

Эта производная характеризует изменение в данной точке ξ^σ подвижного пространства.

Локальной производной скаляра φ по параметру t называют частную производную при фиксированных координатах x^σ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \equiv \frac{\partial \varphi(x^\tau, t)}{\partial t}\bigg|_{x^\tau = \mathrm{const}}. \tag{1.7.2}$$

Она характеризует изменение величины в данной точке неподвижного пространства.

Поскольку $x^\alpha = x^\alpha(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$, между индивидуальной и локальной производными имеется связь, определяемая формулой

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi(x^\tau(\xi^\sigma, t), t)}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^\tau}\frac{dx^\tau}{dt}.$$

Вводя вектор

$$\mathbf{u} = u^\tau \mathbf{e}_\tau, \quad u^\tau = \frac{dx^\tau}{dt}, \tag{1.7.3}$$

получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u^\tau \nabla_\tau \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi. \tag{1.7.4}$$

Другими словами, изменение величины φ в данной точке подвижного пространства складывается из её изменения в точке неподвижного пространства. Последняя часть есть $u^\tau \nabla_\tau \varphi$, называемая *конвективной производной*. Значит, индивидуальная производная скаляра по параметру равна сумме локальной и конвективной производных.

Для базисных элементов $\overset{\circ}{\widehat{\mathbf{e}}}_\alpha$, $\overset{\circ}{\widehat{\mathbf{e}}}{}^\alpha$ подвижной системы координат имеем

$$\frac{d\,\overset{\circ}{\widehat{\mathbf{e}}}_\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{d\,\overset{\circ}{\widehat{\mathbf{e}}}{}^\alpha}{dt} = 0, \tag{1.7.5}$$

так как в начальном пространстве параметр фиксирован.

Для элементов $\widehat{\mathbf{e}}_\alpha$, $\widehat{\mathbf{e}}^\alpha$ подвижной системы в актуальном пространстве индивидуальные производные вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}\frac{d\widehat{\mathbf{e}}_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \mathbf{r}(\xi^\sigma, t)}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha} = \widehat{\nabla}_\alpha \widehat{u}^\sigma \widehat{\mathbf{e}}_\sigma, \\ \widehat{\nabla}_\alpha \widehat{u}^\sigma = \frac{\partial \widehat{u}^\sigma}{\partial \xi^\alpha} + \widehat{u}^\omega \widehat{\Gamma}^\sigma{}_{\omega\alpha};\end{gathered} \tag{1.7.6}$$

$$\frac{d\widehat{\mathbf{e}}^\beta}{dt} = -\widehat{\nabla}_\sigma \widehat{u}^\beta \widehat{\mathbf{e}}^\sigma, \tag{1.7.7}$$

где последнее равенство следует из соотношения взаимности $\widehat{\mathbf{e}}^\beta \cdot \widehat{\mathbf{e}}_\alpha = \delta^\beta{}_\alpha$.

Значения индивидуальных производных в неподвижной системе координат получаются путём дифференцирования формулы преобразования

$$\widehat{\mathbf{e}}_\alpha = \mathbf{e}_\sigma \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha}$$

по параметру. Выбирая подвижную систему $\widehat{K}$ так, чтобы при данном t она совпадала с неподвижной системой K, находим (использованы формулы (1.7.6), (1.7.7))

$$\frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dt} = u^\omega \Gamma^\sigma{}_{\omega\alpha} \mathbf{e}_\sigma; \tag{1.7.8}$$

$$\frac{d\mathbf{e}^\beta}{dt} = -u^\omega \Gamma^\beta{}_{\omega\sigma} \mathbf{e}^\sigma. \tag{1.7.9}$$

Докажем равенства (1.7.8), (1.7.9). Имеем

$$\frac{d\widehat{\mathbf{e}}_\alpha}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_\sigma}{dt}\,\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} + \mathbf{e}_\sigma \frac{d}{dt}\,\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha}\,,$$

или, в силу (1.7.3) и (1.7.6),

$$\widehat{\nabla}_\alpha \widehat{u}^\sigma \widehat{\mathbf{e}}_\sigma = \frac{d\mathbf{e}_\sigma}{dt}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} + \mathbf{e}_\sigma \frac{\partial u^\sigma}{\partial \xi^\alpha}\,.$$

Поскольку при данном значении параметра t $\widehat{\mathbf{e}}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha$, $\widehat{\mathbf{e}}^\alpha = \mathbf{e}^\alpha$, то $\widehat{\nabla}_\alpha \widehat{u}^\sigma = \nabla_\alpha u^\sigma$, $\widehat{u}^\sigma = u^\sigma$ и

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha} = \delta^\sigma{}_\alpha, \quad \frac{\partial u^\sigma}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\tau}\frac{\partial x^\tau}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\tau}\,\delta^\tau{}_\alpha = \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\alpha}\,;$$

тогда предыдущее соотношение перепишется так:

$$\left(\frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\alpha} + u^\omega \Gamma^\sigma{}_{\omega\alpha}\right)\mathbf{e}_\sigma = \frac{d\mathbf{e}_\sigma}{dt}\,\delta^\sigma{}_\alpha + \mathbf{e}_\sigma \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\alpha} = \frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dt} + \mathbf{e}_\sigma \frac{\partial u^\sigma}{\partial x^\alpha}\,,$$

откуда и следует равенство (1.7.8). Для доказательства равенства (1.7.9) достаточно продифференцировать по параметру t соотношение взаимности $\mathbf{e}^\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha = \delta^\beta{}_\alpha$.

Локальные производные от базисных элементов системы K равны нулю,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}^\alpha}{\partial t} = 0, \tag{1.7.10}$$

поскольку эти векторы не зависят от t в каждой точке неподвижного пространства.

Пусть имеется гладкое векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M, t)$. В подвижной системе координат

$$\mathbf{a} = \widehat{a}^\alpha \widehat{\mathbf{e}}_\alpha = \widehat{a}_\beta \widehat{\mathbf{e}}^\beta. \tag{1.7.11}$$

Индивидуальная производная по параметру от первого равенства (1.7.11) есть

$$\mathbf{A} \equiv \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\widehat{a}^\alpha}{dt}\,\widehat{\mathbf{e}}_\alpha + \widehat{a}^\alpha \widehat{\nabla}_\alpha \widehat{u}^\sigma \widehat{\mathbf{e}}_\sigma = \frac{\widehat{D}\widehat{a}^\alpha}{Dt}\,\widehat{\mathbf{e}}_\alpha, \tag{1.7.12}$$

где введено обозначение

$$\frac{\widehat{D}\widehat{a}^\alpha}{Dt} = \frac{d\widehat{a}^\alpha}{dt} + \widehat{a}^\sigma \widehat{\nabla}_\sigma \widehat{u}^\alpha. \tag{1.7.13}$$

Значит, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^*$,

$$\mathbf{A}_1 = \frac{d\widehat{a}^\alpha}{dt}\,\widehat{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \mathbf{A}_1^* = \widehat{a}^\alpha \widehat{\nabla}_\alpha \widehat{u}^\sigma \widehat{\mathbf{e}}_\sigma = \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}. \tag{1.7.14}$$

Вектор $\mathbf{A}_1$ называется *относительной производной* вектора $\mathbf{a}$ и характеризует изменение вектора относительно подвижной системы координат. Вектор $\mathbf{A}_1^*$ представляет часть изменения вектора $\mathbf{a}$, связанную с движением подвижной системы, поэтому его называют *переносной производной*.

Для второго представления (1.7.11) найдём

$$\mathbf{A} \equiv \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\widehat{D}\widehat{a}_\beta}{Dt}\,\widehat{\mathbf{e}}^\beta, \quad \frac{\widehat{D}\widehat{a}_\beta}{Dt} = \frac{d\widehat{a}_\beta}{dt} - \widehat{a}_\sigma \widehat{\nabla}_\beta \widehat{u}^\sigma. \tag{1.7.15}$$

Следовательно, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2^*$,

$$\mathbf{A}_2 = \frac{d\widehat{a}_\beta}{dt}\,\widehat{\mathbf{e}}^\beta, \quad \mathbf{A}_2^* = -\widehat{a}_\beta \widehat{\nabla}_\sigma \widehat{u}^\beta \widehat{\mathbf{e}}^\sigma = -\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}, \tag{1.7.16}$$

т. е. получим другое представление индивидуальной производной через относительную $\mathbf{A}_2$ и переносную $\mathbf{A}_2^*$ производные. Заметим, что $\mathbf{A}_1 \neq \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1^* \neq \mathbf{A}_2^*$.

В неподвижной системе координат вектор $\mathbf{a}$ имеет вид

$$\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha = a_\beta \mathbf{e}^\beta, \tag{1.7.17}$$

поэтому

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{Da^\alpha}{Dt}\,\mathbf{e}_\alpha, \quad \frac{Da^\alpha}{Dt} = \frac{da^\alpha}{dt} + a^\sigma u^\omega \Gamma^\alpha_{\omega\sigma}. \tag{1.7.18}$$

Используя равенство

$$\frac{da^\alpha}{dt} = \frac{\partial a^\alpha}{\partial t} + u^\sigma \frac{\partial a^\alpha}{\partial x^\sigma}\,,$$

формулу (1.7.18) можно записать так:

$$\frac{Da^\alpha}{Dt} = \frac{\partial a^\alpha}{\partial t} + u^\sigma\left(\frac{\partial a^\alpha}{\partial x^\sigma} + a^\omega \Gamma^\alpha_{\omega\sigma}\right) = \frac{\partial a^\alpha}{\partial t} + u^\sigma \nabla_\sigma a^\alpha. \tag{1.7.19}$$

Теперь из равенств (1.7.18), (1.7.19) следует, что

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial a^\alpha}{\partial t}\,\mathbf{e}_\alpha + u^\sigma \nabla_\sigma a^\alpha \mathbf{e}_\alpha. \tag{1.7.20}$$

Поскольку $\partial \mathbf{e}_\alpha / \partial t = 0$ (см. (1.7.10)), то формуле (1.7.20) можно придать инвариантную форму

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a}. \qquad (1.7.21)$$

Итак, индивидуальная производная по параметру от вектора равна сумме локальной и конвективной производных. Индивидуальная производная вектора характеризует его изменение в фиксированной точке подвижного пространства. Локальная производная показывает изменение вектора в соответствующей точке неподвижного пространства. Конвективная производная выражает ту часть изменения вектора, которая обусловлена перемещением подвижного пространства.

Для второго представления вектора (1.7.17) индивидуальная производная равна

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_\beta}{dt}\,\mathbf{e}^\beta - a_\beta u^\omega \Gamma^\beta_{\ \omega\sigma} \mathbf{e}^\sigma \equiv \frac{Da_\beta}{Dt}\,\mathbf{e}^\beta, \qquad (1.7.22)$$

где

$$\frac{Da_\beta}{Dt} = \frac{\partial a_\beta}{\partial t} + u^\omega \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\omega} - a_\sigma \Gamma^\sigma_{\ \omega\beta} \right) = \frac{\partial a_\beta}{\partial t} + u^\omega \nabla_\omega a_\beta. \qquad (1.7.23)$$

Легко видеть, что формула (1.7.23) получается из (1.7.19) с помощью операции опускания индекса — достаточно учесть равенство $\partial g_{\alpha\beta}/\partial t = 0$. Поэтому формула (1.7.23) представляет запись векторного равенства (1.7.21) через ковариантные компоненты.

Пусть имеется поле тензора $\mathbf{T}$ второго ранга, зависящее от параметра. В подвижной системе координат справедливы представления

$$\mathbf{T} = \widehat{T}_{\alpha\beta} \widehat{\mathbf{e}}^\alpha \widehat{\mathbf{e}}^\beta = \widehat{T}^{\sigma\tau} \widehat{\mathbf{e}}_\sigma \widehat{\mathbf{e}}_\tau = \widehat{T}^\lambda_{\ \mu} \widehat{\mathbf{e}}_\lambda \widehat{\mathbf{e}}^\mu = \widehat{T}^\omega_\nu \widehat{\mathbf{e}}^\nu \widehat{\mathbf{e}}_\omega. \qquad (1.7.24)$$

Индивидуальная производная по параметру для первого из выражений (1.7.24) имеет вид

$$\mathbf{H} \equiv \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{\widehat{D}\widehat{T}_{\alpha\beta}}{Dt}\,\widehat{\mathbf{e}}^\alpha \widehat{\mathbf{e}}^\beta; \qquad (1.7.25)$$

$$\frac{\widehat{D}\widehat{T}_{\alpha\beta}}{Dt}=\frac{d\widehat{T}_{\alpha\beta}}{dt}-\widehat{T}_{\sigma\beta}\widehat{\nabla}_{\alpha}\widehat{u}^{\sigma}-\widehat{T}_{\alpha\sigma}\widehat{\nabla}_{\beta}\widehat{u}^{\sigma}. \qquad (1.7.26)$$

В правой части этой формулы каждый член является тензором 2-го ранга, значит, $\mathbf{H}=\mathbf{H}_1+\mathbf{H}_1^*$, где

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1&=\frac{d\widehat{T}_{\alpha\beta}}{dt}\widehat{\mathbf{e}}^{\alpha}\widehat{\mathbf{e}}^{\beta},\\ \mathbf{H}_1^*&=(-\widehat{T}_{\sigma\beta}\widehat{\nabla}_{\alpha}\widehat{u}^{\sigma}-\widehat{T}_{\alpha\sigma}\widehat{\nabla}_{\beta}\widehat{u}^{\sigma})\widehat{\mathbf{e}}^{\alpha}\widehat{\mathbf{e}}^{\beta}.\end{aligned} \qquad (1.7.27)$$

Если воспользоваться другими представлениями тензора из (1.7.24), получим $\mathbf{H}=\mathbf{H}_2+\mathbf{H}_2^*$, $\mathbf{H}=\mathbf{H}_3+\mathbf{H}_3^*$, $\mathbf{H}=\mathbf{H}_4+\mathbf{H}_4^*$, где

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_2&=\frac{d\widehat{T}^{\alpha\beta}}{dt}\widehat{\mathbf{e}}_{\alpha}\widehat{\mathbf{e}}_{\beta},\\ \mathbf{H}_2^*&=(\widehat{T}^{\sigma\beta}\widehat{\nabla}_{\sigma}\widehat{u}^{\alpha}+\widehat{T}^{\alpha\sigma}\widehat{\nabla}_{\sigma}\widehat{u}^{\beta})\widehat{\mathbf{e}}_{\alpha}\widehat{\mathbf{e}}_{\beta};\end{aligned} \qquad (1.7.28)$$

$$\mathbf{H}_3=\frac{d\widehat{T}^{\alpha}_{\beta}}{dt}\widehat{\mathbf{e}}_{\alpha}\widehat{\mathbf{e}}^{\beta},\ \ \mathbf{H}_3^*=(\widehat{T}^{\sigma}_{\beta}\widehat{\nabla}_{\sigma}\widehat{u}^{\alpha}-\widehat{T}^{\alpha}_{\sigma}\widehat{\nabla}_{\beta}\widehat{u}^{\sigma})\widehat{\mathbf{e}}_{\alpha}\widehat{\mathbf{e}}^{\beta}; \qquad (1.7.29)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_4&=\frac{d\widehat{T}_{\alpha}^{\ \beta}}{dt}\widehat{\mathbf{e}}^{\alpha}\widehat{\mathbf{e}}_{\beta},\\ \mathbf{H}_4^*&=(-\widehat{T}_{\sigma}^{\ \beta}\widehat{\nabla}_{\alpha}\widehat{u}^{\sigma}-\widehat{T}_{\alpha}^{\ \sigma}\widehat{\nabla}_{\sigma}\widehat{u}^{\beta})\widehat{\mathbf{e}}^{\alpha}\widehat{\mathbf{e}}_{\beta}.\end{aligned} \qquad (1.7.30)$$

Тензоры $\mathbf{H}_j$ так же, как и тензоры $\mathbf{H}_j^*$, $j=\overline{1,4}$, различны. Первые дают изменение тензора $\mathbf{T}$ в фиксированном базисе подвижной системы (обобщение относительных производных вектора), а вторые характеризуют ту часть изменения, которая связана с движением этой же системы координат (обобщение переносной производной вектора). Выражения (1.7.25)–(1.7.30) дают различные разложения индивидуальной производной тензора на относительные и переносные производные.

Возьмём теперь представление тензора $\mathbf{T}$ в базисе неподвижной системы координат:

$$\mathbf{T}=T_{\alpha\beta}\mathbf{e}^{\alpha}\mathbf{e}^{\beta}=T^{\alpha\beta}\mathbf{e}_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta}=T^{\alpha}_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}\mathbf{e}^{\beta}=T_{\alpha}^{\ \beta}\mathbf{e}^{\alpha}\mathbf{e}_{\beta}. \qquad (1.7.31)$$

В этом случае индивидуальные производные вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{dt} &= \frac{DT_{\alpha\beta}}{Dt}\,\mathbf{e}^{\alpha}\mathbf{e}^{\beta}, \quad \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{DT^{\alpha\beta}}{Dt}\,\mathbf{e}_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta}, \\ \frac{d\mathbf{T}}{dt} &= \frac{DT^{\alpha}_{\ \beta}}{Dt}\,\mathbf{e}_{\alpha}\mathbf{e}^{\beta}, \quad \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{DT_{\alpha}^{\ \beta}}{Dt}\,\mathbf{e}^{\alpha}\mathbf{e}_{\beta}, \end{aligned} \tag{1.7.32}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{DT_{\alpha\beta}}{Dt} &= \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial t} + u^{\gamma}\nabla_{\gamma}T_{\alpha\beta}, \\ \frac{DT^{\alpha\beta}}{Dt} &= \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial t} + u^{\gamma}\nabla_{\gamma}T^{\alpha\beta}, \\ \frac{DT^{\alpha}_{\ \beta}}{Dt} &= \frac{\partial T^{\alpha}_{\ \beta}}{\partial t} + u^{\gamma}\nabla_{\gamma}T^{\alpha}_{\ \beta}, \\ \frac{DT_{\alpha}^{\ \beta}}{Dt} &= \frac{\partial T_{\alpha}^{\ \beta}}{\partial t} + u^{\gamma}\nabla_{\gamma}T_{\alpha}^{\ \beta}. \end{aligned} \tag{1.7.33}$$

При выводе формул (1.7.32) использованы равенства вида

$$\frac{dT_{\alpha\beta}}{dt} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial t} + u^{\gamma}\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}.$$

Поскольку локальные производные базисных векторов равны нулю (см. (1.7.10)), то формулы (1.7.32) можно записать в инвариантной форме

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{T}, \tag{1.7.34}$$

обобщающей формулу (1.7.21) для вектора.

Замечание 1.6. Если поле тензора однородно, то $\nabla T = 0$ и индивидуальная производная совпадает с локальной.

1.8. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ПО ПАРАМЕТРУ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Напомним некоторые интегральные выражения векторного анализа. Пусть $\mathbf{a}$ — поле гладкого вектора, а $L = AB$ — контур в этом поле, заданный уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ с помощью параметра s, см. рис. 1.6.

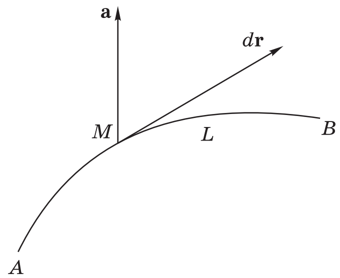

Рис. 1.6
К определению циркуляции вектора

Криволинейный интеграл

$$\Gamma = \int\limits_{L} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \tag{1.8.1}$$

называется *циркуляцией* вектора $\mathbf{a}$ по контуру L. Это скалярная величина и в произвольной системе координат x^α

$$\Gamma = \int\limits_{L_x} a_\alpha \, dx^\alpha, \tag{1.8.2}$$

где L_x есть задание контура L в координатах x^α.

Пусть теперь Σ – поверхность в поле вектора $\mathbf{a}$ (см. рис. 1.7).

Интеграл

$$Q = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \tag{1.8.3}$$

называется *потоком* вектора $\mathbf{a}$ через поверхность Σ. Это величина скалярная и в переменных x^α получаем

$$Q = \int\limits_{\Sigma_x} a^\alpha n_\alpha \, d\sigma. \tag{1.8.4}$$

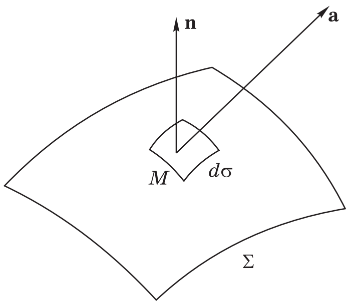

Рис. 1.7
К определению потока вектора

Аналогично определяется вектор $\mathbf{Q}$ — поток тензора 2-го ранга через поверхность Σ:

$$\mathbf{Q} = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma. \tag{1.8.5}$$

Формулы (1.8.3), (1.8.5) можно записать в более удобной для дальнейшего использования форме. Для этого в произвольной точке M пространства рассмотрим координатные линии и координатные поверхности системы координат x^1, x^2, x^3. Пусть $d\mathbf{r}_\alpha = dx^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ и $d\mathbf{r}_\alpha = \overrightarrow{MN}_\alpha$, см. рис. 1.8.

Для координатных поверхностей $x^\alpha = \mathrm{const}$ считаем, что $d\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ есть вектор элементарной площадки этой поверхности.

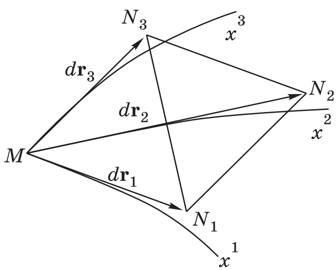

Рис. 1.8
Координатные линии и поверхности

Ясно, что

$$d\boldsymbol{\sigma}_1 = d\mathbf{r}_2 \times d\mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3\, dx^2 dx^3 = \\ = e_{231} dx^2 dx^3 \mathbf{e}^1 = \sqrt{g}\, dx^2 dx^3 \mathbf{e}^1,$$

откуда

$$d\boldsymbol{\sigma}_1 = d\sigma_1 \mathbf{e}^1, \quad d\sigma_1 = \sqrt{g}\, dx^2 dx^3. \tag{1.8.6}$$

Точно так же

$$d\boldsymbol{\sigma}_2 = d\mathbf{r}_3 \times d\mathbf{r}_1 = d\sigma_2 \mathbf{e}^2, \quad d\sigma_2 = \sqrt{g}\, dx^3 dx^1; \tag{1.8.7}$$

$$d\boldsymbol{\sigma}_3 = d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2 = d\sigma_3 \mathbf{e}^3, \quad d\sigma_3 = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2. \tag{1.8.8}$$

Обозначим через $d\boldsymbol{\sigma}$ вектор площадки $N_1N_2N_3$, получим

$$d\boldsymbol{\sigma} = \overrightarrow{N_1N_2} \times \overrightarrow{N_1N_3} = (d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1) \times (d\mathbf{r}_3 - d\mathbf{r}_1),$$

значит,

$$d\boldsymbol{\sigma} = d\boldsymbol{\sigma}_1 + d\boldsymbol{\sigma}_2 + d\boldsymbol{\sigma}_3 = d\sigma_\alpha \mathbf{e}^\alpha. \tag{1.8.9}$$

Если $\mathbf{n}$ – нормаль к площадке $N_1N_2N_3$, направленная в сторону, откуда обход этой площадки виден против часовой стрелки, то

$$d\boldsymbol{\sigma} = d\sigma \mathbf{n} = n_\alpha d\sigma \mathbf{e}^\alpha. \tag{1.8.10}$$

Сравнивая формулы (1.8.9), (1.8.10), находим, что

$$d\sigma_\alpha = n_\alpha d\sigma, \tag{1.8.11}$$

и другое выражение для потока вектора (1.8.3) и потока тензора (1.8.5) есть

$$Q = \int\limits_\Sigma \mathbf{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{Q} = \int\limits_\Sigma \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.8.12}$$

Пусть V — объём в поле некоторого тензора. В каждой точке M этого объёма векторы элементарных перемещений $d\mathbf{r}_\alpha = \overrightarrow{MN_\alpha}$ определяют элементарный тетраэдр $MN_1N_2N_3$ (см. рис. 1.8). Объём этого тетраэдра

$$dV = (d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2, d\mathbf{r}_3) = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 dx^3. \tag{1.8.13}$$

Величины

$$\Phi = \int\limits_V \varphi\, dV, \quad \mathbf{A} = \int\limits_V \mathbf{a}\, dV, \quad \mathbf{P} = \int\limits_V \mathbf{T}\, dV \tag{1.8.14}$$

называют *количеством скаляра* φ, *вектора* $\mathbf{a}$, *тензора* $\mathbf{T}$ в объёме V. В любой системе координат x^α эти величины вычисляются по формулам

$$\Phi = \int\limits_V \varphi(x^\alpha)\sqrt{g(x^\alpha)}\, dx^1 dx^2 dx^3;$$

$$\mathbf{A} = \int\limits_V \mathbf{a}(x^\alpha)\sqrt{g(x^\alpha)}\, dx^1 dx^2 dx^3; \tag{1.8.15}$$

$$\mathbf{P} = \int\limits_V \mathbf{T}(x^\alpha)\sqrt{g(x^\alpha)}\, dx^1 dx^2 dx^3.$$

Предположим, что гладкую поверхность Σ ограничивает кусочно-гладкий контур L и на Σ задана дифференцируемая вектор-функция $\mathbf{a}$. Тогда справедлива формула Стокса

$$\oint\limits_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int\limits_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \tag{1.8.16}$$

и поток вихря через поверхность Σ равен циркуляции самого вектора вдоль замкнутого контура, ограничивающего эту поверхность. В компонентах равенство (1.8.16) в произвольной системе координат имеет вид

$$\oint\limits_L a_\alpha\, dx^\alpha = \int\limits_\Sigma e^{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta a_\gamma n_\alpha\, d\sigma. \tag{1.8.17}$$

Если объём V находится в поле гладкого вектора $\mathbf{a}$, то справедлива формула Гаусса–Остроградского

$$\int\limits_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \int\limits_\Sigma \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \tag{1.8.18}$$

для кусочно-гладкой поверхности Σ, ограничивающий этот объём. В произвольной системе координат формула (1.8.18) записывается так:

$$\int\limits_V \frac{\partial(a^\beta\sqrt{g})}{\partial x^\beta}\,dx^1dx^2dx^3 = \int\limits_\Sigma a^\alpha n_\alpha\,d\sigma, \tag{1.8.19}$$

или

$$\int\limits_V \nabla_\beta a^\beta\,dV = \int\limits_\Sigma a^\alpha n_\alpha\,d\sigma.$$

Равенство (1.8.18) легко обобщается на случай тензора $\mathbf{T}$ второго ранга:

$$\int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{T}\,dV = \int\limits_\Sigma \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma, \tag{1.8.20}$$

или

$$\int\limits_V \frac{\partial(T^\alpha\sqrt{g})}{\partial x^\alpha}\,dx^1dx^2dx^3 = \int\limits_V \nabla_\alpha\mathbf{T}^\alpha\,dV = \int\limits_\Sigma \mathbf{T}^\alpha\cdot n_\alpha\,d\sigma, \tag{1.8.21}$$

где использовано представление $\mathbf{T}=\mathbf{T}^\alpha\mathbf{e}^\alpha$. В частности, для шарового тензора $\mathbf{T}=\varphi\mathbf{G}$, $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{G})=\nabla\varphi$, $\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}$ и

$$\int\limits_V \nabla\varphi\,dV = \int\limits_\Sigma \varphi\mathbf{n}\,d\sigma. \tag{1.8.22}$$

Контур L будем называть индивидуальным, если он проходит через одни и те же точки подвижного пространства для любого значения параметра t. Тогда уравнения контура L_ξ в системе ξ^σ не содержат параметр t.

Циркуляция есть функция параметра:

$$\Gamma(t) = \int\limits_{L_x} a_\alpha(x^\sigma,t)\,dx^\alpha = \int\limits_{L_\xi} \widehat{a}_\alpha(\xi^\tau,t)\,d\xi^\alpha, \tag{1.8.23}$$

значит,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int\limits_{L_\xi} \frac{d\widehat{a}_\alpha}{dt}\,d\xi^\alpha.$$

Поскольку по первой формуле (1.7.6)

$$\frac{d\widehat{a}_\alpha}{dt}\,d\xi^\alpha = \frac{d}{dt}\,(\mathbf{a}\cdot\widehat{\mathbf{e}}_\alpha)\,d\xi^\alpha = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\,\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{a}\cdot d\mathbf{u},$$

то искомая производная имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_L \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_L \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\,\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{a}\cdot d\mathbf{u}\right). \tag{1.8.24}$$

Это инвариантная форма и её можно использовать в любой системе координат. Подынтегральное выражение в правой части (1.8.24) легко преобразуется к виду

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}\,\cdot d\mathbf{r} + d(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}) + (\operatorname{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{u})\cdot d\mathbf{r}.$$

Теперь равенство (1.8.24) перепишется так:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_L \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{L_x} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} + \int\limits_{L_x} (\operatorname{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{u})\cdot d\mathbf{r} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\Big|_A^B. \tag{1.8.25}$$

Локальная производная вынесена за знак интеграла, так как выражение L_x не содержит явно параметр t.

Нам понадобится следующая формула (теорема Эйлера):

$$\frac{d\sqrt{\widehat{g}}}{dt} = \sqrt{\widehat{g}}\operatorname{div}\mathbf{u}. \tag{1.8.26}$$

Она вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned}
&\frac{d\sqrt{\widehat{g}}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(\widehat{\mathbf{e}}_1,\widehat{\mathbf{e}}_2,\widehat{\mathbf{e}}_3) = \\
&= \widehat{\nabla}_1\widehat{u}^\sigma(\widehat{\mathbf{e}}_\sigma,\widehat{\mathbf{e}}_2,\widehat{\mathbf{e}}_3) + \widehat{\nabla}_2\widehat{u}^\sigma(\widehat{\mathbf{e}}_1,\widehat{\mathbf{e}}_\sigma,\widehat{\mathbf{e}}_3) + \widehat{\nabla}_3\widehat{u}^\sigma(\widehat{\mathbf{e}}_1,\widehat{\mathbf{e}}_2,\widehat{\mathbf{e}}_\sigma) = \\
&\qquad = (\widehat{\mathbf{e}}_1,\widehat{\mathbf{e}}_2,\widehat{\mathbf{e}}_3)(\widehat{\nabla}_1\widehat{u}^1 + \widehat{\nabla}_2\widehat{u}^2 + \widehat{\nabla}_3\widehat{u}^3) = \sqrt{\widehat{g}}\,\widehat{\nabla}_\alpha\widehat{u}^\alpha.
\end{aligned}$$

Поверхность Σ называется индивидуальной, если она проходит через одни и те же точки подвижного пространства при любом заданном значении параметра t. Уравнение Σ_ξ в подвижных координатах параметра t не содержит, в отличие от уравнения Σ_x. При этих условиях поток вектора будет функцией t:

$$Q(t) = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int\limits_{\Sigma_\xi} \widehat{a}^\alpha d\widehat{\sigma}_\alpha, \tag{1.8.27}$$

откуда

$$\frac{dQ}{dt} = \int\limits_{\Sigma_\xi} \left(\frac{d\widehat{a}^\alpha}{dt} d\widehat{\sigma}_\alpha + \widehat{a}^\alpha \frac{d\widehat{\sigma}_\alpha}{dt} \right).$$

Поскольку (использована формула (1.7.7))

$$\frac{d\widehat{a}^\alpha}{dt} d\widehat{\sigma}_\alpha = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{e}}^\alpha - \widehat{\nabla}_\sigma \widehat{u}^\alpha \widehat{a}^\sigma \right) d\sigma_\alpha = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot d\boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

и, в силу формулы Эйлера (1.8.26),

$$\frac{d\widehat{\sigma}_\alpha}{dt} = \frac{d(\sqrt{\widehat{g}}\,)}{dt} d\xi^{\alpha+1} d\xi^{\alpha+2} = (\operatorname{div} \mathbf{u}) \sqrt{\widehat{g}}\, d\xi^{\alpha+1} d\xi^{\alpha+2},$$

$$\widehat{a}^\alpha \frac{d\widehat{\sigma}_\alpha}{dt} = (\operatorname{div} \mathbf{u})\, \widehat{a}^\alpha\, d\sigma_\alpha = (\operatorname{div} \mathbf{u})\, \mathbf{a} \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

то производная от потока вектора равна

$$\frac{dQ}{dt} = \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.8.28}$$

Подынтегральное выражение в (1.8.28) может быть упрощено. Действительно,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a}, \quad \operatorname{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u},$$

и формула (1.8.28) примет вид

$$\frac{dQ}{dt} = \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) \right) \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.8.29}$$

Применяя теорему Стокса (1.8.16) к третьему слагаемому (1.8.29), найдём

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{a}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\int\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}+\mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{a}\right)\cdot d\boldsymbol{\sigma}+\oint\limits_{L}(\mathbf{a}\times\mathbf{u})\cdot d\mathbf{r},\quad(1.8.30)$$

где L — кусочно-гладкий контур, ограничивающий поверхность Σ.

Объём V называется индивидуальным, если он при любом значении параметра t состоит из одних и тех же точек подвижного пространства. Снова объём V_ξ от t не зависит. Рассмотрим производные от величин (1.8.14) по параметру по такому объёму, используя формулы (1.8.15). Например, для первого будем иметь, в силу формулы Эйлера (1.8.26),

$$\frac{d\Phi}{dt}=\int\limits_{V_\xi}\frac{d}{dt}\left(\varphi(\xi^\tau,t)\sqrt{\widehat{g}(\xi^\tau,t)}\right)d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3=$$

$$=\int\limits_{V}\left(\frac{d\varphi}{dt}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{u}\right)dV.\quad(1.8.31)$$

Так как

$$\frac{d\varphi}{dt}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{u}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{div}(\varphi\mathbf{u}),$$

то, используя равенство (1.8.18), получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V}\varphi\,dV=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_x}\varphi\,dV+\oint\limits_{\Sigma_x}\varphi\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.\quad(1.8.32)$$

Вектор $\varphi\mathbf{u}$ называется *плотностью потока скаляра*.

Для поля гладкого вектора $\mathbf{a}$ находим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V}\mathbf{a}\,dV=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_x}\mathbf{a}\,dV+\oint\limits_{\Sigma_x}\mathbf{a}\mathbf{u}\cdot d\boldsymbol{\sigma}.\quad(1.8.33)$$

Тензор 2-го ранга $\mathbf{au}$ называется *плотностью потока вектора*.

Задача. Вывести формулы

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} + d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) + (\operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{r},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{u}) = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{u},$$

с помощью которых получены равенства (1.8.25) и (1.8.29).

Раздел II

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этом разделе приводятся, на основе тензорного исчисления, основные факты дифференциальной геометрии в трёхмерном евклидовом пространстве. Это – формулы Френе, элементы внутренней геометрии поверхностей, дифференциальные параметры Бельтрами и интегральные теоремы, часто используемые в механике и физике.

2.1. КРИВЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть y^β – ортогональная декартова система координат, $\beta = 1, 2, 3$, а x^α – криволинейная система координат, причём

$$x^\alpha = x^\alpha(y^1, y^2, y^3), \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad \left|\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta}\right)\right| = J \neq 0.$$

Тогда $y^\beta = y^\beta(x^1, x^2, x^3)$, см. формулы (1.1.6)–(1.1.8).

Кривая в пространстве определяется как геометрическое место точек, координаты которых зависят от одного параметра. Если AB – данная кривая, то координаты любой точки M на ней являются функциями некоторого параметра t. Построим в точке M какой-либо вектор, а затем в каждой другой точке этой кривой построим вектор, равный и параллельный первому, получим вектор X^α, определённый в каждой точке AB, см. рис. 2.1. Тем самым построили *параллельное векторное поле векторов вдоль кривой AB.*

Найдём уравнение, которому должно удовлетворять такое векторное поле. Пусть Y^β — координаты в системе y^β. В этой

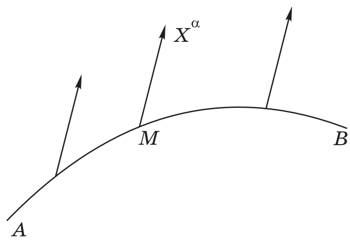

Рис. 2.1
Параллельное векторное поле на кривой

системе составляющие параллельных одинаковых векторов равны, значит, Y^β суть постоянные вдоль AB и $dY^\beta/dt = 0$. Поскольку $Y^\beta = X^\sigma \partial y^\beta/\partial x^\sigma$, см. формулы (1.2.2), то дифференцируя по t, найдём

$$\frac{dX^\sigma}{dt}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\sigma} + X^\sigma \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\sigma \partial x^\gamma}\frac{dx^\gamma}{dt} = 0.$$

Умножим это уравнение на $g^{\alpha\tau}\partial y^\beta/\partial x^\tau$ и просуммируем по β от 1 до 3, приходим к уравнению

$$\frac{dX^\alpha}{dt} + g^{\alpha\tau}\frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\sigma \partial x^\gamma}\frac{\partial y_\beta}{\partial x^\tau} X^\sigma \frac{dx^\gamma}{dt} = 0,$$

где учтены равенства

$$g_{\sigma\tau} = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\sigma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\tau}, \quad g_{\sigma\tau}g^{\alpha\tau} = \delta_\sigma{}^\alpha.$$

Согласно второму соотношению (1.5.2) для символов Кристоффеля, имеем

$$g^{\alpha\tau}\frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\sigma \partial x^\gamma}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\tau} = \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma}$$

и параллельное векторное поле вдоль кривой AB должно удовлетворять уравнению

$$\frac{dX^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma}X^\sigma\frac{dx^\gamma}{dt} = 0. \qquad (2.1.1)$$

Обратно, если есть векторное поле на кривой AB, удовлетворяющее уравнению (2.1.1) и имеющее заданное значение в одной из её точек, то оно — параллельное векторное поле.

Возьмём какой-либо вектор в данной точке M и построим в каждой точке пространства параллельные ему векторы. Это параллельное векторное поле X^α зависит от x^α. Проведём произвольную кривую через точку M, тогда векторы этого поля есть решения уравнения (2.1.1). Далее, $dX^\alpha/dt = \partial X^\alpha/\partial x^\gamma\, dx^\gamma/dt$ и, в силу произвольности кривых, выходящих из M, т. е. для всех значений вектора dx^γ/dt, приходим к уравнению

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} X^\sigma = 0 \tag{2.1.2}$$

для параллельного векторного поля. Обратно, из выражения (2.1.2) следует соотношение (2.1.1).

Координаты точки M на кривой AB определяются равенствами

$$x^\alpha = x^\alpha(t). \tag{2.1.3}$$

Из соотношения (1.1.31) длина дуги s кривой даётся интегралом

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right)^{1/2} dt. \tag{2.1.4}$$

Возьмём s в качестве параметра вдоль кривой AB, тогда

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 1, \tag{2.1.5}$$

откуда следует, что dx^α/ds есть единичный вектор (длина a вектора a^α есть $(g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta)^{1/2}$ либо $(g^{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta)^{1/2}$ для ковариантного вектора, см. формулу (1.2.7)).

Рассмотрим точку M_1, близкую к M и тоже лежащую в направлении роста s на кривой AB; её координаты равны $x^\alpha + dx^\alpha$. Вектор $\lim \mathbf{MM}_1/ds$ при $ds \to 0$ называется *касательным вектором* и обозначается через $\mathbf{q}$:

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = q^\alpha \quad \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{q} \right). \tag{2.1.6}$$

Ясно, что $\mathbf{q}$ — единичный вектор, касательный к кривой AB.

Любой вектор, ортогональный к касательному, называют *нормальным вектором кривой*; обозначим его через $\mathbf{n} = (n^\beta)$. Поскольку угол θ между двумя произвольными направлениями, задаваемыми единичными векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, определяется формулой

$$\cos\theta = g_{\alpha\beta}e_1^\alpha e_2^\beta, \tag{2.1.7}$$

то, взяв $\mathbf{e}_1 = \mathbf{q}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{n}$, получим

$$g_{\alpha\beta}q^\alpha n^\beta = 0. \tag{2.1.8}$$

Так как q^α — единичный вектор, то $g_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta = 1$. Вдоль кривой левая часть есть функция параметра s. Взяв индивидуальную производную по s по формуле (1.7.18) с использованием равенств (2.1.5) и (1.5.48), найдём

$$g_{\alpha\beta}q^\alpha \frac{Dq^\beta}{Ds} = 0.$$

Значит, вектор Dq^β/Ds ортогонален к кривой AB. Пусть

$$æ = \left|\frac{Dq^\beta}{Ds}\right|, \tag{2.1.9}$$

тогда единичный вектор

$$n^\beta = \frac{1}{æ}\,\frac{Dq^\beta}{Ds} \qquad \left(\mathbf{n} = \frac{1}{æ}\,\frac{D\mathbf{q}}{Ds}\right) \tag{2.1.10}$$

называется *главной нормалью кривой* AB, а æ — её *кривизной* в рассматриваемой точке.

Точно так же доказывается, что индивидуальная производная Dn^β/Ds ортогональна к n^β. Взяв индивидуальную производную по s от равенства (2.1.8), получим

$$g_{\alpha\beta}q^\alpha \frac{Dn^\beta}{Ds} = -g_{\alpha\beta}\frac{Dq^\alpha}{Ds}\,n^\beta = -æ$$

в силу формул (2.1.10) и (2.1.5) (в последней надо x^α заменить на q^α). Снова пользуясь равенством (2.1.5), найдём

$$g_{\alpha\beta}q^\alpha\left(\frac{Dn^\beta}{Ds} + æq^\beta\right) = 0,$$

т. е. вектор $Dn^\beta/Ds + æq^\beta$ ортогонален к q^α. По той же причине этот же вектор ортогонален и вектору n^α. Поэтому единичный вектор

$$\nu^\alpha = \frac{1}{\tau}\left(\frac{Dn^\alpha}{Ds} + æq^\alpha\right) \tag{2.1.11}$$

ортогонален и к q^α и к n^α, $\tau = \pm|Dn^\alpha/Ds + æq^\alpha|$. Знак τ выбирается так, чтобы

$$e_{\alpha\beta\gamma}q^\alpha n^\beta \nu^\gamma = 1, \tag{2.1.12}$$

где $e_{\alpha\beta\gamma}$ — компоненты дискриминантного тензора. Другими словами, векторы q^α, n^α, ν^α образуют взаимно однозначную ортогональную положительно ориентированную (или правую) тройку векторов. Вектор ν^α называется *бинормалью кривой* AB в рассматриваемой точке, а τ — *кручением* этой кривой в данной точке.

Упражнения. 1) Доказать, что

$$æ = \left(g_{\alpha\beta}\frac{Dq^\alpha}{Ds}\,\frac{Dq^\beta}{Ds}\right)^{1/2}, \quad \tau = e_{\alpha\beta\gamma}q^\alpha n^\beta \frac{Dq^\gamma}{Ds}\,.$$

2) Показать, что

$$\nu^\alpha = e^{\alpha\beta\gamma}q_\beta n_\gamma, \tag{2.1.13}$$

где q_β, n_γ — ковариантные компоненты векторов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{n}$.

Указание. Воспользоваться ортогональностью ν^α к q^α, n^α и равенством (2.1.12).

Из (2.1.13) найдём

$$\frac{D\nu^\alpha}{Ds} = e^{\alpha\beta\gamma}\frac{Dq_\beta}{Ds}\,n_\gamma + e^{\alpha\beta\gamma}q_\beta\frac{Dn_\gamma}{Ds}\,. \tag{2.1.14}$$

Опуская индексы в равенствах (2.1.10), (2.1.11), получим

$$\frac{Dq_\alpha}{Ds} = æn_\alpha, \quad \frac{Dn_\alpha}{Ds} = \tau\nu_\alpha - æq_\alpha.$$

Подставляя эти производные в формулу (2.1.14), приходим к соотношению

$$\frac{D\nu^\alpha}{Ds} = \tau e^{\alpha\beta\gamma}q_\beta\nu_\gamma = -\tau n^\alpha,$$

где использовано тождество $e^{\alpha\beta\gamma}z_\beta z_\gamma = 0$ для любого вектора $\mathbf{z}$ и равенство типа (2.1.13) с заменой ν^α на n^α. Таким образом, вывели следующие равенства:

$$\frac{Dq^\alpha}{Ds} = \text{æ} n^\alpha, \quad \frac{Dn^\alpha}{Ds} = \tau\nu^\alpha - \text{æ} q^\alpha, \quad \frac{D\nu^\alpha}{Ds} = -\tau n^\alpha, \quad (2.1.15)$$

которые называются *формулами Френе*. Тройка единичных векторов $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{n}$ образует *трёхгранник Френе*, или сопровождающий репер, рис. 2.2.

Плоскость, проходящая через точку M кривой AB, в которой лежат векторы $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\nu}$, называется *соприкасающейся плоскостью*. Плоскость, содержащая векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{n}$, называется *нормальной плоскостью*, а плоскость, в которой лежат векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{q}$ — *спрямляющей плоскостью*.

Упражнение. 1) Доказать, что $\mathbf{n} = \mathbf{q} \times \boldsymbol{\nu}$ $(n^\alpha = e^{\alpha\beta\gamma}q_\beta\nu_\gamma)$.

2) Система (2.1.15) должна интегрироваться при условии ортонормированности

$$\mathbf{q}^2 = \boldsymbol{\nu}^2 = \mathbf{n}^2 = 1, \quad \mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = 0,$$

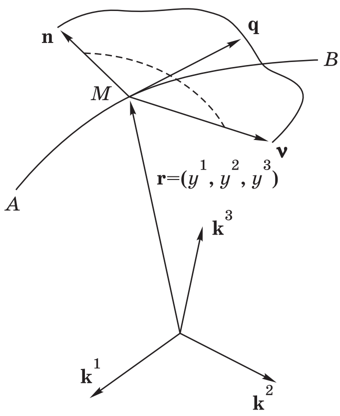

Рис. 2.2
Трёхгранник Френе

и на девять компонент векторов трёхгранника накладываются эти шесть ограничений. Найти три независимых угла, определяющих поворот трёхгранника около точки M — углы Эйлера.

Упражнение. Показать, что

$$æ\nu_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} q^\beta \frac{Dq^\gamma}{Ds}.$$

Замечание 2.1. 1) Если X^α — параллельное векторное поле, заданное вдоль кривой AB, то оно должно удовлетворять тензорному равенству (2.1.1)

$$\frac{DX^\alpha}{Ds} = \frac{dX^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} X^\beta \frac{dx^\gamma}{ds} = 0, \tag{2.1.16}$$

а его ковариантные составляющие X_α есть решения аналогичного тензорного уравнения

$$\frac{DX_\alpha}{Ds} = \frac{dX_\alpha}{ds} - \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} X_\beta \frac{dx^\gamma}{ds} = 0. \tag{2.1.17}$$

2) Касательный вектор прямой всегда имеет одно и то же направление: он образует параллельное векторное поле и должен удовлетворять формуле (2.1.16). Этот единичный касательный вектор есть $q^\alpha = dx^\alpha/ds$, значит, *уравнение прямой линии* будет

$$\frac{Dq^\alpha}{Ds} = \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} = 0. \tag{2.1.18}$$

Из первой формулы Френе следует, что (2.1.18) выражает факт равенства кривизны нулю: *прямая имеет нулевую кривизну*. Это — характерное свойство прямой. В декартовой системе координат $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ и уравнение прямой есть $d^2x^\alpha/ds^2 = 0$.

2.2. ЭЛЕМЕНТЫ ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть по-прежнему y^α — декартовы координаты точки. По определению, *поверхность* есть геометрическое место точек, координаты которых являются функциями двух независимых параметров η^1, η^2:

$$y^\alpha = y^\alpha(\eta^1, \eta^2), \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{2.2.1}$$

Таким образом, любая точка поверхности однозначно определяется двумя числами η^1 и η^2, называемыми *координатами точки на поверхности*.

Зафиксируем параметр η^2 и будем изменять только η^1. Тогда точка (2.2.1) опишет некоторую кривую, целиком лежащую на поверхности S, см. рис. 2.3. Придавая параметру η^2 различные значения, получим семейство кривых на поверхности S. Эти кривые называются η^1-кривыми, так как вдоль них меняется только параметр η^1.

Точно так же получим другое семейство кривых $\eta^1 = \mathrm{const}$, вдоль которых изменяется только параметр η^2; они называются η^2-кривыми. Легко видеть, что каждая точка на S определяется как пересечение двух кривых из разных семейств. С геометрической точки зрения координаты (η^1, η^2) задают две кривые, проходящие через эту точку. Для краткости, η^1- и η^2-кривые называются *координатными кривыми*, а η^1 и η^2 — *системой криволинейных координат на поверхности*.

Все свойства поверхности, которые можно описать, не обращаясь к окружающему пространству, называются *внутренними свойствами поверхности*, а их описание составляет содержание *внутренней геометрии поверхности*.

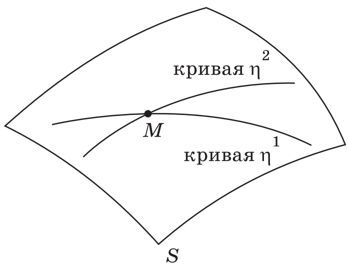

Рис. 2.3
Криволинейные координаты на поверхности

Замечание 2.2. Имеется бесконечно много возможностей координатных систем, определяющих точки на поверхности. Достаточно ввести новые параметры $\bar{\eta}^1 = f(\eta^1, \eta^2)$, $\bar{\eta}^2 = g(\eta^1, \eta^2)$ и считать эту зависимость однозначно обратимой (требуя, если это необходимо, гладкости функций f и g).

Упражнение. Найти поверхность S и координатные линии, если

$$\frac{y^1}{a} = \frac{\eta^1 + \eta^2}{1 + \eta^1\eta^2}, \quad \frac{y^2}{b} = \frac{1 - \eta^1\eta^2}{1 + \eta^1\eta^2}, \quad \frac{y^3}{c} = \frac{\eta^1 - \eta^2}{1 + \eta^1\eta^2},$$

a, b, c — положительные постоянные.

Пусть M — точка на поверхности S с координатами η^α, $M_1 \subset S$ — соседняя с ней точка с координатами $u^\alpha + du^\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Обозначим через y^γ и $y^\gamma + dy^\gamma$, $\gamma = 1, 2, 3$, декартовы координаты точек M и M_1 в пространстве. Тогда из уравнений (2.2.1) имеем

$$dy^\gamma = \frac{\partial y^\gamma}{\partial \eta^\alpha}\, d\eta^\alpha. \tag{2.2.2}$$

Квадрат расстояния между точками M и M_1 есть $ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2$, и в силу выражения (2.2.2) находим

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} d\eta^\alpha d\eta^\beta, \tag{2.2.3}$$

где

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{3} \frac{\partial y^\gamma}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial y^\gamma}{\partial \eta^\beta}. \tag{2.2.4}$$

Из формулы (2.2.3) по теореме деления тензоров следует, что $a_{\alpha\beta}$ — *ковариантный тензор 2-го ранга*, который называется *метрическим тензором поверхности*, так как длина элемента дуги даётся формулой (2.2.3).

Если $a = |a_{\alpha\beta}|$ — определитель и $a^{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение $a_{\alpha\beta}$ в a, делённое на a, то

$$a^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\tau. \tag{2.2.5}$$

Введём объекты

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} = \sqrt{a}\, e_{\alpha\beta}, \quad \mathcal{E}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{\alpha\beta}, \tag{2.2.6}$$

где $e_{\alpha\beta}$, $e^{\alpha\beta}$ — антисимметричные объекты: $e_{11} = e_{22} = 0$, $e_{12} = -e_{21} = 1$; $e^{11} = e^{22} = 0$, $e^{12} = -e^{21} = 1$. Величины $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{E}^{\alpha\beta}$ суть тензоры 2-го ранга; они носят название $\mathcal{E}$-объектов.

Длина (модуль) A контрвариантного вектора A^α есть

$$A = (a_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta)^{1/2}. \tag{2.2.7}$$

Длина ковариантного вектора B_α:

$$B = (a^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta)^{1/2}. \tag{2.2.8}$$

Единичный вектор q^α удовлетворяет равенству

$$a_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta = 1. \tag{2.2.9}$$

Разделив (2.2.3) на ds^2, получим

$$a_{\alpha\beta} \frac{d\eta^\alpha}{ds} \frac{d\eta^\beta}{ds} = 1, \tag{2.2.10}$$

т. е. $d\eta^\alpha/ds$ — единичный вектор.

С помощью тензоров $a_{\alpha\beta}$ и $a^{\alpha\beta}$ можно поднимать и опускать индексы, причём операции подчинены тем же законам, что и в случае пространственных тензоров.

Направление MM_1 на поверхности S вполне определяется единичным вектором $d\eta^\alpha/ds$. В самом деле, в декартовых координатах такое направлением задаётся вектором dy^γ/ds, но из (2.2.2)

$$\frac{dy^\gamma}{ds} = \frac{\partial y^\gamma}{\partial \eta^\alpha} \frac{d\eta^\alpha}{ds}, \tag{2.2.11}$$

т. е. dy^γ/ds известно, если $d\eta^\alpha/ds$ известно.

Если q^α — какой-либо единичный контрвариантный вектор, то всегда можно выбрать $d\eta^\alpha/ds$ так, чтобы

$$\frac{d\eta^\alpha}{ds} = q^\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \tag{2.2.12}$$

Значит, каждый единичный вектор q^α определяет на S единственное направление. В частности, любой контрвариантный вектор A^α определяет на S направление A^α/A, где A — длина вектора, см. формулу (2.2.7).

Пусть в точке $M_1 \subset S$ имеются два направления: $d\eta^\alpha/ds$ и $d'\eta^\alpha/ds$. По формуле (2.2.11) им соответствуют пространственные векторы

$$\frac{dy^\gamma}{ds} = \frac{\partial y^\gamma}{\partial \eta^\alpha}\frac{d\eta^\alpha}{ds}, \qquad \frac{d'y^\gamma}{ds} = \frac{\partial y^\gamma}{\partial \eta^\beta}\frac{d'\eta^\beta}{ds}. \tag{2.2.13}$$

Угол θ между двумя направлениями:

$$\cos\theta = \sum_{\gamma=1}^{3}\frac{dy^\gamma}{ds}\frac{d'y^\gamma}{ds} = a_{\alpha\beta}\frac{d\eta^\alpha}{ds}\frac{d'\eta^\beta}{ds}, \tag{2.2.14}$$

где использованы равенства (2.2.13) и (2.2.4). Если q_1^α и q_2^α — два единичных вектора, то можно считать $d\eta^\alpha/ds = q_1^\alpha$, $d'\eta^\alpha/ds = q_2^\alpha$. Поэтому

$$\cos\theta = a_{\alpha\beta}q_1^\alpha q_2^\alpha \tag{2.2.15}$$

и *условие ортогональности направлений* q_1^α и q_2^α есть

$$a_{\alpha\beta}q_1^\alpha q_2^\alpha = 0. \tag{2.2.16}$$

Упражнения. 1) Введём вектор

$$\nu^\alpha = \mathcal{E}^{\beta\alpha}q_{1\beta}. \tag{2.2.17}$$

Доказать, что ν^α ортогонален к q_1^α и

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta}q_1^\alpha\nu^\beta = 1. \tag{2.2.18}$$

Поворот от вектора q_1^α к ν^α считается положительным, если $\mathcal{E}_{\alpha\beta}q_1^\alpha\nu^\beta > 0$.

2) Если ω — угол между координатными кривыми, то

$$\cos\omega = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}}$$

и условие ортогональности координатных кривых есть $a_{12} = 0$.

3) Показать, что поворот от η^1-кривой к η^2-кривой положителен и

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}a_{12}}}.$$

4) Доказать, что элемент площади на поверхности даётся выражением
$$dS = \sqrt{a}\, d\eta^1\, d\eta^2. \tag{2.2.19}$$

Указание. Для малых расстояний ds_1 и ds_2 вдоль координатных линий $dS = ds_1 ds_2 \sin\omega$.

Геодезические кривые. Уравнение кривой на поверхности S задаётся в виде
$$\eta^\alpha = f^\alpha(t), \tag{2.2.20}$$

где t — параметр. Длина кривой между точками A и B (точка означает производную по t) равна
$$L = \int\limits_A^B (a_{\alpha\beta}\dot{\eta}^\alpha\dot{\eta}^\beta)^{1/2} dt, \tag{2.2.21}$$

причём точке A отвечает значение t_1, а точке B — значение t_2.

Рассмотрим кривые, проходящие через точки A и B, см. рис. 2.4. Кривая, имеющая минимальную длину среди всех кривых, соединяющих заданные точки A и B (если она существует), называется *геодезической кривой* (линией). Например, часть окружности максимального радиуса на сфере, соединяющая две заданные точки, есть геодезическая кривая.

Найдём уравнение геодезической кривой. Пусть Γ — геодезическая кривая, Γ', Γ'', ... — другие кривые, проходящие через точки A и B; точка $M \subset \Gamma$ имеет координаты η^α, а $M' \subset \Gamma$ — $\eta'^\alpha = \eta^\alpha + \theta\omega^\alpha$, где $|\theta| \ll 1$ — малый параметр,

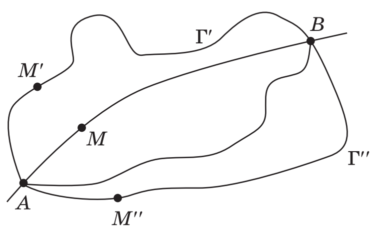

Рис. 2.4
К определению геодезической кривой

ω^α — конечный контрвариантный вектор и $\omega^\alpha(t_0) = 0$, $\omega^\alpha(t_1) = 0$. Значит, L' — длина кривой Γ' — есть функция θ. Имеем

$$L' = L + \theta\left(\frac{\partial L'}{\partial\theta}\right)_{\theta=0} + \frac{1}{2}\,\theta^2\left(\frac{\partial^2 L'}{\partial\theta^2}\right)_{\theta=0} + \ldots \tag{2.2.22}$$

Второе слагаемое в правой части выражения (2.2.22) есть первая вариация длины L и обозначается δL. Так как кривая Γ — геодезическая, то её длина меньше длины любой другой кривой, соединяющей точки A и B. Значит, L' достигает минимума при $\theta = 0$, откуда $(\partial L'/\partial\theta)_{\theta=0} = 0$ или $\delta L = 0$ для геодезической линии.

Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta^\alpha)$ и

$$w(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = (a_{\alpha\beta}\dot\eta^\alpha\dot\eta^\beta)^{1/2}, \tag{2.2.23}$$

тогда

$$w' \equiv w(\boldsymbol{\eta} + \theta\boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\eta}} + \theta\dot{\boldsymbol{\omega}})$$

и

$$\left(\frac{\partial w'}{\partial\theta}\right)_{\theta=0} = \frac{\partial w}{\partial\eta^\alpha}\,\omega^\alpha + \frac{\partial w}{\partial\dot\eta^\alpha}\,\dot\omega^\alpha.$$

Поскольку $L' = \int\limits_A^B w'\,dt$, то

$$\delta L = \theta\left(\frac{\partial L'}{\partial\theta}\right)_{\theta=0} = \theta\int\limits_A^B \left(\frac{\partial w}{\partial\eta^\alpha}\,\omega^\alpha + \frac{\partial w}{\partial\dot\eta^\alpha}\,\dot\omega^\alpha\right)dt =$$

$$= \theta\int\limits_A^B \left[\frac{\partial w}{\partial\eta^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial\dot\eta^\alpha}\right)\right]\omega^\alpha\,dt. \tag{2.2.24}$$

Внеинтегральное слагаемое равно нулю, так как $\omega^\alpha(t_1) = \omega^\alpha(t_2) = 0$. В силу произвольности ω^α из (2.2.24) выводим равенства ($\delta\Gamma = 0$ для геодезической)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial\dot\eta^\alpha}\right) - \frac{\partial w}{\partial\eta^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{2.2.25}$$

Добавление к (2.2.25) условий прохождения кривой Γ через данные точки A и B полностью определяют геодезическую линию Γ.

Если в качестве параметра взять длину дуги s, то равенство (2.2.23) перейдёт в равенство $w = 1$ вдоль Γ, а уравнения (2.2.25) примут вид

$$a_{\alpha\beta}\frac{d^2\eta^\beta}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\frac{d\eta^\beta}{ds}\frac{d\eta^\gamma}{ds} = 0,$$

где

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial\eta^\alpha} + \frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial\eta^\beta} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial\eta^\gamma}\right) \tag{2.2.26}$$

есть символы Кристоффеля поверхности. Поднимая индекс α, придём к окончательной форме уравнений геодезической кривой:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\eta^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma}\frac{d\eta^\beta}{ds}\frac{d\eta^\gamma}{ds} = 0,\\ \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma} = a^{\alpha\tau}\Gamma_{\tau\beta\gamma}, \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2.\end{gathered} \tag{2.2.27}$$

Замечание 2.3. Символы Кристоффеля на поверхности образуются из $a_{\alpha\beta}$ точно таким же образом, как и символы Кристоффеля в пространстве образуются из $g_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = 1,2,3$, см. формулы (1.5.8), (1.5.9).

Возьмём геодезическую линию Γ и точку на ней с различными криволинейными координатами η^α и $\bar\eta^\alpha$, являющимися функциями дуги s этой линии. Тогда

$$\frac{d\bar\eta^\alpha}{ds} = \frac{d\bar\eta^\alpha}{d\eta^\tau}\frac{d\eta^\tau}{ds} \tag{2.2.28}$$

и после ещё одного дифференцирования

$$\frac{d^2\bar\eta^\alpha}{ds^2} = \frac{\partial\bar\eta^\alpha}{\partial\eta^\tau}\frac{d^2\eta^\tau}{ds^2} + \frac{\partial^2\bar\eta^\alpha}{\partial\eta^\tau\partial\eta^\sigma}\frac{d\eta^\tau}{ds}\frac{d\eta^\sigma}{ds}. \tag{2.2.29}$$

Так как точка лежит на геодезической кривой, то для η^α и $\bar\eta^\alpha$ выполнены уравнения (2.2.27), поэтому выражения (2.2.29) с учётом равенства (2.2.28) примут вид

$$\left(\frac{\partial^2\bar\eta^\alpha}{\partial\eta^\sigma\partial\eta^\tau} - \Gamma^\rho_{\ \sigma\tau}\frac{\partial\bar\eta^\alpha}{\partial\eta^\rho} + \bar\Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma}\frac{\partial\bar\eta^\beta}{\partial\eta^\sigma}\frac{\partial\bar\eta^\gamma}{\partial\eta^\tau}\right)\frac{d\eta^\sigma}{ds}\frac{d\eta^\tau}{ds} = 0.$$

В силу произвольности $d\eta^\sigma/ds$ и симметричности выражения в скобках по σ и τ получим

$$\frac{\partial^2\bar\eta^\alpha}{\partial\eta^\sigma\partial\eta^\tau} - \Gamma^\rho{}_{\sigma\tau}\frac{\partial\bar\eta^\alpha}{\partial\eta^\rho} + \bar\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{\partial\bar\eta^\beta}{\partial\eta^\sigma}\,\frac{\partial\bar\eta^\gamma}{\partial\eta^\tau} = 0. \qquad (2.2.30)$$

Равенство (2.2.30) показывает связь между символами Кристоффеля в двух системах координат.

Точно таким же образом, исходя из формулы

$$\frac{d\eta^\tau}{ds} = \frac{\partial\eta^\alpha}{\partial\bar\eta^\tau}\,\frac{d\bar\eta^\tau}{ds}\,,$$

найдём обратное соотношение

$$\frac{\partial^2\eta^\alpha}{\partial\eta^\sigma\partial\eta^\tau} - \bar\Gamma^\rho{}_{\sigma\tau}\frac{\partial\eta^\alpha}{\partial\bar\eta^\rho} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{\partial\eta^\beta}{\partial\bar\eta^\sigma}\,\frac{\partial\eta^\gamma}{\partial\bar\eta^\tau} = 0. \qquad (2.2.31)$$

В декартовой системе координат компоненты $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ метрического тензора суть постоянные, и в ней символы Кристоффеля равны нулю. На произвольной поверхности вообще невозможно найти такие координаты. Однако всегда можно выбрать координатную систему, в которой все символы Кристоффеля обращаются в ноль в заданной точке O. Такие координаты называются *геодезическими координатами в точке O*, см. п. 1.6. Действительно, пусть η^α — данная система координат, η^α_o — координаты заданной точки $O \subset S$. Если есть такая система координат $\bar\eta^\alpha$, что все $\bar\Gamma^\rho{}_{\sigma\tau} = 0$ в точке O, то из уравнения (2.2.31) в точке O получим

$$\frac{\partial^2\eta^\alpha}{\partial\bar\eta^\sigma\partial\bar\eta^\tau} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{\partial\eta^\beta}{\partial\bar\eta^\sigma}\,\frac{\partial\eta^\gamma}{\partial\bar\eta^\tau} = 0. \qquad (2.2.32)$$

Обратно, если в точке O выполнено условие (2.2.32), то все $\bar\Gamma^\rho{}_{\sigma\tau} = 0$. Сделаем замену

$$\eta^\alpha = \eta^\alpha_o + \bar\eta^\alpha - \frac{1}{2}\,(\Gamma^\alpha{}_{\sigma\tau})_o\,\bar\eta^\sigma\bar\eta^\tau. \qquad (2.2.33)$$

Тогда $\bar\eta^\alpha = 0$ в точке O и $\partial\eta^\alpha/\partial\bar\eta^\rho = \delta^\alpha{}_\rho$. Значит,

$$\frac{\partial^2\eta^\alpha}{\partial\bar\eta^\sigma\partial\bar\eta^\tau} = -(\Gamma^\alpha{}_{\sigma\tau})_o,$$

и равенство (2.2.32) в точке O выполняется, т. е. переменные $\bar\eta^\alpha$ — геодезические координаты в точке O. Отметим, что символы Кристоффеля в таких координатах равны нулю только в заданной точке, а не всюду.

Дифференцирование тензоров на поверхности. Пусть AB — кривая на S и в каждой её точке определён вектор X^α. Координаты η^α вдоль этой кривой и компоненты векторного поля X^α являются функциями параметра t. Возьмём другую координатную систему $\bar\eta^\alpha$, тогда компоненты $\bar X^\alpha$ в новых координатах есть

$$\bar X^\alpha = \frac{\partial\bar\eta^\alpha}{\partial\eta^\sigma}\, X^\sigma\,. \tag{2.2.34}$$

Дифференцируя это равенство по t и используя соотношения (2.2.30), (2.2.34), получим уравнение

$$\frac{d\bar X^\alpha}{dt} + \bar\Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma}\bar X^\beta\frac{d\bar\eta^\gamma}{dt} = \frac{\partial\bar\eta^\alpha}{\partial\eta^\rho}\left(\frac{dX^\rho}{dt} + \Gamma^\rho_{\ \sigma\tau}X^\sigma\frac{d\eta^\tau}{dt}\right). \tag{2.2.35}$$

Оно показывает, что выражение

$$\frac{DX^\alpha}{Dt} = \frac{dX^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma}X^\beta\frac{d\eta^\gamma}{dt} \tag{2.2.36}$$

есть контрвариантный вектор — *абсолютная* (*индивидуальная*) *производная вектора* X^α *на* S.

Векторное уравнение

$$\frac{DX^\alpha}{Dt} = \frac{dX^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma}X^\beta\frac{d\eta^\gamma}{dt} = 0 \tag{2.2.37}$$

справедливо в любой координатной системе. Если вектор X^α задан в какой-либо точке кривой AB, то он однозначно определяется из уравнения (2.2.37) и в любой другой её точке. Далее, формула (2.2.37) имеет тот же самый вид, что и уравнение (2.1.1) для параллельного векторного поля в пространстве. Поэтому можно говорить о системе векторов, *параллельных относительно поверхности* S. Важно отметить, что параллельное векторное поле относительно поверхности определяется *вдоль кривой на этой поверхности*, т. е. параллельный вектор зависит от вида кривой. В частности, если на S задан замкнутый контур без самопересечений, то нет никаких оснований ожидать, что при построении параллельного векторного поля придём в начальную точку (скажем, $A = B$) с вектором, равным начальному.

Упражнения. 1) Показать, что $a_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$ есть постоянная величина, если X^α и Y^α — два параллельных векторных поля на S.

2) Пусть X^α — векторное поле, удовлетворяющее уравнению (2.2.37), тогда $a_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta$ — постоянная величина вдоль кривой на S.

3) Показать, что если X^α — параллельное векторное поле на кривой $AB \subset S$, то X^α составляет постоянный угол с S.

(Из этих примеров видно, что параллельность относительно S обладает многими свойствами обычных параллельных векторов в евклидовом пространстве: их длины равны, углы между ними равны.)

4) Доказать, что если X^α — параллельное векторное поле на кривой $AB \subset S$, вдоль которой меняется параметр t, то *ковариантные* компоненты поля есть решение уравнения

$$\frac{DX_\alpha}{Dt} = \frac{dX_\alpha}{dt} - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha}X_\gamma\frac{d\eta^\beta}{dt} = 0.$$

Рассмотрим задачу, аналогичную уже решённой в разделе I для пространственных тензоров, а именно, задачу построения новых тензоров при помощи дифференцирования заданных на поверхности S тензорных полей, причём метод решения будет тот же самый. Просто нужно заменить слова «тензоры», «координаты» на «тензоры на поверхности», «координаты на поверхности». Поэтому ограничимся лишь формулировками результатов для тензоров на поверхности.

Если $X^\alpha{}_{\beta\gamma}$ — смешанные, зависящие от параметра t компоненты тензора 3-го ранга, определённые вдоль кривой $AB \subset \subset S$, то объекты

$$\frac{DX^\alpha{}_{\beta\gamma}}{Dt} \equiv \frac{dX^\alpha{}_{\beta\gamma}}{dt} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\tau}X^\sigma{}_{\beta\gamma}\frac{d\eta^\tau}{dt} - \\ - \Gamma^\sigma{}_{\beta\tau}X^\alpha{}_{\sigma\gamma}\frac{d\eta^\tau}{dt} - \Gamma^\sigma{}_{\tau\gamma}X^\alpha{}_{\beta\sigma}\frac{d\eta^\tau}{dt} \quad (2.2.38)$$

образуют тензор того же ранга и типа, что и $X^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Этот тензор называется индивидуальной (абсолютной) производной $X^{\alpha}_{\beta\gamma}$ по t.

Пусть $X^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — тензорное поле, определённое на всей поверхности S, тогда его компоненты есть функции η^{δ} и объекты

$$\nabla_{\delta} X^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv \frac{\partial X^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial \eta^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\delta} X^{\sigma}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\delta} X^{\alpha}_{\sigma\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\delta} X^{\alpha}_{\beta\delta} \tag{2.2.39}$$

образуют тензор 4-го ранга, называемый *ковариантной производной тензора* $X^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

Предположим, что в данной точке $O \subset S$ введены геодезические координаты. Тогда все символы Кристоффеля равны в этой точке нулю, а из выражений (2.2.38), (2.2.39) следует, что в точке O абсолютная и ковариантная производные тензора совпадают с обычными производными. Поэтому правила дифференциального исчисления для производной суммы и произведения функций справедливы для абсолютной и ковариантной производных тензоров (в данной точке O).

Далее, при использовании геодезических координат в точке O обычные производные тензоров $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ и их определителя a равны нулю. Значит, *ковариантные производные метрических тензоров* $a_{\alpha\beta}$ *и* $a^{\alpha\beta}$, $\mathcal{E}$*-объектов и символов Кронекера равны нулю* — результат, аналогичный полученному для $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta\gamma}$, $e^{\alpha\beta\gamma}$ в пространственном случае. Следовательно, при отыскании абсолютных и ковариантных производных от таких тензоров на поверхности с ними можно обращаться как с постоянными.

Упражнения. 1) Доказать равенство

$$\nabla_{\beta} X_{\alpha} - \nabla_{\alpha} X_{\beta} = \frac{\partial X_{\alpha}}{\partial \eta^{\beta}} - \frac{\partial X_{\beta}}{\partial \eta^{\alpha}}\,.$$

2) Установить равенство

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(a_{\beta\gamma} X^{\beta} Y^{\gamma}\right) = \nabla_{\alpha} X_{\beta} Y^{\beta} + X^{\beta} \nabla_{\alpha} Y_{\beta}.$$

3) Если X — длина вектора X^α, то

$$\frac{\partial X}{\partial \eta^\alpha} = \nabla_\alpha X_\beta \frac{X^\beta}{X}\,.$$

4) Исходя из тензорного равенства $\nabla_\gamma \mathcal{E}_{\alpha\beta} = 0$, доказать, что свёртка

$$\Gamma^{\beta}{}_{\beta\gamma} = \frac{\partial(\log\sqrt{a}\,)}{\partial \eta^\gamma}\,.$$

Тензор Римана–Кристоффеля и гауссова кривизна поверхности. Пусть X_α — ковариантное векторное поле, заданное на всей поверхности S. Его ковариантная производная

$$\nabla_\beta X_\alpha = \frac{\partial X_\alpha}{\partial \eta^\beta} - \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta} X_\sigma$$

есть тензор 2-го ранга. Взяв от неё ковариантную производную, получим новый тензор $\nabla_\alpha \nabla_\gamma X_\alpha$. Легко убедиться, что этот тензор не симметричен и

$$\nabla_\beta \nabla_\gamma X_\alpha - \nabla_\gamma \nabla_\beta X_\alpha = R^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} X_\beta, \tag{2.2.40}$$

где

$$R^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial \eta^\beta}\Gamma^{\delta}{}_{\alpha\gamma} - \frac{\partial}{\partial \eta^\gamma}\Gamma^{\delta}{}_{\alpha\beta} + {} \\ + \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\delta}{}_{\beta\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\sigma}. \tag{2.2.41}$$

Соотношение (2.2.40) показывает, что $R^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma}$ образуют смешанные компоненты тензора 4-го ранга, а из (2.2.41) следует, что он зависит только от метрического тензора поверхности S и его производных. Он носит название *тензора Римана–Кристоффеля поверхности*.

Ковариантные компоненты равны

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = a_{\delta\sigma} R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma}. \tag{2.2.42}$$

Легко видеть, что $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ антисимметричен относительно δ, α и β, γ:

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\delta\alpha\gamma\beta}, \quad R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\delta\beta\gamma}.$$

Образуем скалярное поле на S:

$$K = \frac{1}{4}\,\mathcal{E}^{\delta\alpha}\mathcal{E}^{\beta\gamma}R_{\delta\alpha\beta\gamma}. \tag{2.2.43}$$

Ясно, что этот скаляр есть *инвариант относительно преобразования криволинейных координат на* S. Умножая формулу (2.2.43) на $\mathcal{E}_{\lambda\mu}\mathcal{E}_{\sigma\tau}$ и пользуясь антисимметрией $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$, получим

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = K\mathcal{E}_{\lambda\mu}\mathcal{E}_{\sigma\tau}, \tag{2.2.44}$$

т. е. тензор Римана–Кристоффеля выражается через скаляр K и $\mathcal{E}$-объекты. Величина K называется *полной, или гауссовой, кривизной поверхности*. Она определяется только внутренними свойствами поверхности и зависит от метрического тензора $a_{\alpha\beta}$ и его производных.

Упражнения. 1) Показать, что $K = R_{1212}/a$.

2) Если система координат на S ортогональна ($a_{12} = 0$), то

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial\eta^1}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial a_{22}}{\partial\eta^1}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta^2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial\eta^2}\right)\right].$$

Дифференциальные параметры Бельтрами. Пусть φ и ψ — скалярные функции координат η^α на поверхности, а φ_α и ψ_α — их производные: $\varphi_\alpha = \partial\varphi/\partial\eta^\alpha$, $\psi_\alpha = \partial\psi/\partial\eta^\alpha$. Они есть ковариантные векторы на S.

Скалярная величина

$$\nabla(\varphi,\psi) = a^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\psi_\beta \tag{2.2.45}$$

называется *бельтрамиевым дифференциальным параметром двух функций*.

Положим $\varphi = \psi$, тогда

$$\nabla\varphi \equiv \nabla(\varphi,\varphi) = a^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\varphi_\beta \tag{2.2.46}$$

и этот скаляр носит название *бельтрамиева первого дифференциального параметра*.

Возьмём контрвариантный вектор X^α на S, вычислим его ковариантную производную и свернём её по двум индексам:

$$\nabla_\alpha X^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial\eta^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}X^\beta. \tag{2.2.47}$$

Этот скаляр можно назвать *дивергенцией вектора* X^α *на поверхности*. Поскольку

$$\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial\sqrt{a}}{\partial\eta^\beta},$$

то выражение (2.2.47) перепишется в виде

$$\nabla_\alpha X^\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial\eta^\alpha} (\sqrt{a}\, X^\alpha), \tag{2.2.48}$$

удобном для вычислений.

В частности, если $X^\alpha = a^{\alpha\beta}\varphi_\beta$ и φ — инвариантная функция координат на S, то

$$\nabla_\alpha X^\alpha = a^{\alpha\beta}\varphi_{\beta\alpha} = a^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}.$$

Этот скаляр называется *бельтрамиевым вторым дифференциальным параметром функции* φ; обычно его обозначают

$$\Delta\varphi = a^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial\eta^\alpha} \left(\sqrt{a}\, a^{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta^\beta}\right). \tag{2.2.49}$$

Второй дифференциальный параметр часто называют оператором Лапласа–Бельтрами и обозначают Δ_S.

Теорема Грина на поверхности. Пусть C — замкнутый контур на поверхности, рис. 2.5.

Определим сначала положительное направление обхода контура. Возьмём простейший контур в виде квадрата $\eta^1 = 0$, $\eta^2 = 0$, $\eta^1 = 1$, $\eta^2 = 1$. В качестве *положительного* примем направление, в котором обход этих кривых совершается в указанном порядке, а в качестве *отрицательного* — противоположное. Направление обхода любого другого контура будет положительным или отрицательным в зависимости от того, совпадает оно или нет с положительным направлением обхода простейшего контура.

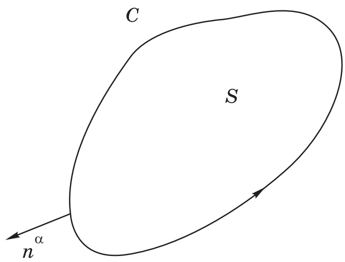

Рис. 2.5
К теореме Грина на поверхности

Обозначим область, лежащую внутри C, через S. Из теоремы Грина для функций $P(\eta^1, \eta^2)$, $Q(\eta^1, \eta^2)$ имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_S \frac{\partial P}{\partial \eta^1}\, d\eta^1\, d\eta^2 &= \int\limits_C P \frac{d\eta^2}{ds}\, ds, \\ \int\limits_S \frac{\partial Q}{\partial \eta^2}\, d\eta^1\, d\eta^2 &= -\int\limits_C Q \frac{d\eta^1}{ds}\, ds, \end{aligned} \tag{2.2.50}$$

причём направление обхода контура C при интегрировании принимается положительным.

Если X^α — векторное поле на $S \cup C$, то

$$\int\limits_S \nabla_\alpha X^\alpha\, dS = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial \eta^\alpha} (\sqrt{a}\, X^\alpha)\, d\eta^1\, d\eta^2 =$$
$$= \int\limits_C \sqrt{a} \left(X^1 \frac{d\eta^2}{ds} - X^2 \frac{d\eta^1}{ds} \right) ds = \int\limits_C \mathcal{E}_{\alpha\beta} X^\alpha \frac{d\eta^\beta}{ds}\, ds.$$

Были использованы формула $dS = \sqrt{a}\, d\eta^1\, d\eta^2$ и равенства (2.2.50) для специального вида P и Q.

Обозначим через n^α *единичный вектор внешней нормали к контуру* C, рис. 2.5. Его ковариантные компоненты равны $n_\alpha = \mathcal{E}_{\alpha\beta} d\eta^\beta / ds$, и формула Грина примет вид

$$\int\limits_S \nabla_\alpha X^\alpha\, dS = \int\limits_C X_\alpha n^\alpha\, ds. \tag{2.2.51}$$

Положим в этой формуле $X^\alpha = a^{\alpha\beta}\varphi_\beta\psi$ с функциями φ и ψ, заданными на поверхности. Тогда

$$\nabla_\alpha X^\alpha = a^{\alpha\beta}\varphi_\beta\psi_\alpha + a^{\alpha\beta}\varphi_{\beta\alpha}\psi = \nabla(\varphi,\psi) + \psi\Delta\varphi$$

согласно формулам (2.2.45), (2.2.49). Равенство (2.2.51) перейдёт в следующее:

$$\int\limits_S \nabla(\varphi,\psi)\, dS + \int\limits_S \psi\Delta\varphi\, dS = \int\limits_C \psi(\varphi_\alpha n^\alpha)\, ds = \int\limits_C \psi\nabla\varphi\cdot\mathbf{n}\, ds. \tag{2.2.52}$$

Упражнения. 1) Доказать, что

$$\int\limits_S (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dS = \int\limits_C (\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi)\cdot\mathbf{n}\, ds;$$

$$\int\limits_S (\nabla\varphi + \varphi\Delta\varphi)\, dS = \int\limits_C \varphi\nabla\varphi\cdot\mathbf{n}\, ds.$$

2) Вывести из формул (2.2.50) равенство

$$\int\limits_S \mathcal{E}^{\alpha\beta}\nabla_\beta X_\alpha\, dS = -\int\limits_C X_\alpha \frac{d\eta^\alpha}{ds}\, ds$$

для любого ковариантного векторного поля X_α.

2.3. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В п. 2.2 изучались внутренние свойства поверхностей, которые могут быть описаны безотносительно к окружающему пространству. Здесь же будут исследоваться свойства поверхностей, которые рассматриваются как вложенные в пространство. Поэтому придётся иметь дело с двумя разными системами координат: криволинейными для пространства x^i $(i = 1, 2, 3)$ и криволинейными координатами на поверхности η^α $(\alpha = 1, 2)$. Индексы пространственных тензоров будут обозначаться латинскими буквами $i, j, k, r, \ldots$, а индексы тензоров на поверхности — греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ Так, объект A^{ij}_{α} представляет собой *контрвариантный тензор 2-го ранга в x-координатах* и *ковариантный вектор в η-координатах*.

Упражнение. Показать, что при замене x^i и η^α на новые координаты $\bar{x}^i$, $\bar{\eta}^\alpha$ объект 4-го ранга преобразуется так:

$$\bar{A}^{ij}_{\alpha\beta} = A^{kr}_{\sigma\tau} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r} \frac{\partial \eta^\sigma}{\partial \bar{\eta}^\alpha} \frac{\partial \eta^\tau}{\partial \bar{\eta}^\beta} \, .$$

Касательные и нормальный векторы к поверхности. Уравнения поверхности записываются в виде

$$x^i = x^i(\eta^\alpha), \tag{2.3.1}$$

откуда

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \eta^\alpha} \, d\eta^\alpha. \tag{2.3.2}$$

Здесь dx^i есть пространственный вектор и скаляр на поверхности S, так как его составляющие не изменяются при преобразовании η-координат. Точно так же $d\eta^\alpha$ есть вектор на S и пространственный скаляр. Поэтому $\partial x^i / \partial \eta^\alpha$ — контрвариантный пространственный вектор и ковариантный вектор на поверхности.

Введём обозначение

$$x^i_\alpha \equiv \frac{\partial x^i}{\partial \eta^\alpha} \, . \tag{2.3.3}$$

Направление $d\eta^\alpha / ds$ на поверхности, как следует из (2.3.2), в пространственных координатах записывается так:

$$\frac{dx^i}{ds} = x^i_\alpha \frac{d\eta^\alpha}{ds} \, . \tag{2.3.4}$$

Каждый вектор A^α на поверхности имеет соответствующий ему пространственный вектор

$$A^i = x^i_\alpha A^\alpha. \tag{2.3.5}$$

Эти два вектора определяются одним и тем же направлением и одной и той же величиной. Вектор A^r, направление которого совпадает с касательной к поверхности, носит название *касательного вектора к* S.

Найдём выражение для вектора, нормального к S в любой её точке. Для этого рассмотрим два вектора X^α и Y^α на S, такие, что поворот от X^α к Y^α *положителен*, т. е. совпадает с поворотом от кривой η^1 к кривой η^2. Пространственными координатами этих векторов будут

$$X^i = x^i_\alpha X^\alpha, \quad Y^i = x^i_\alpha Y^\alpha. \tag{2.3.6}$$

Единичный вектор, нормальный к S, должен быть ортогонален как к X^i, так и к Y^i. Если это вектор $\mathbf{N}$, то его ковариантными компонентами будут

$$N_i(XY\sin\theta) = e_{ijk}X^jY^k, \tag{2.3.7}$$

где X, Y — длины векторов X^i, Y^i, а θ — угол между ними. Направление $\mathbf{N}$ таково, что *ориентация тетраэдра* $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{N})$ *положительна в пространстве*. Из выражений (2.3.6), (2.3.7) получим

$$N_i(XY\sin\theta) = e_{ijk}x^j_\alpha x^k_\beta X^\alpha Y^\beta.$$

Так как поворот X^α, Y^α положителен, то $XY\sin\theta = \mathcal{E}_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta$ и предыдущее равенство сводится к виду

$$(N_i\mathcal{E}_{\alpha\beta} - e_{ijk}x^j_\alpha x^k_\beta)X^\alpha Y^\beta = 0$$

для любых значений поверхностных векторов. Значит,

$$N_i\mathcal{E}_{\alpha\beta} = e_{ijk}x^j_\alpha x^k_\beta. \tag{2.3.8}$$

Умножая это равенство на $\mathcal{E}^{\alpha\beta}$, найдём

$$N_i = \frac{1}{2}\,\mathcal{E}^{\alpha\beta}e_{ijk}x^j_\alpha x^k_\beta, \tag{2.3.9}$$

откуда видно, что N_i есть ковариантный пространственный вектор и скаляр на S.

Упражнения. 1) Показать, что $N_i x^i_\alpha = 0$ и векторы $(\mathbf{x}_{\eta^1}, \mathbf{x}_{\eta^2}, \mathbf{N})$ имеют положительную ориентацию.

2) Выбрана специальная система координат так, что $x^3 = 0$ есть уравнение S, а в качестве η-кривых взято пересечение S с x^1- и x^2-ортогональными поверхностями. Показать, что имеют место следующие соотношения: а) $x^i_1 = \delta^i_1$, $x^i_2 = \delta^i_2$; б) $a_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$; $g_{\alpha 3} = 0$; $a^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}$; $g^{\alpha 3} = 0$; $g^{33} = 1/g_{33}$; в) $N^i = (0, 0, 1/\sqrt{g}_{33})$.

3) Проекция вектора X^i на поверхность есть $X^i - N^i(n^j X_j)$ (или $\mathbf{X} - \mathbf{N}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{X})$). Показать, что эта проекция — вектор $a^{\alpha\beta} x^i_\alpha x^j_\beta X_j$.

Указание. Использовать специальную систему координат из задачи 2.

4) Пусть $x^i = y^i$ $(i = 1, 2, 3)$ — декартова система координат и $\mathbf{x}(\eta^1, \eta^2) = (x^1(\eta^1, \eta^2), x^2(\eta^1, \eta^2), x^3(\eta^1, \eta^2))$. Показать, что нормаль к S равна

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_{\eta^1} \times \mathbf{x}_{\eta^2}}{\sqrt{a}}\,.$$

Тензорное дифференцирование тензоров. Пусть AB — кривая на поверхности S и вдоль неё изменяется параметр t. Если X^i — пространственный вектор, определённый на AB, образует параллельное векторное поле, то (см. формулу (2.1.1))

$$\frac{DX^i}{Dt} = \frac{dX^i}{dt} + ({\Gamma^i}_{jk})_g X^j \frac{dx^k}{dt} = 0. \qquad (2.3.10)$$

Индекс g символа Кристоффеля показывает, что этот символ порождается метрическим тензором g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$. Для ковариантных компонент имеем

$$\frac{DX_i}{Dt} = \frac{dX_i}{dt} - ({\Gamma^j}_{ik})_g X_j \frac{dx^k}{dt} = 0. \qquad (2.3.11)$$

Если X^α $(\alpha = 1, 2)$ — вектор на S, определён на кривой AB и образует параллельное векторное поле относительно S, то

$$\frac{DX^\alpha}{Dt} = \frac{dX^\alpha}{dt} + ({\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma})_a X^\beta \frac{d\eta^\gamma}{dt} = 0, \qquad (2.3.12)$$

а его ковариантные компоненты удовлетворяют уравнениям

$$\frac{DX_\alpha}{Dt} = \frac{dX_\alpha}{dt} - (\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\gamma})_a X_\beta \frac{d\eta^\gamma}{dt} = 0. \qquad (2.3.13)$$

Символы Кристоффеля в формулах (2.3.12), (2.3.13) относятся к поверхности и помечены символом a, так как они порождены тензором $a_{\alpha\beta}$.

Возьмём тензорное поле, заданное на AB, например $X^i{}_{\alpha\beta}$. Это контрвариантный пространственный вектор и ковариантный тензор 2-го ранга на S. Предположим, что A_i — ковариантное векторное поле на кривой AB, параллельное относительно пространства, B^α и C^α — два контрвариантных векторных поля, параллельных относительно S. Тогда $X^i{}_{\alpha\beta} A_i B^\alpha C^\alpha$ есть скалярная функция от t. Её производная по t тоже скаляр как в пространстве, так и на поверхности. Используя условия параллельности названных полей, найдём

$$\frac{d}{dt}(X^i{}_{\alpha\beta} A_i B^\alpha C^\alpha) = \left[\frac{dX^i{}_{\alpha\beta}}{dt} + (\Gamma^i{}_{jk})_g X^j{}_{\alpha\beta}\frac{dx^k}{dt} - \right.$$

$$\left. - (\Gamma^\sigma{}_{\alpha\tau})_a X^i{}_{\alpha\beta}\frac{d\eta^\tau}{dt} - (\Gamma^\sigma{}_{\beta\tau})_a X^i{}_{\alpha\sigma}\frac{d\eta^\tau}{dt}\right] A_i B^\alpha C^\alpha.$$

Это — скаляр, а векторы A_i, B^α, C^α — произвольные. На основании теоремы о делении тензоров выражение

$$\frac{DX^i{}_{\alpha\beta}}{Dt} \equiv \frac{dX^i{}_{\alpha\beta}}{dt} + (\Gamma^i{}_{jk})_g X^j{}_{\alpha\beta}\frac{dx^k}{dt} -$$

$$- (\Gamma^\sigma{}_{\alpha\tau})_a X^i{}_{\alpha\beta}\frac{d\eta^\tau}{dt} - (\Gamma^\sigma{}_{\beta\tau})_a X^i{}_{\alpha\sigma}\frac{d\eta^\tau}{dt} \qquad (2.3.14)$$

является тензором того же типа, что и $X^i{}_{\alpha\beta}$. Он называется *абсолютной производной* $X^i{}_{\alpha\beta}$ по t.

Пусть $X^i{}_{\alpha\beta}$ определён на всей поверхности и его компоненты есть функции от η^α. Поэтому для произвольной кривой

$AB \subset S$ снова получим

$$\frac{DX^i{}_{\alpha\beta}}{Dt} = \left[\frac{\partial X^i{}_{\alpha\beta}}{\partial\eta^\gamma} + (\Gamma^i{}_{jk})_g X^j{}_{\alpha\beta}\frac{dx^k}{d\eta^\gamma} - \right.$$
$$\left. - (\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma})_a X^i{}_{\sigma\beta} - (\Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma})_a X^i{}_{\alpha\sigma}\right]\frac{d\eta^\gamma}{dt}.$$

Так как $d\eta^\gamma/dt$ — произвольный вектор, то выражение в квадратных скобках есть тензор

$$\nabla_\gamma X^i{}_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^i{}_{\alpha\beta}}{\partial\eta^\gamma} + (\Gamma^i{}_{jk})_g X^j{}_{\alpha\beta}\frac{dx^k}{d\eta^\gamma} -$$
$$- (\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma})_a X^i{}_{\sigma\beta} - (\Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma})_a X^i{}_{\alpha\sigma}. \quad (2.3.15)$$

Он один раз контрвариантен в пространственных координатах и трижды ковариантен в поверхностных; назовём его *тензорной производной* $X^i{}_{\alpha\beta}$ по η^γ.

Аналогично можно рассмотреть тензоры любых других типов и получить соответствующие выражения для абсолютных и тензорных производных.

Далее, если выбрать специальные системы координат так, чтобы пространственные координаты были декартовыми, а поверхностные — геодезическими в любой заданной точке на S, то абсолютная и тензорная производные сводятся в данной точке к обычным производным. Значит, к абсолютному и тензорному дифференцированию суммы и произведения применимы те же самые правила, что и для обычного дифференцирования. Следовательно, производные тензоров g_{ij}, $a_{\alpha\beta}$, e_{ijk}, $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ и их разных типов все равны тождественно нулю. Эти тензоры в процессе тензорного дифференцирования могут рассматриваться как постоянные.

Первая, вторая и третья основные квадратичные формы поверхности. Линейный элемент в пространственных координатах равен

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j,$$

а в координатах на поверхности он же равен

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}d\eta^\alpha d\eta^\beta.$$

Возьмём одно и то же перемещение на поверхности и в пространстве, тогда два значения для ds^2 должны быть равны. Значит,

$$g_{ij}dx^i dx^j = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \eta^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial \eta^\beta}\,d\eta^\alpha d\eta^\beta = a_{\alpha\beta}d\eta^\alpha d\eta^\beta,$$

откуда

$$a_{\alpha\beta} = g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \eta^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial \eta^\beta}\,, \tag{2.3.16}$$

поскольку $a_{\alpha\beta}$ и g_{ij} — симметричны.

Дифференциальная квадратичная форма

$$I \equiv a_{\alpha\beta}d\eta^\alpha d\eta^\beta \tag{2.3.17}$$

называется *первой основной квадратичной формой поверхности*. Она, очевидно, определяет квадрат длины элементарного смещения $d\eta^\alpha$ на поверхности.

Упражнения. 1) Показать, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\,\frac{\partial x^i}{\partial \eta^1}\,,\quad \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,\frac{\partial x^i}{\partial \eta^2}\,,\quad i = 1, 2, 3,$$

являются единичными пространственными векторами, касательными соответственно к кривой η^1 и кривой η^2.

2) Показать, что $a_{12}/\sqrt{a_{11}a_{22}}$ есть косинус угла между координатными кривыми на поверхности.

3) Показать, что длины векторов A^i и A^α, где $A^i = \partial x^i/\partial\eta^\alpha\, A^\alpha$, равны между собой и эти векторы определяют одно и то же направление на поверхности.

Возьмём тензор $\nabla_\alpha x^i$; его тензорная производная равна

$$\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial\eta^\alpha\partial\eta^\beta} + ({\Gamma^i}_{jk})_g\frac{\partial x^j}{\partial \eta^\alpha}\,\frac{\partial x^k}{\partial \eta^\beta} - ({\Gamma^\sigma}_{\alpha\beta})_a\frac{\partial x^i}{\partial \eta^\sigma} \tag{2.3.18}$$

и является симметричной по α и β. Вычислим тензорную производную от равенства (2.3.16):

$$g_{ij}\nabla_\gamma\nabla_\alpha x^i\nabla_\beta x^j + g_{ij}\nabla_\alpha x^i\nabla_\gamma\nabla_\beta x^j = \nabla_\gamma a_{\alpha\beta} = 0.$$

Написав ещё два равенства, получаемых из этого круговой перестановкой индексов α, β, γ, складывая затем два из этих равенств и вычитая третье, получим

$$g_{ij}\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i\nabla_\gamma x^j = 0, \tag{2.3.19}$$

так как тензор $\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i$ симметричен относительно α и β. Геометрически равенство (2.3.19) означает, что $\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i$ — пространственный вектор, ортогональный к поверхности. Поэтому он совпадает по направлению с единичным нормальным вектором N^i и существует такое число $b_{\alpha\beta}$, что (*формула Гаусса*)

$$\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i = b_{\alpha\beta}N^i. \tag{2.3.20}$$

Видно, что $b_{\alpha\beta}$ — симметричный тензор 2-го ранга на поверхности и в то же время пространственный скаляр. Выражение

$$II = b_{\alpha\beta}d\eta^\alpha d\eta^\beta \tag{2.3.21}$$

носит название *второй основной квадратичной формы поверхности*.

Упражнение. 1) Доказать, что

$$b_{\alpha\beta} = g_{ij}\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i N^j = \frac{1}{2}\,\mathcal{E}^{\sigma\tau}e_{ijk}\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i\nabla_\sigma x^j\nabla_\tau x^k.$$

2) Если x-координаты — декартовы, то

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\mathcal{E}^{\sigma\tau}e_{ijk}\frac{\partial^2 x^i}{\partial\eta^\alpha\partial\eta^\beta}\,\nabla_\sigma x^j\nabla_\tau x^k.$$

3) Пространственные координаты — прямоугольные декартовы и выбраны так, что касательная плоскость в начале координат, находящемся на поверхности, имеет уравнение $x^3 = 0$. Если x^1 и x^2 выбраны в качестве параметров η^1 и η^2, то показать, что в начале координат будет

а) $x^i_1 = \delta^i_1$, $x^i_2 = \delta^i_2$, $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$, $a = 1$;

б) $(\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta})_a = 0 = (\Gamma_{\gamma\alpha\beta})_a$;

в) $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$;

г) $\dfrac{\partial^2 x^1}{\partial\eta^\alpha\partial\eta^\beta} = \dfrac{\partial^2 x^2}{\partial\eta^\alpha\partial\eta^\beta} = 0, \quad b_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2 x^2}{\partial\eta^\alpha\partial\eta^\beta}\,.$

Рассмотрим теперь тензорную производную единичного нормального вектора N^i. Он является контрвариантным пространственным вектором и скаляром на S. Значит, его тензорная производная есть

$$\nabla_\alpha N^i = \frac{\partial N^i}{\partial \eta^\alpha} + ({\Gamma^i}_{jk})_g N^j \nabla_\alpha x^k. \tag{2.3.22}$$

Поскольку $g_{jk}N^jN^k = 1$, то взяв тензорную производную, получим $g_{jk}N^j\nabla_\alpha N^k = 0$, т. е. пространственный вектор $\nabla_\alpha N^k$ ортогонален к N^k и является касательным к S. Тогда существует число ξ^β_α, что

$$\nabla_\alpha N^i = \xi^\beta_\alpha \nabla_\beta x^i. \tag{2.3.23}$$

Так как N^i нормален к S, то $g_{jk}\nabla_\alpha x^j N^k = 0$, откуда $g_{jk}\nabla_\beta\nabla_\alpha x^j N^k + g_{jk}\nabla_\alpha x^j \nabla_\beta N^k = 0$. С помощью формул (2.3.20), (2.3.23) выводим равенство $b_{\alpha\beta} + g_{jk}\nabla_\alpha x^j \nabla_\gamma x^k \xi^\gamma_\beta = 0$, или $b_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\gamma}\xi^\gamma_\beta$. Отсюда найдём $\xi^\gamma_\beta = -a^{\alpha\gamma}b_{\alpha\beta}$. Следовательно, выражение (2.3.23) принимает вид

$$\nabla_\alpha N^i = -a^{\beta\gamma} b_{\beta\alpha} \nabla_\gamma x^i. \tag{2.3.24}$$

Эти равенства называются *формулами Вейнгартена*. Обозначим через

$$c_{\alpha\beta} = g_{jk}\nabla_\alpha N^j \nabla_\beta N^k \tag{2.3.25}$$

симметричный тензор 2-го ранга на S.

Образуем квадратичную форму

$$III \equiv c_{\alpha\beta} d\eta^\alpha d\eta^\beta, \tag{2.3.26}$$

которая называется *третьей основной квадратичной формой поверхности* S. Используя формулы Вейнгартена (2.3.24), получим для коэффициентов (2.3.26)

$$c_{\alpha\beta} = g_{jk} a^{\sigma\mu} b_{\sigma\alpha} \nabla_\mu x^j a^{\tau\nu} b_{\tau\beta} \nabla_\nu x^k = \\ = a_{\mu\nu} a^{\sigma\mu} a^{\tau\nu} b_{\sigma\alpha} b_{\tau\beta} = a^{\sigma\tau} b_{\sigma\alpha} b_{\tau\beta}. \tag{2.3.27}$$

Упражнения. 1) Доказать, что $b_{\alpha\beta} = -g_{jk}\nabla_\alpha N^j \nabla_\beta N^k$.

2) Доказать, что $a^{\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i = 2HN^i$, где $H = a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}/2$ — *средняя кривизна поверхности.*

Уравнения Гаусса–Кодацци. Вычислим вторую тензорную производную объекта $\nabla_\alpha x^i$. Это будет

$$\nabla_\gamma\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i = \frac{\partial\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i}{\partial\eta^\gamma} + ({\Gamma^i}_{jk})_g\nabla_\beta\nabla_\alpha x^j\nabla_\gamma x^k -$$
$$- ({\Gamma^\delta}_{\alpha\gamma})_a\nabla_\beta\nabla_\delta x^i - ({\Gamma^\delta}_{\beta\gamma})_a\nabla_\delta\nabla_\alpha x^i. \quad (2.3.28)$$

Предположим на время, что x-координаты декартовы, а η-координаты — геодезические в данной точке $M \subset S$. Тогда пространственные символы Кристоффеля везде равны нулю вместе с их производными, а символы Кристоффеля на S исчезнут только в точке M. Из формулы (2.3.28) заключаем, что в таких координатах

$$\nabla_\gamma\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i = \frac{\partial^3 x^i}{\partial\eta^\alpha\partial\eta^\beta\partial\eta^\gamma} - \frac{\partial}{\partial\eta^\gamma}\,({\Gamma^\sigma}_{\alpha\beta})_a\nabla_\sigma x^i.$$

Если здесь переставить индексы α и β и вычесть эти две формулы одну за другой, то получим

$$\nabla_\gamma\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i - \nabla_\beta\nabla_\gamma\nabla_\alpha x^i =$$
$$= \left[\frac{\partial({\Gamma^\sigma}_{\alpha\gamma})_a}{\partial\eta^\beta} - \frac{\partial({\Gamma^\sigma}_{\alpha\beta})_a}{\partial\eta^\gamma}\right]\nabla_\alpha x^i. \quad (2.3.29)$$

Но выражение в квадратных скобках есть ${R^\sigma}_{\alpha\beta\gamma}$ — тензор Римана–Кристоффеля поверхности (см. формулу (2.2.41)). Тогда соотношение (2.3.29) примет вид

$$\nabla_\gamma\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i - \nabla_\beta\nabla_\gamma\nabla_\alpha x^i = {R^\sigma}_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\sigma x^i. \quad (2.3.30)$$

Это — тензорное равенство, справедливое в специально выбранной системе координат и поэтому справедливо во всех вообще системах координат. Взяв тензорную производную от равенства $\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i = b_{\alpha\beta}N^i$, находим с помощью равенства (2.3.22)

$$\nabla_\gamma\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i = \nabla_\gamma b_{\alpha\beta}N^i + b_{\alpha\beta}\nabla_\gamma N^i =$$
$$= \nabla_\gamma b_{\alpha\beta}N^i - b_{\alpha\beta}a^{\sigma\tau}b_{\sigma\gamma}\nabla_\tau x^i,$$

где

$$\nabla_\gamma b_{\alpha\beta} = \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial \eta^\gamma} - (\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma})_a b_{\alpha\beta} - (\Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma})_a b_{\alpha\sigma}. \qquad (2.3.31)$$

Отсюда

$$\nabla_\gamma\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i - \nabla_\beta\nabla_\gamma\nabla_\alpha x^i =$$
$$= (\nabla_\gamma b_{\alpha\beta} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})N^i - a^{\sigma\tau}(b_{\alpha\beta}b_{\sigma\gamma} - b_{\alpha\gamma}b_{\sigma\beta})\nabla_\tau x^i.$$

Воспользовавшись формулой (2.3.30), имеем

$$R^\sigma{}_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\sigma x^i = (\nabla_\gamma b_{\alpha\beta} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})N^i -$$
$$- a^{\sigma\tau}(b_{\alpha\beta}b_{\sigma\gamma} - b_{\alpha\gamma}b_{\alpha\beta})\nabla_\tau x^i. \qquad (2.3.32)$$

Умножим выражение (2.3.32) на N_i и используем тот факт, что $\nabla_\alpha x^i N_i = 0$, получим

$$\nabla_\gamma b_{\alpha\beta} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma} = 0 \qquad (2.3.33)$$

— *уравнения Кодацци.*

Умножим уравнение (2.3.32) на $g_{ik}\nabla_\rho x^k$, получим

$$R_{\rho\alpha\beta\gamma} = b_{\rho\beta}b_{\alpha\gamma} - b_{\rho\gamma}b_{\alpha\beta} \qquad (2.3.34)$$

— *уравнения Гаусса.* Так как греческие индексы пробегают значения 1 и 2, то имеются только два независимых уравнения Кодацци и только одно независимое уравнение Гаусса. С помощью формулы (2.2.44) для полной кривизны K поверхности перепишем уравнение Гаусса в виде

$$K\mathcal{E}_{\rho\alpha}\mathcal{E}_{\beta\gamma} = b_{\rho\beta}b_{\alpha\gamma} - b_{\rho\gamma}b_{\alpha\beta}. \qquad (2.3.35)$$

Умножим последние равенства на $a^{\rho\gamma}$ и воспользуемся соотношением $a_{\alpha\beta} = -a^{\rho\gamma}\mathcal{E}_{\rho\alpha}\mathcal{E}_{\beta\gamma}$, получим

$$-Ka_{\alpha\beta} = a^{\rho\gamma}b_{\rho\beta}b_{\alpha\gamma} - a^{\rho\gamma}b_{\rho\gamma}b_{\alpha\beta}. \qquad (2.3.36)$$

Введём обозначение

$$2H = a^{\rho\gamma}b_{\rho\gamma} \qquad (2.3.37)$$

и назовём скаляр H *средней кривизной поверхности* S. Поскольку по формуле (2.3.27) $c_{\alpha\beta} = a^{\rho\gamma} b_{\rho\alpha} b_{\gamma\beta}$, то выражение (2.3.36) примет вид

$$c_{\alpha\beta} - 2Hb_{\alpha\beta} + Ka_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.3.38}$$

т. е. три основные квадратичные формы связаны равенством

$$III - 2HII + KI = 0. \tag{2.3.39}$$

Упражнения. 1) Доказать, что $K = R_{1212}/a = (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)/a = b/a$.

2) Показать, что если уравнение поверхности дано в виде $x^1 = u^1$, $x^2 = u^2$, $x^3 = f(u^1, u^2)$ и x-координаты декартовы и ортогональные, то, введя обозначения $p = f_{x^1}$, $q = f_{x^2}$, $r = f_{x^1x^1}$, $s = f_{x^1x^2}$, $t = f_{x^2x^2}$, получим результаты:

а) $a_{11} = 1 + p^2,\ \ a_{22} = 1 + q^2,\ \ a_{12} = pq,\ \ a = 1 + p^2 + q^2;$

$$a^{11} = \frac{1 + q^2}{1 + p^2 + q^2}, \quad a^{22} = \frac{1 + p^2}{1 + p^2 + q^2},$$

$$a^{12} = -\frac{pq}{1 + p^2 + q^2};$$

б) $N^i = \dfrac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\,(-p, -q, 1);$

в) $b_{11} = \dfrac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad b_{12} = \dfrac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$

$$b_{22} = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

г) $c_{11} = \dfrac{r^2 + s^2 + (ps - qr)^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$

$$c_{12} = \frac{st(1 + p^2) + rs(1 + q^2) - pq(rt + s^2)}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

$$c_{22} = \frac{s^2 + t^2 + (pt - qs)^2}{(1 + p^2 + q^2)^2};$$

д) $$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}\,;$$

$$H = \frac{r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2)}{2(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}\,.$$

е) показать, что если A^i — пространственный вектор, определённый на поверхности, то $g_{ij}a^{\alpha\beta}\nabla_\alpha A^i \nabla_\beta x^j$ есть скаляр — *поверхностная дивергенция вектора* A^i. Доказать, что поверхностная дивергенция N^i равна $-2H$;

ж) доказать, что семейство гладких поверхностей $\varphi(x^1, x^2, x^3) = \mathrm{const}$ имеет среднюю кривизну

$$H = -\frac{g^{ij}}{2}\,\nabla_j\left[\left(g^{kl}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}\right)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right].$$

Указание. Использовать равенство

$$N_i = \left(g^{kl}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}\right)^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\,.$$

2.4. КРИВЫЕ НА ПОВЕРХНОСТИ

Геодезическая кривизна кривой на поверхности. Пусть η^α — поверхностные и x^i — пространственные координаты. Уравнения поверхности имеют вид

$$x^i = x^i(\eta^1, \eta^2). \tag{2.4.1}$$

Рассмотрим кривую AB на поверхности и в качестве параметра выбрана длина дуги s этой кривой. Тогда кривая определяется уравнением

$$\eta^\alpha = \eta^\alpha(s). \tag{2.4.2}$$

В соответствии с (2.4.1) уравнение кривой в пространстве будет

$$x^i = x^i(s), \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.4.3}$$

Кроме того, имеем соотношение

$$a_{\alpha\beta}\frac{d\eta^\alpha}{ds}\,\frac{d\eta^\beta}{ds} = 1, \tag{2.4.4}$$

которое удовлетворяется в каждой точке кривой. Если M — точка на кривой с координатами η^α (рис. 2.6), а M_1 — соседняя точка на кривой AB, соответствующая возрастанию параметра на ds, то бесконечно малый вектор $\mathbf{MM}_1$ имеет своими составляющими $d\eta^\alpha$.

Таким образом, *единичный* (это следует из (2.4.4)) *вектор касательной к кривой* q^α определяется так:

$$q^\alpha \equiv \frac{d\eta^\alpha}{ds}\,. \tag{2.4.5}$$

Взяв абсолютную производную по s от обеих частей равенства $a_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta = 1$, найдём

$$a_{\alpha\beta}q^\alpha\frac{Dq^\beta}{Ds} = 0.$$

Видно, что вектор Dq^β/Ds ортогонален к q^α. Поэтому

$$\frac{Dq^\beta}{Ds} = \sigma p^\alpha, \tag{2.4.6}$$

где σ — скаляр, а p^α — единичный вектор, ортогональный q^α. Выберем направление p^α таким, чтобы *поворот* (q^α, p^α) *был положительным*: $\mathcal{E}_{\alpha\beta}q^\alpha p^\beta = 1$.

Вектор p^α *называется единичным нормальным вектором к кривой* AB*, а скаляр* σ *— геодезической кривизной кривой на поверхности.*

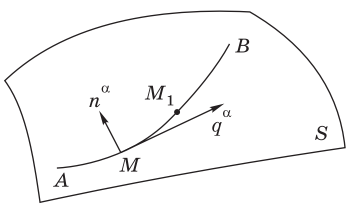

Рис. 2.6
Касательный и нормальный векторы к кривой

По выбору p^α имеем $p^\alpha = \mathcal{E}^{\beta\alpha} q_\beta$, $q^\alpha = \mathcal{E}^{\alpha\beta} p_\beta$. Возьмём абсолютную производную по s от первого равенства, приходим к соотношению

$$\frac{Dp^\beta}{Ds} = \mathcal{E}^{\beta\alpha} \frac{Dq^\beta}{Ds} = \mathcal{E}^{\beta\alpha} \sigma p_\beta = -\sigma \mathcal{E}^{\alpha\beta} p_\beta = -\sigma q^\alpha.$$

Таким образом,

$$\frac{Dp^\alpha}{Ds} = -\sigma q^\alpha. \tag{2.4.7}$$

Иногда равенства (2.4.6), (2.4.7) называют *формулами Френе кривой AB относительно поверхности S*.

Упражнения. 1) Доказать, что

$$(\sigma)^2 = a_{\alpha\beta} \frac{Dq^\alpha}{Ds} \frac{Dq^\beta}{Ds} .$$

2) Показать, что AB — геодезическая линия тогда и только тогда, когда $\sigma = 0$.

3) Доказать, что $q^i = q^\alpha \partial x^i / \partial \eta^\alpha$ и пространственный вектор, ортогональный к q^i и касающийся поверхности S, есть $p^i = p^\alpha \partial x^i / \partial \eta^\alpha$.

Теорема Менье. Известно, что

$$q^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad q^\alpha = \frac{d\eta^\alpha}{ds}, \tag{2.4.8}$$

причём x^i и η^α связаны уравнениями (2.4.1) и

$$q^i = \frac{\partial x^i}{\partial \eta^\alpha} \frac{d\eta^\alpha}{ds} = \frac{\partial x^i}{\partial \eta^\alpha} q^\alpha.$$

Возьмём абсолютную производную этого равенства по параметру s:

$$\frac{Dq^\beta}{Ds} = \frac{\partial x^i}{\partial \eta^\alpha} \frac{Dq^\alpha}{Ds} + \nabla_\beta \nabla_\alpha x^i q^\alpha \frac{d\eta^\beta}{ds} .$$

При помощи первой формулы Френе (2.1.15) и (2.4.6), (2.4.8), отсюда находим

$$æn^i = \sigma \frac{\partial x^i}{\partial \eta^\alpha} p^\alpha + \nabla_\beta \nabla_\alpha x^i q^\alpha q^\beta.$$

Пусть p^i — пространственный вектор, имеющий на S то же самое направление, что и p^α: $p^i = p^\alpha \partial x^i / \partial \eta^\alpha$. Используя равенство (2.3.20), предыдущее соотношение можно переписать так:

$$æ n^i = \sigma p^i + b_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta N^i, \tag{2.4.9}$$

где N^i — единичный вектор нормали к поверхности S.

Обозначим через θ угол между главной нормалью n^i и нормалью к поверхности N^i:

$$\cos\theta = N_i n^i. \tag{2.4.10}$$

Умножим выражение (2.4.9) на N_i, получим

$$æ \cos\theta = b_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta, \tag{2.4.11}$$

отсюда и вытекает теорема Менье:

Для всех кривых на S, имеющих общую касательную, величина $æ\cos\theta$ имеет одно и то же значение.

Величина $æ\cos\theta$ называется *нормальной кривизной поверхности* в направлении q^α и обозначается так:

$$æ_{(n)} = b_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta. \tag{2.4.12}$$

В частности, если взять сечение поверхности плоскостью, проходящей через нормаль N^i к ней, то угол θ равен либо нулю, либо π и $æ_{(n)} = æ$, либо $æ_{(n)} = -æ$. Другими словами, нормальная кривизна S в любом направлении равна по величине кривизне нормального сечения в этом направлении. Именно по этой причине $æ\cos\theta$ названо нормальной кривизной.

Вектор p^i ортогонален к q^i и поэтому лежит в плоскости, содержащей N^i и n^i (рис. 2.7). Кроме того, p^i касается S и угол между n^i и p^i равен $\pi/2 - \theta$. Умножая (2.4.9) на p^i, получим $æ\cos(\pi/2 - \theta) = \sigma$, или

$$\sigma = æ \sin\theta. \tag{2.4.13}$$

Главные кривизны и теорема Гаусса. В определении (2.4.12) нормальной кривизны вектор q^α является единичным, т.е. $a_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta = 1$. Следовательно, направления, на которых

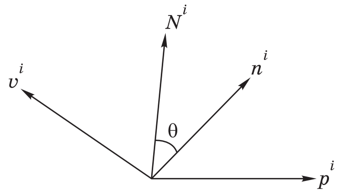

Рис. 2.7
К формуле связи кривизны и геодезической кривизны

нормальная кривизна есть $æ_{(n)}$, определяется уравнением 2-й степени

$$(b_{\alpha\beta} - æ_{(n)}a_{\alpha\beta})q^\alpha q^\beta = 0. \tag{2.4.14}$$

Используя метод нахождения экстремумов, получим, что направление, определяющее максимальное или минимальное значение $æ_{(n)}$, есть решение уравнения

$$(b_{\alpha\beta} - æ_{(n)}a_{\alpha\beta})\lambda^\beta = 0. \tag{2.4.15}$$

Значит, соответствующая величина $æ_{(n)}$ должна быть корнем уравнения для λ:

$$\det(b_{\alpha\beta} - \lambda a_{\alpha\beta}) = |b_{\alpha\beta} - \lambda a_{\alpha\beta}| = 0. \tag{2.4.16}$$

Это уравнение всегда имеет два вещественных корня, равные максимальному или минимальному значению кривизны. Уравнение (2.4.16) таково: $\lambda^2 - a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}\lambda + b/a = 0$, $b = |b_{\alpha\beta}|$, $a = |a_{\alpha\beta}|$; или в инвариантной форме

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0. \tag{2.4.17}$$

Корни этого уравнения называются *главными кривизнами поверхности* S: их обозначают $æ_1$ и $æ_2$:

$$æ_1 + æ_2 = 2H, \quad æ_1æ_2 = K. \tag{2.4.18}$$

Последнее соотношение носит название *теоремы Гаусса*: *произведение главных кривизн поверхности есть скаляр на ней, именно её полная, или гауссова, кривизна.*

Линии кривизны. Рассмотрим направления, определяющие главные кривизны — *главные направления*; их в каждой точке S имеется два. Обозначив их через q_1^α и q_2^α, из выражения (2.4.16) получим уравнения

$$(b_{\alpha\beta} - æ_1 a_{\alpha\beta})q_1^\beta = 0, \quad (b_{\alpha\beta} - æ_2 a_{\alpha\beta})q_2^\beta = 0. \qquad (2.4.19)$$

Умножая первое из них на q_2^α, второе — на q_1^α и вычитая, найдём

$$(æ_2 - æ_1)a_{\alpha\beta}q_1^\alpha q_2^\beta = 0.$$

Пусть $æ_1 \neq æ_2$, тогда главные направления взаимно ортогональны. Кроме того,

$$b_{\alpha\beta}q_1^\alpha q_2^\beta = æ_1 a_{\alpha\beta}q_1^\beta q_2^\beta = 0. \qquad (2.4.20)$$

Далее, возьмём, например, первую систему уравнений (2.4.19):

$$b_{1\beta}q_1^\beta = æ_1 a_{1\alpha}q_1^\alpha, \quad b_{2\beta}q_1^\beta = æ_1 a_{2\alpha}q_1^\alpha.$$

Исключая отсюда $æ_1$, получим соотношение

$$a_{1\alpha}q_1^\alpha b_{2\beta}q_1^\beta = a_{2\alpha}q_1^\alpha b_{1\beta}q_1^\beta,$$

или

$$\mathcal{E}^{\gamma\sigma}a_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}q_1^\alpha q_1^\beta = 0. \qquad (2.4.21)$$

Точно так же найдём, что q_2^α удовлетворяет уравнению (2.4.21). Значит, формула (2.4.21) есть общее уравнение главных направлений (оно 2-го порядка!). После введения обозначения

$$h_{\alpha\beta} = \mathcal{E}^{\gamma\sigma}a_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta} \qquad (2.4.22)$$

уравнение главных направлений примет вид

$$h_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta = 0. \qquad (2.4.23)$$

Кривая на S, которая в любой из её точек касается одного из главных направлений в этой точке, называется *линией кривизны*. Поэтому, если $d\eta^\alpha$ есть смещение вдоль линии кривизны, то оно должно быть пропорционально либо q_1^α, либо q_2^α, т. е.

$$h_{\alpha\beta}d\eta^\alpha d\eta^\beta = 0. \qquad (2.4.24)$$

Последнее и есть уравнение линии кривизны на поверхности.

Упражнения. 1) Доказать, что $æ_1 = b_{\alpha\beta} q_1^\alpha q_1^\beta$, $æ_2 = b_{\alpha\beta} q_2^\alpha q_2^\beta$.

2) Пусть направление q^α составляет угол θ с главным направлением q_1^α. Тогда нормальная кривизна направления q^α равна

$$æ_{(n)} = æ_1 \cos^2\theta + æ_2 \sin^2\theta$$

(теорема Эйлера).

3) Доказать формулу для любой кривой на S: $(æ)^2 = (\sigma)^2 + (æ_n)^2$.

4) Доказать, что вдоль кривой $AB \subset S$

$$\frac{DN^i}{Ds} = -a^{\beta\gamma} b_{\beta\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial \eta^\gamma}\, q^\alpha.$$

5) Доказать, что кривая на S есть линия кривизны тогда и только тогда, когда

$$\frac{DN^i}{Ds} + æ\frac{dx^i}{ds} = 0$$

(формула Родрига).

2.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ИЗ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В этом пункте будем считать систему координат x^α, $\alpha = 1, 2, 3$, прямоугольной декартовой. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\eta^1, \eta^2)$ — параметризация (локальная) поверхности S, причём $\mathbf{x}(\eta^1, \eta^2) \in C^2(D)$, где D — область изменения координат η^1, η^2. Нормаль к S обозначим символом $\mathbf{n}$, так что

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_{\eta^1} \times \mathbf{x}_{\eta^2}}{|\mathbf{x}_{\eta^1} \times \mathbf{x}_{\eta^2}|}\,. \tag{2.5.1}$$

Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности (2.3.16) примут вид ($g_{ij} = \delta_{ij}$)

$$\begin{gathered} a_{11} \equiv E = |\mathbf{x}_{\eta^1}|^2, \quad a_{12} \equiv F = \mathbf{x}_{\eta^1} \cdot \mathbf{x}_{\eta^2}, \\ a_{22} \equiv G = |\mathbf{x}_{\eta^2}|^2, \end{gathered} \tag{2.5.2}$$

так что в формуле (2.5.1) знаменатель

$$|\mathbf{x}_{\eta^1} \times \mathbf{x}_{\eta^2}| = \sqrt{EG - F^2}\,. \tag{2.5.3}$$

Что касается коэффициентов второй квадратичной формы поверхности (2.3.21), то они имеют вид (2.3.30), откуда

$$\begin{gathered} b_{11} \equiv L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\eta^1\eta^1}, \quad b_{12} \equiv M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\eta^1\eta^2}, \\ b_{22} \equiv N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{\eta^2\eta^2}. \end{gathered} \tag{2.5.4}$$

Средняя H и гауссова K кривизны поверхности S определяются по формулам (2.4.18) и в нашем случае

$$H = \frac{1}{2}\,(æ_1 + æ_2) = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}\,; \tag{2.5.5}$$

$$K = æ_1 æ_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\,. \tag{2.5.6}$$

Дифференциальные параметры Бельтрами (2.2.45) и (2.2.49) поверхности S перепишутся так:

$$\Delta_S(\varphi, \psi) = \frac{E\varphi_{\eta^2}\psi_{\eta^2} - F(\varphi_{\eta^1}\psi_{\eta^2} + \varphi_{\eta^2}\psi_{\eta^1}) + G\varphi_{\eta^1}\psi_{\eta^1}}{EG - F^2}\,; \tag{2.5.7}$$

$$\begin{aligned} \nabla_S \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \Bigg[\frac{\partial}{\partial \eta^1} \left(\frac{G\varphi_{\eta^1} - F\varphi_{\eta^2}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) &+ \\ + \frac{\partial}{\partial \eta^2} \left(\frac{E\varphi_{\eta^2} - F\varphi_{\eta^1}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \Bigg]&. \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Указанными выше формулами (2.5.1)–(2.5.8) удобно пользоваться в конкретных приложениях.

Предположим, что $\mathbf{x}(\eta^1, \eta^2, t)$ — радиус-вектор точек на S, где t — параметр, не зависящий от координат η^1, η^2. Если функция $\varphi(\mathbf{x}, t)$ определена на S, то $\varphi = \varphi(\mathbf{x}(\eta^1, \eta^2, t), t) = \tilde{\varphi}(\eta^1, \eta^2, t)$ и

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot dx(\eta^1, \eta^2, t) = \tilde{\varphi}_{\eta^1} d\eta^1 + \tilde{\varphi}_{\eta^2} d\eta^2.$$

Поэтому

$$\tilde{\varphi}_{\eta^1} = \mathbf{x}_{\eta^1} \cdot \nabla\varphi, \quad \tilde{\varphi}_{\eta^2} = \mathbf{x}_{\eta^2} \cdot \nabla\varphi. \tag{2.5.9}$$

Положим $J_S = \sqrt{a}$, где $a = EG - F^2$ — дискриминант первой квадратичной формы поверхности. Ясно, что $J_S = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_{\eta^1} \times \times \mathbf{x}_{\eta^2})$ (см. формулу (2.5.1)). Тогда соотношения (2.5.9) можно записать в виде

$$\tilde{\varphi}_{\eta^1} = \mathbf{x}_{\eta^1} \cdot \nabla_S \varphi, \quad \tilde{\varphi}_{\eta^2} = \mathbf{x}_{\eta^2} \cdot \nabla_S \varphi. \tag{2.5.10}$$

Здесь

$$\nabla_S \equiv \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla) = \frac{1}{J_S}\left(-\mathbf{n} \times \mathbf{x}_{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta^1} + \mathbf{n} \times \mathbf{x}_{\eta^1} \frac{\partial}{\partial \eta^2}\right) \tag{2.5.11}$$

есть *поверхностный градиент* — проекция градиента на касательную к S плоскость.

Для доказательства справедливости формул (2.5.10), (2.5.11) достаточно заметить, что $\nabla\varphi = b_1\mathbf{n} + b_2\mathbf{x}_{\eta^1} + b_3\mathbf{x}_{\eta^2}$ (тройка векторов $\mathbf{n}, \mathbf{x}_{\eta^1}, \mathbf{x}_{\eta^2}$ образует базис, причём векторы $\mathbf{x}_{\eta^1}, \mathbf{x}_{\eta^2}$ лежат в касательной к S плоскости). Тогда $b_1 = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}$ и, используя равенства (2.5.2), (2.5.3), находим $b_2 = (\tilde{\varphi}_{\eta^1} G - \tilde{\varphi}_{\eta^2} F)/J_S^2$, $b_3 = (\tilde{\varphi}_{\eta^2} E - \tilde{\varphi}_{\eta^1} F)/J_S^2$. Поэтому поверхностный градиент

$$\nabla_S \tilde{\varphi} = \frac{1}{J_S^2}\left[(G\mathbf{x}_{\eta^1} - F\mathbf{x}_{\eta^2})\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\eta^1} + (E\mathbf{x}_{\eta^2} - F\mathbf{x}_{\eta^1})\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\eta^2}\right]. \tag{2.5.12}$$

Далее,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{x}_{\eta^\alpha} = -\frac{1}{J_S}\mathbf{x}_{\eta^\alpha} \times \left(\mathbf{x}_{\eta^1} \times \mathbf{x}_{\eta^2}\right), \quad \alpha = 1, 2,$$

и с помощью тождества векторной алгебры $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \times \times \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ приходим к формуле (2.5.11).

Пусть $\mathbf{u}$ — вектор, определённый на S, тогда

$$\nabla_S \cdot \mathbf{u} \equiv \operatorname{div}_S \mathbf{u} \tag{2.5.13}$$

называется *поверхностной дивергенцией* вектора $\mathbf{u}$. Заметим, что имеет место аналог теоремы Эйлера (1.8.26):

$$\frac{dJ_S}{dt} = J_S \nabla_S \cdot \mathbf{u}, \tag{2.5.14}$$

где $\mathbf{u} = d\mathbf{x}(\eta^1, \eta^2, t)/dt$ — скорость точки (η^1, η^2), которая движется вместе с поверхностью S. Действительно, в силу равенств (2.5.2), (2.5.12)

$$
\frac{dJ_S}{dt} = \frac{1}{2J_S}\,\frac{d}{dt}\,(EG - F^2) =
$$
$$
= \frac{1}{J_S}\left[(G\mathbf{x}_{\eta^1} - F\mathbf{x}_{\eta^2})\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta^1} + (E\mathbf{x}_{\eta^2} - F\mathbf{x}_{\eta^1})\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta^2}\right] = J_S\nabla_{_S}\cdot\mathbf{u}.
$$

Перейдём к выводу некоторых, часто применяемых в механике и физике, интегральных соотношений. Докажем, что

$$
\frac{d}{dt}\int\limits_{S(t)} dS = \int\!\!\int \frac{d}{dt}\,J_S\,d\eta^1 d\eta^2 = \int\limits_{S(t)} \nabla_{_S}\cdot\mathbf{u}\,dS =
$$
$$
= \oint\limits_{\partial S(t)} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{u}\,ds - 2\int\limits_{S(t)} H\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,dS, \qquad (2.5.15)
$$

где $\mathbf{u} = d\mathbf{x}(\eta^1, \eta^2, t)/dt$, $\boldsymbol{\tau}$ — внешняя нормаль к кривой $\partial S(t)$, лежащая в касательной плоскости к $S(t)$ (считается, что поверхность $S(t)$ ограничена этой кривой), $\mathbf{n}$ — нормаль к $S(t)$, а H — её средняя кривизна, определяемая по формуле (2.5.5). Первые два равенства в (2.5.15) следуют из представления элемента площади $dS = J_S d\eta^1 d\eta^2$ и правила дифференцирования J_S (2.5.14). Для установления последнего соотношения (2.5.15) предположим, что кривая $\partial S(t)$ задана в параметрическом виде: $\eta^\alpha = \eta^\alpha(s)$, $\alpha = 1, 2$ (при фиксированном времени t). Тогда $\boldsymbol{\tau} = J_S(d\eta^2/ds, -d\eta^1/ds)$ и, пользуясь формулой (2.5.12), находим

$$
\int\limits_{S(t)} \nabla_{_S}\cdot\mathbf{u}\,dS = \int\!\!\int \frac{1}{J_S}\left[(G\mathbf{x}_{\eta^1} - F\mathbf{x}_{\eta^2})\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta^1} + \right.
$$
$$
\left. + (E\mathbf{x}_{\eta^2} - F\mathbf{x}_{\eta^1})\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\eta^2}\right] d\eta^1 d\eta^2 =
$$
$$
= \int\!\!\int\left\{\frac{\partial}{\partial\eta^1}\left[\frac{1}{J_S}\,(G\mathbf{x}_{\eta^1} - F\mathbf{x}_{\eta^2})\cdot\mathbf{u}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta^2}\left[\frac{1}{J_S}\,(E\mathbf{x}_{\eta^2} - F\mathbf{x}_{\eta^1})\cdot\mathbf{u}\right] - \right.
$$
$$
- \mathbf{u}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\eta^1}\left(\frac{1}{J_S}\,(G\mathbf{x}_{\eta^1} - F\mathbf{x}_{\eta^2})\right) + \right.
$$
$$
\left.\left. + \frac{\partial}{\partial\eta^2}\left(\frac{1}{J_S}\,(E\mathbf{x}_{\eta^2} - F\mathbf{x}_{\eta^1})\right)\right]\right\} d\eta^1 d\eta^2.
$$

Разложим вектор $\mathbf{u}$ по базису: $\mathbf{u} = d_1\mathbf{n} + d_2\mathbf{x}_{\eta^1} + d_3\mathbf{x}_{\eta^2} \equiv \equiv d_1\mathbf{n} + \mathbf{u}_S$, получим, что интеграл от суммы двух первых слагаемых равен (использованы равенства (2.2.50))

$$\iint\left[\frac{\partial}{\partial\eta^1}(J_S d_2) + \frac{\partial}{\partial\eta^2}(J_S d_3)\right] d\eta^1 d\eta^2 =$$

$$= \int\limits_{\partial S(t)} J_S\left(d_2\frac{d\eta^2}{ds} - d_3\frac{d\eta^1}{ds}\right) ds = \int\limits_{\partial S(t)} \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{u}\, ds,$$

так как вектор $\boldsymbol{\tau}$ ортогонален вектору $\mathbf{n}$.

Согласно (2.5.8), третье подынтегральное выражение примет вид $-\mathbf{u} \cdot \Delta_S\mathbf{x}$. Поэтому необходимо преобразовать $\Delta_S\mathbf{x}$. Умножая равенство (2.3.20) на $a^{\alpha\beta}$ и пользуясь определением (2.3.37) средней кривизны, найдём

$$a^{\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_\alpha x^i = 2Hn^i, \tag{2.5.16}$$

где, в нашем случае, n^i — компоненты нормали $\mathbf{n}$. В п. 2.2 отмечалось, что при ковариантном дифференцировании величины a, $a^{\alpha\beta}$ ведут себя как постоянные. Значит, равенство (2.5.16) можно переписать так:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\nabla_\beta(\sqrt{a}\, a^{\alpha\beta}\nabla_\alpha x^i) = 2Hn^i.$$

Учитывая формулу (2.2.49), приходим к тождеству

$$\Delta_S\mathbf{x} = 2H\mathbf{n}, \tag{2.5.17}$$

с помощью которого и устанавливается третье равенство (2.5.15).

Замечание 2.4. Матрица $(a^{\alpha\beta})$ такова:

$$\frac{1}{J_S^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.5. Имеет место тождество

$$\nabla_S\cdot\mathbf{n} = -2H.$$

Оно следует из равенств (2.3.24) и (2.5.12).

Пусть $\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2$ — координаты на $S(t)$, которые взаимнооднозначны связаны с координатами η^1, η^2, а $\mathbf{x}(\eta^1, \eta^2, t) = \mathbf{x}(\eta^1(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2), \eta^2(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2), t) \equiv \tilde{\mathbf{x}}(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2, t)$ — радиус-вектор точек поверхности $S(t)$. Обозначим скорости

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}(\eta^1, \eta^2, t)}{\partial t}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2, t)}{\partial t}.$$

Если $\varphi(\mathbf{x}(\eta^1, \eta^2, t), t) = \varphi_1(\eta^1, \eta^2, t)$ и

$$\hat{\varphi}(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2, t) = \hat{\varphi}(\eta^1(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2), \eta^2(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2), t) = \varphi_1(\eta^1, \eta^2, t),$$

то

$$\frac{\partial \varphi_1(\eta^1, \eta^2, t)}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \nabla_S \varphi_1 = \frac{\partial \tilde{\varphi}(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2, t)}{\partial t} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla_S \tilde{\varphi} \qquad (2.5.18)$$

и справедливо интегральное тождество

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{S(t)} \varphi\, dS = \int\limits_{S(t)} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}(\bar{\eta}^1, \bar{\eta}^2, t)}{\partial t} - \right.$$
$$\left. - \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla_S \tilde{\varphi} - 2H \tilde{\varphi} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right] dS + \oint\limits_{\partial S(t)} \hat{\varphi} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}\, ds. \qquad (2.5.19)$$

Вывод соотношений (2.5.18), (2.5.19) проводится аналогичными рассуждениями, проведёнными при доказательстве (2.5.9) и (2.5.15).

Приведём ещё одно тождество. Именно, пусть две поверхности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ совпадает внутри замкнутой кривой $\partial S(t)$ и на этой кривой. Нормальные скорости поверхностей, где они соприкасаются, одинаковы, но их касательные скорости различны. Тогда

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{S_1(t)} \varphi\, dS_1 = \frac{d}{dt} \int\limits_{S_2(t)} \varphi\, dS_2 + \oint\limits_{\partial S(t)} \varphi \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\, ds. \qquad (2.5.20)$$

Упражнение. 1) Доказать равенство (2.5.20).

2) Доказать, что $a^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} = 4H^2 - K$, где $c_{\alpha\beta}$ — коэффициенты третьей квадратичной формы поверхности S, см. (2.3.25) и (2.3.36).

3) Установить равенство

$$\oint\limits_{\partial S} \boldsymbol{\tau}\varphi\, ds = \int\limits_{S} (\nabla_S \varphi + 2H\varphi\mathbf{n})\, dS.$$

Указание. Смотри вывод соотношения (2.5.15).

Раздел III

ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

3.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе рассматриваются общие вопросы динамики сплошных сред. Получены, на основе законов сохранения, уравнения, выполняющиеся для всех сред, и построены замкнутые системы уравнений для ряда моделей жидких и твёрдых сред.

Предметом изучения в механике сплошных сред являются физические тела, обладающие характерными свойствами сплошности и внутренней подвижности. *Сплошность* есть свойство тела заполнять целиком, без пустот, занимаемую им часть пространства. Свойство *внутренней подвижности*, или деформируемости, состоит в том, что отдельные части тела могут перемещаться относительно друг друга при неизменной внешней форме тела. Сплошное деформируемое физическое тело получило название «*сплошная среда*».

Строго говоря, в силу атомно-молекулярного строения любого вещества, таких физических тел нет. На самом деле, когда речь идет о физическом теле как сплошной среде, свойство сплошности предполагается выполненным приближённо, при условии малости характерного масштаба молекулярных процессов по сравнения с минимальным масштабом изучаемого взаимодействия со средой. Эти масштабы различны для разных условий. Например, среднее расстояние между частицами (молекулами) воздуха вблизи земли $l \sim 10^{-6}$ см, в атмосфере на высоте 60 км $l \sim 10^{-3}$ см, а в космосе $l \sim 1$ см. Если принять, что нижняя грань длин L, на которых изучаются явления в этих средах, соответственно равна 10^{-1} см, 10^2 см и 10^5 см, то для всех трёх случаев будет $l/L \sim 10^{-5}$. Поэтому космическую среду можно считать сплошной в том же смысле, в каком это допустимо для воздуха при нормальных условиях.

В повседневной практике встречаются разнообразные сплошные среды, такие как вода, воздух, масло, глина, дерево, железо, гранит, песок и т. п. Они играют большую роль в процессе освоения человеком окружающей среды. Во взаимодействии со сплошными средами плавают корабли, летают самолеты, добываются полезные ископаемые и формируется погода, из сплошных сред строятся дома и мосты, сплошные среды участвуют в производстве электроэнергии и продуктов питания.

Схематически сплошные среды можно подразделять на *жидкости*, *газы* и *деформируемые твёрдые тела*. Условность этих понятий хорошо показывают примеры асфальта, который крошится при ударе молотом, но плавно растекается по поверхности за достаточно большое время, или металла, твёрдого при нормальной температуре, но жидкого при плавлении. Желе, краски в состоянии покоя ведут себя подобно упругому телу, но если их встряхнуть, то они теряют упругость и ведут себя как жидкости. Полимерные растворы могут одновременно проявлять свойства твёрдого тела и жидкости.

Механика сплошных сред изучает механические и тепловые процессы, протекающие в сплошных средах под влиянием приложенных внешних воздействий со стороны других тел. Проблемы механики сплошных сред многообразны. Это — проблемы силового и энергетического взаимодействия жидкостей и газов с движущимися в них телами; протекания жидкостей и газов по трубам и каналам и фильтрации сквозь пористую среду; движения и равновесия деформируемых твёрдых тел, их прочность и разрушения; волновых и вибрационных явлений в жидких и твёрдых телах; циркуляция атмосферы и океана, прогноза погоды; турбулентных — быстро и беспорядочно пульсирующих движений жидкостей и газов; поведения очень сильно сжатых (до миллиона атмосфер) и очень сильно разреженных (космос) сред; использования движений ионизованных газов (плазма) и веществ в условиях химических превращений (горение, взрыв, детонация); поведения полимерных материалов; биомеханики (мышцы, кровь, растения) и многие другие.

Как естественная наука, механика сплошных сред подразделяется на экспериментально-физическую и теоретическую. Здесь будут рассмотрены вопросы только *теоретической механики сплошных сред*.

Метод теоретической механики сплошных сред заключается в том, что на основе общих физических законов и систематизированных данных экспериментов строится *математическая модель* поведения того или иного класса сплошных сред.

Математическая модель представляет собой систему соотношений (уравнений и неравенств), связывающих величины, характеризующие различные свойства среды. Обычно это — *дифференциальные* (и конечные) *уравнения*, к которым добавляются начальные и граничные условия. Математическая модель должна обладать свойством *корректности*, т. е. решение входящих в неё уравнений должно существовать, быть единственным и устойчивым. В действительности строго доказать корректность математической модели удается не всегда, ввиду чего для оценки её качества широко используется *критерий практики*.

Затем идёт разработка чисто математических методов изучения структуры модели и решения конкретных задач, связанных со специализацией дополнительных условий протекания процессов в сплошной среде. Эти методы могут быть аналитическими или численными. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки и применяется в зависимости от конкретной цели исследования. Ввиду сложности общих уравнений механики сплошных сред, создание и применение математических методов встречает большие трудности. Поэтому получили широкое распространение *методы упрощения* исходных уравнений (или решаемых задач), как точные, так и приближённые.

Место механики сплошных сред в классификации наук определяется тем, что механика вообще является частью физики, изучающей строение реального мира. В теоретической части этой науки исходные данные, добытые опытным путём, закладываются в математическую модель, после чего проблемы исследуются средствами чистой математики через решение конкретных математических задач. Поэтому теоретическая механика сплошных сред является разделом математической физики и составляет основу классической прикладной математики.

Для понимания физических основ формирования математических моделей механики сплошных сред вначале полезно обратиться к молекулярному (микро) описанию. Пусть некоторый объём Ω сплошной среды содержит N молекул μ_i, $i = 1, \ldots, N$. Тогда знание массы m_i молекулы μ_i, её положения $\mathbf{x}_{i0}$ и скорости $\mathbf{u}_{i0}$ в момент времени t_0, а также действующей на неё силы $\mathbf{f}_i$ определяет положение и скорость этой молекулы в любой момент времени t через решение дифференциального уравнения второго закона Ньютона (с начальными условиями)

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i, \quad \mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{x}_{i0}, \quad \dot{\mathbf{x}}_i(t_0) = \mathbf{u}_{i0}, \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Если бы такое определение удалось, то можно было бы ответить на любой вопрос о поведении среды в объёме Ω. Однако этот путь неприемлем, так как число N очень велико (если $\Omega = 1$ см^3 воздуха, то $N \sim 10^{19}$. Напомним, что в 1 моле $\approx 22,4$ литра содержится $N_A = 6,0247 \cdot 10^{23}$ молекул — число Авогадро), а силы $\mathbf{f}_i$ точно не известны; также неизвестны и начальные условия. Поэтому микроописание сплошных сред отпадает и заменяется макроописанием, в котором основными являются *средние* величины.

Рассмотрение средних величин есть методологическая основа конструирования математических моделей сплошных сред.

Наиболее широко распространены две макротеории: *молекулярно-кинетическая* и *феноменологическая*. В молекулярно-кинетической теории (кинетической теории газов) средние величины скорости, плотности и т. д. вводятся с помощью теоретико-вероятностного (статистического) описания через функцию распределения молекул по положениям и скоростям. Кроме того, делаются определённые предположения о характере сил взаимодействия между молекулами (упругие столкновения, кулоновское отталкивание и т. п.). Получаемая математическая модель имеет вид так называемого *уравнения Больцмана* для функции распределения. Эта модель используется при изучении взаимодействия тела с сильно разреженным газом.

Основу феноменологической теории составляет представление о том, что в каждой точке A пространства, занятого сплошной средой, плотность, скорость и другие механические величины можно определить как пределы некоторых средних по объёму Ω, содержащему точку A. Эти средние формируются так. Пусть молекулы μ_i, $i = 1, \ldots, N$, находящиеся в объёме Ω, имеют массу μ_i, скорость $\mathbf{u}_i$ и внутреннюю энергию U_i. По ним вычисляются макрохарактеристики объёма Ω: масса $M = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$, импульс $\mathbf{K} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\mathbf{u}_i$ и полная энергия $E = \sum\limits_{i=1}^{N} (m_i|\mathbf{u}_i|^2/2 + U_i)$. С помощью этих характеристик определяются *средняя плотность* $\rho_* = M/\Omega$ и *средняя скорость* $\mathbf{u}_* = \mathbf{K}/M$. Далее вычисляется полная внутренняя энергия $U = \sum\limits_{i=1}^{N} (m_i|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_*|^2/2 + U_i)$ и по ней определяется *средняя внутренняя энергия* $U_* = U/\Omega$. Тогда макрохарактеристики объёма Ω выражаются только через средние величины

$$M = \Omega\rho_*, \quad \mathbf{K} = \Omega\rho_*\mathbf{u}_*, \quad E = \Omega(\rho_*|\mathbf{u}_*|^2/2 + U_i).$$

Физическая гипотеза «материального континуума» позволяет приписать точке A «предельные» значения средних, например, $\rho = \lim \rho_*$, $\mathbf{u} = \lim \mathbf{u}_*$, когда объём Ω стягивается к точке A. Наконец, математическая модель имеет вид законов изменения макрохарактеристик со временем на основе дополнительных физических гипотез о силовых и энергетических воздействиях на объём Ω.

Чёткое выделение этих гипотез позволяет рассматривать феноменологическую теорию механики сплошных сред как теорию некоторой математической структуры, основанной на определённой системе аксиом. Эта теория и излагается далее.

Замечание 3.1. Из сказанного выше следует, что классическая механика сплошных сред, по существу, основана на трёх утверждениях:

1) справедлива классическая механика Ньютона;
2) справедлива классическая термодинамика;
3) справедлива гипотеза сплошности.

Первое утверждение предполагает, что изучаются движения со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, и рассматриваются *макроскопические* объекты, размеры которых существенно превосходят *размеры микромира*.

Второе утверждение предполагает, что в окрестности каждой точки среда находится в состоянии термодинамического равновесия, вследствие чего можно пользоваться законами термодинамики.

Третье утверждение предполагает замену реальной среды с её молекулярным дискретным строением моделью сплошного распределения вещества по рассматриваемому объёму.

3.2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, АКСИОМЫ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Сплошная среда трактуется как меняющаяся со временем часть физического пространства. Принципиальный вопрос о структуре пространства-времени событий в классическом подходе решается так: сплошная среда считается частью трёхмерного евклидова аффинного пространства R^3 и предполагается, что время t не зависит от событий, т. е. абсолютно. Эти предположения, составляющие основу ньютоновской механики, принимаются в качестве первой аксиомы.

Аксиома пространства-времени A_1. *Сплошная среда есть подмножество трёхмерного евклидова аффинного пространства. Время абсолютно.*

Евклидово-аффинное пространство состоит из векторов и точек, причём для любых двух его точек A, B однозначно определён вектор $\mathbf{AB}$ с началом A и концом B. В этом пространстве фиксируется начало отсчета — точка O, а положение любой другой точки A характеризуется её радиус-вектором $\mathbf{x} = \mathbf{OA}$. Все векторы считаются принадлежащими одному и тому же евклидову векторному пространству над полем вещественных чисел R^1. Открытые связные множества — области $\Omega \subset R^3$ — рассматриваются как *положения* (конфигурации) сплошной среды. В механике область с кусочно-гладкой границей обычно называется *объёмом*.

Область $\Omega \subset R^3$ называется *материальной* областью (или *средой*), если на ней определена аддитивная функция множества, называемая *массой*. Предполагается, что для любого (не пустого объёма) $\omega \subset \Omega$ его масса $M(\omega) > 0$. Аддитивность массы означает, что для любых двух непересекающихся объёмов ω_1 и ω_2 справедливо равенство

$$M(\omega_1 \cup \omega_2) = M(\omega_1) + M(\omega_2).$$

Кроме массы, на среде предполагается заданной другая аддитивная функция множества, называемая *внутренней энергией* и обозначаемая E_i.

Среда $\Omega \subset R^3$ называется *материальным континуумом*, если функции M и E_i дифференцируемы на Ω и их плотность (объёмная) ограничена. Объёмная плотность массы обозначается ρ и называется *плотностью среды* или просто *плотностью*. Объёмная плотность внутренней энергии обозначается ρU, в связи с чем U называется *удельной внутренней энергией* (внутренней энергией единицы массы). Следующие формулы устанавливают связь между соответствующей аддитивной функцией множества и её объёмной плотностью:

$$M(\omega) = \int\limits_{\omega} \rho \, d\omega, \quad E_i(\omega) = \int\limits_{\omega} \rho U \, d\omega.$$

Вторая аксиома фиксирует это свойство сплошной среды.

Аксиома материального континуума A_2. *Сплошная среда есть материальный континуум.*

Переход сплошной среды из положения Ω_1 в положение Ω_2 называется её *перемещением*. Далее рассматриваются перемещения сплошной среды в зависимости от времени t, изменяющегося в некотором интервале $(a, b) \in R^1$. Положение среды в момент времени t обозначается Ω_t. Совокупность точек, принадлежащих семейству областей Ω_t, рассматривается как множество (область) $W \subset R^4(\mathbf{x}, t)$, где

$$W = \left\{ (\mathbf{x}, t) \middle| \, t \in (a, b), \; \mathbf{x} \in \Omega_t \right\}.$$

В этом представлении каждое положение Ω_t есть сечение четырёхмерного множества W гиперплоскостью, несущей данное значение и параллельной пространству $R^3(\mathbf{x})$.

В дальнейшем фиксируется момент времени $t_0 \in (a, b)$ и рассматривается однопараметрическое семейство перемещений $\boldsymbol{\gamma}_t$ положения Ω_{t_0} в положение Ω_t для каждого $t \in (a, b)$ (для простоты вместо Ω_{t_0} будет использоваться символ Ω_0). Если каждое перемещение $\boldsymbol{\gamma}_t$ является отображением Ω_0 на Ω_t, то для каждой фиксированной точки $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$ возникает отображение $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi}) : (a, b) \to R^3$, действующее по формуле $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi})(t) = \boldsymbol{\gamma}_t(\boldsymbol{\xi})$.

Отображение $\boldsymbol{\gamma} : \Omega_0 \times (a, b) \to R^3$, действующее по формуле $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{\gamma}_t(\boldsymbol{\xi})$, называется *движением* сплошной среда. Следующая аксиома фиксирует существование и класс перемещений.

Аксиома движения A_3. *Для любого* $t_0 \in (a, b)$ *перемещение сплошной среды из положения* Ω_0 *в положение* Ω_t *определено и есть гомеоморфизм* (*взаимно-однозначное и непрерывное отображение*) *области* Ω_0 *на область* Ω_t; *для каждой точки* $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$ *отображение* $\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi}) : (a, b) \to R^3$ *непрерывно и кусочно-непрерывно дифференцируемо на* (a, b).

Эта аксиома позволяет индивидуализировать (материализовать) точки сплошной среды. Индивидуальной (материальной) точкой называется точка $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi}, t) \in R^3$, получаемая в результате движения фиксированной точки $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$. Для краткости индивидуальная точка называется *частицей* сплошной среды. Каждая частица при изменении времени t описывает в R^3 кривую, называемую *траекторией* этой частицы.

Движущимся объёмом (или индивидуальным, или материальным) называется объём ω_t, состоящий для всех $t \in (a, b)$ из одних и тех же частиц.

Подчеркнём принципиальное различие между точкой пространства и частицей: *точка* есть место в пространстве, а *частица* — малая часть материального объёма. Размеры частицы должны быть пренебрежимо малы по сравнению с характерными размерами изучаемого явления. С другой стороны, размеры частицы должны быть достаточно велики, чтобы не учитывать молекулярную структуру среды, см. п. 3.1.

Замечание 3.2. В силу аксиомы A_3, для всех $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$ и всех (кроме, быть может, конечного числа) значений $t \in (a, b)$ существует производная $\partial \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi}, t)/\partial t$, которая называется *скоростью* движения частиц. Скорость есть вектор, обозначаемый $\mathbf{u}$.

Существует два способа описания скалярных, векторных или тензорных полей, заданных на движущейся сплошной среде. Первый называется *эйлеровым* описанием и заключается в задании значения поля F на положении Ω_t как функции точки $\mathbf{x} \in R^3$ и времени t, т. е. значения $F(\mathbf{x}, t)$. Второй, связанный с понятием частицы, называется *лагранжевым* описанием и состоит в задании значения того же поля на каждой частице $\boldsymbol{\xi} \in \Omega_0$ в момент времени t. Пусть это значение есть $\overset{\circ}{F}(\boldsymbol{\xi}, t)$. Функции F и $\overset{\circ}{F}$ связаны тождеством

$$\overset{\circ}{F}(\boldsymbol{\xi}, t) = F(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\xi}, t), t).$$

Дифференцирование по t приводит к равенству

$$\frac{\partial \overset{\circ}{F}}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F.$$

В правой части на функцию F действует дифференциальный оператор, который называется *полной производной* (синонимы: индивидуальная производная; материальная производная; производная в частице; производная вдоль траектории) и обозначается символом d/dt (в отличие от частной производной

$\partial/\partial t$). Итак, для любого гладкого поля $F = F(\mathbf{x}, t)$ полная производная даётся формулой

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F.$$

В частности, если $F = \mathbf{x}$, то $\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \gamma(\boldsymbol{\xi}, t)$ и снова получается формула определения скорости

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u} = \frac{\partial \gamma(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t}\,.$$

Координаты $(\boldsymbol{\xi}, t)$ называются *лагранжевыми*, а $(\mathbf{x}, t)$ — *эйлеровыми*.

Различие этих двух описаний существенно. Например, если поле вектора скорости $\mathbf{u}$ известно в лагранжевом описании, т. е. задана вектор-функция $\overset{\circ}{\mathbf{u}}\,(\boldsymbol{\xi}, t)$, то определение траекторий частиц (а значит, и движения сплошной среды в целом) сводится к квадратуре

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + \int\limits_{t_0}^{t} \overset{\circ}{\mathbf{u}}\,(\boldsymbol{\xi}, t')\, dt'.$$

Если же поле $\mathbf{u}$ известно в эйлеровом описании, т. е. задана вектор-функция $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, то та же задача приводит к задаче Коши для дифференциального уравнения движения частиц (уравнения траекторий)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}.$$

Несмотря на то, что первая задача много проще второй, лагранжево описание удобно не всегда. В частности, основные дифференциальные уравнения сплошной среды имеют более простой вид в эйлеровом описании.

При эйлеровом описании отображение γ получается в силу зависимости решения вышеупомянутой задачи Коши от начального значения $\boldsymbol{\xi}$. Если поле $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ один раз непрерывно дифференцируемо, то существует якобиан $J = \det(\partial\mathbf{x}/\partial\boldsymbol{\xi})$. Для него справедлива *формула Эйлера*

$$\frac{dJ}{dt} = J\operatorname{div}\mathbf{u}.$$

Это есть просто формула (1.8.26), так как $J = \sqrt{\hat{g}}$.

В дополнение к основным числовым характеристикам объёма сплошной среды определяются ещё следующие аддитивные функции множества для любого объёма $\omega \in \Omega$:

количество движения (импульс)

$$\mathbf{K}(\omega) = \int\limits_{\omega} \rho\mathbf{u}\,d\omega;$$

момент количества движения (момент импульса)

$$\mathbf{H}(\omega) = \int\limits_{\omega} \rho(\mathbf{x}\times\mathbf{u})\,d\omega;$$

кинетическая энергия

$$E_k(\omega) = \int\limits_{\omega} \frac{1}{2}\,\rho|\mathbf{u}|^2\,d\omega;$$

полная энергия

$$E(\omega) = E_k(\omega) + E_i(\omega).$$

Изменение этих характеристик при движении происходит под действием силовых и энергетических воздействий на объём ω. Эти воздействия осуществляются с помощью новых величин: главного вектора сил $\mathbf{F}(\omega)$, главного момента $\mathbf{G}(\omega)$ и вносимой мощности $N(\omega)$.

Если все упомянутые величины взять для какого-либо фиксированного движущегося объёма, то они будут функциями только времени t. Следующая аксиома устанавливает их определённую связь.

Аксиома баланса A_4. *Для любого движущегося объёма $\omega_t \in \Omega$ и в любой момент времени $t \in (a, b)$ справедливы равенства*

$$\frac{d}{dt} M(\omega_t) = 0, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{K}(\omega_t) = \mathbf{F}(\omega_t),$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H}(\omega_t) = \mathbf{G}(\omega_t), \quad \frac{d}{dt} E(\omega_t) = N(\omega_t).$$

Эту аксиому иногда называют «принципом отвердевания», так как данные равенства справедливы в случае движения твёрдого тела.

Для конкретизации правых частей в аксиоме баланса требуется определённое представление о силах, действующих на объёмы сплошной среды. Здесь будут рассматриваться только внешние массовые (объёмные) и внутренние поверхностные силы.

Внешней массовой силой называется аддитивная вектор-функция $\mathbf{F}_e$, имеющая плотность. Если ввести её массовую плотность $\mathbf{f}$, то объёмная плотность будет $\rho\mathbf{f}$. Поэтому внешняя массовая сила, действующая на объём ω, даётся формулой

$$\mathbf{F}_e(\omega) = \int\limits_{\omega} \rho\mathbf{f}\, d\omega.$$

Соответственно, момент внешней массовой силы, действующий на объём ω, определяется по формуле

$$\mathbf{G}_e(\omega) = \int\limits_{\omega} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{f})\, d\omega.$$

Внутренняя поверхностная сила действует на объём ω только по его поверхности $\partial\omega$. Для её определения рассматривается произвольное сечение Σ области Ω некоторой плоскостью, делящей Ω на части Ω_1 и Ω_2.

Внутренней поверхностной силой, действующей через сечение Σ со стороны части Ω_2 на часть Ω_1, называется аддитивная вектор-функция $\mathbf{F}_i$ множеств $\sigma \subset \Sigma$. Следующая аксиома утверждает существование и дифференцируемость этой силы.

Аксиома внутренних поверхностных сил A_5. *Внутренняя поверхностная сила определена для любого сечения* Σ *области* Ω *и имеет плотность* (*поверхностную*) *на* Σ.

Пусть $\mathbf{n}$ — орт нормали к Σ, направленный в сторону Ω_2. Вводимая аксиомой A_5 поверхностная плотность обозначается $\mathbf{p}_n$ и называется *напряжением* поверхностных сил, *действующим на область* Ω_1 *через площадку с нормалью* $\boldsymbol{n}$. Для области $\sigma \subset \Sigma$ сила, действующая на часть Ω_1 со стороны части Ω_2 через площадку σ, равна

$$\mathbf{F}_i(\sigma) = \int\limits_{\sigma} \mathbf{p}_n \, d\sigma.$$

Внутренней поверхностной силой, действующей на объём $\omega \subset \Omega$ со стороны области $\Omega \setminus \bar{\omega}$, называется сила

$$\mathbf{F}_i(\omega) = \int\limits_{\partial\omega} \mathbf{p}_n \, d\sigma,$$

где в каждой точке поверхности $\partial\omega$ в качестве $\mathbf{n}$ взят орт *внешней нормали* к $\partial\omega$ (точнее, в почти каждой точке, так как поверхность предполагается лишь кусочно-гладкой). Соответственно, момент внутренних поверхностных сил, действующих на объём ω, определяется формулой

$$\mathbf{G}_i(\omega) = \int\limits_{\partial\omega} (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_n) \, d\sigma.$$

Следующая аксиома фиксирует предположение о том, что никаких других, кроме перечисленных выше, сил и моментов на объёмы $\omega \subset \Omega$ не действует.

Аксиома сил и моментов A_6. *Главный вектор и главный момент сил, действующих на любой объём* $\omega \subset \Omega$, *даются формулами*

$$\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{F}_i(\omega) + \mathbf{F}_e(\omega) = \int\limits_{\partial\omega} \mathbf{p}_n \, d\sigma + \int\limits_{\omega} \rho \mathbf{f} \, d\omega,$$

$$\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{G}_i(\omega) + \mathbf{G}_e(\omega) = \int\limits_{\partial\omega} (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_n)\, d\sigma + \int\limits_{\omega} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{f})\, d\omega.$$

Наконец, требуются ещё сведения о мощности притока энергии в объёмы ω. Этот приток происходит за счёт работы действующих сил, переноса тепловой энергии, внешних источников энергии, внутренних источников тепла.

Мощностью, развиваемой внутренними поверхностными силами и внешними массовыми силами, называются, соответственно, величины

$$N_i(\omega) = \int\limits_{\partial\omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n)\, d\sigma, \quad N_e(\omega) = \int\limits_{\omega} \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{f}\, d\omega, \quad N_t(\omega) = \int\limits_{\omega} \rho h\, d\omega,$$

где $h(\mathbf{x}, t)$ — объёмная плотность внутренних источников тепла.

Приток тепла через поверхность определяется с помощью сечений Σ аналогично внутренней поверхностной силе.

Потоком тепла через сечение Σ из части Ω_2 в часть Ω_1 называется аддитивная скалярная функция Q множеств $\sigma \subset \Sigma$. Следующая аксиома утверждает существование и дифференцируемость этой функции.

Аксиома потока тепла A_7. *Поток тепла определён для любого сечения Σ области Ω и имеет плотность (поверхностную) на Σ.*

Поверхностная плотность потока тепла обозначается q_n. Для области $\sigma \subset \Sigma$ поток тепла из части Ω_2 в часть Ω_1 через площадку σ равен

$$Q(\sigma) = \int\limits_{\sigma} q_n\, d\sigma.$$

Потоком тепла в объём $\omega \subset \Omega$ из области $\Omega \setminus \bar{\omega}$ называется величина

$$Q(\omega) = \int\limits_{\partial\omega} q_n\, d\sigma,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\omega$.

Следующая аксиома фиксирует предположение об отсутствии других, кроме перечисленных выше, механизмов внесения энергии в объёмы ω.

Аксиома потока энергии A_8. *Мощность, вносимая в любой объём* $\omega \subset \Omega$, *равна*

$$N(\omega) = N_i(\omega) + N_e(\omega) + N_t(\omega) + Q(\omega) =$$
$$= \int\limits_{\partial\omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n)\, d\sigma + \int\limits_{\omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}\, d\omega + \int\limits_{\omega} \rho h\, d\omega + \int\limits_{\partial\omega} q_n\, d\sigma.$$

В итоге принятых аксиом и данных определений формируется следующая классическая *математическая модель* движущейся сплошной среды.

Интегральные законы сохранения M_1. В движущейся сплошной среде для любого движущегося объёма ω_t и любого момента времени $t \in (a, b)$ справедливы равенства:

закон сохранения массы

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\omega_t} \rho\, d\omega = 0,$$

закон сохранения импульса

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\omega_t} \rho \mathbf{u}\, d\omega = \int\limits_{\partial\omega_t} \mathbf{p}_n\, d\sigma + \int\limits_{\omega_t} \rho \mathbf{f}\, d\omega,$$

закон сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\omega_t} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{u})\, d\omega = \int\limits_{\partial\omega_t} (\mathbf{x} \times \mathbf{p}_n)\, d\sigma + \int\limits_{\omega_t} \rho(\mathbf{x} \times \mathbf{f})\, d\omega,$$

закон сохранения полной энергии

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\omega_t} \rho \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + U \right) d\omega =$$
$$= \int\limits_{\partial\omega_t} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n)\, d\sigma + \int\limits_{\omega_t} \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{f})\, d\omega + \int\limits_{\omega_t} \rho h\, d\omega + \int\limits_{\partial\omega_t} q_n\, d\sigma.$$

Окончательно можно сформулировать следующее определение: *движущаяся сплошная среда есть объект, удовлетворяющий аксиомам* $A_1 - A_8$. *Её математической моделью является совокупность законов сохранения* M_1.

3.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Временно будем считать, что основные величины связанные с движущейся сплошной средой: плотность ρ, удельная внутренняя энергия U, скорость $\mathbf{u}$, напряжение $\mathbf{p}_n$ на площадке с нормалью $\mathbf{n}$, плотность потока тепла q_n, плотность массовых сил $\mathbf{f}$ и объёмная плотность внутренних источников тепла h, суть функции переменных $\mathbf{x}, t$, заданные на области $W \subset R^4(\mathbf{x}, t)$ (эйлерово описание движения сплошной среды). Величины $\mathbf{p}_n$ и q_n зависят также от орта $\mathbf{n} \in R^3$, т. е. от точки единичной сферы $S_1 \subset R^3$. Вообще говоря, эти функции не обязаны быть непрерывными, так как для справедливости интегральных законов сохранения M_1 это не обязательно. Однако класс движений, для которых основные величины являются достаточно гладкими функциями, является практически важным и может быть исследован средствами математического анализа.

Движение сплошной среды называется *непрерывным* в области W, если функции ρ, U, $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}_n$, q_n непрерывно дифференцируемы на W, функции $\mathbf{p}_n$, q_n непрерывны на $W \times S_1$ и функции $\mathbf{f}$, h непрерывны на W.

Оказывается, что на классе непрерывных движений система законов сохранения M_1 равносильна некоторой системе дифференциальных уравнений. Покажем, что справедлива следующая *основная*

Лемма 3.1. *Если функция* g *непрерывна на области* $\Omega \subset \subset R^3$ *и если*

$$\int_\omega g\, d\omega = 0$$

для любого объёма $\omega \subset \Omega$*, то* $g \equiv 0$ *на* Ω.

Для доказательства леммы допустим противное: пусть найдётся такая точка $M_0 \subset \Omega$, в которой $g(M_0) \neq 0$, например

$g(M_0) > 0$. По непрерывности $g(M)$ можно найти подобласть ω_0, содержащую точку M_0, причём $g(M) > \varepsilon > 0$ на ω_0. Тогда

$$\int\limits_{\omega_0} g(M)\, d\omega > \varepsilon|\omega_0| > 0$$

вопреки предположению леммы; $|\omega_0|$ — объём области $\omega_0 \subset \Omega$.

Замечание 3.3. Результат леммы остаётся справедливым, если скалярную функцию заменить векторной функцией $\mathbf{g}(M)$, непрерывной на Ω. Достаточно применить лемму к проекциям на оси прямоугольной декартовой системы координат этой векторной функции. Точно так же, если функция $g(M)$ определена и непрерывна на поверхности Σ (или на кривой L), причём интеграл от $g(M)$ по любой внутренней части Σ (или L) всегда равен нулю, то $g \equiv 0$ на Σ (или L).

В тензорном анализе была получена формула (1.8.32) для индивидуальной производной по параметру от количества величины φ. Если в ней взять $\rho = \varphi$, то закон сохранения массы из модели M_1 перепишется так:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\omega} \rho\, d\omega = \int\limits_{\partial\omega} \rho\mathbf{u}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int\limits_{\omega} \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\, d\omega,$$

или

$$\int\limits_{\omega}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\right] d\omega = 0$$

для произвольного объёма $\omega \subset \Omega$. В силу основной леммы отсюда следует уравнение

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{3.3.1}$$

называемое *уравнением неразрывности* в эйлеровых переменных. В произвольных криволинейных координатах оно имеет вид (см. формулу (1.5.32) для дивергенции)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = 0 \quad \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\rho\sqrt{g}\,u^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0\right). \tag{3.3.2}$$

Упражнения. 1) Показать, что в переменных Лагранжа дифференциальное уравнение сохранения массы имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\sqrt{\hat{g}}\right) = 0 \quad \left(\rho\sqrt{\hat{g}} = \rho^o\sqrt{g^o}\right), \tag{3.3.3}$$

где ноликом отмечены значения соответствующих величин в момент времени t^0: $g^o = \hat{g}(\xi^\sigma, t^0)$, $\rho^o = \rho(\xi^\sigma, t^0)$.

Указание. Воспользоваться принципом сохранения массы в переменных Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_0} \rho(\xi^\sigma, t)\sqrt{\hat{g}(\xi^\sigma, t)}\, d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3 = 0.$$

2) Сплошная среда называется *несжимаемой*, если любой индивидуальный объём $d\omega$ не изменяется с течением времени: $d(d\omega)/dt = 0$. С помощью выражения $d\omega = \sqrt{\hat{g}}\, d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3$ и равенства (3.3.3) показать, что

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \left(\rho = \rho(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\right); \tag{3.3.4}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \left(\nabla_\alpha u^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}\, u^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0\right). \tag{3.3.5}$$

Соотношения (3.3.4) есть условия несжимаемости в координатах Лагранжа, а (3.3.5) — в переменных Эйлера.

Используя уравнение неразрывности, можно придать индивидуальной производной по времени от количества величины $\rho\varphi$ в индивидуальном объёме ω_t некоторую специальную форму. Действительно, заменяя в формуле (1.8.32) φ на $\rho\varphi$, получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} \rho\varphi\, d\omega = \int\limits_{\omega_t}\left[\varphi\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varphi\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) + \rho\nabla\varphi\cdot\mathbf{u}\right] d\omega.$$

С помощью равенства (3.3.1) найдём

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} \rho\varphi\, d\omega = \int\limits_{\omega_t} \rho\frac{d\varphi}{dt}\, d\omega. \tag{3.3.6}$$

Перейдём к преобразованию закона сохранения импульса — второго интегрального уравнения модели M_1. В силу формулы (3.3.6) его можно переписать так:

$$\int\limits_{\partial\omega_t} \mathbf{p}_n\, d\sigma = \int\limits_{\omega_t} \mathbf{h}\, d\omega, \tag{3.3.7}$$

где $\mathbf{h} = \rho(\mathbf{f} - d\mathbf{u}/dt)$ — непрерывная функция в области Ω_t. Это равенство является основой для доказательства *первой основной теоремы механики сплошных сред*.

Теорема 3.1. *На области W существует такое тензорное поле тензоров 2-го ранга* $\mathbf{P}$, *что в каждой точке W вектор напряжения* $\mathbf{p}_n$, *действующий на любую площадку с нормалью* $\mathbf{n}$, *даётся формулой*

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}. \tag{3.3.8}$$

Доказательство. Установим сначала, что $\mathbf{p}_{-n} = -\mathbf{p}_n$ (закон равенства действия и противодействия). Для этого рассмотрим шар ω с центром в произвольной точке $M \in \Omega_t$ столь малого радиуса ε, что $\omega \subset \Omega_t$ (ω – фиксировано). Плоскостью, проходящей через точку M ортогонально вектору $\mathbf{n}$, этот шар разбивается на два полушара: ω_1 и ω_2. Пусть σ_ε есть круг, получаемый в сечении, рис. 3.1.

Применим равенство (3.3.7) последовательно к объёмам ω_1, ω_2 и ω. Сложим два первых равенства и вычтем последнее,

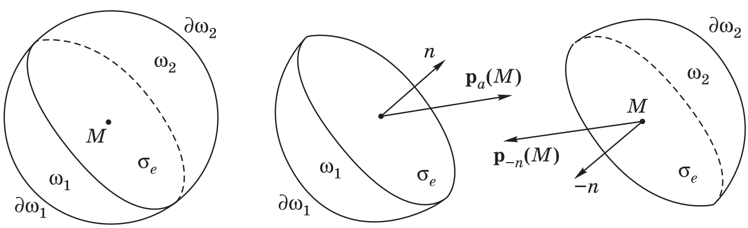

Рис. 3.1
Шаровая окрестность точки M

получим

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon} [\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_{-n}]\, d\sigma = 0,$$

откуда по основной лемме в силу непрерывности поля $\mathbf{p}_n$ приходим к равенству $\mathbf{p}_{-n} = -\mathbf{p}_n$.

Зависимость вектора напряжений от нормали, следуя Коши, можно существенно уточнить. Для этого рассмотрим элементарный объём в виде тетраэдра, три грани которого параллельны координатным плоскостям, а четвёртая ориентирована произвольным образом, рис. 3.2. Обозначим площади граней $\delta\Sigma_{x^1}$, $\delta\Sigma_{x^2}$, $\delta\Sigma_{x^3}$ и $\delta\Sigma_n$, геометрический смысл которых ясен из рисунка. Ориентация площадки однозначно определяется единичной нормалью $\mathbf{n} = (\cos(n, x^1) \cos(n, x^2)$, $\cos(n, x^3))$, тогда $\delta\Sigma_{x^1} = \cos(n, x^1)\delta\Sigma_n$, $\delta\Sigma_{x^2} = \cos(n, x^2)\delta\Sigma_n$, $\delta\Sigma_{x^3} = \cos(n, x^3)\delta\Sigma_n$. Пусть высота тетраэдра из точки M на $\delta\Sigma_n$ равна ε, тогда его объём $\delta\Omega = \varepsilon\delta\Sigma_n/3$.

Выберем ε настолько малым, что $\delta\Omega \subset \Omega_t$. Граница тетраэдра $\partial\delta\Omega = \delta\Sigma_{x^1} \cup \delta\Sigma_{x^2} \cup \delta\Sigma_{x^3} \cup \delta\Sigma_n$, и применение равенства (3.3.7) к объёму $\omega_t = \delta\Omega$ приводит к соотношению

$$\int\limits_{\delta\Sigma_n} \mathbf{p}_n\, d\sigma - \int\limits_{\delta\Sigma_{x^1}} \mathbf{p}_{x^1}\, d\sigma - \int\limits_{\delta\Sigma_{x^2}} \mathbf{p}_{x^2}\, d\sigma - \int\limits_{\delta\Sigma_{x^3}} \mathbf{p}_{x^3}\, d\sigma = \int\limits_{\delta\Omega} \mathbf{h}\, d\omega.$$

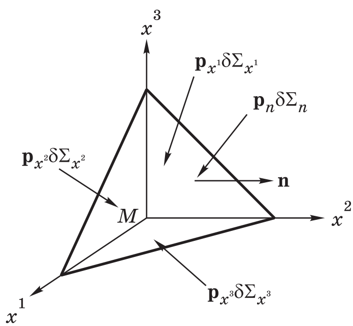

Рис. 3.2
Элементарный объём в виде тетраэдра

В силу непрерывности $\mathbf{p}_n$, $\mathbf{p}_{x^j}$ $(j = 1, 2, 3)$ и $\mathbf{h}$ в точке M, при $\varepsilon \to 0$ интегралы слева имеют порядок ε^2, а интеграл справа — порядок ε^3. Поэтому в точке M имеет место равенство $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{x^j} \cos(n, x^j)$, или $\mathbf{p}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, где

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{p}_{x^1}, \mathbf{p}_{x^2}, \mathbf{p}_{x^3}) \tag{3.3.9}$$

есть, по теореме деления тензоров, тензор 2-го ранга. Теорема доказана.

Установленное равенство (3.3.8) есть известная формула Коши (1822), утверждающая, что напряжения на гранях образуют систему взаимно уравновешенных напряжений.

Замечание 3.4. Через точку $M \in \Omega_t$ можно провести бесконечно много плоскостей, определяемых каждая своей нормалью $\mathbf{n}$. Тем самым имеется и бесконечно много векторов напряжений. Однако тензор напряжений только один и он характеризует напряжённое состояние сплошной среды в произвольной её точке. Тензор $\mathbf{P}$ называется *тензором напряжений*.

Введение тензора напряжений позволяет преобразовать закон сохранения импульса (второе уравнение модели M_1) поверхностный интеграл в объёмный с помощью равенства (1.8.20):

$$\int\limits_{\partial\omega_t} \mathbf{p}_n \, d\sigma = \int\limits_{\partial\omega_t} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int\limits_{\omega_t} \operatorname{div} \mathbf{P} \, d\omega.$$

Значит,

$$\int\limits_{\omega_t} \left(\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \operatorname{div} \mathbf{P} - \rho \mathbf{f} \right) d\omega = 0.$$

Применение основной леммы показывает, что

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{P} + \rho \mathbf{f}. \tag{3.3.10}$$

Используя контрвариантные компоненты, векторное равенство (3.3.10) можно записать в виде трёх скалярных:

$$\rho\frac{du^\beta}{dt} = \nabla_\alpha P^{\beta\alpha} + \rho f^\beta, \quad \beta = 1, 2, 3, \tag{3.3.11}$$

в котором компоненты ускорения и дивергенции тензора напряжений определяются так (см. формулы (1.7.21), (1.5.52)):

$$\frac{du^\beta}{dt} = \frac{\partial u^\beta}{\partial t} + u^\sigma \nabla_\sigma u^\beta; \tag{3.3.12}$$

$$\nabla_\alpha P^{\beta\alpha} = \frac{\partial P^{\beta\alpha}}{\partial x^\alpha} + P^{\sigma\alpha}\Gamma^\beta_{\sigma\alpha} + P^{\beta\sigma}\Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial(\sqrt{g}\, P^{\beta\alpha})}{\partial x^\alpha} + \sqrt{g}\, P^{\sigma\alpha}\Gamma^\beta_{\sigma\alpha}\right). \tag{3.3.13}$$

Обратимся к закону сохранения момента импульса (третьему уравнению модели M_1). С помощью формулы (3.3.6) оно примет вид

$$\int\limits_{\omega_t} \mathbf{x} \times \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{f}\right)\rho\, d\omega = \int\limits_{\partial\omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{p}_n\, d\sigma. \tag{3.3.14}$$

Используя равенство (3.3.8) в виде $\mathbf{p}_n = \mathbf{P}^\alpha n_\alpha$ и теорему Гаусса–Остроградского в форме (1.8.20), преобразуем поверхностный интеграл в объёмный:

$$\int\limits_{\partial\omega_t} \mathbf{x} \times \mathbf{p}_n\, d\sigma = \int\limits_{\partial\omega_t} (\mathbf{x} \times \mathbf{P}^\alpha) n_\alpha\, d\sigma = \int\limits_{\omega_t} \nabla_\alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{P}^\alpha)\, d\omega.$$

В силу тождества (1.5.50) ковариантная производная от векторного произведения равна

$$\nabla_\alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{P}^\alpha) = \nabla_\alpha \mathbf{x} \times \mathbf{P}^\alpha - \nabla_\alpha \mathbf{P}^\alpha \times \mathbf{x} =$$
$$= \nabla_\alpha \mathbf{x} \times \mathbf{P}^\alpha + \mathbf{x} \times \nabla_\alpha \mathbf{P}^\alpha.$$

Поэтому равенство (3.3.14) с учётом уравнения импульса (3.3.10) эквивалентно обращению в ноль интеграла

$$\int\limits_{\omega_t} \nabla_\alpha \mathbf{x} \times \mathbf{P}^\alpha \, d\omega = 0,$$

или, по основной лемме,

$$\nabla_\alpha \mathbf{x} \times \mathbf{P}^\alpha = 0. \tag{3.3.15}$$

Поскольку

$$\nabla_\alpha \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^\alpha} = \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{P}^\alpha = P^{\beta\alpha} \mathbf{e}_\beta,$$

то условие (3.3.15) можно переписать в виде

$$P^{\beta\alpha} \mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta = P^{\beta\alpha} e_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{e}^\gamma = 0,$$

или, что то же самое,

$$P^{\beta\alpha} e_{\alpha\beta\gamma} = 0. \tag{3.3.16}$$

По формуле (1.3.13) $S_{123} e_{\alpha\beta\gamma} = e_{123} S_{\alpha\beta\gamma}$, где $\mathbf{S}$ — произвольный антисимметричный по всем трём индексам тензор 3-го ранга. Значит, условие (3.3.16) равносильно условию

$$P^{\beta\alpha} S_{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Так как $\mathbf{S}$ — произвольный антисимметричный тензор, то по теореме о свойствах двойных свёрток отсюда следует симметрия тензора напряжений:

$$P^{\beta\alpha} = P^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{3.3.17}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3.2. *Для непрерывных движений интегральный закон сохранения момента импульса равносилен симметричности тензора напряжений.*

Действительно, все рассуждения, начиная с равенства (3.3.17), можно обратить и прийти к третьему уравнению модели M_1.

Вернёмся к равенству (3.3.9). Пусть $p_{x^1 x^1}, p_{x^1 x^2}, p_{x^1 x^3}$ — компоненты вектора $\mathbf{p}_{x^1}$; $p_{x^2 x^1}, p_{x^2 x^2}$, $p_{x^2 x^3}$ — компоненты вектора $\mathbf{p}_{x^2}$; $p_{x^3 x^1}, p_{x^3 x^2}, p_{x^3 x^3}$ — компоненты вектора $\mathbf{p}_{x^3}$.

Согласно теореме 2

$$p_{x^1x^2} = p_{x^2x^1}, \quad p_{x^2x^3} = p_{x^3x^2}, \quad p_{x^3x^1} = p_{x^1x^3}.$$

Величины $p_{x^1x^1} = P_{11}$, $p_{x^2x^2} = P_{22}$, $p_{x^3x^3} = P_{33}$ называют *нормальными напряжениями*, а $p_{x^1x^2} = P_{12}$, $p_{x^2x^3} = P_{23}$, $p_{x^3x^1} = P_{31}, \ldots$ — *касательными напряжениями*.

Рассмотрим равенство Коши (3.3.8) для случая, когда касательные напряжения отсутствуют, т.е. $P_{ij} = 0$, $i \neq j$. Тогда $p_{nx^j} = P_{jj}\cos(n, x^j)$; с другой стороны, $p_{nx^j} = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{e}_j = p_n \cos(n, x^j)$, где p_n — проекция вектора напряжений на нормаль к площадке. Сравнивая эти формулы, находим $P_{11} = P_{22} = P_{33} = p_n$. Введём понятие *давления* $p(\mathbf{x}, t)$ согласно равенствам

$$p = -p_n = -P_{11} = -P_{22} = -P_{33}.$$

Поэтому в случае отсутствия касательных напряжений давление в точке является скалярной величиной, т.е. оно не зависит от ориентации площадки, проходящей через точку $M(x^1, x^2, x^3)$. Знак «минус» означает, что давление есть сжимающее напряжение. Размерность давления в системе СИ $[p] = \text{н}/\text{м}^2$, $1\ \text{н}/\text{м}^2 = 1$ Па (один паскаль). Кроме того, используются и другие единицы давления, например $1\ \text{кг} \cdot \text{с}/\text{м}^2 = 9.80665$ Па ≈ 10 Па, 1 атм $= 101325$ Па ≈ 0.1 МПа, 1 бар $= 10^5$ Па, 1 мм рт. ст. ≈ 133 Па, 1 мм вод. ст. ≈ 10 Па, а также кратные и дольные единицы от паскаля: гигапаскаль (1 ГПа $= 10^9$ Па), мегапаскаль (1 МПа $= 10^6$ Па), килопаскаль (1 кПа $= 10^3$ Па), миллипаскаль (1 мПа $= 10^{-3}$ Па), пикопаскаль (1 пПа $= 10^{-12}$ Па).

Замечание 3.5. Сплошные среды, для которых $\mathbf{P} = -p\mathbf{G}$ ($\mathbf{G}$ — метрический тензор), называются *идеальными*.

Закон сохранения энергии (четвёртое уравнение модели M_1) с помощью формулы (3.3.6), учётом симметрии тензора $\mathbf{P}$ и формул

$$\int\limits_{\partial\omega_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_n \, d\sigma = \int\limits_{\partial\omega_t} \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma = \int\limits_{\omega_t} \operatorname{div}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) \, d\omega,$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{u}) \equiv \mathbf{u}\cdot\operatorname{div}\mathbf{P} + \mathbf{P}:\mathbf{D}$$

запишется так:

$$\int\limits_{\omega_t} \rho\left(\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dU}{dt}\right)d\omega = \int\limits_{\omega_t} (\mathbf{u}\cdot\operatorname{div}\mathbf{P} + \mathbf{P}:\mathbf{D})\,d\omega + \\ + \int\limits_{\omega_t} \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\,d\omega + \int\limits_{\partial\omega_t} q_n\,d\sigma + \int\limits_{\omega_t} \rho h\,d\omega.$$

Использование уравнения импульса (3.3.10) упрощает предыдущее равенство до следующего:

$$\int\limits_{\omega_t} \rho\frac{dU}{dt}\,d\omega = \int\limits_{\omega_t} \mathbf{P}:\mathbf{D}\,d\omega + \int\limits_{\partial\omega_t} q_n\,d\sigma + \int\limits_{\omega_t} \rho h\,d\omega, \qquad (3.3.18)$$

где $\mathbf{D}$ — так называемый *тензор скоростей деформаций* — симметрическая часть градиента скорости. В декартовой прямоугольной системе координат

$$D_{\alpha\beta} = \nabla_{(\alpha}u_{\beta)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}\right). \qquad (3.3.19)$$

Часто пишут $\mathbf{D}(\mathbf{u})$, подчеркивая его зависимость от вектора скорости.

Упражнение. Пусть во всех точках сплошной среды тензор $\mathbf{D}$ равен нулю. Доказать, что в этом случае поле скоростей соответствует распределению скоростей в твёрдом теле: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(t) + \boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{x}$.

Выражение $\mathbf{P}:\mathbf{D}$ называется *свёрткой* (*двойной*) *тензоров* $\mathbf{P}$ и $\mathbf{D}$ и имеет вид

$$\mathbf{P}:\mathbf{D} \equiv P^{\alpha\beta}D_{\alpha\beta}. \qquad (3.3.20)$$

Закон сохранения (3.3.18) может быть записан так:

$$\int\limits_{\partial\omega_t} q_n\,d\sigma = \int\limits_{\omega_t} \psi\,d\omega, \qquad (3.3.21)$$

где $\psi = \rho\, dU/dt - \mathbf{P} : \mathbf{D} - \rho h$. Плотность потока тепла q_n есть функция переменных $\mathbf{x}$, t и нормали $\mathbf{n}$; положим $q_n = q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$. Покажем сначала, что $q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n})$. Поскольку форма области ω_t произвольна, то в качестве ω_t рассматривается шар с центром $M(x^1, x^2, x^3)$ малого радиуса ε. Плоскостью, проходящей через точку M ортогонально вектору $\mathbf{n}$, этот шар разбивается на два полушара, ω_{1t} и ω_{2t}, причем $\mathbf{n}$ направлен в сторону ω_{2t} (см. рис. 3.1).

Пусть σ_ε есть круг, получаемый в сечении. Применим равенство (3.3.21) к объёмам ω_{1t}, ω_{2t} и ω_t:

$$\int\limits_{\partial\omega_{1t}} q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\, d\sigma + \int\limits_{\sigma_\varepsilon} q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n})\, d\sigma = \int\limits_{\omega_{1t}} \psi\, d\omega,$$

$$\int\limits_{\partial\omega_{2t}} q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\, d\sigma + \int\limits_{\sigma_\varepsilon} q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\, d\sigma = \int\limits_{\omega_{2t}} \psi\, d\omega,$$

$$\int\limits_{\partial\omega_{1t}\cup\partial\omega_{2t}} q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\, d\sigma = \int\limits_{\omega_{1t}} \psi\, d\omega,$$

где $\partial\omega_{1t}$, $\partial\omega_{2t}$ — поверхности полусфер и $\partial\omega_{1t} \cup \partial\omega_{2t} = \partial\omega_t$. Складывая два первых равенства и вычитая третье, получим

$$\int\limits_{\sigma_\varepsilon} [q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) + q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n})]\, d\sigma = 0.$$

Поэтому, в силу непрерывности скалярного поля q на σ_ε, в точке M должно быть $q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n})$.

Возьмем в качестве ω_t тетраэдр, см. рис. 3.2. В тех же обозначениях равенство (3.3.21) дает соотношение

$$\int\limits_{\delta\Sigma_n} q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\, d\sigma + \int\limits_{\delta\Sigma_{x1}} q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_1)\, d\sigma + \int\limits_{\delta\Sigma_{x2}} q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_2)\, d\sigma +$$
$$+ \int\limits_{\delta\Sigma_{x3}} q(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_3)\, d\sigma = \int\limits_{\omega_t} \psi\, d\omega.$$

В силу непрерывности подынтегральных функций интегралы слева имеют порядок ε^2, а интегралы справа — ε^3 при $\varepsilon \to \to 0$. Значит, в точке M справедливо равенство (учтены формулы $\delta\Sigma_{x^j} = \cos(n, x^j)\delta\Sigma_n$) $q(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = q(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_1)\cos(n, x^1) + q(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_2)\cos(n, x^2) + q(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3)\cos(n, x^3)$. Другими словами, существует такое векторное поле $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, что

$$q_n = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}. \tag{3.3.22}$$

Вектор $\mathbf{q}$ называется *вектором потока тепла*. Знак минус взят для того, чтобы вектор $\mathbf{q}$ показывал реальное направление переноса тепловой энергии, так как в качестве $\mathbf{n}$ берётся орт внешней нормали к границе $\partial\omega_t$ того объёма, в который *вносится* поток тепла с поверхностной плотностью $\mathbf{q}$.

Таким образом, доказана теорема существования вектора потока тепла.

Теорема 3.3. *На области W существует такое векторное поле векторов $\mathbf{q}$, что в каждой точке $(\mathbf{x}, t) \in W$ плотность потока тепла через любую площадку с нормалью $\mathbf{n}$ даётся формулой* (3.3.22)*, где $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$.*

Снова считая в (3.3.18) ω_t произвольным материальным объёмом и учитывая (3.3.22), приходим к уравнению притока тепла

$$\rho\frac{dU}{dt} = \mathbf{P} : \mathbf{D} - \operatorname{div}\mathbf{q} + \rho h. \tag{3.3.23}$$

Совокупность уравнений (3.3.1), (3.3.10), (3.3.17), (3.3.23) образует математическую модель непрерывных движений сплошной среды. Эта модель не является замкнутой, так как содержит пять скалярных уравнений и четырнадцать (с учётом симметрии тензора напряжений $\mathbf{P}$) искомых функций: ρ, u_1, u_2, u_3, P^{11}, P^{12}, P^{13}, P^{22}, P^{23}, P^{33}, U, q_1, q_2, q_3. Массовые плотности внешних сил $\mathbf{f}$ и объёмных источников тепла h считаются заданными функциями, поэтому возникает проблема «замыкания» модели, которая должна решаться на анализе дополнительной информации.

Некоторые свойства тензора напряжений. В каждой фиксированной точке $(\mathbf{x}, t) \in W$ имеется бесконечно много векторов напряжений, однако, в силу теорем 3.1 и 3.2, напряжённое состояние сплошной среды в этой точке сводится к описанию симметричного тензора $\mathbf{P}$. Обычно в механике тензор напряжений $\mathbf{P}$ в каком-либо ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ представляется матрицей (P):

$$(P) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{pmatrix}, \tag{3.3.24}$$

где $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ в силу симметричности $\mathbf{P}$. Ранее диагональные элементы $\sigma_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_i$ были названы *нормальными напряжениями*, а не диагональные τ_{ij}, $i \neq j$, — *касательными напряжениями*, $\tau_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j$.

Все эти напряжения зависят от выбора базиса. Поэтому важно установить свойства напряжённого состояния, не зависящие от базиса, — инвариантные по отношению к выбору базиса. Эта задача нами была уже решена в п. 1.4 для произвольного симметричного тензора 2-го ранга, см. формулы (1.4.20)–(1.4.22). Основные инварианты $I_k(\mathbf{P})$ равны

$$\begin{gathered} I_1(\mathbf{P}) = \operatorname{tr}(P) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2(\mathbf{P}) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 - \tau_{12}^2 - \tau_{23}^2 - \tau_{31}^2, \\ I_3(\mathbf{P}) = \det(P). \end{gathered} \tag{3.3.25}$$

В главных осях (см. формулы (1.4.25)–(1.4.28)) матрица тензора $\mathbf{P}$ имеет вид

$$(P) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{3.3.26}$$

Значит, вектор напряжения, действующего на площадку, перпендикулярную главной оси, направлен по этой оси, а его длина равна величине нормального напряжения на эту площадку; касательные напряжения здесь равны нулю. Инварианты (3.3.25) переписываются так: $I_1(\mathbf{P}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, $I_2(\mathbf{P}) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$, $I_3(\mathbf{P}) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

Рассмотрим квадратичную форму (1.4.31) для тензора $\mathbf{P}$: $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$, или, в развёрнутой форме,

$$f(\mathbf{x}) = \sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 + 2\tau_{12}xy + 2\tau_{23}yz + 2\tau_{31}zx,$$

где $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, а $\{\mathbf{e}_i\}$ — ортонормированный базис.

Поверхность 2-го порядка $f(\mathbf{x}) = \pm 1$ называется тензорной поверхностью тензора $\mathbf{P}$, или *квадрикой* напряжений (поверхностью Коши). В главных осях эта поверхность имеет вид $\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = \pm 1$. Если все три главных напряжения σ_i имеют один и тот же знак, то квадрика напряжений является эллипсоидом — *эллипсоид напряжений Ламе*. Если же среди главных напряжений имеются числа разных знаков, то квадрика напряжений есть объединение однополостного и двухполостного гиперболоидов. Возможны случаи, когда некоторые главные напряжения обращаются в ноль, тогда квадрика напряжений имеет форму либо цилиндра 2-го порядка, либо пары параллельных плоскостей.

Предположим, что квадрика напряжений $f(\mathbf{x}) \pm 1 = 0$ задана как геометрическая поверхность Γ, тогда для каждого орта $\mathbf{n}$ вектор напряжения $\mathbf{p}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ может быть найден геометрическим построением. Оно основано на том, что $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}$, и на разложении вектора напряжения $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ на нормальную $P_n \mathbf{n}$ и касательную $\mathbf{P}_\tau$ составляющие

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P_n \mathbf{n} + \mathbf{P}_\tau, \tag{3.3.27}$$

где $P_n = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P} \cdot n)$, а вектор $\mathbf{P}_\tau$ определяется из формулы (3.3.27). Величина P_n является *нормальным напряжением* по направлению $\mathbf{n}$, рис. 3.3.

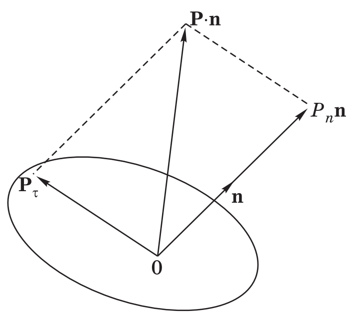

Рис. 3.3
Нормальное и касательное напряжения

Принято говорить, что в этом направлении среда растягивается или сжимается в зависимости от знака P_n. *Касательное* (*тангенциальное*) напряжение называется *сдвигом*, или *напряжением сдвига*. Оно лежит в касательной плоскости, перпендикулярной $\mathbf{n}$.

Упомянутое выше геометрическое построение состоит в том, что для данного $\mathbf{n}$ находится число $k > 0$ из условия $f(k\mathbf{n}) = \pm 1$, или $k^2 f(\mathbf{n}) = \pm 1$. Это даёт точку $A \in \Gamma$ с радиус-вектором $\mathbf{x} = k\mathbf{n}$. Направление нормали $\boldsymbol{\nu}$ к Γ в точке A определяет направление вектора $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}_n$. Для отыскания его длины на прямой, определяемой вектором $\mathbf{n}$, откладывается отрезок AB длины $|AB| = 1/k^2$ и через точку B проводится плоскость, перпендикулярная $\mathbf{n}$. Пусть C есть точка пересечения этой плоскости с прямой, проходящей через точку A с направляющим вектором $\boldsymbol{\nu}$. Тогда $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{AC}$, $\mathbf{P}_\tau = \mathbf{BC}$ и построение закончено.

Удобное двумерное графическое представление трёхмерного напряжённого состояния в точке дают *круги Мора* (*диаграммы Мора*). Эти круги строятся на плоскости (P_n, P_τ), $P_\tau = |\mathbf{P}_\tau|$. Пусть $\{\mathbf{e}_i\}$ — главный базис тензора $\mathbf{P}$ и в нём $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}^i$, тогда $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \sigma_1 n_1 \mathbf{e}^1 + \sigma_2 n_2 \mathbf{e}^2 + \sigma_3 n_3 \mathbf{e}^3$. Используя это представление и равенство $|\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}|^2 = P_n^2 + P_\tau^2$ (последнее следует из формулы (3.3.27)), получим систему линейных уравнений относительно n_j^2:

$$\begin{gathered}
\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = P_n^2 + P_\tau^2, \\
\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = P_n, \\
n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.
\end{gathered} \tag{3.3.28}$$

Предположим, что все главные напряжения различны и упорядочены так: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. В этом случае система (3.3.28) имеет решение

$$\begin{aligned}
n_1^2 &= \frac{(P_n - \sigma_2)(P_n - \sigma_3) + P_\tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}, \\
n_2^2 &= \frac{(P_n - \sigma_3)(P_n - \sigma_1) + P_\tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)},
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

$$n_3^2 = \frac{(P_n - \sigma_1)(P_n - \sigma_2) + P_\tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}.$$

Так как $\sigma_1 - \sigma_2 > 0$ и $\sigma_1 - \sigma_3 > 0$, а $n_1^2 \geqslant 0$, то числитель в правой части первого равенства (3.3.29) удовлетворяет неравенству $(P_n - \sigma_2)(P_n - \sigma_3) + P_\tau^2 \geqslant 0$, которое в плоскости напряжений (P_n, P_τ) представляет множество точек, лежащих *вне круга*

$$\left[P_n - \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2}\right]^2 + P_\tau^2 \geqslant \left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}\right]^2 \qquad (3.3.30)$$

и *на его границе*. На рис. 3.4 этот круг обозначен K_1.

Точно так же, из второго соотношения (3.3.29) числитель правой части удовлетворяет неравенству $(P_n - \sigma_3)(P_n - \sigma_1) + P_\tau^2 \leqslant 0$. Оно описывает точки *внутри круга* (*включая его границу*)

$$\left[P_n - \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}\right]^2 + P_\tau^2 \leqslant \left[\frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2}\right]^2, \qquad (3.3.31)$$

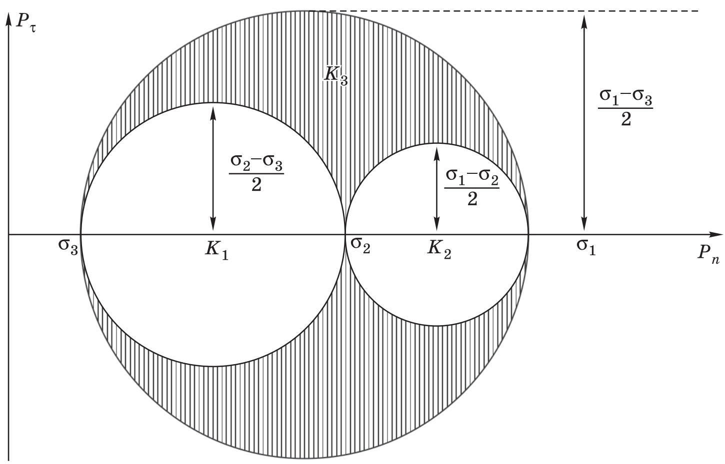

Рис. 3.4
Круги Мора

обозначенного K_2. Наконец, третье соотношение (3.3.29) приводит к неравенству $(P_n - \sigma_1)(P_n - \sigma_2) + P_\tau^2 \geqslant 0$, представляющее собой точки *вне круга* (и *на его границе*)

$$\left[P_n - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}\right]^2 + P_\tau^2 \geqslant \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}\right]^2, \tag{3.3.32}$$

обозначенного K_3.

В полуплоскости $P_\tau \geqslant 0$ плоскости (P_n, P_τ) неравенства (3.3.30)–(3.3.32) в совокупности определяют область M, ограниченную отрезком (σ_3, σ_1) оси $P_\tau = 0$ и тремя полуокружностями (заштрихованная область). Те и только те точки $(P_n, P_\tau) \in M$ дают нормальное напряжение и модуль касательного напряжения на некоторой площадке, нормаль к которой определяется равенствами (3.3.29). Неполнота представления напряжённого состояния с помощью диаграммы Мора связана с тем, что по ней находится лишь длина P_τ вектора $\mathbf{P}_\tau$, а не сам вектор.

Из диаграммы Мора непосредственно следует, что максимальное напряжение сдвига в данной точке области W равно $P_{\tau\,\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Вследствие того, что знак напряжения сдвига не имеет принципиального значения, часто изображают только верхнюю половину симметричной диаграммы на рис. 3.4. Нормальное же напряжение в этом случае $P_n = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Согласно найденным формулам (3.3.29), значениям $(P_{\tau\,\max}, P_n)$ соответствуют направления $\mathbf{n}$, для которых $n_1^2 = n_3^2 = 1/2$, $n_2^2 = 0$. Эти направления совпадают с биссектрисой угла (Ox, Oy), образованного главными направлениями, соответствующими собственным значениям (максимальному и минимальному).

Рассмотрим частные виды напряжённого состояния, имеющие специальные названия.

Сферическое напряжённое состояние. Равномерное сжатие и растяжение. Здесь $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. На любую площадку действует только нормальное напряжение, величина которого равна σ_1. Квадрика напряжений — сфера.

Одноосное напряжённое состояние (чистое растяжение или чистое сжатие в одном направлении). Здесь, например,

$\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ и при $\sigma_1 > 0$ будет чистое растяжение, а при $\sigma_1 < 0$ — чистое сжатие. На площадку с нормалью $\mathbf{e}_1$ действует только нормальное напряжение (касательные равны нулю), а на площадках с нормалью вида $n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ полный вектор напряжений равен нулю. Квадрика напряжений представлена двумя параллельными плоскостями.

Напряжённое состояние простого сдвига. Здесь $\sigma_1+\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$. Нормальное напряжение на площадках с нормалью $\mathbf{n} = (\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$ равно нулю и на этих же площадках достигается максимальное касательное напряжение, вектор которого равен $\mathbf{P}_\tau = \sigma_1(\mathbf{e}_1 \mp \mathbf{e}_2)/\sqrt{2}$.

Упражнение. Определить в данном случае квадрику напряжений.

Плоское напряжённое состояние. Здесь $\sigma_3 = 0$ и на площадках с нормалью $\mathbf{e}_3$ вектор напряжений равен нулю. На площадках с нормалью $n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2$ вектор напряжений лежит в плоскости векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Квадрики напряжений — цилиндры, образующие которых параллельны оси z.

Упражнения. 1. Пусть $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — два единичных вектора, а δ — вещественное число. Тензор напряжений задан формулой $\mathbf{P} = \delta(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_2\mathbf{n}_1)$. Найти главные направления и главные напряжения; здесь $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_2\mathbf{n}_1$ — диады.

2. Показать, что сумма квадратов модулей трёх векторов напряжений на трёх взаимно ортогональных площадках имеет постоянное значение, не зависящее от выбора площадок.

3. Найти необходимые и достаточные условия, при которых квадрики напряжений являются поверхностями вращения.

4. Напряжённое состояние во всех точках некоторой среды задано тензором напряжений, матрица которого в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$(P) = \begin{pmatrix} 0 & cz & 0 \\ cz & 0 & -cx \\ 0 & -cx & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \mathrm{const}.$$

а) Вычислить вектор напряжения в точке $M(4,-4,7)$ на плоскости $2x + 2y - z = -7$ и на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 81$.

б) Определить главные напряжения, максимальное касательное напряжение и главные значения девиатора напряжений в точке M.

в) Построить круги Мора в точке M.

г) Показать, что $\operatorname{div}\mathbf{P} = 0$, т. е. удовлетворяются уравнения равновесия при отсутствии массовых сил.

3.4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Учёт тепловой энергии в модели (3.3.1), (3.3.10), (3.3.17), (3.3.23) требует привлечения законов термодинамики (точнее в данном случае было бы говорить «термостатики»). Термодинамика изучает связи между тепловой энергией и другими видами энергии, в первую очередь — с механической энергией, и устанавливает закономерности взаимного превращения одного вида энергии в другой.

Основное понятие термодинамики — понятие *состояния* среды. Феноменологическое описание состояния осуществляется с помощью *параметров состояния*. Например, удельная внутренняя энергия U, плотность ρ (или удельный объём $V = 1/\rho$) являются таковыми. Кроме них наиболее часто используются следующие параметры состояния: *абсолютная температура* θ, *удельная энтропия* s, *давление* p. В системе СИ температура выражается в кельвинах, K, $\theta\ K = 273{,}15 + \theta\ {}^\circ C$, размерность энтропии $[s] = \text{Дж}/(\text{кг} \cdot K)$. Иногда параметрами состояния удобно считать компоненты тензора напряжений $\mathbf{P}$ или какие-либо другие величины. Если для некоторой среды уже установлен набор характеризующих её параметров состояния, то следующей задачей становится определение всех возможных связей между этими параметрами. Эти связи должны вытекать из общих физических законов и опытных закономерностей, регулирующих поведение изучаемой среды.

Пусть $Z = (z^1, z^2, \ldots)$ обозначает набор характерных параметров состояния z^k какой-либо среды. Множество всех допустимых значений Z образует *пространство состояний*. Размерность ν этого пространства равна минимальному числу параметров, определяющих состояние среды. Если $\nu = 1$, то среда называется однопараметрической, если $\nu = 2$ — двухпараметрической и т. д.

Два состояния Z_1 и Z_2 могут быть соединены направленными кривыми (путями) $l(Z_1, Z_2)$, идущими от Z_1 к Z_2. Если состояния на кривой принципиально физически осуществимы, то пути называются *процессами*. Процесс $l(Z_1, Z_2)$ называется *обратимым*, если путь $l(Z_2, Z_1)$, идущий по той же кривой, тоже процесс. В противном случае процесс $l(Z_1, Z_2)$ называется *необратимым*.

Тепловая энергия Q (или *количество тепла*), определяемая как энергия хаотического движения молекул, вообще говоря, не есть параметр состояния. Она зависит от процесса $l(Z_1, Z_2)$, переводящего среду из Z_1 в Z_2. Если рассматривать дифференцируемые процессы, переводящие среду из состояния Z в $Z + dZ$, то количество тепла, вырабатываемого в этом элементарном процессе,

$$\delta Q = \sum_k B_k(Z)\, dz^k.$$

Здесь зависимость процесса от пути выражается в том, что правая часть не является полным дифференциалом какой-либо функции. Однако в термодинамике доказывается, что существует параметр состояния, называемый абсолютной температурой θ, с которым отношение $\delta Q/\theta$ для любого *обратимого* процесса есть полный дифференциал некоторой функции, называемой энтропией s. Итак, для любого обратимого процесса $l(Z_1, Z_2)$

$$s_2 - s_1 = \int\limits_{l(Z_1, Z_2)} \theta^{-1}\delta Q \quad (ds = \theta^{-1}\delta Q), \tag{3.4.1}$$

где криволинейный интеграл не зависит от пути.

Если для среды такой набор параметров состояния установлен, то важной задачей будет нахождение всех возможных соотношений между этими параметрами. Такие соотношения должны вытекать из общих физических законов и опытных закономерностей, регулирующих поведение рассматриваемой среды.

Если в некотором элементарном физическом процессе среде сообщено количество тепла δQ, то она совершит механическую работу δA, а внутренняя энергия среды получит приращение dU. *Первый закон термодинамики* утверждает, что всегда справедливо равенство

$$\delta Q = dU + \delta A. \tag{3.4.2}$$

Этот физический закон, устанавливающий эквивалентность тепловой и механической энергии, является термодинамическим выражением закона сохранения энергии. Использование разных обозначений в (3.4.2) означает, что dU есть дифференциал U, т. е. линейная часть приращения U, в то время как δQ и δA обозначают бесконечно малые количества теплоты и работы.

Второй закон термодинамики утверждает, что при любом процессе, идущем в теплоизолированной среде (без внешнего подвода или отвода тепла), энтропия этой среды не убывает, т. е.

$$\theta ds \geq \delta Q \tag{3.4.3}$$

для элементарных процессов. При этом процесс обратим тогда и только тогда, когда справедливо равенство $\theta ds = \delta Q$.

Для обратимых процессов из формул (3.4.1) и (3.4.2) следует *основное термодинамическое* тождество

$$\theta ds = dU + \delta A. \tag{3.4.4}$$

Следовательно, необратимые процессы в теплоизолированном теле характеризуются тем, что в них *энтропия возрастает*.

Выполнение этих законов термодинамики для сплошных сред является новой аксиомой.

Аксиома термодинамики A_9. *Для сплошной среды справедливы первый и второй законы термодинамики.*

Важный класс сред составляют так называемые идеальные сплошные среды. Для них тензор напряжений пропорционален единичному (в декартовой прямоугольной системе координат): $\mathbf{P} = -p\mathbf{I}$, $p(\mathbf{x}, t)$ — давление. Элементарная работа дается формулой $\delta A = pdV$, а тождество (3.4.4) имеет вид

$$\theta ds = dU + pdV. \tag{3.4.5}$$

Состояние «идеальной» среды в общем случае зависит от пяти параметров

$$\rho = 1/V,\ U,\ \theta,\ s,\ p.$$

Предположим, что «идеальная» среда — двухпараметрическая. Учитывая, что в (3.4.5) стоят полные дифференциалы, можно найти два соотношения между этими пятью параметрами состояния. Поэтому для полного описания термодинамического состояния такой двухпараметрической среды достаточно задать еще одно соотношение, оно называется *уравнением состояния*. В приложениях чаще всего используются уравнения состояния следующего вида:

1) внутренняя энергия задается как функция параметров V, s:

$$U = U(V, s);$$

2) теплосодержание (энтальпия) — функция от p, s:

$$i = i(p, s) = U + pV;$$

3) свободная энергия $F = U - \theta s$ — функция от V, θ:

$$F = F(V, \theta) = U - \theta s;$$

4) термодинамический потенциал $\psi = U - \theta s + pV$ — функция от p, θ:

$$\psi = \psi(p, \theta) = U - \theta s + pV.$$

Поскольку основной мерой количества тепла является температура, то потоки тепла и вызываются её разностью. Это в термодинамике формулируется как *закон Фурье*

$$\mathbf{q} = -k\nabla\theta, \tag{3.4.6}$$

где k — новый параметр состояния — *коэффициент теплопроводности*. В модель сплошной среды этот закон вводит

Аксиома Фурье A_{10}. *Вектор потока тепла пропорционален градиенту температуры.*

Уравнение притока тепла (3.3.23) приводится к виду

$$\rho\frac{dU}{dt} = \mathbf{P} : \mathbf{D} + \operatorname{div}(k\nabla\theta) + \rho h. \tag{3.4.7}$$

Теперь можно сделать общий вывод. На любом непрерывном движении сплошной среды, описываемой моделью M_1, существуют непрерывно дифференцируемые поля симметричного тензора напряжений $\mathbf{P}$ и вектора потока тепла $\mathbf{q}$, с которыми интегральные законы сохранения равносильны системе дифференциальных уравнений, справедливых для любой точки $(\mathbf{x}, t) \in W$:

$$
M_2: \qquad
\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\\
&\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{P} + \rho \mathbf{f},\\
&\rho \frac{dU}{dt} = \mathbf{P} : \mathbf{D} + \operatorname{div}(k \nabla \theta) + \rho h,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{D}$ — тензор скоростей деформаций, определённый формулой (3.3.19). При этом вектор напряжения, действующего на площадку с нормалью $\mathbf{n}$, даётся формулой (3.3.8): $\mathbf{p}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, а плотность потока тепла через такую площадку — формулой (3.4.6): $q_n = -k\nabla\theta$.

В модели M_2 содержится 5 скалярных уравнений, а число искомых функций равно 11: ρ, u_α, $P^{\beta\alpha} = P^{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$. Поэтому модель M_2 не является «замкнутой». Внутренняя энергия U в модели M_2 считается заданной.

Для полного замыкания системы дифференциальных уравнений механики сплошных сред требуется ещё шесть уравнений. Эти уравнения, называемые также *уравнениями состояния*, связывают тензор напряжений с движением (или перемещением). Эти связи уже имеют различный вид для жидкостей и твёрдых тел.

3.5. КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Аксиомы Стокса. Жидкости и газы представляют собой легко подвижные сплошные среды, которые не остаются в равновесии, даже если на них действуют сколь угодно малые силы. Поэтому внутренние напряжения в жидкости и газах не зависят непосредственно от деформации. Однако, как показывает опыт, эти напряжения существенно зависят от того, насколько быстро происходит деформация, т. е. от скорости деформации. В феноменологической теории обычно дается следующее определение: *жидкость* или *газ* — это такая сплошная среда, в которой тензор напряжений $\mathbf{P}$ является функцией тензора скоростей деформации $\mathbf{D}$. Кроме того, тензор напряжений может зависеть от некоторой совокупности термодинамических параметров состояния и, вообще говоря, от точки пространства $\mathbf{x}$ и времени t.

Итак, для жидких сред

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{D}, Z, \mathbf{x}, t), \tag{3.5.1}$$

здесь $Z = (\rho, U, \theta, s, p)$ — набор параметров состояния.

Для жидкостей предполагается выполнение *аксиом Стокса*, которые конкретизируют зависимость (3.5.1).

Аксиомы жидкостей и газов Ж$_1$.

а) *Среда однородна*: $\mathbf{F}$ не зависит явно от $\mathbf{x}, t$;

б) *среда изотропна*: $\mathbf{F}$ является изотропной тензорной функцией тензора скоростей деформации $\mathbf{D}$;

в) *покоящаяся среда* идеальна: $\mathbf{F}(0, Z) = -p\mathbf{G}$, p — давление.

Изотропность тензорной функции $\mathbf{F}(\mathbf{D})$ означает, что для любого ортогонального преобразования O справедливо равенство

$$O\mathbf{F}(\mathbf{D})O^* = \mathbf{F}(O\mathbf{D}O^*),$$

откуда аксиома Ж$_1$, б) дает зависимость по формуле Лагранжа–Сильверста (1.4.40)

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{G} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2. \tag{3.5.2}$$

Здесь α, β, γ являются, вообще говоря, функциями инвариантов J_1, J_2, J_3 тензора $\mathbf{D}$, а также термодинамических параметров состояния Z. Инварианты J_j, $j = 1, 2, 3$, определяются так: если D_{ij} — компоненты тензора $\mathbf{D}$, то

$$J_1 = \mathrm{Sp} D = D_{11} + D_{22} + D_{33},$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{11} & D_{13} \\ D_{13} & D_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{22} & D_{23} \\ D_{23} & D_{33} \end{vmatrix},$$

$$J_3 = \det(D_{ij}).$$

Тензор $\mathbf{D}$ удовлетворяет тождеству Гамильтона–Кэли (1.4.38)

$$\mathbf{D}^3 - J_1\mathbf{D}^2 + J_2\mathbf{D} - J_3\mathbf{G} = 0.$$

Термодинамическое состояние жидкостей и газов достаточно хорошо описывается равенством (3.4.5). Оно берётся в качестве новой аксиомы.

Аксиома жидкостей и газов Ж$_2$. *Жидкости и газы являются двухпараметрическими средами и для них справедливо основное термодинамическое тождество* (3.4.5).

Конечно, указанное тождество справедливо лишь для обратимых процессов. Классическая термодинамика рассматривает состояния среды, близкие к равновесным, и взаимные превращения одного вида энергии в другой в этих состояниях, выражаемые тождеством (3.4.5).

Часто независимыми параметрами считаются плотность ρ и удельная энтропия s, тогда задаётся удельная внутренняя энергия $U = U(\rho, s)$ и из (3.4.5) следуют формулы

$$\theta = \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial s}, \quad p = \rho^2 \frac{\partial U(\rho, s)}{\partial \rho}. \tag{3.5.3}$$

Коэффициент теплопроводности k, входящий в уравнение притока тепла (3.4.7), также считается известной функцией параметров состояния: $k = k(\rho, s)$.

Иногда удобно считать независимыми параметрами состояния абсолютную температуру и плотность, тогда задаётся $U = U(\rho, \theta)$. При этом из (3.4.5)

$$ds = \frac{1}{\theta}\, U_\theta d\theta + \frac{1}{\theta}\left(U_\rho - \frac{p}{\rho^2}\right) d\rho$$

и выражение в правой части этого тождества будет полным дифференциалом, если и только если существует функция $F(\theta, \rho)$ (свободная энергия) такая, что

$$U = -\theta^2 \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{F}{\theta}\right), \quad p = \rho^2 F_\rho, \tag{3.5.4}$$

конечно, теперь $k = k(\rho, \theta)$.

Определённый практический интерес представляет *теплоёмкость* жидкости, т. е. количество тепла, которое необходимо сообщить единице массы жидкости, чтобы увеличить её температуру на один градус при обратимом изменении состояния. *Удельная теплоёмкость* записывается так: $c = \delta Q/d\theta$. Выделяют *главные* удельные теплоёмкости при постоянном давлении c_p и при постоянном объёме c_V:

$$\begin{gathered}
c_p = \left(\frac{\delta Q}{d\theta}\right)_{p=\text{const}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_p, \\
c_V = \left(\frac{\delta Q}{d\theta}\right)_{V=\text{const}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_V.
\end{gathered} \tag{3.5.5}$$

Здесь учтён закон сохранения (3.4.5) $\delta Q = dU + p\,dV$. Введение энтропии даёт возможность получить и другие выражения для удельных теплоёмкостей. Действительно, поскольку $\delta Q = \theta\, ds$, то

$$c_p = \theta\left(\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)_p, \quad c_V = \theta\left(\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)_V. \tag{3.5.6}$$

Для замыкания системы уравнений, описывающих движение жидких сред, требуется знание зависимостей коэффициентов в формуле (3.5.2) от инвариантов $J = (J_1, J_2, J_3)$ тензора скоростей деформаций $\mathbf{D}$ и параметров состояния ρ, s (или других):

$$\begin{gathered}
\alpha = \alpha(J, \rho, s), \quad \beta = \beta(J, \rho, s), \\
\gamma = \gamma(J, \rho, s), \quad \alpha(0, \rho, s) = -p.
\end{gathered} \tag{3.5.7}$$

В остальном зависимости (3.5.7) должны вытекать или из некоторых общих предположений, или из экспериментальных данных. Таким образом, модель M_3 состоит из уравнений

$$
M_3: \quad
\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0,\\
&\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathrm{div}\, \mathbf{P} + \rho\mathbf{f},\\
&\rho\frac{dU}{dt} = \mathbf{P} : \mathbf{D} - \mathrm{div}\,(k\nabla\theta) + \rho h,\\
&\mathbf{P} = \alpha\mathbf{G} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2.
\end{aligned}
$$

Она содержит пять уравнений относительно пяти неизвестных функций: трёх компонент вектора скорости $\mathbf{u}$ и двух независимых параметров состояния. Однако в приложениях эта модель почти не используется, так как требует очень большого объёма дополнительной информации (см. соотношения (3.5.7)).

Ньютоновские жидкости. Наиболее употребительной и достаточно общей является так называемая *классическая модель* жидкости (газа). Она основана на следующей аксиоме.

Аксиома жидкостей и газов Ж$_3$. *Зависимость тензора напряжений линейна:* $\boldsymbol{P} = \alpha\boldsymbol{G} + \beta\boldsymbol{D}$.

Такие жидкие среды называются ещё *ньютоновскими*. Имеем, прежде всего, $\gamma = 0$, $\alpha = -p + \lambda \mathrm{div}\, \mathbf{u}$ и $\mathrm{div}\, \mathbf{P} = \nabla(-p + \lambda \mathrm{div}\, \mathbf{u}) + \mathrm{div}\,(2\mu\mathbf{D})$, $\mathbf{P} : \mathbf{D} = -p \mathrm{div}\, \mathbf{u} + \Phi$, где *диссипативная функция*

$$
\Phi = \left(\lambda + \frac{2}{3}\,\mu\right)(\mathrm{div}\, \mathbf{u})^2 + 2\mu\mathbf{D}' : \mathbf{D}', \tag{3.5.8}
$$

а $\mathbf{D}' = \mathbf{D} - 3^{-1}(\mathrm{div}\, \mathbf{u})\mathbf{G}$ — *девиатор* тензора $\mathbf{D}$; введено обозначение $\mu = \beta/2$. Учитывая, что

$$
\rho\frac{dU}{dt} = \rho\theta\frac{ds}{dt} - p \mathrm{div}\, \mathbf{u},
$$

получим модель движения жидкости (газа)

$$
M_4: \quad
\begin{aligned}
&\rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0,\\
&\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) = \nabla(-p + \lambda \mathrm{div}\, \mathbf{u}) + \mathrm{div}\,(2\mu\mathbf{D}) + \rho\mathbf{f},\\
&\theta\rho(s_t + \mathbf{u}\cdot\nabla s) = \mathrm{div}\,(k\nabla\theta) + \Phi + \rho h,
\end{aligned}
$$

в которой λ, μ, k считаются известными функциями двух независимых параметров состояния, а p, ρ, s, θ связаны двумя соотношениями (3.5.3) или (3.5.4). Приведённая модель M_4 замкнута, а коэффициенты λ и μ носят название *коэффициентов динамической вязкости* и отражают свойство жидкости сопротивляться сдвиговым усилиям.

Частные модели. Из модели M_4 и получаются хорошо известные уравнения Навье–Стокса (λ, μ, $k, \rho\ = \mathrm{const}$), идеальной несжимаемой жидкости ($\mu = 0$, $\rho = \mathrm{const}$), газовой динамики ($\lambda = \mu = k = 0$).

Одной из наиболее простых и достаточно хорошо зарекомендовавших себя на практике является *модель несжимаемой жидкости*. В этом случае движущийся объём ω_t остается неизменным во все моменты времени и условие несжимаемости эквивалентно *соленоидальности* поля вектора скорости (см. формулу (3.3.5)):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{3.5.9}$$

Теперь для таких жидкостей модель M_4 упрощается до следующей (здесь $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$):

$$M_5: \qquad \begin{aligned} &\rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\\ &\rho(\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) = -\nabla p + \operatorname{div}(2\mu\mathbf{D}) + \rho\mathbf{f},\\ &\theta\rho(s_t + \mathbf{u}\cdot\nabla s) = \operatorname{div}(k\nabla\theta) + \Phi + \rho h. \end{aligned}$$

Из основного термодинамического тождества (3.4.5) и (3.5.6) получим

$$\frac{\theta ds}{dt} = \frac{dU}{dt} + p\frac{dV}{dt} = \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = c_V\,\frac{d\theta}{dt}\,,$$

поскольку в силу первого уравнения модели M_5 удельный объём сохраняется в частице (вдоль траектории). Теплоёмкость должна рассматриваться как известная функция температуры θ, определяемая опытным путём. Уравнение энергии в модели M_5 может быть записано так:

$$\rho c_V(\theta_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta) = \operatorname{div}(k\nabla\theta) + \Phi + \rho h. \tag{3.5.10}$$

Модель M_5 используется при описании *стратифицированных течений* и называется моделью течений *неоднородной жидкости*.

Предположение о постоянстве плотности жидкости, $\rho = \text{const}$ — *однородные жидкости*, приводит к дальнейшим упрощениям. Прежде всего, в термодинамическом отношении среда становится *однопараметрической*. Давление p исчезает из термодинамических соотношений и уже не может рассматриваться как параметр состояния. Это объясняется тем, что работа в формуле (3.4.5) $p\,dV = 0$; остается один параметр — температура θ.

Введём кинематическую вязкость $\nu = \mu/\rho$. В общем случае $\nu = \nu(\theta)$, но для простейшей модели можно считать $\nu = \text{const}$. Слагаемое $\operatorname{div}(2\mu\mathbf{D})$ в уравнении импульса преобразуется так:

$$\operatorname{div}(2\mu\mathbf{D}) = 2\mu\operatorname{div}\mathbf{D} \equiv \mu[\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}) + \Delta\mathbf{u}] = \mu\Delta\mathbf{u},$$

где $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{3} \partial^2/\partial x_j^2$ — оператор Лапласа. Так возникает модель *вязкой несжимаемой жидкости*

$$M_6: \quad \begin{aligned} &\operatorname{div}\,\mathbf{u} = 0, \\ &\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Система уравнений модели M_6 называется также *системой Навье–Стокса*.

Замечательно, что термодинамика вообще не участвует в модели M_6. Температура θ определяется из уравнения притока тепла (3.5.10), которое ещё можно записать в виде

$$\theta_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = \frac{1}{\rho c_V}\operatorname{div}(k\nabla\theta) + \Phi' + \frac{h}{c_V}\,, \tag{3.5.11}$$

где

$$\Phi' = 2\nu\, c_V^{-1}\,\mathbf{D} : \mathbf{D}.$$

Простота модели M_6 обусловлена тем, что при изучении её динамики путём решения уравнений жидкость описывается только двумя величинами: плотностью ρ и вязкостью ν. Эти постоянные определяются из эксперимента. Модель Навье–Стокса широко используется в расчётах конкретных движений жидкости.

Иногда эффекты, вызываемые вязкостью жидкости, несущественны (цунами, струйные течения, волны на воде и т. д.). В связи с этим имеет место *модель идеальной жидкости*: $\nu = 0$. Система уравнений здесь такова:

$$M_7: \qquad \begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ &\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\, \nabla p + \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Она называется системой *уравнений Эйлера*. Уравнение (3.5.11) для температуры упрощается, и если дополнительно предположить, что k и c_V — постоянные, то

$$\frac{d\theta}{dt} = \chi \Delta \theta + \frac{h}{c_V}\,,$$

где $\chi = k/\rho c_V$ — *коэффициент температуропроводности*.

В отличие от жидкостей, *газы* являются сильно сжимаемыми средами, и часто вязкость газа несущественна. Кроме того, для многих быстропротекающих процессов в газе можно пренебречь и теплопроводностью. Полагая в модели M_4 $\lambda = \mu = k = 0$, приходим к системе уравнений газовой динамики

$$M_8: \qquad \begin{aligned} &\rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ &\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\, \nabla p = \mathbf{f}, \\ &s_t + \mathbf{u} \cdot s = 0, \\ &p = f(\rho, s), \end{aligned}$$

где последнее соотношение носит название *уравнения состояния газа* и определяется экспериментально.

Диссипация энергии. Свойства вязкости и теплопроводности жидкостей и газов проявляются, в частности, в том, что механическая энергия, сообщённая среде, может необратимым образом перейти в тепловую, рассеяться в хаотическом тепловом движении молекул. Это рассеяние механической энергии называется *диссипацией*, а процессы, сопровождаемые диссипацией энергии, — *диссипативными процессами*.

С точки зрения термодинамики диссипативный процесс необратим и должен сопровождаться возрастанием энтропии. Обратно, рост энтропии какой-либо части сплошной среды, происходящий без «подкачки» тепловой энергии извне, служит признаком того, что в этой части среды идет диссипативный процесс.

Рассмотрим два примера, показывающих, что для жидкостей и газов ответственными за диссипацию энергии являются свойства вязкости и теплопроводности.

Первый пример связан с энтропией движущегося объёма ω_t

$$S(\omega_t) = \int\limits_{\omega_t} \rho s \, d\omega.$$

Вычислим производную по времени, используя уравнение притока тепла из модели M_4, закон Фурье (3.4.6) и тождество

$$\frac{1}{\theta} \operatorname{div} (\mathrm{k}\nabla\theta) = \operatorname{div} \left(\frac{\mathrm{k}}{\theta} \nabla\theta\right) + \frac{\mathrm{k}}{\theta^2} |\nabla\theta|^2.$$

Имеем

$$\frac{d}{dt} S(\omega_t) = \int\limits_{\omega_t} \frac{1}{\theta} \Phi \, d\omega + \int\limits_{\omega_t} \frac{\mathrm{k}}{\theta^2} |\nabla\theta|^2 \, d\omega + \\ + \int\limits_{\partial\omega_t} \frac{1}{\theta} q_n \, d\sigma + \int\limits_{\omega_t} \frac{1}{\theta} h \, d\omega. \tag{3.5.12}$$

Предположим, что объём ω_t теплоизолирован, так что $q_n = 0$, и нет внутренних источников тепла ($h = 0$). Тогда правая часть (3.5.12) есть сумма двух величин, вырабатываемых за счёт различных факторов. Первое слагаемое возникает за счёт движения, а второе — за счёт неравномерного распределения температуры в объёме ω_t. Второй закон термодинамики требует, чтобы величина (3.5.12) была неотрицательна. Ввиду независимости слагаемых в правой части (3.5.12) получим неравенства

$$\Phi \geq 0, \quad \mathrm{k}|\nabla\theta|^2 \geq 0, \quad \theta > 0.$$

Из них и вытекают неравенства для коэффициентов вязкости и теплопроводности

$$\mathrm{k} \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \lambda + \frac{2}{3}\,\mu \geq 0. \tag{3.5.13}$$

Конечно, неравенства (3.5.13) могут быть выполнены со знаком равенства, если $\mathbf{D} = 0$ и $\nabla\theta = 0$. В этом случае среда движется как твёрдое тело: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ ($\mathbf{u}_0$, $\boldsymbol{\omega}$ — постоянные векторы), температура во всех точках одна и та же. При движении общего характера равенства (3.5.13) возможны, если только $\mathrm{k} = \lambda = \mu = 0$. Последнее фактически означает, что среда является либо невязким теплопроводным газом, либо идеальной несжимаемой жидкостью.

Следовательно, в общем случае движения жидкостей и газов, *энтропия теплоизолированного объёма возрастает*.

Второй пример связан с изменением кинетической энергии движущегося объема для *уравнений Навье–Стокса* модели M_6.

Обычно модель M_6 совместно с уравнением (3.5.11) называется моделью движения *вязкой теплопроводной* жидкости. Вообще говоря, температура и другие характеристики движения связаны не только уравнением (3.5.11), но и граничными условиями.

Кинетическая энергия для модели M_6 равна

$$E(\omega_t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\omega_t} \rho|\mathbf{u}|^2\,d\omega,$$

откуда

$$\frac{dE}{dt} = \int\limits_{\omega_t} \mathbf{u}\cdot\operatorname{div}\mathbf{P}\,d\omega + \int\limits_{\omega_t} \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\,d\omega.$$

Поскольку $\mathbf{u}\cdot\operatorname{div}\mathbf{P} = \operatorname{div}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{u}) + p\operatorname{div}\mathbf{u} - \Phi$, то, используя равенство $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ и теорему Гаусса–Остроградского, получим

$$\frac{dE}{dt} = -\int\limits_{\omega_t} \Phi\,d\omega + \int\limits_{\partial\omega_t} \mathbf{u}\cdot\mathbf{p}_n\,d\sigma + \int\limits_{\omega_t} \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\,d\omega. \tag{3.5.14}$$

Предположим, что второй и третий интегралы в выражении (3.5.14) равны нулю, т. е. поверхностные напряжения $\mathbf{p}_n$ и внешние массовые силы $\mathbf{f}$ над объёмом ω_t в целом никакой работы не совершают. Тогда формула (3.5.14) даёт скорость изменения кинетической энергии

$$\frac{dE}{dt} = -\int\limits_{\omega_t} \Phi'\, d\omega. \tag{3.5.15}$$

Равенство (3.5.15) показывает, что несмотря на отсутствие работы, совершаемой над объёмом ω_t, его кинетическая энергия не возрастает. Сохранение $E(\omega_t)$ равносильно равенству $\Phi' = 0$ в объёме ω_t, которое возможно либо когда $\mathbf{D} = 0$, либо когда $\mu = 0$. В первом случае объём ω_t движется как твёрдое тело, а во втором — жидкость идеальна. Следовательно, за исключением этих возможностей, *кинетическая энергия движущегося объёма убывает*. Это и есть проявление диссипативного процесса в вязкой несжимаемой жидкости, за который отвечает коэффициент вязкости μ. Величина интеграла в (3.5.15) даёт скорость диссипации кинетической энергии. Поэтому можно сказать, что диссипативная функция Φ равна *плотности скорости диссипации кинетической энергии*. Этим, в частности, оправдано название «диссипативная функция» для величины Φ.

3.6. ТЕНЗОР ДЕФОРМАЦИЙ

В сплошной среде, в отличие от движения абсолютно твёрдого тела, происходит изменение расстояний между материальными частицами и углов между направлениями на одни и те же частицы. Этот эффект носит название деформации среды.

Будем считать, что среда движется относительно неподвижной системы отсчёта x^α. Свяжем со средой систему координат ξ^σ, которая движется и деформируется вместе с нею — она называется *сопутствующей системой координат*. Относительно этой системы координат среда покоится, поэтому координаты ξ^σ частиц в соответствующей системе одни и те же в любой момент времени. Тройка чисел ξ^1, ξ^2, ξ^3, таким образом, индивидуализирует некоторую частицу среды. В отличие от твёрдого тела сопутствующая система, связанная со средою, не только перемещается и поворачивается, но и деформируется, т. е. по существу система координат ξ^σ является криволинейной. В какой-либо фиксированный момент времени, например начальный, систему ξ^σ можно выбрать по своему усмотрению, однако в другие моменты времени её вид полностью определяется движением среды.

Рассмотрим некоторую частицу среды (см. рис. 3.5). С течением времени она изменяет своё положение относительно системы отсчёта, поэтому её координаты x^α в этой системе будут функциями времени: $x^\alpha = x^\alpha(\xi^\sigma, t)$. Это и есть уравнения движения частицы. Предполагается также, что $\det(\partial x^\alpha / \partial \xi^\sigma) \neq 0$ при любом значении времени t.

Таким образом, сопутствующая система координат является той подвижной системой координат, зависящей от параметра, которая рассматривалась в тензорном анализе. Переменные ξ^1, ξ^2, ξ^3, t — суть переменные Лагранжа.

Пусть в некоторой частице среды выбраны два каких-либо линейных элемента $d\mathbf{r}_0$ и $d'\mathbf{r}_0$. В результате деформации изменятся как длины этих элементов, так и их взаимное

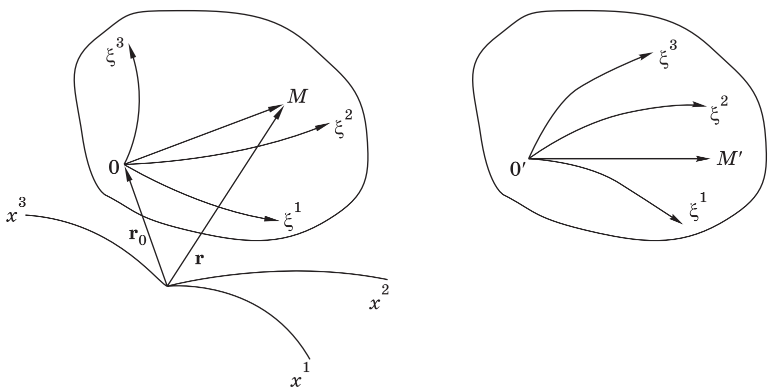

Рис. 3.5
Сопутствующая система координат

расположение. Изменение размеров элементов называют *удлинениями*, а изменение взаимной ориентации — *сдвигами*. Рассмотрим близкие частицы (ξ^σ) и $(\xi^\sigma + d\xi^\sigma)$; $d\mathbf{r}_0$ и $d\mathbf{r}$ — соединяющие их элементы в начальный и текущий моменты времени, причём ds_0 и ds — длины этих векторов. В качестве характеристики удлинения принимается *относительное удлинение*

$$E = \frac{ds - ds_0}{ds_0}, \quad ds = (1+E)ds_0. \tag{3.6.1}$$

Пусть ψ_0 — угол между элементами $d\mathbf{r}_0$ и $d'\mathbf{r}_0$:

$$d\mathbf{r}_0 \cdot d'\mathbf{r}_0 = ds_0 \cdot d's_0 \cos\psi_0. \tag{3.6.2}$$

В результате деформации эти элементы переходят в $d\mathbf{r}$ и $d'\mathbf{r}$, составляющие друг с другом угол ψ:

$$d\mathbf{r} \cdot d'\mathbf{r} = ds \cdot d's \cos\psi. \tag{3.6.3}$$

За *меру сдвига* принимают уменьшение угла между элементами

$$\varphi = \psi_0 - \psi, \quad \psi = \psi_0 - \varphi. \tag{3.6.4}$$

Угол φ можно вычислить по формуле (3.6.3)

$$\cos(\psi_0 - \varphi) = \frac{d\mathbf{r} \cdot d'\mathbf{r}}{ds\, d's} = \frac{\hat{g}_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d'\xi^\beta}{(1+E)(1+E')ds_0\, d's_0}, \tag{3.6.5}$$

где учтено равенство (3.6.1). Вводя единичные векторы по формулам

$$\begin{gathered} \overset{\circ}{\mathbf{e}} = \frac{d\mathbf{r}_0}{ds_0} = \overset{\circ}{\mu}{}^\alpha \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}' = \frac{d'\mathbf{r}_0}{d's_0} = \overset{\circ}{\mu}{}'^\alpha \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha, \\ \hat{\mathbf{e}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mu^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \hat{\mathbf{e}}' = \frac{d'\mathbf{r}}{d's} = \mu'^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha, \end{gathered} \tag{3.6.6}$$

получим для их компонент в соответствующей системе координат

$$\overset{\circ}{\mu}{}^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{ds_0}, \;\; \overset{\circ}{\mu}{}'^\alpha = \frac{d'\xi^\alpha}{d's_0}, \;\; \mu^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{ds}, \;\; \mu'^\alpha = \frac{d'\xi^\alpha}{d's}. \tag{3.6.7}$$

Формула (3.6.5) теперь примет вид

$$\cos(\psi_0 - \varphi) = \frac{\hat{g}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\mu}{}^{\alpha} \overset{\circ}{\mu}{}'^{\beta}}{(1+E)(1+E')}\,. \qquad (3.6.8)$$

Заметим, что удлинение и сдвиги зависят от выбранной частицы среды и времени t.

Векторы элементарных перемещений, соединяющие частицы (ξ^σ) и $(\xi^\sigma + d\xi^\sigma)$, в начальный и текущий моменты времени есть $d\mathbf{r}_0 = d\xi^\alpha \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha$, $d\mathbf{r} = d\xi^\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha$. Квадраты расстояний:

$$ds_0^2 = d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0 = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta, \quad ds^2 = \hat{g}_{\alpha\beta} d\xi^\alpha\, d\xi^\beta, \qquad (3.6.9)$$

где $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}\,(\xi^\sigma, t) = \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\beta$, $\hat{g}_{\alpha\beta}(\xi^\sigma, t) = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{e}}_\beta$. За *меру деформаций среды* можно принять разность

$$ds^2 - ds_0^2 = (\hat{g}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}) d\xi^\alpha\, d\xi^\beta = 2\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} d\xi^\alpha\, d\xi^\beta, \qquad (3.6.10)$$

где

$$\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}(\xi^\sigma, t) = \frac{1}{2}\,(\hat{g}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}). \qquad (3.6.11)$$

По теореме деления тензоров объект $\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}$ — тензор второго ранга

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{e}}^\alpha \hat{\mathbf{e}}^\beta, \qquad (3.6.12)$$

называемый *тензором деформации*.

Можно рассматривать тензор деформации $\boldsymbol{\mathcal{E}}^0$ с теми же компонентами $\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}$ в базисе начального пространства, именно, $\boldsymbol{\mathcal{E}}^0 = \hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}\, \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^\alpha\, \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^\beta$. При этом $\boldsymbol{\mathcal{E}}^0$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — разные тензоры.

Из формул (3.6.11) следует, что сама деформация связана с изменением со временем компонент метрического тензора сопутствующей системы координат. Кроме того, тензор $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — симметричный.

Возьмём разность

$$ds^2 - ds_0^2 = \frac{ds - ds_0}{ds_0}\,\frac{ds + ds_0}{ds_0}\, ds_0^2 =$$

$$= E(2+E) ds_0^2 = 2\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} d\xi^\alpha\, d\xi^\beta,$$

где использованы величины из формул (3.6.1) и (3.6.10). Если ещё учесть формулы (3.6.7), то получим

$$E\left(1+\frac{1}{2}\,E\right)=\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}\,\overset{\circ}{\mu}{}^{\alpha}\,\overset{\circ}{\mu}{}^{\beta}. \tag{3.6.13}$$

Поэтому, зная направление элемента до деформации (компоненты $\overset{\circ}{\mu}{}^{\alpha}$) и тензор деформации данной частицы $\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}$, можно вычислить в ней удлинение E этого элемента.

Из равенства (3.6.11)

$$\hat{g}_{\alpha\beta}=\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}+2\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} \tag{3.6.14}$$

и выражения (3.6.8), определяющего сдвиги, находим

$$\cos(\psi_0-\varphi)=\frac{(\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}+2\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta})\,\overset{\circ}{\mu}{}^{\alpha}\,\overset{\circ}{\mu}{}'^{\beta}}{(1+E)(1+E')}\,. \tag{3.6.15}$$

Другими словами, если известны два направления $\overset{\circ}{\mu}{}^{\alpha}$, $\overset{\circ}{\mu}{}'^{\alpha}$ и угол ψ_0 между ними в недеформируемом состоянии и выбрана сопутствующая система координат в этом состоянии (известны компоненты $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$), то задание тензора определяет и сдвиги. Значит, деформация среды в каждой её частице *полностью определяется тензором деформации*.

Ковариантные компоненты тензора деформации допускают простую механическую интерпретацию. Пусть E_λ — удлинение элемента $d\mathbf{r}_\lambda$ вдоль оси ξ^λ. Единичный вектор этого элемента до деформации

$$\mathbf{e}_\lambda^0=\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda}}}\,\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\lambda=\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda}}}\,\delta_\lambda^\alpha\,\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha$$

имеет компоненты $\overset{\circ}{\mu}{}^{\alpha}=(\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda})^{-1/2}\delta_\lambda^\alpha$ и формула (3.6.13) даёт связь

$$E_\lambda\left(1+\frac{1}{2}\,E_\lambda\right)=\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}\frac{\delta_\lambda^\alpha}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda}}}\,\frac{\delta_\lambda^\beta}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda}}}=\frac{\hat{\mathcal{E}}_{\lambda\lambda}}{\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda}}\,,$$

или

$$\hat{\mathcal{E}}_{\lambda\lambda} = \overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda} E_\lambda \left(1 + \frac{1}{2} E_\lambda\right). \tag{3.6.16}$$

Обратная зависимость такова:

$$E_\lambda = \left(1 + \frac{2\hat{\mathcal{E}}_{\lambda\lambda}}{\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda}}\right)^{1/2} - 1. \tag{3.6.17}$$

Знак перед корнем в формуле (3.6.17) — плюс, так как согласно формуле (3.6.16) удлинение E_λ и компонента $\hat{\mathcal{E}}_{\lambda\lambda}$ одновременно обращаются в нуль. Поэтому компоненты тензора деформации с одинаковыми индексами связаны с удлинениями вдоль соответствующих осей системы координат.

Далее, пусть $\varphi_{\lambda\nu}$ — сдвиги элементов, направленных вдоль координатных линий ξ^λ и ξ^ν; $\overset{\circ}{\psi}_{\lambda\nu}$ — угол между этими элементами в начальном положении. Так как компоненты единичных векторов $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\lambda$ и $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\nu$ вдоль этих линий есть $\overset{\circ}{\mu}{}^\alpha = (\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda})^{-1/2}\delta^\alpha_\lambda$, $\overset{\circ}{\mu}{}'^\alpha = (\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda})^{-1/2}\delta^\alpha_\nu$, то формула (3.6.15) примет вид

$$\cos(\overset{\circ}{\psi}_{\lambda\nu} - \varphi_{\lambda\nu}) = \frac{(\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} + 2\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta})\delta^\alpha_\lambda \delta^\beta_\nu}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda}\overset{\circ}{g}_{\nu\nu}}\,(1+E_\lambda)(1+E_\nu)} =$$

$$= \frac{\overset{\circ}{g}_{\lambda\nu} + 2\hat{\mathcal{E}}_{\lambda\nu}}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda}\overset{\circ}{g}_{\nu\nu}}\,(1+E_\lambda)(1+E_\nu)} \tag{3.6.18}$$

при $\lambda \neq \nu$. В силу равенства (3.6.17)

$$1 + E_\lambda = \sqrt{1 + \frac{2\hat{\mathcal{E}}_{\lambda\lambda}}{\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda}}}$$

и формула (3.6.18) перепишется так:

$$\cos(\overset{\circ}{\psi}_{\lambda\nu} - \varphi_{\lambda\nu}) =$$

$$= \frac{\overset{\circ}{g}_{\lambda\nu} + 2\hat{\mathcal{E}}_{\lambda\nu}}{\sqrt{(\overset{\circ}{g}_{\lambda\lambda} + 2\hat{\mathcal{E}}_{\lambda\lambda})(\overset{\circ}{g}_{\nu\nu} + 2\hat{\mathcal{E}}_{\nu\nu})}}, \quad \lambda \neq \nu. \tag{3.6.19}$$

Таким образом, компоненты тензора деформации с различными индексами связаны со сдвигами элементов, направленных вдоль осей системы координат.

Пусть ξ^σ– частица среды в момент времени t_0 и t. Её положение в эти моменты определяются радиус-векторами $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ соответственно. Вектор $\mathbf{w} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ называют *вектором перемещения*, см. рис. 3.6.

Компоненты $\mathbf{w}$ связаны с координатами частицы формулами

$$w^\alpha = x^\alpha - x_0^\alpha, \quad x^\alpha = x_0^\alpha + w^\alpha. \tag{3.6.20}$$

Если сопутствующая система ξ^σ выбрана так, что она совпадает с системой отсчёта в начальный момент ($x_0^\alpha = \xi^\alpha$), то

$$x^\alpha = \xi^\alpha + w^\alpha(\xi^\sigma, t). \tag{3.6.21}$$

Уравнения (3.6.21) есть просто уравнения движения среды, если известен вектор перемещения $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, t)$.

Найдём связь между тензором деформации и вектором перемещений. Имеем

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^\alpha} = \hat{\mathbf{e}}_\alpha - \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha,$$

откуда выводим ($\mathbf{w} = \hat{w}^\sigma \hat{\mathbf{e}}_\sigma = \overset{\circ}{w}{}^\tau \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\tau$)

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha = \hat{\mathbf{e}}_\alpha - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^\alpha} = \hat{\mathbf{e}}_\alpha - \hat{\nabla}_\alpha \hat{w}^\sigma \hat{\mathbf{e}}_\sigma = (\delta_\alpha^\sigma - \hat{\nabla}_\alpha \hat{w}^\sigma) \hat{\mathbf{e}}_\sigma,$$

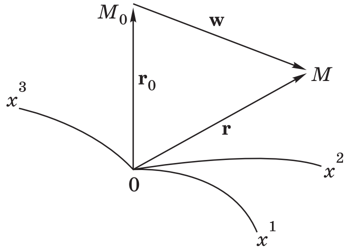

Рис. 3.6
Вектор перемещений

$$\hat{\mathbf{e}}_\alpha = \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^\alpha} = (\delta^\sigma_\alpha + \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{w}{}^\sigma)\, \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\sigma, \tag{3.6.22}$$

$$\hat{\nabla}_\alpha \hat{w}^\sigma = \frac{\partial \hat{w}^\sigma}{\partial \xi^\alpha} + \hat{w}^\tau \Gamma^\sigma{}_{\tau\alpha}, \quad \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{w}{}^\sigma = \frac{\partial \overset{\circ}{w}{}^\sigma}{\partial \xi^\alpha} + \overset{\circ}{w}{}^\tau \Gamma^\sigma{}_{\tau\alpha}.$$

Формулы (3.6.22) дают разложения одного из координатных базисов $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha$, $\hat{\mathbf{e}}_\alpha$ по-другому. Кроме того, с помощью этих формул легко найти связи компонент метрических тензоров сопутствующей системы координат в различные моменты времени:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} &= \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}}_\beta = \hat{g}_{\alpha\beta} - \\ &\qquad - \hat{\nabla}_\alpha \hat{w}_\beta - \hat{\nabla}_\beta \hat{w}_\alpha + \hat{\nabla}_\alpha \hat{w}^\sigma \hat{\nabla}_\beta \hat{w}_\sigma, \\ \hat{g}_{\alpha\beta} &= \hat{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{e}}_\beta = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} + \\ &\qquad + \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{w}_\beta + \overset{\circ}{\nabla}_\beta \overset{\circ}{w}_\alpha + \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{w}{}^\sigma\, \overset{\circ}{\nabla}_\beta \overset{\circ}{w}_\sigma\ . \end{aligned} \tag{3.6.23}$$

Согласно формуле (3.6.11), учитывая уравнения (3.6.23), получим компоненты тензора деформаций через компоненты вектора перемещений

$$\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\hat{\nabla}_\alpha \hat{w}_\beta + \hat{\nabla}_\beta \hat{w}_\alpha - \hat{\nabla}_\alpha \hat{w}^\sigma \hat{\nabla}_\beta \hat{w}_\sigma); \tag{3.6.24}$$

$$\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{w}_\beta + \overset{\circ}{\nabla}_\beta \overset{\circ}{w}_\alpha + \overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{w}{}^\sigma\, \overset{\circ}{\nabla}_\beta \overset{\circ}{w}_\sigma). \tag{3.6.25}$$

В первом случае (формула (3.6.24)) компоненты вектора перемещений взяты в базисе сопутствующей системы координат в деформированном состоянии среды, а во втором (формула (3.6.25)) — в базисе той же системы, но в начальном, недеформированном, состоянии.

Из этих формул видно, что наличие деформации среды связано с неоднородностью поля перемещений: если $\nabla \mathbf{w} = 0$, то и $\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = 0$.

Тензор деформаций, являясь симметричным, имеет шесть независимых компонент

$$\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}(\xi^\sigma, t), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3; \quad \beta \leqslant \alpha. \tag{3.6.26}$$

Возникает вопрос, определяет ли совокупность произвольно заданных шести непрерывных функций (3.6.26) некоторую деформацию среды? Оказывается, что эти функции будут определять деформацию среды без нарушения её сплошности лишь при некоторых условиях. Они являются следствием того факта, что среда как до деформации, так и после неё находится в евклидовом пространстве. Кроме того, имеется тесная связь (см. формулы (3.6.11)) между компонентами тензора деформации и метрического тензора. Действительно, в евклидовом пространстве тензор Римана является нулевым. Пусть его компоненты в сопутствующей системе координат при t^0 и t есть $\overset{\circ}{R}_{\nu\ae\lambda\mu}$ и $\hat{R}_{\nu\ae\lambda\mu}$. Равенства их нулю выпишем более подробно:

$$\overset{\circ}{R}_{\nu\ae\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}_{\nu\mu}}{\partial\xi^\ae\partial\xi^\lambda} - \frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}_{\nu\lambda}}{\partial\xi^\ae\partial\xi^\mu} - \frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}_{\ae\mu}}{\partial\xi^\nu\partial\xi^\lambda} - \frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}_{\ae\lambda}}{\partial\xi^\nu\partial\xi^\mu}\right) + \\ + \overset{\circ}{g}{}^{\rho\sigma}(\overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\lambda\nu}\overset{\circ}{\Gamma}_{\rho\mu\ae} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\lambda\ae}\overset{\circ}{\Gamma}_{\rho\mu\nu}) = 0, \tag{3.6.27}$$

$$\hat{R}_{\nu\ae\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \hat{g}_{\nu\mu}}{\partial\xi^\ae\partial\xi^\lambda} - \frac{\partial^2 \hat{g}_{\nu\lambda}}{\partial\xi^\ae\partial\xi^\mu} - \frac{\partial^2 \hat{g}_{\ae\mu}}{\partial\xi^\nu\partial\xi^\lambda} + \frac{\partial^2 \hat{g}_{\ae\lambda}}{\partial\xi^\nu\partial\xi^\mu}\right) + \\ + \hat{g}^{\rho\sigma}(\hat{\Gamma}_{\sigma\lambda\nu}\hat{\Gamma}_{\rho\mu\ae} - \hat{\Gamma}_{\sigma\lambda\ae}\hat{\Gamma}_{\rho\mu\nu}) = 0. \tag{3.6.28}$$

Здесь символы Кристоффеля в моменты времени t^0 и t даются формулами

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\lambda\nu} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overset{\circ}{g}_{\sigma\lambda}}{\partial\xi^\nu} + \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{\sigma\nu}}{\partial\xi^\lambda} - \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{\lambda\nu}}{\partial\xi^\sigma}\right), \\ \hat{\Gamma}_{\sigma\lambda\nu} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{g}_{\sigma\lambda}}{\partial\xi^\nu} + \frac{\partial \hat{g}_{\sigma\nu}}{\partial\xi^\lambda} - \frac{\partial \hat{g}_{\lambda\nu}}{\partial\xi^\sigma}\right), \end{aligned} \tag{3.6.29}$$

а индексы принимают значения (см. (1.6.10))

$$\nu æ\lambda\mu = 1212; 2323; 3131; 1213; 2321; 3132. \tag{3.6.30}$$

Из равенства (3.6.11) выводим соотношения

$$\begin{gathered}\hat{g}_{\alpha\beta} = \overset{0}{g}_{\alpha\beta} + 2\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta},\\ 2\hat{\gamma}^{\sigma\tau} \equiv 2\,\overset{0}{g}{}^{\sigma\alpha}\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}\,\overset{0}{g}{}^{\beta\tau} = \hat{g}^{\sigma\tau} - \overset{0}{g}{}^{\sigma\tau},\\ \hat{g}^{\sigma\tau} = \overset{0}{g}{}^{\sigma\tau} + 2\hat{\gamma}^{\sigma\tau}.\end{gathered} \tag{3.6.31}$$

С их помощью из формул (3.6.29) получим связь между символами Кристоффеля

$$\begin{gathered}\hat{\Gamma}_{\sigma\lambda\nu} = \overset{0}{\Gamma}_{\sigma\lambda\nu} + 2\hat{G}_{\sigma\lambda\nu},\\ \hat{G}_{\sigma\lambda\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{\mathcal{E}}_{\sigma\lambda}}{\partial\xi^{\nu}} + \frac{\partial\hat{\mathcal{E}}_{\sigma\nu}}{\partial\xi^{\lambda}} - \frac{\partial\hat{\mathcal{E}}_{\lambda\nu}}{\partial\xi^{\sigma}}\right).\end{gathered} \tag{3.6.32}$$

Подставим теперь соотношения (3.6.31), (3.6.32) в равенство (3.6.28), получим

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\nu æ\lambda\mu} = {} & \frac{\partial^2\hat{\mathcal{E}}_{\nu\mu}}{\partial\xi^{æ}\partial\xi^{\lambda}} - \frac{\partial^2\hat{\mathcal{E}}_{\nu\lambda}}{\partial\xi^{æ}\partial\xi^{\mu}} - \frac{\partial^2\hat{\mathcal{E}}_{æ\mu}}{\partial\xi^{\nu}\partial\xi^{\lambda}} + \frac{\partial^2\hat{\mathcal{E}}_{æ\lambda}}{\partial\xi^{\nu}\partial\xi^{\mu}} + \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\,\overset{0}{g}_{\nu\mu}}{\partial\xi^{æ}\partial\xi^{\lambda}} - \frac{\partial^2\,\overset{0}{g}_{\nu\lambda}}{\partial\xi^{æ}\partial\xi^{\mu}} - \frac{\partial^2\,\overset{0}{g}_{æ\mu}}{\partial\xi^{\nu}\partial\xi^{\lambda}} + \frac{\partial^2\,\overset{0}{g}_{æ\lambda}}{\partial\xi^{\nu}\partial\xi^{\mu}}\right) + \\ & + (\overset{0}{g}{}^{\rho\sigma} - 2\,\overset{0}{\gamma}{}^{\rho\sigma})(\overset{0}{\Gamma}_{\sigma\lambda\nu}\overset{0}{\Gamma}_{\rho\mu æ} + 2\hat{G}_{\sigma\lambda\nu}\,\overset{0}{\Gamma}_{\rho\mu æ} + 2\,\overset{0}{\Gamma}_{\sigma\lambda\nu}\,\hat{G}_{\rho\mu æ} + \\ & + 4\hat{G}_{\sigma\lambda\nu}\hat{G}_{\rho\mu æ} - \overset{0}{\Gamma}_{\sigma\lambda æ}\overset{0}{\Gamma}_{\rho\mu\nu} - 2\hat{G}_{\sigma\lambda æ}\,\overset{0}{\Gamma}_{\rho\mu\nu} - \\ & - 2\,\overset{0}{\Gamma}_{\sigma\lambda æ}\,\hat{G}_{\rho\mu\nu} - 4\hat{G}_{\sigma\lambda æ}\hat{G}_{\rho\mu\nu}) = 0.\end{aligned} \tag{3.6.33}$$

Составляя теперь разность уравнений (3.6.27) и (3.6.33), найдём

$$
\begin{gathered}
\hat{R}_{\nu æ\lambda\mu} - \overset{\circ}{R}_{\nu æ\lambda\mu} = \frac{\partial^2 \hat{\mathcal{E}}_{\nu\mu}}{\partial\xi^{æ}\partial\xi^{\lambda}} - \frac{\partial^2 \hat{\mathcal{E}}_{\nu\lambda}}{\partial\xi^{æ}\partial\xi^{\mu}} - \frac{\partial^2 \hat{\mathcal{E}}_{æ\mu}}{\partial\xi^{\nu}\partial\xi^{\lambda}} + \\
+ \frac{\partial^2 \hat{\mathcal{E}}_{æ\lambda}}{\partial\xi^{\nu}\partial\xi^{\mu}} - 2\hat{\gamma}^{\rho\sigma}(\overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\lambda\nu}\overset{\circ}{\Gamma}_{\rho\mu æ} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\lambda æ}\overset{\circ}{\Gamma}_{\rho\mu\nu}) + \\
+ 2\, \overset{\circ}{g}{}^{\rho\sigma}(\hat{G}_{\sigma\lambda\nu}\, \overset{\circ}{\Gamma}_{\rho\mu æ} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\lambda\nu}\, \hat{G}_{\rho\mu æ} - \hat{G}_{\sigma\lambda æ}\, \overset{\circ}{\Gamma}_{\rho\mu\nu} - \\
- \overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\lambda æ}\, \hat{G}_{\rho\mu\nu}) + 4\, \overset{\circ}{g}{}^{\rho\sigma}(\hat{G}_{\sigma\lambda\nu}\hat{G}_{\rho\mu æ} - \hat{G}_{\sigma\lambda æ}\hat{G}_{\rho\mu\nu}) - \\
- 4\hat{\gamma}^{\rho\sigma}(\hat{G}_{\sigma\lambda\nu}\, \overset{\circ}{\Gamma}_{\rho\mu æ} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\sigma\lambda\nu}\, \hat{G}_{\rho\mu æ} - \\
- \hat{G}_{\sigma\lambda æ}\, \overset{\circ}{\Gamma}_{\rho\mu\nu} + 2\hat{G}_{\sigma\lambda\nu}\hat{G}_{\rho\mu æ} - 2\hat{G}_{\sigma\lambda æ}\hat{G}_{\rho\mu\nu}) = 0. \quad (3.6.34)
\end{gathered}
$$

Шесть соотношений (3.6.34), где индексы принимают значения (3.6.30), носят название *уравнений совместности деформаций*. Их ещё называют *уравнениями сплошности* или *неразрывности* деформации.

Среда может деформироваться произвольно, значит, поле смещений также может быть произвольным. С другой стороны, так как компоненты тензора деформаций выражаются через смещения (см. формулы (3.6.24), (3.6.25)), то условия совместности не должны накладывать на смещения ограничений. Нетрудно проверить, что зависимости (3.6.25) удовлетворяют уравнениям тождественно, т. е. являются их интегралами.

На уравнения совместности (3.6.34) можно посмотреть и по иному: при их выполнении начальное евклидово пространство в результате деформирования переходит снова в евклидово пространство. При этом движение каждой частицы может быть описано вектором перемещения. Значит, выполнение уравнений совместности является условием существования поля перемещений.

3.7. МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Считаем, без ограничения общности, что сопутствующая система координат в начальном положении выбрана декартовой прямоугольной: $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $\overset{\circ}{\psi}_{\alpha\beta} = \pi/2$ при $\alpha \neq \beta$. Если удлинения и сдвиги малы,

$$|E_\lambda| \ll 1, \quad |\varphi_{\lambda\nu}| \ll 1, \qquad (3.7.1)$$

то из формул (3.6.16) и (3.6.19) получим в линейном приближении

$$\hat{\mathcal{E}}_{\lambda\lambda} = E_\lambda, \quad \hat{\mathcal{E}}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}\,\varphi_{\lambda\nu}, \quad \lambda \neq \nu. \tag{3.7.2}$$

Значит, при малых удлинениях компоненты тензора деформации с одинаковыми индексами совпадают с удлинениями вдоль соответствующих осей, а компоненты с разными индексами равны половинам сдвигов элементов, идущих вдоль соответствующих осей, т. е. все компоненты $\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}$ также малы.

Если поле перемещений неоднородно, но эта неоднородность мала: $|\hat{\nabla}_\alpha \hat{w}_\beta| \ll 1$, или $|\overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{w}_\beta| \ll 1$, то и деформация среды будет малой. Следовательно, из формул (3.6.24), (3.6.25) в линейном приближении

$$\begin{gathered} \hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\hat{\nabla}_\alpha \hat{w}_\beta + \hat{\nabla}_\beta \hat{w}_\alpha) = \hat{\nabla}_{(\alpha} \hat{w}_{\beta)}, \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_m = \hat{\nabla}_{(\alpha} \hat{w}_{\beta)} \hat{\mathbf{e}}^\alpha \hat{\mathbf{e}}^\beta; \end{gathered} \tag{3.7.3}$$

$$\begin{gathered} \hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\overset{\circ}{\nabla}_\alpha \overset{\circ}{w}_\beta + \overset{\circ}{\nabla}_\beta \overset{\circ}{w}_\alpha) = \overset{\circ}{\nabla}_{(\alpha} \overset{\circ}{w}_{\beta)}, \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_m^0 = \overset{\circ}{\nabla}_{(\alpha} \overset{\circ}{w}_{\beta)} \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^\alpha\, \overset{\circ}{\mathbf{e}}{}^\beta. \end{gathered} \tag{3.7.4}$$

Подчеркнём, что формулы (3.6.24), (3.6.25) остаются в силе (нелинейными), даже если малы удлинения и сдвиги. Соотношения (3.7.3), (3.7.4) получены *при малых неоднородностях вектора перемещений.*

Введём вектор $\boldsymbol{\Omega}$, являющийся вихрем поля перемещений

$$\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{w}, \quad \hat{\Omega}^\gamma = \hat{e}^{\lambda\mu\gamma} \hat{\nabla}_{[\lambda} \hat{w}_{\mu]}, \tag{3.7.5}$$

откуда антисимметричный тензор $\hat{\nabla}_{[\lambda} \hat{w}_{\mu]}$ найдётся в виде

$$\hat{\nabla}_{[\alpha} \hat{w}_{\beta]} = \frac{1}{2}\,\hat{e}_{\alpha\beta\gamma} \hat{\Omega}^\gamma. \tag{3.7.6}$$

Аналогично, в сопутствующей системе координат

$$\overset{\circ}{\nabla}_{[\alpha} \overset{\circ}{w}_{\beta]} = \frac{1}{2}\, \overset{\circ}{e}_{\alpha\beta\gamma} \overset{\circ}{\Omega}{}^\gamma. \tag{3.7.7}$$

Рассмотрим случай, когда по сравнению с единицей малы не только удлинения и сдвиги (см. формулы (3.7.1)), но и углы поворота, т. е. малыми являются величины $\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}$, $\hat{\Omega}^{\gamma}$ (или $\overset{\circ}{\Omega}{}^{\gamma}$).

Если ввести обозначения $\hat{\theta}_{\alpha\beta} = \hat{\nabla}_{(\alpha}\hat{w}_{\beta)}$, $\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\nabla}_{(\alpha}\overset{\circ}{w}_{\beta)}$, то

$$\hat{\nabla}_{\alpha}\hat{w}_{\beta} = \hat{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\,\hat{e}_{\alpha\beta\gamma}\hat{\Omega}^{\gamma}, \quad \overset{\circ}{\nabla}_{\alpha}\overset{\circ}{w}_{\beta} = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\,\overset{\circ}{e}_{\alpha\beta\gamma}\overset{\circ}{\Omega}{}^{\gamma}$$

и формулы (3.6.24), (3.6.25) для компонент тензора деформации перепишутся так:

$$\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \hat{\theta}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,\hat{g}^{\sigma\tau}\hat{\theta}_{\alpha\sigma}\hat{\theta}_{\beta\tau} - \frac{1}{4}\,\hat{g}^{\sigma\tau}(\hat{e}_{\beta\tau\lambda}\hat{\Omega}^{\lambda}\hat{\theta}_{\alpha\sigma} + \hat{e}_{\alpha\sigma\gamma}\hat{\Omega}^{\gamma}\hat{\theta}_{\beta\tau}) - \frac{1}{8}\,\hat{g}^{\sigma\tau}\hat{e}_{\alpha\sigma\gamma}\hat{e}_{\beta\tau\lambda}\hat{\Omega}^{\gamma}\hat{\Omega}^{\lambda}; \quad (3.7.8)$$

$$\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\,\overset{\circ}{g}{}^{\sigma\tau}\,\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\sigma}\overset{\circ}{\theta}_{\beta\tau} + \frac{1}{4}\,\overset{\circ}{g}{}^{\sigma\tau}(\overset{\circ}{e}_{\beta\tau\lambda}\overset{\circ}{\Omega}{}^{\lambda}\,\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\sigma} + \overset{\circ}{e}_{\alpha\sigma\gamma}\overset{\circ}{\Omega}{}^{\gamma}\,\overset{\circ}{\theta}_{\beta\tau}) + \frac{1}{8}\,\overset{\circ}{g}{}^{\sigma\tau}\,\overset{\circ}{e}_{\alpha\sigma\gamma}\overset{\circ}{e}_{\beta\tau\lambda}\overset{\circ}{\Omega}{}^{\gamma}\,\overset{\circ}{\Omega}{}^{\lambda}. \quad (3.7.9)$$

Из формул (3.7.8), (3.7.9) легко видеть, что малыми, сравнительно с единицей, будут также величины $\hat{\theta}_{\alpha\beta}$ и $\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta}$.

Далее, считая $\hat{\theta}_{\alpha\beta}$ и $\hat{\Omega}^{\gamma}$ (или $\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta}$ и $\overset{\circ}{\Omega}{}^{\gamma}$) малыми, видим, что возможны два случая:

а) $\hat{\Omega}^{\gamma}$ ($\overset{\circ}{\Omega}{}^{\gamma}$) являются малыми того же или более высокого порядка, что и $\hat{\theta}_{\alpha\beta}$ ($\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta}$);

б) $\hat{\theta}_{\alpha\beta}$ ($\overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta}$) являются малыми того же или более высокого порядка, что и $\hat{\Omega}^{\gamma}\hat{\Omega}^{\delta}$ ($\overset{\circ}{\Omega}{}^{\gamma}\,\overset{\circ}{\Omega}{}^{\delta}$).

В первом случае в формулах (3.7.8), (3.7.9) нужно сохранить только линейные слагаемые:

$$\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \hat{\theta}_{\alpha\beta}, \quad \hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta}\,. \quad (3.7.10)$$

Во втором необходимо оставить только члены порядка $\hat{\Omega}^\gamma\hat{\Omega}^\delta$ $(\overset{\circ}{\Omega}{}^\gamma\,\overset{\circ}{\Omega}{}^\delta)$:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} &= \hat{\theta}_{\alpha\beta} - \frac{1}{8}\,\hat{g}^{\sigma\tau}\hat{e}_{\alpha\sigma\gamma}\hat{e}_{\beta\tau\lambda}\hat{\Omega}^\gamma\hat{\Omega}^\lambda,\\
\overset{\circ}{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} &= \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{8}\,\overset{\circ}{g}{}^{\sigma\tau}\,\overset{\circ}{e}_{\alpha\sigma\gamma}\overset{\circ}{e}_{\beta\tau\lambda}\overset{\circ}{\Omega}{}^\gamma\,\overset{\circ}{\Omega}{}^\lambda.
\end{aligned} \tag{3.7.11}$$

Упрощённые формулы (3.7.10), (3.7.11) справедливы в произвольной сопутствующей системе координат. Если эта система — прямоугольная декартова в деформированном пространстве, то

$$\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \hat{\theta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{w}_\beta}{\partial\xi^\alpha} + \frac{\partial\hat{w}_\alpha}{\partial\xi^\beta}\right), \tag{3.7.12}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{E}}_{11} = \hat{\theta}_{11} - \frac{1}{8}\,(\hat{\Omega}_2^2 + \hat{\Omega}_3^2),\ \ \hat{\mathcal{E}}_{22} = \hat{\theta}_{22} - \frac{1}{8}\,(\hat{\Omega}_3^2 + \hat{\Omega}_1^2),\\
&\hat{\mathcal{E}}_{33} = \hat{\theta}_{33} - \frac{1}{8}\,(\hat{\Omega}_1^2 + \hat{\Omega}_2^2),\ \ \hat{\mathcal{E}}_{12} = \hat{\theta}_{12} + \hat{\Omega}_1\hat{\Omega}_2 = \hat{\mathcal{E}}_{21},\\
&\hat{\mathcal{E}}_{23} = \hat{\theta}_{23} + \hat{\Omega}_2\hat{\Omega}_3 = \hat{\mathcal{E}}_{32},\ \ \hat{\mathcal{E}}_{31} = \hat{\theta}_{31} + \hat{\Omega}_3\hat{\Omega}_1 = \hat{\mathcal{E}}_{13},
\end{aligned} \tag{3.7.13}$$

а вторые формулы (3.7.10), (3.7.11) остаются без изменений.

Если же сопутствующую систему координат взять прямоугольной декартовой в пространстве начальных состояний, то упрощаются только вторые формулы (3.7.10) и (3.7.11):

$$\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\theta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\overset{\circ}{w}_\beta}{\partial\xi^\alpha} + \frac{\partial\,\overset{\circ}{w}_\alpha}{\partial\xi^\beta}\right), \tag{3.7.14}$$

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{E}}_{11} = \overset{\circ}{\theta}_{11} + \frac{1}{8}\,(\overset{\circ}{\Omega}{}_2^2 + \overset{\circ}{\Omega}{}_3^2),\ \ \hat{\mathcal{E}}_{22} = \overset{\circ}{\theta}_{22} + \frac{1}{8}\,(\overset{\circ}{\Omega}{}_3^2 + \overset{\circ}{\Omega}{}_1^2),\\
&\hat{\mathcal{E}}_{33} = \overset{\circ}{\theta}_{33} + \frac{1}{8}\,(\overset{\circ}{\Omega}{}_1^2 + \overset{\circ}{\Omega}{}_2^2),\ \ \hat{\mathcal{E}}_{12} = \overset{\circ}{\theta}_{12} - \overset{\circ}{\Omega}_1\overset{\circ}{\Omega}_2 = \hat{\mathcal{E}}_{21},\\
&\hat{\mathcal{E}}_{23} = \overset{\circ}{\theta}_{23} - \overset{\circ}{\Omega}_2\overset{\circ}{\Omega}_3 = \hat{\mathcal{E}}_{32},\ \ \hat{\mathcal{E}}_{31} = \overset{\circ}{\theta}_{31} - \overset{\circ}{\Omega}_3\overset{\circ}{\Omega}_1 = \hat{\mathcal{E}}_{13}.
\end{aligned} \tag{3.7.15}$$

Формулы (3.7.12), (3.7.13) используются при описании деформации в деформированном пространстве, а (3.7.14), (3.7.15) — в начальном пространстве.

Приближённые выражения для компонент тензора деформации (3.7.10), (3.7.11) имеют широкий круг применения. Первые из них охватывают такие задачи, в которых при малых компонентах тензора деформации и углах поворота те и другие являются величинами примерно одинакового порядка, что имеет место преимущественно при деформации массивных тел, все размеры которых сравнимы друг с другом. Что касается формул (3.7.11), то они отвечают случаю, когда при малой деформации и малых углах поворота вторые существенно превосходят первые. Это будет при деформации гибких тел, например стержней, пластин и оболочек. Отметим, что далеко не все задачи деформации гибких тел относятся к числу нелинейных. Многие из них могут быть решены и в рамках линейной теории, основывающейся на формулах (3.7.10). Возможны и задачи, для решения которых упрощённые формулы не применимы и необходимо пользоваться общими формулами (3.6.24), (3.6.25). Тем не менее, формулы (3.7.11) являются важным промежуточным звеном между общими и линейными формулами.

Систему уравнений совместности деформации (3.6.34) можно упростить в случае малых деформаций. Пусть малы по сравнению с единицей как сами компоненты тензора деформации, так и производные от них по координатам. Тогда в силу формул (3.6.31), (3.6.32) малыми будут величины $\hat{\gamma}^{\sigma\tau}$, $\hat{G}_{\sigma\lambda\nu}$. Поскольку в линейном приближении

$$\hat{\gamma}^{\rho\sigma} = \overset{0}{g}{}^{\rho\alpha}\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}\hat{g}^{\beta\sigma} = \overset{0}{g}{}^{\rho\alpha}\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}(\overset{0}{g}{}^{\beta\sigma} - 2\hat{\gamma}^{\beta\sigma}) = \overset{0}{g}{}^{\rho\alpha}\,\overset{0}{g}{}^{\beta\sigma}\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta},$$

то в том же приближении система (3.6.34) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\hat{\mathcal{E}}_{\nu\mu}}{\partial\xi^{æ}\partial\xi^{\lambda}} - \frac{\partial^2\hat{\mathcal{E}}_{\nu\lambda}}{\partial\xi^{æ}\partial\xi^{\mu}} - \frac{\partial^2\hat{\mathcal{E}}_{æ\mu}}{\partial\xi^{\nu}\partial\xi^{\lambda}} + \frac{\partial^2\hat{\mathcal{E}}_{æ\lambda}}{\partial\xi^{\nu}\partial\xi^{\mu}} - \\ - 2\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta}(\overset{0}{\Gamma}{}^{\beta}{}_{\lambda\nu}\,\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\muæ} - \overset{0}{\Gamma}{}^{\beta}{}_{\lambdaæ}\,\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}{}_{\mu\nu}) + \\ + 2(\overset{0}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\muæ}\hat{G}_{\sigma\lambda\nu} + \overset{0}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\hat{G}_{\sigma\muæ} - \overset{0}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\mu\nu}\hat{G}_{\sigma\lambdaæ} - \\ - \overset{0}{\Gamma}{}^{\sigma}{}_{\lambdaæ}\hat{G}_{\sigma\mu\nu}) = 0. \quad (3.7.16)\end{gathered}$$

Воспользовавшись выражением для ковариантной производной от компонент тензора (1.5.44), нетрудно показать, что выражение (3.7.16) можно записать в компактной форме

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\text{æ}}\overset{\circ}{\nabla}_{\lambda}\,\hat{\mathcal{E}}_{\nu\mu}-\overset{\circ}{\nabla}_{\text{æ}}\overset{\circ}{\nabla}_{\mu}\,\hat{\mathcal{E}}_{\nu\lambda}-$$
$$-\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\overset{\circ}{\nabla}_{\lambda}\,\hat{\mathcal{E}}_{\text{æ}\mu}+\overset{\circ}{\nabla}_{\nu}\overset{\circ}{\nabla}_{\mu}\,\hat{\mathcal{E}}_{\text{æ}\lambda}=0. \quad (3.7.17)$$

Соотношения (3.7.17) называются уравнениями совместности малых деформаций Сен-Венана. Эти уравнения в актуальном пространстве таковы:

$$\hat{\nabla}_{\text{æ}}\hat{\nabla}_{\lambda}\hat{\mathcal{E}}_{\nu\mu}-\hat{\nabla}_{\text{æ}}\hat{\nabla}_{\mu}\hat{\mathcal{E}}_{\nu\lambda}-\hat{\nabla}_{\nu}\hat{\nabla}_{\lambda}\hat{\mathcal{E}}_{\text{æ}\mu}+\hat{\nabla}_{\nu}\hat{\nabla}_{\mu}\hat{\mathcal{E}}_{\text{æ}\lambda}=0. \quad (3.7.18)$$

Индексы ν, æ, λ, μ в формулах (3.7.17), (3.7.18) принимают значения (3.6.30).

Упражнение. Выписать уравнения Сен-Венана (3.7.17), когда сопутствующая система координат ξ^σ в начальном положении является прямоугольной декартовой. То же самое проделать и для уравнений (3.7.18), когда сопутствующая система координат ξ^σ взята прямоугольной декартовой в деформированном состоянии среды. Результаты сравнить.

Найдём относительное изменение объёма при деформации. Для этого рассмотрим элементарный индивидуальный тетраэдр, построенный на векторах элементарных перемещений, направленных вдоль координатных линий сопутствующей системы координат (см. рис. 3.7).

Обозначим через $d\omega_0$ и $d\omega_t$ значения объёма в моменты времени t_0 и t соответственно:

$$d\omega_0=\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,d\xi^1\,d\xi^2\,d\xi^3, \quad d\omega_t=\sqrt{\hat{g}}\,d\xi^1\,d\xi^2\,d\xi^3.$$

Относительное изменение объёма есть

$$\theta=\frac{d\omega_t-d\omega_0}{d\omega_0}=\sqrt{\frac{\hat{g}}{\overset{\circ}{g}}}-1, \quad (3.7.19)$$

оно называется *коэффициентом кубического расширения среды*. Отношение определителей $\hat{g}/\overset{\circ}{g}$ выражается через инварианты тензоров $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$. В самом деле, из формул (3.6.14)

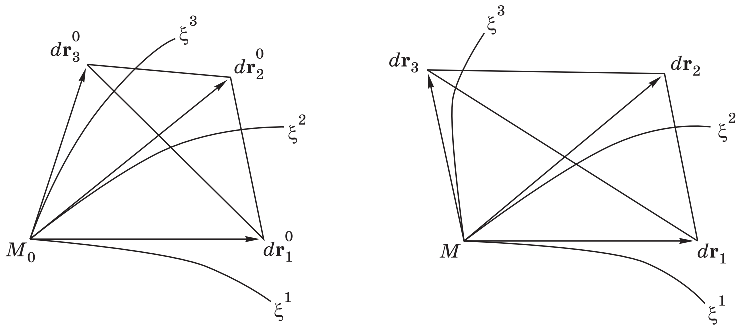

Рис. 3.7
Элементарные тетраэдры до и после деформации

получим

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\alpha\beta} - 2\hat{\mathcal{E}}_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\alpha\sigma}(\delta^{\sigma}{}_{\beta} - 2\hat{\mathcal{E}}^{\sigma}{}_{\beta}), \quad \hat{\mathcal{E}}^{\sigma}{}_{\beta} = \hat{g}^{\sigma\tau}\hat{\mathcal{E}}_{\tau\beta},$$

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{g}_{\alpha\sigma}\,(\delta^{\sigma}{}_{\beta} + 2\,\overset{\circ}{\mathcal{E}}{}^{\sigma}{}_{\beta}), \quad \overset{\circ}{\mathcal{E}}{}^{\sigma}{}_{\beta} = \overset{\circ}{g}{}^{\sigma\tau}\hat{\mathcal{E}}_{\tau\beta}.$$

Переходя в этих формулах к определителям, найдём

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{g} &= \hat{g}|\delta^{\sigma}{}_{\beta} - 2\hat{\mathcal{E}}^{\sigma}{}_{\beta}| = \hat{g}(1 - 2J_1 + 4J_2 - 8J_3), \\ \hat{g} &= \overset{\circ}{g}\,|\delta^{\sigma}{}_{\beta} + 2\,\overset{\circ}{\mathcal{E}}{}^{\sigma}{}_{\beta}| = \overset{\circ}{g}\,(1 + 2\,\overset{\circ}{J}_1 + 4\,\overset{\circ}{J}_2 + 8\,\overset{\circ}{J}_3), \end{aligned} \tag{3.7.20}$$

где через J_1, J_2, J_3 обозначены основные инварианты тензора $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, а через $\overset{\circ}{J}_1$, $\overset{\circ}{J}_2$, $\overset{\circ}{J}_3$ — основные инварианты тензора $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$. Из формул (3.7.20) получим искомое отношение определителей

$$\frac{\hat{g}}{\overset{\circ}{g}} = \frac{1}{1 - 2J_1 + 4J_2 - 8J_3} = 1 + 2\,\overset{\circ}{J}_1 + 4\,\overset{\circ}{J}_2 + 8\,\overset{\circ}{J}_3\,. \tag{3.7.21}$$

Соотношение (3.7.19) для коэффициента кубического расширения позволяет найти выражения

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{(1 - 2J_1 + 4J_2 - 8J_3)^{1/2}} - 1 = \\ &= (1 + 2\,\overset{\circ}{J}_1 + 4\,\overset{\circ}{J}_2 + 8\,\overset{\circ}{J}_3)^{1/2} - 1. \end{aligned} \tag{3.7.22}$$

Первой из формул (3.7.22) следует пользоваться, когда деформация описывается тензором $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, второй — когда характеристикой деформации является тензор $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$.

Формулы (3.7.22) справедливы при произвольных конечных деформациях. В случае малых деформаций (величины (J_2, J_3), $(\overset{\circ}{J}_2, \overset{\circ}{J}_3)$ являются бесконечно малыми по сравнению с (J_1) и $(\overset{\circ}{J}_1)$

$$\theta = J_1 = \overset{\circ}{J}_1 \tag{3.7.23}$$

и первый инвариант тензора деформации ($\boldsymbol{\mathcal{E}}$ или $\overset{\circ}{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$) совпадает с коэффициентом кубического расширения.

С помощью формул (3.7.20) уравнение неразрывности (3.3.3) можно переписать в эквивалентных формах:

$$\rho = \overset{\circ}{\rho}\,(1 - 2J_1 + 4J_2 - 8J_3)^{1/2} = \\ = \overset{\circ}{\rho}\,(1 + 2\,\overset{\circ}{J}_1 + 4\,\overset{\circ}{J}_2 + 8\,\overset{\circ}{J}_3)^{-1/2}. \tag{3.7.24}$$

В частном случае малых деформаций формулы (3.7.24) допускают упрощения

$$\rho = \overset{\circ}{\rho}\,(1 - J_1) = \overset{\circ}{\rho}\,(1 - \overset{\circ}{J}_1), \tag{3.7.25}$$

т. е. в этом приближении они неразличимы.

3.8. КЛАССИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Механика деформируемых твёрдых тел является частью механики сплошных сред и имеет важные практические приложения. В настоящее время она рассматривается как единая наука, объединяющая научные дисциплины: теорию упругости, теорию пластичности, теорию ползучести металлов, механику разрушения, механику композитов, механику сыпучих сред, теорию вязкоупругих и вязкопластических сред и т. д. Здесь будут построены математические модели лишь некоторых из этих дисциплин.

3.8.1. Модель нелинейной термоупругости

Сплошная среда, по определению, называется *упругой средой*, если состояние деформации характеризуется тензором деформации; в среде можно выделить некоторые состояния (обычно это исходное или начальное состояние, называемое *естественным*), в котором отсутствуют как напряжения, так и деформации, а температура постоянна; для всех состояний этой среды в любой точке и в любой момент времени тензор напряжений является взаимно однозначной функцией тензора деформаций:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\mathcal{E}}, Z, \mathbf{A}_l), \quad \mathbf{P}\big|_{\boldsymbol{\mathcal{E}}=0} = 0, \quad l = 1, \ldots, m, \qquad (3.8.1)$$

где Z — пространство состояний, $\mathbf{A}_l$ — параметрические тензоры, характеризующие анизотропию среды. Обычно Z состоит из одного параметра — температуры среды θ.

Итак, постулируется, что напряжённое состояние в рассматриваемый момент времени зависит только от поля перемещений, определяющего геометрическое состояние среды относительно исходного естественного состояния, но не зависит ни от способа перехода от этого состояния к рассматриваемому, ни от скоростей, с которыми осуществляется этот переход. Напомним, что для жидких сред, чтобы определить напряжённое состояние в некоторой точке, нужно знать только поле скоростей в данный момент времени. Конечно, естественное состояние упругой среды определено только с точностью до перемещения среды как абсолютно твёрдого тела.

Пусть $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, t)$ — закон движения сплошной среды (3.6.21), где $\mathbf{w}$ — вектор перемещений. Считаем здесь, что x^α — *декартова система координат* и ξ^σ — лагранжевы координаты частицы, равные пространственным координатам её положения в начальный момент, т. е. $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, 0)$, так что $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, 0) = 0$. Тогда в формуле (3.6.11)

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \hat{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\alpha}\,\frac{\partial x_\sigma}{\partial \xi^\beta}\,.$$

Тензор 2-го ранга

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial \xi^\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial w_\alpha}{\partial \xi^\beta}\,,$$

или, в инвариантной форме (здесь используется второе определение (1.5.23) векторного градиента — тензора 2-го ранга $\partial\mathbf{x}/\partial\boldsymbol{\xi}$, $\partial\mathbf{w}/\partial\boldsymbol{\xi}$),

$$\mathbf{T} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{I} + \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\boldsymbol{\xi}} \tag{3.8.2}$$

называется *тензором дисторсии* (I — единичный тензор). Тогда тензор деформации, определяемый формулой (3.6.25), запишется в виде

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \frac{\mathbf{T}^*\mathbf{T} - \mathbf{I}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)^* + \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\boldsymbol{\xi}} + \left(\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)^* \cdot \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right], \tag{3.8.3}$$

где $*$ означает сопряжение (транспонирование). Тензор $\mathbf{T}$ зависит от времени и

$$\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right) = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\boldsymbol{\xi}} = \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{T},$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости. Поэтому из первой части формулы (3.8.3) получим скорость изменения деформации

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{\partial t} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathbf{T}^*}{\partial t}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}^*\cdot\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial t}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{T}^*\cdot[(\nabla\mathbf{u})^* + \nabla\mathbf{u}]\cdot\mathbf{T} = \mathbf{T}^*\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{T}.\end{aligned} \tag{3.8.4}$$

Здесь $\mathbf{D}$ — тензор скоростей деформаций, определённый формулой (3.3.19).

Замечание 3.6. Тензор $\mathbf{T}$ имеет обратный: $\partial\boldsymbol{\xi}/\partial\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}$. Это следует из того, что отображение $\mathbf{x} = \gamma(\boldsymbol{\xi}, t)$ по предположению является вместе со своим обратным отображением непрерывным и дифференцируемым в некоторой окрестности точки частицы ω_t.

Для дальнейшего удобно ввести вспомогательный тензор

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{T}^{*-1}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{T}^*, \tag{3.8.5}$$

где $\mathbf{P}$ — тензор напряжений.

Рассмотрим уравнение притока тепла (3.4.7). В силу формул (3.8.4), (3.8.5) для двойной свёртки тензоров имеем

$$\mathbf{P} : \mathbf{D} = \hat{\mathbf{P}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{\partial t}$$

и уравнение (3.4.7) перепишется в виде

$$\rho \frac{dU}{dt} = \hat{\mathbf{P}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{\partial t} + \operatorname{div}(k \nabla \theta) + \rho h. \tag{3.8.6}$$

Тепловая энергия, сообщаемая в процессе движения некоторому объёму ω_t, состоит из трёх частей. Первая — это количество тепла, возникающего в ω_t за счёт механической работы действующих сил. Так как процесс является обратимым, то эта часть тепла роста энтропии вызывать не должна, ибо в противном случае её нельзя было бы снова преобразовать в механическую работу. Поэтому за рост энтропии отвечает только оставшаяся часть тепла $dQ = \theta ds$. Следовательно, количество тепла этого вида, выделяемого в единице объёма за единицу времени, равно $\rho\theta ds/dt$. С другой стороны, это тепло вносится в объём ω_t за счёт теплопроводности среды, причём в единицу объёма за единицу времени притекает количество тепла $\operatorname{div}(k\nabla\theta)$, плюс тепло от внутренних источников, равное ρh. Равенство этих количеств и есть первая **аксиома термодинамики упругого тела** T_1.

Справедливо равенство

$$\rho\theta \frac{ds}{dt} = \operatorname{div}(k\nabla\theta) + \rho h.$$

Эта аксиома позволяет преобразовать уравнение (3.8.6) к виду

$$\rho \frac{\partial F}{\partial t} + \rho s \frac{\partial \theta}{\partial t} = \hat{\mathbf{P}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{\partial t}, \tag{3.8.7}$$

где $F = U - \theta s$ — свободная энергия.

Следующая **аксиома состояния** T_2 завершает формулировку предположений о термодинамике упругого тела.

Независимыми термодинамическими параметрами упругого тела являются тензор деформаций $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ и температура θ. Свободная энергия $F(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}, \theta)$ и коэффициент теплопроводности $æ(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}, \theta)$ суть изотропные функции тензора $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$.

Следствием этой аксиомы является равенство

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial t}\,.$$

Его подстановка в выражение (3.8.7) и учёт независимости параметров $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ и θ приводят к формулам

$$\hat{\mathbf{P}} = \rho\frac{\partial F}{\partial \hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}\,, \quad s = -\frac{\partial F}{\partial \theta}\,. \tag{3.8.8}$$

Легко видеть, что если F — изотропная функция тензора $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$, то и $\partial F/\partial\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ обладает тем же свойством. Поэтому из аксиомы T_2, формулы (3.7.24) и первого равенства (3.8.8) следует, что тензор $\hat{\mathbf{P}}$ также есть изотропная функция тензора $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$. По формуле Лагранжа–Сильверста (1.4.40) получим представление

$$\hat{\mathbf{P}} = \alpha\mathbf{I} + \beta\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}} + \gamma\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^2, \tag{3.8.9}$$

где α, β, γ — функции только инвариантов тензора $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ и температуры θ. Эти функции должны определяться из эксперимента и в модели считаться известными. Это же относится и к коэффициенту теплопроводности k.

Второе из равенств (3.8.8) используется для преобразования уравнения аксиомы T_1. Если ввести коэффициент теплоёмкости при постоянной деформации $c_\varepsilon = -\theta\partial^2 F/\partial\theta^2$, то упомянутое уравнение примет вид

$$\rho c_\varepsilon\frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div}(k\nabla\theta) + \theta\frac{\partial \hat{\mathbf{P}}}{\partial \theta} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{\partial t} + \rho h. \tag{3.8.10}$$

Коэффициент c_ε также считается известной функцией инвариантов тензора $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ и температуры θ.

Основными искомыми элементами в теории упругого тела считаются вектор перемещений $\mathbf{w}$ и температура θ. В лагранжевом описании они рассматриваются как функции переменных $(\boldsymbol{\xi}, t)$. В уравнение импульса вектор перемещений $\mathbf{w}$ вводится с помощью соотношений

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\,, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}\,,$$

и оно примет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathbf{P} + \rho \mathbf{f}. \qquad (3.8.11)$$

Можно проверить, что уравнения (3.8.10), (3.8.11) вместе с равенствами (3.7.24), (3.8.2), (3.8.3), (3.8.5), (3.8.9) при заданных α, β, γ, k, c_ε — функциях инвариантов тензора $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ и температуры θ — образуют замкнутую систему уравнений. Эта система и есть *математическая модель упругого тела* M_9. Для полноты записи уравнений этой модели требуется ещё преобразовать входящие в формулы (3.8.10) и (3.8.11) операции div и ∇ к лагранжевым координатам. Если писать div_x для этой операции в эйлеровых координатах и div_ξ — в лагранжевых (аналогичный смысл имеют ∇_x и ∇_ξ), то нужное преобразование даётся формулами

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}_x \mathbf{P} = \operatorname{div}_\xi(\mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{P}}) - \mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{T}^{-1}\operatorname{div}_\xi(\mathbf{T}^{*-1}),\\ &\operatorname{div}_x(k\nabla_x\theta) = \operatorname{div}_\xi(k\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{T}^{*-1}\cdot\nabla_\xi\theta) - \\ &\qquad\qquad - k\mathbf{T}^{*-1}\nabla_\xi\theta\operatorname{div}_\xi(\mathbf{T}^{*-1}). \end{aligned} \qquad (3.8.12)$$

Упражнение. Вывести формулы (3.8.12).

Итак, математическая модель деформируемого твёрдого тела такова:

$$M_9: \quad \begin{aligned} &\rho\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} = \operatorname{div}(\mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{P}}) - \mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{T}^{-1}\operatorname{div}(\mathbf{T}^{*-1}) + \rho\mathbf{f},\\ &\rho c_\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t} = \operatorname{div}(k\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{T}^{*-1}\cdot\nabla\theta) - \\ &\qquad\qquad -k\mathbf{T}^{*-1}\nabla\theta\operatorname{div}(\mathbf{T}^{*-1}) + \theta\frac{\partial\hat{\mathbf{P}}}{\partial\theta} : \frac{\partial\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{\partial t} + \rho h,\\ &\rho = \overset{\circ}{\rho}\,(1 + 2\,\overset{\circ}{J}_1 + 4\,\overset{\circ}{J}_2 + 8\,\overset{\circ}{J}_3)^{-1/2}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{I} + \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\boldsymbol{\xi}},\\ &\hat{\mathbf{P}} = \alpha\mathbf{I} + \beta\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}} + \gamma\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^2,\\ &2\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \frac{\partial\mathbf{w}^*}{\partial\boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\boldsymbol{\xi}} + \left(\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)^*\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\boldsymbol{\xi}}, \end{aligned}$$

где $\overset{\circ}{J}_1$, $\overset{\circ}{J}_2$, $\overset{\circ}{J}_3$ — инварианты тензора $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$; все операции выполняются уже в лагранжевой системе координат ξ^1, ξ^2, ξ^3. Всего имеется 23 уравнения относительно 23-х неизвестных. По известным тензорам $\hat{\mathbf{P}}$ и $\mathbf{T}$ тензор напряжений $\mathbf{P}$ восстанавливается с помощью второй формулы (3.8.5): $\mathbf{P} = \mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{T}^*$.

Уравнения модели M_9 называются *уравнениями термоупругости*. Модель M_9 нелинейна и весьма сложна как для решения конкретных задач, так и для общего математического анализа. На практике обычно используется её линейный вариант.

3.8.2. Линейная модель термоупругости

Различают *геометрически* и *физически линейные* теории упругости. В первой из них принимается, что малым является как сам вектор перемещения произвольной частицы, так и его градиент: $|\mathbf{w}| \ll L$, $|\nabla\mathbf{w}| \ll 1$, где L — характерный размер. Так как

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{w}, \quad \mathcal{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha w_\beta + \nabla_\beta w_\alpha - \nabla_\alpha w^\sigma \nabla_\beta w_\sigma\right), \tag{3.8.13}$$

то в случае геометрической линейности можно принять

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0, \quad \mathcal{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha w_\beta + \nabla_\beta w_\alpha\right) = \nabla_{(\alpha} w_{\beta)}, \tag{3.8.14}$$

и при вычислении любой физической величины, связанной с частицей среды и равной нулю в естественном состоянии координаты (вектор) $\mathbf{r}$ частицы можно заменить координатами (вектором) $\mathbf{r}_0$ того положения, которое занимала частица в исходном состоянии, а линеаризованное выражение тензора деформации есть просто симметричная часть градиента вектора смещения.

Теория упругости называется линейной физически, если напряжения линейно зависят от деформаций. В силу наличия естественного состояния эта зависимость должна быть линейной и однородной. Разлагая в ряд Тейлора тензорную функцию (3.8.1) в окрестности естественного состояния

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}\big|_{\boldsymbol{\mathcal{E}}=0} + \left.\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}\right|_{\boldsymbol{\mathcal{E}}=0} : \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}^2}\right|_{\boldsymbol{\mathcal{E}}=0} :: \boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{\mathcal{E}} + \ldots \tag{3.8.15}$$

и пользуясь малостью тензора $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и условием $\mathbf{P}\big|_{\boldsymbol{\mathcal{E}}=0}= 0$, получим в линейном приближении

$$\mathbf{P} = \left.\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}\right|_{\boldsymbol{\mathcal{E}}=0} : \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad P^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{E}_{\gamma\delta}. \tag{3.8.16}$$

Здесь симметрический по индексам α, β и γ, δ тензор 4-го ранга

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\mathcal{E}}, Z, \mathbf{A}_l) = \left.\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}\right|_{\boldsymbol{\mathcal{E}}=0} \tag{3.8.17}$$

называется *тензором модулей упругости*.

Теория упругости называется *линейной*, если она линейна геометрически и физически. Её частным случаем является *классическая теория упругости*, когда дополнительно тензор напряжений суть однородная и изотропная функция, т. е. в формуле (3.8.1) $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, Z)$. Тогда

$$\mathbf{P} = L_0\mathbf{G} + L_1\boldsymbol{\mathcal{E}} + L_2\boldsymbol{\mathcal{E}}^2, \tag{3.8.18}$$

где коэффициенты L_0, L_1, L_2 суть функции инвариантов тензора деформации и термодинамических параметров Z.

В линейном случае должно быть

$$\mathbf{P} = (\lambda J_1^{\varepsilon} + \lambda_1)\mathbf{G} + 2\mu\boldsymbol{\mathcal{E}}, \tag{3.8.19}$$

причём величины λ, λ_1 и μ могут быть функциями параметров пространства Z.

Предположение о «физической линейности» подразумевает и линейность тензора напряжений от разности температур $\tilde{\theta} = \theta - \theta_0$ (θ_0 — постоянная температура в естественном состоянии), причём величина $\tilde{\theta}/\theta_0$ и её производные малы порядка малости тензора $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Кроме того, в понятие «физической линейности» удобно включить также предположение о постоянстве коэффициентов k и c_{ε}. Следует заметить, что для малых деформаций тензоры $\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ отличаются на малые величины высшего порядка малости. В рамках «физической линейности» это верно и для тензоров $\mathbf{P}$ и $\hat{\mathbf{P}}$. Поэтому в дальнейшем, в линейных теориях, эти тензоры обозначаются просто символами $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\mathbf{P}$.

Итак, уравнение состояния (3.8.19) термоупругого тела в линейной теории имеет вид

$$\mathbf{P} = (-\gamma\tilde{\theta} + \lambda_1 J_1^{\varepsilon})\mathbf{G} + 2\mu\boldsymbol{\mathcal{E}}, \tag{3.8.20}$$

где γ, λ, μ — постоянные. Равенство (3.8.20) называется *законом Дюамеля–Неймана.*

Совокупность всех перечисленных предположений составляет содержание **аксиомы линейной термоупругости** T_3.

Существует естественное состояние упругого тела, по отношению к которому движение среды удовлетворяет условиям геометрической и физической линейности.

В результате отбрасывания малых величин высшего порядка малости по сравнению с основной малой величиной — нормой тензора $\nabla\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}/\partial\boldsymbol{\xi}$ — уравнения модели M_9 существенно упрощаются:

$$M_{10}: \quad \begin{aligned} &\overset{\circ}{\rho}\,\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} = -\gamma\nabla\theta + (\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{w}) + \mu\Delta\mathbf{w} + \overset{\circ}{\rho}\,\mathbf{f}, \\ &\frac{\partial\theta}{\partial t} = \chi\Delta\theta - \beta\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{w}) + h_1, \end{aligned}$$

где $\chi = k/\overset{\circ}{\rho}\,c_\varepsilon$ — коэффициент температуропроводности, $\beta = \gamma\theta_0/\overset{\circ}{\rho}\,c_\varepsilon$, $h_1 = h/c_\varepsilon$, а операции div, ∇ и Δ выполняются по лагранжевым переменным ξ.

Через известные величины $\mathbf{w}$ и θ тензор деформаций вычисляется по формуле (3.8.14), тензор напряжений — по формуле (3.8.20), а плотность среды — по линейному приближению формулы (3.7.25):

$$\rho = \overset{\circ}{\rho}\,(1 - \operatorname{div}\mathbf{w}) = \overset{\circ}{\rho}\,(1 - J_1^{\varepsilon}). \tag{3.8.21}$$

Уравнения модели M_{10} вместе с формулами (3.8.14), (3.8.20), и (3.8.21) называются *уравнениями линейной термоупругости.*

Упражнение. Вывести уравнения модели M_{10} из уравнений модели M_9.

Коэффициент γ в законе Дюамеля–Неймана имеет вид

$$\gamma = \alpha \left(1 + \frac{2}{3}\,\mu\right), \qquad (3.8.22)$$

где α — коэффициент теплового расширения. Действительно, тензор напряжений в формуле (3.8.20) записывается с помощью девиатора тензора деформаций $\mathbf{D}^{\varepsilon} = \boldsymbol{\mathcal{E}} - (J_1^{\varepsilon}/3)\mathbf{G}$ так:

$$\mathbf{P} = [-\gamma\tilde{\theta} + (\lambda + 2\mu/3)]\mathbf{G} + 2\mu\mathbf{D}^{\varepsilon}.$$

При свободном тепловом расширении тела (при отсутствии внешних сил) внутренних напряжений и сдвигов нет: $\mathbf{P} = 0$, $\mathbf{D}^{\varepsilon} = 0$. При этом объёмное расширение будет $J_1^{\varepsilon} = \alpha\tilde{\theta}$. Значит, $[(\lambda + 2\mu/3)\alpha - \gamma]\tilde{\theta}\mathbf{G} = 0$, откуда и следует формула (3.8.22), $\tilde{\theta} = \theta - \theta_0$.

3.8.3. Линейная теория упругости

Имеются определённые трудности при решении задач линейной термоупругости, связанные с тем, что уравнения модели M_{10} требуется рассматривать совместно, так как напряжения (и перемещения) зависят от температуры и обратно. Опытные данные показывают, что при медленном нагружении упругого тела за время перехода $\Omega_0 \to \Omega_t$ температура успевает выровняться и прийти в равновесие с окружающей средой. Предположение о независимости напряжений от температуры часто используется в практических задачах и за основу линейной теории упругости берётся модель M_{10}, дополненная **аксиомой независимости от температуры** T_4.

*Тензор напряжений **P** не зависит от температуры.*

Принятие этой аксиомы означает, что в формуле (3.8.20) следует положить $\gamma = 0$ и она запишется в виде

$$\mathbf{P} = \lambda J_1^{\varepsilon}\mathbf{G} + 2\mu\boldsymbol{\mathcal{E}}.$$

Вместе с γ обращается в ноль и параметр β во втором уравнении модели M_{10}. Тогда первое уравнение становится независимым от второго, т. е. механические и тепловые процессы оказываются разделёнными. При этом для функции

θ получается известное уравнение теплопроводности. Таким образом, построена *модель классической линейной теории упругости*

$$M_{11}: \quad \begin{aligned} &\overset{\circ}{\rho}\,\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{w}) + \mu\Delta\mathbf{w} + \overset{\circ}{\rho}\,\mathbf{f}, \\ &\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\,[\nabla\mathbf{w} + (\nabla\mathbf{w})^*], \quad \mathbf{P} = \lambda J_1^{\varepsilon}\mathbf{G} + 2\mu\boldsymbol{\mathcal{E}}, \\ &\rho = \overset{\circ}{\rho}\,(1 - \operatorname{div}\mathbf{w}) = \overset{\circ}{\rho}\,(1 - J_1^{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Первое уравнение (фактически оно одно может быть названо моделью M_{11}) называется *уравнением Ламе*. Зависимость (3.8.19) носит название *закона Гука* для изотропных сред, а сами параметры λ и μ называют *постоянными Ламе*.

В компонентной записи закон Гука имеет вид

$$P^{\alpha\beta} = \lambda J_1^{\varepsilon} g^{\alpha\beta} + 2\mu\mathcal{E}^{\alpha\beta} = \lambda g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\mathcal{E}_{\gamma\delta} + 2\mu g^{\alpha\gamma}g^{\delta\beta}\mathcal{E}_{\gamma\delta} = \\ = (\lambda g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} + 2\mu g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta})\mathcal{E}_{\gamma\delta}. \quad (3.8.23)$$

Сравнение с формулой (3.8.16) показывает, что тензор модулей упругости для изотропных сред выражается через компоненты метрического тензора

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} + 2\mu g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}. \quad (3.8.24)$$

Классическая теория упругости хорошо описывает поведение металлических деталей, если только они не подвергаются действию больших усилий.

Найдём зависимость тензора деформаций от тензора напряжений, т. е. обратим формулу (3.8.23). Поскольку $J_1^P = P^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}$, $J_1^{\varepsilon} = \mathcal{E}^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}$, то $J_1^P = (3\lambda + 2\mu)J_1^{\varepsilon}$ и из (3.8.23) получим

$$\mathcal{E}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu}\,P^{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\,J_1^P g^{\alpha\beta}. \quad (3.8.25)$$

Введём обозначения

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\,; \quad (3.8.26)$$

E называется *модулем Юнга*, σ — *коэффициентом Пуассона*. При этом формула (3.8.25) перепишется в инвариантном виде

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1+\sigma}{E}\,\mathbf{P} - \frac{\sigma}{E}\,J_1^P\mathbf{G}. \qquad (3.8.27)$$

Это просто другая форма закона Гука для изотропной упругой среды.

Для уяснения механического смысла коэффициентов упругости рассмотрим простое растяжение стержня (рис. 3.8), в котором $P_{11} \neq 0$, а остальные $P_{\alpha\beta} = 0$ (система координат декартова и прямоугольная и все индексы можно написать внизу). Здесь $J_1^P = P_{11}$ и из формулы (3.8.27) находим

$$\mathcal{E}_{11} = \frac{1}{E}\,P_{11}, \quad P_{11} = E\mathcal{E}_{11}.$$

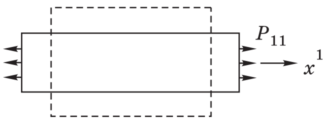

Рис. 3.8
Растяжение стержня. Штриховая линия — стержень до деформации

Значит, E есть коэффициент пропорциональности между относительным удлинением $\mathcal{E}_{11} = \Delta l/l$ и напряжением $P_{11} = F/S$ при простом растяжении стержня. Далее, из (3.8.27) $\mathcal{E}_{22} = -\sigma P_{11}/E = -\sigma\mathcal{E}_{11}$. Обычно при растяжении стержень становится тоньше и $\mathcal{E}_{22} < 0$. Так как $\mathcal{E}_{11} > 0$, то для обычных материалов $\sigma > 0$. Следовательно, механический смысл коэффициента Пуассона σ — это коэффициент пропорциональности между относительным сжатием в поперечном направлении и относительным удлинением в продольном направлении при простом растяжении стержня.

Рассмотрим простой сдвиг (рис. 3.9), т. е. состояние, в котором в декартовой системе координат $P_{12} = P_{21} \neq 0$, а остальные $P_{\alpha\beta} = 0$. Тогда из закона Гука (3.8.27) получим $\mathcal{E}_{12} = (1+\sigma)P_{12}/E = P_{12}/\mu$, или $P_{12} = 2\mu\mathcal{E}_{12} = \mu\varphi_{12}$. В последнем равенстве использована формула (3.7.2), где φ_{12} —

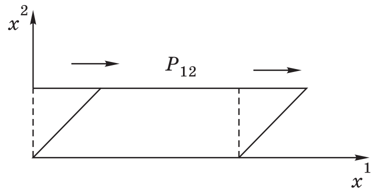

Рис. 3.9
Простой сдвиг. Штриховой линией показаны торцы стержня до деформации

изменение угла между волокнами, лежавшими до деформации вдоль осей x^1, x^2. Поэтому μ — это коэффициент пропорциональности между сдвигающим напряжением и изменением угла между соответствующими волокнами при простом сдвиге; он называется *модулем сдвига*.

Рассмотрим теперь всестороннее сжатие: $\mathbf{P} = -p\mathbf{G}$, $J_1^P = -3p$. Найдём связь между давлением p и относительным изменением объёма при всестороннем сжатии θ. По формуле (3.7.23) при малых деформациях $\theta = J_1^\varepsilon$. Из закона Гука (3.8.27) находим

$$J_1^\varepsilon = \frac{1+\sigma}{E}\, J_1^P - \frac{3\sigma}{E}\, J_1^P = \frac{3(1-2\sigma)}{E}\, p.$$

Следовательно, при всестороннем сжатии

$$p = -\frac{E}{3(1-2\sigma)}\, \theta.$$

Коэффициент

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} = \lambda + \frac{2}{3}\, \mu \qquad (3.8.28)$$

называется *модулем объёмного сжатия*. Для несжимаемой среды $K = \infty$, $\sigma = 0,5$, так как $\theta = 0$ при $p \neq 0$. Коэффициент Пуассона для многих металлов $\sigma \approx 0,25$, а для каучука $\sigma \approx 0,47$ и это почти несжимаемый материал.

Таким образом, введены пять упругих постоянных: λ, μ, E, σ, K. Можно принять как доказанное экспериментально, что $K > 0$ и $\mu > 0$. Этот факт также может быть обоснован и из термодинамических соображений. Но тогда из второй формулы (3.8.28) следует, что и $\lambda > 0$, а выражения (3.8.26) дают строгую положительность E и σ, причём $\sigma < 1/2$. Экспериментально установлено, что коэффициент Пуассона обычно лежит в диапазоне от $1/4$ до $1/2$.

Из формулы (3.8.27) получим тензор напряжений в случае малых деформаций

$$\mathbf{P} = \frac{E}{1+\sigma}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\,J_1^{\varepsilon}\mathbf{G}\right). \tag{3.8.29}$$

Упражнения. 1. Задано поле скоростей в эйлеровых переменных: $u_1 = a_1(t)x_1$, $u_1 = a_2(t)x_2$, $u_3 = a_3(t)x_3$. Найти тензор скоростей деформации, вектор вихря скорости, закон движения (траектории), вектор перемещения как функцию лагранжевых координат, лагранжев тензор деформации, изменение плотности в процессе движения. Функции $a_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, заданы.

2. Перемещение среды задано в виде $x = \xi + \eta$, $y = \eta$, $z = \zeta$. Вычислить лагранжев $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ и эйлеров $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ тензоры деформации и найти в обоих случаях главные направления и удлинения.

3. В рамках линейной теории выяснить, можно ли тензор $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, где

$$(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & x_2^2 & x_1x_3 \\ x_2^2 & x_3 & x_3^2 \\ x_1x_3 & x_3^2 & x_1^2 \end{pmatrix},$$

рассматривать как тензор деформации некоторого перемещения.

4. Для каких гладких скалярных функций $\varphi(\boldsymbol{\xi})$ шаровой тензор $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \varphi(\boldsymbol{\xi})$ в рамках линейной теории может являться тензором деформации? Найти вектор перемещений.

5. При растяжении круглого стержня радиуса $R = 1$ см, длиной $l = 1$ м, силой $F = 24{,}6$ кг, приложенной к торцам стержня, он удлинился на 1 мм. Найти модуль Юнга.

3.8.4. Пластические течения

Упругие деформации после снятия нагрузки обладают свойством полного восстановления недеформируемого состояния. Более того, они зависят только от величины напряжений и не зависят от истории деформирования или нагружения. Деформация, возникающая как ответная реакция материала на приложенные нагрузки или изменения в окружающей среде и не подчиняющаяся определяющим законам теории упругости, может рассматриваться как *неупругая деформация*. Так, необратимые смещения, которые получаются в результате скольжения или дислокаций на атомном уровне и, как следствие, ведут к остаточным изменениям размеров, называются *пластическими деформациями*. Такие деформации имеют место только при напряжениях выше некоторого порога, известного как *предел упругости* или *предел текучести* на растяжение. Этот предел обозначается σ_0. При испытании материала на сдвиг предел называется *пределом текучести* на сдвиг и обозначается k.

Основные проблемы теории пластичности состоят в математической формулировке соотношений между напряжениями и деформациями, в установлении правила определения количественных критериев для указания начала наступления пластичности.

В отличие от течения жидкости, при котором предполагается движение частиц среды, понятие *пластического течения* относится к непрерывному изменению суммарной деформации, а скорость представляет собой скорость деформаций.

Рассмотрим диаграмму зависимости напряжений от деформаций при испытании некоторого гипотетического материала на простое одноосное растяжение (или сжатие), рис. 3.10. Здесь σ — напряжение, а в качестве $\mathcal{E}$ может быть взята обычная относительная деформация, определяемая в виде $e = (l - l_0)/l_0$, где l — текущая длина отрезка, а l_0 — его начальная длина, либо логарифмическая относительная деформация $\mathcal{E} = \ln(l/l_0) = \ln(1 + e) = e - e^2/2 + O(e^3)$. Для малых деформаций эти величины почти равны. Предел текучести точка M (она соответствует напряжению σ_0) разделяет

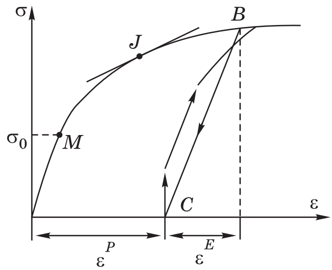

Рис. 3.10
К определению предела текучести на растяжение

кривую напряжение-деформация на упругую и пластическую области.

Замечание 3.7. Иногда предел упругости берётся как *предел пропорциональности* и лежит в верхнем конце линейной части кривой. Часто за него принимают точку J, которая называется *пределом текучести Джонсона* и по определению представляет собой точку, где наклон кривой достигает 50 % от своего первоначального значения. Есть и другие способы определения предела текучести.

В начальной упругой области увеличение нагрузки заставляет точку, изображающую напряжённо-деформированное состояние, двигаться вверх по кривой, а уменьшение нагрузки (разгрузка) ведёт к движению точки вниз по тому же самому пути. Значит, в этой области имеется взаимно однозначное соответствие между напряжением и деформацией.

В пластической области дело обстоит иначе. При разгрузке от некоторого состояния B точка, изображающая состояние, следует по пути BC, практически параллельному линейной упругой части кривой. В точке C, где напряжение достигает нуля, имеется остаточная деформация $\mathcal{E}^P$. Символом $\mathcal{E}^E$ обозначена восстановленная упругая деформация, соответствующая точке B. При повторной нагрузке точка, изображающая состояние, движется из C обратно к B по пути, близкому к BC, но не попадает точно в B, и из-за потери энергии в цикле разгрузка-нагрузка образуется небольшая *петля гистерезиса*. Многие материалы, например металлы, обладают свойством упрочнения, которое заключается в том, что при повторном нагружении материала предел текучести повышается. Поэтому в пластической области напряжение зависит от всей истории нагружения или деформирования среды.

Конечно, температура оказывает существенное влияние на пластическое поведение реального материала. Тем не менее в теории пластичности часто принимают условие изотермии и считают температуру просто параметром. Точно так же на практике в классической теории пластичности обычно пренебрегают влиянием скорости нагружения на диаграмму напряжение-деформация. Пластические деформации считаются отдельно от таких явлений, как ползучесть и релаксация.

Условия пластичности. Критерии Треска и Мизеса. С математической точки зрения условие пластичности представляет собой соотношение между компонентами тензора напряжений в точке, когда в ней начинается пластическое течение. В общем случае это условие записывается уравнением

$$f(P_{ij}) = 0, \tag{3.8.30}$$

и функция $f(P_{ij})$ называется *функцией текучести*.

Если материал изотропный, то равенство (3.8.30) можно представить в виде симметричной функции главных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 (см. формулы (3.3.24), (3.3.25))

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \tag{3.8.31}$$

Эксперименты показывают, что для многих сред (например для металлов) напряжение всестороннего сжатия не вызывает пластических деформаций. Поэтому условие пластичности можно записать как функцию инвариантов девиатора напряжений

$$f_2(J_2^D, J_3^D) = 0, \quad J_1^D = 0. \tag{3.8.32}$$

Из разных условий пластичности, которые были предложены, два просты математически и в то же время достаточно точны при изучении начальной стадии пластичности изотропных материалов: условия Треска и Мизеса.

I. *Критерий текучести Треска.* Пластическое поведение начинается тогда, когда максимальное касательное напряжение достигает заданной величины k,

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\left(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|\right) = k. \tag{3.8.33}$$

При $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ критерий Треска выглядит так (см. конец п. 3.3):

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = k. \tag{3.8.34}$$

Условие пластичности Треска в пространстве главных напряжений имеет вид шестигранной призмы с осью, равнонаклонённой к осям координат. Рассматривая простое растяжение и чистый сдвиг, можно установить связь предела текучести на сдвиг и предела текучести при простом растяжении: $2k = \sigma_0$, или

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0. \tag{3.8.35}$$

II. *Критерий текучести Мизеса.* Пластическое поведение начинается тогда, когда интенсивность касательных напряжений достигает некоторого критического значения. Математическая запись такова:

$$T = k, \tag{3.8.36}$$

где $T = \sqrt{-J_2^D} = \sqrt{D_{ij}^P D_{ij}^P/2}$, D_{ij}^P — компоненты девиатора тензора напряжений, или, через главные напряжения,

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2. \tag{3.8.37}$$

Рассматривая простое растяжение, легко показать, что связь предела текучести на растяжение и на сдвиг в этом случае имеет вид

$$\sigma_0 = \sqrt{3}\cdot k. \tag{3.8.38}$$

Условие пластичности Мизеса в пространстве главных напряжений имеет вид кругового цилиндра с осью, равнонаклонённой к системе координат.

Поведение материала за пределом текучести. Дальнейшее нагружение после достижения начального предела текучести приводит к пластическим деформациям, которые могут сопровождаться изменениями исходной поверхности текучести. Если материал *идеально пластический*, то поверхность текучести не изменяется в процессе пластического деформирования и первоначальное условие пластичности остаётся в силе. Для материала с *упрочнением* может происходить изменение поверхности текучести. Вместо функции текучести $f(P_{ij})$ из (3.8.30) вводится *функция нагружения*

$$f^*(P_{ij}, \mathcal{E}^P_{ij}, \chi) = 0, \tag{3.8.39}$$

которая зависит от напряжений, пластических деформаций $\mathcal{E}^P_{ij}$ и параметра упрочнения χ, например, параметр Одквиста $\chi = \int \sqrt{2d\mathcal{E}^P_{ij} d\mathcal{E}^P_{ij}}$. Уравнение (3.8.39) определяет поверхность нагружения: $f^* = 0$ даёт границу упругой зоны, $f^* < 0$ соответствует упругой зоне внутри нагружения, а $f^* > 0$ соответствует области вне поверхности нагружения и смысла не имеет.

Полный дифференциал функции таков:

$$df^* = \frac{\partial f^*}{\partial P_{ij}}\, dP_{ij} + \frac{\partial f^*}{\partial \mathcal{E}^P_{ij}}\, d\mathcal{E}^P_{ij} + \frac{\partial f^*}{\partial \chi}\, d\chi. \tag{3.8.40}$$

Если $f^* = 0$ и $(\partial f^*/\partial P_{ij})dP_{ij} < 0$, то совершается *процесс разгрузки*; если $f^* = 0$ и $(\partial f^*/\partial P_{ij})dP_{ij} = 0$, то имеет место *нейтральное нагружение*; если $f^* = 0$ и $(\partial f^*/\partial P_{ij})dP_{ij} > 0$, то идёт *процесс активного нагружения*. Способ, каким пластические деформации $\mathcal{E}^P_{ij}$ входят в функцию (3.8.40) в процессе нагружения, определяется *законами упрочнения*. Опишем два наиболее простых из них. Закон *изотропного упрочнения* при нагружении постулирует, что поверхность текучести просто увеличивается в размерах, сохраняя при этом свою начальную форму. Кривые текучести для критериев Мизеса и Треска будут концентрическими окружностями и правильными шестиугольниками. При *кинематическом упрочнении* начальная поверхность текучести поступательно перемещается в новое положение в пространстве напряжений без изменения размеров и формы. Формулу (3.8.30) нужно заменить на

$$f_1(P_{ij} - A_{ij}) = 0, \tag{3.8.41}$$

где A_{ij} — координаты центра новой поверхности текучести.

Теория пластического течения. При возникновении пластических деформаций определяющие уравнения теории упругости (зависимости тензора напряжений от тензора деформаций) перестают быть справедливыми. Как уже отмечалось, пластические деформации зависят от всей истории нагружения среды, поэтому соотношения между напряжением и деформацией часто формулируют через приращения деформации. Уравнения теории пластического течения устанавливают связь между бесконечно малыми приращениями деформаций, приращениями напряжений и самими напряжениями.

Основные аксиомы теории пластического течения:

1. Тело изотропно.

2. *Тензор деформации $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ можно представить в виде суммы упругой $\boldsymbol{\mathcal{E}}^E$ и пластической $\boldsymbol{\mathcal{E}}^P$ составляющих*,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^E + \boldsymbol{\mathcal{E}}^P, \quad \mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}^E + \mathcal{E}_{ij}^P. \tag{3.8.42}$$

Иногда это равенство записывают в виде дифференциалов

$$d\mathcal{E}_{ij} = d\mathcal{E}_{ij}^E + d\mathcal{E}_{ij}^P. \tag{3.8.43}$$

3. Относительное изменение объёма мало и является упругой деформацией, пропорциональной среднему давлению:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^E + \mathcal{E}^P, \quad \mathcal{E}^P = 0, \quad \mathcal{E}^E = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma, \tag{3.8.44}$$

где $\sigma = (P_{11} + P_{22} + P_{33})/3$, $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22} + \mathcal{E}_{33})/3$.

В упругой области справедлив закон Гука

$$d\mathcal{E}_{ij}^E = \frac{1}{2\mu}\left(dP_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu}\,\delta_{ij}d\sigma\right). \tag{3.8.45}$$

4. В пластической области справедлив закон

$$d\mathcal{E}_{ij}^P = D_{ij}\,d\lambda, \tag{3.8.46}$$

где коэффициент пропорциональности $d\lambda$ является скалярной функцией.

Если исключить приращение пластических деформаций, то из (3.8.43) получим

$$d\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(dP_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu}\,\delta_{ij}d\sigma\right) + D_{ij}\,d\lambda \qquad (3.8.47)$$

— уравнения состояния теории пластического течения. В них входит неизвестная скалярная функция $d\lambda$, для нахождения которой используют дополнительное уравнение в виде условия текучести.

Если использовано условие текучести Мизеса, то полученные уравнения называются *идеально-упруго-пластической моделью Прандтля–Рейсса*. Если в уравнениях Прандтля–Рейсса пренебречь упругими деформациями, то получим уравнения Леви–Мизеса, связывающие приращения полной деформации с компонентами девиатора напряжений

$$d\mathcal{E}_{ij} = D^P_{ij} d\lambda, \qquad (3.8.48)$$

где D^P_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений P_{ij}: $D^P_{ij} = P_{ij} - J^P_1\delta_{ij}/3$, см. формулу (1.4.11). Тем самым пренебрегается упругой частью деформации. Коэффициент пропорциональности $d\lambda$ дан в дифференциальной форме, подчёркивая, что приращения деформации связаны с конечными компонентами напряжений. Этот множитель является скалярной функцией, так как может меняться в процессе нагружения. Соотношения (3.8.48) есть закон течения *жёстко-идеально-пластического тела*.

Функцию $g(P_{ij})$, обладающую свойством

$$d\mathcal{E}^P_{ij} = \frac{\partial g}{\partial P_{ij}}\,d\lambda, \qquad (3.8.49)$$

называют *пластическим потенциалом*. Очень часто эта функция тождественно совпадает с функцией текучести. В частности, при $g = f(P_{ij}) = J^D_2$ уравнения (3.8.49) переходят в выражения (3.8.46) — уравнения Прандтля–Рейсса.

Деформационная теория пластичности Генки.

Рассмотрим уравнения пластической деформации как некоторое обобщение закона Гука. Предполагается, что связь между напряжениями и деформациями конечная, т. е. не дифференциальная, как в теории течения.

Основная аксиома деформационной теории.

1. Тело изотропно.

2. Деформацию можно представить как сумму

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^E + \mathcal{E}^P, \quad \mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}^E + \mathcal{E}_{ij}^P. \tag{3.8.50}$$

3. В упругой области справедлив закон Гука. В девиаторной форме он имеет вид

$$\mathcal{E}^E = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma, \quad (\mathcal{E}_{ij}^E)^D = \frac{1}{2\mu}\,D_{ij}, \tag{3.8.51}$$

где $D_{ij} = P_{ij} - \sigma\delta_{ij}$, $(\mathcal{E}_{ij}^E)^D = \mathcal{E}_{ij}^E - \mathcal{E}^E\delta_{ij}$ — девиаторы тензоров напряжения и упругой деформации.

4. В пластической области

$$\mathcal{E}^P \equiv 0, \quad (\mathcal{E}_{ij}^P)^D = \varphi D_{ij}, \tag{3.8.52}$$

где φ — неизвестная скалярная функция. Подставляя (3.8.51) и (3.8.52) в (3.8.50), получим уравнения состояния деформационной теории пластичности

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma\delta_{ij} + \psi D_{ij}, \tag{3.8.53}$$

где $\psi = (2\mu)^{-1} + \varphi$ — параметр Генки.

Для нахождения ψ используем дополнительное уравнение, например условие пластичности Мизеса. Обозначим $T = \sqrt{D_{ij}D_{ij}/2}$ — интенсивность касательных напряжений, $\Gamma = \sqrt{2(\mathcal{E}_{ij})^D(\mathcal{E}_{ij})^D}$ — интенсивность деформаций сдвига. Поскольку $(\mathcal{E}_{ij})^D = \psi D_{ij}$, то $\Gamma = 2\psi T$. Условие пластичности Мизеса имеет вид $T = k$, следовательно, $\psi = \Gamma/2k$. Уравнения деформационной пластичности — нелинейные, но благодаря относительной простоте они нашли широкое применение.

Модели упругопластического деформирования. Рассматриваются задачи деформирования, когда упругие и пластические деформации, возникающие в теле при нагружении, имеют примерно одинаковый порядок. Подобного рода задачи встречаются в теории балок и кручения валов, в исследовании толстостенных труб и оболочек, находящихся под давлением. В общем случае математическая модель содержит следующие соотношения.

В упругой и пластической областях выполняются уравнения равновесия

$$\operatorname{div}\mathbf{P} + \rho\mathbf{f} = 0 \tag{3.8.54}$$

— следствие уравнения импульса (3.3.10).

Кроме того, справедливы кинематические соотношения и деформации связаны с перемещениями, см. (3.8.14),

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{w} + (\nabla\mathbf{w})^*\right). \tag{3.8.55}$$

Если рассматривать упругую модель, то связь между напряжениями и деформациями даётся формулой (3.8.29):

$$\mathbf{P} = \frac{E}{1+\sigma}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\,J_1^{\varepsilon}\mathbf{G}\right). \tag{3.8.56}$$

Пятнадцать уравнений ((3.8.54)–(3.8.56)) относительно пятнадцати функций перемещения, деформации и напряжения образуют замкнутую систему. Если исключить напряжения и деформации по формулам (3.8.56), (3.8.55), то для перемещений получим стационарную систему линейной теории упругости — уравнения Ламе

$$(\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{w}) + \mu\Delta\mathbf{w} + \rho\mathbf{f} = 0. \tag{3.8.57}$$

В упругопластических моделях, как в теории течения, так и в деформационной теории, после исключения компонент упругих и пластических деформаций для нахождения дополнительного параметра используют условие текучести и получают замкнутую систему из шестнадцати уравнений.

На границе между упругой и пластической областями должны выполняться условия непрерывности напряжений и перемещений.

Упражнения. 1) Доказать, что уравнения (3.8.49) содержат в себе утверждение о совпадении главных осей тензора приращений пластической деформации с главными осями тензора напряжений. Записать эти уравнения через главные напряжения.

2) Доказать, что в случае плоской пластической деформации, когда $\mathcal{E}_{33} = 0$, $d\mathcal{E}_{33} = 0$, $P_{22} = 0$, уравнения Леви–Мизеса (3.8.48) приводят к тождественному совпадению критериев текучести Треска и Мизеса.

3) Упругопластическая среда, подчиняющаяся критерию текучести Мизеса, движется в условиях плоской деформации. Считая начальное состояние напряжённым, показать, что а) во всё время движения $P_{13} = P_{23} = 0$; б) если среда несжимаемая, то $P_{33} = (P_{11} + P_{22})/2$ и критерий текучести принимает вид

$$(P_{11} - P_{22})^2 + 4P_{12}^2 = 4k^2.$$

3.9. УСЛОЖНЁННЫЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Во многих практических задачах часто приходится иметь дело со сплошными средами, поведение которых не укладывается в рамках классических моделей, рассмотренных ранее. Здесь уже приходится видоизменять основные законы сохранения массы, импульса и энергии за счёт отказа от некоторых аксиом $A_1 - A_{10}$, замене их другими, более полно и адекватно отражающие новые черты поведения среды. Проблемы построения и изучения таких моделей весьма актуальны и составляют значительную часть содержания современной механики сплошных сред. Ниже будет дано лишь общее представление о некоторых усложнённых моделях. Фактически одна из таких моделей и была рассмотрена в предыдущем параграфе — модель упругопластического течения.

1. Многофазные среды. Этим термином (иногда — многокомпонентные) обозначаются среды, представляющие собой смеси нескольких сред с разными физическими свойствами, каждая из которых удовлетворяет условиям сплошности и деформируемости. Это — морская вода, пылевые и дождевые облака, смог и продукты сгорания, смеси химически реагирующих веществ и т. д. Наиболее разработанной моделью является так называемая модель *взаимопроникающих* сред, которая далее описывается на примере *двухфазной среды.*

Пусть имеются две сплошные среды *1* и *2*, заполняющие одну и ту же область $\Omega \subset R^3$. Смесь этих двух сред также есть единая сплошная среда *1 + 2*. Средние величины определяются следующим образом. Пусть среда *1* имеет истинную плотность ρ_1, а среда *2* — ρ_2. Если в объёме $V \subset \Omega$ среда *1* занимает объём V_1 и имеет массу m_1, а среда *2* занимает объём V_2 и имеет массу m_2, то $m_1 = \rho_1 V_1$, $m_2 = \rho_2 V_2$. Тогда среда *1 + 2* в том же объёме имеет массу $m = m_1 + m_2$ и среднюю плотность $\rho = m/V$. Если $C_1 = V_1/V$, $C_2 = V_2/V$ — объёмные концентрации сред, то

$$C_1 + C_2 = 1, \quad C_1\rho_1 + C_2\rho_2 = \rho.$$

Движение в Ω может рассматриваться как движение каждой из этих сред. Соответственно этому вводятся три средние скорости $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ и $\mathbf{u}$. Поскольку скорости определяются через импульс, то из равенства $m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m\mathbf{u}$ вытекает равенство для средних

$$C_1\rho_1\mathbf{u}_1 + C_2\rho_2\mathbf{u}_2 = \rho\mathbf{u}.$$

Аналогичное соотношение имеет место для плотностей внутренней энергии каждой из сред:

$$C_1\rho_1 U_1 + C_2\rho_2 U_2 = \rho U,$$

и вообще для массовой плотности любой аддитивной функции множества.

Пусть $\mathbf{P}$ — тензор напряжений и $\mathbf{q}$ — вектор потока тепла в общей среде *1 + 2*. Тогда для неё можно считать справедливыми уравнения интегральных законов сохранения со следующим добавлением. При взаимопроникающем движении сред

1 и *2* в среде *1* действует *внутренняя массовая сила* с объёмной плотностью $\boldsymbol{\varphi}_1$, обусловленная сопротивлением прониканию этой среды через среду *2*. Эта сила зависит от относительной скорости $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, а также от других характеристик обеих сред. Подобная сила $\boldsymbol{\varphi}_2$ действует и в среде *2*, причём $\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2 = 0$ — это следствие условия равновесия. Поэтому в уравнение импульсов эти силы не войдут. Однако они совершают работу в каждой из сред, которая даёт приток энергии в общую среду, равный $2(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 2(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\cdot\boldsymbol{\varphi}_1$. Этот приток и должен быть учтён в законе сохранения энергии.

При записи интегральных законов сохранения для i среды $(i = 1, 2)$ надо также учесть, что поверхностная сила, действующая через площадку $d\sigma$ с нормалью $\mathbf{n}$ на эту среду, будет равна $C_i \mathbf{p}_n d\sigma$. Аналогично, количество тепла, переносимое через такую же площадку и воспринятое средой i, будет равно $C_i q_n d\sigma$.

Полученные таким путём интегральные законы сохранения для каждой из сред *1*, *2* и *1 + 2* надо замыкать путём добавления термодинамических уравнений, включающих температуры θ_i, объёмные концентрации C_i, энтропии s_i $(i = 1, 2)$, а также уравнений состояния, связывающих тензор напряжений с тензорами скоростей деформации (деформации) обеих составляющих сред.

2. Анизотропные среды. Это такие сплошные среды, которые обладают различными свойствами в разных направлениях. Анизотропными могут быть как деформируемые твёрдые тела (кристаллы, полимеры, стеклопластики, многослойные фанеры), так и жидкие среды (растворы полимеров, жидкие кристаллы). Здесь тензор напряжений $\mathbf{P}$ уже не является изотропной функцией тензора деформаций $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ или тензора скоростей деформаций $\mathbf{D}$. Это обстоятельство значительно усложняет уравнение состояния, «замыкающего» систему законов сохранения.

Пусть, например, зависимость является линейной,

$$P^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{E}_{\gamma\delta},$$

где $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$ суть компоненты тензора 4-го ранга $\mathbf{C}$, называемого *тензором модулей упругости*. Он может зависеть от термодинамических параметров Z и параметрических тензоров $\mathbf{A}_k$, $k = 1, \ldots, s$. Тензор $\mathbf{C}$, в силу симметрии тензоров $\mathbf{P}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, обладает следующей симметрией компонент:

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} = C^{\beta\alpha\gamma\delta} = C^{\alpha\beta\delta\gamma} = C^{\beta\alpha\delta\gamma}.$$

Если ещё учесть равенство

$$P^{\alpha\beta}\mathcal{E}_{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{E}_{\gamma\delta}\mathcal{E}_{\alpha\beta} = C^{\gamma\delta\alpha\beta}\mathcal{E}_{\gamma\delta}\mathcal{E}_{\alpha\beta},$$

то путём простого подсчёта нетрудно убедиться, что число различных компонент тензора модулей упругости равно 21. Изотропное упругое тело можно рассматривать как частный случай анизотропного тела. Как уже отмечалось, здесь число независимых компонент тензора $\mathbf{C}$ равно двум, а замкнутой моделью является система уравнений линейной упругости M_{11}, где $J_1^{\mathcal{E}} = 0$.

Для термоупругости

$$P^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{E}_{\gamma\delta} - \theta\beta^{\alpha\beta}, \quad \beta^{\alpha\beta} = \beta^{\beta\alpha}.$$

3. Идеальная несжимаемая сыпучая среда. Это — условно-твёрдое тело типа сухого песка, зерна, гранулированных пород. Здесь выполняются следующие предположения:

1) среда является сплошной только при условии, что вектор нормального напряжения на любой площадке отрицателен;

2) максимальное касательное напряжение зависит только от нормального давления на соответствующей площадке;

3) девиаторы напряжений и скоростей деформаций пропорциональны:

$$\begin{gathered} D_{ij}^P = P_{ij} - \frac{1}{3}(P_{ij}\delta_{ij})\delta_{ij} = 2\mu D_{ij}, \quad i,j = 1,2,3; \\ D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \end{gathered} \tag{3.9.1}$$

Девиатор тензора $\mathbf{D}$ совпадает с ним самим в силу несжимаемости среды.

Обозначая
$$\sigma = \frac{1}{3}\,P_{ij}\delta_{ij},$$
получим
$$\mathbf{P} = \sigma\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}.$$
Однако, в отличие от ньютоновской жидкости, когда $\sigma = -p$, коэффициент вязкости μ есть функция инварианта $\mathbf{D}$, именно $J = \sqrt{D_{ij}D_{ij}}$, причём $J\mu(J) \to 0$ при $J \to 0$. Эта функция находится из опытов на сдвиг и может зависеть ещё и от температуры.

Условие 1) в декартовых координатах имеет вид
$$N_n = \mathbf{Pn}\cdot\mathbf{n} \leqslant 0,$$
где $\mathbf{n}$ — нормаль к площадке. Оно означает, что определитель $\det P_{ij}$ и все миноры главной диагонали должны быть отрицательны (отрицательны все главные напряжения).

В трёхмерном случае условие 2) записывается сложно, поскольку требует явных выражений для максимальных касательных напряжений через P_{ij}. Для плоской деформации
$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{P_{11}-P_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2}, \quad -\sigma = p = -\frac{1}{2}\,(P_{11}+P_{22})$$
и условие 2) примет вид
$$\tau_{\max} = F(p)$$
с некоторой универсальной функцией $F(p)$.

Для сухого трения частиц $F(p) = fp$ — закон Кулона, где f — коэффициент внутреннего трения. Тогда
$$\tau_{\max}^2 = f^2\left(\frac{P_{11}+P_{22}}{2}\right)^2.$$
Если между частицами есть ещё и сцепление, то $F = k + fp$, где k — постоянная сдвигового сцепления.

Для плоской деформации замкнутая система для неизвестных P_{11}, P_{22} и τ_{12} состоит из уравнений равновесия (3.8.54), где $\tau_{13} = \tau_{23} = 0$, и уравнения $F[(P_{11}+P_{22})/2] = \tau_{\max}$. Вектор скорости находится из условия несжимаемости

$$\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} = 0$$

и уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \frac{4P_{12}}{P_{11} - P_{22}}\,\frac{\partial u_1}{\partial x^1} = 0$$

(оно следует из системы (3.9.1)).

Компонента тензора напряжений P_{33} определяется формулой

$$P_{33} = -p = \frac{P_{11} + P_{22}}{2}\,.$$

4. Вязкоупругие среды. В таких средах проявляются как свойства жидкостей (вязкость), так и свойства деформируемых твёрдых тел (упругость). Это — натуральные и синтетические каучуки, аморфные полимеры. Для этих материалов в зависимости от температуры характерны стеклообразные состояния (при низких температурах), когда они почти идеально упруги. При повышенных температурах они значительно деформируются при малых напряжениях.

Два основных проявления свойства вязкоупругости называются *ползучестью* и *релаксацией*. Явление ползучести состоит в том, что при постоянной внешней нагрузке деформированный материал не остаётся в состоянии покоя, как это было бы с упругой средой, а как бы ползёт, т. е. претерпевает изменяющуюся со временем деформацию. Явление релаксации заключается в том, что напряжённое состояние материала при фиксированной внешней деформированной конфигурации не остаётся стационарным, как это было бы в случае упругой среды, а постепенно снимается (релаксирует), т. е. напряжение в теле за длительное время выравнивается и, вообще говоря, ослабевает. Эти два явления тесно связаны между собой, и релаксацию можно рассматривать как некоторую внутреннюю ползучесть.

В математическую модель свойства вязкоупругости вносятся через уравнение состояния, связывающего тензор напряжений $\mathbf{P}$ с тензором деформаций $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Однако в эти связи, в отличие от классической теории упругости, входят не только сами тензоры $\mathbf{P}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, но также и их производные по времени. В линейной теории уравнение состояния задаётся в линейной зависимости между производными по времени с коэффициентами, зависящими от температуры и определяемыми опытным путём.

Классическими примерами вязкоупругих связей между напряжением и деформацией при одноосном нагружении являются *модель Максвелла*

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{1}{E}\,\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{1}{\eta}\,\sigma$$

и *модель Фойгта*

$$\sigma = E\mathcal{E} + \eta\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\,,$$

в которых E — модуль упругости, а η — релаксационный параметр. В современной теории эти связи принято задавать в форме *интегралов ползучести*

$$D_{ij}^{\mathcal{E}} = \int\limits_0^t \Pi(t-\tau)\frac{\partial D_{ij}^{P}}{\partial \tau}\,d\tau, \quad J_1^{\mathcal{E}} = \int\limits_0^t \Pi_1(t-\tau)\frac{\partial J_1^{P}}{\partial \tau}\,d\tau \qquad (3.9.2)$$

и *интегралов релаксации*

$$D_{ij}^{P} = \int\limits_0^t R(t-\tau)\frac{\partial D_{ij}^{\mathcal{E}}}{\partial \tau}\,d\tau, \quad J_1^{P} = \int\limits_0^t R_1(t-\tau)\frac{\partial J_1^{\mathcal{E}}}{\partial \tau}\,d\tau, \qquad (3.9.3)$$

где функции (Π, Π_1), (R, R_1) называются функциями ползучести и релаксации.

Замкнутая система уравнений вязкоупругости состоит из уравнений движения (3.8.11), соотношений (3.8.55), интегралов наследственности (3.9.2) или (3.9.3).

5. Электромагнитные среды. Во всех деформируемых и покоящихся средах в зависимости от их электромагнитных свойств наблюдается влияние электромагнитного поля на движение и макроскопическое состояние сред и обратное влияние движения сред на эти поля. Объекты, реализующие макровзаимодействие электромагнитного поля и среды, — это электрические заряды среды и проходящие в ней токи, и поэтому взаимодействия существенно различны в проводниках, полупроводниках и диэлектриках. Поведение электромагнитных сред отличается большой сложностью и изучается в ряде самостоятельных научных дисциплин. Здесь будет описан случай так называемой *магнитной газодинамики* (МГД).

МГД представляет собой модель, которая описывает явления в хорошо проводящих электричество жидкостях и газах, например в жидких металлах и плазме. Высокая электрическая проводимость обеспечивается наличием большого числа частиц с зарядами разных знаков. В типичных для применения модели МГД условиях *магнитное поле оказывается значительно больше электрического*. Пусть $\mathbf{E}$ — напряжённость электрического поля, $\mathbf{H}$ — напряжённость магнитного поля, $\mathbf{j}$ — плотность тока. Пренебрегая эффектами поляризации, намагничивания и некоторыми другими, приходим к *уравнениям Максвелла*

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mu\mathbf{j},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{j} = 0,$$

которые дополняются *законом Ома* для движущейся среды

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{H}),$$

где абсолютная постоянная $\mu = 4\pi\cdot 10^{-4}$ (в системе MKS), а σ — проводимость, характеризующая среду.

При формулировке интегральных законов сохранения в МГД необходимо учитывать новую массовую силу — *силу Лоренца* с объёмной плотностью

$$\mathbf{f}_{\text{Л}} = \mathbf{j}\times\mathbf{H}.$$

Для непрерывных движений показывается, что система уравнений МГД имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\,\nabla p + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = -\operatorname{rot}(\nu_m \operatorname{rot} \mathbf{H}),$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \frac{\nu_m}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2, \quad p = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad T = \frac{\partial U}{\partial s}, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma},$$

где $U(\rho, s)$ — плотность внутренней энергии — является заданной функцией среды от плотности и энтропии, c — скорость света, ν_m — коэффициент магнитной вязкости.

В случае несжимаемой жидкой среды следует добавить уравнение $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, давление не связано с U, $U = U(s)$, уравнение $p = \rho^2 \partial U / \partial \rho$ должно быть исключено из системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мейз, Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. М. : Изд-во «Мир», 1974. 318 с.

2. *Галин, Г. Я.* Механика сплошных сред в задачах. Т. 1. Теория и задачи / Г. Я. Галин [и др.]. М. : Моск. лицей, 1996. 396 с.

3. *Галин, Г. Я.* Механика сплошных сред в задачах. Т. 2. Ответы и решения / Г. Я. Галин [и др.]. М. : Моск. лицей, 1996. 394 с.

4. *Димитриенко, Ю. И.* Тензорный анализ / Механика сплошной среды: учеб. пособие в 4 т. / Ю. И. Димитриенко. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. Т. 1. 463 с.

5. *Димитриенко, Ю. И.* Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред / Механика сплошной среды: учеб. пособие в 4 т. / Ю. И. Димитриенко. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. Т. 2. 559 с.

6. *Эглит, М. Э.* Лекции по основам механики сплошных сред / М. Э. Эглит. М. : КД Либроком, 2013. 207 с.

7. *Дубровин, Б. А.* Современная геометрия. Методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. М. : Наука, 1979. 760 с.

8. *Тайманов, И. А.* Лекции по дифференциальной геометрии / И. А. Тайманов. М.–Ижевск : НИЦ «РХД», 2006. 255 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Виктор Константинович АНДРЕЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

Зав. редакцией физико-математической
литературы *Н. Р. Нигмадзянова*
Верстка *А. Г. Сандомирская*
Выпускающие *Т. С. Симонова, Н. А. Крылова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 24.06.15.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 12,60. Тираж 500 экз.

Заказ №   .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных материалов
в АО «ИПК “Чувашия”».
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, д. 13.
Тел.: (8352) 56-00-23