КЛАССИЧЕСКАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
ПО МАТЕМАТИКЕ

П. С. АЛЕКСАНДРОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ И ОБЩУЮ ТОПОЛОГИЮ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание второе,
стереотипное

ЛАНЬ®
• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА •
• КРАСНОДАР •
2010

ББК 22.12я73
А 46

Александров П. С.
А 46 Введение в теорию множеств и общую топологию: Учебное пособие. 2-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2010. — 368 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0981-5

Книга является введением в современные разделы общей топологии. Первые три главы представляют собой изложение фактов теории множеств с так называемой «наивной» точки зрения. В главах 4–6 дается изложение основных топологических фактов, касающихся метрических и топологических пространств. Особое внимание при этом обращается на метризационные теоремы и понятия компактности (бикомпактности) и паракомпактности.

Учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов физико-математических факультетов университетов.

ББК 22.12я73

Оформление обложки
А. ЛАПШИН

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ *)

Эта книга была задумана как второе издание моей книги «Введение в общую теорию множеств и функций», изданной в 1948 г. Однако вскоре же после начала работы над этим вторым изданием мне стало ясно, что речь фактически идет о написании новой книги, а не о новом издании уже написанной; и действительно, из старой книги в новую были перенесены без существенных изменений лишь первые три главы. В переработанном виде материал шестой и седьмой глав старой книги был частично взят мною в пятую главу новой книги. Составляющие основную часть новой книги главы четвертая и шестая написаны заново, лишь с небольшими заимствованиями из Прибавлений к двум последним главам старой книги. Однако сохранился и общий ее дух, состоящий в элементарном и — как я надеюсь — логически тщательном изложении рассуждений: формулировок и доказательств, и пронизывающий всю книгу так называемый «наивный» подход к основным понятиям теории множеств, непревзойденным образом воплощенный в классической книге Ф. Хаусдорфа «Теория множеств».

Как мне кажется, предлагаемая вниманию читателя книга в ее теперешнем виде может служить руководством для первого ознакомления с общей топологией, т. е. с теорией топологических пространств, с обращением особого внимания на их важнейший частный случай — метризуемые пространства. Отсюда следует и специальное внимание, уделяемое нами проблеме метризации топологических пространств. С другой стороны, чрезвычайно большое место в книге занимают пространства, обладающие тем или иным свойством «типа компактности», т. е. прежде всего бикомпактные (и локально бикомпактные), а также паракомпактные пространства. Эти последние тесным образом связаны с общей проблемой метризации. Если прибавить, что вполне регулярные, или тихоновские, пространства суть не что иное, как подпространства бикомпактов, то станет ясным, что выделение,

*) В списке литературы читатель найдет работы, лишь непосредственно связанные с теми или иными местами основного текста.

с одной стороны, метризуемых пространств, а с другой стороны, пространств, удовлетворяющих условиям типа компактности, дает нам доступ практически ко всем важнейшим типам топологических пространств, что и объясняет название основной и завершающей шестой главы нашей книги.

При этом я хотел бы настойчиво обратить внимание на то, что Прибавление к книге составляет ее неотъемлемую часть. Оно написано В. И. Зайцевым и посвящено кругу тесно связанных между собой вопросов, которые я причисляю к важнейшим среди разрабатывавшихся в общей топологии за последнюю четверть века, а именно теории обратных (в частности и в особенности проекционных) спектров и теории абсолютов и неприводимых совершенных отображений топологических пространств. Основы первой теории заложены в работах П. С. Александрова [4], [5], [8] и А. Г. Куроша [1] и получили новое и очень интересное развитие в работах В. И. Зайцева [2] и [3]. Вторая теория восходит к работам Глисона (Gleason) и еще даже М. Стоуна (М. Н. Stone) [1], но свое полное развитие получила лишь в работах В. И. Пономарева [2] и [3], в которых, в частности, и была осуществлена связь теории абсолютов и теории проекционных спектров. Кроме Прибавления В. И. Зайцев написал и § 5 гл. 6, в котором он излагает данную им внутреннюю характеристику тихоновских пространств.

Участие В. И. Зайцева в работе над моей книгой настолько велико, что я считал необходимым отметить его особо. Это относится и к В. В. Федорчуку, который не только тщательно отредактировал всю книгу, но и внес едва ли не во все ее параграфы улучшения, часто очень существенные. Я могу прямо сказать, что без участия В. В. Федорчука книга в ее настоящем виде вообще не была бы написана. В работе над этой книгой В. В. Федорчук был существенно поддержан своим учеником А. В. Ивановым. Названным моим дорогим ученикам и коллегам я выражаю искреннюю и сердечную благодарность.

Гильберт часто сравнивал математику с волшебным, чарующим садом. В этот сад ведут многие различные входы. Одним из них является и теоретико-множественная топология. Моя книга в первую очередь обращена к избравшим именно этот вход молодым, начинающим математикам. Найдя, как я надеюсь, уже в самом начале пути много прекрасного, они дальше смогут пойти различными дорогами и прийти в такие углубленные части сада, что у входа нельзя было предвидеть самого их существования.

Москва
Июнь, 1976 г.

П. Александров

Глава первая

О БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ

§ 1. Понятие множества

На каждом шагу нам приходится сталкиваться с тем трудно определимым понятием, которое выражается словом «совокупность». Например, можно говорить о совокупности людей, присутствующих в данный момент в данной комнате, о совокупности гусей, плавающих в пруду, зайцев, живущих в лесах Московской области, и т. п.

В каждом из этих случаев можно было бы вместо слова «совокупность» употребить слово «множество».

В математике постоянно приходится иметь дело с различными множествами: например, с множеством вершин или диагоналей какого-нибудь многоугольника, множеством делителей числа 30 и т. д.

Все приведенные примеры множеств обладают одним существенным свойством: все эти множества состоят из определенного конечного числа элементов; последнюю фразу мы понимаем в том смысле, что в каждом из упомянутых случаев на вопрос «сколько?» (людей в комнате, гусей на пруду, делителей числа 30) мы можем ответить или прямым указанием известного нам целого числа (например, число делителей числа 30 есть 8), или указанием на то, что целое число, дающее ответ на вопрос, во всяком случае имеется, хотя в данный момент и при данном состоянии наших знаний нам может быть и неизвестно, каково оно именно. Множества, состоящие лишь из конечного числа элементов, называются *конечными* множествами.

В математике приходится постоянно сталкиваться и с другими — не конечными, или, как принято говорить, *бесконечными*, множествами. Таковы, например, множества всех натуральных чисел, всех четных чисел, всех целых, дающих при делении на 11 в остатке 7, всех прямых, проходящих через данную точку плоскости.

Понятие множества для удобства дополняется понятием пустого множества. Пустое множество, по определению, не содержит элементов; число элементов пустого множества есть нуль. Необходимость рассмотрения пустого множества видна из того, что когда мы определяем тем или иным способом множество, то мы можем и не знать заранее, содержит ли оно хотя бы один элемент. Например, вероятно, множество страусов, находящихся в данный момент за Полярным кругом, пусто; однако мы не можем этого утверждать с уверенностью, так как, может быть, какой-нибудь капитан и завез какого-нибудь страуса за Полярный круг.

Пустое множество обозначается через Λ.

§ 2. Подмножества. Операции над множествами

Введем теперь следующие основные обозначения и понятия.

Для того чтобы указать, что x есть элемент множества A, пишут $x \in A$ или $A \ni x$ (при этом обычно, хотя и далеко не всегда, обозначают множества большими буквами, а их элементы — малыми).

Определение 1. Если каждый элемент множества A есть вместе с тем элемент множества B, то множество A называется *частью* или *подмножеством* множества B.

Например, множество всех четных чисел есть часть множества всех целых чисел. Вместо того чтобы сказать, что множество A есть часть множества B, говорят часто, что множество A содержится в множестве B или что A включено в B, и записывают это так:

$$A \subseteq B \quad \text{или} \quad B \supseteq A.$$

Если A есть подмножество множества B, причем $A \neq B$, то пишут

$$A \subset B \quad \text{или} \quad B \supset A.$$

Знаки $\subseteq$, $\subset$ называются знаками включения (одного множества в другое).

Согласно нашему определению всякое множество A есть подмножество самого себя. Кроме того, пустое множество есть часть всякого множества. Множество A и пустое множество называются несобственными подмножествами множества A; все остальные подмножества называются собственными. Для всякого элемента $a \in A$ подмножеством множества A является и множество $\{a\}$, состоящее только из этого элемента. Мы часто будем опускать скобки и обозначать множество $\{a\}$ через a.

Подмножество множества A, состоящее из всех элементов, удовлетворяющих данному условию $\mathcal{R}$, будем обозначать через $\{a \in A\colon a \text{ удовлетворяет } \mathcal{R}\}$.

Предположим, что мы имеем некоторую (конечную или бесконечную) совокупность множеств A_α *). Рассмотрим множество тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств, входящих в данную совокупность. Множество всех этих элементов называется *суммой* (или *объединением*) множеств, образующих данную совокупность.

Объединение множеств обозначается знаком $\cup$; например, $A \cup B$ есть объединение множеств A и B; объединение всех множеств A данной совокупности $\mathfrak{A}$ множеств обозначается через $\bigcup\limits_{A \in \mathfrak{A}} A$. Если совокупность $\mathfrak{A}$ состоит из множеств A_α, где α пробегает некоторое множество индексов A, то их объединение обозначается через $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} A_\alpha$ или просто через $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$. Если совокупность $\mathfrak{A}$ состоит из множеств A_n, где n пробегает все натуральные числа $1, 2, 3, \ldots$, то их объединение обозначается через $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ или $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$

Например, множество всех целых чисел есть объединение множества всех четных и множества всех нечетных чисел, а также объединение:

множества A_1 всех нечетных чисел, не делящихся на три,
множества A_2 всех четных чисел,
множества A_3 всех чисел, делящихся на три (при этом множества A_1 и A_3 имеют общие элементы — числа, делящиеся на 6).

Рассмотрим теперь операцию вычитания множеств. Пусть имеем два множества A и B (из которых второе может и не содержаться в первом). *Разностью* множеств A и B называется множество тех элементов множества A, которые не суть элементы множества B. Разность множеств A и B обозначается через $A \setminus B$.

Переходим к третьей и последней основной операции над множествами — к операции взятия общей части, или пересечения, множеств. Пусть мы снова имеем конечную или бесконечную совокупность множеств A_α. Назовем *пересечением* этих множеств множество тех элементов, которые содержатся во всех данных множествах (множество элементов, общих всем множествам A_α).

Пересечение обозначается знаком $\cap$; так например, $A \cap B$ есть пересечение множеств A и B. Пересечение всех множеств A данной совокупности $\mathfrak{A}$ множеств обозначается через $\bigcap\limits_{A \in \mathfrak{A}} A$;

*) Индексы $\alpha, \beta, \ldots$ (могущие, например, принимать значения $1, 2, 3, \ldots$) служат для различения элементов данной совокупности: например, мы говорим о множествах A_α, A_β, A_γ данной совокупности множеств.

пересечение совокупности множеств A_α, где α пробегает некоторое множество индексов A, обозначается через $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} A_\alpha$ или через $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$; в частности $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$

Примеры.

1. Обозначим через A_n множество всех рациональных чисел, абсолютная величина которых меньше $\frac{1}{n}$ (где n — натуральное число). Пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ всех множеств A_n состоит из одного числа 0.

2. Обозначим через A_n множество всех положительных рациональных чисел, меньших чем $\frac{1}{n}$. В этом случае нет ни одного элемента, общего всем множествам A_n, т. е. пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ всех множеств A_n есть пустое множество.

Из очевидных свойств действий сложения, пересечения и вычитания отметим

Коммутативность:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Ассоциативность:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C,$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Дистрибутивность (пересечения относительно сложения):

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

вообще

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup_{\alpha} (A_\alpha \cap B)$$

и, далее,

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), \qquad A = (A \cap B) \cup (A \setminus B).$$

Почти столь же очевидны следующие *соотношения двойственности* (сложения и пересечения):

Для любой (конечной или бесконечной) *совокупности подмножеств A_α данного произвольного множества X имеют место* *тождества*

$$X \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha), \tag{1}$$

$$X \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus A_\alpha). \tag{2}$$

Доказательства обеих формул (1) и (2) совершенно аналогичны и проводятся автоматически. Докажем, например, формулу (1).

Пусть $x \in X \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha$. Это означает, что x не принадлежит хотя бы одному A_α, т. е. что x принадлежит хотя бы одному $X \setminus A_\alpha$, т. е. $x \in \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha)$. Поэтому левая часть формулы (1) содержится в правой части.

Пусть, обратно, $x \in \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha)$; это означает, что x принадлежит хоть одному $X \setminus A_\alpha$, следовательно, x не может принадлежать всем A_α, т. е. x не принадлежит $\bigcap_\alpha A_\alpha$, значит, x принадлежит $X \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha$. Таким образом, правая часть формулы (1) есть подмножество левой части. Формула (1) доказана.

В заключение этого параграфа скажем об убывающих и возрастающих последовательностях множеств.

Последовательность множеств

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots \tag{3}$$

называется *убывающей*, соответственно *возрастающей*, если для любого n имеем $A_n \supseteq A_{n+1}$, соответственно $A_n \subseteq A_{n+1}$. Если при этом для всех n имеют место более сильные соотношения $A_n \supset A_{n+1}$, соответственно $A_n \subset A_{n+1}$, то последовательность (3) называется *строго убывающей* (*строго возрастающей*).

Легко видеть, что *пересечение* (соответственно *сумма*) *любой бесконечной подпоследовательности убывающей* (соответственно *возрастающей*) *последовательности* (3) *совпадает с пересечением* (соответственно *суммой*) *всей последовательности* (3).

Любая (конечная или бесконечная) совокупность множеств называется *дизъюнктной* или *состоящей из дизъюнктных множеств*, если пересечение любых двух (различных) множеств, входящих в эту совокупность, пусто.

§ 3. Взаимно однозначное соответствие между множествами. Отображение одного множества на другое. Разбиение множества на подмножества. Семейства множеств и покрытия

Если два множества состоят из одного и того же конечного числа элементов, то между элементами этих множеств возможно установить *взаимно однозначное соответствие*, т. е. такое соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого множества и обратно; если же число элементов первого множества меньше, чем второго, то можно установить взаимно однозначное соответствие между первым множеством и частью второго.

Понятие взаимно однозначного соответствия по существу дела не предполагает, что множества, между элементами которых устанавливается это соответствие, непременно конечны.

Приведем примеры взаимно однозначных соответствий между бесконечными множествами.

1. Множество A состоит из всех целых положительных чисел, множество B — из всех целых отрицательных чисел.

Очевидно, мы получим взаимно однозначное соответствие между множествами A и B, если каждому положительному числу поставим в соответствие отрицательное с тою же абсолютной величиной.

2. Множество A состоит из всех целых положительных чисел, множество B — из всех положительных четных чисел.

Мы получим взаимно однозначное соответствие между A и B, если каждому числу $n \in A$ поставим в соответствие число $2n \in B$.

3. Множество A состоит из всех точек прямой линии (которую примем за ось абсцисс некоторой координатной системы) *). Множество B состоит из всех точек полуокружности

$$x^2+(y-1)^2=1, \qquad y<1,$$

с центром в точке $(0, 1)$. Концы этой полуокружности, т. е. точки $(1, 1)$ и $(-1, 1)$ не принадлежат к ней (в силу условия $y<1$) (рис. 1).

Полуокружность касается нашей прямой в начале координат. Устанавливаем взаимно однозначное соответствие между множествами A и B, ставя в соответствие каждой точке ξ прямой ту точку η окружности, в которой эту окружность пересекает луч, соединяющий центр круга с ξ.

4. Пусть A и B сохраняют смысл, указанный в предыдущем примере. Пусть B' — интервал $(-1; 1)$ числовой прямой, т. е мно-

*) Мы считаем, что читатель знаком с понятиями числовой прямой и действительного числа из курса анализа. Подробно мы займемся действительными числами в следующей главе.

жество всех точек оси абсцисс, удовлетворяющих неравенству $-1 < x < 1$. Проектируя полуокружность B ортогонально на интервал B' и помня, что A уже поставлено во взаимно однозначное соответствие с B, получим взаимно однозначное соответствие между числовой прямой A и ее интервалом $(-1; 1)$. Очевидно, можно таким образом установить взаимно однозначное соответствие между числовой прямой и любым ее интервалом, а следовательно, и между любыми двумя интервалами.

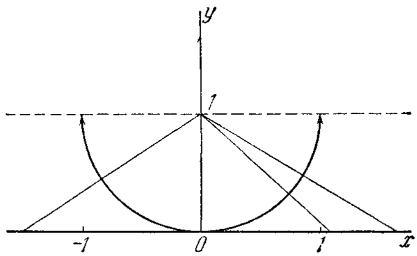

Рис. 1.

На основе понятия взаимно однозначного соответствия вводится следующее

Определение 2. Два множества называются *количественно эквивалентными*, если между ними возможно установить взаимно однозначное соответствие. Таким образом, множества A и B в каждом из предыдущих примеров суть множества количественно эквивалентные.

Количественно эквивалентные множества часто называют просто *эквивалентными* множествами.

Замечание 1. Относительно двух эквивалентных множеств говорят, что они имеют *одинаковую мощность*.

Замечание 2. Очевидно, что два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они состоят из одного и того же числа элементов.

Замечание 3. Из предыдущего определения эквивалентности следует, что два множества A и B, эквивалентных одному и тому же третьему множеству C, эквивалентны между собою.

Замечание 4. На вопрос, что такое мощность (см. замечание 1), можно ответить лишь так называемым «определением через абстракцию»: мощность — это то, что есть общего у всех эквивалентных между собою множеств. Если мы поставим себе вопрос: «Что есть общего у всех эквивалентных между собою конечных множеств?», то из сказанного в замечании 2 будет следовать, что этим общим является одинаковое число, или количество, элементов, из которого состоят все эквивалентные между собой конечные множества. В этом смысле понятие мощности является — в применении к бесконечным множествам — аналогом понятия количества (количественные числа) *).

*) См. в связи с этим замечание в § 5 этой же главы.

Определение 3. Множество, эквивалентное множеству всех натуральных чисел, называется *счетным множеством.*

На основании сказанного в замечании 3 мы заключаем, что: 1) всякое множество, эквивалентное счетному множеству, само есть счетное множество, 2) всякие два счетных множества эквивалентны.

Определение счетного множества может быть сформулировано и следующим образом: счетное множество — это такое множество A, все элементы которого могут быть занумерованы в бесконечную последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

так, чтобы при этом каждый элемент получил лишь один номер n и каждое натуральное число n было бы в качестве номера дано одному и лишь одному элементу нашего множества.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным* множеством.

Взаимно однозначное соответствие между двумя множествами, или, как говорят, взаимно однозначное отображение одного множества на другое, есть частный случай общего понятия *отображения: если каким-нибудь образом каждому элементу x некоторого множества X поставлен в соответствие определенный элемент y некоторого множества Y, то мы пишем $f\colon X \to Y$ и говорим, что имеется отображение множества X в множество Y, или функция f, аргумент которой пробегает множество X, а значения принадлежат множеству Y.* Для того чтобы показать, что данный элемент y поставлен в соответствие элементу x, пишут $y = f(x)$ и говорят, что y есть *образ* элемента x при данном отображении f.

При этом мы часто будем писать $y = fx$ вместо $y = f(x)$, так как мы пишем $y = \sin x$ или $y = \log x$, а не $\sin(x)$, $\log(x)$.

Может случиться, что *каждый* элемент множества Y оказывается поставленным в соответствие хотя бы одному элементу множества X. В этом случае мы говорим, что имеем отображение множества X *на* множество Y.

Наиболее важным случаем отображений является случай отображения одного множества *на* другое. К нему легко приводится и общий случай отображения одного множества в другое. В самом деле, пусть дано какое-нибудь отображение f множества X в множество Y; *множество Y_1 всех тех элементов множества Y, которые в силу отображения f поставлены в соответствие хотя бы одному элементу множества X, назовем образом множества X при отображении f и обозначим через $f(X)$ или через fX.* Очевидно, мы имеем отображение множества X на множество $Y_1 = fX \subseteq Y$.

Пусть $f\colon X \to Y$ и X_0 — непустое подмножество множества X. *Ограничением отображения* f *на* X_0 *называется отображение* $f|_{X_0}\colon X_0 \to Y$, *определяемое равенством* $f|_{X_0}x = fx$, $x \in X_0$.

Определение 4. Пусть дано отображение f множества X на множество Y. Пусть y есть произвольный элемент множества Y. *Прообразом* или *полным прообразом* элемента y при отображении f называется множество всех тех элементов множества X, которым при отображении f ставится в соответствие данный элемент $y \in X$. Это множество обозначается через $f^{-1}(y)$ или $f^{-1}y$.

Отображение f множества X на множество Y, очевидно, тогда и только тогда взаимно однозначно, когда прообраз $f^{-1}(y)$ каждого элемента y множества Y состоит лишь из одного элемента множества X.

Пусть дано отображение $f\colon X \to Y$ множества X в множество Y и M — произвольное подмножество множества X. *Малым образом* множества M при отображении f называется множество всех точек $y \in Y$, прообразы которых содержатся в M. Малый образ множества M обозначается через $f^{\#}M$. Итак, имеем $f^{\#}M = \{y \in Y\colon f^{-1}y \subseteq M\}$. Легко проверить, что $f^{\#}M = Y \diagdown f(X \diagdown M)$.

Из определения малого образа вытекает, что каждый элемент $y \in Y$, который в силу соответствия f не поставлен в соответствие никакому элементу множества X, принадлежит малому образу любого множества M. Поэтому понятие малого образа наиболее естественно для отображений «на», поскольку только в этом случае малый образ меньше (не больше) образа, т. е. $f^{\#}M \subseteq fM$.

Пусть дано множество X, представленное в виде суммы дизъюнктных (т. е. попарно не пересекающихся) подмножеств (в конечном или в бесконечном числе). Эти подмножества (множества-слагаемые нашей суммы) являются элементами данного *разбиения* множества X. Простой пример: пусть X есть множество всех учащихся в средних школах Москвы. Множество X можно разбить на попарно не пересекающиеся подмножества, например, следующими двумя способами: 1) мы объединяем в одно слагаемое всех учащихся одной и той же школы *) (т. е. разбиваем множество всех учащихся по школам), 2) мы объединяем в одно слагаемое всех учащихся одного и того же класса (хотя бы и различных школ). Второй пример: пусть X есть множество всех точек плоскости; возьмем на этой плоскости какую-нибудь прямую d и разобьем всю плоскость на прямые, параллельные прямой d. Множества точек каждой такой прямой и являются теми подмножествами, на которые мы разбиваем множество X.

Замечание 5. Если данное множество X разбито на дизъюнктные подмножества, дающие в сумме множество X, то

---

*) В предположении, что каждый учащийся учится лишь в одной школе.

для краткости говорят просто о разбиении множества X на *классы*.

Следующее предложение непосредственно следует из наших определений. Пусть дано отображение f множества X на множество Y. Полные прообразы $f^{-1}(y)$ всевозможных элементов y множества Y образуют разбиение множества X на классы. Множество этих классов находится во взаимно однозначном соответствии с множеством Y.

Обратно: пусть дано разбиение множества X на классы. Это разбиение порождает отображение множества X на некоторое множество Y, а именно на множество, элементами которого являются классы данного разбиения. Это отображение получается, если заставить соответствовать каждому элементу множества X тот класс, к которому он принадлежит.

Пример. Тем самым, что учащиеся Москвы распределены по школам, уже установлено*) отображение множества X всех учащихся на множество Y всех школ: каждому учащемуся соответствует та школа, в которой он учится.

При всей самоочевидности изложенных фактов они не сразу получили в математике отчетливую формулировку; получив же эту формулировку, они сразу приобрели важное значение в логическом построении различных математических дисциплин.

Пусть дано разбиение множества X на классы. Введем следующее определение: назовем два элемента множества X *эквивалентными по отношению к данному разбиению*, если они принадлежат к одному и тому же классу.

Таким образом, если мы разобьем учащихся Москвы по школам, то двое учащихся будут «эквивалентны», если они учатся в одной и той же школе (хотя бы и в разных классах). Если же мы разобьем учащихся по классам, то двое учащихся будут «эквивалентны», если они учатся в одном и том же классе (хотя бы и различных школ).

Отношение эквивалентности, только что определенное нами, очевидно, обладает следующими свойствами, называемыми *аксиомами эквивалентности*:

Свойство симметрии (или взаимности). Если x и x' эквивалентны, то эквивалентны также x' и x.

Свойство транзитивности (или переходности). Если эквивалентны элементы x и x', а также x' и x'', то x и x'' эквивалентны («два элемента x и x'', эквивалентные третьему x', эквивалентны между собою»).

Наконец, мы считаем каждый элемент эквивалентным самому себе; это свойство отношения эквивалентности называется свойством рефлексивности.

*) См. предыдущую сноску.

Итак, *всякое разбиение данного множества на классы определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности, обладающее свойствами симметрии, транзитивности и рефлексивности.*

Предположим теперь, что, обратно, нам удалось установить некоторый признак, дающий нам возможность о некоторых парах элементов множества X говорить как об эквивалентных. При этом мы требуем от этой эквивалентности только, чтобы она обладала свойствами симметрии, транзитивности и рефлексивности. Докажем, что это *отношение эквивалентности определяет разбиение множества X на классы эквивалентных между собой элементов.*

В самом деле, назовем классом $\xi(x)$ данного элемента x множества X множество всех элементов из X, эквивалентных элементу x. Вследствие рефлексивности каждый элемент x содержится в своем классе. Докажем, что если два класса имеют хоть один общий элемент, то они непременно совпадают.

В самом деле, пусть классы $\xi(x)$ и $\xi(x')$ имеют общий элемент x''. Записывая эквивалентность посредством значка $\sim$, имеем по определению классов $x \sim x''$, $x' \sim x''$, следовательно, в силу симметрии $x'' \sim x'$, а тогда в силу транзитивности $x \sim x'$. Пусть x^* — какой-нибудь элемент класса $\xi(x')$. Имеем $x \sim x' \sim x^*$, а в силу транзитивности $x \sim x^*$, т. е. $x^* \in \xi(x)$; значит, $\xi(x') \subseteq \xi(x)$. Пусть теперь $\tilde{x}$ есть элемент класса $\xi(x)$. Тогда $x \sim \tilde{x}$, по симметрии $\tilde{x} \sim x$, и так как $x \sim x'$, то по транзитивности $\tilde{x} \sim x'$, откуда $x' \sim \tilde{x}$, т. е. $\tilde{x} \in \xi(x')$; значит, $\xi(x) \subseteq \xi(x')$.

Таким образом, два класса $\xi(x)$ и $\xi(x')$, имеющие общий элемент, действительно совпадают между собою.

Объединим доказанное в одно предложение:

Каждое разбиение какого-нибудь множества X на классы определяет между элементами множества X некоторое отношение эквивалентности, обладающее свойствами симметрии, транзитивности и рефлексивности. Обратно, каждое отношение эквивалентности, установленное между элементами множества X и обладающее свойствами симметрии, транзитивности и рефлексивности, определяет разбиение множества X на классы попарно эквивалентных между собою элементов.

Семейства множеств и покрытия. Пусть X — произвольное множество. Пусть $\sigma = \{M\}$ — произвольное семейство подмножеств множества X; объединение всех $M \in \sigma$ назовем *телом* семейства σ и обозначим через $\tilde{\sigma}$, так что $\tilde{\sigma} \subseteq X$. Если E — произвольное подмножество множества X, то через σ_E обозначаем подсемейство семейства σ, состоящее из всех элементов этого семейства, пересекающихся с E.

Множество $\tilde{\sigma}_E$ называется *звездой* множества E относительно семейства σ и обозначается часто через $\text{Зв}_\sigma E$; если при этом E

состоит из единственной точки $x \in X$, то пишут $Зв_\sigma x$ и говорят о *звезде точки* x относительно семейства σ; при этом $Зв_\sigma x = \Lambda$, если $x \in X \setminus \tilde{\sigma}$.

Всякое семейство $\sigma = \{M\}$ определяет семейство $\sigma^* = \{Зв_\sigma x\}$, элементами которого являются звезды всевозможных точек $x \in X$ относительно семейства σ. Очевидно, семейства σ и σ^* имеют одно и то же тело $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^*$.

Семейство σ называется *покрытием* множества $X_0 \subseteq X$, если $X_0 \subseteq \tilde{\sigma}$. Чаще всего мы будем рассматривать покрытия всего множества X, т. е. семейства множеств $\sigma = \{M\}$, для которых $\tilde{\sigma} = X$. В этом случае *подпокрытием* покрытия σ называется всякое подсемейство $\sigma_0 \subseteq \sigma$, для которого $\tilde{\sigma}_0 = X$.

Кратностью семейства множеств σ в данной точке $x \in X$ — коротко $кр_x \sigma$ — называется мощность множества всех элементов σ, содержащих точку x. Семейство называется *конечнократным* или *точечно конечным*, если для любого $x \in X$ число $кр_x \sigma$ конечно. Семейство множеств σ называется *звездно конечным* (*звездно счетным*), если каждый элемент семейства пересекается лишь с конечным (счетным) числом элементов этого семейства.

Пусть $\alpha = \{A\}$ и $\beta = \{B\}$ — покрытия одного и того же множества X. Будем говорить, что покрытие β *вписано* в покрытие α, если всякий элемент B покрытия β содержится хотя бы в одном элементе A покрытия α. В частности, покрытие β вписано в покрытие α, если β есть подпокрытие покрытия α.

Понятие покрытия и близкие к нему понятия будут играть большую роль в главе 6.

§ 4. Теоремы о счетных множествах

Переходим к доказательству следующих теорем.

Теорема 1. *Всякая часть счетного множества есть либо конечное, либо счетное множество.*

Доказательство. Пусть A — счетное множество. На основании определения счетного множества мы вправе предположить, что все элементы множества A занумерованы и, следовательно, само множество может быть представлено в виде бесконечной последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \qquad (1)$$

Пусть A' есть часть множества A и a_{n_1} — первый элемент последовательности (1), являющийся вместе с тем элементом множества A'; пусть a_{n_2} будет второй такой элемент в последовательности (1) и т. д.

Возможны лишь два случая: либо мы после конечного числа шагов исчерпаем все множество A', которое окажется в этом случае конечным множеством, либо мы получим бесконечную последовательность

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \ldots,\ a_{n_k},\ \ldots,$$

состоящую из всех элементов A'. Обозначая для простоты a_{n_k} через a'_k, видим, что A' —счетное множество.

Теорема 2. *Сумма конечного или счетного числа конечных или счетных множеств есть конечное или счетное множество.* (При этом очевидно, что если хотя бы одно слагаемое бесконечно, то сумма не может быть конечной и потому есть счетное множество.)

Доказательство. Пусть данные множества суть $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n, \ldots$; обозначим их сумму через A. Обозначим через P_1 множество всех простых чисел, через P_2—множество всех чисел, являющихся квадратами простых чисел, вообще, через P_n— множество всех чисел, являющихся n-ми степенями простых чисел. Множества P_n суть дизъюнктные счетные множества.

Предположим сначала, что множества A_n дизъюнктны. Так как каждое из этих множеств конечно или счетно, то можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством A_n и множеством P_n или его частью. Но этим будет установлено взаимно однозначное соответствие между всем множеством A и некоторой частью множества всех натуральных чисел, откуда и следует, что множество A не более чем счетно.

В общем случае, когда среди множеств A_n имеются пересекающиеся множества, положим

$$A'_1 = A_1,\quad A'_2 = A_2 \setminus A'_1,\ \ldots,\ A'_n = A_n \setminus (A'_1 \cup \ldots \cup A'_{n-1}),\ \ldots$$

Множества A'_n суть дизъюнктные конечные или счетные множества, имеющие ту же сумму A, что и множества A_n, откуда следует, что A конечно или счетно.

Второе доказательство (мы даем его, простоты ради, лишь для случая счетного множества попарно не пересекающихся счетных множеств). Пусть данные счетные множества суть

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, \ldots\},\\
A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots\},\\
A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots, a_{3n}, \ldots\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_m &= \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \ldots, a_{mn}, \ldots\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Тогда множество $A = \bigcup\limits_n A_n$ может быть следующим образом записано в виде счетной последовательности:

$$a_{11};\ a_{12}, a_{21};\ a_{13}, a_{22}, a_{31};\ a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41};\ \ldots$$

Теорема 3. *Всякое бесконечное множество M содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Так как M бесконечно, мы можем найти в M два различных элемента, которые обозначим через a_1 и b_1. Но множество M не исчерпывается этими двумя элементами, так что можно найти в M элемент a_2, отличный от a_1 и b_1; M не исчерпывается также и тремя элементами a_1, b_1, a_2, так что существует четвертый элемент b_2, отличный от уже выбранных трех.

Продолжая наш процесс, мы выделим из множества M даже не одно, а два счетных множества:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\},$$

чем доказана наша теорема. То обстоятельство, что мы получили два дизъюнктных счетных множества, позволяет следующим образом усилить формулировку теоремы 3.

Всякое бесконечное множество M содержит счетное множество A, притом такое, что $M \setminus A$ есть бесконечное множество (так как $M \setminus A$ содержит счетное множество B).

Теорема 4. *Если M есть несчетное множество*), а A — конечное или счетное множество, содержащееся в M, то M и $M \setminus A$ эквивалентны между собою.*

В самом деле, множество $M \setminus A$ несчетно (так как если бы $M \setminus A$ было конечным или счетным, то на основании теоремы 2 множество $M = A \cup (M \setminus A)$ было бы конечным или счетным). На основании теоремы 3 можно выделить из множества $M \setminus A$ счетное множество A_1. Обозначим оставшуюся часть $(M \setminus A) \setminus A_1$ множества M через N. Имеем

$$M \setminus A = A_1 \cup N,$$
$$M = (A \cup A_1) \cup N.$$

Установим взаимно однозначное соответствие между счетными множествами A_1 и $A \cup A_1$, а каждый элемент множества N поставим в соответствие самому себе. Этим будет установлено взаимно однозначное соответствие между $M \setminus A$ и M, что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Присоединяя к бесконечному множеству A счетное или конечное множество B, получим множество $A \cup B$, эквивалентное множеству A.*

В самом деле, если A счетно, то $A \cup B$ счетно на основании теоремы 2 и, следовательно, эквивалентно множеству A. Если A

---

*) Существование несчетных множеств будет доказано в § 6 этой главы.

несчетно, то $A \cup B$ также несчетно; мы можем, следовательно, получить множество A отнятием от несчетного множества $A \cup B$ конечного или счетного множества B, поэтому на основании предыдущей теоремы $A \cup B$ и A эквивалентны.

Теорема 6. *Всякое бесконечное множество A содержит собственную часть A', эквивалентную всему множеству A (причем можно предположить, что $A \setminus A'$ есть бесконечное множество).*

В самом деле, если A — счетное множество, то, выделяя из него (по теореме 3) счетное подмножество A' (так, чтобы $A \setminus A'$ было бесконечно), получим сразу доказательство нашего утверждения. Если A несчетно, то, выделяя из A любое счетное множество A_0, получим часть $A_0 = A \setminus A'$, эквивалентную множеству A по теореме 4.

Так как никакое конечное множество не содержит части, эквивалентной всему множеству, то теорема 6 выражает характеристическое свойство бесконечных множеств, т. е. свойство, принадлежащее любому бесконечному множеству и лишь бесконечным множествам. Это позволяет принять свойство, выраженное теоремой 6, за определение бесконечных множеств.

Очень много приложений имеет следующая простая.

Теорема 7. *Множество P всех пар натуральных чисел*) счетно.*

Доказательство. Назовем высотою пары (p, q) натуральное число $p+q$. Очевидно, имеется ровно $n-1$ пар данной высоты n $(n > 1)$, именно

$$(1, n-1),\ (2, n-2),\ \ldots,\ (n-1, 1).$$

Поэтому, обозначая через P_n множество всех пар высоты n, видим, что множество P есть сумма счетного множества конечных множеств P_n, т. е. счетное множество.

Так как каждому положительному дробному числу взаимно однозначно соответствует несократимая дробь $\frac{p}{q}$ и, следовательно, пара натуральных чисел (p, q), то на основании теорем 7 и 1 все положительные дробные числа образуют счетное множество. Счетным является и множество всех отрицательных дробных чисел. Итак:

Теорема 8. *Множество всех рациональных (т. е. целых и дробных) чисел счетно.*

---

*) Под парой натуральных чисел понимаются два натуральных числа (не непременно различных), данных в определенном порядке. Так, (1, 2), (2, 1), (1, 1) и т. д. суть различные пары натуральных чисел.

Пара натуральных чисел есть частный случай конечной последовательности

$$p_1, p_2, \ldots, p_m$$

натуральных чисел *). Докажем общее предложение:

Теорема 9. *Множество S всех конечных последовательностей, составленных из элементов данного счетного множества D, есть счетное множество.*

Доказательство (посредством полной индукции). Из теоремы 7 вытекает, что множество пар, составленных из элементов счетного множества D, есть счетное множество. Предположим, что доказана счетность множества S_m всех последовательностей, состоящих из m элементов данного счетного множества D. Докажем, что множество S всех последовательностей, состоящих из $m+1$ элементов множества D, также счетно. В самом деле, пусть

$$D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots\}.$$

Каждой последовательности $s^{(m+1)} = (d_{i_1}, \ldots, d_{i_m}, d_k) \in S_{m+1}$ соответствует пара $(s^{(m)}, d_k)$, где $s^{(m)} = (d_{i_1}, \ldots, d_{i_m}) \in S_m$, причем различным $s^{(m+1)}$ соответствуют различные пары этого вида. Так как множество S_m всех $s^{(m)}$ счетно и может быть записано в виде $s_1^{(m)}, s_2^{(m)}, \ldots, s_i^{(m)}, \ldots$, то счетно и множество всех пар $(s_i^{(m)}, d_k)$ (взаимно однозначно соответствующих парам натуральных чисел индексов i, k), а значит, и множество всех $s^{(m+1)}$.

Так как каждое S_m по доказанному счетно, то счетно и множество S, что и требовалось доказать.

Из теоремы 9 вытекает ряд следствий. Назовем точку плоскости (а также трехмерного и вообще n-мерного пространства) *рациональной*, если все ее координаты суть рациональные числа. Очевидно, рациональная точка n-мерного пространства может быть рассматриваема как последовательность n рациональных чисел. Поэтому из теоремы 9 и счетности множества всех рациональных чисел вытекает

Теорема 10. *Множество всех рациональных точек n-мерного пространства счетно.*

Назовем «рациональной окружностью» (а также рациональной сферой трехмерного, вообще n-мерного пространства) окружность (или сферу), центр и радиус которой рациональны. Таким образом, рациональные окружности находятся во взаимно однозначном соответствии с тройками (x, y, r) рациональных чисел (x и y суть координаты центра, а r — радиус). Отсюда и из аналогичных соображений для пространства следует, что *множество всех рациональных окружностей* (а также множество всех рациональных сфер) *счетно*.

*) Строго говоря, последовательность из n (каких угодно) чисел $f_1, f_2, \ldots, f_n$ есть функция, определенная на множестве первых n натуральных чисел, со значениями $f_1 = f(1)$, $f_2 = f(2)$, $\ldots$, $f_n = f(n)$.

Точно так же доказывается и

Теорема 11. *Множество всех многочленов*

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (2)$$

с рациональными коэффициентами счетно.

В самом деле, эти многочлены взаимно однозначно соответствуют конечным последовательностям

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

рациональных чисел.

Комплексное (в частности, действительное) число ξ называется, как известно, *алгебраическим*, если существует многочлен (2) с рациональными коэффициентами, обращающийся в нуль при подстановке $x = \xi$. Обозначая через $A(P)$ множество всех корней данного многочлена $P(x)$ с рациональными коэффициентами, видим, что множество всех алгебраических чисел есть сумма счетного множества конечных множеств $A(P)$, т. е. счетное множество. Итак:

Теорема 12 (Кантор). *Множество всех алгебраических чисел счетно.*

Во второй главе будет доказано, что множество всех действительных чисел несчетно. Называя комплексное (в частности, действительное) число *трансцендентным*, если оно не является алгебраическим, получим в качестве следствия из теорем 12 и 5 теорему о несчетности множества всех трансцендентных действительных (а значит, и подавно комплексных) чисел.

§ 5. Понятие о частично упорядоченном и (линейно) упорядоченном множестве

В предыдущем параграфе, а также еще в курсе элементарной алгебры читатель имел случай познакомиться с множествами, элементы которых рассматриваются в определенном порядке.

Определение 5. Множество X, состоящее из каких угодно элементов, называется *частично упорядоченным*, если в нем установлено «отношение порядка», т. е. для некоторых пар x, x' его (различных) элементов известно, что один из них предшествует другому, например, элемент x предшествует элементу x', что записывается так:

$$x < x' \quad \text{или} \quad x' > x.$$

При этом предполагается, что отношение порядка удовлетворяет следующему *условию транзитивности:*

Если $x < x'$ и $x' < x''$, то $x < x''$.

Если в данном частично упорядоченном множестве X отношение порядка установлено для любых двух различных элементов, т. е. для любых двух различных элементов x, x' один предшествует другому, т. е. верно одно и только одно из двух отношений $x < x'$ или $x > x'$, то частично упорядоченное множество называется *линейно упорядоченным* или просто *упорядоченным*.

Частично упорядоченное множество называется *направленным*, если для любых его двух элементов x, x' существует третий x'', который следует как за x, так и за x': $x'' > x$, $x'' > x'$.

Понятие конечного упорядоченного множества совпадает с понятием конечной последовательности, состоящей из различных элементов (откуда, между прочим, следует, что множество всех конечных упорядоченных множеств, составленных из элементов данного счетного множества, счетно).

Простейшими примерами бесконечных упорядоченных множеств являются множество всех целых чисел и множество всех рациональных чисел; в том и в другом множестве элемент x считается предшествующим элементу x', если $x < x'$; этот порядок в множестве рациональных, в частности целых, чисел называется «естественным».

Множество всех действительных чисел (числовая прямая) также может служить примером упорядоченного множества.

Важно с самого начала заметить, что одно и то же множество можно упорядочить многими различными способами, так что получатся различные упорядоченные множества. Так, например, натуральные числа можно упорядочить «естественным образом», так что получится последовательность

$$1, 2, 3, 4, \ldots;$$

но можно упорядочить по возрастанию отдельно все нечетные числа и отдельно все четные и считать всякое нечетное число предшествующим всякому четному. Получим упорядоченное множество

$$1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots$$

Можно также занумеровать каким-нибудь способом все рациональные числа в последовательность

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

и положить $r_n < r_{n'}$, если $n < n'$.

Множество всех частичных порядков на данном множестве X само упорядочено естественным образом. Говорят, что порядок $<_1$ сильнее порядка $<_2$ (или порядок $<_2$ слабее порядка $<_1$), если для всяких $x, y \in X$ из $x <_2 y$ следует $x <_1 y$.

Как следует из определения, всякое (линейно) упорядоченное множество является и частично упорядоченным. Примером частично, но не линейно упорядоченного множества может служить множество X всех пар натуральных чисел со следующим порядком: $(x, y) < (x', y')$ — тогда и только тогда, когда одновременно $x < x'$ и $y < y'$. Одним из важнейших примеров частично упорядоченных множеств является множество всех подмножеств данного множества X, упорядоченное по включению:

$$M < M', \quad \text{если} \quad M \subset M' \subseteq X.$$

Определение 6. Если в данном упорядоченном множестве X имеем $a < x < b$, то говорим, что *элемент x лежит между элементами a и b. Множество всех элементов x, лежащих между элементами a и b, называется интервалом $(a; b)$ упорядоченного множества X*. Если к интервалу $(a; b)$ прибавить оба его «конца», т. е. элементы a и b, то получим *сегмент* $[a; b]$. В применении к числовой прямой получаем известные из элементов анализа понятия интервала (промежутка) и сегмента (отрезка) действительных чисел *).

Упорядоченное множество может содержать пустые интервалы. Так, например, в упорядоченном множестве всех натуральных чисел все интервалы вида $(n; n+1)$ пусты.

Элементы x и x' упорядоченного множества X называются *соседними*, если интервал $(x; x')$ пуст.

Если элемент a частично упорядоченного множества X таков, что для всякого $x \in X$, $x \neq a$, имеем $a \not> x$, то говорим, что a — первый (или наименьший) элемент упорядоченного множества X. Если, наоборот, для всех $x \in X$, $x \neq a$, имеем $x \not> a$, то a называется последним (или наибольшим) элементом упорядоченного множества X. Очевидно, во всяком линейно упорядоченном множестве имеется не более одного первого и не более одного последнего элемента. В то же время в частично, но не линейно упорядоченном множестве может быть много первых и последних элементов. Так, например, в приведенном выше частично упорядоченном множестве X пар натуральных чисел все пары вида $(1, y)$ и $(x, 1)$ будут первыми элементами. В любом сегменте $[a; b]$ упорядоченного множества X (в частности, в любом сегменте числовой прямой) элемент a является первым, а элемент b — последним. В интервале $(a; b)$ числовой прямой нет ни первого, ни последнего элемента. В множестве всех неотрицательных действительных (соответственно рациональных, соответственно целых) чисел нуль есть первый элемент, а последнего элемента нет. В множестве всех неположительных чисел нуль есть последний элемент.

Определение 7. Взаимно однозначное отображение f упорядоченного множества X на упорядоченное множество Y называется *соответствием подобия* или *подобным соответствием*,

---

*) Прибавляя к интервалу $(a; b)$ только один из его концов, получим *полуинтервалы* (*полусегменты*) $[a; b) = a \cup (a; b)$ и $(a; b] = (a; b) \cup b$.

если оно сохраняет порядок (т. е. если из $x<x'$ в X всегда следует, что $f(x)<f(x')$ в Y).

Два упорядоченных множества называются *подобными* (или *одинаково упорядоченными*, или имеющими один и тот же *порядковый тип*), если одно из них можно подобно отобразить на другое.

Примеры подобных упорядоченных множеств.

1. Любые два конечных линейно упорядоченных множества X и Y, состоящие из одного и того же числа s элементов, подобны между собой. В самом деле, выпишем все элементы каждого из множеств X и Y в том порядке, который дан в этих множествах:

$$x_1<x_2<\ldots<x_s,$$
$$y_1<y_2<\ldots<y_s.$$

Ставя в соответствие элементу x_i элемент y_i, получим, очевидно, подобное соответствие между X и Y.

2. Указанное в § 3 (пример 4, рис. 1) взаимно однозначное соответствие между всей числовой прямой и ее интервалом $(-1; 1)$ является соответствием подобия. Линейная подстановка $y=\frac{x-a}{b-a}$ устанавливает взаимно подобное соответствие между интервалами $a<x<b$ и $0<y<1$ числовой прямой. Итак, все интервалы числовой прямой подобны между собою и подобны всей числовой прямой. Точно так же подобны между собою и все сегменты числовой прямой.

Весьма важным является следующее замечание. В определении 7 два подобных между собою упорядоченных множества названы множествами одного и того же порядкового типа. Таким образом, *понятие порядкового типа получается путем абстракции из понятия класса подобных между собою упорядоченных множеств* так же, как понятие мощности (или «количественного» типа множества) получилось путем абстракции из понятия класса эквивалентных между собою множеств.

Замечание. Класс упорядоченных множеств, подобных данному, так же как и класс количественно эквивалентных между собою множеств (т. е. множеств, имеющих одну и ту же мощность), нельзя рассматривать как логически законченное образование, как множество, все элементы которого действительно даны. В самом деле, нельзя мыслить себе совокупность всех вообще множеств, эквивалентных или подобных данному, хотя бы уже потому, что совершенно необозримой является совокупность всех предметов, которые вообще могут быть элементами каких бы то ни было множеств. Когда в математике говорят о множестве всех предметов, обладающих каким-то свойством, то естественно требовать, чтобы заранее было дано какое-то вполне определенное множество, элементами которого и являются рассматриваемые предметы; иначе легко прийти к таким не только бессодержательным, но и противоречивым понятиям, как, например, понятие «множества всех множеств», из существования которого можно сделать любой нелепый вывод (множество всех множеств должно было бы содержать себя самого как элемент, содержать в качестве подмножества множество всех своих подмножеств и т. д.). С другой стороны, должная осторожность в пользовании словом «все» в только что приведенном смысле (т. е. применение этого слова лишь к элементам заранее данных множеств) практически (насколько можно судить по опыту истории теории множеств) позволяет избежать так называемых «парадоксов» этой теории.

Очевидно, два подобных между собой упорядоченных множества и подавно эквивалентны между собою, т. е. имеют одну и ту же мощность. Поэтому можно говорить о *мощности данного порядкового типа*, понимая под этим мощность любого множества этого типа. Так как два конечных упорядоченных множества подобны между собою тогда, когда они состоят из одного и того же числа элементов, то порядковые типы конечных упорядоченных множеств находятся во взаимно однозначном соответствии с их количественными числами (мощностями) и могут быть отождествлены с этими последними. Так в арифметике всегда и делается: натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, ... выражают в одно и то же время как количество элементов («мощность») конечных множеств, так и порядковый тип конечных упорядоченных множеств. Совершенно иначе обстоит дело даже с простейшими бесконечными множествами, а именно со счетными множествами: все счетные множества по самому своему определению имеют одну и ту же мощность (мощность множества всех натуральных чисел, обозначаемую через $\aleph_0$ *)). Между тем в главе 3 будет доказано, что число различных порядковых типов счетных упорядоченных множеств не только бесконечно, но даже несчетно.

Подмножество M упорядоченного множества X назовем *порядково выпуклым*, если вместе с любыми двумя элементами a, b $(a < b)$ множество M содержит ограниченный ими сегмент $[a; b]$. Пусть Y — произвольное подмножество упорядоченного множества X. Множество $C \subseteq Y$ назовем *порядковой компонентой* множества Y, если C порядково выпукло и не существует порядково выпуклого множества $C' \subseteq Y$, содержащего множество C в качестве собственного подмножества.

Рассмотрим следующее отношение $\sim$ на множестве Y:

1. Для всякой точки $x \in Y$ всегда $x \sim x$.

2. Если x, $y \in Y$ и $x \neq y$, то $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $[x; y] \subseteq Y$, если $x < y$, или $[y; x] \subseteq Y$, если $y < x$.

Читатель без труда проверит, что отношение $\sim$ есть отношение эквивалентности на множестве Y; следовательно, Y распадается на классы эквивалентности. Пусть C — произвольный класс эквивалентности, a, $b \in C$ и $a < b$. Из определения отношения эквивалентности вытекает, что $[a; b] \subseteq Y$. Для всякой точки $x \in (a; b)$ имеем $[a; x] \subseteq Y$; следовательно, $a \sim x$ и $x \in C$. Поэтому

*) $\aleph$ есть первая буква древнееврейского алфавита, называемая «алеф»; выражение $\aleph_0$ читается: «алеф-нуль».

множество C порядково выпукло. В то же время всякое порядково выпуклое множество содержится в каком-то классе эквивалентности. Таким образом, множество C является порядковой компонентой множества Y. Итак, нами доказана

Теорема 13. *Всякое подмножество Y упорядоченного множества X распадается в дизъюнктную сумму порядковых компонент.*

Упорядоченным множествам посвящена третья глава этой книги. Здесь же мы ограничимся сделанными элементарными замечаниями.

§ 6. О сравнении мощностей

Уже при самом определении мощности мы говорили о том, что понятие мощности является — в случае бесконечных множеств — обобщением понятия количества элементов конечного множества. Однако одно из основных свойств количества заключается в том, что два количества либо равны, либо одно из них больше другого. Поэтому естественно возникает вопрос о сравнимости мощностей.

Пусть даны два множества A и B. Логически возможны следующие случаи:

1. Существует взаимно однозначное соответствие между A и B.

2. Существует взаимно однозначное соответствие между одним множеством, например A, и собственною частью другого множества, B, и в то же время нет взаимно однозначного соответствия между множеством B и частью множества A.

3. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством A и собственной частью множества B, а также взаимно однозначное соответствие между множеством B и собственной частью множества A.

4. Не существует ни взаимно однозначного соответствия между A и частью B, ни взаимно однозначного соответствия между B и частью A.

Если A и B — конечные множества, то третий и четвертый случаи невозможны. В самом деле, если эти множества состоят из одного и того же числа элементов, то осуществляется первый случай, а если из разного — то второй.

В § 6 гл. 3 будет доказано, что четвертый случай невозможен также и в применении к бесконечным множествам. Однако доказательство это опирается на аксиому (так называемую аксиому Цермело (Zermelo)), которая в одних системах построения теории множеств принимается, а в других нет.

Что касается третьего случая, то для бесконечных множеств он может осуществляться; например, если A и B — счетные множества, то для них одновременно осуществляются и первый и третий случаи. Мы сейчас докажем, что из выполнения третьего случая всегда следует выполнение первого. Для бесконечных множеств, как легко выводится из теоремы 6, всегда из первого случая следует третий.

Итак, переходим к доказательству следующего предложения:

Теорема 14 (Кантор—Бернштейн). *Если из двух множеств каждое эквивалентно части другого, то эти два множества эквивалентны между собою.*

Доказательство. Пусть A эквивалентно множеству $B_1 \subset B$ и в то же время B эквивалентно множеству $A_1 \subset A$.

В силу взаимно однозначного соответствия, существующего по предположению между B и A_1, множеству B_1 соответствует некоторое подмножество (очевидно, собственное) A_2 множества A_1. Итак,

$$\left.\begin{array}{l} A \supset A_1 \supset A_2, \\ A \text{ эквивалентно } A_2, \\ B \text{ эквивалентно } A_1. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Если мы докажем, что в условиях (1) множество A_1 эквивалентно A (и A_2), то будет доказана и теорема Кантора—Бернштейна.

Рассмотрим какое-нибудь взаимно однозначное отображение f множества A на множество A_2. При отображении f

$$\begin{array}{lccl} A & \text{отображается на} & & A_2, \\ A_1 \subset A & » \quad » & \text{некоторое} & A_3 \subset A_2, \\ A_2 \subset A_1 & » \quad » & » & A_4 \subset A_3, \\ A_3 \subset A_2 & » \quad » & » & A_5 \subset A_4 \end{array}$$

и т. д. до бесконечности.

В силу того же взаимно однозначного отображения f, очевидно,

$$\begin{array}{lcl} A \setminus A_1 & \text{отображается на} & A_2 \setminus A_3, \\ A_1 \setminus A_2 & » \quad » & A_3 \setminus A_4, \\ A_2 \setminus A_3 & » \quad » & A_4 \setminus A_5, \\ A_3 \setminus A_4 & » \quad » & A_5 \setminus A_6, \\ A_4 \setminus A_5 & » \quad » & A_6 \setminus A_7, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

откуда следует эквивалентность множеств

$$\left.\begin{array}{l} (A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots, \\ (A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup (A_6 \setminus A_7) \cup \ldots \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Положим теперь

$$D = A \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$$

Тогда легко проверяются тождества

$$\left.\begin{aligned} A &= D \cup (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots, \\ A_1 &= D \cup \qquad\qquad\quad\; (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

которые можно, очевидно, записать и так:

$$\left.\begin{aligned} A &= [D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots] \cup \\ &\qquad \cup [(A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots], \\ A_1 &= [D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots] \cup \\ &\qquad \cup [(A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \ldots]. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Но в правых частях обоих этих равенств в первой квадратной скобке заключено одно и то же множество, тогда как во второй квадратной скобке каждого из этих равенств заключены эквивалентные множества (2); устанавливая между этими двумя множествами (2) взаимно однозначное соответствие и заставляя соответствовать себе самому каждый элемент множества

$$D \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \ldots,$$

мы получим взаимно однозначное соответствие между множествами A и A_1, что и требовалось доказать.

После того, как мы докажем в главе 3 невозможность четвертого случая, мы сможем сказать, что для двух множеств A и B могут осуществиться лишь следующие две возможности: либо множества A и B эквивалентны (имеют одну и ту же мощность), либо одно из них, например A, эквивалентно собственной части другого, B, тогда как множество B уже не эквивалентно никакой части множества A.

Во втором случае мы говорим, что мощность множества A меньше мощности множества B (или что мощность множества B больше мощности множества A).

Все предыдущие рассуждения о мощности лишь в том случае могут претендовать на реальный интерес, если существуют различные бесконечные мощности. Сейчас мы увидим, что это действительно так: мы докажем, что для каждого множества M существует множество, мощность которого больше мощности множества M.

Мы докажем даже более точное предложение:

Теорема 15. *Пусть X и Y — два произвольных непустых множества, удовлетворяющих тому единственному условию, чтобы Y состояло более чем из одного элемента. Множество всех раз-*

личных отображений множества X в множество Y имеет мощность большую, чем мощность множества X.

При этом мы, естественно, считаем два отображения f_1 и f_2 множества X в множество Y различными, если по крайней мере для одного элемента $x \in X$ элементы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ множества Y различны между собою.

Доказательство. Обозначим через Y^X множество всех отображений множества X в множество Y. В соответствии с определением неравенства мощностей мы должны доказать два утверждения:

1. Существует взаимно однозначное отображение множества X на некоторое подмножество множества Y^X.

2. Не существует взаимно однозначного отображения множества X на все множество Y^X.

Для доказательства первого утверждения выберем в множестве Y два каких-нибудь различных элемента y' и y'' и для каждого элемента x_0 множества X построим отображение f_{x_0} множества X в множество Y следующим способом: образ данного элемента x_0 при отображении f_{x_0} есть $f_{x_0}(x_0) = y'$, а образ всякого отличного от x_0 элемента $x \in X$ при отображении f_{x_0} есть $f_{x_0}(x) = y''$. Различным элементам x_1, x_2 множества X соответствуют различные отображения; в самом деле,

$$f_{x_1}(x_1) = y',$$
$$f_{x_2}(x_1) = y''.$$

Итак, нами установлено взаимно однозначное соответствие между множеством X и частью множества Y^X.

Докажем теперь, что не существует никакого взаимно однозначного соответствия между множеством X и множеством Y^X.

Предположим, что такое соответствие существует, и обозначим через f^ξ тот элемент множества Y^X, который в силу этого соответствия отвечает элементу ξ множества X. Искомое противоречие мы получим, если найдем элемент f множества Y^X, отличающийся от всех f^ξ.

Такой элемент f, т. е. такое отображение множества X в множество Y, мы построим следующим образом. Рассмотрим произвольный элемент ξ множества X; образ этого элемента при отображении f^ξ есть элемент $f^\xi(\xi)$ множества Y. Определим теперь $f(\xi)$, положив $f(\xi) = \eta$, где η — произвольный элемент множества Y, выбранный под единственным условием, чтобы он был отличен от элемента $f^\xi(\xi)$ (это условие всегда выполнимо, так как, по предположению, множество Y содержит по крайней мере два элемента).

Мы утверждаем, что отображение f отлично от всех отображений f^ξ. В самом деле, если бы f совпадало с некоторым определенным f^{ξ}, то, в частности, для элемента $\xi \in X$ мы имели бы

$$f(\xi)=f^{\xi}(\xi),$$

вопреки определению отображения f. Теорема этим доказана.

Замечание 1. Только что изложенная теорема, принадлежащая к числу замечательнейших предложений теории множеств, доказана, и притом приведенным здесь методом, основателем теории множеств Кантором. Самый этот метод доказательства известен под названием *канторова диагонального процесса.*

Рассмотрим различные частные случаи теоремы Кантора.

Прежде всего, пусть множество Y состоит из двух элементов, положим из элементов 0 и 1. Тогда каждому отображению f множества X в множество Y соответствует разбиение множества X на два подмножества без общих элементов: на подмножество X_0^f, состоящее из всех тех элементов $x \in X$, для которых $f(x)=0$, и на подмножество X_1^f, состоящее из остальных элементов множества X (т. е. из тех $x \in X$, для которых $f(x)=1$). Сосредоточив свое внимание на подмножествах X_0^f, мы можем сказать: каждому отображению f множества X в множество Y, состоящее из двух элементов 0 и 1, соответствует определенное подмножество X_0 множества X (а именно подмножество X_0^f). При этом каждое подмножество X_0 множества X поставлено в соответствие вполне определенному отображению множества X в множество Y (состоящее из двух элементов 0 и 1), именно отображению f, определяемому условием $f(x)=0$, если $x \in X_0$, $f(x)=1$, если $x \in X \setminus X_0$. Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех подмножеств множества X и множеством всех отображений множества X в множество, состоящее из двух элементов 0 и 1 *). Так как это множество отображений имеет мощность большую, чем множество X, то доказана

Теорема 16. *Множество всех подмножеств произвольного непустого множества X имеет мощность большую, чем мощность множества X.*

Замечание 2. Утверждение теоремы 16 верно и для пустого множества X. В этом случае множество всех подмножеств множества X содержит один элемент — пустое множество — и, значит, имеет мощность 1. В то же время само множество X имеет мощность 0.

Замечание 3. Число всех отображений непустого конечного множества X в непустое конечное множество Y равно, как нетрудно доказать, b^a, где a — число элементов множества X, а b — число элементов множества Y. В частности, число всех

*) При этом соответствии двум несобственным подмножествам множества X отвечают два отображения, из которых одно отображает все множество X на элемент 1, а другое — на элемент 0.

отображений непустого конечного множества X в множество, состоящее из двух элементов (или число всех подмножеств конечного множества X), равно 2^a. Поэтому и в случае бесконечных множеств мощность множества отображений X в Y обозначается через b^a, где a и b суть соответственно мощности множеств X и Y. В частности, мощность множества всех подмножеств множества X обозначается через 2^a, где a—мощность множества X. Эти обозначения логически включаются в общую теорию действий над мощностями, где рассматривается не только возведение в степень, но и общее действие умножения мощностей (при любой мощности множества сомножителей), а также более простое действие сложения мощностей. См. об этом § 6 гл. 3.

Рассмотрим множество всех отображений множества N всех натуральных чисел в множество, состоящее из двух элементов 0 и 1. Всякое такое отображение, ставя каждому натуральному числу в соответствие число n, равное 0 или 1, приводит к построению бесконечной последовательности

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots,\ i_n,\ \ldots,\ i_n = {0 \atop 1}, \tag{4}$$

или бесконечной двоичной дроби

$$0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n,\ \ldots,\ i_n = {0 \atop 1},$$

и обратно, всякая такая последовательность, всякая бесконечная двоичная дробь определяет отображение f, где $f(n) = 0$ или 1. Итак, множество всех бесконечных двоичных дробей имеет ту же мощность, что и множество всех подмножеств натурального ряда.

Обозначив (как было сделано выше) мощность счетных множеств через $\aleph_0$, мы можем сказать, что мощность множества всех последовательностей (4) есть $2^{\aleph_0}$.

Итак, множество всех бесконечных двоичных дробей эквивалентно множеству всех подмножеств натурального ряда и имеет поэтому мощность $2^{\aleph_0}$.

Определение 8. *Мощность* $2^{\aleph_0}$ называется *мощностью континуума* и обозначается через $\mathfrak{c}$; она—несчетна ($2^{\aleph_0} > \aleph_0$).

Мы встретимся с этой мощностью в конце главы 2 (§ 4).

Глава вторая

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Дедекиндовское определение иррационального числа

В этой главе будет построена теория действительных (вещественных) чисел в предположении, что известны рациональные числа и арифметические операции над ними. Множество R_0 всех рациональных чисел мы собираемся пополнить новыми математическими объектами, называемыми иррациональными числами, с тем чтобы получить множество всех действительных чисел с его алгеброй и топологией. Последняя будет в своем месте определена.

Множество R_0 есть упорядоченное множество без пустых интервалов (каковы бы ни были два различных рациональных числа r' и r'', между r' и r'' существует бесконечно много рациональных чисел r, например: $r_1 = \frac{1}{2}(r' + r'')$, $r_2 = \frac{1}{2}(r' + r_1)$, $r_3 = \frac{1}{2}(r' + r_2)$, ...).

После этого предварительного замечания перейдем к изложению дедекиндовского определения иррационального числа.

Назовем *сечением* упорядоченного множества X всякое разбиение его на два непересекающихся подмножества A и B такие, что для любых элементов $x \in A$, $y \in B$ имеем $x < y$. Сечение (A, B) называется собственным, если оба множества A и B непусты. Как правило, ниже под сечением будем понимать собственное сечение, не оговаривая этого особо. Но иногда у нас будет возникать потребность в привлечении и несобственных сечений.

Множество A называется *нижним* (или *левым*), а множество B — *верхним* (или *правым*) *классом*.

В этом параграфе мы будем рассматривать только сечения в (*естественно* *) упорядоченном) множестве всех рациональных чисел.

---

*) То есть по величине (см. стр. 24).

Примеры сечений.

1. Если r есть произвольное рациональное число, то, принимая за множество A множество всех рациональных $a \leqslant r$, а за B — множество всех остальных рациональных чисел, получаем сечение.

Очевидно, r есть наибольшее число среди всех чисел, принадлежащих к нижнему классу A.

2. Пусть r — произвольное рациональное число; относим к классу A все рациональные числа, меньшие чем r, а к классу B — все остальные рациональные числа. Таким образом, опять установлено сечение, причем r есть наименьшее число среди всех чисел класса B.

3. Отнесем к классу A все отрицательные рациональные числа, число 0 и все положительные рациональные числа, квадрат которых меньше 2. Отнесем к классу B все остальные рациональные числа. Так как не существует рационального числа, квадрат которого равен 2 *), то квадраты всех рациональных чисел, принадлежащих к B, больше 2.

Докажем, что в A нет наибольшего, а в B — наименьшего числа.

Пусть r — произвольное число из класса A, так что $r^2 < 2$. Тогда $r + \frac{1}{n}$ при достаточно большом n также будет содержаться в этом классе. Действительно, предполагая, что $n > 1$, имеем

$$\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} < r^2 + \frac{2r+1}{n},$$

и для того, чтобы правая часть была меньше чем 2, достаточно взять $n > \frac{2r+1}{2-r^2}$. Таким образом, каково бы ни было $r \in A$, при достаточно большом n также $r + \frac{1}{n} \in A$, т. е. в A нет наибольшего числа.

Подобным же образом доказывается, что в B нет наименьшего числа.

Теорема 1. *Для всякого сечения* (A, B) *в множестве всех рациональных чисел имеются лишь следующие три возможности:*

---

*) Так как $r^2 = |r|^2$, то достаточно показать, что не существует положительного рационального числа, квадрат которого равен 2. Целого числа такого наверное не существует, так как $1^2 = 1$, а для $n \geqslant 2$ будет $n^2 \geqslant 4$. Пусть существует несократимая дробь $\frac{p}{q}$ такая, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Тогда $p^2 = 2q^2$ есть четное число. Так как квадрат нечетного числа есть нечетное число, то p есть четное число, $p = 2p'$ (где p' — целое), т. е. $4p'^2 = 2q^2$, или $q^2 = 2p'^2$; значит, q — четное число и дробь $\frac{p}{q}$ сократима. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

1) *либо в нижнем классе A имеется наибольшее число r (тогда в верхнем классе нет наименьшего числа);*

2) *либо в верхнем классе B имеется наименьшее число r (тогда в нижнем классе нет наибольшего числа);*

3) *либо, наконец, ни в нижнем классе нет наибольшего, ни в верхнем классе нет наименьшего числа.*

Доказательство. Четвертый логически возможный случай: в A есть наибольший элемент a, и в B есть наименьший элемент b—не может осуществиться, так как тогда между числами a и b не было бы никакого рационального числа.

Определение 1. В случаях 1) и 2) говорят, что сечение (A, B) определяет рациональное число r; в случае 3) говорят, что сечение определяет некоторое *иррациональное число*.

Иногда говорят, что иррациональное число есть сечение. Однако в других построениях теории действительных чисел по существу те же самые иррациональные числа (например, $\sqrt{2}$ или π) связываются с совсем другими образованиями, например бесконечными десятичными дробями; при этом иногда тоже говорят, что иррациональное число есть бесконечная (непериодическая) десятичная дробь Мы предпочитаем в обоих случаях говорить, что иррациональное число лишь определяется сечением или бесконечной десятичной дробью и т. п.

Введем определения понятий «больше» и «меньше» в применении к иррациональным числам.

Пусть у нас есть иррациональное число ξ. Это означает, что у нас есть сечение (A_ξ, B_ξ) в множестве всех рациональных чисел. Введем следующее определение: всякое иррациональное число ξ больше всякого $a \in A_\xi$ и меньше всякого $b \in B_\xi$.

Определение 2. Иррациональное число ξ называется *положительным*, если $\xi > 0$, и *отрицательным*, если $\xi < 0$.

Предположим, мы имеем два иррациональных числа ξ и η, определенных сечениями (A_ξ, B_ξ) и (A_η, B_η). Возможны три случая:

1. $A_\xi = A_\eta$; тогда $B_\xi = B_\eta$ и $\xi = \eta$.

2. Имеется число $a \in A_\xi$, не принадлежащее к A_η (т. е. $a \in A_\xi \cap B_\eta$). Тогда *) $A_\eta \subset A_\xi$, и мы полагаем $\eta < \xi$.

3. Имеется число $a \in A_\eta$, не принадлежащее к A_ξ (т. е. $a \in A_\eta \cap B_\xi$) Тогда $A_\xi \subset A_\eta$, и мы полагаем $\xi < \eta$.

Легко проверить, что эти определения превращают множество R_1 всех *действительных* (т. е рациональных и иррациональных) чисел в упорядоченное множество.

Теорема 2. *Среди действительных чисел нет наибольшего и нет наименьшего числа.*

---

*) Всякое $x \in A_\eta$, будучи меньше чем a, содержится в A_ξ, т. е. $A_\eta \subset A_\xi$.

Доказательство. Пусть ξ есть наибольшее число; ξ не может быть рационально, так как $\xi+1>\xi$. Если ξ иррационально, то пусть (A, B) есть определяющее ξ сечение и $b\in B$; тогда $b>\xi$. Аналогично доказывается, что нет наименьшего действительного числа.

Теорема 3. *Каковы бы ни были два различных действительных числа x и $y\neq x$, можно найти бесконечно много рациональных чисел, заключенных между ними.*

Достаточно показать, что между каждыми двумя действительными числами существует хотя бы одно рациональное число.

Теорема верна, если x и y оба рациональны.

Пусть одно из них, например x, иррационально, $x=(A, B)$, а другое рационально. Если $y>x$, то $y\in B$ и в B нет наименьшего числа. Поэтому в B имеется (рациональное) число y', меньшее чем y и большее чем x. Если $y<x$, то $y\in A$ и в A имеется y', большее чем y и меньшее чем x.

Пусть, наконец, оба числа x и y иррациональны. Так как они различны, то существует хоть одно рациональное число, принадлежащее к нижнему классу одного сечения и к верхнему классу другого сечения и, следовательно, меньшее, чем одно из этих иррациональных чисел, и большее, чем другое.

Теорема 4. *Пусть дано иррациональное число $\xi=(A, B)$. Каково бы ни было положительное число ε, можно найти два рациональных числа a и b, удовлетворяющих неравенствам $a<\xi<b$ и $b-a<\varepsilon$.*

Достаточно доказать теорему для рационального ε. В самом деле, если бы ε было иррационально, то достаточно было бы взять положительное рациональное число $\varepsilon'<\varepsilon$ (такое ε' существует на основании предыдущей теоремы). Итак, пусть ε рационально. Возьмем произвольно $a_0\in A$ и $b_0\in B$ и построим ряд рациональных чисел:

$$a_0,\ a_1=a_0+\frac{\varepsilon}{2},\ \ldots,\ a_n=a_0+n\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Возьмем $n>\frac{2(b_0-a_0)}{\varepsilon}$; тогда $a_n>b_0$, $a_n\in B$. Пусть a_k, $k>1$, есть первое среди чисел (1), принадлежащее к B. Тогда $a_{k-1}\in A$, $a_k\in B$, $0<a_k-a_{k-1}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

§ 2. Сечения в множестве действительных чисел. Верхняя и нижняя грани

Теорема 5. *Каково бы ни было сечение (A, B) в множестве всех действительных чисел, всегда существует либо наибольшее число в A, либо наименьшее в B, причем одна из этих возможностей исключает другую.*

Доказательство. Обозначим через A', соответственно B', множество рациональных чисел, принадлежащих к A, соответственно к B. Таким образом, имеем сечение (A', B') множества рациональных чисел. Возможны три случая:

1) либо есть рациональное число, наибольшее в A';

2) » » » » , наименьшее в B';

3) либо в A' нет наибольшего, а в B' нет наименьшего числа.

Пусть ξ есть наибольшее число в A'. Докажем, что ξ есть наибольшее число и в A. Действительно, в противном случае в A существовало бы некоторое $a > \xi$; взяв рациональное a' между ξ и a, получили бы противоречие, так как $a' \in A'$, $a' > \xi$.

Совершенно аналогично доказывается, что число, наименьшее в B', является наименьшим и в B.

Остается рассмотреть третий случай. В этом случае сечение (A', B') определяет иррациональное число ξ. Так как каждое действительное число содержится либо в A, либо в B, то и ξ содержится в одном из двух этих множеств. Пусть, например, $\xi \in A$. Если бы в A существовало $a > \xi$, то, беря рациональное a' между ξ и a, имели бы $a' \in A'$ и, значит, $a' < \xi$ (вопреки выбору числа a').

Если бы $\xi \in B$, то совершенно так же мы доказали бы, что ξ есть наименьшее в B. Наконец, если бы в A было наибольшее, а в B — наименьшее число, то получили бы противоречие с теоремой 3.

Замечание о геометрическом изображении действительных чисел. Уже в элементарной алгебре, исходя из наивного представления о прямой линии, показывается, как, взяв на прямой две точки — нулевую точку (или «начало координат») и единичную, — можно нанести на этой прямой сетку так называемых рациональных точек, находящихся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами. Этот процесс построения множества всех рациональных точек прямой может быть строго обоснован, т. е. выведен из системы аксиом элементарной геометрии, в рассмотрение которых мы здесь входить не будем. Эти же аксиомы позволяют поставить остальные (т. е. не рациональные) точки прямой во взаимно однозначное соответствие с иррациональными числами, так что в результате устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел. Установив раз навсегда такое соответствие, мы говорим о «числовой прямой». Впрочем, читатель может ограничиться тем, чтобы попросту называть действительные числа точками числовой прямой и в рассуждениях о них пользоваться геометрическим языком. Так, например, вместо того, чтобы говорить, что действительное число a меньше действительного числа b, мы будем часто говорить, что точка a лежит левее точки b, и т. п.

Определение 3. Множество M, состоящее из действительных чисел, называется *ограниченным сверху* (соответственно *снизу*), если существует такое число c, что все элементы этого множества меньше (соответственно больше) чем c. Множество называется *ограниченным*, если оно одновременно ограничено и сверху и снизу.

Пусть мы имеем непустое множество M, ограниченное сверху. Обозначим через B множество всех точек числовой прямой, лежащих вправо от всех точек, образующих множество M, и через A множество всех действительных чисел, не вошедших в B. Очевидно, A состоит из всех тех точек x, для каждой из которых имеется хоть одна точка ξ множества M, удовлетворяющая условию $x \leqslant \xi$; следовательно, $M \subseteq A$.

Пусть a — произвольная точка множества A, b — произвольная точка множества B; так как $a \in A$, то существует точка $\xi \in M$ такая, что $a \leqslant \xi$; так как $b \in B$, то $\xi < b$. Следовательно, $a < b$, т. е. (A, B) есть сечение в множестве всех действительных чисел; это сечение на основании теоремы 5 определяет действительное число β_M, которое есть либо наибольшее в A, либо наименьшее в B.

Докажем, что *число* β_M *есть наименьшее из всех действительных чисел* β, *удовлетворяющих условию*:

$$\beta \geqslant \xi \quad \textit{для всех} \quad \xi \in M. \tag{1}$$

В самом деле, β_M есть либо наибольшее число в A, либо наименьшее в B. И в том и в другом случае β_M не может быть меньше никакого числа $\xi \in A$, следовательно, и подавно не может быть меньше никакого $\xi \in M$.

С другой стороны, для всякого $a < \beta_M$ можно найти a' между a и β_M; так как $a' \in A$, то существует такое $\xi \in M$, что $a' \leqslant \xi$, значит, $a < \xi$. Таким образом, β_M есть действительно наименьшее число среди всех чисел β, удовлетворяющих условию (1). Число β_M однозначно определено для всякого непустого ограниченного сверху множества M и называется *верхнею гранью* множества M.

Верхнюю грань множества M мы будем обозначать так: $\sup M$ (читается: supremum, ударение на «е»).

Верхняя грань множества в одних случаях принадлежит к множеству, а в других — нет, как видно из примеров:

1. Множество всех целых отрицательных чисел имеет своею верхнею гранью число -1, принадлежащее к этому множеству.

2. Множество всех отрицательных чисел имеет своею верхнею гранью число 0, не принадлежащее к этому множеству.

3. Интервал $(0; 1)$ имеет верхнею гранью число 1, не принадлежащее к нему.

4. Сегмент $[0; 1]$ имеет верхнею гранью число 1, принадлежащее к нему.

5. Множество M, состоящее из всех рациональных чисел, меньших единицы, имеет верхнею гранью число 1, не принадлежащее к нему.

Пусть теперь дано непустое множество M, ограниченное снизу. Отнесем к классу A все числа, которые меньше всех элементов множества M, к классу B — все остальные действительные числа. Таким образом, получаем сечение в множестве всех действительных чисел, определяющее некоторое число α_M. Рассуждениями, совершенно аналогичными тем, которые были только что проведены, мы убеждаемся в том, что *α_M есть наибольшее среди всех чисел α, удовлетворяющих условию: $\alpha \leqslant \xi$, каково бы ни было $\xi \in M$.* Число α_M называется *нижней гранью* множества M и обозначается $\inf M$ (читается: infimum, ударение на первом «i»).

Из предыдущих определений следует:

Теорема 6. *Нет ни одной точки множества M, расположенной слева от $\alpha = \inf M$, но всякий полусегмент вида $[\alpha; b)$ содержит по крайней мере одну точку $\xi \in M$.*

Теорема 7. *Нет ни одной точки множества M, расположенной справа от $\beta = \sup M$, но всякий полусегмент вида $(a; \beta]$ содержит хоть одну точку $\xi \in M$.*

Если множество M ограничено, то оно имеет и нижнюю грань α и верхнюю грань β. Сегмент $[\alpha; \beta]$ содержит все множество M и есть наименьший сегмент, содержащий это множество (другими словами, никакой сегмент, составляющий собственную часть сегмента $[\alpha; \beta]$, уже не содержит всех точек множества M).

Очевидно, если в множестве M есть наибольшее (наименьшее) число γ, то γ есть верхняя (нижняя) грань множества M.

Теорема 8. *Если M ограничено сверху и $M_1 \subseteq M$, то* $\sup M_1 \leqslant \sup M$.

В самом деле, пусть (A, B) есть сечение, определяющее $\sup M$, а (A_1, B_1) — соответствующее сечение для $\sup M_1$. Из определений классов B и B_1 следует, что $B_1 \supseteq B$, и, значит, $\sup M_1 \leqslant \sup M$.

Совершенно так же доказывается

Теорема 9. *Если M ограничено снизу и $M_1 \subseteq M$, то*

$$\inf M_1 \geqslant \inf M.$$

Следствие. *Если M состоит из чисел, меньших или равных a* (где a — произвольное действительное число), *то* $\sup M \leqslant a$.

В самом деле, множество M является частью множества A всех чисел $x \leqslant a$ и по теореме 8 $\sup M \leqslant \sup A = a$.

Аналогично, *если M состоит из чисел, бо́льших или равных a, то* $\inf M \geqslant a$.

Определение 4. *Расстоянием между двумя рациональными точками a и $b \geqslant a$ на прямой* называется число $b - a$.

Пусть имеем два действительных числа a и $b > a$. Рассмотрим множество M, состоящее из рациональных чисел, являющихся расстояниями между какими-либо двумя рациональными точками сегмента $[a;\ b]$. Верхняя грань (очевидно, ограниченного) множества M называется *расстоянием между точками a и b* и обозначается $\rho(a,\ b)$; это же число называется *длиною* сегмента $[a;\ b]$ (и интервала $(a;\ b)$).

Докажем теперь следующую, во многих случаях полезную теорему:

Теорема 10. *Пусть P и Q суть два таких непустых множества, что каждая точка множества P расположена левее, чем любая точка множества Q. Если, кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ имеются две точки $x \in P$, $y \in Q$, расстояние между которыми меньше ε, то*

$$\sup P = \inf Q.$$

Доказательство. Прежде всего, множество P ограничено сверху, а Q — снизу. Пусть

$$\beta = \sup P, \quad \alpha = \inf Q.$$

Если бы было $\alpha < \beta$, то в $(\alpha;\ \beta]$ имелась бы точка $x \in P$, а в $[\alpha;\ x)$ — точка $y \in Q$ и, вопреки предположению, было бы $y < x$.

Итак, $\beta \leqslant \alpha$. Если бы было $\beta < \alpha$, то, взяв рациональные числа a, b так, чтобы $\alpha < a < b < \beta$, мы имели бы для любых $x \in P$, $y \in Q$ неравенство $\rho(x,\ y) > b - a$, вопреки предположению. Теорема доказана.

Из теоремы 10 вытекает

Следствие 1. *Пусть множества P и Q удовлетворяют условию теоремы 10, и пусть $\xi = \sup P = \inf Q$. Если $P_1 \subseteq P$ и $Q_1 \subseteq Q$ обладают тем свойством, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти две точки $x \in P_1$ и $y \in Q_1$, удовлетворяющие условию $\rho(x,\ y) < \varepsilon$, то* $\sup P_1 = \inf Q_1 = \xi$.

В самом деле, P_1 и Q_1 удовлетворяют условию теоремы 10, следовательно, $\sup P_1 = \inf Q_1 = \xi_1$. Но так как $P_1 \subseteq P$, $Q_1 \subseteq Q$, то (на основании теорем 8, 9)

$$\xi_1 \leqslant \xi, \quad \xi_1 \geqslant \xi,$$

т. е. $\xi_1 = \xi$.

Следствие 2. *Если $(A,\ B)$ есть сечение в множестве всех рациональных (соответственно всех действительных) чисел и если ξ есть число, определяемое этим сечением, то*

$$\xi = \sup A = \inf B.$$

В самом деле, пара множеств A и B удовлетворяет (на основании теоремы 4) всем условиям теоремы 10, так что $\sup A = \inf B = \xi'$. Так как ξ не меньше любого числа из A и не больше любого числа из B, то $\sup A \leqslant \xi \leqslant \inf B$ и, значит, $\xi = \xi'$.

Следствие 3. *Пусть имеем убывающую последовательность сегментов*

$$\Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \ldots \supseteq \Delta_n \supseteq \ldots, \quad \Delta_n = [a_n;\ b_n],$$

причем длина сегментов Δ_n стремится к нулю при возрастании n.

Существует одна и только одна точка ξ, принадлежащая всем сегментам Δ_n.

В самом деле, множество P, состоящее из всех точек a_n, и множество Q, состоящее из всех точек b_n, очевидно, удовлетворяют всем условиям теоремы 10; поэтому

$$\sup P = \inf Q = \xi,$$

причем для любого n имеем $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$, т. е. $\xi \in \Delta_n$. Если бы существовала вторая точка ξ', принадлежащая всем Δ_n, то длина ∇_n не могла бы неограниченно убывать, вопреки нашему условию.

§ 3. Действия над действительными числами

Применим теорему 10 к определению сложения и умножения действительных чисел.

Пусть даны два действительных числа x и y. Числа x и y определяют сечения (A_x, B_x) и (A_y, B_y) в множестве всех рациональных чисел, причем A_x (соответственно A_y) состоит из всех рациональных чисел $a_x \leqslant x$ (соответственно $a_y \leqslant y$); на основании теоремы 4 можно для всякого положительного $\varepsilon > 0$ найти такие числа $a_x \in A_x$, $b_x \in B_x$, соответственно $a_y \in A_y$, $b_y \in B_y$, что

$$0 < b_x - a_x < \varepsilon, \quad \text{соответственно} \quad 0 < b_y - a_y < \varepsilon. \tag{1}$$

Рассмотрим теперь множество A всех рациональных чисел вида $a_x + a_y$, где a_x, a_y — произвольные элементы из A_x, соответственно из A_y; рассмотрим также множество B всех рациональных чисел вида $b_x + b_y$, где $b_x \in B_x$ и $b_y \in B_y$. Так как каждое a_x меньше каждого b_x и каждое a_y меньше каждого b_y, то каждое $a_x + a_y$ меньше каждого $b_x + b_y$. Кроме того, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти $a = a_x + a_y \in A$ и $b = b_x + b_y \in B$ такие, чтобы $b_x - a_x < \frac{\varepsilon}{2}$ и $b_y - a_y < \frac{\varepsilon}{2}$; значит, $0 < b - a < \varepsilon$.

Множества A и B удовлетворяют, таким образом, всем условиям теоремы 10, так что $\sup A = \inf B = \xi$. Теперь определяем:

$$\xi = x + y.$$

Если x и y оба рациональны, то наше определение суммы $x + y$ превращается в обычное; в самом деле, по определению множества A число $x + y$ есть в этом случае наибольшее число в A.

Заметим, наконец, что если x — рациональное число, то $x + y$ есть верхняя грань множества всех рациональных чисел вида

$x+a_y$, где a_y — любое рациональное число, не превосходящее y. Отсюда, в частности, следует, что $0+y=y$.

Определенное таким образом сложение, очевидно, коммутативно:

$$x+y=y+x.$$

Для того чтобы доказать, что оно ассоциативно, т. е. что

$$(x+y)+z=x+(y+z),$$

рассмотрим следующие множества рациональных чисел:

A_1, состоящее из всех чисел вида $a_{x+y}+a_z$ (где $a_{x+y}\leqslant x+y$, $a_z\leqslant z$);
B_1, состоящее из всех $b_{x+y}+b_z$ (где $b_{x+y}>x+y$, $b_z>z$);
A_2, состоящее из всех a_x+a_{y+z};
B_2, состоящее из всех b_x+b_{y+z};
A_3, состоящее из всех $a_x+a_y+a_z$;
B_3, состоящее из всех $b_x+b_y+b_z$.

Очевидно,

$$A_3\subseteq A_1,\quad A_3\subseteq A_2,$$
$$B_3\subseteq B_1,\quad B_3\subseteq B_2.$$

Так как любая пара множеств (A_i, B_i), $i=1, 2, 3$, удовлетворяет условиям теоремы 10, то из следствия 1 этой теоремы вытекает, что

$$\sup A_3=\inf B_3=\sup A_1=\inf B_1=(x+y)+z,$$
$$\sup A_3=\inf B_3=\sup A_2=\inf B_2=x+(y+z),$$

т. е.

$$(x+y)+z=x+(y+z),$$

что и требовалось доказать.

Для того чтобы определить вычитание действительных чисел, нужно определить сначала для каждого действительного числа x число $-x$. Для этого рассмотрим множество B всех рациональных чисел $b\geqslant x$ и множество A всех рациональных чисел $a<x$. В A нет наибольшего числа; если же в B есть наименьшее число, то оно непременно совпадает с x, так как $x=\inf B$. Обозначим через $\bar{A}$ множество всех чисел $-b$; оставшиеся рациональные числа образуют множество $\bar{B}$, состоящее из всех чисел $-a$; разбиение $(\bar{A}, \bar{B})$ есть сечение множества всех рациональных чисел.

Если в $\bar{A}$ есть наибольшее число y, то $-y=x$ (как наименьшее число в B); тогда и x и $y=-x$ рациональны. Заметим, что в $\bar{B}$ нет наименьшего числа (так как в A нет наибольшего); поэтому, если в $\bar{A}$ нет наибольшего числа, то сечение $(\bar{A}, \bar{B})$ определяет иррациональное число, которое мы называем числом $-x$ (в этом случае в B нет наименьшего числа, и так как в A нет наибольшего, то и x иррационально). Если $x>0$, то $0\in A$, следовательно, $0\in\bar{B}$, т. е. $-x<0$, и обратно. Таким образом, если $x\neq 0$, то одно из двух чисел x и $-x$ положительно, другое отрицательно; положительное из двух чисел x и $-x$

обозначается через $|x|$ и называется *абсолютной величиной* чисел x и $-x$.

Читателю предоставляется самому доказать, что из двух отрицательных чисел то больше, у которого абсолютная величина меньше.

Докажем, что $x+(-x)=0$. В самом деле, по определению суммы $x+(-x)=\sup A$, где A есть множество всех рациональных чисел вида $a+\bar{a}$, причем $a \leqslant x$, $\bar{a} \leqslant -x$.

Заметим прежде всего, что множество A не содержит никакого положительного числа. В самом деле, среди двух чисел x и $-x$ одно, пусть x, положительно, другое отрицательно, а потому $\bar{a}$ отрицательно и $|\bar{a}| \geqslant x$. Если a отрицательно или нуль, то $a+\bar{a}$ также отрицательно; если же a положительно, то, так как в этом случае $a=|a|$, $|a| \leqslant x=|x|$, следовательно, $|a| \leqslant |\bar{a}|$, и, значит, $a+\bar{a}$ отрицательно или нуль. Итак, $x+(-x)$ не может быть положительным числом.

Докажем, что $x+(-x)$ не может быть отрицательным.

В самом деле, если $\sup A<0$, то возьмем, во-первых, рациональное число r между $\sup A$ и 0, во-вторых, два таких рациональных числа r' и r'', чтобы

$$r'<x<r'', \quad r''-r'<|r|=-r.$$

Имеем $-r''<-x$, отсюда и из $r'<x$ следует, что $r'-r''=r'+(-r'')\in A$. С другой стороны, $r''-r'<-r$, значит, $r'-r''>r>\sup A$, что противоречит тому, что $r'-r''\in A$. Равенство $x+(-x)=0$ доказано.

Разностью двух действительных чисел x и y называется действительное число $x+(-y)$; оно обозначается через $x-y$.

Вычитание, определенное таким образом, есть действие, обратное сложению. В самом деле,

$$(x-y)+y=(x+(-y))+y=x+((-y)+y)=x+0=x.$$

Из приведенных свойств сложения, вычитания и умножения следуют, как известно, все излагаемые в элементарной алгебре правила, касающиеся этих действий.

Докажем, наконец, что абсолютная величина разности двух чисел x и y равна расстоянию между точками x и y.

Пусть $y<x$. Надо доказать, что $x-y=\rho(x, y)$. Для этого рассмотрим множества:

A: всех чисел $a_x+\bar{a}_y$, где a_x и $\bar{a}_y$ рациональны, $a_x \leqslant x$, $\bar{a}_y \leqslant -y$, и

D: всех чисел вида $a'_x-a'_y$, где a'_x и a'_y рациональны, $y \leqslant a'_y < a'_x \leqslant x$.

Так как элементы множества D могут быть записаны в виде $a'_x+\bar{a}'_y$, где $\bar{a}'_y=-a'_y$ удовлетворяет условию $-x<\bar{a}'_y \leqslant -y$, то ясно, что $\sup D = \sup A$. Но $\sup D = \rho(x, y)$, а $\sup A = x + (-y) = x - y$, что и требовалось доказать.

Умножение двух действительных чисел x и y мы сначала определяем в предположении, что $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Мы это делаем аналогично тому, как определяли в свое время сложение*): множество A определим как множество всех чисел вида $a_x a_y$, где a_x, a_y рациональны, $0 \leqslant a_x \leqslant x$, $0 \leqslant a_y \leqslant y$; множество B определим как множество всех чисел вида $b_x b_y$, где $b_x > x$ и $b_y > y$ рациональны. Пусть дано произвольное рациональное $\varepsilon > 0$. Пусть m есть натуральное число, большее, чем числа $x+1$, $y+1$, $\frac{\varepsilon}{2}$. Выберем a_x, b_x, a_y, b_y так, чтобы

$$0 < b_x - a_x < \frac{\varepsilon}{2m}, \quad 0 < b_y - a_y < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Тогда $a_x a_y \in A$, $b_x b_y \in B$, и так как

$$b_x < a_x + \frac{\varepsilon}{2m} < x + 1 < m,$$

то

$$0 < b_x b_y - a_x a_y = b_x(b_y - a_y) + a_y(b_x - a_x) < \\ < b_x \frac{\varepsilon}{2m} + a_y \frac{\varepsilon}{2m} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а потому мы находимся вновь в условиях теоремы 10 и

$$\sup A = \inf B.$$

Число $\sup A = \inf B$ мы называем *произведением* xy данных действительных чисел x и y.

После того как действие умножения определено для неотрицательных чисел, мы распространяем его и на отрицательные, полагая при $x > 0$, $y > 0$

$$x(-y) = (-x)y = -(xy),$$
$$(-x)(-y) = xy.$$

Доказательство основных свойств умножения (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность по отношению к сложению), а также свойств $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot 1 = x$ может быть предоставлено читателю. Далее, читателю предоставляется самому определить действие деления (как обратное умножению) по образцу того, как введено действие вычитания. При этом надо начать с непосредственного определения числа $\frac{1}{x}$ (сначала при $x > 0$), указав соответствующее сечение множества рациональных чисел,

*) При определении сложения неравенства $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, однако, не предполагались.

доказать потом, что $x\cdot\frac{1}{x}=1$, и определить, наконец, $\frac{x}{y}$ как $x\cdot\frac{1}{y}$ (при $y\neq 0$). Проведение всех относящихся сюда рассуждений будет хорошим упражнением.

Замечание о пополнении числовой прямой двумя «несобственными» точками $+\infty$ и $-\infty$. Иногда бывает удобно наряду с обычными точками числовой прямой (взаимно однозначно соответствующими действительным числам и отождествленными нами с этими последними) ввести еще две новые «несобственные» точки, обозначаемые через $+\infty$ и $-\infty$. При этом эти две несобственные точки связываются с обычными точками следующими соотношениями:

1° для любого действительного числа x полагаем

$$-\infty < x < +\infty,$$

в соответствии с чем устанавливается и неравенство

$$-\infty < +\infty;$$

2° для любого действительного числа x

$$\begin{gathered}(+\infty)+x=x+(+\infty)=+\infty,\\ (-\infty)+x=x+(-\infty)=-\infty,\\ +\infty+(+\infty)=+\infty,\\ -\infty+(-\infty)=-\infty,\\ -(+\infty)=-\infty, \quad -(-\infty)=+\infty,\end{gathered}$$

в соответствии с чем для любого действительного x

$$\begin{gathered}x-(+\infty)=x+(-\infty)=-\infty,\\ x-(-\infty)=x+(+\infty)=+\infty;\end{gathered}$$

3° для любого положительного числа x

$$\begin{gathered}x\cdot(+\infty)=(+\infty)\cdot x=(+\infty)\cdot(+\infty)=(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty,\\ x\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot x=(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty.\end{gathered}$$

Для отрицательного x полагаем

$$x\cdot(+\infty)=-(-x)\cdot(+\infty)=-\infty$$

и т. д.

В отличие от этих правил действий, мы действия $+\infty+(-\infty)$, а также $(+\infty)\cdot 0$, $(-\infty)\cdot 0$ определять не будем, так как разумным образом их определить нельзя. Числовую прямую, пополненную точками $+\infty$ и $-\infty$, будем называть расширенной числовой прямой и обозначать через R^*.

§ 4. Разложение действительных чисел в двоичные дроби. Мощность континуума

Сегмент $[0; 1]$ назовем сегментом нулевого ранга и обозначим через Δ. Сегменты $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ назовем сегментами первого ранга и обозначим соответственно через Δ_0 и Δ_1. Каждый из сегментов первого ранга разделим пополам; получим четыре сегмента второго ранга:

$$\Delta_{00}=\left[0; \frac{1}{4}\right], \quad \Delta_{01}=\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], \quad \Delta_{10}=\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], \quad \Delta_{11}=\left[\frac{3}{4}; 1\right].$$

Вообще, сегменты n-го ранга получаются от деления пополам сегментов $(n-1)$-го ранга, имеют длину $\frac{1}{2^n}$ и обозначаются через $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$, где $i_1, \ldots, i_n$ независимо друг от друга принимают значения 0 и 1; при этом $\Delta_{i_1 \ldots i_{n-1}0}$ и $\Delta_{i_1 \ldots i_{n-1}1}$ суть соответственно левая и правая половины сегмента $\Delta_{i_1 \ldots i_{n-1}}$.

Пусть x — какое-нибудь действительное число. Если x не целое, то оно является внутренней точкой одного и только одного сегмента вида $[k; k+1]$, где k — целое; число k обозначается через $[x]$ и называется *целой частью* x; тогда $x=k+x'$, где x' принадлежит интервалу $(0; 1)$. Рассмотрим сначала случай, когда x' не имеет вида $\frac{m}{2^n}$ (при целом m). Тогда x' принадлежит единственному сегменту первого ранга Δ_{i_1}, единственному сегменту второго ранга $\Delta_{i_1 i_2} \subset \Delta_{i_1}$, вообще, при любом n — единственному сегменту n-го ранга $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$. Таким образом, однозначно определяется последовательность сегментов

$$\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \Delta_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 \ldots i_n} \supset \ldots, \tag{1}$$

единственной общей точкой которых и является x'. Последовательность чисел

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n, \ldots, \tag{2}$$

из которых каждое есть 0 или 1, также определена однозначно и называется *последовательностью двоичных знаков* действительного числа x' и действительного числа $x=k+x'$; сами эти числа записываются в виде

$$x'=0, i_1 i_2 i_3 \ldots i_n \ldots; \quad x=k, i_1 i_2 i_3 \ldots i_n \ldots, \tag{2'}$$

и записи эти называются *разложениями* соответствующих чисел в бесконечную двоичную дробь.

Пусть теперь $x' \in (0; 1)$ есть так называемое *двоично-рациональное число*, т. е. имеет вид

$$x'=\frac{m}{2^n}, \tag{3}$$

где дробь $\frac{m}{2^n}$ несократима, и, следовательно, n в представлении (3) имеет наименьшее возможное значение. Тогда x' является общим концом двух сегментов Δ_* и $\Delta_{*'}$ ранга n, например правым концом сегмента Δ_* и левым концом сегмента $\Delta_{*'}$ (здесь положено для краткости $*=i_1\ldots i_{n-1}0$ и $*'=i_1\ldots i_{n-1}1$). Тогда x' будет правым концом сегмента Δ_{*1} и левым концом сегмента $\Delta_{*'0}$, правым концом сегмента Δ_{*11} и левым концом сегмента $\Delta_{*'00}$ и т. д. Таким образом, число x' определяет не одну, а две последовательности сегментов вида (1), а именно:

$$\Delta_{i_1}\supset\ldots\supset\Delta_{i_1\ldots i_{n-1}}\supset\Delta_{i_1\ldots i_{n-1}0}\supset\Delta_{i_1\ldots i_{n-1}01}\supset\Delta_{i_1\ldots i_{n-1}011}\supset\ldots$$

и

$$\Delta_{i_1}\supset\ldots\supset\Delta_{i_1\ldots i_{n-1}}\supset\Delta_{i_1\ldots i_{n-1}1}\supset\Delta_{i_1\ldots i_{n-1}10}\supset\Delta_{i_1\ldots i_{n-1}100}\supset\ldots,$$

в соответствии с чем мы получим и две последовательности двоичных знаков числа x':

$$\left.\begin{array}{l} i_1,\ \ldots,\ i_{n-1},\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots, \\ i_1,\ \ldots,\ i_{n-1},\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

из которых, начиная с ранга $n+1$, одна состоит из одних нулей, а вторая — из одних единиц. Числа x и x' имеют по два двоичных разложения.

Пусть, обратно, мы имеем последовательность

$$i_1,\ i_2,\ i_3,\ \ldots,\ i_n,\ \ldots;\quad i_n=0 \text{ или } 1, \qquad (2)$$

отличную от 0, 0, 0, ..., 0, ... и от 1, 1, 1, ..., 1, ... Ей соответствует последовательность сегментов (1) с единственной общей точкой x', и (2) есть последовательность двоичных знаков числа x'. Если мы имеем две различные последовательности вида (2), определяющие одно и то же действительное число x' интервала (0; 1), то эти две последовательности (будучи последовательностями двоичных знаков одного и того же $x'\in(0;1)$), по доказанному, непременно имеют вид (4), а само число x' является двоично-рациональным. Итак, учитывая, что каждое целое число k имеет два двоичных разложения k, 000...0... и $k-1$,111...1..., имеем:

Каждое действительное число x имеет либо лишь одно двоичное разложение

$$k,\ i_1i_2\ldots i_n\ldots,$$

либо два двоичных разложения

$$k,\ _1\ldots i_{n-1}0111\ldots \quad \textit{и} \quad k,\ i_1\ldots i_{n-1}1000\ldots,$$

причем второй случай наступает тогда и только тогда, когда число x двоично-рационально, т. е. имеет вид $x=\frac{m}{2^n}$ при целых m и n. Обратно, всякое двоичное разложение определяет одно-единственное неотрицательное действительное число, разложением которого оно и является.

Замечание 1. Если мы будем сегменты ранга n делить не на два, а на какое-нибудь другое постоянное число s равных частей *) (например, на три или на десять), то получим для каждого действительного числа $x \geqslant 0$ разложение в бесконечную троичную, десятичную, вообще s-ичную дробь. По-прежнему у каждого числа будет либо одно, либо два таких разложения, причем те числа, у которых имеется два s-ичных разложения, образуют лишь счетное множество, а именно множество рациональных чисел вида $\frac{m}{s^n}$, где m и n — целые.

Теорема 11. *Множество всех действительных чисел имеет мощность континуума $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$ и, следовательно, несчетно* **).

Доказательство. Так как вся числовая прямая находится во взаимно однозначном соответствии с любым из своих интервалов и так как множество двоично-рациональных чисел счетно, то достаточно доказать, что множество J' всех не двоично-рациональных чисел интервала $(0; 1)$ имеет мощность $\mathfrak{c}$. Но множество J' находится во взаимно однозначном соответствии с множеством D' непериодических (т. е. не кончающихся ни одними нулями, ни одними единицами) бесконечных двоичных дробей

$$0,\ i_1 i_2 \ldots i_n \ldots$$

Множество D *всех* бесконечных двоичных дробей имеет, как мы видели ***), мощность $\mathfrak{c}$, а множество D' получается из множества D вычитанием двух множеств, состоящих соответственно из дробей вида

$$0,\ i_1 i_2 \ldots i_n 000 \ldots$$

и вида

$$0,\ i_1 i_2 \ldots i_n 111 \ldots$$

Каждое из этих множеств находится во взаимно однозначном соответствии с множеством двоично-рациональных чисел интер-

---

*) Целое число $s \geqslant 2$ будет так называемым «основанием системы счисления».

**) См. конец главы 1, стр. 33. Числовая прямая часто называется арифметическим континуумом («continuum» значит «непрерывное»), поэтому и мощность $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$, являясь мощностью множества всех действительных чисел, называется мощностью континуума.

***) См. конец главы 1, стр. 33.

вала (0; 1) и потому счетно; следовательно, множество D', а значит, и множество J' имеют мощность $\mathfrak{c}$, что и требовалось доказать.

Следующее элементарное доказательство теоремы о несчетности множества действительных чисел представляет собою применение общих рассуждений § 6 первой главы специально к доказательству несчетности множества всех десятичных дробей, т. е., по существу,— множества всех отображений множества натуральных чисел в множество, состоящее из десяти элементов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Достаточно показать, что множество всех чисел интервала (0; 1) несчетно. Предположим, что оно счетно. Это означает, что все действительные числа интервала (0; 1) могут быть занумерованы в одну последовательность

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{5}$$

Каждое число x_n может быть представлено единственным образом в виде бесконечной десятичной дроби

$$x_n = 0,\ a_1^{(n)}\, a_2^{(n)} \ldots a_n^{(n)} \ldots,$$

не являющейся периодической дробью с периодом 9. Возьмем теперь для каждого n отличное от $a_n^{(n)}$ число b_n, равное либо 1, либо 2.

Для определенности мы, например, положим:

$$b_n = 1, \quad \text{если} \quad a_n^{(n)} \neq 1,$$
$$b_n = 2, \quad \text{если} \quad a_n^{(n)} = 1.$$

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь

$$0,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots \tag{6}$$

Она определит некоторое число x интервала (0; 1) (более точно: число x принадлежит даже к сегменту [0,1; 0,3]).

Так как мы предполагаем, что последовательность (5) содержит все действительные числа интервала (0; 1), то число x занимает в нашей последовательности (5) определенное, пусть, например, m-е, место. Тогда

$$x = 0,\ a_1^{(m)}\, a_2^{(m)} \ldots a_n^{(m)} \ldots \tag{7}$$

и, следовательно,

$$a_1^{(m)} = b_1,\ a_2^{(m)} = b_2,\ \ldots,\ a_n^{(m)} = b_n,\ \ldots$$

(так как (6) и (7) — одна и та же бесконечная десятичная дробь). В частности,

$$a_m^{(m)} = b_m,$$

что, однако, невозможно, так как мы выбирали b_m так, чтобы было $b_m \neq a_m^{(m)}$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 2. Из доказанного следует, что всякий сегмент, интервал и полуинтервал числовой прямой имеют мощность континуума, так как все эти множества эквивалентны между собой и эквивалентны множеству всех действительных чисел.

Отсюда непосредственно вытекает, что множество всех иррациональных чисел, а также множество иррациональных чисел, содержащихся в любом интервале числовой прямой, несчетны, ибо каждое из них получается из несчетного множества удалением из него счетного подмножества. На основании этого получаем, в частности: между любыми двумя различными вещественными числами найдется иррациональное число и даже несчетно много их.

Применим замечание 2 к доказательству следующего предложения:

Теорема 12. *Сумма конечного или счетного множества множеств, имеющих мощность континуума, имеет мощность континуума.*

Пусть наши множества суть

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ \ldots,\ E_n,\ \ldots,$$

и пусть $E = \bigcup\limits_n E_n$. Положим $A_1 = E_1$, $A_2 = E_2 \setminus A_1$, вообще

$$A_n = E_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}).$$

Очевидно,

$$E = \bigcup_n E_n = \bigcup_n A_n,$$

причем множества A_n попарно не пересекаются. Множество $A_1 = E_1$ имеет мощность континуума, тогда как каждое из множеств A_n, $n > 1$, есть подмножество некоторого множества мощности континуума. Поэтому множество A_1 может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с множеством всех точек интервала $(0;\ 1)$, а каждое множество A_n, $n > 1$, может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с некоторым подмножеством соответственно интервала $(n-1;\ n)$. Вследствие этого все множество E оказывается поставленным во взаимно однозначное соответствие с подмножеством множества всех действительных чисел; так как, кроме того, E содержит часть E_1, имеющую мощность континуума, то по теореме Кантора — Бернштейна E само имеет мощность континуума, что и требовалось доказать.

Глава третья

УПОРЯДОЧЕННЫЕ И ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА. ТРАНСФИНИТНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Упорядоченные множества

Понятия упорядоченного множества и подобного отображения одного упорядоченного множества на другое, а также понятие порядкового типа данного упорядоченного множества были введены в § 5 гл. 1. Эти понятия лежат в основе всей настоящей главы. Сделаем по поводу этих основных элементарных понятий еще следующее, в сущности, само собою разумеющееся

Замечание 1. Упорядоченное множество A называется *упорядоченным подмножеством* упорядоченного множества X, если каждый элемент a множества A является элементом множества X и если отношение $a \prec a'$ в A совпадает с отношением $a \prec a'$ в X. Всякое подмножество упорядоченного множества X мы будем в этой главе рассматривать как упорядоченное подмножество. Наконец, на протяжении всей этой главы действует следующее соглашение: множество всех действительных чисел и все его подмножества, в частности любое множество, составленное из рациональных чисел, считаются упорядоченными естественным образом (т. е. для любых двух действительных, в частности для любых двух рациональных, чисел x, x' отношение порядка $x \prec x'$ означает, что $x < x'$).

После этих вводных замечаний докажем следующее важное предложение:

Теорема 1. *Всякое счетное упорядоченное множество X подобно некоторому подмножеству множества D всех двоично-рациональных чисел интервала* (0; 1), *причем если множество X не содержит ни пустых интервалов, ни первого и ни последнего элементов, то оно подобно всему множеству D.*

Доказательство*). Пусть все элементы множества X занумерованы в последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

*) См. ниже замечание 2.

(причем порядок элементов в множестве X, вообще говоря, никак не связан с их порядком в последовательности (1)).

Возьмем какое-нибудь двоично-рациональное число d, представим его в виде несократимой дроби $\frac{m}{2^n}$ и назовем n рангом числа d. Все множество D распадается на «решетки» элементов разных рангов: решетка первого ранга D_1 состоит из одного числа $\frac{1}{2}$, решетка второго ранга D_2—из двух чисел $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ и т. д. Поставим теперь в соответствие числу $\frac{1}{2}$ элемент $x_1 = f\left(\frac{1}{2}\right)$ и перейдем к решетке второго ранга D_2. Если в X есть элемент, предшествующий элементу x_1, то берем тот из этих элементов, который имеет в (1) наименьший индекс n, и полагаем $f\left(\frac{1}{4}\right) = x_n$. Если элемента $x_n < x_1$ в X нет, то вычеркиваем в решетке D_2 элемент $\frac{1}{4}$; ищем в (1) первый элемент $x_n > x_1$, ставим его в соответствие числу $\frac{3}{4}$ и переходим к решетке D_3. В ней берем сначала число $\frac{1}{8}$ и ищем к нему элемент x_n с наименьшим индексом, предшествующий ранее построенным элементам. Если он имеется, то ставим его в соответствие числу $\frac{1}{8}$, если нет, то вычеркиваем число $\frac{1}{8}$ и переходим к числу $\frac{3}{8}$. К числу $\frac{3}{8}$ стараемся подобрать элемент с наименьшим индексом, находящийся к отобранным элементам множества X в том же порядковом отношении, в каком число $\frac{3}{8}$ находится к уже рассмотренным и невычеркнутым числам. Далее переходим к числу $\frac{5}{8}$ и т. д., двигаясь все время от каждой решетки к решетке следующего ранга, а внутри каждой решетки — в порядке возрастания ее элементов. В результате получаем подобное отображение f множества D' невычеркнутых двоичных чисел в множество X. Докажем, что f есть отображение на все множество X. В самом деле, пусть это не так и пусть x_n есть первый элемент множества X, не поставленный в соответствие никакому d. Тогда элементы $x_1, \ldots, x_{n-1}$ поставлены в соответствие некоторым элементам $d_1, \ldots, d_{n-1}$, принадлежащим, положим, сумме первых k решеток, причем пусть x_n лежит между x_p и x_q, имея эти элементы в качестве ближайшего предшествующего и ближайшего следующего. Так как в решетке D_{k+1} имеются элементы, лежащие между любыми двумя соседними элементами множества $D_1 \cup \ldots \cup D_k$, то в D_{k+1} имеется и первый по величине элемент d_n, лежащий между d_p и d_q; этому элементу по нашему построению и должен быть поставлен в соответствие элемент x_n. Так же рассуждаем и в том случае, когда x_n предшествует всем элементам $x_1, \ldots, x_{n-1}$ или следует за ними всеми.

Первое утверждение теоремы 1 этим доказано. Если X не содержит крайних элементов и не имеет пустых интервалов, то, как легко видеть, нам вовсе не придется вычеркивать никаких элементов в D, так что получится подобное отображение всего множества D на множество X.

Следствие. *Множество всех рациональных чисел подобно множеству всех двоично-рациональных.*

Поэтому всякое счетное упорядоченное множество без пустых интервалов и без крайних элементов подобно также множеству всех рациональных чисел.

Замечание 2. Если интересоваться лишь первым утверждением теоремы 1, то самое простое доказательство — следующее. Полагаем $f(x_1) = \frac{1}{2}$. Пусть элементам $x_1, \ldots, x_n$ уже поставлены в соответствие двоично-рациональные числа $d_1, \ldots, d_n$ интервала $(0; 1)$, среди которых пусть d_i — наименьшее, а d_k — наибольшее. Если x_{n+1} предшествует всем $x_1, \ldots, x_n$ или следует за всеми ними, то полагаем $f(x_{n+1}) = \frac{1}{2} d_i$, соответственно

$$f(x_{n+1}) = \frac{1}{2}(1 + d_k).$$

Если же x_{n+1} лежит между x_p и x_q, $p \leqslant n$, $q \leqslant n$, имея эти элементы своими соседями, то полагаем

$$f(x_{n+1}) = \frac{1}{2}(d_p + d_q).$$

Таким образом, определено подобное отображение f множества X в множество D, и первое утверждение теоремы 1 доказано.

Сечением упорядоченного множества Θ называется, как мы знаем, такое разбиение множества Θ на два подмножества (на два «класса») A и B, что каждый элемент одного множества, например A («нижнего класса»), предшествует каждому элементу второго множества B («верхнего класса»).

Возможны следующие типы сечений:

1. В нижнем классе A есть наибольший элемент a, и в верхнем классе есть наименьший элемент b; такое сечение называется *скачком*. Очевидно, в этом случае $(a; b)$ есть пустой интервал.

Обратно, всякому пустому интервалу $(a;\ b)$ упорядоченного множества Θ однозначно соответствует скачок $(A,\ B)$, где A состоит из всех $x \underline{<} a$, а B — из всех $y \underline{>} b$ *).

Например, Θ состоит из всех $x \leqslant 0$ и из всех $y \geqslant 1$, A состоит из всех $x \leqslant 0$, B — из всех $y \geqslant 1$; $a = 0$, $b = 1$.

2. В нижнем классе есть наибольший элемент ξ, но в верхнем классе нет наименьшего элемента.

3. В нижнем классе нет наибольшего, но в верхнем есть наименьший элемент ξ (сечения типов 2, 3 называются *дедекиндовыми сечениями*; элемент ξ называется элементом, определяемым этим сечением).

4. В нижнем классе нет наибольшего, а в верхнем нет наименьшего элемента. Такое сечение называется «*щелью*». Щель, определяемая несобственным сечением, называется *несобственной*.

Множество всех щелей упорядоченного множества Θ есть упорядоченное множество: если $\lambda = (A,\ B)$ и $\lambda' = (A',\ B')$ — две щели, то полагаем $\lambda < \lambda'$, если $A \subset A'$.

Упорядоченное множество называется *замкнутым*, если оно не имеет щелей (собственных и несобственных). Всякое замкнутое множество, очевидно, имеет наибольший и наименьший элемент. Упорядоченное множество называется *непрерывным*, если все сечения в нем суть сечения дедекиндовы. Непрерывное упорядоченное множество называется *открытым*, если у него нет ни наибольшего, ни наименьшего элемента. Очевидно, присоединяя к открытому непрерывному множеству два элемента — первый и последний, получим замкнутое непрерывное упорядоченное множество (так от числовой прямой R^1, являющейся открытым непрерывным упорядоченным множеством, мы перешли к замкнутому непрерывному упорядоченному множеству R^*).

Назовем подмножество D упорядоченного множества Θ *порядково плотным* в Θ, если каждый интервал множества Θ содержит хотя бы один элемент из D. Наконец, множество D назовем *плотным* в Θ, если каждый непустой интервал множества Θ содержит хотя бы один элемент из D.

Замечание 3. Из этого определения следует, что если в упорядоченном множестве Θ имеются скачки (или, что то же, пустые интервалы), то никакое вообще подмножество $D \subseteq \Theta$ не является порядково плотным в Θ.

Мы будем в основном интересоваться плотными подмножествами лишь непрерывных упорядоченных множеств, в которых понятия плотности и порядковой плотности совпадают.

Теорема 2. *Пусть Θ — непрерывное открытое упорядоченное множество, а D — плотное подмножество множества Θ.*

*) Запись $x \underline{<} a$ (соответственно $y \underline{>} b$) означает, что либо $x < a$, либо $x = a$ (соответственно либо $y > b$, либо $y = b$).

Существует соответствие подобия между элементами множества $\Theta \setminus D$ *и (упорядоченным) множеством всех щелей множества* D.

Доказательство. Пусть ξ — произвольный элемент множества $\Theta \setminus D$. Обозначим через D'_ξ множество всех предшествующих элементу ξ, а через D''_ξ — множеество всех следующих за элементом ξ элементов множества D. Легко видеть, что разбиение $\lambda_\xi = (D'_\xi, D''_\xi)$ есть сечение множества D и притом щель (так как если бы, например, в D'_ξ был наибольший элемент a, то между a и ξ не содержалось бы ни одного элемента из D). Ясно также, что двум различным элементам ξ, η множества $\Theta \setminus D$ соответствуют различные щели $\lambda_\xi = (D'_\xi, D''_\xi)$ и $\lambda_\eta = (D'_\eta, D''_\eta)$, причем из $\xi < \eta$ следует $\lambda_\xi < \lambda_\eta$. Остается доказать, что каждой щели $\lambda = (D', D'')$ множества D соответствует элемент $\xi \in \Theta \setminus D$ такой, что $D' = D'_\xi$, $D'' = D''_\xi$. Обозначим через Θ' множество всех таких $x \in \Theta$, что x предшествует любому элементу $d \in D''$. Положим $\Theta'' = \Theta \setminus \Theta'$. Легко видеть, что $D' = D \cap \Theta'$, $D'' = D \cap \Theta''$ и что (Θ', Θ'') есть сечение в Θ. Если ξ есть элемент, определяемый в Θ дедекиндовым сечением (Θ', Θ''), то $D' = D'_\xi$, $D'' = D''_\xi$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть даны два открытых непрерывных упорядоченных множества* Θ_1 *и* Θ_2 *и плотные в них множества* D_1, *соответственно* D_2. *Если множества* D_1 *и* D_2 *подобны между собою, то подобны между собою и множества* Θ_1 *и* Θ_2.

В самом деле, соответствие подобия (обозначим его через φ), существующее между множествами D_1 и D_2, порождает соответствие подобия ψ между множествами щелей этих множеств, а значит, и между множествами $\Theta_1 \setminus D_1$ и $\Theta_2 \setminus D_2$. Легко видеть, что отображения φ и ψ вместе дают соответствие подобия между Θ_1 и Θ_2, чем теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Всякое открытое непрерывное упорядоченное множество* Θ, *в котором плотно некоторое счетное подмножество* D, *подобно множеству всех действительных чисел.*

Доказательство. Легко видеть, что счетное множество E, плотное в непрерывном открытом упорядоченном множестве Θ, не имеет ни скачков (пустых интервалов), ни наименьшего, ни наибольшего элемента и потому в силу теоремы 1 подобно множеству R_0 всех рациональных чисел. Так как R_0 есть плотное подмножество непрерывного открытого упорядоченного множества R^1 всех действительных чисел, то по теореме 3 соответствие подобия между D и R_0 может быть продолжено до соответствия подобия между Θ и R^1, что и требовалось доказать.

Замечание 4. Из теоремы 4 следует, что всякое непрерывное замкнутое упорядоченное множество, в котором плотно некоторое счетное множество, подобно сегменту числовой прямой.

Теорема 5. *Для всякого упорядоченного множества X существует замкнутое упорядоченное множество Y, содержащее множество X в качестве плотного подмножества.*

Доказательство. Множество $Y \setminus X$ будет состоять из всех щелей (A, B) множества X, упорядоченных естественным образом. Если $x \in X$, а $\xi = (A, B) \in Y \setminus X$, то $x < \xi$ тогда и только тогда, когда $x \in A$. Замкнутость множества Y проверяется так же, как и отсутствие собственных щелей в множестве действительных чисел (см. теорему 5 § 2 гл. 2). Покажем, что X плотно в Y. Предположим, что существует непустой интервал $(a; b)$ множества Y, не пересекающийся с X. Тогда всякий элемент из $(a; b)$ является щелью. Возьмем такой элемент $\xi \in (a; b)$. Пусть $\xi = (A, B)$. Поскольку $A \cap (a; b) = \Lambda$, то для всякого $x \in A$ имеем либо $x < a$, либо $x = a$. Равенство $x = a$ исключено, поскольку в A нет наибольшего элемента. Поэтому элемент a является щелью. Предположив, что $a = (A', B')$, имеем $A = A'$, т. е. $a = \xi$. Это противоречие и завершает доказательство теоремы 5.

§ 2. Определение и примеры вполне упорядоченных множеств

Определение 1. Упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если каждое его непустое подмножество содержит первый элемент.

Из этого определения сразу следует, что всякое подмножество вполне упорядоченного множества само есть вполне упорядоченное множество.

Замечание 1. Так как к подмножествам любого множества мы причисляем и само данное множество, то во всяком вполне упорядоченном непустом множестве содержится первый элемент. Однако существования первого элемента в самом данном упорядоченном множестве еще недостаточно для того, чтобы оно было вполне упорядоченным; требуется еще, чтобы и во всяком непустом подмножестве данного множества был первый элемент. Так, множество всех рациональных чисел сегмента $[0; 1]$ имеет первый и последний элементы, но оно не является вполне упорядоченным, так как, например, в его подмножестве, состоящем из всех рациональных чисел интервала $(0; 1)$, первого элемента нет.

Все конечные упорядоченные множества вполне упорядочены. Примером бесконечного вполне упорядоченного множества является множество всех натуральных чисел; это множество и все подобные ему называются *множествами типа* ω. Множеством типа ω является, следовательно, например, множество всех чисел

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \qquad (1)$$

(так как очевидно, что оно подобно множеству всех натуральных чисел). Но, пополняя множество (1) еще одним элементом, именно числом 1 $\left(\text{следующим в порядке возрастания за всеми числами вида } \frac{n}{n+1}\right)$, мы получим множество, состоящее из всех чисел

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots, 1. \tag{2}$$

Это множество—тоже вполне упорядоченное и счетное, но оно не подобно множеству всех натуральных чисел хотя бы потому, что в множестве (2) есть последний элемент, именно элемент 1, а в множестве всех натуральных чисел последнего элемента нет. Множество (2) и всякое подобное ему множество называется множеством типа $\omega+1$. Итак, даже вполне упорядоченные счетные множества могут иметь различные порядковые типы. Более того, мы увидим в этой главе, что имеется несчетное множество различных порядковых типов вполне упорядоченных счетных множеств.

Но прежде чем идти дальше в исследовании вполне упорядоченных множеств и даже для того, чтобы обосновать обозначение $\omega+1$ для порядкового типа множества (2), введем весьма важные вспомогательные понятия, которыми будем постоянно пользоваться в дальнейшем.

Определение 2. Пусть имеются два упорядоченных множества A и B, данных в этом порядке (т. е. сначала A, потом B) и не имеющих общих элементов. Рассмотрим множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов $a \in A$ и $b \in B$. Превратим множество $A \cup B$ в упорядоченное множество $A+B$, введя в него порядок следующим образом: элементы множества A, равно как элементы множества B, сохраняют свой порядок и в $A+B$ (т. е. если $a < a'$ в A или $b < b'$ в B, то те же отношения сохраняются и в $A+B$); если же $a \in A$, $b \in B$, то полагаем

$$a < b \quad \text{в} \quad A+B.$$

Упорядоченное множество $A+B$ называем *порядковой суммой* упорядоченных множеств A и B (данных в порядке $A < B$). Если α, β суть порядковые типы множеств A и B, то порядковый тип множества $A+B$ называется *суммой* $\alpha+\beta$ порядковых типов α и β (в этом их порядке).

Заметив, что множество, состоящее из одного элемента, имеет порядковый тип 1, видим, что, присоединяя к какому-либо множеству порядкового типа ω еще один элемент, следующий за всеми элементами данного множества типа ω, получим упорядоченное множество, порядковый тип которого, в силу только что сформулированного определения сложения порядковых типов, есть $\omega+1$.

Аналогично, множество

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots, 1, 2, \ldots, m$$

имеет порядковый тип $\omega+m$, а множество

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots, \frac{2n+1}{n+1}, \ldots$$

— порядковый тип $\omega+\omega$. Тот же порядковый тип $\omega+\omega$ получим, если упорядочим все натуральные числа не естественным образом (по их величине), а так: сначала упорядочим все нечетные числа по величине, а за ними заставим следовать все четные числа, также упорядоченные по величине: 1, 3, 5, 7, 9,... ..., 2, 4, 6, 8, ...

Введенная только что операция сложения порядковых типов не обладает свойством коммутативности: так, например, $1+\omega=\omega\neq\omega+1$; вообще, для любого натурального n

$$n+\omega=\omega\neq\omega+n.$$

В то же время легко видеть, что сложение порядковых типов обладает свойством ассоциативности:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

Введем теперь понятие суммы упорядоченного множества упорядоченных множеств, являющееся обобщением понятия суммы двух упорядоченных множеств. Пусть дано какое-нибудь упорядоченное непустое множество A, элементами которого являются попарно не пересекающиеся упорядоченные множества B_ξ. Сумму $S=\bigcup\limits_{B_\xi\in A} B_\xi$ всех множеств $B_\xi\in A$ делаем упорядоченным множеством, обозначаемым через $\sum\limits_{B_\xi\in A} B_\xi$, вводя в множество S порядок следующим образом: элементы каждого множества B_ξ сохраняют тот порядок, который они имели в B_ξ; если же $x\in B_\xi$, $x'\in B_{\xi'}$, то полагаем $x\prec x'$, если $B_\xi\prec B_{\xi'}$ в A. Упорядоченное множество $\sum\limits_{B_\xi\in A} B_\xi$ называем суммой упорядоченного множества A упорядоченных множеств B_ξ.

Если b_ξ есть порядковый тип множества B_ξ и a — порядковый тип множества A, то порядковый тип s упорядоченного множества $\sum\limits_{B_\xi\in A} B_\xi$ называется суммой по типу a порядковых типов b_ξ. Это определение законно, так как порядковый тип s, очевидно, зависит лишь от данных порядковых типов b_ξ и от порядкового типа a, а не от того, какие именно множества B_ξ, A этих типов были взяты.

Рассмотрим частный случай только что введенного определения. Пусть все множества B_ξ имеют один и тот же тип b. Тогда порядковый тип их суммы по типу a обозначается через $b \cdot a$ и называется произведением порядковых типов b и a в этом порядке. Так, например, $\omega+\omega=\omega\cdot 2$, $\omega+\omega+\omega=\omega\cdot 3$ и т. д.

Замечание 2. Легко видеть, что $2\cdot\omega=\omega$, $3\,\omega=\omega$ и т. д., так что $2\cdot\omega\neq\omega\,2$, $3\,\omega\neq\omega\,3$ и т. д.: свойством коммутативности умножение порядковых типов (даже вполне упорядоченных множеств) не обладает.

Другой пример на умножение порядковых типов. Множество рациональных чисел

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, 1+\frac{n}{n+1}, \ldots$$
$$\ldots, k+\frac{1}{2}, k+\frac{2}{3}, \ldots, k+\frac{n}{n+1}, \ldots,$$

очевидно, упорядочено по типу $\omega\cdot\omega=\omega^2$: тип $\omega\cdot\omega=\omega^2$ получается, если взять сумму последовательности

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$$

множеств, каждое из которых упорядочено по типу ω. Точно так же сумма последовательности множеств

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots,$$

каждое из которых имеет тип ω^2, даст нам множество, упорядоченное по типу $\omega^2\cdot\omega=\omega^3$, и т. д., так что можно говорить о порядковом типе ω^n при любом n.

Легко доказывается следующая

Теорема 6. *Сумма вполне упорядоченного множества вполне упорядоченных множеств есть вполне упорядоченное множество.*

В самом деле, пусть упорядоченное множество C определено как сумма $\sum\limits_{B_\xi\in A} B_\xi$ вполне упорядоченного множества A вполне упорядоченных множеств B_ξ. Пусть C' — какое-нибудь непустое подмножество множества C. Так как множество A вполне упорядочено, то среди множеств B_ξ, содержащих элементы множества C', имеется первое множество B_{ξ_0}. Так как множество $C'\cap B_{\xi_0}$ является непустым подмножеством вполне упорядоченного множества B_{ξ_0}, то в нем имеется первый элемент. Этот элемент и есть, очевидно, первый элемент упорядоченного множества C'. Теорема доказана.

Таким образом, в силу теоремы 6, применяя операцию сложения к вполне упорядоченным множествам, в частности к конечным множествам, и к последовательностям вполне упорядоченных множеств, мы можем получать все более и более сложные примеры вполне упорядоченных множеств При этом сложение конечного числа и счетных последовательностей счетных вполне упорядоченных множеств, естественно, не выводит нас из класса счетных множеств.

Рассмотрим, в частности, сумму

$$\omega+\omega^2+\omega^3+\ldots+\omega^n+\ldots=\sum_n^{\omega}\omega^n. \tag{3}$$

Порядковый тип $\sum\limits_n^{\omega}\omega^n$ условно *) обозначаем через ω^ω. Для того чтобы построить множество рациональных чисел, имеющее порядковый тип ω^ω, можно поступить, например, так: возьмем в интервале $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ какое-нибудь множество, упорядоченное по типу ω, в интервале $\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right)$—какое-нибудь множество, упорядоченное по типу ω^2, вообще, в интервале $\left(\frac{n}{n+1};\ \frac{n+1}{n+2}\right)$, $n=1, 2, 3, \ldots$,—какое-нибудь множество, упорядоченное по типу ω^{n+1}. Сумма всех полученных множеств имеет тип ω^ω. Теперь можем строить дальше типы

$$\omega^\omega+1,\ \ldots,\ \omega^\omega+n,\ \ldots,\ \omega^\omega+\omega,\ \ldots,\ \omega^\omega+\omega\ 2,\ \ldots,\ \omega^\omega+\omega\cdot n,\ \ldots,\ \omega^\omega+\omega\cdot\omega=\omega^\omega+\omega^2,\ \ldots,\ \omega^\omega+\omega^n,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \omega^\omega+\omega^\omega=\omega^\omega\cdot 2,\ \ldots,\ \omega^\omega\cdot n,\ \ldots$$

и далее тип $\omega^\omega\cdot\omega$, который условно обозначаем через $\omega^{\omega+1}$, типы

$$\omega^{\omega+1}+1,\ \ldots,\ \omega^{\omega+1}+\omega^\omega,\ \ldots,\ \omega^{\omega+1}+\omega^\omega\cdot 2,\ \ldots,\ \omega^{\omega+1}+\omega^\omega\cdot n,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \omega^{\omega+1}+\omega^{\omega+1}=\omega^{\omega+1}\cdot 2,\ \ldots,\ \omega^{\omega+1}\cdot n,\ \ldots,\ \omega^{\omega+1}\cdot\omega=$$
$$=\omega^{\omega+2},\ \ldots,\ \omega^{\omega+n},\ \ldots,\ \omega^{\omega+\omega}=\omega^{\omega\ 2},\ \ldots,\ \omega^{\omega\ n},\ \ldots,\ \omega^{\omega\ \omega}=$$
$$=\omega^{\omega^2},\ \ldots,\ \omega^{\omega^n},\ \ldots,\ \omega^{\omega^\omega},\ \ldots,\ \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}_{n\text{ раз}},\ \ldots$$

Сумма $\omega^\omega+\omega^{\omega^\omega}+\omega^{\omega^{\omega^\omega}}+\ldots+\underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}_{n\text{ раз}}+\ldots$ обозначается через

$\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ или через ε (Кантор). Далее можно идти тем же путем и получать порядковые типы $\varepsilon+1,\ \ldots,\ \varepsilon+\omega,\ \ldots,\ \varepsilon=\varepsilon\cdot 2,\ \ldots$ $\ldots,\ \varepsilon\cdot\varepsilon=\varepsilon^2,\ \ldots$ и т. д., не будучи никогда остановленным в этом

---

*) В этой книге не вводится определение степени с показателем ω; интересующихся этими и дальнейшими понятиями теории упорядоченных множеств отсылаем к книге Хаусдорфа [1], гл. 3 и 4.

процессе. Эти примеры (как, впрочем, уже ω, $\omega+1$, $\omega+2$, ...) показывают, что множество порядковых типов счетных вполне упорядоченных множеств бесконечно.

Со времен Кантора *порядковые типы вполне упорядоченных множеств называются порядковыми числами.* Порядковые типы конечных множеств суть, как мы уже упоминали, натуральные числа и число нуль; *порядковые типы бесконечных вполне упорядоченных множеств называются трансфинитными числами.*

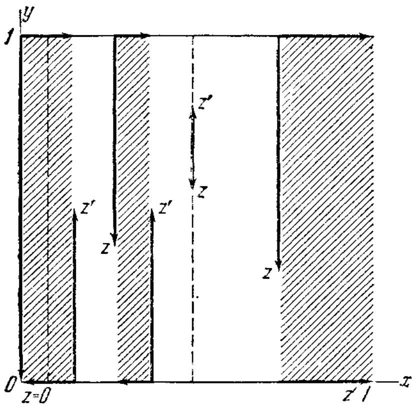

Рис. 2.

Замечание 3. При рассмотрении вполне упорядоченных множеств знаки $\prec$, $\succ$ заменяются через обычные $<$, $>$.

Приведем в заключение несколько примеров действий над порядковыми типами упорядоченных, но не вполне упорядоченных множеств.

Обозначим через ρ порядковый тип множества всех действительных чисел. Упорядочим множество всех комплексных чисел $z=x+iy$, полагая для $z=x+iy$, $z'=x'+iy''$

$$z \prec z',$$

если (не взирая на то, какое из двух чисел y, y' больше другого) имеем $x < x'$. Если же $x=x'$, то полагаем $z \prec z'$, если $y < y'$ (другими словами, упорядочиваем все пары (x, y), как говорят, в алфавитном порядке). Этим путем множество всех комплексных чисел оказывается упорядоченным по типу ρ^2.

Примечателен порядковый тип θ^2, где θ есть порядковый тип сегмента числовой прямой. Множество, упорядоченное по типу θ^2, можно получить, если взять на плоскости замкнутый квадрат со сторонами, параллельными осям координат, и вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ и упорядочить множество всех точек $z=(x, y)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, этого квадрата в «алфавитном порядке» (т. е. положить $(x, y) \prec (x', y')$, если $x < x'$ или если $x=x'$, $y < y'$).

Читателю предлагается проверить, что интервалы $(z; z')$ этого упорядоченного множества для различных z, z' имеют вид, указанный на рис. 2, и что в нем можно найти систему мощности $\mathfrak{c}$ попарно не пересекающихся интервалов; при этом наше упорядоченное множество непрерывно и имеет как первый, так и последний элемент.

§ 3. Основные теоремы о вполне упорядоченных множествах

Множество всех отрицательных целых чисел

$$\ldots, -(n+1), -n, \ldots, -3, -2, -1 \tag{1}$$

и всякое подобное ему множество называется множеством порядкового типа ω^*.

В множестве (1) есть последний элемент -1, но, очевидно, нет первого элемента; поэтому это множество, будучи упорядоченным, не является вполне упорядоченным и порядковый тип ω^* не есть порядковое число. Более того, имеет место весьма простая, но тем не менее важная

Теорема 7. *Для того чтобы упорядоченное множество не было вполне упорядоченным, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало подмножество типа* ω^*.

В самом деле, так как всякое подмножество вполне упорядоченного множества вполне упорядочено, а множества типа ω^* не вполне упорядочены, то никакое вполне упорядоченное множество не может содержать подмножества типа ω^*. Обратно, если какое-либо упорядоченное множество C не является вполне упорядоченным, то оно содержит подмножество A без первого элемента. Возьмем какой-нибудь элемент множества A и обозначим его через a_{-1}. Так как никакой элемент множества A, в том числе и элемент a_{-1}, не является первым элементом, то в A есть элемент, предшествующий элементу a_{-1}; один из таких элементов обозначим через a_{-2}:

$$a_{-2} < a_{-1}.$$

Так как a_{-2} также не является первым элементом в A, то имеется элемент a_{-3}, предшествующий элементу a_{-2}. Повторяя это рассуждение, строим для каждого натурального n элемент a_{-n} множества A, причем

$$a_{-(n+1)} < a_{-n}.$$

Множество

$$\ldots, a_{-(n+1)}, a_{-n}, \ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}$$

является подмножеством множества $A \subseteq C$ и имеет тип ω^*.

Теорема 8. *Если f есть подобное отображение вполне упорядоченного множества A в себя, то для любого элемента $x \in A$ имеем $f(x) \geqslant x$.*

Доказательство. Пусть в A имеются элементы x, не удовлетворяющие последнему неравенству. Тогда среди этих элементов имеется первый; обозначим его через x_1. Значит,

$$f(x_1) < x_1. \qquad (2)$$

Обозначая элемент $f(x_1)$ через x_0, переписываем неравенство (2) в виде

$$x_0 < x_1 \qquad (2')$$

и, помня, что f есть подобное отображение, выводим из (2′) неравенство

$$f(x_0) < f(x_1) = x_0.$$

Но неравенства $f(x_0) < x_0$ и $x_0 < x_1$ противоречат определению элемента x_1 как первого элемента $x \in A$, удовлетворяющего условию $f(x) < x$. Теорема 8 доказана.

Пусть теперь x — произвольный элемент вполне упорядоченного множества A. Назовем *отрезком множества* A, *отсеченным элементом* x, и обозначим через $A(x)$ множество всех элементов $x' \in A$, предшествующих элементу x (если x — первый элемент множества A, то $A(x)$ есть пустое множество). Множество всех остальных элементов множества A, т. е. множество всех $x'' \in A$, удовлетворяющих неравенству $x'' \geqslant x$, назовем *хвостом* (множества A), отсеченным элементом x.

Из теоремы 8 выводится

Теорема 9. *Не существует никакого подобного отображения вполне упорядоченного множества A в отрезок какого-либо подмножества $A' \subseteq A$.*

Доказательство. Если бы существовало подобное отображение вполне упорядоченного множества A в отрезок $A'(x)$ какого-либо подмножества $A' \subseteq A$, то было бы $f(x) \in A'(x)$ и, значит, $f(x) < x$, вопреки теореме 8.

Пусть $A(x)$ и $A(x')$ — два различных отрезка вполне упорядоченного множества A; один из элементов x, x' предшествует другому, положим $x < x'$; тогда $A(x)$, очевидно, есть отрезок множества $A(x')$. Итак, из двух отрезков одного и того же вполне упорядоченного множества один есть отрезок другого. Поэтому получаем

Следствие 1. *Два различных отрезка вполне упорядоченного множества не могут быть подобны между собою.*

Из теоремы 9 вытекает, далее,

Теорема 10. *Существует не более одного подобного отображения одного вполне упорядоченного множества на другое.*

В самом деле, пусть f и g — два различных подобных отображения вполне упорядоченного множества A на вполне упорядоченное множество B. Так как f и g предположены различными, то существует элемент $a \in A$, для которого $b = f(a) \neq \neq b' = g(a)$. Пусть, например, $b < b'$. Так как при всяком подобном отображении f множества A на множество B отрезок $A(x)$ множества A переходит в отрезок $B(y)$ множества B, где $y = f(x)$, то отрезок $A(a)$ множества A подобен отрезкам $B(b)$ и $B(b')$ множества B, откуда следует, вопреки только что доказанному, что отрезки $B(b)$ и $B(b')$ множества B подобны между собою.

Следствие 2. *Единственное подобное отображение вполне упорядоченного множества на себя есть тождественное отображение.*

Введем теперь следующее основное определение:

Мы говорим, что *порядковое число α меньше порядкового числа β, если какое-либо* (а значит, и любое) *вполне упорядоченное мно-*

жество типа α *подобно некоторому отрезку какого-нибудь* (а следовательно, и любого) *вполне упорядоченного множества типа* β. Очевидно, из $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ следует, что $\alpha < \gamma$. Кроме того, из нашего определения и теоремы 10 вытекает, что отношения $\alpha < \beta$ и $\alpha = \beta$, а также $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$ исключают друг друга. Другими словами, два данных порядковых числа α, β могут удовлетворять не более чем одному из трех отношений: $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$.

Мы докажем, что одно из этих отношений всегда выполнено. Другими словами, имеет место

Теорема 11. *Для любых двух порядковых чисел* α *и* β *всегда осуществляется один и только один из трех случаев: либо* $\alpha < \beta$, *либо* $\alpha = \beta$, *либо* $\alpha > \beta$.

В силу данного выше определения неравенства между порядковыми числами теорема 11 может быть сформулирована и так:

Теорема 11′. *Пусть даны два вполне упорядоченных множества* A *и* B. *Тогда имеются лишь три возможности: либо* A *и* B *подобны между собою, либо* A *подобно некоторому отрезку множества* B, *либо* B *подобно некоторому отрезку множества* A.

Доказательству теоремы 11 предпошлем следующее замечание.

Если дано какое-нибудь порядковое число ξ, то дано и множество $W(\xi)$ всех порядковых чисел, меньших чем ξ. В самом деле, задать порядковое число ξ — значит задать какое-нибудь вполне упорядоченное множество типа ξ, тогда даны и все отрезки этого множества; но порядковые типы этих отрезков как раз и исчерпывают множество всех порядковых чисел, меньших чем ξ. При этом справедлива

Теорема 11″. *Отношение* $\alpha < \beta$, *установленное для порядковых чисел, превращает множество* $W(\xi)$ *всех порядковых чисел, меньших данного порядкового числа* ξ, *во вполне упорядоченное множество типа* ξ.

Доказательство теоремы 11″. Как мы только что видели (и как непосредственно следует из определения отношения $\alpha < \beta$), множество $W(\xi)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех отрезков $A(x)$ произвольно выбранного множества A типа ξ; так как отрезки $A(x)$ взаимно однозначно соответствуют элементам $x \in A$, то имеем взаимно однозначное соответствие $\alpha = f(x)$, $x \in A$, $\alpha \in W(\xi)$, между множеством $W(\xi)$ и множеством A типа ξ. При этом соответствии из $x < x'$ в A следует, что $A(x)$ есть отрезок множества $A(x')$, значит, $\alpha = f(x) < \beta = f(x')$ в $W(\xi)$, и обратно. Теорема 11″ доказана.

Только что доказанная теорема 11″ может быть сформулирована так:

Теорема 11‴. *Элементы всякого вполне упорядоченного множества* A *данного типа* ξ *могут быть (и притом единственным образом) занумерованы посредством порядковых чисел* $\alpha < \xi$ *так, что получится подобное соответствие между множеством* A *и множеством всех порядковых чисел* $\alpha < \xi$ *(т. е.* $x_\alpha < x_\beta$ *в* A *равносильно тому, что* $\alpha < \beta$).

Переходим теперь к доказательству теоремы 11. Пусть даны два порядковых числа α, β. Обозначим через D множество $W(\alpha) \cap W(\beta)$. Это множество вполне упорядочено; его тип обозначим через δ. Докажем неравенства $\delta \leqslant \alpha$, $\delta \leqslant \beta$. Достаточно доказать, например, первое из них. Имеем $D \subseteq W(\alpha)$. Если $D = W(\alpha)$, то δ есть порядковый тип множества $W(\alpha)$, т. е. $\delta = \alpha$. Пусть $D \subset W(\alpha)$. Разбиение

$$W(\alpha) = D \cup (W(\alpha) \setminus D)$$

есть сечение во вполне упорядоченном множестве $W(\alpha)$. В самом деле, пусть $x \in D$, $y \in W(\alpha) \setminus D$. Так как $W(\alpha)$ упорядочено, то либо $x < y$, либо $y < x$. Покажем, что второй случай невозможен. Действительно, так как $x \in W(\alpha)$, $x \in W(\beta)$, то одновременно $x < \alpha$, $x < \beta$. Если бы было $y < x$, то было бы $y < \alpha$, $y < \beta$, т. е. $y \in D$. Итак, доказано, что $x < y$ для любых $x \in D$, $y \in W(\alpha) \setminus D$, а это и означает, что $(D, W(\alpha) \setminus D)$ есть сечение в $W(\alpha)$. Пусть $\xi < a$ есть первый элемент в $W(\alpha) \setminus D$. Тогда отрезок, отсекаемый в $W(\alpha)$ элементом ξ, совпадает с D, т. е. ξ есть порядковый тип множества D, $\xi = \delta$ и $\delta < \alpha$.

Совершенно аналогично доказывается и неравенство $\delta \leqslant \beta$.

Однако неравенства $\delta < \alpha$, $\delta < \beta$ не могут быть выполнены одновременно, так как в этом случае мы имели бы $\delta \in D$, так что δ было бы типом отрезка множества D и не могло бы быть типом всего D. Итак, имеются лишь следующие возможности:

либо $\delta = \alpha$, $\delta = \beta$ и, значит, $\alpha = \beta$;
либо $\delta = \alpha$, $\delta < \beta$ и, значит, $\alpha < \beta$;
либо $\delta < \alpha$, $\delta = \beta$ и, значит, $\beta < \alpha$.

Основная теорема 11 полностью доказана.

Теорема 12. *Любое множество A, состоящее из порядковых чисел, вполне упорядочено.*

Доказательство. Достаточно доказать, что любое непустое множество A', состоящее из порядковых чисел, имеет первый элемент: если это будет доказано, то будет доказано, в частности, что всякое непустое подмножество A' множества A имеет первый элемент, т. е. что A вполне упорядочено.

Возьмем какое-нибудь $a' \in A'$. Если a' — наименьшее из чисел $x \in A'$, то все доказано. Если же нет, то пересечение $W(a') \cap A'$ непусто и, будучи подмножеством вполне упорядоченного множества $W(a')$, содержит первый элемент a. Порядковое число a и является первым элементом в A'.

Теорема 13. *Пусть ξ — какое-нибудь порядковое число. Тогда $\xi + 1 > \xi$, причем не существует никакого порядкового числа ξ', удовлетворяющего неравенству $\xi < \xi' < \xi + 1$.*

В самом деле, пусть A — какое-нибудь вполне упорядоченное множество типа ξ. По определению сложения порядковых типов, множество A' типа $\xi+1$ получим, если присоединим к A новый элемент a', следующий за всеми элементами $a \in A$. Тогда, очевидно, $A = A'(a')$, т. е. $\xi < \xi+1$. Всякое порядковое число $\xi' < \xi+1$ является типом некоторого отрезка $A'(x)$ множества A'. Но если $x = a'$, то $A'(x) = A'(a') = A$ и $\xi' = \xi$; если же $x = a < a'$, то $A'(x) = A(a)$ и $\xi' < \xi$. Теорема доказана.

Утверждение теоремы 13 выражают и так: число $\xi+1$ есть первое порядковое число, следующее за числом ξ.

Теорема 14. *Пусть A и B — вполне упорядоченные множества, и пусть α, β — их порядковые типы. Если $A \subseteq B$, то $\alpha \leqslant \beta$.*

В самом деле, в противном случае имели бы $\beta < \alpha$ и множество B было бы подобно отрезку своего подмножества A, что противоречит теореме 9.

Пусть дано некоторое порядковое число τ и каждому $\alpha < \tau$ поставлено в соответствие порядковое число x_α. Пусть ξ — сумма по типу τ всех порядковых чисел x_α; обозначаем ее через

$$\xi = \sum_{\alpha<\tau} x_\alpha .$$

Если X_α есть какое-нибудь множество, упорядоченное по типу x_α, то сумма вполне упорядоченного (по типу $W(\tau)$) множества множеств X_α есть вполне упорядоченное множество X, типом которого является ξ. Так как множество X содержит в качестве своего подмножества каждое из множеств X_α, то на основании теоремы 14 для любого x_α имеем $x_\alpha \leqslant \xi$. Итак, нами доказана

Теорема 15. *Сумма любых порядковых чисел x_α (данных в любом порядке) есть порядковое число ξ, не меньшее чем любое из данных слагаемых x_α.*

Взяв число $\xi+1$, видим, что оно больше любого из данных x_α.

Итак:

Теорема 16. *Ко всякому данному множеству порядковых чисел можно построить порядковое число, большее любого из чисел этого множества.*

Отсюда в свою очередь вытекает, что «множество всех порядковых чисел» не существует вовсе *). Оно и понятно: процесс построения все больших и больших порядковых чисел по самому своему существу не может мыслиться как законченный, а «множество всех порядковых чисел» могло бы возникнуть лишь как итог этого процесса.

Пусть A — какое-нибудь непустое множество порядковых чисел. По теореме 16 существуют числа ξ, большие чем все $x \in A$. Среди

*) См. замечание из § 5 гл. I.

любого множества таких ξ имеется одно-единственное наименьшее ξ_0. Чтобы получить это ξ_0, возьмем какое-нибудь ξ, большее чем все $x \in A$. Тогда во вполне упорядоченном множестве $W(\xi+1)$ будут содержаться числа, большие чем все $x \in A$ (например, число ξ). Среди этих чисел будет одно наименьшее. Оно и будет искомым.

Возможны два случая. 1°. В множестве A имеется последний элемент (т. е. существует наибольшее число x' среди всех чисел $x \in A$). Тогда, очевидно, $\xi = x' + 1$ и будет первым порядковым числом, большим чем все $x \in A$.

2°. В A нет последнего элемента. В этом случае первое число ξ, большее чем все $x \in A$, обладает тем свойством, что, каково бы ни было число $\xi' < \xi$, интервал $(\xi'; \xi)$ вполне упорядоченного множества $W(\xi+1)$ содержит числа $x \in A$, а содержа одно какое-нибудь число $x' \in A$, содержит и все числа $x \in A$, большие чем это x'. В этом случае говорят, что *вполне упорядоченное множество A порядковых чисел сходится к числу ξ* (имеет число ξ своим пределом), и пишут

$$\xi = \lim_{x \in A} x.$$

Пусть, в частности, $A = W(\xi)$, где ξ — какое-нибудь порядковое число. Если в $W(\xi)$ имеется наибольшее число ξ', то $\xi = \xi' + 1$; в этом случае интервал $(\xi', \xi'+2)$ состоит из единственного числа $\xi = \xi' + 1$ и число ξ называется *числом первого рода* (или *изолированным числом*). Таковы все натуральные числа, числа $\omega+1$, $\omega+n$, ω^2+n, $\omega^3+\omega+n$ и т. д. Если же в $W(\xi)$ нет наибольшего числа, то каждый интервал (ξ', ξ), где ξ' — произвольное порядковое число $< \xi$, содержит бесконечное множество порядковых чисел и число ξ называется *предельным порядковым числом* или *числом второго рода*. Таковы числа ω, $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot n$, ω^n, ω^{ω^ω} и т. д.

Замечание. Принцип трансфинитной индукции. Пусть дано какое-нибудь вполне упорядоченное множество W и некоторое предложение $P = P(x)$, зависящее от переменного элемента этого вполне упорядоченного множества W (обычно W есть множество всех порядковых чисел, меньших данного числа α, т. е. в наших обозначениях $W = W(\alpha)$). В этих предположениях утверждение, называемое принципом трансфинитной индукции, может быть сформулировано так:

Если предложение P верно для первого элемента x_0 множества W и если из того, что оно верно для всех элементов x, предшествующих данному элементу x', следует, что предложение P верно и для элемента x', то предложение P верно и для каждого элемента $x \in W$. (При $W = W(\omega)$, т. е. когда W есть множество всех натуральных чисел, принцип трансфинитной индукции превращается в хорошо известный читателю обычный принцип математической индукции.)

Для доказательства принципа трансфинитной индукции достаточно заметить, что если бы существовали элементы $x \in W$, для которых предложение P неверно, то среди этих элементов x был бы первый элемент, пусть x_0. Но тогда предложение P, будучи верным для всех элементов $x \in W$, предшествующих элементу x_0, было бы, в силу наших предположений, верно и для элемента x_0. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

§ 4. Счетные трансфинитные числа (порядковые числа второго класса). Понятие конфинальности. Аксиома выбора

Назовем натуральные числа и число нуль *порядковыми числами первого класса;* таким образом, числа первого класса суть порядковые типы конечных вполне упорядоченных множеств. Порядковые типы счетных вполне упорядоченных множеств назовем счетными трансфинитными числами или порядковыми *(трансфинитными) числами второго класса.* Вполне упорядоченное множество всех чисел первого класса обозначается через W_0; вполне упорядоченное множество всех чисел первого и второго классов — через W_1; вполне упорядоченное множество всех чисел второго класса — через Z_1.

Теорема 17. *Каково бы ни было конечное или счетное множество порядковых чисел второго класса*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \tag{1}$$

первое порядковое число α, следующее за всеми числами (1), *есть также число второго класса.*

Рассмотрим два случая:

а) Среди чисел (1) есть наибольшее, пусть это будет число α_m; число $\alpha_m + 1$, по самому своему определению являющееся числом второго класса, есть первое число, следующее за всеми числами (1).

б) Среди чисел (1) нет наибольшего. Обозначим через α первое порядковое число, следующее за всеми α_n. Рассмотрим множество $W(\alpha)$. Мы утверждаем, что

$$W(\alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} W(\alpha_n). \tag{2}$$

В самом деле, правая часть, очевидно, содержится в левой. Докажем, что, и наоборот, левая содержится в правой. Пусть $\xi \in W(\alpha)$. Так как α есть первое число, следующее за всеми α_n, и $\xi < \alpha$, то существует $\alpha_m > \xi$ и, значит, $\xi \in W(\alpha_m)$. Равенство (2) этим доказано. Из (2) следует, что множество $W(\alpha)$ счетно. Но α есть порядковый тип множества $W(\alpha)$, т. е. порядковый тип счетного вполне упорядоченного множества, чем теорема 17 и доказана.

Из теоремы 17 вытекают очень важные следствия, а именно:

Теорема 18. *Множество Z_1 всех порядковых чисел второго класса несчетно.*

Действительно, в противном случае, в силу теоремы 17, существовало бы число второго класса α, следующее за всеми числами второго класса, т. е. было бы, в частности, $\alpha > \alpha$, что противоречит аксиомам порядка.

Мощность множества Z_1 обозначается через $\aleph_1$ (мы помним, что счетное множество W_0 имеет мощность $\aleph_0$). Первое порядковое число, следующее за всеми числами второго класса, обозначается через ω_1 (иногда через Ω). Итак, ω_1 есть порядковый тип вполне упорядоченного множества $W_1 = W(\omega_1)$. По самому своему определению ω_1 есть первое несчетное трансфинитное число, всякое порядковое число $\alpha < \omega_1$ конечно или счетно. Отсюда следует, что всякое несчетное подмножество множества W_1 имеет тот же тип ω_1 (и, следовательно, ту же мощность $\aleph_1$). В частности, ω_1 можно определить и как порядковый тип вполне упорядоченного множества Z_1 всех порядковых чисел второго класса.

Следствие. *Не существует никакого кардинального числа m, удовлетворяющего неравенству*

$$\aleph_0 < m < \aleph_1. \tag{3}$$

В самом деле, пусть такое число m существует; так как $m < \aleph_1$, то существует подмножество M множества W_1, имеющее мощность m; но в силу неравенства (3) множество M несчетно, а потому, по только что доказанному, имеет мощность $\aleph_1$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Теорема 17 послужит нам поводом к введению важного понятия *конфинальности*, которое мы сразу дадим во всей его общности.

Определение конфинальности упорядоченного множества своему подмножеству. Мы будем говорить, что упорядоченное множество X конфинально своему подмножеству A, если в X не существует никакого элемента, следующего за всеми элементами $x \in A$.

Из этого определения следует сразу: в том и только в том случае, когда в упорядоченном множестве X имеется последний элемент x_1, все множество X конфинально подмножеству, состоящему из одного элемента x_1. Например, сегмент $0 \leqslant t \leqslant 1$ числовой прямой конфинален своему концу 1.

Интервал $0 < t < 1$ конфинален подмножеству, состоящему из всех точек вида $\frac{n}{n+1}$, где n — натуральное число.

Определение конфинальности одного порядкового типа другому. Мы скажем, что порядковый тип ξ конфинален порядковому типу α, если некоторое (а следовательно, и любое) множество X, упорядоченное по типу ξ, конфинально некоторому своему подмножеству A, имеющему тип α.

Так, например, какой-нибудь порядковый тип ξ тогда и только тогда конфинален порядковому числу 1, если ξ есть порядковый тип упорядоченного множества, имеющего последний элемент. Порядковый тип интервала числовой прямой (совпадающий с порядковым типом всей числовой прямой) конфинален порядковому числу ω (так как числовая прямая конфинальна множеству натуральных чисел).

Замечание 1. Понятие конфинальности *) в применении к упорядоченным множествам, не обладая свойством симметрии, обладает свойством транзитивности: если упорядоченное множество X конфинально своему подмножеству X_1, а X_1 — своему подмножеству X_2, то X конфинально множеству X_2. То же верно и для порядковых типов.

Теорема 17 может быть теперь сформулирована и следующим образом:

Теорема 17′. *Множество W_1 всех порядковых чисел первого и второго классов не конфинально никакому своему конечному или счетному подмножеству.*

В самом деле, в противном случае можно было бы найти такое конечное или счетное множество порядковых чисел второго класса, за которым не следовало бы никакого порядкового числа второго класса; но это противоречит теореме 17.

Переходя к порядковым типам, можно сказать:

Теорема 17″. *Трансфинитное число ω_1 не конфинально никакому меньшему трансфинитному числу (в частности, числу ω).*

За каждым порядковым числом $\alpha < \omega_1$ следует число $\alpha+1 < \omega_1$, т. е. число первого рода; значит, все множество W_1 конфинально подмножеству всех чисел первого рода; последнее подмножество, следовательно, несчетно и, по доказанному, имеет тип ω_1 (читатель без труда и непосредственно докажет, что, ставя в соответствие каждому числу $\alpha < \omega_1$ число $\alpha+1$, мы получим подобное отображение множества W_1 на подмножество всех чисел первого рода). С другой стороны, за каждым числом $\alpha < \omega_1$ следует предельное число (например, число $\alpha+\omega$). Отсюда вытекает, что множество W_1 конфинально подмножеству всех предельных трансфинитных чисел второго класса, так что

*) Так, как мы его определили.

это последнее множество также несчетно и имеет порядковый тип ω_1.

Теорема 19. *Если $\alpha < \omega_1$ есть предельное трансфинитное число, то существует счетная последовательность*

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \tag{4}$$

возрастающих порядковых чисел, меньших чем α, имеющая число α своим пределом:

$$\alpha = \lim_{(n)} \alpha_n.$$

(Другими словами, к каждому предельному числу α можно подобрать последовательность чисел (4) таким образом, что α окажется первым числом, превосходящим любое число из последовательности (4).)

Так, например, $\omega = \lim\limits_{(n)} n$, $\quad \omega\cdot 2 = \lim\limits_{(n)} (\omega + n)$, $\quad \omega^2 = \lim\limits_{(n)} \omega\cdot n$,

$\omega^\omega = \lim\limits_{(n)} \omega^n$, $\varepsilon = \lim\limits_{(n)} \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}_{n \text{ раз}}$ и т. д.

Доказательство теоремы 19. Множество $W(\alpha)$ всех чисел, меньших чем α, счетно (имеет тип α); значит, его элементы могут быть занумерованы в последовательность

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots \tag{5}$$

(причем порядок номеров в этой последовательности, вообще говоря, ничего не имеет общего с порядком во вполне упорядоченном множестве $W(\alpha)$). Среди чисел (5) нет наибольшего (так как α — второго рода). Возьмем число $\alpha_0 = \xi_0$. Так как ξ_0 не есть наибольшее число в последовательности (5), то в этой последовательности существуют числа, большие чем ξ_0. Пусть $\alpha_1 = \xi_{p_1}$ — то из них, которое обладает наименьшим индексом $p_1 \geqslant 1$; имеем

$$p_0 = 0 < p_1, \quad \xi_{p_0} < \xi_{p_1}.$$

Так как число ξ_{p_1} не является наибольшим в последовательности (5), то в этой последовательности существуют числа, большие чем ξ_{p_1}; среди них возьмем число $\alpha_2 = \xi_{p_2}$ с наименьшим индексом p_2; при этом $p_2 > p_1 > p_0 = 0$. Продолжая так рассуждать дальше, получим последовательность

$$\alpha_0 = \xi_{p_0}, \ \alpha_1 = \xi_{p_1}, \ \alpha_2 = \xi_{p_2}, \ \ldots, \alpha_n = \xi_{p_n}, \ \ldots, \tag{6}$$

причем

$$0 = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots \tag{7}$$

Докажем, что $\alpha = \lim\limits_{(n)} \alpha_n$. Очевидно, α больше, чем любое α_n. Остается доказать, что не существует никакого $\xi \in W(\alpha)$, которое бы превосходило все числа (6). Возьмем произвольное $\xi \in W(\alpha)$. Так как в последовательности (5) фигурируют все элементы множества $W(\alpha)$, то ξ есть некоторое ξ_m. Так как натуральные числа p_n неограниченно растут, то существует одно-единственное p_n такое, что

$$p_n \leqslant m < p_{n+1};$$

тогда непременно $\xi_m < \xi_{p_{n+1}} = \alpha_{n+1}$, так как в противном случае число $\xi_{p_{n+1}}$ было бы выбрано неправильно; ξ_m было бы больше, чем ξ_{p_n}, и имело бы меньший индекс m, чем число $\xi_{p_{n+1}}$. Теорема 19 доказана.

Эта теорема может быть сформулирована и так:

Теорема 19'. *Всякое предельное трансфинитное число второго класса конфинально числу* ω.

Таким образом, всякое натуральное число конфинально 1, а всякое трансфинитное число второго класса конфинально либо 1 (если оно — первого рода), либо числу ω (если оно — предельное).

Замечание 2. Из теоремы 19 вытекает одно следствие, которому придавалось большое значение особенно в первый, «классический» период развития теории множеств — период, не омраченный никакими сомнениями в правомерности тех или иных, с наивной точки зрения очевидных, теоретико-множественных конструкций. Следствие, о котором идет речь, таково: если у нас уже построено тем или иным путем множество всех порядковых чисел $W(\alpha)$, меньших чем данное число α второго класса, то число α можно всегда построить одним из двух следующих способов: либо прибавлением 1 к некоторому вполне определенному числу $x' \in W(\alpha)$ (именно к наибольшему среди всех чисел $x \in W(\alpha)$, если такое наибольшее число существует), либо переходом к пределу некоторой возрастающей последовательности (4), составленной из чисел $< \alpha$. Таким образом, в то время как каждое натуральное число получается прибавлением 1 к наибольшему предшествующему ему натуральному числу, в области трансфинитных чисел одной этой операции прибавления 1 недостаточно, нужна еще операция перехода к пределу возрастающей последовательности. Это положение вещей вызывает, однако, следующее замечание. В случае чисел натуральных (и трансфинитных первого рода) переход от чисел, меньших α, к числу α является действительно вполне определенным, так как существует одно-единственное наибольшее число в множестве $W(\alpha)$, к этому числу и надо прибавить 1. Этой определенности, однако, нет, когда дело идет о построении последовательности (4), имеющей своим пределом данное предельное число α. Действительно, последовательность (4) строится совершенно автоматически и, как говорят, «эффективно», как скоро нами выбрана некоторая определенная запись множества $W(\alpha)$ в виде последовательности (5). Но все дело в том, что выбор этой записи (т. е. выбор некоторого взаимно однозначного отображения f_α множества $W(\alpha)$ на множество $W(\omega)$ всех натуральных чисел-индексов) при настоящем состоянии наших знаний является актом чистого произвола: мы не имеем никакого закона, по которому можно было бы построить отображение f_α для любого из несчетно-многих трансфинитных чисел α второго класса.

Мы, правда, знаем, что для каждого α, $\omega < \alpha < \omega_1$, такие отображения существуют, т. е., что множество F_α этих отображений непусто. Но мы не имеем никакого правила, позволяющего из всех этих множеств F_α выбрать по одному определенному элементу. Вместо того, чтобы говорить о множестве F_α всевозможных отображений f_α, можно было бы прямо говорить о множестве M_α всех последовательностей (6), сходящихся к предельному числу α: множества M_α непусты в силу теоремы 12, но непустота этих множеств еще не означает наличия правила, которое позволило бы нам для всех предельных трансфинитных чисел $\alpha < \omega_1$ выбрать по одной определенной последовательности (6).

Существование множества M последовательностей (6), по одной последовательности для каждого предельного $\alpha < \omega_1$, может утверждаться нами лишь на основе следующего общего допущения, известного под названием аксиомы Церме́ло (Zermelo) или аксиомы выбора.

Аксиома выбора. *Пусть дано множество $\mathfrak{M}$, элементами которого являются попарно не пересекающиеся непустые множества M_α. Тогда существует множество M, каждый элемент которого есть элемент m_α некоторого множества M_α и которое пересекается с каждым множеством M_α лишь по одному элементу m_α.*

Другими словами, множество M, существование которого постулируется этой аксиомой, состоит из элементов, «выбранных по одному» из каждого множества $M_\alpha \in \mathfrak{M}$.

Аксиома выбора была высказана свыше 70 лет тому назад и вызвала многочисленные исследования о фактическом месте, занимаемом ею в логическом построении современной математики.

При этом оказалось, что мы не умеем обойтись без применения аксиомы Цермело при доказательстве некоторых элементарных теорем, относящихся даже не к теории множеств в собственном смысле слова, а просто к математическому анализу. Возьмем, например, следующие два определения непрерывности функции f, заданной на числовой прямой:

1°. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если ко всякому положительному ε можно подобрать такое положительное δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x_0-x| < \delta$, имеем $|f(x_0)-f(x)| < \varepsilon$.

2°. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если для всякой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящейся к точке x_0, последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к точке $f(x_0)$.

Эти два определения, как известно, эквивалентны. Проанализируем обычное доказательство их эквивалентности. Пусть f непрерывна в точке x_0 в первом смысле, и пусть дана какая-нибудь последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, сходящаяся к x_0. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое δ, что для всех x, лежащих в интервале $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, имеем $|f(x_0)-f(x)| < \varepsilon$. Взяв для данного ε такое δ, подбираем к нему натуральное N так, чтобы для всех $n \geqslant N$ было $|x_0-x_n| < \delta$, значит, $|f(x_0)-f(x_n)| < \varepsilon$. Так как это имеет место для любого $\varepsilon > 0$, то последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ сходится к $f(x_0)$. Итак, если функция непрерывна в смысле определения 1°, то она непрерывна и в смысле определения 2° *).

Пусть теперь f — функция, непрерывная в точке x_0 в смысле определения 2°. Докажем, что она непрерывна и в смысле определения 1°. Предположим противное.

*) Заметим, что доказательство этого утверждения не опирается на аксиому Цермело: выбор числа N производится однозначно, так как можно взять первое такое (натуральное) N, что для всех $n > N$ имеем $|x_0-x_n| < \delta$.

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что при любом $\delta > 0$ в интервале $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ имеются точки $x_{(\delta)}$, для которых $|f(x_0) - f(x_{(\delta)})| \geqslant \varepsilon$. Давая числу δ значения $\delta_n = \frac{1}{n}$ и беря для каждого такого δ_n некоторое $x_{(\delta_n)}$, которое обозначим для краткости через x_n, получим последовательность точек x_n, сходящуюся к точке x_0, в то время как для всех этих точек x_n имеем $|f(x_0) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$. Доказательство эквивалентности определений 1° и 2° этим закончено.

Рассмотрим ближе вторую половину этого доказательства. Существование точек $x_{(\delta)}$, одновременно удовлетворяющих двум условиям $|x_0 - x_{(\delta)}| < \delta$ и $|f(x_0) - f(x_{(\delta)})| \geqslant \varepsilon$, не означает (согласно обычной точке зрения, принятой и в этой книге) того, что мы можем дать правило для фактического построения одной определенной такой точки: достаточно, чтобы могло привести к противоречию предположение, что множество этих точек пусто. Поэтому предположение, что функция f не является в смысле определения 1° непрерывной в данной точке x_0, означает лишь, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ множество $M_{(\delta)}$ тех точек x интервала $[x_0 - \delta;\ x_0 + \delta]$, для которых $|f(x_0) - f(x)| \geqslant \varepsilon$, непусто. Переход от последовательности непустых множеств

$$M_n = M_{(\delta_n)}$$

к последовательности точек $x_n \in M_n$ может быть осуществлен, вообще говоря, лишь путем произвольного выбора*) в каждом из множеств M_n по одной точке, которую мы и обозначаем через x_n.

Отметим также, что в неявном виде аксиома выбора в некоторых случаях использовалась нами в первой главе.

Применим аксиому выбора к доказательству следующего интересного предложения:

Теорема 20. *Существует множество E, состоящее из действительных чисел и имеющее мощность $\aleph_1$ (другими словами, верно неравенство $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$, как всегда, есть мощность континуума).*

Для доказательства теоремы 20 дадим принадлежащее Лебегу фактическое разбиение интервала $0 < t < 1$ на $\aleph_1$ попарно не пересекающихся множеств E_α, $\omega \leqslant \alpha \leqslant \omega_1$, т. е. дадим представление интервала $0 < t < 1$ в виде суммы $\bigcup\limits_{\omega \leqslant \alpha \leqslant \omega_1} E_\alpha$ попарно не пересекающихся множеств, причем это представление будет совершенно эффективным (в том смысле, что, как скоро дана точка t интервала $(0;\ 1)$, можно однозначно определить то единственное множество E_α, которому она принадлежит). Разбиение интервала $(0;\ 1)$ на множества E_α осуществляется так.

Занумеруем раз навсегда все рациональные числа интервала $(0;\ 1)$ в последовательность

$$r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots \tag{8}$$

---

*) Множества M_n пересекаются: более того, очевидно, $M_{n+1} \subseteq M_n$; поэтому, чтобы применить аксиому Цермело в том виде, как она была сформулирована, надо от множеств M_n перейти к множествам $M_n \setminus M_{n+1}$, непустые среди них обозначить через M_1', M_2', ..., M_n', ... и из них уже выбирать на основании аксиомы Цермело по точке x_n (см., впрочем, стр. 79).

Пусть t — произвольная точка интервала $(0; 1)$. Число t однозначно может быть представлено в виде суммы бесконечного ряда

$$t = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_k}} + \ldots \tag{9}$$

(в самом деле, достаточно взять разложение числа t в бесконечную двоичную дробь, причем в случае, если t допускает два таких разложения, берем то из них, которое, начиная с некоторого места, состоит из одних единиц; числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ суть номера двоичных знаков нашего разложения, равных 1). Имея разложение (9), рассмотрим множество рациональных чисел

$$r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_k}, \ldots \tag{10}$$

Возможны два случая:

а) Множество (10) не является вполне упорядоченным (по величине входящих в него рациональных чисел); в этом случае относим точку t к множеству E_{ω_1}.

б) Множество (10) вполне упорядочено и имеет тип α, $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$; в этом случае относим точку t к множеству E_α.

Таким образом, каждая точка t интервала $(0; 1)$ попадет в одно и только в одно множество E_α, где $\omega \leqslant \alpha \leqslant \omega_1$, так что эти множества попарно не пересекаются и дают в сумме весь интервал $(0; 1)$. Докажем, что, каково бы ни было трансфинитное число α второго класса, множество E_α непусто.

В самом деле, на основании теоремы 1 существуют множества M_α, состоящие из рациональных чисел и имеющие порядковый тип α. Возьмем какое-нибудь одно такое множество M_α; пусть его элементы суть рациональные числа

$$r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots, r_{n_k}, \ldots$$

(записанные в порядке возрастания их номеров в последовательности (8)). Действительное число $t = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n_k}} + \ldots$ содержится в множестве E_α.

Для доказательства теоремы 20 нам остается применить аксиому Цермело и выбрать из каждого множества E_α по точке x_α. Полученное множество $E = \{x_\alpha\}$ будет иметь мощность $\aleph_1$.

Замечание 3. Только что приведенный пример пользования аксиомой Цермело типичен: доказав при помощи этой аксиомы существование имеющих мощность $\aleph_1$ множеств E, состоящих из действительных чисел, мы в то же время лишены какой бы то ни было возможности указать индивидуальный пример такого множества: два лица, говорящие о каком-либо множестве вида $E = \{x_\alpha\}$, где $x_\alpha \in E_\alpha$ (по одной точке из каждого E_α), никак не могут быть уверены в том, что они говорят об одном и том же множестве, так как не существует объективного признака, позволяющего удостовериться в том, что оба эти лица выбрали из каждого множества E_α по одному и тому же элементу x_α.

В этом смысле мы говорим, что построенное только что точечное множество E мощности $\aleph_1$ есть множество неэффективное (в противоположность множеству $\mathfrak{M}$ мощности $\aleph_1$, элементами которого являются сами множества E_α; это множество $\mathfrak{M}$ эффективно, его элементы E_α определены совершенно однозначно, так как о каждой данной точке t интервала $(0; 1)$ мы можем сказать, какому именно множеству E_α она принадлежит).

Замечание 4. Приведем несколько дальнейших примеров на применение аксиомы выбора.

1°. Доказательство теоремы: сумма счетного множества счетных множеств есть счетное множество—опирается на аксиому Цермело. В самом деле, пусть дано счетное множество счетных множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ Для простоты предполагаем, что множества E_n попарно не пересекаются. Так как каждое из множеств E_n счетно, то для любого n существует по крайней мере одно взаимно однозначное отображение множества E_n на множество всех натуральных чисел. Другими словами, множество M_n, элементами которого являются взаимно однозначные отображения множества E_n на множество всех натуральных чисел, непусто. Множества M_n для различных n попарно не пересекаются. Применяя аксиому Цермело, выбираем из каждого M_n по одному элементу. Это дает нам возможность для каждого n некоторым определенным способом записать множество E в виде бесконечной последовательности:

$$E_n = \{e_1^n, e_2^n, \ldots, e_k^n, \ldots\}.$$

Таким образом, все множество $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ записано в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{ccccccc}
e_1^1, & e_2^1, & e_3^1, & e_4^1, & \ldots, & e_k^1, & \ldots \\
e_1^2, & e_2^2, & e_3^2, & e_4^2, & \ldots, & e_k^2, & \ldots \\
e_1^3, & e_2^3, & e_3^3, & e_4^3, & \ldots, & e_k^3, & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
e_1^n, & e_2^n, & e_3^n, & e_4^n, & \ldots, & e_k^n, & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot &
\end{array}$$

что дает нам возможность занумеровать все элементы множества уже совершенно эффективно (§ 4 гл. I, стр. 19).

2°. Проведем с полной аккуратностью (опирающееся на аксиому Цермело) доказательство теоремы 3 § 4 гл. I:

Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Доказательство. Множество E бесконечно; это означает, что при любом натуральном n множество E содержит подмножество, состоящее из n элементов. Поэтому, обозначая через $\mathfrak{M}_n$ множество всех подмножеств множества E, каждое из которых содержит ровно $n!$ элементов, мы можем утверждать, что при любом натуральном n множество $\mathfrak{M}_n$ непусто. Очевидно, никакие два множества $\mathfrak{M}_p$, $\mathfrak{M}_q$, $p \neq q$, не пересекаются. Применяя аксиому Цермело, выберем из каждого множества $\mathfrak{M}_n$ по одному элементу M_n. Имеем последовательность

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$$

Так как множество M_n состоит из $n!$ элементов, а число элементов множества $M_1 \cup \ldots \cup M_{n-1}$ меньше чем

$$(n-1)[(n-1)!] < n!,$$

то в множестве $M_n \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_{n-1})$ можно выбрать элемент x_n. Множество

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

есть счетное подмножество множества E.

Вопрос. Чем отличается только что приведенное доказательство от доказательства той же теоремы, данного в § 4 гл. 1, и в чем преимущество теперешнего доказательства сравнительно с тогдашним?

§ 5. Теорема Цермело

Теорема Цермело гласит:

Всякое множество может быть сделано вполне упорядоченным *)

Доказательству (опирающемуся на аксиому Цермело) предпошлем одно общее замечание, касающееся отображений множеств.

В первой главе (§ 3) понятие отображения множества X в множество Y было введено как новое элементарное понятие, не подлежащее определению: было просто сказано, что если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие некоторый элемент $y = f(x)$ множества Y, то имеется отображение f множества X в Y. Теперь мы заметим, что в действительности понятие отображения сводится к понятию множества. Именно, наряду с данными двумя множествами X и Y рассмотрим множество Z, элементами которого являются всевозможные пары (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Множество всех таких пар называется *произведением множества X на множество Y* (Кантор) и обозначается через $X \times Y$. *Задать (однозначное) отображение f множества X в множество Y — значит задать некоторое подмножество Φ множества $Z = X \times Y$, удовлетворяющее условию: каждый элемент x_0 множества X входит в одну и лишь в одну пару $z_0 = (x_0, y_0)$, являющуюся элементом множества Φ.* Если (x_0, y_0) есть (единственная) пара $z_0 \in \Phi$, содержащая данный элемент $x_0 \in X$, то элемент y_0 этой пары и есть, по определению, образ

*) Мы даем теорему Цермело в ее традиционной формулировке. По поводу этой формулировки вспомним, что мы определили упорядоченное множество как совокупность двух понятий: во-первых, некоторого множества M и, во-вторых, имеющегося между любыми двумя различными элементами x, y множества M отношения $x < y$ (или $y < x$); поэтому выражения «данное (вполне) упорядоченное множество» и «множество всех элементов данного (вполне) упорядоченного множества» имеют неодинаковое содержание (так же как разное содержание имеют выражения «данное метрическое пространство» и «множество всех точек данного метрического пространства» или «данная группа» и «множество всех элементов данной группы»). Если соблюдать полную логическую аккуратность, то теорему Цермело следовало бы сформулировать так: «*Ко всякому множеству существует вполне упорядоченное множество, множеством всех элементов которого является данное множество*». За исключением случаев, когда данное множество M пусто или состоит лишь из одного элемента, для него существует более одного вполне упорядоченного множества, множеством всех элементов которых оно является.

$y_0 = f(x_0)$ элемента x_0 при отображении f. Обратно, если дан элемент $y_0 \in Y$, то множество всех элементов $x \in X$, входящих к какую-нибудь из пар $(x, y_0) \in \Phi$, называется *прообразом* элемента $y_0 \in Y$ при отображении f и обозначается через $f^{-1}(y_0)$.

Мы можем теперь дать аксиоме Цермело такую формулировку:

Для всякого множества $\mathfrak{M}$ попарно не пересекающихся непустых множеств M_α существует отображение f множества $\mathfrak{M}$ в сумму $\bigcup\limits_\alpha M_\alpha$ всех данных множеств M_α такое, что образом всякого элемента $M_\alpha \in \mathfrak{M}$ при этом отображении является некоторый элемент m_α множества M_α:

$$f(M_\alpha) = m_\alpha \in M_\alpha.$$

Докажем, что в этой формулировке аксиомы Цермело можно отказаться от требования, чтобы множества M_α попарно не пересекались. Докажем, другими словами, следующий

Обобщенный принцип выбора. *Для всякого множества $\mathfrak{M}$ непустых множеств M_α существует отображение множества $\mathfrak{M}$ в сумму $\bigcup\limits_\alpha M_\alpha$ множеств M_α, при котором образом каждого элемента $M_\alpha \in \mathfrak{M}$ является некоторый элемент m_α множества M_α.*

Доказательство заключается в весьма простом сведении доказываемого предложения к аксиоме Цермело в ее первоначальном виде. Рассмотрим, в самом деле, наряду с каждым данным множеством M_α множество M'_α, элементами которого являются всевозможные пары вида (M_α, m_α), где $M_\alpha \in \mathfrak{M}$ фиксировано, а m_α суть всевозможные элементы множества M_α. Ставя в соответствие каждому элементу (M_α, m_α) множества M'_α элемент m_α множества M_α, содержащийся в паре (M_α, m_α), получим взаимно однозначное соответствие между множеством M'_α и множеством M_α. Множество всех множеств M'_α обозначим через $\mathfrak{M}'$! Двум различным элементам M_α и M_β множества $\mathfrak{M}$ соответствуют непересекающиеся множества M'_α и M'_β, так что к множеству $\mathfrak{M}'$ множеств M'_α можно применить аксиому Цермело в ее первоначальном виде и выбрать из каждого множества M'_α по элементу $m'_\alpha = (M_\alpha, m_\alpha) \in M'_\alpha$. Ставя в соответствие каждому M_α элемент m_α (тот самый, который содержится в паре (m_α, M_α), являющейся выбранным нами элементом m'_α множества M'_α), получим отображение $m_\alpha = f(M_\alpha)$, существование которого утверждается в обобщенном принципе выбора. Обобщенный принцип выбора мы будем кратко формулировать так:

Если дано какое-нибудь множество $\mathfrak{M}$ непустых множеств M_α, то можно из всех множеств M_α выбрать по элементу m_α

(причем среди выбранных элементов могут быть и совпадающие).

При доказательстве теоремы Цермело нам будет удобна еще следующая

Лемма 1. *Для того чтобы данное упорядоченное множество M было вполне упорядоченным, достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы в множестве M и в верхнем классе любого сечения множества M был первый элемент.*

В самом деле, предположим, что в данном упорядоченном множестве M наше условие выполнено. Пусть E — какое-нибудь непустое подмножество множества M. Докажем, что в E имеется первый элемент. Это, очевидно, верно, если E содержит первый элемент x_0 всего множества M. Пусть элемент x_0 не содержится в E. Произведем сечение множества M, отнеся к первому классу A все те элементы $x \in M$, которые предшествуют всем элементам множества E, а ко второму классу B — все остальные элементы множества M. Так как $x_0 \in A$ и $E \subseteq B$, то оба класса непусты; кроме того, из $x \in A$, $y \in B$ следует $x < y$, так что мы действительно имеем сечение. Пусть y_0 — первый элемент в B (такой существует по условию). Докажем, что $y_0 \in E$ (так как $E \subseteq B$, то отсюда будет следовать, что y_0 — первый элемент в E). Но если бы y_0 не содержалось в E, то для любого $y \in E$ мы имели бы $y_0 < y$, откуда $y_0 \in A$, вопреки предположению. Лемма 1 доказана.

Переходим к доказательству теоремы Цермело. Это доказательство (заимствованное у Хаусдорфа) довольно точно воспроизводит доказательство самого Цермело.

Пусть дано произвольное множество M. Так как пустое (и вообще всякое конечное) множество, очевидно, может быть вполне упорядочено, то мы можем предположить множество M непустым (даже бесконечным). Рассмотрим множество всех непустых подмножеств Q_α множества M и согласно обобщенному принципу выбора в каждом из этих множеств Q_α выберем по элементу p_α. Этот элемент p_α (который считаем определенным для каждого непустого $Q_\alpha \subseteq M$) называем *отмеченным* элементом в Q_α. Отмеченный элемент множества Q_α называем также «*придаточным*» элементом к множеству $P_\alpha = M \setminus Q_\alpha$ и обозначаем через $f(P_\alpha)$. Таким образом, для всякого множества $P_\alpha \subset M$ однозначно определен придаточный элемент $f(P_\alpha) = p_\alpha \in Q_\alpha = M \setminus P_\alpha$. Множество $P'_\alpha = P_\alpha \cup p_\alpha$ называем «*преемником*» множества P_α. *Преемник определен, таким образом, для каждого множества $P_\alpha \subset M$.*

Назовем теперь *цепью множества M* всякое множество K, удовлетворяющее следующим условиям:

a) элементами множества K являются подмножества множества M;

б) пустое множество является элементом множества K;

в) сумма любых множеств, являющихся элементами множества K, есть элемент множества K;

г) если $P_\alpha \in K$ и $P_\alpha \neq M$, то и $P'_\alpha \in K$.

Цепи существуют: в самом деле, множество всех подмножеств множества M является цепью.

Легко проверить, что пересечение любого множества цепей есть цепь; значит, существует так называемая *наименьшая цепь* множества M — именно цепь K_0, являющаяся пересечением всех цепей множества M. Относительно этой наименьшей цепи K_0 докажем следующее предложение:

Лемма 2. *Если $A \in K_0$, $B \in K_0$, $A \neq B$, то либо $A \subset B$, либо $B \subset A$.*

В самом деле, назовем какое-либо множество $P \in K_0$ *нормальным*, если, каково бы ни было $X \in K_0$, имеем либо $P \subseteq X$, либо $X \subset P$. Для доказательства леммы 2 достаточно убедиться в том, что все множества $P \in K_0$ нормальны. Для этого обозначим через K' множество всех нормальных $P \in K_0$. Достаточно доказать, что K' есть цепь: так как $K' \subseteq K_0$ и K_0 есть наименьшая цепь, то отсюда будет следовать, что $K' = K_0$.

Доказательство того, что K' есть цепь, в свою очередь опирается на следующее вспомогательное предложение:

Лемма 2′ (к лемме 2). *Пусть $P \in K_0$, $P \subset M$; если P — нормальное множество, то для любого множества $X \in K_0$ имеем либо $X \subseteq P$, либо $X \supseteq P'$* (другими словами, если P нормально, то и P' нормально).

Для доказательства леммы 2′ обозначим через $K(P)$ множество всех $X \in K_0$, удовлетворяющих (для данного, зафиксированного нормального $P \subset M$) условию: либо $X \subseteq P$, либо $X \supseteq P'$. Достаточно доказать, что $K(P)$ есть цепь: так как $K(P) \subseteq K_0$, а K_0 — наименьшая цепь, то отсюда будет следовать, что $K(P) = K_0$, т. е. что лемма 2′ верна.

Итак доказываем, что $K(P)$ есть цепь. Очевидно, пустое множество является элементом множества $K(P)$.

Пусть даны какие-нибудь $P_\alpha \in K(P)$; докажем, что их сумма $\bigcup_\alpha P_\alpha$ также есть элемент множества $K(P)$. В самом деле, если каждое слагаемое P_α содержится в P, то и $\bigcup_\alpha P_\alpha$ содержится в P; если же хоть одно слагаемое P_α не содержится в P, то из $P_\alpha \in K(P)$ следует, что $P_\alpha \supseteq P'$, а тогда тем более $\bigcup_\alpha P_\alpha \supseteq P'$.

Остается доказать, что из $P_\alpha \in K(P)$, $P_\alpha \neq M$, следует, что $P'_\alpha \in K(P)$. Но так как $P_\alpha \in K(P)$, то либо $P_\alpha \subseteq P$, либо $P_\alpha \supseteq P'$.

Во втором случае и подавно $P'_\alpha \supseteq P'$. Рассмотрим первый случай: $P_\alpha \subseteq P$. Если $P_\alpha = P$, то $P'_\alpha = P'$, и снова $P'_\alpha \in K(P)$. Пусть $P_\alpha \subset P$; докажем, что в этом случае $P'_\alpha \subseteq P$. В самом деле, так как P предположено нормальным, то либо $P'_\alpha \subseteq P$, тогда все готово, либо $P'_\alpha \supset P$, но в последнем случае мы имели бы $P'_\alpha \diagdown P_\alpha = (P'_\alpha \diagdown P) \cup (P \diagdown P_\alpha)$, причем каждое из двух заключенных в скобки слагаемых непусто; поэтому множество $P'_\alpha \diagdown P_\alpha$ содержало бы по крайней мере два элемента, тогда как в действительности оно состоит из единственного элемента p_α. Итак, случай $P'_\alpha \supset P$ невозможен, и лемма 2′ доказана.

Переходим к доказательству леммы 2. Как уже было сказано, достаточно проверить, что множество K' всех нормальных $P \in K$ есть цепь. Делаем эту проверку. Очевидно, пустое множество нормально.

Пусть дано любое множество нормальных P_α. Докажем, что их сумма $\bigcup\limits_\alpha P_\alpha$ также нормальна. В самом деле, пусть X — произвольное множество, являющееся элементом множества K_0. Если каждое P_α содержится в X, то тем же свойством обладает и их сумма; если хоть одно P_α содержит множество X, то тем более $\bigcup\limits_\alpha P_\alpha \supseteq X$. Нормальность множества $\bigcup\limits_\alpha P_\alpha$ этим доказана.

Остается доказать, что если P_α нормально, то тем же свойством обладает и множество P'_α. Но это утверждение, как мы видели, и есть утверждение леммы 2′.

Лемма 2 доказана. Из нее следует, что, полагая для двух каких-либо элементов $P_\alpha \in K_0$, $P_\beta \in K_0$

$$P_\alpha < P_\beta, \text{ если } P_\alpha \subset P_\beta,$$

мы превращаем множество K_0 в упорядоченное множество. Докажем, что упорядоченное таким образом множество K_0 вполне упорядочено. В самом деле, пустое множество является, очевидно, первым элементом множества K_0. В силу леммы 1 остается доказать, что при всяком сечении $K_0 = A \cup B$ в упорядоченном множестве K_0 верхний класс B содержит первый элемент. Рассмотрим сумму P всех $P_\alpha \in A$. Множество P есть элемент множества K_0 (по свойству в) цепи), и поэтому либо $P \in A$, либо $P \in B$. Если $P \in A$, то, взяв какое-нибудь $P_\beta \in B$, имеем $P < P_\beta$, значит, $P \subset P_\beta$. Поэтому $P \neq M$ и преемник $P' = P \cup p$ множества P существует. По самому определению множества P имеем $P' \in B$ (так как иначе было бы $P' \subseteq P$). Множество P' есть первый элемент множества B (так как если бы был элемент $P_\beta < P'$, $P_\beta \in B$, то было бы $P < P_\beta < P'$, т. е. $P \subset P_\beta \subset P'$, чего не может быть, так как $P' \diagdown P$ состоит из единственного элемента p). Итак, в случае $P \in A$ в B имеется первый элемент P'.

Если же $P \in B$, то само P есть первый элемент в B. В самом деле, каков бы ни был элемент $P_\beta \in B$, для любого $P_\alpha \in A$ имеем $P_\alpha < P_\beta$, т. е. $P_\alpha \subset P_\beta$; значит, и сумма P всех P_α содержится в P_β, т. е. $P \leq P_\beta$. Итак, K_0 есть вполне упорядоченное множество.

Докажем, наконец, что между множеством M и множеством всех $P_\alpha \in K_0$, $P_\alpha \neq M$, существует взаимно однозначное соответствие (позволяющее перенести на множество M порядок из вполне упорядоченного множества K_0 и тем сделать множество M вполне упорядоченным). Искомое взаимно однозначное соответствие осуществляется, как мы сейчас увидим, тем, что мы каждому $P_\alpha \in K_0$, $P_\alpha \neq M$, ставим в соответствие его придаточный элемент $p_\alpha = f(P_\alpha)$. Покажем, что определенное таким образом отображение f множества всех $P_\alpha \in K_0$, $P_\alpha \neq M$, в множество M взаимно однозначно. В самом деле, если P_α, P_β — два различных элемента множества K_0 и, например, $P_\alpha < P_\beta$, то это означает, что $P_\alpha \subset P_\beta$. Но тогда $P'_\alpha = P_\alpha \cup p_\alpha$ (как первый, следующий за P_α элемент вполне упорядоченного множества K_0) может находиться с множеством P_β лишь в отношении $P'_\alpha \leq P_\beta$, т. е. $P_\alpha \cup p_\alpha \subseteq P_\beta$. Значит, $p_\alpha \in P_\beta$, тогда как p_β не содержится в P_β и поэтому не может совпадать с p_α. Итак, различным элементам множества K_0 соответствуют различные элементы множества M. Остается доказать, что взаимно однозначное отображение f есть отображение на все множество M. Для этого возьмем какой-нибудь элемент $p \in M$. Обозначим через P сумму всех множеств $P_\alpha \in K_0$, не содержащих элемент p (такие P_α заведомо существуют: к ним относится, например, пустое множество, являющееся элементом множества K_0). Так как K_0 — цепь, то $P \in K_0$. Докажем, что p есть придаточный элемент к P, т. е. $f(P) = p$. Но если бы p не было придаточным элементом множества P, то множество $P' \supset P$ также не содержало бы элемент p, что противоречит тому, что P есть сумма всех $P_0 \in K_0$, не содержащих p. Итак, действительно, $f(P) = p$, и доказательство теоремы Цермело доведено до конца.

Замечание 1. Наше последнее рассуждение содержит доказательство того, что (единственное) $P \in K_0$, которому, в силу отображения f, поставлен в соответствие данный элемент $p \in M$, есть сумма $P = f^{-1}(p)$ всех тех $P_\alpha \in K_0$, которые не содержат элемент p.

Замечание 2. Единственный элемент произвола, содержащийся в только что приведенном доказательстве теоремы Цермело, состоит в выборе для каждого множества $P \subset M$ его придаточного элемента $p = f(P) \in M \setminus P$. После того как этот выбор сделан, все рассуждения, приводящие к внесению в множество M полной упорядоченности, происходят совершенно автоматически и однозначно. Таким образом, если заданное множество M таково, что мы умеем эффективно осуществить для каждого $P \subset M$ выбор некоторого элемента

$p \in M \setminus P$, то множество M может быть вполне упорядочено эффективным образом. Так, например, если мы за M возьмем множество всех натуральных чисел и для каждого множества $P \subset M$ определим придаточный элемент $p = f(P)$ как наименьшее натуральное число, не принадлежащее множеству P, то, применяя предыдущие рассуждения, мы и получим естественный порядок в множестве всех натуральных чисел. Если же мы определим $f(P)$ как то, не принадлежащее множеству P, натуральное число, которое состоит из наименьшего числа простых множителей и среди чисел с данным числом множителей является наименьшим, то мы получим полное упорядочение множества всех натуральных чисел по типу ω^2: сначала будут идти все простые числа в их естественном порядке, потом все числа, состоящие из двух простых множителей, также в их естественном порядке, и т. д.

Вообще, если нам дано какое-нибудь вполне упорядоченное множество и мы хотим восстановить этот порядок, рассуждая, как при доказательстве теоремы Цермело, то нам надо объявить придаточным элементом $f(P)$ для любого $P \subset M$ первый элемент множества $M \setminus P$ (в том порядке, который дан в множестве M с самого начала и который мы хотим восстановить). В этом, если угодно, и заключается вся идея доказательства Цермело.

§ 6. Теоремы о кардинальных числах

Из теоремы Цермело вытекает, что всякая мощность может быть рассматриваема как мощность некоторого вполне упорядоченного множества. Это позволяет нам дополнить результаты § 6 гл. 1 следующим весьма существенным предложением:

Теорема 21. *Всякие две мощности a и b сравнимы между собою, т. е. либо $a < b$, либо $a = b$, либо $a > b$. Другими словами, любое множество мощностей является упорядоченным (по величине *)).*

В самом деле, пусть A и B — два вполне упорядоченных множества, имеющих соответственно мощности a и b. Тогда, в силу теоремы 11', имеются лишь три возможности:

либо A и B подобны между собою (тогда $a = b$);

либо A подобно некоторому отрезку множества B (тогда $a \leqslant b$);

либо B подобно некоторому отрезку множества A (тогда $b \leqslant a$).

Теорема 21 этим доказана.

Теперь мощности будут называться также *кардинальными числами*.

Из теоремы 21 и из следствия теоремы 18 вытекает

Следствие. *Для всякой несчетной мощности m имеем $m \geqslant \aleph_1$ (т. е. $\aleph_1$ есть наименьшая несчетная мощность).*

Установим теперь некоторые соотношения между мощностями и порядковыми числами.

Пусть дано какое-нибудь бесконечное кардинальное число m. Рассмотрим все порядковые числа мощности m (т. е. все порядковые типы вполне упорядоченных множеств мощности m). *Совокупность этих порядковых чисел обозначается через $Z(m)$ и называется числовым классом, соответствующим мощности m.*

---

*) Даже, как мы сейчас увидим, вполне упорядоченными (теорема 22).

В частности, $Z(\aleph_0)$ есть множество всех счетных трансфинитных чисел, т. е. чисел «второго класса». Среди порядковых чисел мощности m имеется наименьшее: оно обозначается через $\omega(m)$ и называется *начальным порядковым числом мощности* m.

Замечание 1. Всякое начальное число $\omega(m)$ есть предельное число: если бы было $\omega(m)=\alpha+1$, то число α, будучи $<\omega(m)$, по определению начального числа имело бы мощность $m'<m$. Но от прибавления одного элемента мощность бесконечного множества не меняется (§ 6 гл. 1), поэтому $m=m'$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Рассмотрим множество всех начальных чисел бесконечных мощностей, меньших чем m. Это множество вполне упорядочено. Пусть порядковое число α есть его порядковый тип. Тогда полагаем

$$\omega_\alpha=\omega(m),$$

т. е. снабжаем каждое начальное порядковое число индексом, равным порядковому типу множества всех начальных порядковых чисел, меньших чем данное. Так как α (как и всякое порядковое число) есть порядковый тип множества $W(\alpha)$ всех порядковых чисел $<\alpha$, то $W(\alpha)$ подобно множеству всех начальных чисел, меньших числа $\omega_\alpha=\omega(m)$, так что каждому $\beta<\alpha$ соответствует $\omega_\beta<\omega_\alpha$. Отсюда сразу следует, что любое множество начальных порядковых чисел подобно множеству индексов этих чисел (чем и оправдано введение индексов). В частности, порядковое число ω, являющееся первым бесконечным порядковым числом, получает теперь обозначение ω_0, обозначение ω_1 также уже было нами введено.

Мощность начального числа ω_α обозначается через $\aleph_\alpha$ (этому общему обозначению вполне соответствуют ранее введенные обозначения $\aleph_0$ для счетной мощности и $\aleph_1$ для первой несчетной мощности). Таким образом, каждая мощность m получает обозначение в виде некоторого $\aleph_\alpha$. Пусть нам дано любое множество кардинальных чисел. Ставя в соответствие любому из данных кардинальных чисел $m=\aleph_\alpha$ индекс α, получим взаимно однозначное отображение данного множества мощностей в множество порядковых чисел α; при этом, если $\aleph_\alpha<\aleph_\beta$, то $\omega_\alpha<\omega_\beta$ и, следовательно, $\alpha<\beta$, поэтому наше соответствие есть соответствие подобия. Отсюда и из того, что всякое множество порядковых чисел является вполне упорядоченным, следует

Теорема 22. *Всякое множество мощностей является вполне упорядоченным (по величине).*

Замечание 2. При этом множество всех бесконечных мощностей n, меньших данной мощности $m=\aleph_\alpha$, подобно множеству $W(\alpha)$ всех порядковых чисел $\beta<\alpha$ (или множеству всех начальных порядковых чисел $\omega_\beta<\omega_\alpha$).

Мы можем определить число $\omega(m)=\omega_\alpha$ как порядковый тип множества всех порядковых чисел, мощность каждого из которых меньше, чем данное кардинальное число $m=\aleph_\alpha$. (Это вытекает из того, что порядковое число тогда и только тогда меньше, чем данное $\omega(m)=\omega_\alpha$, когда его мощность меньше m.)

Естественно заняться исследованием числового класса

$$Z_\alpha=Z(\aleph_\alpha),$$

соответствующего данной мощности $m=\aleph_\alpha$, и определить порядковый тип и мощность этого множества. Прежде всего, очевидно, что числовой класс Z_α есть множество всех порядковых чисел ξ, удовлетворяющих неравенствам

$$\omega_\alpha\leqslant\xi<\omega_{\alpha+1},$$

т. е.

$$Z_\alpha=W_{\alpha+1}\setminus W_\alpha, \tag{1}$$

где для краткости положено

$$W_\alpha = W(\omega_\alpha).$$

Более того,

$$W_{\alpha+1} = W_\alpha + Z_\alpha \text{ *)}, \tag{2}$$

где справа сложение вполне упорядоченных множеств определено, как в § 2. Далее, для любого α имеем

$$W_\alpha = \sum_{\nu < \alpha} Z_\nu \tag{3}$$

(сумма берется по вполне упорядоченному множеству всех $\nu < \alpha$).

Теорема 23. *Множество Z_α имеет порядковый тип $\omega_{\alpha+1}$ и, следовательно, мощность $\aleph_{\alpha+1}$.*

Эту теорему мы выведем из другой, являющейся непосредственным обобщением теоремы 2 § 4 гл. 1.

Теорема 24. *Пусть m — бесконечное кардинальное число. Сумма m множеств M_α, каждое из которых имеет мощность $\leqslant m$, есть множество мощности $\leqslant m$.*

До того, как доказывать теорему 24, покажем, как из нее вытекает теорема 23.

Прежде всего, применяя теорему 24 к случаю, когда все слагаемые, кроме конечного числа, пусты, видим, что частным случаем теоремы 24 является

Теорема 24_0. *Сумма конечного числа множеств, из которых каждое имеет мощность $\leqslant m$ (где m — бесконечное кардинальное число), есть множество мощности $\leqslant m$.*

Выведем теперь из теоремы 24 следующее предложение (содержащее теорему 23 как частный случай):

Теорема 23'. *В множестве W_α (вообще во всяком вполне упорядоченном множестве типа ω_α) хвост, отсеченный любым элементом ξ, имеет тип ω_α.*

(Чтобы получить из теоремы 23' теорему 23, надо в формулировке теоремы 23' заменить W_α через $W_{\alpha+1}$ и положить $\xi = \omega_\alpha$.)

Доказательство теоремы 23'. Для любого $\xi < \omega_\alpha$ имеем

$$W_\alpha = A(\xi) + B(\xi), \tag{4}$$

где $A(\xi)$ есть отрезок W_α, отсеченный элементом ξ (т. е. множество всех $\xi' < \xi$), а $B(\xi)$ есть хвост этого элемента (т. е. множество всех ξ', удовлетворяющих неравенствам $\xi \leqslant \xi' < \omega_\alpha$). Тип множества $A(\xi)$ есть ξ; так как ω_α есть первое число мощности $\aleph_\alpha$, то мощность a множества $A(\xi)$ меньше чем $\aleph_\alpha$. Тип множества $B(\xi)$ есть порядковое число $\eta \leqslant \omega_\alpha$. Пусть $\eta < \omega_\alpha$. Из того, что ω_α есть первое число мощности $\aleph_\alpha$, и из предположения $\eta < \omega_\alpha$ следует, что мощность b множества $B(\xi)$ меньше чем $\aleph_\alpha$. Пусть c есть наибольшее из кардинальных чисел a и b. Имеем $c < \aleph_\alpha$. Тогда из (4) и теоремы 24 вытекает, что мощность множества $W_\alpha = A(\xi) + B(\xi)$ не превосходит c, т. е. $< \aleph_\alpha$, тогда как на самом деле мощность множества W_α равна $\aleph_\alpha$.

Теорема 23' доказана (в предположении, что доказана теорема 24).

Замечание 3. Если в формулировках теорем 24, 24_0 предположить, что хотя бы одно из слагаемых множеств имеет мощность m, то по теореме Кантора — Бернштейна (§ 6 гл. 1) мощность суммы будет $\geqslant m$, значит, в силу теорем 24, 24_0 — равна m.

Введем теперь следующее определение. Назовем суммой (некоторого конечного или бесконечного числа) мощностей m_α мощность суммы попарно не пересекающихся множеств M_α, имеющих соответственно мощности m_α (очевидно, результат зависит лишь от самих мощностей m_α, а не от того, какое именно

*) В частности, Z_0 есть множество порядковых чисел второго класса, W_0 — множество всех натуральных чисел, а W_1 — всех чисел $< \omega_1$.

множество M_α мощности m_α мы взяли). Теорема 24 и ее частный случай 24_0 дают нам следующий результат:

Теорема 24'. *Сумма m слагаемых, из которых каждое есть некоторое кардинальное число $\leqslant m$, есть кардинальное число $\leqslant m$, причем если хотя бы одно слагаемое равно m, то и сумма есть m* *). *В частности, сумма конечного или счетного числа слагаемых, каждое из которых есть данное бесконечное кардинальное число m, равна m.*

Переходя, наконец, к доказательству теоремы 24, заметим, что ее достаточно доказать в предположении, что все заданные множества M_α в числе $m = \aleph_\tau$ попарно не пересекаются и что каждое из них имеет мощность $m = \aleph_\tau$. Тогда множество всех множеств M_α можно упорядочить по типу ω_τ:

$$M_1, M_2, \ldots, M_\alpha, \ldots$$

(α пробегает все порядковые числа $< \omega_\tau$), и каждое множество M_α тоже можно упорядочить по типу ω_τ:

$$M_\alpha = \left\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_\beta}, \ldots\right\}$$

(β пробегает все порядковые числа $< \omega_\tau$).

Все сводится, таким образом, к доказательству следующего предложения:

Теорема 24''. *Множество всех пар (α, β), где α и β пробегают (независимо друг от друга) множество всех порядковых чисел $< \omega_\tau$ (или вообще какое-нибудь множество мощности $\aleph_\tau$), имеет мощность $\aleph_\tau$.*

Другими словами: *Произведение* (см. начало § 5) *двух множеств мощности $\aleph_\tau$ имеет ту же мощность $\aleph_\tau$.*

Эта теорема верна для $\aleph_0$. Предположим, что теорема 24'' верна для всех бесконечных кардинальных чисел $< \aleph_\tau$, и докажем, что тогда она верна и для $\aleph_\tau$; этим теорема 24 и будет доказана для любого $\aleph_\tau$.

Итак, рассмотрим множество E всех пар (α, β), где α и β — всевозможные порядковые числа $< \omega_\tau$. Назовем высотою пары (α, β) порядковое число $\lambda = \alpha + \beta$. Докажем, что для любых $\alpha < \omega_\tau$, $\beta < \omega_\tau$ имеем $\lambda = \alpha + \beta < \omega_\tau$. В самом деле, пусть, например, $\alpha \leqslant \beta$; обозначим через a мощность порядкового числа α, через b — мощность порядкового числа β, тогда $a \leqslant b < \aleph_\tau$; так как теорема 24'' (а значит, и теорема 24_0) предположена верной для кардинального числа $b < \aleph_\tau$, то $a + b = b < \aleph_\tau$, но тогда и $\alpha + \beta < \omega_\tau$, и наше утверждение доказано. Обозначим теперь для каждого $\lambda < \omega_\tau$ через E_λ множество всех пар (α, β), высота которых равна λ. Так как каждая пара (α, β) имеет высоту $\alpha + \beta < \omega_\tau$, то

$$E = \bigcup_{0 \leqslant \lambda < \omega_\tau} E_\lambda .$$

Теперь нам понадобится

Лемма. *Для каждого данного $\lambda < \omega_\tau$ и любого $\alpha \leqslant \lambda$ имеется одно-единственное порядковое число β такое, что*

$$\alpha + \beta = \lambda;$$

при этом $\beta \leqslant \lambda$ (так как при $\beta > \lambda$ имели бы и $\alpha + \beta \geqslant \beta > \lambda$).

В самом деле, по самому определению сложения порядковых чисел, искомое β однозначно определяется как порядковый тип хвоста, отсекаемого в множестве $W(\lambda + 1)$ элементом α.

---

*) То же утверждение верно, если ни одно из слагаемых не равно нулю (в этом случае сумма данных кардинальных чисел есть мощность суммы M попарно не пересекающихся непустых множеств M_α, данных в числе m). Очевидно, мощность множества M в этих условиях $\geqslant m$; с другой стороны, в силу теоремы 24' она $\leqslant m$.

Из леммы следует, что при заданном λ каждому $\alpha \leqslant \lambda$ однозначно соответствует элемент (α, β) множества E_λ, и так как различным α, естественно, соответствуют различные элементы множества E_λ, то существует взаимно однозначное соответствие между множеством E_λ и множеством всех порядковых чисел $\alpha \leqslant \lambda$. Это соответствие позволяет перенести в множество E_λ порядок из множества $W(\lambda+1)$, т. е. считать E_λ упорядоченным по типу $\lambda+1$ (отсюда, в частности, следует, что для каждого $\lambda < \omega_\tau$ множество E_λ есть непустое множество).

Упорядочим теперь все множество E следующим образом. Если пары $\zeta = (\alpha, \beta)$ и $\zeta' = (\alpha', \beta')$ имеют различные высоты $\lambda = \alpha + \beta$ и $\lambda' = \alpha' + \beta'$, то полагаем $\zeta < \zeta'$, если $\lambda < \lambda'$. Если же $\alpha + \beta = \alpha' + \beta' = \lambda$, то сохраняем для ζ и ζ' в E тот порядок, который ζ и ζ' имели в E_λ, т. е. полагаем $\zeta < \zeta'$, если $\alpha < \alpha'$.

Отсюда сразу следует, что упорядоченное множество E есть сумма упорядоченного по типу ω_τ множества вполне упорядоченных множеств E_λ и, значит, само есть вполне упорядоченное множество, тип θ которого есть сумма

$$\theta = \sum_{0 \leqslant \lambda < \omega_\tau} (\lambda + 1). \tag{5}$$

Докажем, что $\theta = \omega_\tau$; достаточно доказать, что $\theta \leqslant \omega_\tau$, так как из (5) ясно, что не может быть $\theta < \omega_\tau$.

Предположим, что $\theta > \omega_\tau$. Тогда во вполне упорядоченном множестве E существует отсекаемый некоторым элементом $\xi_1 = (\alpha_1, \beta_1) \in E$ отрезок $A(\xi_1)$ порядкового типа ω_τ. Пусть $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1$. Так как $\lambda_1 < \omega_\tau$, то мощность c порядкового числа λ_1 меньше чем $\aleph_\tau$. Для любого элемента $\xi = (\alpha, \beta)$ отрезка $A(\xi_1)$ имеем согласно порядку, установленному в E, неравенство $\alpha + \beta \leqslant \lambda_1$, значит, и подавно $\alpha \leqslant \lambda_1$, $\beta \leqslant \lambda_1$. Так как $c < \aleph_\tau$, то мы можем утверждать (по теореме 24″, которая предполагается доказанной для мощности $c < \aleph_\tau$), что множество всех пар (α, β), где $\alpha < \lambda_1 + 1$, $\beta < \lambda_1 + 1$, имеет мощность c. Но тогда и все множество $A(\xi_1)$ имеет мощность $\leqslant c < \aleph_\tau$, вопреки своему определению.

Теорема 24″ и вместе с нею теоремы 24, 24_0, 24′, 23, 23′ доказаны.

Прежде чем сформулировать некоторые дальнейшие следствия теоремы 24, определим произведение двух кардинальных чисел a и b как мощность множества, являющегося произведением какого-либо множества A мощности a и какого-либо множества B мощности b (результат, очевидно, не зависит от того, какие именно множества A и B заданных мощностей мы возьмем). Из теоремы 24 следует, что

$$m^2 = m \tag{6}$$

(для любого бесконечного кардинального числа m). Так как для любого кардинального числа m и любого кардинального числа n, $1 \leqslant n \leqslant m$, имеем $m^2 \geqslant nm \geqslant m$, то формула (6) допускает следующее обобщение:

$$nm = m, \text{ если } 1 \leqslant n \leqslant m, \ m \geqslant \aleph_0. \tag{7}$$

В частности, $\aleph_0 \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ для любого $\alpha \geqslant 0$.

Из доказанного, далее, следует, что бесконечное кардинальное число m не может быть представлено в виде суммы какого-либо числа $a < m$ слагаемых, каждое из которых равно одному и тому же $b < m$ (так как эта сумма, очевидно, равна ab, а потому равна наибольшему из двух чисел a, b). В частности, кардинальное число вида $\aleph_{\alpha+1}$ (т. е. индекс которого есть порядковое число первого рода) вообще не может быть представлено как сумма меньшего чем $\aleph_{\alpha+1}$ числа слагаемых, каждое из которых меньше чем $\aleph_{\alpha+1}$ (так как каждое из этих слагаемых $\leqslant \aleph_\alpha$, число их $\leqslant \aleph_\alpha$, значит, сумма $\leqslant \aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$). Однако уже кардинальное число $\aleph_\omega$ есть сумма счетного числа меньших кардинальных чисел:

$$\aleph_\omega = \aleph_0 + \aleph_1 + \aleph_2 + \ldots + \aleph_n + \ldots \qquad (n < \omega).$$

Всякое кардинальное число m, являющееся суммой меньших чем m кардинальных чисел, взятых в числе $< m$, называется *иррегулярным*; таково, например, число $\aleph_\omega$. Только что была доказана

Теорема 25. *Всякое число вида $\aleph_{\alpha+1}$ регулярно (т. е. не может быть представлено как сумма, число слагаемых которой меньше чем $\aleph_{\alpha+1}$, причем каждое слагаемое также меньше чем $\aleph_{\alpha+1}$).*

До сих пор неизвестно, существуют ли регулярные кардинальные числа вида $\aleph_\lambda$, где λ — предельное порядковое число. Такие кардинальные числа называются *недостижимыми* *); если они существуют, то мощность их индекса λ (как легко видеть) должна быть равна самому кардинальному числу $\aleph_\lambda$.

Замечание 4. Из теоремы 24_0, далее, следует

Теорема 26. *Никакое бесконечное кардинальное число m не может быть представлено в виде суммы конечного числа кардинальных чисел, каждое из которых меньше чем m (никакое множество данной бесконечной мощности m не может быть представлено в виде суммы конечного числа множеств мощностей $< m$.)*

В самом деле, если кардинальные числа $m_1, \ldots, m_s$ (данные в конечном числе) $< m$, то, обозначая через m' наибольшее из чисел $m_1, \ldots, m_s$, заключаем по теореме 24_0, что

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_s = m' < m.$$

Замечание 5. Другой формой по существу той же теоремы о регулярности кардинальных чисел вида $\aleph_{\alpha+1}$ является следующая

Теорема 27. *Сумма вполне упорядоченного множества типа $< \omega_{\alpha+1}$ порядковых чисел $< \omega_{\alpha+1}$ есть порядковое число $< \omega_{\alpha+1}$.*

В самом деле, пусть

$$\theta = \sum_\nu \xi_\nu ,$$

где индекс ν пробегает все порядковые числа, меньшие чем некоторое $\xi < \omega_{\alpha+1}$. Мощность каждого слагаемого этой суммы $< \aleph_{\alpha+1}$, значит, $\leqslant \aleph_\alpha$; число слагаемых также $\leqslant \aleph_\alpha$, значит, вся сумма есть порядковое число мощности $\leqslant \aleph_\alpha$, т. е.

$$\theta < \omega_{\alpha+1}.$$

Так же легко доказывается и следующее предложение, естественно обобщающее теорему 17:

Теорема 28. *Если множество порядковых чисел ξ_ν, каждое из которых $< \omega_{\alpha+1}$, имеет порядковый тип $\theta < \omega_{\alpha+1}$, то первое порядковое число, следующее за всеми порядковыми числами ξ_ν, входящими в данное множество, также $< \omega_{\alpha+1}$.*

В самом деле, рассмотрим сумму $\xi = \sum\limits_\nu \xi_\nu$. Каждое из наших порядковых чисел ξ_ν во всяком случае меньше числа $\xi + 1$, но по теореме 27 имеем $\xi < \omega_{\alpha+1}$, значит, и

$$\xi + 1 < \omega_{\alpha+1}.$$

Поэтому первое число, следующее за всеми ξ_ν (будучи заведомо не больше чем $\xi + 1$), также $< \omega_{\alpha+1}$, что и требовалось доказать.

---

*) Хаусдорф считал их в некотором смысле *эксорбитантными* по величине и бесполезными для обычных нужд теории множеств.

Замечание 6. Для всяких двух кардинальных чисел a, b мы в § 6 гл. 1 обозначили через a^b кардинальное число, являющееся мощностью множества A^B, где A — какое-нибудь множество мощности a, B — какое-нибудь множество мощности b и A^B есть множество всех отображений множества B в множество A. Легко определить произведение любого конечного или бесконечного числа кардинальных чисел a_α, переходящее в определение степени a^b в случае, когда все a_α равны между собою. Для этого определим произведение C данного множества B множеств A_α.

$$C=\prod_{A_\alpha \in B} A_\alpha$$

или просто $C=\prod\limits_\alpha A_\alpha$. Именно, элементами множества C являются, по определению, всевозможные отображения f множества B (элементами которого являются данные множества A_α) в множество $A=\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$, удовлетворяющие уже знакомому нам условию $f(A_\alpha)\in A_\alpha$. Если все множества A_α попарно не пересекаются (случай, к которому легко сводится и общий случай), то элементы множества C могут быть определены как всевозможные подмножества множества $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$, пересекающиеся с каждым из множеств A_α по данному элементу. Если нам дано какое-нибудь множество кардинальных чисел a_α, то, беря для каждого из этих кардинальных чисел a_α множество A_α мощности a_α, определим произведение заданных кардинальных чисел как мощность произведения множеств A_α (их можно предположить непересекающимися).

В случае, если все A_α имеют ту же мощность a, а множество всех A_α имеет мощность b, получаем степень a^b. Чтобы убедиться в том, что это определение степени совпадает с данным в § 6 гл. 1, берем множество B (мощности b), элементами которого являются все множества A_α и только они; так как все множества A_α имеют одну и ту же мощность a, то можно взять одно множество A той же мощности a, находящееся во вполне определенном взаимно однозначном соответствии с каждым из множеств A_α; это позволяет рассматривать отображение, ставящее в соответствие каждому элементу A_α множества B какой-либо элемент $x_\alpha \in A_\alpha$, как отображение множества B в A и, обратно, любое отображение B в A — как выбор по элементу x_α в каждом A_α. Отсюда и следует тождественность обоих определений степени.

Читатель легко докажет следующее свойство общего умножения мощностей: *если в данном произведении кардинальных чисел заменить некоторые множители большими кардинальными числами или присоединить новые множители, отличные от нуля, то произведение может только увеличиться* (*но может остаться и неизменным*) *).

Легко проверяется также равенство

$$a^{b_1+b_2}=a^{b_1}\cdot a^{b_2}.$$

А именно, берем два непересекающихся множества B_1 и B_2 мощностей b_1 и b_2, а также множество A мощности a; каждое отображение множества $B=B_1\cup B_2$ в A однозначно определяет пару отображений: множества B_1 и множества B_2 в A, и обратно, каждая такая пара определяет отображение B в A. Аналогично

*) Доказать эту теорему можно автоматически, отправляясь от определения неравенства мощностей в главе 1. Заметим, однако, что, например, из $a<b$, $c<d$, вообще говоря, не следует неравенство $a^p<b^q$ (а только $a^p\leqslant b^q$).

доказывается и для любого числа слагаемых формула

$$a^{\sum b_\alpha} = \prod_\alpha a^{b_\alpha}.$$

Если все b_α равны одному и тому же кардинальному числу b, а число их равно c, то получаем формулу

$$a^{bc} = (a^b)^c.$$

Замечание 7. Читателю предоставляется проверить, что в случае конечных кардинальных чисел наши определения действий сложения, умножения, возведения в степень переходят в обычные определения элементарной арифметики.

Воспользуемся выведенными правилами для некоторых интересных подсчетов. Прежде всего, из теоремы 24 имеем

$$\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$$

для любого бесконечного кардинального числа $\aleph_\alpha$. Отсюда по индукции получаем для любого натурального n

$$\aleph_\alpha^n = \aleph_\alpha.$$

Мощность $\aleph_0^{\aleph_0}$ есть мощность множества всех бесконечных последовательностей натуральных чисел. Легко непосредственно убедиться в том, что она равна мощности континуума $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, например, устанавливая взаимно однозначное соответствие между множеством всех последовательностей $(n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots)$ натуральных чисел и множеством всех иррациональных чисел интервала $(0; 1)$, данных их разложениями в бесконечную непрерывную дробь

$$\cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots}}}$$

Однако имеются читатели, не знакомые с непрерывными дробями; таковые могут вывести формулу

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \tag{8}$$

из соотношений

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{c}^{\aleph_0}$$

и

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}. \tag{9}$$

Последнее соотношение доказывается так:

$$\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Далее, имеем

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leqslant n^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

для любого натурального n, т. е. $n^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Далее,

$$\aleph_0! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \ldots = \mathfrak{c}; \tag{10}$$

в самом деле,

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \leqslant 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Так как $\aleph_1$ есть наименьшая из несчетных мощностей, то $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{c}$ (что мы доказали в § 4 и непосредственно, построив множество действительных чисел, имеющее мощность $\aleph_1$). Вопрос о том, имеет ли место равенство $\mathfrak{c}=\aleph_1$ или неравенство $\mathfrak{c}>\aleph_1$, составляет знаменитую континуум-проблему, решенную в настоящее время, но в смысле, далеком от так называемой «наивной» теории множеств (см. Йех [1]).

Из

$$\mathfrak{c}=2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{c}^{\aleph_0}=\mathfrak{c}$$

следует, что

$$\aleph_1^{\aleph_0}=\mathfrak{c}. \tag{11}$$

Докажем, с другой стороны, формулу

$$\aleph_0^{\aleph_1}=2^{\aleph_1}>\aleph_1$$

и даже, для любого $\aleph_\alpha<\aleph_\beta$, гораздо более общую формулу

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\beta}>\aleph_\beta>\aleph_\alpha.$$

Именно, из

$$2<\aleph_\alpha<2^{\aleph_\alpha}\leqslant 2^{\aleph_\beta}$$

выводим

$$2^{\aleph_\beta}\leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\leqslant \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\alpha\aleph_\beta}=2^{\aleph_\beta},$$

что и требовалось доказать.

§ 7. Регулярные и иррегулярные порядковые числа. О наименьшем начальном числе, которому конфинален данный порядковый тип

Порядковое число называется регулярным, если оно не конфинально никакому меньшему порядковому числу. Из конечных порядковых чисел регулярными являются лишь 0 и 1. Мы увидим далее (теорема 30), что всякое бесконечное регулярное число есть начальное число. Однако прежде всего докажем следующее предложение:

Теорема 29. *Для того чтобы начальное число ω_τ было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы его мощность $\aleph_\tau$ была регулярной.*

Доказательство. 1°. Если $\aleph_\tau$ — иррегулярная мощность, то и ω_τ — иррегулярное порядковое число. В самом деле, так как мощность $\aleph_\tau$, по предположению, иррегулярна, то она может быть представлена как сумма некоторого числа $b<\aleph_\tau$ слагаемых $\aleph_\alpha$, каждое из которых $<\aleph_\tau$. Сумма тех из этих слагаемых, которые не превосходят b, по теореме 24 и сама не превосходит b (ведь число этих слагаемых и подавно $\leqslant b$). Если бы сумма остальных слагаемых (т. е. тех $\aleph_\alpha$, которые $>b$) была равна некоторому $c<\aleph_\tau$, то сумма всех $\aleph_\alpha$ была бы $\leqslant b+c$, т. е. была бы равна наибольшему из чисел b и c и, значит, была бы, вопреки предположению, $<\aleph_\tau$. Итак, число $\aleph_\tau$ может быть представлено как сумма некоторого числа $a<\aleph_\tau$ слагаемых, каждое из которых $<\aleph_\tau$, но $>a$. В этих предположениях каждое слагаемое фигурирует в нашей сумме число раз, заведомо меньшее, чем само это слагаемое. Поэтому каждая группа участвующих в нашей сумме равных слагаемых имеет сумму, равную самому этому слагаемому, так что мы не изменим нашу сумму $\aleph_\tau$, если каждое из ее слагаемых будем считать лишь один раз. Итак, можем написать

$$\aleph_\tau = \sum_\alpha \aleph_\alpha, \qquad (1)$$

где порядковое число α пробегает некоторое множество Θ значений, мощность которого $a < \aleph_\tau$ и, значит, порядковый тип θ которого $< \omega_\tau$; при этом a может быть предположено меньше любого $\aleph_\alpha$.

Рассмотрим подмножество Θ'' множества W_τ, состоящее из всех ω_α, для которых $\alpha \in \Theta$. Множество Θ'' подобно множеству Θ. Докажем, что W_τ конфинально своему подмножеству Θ'; этим и будет доказано, что число ω_τ конфинально числу $\theta < \omega_\tau$ и, следовательно, иррегулярно. Так как $\aleph_\tau$ иррегулярно, то число τ (в силу теоремы 25) является предельным. Отсюда следует, что за всяким числом $\xi < \omega_\tau$ следует начальное число $\omega_\sigma < \omega_\tau$: в самом деле, если бы за числом $\xi < \omega_\tau$, мощность которого обозначим через $\aleph_\nu$, не следовало бы никакого начального числа, то среди всех кардинальных чисел $< \aleph_\tau$ число $\aleph_\nu$ было бы наибольшим, т. е. было бы $\tau = \nu + 1$, тогда как τ — предельное число *).

Пусть множество W_τ не конфинально своему подмножеству Θ''. Тогда существует число $\xi < \omega_\tau$, большее чем все $\omega_\alpha \in \Theta$, причем число ξ может быть предположено начальным, $\xi = \omega_\sigma < \omega_\tau$. Но тогда все слагаемые в правой части равенства (1) были бы меньше чем $\aleph_\sigma$, а так как число их меньше чем каждое из этих слагаемых, значит, и подавно меньше чем $\aleph_\sigma$, то вся сумма в правой части равенства (1) была бы $\leqslant \aleph_\sigma < \aleph_\tau$. Полученное противоречие доказывает конфинальность числа ω_τ числу $\theta < \omega_\tau$.

2°. Пусть ω_τ иррегулярно и конфинально числу $\theta < \omega_\tau$. Так как ω_τ — начальное число, то θ имеет мощность $b < \aleph_\tau$. Множество W_τ конфинально некоторому своему подмножеству Θ типа $\theta < \omega_\tau$ и мощности $< \aleph_\tau$. Отсюда следует, что

$$W_\tau = \bigcup_{\alpha \in \Theta} W(\alpha).$$

Но каждое $W(\alpha)$ имеет мощность $< \aleph_\tau$, а число этих множеств есть $b < \aleph_\tau$. Поэтому $\aleph_\tau$ иррегулярно. Теорема 29 доказана.

Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 30 (Хаусдорф). *Всякое упорядоченное множество A мощности $\aleph_\tau$ конфинально некоторому своему вполне упорядоченному подмножеству* **) *типа $\xi \leqslant \omega_\tau$.*

Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем относительно нее некоторые замечания и выведем из нее некоторые следствия, которые позволяют оценить ее важность.

Прежде всего, уже было отмечено (в § 4), что упорядоченное множество A тогда и только тогда конфинально подмножеству, состоящему из одного лишь элемента, когда в A есть последний элемент.

Рассмотрим далее наиболее важный случай, когда A есть вполне упорядоченное подмножество, тип которого обозначим через θ. Так как мощность A обозначена через $\aleph_\tau$, то $\theta \geqslant \omega_\tau$. Теорема 30 утверждает, что число θ конфи-

---

*) Заметим, что если $\xi < \omega_\sigma < \omega_\tau$, то и $\omega_{\sigma+1} < \omega_\tau$ (так как иначе было бы $\tau = \sigma + 1$). Итак, для иррегулярного ω_τ (и даже для всякого ω_τ с предельным индексом τ) за каждым $\xi < \omega_\tau$ следует начальное число вида $\omega_{\sigma+1} < \omega_\tau$. Это замечание нам понадобится при доказательстве теоремы 31.

**) Напоминаем, что всякое подмножество A' упорядоченного множества A всегда рассматривается нами как упорядоченное множество, причем порядок между элементами множества A' остается тем самым, который эти элементы имеют в A.

нально некоторому $\xi \leqslant \omega_\tau$. Поэтому, если $\theta > \omega_\tau$, т. е. если θ не есть начальное число, то оно конфинально числу $\xi \leqslant \omega_\tau < \theta$, т. е. не является регулярным. Итак, из теоремы 30 следует, что всякое бесконечное регулярное порядковое число есть непременно начальное число. Это позволяет нам сформулировать доказанную нами теорему 29 так:

Теорема 29'. *Регулярные порядковые числа суть не что иное, как начальные числа регулярных мощностей.*

Теперь мы можем несколько усилить и самое теорему 30. Прежде всего, мы можем ее формулировать так:

Всякий порядковый тип θ мощности $\aleph_\tau$ конфинален некоторому порядковому числу $\xi \leqslant \omega_\tau$.

Беря для данного порядкового типа θ наименьшее конфинальное ему порядковое число ξ, видим, что ξ есть регулярное, следовательно, начальное число $\xi = \omega_\sigma \leqslant \omega_\tau$ (так как если бы наше наименьшее ξ не было регулярным, то оно было бы конфинально некоторому $\xi' < \xi$ и этому ξ' было бы конфинально и θ).

Итак:

Теорема 30'. *Ко всякому порядковому типу θ мощности $\aleph_\tau$, в частности ко всякому порядковому числу θ класса Z_τ, существует конфинальное ему наименьшее регулярное $\omega_\sigma \leqslant \omega_\tau$, причем порядковое число θ тогда и только тогда конфинально 1, когда оно первого рода.*

Эта теорема является, очевидно, далеко идущим обобщением теоремы 19' § 4.

Выведем из теоремы 30 еще одно следствие, касающееся иррегулярных мощностей. Если $\aleph_\tau$ иррегулярно, то множество W_τ конфинально некоторому подмножеству Θ' типа $\xi < \omega_\tau$. Оставляя в Θ' все элементы вида $\alpha = \omega_{\rho+1}$ (если таковые имеются) и заменяя каждый элемент α, не имеющий этого вида, ближайшим следующим за ним числом вида $\omega_{\rho+1}$ (такое имеется, см. сноску на стр. 93), можем предположить, что Θ' состоит из начальных чисел вида $\omega_{\rho+1}$. Множество тех порядковых чисел ρ, для которых $\omega_{\rho+1} \in \Theta'$, обозначим через Θ, причем предполагаем, что порядковый тип ξ множества Θ есть наименьший возможный и, следовательно, есть регулярное число $\omega_\sigma < \omega_\tau$. Так как, очевидно, $\aleph_\tau = \sum\limits_{\rho \in \Theta} \aleph_{\rho+1}$, то имеем такой результат:

Теорема 31. *Ко всякому (бесконечному) иррегулярному кардинальному числу $\aleph_\tau$ существует такое наименьшее регулярное кардинальное число $\aleph_\sigma < \aleph_\tau$, что $\aleph_\tau$ является суммой вполне упорядоченного по регулярному типу ω_σ множества строго возрастающих кардинальных чисел вида $\aleph_{\rho+1} < \aleph_\tau$.*

Переходим, наконец, к доказательству теоремы 30.

Пусть A есть упорядоченное множество мощности $\aleph_\tau$. Всякое множество мощности $\aleph_\tau$, а значит, и наше множество A может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с множеством W_τ. Это означает, что элементы множества A могут быть снабжены порядковыми числами $\alpha < \omega_\tau$ в качестве индексов, так что получится вполне упорядоченное множество B типа ω_τ

$$B = \{x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots\}$$

(α пробегает все значения $< \omega_\tau$), состоящее из тех же элементов, что и A, причем порядок в B, вообще говоря, совершенно отличается от порядка в A (т. е. при $\alpha < \beta$ может быть и $x_\alpha \succ x_\beta$ в A). Назовем теперь элемент $x = x_\alpha$ множества A правильным, если для всех $\nu < \alpha$ имеем $x_\nu < x_\alpha$ в A. Элемент x_0 есть правильный элемент. Таким образом, множество C всех правильных элементов заведомо непусто. Кроме того, порядок в множестве C, как в подмножестве упорядоченного множества A, совпадает с порядком, который это множество получает из вполне упорядоченного множества B (т. е. с порядком индексов, которыми снабжены элементы множества C): если $x_\alpha \in C$, $x_\beta \in C$ и $\alpha < \beta$, то, по самому определению правильного элемента, имеем $x_\alpha \prec x_\beta$ в A. Таким образом, упорядоченное множество C является подмножеством упорядоченного множества A и вместе с тем — подмножеством (вполне) упорядоченного множества B. Будучи подмножеством вполне упорядоченного множества B, имеющего тип ω_τ, множество C само является вполне упорядоченным по типу $\leqslant \omega_\tau$.

Остается доказать, что упорядоченное множество A конфинально своему вполне упорядоченному подмножеству C. Предположим противное, и пусть элемент x_α в A есть элемент с наименьшим индексом α, следующий в A за всеми элементами C. Утверждается, что для любого $\nu < \alpha$ имеем $x_\nu \prec x_\alpha$ в A: в самом деле, в противном случае для некоторого $\nu < \alpha$ было бы $x_\nu \succ x_\alpha$, и, значит, уже x_ν с меньшим индексом $\nu < \alpha$ следовал бы за всеми элементами множества C.

Итак, действительно, $x_\nu \prec x_\alpha$ для всех $\nu < \alpha$. Но это означает, что x_α — правильный элемент, т. е., вопреки своему определению, x_α есть элемент множества C. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Доказательство теоремы 30 сводится к установлению следующего, хотя и простого, но все же поучительного факта: каким бы способом мы ни превращали данное упорядоченное множество A мощности $\aleph_\tau$ во вполне упорядоченное множество B типа ω_τ, при всем имеющемся, вообще говоря, различии между порядками в A и в B упорядоченное множество A содержит конфинальную часть C, для элементов которой порядок, взятый из A, совпадает с порядком, взятым из B.

Глава четвертая

МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определения и простейшие свойства метрических и топологических пространств

Ввести в какое-либо множество X, состоящее из элементов произвольной природы, метрику—значит определить для любой пары элементов x, x' множества X неотрицательное число $\rho(x, x')$ так, чтобы соблюдались следующие условия:

1. Число $\rho(x, x')$ равно нулю тогда и только тогда, когда x и x' тождественны между собою, т. е. обозначают один и тот же элемент множества X.

2. $\rho(x, x')=\rho(x', x)$.

3. Каковы бы ни были три элемента x, x', x'' множества X, всегда $\rho(x, x')+\rho(x', x'')\geqslant\rho(x, x'')$.

Множество X вместе с какой-нибудь введенной в него метрикой называется *метрическим пространством*, элементы множества X называются *точками*, а сама функция $\rho(x, x'')$ от двух переменных точек называется *метрикой* полученного метрического пространства, обозначаемого через (X, ρ), а часто для краткости и просто через X.

Очевидно, если метрика введена в данное множество X, то введена она во всякое подмножество $X_0\subset X$ (как ограничение функции ρ). Другими словами, *всякое множество, лежащее в метрическом пространстве, также является* (вполне определенным) *метрическим пространством.*

Если верхняя грань множества всех чисел $\rho(x, x')$, когда x, x' пробегают все точки подмножества M пространства X, есть конечное число d, то множество M называется ограниченным, а число d называется его диаметром. В частности, в этом определении под множеством M можно понимать и все пространство X.

Расстоянием между двумя множествами M и N в метрическом пространстве X называется неотрицательное число

$$\rho(M, N)=\inf\rho(x, y), \tag{1}$$

где x и y—произвольные точки соответственно из M и N.

Если множества M и N имеют непустое пересечение, то $\rho(M, N)=0$ (так как в формуле (1) можно взять $x=y\in M\cap N$). Однако может быть $\rho(M, N)=0$ и при непересекающихся M и N: достаточно взять в качестве пространства X числовую прямую и на ней определить M как интервал $(0; 1)$, а N — как интервал $(1; 2)$; можно было бы также взять за N множество всех рациональных, а за M — множество всех иррациональных точек прямой.

В частности, если одно из двух множеств, например N, состоит лишь из одной точки a, то получаем *расстояние* $\rho(a, M)$ *от точки* a *до множества* M, определенное формулой

$$\rho(a, M)=\inf \rho(a, x),$$

где x пробегает все M.

Если ε — какое-либо положительное число, а x — какая-либо фиксированная точка метрического пространства X, то множество всех точек x', для которых $\rho(x, x')<\varepsilon$, называется *сферической окрестностью с центром* x *и радиусом* ε и обозначается через $O(x, \varepsilon)$. Аналогично определяется сферическая радиуса ε окрестность $O(M, \varepsilon)$ подмножества M пространства X. Это множество всех таких точек $x\in X$, что $\rho(x, M)<\varepsilon$. Читатель может доказать, что сферическая окрестность $O(M, \varepsilon)$ множества M является объединением сферических окрестностей радиуса ε всех точек множества M.

Равенство $\rho(x, M)=0$ выполняется тогда и только тогда, когда любая сферическая окрестность точки x имеет непустое пересечение с множеством M. В этом случае точка x называется *точкой прикосновения* множества M. Очевидно, каждая точка самого множества M является его точкой прикосновения, но обратное утверждение может и не иметь места: так, например, если M есть открытый интервал числовой прямой с обычным определением расстояния на ней, то концы интервала, не принадлежа ему, являются тем не менее его точками прикосновения.

Множество всех точек прикосновения данного множества M в данном метрическом пространстве X называется *замыканием* множества M в пространстве X и обозначается через $[M]$. Из сказанного следует, что всегда $M\subseteq[M]$. Множество M называется *замкнутым* в метрическом пространстве X, если каждая точка прикосновения множества M есть точка этого множества M, т. е. если $[M]=M$. Читатель без труда может доказать, что диаметр замыкания $[M]$ любого множества M равен диаметру самого множества M.

Точка x множества M называется *внутренней точкой* множества M, если некоторая ее сферическая окрестность $O(x, \varepsilon)$ содержится в множестве M. Множество M называется *открытым*, если все его точки суть внутренние.

Непосредственным следствием этих определений является, как легко проверит читатель, следующее утверждение: *множество $X \setminus M$, дополнительное к замкнутому множеству M метрического пространства X, есть открытое множество этого пространства, а множество, дополнительное к открытому множеству, замкнуто.*

Из определения открытого множества как множества, все точки которого суть внутренние, сразу вытекает, что объединение любой совокупности открытых множеств данного метрического пространства есть открытое множество этого пространства. С другой стороны, пересечение двух, а следовательно, любого конечного числа открытых множеств есть открытое множество. В самом деле, пусть Γ_1 и Γ_2 — открытые множества метрического пространства X. Докажем, что множество $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ открыто, т. е. что любая точка $x \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ есть внутренняя точка множества $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Так как точка x есть внутренняя точка каждого из множеств Γ_1 и Γ_2, то существуют сферические окрестности $O(x, \varepsilon_1) \subseteq \Gamma_1$ и $O(x, \varepsilon_2) \subseteq \Gamma_2$. Пусть ε — наименьшее из чисел ε_1, ε_2. Тогда $O(x, \varepsilon) \subseteq \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, что и требовалось доказать.

Семейство $\mathfrak{G}$ всех открытых множеств метрического пространства X называется *открытой*, а семейство $\mathfrak{F}$ всех замкнутых множеств — *замкнутой топологией* метрического пространства X. Очевидно, множество всех точек X, равно как и пустое множество, являются элементами как семейства $\mathfrak{G}$, так и семейства $\mathfrak{F}$.

Теперь читатель уже подготовлен для восприятия следующего фундаментального определения:

Ввести в какое-либо множество X открытую топологию — значит выделить некоторое семейство $\mathfrak{G}$ подмножеств множества X таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

$\mathrm{I}_{\mathfrak{G}}$. *Все множество X, а также пустое множество Λ суть элементы семейства $\mathfrak{G}$.*

$\mathrm{II}_{\mathfrak{G}}$. *Объединение любого числа и пересечение конечного числа множеств, являющихся элементами семейства $\mathfrak{G}$, суть элементы семейства $\mathfrak{G}$.*

Множество X с введенной в него открытой топологией $\mathfrak{G}$ называется *топологическим пространством* $(X, \mathfrak{G})$, элементы самого множества X называются *точками* пространства $(X, \mathfrak{G})$, а множества, являющиеся элементами семейства $\mathfrak{G}$, называются *открытыми множествами* пространства $(X, \mathfrak{G})$.

Множества $F = X \setminus G$, дополнительные к множествам G семейства $\mathfrak{G}$, называются *замкнутыми множествами* пространства $(X, \mathfrak{G})$. Семейство $\mathfrak{F}$ замкнутых множеств называется *замкнутой топологией* пространства $(X, \mathfrak{G})$. Семейство $\mathfrak{F}$, очевидно, удовлетворяет следующим условиям:

$\mathrm{I}_{\mathfrak{F}}$. *Все множество X и пустое множество суть элементы семейства $\mathfrak{F}$.*

$\mathrm{II}_{\mathfrak{F}}$. *Пересечение любого числа и объединение конечного числа множеств, входящих в семейство $\mathfrak{F}$, являются элементами этого семейства.*

Вместо того чтобы начинать с введения открытой топологии в множество X и затем определять замкнутые множества как дополнения к открытым, можно было сначала ввести в множество X замкнутую топологию, т. е. выделить некоторое семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств множества X, удовлетворяющее условиям $\mathrm{I}_{\mathfrak{F}}$ и $\mathrm{II}_{\mathfrak{F}}$, назвать эти множества замкнутыми в топологическом пространстве $[X, \mathfrak{F}]$, а множества, дополнительные к замкнутым, назвать открытыми; тогда семейство $\mathfrak{G}$ так определенных открытых множеств удовлетворяет условиям $\mathrm{I}_{\mathfrak{G}}$, $\mathrm{II}_{\mathfrak{G}}$, т. е. образует открытую топологию топологического пространства $(X, \mathfrak{G}) = [X, \mathfrak{F}]$. Вместо $(X, \mathfrak{G})$ и $[X, \mathfrak{F}]$ будем в большинстве случаев говорить просто о топологическом пространстве X. Таким образом, открытая топология $\mathfrak{G}$ в каком-либо множестве X однозначно определяет сопряженную замкнутую, и наоборот. Обе эти топологии вместе — открытая $\mathfrak{G}$ и замкнутая $\mathfrak{F}$ — образуют топологическую структуру $\mathfrak{T} = \{\mathfrak{G}, \mathfrak{F}\}$ топологического пространства $\{X, \mathfrak{T}\} = (X, \mathfrak{G}) = [X, \mathfrak{F}]$. Причем, очевидно, все равно, начинать ли определение этой структуры с введения открытой топологии и потом переходом к дополнительным множествам определять замкнутую топологию или начинать с замкнутой топологии и определять открытую, переходя к дополнительным множествам.

Мы видели, что метрика каждого метрического пространства порождает в множестве всех его точек некоторую топологию, т. е. превращает данное метрическое пространство в некоторое определенное топологическое пространство. Короче, каждое метрическое пространство некоторым естественным образом является и топологическим. Обратно, если топология данного топологического пространства может быть порождена некоторой введенной в множество его точек метрикой, то данное топологическое пространство называется *метризуемым*.

Топология (открытая, соответственно замкнутая) топологического пространства X следующим образом порождает топологию во всяком множестве $X_0 \subseteq X$: подмножество M множества X_0 называется открытым, соответственно замкнутым, в X_0, если оно является пересечением множества X_0 с некоторым открытым, соответственно замкнутым, множеством пространства X. Таким образом, всякое множество X_0, лежащее в топологическом пространстве X, также является однозначно определенным топологическим пространством. Когда говорят о подпространствах данного пространства, то имеют в виду именно только что введенное соглашение.

Определение 1. Любое открытое множество топологического пространства X, содержащее данную точку x, соответственно данное множество M, называется *окрестностью точки* x, соответственно данного множества M, в пространстве X.

Окрестность точки x (множества M), как правило, обозначается через Ox (соответственно через OM), в случае надобности, кроме того, через Ux, Vx и т. д.

Естественно вводится

Определение 2. Точка x называется *точкой прикосновения* множества $M \subset X$, если каждая окрестность Ox точки x содержит по крайней мере одну точку множества M, т. е. если $M \cap Ox \neq \Lambda$. Множество всех точек прикосновения множества M в топологическом пространстве X называется *замыканием* множества M в пространстве X и обозначается через $[M]_X$ или просто через $[M]$. Так как любая окрестность произвольной точки содержит эту точку, то каждая точка множества M есть точка прикосновения множества M, т. е.

$$M \subseteq [M]. \tag{2}$$

Установим некоторые дальнейшие свойства операции замыкания. Прежде всего, очевидно, что $[X]=X$ и $[\Lambda]=\Lambda$. Очевидно также, что если множество M содержится в множестве N, то $[M] \subseteq [N]$ (свойство «монотонности» замыкания).

Теорема 1. *Множество M тогда и только тогда замкнуто (т. е. является дополнением к некоторому открытому множеству), когда* $[M]=M$.

В самом деле, пусть M замкнуто в X. Тогда $X \setminus M$ открыто и является окрестностью каждой своей точки. Значит, каждая точка $x \in X \setminus M$ имеет окрестность (например, окрестность $X \setminus M$), не пересекающуюся с M; следовательно, ни одна точка $x \in X \setminus M$ не входит в $[M]$, т. е. $[M] \subseteq M$. А так как, с другой стороны, $M \subseteq [M]$, то $[M]=M$.

Пусть, наоборот, дано, что $[M]=M$. Докажем, что M замкнуто в X, т. е. что $X \setminus M$ открыто в X. Действительно, из условия $[M]=M$ следует, что каждая точка $x \in X \setminus M$ имеет окрестность Ux, не пересекающуюся с M, т. е. лежащую в $X \setminus M$. Множество $X \setminus M$, как сумма окрестностей $Ux \subseteq X \setminus M$ своих точек x, открыто, что и требовалось доказать.

Из включения (2) следует, что для любого $M \subseteq X$ имеем $[M] \subseteq [[M]]$. Докажем обратное включение $[[M]] \subseteq [M]$; этим будет доказано, что

$$[[M]]=[M], \tag{3}$$

т. е. что *замыкание любого множества $M \subseteq X$ замкнуто.*

Пусть $x \in [[M]]$. Возьмем произвольную окрестность Ux точки x. Она содержит хотя бы одну точку $y \in [M]$, а являясь окрестностью этой точки $y \in [M]$ по определению $[M]$, содержит и точки множества M. Итак, произвольная окрестность Ux точки x пересекается с M, т. е. $x \in [M]$. Включение $[[M]] \subseteq [M]$, а значит, и равенство (3) этим доказаны.

Теорема 2. *Пересечение всех замкнутых множеств пространства X, содержащих данное множество M, есть $[M]$ (т. е. замыкание любого множества M есть наименьшее замкнутое множество, содержащее множество M *); если F—какое-нибудь замкнутое множество, содержащее множество M, то $F \supseteq [M]$).*

Доказательство. Так как $[M]$ замкнуто и содержит M, то пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M, содержится в $[M]$. Для доказательства обратного включения надо только показать, что $[M]$ содержится в любом замкнутом $F \supseteq M$ (тогда $[M]$ будет содержаться и в пересечении всех этих F). Но если дано замкнутое $F \supseteq M$, то (в силу монотонности замыкания) $F = [F] \supseteq [M]$, что и требовалось доказать.

Докажем, наконец, что для любых $A \subseteq X$, $B \subseteq X$

$$[A \cup B] = [A] \cup [B].$$

Так как $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$, то из монотонности замыкания следует, что $[A] \subseteq [A \cup B]$, $[B] \subseteq [A \cup B]$, значит, $[A] \cup [B] \subseteq$ $\subseteq [A \cup B]$. Для доказательства обратного включения вспомним, что $[A]$ и $[B]$, а значит, и $[A] \cup [B]$ замкнуты, а потому по теореме 2 имеем $[A \cup B] \subseteq [A] \cup [B]$.

Следующие из только что установленных свойств операции замыкания (по причинам, которые сейчас же выяснятся) называются основными свойствами или аксиомами замыкания:

1°. $[A \cup B] = [A] \cup [B]$ (дистрибутивность по отношению к конечному сложению);

2°. $A \subseteq [A]$;

3°. $[[A]] = [A]$;

4°. $[\Lambda] = \Lambda$.

Мы определили топологическое пространство при помощи аксиом, налагаемых на открытые или на замкнутые множества. Можно было бы избрать другой путь—отправляться от понятия замыкания и рассматривать условия 1°—4° как аксиомы, которым подчиняется это понятие. Тогда замкнутые множества определились бы как множества, совпадающие со своими замыканиями, а открытые—как множества, дополнительные к замкнутым. При этом легко было бы доказать (и это предоставляется читателю сделать), что открытые множества удовлетворяют условиям $\mathrm{I}_{\mathfrak{G}}$, $\mathrm{II}_{\mathfrak{G}}$, а замкнутые множества удовлетворяют условиям $\mathrm{I}_{\mathfrak{F}}$ и $\mathrm{II}_{\mathfrak{F}}$ и приводят посредством определений 1 и 2 к тем же замыканиям, которые даны a priori. Таким образом, все эти подходы приводят к тому же классу топологических пространств.

---

*) Замкнутые множества, содержащие M, несомненно существуют: например, все X.

Замечание 1. Исторически первым подходом к понятию общего топологического пространства, оказавшемуся эквивалентным общепринятому в настоящее время понятию, положенному в основу нашего изложения, был именно подход, при котором исходным основным понятием является понятие замыкания множества. Этот подход принадлежит польскому математику Куратовскому (1922 г.), который при этом сформулировал и основные аксиомы, которым понятие замыкания удовлетворяет. Поэтому сформулированные выше аксиомы замыкания называются аксиомами Куратовского и их автору принадлежит бесспорный приоритет введения современного общего понятия топологического пространства. Что же касается определения топологического пространства посредством открытой топологии, то оно впервые (1925 г.) встречается в работе Александрова [2].

Мы видели выше, что *всякое метрическое пространство может быть рассматриваемо как топологическое пространство*. Другой весьма важный пример топологических пространств получим, если рассмотрим какое-либо линейно упорядоченное множество X и определим открытые множества в X как множества, являющиеся суммами порядковых интервалов, взятых в любом числе. Нетрудно проверить, что это определение открытых множеств превращает упорядоченное множество X в топологическое пространство — «пространство данного упорядоченного множества», — обозначаемое также через X. Если M есть произвольное множество, лежащее в X, то точка $a \in X$ тогда и только тогда является точкой прикосновения множества M, когда каждый интервал, содержащий точку a, содержит и точки множества M.

Числовая прямая, т. е. множество всех действительных чисел, может рассматриваться и как (линейно) упорядоченное множество и как метрическое пространство (читатель может легко проверить, что определенное в § 2 гл. 2 расстояние между точками числовой прямой удовлетворяет аксиомам метрики), причем оба эти подхода приводят к одной и той же топологии на числовой прямой, т. е. к одному и тому же топологическому пространству, которое будем обозначать через R^1 и называть *числовой прямой (топологической)*.

Замечание 2. Из общего определения топологического пространства не следует, что множество, состоящее из конечного числа точек, непременно замкнуто. Возьмем, например, множество $\mathfrak{F}$, состоящее лишь из двух элементов a и b, и объявим открытыми множествами топологического пространства $\mathfrak{F}$ все множество $\mathfrak{F}$, пустое множество и множество, состоящее из одной точки b. Обе аксиомы I и II выполнены, так что $\mathfrak{F}$ есть топологическое пространство. Замкнутыми множествами в $\mathfrak{F}$ являются все $\mathfrak{F}$, пустое множество и множество, состоящее из одной точки a. Множество, состоящее из точки b, замкнутым не является. Заметим, что у точки a имеется лишь одна окрестность, именно все пространство $\mathfrak{F}$. Замыкание множества, состоящего из точки b, также есть все пространство $\mathfrak{F}$. Это пространство называется «связным двоеточием» *).

Другой пример конечного топологического пространства получим, взяв множество X, состоящее из семи «точек»:

$$a,\ b,\ c;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \Delta,$$

и приняв, что открытыми множествами являются: пустое множество, а также следующие множества и всевозможные их суммы:

$$(\alpha,\ b,\ c,\ \Delta),\quad (\beta,\ a,\ c,\ \Delta),\quad (\gamma,\ a,\ b,\ \Delta),$$
$$(a,\ \Delta),\quad (b,\ \Delta),\quad (c,\ \Delta),$$
$$(\Delta).$$

Легко проверить, что среди «одноточечных» множеств (т. е. множеств состоящих из одной точки) замкнуты лишь α, β, γ. Замыканием множества, состоящего из точки a, является $(a,\ \beta,\ \gamma)$ и т. д. Замыканием множества, состоящего из точки Δ, является все пространство X. Если считать, что Δ есть треугольник с вершинами α, β, γ и соответственно противолежащими им сторонами a, b, c, то топология, введенная в пространстве X, приобретает простой элементарно-геометрический смысл. Имея это в виду, легко построить пространство, состоящее из девяти точек, соответствующее тетраэдру со всеми его гранями, ребрами и вершинами, и т. д.

Определение 3. Точка x топологического пространства X называется *предельной точкой* множества $M \subseteq X$, если каждая окрестность точки x содержит бесконечно много точек множества M. Точка x называется *изолированной* в X, если множество, состоящее из одной точки, открыто в X.

Замечание 3. Приведенные в замечании 2 примеры показывают, что в топологических пространствах может иметь место следующее явление: каждая окрестность точки x содержит отличные от точки x точки конечного множества M; поэтому точка x топологического пространства X, не являющаяся предельной точкой для множества всех точек пространства X, может в то же время не быть изолированной точкой этого пространства (такова, например, одна из двух точек связного двоеточия).

---

*) Простейшим топологическим пространством, состоящим из двух точек a и b, является «простое двоеточие» D, в котором все четыре содержащихся в нем множества: Λ, a, b, $a \cup b$ — являются, по определению, открытыми (а следовательно, и замкнутыми). Это топологическое пространство может быть определено и как метрическое пространство, в котором $\rho(a,\ b)$ равно, например, 1 (или какому-нибудь другому положительному числу).

Кроме простого и связного двоеточий, из двух точек a и b можно построить еще лишь одно топологическое пространство, а именно так называемое «слипшееся двоеточие», в котором открытыми множествами являются лишь все пространство и пустое множество. Однако это пространство (в отличие от очень важных, при всей их простоте, пространств $\mathfrak{F}$ и D) никаких применений не находит (что связано с тем, что открытые множества слипшегося двоеточия находятся во взаимно однозначном соответствии с открытыми множествами пространства, состоящего из одной точки).

Естественно сказать, что в топологическом пространстве последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ сходится к точке x, если любая окрестность точки x содержит все точки этой последовательности, начиная с некоторой. Частным случаем сходящихся последовательностей являются последовательности стационарные, для которых, начиная с некоторого n, имеем $x_n = x_{n+1} = \ldots$ Понятие сходимости имеет в теории топологических пространств значительно меньшее значение, чем в теории метрических пространств: может случиться, что точка x топологического пространства X является предельной точкой множества $M \subseteq X$ и в то же время в M нет никакой последовательности, сходящейся к точке x. Пусть, например, X есть множество всех действительных чисел. Назовем открытым в X всякое множество, получающееся вычитанием любого не более чем счетного множества точек из какого-либо множества точек, открытого на числовой прямой. Легко видеть, что в X никакое счетное множество не имеет предельной точки и что для несчетного множества M предельные точки в пространстве X совпадают с точками конденсации множества M на числовой прямой. При этом точка x топологического пространства называется *точкой конденсации* какого-либо несчетного множества M, лежащего в этом пространстве, если каждая окрестность точки x содержит несчетное подмножество точек множества M. Сходящимися в пространстве X являются лишь стационарные последовательности. Поэтому, если точка x есть не принадлежащая множеству M предельная точка этого множества, то не существует никакой последовательности точек множества M, сходящейся к точке x.

Тем не менее во многих важных случаях понятие сходимости представляет интерес и в теории топологических пространств; мы вернемся к этому вопросу ниже (§ 4); сейчас отметим только, что рассматривая вполне упорядоченное множество $W(\omega_1)$ всех порядковых чисел первого и второго классов как топологическое пространство, мы замечаем, что сходимость в этом пространстве есть не что иное, как сходимость счетной последовательности порядковых чисел α_n к предельному числу $\lambda = \lim\limits_n \alpha_n$, определенная нами в § 4 гл. 3. В связи с этим можно отметить, что трансфинитные числа второго рода (предельные трансфинитные числа) и только они являются предельными точками пространства $W(\omega_1)$.

Точка x множества M называется *внутренней точкой* этого множества, если существует окрестность точки x, содержащаяся в множестве M. Совокупность всех внутренних точек множества M называется *открытым ядром* множества M и обозначается через $\langle M \rangle$. Легко проверяется следующее утверждение: если A и B — взаимно дополнительные множества топологического пространства, т. е. $B = X \setminus A$ (значит, $A = X \setminus B$), то

$$X \setminus [A] = \langle B \rangle \tag{4}$$

и

$$X \setminus \langle B \rangle = [A]. \tag{5}$$

Легко доказывается также, что открытое ядро всякого множества M есть сумма всех содержащихся в M открытых множеств (или наибольшее) открытое множество, содержащееся в множестве M. Имеют место следующие соотношения:

$$\langle M \rangle \subseteq M, \quad \Big\langle \bigcap_{i=1,\,2} M_i \Big\rangle = \langle M_1 \rangle \cap \langle M_2 \rangle,$$

$$\langle\langle M \rangle\rangle = \langle M \rangle.$$

Эти соотношения выражают основные свойства открытого ядра множества; они двойственны основным свойствам замыкания и могут быть получены из них на основании формулы (4).

Множество M топологического пространства X называется *всюду плотным* в пространстве X, если каждая точка $x \in X$ является точкой прикосновения множества M, т. е. если $[M]_X = X$.

Множество M называется *плотным в открытом множестве* $\Gamma \subseteq X$, если $\Gamma \subseteq [M]_X$ или, что то же, если $M \cap \Gamma$ всюду плотно в подпространстве $\Gamma \subseteq X$; множество M называется *нигде не плотным* в X, если оно не плотно ни в каком непустом открытом $\Gamma \subseteq X$. Легко видеть, что M тогда и только тогда нигде не плотно в X, если каждое непустое открытое $\Gamma \subset X$ содержит некоторое такое открытое непустое $\Gamma_0 \subset \Gamma$, что $M \cap \Gamma_0 = \Lambda$.

Замечание 4. Легко доказать, что замыкание всякого нигде не плотного множества нигде не плотно.

Замечание 5. Два взаимно дополнительных множества A и B могут оба быть всюду плотными в X — пример: множество всех рациональных и множество всех иррациональных точек числовой прямой. Однако если замкнутое F всюду плотно в X, то $F = X$, если открытое G всюду плотно в X, то $F = X \setminus G$ нигде не плотно в X.

Всякое множество $M \subset X$ всюду плотно в подпространстве $[M] \subset X$.

Определение 4. Пусть M — произвольное множество пространства X; замкнутое множество $[M] \setminus \langle M \rangle$ называется *границей* множества M и обозначается через гр M.

Множество гр M нигде не плотно в X, хотя может быть всюду плотно в $[M]$.

Фактически мы будем рассматривать только границы открытых множеств и реже границы замкнутых множеств. Очевидно, что для открытого G, соответственно для замкнутого F, имеем гр $G = [G] \setminus G$, гр $F = F \setminus \langle F \rangle$, причем множество гр G нигде не плотно в $[G] = G \cup$ гр G и тем более во всем X, а множество гр F нигде не плотно в X, хотя может быть всюду плотным в F.

Предложение 1. *Если F — замкнутое, а G — открытое множество в пространстве X, то $F \setminus G$ замкнуто, а $G \setminus F$ открыто.*

В самом деле, $F \setminus G = F \cap (X \setminus G)$, а $G \setminus F = G \cap (X \setminus F)$, откуда и следует утверждение.

Канонические замкнутые и открытые множества (*ка*- и *ко*-множества). Множество, являющееся замыканием открытого множества, называется *каноническим замкнутым* или, кратко, *ка-множеством*. Если $A = [G]$, то $G \subseteq \langle A \rangle \subseteq A$, значит, $A = [G] \subseteq [\langle A \rangle] \subseteq A$, т. е. $A = [\langle A \rangle]$; поэтому *ка*-множества могут быть определены как множества, являющиеся замыканием своего открытого ядра.

В каждом замкнутом множестве F содержится максимальное *ка*-множество (быть может, пустое), именно

$$A=[\langle F\rangle].$$

Очевидно, далее, что сумма двух *ка*-множеств $A_1=[G_1]$ и $A_2=[G_2]$ есть *ка*-множество $A=[G_1]\cup[G_2]$ (однако пересечение двух *ка*-множеств может не быть *ка*-множеством).

Множества, являющиеся пересечением конечного числа *ка*-множеств, называются *π-множествами*.

Множества, являющиеся открытым ядром какого-нибудь замкнутого множества, называются *каноническими открытыми* или *ко-множествами*. Если $G=\langle F\rangle$, то $G=\langle[G]\rangle$, так что *ко*-множества могут быть определены как открытые ядра своих замыканий. Из $A=[\langle A\rangle]$ по формуле (4) следует, что $X\setminus A=$ $=\langle X\setminus\langle A\rangle\rangle$. Аналогичным образом из формулы (5) для множества $G=\langle[G]\rangle$ следует равенство $X\setminus G=[X\setminus[G]]$. Следовательно, канонические открытые множества могут быть определены как дополнения к каноническим замкнутым, и наоборот.

Всякое открытое множество G содержится в наименьшем *ко*-множестве: им является множество $\langle[G]\rangle$.

Предложение 2. *Если A — произвольное ка-множество, а F — произвольное замкнутое множество пространства X, то*

$$[A\setminus F]=[\langle A\rangle\setminus F].$$

Достаточно доказать, что всякая окрестность Ox всякой точки $x\in[A\setminus F]$ пересекается с множеством $\langle A\rangle\setminus F$. Положим $O_1=Ox\cap(X\setminus F)$. Так как $x\in[A\setminus F]$, то

$$\Lambda\neq Ox\cap A\cap(X\setminus F),$$

т. е. открытое множество $O_1=Ox\setminus F$ пересекается с $A=[\langle A\rangle]$, но тогда и $O_1\cap\langle A\rangle\neq\Lambda$, т. е.

$$\Lambda\neq Ox\cap(\langle A\rangle\setminus F),$$

что и требовалось доказать.

Вернемся к метрическим пространствам.

Докажем две теоремы, которые (хотя и с разных сторон) устанавливают связь между замкнутыми и открытыми множествами.

Теорема 3. *Всякие два непересекающихся замкнутых множества F_1 и F_2 метрического пространства X имеют в этом пространстве две непересекающиеся окрестности.*

Доказательство. Так как F_1 и F_2 — непересекающиеся замкнутые множества, то никакая точка одного из этих множеств не является точкой прикосновения другого. Поэтому для каждой точки $x\in F_1$ число $\rho_x=\rho(x, F_2)$ положительно. Точно так же для каждой точки $y \in F_2$ имеем $\rho_y = \rho(y, F_1) > 0$. Положим

$$U_1 = \bigcup_{x \in F_1} U\left(x, \frac{\rho_x}{2}\right), \quad U_2 = \bigcup_{y \in F_2} U\left(y, \frac{\rho_y}{2}\right);$$

U_1 и U_2 суть открытые множества, содержащие соответственно F_1 и F_2. Докажем, что $U_1 \cap U_2 = \Lambda$. Пусть, в самом деле, имеется точка $z \in U_1 \cap U_2$. Тогда имеется точка $x \in F_1$ такая, что $\rho(x, z) < \frac{\rho_x}{2}$, и точка $y \in F_2$ такая, что $\rho(y, x) < \frac{\rho_y}{2}$. Пусть для определенности $\rho_x \geqslant \rho_y$. Тогда

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z) < \frac{\rho_x + \rho_y}{2} \leqslant \rho_x,$$

что противоречит определению числа ρ_x; это противоречие доказывает наше утверждение.

Два непересекающихся замкнутых множества F_1 и F_2 могут не иметь непересекающихся сферических окрестностей. Дело в том, что F_1 и F_2 могут находиться друг от друга на расстоянии, равном нулю (как, например, гипербола и ее асимптота на обыкновенной числовой плоскости), а тогда, очевидно, всякая сферическая окрестность одного из наших двух множеств пересекается со вторым множеством и тем более со всякой его сферической окрестностью.

Множество M топологического пространства X называется *G_δ-множеством (множеством типа G_δ)*, если оно является пересечением счетного числа открытых множеств пространства X. Множества, дополнительные к G_δ-множествам, называются *множествами типа F_σ*. Из формул двойственности § 2 гл. 1 следует, что множество тогда и только тогда имеет тип F_σ, когда оно является суммой счетного числа замкнутых множеств.

Теорема 4. *Всякое замкнутое множество данного метрического пространства X является множеством типа G_δ.*

В самом деле, достаточно показать, что всякое замкнутое множество F есть пересечение своих сферических окрестностей вида $U_n = U\left(F, \frac{1}{n}\right)$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Так как при всяком n имеем $F \subseteq U_n$, то, значит, $F \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Остается только показать, что всякая точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ принадлежит множеству F. Но из $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ сразу следует, что при любом n имеем $\rho(x, F) < \frac{1}{n}$, т. е. $\rho(x, F) = 0$. А это значит, что x есть точка прикосновения множества F, т. е., в силу его замкнутости, есть точка самого множества F.

Поскольку множества, дополнительные к G_δ-множествам, имеют тип F_σ, доказана также

Теорема 4'. *Всякое открытое множество метрического пространства X есть множество типа F_σ.*

Борелевские множества в метрических пространствах. Назовем множествами типа $G_{\delta\sigma}$ множества, являющиеся суммами счетного числа множеств типа G_δ; точно так же множествами типа $F_{\sigma\delta}$ назовем множества, являющиеся пересечениями счетного числа множеств типа F_σ. (Заметим, что сумма счетного числа множеств F_σ есть, очевидно, множество F_σ, а пересечение счетного числа множеств G_δ есть множество G_δ.) Далее, назовем множествами типа $F_{\sigma\delta\sigma}$ множества, являющиеся суммами счетного числа множеств типа $F_{\sigma\delta}$, а множествами типа $G_{\delta\sigma\delta}$—множества, являющиеся пересечениями счетного числа множеств типа $G_{\delta\sigma}$.

Аналогично определяются множества типов $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$ и т. д., причем каждый раз значок σ означает счетное сложение, а значок δ—счетное пересечение.

В несколько более компактной форме те же множества можно получить следующим образом. Назовем замкнутые множества множествами типа $(0, \delta)$, а открытые множества—множествами типа $(0, \sigma)$. И те и другие множества вместе назовем множествами типа 0. Предположим, что построены множества типа $n-1$. Назовем множествами типа (n, σ) множества, являющиеся суммами счетного числа множеств типа $n-1$, а множествами типа (n, δ) множества, являющиеся пересечениями счетного числа множеств типа $n-1$.

(При этом для получения множеств типа (n, σ) достаточно брать счетные суммы множеств типа $(n-1, \delta)$, а для получения множеств типа (n, δ)—счетные пересечения множеств типа $(n-1, \sigma)$, так как счетные суммы множеств типа $(n-1, \sigma)$, соответственно счетные пересечения множеств типа $(n-1, \delta)$, дают нам снова множества того же типа.)

Множества типов (n, σ) и (n, δ) образуют вместе тип n. Итак:

$$\text{тип } 0 \begin{cases} (0, \sigma)\text{-открытые множества,} \\ (0, \delta)\text{-замкнутые множества;} \end{cases}$$

$$\text{тип } 1 \begin{cases} (1, \sigma)\text{-тип } F_\sigma, \\ (1, \delta)\text{-тип } G_\delta; \end{cases}$$

$$\text{тип } 2 \begin{cases} (2, \sigma)\text{-тип } G_{\delta\sigma}, \\ (2, \delta)\text{-тип } F_{\sigma\delta}; \end{cases}$$

$$\text{тип } 3 \begin{cases} (3,\ \sigma)\text{-тип } F_{\sigma\delta\sigma}, \\ (3,\ \delta)\text{-тип } G_{\delta\sigma\delta}; \end{cases}$$

. . . .

Эту классификацию можно продолжить, пользуясь трансфинитными числами второго класса. Пусть построены множества всех типов $\alpha' < \alpha$, а α — какое-либо трансфинитное число второго класса. Называем множествами типа $(\alpha,\ \sigma)$, соответственно типа $(\alpha,\ \delta)$, множества, являющиеся суммами, соответственно пересечениями, счетного числа множеств типов $<\alpha$; множества типов $(\alpha,\ \sigma)$ и $(\alpha,\ \delta)$ вместе называются множествами типа α. При этом, если α — первого рода, $\alpha = \alpha' + 1$, то для получения множеств типа $(\alpha,\ \sigma)$ достаточно брать счетные суммы множеств типа α' (даже одних лишь множеств типа $(\alpha',\ \delta)$), а для получения множеств типа $(\alpha,\ \delta)$ — счетные пересечения множеств типа $(\alpha',\ \sigma)$.

Получаемые таким образом множества, т. е. множества всевозможных типов α, где α есть любое порядковое число $<\omega_1$, называются *борелевскими множествами* или сокращенно *B-множествами* данного метрического пространства X.

Замечание 6. Очевидно, всякое множество типа α является вместе с тем множеством типа β при любом $\beta > \alpha$.

Замечание 7. Замкнутые множества называются также множествами *нулевого класса*. Если α — какое-нибудь порядковое число, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, то *множествами класса α называются все множества типа α, не являющиеся множествами типа α' ни при каком $\alpha' < \alpha$*. Вопрос о том, в каких случаях действительно существуют множества всех классов $\alpha < \omega_1$ (вопрос о непустоте классов борелевских множеств), мы в этой книге оставляем открытым. Заметим лишь, что в случае, если пространство X состоит из счетного множества точек, все вообще лежащие в нем множества являются множествами типа F_σ (и типа G_δ), так что все классы, начиная со второго, пусты. Наоборот, если X есть евклидово пространство любого числа измерений, или бэровское пространство, или гильбертово пространство, то существуют борелевские множества любого класса $\alpha < \omega_1$ (доказательство можно найти в книге Хаусдорфа [1], гл. 8, и в книге Куратовского [1], т. 1, § 30).

Замечание 8. Мы видели, что любой конечный тип $(n,\ \sigma)$ или $(n,\ \delta)$ получает естественное обозначение в виде типа F_* или G_*, где $*$ есть конечная совокупность значков σ и δ, удовлетворяющая следующим условиям:

А) две одинаковые буквы σ или δ никогда не встречаются подряд;

Б) в случае F_* первой буквой является σ, в случае G_* первой буквой является δ;

В) если данный тип есть (n, σ), соответственно (n, δ), то последней буквой в $*$ является σ, соответственно δ.

Однако из того, что всякое замкнутое множество есть множество типа G_δ, а всякое открытое множество есть множество типа F_σ, следует, что всякое множество F_σ есть вместе с тем $G_{\delta\sigma}$; всякое G_δ есть $F_{\sigma\delta}$; вообще, всякое F_* есть G_{δ_*} и всякое G_* есть F_{σ_*}. Таким образом, разница между F_* и G_* данного типа n стирается при переходе к следующему типу. Тем более каждый трансфинитный тип может быть записан и в виде F_* и в виде G_*, где $*$ есть некоторое вполне упорядоченное множество значков σ, δ, удовлетворяющее условиям А), Б), В).

Легко доказывается, что дополнение $X \setminus M$ к любому множеству M типа α есть множество типа α (а именно, дополнение к множеству типа (α, σ) есть множество типа (α, δ), и обратно).

В самом деле, это утверждение верно для множеств типа 0. Предположим, что оно доказано для множеств всех типов $\alpha' < \alpha$. Тогда из формул двойственности § 2 гл. 1 и из самого определения множеств типа α следует, что дополнение к множеству типа (α, σ) есть множество типа (α, δ) и обратно.

Далее, сумма и пересечение счетного числа множеств типа α есть множество типа $\alpha+1$.

Рассмотрим теперь некоторую систему K множеств, лежащих в данном пространстве X. Эта система называется *телом множеств* (или просто телом) пространства X, если она удовлетворяет следующим условиям:

1°. Сумма и пересечение счетного числа множеств, являющихся элементами системы K, есть элементы системы K.

2°. Дополнение $X \setminus M$ ко всякому множеству $M \in K$ есть элемент системы K.

Замечание 9. Из этих условий следует, что все пространство X и пустое множество являются элементами всякого тела K В самом деле, если $M \in K$, то и $X \setminus M \in K$, значит, $X = M \cup (X \setminus M) \in K$ и $\Lambda = X \setminus X \in K$.

Далее, из наших условий следует, что разность двух множеств $M_1 \in K$, $M_2 \in K$ также есть элемент системы K, так как

$$M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap (X \setminus M_2),$$

Мы только что доказали, что суммы и пересечения счетного числа борелевских множеств пространства X суть борелевские множества этого пространства, а также что дополнение к борелевскому множеству есть борелевское множество. Итак, *борелевские множества пространства X образуют тело множеств этого пространства X.*

Докажем теперь, что всякое тело K пространства X, содержащее в числе своих элементов все замкнутые (или все открытые) множества, содержит и все борелевские множества. В самом деле, если все замкнутые множества являются элементами тела K, то элементами этого тела являются и все открытые множества (как дополнения к замкнутым; если бы было дано, что K содержит все открытые множества, то K содержало бы и все замкнутые множества, как дополнения к открытым). Итак, во всяком случае тело K содержит в качестве своих элементов все множества типа 0. Но если K содержит в числе своих элементов все множества всех типов $\alpha' < \alpha$, где α — любое фиксированное порядковое число $< \omega_1$, то K содержит и все множества типа α, так как эти множества являются суммами и пересечениями счетного числа множеств типов $\alpha' < \alpha$. Наше предложение доказано. Оно может быть сформулировано и так:

Теорема 5. *Система всех борелевских множеств данного пространства X есть наименьшее тело множеств пространства X, содержащее в числе своих элементов все замкнутые (или все открытые) множества этого пространства.*

Доказанная теорема позволяет определить систему всех борелевских множеств пространства X (или, как говорят, «борелевское тело пространства X») без применения трансфинитных чисел.

Заметим прежде всего, что пересечение любого множества тел K_α данного пространства X есть снова тело пространства X. В самом деле, если данное счетное множество элементов M_i системы $K = \bigcap\limits_\alpha K_\alpha$, то сумма и пересечение множеств M_i (как элементов каждого из тел K) содержатся в любом K_α, значит, и в K. Дополнение к любому $M \in K$, содержась в любом K_α, также содержится в K.

С другой стороны, совокупность всех множеств пространства X, очевидно, есть тело, содержащее в числе своих элементов все замкнутые (открытые) множества пространства X. Поэтому можно без каких бы то ни было предварительных рассуждений говорить о наименьшем теле пространства X, содержащем в числе своих элементов все замкнутые (все открытые) множества: этим телом является пересечение всех тел K пространства X, содержащих в числе своих элементов все замкнутые (все открытые) в X множества; это наименьшее тело и можно определить как борелевское тело пространства X.

Замечание 10. Борелевские множества являются частным случаем так называемых A-множеств (данного пространства X); определение A-множеств и A-операции, при помощи которой A-множества получаются из замкнутых множеств, будет дано в § 4 гл. 5, замечание 4; теория A-множеств и борелевских множеств хорошо и подробно изложена в книге Хаусдорфа [1] и в книге Куратовского [1], т. I.

§ 2. Непрерывные отображения

Отображение f: $X \longrightarrow Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для него выполнено следующее

Условие Коши. Ко всякой окрестности Oy_0 точки $y_0 = fx_0$ существует такая окрестность Ox_0 точки $x_0 \in X$, что $fOx_0 \subseteq Oy_0$.

Отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется *непрерывным отображением пространства X в пространство Y*, если оно непрерывно во всякой точке $x_0 \in X$.

Из этого определения легко следует

Предложение 1. *Отображение f: $X \longrightarrow Y$ тогда и только тогда непрерывно, когда прообраз каждого открытого множества $V \subseteq Y$ пространства Y есть открытое множество $U = f^{-1}V$ пространства X.*

В самом деле, пусть выполнено условие Коши для любой точки $x_0 \in X$ и пусть V — произвольное открытое в Y множество. Для доказательства того, что $f^{-1}V$ открыто в X, достаточно доказать, что любая точка $x \in f^{-1}V$ — внутренняя точка множества $f^{-1}V$. Но открытое множество V есть окрестность точки $y = fx$; поэтому существует окрестность Ox точки x в X, для которой $fOx \subseteq V$, а это и значит, что $Ox \subseteq f^{-1}V$.

Пусть, обратно, прообраз любого открытого в Y множества открыт в X. Докажем, что тогда условие Коши выполнено для любой точки $x_0 \in X$. Берем произвольную окрестность $V = Oy_0$ точки $y_0 = fx_0$. Тогда $f^{-1}V$ есть окрестность Ox_0 точки x_0 и для нее, очевидно, $fOx_0 \subseteq Oy_0$. Из предложения 1 непосредственно следует

Предложение 2. *Отображение f: $X \longrightarrow Y$ тогда и только тогда непрерывно, когда прообраз $f^{-1}\, F$ всякого замкнутого множества F в Y есть замкнутое множество в X.*

Наконец, имеет место

Предложение 3. *Отображение f: $X \longrightarrow Y$ тогда и только тогда непрерывно, когда для любого множества $M \subseteq X$ имеем*

$$f\,[M]_X \subseteq [fM]_Y.$$

Доказательство. 1°. Пусть отображение f: $X \longrightarrow Y$ непрерывно. Тогда множество $f^{-1}\,[fM]$ замкнуто и содержит множество M. Следовательно, $[M] \subseteq f^{-1}[fM]$, откуда $f\,[M] \subseteq [fM]$.

2°. Пусть $f[M]_X \subseteq [fM]_Y$ для любого $M \subseteq X$. Докажем, что f: $X \longrightarrow Y$ непрерывно.

Рассмотрим замкнутое в Y множество F. Тогда

$$f\,[f^{-1}F] \subseteq [ff^{-1}F] = [F] = F,$$

откуда $[f^{-1}F] \subseteq f^{-1}F$, значит, $f^{-1}F$ замкнуто.

Предложение доказано.

Докажем следующие два утверждения:

Предложение 4. *Пусть F_1, F_2 — два замкнутых множества пространства X, дающих в сумме все X, и пусть $f_1: F_1 \longrightarrow Y$, $f_2: F_2 \longrightarrow Y$ — непрерывные отображения этих замкнутых множеств в пространство Y, совпадающие на пересечении $F_1 \cap F_2$. Тогда отображение $f: X \longrightarrow Y$, задаваемое равенствами*

$$f(x) = f_1(x), \text{ если } x \in F_1,$$
$$f(x) = f_2(x), \text{ если } x \in F_2,$$

непрерывно.

Доказательство. Достаточно доказать, что прообраз $f^{-1}\Phi$ всякого замкнутого в Y множества Φ замкнут в X. Но (как легко проверить) $f^{-1}\Phi = f_1^{-1}\Phi \cup f_2^{-1}\Phi$. Множество $f_1^{-1}\Phi$ (соответственно $f_2^{-1}\Phi$) замкнуто в замкнутом множестве F_1 (соответственно в F_2) и, значит, во всем пространстве X; поэтому замкнуто и множество $f^{-1}\Phi = f_1^{-1}\Phi \cup f_2^{-1}\Phi$. Предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть система открытых в пространстве X множеств O_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, в сумме дает все пространство X. Если отображение $f: X \longrightarrow Y$ таково, что его ограничение $f_\alpha: O_\alpha \longrightarrow Y$ на каждое множество O_α непрерывно, то непрерывно и само отображение f.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое в Y множество V. Его прообраз

$$f^{-1}V = f^{-1}V \cap \bigcup_\alpha O_\alpha = \bigcup_\alpha (f^{-1}V \cap O_\alpha) = \bigcup_\alpha f_\alpha^{-1}V$$

открыт в X, что и требовалось доказать.

При непрерывном отображении $f: X \longrightarrow Y$ образ открытого множества $G \subseteq X$ может не быть открытым в Y, а образ замкнутого множества $F \subseteq X$ может не быть замкнутым в Y. Например, рассмотрим в плоскости, снабженной прямоугольной системой координат, окружность S радиуса 1 с центром в начале координат и полуинтервал $X = [0 \leqslant x < 2\pi)$ оси абсцисс. Для любой точки $x \in X$ обозначим через fx точку окружности S, радиус-вектор которой наклонен к оси абсцисс под углом x. Этим определено взаимно однозначное непрерывное отображение $f: X \longrightarrow S$ полуинтервала $X = [0; 2\pi)$ на окружность S, при котором образ полуинтервала $G = [0; \pi)$, являющегося открытым множеством в пространстве $X = [0; 2\pi)$, не есть открытое множество в S, а образ полуинтервала $F = [\pi; 2\pi)$, являющегося замкнутым множеством в X, не есть замкнутое множество в S.

Определение 5. Отображение $f: X \longrightarrow Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *открытым*, соответственно *замкнутым*, если для любого открытого $G \subseteq X$, соответственно замкнутого $F \subseteq X$, образ fG соответственно fF, является открытым, соответственно замкнутым, множеством пространства Y.

Из определения сразу следует, что при замкнутом отображении $f\colon X \longrightarrow Y$ малый образ $f^{\#}G$ *) открытого множества G открыт.

Не оговаривая этого особо, мы будем рассматривать лишь такие открытые и замкнутые отображения топологических пространств, которые вместе с тем являются непрерывными. Следует заметить, что среди непрерывных отображений открытые отображения образуют чрезвычайно специальный класс. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть непрерывные функции $y = fx$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, осуществляющие открытые отображения отрезка $X = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ в себя. Эти функции имеют конечное число точек максимума и минимума на отрезке $[0; 1]$, причем принимают в точках максимума значение 1, а в точках минимума значение 0; в промежутках между двумя последовательными точками экстремума функция f монотонна.

Важным примером открытого отображения одной плоской области на другую могут служить отображения, осуществляемые аналитическими функциями комплексного переменного.

Положение замкнутых отображений в топологии совершенно другое: мы увидим, что для очень важного класса пространств X и Y всякое непрерывное отображение $f\colon X \longrightarrow Y$ является замкнутым; в частности, это имеет место, если пространства X и Y определены как множества, лежащие в n-мерном евклидовом пространстве R^n, причем X замкнуто и ограничено в R^n, а $Y \subseteq R^n$ совершенно произвольно.

Имеет место следующая характеристика замкнутых отображений:

Предложение 6. *Непрерывное отображение $f\colon X \longrightarrow Y$ топологического пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда выполняется условие:*

(C^{-1}) *Для любого множества $M \subseteq Y$ и любой окрестности O множества $f^{-1}M$ существует такая окрестность V множества M, что $f^{-1}V \subseteq O$.*

Доказательство 1°. Предположим, что отображение f замкнуто; рассмотрим множество $M \subseteq Y$ и окрестность O множества $f^{-1}M$. Множество $F = X \setminus O$ замкнуто в X и $F \cap f^{-1}M = \Lambda$. Поэтому множество fF замкнуто в Y и $fF \cap M = \Lambda$. Окрестность $V = Y \setminus fF$ обладает свойством $f^{-1}V \cap F = \Lambda$, следовательно, $f^{-1}V \subseteq O$ — условие (C^{-1}) выполнено.

2°. Пусть для отображения f выполнено условие (C^{-1}). Предположим, что образ fF некоторого замкнутого в X множества F не замкнут в Y. Пусть $y \in [fF] \setminus fF$. Множество $X \setminus F$ является окрестностью множества $f^{-1}y$. Следовательно, существует такая

*) Определение малого образа см. на стр. 15.

окрестность V точки y, что $f^{-1}V \subseteq X \setminus F$. Но тогда $V \cap fF = \Lambda$, и поэтому $y \notin [fF]$. Полученное противоречие доказывает замкнутость отображения f.

Докажем относительно замкнутых (открытых) отображений еще следующее

Утверждение 1. *Если непрерывное отображение f: $X \longrightarrow Y$ пространства X в пространство Y замкнуто (открыто), то для любого множества $B \subseteq Y$ отображение f: $f^{-1}B \longrightarrow B$ также замкнуто (открыто).*

Доказательство. Рассмотрим замкнутое (открытое) в $f^{-1}B$ множество T. Тогда в X существует замкнутое (открытое) множество F, в пересечении с $f^{-1}B$ дающее множество T. По условию множество fF замкнуто (открыто) в Y. Следовательно, замкнуто (открыто) в B множество

$$B \cap fF = f(f^{-1}B \cap F) = fT,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай взаимно однозначного отображения f: $X \longrightarrow Y$ пространства X на пространство Y. При этом определено и обратное отображение f^{-1}: $Y \longrightarrow X$. Рассмотренный выше пример отображения полуинтервала $X = [0; 2\pi)$ на окружность S показывает, что из непрерывности взаимно однозначного отображения f, вообще говоря, не следует непрерывность обратного отображения f^{-1}. Однако легко доказать

Предложение 7. *Если взаимно однозначное непрерывное отображение f пространства X на пространство Y замкнуто, то обратное отображение f^{-1}: $Y \longrightarrow X$ непрерывно (и замкнуто).*

Это следует из того, что прообраз всякого замкнутого множества $F \subseteq X$ при отображении f^{-1}: $Y \longrightarrow X$ есть множество $(f^{-1})^{-1}F = fF \subseteq Y$, замкнутое в силу замкнутости отображения f.

Аналогично доказывается непрерывность отображения f^{-1}, обратного к взаимно однозначному, непрерывному и открытому отображению.

Определение 6. Отображение f: $X \longrightarrow Y$ топологического пространства X на топологическое пространство Y называется *топологическим* (или *гомеоморфным*) отображением X на Y, если f взаимно однозначно и если при этом оба отображения f: $X \longrightarrow Y$ и f^{-1}: $Y \longrightarrow X$ непрерывны.

Другими словами: топологическое отображение пространства X на пространство Y — это такое взаимно однозначное отображение множества X на множество Y, при котором множество всех открытых множеств пространства X отображается на множество всех открытых множеств пространства Y или — что то же — множество всех замкнутых множеств в X отображается на множество всех замкнутых множеств в Y.

Топологическое отображение f пространства X на какое-нибудь подпространство Y_0 пространства Y называется топологическим отображением пространства X в пространство Y. Пространства X и Y называются *гомеоморфными* между собою, если одно из этих пространств можно топологически отобразить на другое.

Данное выше определение непрерывности означает: отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y непрерывно, если прообраз (открытой, соответственно замкнутой) топологии пространства Y содержится в (открытой, соответственно замкнутой) топологии пространства X. Естественно возникает вопрос об отображениях $f\colon X \to Y$, при которых прообраз топологии пространства Y совпадает с топологией пространства X, т. е. множество $M \subseteq Y$ открыто (замкнуто) в Y тогда и только тогда, когда открыто (замкнуто) в X множество $f^{-1}M$. Отображения, удовлетворяющие этому условию, называются *факторными* *). Факторные отображения, очевидно, непрерывны. Это весьма важный класс отображений. Докажем, в частности, что все замкнутые и все открытые непрерывные отображения являются факторными. Доказательства для замкнутых и для открытых отображений вполне аналогичны, поэтому ограничимся замкнутыми отображениями. Итак, пусть отображение $f\colon X \to Y$ замкнуто и пусть Φ — какое-нибудь множество, замкнутое в Y. Тогда $f^{-1}\Phi$ замкнуто в X в силу непрерывности отображения f. Обратно, если для какого-нибудь множества $M \subseteq Y$ множество $f^{-1}M = \Phi$ замкнуто в X, то множество $M = f\Phi$ замкнуто в Y в силу замкнутости отображения f.

Факторные отображения естественно возникают при так называемых факторизациях пространства X по некоторому его разбиению. Под разбиением пространства понимается система $\mathfrak{M}$ его дизъюнктных замкнутых подмножеств $\{M\}$, объединение которых есть все X.

Если определено разбиение $\mathfrak{M}$, то определено и естественное отображение $\mu\colon X \to \mathfrak{M}$, состоящее в том, что каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие единственное содержащее x множество $M \in \mathfrak{M}$. Теперь множество $\mathfrak{M}$ превращаем в топологическое пространство, объявляя открытым в пространстве $\mathfrak{M}$ всякое множество $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, прообраз $\mu^{-1}\mathfrak{N}$ которого при естественном отображении $\mu\colon X \to \mathfrak{M}$ является открытым множеством пространства X. Очевидно, ту же самую топологию на $\mathfrak{M}$ мы получили бы, называя замкнутым в $\mathfrak{M}$ всякое множество $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, прообраз $\mu^{-1}\mathfrak{N}$ которого замкнут в X. Эта топология называется *факторной топологией* на множестве $\mathfrak{M}$ (дизъюнктных подмножеств пространства X, дающих в сумме все X).

---

*) Факторные отображения были впервые рассмотрены Александровым [3] (см. также Александров — Хопф [1], гл. 1, § 5 и гл. 2, §§ 2, 3).

Очевидно, что при факторной топологии в $\mathfrak{M}$ естественное отображение $\mu\colon X \to \mathfrak{M}$ является факторным и, следовательно, непрерывным отображением пространства X в пространство $\mathfrak{M}$. Само пространство $\mathfrak{M}$ называется при этом пространством разбиения $\mathfrak{M}$ или факторпространством X по разбиению $\mathfrak{M}$. Очевидно также, что условие замкнутости в X всех $M \in \mathfrak{M}$ равносильно условию замкнутости всех одноточечных множеств пространства $\mathfrak{M}$; это последнее условие выражают, говоря, что $\mathfrak{M}$ есть T_1-пространство. К этому вопросу мы вернемся в § 8.

Понятия сходимости и равномерной сходимости последовательности непрерывных функций, известные читателю из курса математического анализа, практически без изменений переносятся на случай топологических пространств. Пусть X — какое-нибудь множество и $f\colon X \to R^1$ — функция на множестве X. Скажем, что последовательность функций $\{f_n\colon n=1, 2, \ldots\}$ сходится к функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ и любой данной точки $x \in X$ можно найти такое число n_ε (зависящее, вообще говоря, не только от выбранного ε, но и от точки x), что

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ для всех } n > n_\varepsilon. \qquad (*)$$

Если к каждому $\varepsilon > 0$ можно подобрать n_ε так, чтобы условие $(*)$ выполнялось для всех $x \in X$, то говорим, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f равномерно.

Как читателю уже известно из курса математического анализа, если последовательность $\{f_n\}$ непрерывных функций на топологическом (в частности, на метрическом) пространстве X сходится к действительной функции $f\colon X \to R^1$, то функция f не обязана быть непрерывной. В то же время имеет место

Предложение 8. *Всякая функция f на топологическом пространстве X, являющаяся пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, непрерывна.*

Доказательство. Пусть дана точка $x \in X$ и положительное число ε. Требуется найти такую окрестность Ox точки x, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всякой точки $y \in Ox$. Существует такое $n = n_{\varepsilon/3}$, что $|f(z) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $m \geqslant n$ и всех $z \in X$. Поскольку функция f_n непрерывна, существует такая окрестность Ox точки x, что $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всякой точки $y \in Ox$. Покажем, что окрестность Ox — искомая. Имеем

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Каждое из трех слагаемых в этой сумме меньше чем $\varepsilon/3$: первое и третье — в силу выбора числа n, второе — в силу выбора окрестности Ox. Таким образом, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для всякой точки $y \in Ox$. Предложение доказано.

§ 3. Связность

Пространство X называется *несвязным*, если его можно представить в виде суммы двух непересекающихся непустых замкнутых множеств:

$$X = \Phi_1 \cup \Phi_2. \qquad (*)$$

Так как множества Φ_1 и Φ_2 взаимно дополнительны, то каждое из них, как дополнение к замкнутому, открыто. Поэтому в определении несвязного пространства можно замкнутые множества заменить открытыми или «открыто-замкнутыми», т. е. такими, которые одновременно открыты и замкнуты.

В каждом пространстве имеются два «тривиальных» открыто-замкнутых множества: все пространство и пустое множество. Если пространство несвязно, то в нем имеются нетривиальные открыто-замкнутые множества, т. е. непустые и в то же время не совпадающие со всем пространством: таковы каждое из множеств Φ_1 и Φ_2 разбиения $(*)$. Обратно, если в пространстве имеется хотя бы одно нетривиальное открыто-замкнутое множество Φ_1, то его дополнение $\Phi_2 = X \setminus \Phi_1$ также является нетривиальным открыто-замкнутым множеством, так что мы имеем разбиение $(*)$. Итак:

Пространство тогда и только тогда несвязно, когда в нем имеется нетривиальное открыто-замкнутое множество. Если же в пространстве X единственными открыто-замкнутыми множествами являются два тривиальных (или, что то же самое, если при всяком представлении пространства X в виде суммы двух непересекающихся замкнутых слагаемых Φ_1 и Φ_2 по крайней мере одно из этих слагаемых пусто), то X называется *связным*. Пустое пространство и точка, очевидно, связные пространства.

Так как всякое множество, лежащее в каком-либо топологическом пространстве, само является топологическим пространством, то, определив связность топологического пространства, мы вместе с тем можем установить, будет ли данное множество M, лежащее в пространстве X, связным или нет. Только при рассмотрении разбиений множества M на сумму двух замкнутых множеств (или при рассмотрении открыто-замкнутых подмножеств множества M) надо помнить, что речь идет о множествах, замкнутых и открытых в M, и что множество, замкнутое (или открытое) в M, может не быть замкнутым (соответственно открытым) в X. Например, если X есть плоскость, а M — сумма интервалов $(0; 1)$ и $(2; 3)$ на оси абсцисс, то каждый из этих интервалов представляет собою открыто-замкнутое множество в M, не являющееся в X ни замкнутым, ни открытым.

Замечание 1. Если X_0 есть подпространство топологического пространства X и множество $M \subset X_0$ открыто-замкнуто в X_0, то в X существуют открытое множество Φ и замкнутое множество Г такие, что $M = X \cap \Gamma = X \cap \Phi$; однако в пространстве X может не существовать никакого открыто-замкнутого множества, дающего в пересечении с X_0 множество M. Например, пусть X — числовая прямая, а X_0 — ее подпространство, состоящее из всех рациональных чисел. Обозначим через M открыто-замкнутое в X_0 множество, состоящее из всех рациональных чисел интервала $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. Множество M не является пересечением с X_0 никакого открыто-замкнутого в X множества (поскольку, как мы скоро увидим, в X не имеется никакого нетривиального открыто-замкнутого множества).

Теорема 6. *Сегмент числовой прямой есть связное множество.*

Доказательство от противного. Пусть сегмент $[a; b]$ несвязен. Тогда он может быть представлен в виде суммы двух непустых непересекающихся открыто-замкнутых в $[a; b]$ множеств Φ_1 и Φ_2. Пусть, например, $a \in \Phi_1$. Так как Φ_1 открыто в $[a; b]$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что полусегмент $[a; a+\varepsilon)$ содержится в Φ_1. Назовем точку $x \in [a; b]$ «отмеченной», если полусегмент $[a; x)$ содержится в Φ_1. Все точки полусегмента $[a; a+\varepsilon)$, как мы видели, являются отмеченными; поэтому, обозначая через c верхнюю грань множества всех отмеченных точек, имеем во всяком случае $c > a$. Утверждается, что c — отмеченная точка, т. е. что всякая точка $x \in [a; c)$ содержится в Φ_1. В самом деле, пусть дана произвольная точка $x \in [a; c)$; так как c — верхняя грань множества отмеченных точек, то имеется отмеченная точка $x' > x$; следовательно, $[a; x') \subseteq \Phi_1$ и, в частности, $x \in \Phi_1$. Так как все точки полусегмента $[a; c)$ принадлежат Φ_1 и Φ_1 замкнуто, то и $c \in \Phi_1$. Но Φ_1, кроме того, и открыто. Поэтому, если $c \neq b$, то все точки некоторого полусегмента $[c; c+\varepsilon')$, $\varepsilon' > 0$, принадлежат Φ_1 и, значит, $c+\varepsilon'$ — «отмеченная» точка, вопреки предположению, что c — верхняя грань всех отмеченных точек. Итак, непременно $c = b$. Но в этом случае, по доказанному, $[a; b)$ содержится в Φ_1, а в силу замкнутости Φ_1 в Φ_1 содержится и точка b, так что Φ_2, вопреки нашим предположениям, пусто. Полученное противоречие доказывает теорему 6.

Примерами несвязных множеств могут служить: 1) сумма двух сегментов (или двух интервалов) числовой прямой, не имеющих общих точек (каждый из этих сегментов (соответственно интервалов) открыто-замкнут в их сумме); 2) множество R_0^1 всех рациональных точек числовой прямой (множество всех рациональных точек, лежащих на каком-нибудь интервале с иррациональными концами — например, на интервале $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, — является открыто-замкнутым множеством в пространстве R_0^1). Подобным же образом убеждаемся в том, что и множество всех иррациональных точек прямой несвязно.

Теорема 7_F. *Пусть в пространстве X даны два дизъюнктных замкнутых множества Φ_1 и Φ_2 и непустое связное множество M, содержащееся в сумме $\Phi_1 \cup \Phi_2$; тогда M непременно содержится в одном каком-нибудь слагаемом этой суммы, т. е. либо в Φ_1, либо в Φ_2.*

В самом деле, так как $M \subseteq \Phi_1 \cup \Phi_2$, то

$$M = (M \cap \Phi_1) \cup (M \cap \Phi_2).$$

Так как Φ_1 и Φ_2 замкнуты в X, то $M \cap \Phi_1$ и $M \cap \Phi_2$ замкнуты в M, а так как M связно, то одно из множеств $M \cap \Phi_1$ или $M \cap \Phi_2$, например $M \cap \Phi_1$, пусто, так что $M = M \cap \Phi_2 \subseteq \Phi_2$, что и требовалось доказать.

Совершенно аналогично доказывается

Теорема 7_G. *Если связное множество M содержится в сумме двух дизъюнктных открытых множеств G_1, G_2 пространства X, то оно целиком содержится в одном из слагаемых этой суммы.*

Из этих простых теорем вытекает ряд следствий:

Теорема 8. *Пусть в пространстве X дана система (любой мощности) связных множеств M_α, причем пересечение всех этих множеств M_α непусто; тогда сумма M всех множеств M_α связна.*

В самом деле, если бы множество M было несвязно, то существовало бы представление M в виде суммы двух непустых, непересекающихся, замкнутых в нем множеств Φ_1 и Φ_2:

$$M = \Phi_1 \cup \Phi_2,$$

и каждое из множеств M_α содержалось бы, по предыдущей теореме, либо в Φ_1, либо в Φ_2. По предположению существует точка a, принадлежащая всем M_α; пусть, например, $a \in \Phi_1$. Тогда каждое M_α, имея в Φ_1 точку a, должно целиком содержаться в Φ_1. Значит, и $M \subseteq \Phi_1$, т. е. Φ_2 пусто, вопреки нашим предположениям.

Теорема 9. *Пусть для любых двух точек x и y пространства X можно найти содержащее эти две точки связное множество C_{xy}. Тогда все X связно.*

В самом деле, если бы было

$$X = \Phi_1 \cup \Phi_2,$$

где Φ_1 и Φ_2 — непустые непересекающиеся замкнутые множества, то можно было бы взять произвольные две точки $x \in \Phi_1$, $y \in \Phi_2$. Связное множество C_{xy}, содержащее x и y, пересекалось бы как с Φ_1 так и с Φ_2, между тем как по теореме 7_F оно должно было бы лежать либо в Φ_1, либо в Φ_2. Противоречие доказывает теорему.

Из теоремы 9, теоремы 6 и определения выпуклого множества *) вытекает

Теорема 10. *Всякое выпуклое множество связно. Так, n-мерное евклидово пространство при любом n связно. В частности, связной является и числовая прямая.*

Теорема 11. *Связными множествами на прямой являются: пустое множество, одноточечные множества, сегменты, полусегменты (конечные и бесконечные) и интервалы (конечные и бесконечные). Никаких других связных множеств на прямой нет.*

Так как все перечисленные в теореме 11 множества связны (хотя бы в силу того, что они выпуклы), остается лишь доказать, что никаких связных множеств, кроме перечисленных, на прямой нет. Это доказательство опирается на следующую лемму:

Лемма. *Если a и b — две точки связного множества C на прямой, то всякая точка интервала $(a; b)$ содержится в C.*

Для доказательства леммы предположим, что точка c интервала $(a; b)$ не принадлежит C. Тогда, обозначая через Φ_1 множество всех точек множества C, лежащих влево от c, а через Φ_2 — множество всех точек множества C, лежащих вправо от c, получим, в противоречии со связностью C, два непустых открытых в C множества Φ_1 и Φ_2, дающих в сумме все C и не имеющих общих точек. Лемма доказана.

Пусть теперь C — произвольное связное множество на прямой R^1. Предположим сначала, что C ограничено, и пусть $a = \inf C$, $b = \sup C$. Если x — любая точка интервала $(a; b)$, то, беря точки $a' \in C$, $b' \in C$ соответственно на $[a; x)$ и $(x; b]$ (такие точки существуют в силу определения чисел a и b), сразу же заключаем из леммы, что $x \in C$. Итак, интервал $(a; b)$ во всяком случае содержится в C. Так как, с другой стороны, $C \subseteq [a; b]$, то C необходимо совпадает с одним из четырех множеств: $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$ или $[a; b]$.

Если C ограничено лишь с одной стороны, например снизу, то, полагая $a = \inf C$, доказываем, что бесконечный интервал $(a; \infty)$ содержится в C: для любой точки $x \in (a; \infty)$ берем точки $a' \in C$, $b' \in C$ соответственно на $[a; x)$ и $(x; \infty)$ и заключаем из леммы, что $x \in C$. Таким образом, в разбираемом случае C есть либо интервал $(a; \infty)$, либо полусегмент $[a; \infty)$. Наконец, если C не ограничено ни сверху, ни снизу, то для любой точки $x \in R^1$ берем точку $a' \in C$ слева от x и точку $b' \in C$ справа от x, откуда по лемме $x \in C$, так что $C = R^1$.

Теорема 12. *Непрерывный образ связного пространства связен.*

---

*) Множество M, лежащее в евклидовом n-мерном пространстве, называется *выпуклым*, если отрезок, соединяющий любые две точки множества M, целиком лежит в M.

В самом деле, пусть f есть непрерывное отображение связного пространства X на пространство Y. Требуется доказать, что Y связно. Но в противном случае мы имели бы разбиение пространства Y на два непустых дизъюнктных замкнутых множества:

$$Y = \Phi_1 \cup \Phi_2.$$

Прообразы F_1 и F_2 множеств Φ_1 и Φ_2 были бы непустыми (так как f отображает X на все Y) дизъюнктными замкнутыми множествами, дающими в сумме все пространство X, что противоречит его связности.

Из теоремы 12 вытекает

Теорема 13. *Действительная функция $y = f(x)$, непрерывная на связном пространстве X и принимающая два каких-нибудь значения a и b, принимает и всякое значение c, лежащее между a и b.*

В самом деле, множество Y действительных чисел, являющееся образом пространства X, по теореме 12 связно; поэтому, если $a \in Y$, $b \in Y$ и $a < c < b$, то в силу леммы к теореме 11 имеем $c \in Y$, что и требовалось доказать.

В частности, утверждение теоремы 13 имеет место для любой действительной непрерывной функции, определенной на сегменте или любом (конечном или бесконечном) интервале или полуинтервале числовой прямой (что дает известную теорему анализа), а также для любой непрерывной функции двух переменных, определенной на каком-либо связном множестве (в частности, на области), для модуля (а также для действительной части) непрерывной функции комплексного переменного (рассматриваемой на любом связном множестве) и т. д.

Конечную последовательность множеств

$$M_1, M_2, \ldots, M_s$$

(лежащих в каком-нибудь пространстве X) назовем *цепью множеств* (подробнее: *цепью, связывающею множества* M_1 и M_s), если

$$M_1 \cap M_2 \neq \Lambda, \; M_2 \cap M_3 \neq \Lambda, \; \ldots, \; M_{s-1} \cap M_s \neq \Lambda.$$

Последовательным применением теоремы 8 доказываем без труда, что сумма связных множеств, образующих цепь, есть связное множество. Отсюда и из теоремы 6 сразу следует, что всякая ломаная линия представляет собою связное множество. Из связности всех ломаных и из теоремы 9 в свою очередь вытекает, что всякое множество M из R^n, любые две точки которого могут быть соединены лежащей в M ломаной, связно. Мы этим доказали одну половину (достаточность) следующей теоремы:

Теорема 14. *Для того чтобы открытое множество Γ в R^n было связно, необходимо и достаточно, чтобы любые две точки множества Γ можно было соединить ломаной, лежащей в Γ.*

Остается доказать необходимость изложенного в этой теореме условия. Другими словами, надо доказать, что *если в открытом $\Gamma \subseteq R^n$ имеются две точки a и b, которые не могут быть соединены лежащей в Γ ломаной, то Γ несвязно.*

Для доказательства этого утверждения обозначим через Γ_a множество, состоящее из точки a и из всех точек множества Γ, которые можно соединить с a лежащими в Γ ломаными. По самому определению $\Gamma_a \subseteq \Gamma$. Кроме того, Γ_a непусто (так как содержит a) и не совпадает с Γ, так как по предположению точка b не принадлежит множеству Γ_a. Остается доказать, что Γ_a открыто-замкнуто в Γ.

Докажем, что Γ_a открыто. Пусть $x \in \Gamma_a$, тогда существует $U(x, \varepsilon) \subseteq \Gamma$; какова бы ни была точка $x' \in U(x, \varepsilon)$, отрезок $\overline{xx'}$ лежит в $U(x, \varepsilon) \subseteq \Gamma$. Возьмем какую-нибудь ломаную $\overline{ax}$, соединяющую точку a с x; если эта ломаная не имеет с $\overline{xx'}$ ни одной общей точки, кроме x, то, присоединяя отрезок $\overline{xx'}$, получим ломаную $\overline{ax'} \subseteq \Gamma$, соединяющую a с x'; если же ломаная $\overline{ax}$ имеет хотя бы одну отличную от x точку пересечения с отрезком $\overline{xx'}$, то обозначим через x'' ту из этих точек, которая ближе всего расположена к x'. Тогда ломаная $\overline{ax''}$ не имеет с отрезком $\overline{x''x'}$ никакой общей точки, кроме точки x'', и, присоединяя к ломаной $\overline{ax''}$ отрезок $\overline{x''x'}$, получим лежащую в Γ ломаную $\overline{ax'}$, соединяющую a с x'. Итак, каждую точку $x' \in U(x, \varepsilon)$ можно соединить с a ломаной, лежащей в Γ, так что $U(x, \varepsilon) \subseteq \Gamma_a$, и, следовательно, произвольная точка $x \in \Gamma_a$ есть внутренняя точка множества Γ (по отношению к R^n, значит, тем более по отношению к Γ), чем доказано, что Γ_a открыто.

Докажем, что Γ_a замкнуто в Γ. Пусть $x' \in \Gamma$ — точка прикосновения множества Γ_a. Так как Γ открыто, то существует $U(x', \varepsilon) \subseteq \Gamma$. В $U(x', \varepsilon)$ существует точка $x \in \Gamma_a$, и ее можно соединить с a ломаной $\overline{ax} \subseteq \Gamma$. Так как отрезок $\overline{xx'}$ лежит в Γ, то, повторяя дословно только что выполненное построение, получим снова ломаную $\overline{ax'}$, лежащую в Γ, так что $x' \in \Gamma_a$, что и требовалось доказать.

Теорема 15. *Пусть C — связное множество, лежащее в пространстве X; всякое множество C_0, содержащее C и содержащееся в $[C]$, связно.*

Обычно формулируют эту теорему так: *присоединяя к связному множеству C любое множество его предельных точек, получим связное множество.* Например, пусть C — множество всех точек бесконечнозвенной ломаной, изображенной на рис. 3, а B — любое множество (конечное или бесконечное), лежащее на отрезке $[0; 1]$ оси ординат. Так как C, как легко видеть, связно, а B состоит из предельных точек множества C, то в силу теоремы 15 множество $C_0 = C \cup B$ тоже связно.

Доказательство теоремы 15. Пусть C_0 удовлетворяет условиям теоремы 15. Если бы C_0 не было связно, то мы имели бы разбиение $C_0 = \Phi_1 \cup \Phi_2$, где Φ_1 и Φ_2 не пересекаются и замкнуты в пространстве C_0. Но тогда по теореме 7 связное множество C, содержась в сумме $\Phi_1 \cup \Phi_2$, содержалось бы в одном из слагаемых этой суммы, например в Φ_1. Так как Φ_1 замкнуто в C_0, то всякая точка множества C_0, будучи точкой прикосновения для $C \subseteq \Phi_1$, содержалась бы в Φ_1. Таким образом, Φ_2 пусто, и теорема 15 этим доказана.

Пусть a — произвольная точка пространства X. Назовем *компонентой точки a* в X сумму C_a всех связных множеств, лежащих в X и содержащих точку a. Множество C_a содержит точку a (так как множество, состоящее из одной точки, связно). Поэтому C_a

непусто. По теореме 8 множество C_a связно. Таким образом, C_a есть наибольшее лежащее в X связное множество, содержащее точку a («наибольшее» в том смысле, что и всякое лежащее в X связное множество, содержащее точку a, содержится в C_a). Наконец, из теоремы 15 следует, что C_a замкнуто (в противном случае, присоединяя к C_a какую-нибудь не содержащуюся в нем предельную точку x, мы получили бы «большее» связное множество $C_a \cup x$).

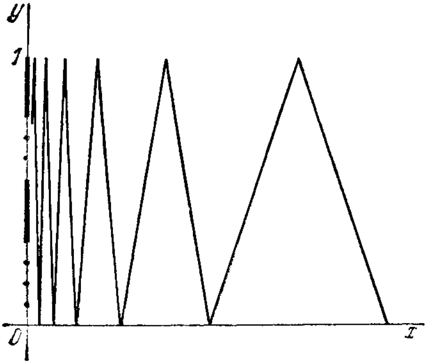

Рис. 3.

Если компоненты C_a и C_b двух точек a и b пространства X имеют хотя бы одну общую точку, то они совпадают, так как по теореме 8 множество $C_a \cup C_b$ связно. Итак, компоненты двух каких-нибудь точек данного пространства или совпадают, или не пересекаются между собою.

Поэтому каждая компонента C_a какой-либо точки a есть в то же время и компонента любой точки $x \in C_a$, так что все X *распадается* (и притом однозначно) *на свои компоненты* (т. е. на компоненты различных точек $a \in X$). Каждая из компонент пространства X не содержится ни в каком отличном от нее связном подмножестве пространства X; в этом смысле компоненты данного пространства суть наибольшие связные подмножества пространства X.

Замечание 2. Как всегда, рассматривая какое-либо множество $M \subset X$ как пространство, можем говорить о компонентах данного множества (лежащего в некотором пространстве). При этом естественно, что компоненты множества M, будучи замкнуты в M, вообще говоря, не будут замкнуты в X.

Примеры.

1. Если X — простое двоеточие, то компонентами X являются его точки.

2. Если X есть сумма двух или конечного числа попарно не пересекающихся сегментов числовой прямой, то эти сегменты и являются компонентами X.

3. В силу теоремы 11 единственными непустыми связными множествами, лежащими в множестве всех рациональных точек или в канторовом совершенном множестве *), являются одноточечные множества. То же справедливо и для множества всех

*) См. § 5 этой главы.

иррациональных точек. Поэтому, если возьмем за пространство X множество всех рациональных точек, или множество всех иррациональных точек числовой прямой, или канторово совершенное множество, то компонента каждой точки a в X будет состоять из одной этой точки a.

Замечание 3. Пространство X называется *вполне несвязным*, если компонента каждой его точки состоит из одной этой точки. Другими словами, пространство вполне несвязно тогда и только тогда, когда оно не содержит нетривиальных связных подпространств.

Пример 4. Возьмем на оси x множество рациональных точек R_0 и в каждой его точке x восставим перпендикуляр Q_x длины 1 в сторону положительных y. Сумму этих перпендикуляров обозначим через Q. Отрезки Q_x являются компонентами множества Q.

Всякий сегмент или полусегмент Δ, лежащий в открытом множестве Γ числовой прямой R^1, содержится в непустом интервале $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Достаточно рассмотреть случай $\Delta = [a; b] \subseteq \Gamma$. Тогда, так как Γ открыто в R^1, то имеются лежащие в Γ интервалы $(a'; a'') \ni a$ и $(b'; b'') \ni b$. Очевидно, интервал $(a'; b'')$ содержит сегмент $[a; b]$ и лежит в Γ. Случай полусегмента $\Delta \subset \Gamma$ разбирается аналогично. Из доказанного следует, что компоненты непустого открытого множества $\Gamma \subseteq R^1$ суть смежные интервалы к множеству $\Phi = R^1 \setminus \Gamma$, т. е. интервалы, лежащие в Γ, но имеющие концы, принадлежащие Φ.

Мы видели, что компоненты любого топологического пространства суть замкнутые множества. Приведенные выше примеры показывают, что компоненты могут не быть открытыми множествами. Приведем еще один пример. Пусть X состоит из отрезков

$$S_0,\ S_1,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$$

на плоскости, параллельных оси ординат и определяемых условиями:

$$\text{для } S_0\colon\quad x = 0,\quad 0 \leqslant y \leqslant 1;$$
$$\text{для } S_n\colon\quad x = \frac{1}{n},\quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Эти отрезки являются компонентами пространства X; S_n при $n \geqslant 1$ открыты в X, но S_0 открытым множеством в X не является.

Открытые связные множества называются *областями* (данного пространства X).

Ввиду изложенных примеров интересна

Теорема 16. *Компоненты любого открытого множества* Γ *евклидова* n*-мерного пространства суть области.*

В частности, компоненты открытого множества на прямой являются интервалами.

Для доказательства рассмотрим какую-нибудь точку x компоненты C открытого множества $\Gamma \subseteq R^n$; точка x, будучи внутренней в Γ относительно R^n, имеет окрестность $U(x, \varepsilon) \subseteq \Gamma$ и эта окрестность является связным множеством (так как она выпукла). Поэтому $C \cup U(x, \varepsilon)$ связно (теорема 8); а так как C — компонента точки x, то $U(x, \varepsilon) \subseteq C$. Итак, каждая точка компонеты C является внутренней, значит, C — открытое множество, что и требовалось доказать.

Теорема 17. *Каждое открытое множество Γ в n-мерном пространстве R^n есть сумма конечного или счетного числа попарно не пересекающихся областей.*

Доказательство. Так как компоненты множества Γ суть области, не имеющие попарно общих точек, то остается доказать, что всякое множество S попарно не пересекающихся областей в R^n конечно или счетно. Множество R^n_0 всех рациональных точек n-мерного пространства (т. е. точек, все координаты которых рациональны) счетно и всюду плотно в R^n. Поэтому, беря первую рациональную точку пространства R^n, попавшую в данную область $\in S$, получим взаимно однозначное отображение системы S на некоторое подмножество счетного множества R^n_0, чем доказано, что и множесто S не более чем счетно.

Замечание 4. Доказательство теоремы 16 опирается лишь на связность сферических окрестностей в R^n и применимо ко всем топологическим пространствам X, обладающим тем свойством, что для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности Ox имеется связная окрестность U точки x (т. е. связное открытое множество, содержащее точку x), лежащая в Ox *). Пространства X, удовлетворяющие для любого $x \in X$ последнему условию, называются *локально связными* (таковы, например, евклидовы пространства, а также любые лежащие в них открытые множества). Таким образом, доказывая теорему 16, мы фактически доказали более общее предложение:

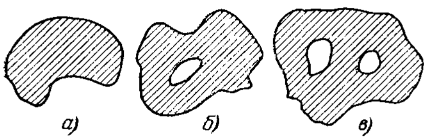

Рис. 4.

Теорема 18. *Компоненты любого локально связного пространства суть области.*

Единственными областями на прямой являются интервалы. Но уже на плоскости области могут иметь весьма сложный вид. Называя *границей* области Γ множество $[\Gamma] \setminus \Gamma$, можно прежде всего классифицировать плоские ограниченные области по числу компонент, на которые распадается их граница. Это число называется *порядком связности* области. В частности, область, граница которой есть связное множество, называется *односвязной* (рис. 4, *а*); область, граница которой состоит из двух компонент, называется *двусвязной* (рис. 4, *б*); область, граница которой состоит из трех компонент, называется *трехсвязной* (рис. 4, *в*) и т. д.

Граница любой области является замкнутым множеством, однако строение этого замкнутого множества, даже в случае односвязных областей, может быть чрезвычайно сложным, как показывает рис. 5: граница заштрихованной спиралевидной области состоит из жирно вычерченной кривой и окружности, на которую эта кривая (и вся область) спиралевидно навивается; эта граница связна. Элементарные замкнутые кривые, как, например, окружность, эллипс и т. п., являются одновременно границами двух областей, одна из которых ограничена и составляет так называемую внутреннюю область к данной кривой, а другая не ограничена («внешняя область к замкнутой кривой»). Однако граница заштрихованной спиралевидной области Γ (на рис. 5) является в то же время границей и второй, также ограниченной области Γ' (область Γ' — разность между изображенным на рис. 5 кругом и замыканием области Γ).

---

*) Как мы узнаем в следующем параграфе, совокупность открытых множеств $\{U\}$ является так называемой базой пространства X.

Значительно труднее представить себе такое положение вещей, при котором одно и то же связное замкнутое множество C является границей трех (или большего числа) попарно не пересекающихся односвязных областей Чтобы понять, как это возможно, представим себе остров в открытом море и на нем два озера и вообразим себе следующую программу работ. В первый час ведутся каналы от моря и от каждого из двух озер таким образом, чтобы каждый из этих каналов был «слепым» (т. е. был в действительности заливом соответствующего водоема), чтобы эти каналы нигде не соприкасались между собою и чтобы в результате часовой работы расстояние от каждой точки суши до морской воды, а также до воды каждого из двух озер было меньше 1 км В следующие полчаса каждый из проведенных трех каналов продолжается так, что по прежнему все каналы остаются слепыми и не соприкасаются между собой и что расстояние от каждой точки суши до воды каждого из трех водоемов становится меньше чем $\frac{1}{2}$ км В следующие затем четверть часа каналы продолжаются дальше так, чтобы, по прежнему не сообщаясь между собой, они с такой «плотностью» проникали бы внутрь острова, чтобы расстояние от каждой точки суши до воды каждого из трех водоемов сделалось $< \frac{1}{8}$ км, и т д

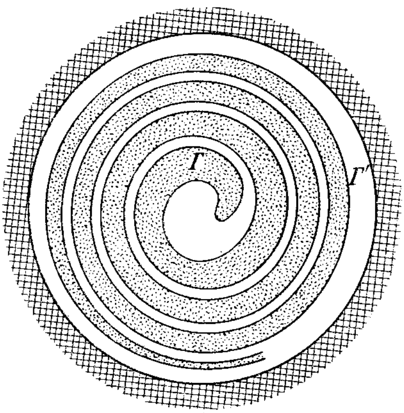

Рис 5

Через два часа такой деятельности от острова останется лишь некоторое нигде не плотное на плоскости связное замкнутое множество C, в любой близости от каждой точки которого будет находиться вода каждого из трех водоемов, причем все эти водоемы (море и два озера) по прежнему будут оставаться разобщенными воды никаких двух из них не будут смешиваться Эти водоемы (продолженные проведенными из них каналами) и являются теми тремя областями, общую границу которых образует множество C, одна из этих областей («море») не ограничена, остальные две ограничены (рис. 6)

Исследование плоских односвязных областей и их границ возникло в связи с теорией функций комплексного переменного (теорема Римана о возможности конформного отображения любой односвязной области на внутренность круга и—впервые решенная Каратеодори—задача о соответствии границ при этом отображении)

§ 4. Базы и вес топологического пространства

Пусть s и S—два семейства множеств Если каждое множество семейства S есть объединение некоторых множеств семейства s, то говорим, что семейство s *аддитивно порождает* семейство S или является его *аддитивной базой*. Если каждое множество семейства S есть пересечение некоторых множеств семейства s, то s *мультипликативно порождает* семейство S, или является его *мультипликативной базой*.

Пусть X — топологическое пространство. Аддитивная база открытой топологии, т. е. семейства всех открытых множеств пространства, часто называется *сетью* пространства X в смысле Архангельского [1]. Для того чтобы какое-нибудь семейство s множеств пространства X было его сетью, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности Ox в семействе s нашлось множество M, удовлетворяющее условию $x \in M \subseteq Ox$.

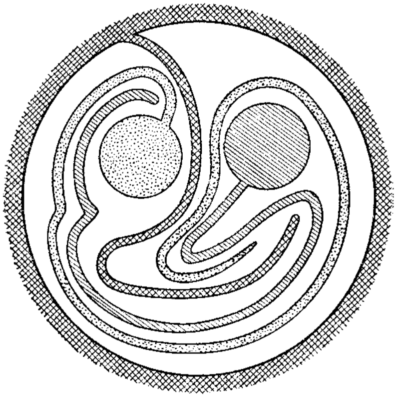

Рис. 6.

Сеть, состоящая из открытых множеств пространства X, называется его *открытой базой*. Аналогично семейство s множеств, мультипликативно порождающее замкнутую топологию (семейство всех замкнутых множеств пространства X) и состоящее из замкнутых множеств, называется *замкнутой базой* пространства X. Заменяя в данной базе пространства X (открытой или замкнутой) все множества их дополнениями, получим (замкнутую, соответственно открытую) базу, *сопряженную* первоначально данной. Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью какой-либо базы пространства X (очевидно, все равно — открытой или замкнутой), называется *весом* пространства X и обозначается через wX. Легко видеть, что если $X_0 \subseteq X$, то $wX_0 \leqslant wX$. Пространства, имеющие счетную базу (пространства счетного веса), играют в топологии чрезвычайно важную роль. Они введены Хаусдорфом (1914 г.) под названием пространств, удовлетворяющих *второй аксиоме счетности*.

Пусть x — произвольная точка пространства X. Всякое семейство s содержащих точку x открытых множеств, обладающее тем свойством, что во всякой окрестности Ox точки x содержится некоторое множество семейства s, называется *(локальной) базой пространства X в точке x*. Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью какой-либо локальной базы пространства X в данной его точке x, называется *локальным весом* пространства в точке x.

Замечание. Локальный вес пространства в любой его изолированной точке, очевидно, равен 1.

Если локальный вес пространства счетен в каждой точке $x \in X$, то пространство, по определению, удовлетворяет *первой аксиоме счетности* (Хаусдорф).

Важнейшим примером пространств с первой аксиомой счетности являются метрические пространства. Локальную базу метрического пространства X в любой его точке x образуют, например, сферические окрестности $O\left(x, \frac{1}{n}\right)$, где n пробегает все натуральные числа.

Напомним (см. § 1 гл. 4), что последовательность точек $\{x_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, топологического пространства X *сходится* к точке x, если каждая окрестность точки x содержит все точки последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторой. В этом определении можно, очевидно, ограничиться лишь окрестностями, принадлежащими какой-нибудь локальной базе пространства в точке x. Имеет место следующее

Предложение 1. *В пространстве X с первой аксиомой счетности точка x тогда и только тогда является точкой прикосновения множества $M \subseteq X$, когда имеется последовательность точек $\{x_n\}$ множества M, сходящаяся в точке x.*

Очевидно, достаточно доказать лишь одну половину этого предложения, а именно найти в множестве M последовательность точек $\{x_n\}$, сходящуюся к точке прикосновения x множества M. Для этого возьмем какую-нибудь счетную базу пространства X в точке x. Пусть U_k, $k=1, 2, 3, \ldots$, — элементы этой базы. Заменяя, если нужно, U_k на $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k$, видим, что без ограничения общности можно предположить, что

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots \supseteq U_n \supseteq \ldots \tag{1}$$

Так как x — точка прикосновения множества M, то для каждого k можно взять точку $x_k \in M \cap U_k$. Докажем, что последовательность $\{x_k\}$ сходится в точке x. В самом деле, пусть Ox — произвольная окрестность точки x. По определению локальной базы существует $U_k \subseteq Ox$. Но ввиду предположенного соотношения (1) все точки $x_k, x_{k+1}, \ldots$ лежат в $U_k \subseteq Ox$, и сходимость последовательности $\{x_k\}$ к точке x доказана.

Предложение 1 позволяет свести понятие точки прикосновение, а следовательно, всю структуру тех пространств, в которых предложение 1 выполнено, к рассмотрению сходящихся последовательностей точек, что очень важно для приложений. Поэтому топологически пространства, для которых предложение 1 имеет место, образует весьма важный класс пространств; эти пространства называются *пространствами Фреше — Урысона* *). Мы уже знаем, что пространства с первой аксиомой счетности, и в част-

*) По имени одного из основателей общей топологии — французского математика Фреше, желавшего всю общую топологию строить при помощи понятия сходящейся последовательности, и П. С. Урысона, впервые определившего точные логические границы для возможности такого построения.

ности, метрические (метризуемые) пространства являются пространствами Фреше—Урысона.

Пусть дана какая-нибудь база $\mathfrak{B}=\{U\}$ топологического пространства X. Выбирая в каждом множестве $U\in\mathfrak{B}$ по точке, получим множество точек $M\subseteq X$, всюду плотное в пространстве X (доказательство совсем просто и может быть предоставлено читателю). Из только что сказанного следует: *если в топологическом пространстве X имеется база мощности* $\mathfrak{m}$, *то в этом пространстве имеется и всюду плотное множество мощности* $\mathfrak{m}$. Назовем *плотностью* пространства X наименьшее такое кардинальное число $\mathfrak{m}$, что в пространстве X имеется всюду плотное множество мощности $\mathfrak{m}$. Мы только что доказали, что *плотность пространства не превосходит его веса.*

Пространства счетной плотности (т. е. пространства, содержащие счетное всюду плотное множество) называются *сепарабельными* (термин крайне неудачный, но, к сожалению, укоренившийся и получивший всеобщее распространение). Мы только что видели, что всякое топологическое пространство со счетной базой является сепарабельным.

Существуют примеры сепарабельных топологических пространств, не имеющих счетной базы (эти примеры будут приведены в конце параграфа). Однако имеет место

Теорема 19. *Для того чтобы метрическое пространство имело счетную базу, достаточно и, очевидно, необходимо, чтобы оно было сепарабельным.*

Доказательство. Пусть X — сепарабельное метрическое пространство, и пусть счетное множество $D=\{d\}$ всюду плотно в пространстве X. Рассмотрим семейство $\mathfrak{B}$ всех сферических окрестностей $O(d, r)$, где точка d пробегает все точки счетного множества D, а r есть произвольное положительное рациональное число.

Семейство $\mathfrak{B}$, очевидно, счетно. Докажем, что оно является базой метрического пространства X. Для этого в каждой точке $x\in X$ и содержащему ее открытому множеству Γ надо подобрать такой элемент $O(d, r)$ семейства $\mathfrak{B}$, что $x\in O(d, r)\subseteq\Gamma$. Так как x — внутренняя точка множества Γ, то существует содержащаяся в Γ сферическая окрестность $O(x, \varepsilon)\subset\Gamma$. Возьмем точку $d\in D$, лежащую в $O\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right)$, и положительное рациональное число r такое, что $\frac{\varepsilon}{3}<r<\frac{2}{3}\varepsilon$. Тогда $\rho(x, d)<\frac{\varepsilon}{3}<r$, т. е. $x\in O(d, r)$. С другой стороны, для каждой точки $x'\in O(d, r)$ имеем

$$\rho(x, x')<\rho(x, d)+\rho(d, x')<\frac{\varepsilon}{3}+r<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2}{3}\varepsilon=\varepsilon,$$

значит,

$$O(d, r)\subset O(x, \varepsilon)\subseteq\Gamma,$$

так что $\mathfrak{B}$ действительно является базой пространства X. Совершенно аналогично доказывается и общее утверждение: *вес метрического пространства равен его плотности.*

Важнейшим предложением, касающимся баз и веса пространства, является

Теорема 20 (Александров—Урысон [1]). *Если вес пространства X равен $\mathfrak{m}$, то всякая база $\mathfrak{B}$ пространства X содержит подмножество $\mathfrak{B}'$ мощности $\mathfrak{m}$, также являющееся базой пространства X.*

Доказательство. Возьмем какую-нибудь базу $\mathfrak{B}_0$ пространства X, имеющую мощность $\mathfrak{m} = wX$. Обозначим через U элементы базы $\mathfrak{B}_0$. Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольная база пространства X. Нам надо выделить из базы $\mathfrak{B}$ базу $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$, имеющую мощность $\mathfrak{m}$.

Начнем с того, что какую-нибудь пару (U_α, U_β) элементов базы $\mathfrak{B}_0$ назовем отмеченной, если существует хотя бы одно $V \in \mathfrak{B}$, удовлетворяющее включению

$$U_\alpha \subseteq V \subseteq U_\beta. \tag{2}$$

Множество всех отмеченных пар имеет мощность, не большую чем мощность всех вообще пар базы $\mathfrak{B}_0$, т. е. мощность $\leqslant \mathfrak{m}$. Для каждой отмеченной пары (U_α, U_β) выберем по одному элементу $V \in \mathfrak{B}$, удовлетворяющему условию (2). Множество $\mathfrak{B}'$ отмеченных таким образом элементов V базы $\mathfrak{B}$ также имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$. Поэтому достаточно доказать, что множество $\mathfrak{B}'$ есть база пространства X.

Итак, пусть даны точка $x \in X$ и ее окрестность Ox. Требуется найти такое $V' \in \mathfrak{B}'$, чтобы было

$$x \in V' \subseteq Ox. \tag{3}$$

Так как $\mathfrak{B}_0$ — база, то существует такое $U_\beta \in \mathfrak{B}_0$, что $x \in U_\beta \subseteq Ox$. Но базой является и $\mathfrak{B}$, поэтому существует V, удовлетворяющее включению

$$x \in V \subseteq U_\beta.$$

Наконец, можно найти такое $U_\alpha \subseteq \mathfrak{B}_0$, что

$$x \in U_\alpha \subseteq V.$$

Отсюда следует, что пара (U_α, U_β) отмеченная; поэтому существует $V' \in \mathfrak{B}'$, удовлетворяющее условию $U_\alpha \subseteq V' \subseteq U_\beta$ и тем более условию (3), что и требовалось доказать.

Понятие базы позволяет выделить следующие важные классы пространств:

1) *Полурегулярные пространства* — это пространства, в которых канонические открытые множества образуют базу *).

*) Заметим, что регулярные пространства будут определены позже (§ 8 гл. 4).

2) *Индуктивно нульмерные пространства*, т. е. такие пространства, в которых (не только *ко*-множества, но даже) открыто-замкнутые множества образуют базу.

В индуктивно нульмерных пространствах каждое открытое множество есть сумма, а каждое замкнутое множество — пересечение открыто-замкнутых множеств.

Индуктивно нульмерные пространства будут подробно изучаться в дальнейшем.

Определение топологии в множестве X посредством указания системы подмножеств, являющейся базой. Определение топологии посредством окрестностей. Определить топологию в множестве X, т. е. превратить X в топологическое пространство X, — значит определить, какие множества мы объявляем открытыми (при этом должны быть соблюдены условия $\mathrm{I}_{\mathfrak{G}}$, $\mathrm{II}_{\mathfrak{G}}$ § 1). Однако указать все открытые множества часто бывает затруднительно и неудобно, во многих конкретных случаях бывает удобно непосредственно указывать не все открытые множества подлежащего определению топологического пространства X, а только некоторые из них, а именно множества, которые составят одну из баз этого пространства (остальные открытые множества определятся как всевозможные суммы данных множеств).

Такой способ определения топологии основывается на следующем предложении:

Предложение 2. *Пусть в множестве X, состоящем из элементов любой природы, называемых точками, даны подмножества Γ_α, система которых, обозначаемая нами через S, обладает следующими свойствами:*

(А) *Каждая точка $x \in X$ содержится по крайней мере в одном $\Gamma_\alpha \in S$.*

(Б) *Если каждая точка x содержится и в $\Gamma_\alpha \in S$ и в $\Gamma_\beta \in S$, то имеется некоторое $\Gamma_\gamma \in S$ такое, что $x \in \Gamma_\gamma \subseteq \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$.*

Если назвать пустое множество Λ и всевозможные суммы множеств Γ_α открытыми множествами, то аксиомы I_G и II_G топологического пространства окажутся выполненными в полученном топологическом пространстве X, система S будет базой.

Доказательство предоставляем читателю.

Часто, например в первом издании «Теории множеств» Хаусдорфа, дается не просто система S множеств Γ_α, удовлетворяющая условиям (А) и (Б), а система множеств $U(x)$, поставленных в соответствие точкам $x \in X$ и называемых окрестностями этих точек, причем предписывается выполнение трех условий:

А) Каждой точке $x \in X$ поставлено в соответствие по крайней мере одно множество $U(x)$ («каждая точка $x \in X$ имеет хотя бы одну окрестность»), причем всегда

$$x \in U(x).$$

Б) Для любых двух окрестностей $U_1(x)$ и $U_2(x)$ одной и той же точки $x \in X$ существует

$$U_3(x) \subseteq U_1(x) \cap U_2(x).$$

В) Каково бы ни было $y \in U(x)$, существует

$$U(y) \subseteq U(x).$$

Если назвать открытым всякое множество $\Gamma \subseteq X$ такое, что для любой точки $x \in \Gamma$ существует $U(x) \subseteq \Gamma$, то получится топологическое пространство, и система S всех множеств $U(x)$ (рассматриваемых независимо от того, каким точкам x они поставлены в соответствие) есть база этого пространства.

Доказательство снова предоставляем читателю.

Множества $U(x)$, отнесенные точке $x \in X$ и удовлетворяющие условиям А), Б), В), образуют то, что Хаусдорф называл системой окрестностей в пространстве X, а задание при их помощи топологии называется заданием топологии при помощи системы окрестностей.

Пример 1. На числовой прямой R^1 топологию можно задать, выделив для каждой точки x в качестве определяющих ее окрестностей все интервалы вида $\left(x-\frac{1}{n};\ x+\frac{1}{n}\right)$.

Наряду с понятием базы часто удобно пользоваться понятием предбазы топологического пространства.

Определение 7. Система Σ открытых в топологическом пространстве X множеств O_α называется *предбазой* пространства X, если множества, являющиеся пересечениями $O_{\alpha_1} \cap \ldots \cap O_{\alpha_s}$ всевозможных конечных систем системы Σ, образуют базу пространства X. Очевидно, всякая база пространства является и его предбазой.

Пример 2. На числовой прямой бесконечные интервалы вида

$$(-\infty;\ b),\quad (a;\ +\infty)$$

образуют предбазу, не образуя базы.

Предложение 3. *Отображение f: $X \to Y$ пространства X в пространство Y непрерывно, если прообразы $f^{-1}O_\alpha$ элементов некоторой предбазы $\Sigma = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, пространства Y открыты в пространстве X.*

Доказательство. Положим

$$O_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = \bigcap_{i=1}^{s} O_i^\alpha .$$

По условию множества $O_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ образуют базу $\mathfrak{B}$ пространства Y. Очевидно,

$$f^{-1}O_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = f^{-1}\bigcap_{i=1}^{s} O_{\alpha_i} = \bigcap_{i=1}^{s} f^{-1}O_{\alpha_i}.$$

Поэтому прообразы элементов базы $\mathfrak{B}$ открыты в X. Возьмем открытое в Y множество O. Оно является суммой элементов некоторой подсистемы $\mathfrak{B}'$ системы $\mathfrak{B}$, т. е.

$$O = \bigcup_{\mathfrak{B}'} O_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}.$$

Но тогда множество

$$f^{-1}O = f^{-1}\bigcup_{\mathfrak{B}'} O_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} = \bigcup_{\mathfrak{B}'} f^{-1}O_{\alpha_1 \ldots \alpha_s},$$

являясь суммой открытых в X множеств, открыто в X. Непрерывность отображения f доказана.

Частным случаем предложения 3 является

Предложение 4. *Для того чтобы взаимно однозначное отображение f пространства X на пространство Y было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы при этом отображении некоторая база пространства X отображалась на базу пространства Y.*

Доказательство предоставляется читателю.

Примеры пространств с первой аксиомой счетности, содержащих счетное всюду плотное множество и не имеющих счетной базы. 1. Пространство состоит из всех точек полусегмента $[0; 1)$. В качестве базы возьмем семейство S всех полусегментов вида $[x; x')$, где $0 \leqslant x < x' < 1$. Условия (А) (Б) предложения 2, очевидно, выполнены. Первая аксиома счетности выполнена, поскольку среди полусегментов $[x; x')$ достаточно взять полусегменты вида $[x; x+r)$, где r — положительные рациональные числа. Счетным плотным множеством является множество рациональных точек полусегмента $[0; 1)$.

В силу теоремы 20 осталось проверить, что семейство S не содержит никакого счетного подсемейства, являющегося базой. Но если $[x; x') \in S$ и $[y; y')$ удовлетворяет условию: $x \in [y; y') \subseteq [x; x')$, то непременно $x = y$. Следовательно, во всякой подбазе $S' \subset S$ непременно имеются элементы вида $[x; x')$ при любом $x \in [0; 1)$. Отсюда вытекает, что всякая подбаза базы S имеет мощность континуума. А это значит, что вес этого пространства равен $\mathfrak{c}$. Построенное нами пространство называется «стрелкой».

2. Среди многочисленных примеров топологических пространств, являющихся линейно упорядоченными множествами,

очень интересно пространство $T_{2\theta}$ множества, (линейно) упорядоченного по типу 2θ, где θ — порядковый тип сегмента числовой прямой. Точки пространства $T_{2\theta}$ могут быть записаны в виде $x=(t, i)$, где t есть произвольная точка сегмента $[0; 1]$, а $i=0$ или 1; при этом мы полагаем

$$(t, i) < (t', i'),$$

если $t < t'$, а также и если $t=t'$, $i=0$, $i'=1$. Точки $x=(t, i)$ мы можем представлять себе лежащими на обыкновенной плоскости (так что t есть абсцисса, а i — ордината), что позволит придать нижеследующим отвлеченным рассуждениям своеобразный наглядно-геометрический смысл.

В пространстве $T_{2\theta}$ всюду плотно множество D, состоящее из всех точек вида (r, i), где r рационально (всюду плотными являются даже каждое из множеств $D_0 \subset D$, $D_1 \subset D$, состоящих из всех точек вида $(r, 0)$, соответственно $(r, 1)$).

Пространство, получаемое из $T_{2\theta}$ выбрасыванием первой и последней точек, обычно называют пространством «двух стрелок» или просто «двумя стрелками». Так же, как и для «стрелки», доказывается, что пространство «двух стрелок» имеет вес, равный c. Это, впрочем, следует из того, что «стрелка» является подпространством «двух стрелок». Мы еще вернемся к пространству «двух стрелок» в § 1 гл. 6.

§ 5. Подмножества прямой и плоскости

1. Открытые и замкнутые множества на прямой. Пусть Γ — открытое множество на прямой R^1. На стр. 125 мы доказали, что компоненты открытого множества $\Gamma \subset R^1$ суть смежные интервалы к множеству $\Phi = R^1 \setminus \Gamma$. Поскольку компоненты всякого множества дизъюнктны, мы получаем, что множество Γ состоит из дизъюнктных интервалов. Но мы знаем (см. теорему 17 § 3), что всякое множество σ дизъюнктных интервалов на прямой не более чем счетно. Таким образом, доказана

Теорема 21. *Всякое открытое множество Γ на числовой прямой R^1 есть сумма конечного или счетного множества дизъюнктных интервалов, концы которых принадлежат дополнительному к Γ замкнутому множеству $\Phi = R^1 \setminus \Gamma$; среди этих интервалов могут оказаться один или два бесконечных интервала вида $(-\infty; a)$ или $(a; +\infty)$.*

Теорема 21 часто формулируется так:

Теорема 21'. *Всякое замкнутое множество Φ на прямой получается вычитанием из прямой конечного или счетного числа интервалов, смежных к множеству Φ.*

Определение 8. Замкнутое множество без изолированных точек называется *совершенным*.

Докажем еще следующее предложение:

Теорема 22. *Для того чтобы точка x замкнутого множества $\Phi \subset R^1$ была изолированной точкой множества Φ, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была общим концом двух смежных интервалов к множеству Φ.*

В самом деле, если точка x есть общий конец двух смежных к Φ интервалов $(a; x)$ и $(x; b)$, то интервал $(a; b)$ содержит единственную точку множества Φ, именно точку x, которая, таким образом, является изолированной.

Обратно, пусть x — изолированная точка множества Φ и пусть интервал $(a; b)$, содержа точку x, не содержит никакой другой точки множества Φ. Возьмем какую-либо точку x' интервала $(a; x)$; она лежит в некоторой компоненте δ' множества $\Gamma = R' \setminus \Phi$, и эта компонента содержит интервал $(a; x)$ *). Точно так же компонента δ'', содержащая какую-либо точку x'' интервала $(x; b)$, содержит весь этот интервал. Точка x является, очевидно, правым концом интервала δ' и левым концом интервала δ'', что и требовалось доказать.

Следствие. *Для того чтобы замкнутое множество $\Phi \subset R^1$ было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы никакие два смежных к Φ интервала не имели общего конца.*

Замечание 1. Пусть A — какое-либо подмножество действительной прямой; всякое множество, являющееся пересечением множества A с некоторым интервалом, назовем (открытым) *куском* множества A. Из теоремы 21 следует, что всякое множество, открытое в A, есть сумма конечного или счетного множества кусков множества A.

2. Нигде не плотные множества на прямой и на плоскости. Канторово совершенное множество. Если множество M нигде не плотно на R^1, то каждый интервал $(\alpha; \beta) \subset R^1$ содержит по крайней мере одну точку x, не являющуюся точкой прикосновения множества M. Тогда некоторая окрестность $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ точки x не содержит ни одной точки множества M. Итак, для того чтобы множество M было нигде не плотным на R^1, необходимо (и, очевидно, достаточно), чтобы каждый интервал $(\alpha; \beta) \subset R^1$ содержал интервал $(\alpha'; \beta')$, свободный от точек множества M. Аналогично доказывается, что для того, чтобы множество M было нигде не плотным в R^2, необходимо и достаточно, чтобы в каждом круге лежал меньший круг, не содержащий ни одной точки множества M. Любой отрезок, лежащий на плоскости, любая ломаная линия, а также такие кривые, как эллипс, гипербола, парабола, могут служить примерами нигде не плотных совершенных множеств на плоскости.

*) Вообще, всякий интервал, содержащийся в открытом множестве Γ, лежит в некоторой компоненте этого множества.

Напомним, что *плоской алгебраической кривой* называется множество A тех точек (x, y) плоскости, которые удовлетворяют некоторому заданному уравнению вида

$$f(x, y)=0,$$

где $f(x, y)$ есть многочлен от переменных x, y, не равный тождественно нулю. Докажем следующее предложение:

Теорема 23. *Всякая алгебраическая кривая есть множество, нигде не плотное на плоскости.*

Лемма. *Существует не более конечного числа таких значений переменного y, при подстановке которых в многочлен $f(x, y)$ получается многочлен от x, тождественно равный нулю.*

В самом деле, напишем тождество

$$f(x, y)=p_0(y)x^n+p_1(y)x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}(y)x+p_n(y),$$

получаемое, если расположить многочлен $f(x, y)$ по убывающим степеням x. Здесь коэффициенты $p_0(y)$, $p_1(y)$, ..., $p_n(y)$ суть многочлены от y с постоянными коэффициентами. Если при данном значении $y=y_0$ многочлен от x

$$f(x, y_0)=p_0(y_0)x^n+p_1(y_0)x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}(y_0)x+p_n(y_0)$$

тождественно равен нулю, то это означает, что число y_0 является корнем алгебраических уравнений $p_0(y)=0$, $p_1(y)=0$, ..., $p_n(y)=0$. Так как каждое алгебраическое уравнение имеет лишь конечное число корней, то лемма доказана.

Докажем теперь, что алгебраическая кривая A, определяемая уравнением

$$f(x, y)=0,$$

есть множество, нигде не плотное на плоскости. Для этого достаточно доказать, что всякое открытое множество Γ на плоскости содержит открытое множество Γ_0, свободное от точек кривой A. Возьмем какую-нибудь точку $z_0=(x_0, y_0)$ множества Γ, выбранную под единственным условием, чтобы y_0 было отлично от каждого из того конечного числа значений y, при которых $f(x, y)$ превращается в тождественно равный нулю многочлен относительно x. Проведем прямую $y=y_0$, на ней $f(x, y)$ может обратиться в нуль лишь для конечного числа значений x. Прямая $y=y_0$ пересекается с открытым множеством Γ по открытому на этой прямой множеству H, содержащему точку z_0 и, следовательно, непустому. Значит, можно найти интервал H_0, лежащий в H. Возьмем на интервале H_0 какую-нибудь точку $z=(x, y_0)$, в которой значение функции $f(x, y)$ отлично от нуля. В силу того, что многочлен $f(x, y)$ есть непрерывная функция от x, y *),

*) Это мы предполагаем известным из анализа.

существует такое $\varepsilon > 0$, что во всех точках окрестности $U(z, \varepsilon)$ функция $f(x, y)$ отлична от нуля. С другой стороны, так как Γ открыто, то $\rho(z, R^2 \setminus \Gamma) = \varepsilon' > 0$. Множество $\Gamma_0 = U(z, \varepsilon'')$, где ε'' есть наименьшее из чисел ε и ε', и есть искомое открытое множество, содержащееся в Γ и свободное от точек кривой A.

Примеры совершенных нигде не плотных множеств на прямой далеко не столь элементарны, как приведенные сейчас примеры, относящиеся к случаю плоскости. Простейшее такое множество было построено Кантором и известно под названием *канторова совершенного множества* или *канторова дисконтинуума*. Это замечательное множество представляет интерес значительно больший, чем интерес отдельного примера. Оно имеет большое принципиальное значение и постоянно применяется всюду, где вообще применяется теория множеств.

Возьмем сегмент $[0; 1]$ числовой прямой. Обозначим его через Δ и будем называть сегментом «нулевого ранга». На нем возьмем два сегмента $\Delta_0 = \left[0; \frac{1}{3}\right]$ и $\Delta_1 \left[\frac{2}{3}; 1\right]$. Эти сегменты будем называть сегментами «первого ранга», а лежащий между ними интервал $\delta = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ — интервалом «первого ранга». С каждым из сегментов Δ_0 и Δ_1 поступим так же, как с сегментом Δ, а именно на Δ_0 и на Δ_1 возьмем по два сегмента «второго ранга»; это будут первая и третья трети каждого из сегментов первого ранга, т. е.

$$\Delta_{00} = \left[0; \frac{1}{9}\right] \quad \text{и} \quad \Delta_{01} = \left[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right] \quad (\text{на } \Delta_0)$$

и

$$\Delta_{10} = \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{9}\right] \quad \text{и} \quad \Delta_{11} = \left[\frac{8}{9}; 1\right] \quad (\text{на } \Delta_1);$$

между ними лежат соответственно интервалы «второго ранга»

$$\delta_0 = \left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right), \text{ т. е. средняя треть сегмента } \Delta_0,$$

и

$$\delta_1 = \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right) \text{— средняя треть сегмента } \Delta_1$$

(рис. 7). Это построение продолжаем безгранично: пусть построены 2^n сегментов n-го ранга $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ (каждый из индексов $i_1, \ldots, i_n$ принимает значения 0 и 1); каждый из сегментов $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ разделим на три равных по длине куска: два крайних сегмента $\Delta_{i_1 \ldots i_n 0}$ и $\Delta_{i_1 \ldots i_n 1}$ (первая и третья трети сегмента $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$) и лежащий между ними интервал $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ (средняя треть сегмента

$\Delta_{i_1 \ldots i_n}$); это и будут два сегмента и интервал $(n+1)$-го ранга, лежащие на данном сегменте n-го ранга $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$.

Замечание 2. Так как сегменты n-го ранга находятся, попарно, на положительном расстоянии $\geqslant \frac{1}{3^n}$ друг от друга, то это же и подавно справедливо для лежащих на них интервалов $(n+1)$-го ранга. Интервалы рангов $\leqslant n$ лежат между сегментами n-го ранга и потому находятся на положительном расстоянии

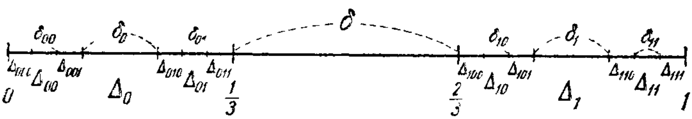

Рис 7.

от всех интервалов $(n+1)$-го ранга. Сумму всех сегментов n-го ранга обозначим через Π_n. Это — замкнутое множество, дополнение к которому состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$ и из всех интервалов ранга $\leqslant n$. Поэтому пересечение $\Pi = \bigcap\limits_n \Pi_n$ всех множеств Π_n есть замкнутое множество, имеющее своим дополнением сумму всех интервалов $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ (всевозможных рангов) и двух бесконечных интервалов $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$. Отсюда, в частности, следует, что концы всех интервалов $\delta_{i_1 \ldots i_n}$, а также точки 0 и 1 принадлежат множеству Π, так что интервалы $\delta_{i_1 \ldots i_n}$, а также интервалы $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$ суть все смежные интервалы к замкнутому множеству Π. Множество Π и называется *канторовым множеством* или *канторовым дисконтинуумом*.

Из замечания 2 следует, что два смежных интервала к множеству Π не только не имеют общих точек, но не имеют и общего конца, поэтому в силу следствия теоремы 22 замкнутое множество Π — совершенное.

Установим некоторые свойства множества Π.

Прежде всего, длина каждого сегмента n-го ранга равна $\frac{1}{3^n}$. Мы уже видели, что расстояние между двумя различными сегментами n-го ранга $\geqslant \frac{1}{3^n}$. Поэтому каждая точка $x \in \Pi \subset \Delta$ принадлежит единственному сегменту Δ_{i_1} первого ранга, единственному (лежащему на Δ_{i_1}) сегменту второго ранга $\Delta_{i_1 i_2}$, вообще, единственному сегменту n-го ранга $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$. Другими словами, каждой точке $x \in \Pi$ однозначно соответствует последовательность сегментов

$$\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \Delta_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots, \qquad (1)$$

а значит, и последовательность индексов

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots; \quad \text{каждое } i_n = 0 \text{ или } = 1. \qquad (2)$$

При этом каждая последовательность (2) поставлена в соответствие одной-единственной точке $x \in \Pi$, а именно единственной точке x, принадлежащей всем сегментам (1). Итак:

1. Множество Π находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех последовательностей вида (2) или, что то же самое, всех бесконечных двоичных дробей

$$0, i_1 i_2 \ldots i_n \ldots, \quad i_n = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}, \qquad (3)$$

а потому имеет мощность континуума.

2. Множество всех конечных смежных интервалов к канторову дисконтинууму Π естественным образом упорядочено («слева направо»). Легко видеть, что это упорядоченное множество подобно множеству всех двоично рациональных чисел интервала $(0; 1)$ *).

В самом деле, для установления искомого подобного соответствия достаточно читать систему индексов $i_1 \ldots i_{n-1}$ каждого интервала $\delta_{i_1 \ldots i_{n-1}}$ как конечную двоичную дробь

$$0, i_1 \ldots i_{n-1} 1 = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{4} + \ldots + \frac{i_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}.$$

Тогда наши смежные интервалы последовательно записываются при помощи дробных индексов так:

$$\delta = \delta_{\left(\frac{1}{2}\right)},$$

$$\delta_0 = \delta_{\left(\frac{1}{4}\right)}, \quad \delta_1 = \delta_{\left(\frac{3}{4}\right)},$$

$$\delta_{00} = \delta_{\left(\frac{1}{8}\right)}, \quad \delta_{01} = \delta_{\left(\frac{3}{8}\right)}, \quad \delta_{10} = \delta_{\left(\frac{5}{8}\right)}, \quad \delta_{11} = \delta_{\left(\frac{7}{8}\right)},$$

. . . .

При этом ясно, что взаимное порядковое расположение на прямой наших смежных интервалов таково же, как и расположение двоично-рациональных чисел, являющихся их индексами, чем наше утверждение доказано.

---

*) Можно было бы вывести это утверждение из теоремы 1 § 1 гл. 3, убедившись в том, что среди конечных смежных интервалов нет ни самого левого, ни самого правого и что между любыми двумя смежными интервалами лежит бесконечно много смежных интервалов.

Замечание 3. Точки множества П, являющиеся концами смежных интервалов, называются *точками первого рода* (или *односторонними точками*) множества П. Их, очевидно, лишь *счетное* множество. Все остальные точки множества П называются *точками второго рода* (или *двусторонними точками*). Если x есть левый конец смежного интервала $\delta_{i_1 \ldots i_n}$, то x является точкой пересечения сегментов

$$\Delta_{i_1 \ldots i_n 0},\ \Delta_{i_1 \ldots i_n 01},\ \Delta_{i_1 \ldots i_n 011},\ \Delta_{i_1 \ldots i_n 0111},\ \ldots,$$

а если x есть правый конец смежного интервала $\delta_{i_1 \ldots i_n}$, то x является точкой пересечения сегментов

$$\Delta_{i_1 \ldots i_n 1},\ \Delta_{i_1 \ldots i_n 10},\ \Delta_{i_1 \ldots i_n 100},\ \Delta_{i_1 \ldots i_n 1000},\ \ldots$$

Если же точка x принадлежит сегментам

$$\Delta_0 \supset \Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \Delta_{i_1 i_2 i_3} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots,$$

причем среди индексов i_n при сколь угодно большом n имеются как нули, так и единицы, то x — точка второго рода. Таким образом, *среди бесконечных двоичных дробей* (3), *взаимно однозначно соответствующих точкам множества* П, *точкам первого рода соответствуют дроби* (3), *у которых все* i_n, *начиная с некоторого, равны между собою* (и которые, следовательно, являются разложениями двоично-рациональных чисел).

3. Канторово множество П может быть определено как множество всех точек сегмента $[0;\ 1]$, имеющих разложение в троичную дробь, состоящее лишь из цифр 0 и 2.

В самом деле, точки смежного интервала $\delta = \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$ характеризуются тем, что их разложение в троичную дробь имеет первый троичный знак 1. Заметим, что концы интервала имеют по два разложения, а именно:

$$0{,}10000000\ldots = 0{,}02222222\ldots$$

и

$$0{,}20000000\ldots = 0{,}12222222\ldots$$

Для нас важно заметить, что каждая из этих точек имеет разложение, в котором участвуют лишь цифры 0 и 2. Таким образом, оба сегмента первого ранга состоят из точек, имеющих разложение в троичную дробь, первой цифрой которого является либо 0, либо 2. Среди этих точек те, троичное разложение которых имеет в качестве второй цифры непременно 1, суть интервалы $\delta_0 = \left(\frac{1}{9};\ \frac{2}{9}\right)$ и $\delta_1 = \left(\frac{7}{9};\ \frac{8}{9}\right)$, т. е. смежные. Итак, точки смежных интервалов второго ранга характеризуются тем, что они, не имея цифры 1 в качестве своего первого троичного знака, имеют ее неизбежно своим вторым троичным знаком. Следовательно, удаляя из сегмента $[0; 1]$ смежные интервалы первых двух рангов, мы удалим все точки и только те точки, у которых цифра 1 непременно появляется в качестве первого или второго троичного знака. Точно так же убеждаемся в том, что смежные интервалы третьего ранга состоят из точек, первые два троичных знака которых отличны от 1, но третий непременно является единицей, и т. д. Вообще, удаляя из сегмента $[0; 1]$ все смежные интервалы рангов $\leqslant n$, мы удалим все точки, имеющие цифру 1 по крайней мере на одном из первых n мест троичного разложения. Отсюда следует, что сумма всех собственных смежных интервалов к множеству Π состоит из всех точек сегмента $[0; 1]$, троичное разложение которых непременно содержит хотя бы одну цифру 1. Утверждение 3 этим доказано. Заметим, что каждая из точек первого рода, будучи точкой вида $\frac{p}{3^n}$, имеет два троичных разложения (о д н о и з к о т о р ы х не содержит цифры 1).

4. Канторово множество Π нигде не плотно на числовой прямой.

В самом деле, так как Π замкнуто, то достаточно показать, что $R^1\setminus\Pi$ всюду плотно на R^1, т. е. что каждая точка x числовой прямой есть точка прикосновения множества $R^1\setminus\Pi$. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $x\in\Pi$ и показать, что, каково бы ни было $\varepsilon>0$, имеются точки $R^1\setminus\Pi$, лежащие в $U(x, \varepsilon)$. Для этого рассмотрим столь большое n, что $\frac{1}{3^n}<\varepsilon$. Так как Π_n состоит из конечного числа попарно не пересекающихся сегментов длины $\frac{1}{3^n}$, то расстояние от каждой точки множества Π_n (значит, в частности, и от каждой точки $x\in\Pi$) до суммы интервалов, образующих дополнение к Π_n, меньше чем $\frac{1}{3^n}<\varepsilon$. Следовательно, $U(x, \varepsilon)$ имеет с $R^1\setminus\Pi_n$, а значит, и подавно с $R^1\setminus\Pi$ непустое пересечение, что и требовалось доказать.

5. Обозначим через $\Pi_{i_1\ldots i_n}$ множество всех точек множества Π, лежащих на сегменте $\Delta_{i_1\ldots i_n}$. При подобном преобразовании $\left(\text{с коэффициентом } \frac{1}{3^n}\right)$, переводящем сегмент $[0; 1]$ в сегмент $\Delta_{i_1\ldots i_n}$, множество Π, очевидно, взаимно однозначно переходит в множество $\Pi_{i_1\ldots i_n}$, откуда, в частности, следует, что множество $\Pi_{i_1\ldots i_n}$ имеет мощность континуума. Пусть теперь a — произвольная точка множества Π. Докажем, что в любой окрестности $U(a, \varepsilon)$ содержится не только бесконечное, но даже несчетное множество точек из Π (этим будет дано второе доказательство того факта, что замкнутое множество Π не содержит изолиро-

ванных точек, т. е. является совершенным). Для этого возьмем столь большое n, что $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$, и рассмотрим тот сегмент n-го ранга $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$, на котором лежит точка a. Так как длина этого сегмента равна $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$, то он, содержа точку a, целиком лежит в $U(a, \varepsilon)$, чем наше утверждение и доказано, ибо $U(a, \varepsilon)$ содержит часть $\Pi_{i_1 \ldots i_n}$ множества Π, имеющую мощность континуума.

Подведем итог доказанному.

Канторов дисконтинуум Π *есть нигде не плотное совершенное множество на числовой прямой, каждая точка которого есть точка конденсации этого множества. Множество всех собственных смежных интервалов к множеству* Π, *упорядоченное на числовой прямой естественным образом (слева направо), подобно множеству всех (двоично-) рациональных чисел.*

3. Общие теоремы о совершенных множествах на прямой. Усилением свойства 2 канторова дисконтинуума является следующая общая

Теорема 24. *Упорядоченное естественным образом (слева направо) множество всех конечных смежных интервалов к любому нигде не плотному непустому совершенному множеству подобно множеству всех двоично-рациональных чисел.*

В силу теоремы 1 § 1 гл. 3 достаточно показать, что

1° среди конечных смежных интервалов к нигде не плотному совершенному множеству Φ нет ни самого левого, ни самого правого;

2° между любыми двумя конечными смежными интервалами к совершенному нигде не плотному множеству Φ лежит по крайней мере один смежный интервал к Φ.

Доказательство свойства 1°. Пусть $\delta = (a; b)$ — конечный смежный интервал к Φ. Тогда $a \in \Phi$. Однако не может быть $a = \inf \Phi$, так как тогда a была бы изолированной точкой множества Φ. Поэтому имеется точка $x \in \Phi$, расположенная влево от a. Так как Φ нигде не плотно на R^1, то на $(x; a)$ можно найти точку $x' \in \Gamma = R^1 \setminus \Phi$. Точка x' принадлежит некоторому смежному интервалу δ' к Φ, который, содержа точку x' интервала $(x; a)$ и не содержа ни a, ни x, лежит на $(x; a)$, т. е. расположен влево от интервала $(a; b) = \delta$. Итак, никакой конечный смежный интервал к Φ не является самым левым. Таким же точно образом убедимся в том, что никакой конечный смежный интервал к Φ не является самым правым.

Доказательство свойства 2°. Пусть $\delta_1 = (a_1; b_1)$ и $\delta_2 = (a_2; b_2)$ — два смежных интервала к Φ, и пусть δ_1 лежит влево от δ_2. Так как эти интервалы не имеют общего конца, то $b_1 \neq a_2$; так как Φ нигде не плотно, то на $(b_1; a_2)$ имеется точка

$x \in R^1 \setminus \Phi$ и содержащий ее смежный интервал лежит на $(b_1;\ a_2)$, т. е. между δ_1 и δ_2, что и требовалось доказать.

Следствие. *Упорядоченное множество Θ всех смежных интервалов к ограниченному совершенному нигде не плотному множеству подобно множеству всех двоично-рациональных точек сегмента* $[0;\ 1]$.

Из теоремы 24 вытекает, что всякое сечение $(A,\ B)$ в указанном упорядоченном множестве Θ принадлежит к одному из следующих трех типов:

1) в нижнем классе A есть самый правый, но в верхнем классе B нет самого левого интервала;

2) в A нет самого правого, но в B есть самый левый интервал;

3) ни в A нет самого правого, ни в B нет самого левого интервала.

Сечения этого третьего рода, как известно, называются «щелями» в упорядоченном множестве Θ. Мы сейчас приложим только что полученные результаты к доказательству очень важной теоремы, утверждающей, что все ограниченные нигде не плотные совершенные множества на прямой подобны между собою.

Определение 9. Точка совершенного множества Φ, являющаяся концом некоторого смежного к Φ интервала, называется *точкой первого рода* (или *односторонней точкой*) множества Φ; точка $x \in \Phi$, не являющаяся концом никакого смежного к Φ интервала, называется *точкой второго рода* (или *двусторонней точкой*) множества Φ.

Очевидно, если точка $a \in \Phi$ есть точка первого рода, то все достаточно близкие к a точки множества Φ расположены с одной стороны от точки a, а именно слева от a, если a — левый конец некоторого смежного интервала, и справа, если a — правый конец смежного к Φ интервала. Если же a — точка второго рода, то в любой близости от точки a и справа, и слева имеются точки множества Φ.

Каждой точке $x \in \Phi$ второго рода соответствует вполне определенное сечение $\theta_x = (A_x,\ B_x)$ в упорядоченном множестве Θ: чтобы получить это сечение, достаточно отнести к нижнему классу A_x все смежные интервалы, лежащие левее точки x, тогда верхний класс B_x будет состоять из смежных интервалов, лежащих правее точки x. Сечение $\theta_x = (A_x,\ B_x)$ есть щель: в самом деле, пусть $\delta = (a;\ b)$ есть произвольный интервал, положим нижнего класса; так как x — точка второго рода, то $x \neq b$, значит, $b < x$. Так как Φ нигде не плотно, то на интервале $(b;\ x)$ лежит точка $x' \in \Gamma = R^1 \setminus \Phi$, а значит, и весь смежный интервал, содержащий точку x', который, таким образом, оказывается справа от интервала δ, но еще слева от точки x. Итак, никакой из интервалов нижнего класса не является самым правым среди интервалов этого класса. Точно так же мы убедимся в том, что среди интервалов верхнего класса нет самого левого.

Двум различным точкам второго рода x и x', $x < x'$, соответствуют различные щели θ_x и $\theta_{x'}$, так как все смежные интервалы, лежащие между x и x', попадают в B_x и в то же время в $A_{x'}$.

Докажем, наконец, что каждая щель $\theta = (A, B)$ в Θ оказывается поставленной в соответствие некоторой точке второго рода множества Φ. Другими словами, найдем такую точку второго рода $x \in \Phi$, что A состоит из всех смежных интервалов, лежащих левее, а B — из всех смежных интервалов, лежащих правее точки x. Рассмотрим верхнюю грань a множества, состоящего из концов всех интервалов, являющихся элементами класса A. Точно так же пусть b есть нижняя грань множества концов всех интервалов из B. Так как каждый интервал из A лежит левее каждого интервала из B, то $a \leqslant b$. Однако если бы было $a < b$, то на $(a; b)$ не оказалось бы ни одного смежного интервала к Φ, а значит, и ни одной точки множества $R^1 \diagdown \Phi$, в противоречии с тем, что Φ нигде не плотно. Поэтому $a = b$. Полагая $x = a = b$, видим, что x — точка второго рода и что A действительно состоит из интервалов, лежащих левее, а B — из интервалов, лежащих правее точки x. Итак, наша конструкция дает взаимно однозначное соответствие между всеми точками второго рода множества Φ и всеми щелями множества Θ. Но множество всех щелей множества Θ естественным образом оказывается упорядоченным: достаточно условиться, что щель $\theta_x = (A_x, B_x)$ предшествует щели $\theta_y = (A_y, B_y)$, если $A_x \subset A_y$. Далее, если из двух точек второго рода x, $y \in \Phi$ первая лежит левее второй, то $A_x \subset A_y$, так что установленное нами соответствие между точками второго рода множества Φ и щелями в Θ есть *соответствие подобия*.

Пусть теперь даны два ограниченных совершенных нигде не плотных множества Φ и Φ' на числовой прямой. Множества их точек первого рода обозначим соответственно через S и S', а упорядоченные множества их конечных смежных интервалов — через Θ и Θ'. Упорядоченные множества Θ и Θ' подобны между собою, так как каждое из них подобно множеству всех двоично-рациональных чисел. Соответствие подобия между Θ и Θ' порождает соответствие подобия между S и S'; если $\delta = (x; y)$ и $\delta' = (x'; y')$ — соответствующие друг другу смежные интервалы к Φ и Φ', то считаем соответствующими друг другу x и x', y и y'. Кроме того, ставим в соответствие $a = \inf \Phi$ и $a' = \inf \Phi'$, $b' = \sup \Phi$ и $b' = \sup \Phi'$. Соответствие подобия между Θ и Θ' порождает соответствие подобия между множествами всех щелей в Θ и в Θ', т. е. между точками второго рода в Φ и Φ'. Остается показать, что полученное взаимно однозначное соответствие между всем Φ и всем Φ' есть соответствие подобия. А для этого достаточно доказать следующее:

Если x — первого, y — второго рода в Φ, а x' и y' — соответствующие им точки в Φ', то из $x < y$, соответственно $x > y$, следует $x' < y'$, соответственно $x' > y'$.

Но отношение $x < y$ равносильно отношению $x \in A_y$, которое, в силу соответствия между щелями в Θ и в Θ', переходит в отношение $x' \in A_{y'}$, равносильное отношению $x' < y'$. Аналогично и для отношения $x > y$ (равносильного отношению $x \in B_y$).

Предыдущими рассуждениями доказана

Теорема 25. *Все ограниченные совершенные нигде не плотные множества на прямой подобны между собою. В частности, всякое совершенное ограниченное нигде не плотное множество на прямой подобно канторову дисконтинууму.*

Так как топология числовой прямой и лежащих на ней множеств может рассматриваться как порядковая топология в множестве действительных чисел, то в теореме 25 слово «подобны» может быть заменено словом «гомеоморфны».

Теми же рассуждениями доказывается, что все совершенные нигде не плотные и в обе стороны неограниченные множества подобны между собою (наши рассуждения даже немного упрощаются от того, что такие множества имеют лишь конечные смежные интервалы). Между прочим, все в обе стороны неограниченные совершенные нигде не плотные множества подобны, например, канторову дисконтинууму, из которого удалены две его крайние (самая левая и самая правая) точки. Аналогично, совершенное нигде не плотное множество, ограниченное только снизу (только сверху), подобно канторову дисконтинууму без его самой правой (самой левой) точки.

Из изложенного следует, что *всякое нигде не плотное совершенное множество имеет мощность континуума.*

Наконец, если совершенное множество плотно на каком-нибудь интервале, то оно содержит этот интервал и, значит, тоже имеет мощность континуума; итак, имеет место следующий общий результат:

Теорема 26. *Всякое совершенное множество на прямой имеет мощность континуума.*

Эту теорему (сначала снова для ограниченных нигде не плотных множеств) можно вывести еще и из других соображений. Мы видели, что множество точек второго рода совершенного нигде не плотного множества Φ подобно множеству щелей множества Θ. Но множество Θ в свою очередь подобно множеству рациональных чисел. Значит, множество всех точек второго рода множества Φ подобно множеству всех щелей множества рациональных чисел, но множество всех щелей множества рациональных чисел подобно множеству всех иррациональных чисел. Этот результат остается в силе и без предположения ограниченности множества Φ. Итак:

Теорема 27. *Множество всех точек второго рода любого совершенного нигде не плотного множества на прямой подобно множеству всех иррациональных чисел и, следовательно, имеет мощность континуума.*

Завершим этот параграф построением стандартного отображения канторова дисконтинуума на отрезок числовой прямой. По теореме 24 множество смежных интервалов к канторову дисконтинууму подобно множеству двоично-рациональных чисел отрезка. На смежном интервале δ_r к канторову дисконтинууму, имеющем в качестве номера двоично-рациональное число r, полагаем функцию φ равной r, так же как и на его концах. Остается доопределить функцию φ в точках второго рода канторова дисконтинуума. Каждая такая точка ξ определяет разбиение множества всех смежных интервалов на два класса — на интервалы, лежащие слева от точки ξ, и на интервалы, лежащие справа от этой точки. Тем самым определено сечение (A, B) в множестве всех двоично-рациональных чисел отрезка, являющееся щелью. Полагаем $\varphi(\xi)$ равным соответствующему этой щели двоично-иррациональному числу. Итак, построено отображение φ отрезка на себя. Оно непрерывно, как монотонное отображение одного упорядоченного множества на другое. График этого замечательного отображения носит название «канторовой лестницы». Ограничение этого отображения на канторов дисконтинуум Π и будет стандартным отображением множества Π на отрезок.

§ 6. Некоторые классические примеры метрических пространств и их свойства

В этом параграфе мы приведем несколько важнейших примеров метрических пространств, постоянно встречающихся во всевозможных отделах математики.

Числовая прямая R^1 известна читателю еще из средней школы. Точками *n-мерного евклидова пространства* R^n называются последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

из n действительных чисел, причем расстояние между двумя точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ определяется формулой

$$\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}.$$

Это расстояние, очевидно, удовлетворяет аксиомам тождества и симметрии. Докажем, что оно удовлетворяет также и аксиоме треугольника. Доказательство опирается на неравенство Коши — Буняковского (неправильно называемое также неравенством

Шварца), а именно на неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} \;*), \tag{1}$$

верное для любых наборов действительных чисел x_k и y_k.

Начнем с доказательства этого неравенства. Рассмотрим сначала частный случай, когда расстояния от точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ до *начала координат* $o=(0, \ldots, 0)$ равны 1 (т. е. $x_1^2+\ldots+x_n^2=1$, $y_1^2+\ldots+y_n^2=1$).

Так как

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (x_k-y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \geqslant 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k;$$

значит, в силу наших предположений имеем $2 \geqslant 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant 1. \tag{1'}$$

Пусть теперь $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ — какие угодно точки n-мерного пространства R^n.

Положим

$$x'_k = \frac{x_k}{\sqrt{\sum x_k^2}}, \quad y'_k = \frac{y_k}{\sqrt{\sum y_k^2}} \quad \text{при} \quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Тогда расстояние от точек $x'=(x'_1, \ldots, x'_n)$, $y'=(y'_1, \ldots, y'_n)$ до начала координат равно 1, и мы, по только что доказанному, можем написать

$$\sum_{k=1}^{n} x'_k y'_k \leqslant 1,$$

т. е.

$$\frac{\sum x_k y_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_y^2}} \leqslant 1,$$

чем неравенство Коши — Буняковского доказано.

---

*) Для читателей, знакомых с простейшими понятиями, касающимися векторов в n-мерном пространстве, заметим, что неравенство (1) для двух векторов $\xi=(x_1, \ldots, x_n)$ и $\eta=(y_1, \ldots, y_n)$ особенно просто записывается, если использовать обозначения скалярного произведения: $(\xi, \eta) \leqslant |\xi|\cdot|\eta|$.

Докажем теперь, что в пространстве R^n выполнена аксиома треугольника, т. е. что для любых $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ имеем неравенство (суммирование везде от 1 до n)

$$\sqrt{\sum (x_k-z_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum (x_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum (y_k-z_k)^2}. \qquad (2)$$

Полагая $x_k-y_k=u_k$, $y_k-z_k=v_k$, имеем $x_k-z_k=u_k+v_k$, так что подлежащее доказательству неравенство (2) переписывается в виде

$$\sqrt{\sum (u_k+v_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum u_k^2}+\sqrt{\sum v_k^2},$$

или — по возведении обеих частей в квадрат — в виде

$$\sum (u_k+v_k)^2 \leqslant \sum u_k^2+\sum v_k^2+2\sqrt{\sum u_k^2}\cdot\sqrt{\sum v_k^2},$$

т. е.

$$\sum u_k^2+\sum v_k^2+2\sum u_k v_k \leqslant \sum v_k^2+\sum v_k^2+2\sqrt{\sum v_k^2}\cdot\sqrt{\sum v_k^2}.$$

Но для доказательства этого неравенства достаточно обе части неравенства Коши — Буняковского помножить на 2 и затем прибавить к ним по выражению $\sum u_k^2+\sum v_k^2$.

Замечание о метрическом произведении пространств. Это замечание совершенно естественно примыкает к определению евклидовых пространств R^n. Пусть даны метрические пространства

$$X_1, \ldots, X_n$$

(в конечном числе n). Точками метрического произведения $X = [X_1 \times \ldots \times X_n]$ назовем всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из n элементов $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$. Расстояние между двумя точками $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ пространства X определим по формуле

$$\rho(x, y)=\sqrt{(\rho(x_1, y_1))^2+\ldots+(\rho(x_n, y_n))^2}.$$

Читателю предоставляется самому убедиться в том, что введенное таким образом расстояние удовлетворяет всем трем аксиомам метрического пространства.

Прежде чем определять гильбертово пространство R^∞, являющееся как бы бесконечномерным аналогом евклидова пространства, запишем одно арифметическое соотношение, непосредственно вытекающее из аксиомы треугольника, выполненной, как следует из предыдущих рассуждений, в n-мерном евклидовом пространстве. Именно, применим аксиому треугольника к трем точкам $o=(0, \ldots, 0)$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ n-мерного евклидова пространства, получаем

$$\rho(x, o)+\rho(o, y) \geqslant \rho(x, y),$$

т. е.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_n^2} \geqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k-y_k)^2}. \tag{3}$$

Пусть теперь последовательности действительных чисел

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

и

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$$

суть последовательности со сходящейся суммой квадратов (т. е. ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ сходятся). Тогда, переходя в (3) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} \geqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k-y_k)^2}. \tag{4}$$

Так как все написанные ряды — с положительными членами, то из (4) следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k-y_k)^2$. Итак, *если ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2$ *сходятся, то сходится и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k-y_k)^2$. Это и есть арифметическое соотношение, нужное нам для определения пространства Гильберта.

Определение гильбертова пространства R^∞. Точками гильбертова пространства являются всевозможные бесконечные последовательности действительных чисел

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

со сходящейся суммой квадратов. Расстояние между двумя точками $x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots)$ и $y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots)$ определяется формулой

$$\rho(x,\ y)=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n-y_n)^2}$$

(по только что доказанному, ряд справа сходится в наших предположениях, так что расстояние определено для любых двух точек гильбертова пространства). Проверяем аксиомы метрического пространства. Аксиомы тождества и симметрии выполнены очевидным образом. Аксиома треугольника получается предельным переходом при $n \to \infty$ из соответствующего неравенства для

n-мерного евклидова пространства

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}\geqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2}.$$

Множество всех точек $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ гильбертова пространства, для которых $0\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{2^n}$ (при любом $n=1, 2, 3, \ldots$), обозначается через Q и называется *основным параллелепипедом* гильбертова пространства (или просто *гильбертовым кирпичом*). Легко видеть, что Q замкнуто в R^∞.

Мы знаем, что множество всех рациональных (а также множество всех иррациональных) точек числовой прямой R^1 всюду плотно на ней.

Легко найти счетное всюду плотное множество и в n-мерном евклидовом пространстве R^n при любом n: таким множеством является, например, множество всех «рациональных» точек, т. е. точек, у которых все n координат рациональны. Счетность этого множества доказана в § 4 гл. 1.

В гильбертовом пространстве R^∞ также имеется счетное всюду плотное множество: таким множеством, например, является множество D всех точек вида

$$x=(r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, 0, \ldots), \tag{5}$$

у которых все координаты рациональны и среди них лишь конечное (однако сколь угодно большое) число отлично от нуля. Счетность множества D следует из того, что D есть сумма счетного множества множеств D_n, где D_n, по определению, состоит из всех точек вида (5) при данном n.

Обобщенное гильбертово пространство H^τ строится для всякого бесконечного кардинального числа τ следующим способом (приводящим в случае счетного τ к обыкновенному (классическому) гильбертову пространству). Возьмем какое-либо множество $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$ мощности τ, которое назовем множеством индексов, а сами элементы α множества $\mathfrak{A}$ назовем индексами. При счетном τ возьмем в качестве $\mathfrak{A}$ множество всех натуральных чисел *). Каждому $\alpha\in\mathfrak{A}$ поставим в соответствие некоторое вещественное число x_α так, чтобы множество тех α, для которых $x_\alpha\neq 0$, было не более чем счетно и чтобы при этом сумма квадратов чисел x_α была конечна. Мы получили функцию $x=x(\alpha)$, определенную на множестве $\mathfrak{A}$, со значениями, являющимися вещественными числами, и удовлетворяющую поставленным выше условиям. Каждая такая функция x со значениями

*) При любом τ можно, конечно, принять за $\mathfrak{A}$ множество всех порядковых чисел мощности $< \tau$.

$x(\alpha)=x_\alpha$ (каждый набор чисел $\{x_\alpha\}$, где α пробегает все множество индексов $\mathfrak{A}$) называется точкой $x=\{x_\alpha\}$ пространства H^τ, а сами числа x_α, т. е. значения функции x, называются координатами точки $x=\{x_\alpha\}$. Как и при $\tau=\aleph_0$, для всяких двух точек $x=\{x_\alpha\}$ и $x'=\{x'_\alpha\}$ имеет место неравенство Коши—Буняковского

$$\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} x_\alpha x'_\alpha \leqslant \sqrt{\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} x_\alpha^2}\cdot\sqrt{\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} x_\alpha'^2},$$

где суммирование ведется по всем $\alpha\in\mathfrak{A}$ или, что то же самое, по не более чем счетному множеству тех α, для которых хотя бы одно из чисел x_α, x'_α отлично от нуля. Из этого неравенства следует, что для точек $x=\{x_\alpha\}$ и $y=\{y_\alpha\}$ определено конечное неотрицательное число

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}}(x_\alpha-y_\alpha)^2},$$

называемое расстоянием между ними, и что это расстояние (очевидно, удовлетворяющее аксиомам тождества и симметрии) удовлетворяет и аксиоме треугольника. Полученное метрическое пространство H^τ называется *обобщенным гильбертовым пространством «числа измерений» τ*.

Пространство C всех непрерывных функций f на отрезке $[0; 1]$. Точками пространства C являются всевозможные вещественные непрерывные функции на отрезке $[0; 1]$ числовой прямой R^1 *). Расстояние $\rho(f, g)$ между двумя точками пространства C, т. е. между двумя функциями f и g, определяется как

$$\rho(f, g)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-g(x)|.$$

Читатель легко докажет, что последовательность точек $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots, f_n, \ldots$ пространства C сходится к точке f тогда и только тогда, когда последовательность функций $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ равномерно сходится на отрезке $[0; 1]$ к функции f.

Докажем следующее

Предложение 1. *В пространстве C содержится счетное всюду плотное множество.*

Доказательству этого предложения предпошлем несколько элементарных замечаний. Назовем «допустимой» ломаной всякую простую ломаную

$$L=\overline{A_0A_1\ldots A_n}, \tag{6}$$

удовлетворяющую следующим условиям:

---

*) Вместо отрезка $[0; 1]$ можно было бы взять и любой другой отрезок $[a; b]$ числовой прямой.

а) ломаная L вся расположена в полосе $0 \leqslant x \leqslant 1$ и с каждой лежащей в этой полосе прямой, параллельной оси ординат, пересекается в одной лишь точке;

б) вершинами ломаной L являются точки

$$A_0 = (x_0, y_0), \quad A_1 = (x_1, y_1), \quad \ldots, \quad A_n = (x_n, y_n)$$

с рациональными абсциссами, причем $x_0 = 0$, $x_n = 1$.

Очевидно, каждая допустимая ломаная L является графиком некоторой непрерывной на $[0; 1]$ функции $\lambda(x)$, линейной в каждом из сегментов $[0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}; 1]$. Непрерывные функции этого рода называются *кусочно линейными*. Кусочно линейную функцию назовем «допустимой», если ее график есть допустимая ломаная.

Среди допустимых ломаных и соответствующих им кусочно линейных функций мы особо выделим «регулярные» ломаные и функции. Допустимую ломаную мы назовем регулярной, если обе координаты каждой из ее вершин рациональны. Функции, графиками которых являются регулярные ломаные, назовем также регулярными. Из теоремы 9 § 4 гл. 1 следует, что множество всех регулярных ломаных счетно. Следовательно, регулярные функции образуют счетное подмножество C_0 пространства C. Наша задача — доказать, что множество C_0 всюду плотно в C. Это утверждение вытекает из следующих двух предложений:

А) Каковы бы ни были непрерывная на $[0; 1]$ функция $f(x)$ и положительное число ε, существует допустимая кусочно линейная функция $\lambda(x)$, удовлетворяющая для всех $x \in [0; 1]$ неравенству $|f(x) - \lambda(x)| < \varepsilon$.

Б) Каковы бы ни были допустимая кусочно линейная функция $\lambda(x)$ и положительное число ε, существует регулярная функция $\lambda^*(x)$, удовлетворяющая для всех $x \in [0; 1]$ неравенству $|\lambda(x) - \lambda^*(x)| < \varepsilon$.

Для доказательства предложения А) воспользуемся известной из анализа теоремой о том, что всякая непрерывная на сегменте $[0; 1]$ функция равномерно непрерывна на этом сегменте. Поэтому для данной непрерывной на $[0; 1]$ функции $f(x)$ можно ко всякому $\varepsilon > 0$ подобрать $\delta > 0$ так, чтобы для любых x' и x'' на сегменте $[0; 1]$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta$, было $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Разобьем теперь сегмент $[0; 1]$ рациональными точками $x_1, \ldots, x_{n-1}$ на отрезки

$$[x_0 = 0; x_1], \quad [x_1; x_2], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}; x_n = 1]$$

длины $< \delta$, и пусть

$$y_i = f(x_i)$$

для $i = 0, 1, \ldots, n$. Если положить $A_i = (x_i, y_i)$ при $i = 0, 1, \ldots, n$, то ломаная (6) будет допустимой; обозначим изображаемую ею кусочно линейную функцию через $\lambda(x)$. Для каждой точки x сегмента $[0; 1]$ определим x_i из условия $x_i \leqslant x < x_{i+1}$. Имеем оценки

$$|f(x)-f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|\lambda(x)-\lambda(x_i)| \leqslant |\lambda(x_{i+1})-\lambda(x_i)| = |f(x_{i+1})-f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда, помня, что $\lambda(x_i)=f(x_i)$, получаем

$$|f(x)-\lambda(x)| \leqslant |f(x)-f(x_i)| + |\lambda(x_i)-\lambda(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

чем утверждение А) доказано.

Утверждение Б) вытекает из следующего замечания:

Б′) Пусть даны допустимая ломаная (6) и число $\varepsilon > 0$. Если y_0', y_1', $\ldots$, y_n' отличаются соответственно от y_0, y_1, $\ldots$, y_n меньше чем на ε и $A_i'=(x_i, y_i')$, то для функции $\lambda^*(x)$, изображаемой ломаной $A_0' A_1' \ldots A_n'$, будет

$$|\lambda(x)-\lambda^*(x)| < \varepsilon.$$

(Утверждение Б) следует из Б′), так как значения $y_0', y_1', \ldots, y_n'$ можно выбрать рациональными.)

Действительно, пусть x — произвольная точка сегмента $[0; 1]$. Определим x_i из условия $x_i \leqslant x < x_{i+1}$. Имеем $x = tx_i + (1-t)x_{i+1}$, где

$$0 < t = \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \leqslant 1.$$

Тогда

$$\lambda(x) = ty_i + (1-t)y_{i+1}, \quad \lambda^*(x) = ty_i' + (1-t)y_{i+1}'$$

и, следовательно,

$$|\lambda(x)-\lambda^*(x)| \leqslant t|y_i-y_i'| + (1-t)|y_{i+1}-y_{i+1}'| < \varepsilon[t+(1-t)] = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Бэровские пространства. Пусть $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$ — множество каких-либо элементов α, называемых индексами, и мощность множества $\mathfrak{A}$ есть произвольно заданное кардинальное число τ. Построим метрическое пространство B_τ следующим образом. Точками пространства B_τ являются, по определению, всевозможные (счетные) последовательности

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$$

элементов множества индексов $\mathfrak{A}$. Расстояние между двумя точками $\xi=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ и $\xi'=(\alpha_1', \ldots, \alpha_n', \ldots)$ определяется как

$$\rho(\xi, \xi') = \frac{1}{k},$$

где k есть наименьшее из тех натуральных чисел, для которых $\alpha_k \neq \alpha'_k$. Итак, функция расстояния принимает лишь значения вида $\frac{1}{k}$, причем равенство $\rho(\xi, \xi') = \frac{1}{k}$ означает, что $\alpha_1 = \alpha'_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_{k-1} = \alpha'_{k-1}$, но $\alpha_k \neq \alpha'_k$.

Среди аксиом метрического пространства аксиомы тождества и симметрии выполнены очевидным образом. Легко проверяется и аксиома треугольника, и даже в следующем усиленном виде: если $\rho(\xi, \xi') = \frac{1}{k'}$, $\rho(\xi', \xi'') = \frac{1}{k''}$, то $\rho(\xi, \xi'') = \frac{1}{k}$, где k есть наименьшее из двух чисел k', k'', и, следовательно, $1/k$ — наибольшее из двух расстояний $\rho(\xi, \xi')$ и $\rho(\xi', \xi'')$.

Сферической окрестностью $O\left(\xi, \frac{1}{n}\right)$ точки $\xi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ является множество $O_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ всех точек $\xi' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n, \ldots)$, для которых

$$\alpha'_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha'_n = \alpha_n.$$

Множество всех сферических окрестностей всевозможных точек $\xi \in B_\tau$, очевидно, равномощно с множеством всевозможных конечных комбинаций $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, т. е. имеет мощность τ. Поэтому пространство B_τ имеет вес τ и его законно назвать бэровским пространством веса τ. Сам Бэр построил пространство B_τ лишь для счетной мощности $\tau = \aleph_0$, и тогда множество $\mathfrak{A}$ есть просто множество всех натуральных чисел и точки пространства $B_{\aleph_0}$ суть счетные последовательности натуральных чисел.

Предложение 2. *Бэровское пространство $B_{\aleph_0}$ гомеоморфно пространству J всех иррациональных чисел, рассматриваемому как подпространство числовой прямой R^1.*

Доказательство. Поскольку множество R рациональных точек числовой прямой подобно множеству R_2 двоично-рациональных точек отрезка $I = [0, 1]$ (см. следствие из теоремы 1 § 1 гл. 3), достаточно доказать, что бэровское пространство $B_{\aleph_0}$ гомеоморфно подпространству $J_2 = I \setminus R_2$ отрезка I, — тем самым будет доказан и гомеоморфизм пространства $B_{\aleph_0}$ пространству J.

Рассмотрим на сегменте I счетное семейство сегментов $\delta_1 = \{\Delta_j\}$, $j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, где $\Delta_j = \left[1 - \frac{1}{2^j}; 1 - \frac{1}{2^{j+1}}\right]$ при $j > 0$ и $\Delta_j = [2^{j-1}; 2^j]$ при $j < 0$. Сегменты Δ_j будем называть сегментами 1-го ранга.

Далее, на каждом сегменте 1-го ранга $\Delta_j = [a_j; b_j]$, $b_j - a_j = d_j$, построим счетное семейство $\{\Delta_{jk}\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

ментов 2-го ранга, где $\Delta_{jk}=\left[b_j-\frac{d_j}{2^k};\ b_j-\frac{d}{2^{k-1}}\right]$ при $k>0$ и $\Delta_{jk}=[a_j+d_j\cdot 2^{k-1};\ a_j+d_j\cdot 2^k]$ при $k<0$, и положим $\delta_2=\{\Delta_{jk}\colon j,\ k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$. Продолжая эти построения, на следующем шаге получим семейство сегментов 3-го ранга

$$\delta_3=\{\Delta_{jkl}\colon j,\ k,\ j=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\},\quad \Delta_{jkl}\subset\Delta_{jk}\subset\Delta_j,$$

и т. д.

Положим $\delta=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\delta_i$. Легко видеть, что множество концов всех сегментов, входящих в семейство δ, совпадает с множеством R_2 двоично-рациональных точек отрезка I.

Мы можем считать, что пространство $B_{\aleph_0}$ состоит из счетных последовательностей отличных от нуля целых чисел. В этом предположении легко построить отображение $f\colon B_{\aleph_0}\to I$ пространства $B_{\aleph_0}$ в отрезок I. А именно, положим

$$f(n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots,\ n_k,\ \ldots)=\Delta_{n_1}\cap\Delta_{n_1n_2}\cap\ldots\cap\Delta_{n_1n_2\ldots n_k}\cap\ldots$$

Полученное отображение взаимно однозначно. Это сразу следует из построения системы сегментов δ. Покажем, что $f(B_{\aleph_0})=J_2$.

Пусть $x\in J_2$ и $\Delta_{k_1},\ \Delta_{k_1k_2},\ \ldots,\ \Delta_{k_1k_2\ldots k_l},\ \ldots$ — последовательность вложимых сегментов содержащих точку x. Тогда $f(k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_l\ldots)=x$. Тем самым доказано, что $J_2\subseteq fB_{\aleph_0}$.

Пусть теперь $x\in R_2$. Тогда x является концом некоторого сегмента ранга k (число k зависит от x). Значит, x не принадлежит никакому сегменту ранга $(k+1)$. Таким образом, $x\notin fB_{\aleph_0}$.

Итак, мы построили взаимно однозначное отображение f пространства $B_{\aleph_0}$ на пространство J_2. Покажем, что отображение f топологическое. Система множеств $\left\{O\left(r,\ \frac{1}{n}\right)\colon r\in B_{\aleph_0},\ n=1,\ 2,\ \ldots\right\}$ образует базу пространства $B_{\aleph_0}$. Каждое множество $O\left(r,\ \frac{1}{n}\right)$ состоит из точек, первые n координат которых равны первым n координатам $r_1,\ \ldots,\ r_n$ точки r. Поэтому $f\left(O\left(r,\ \frac{1}{n}\right)\right)=\Delta_{r_1\ldots r_n}\cap J_2$. Но множества $\Delta_{k_1\ldots k_n}\cap J_2$, $n=1,\ 2,\ \ldots,\ k_i=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots,\ i=1,\ \ldots,\ n$, образуют базу пространства J_2. Итак, отображение f переводит базу пространства $B_{\aleph_0}$ в базу пространства J_2, следовательно, f — топологическое отображение. Предложение доказано.

Как мы показали, бэровское пространство $B_{\aleph_0}$ имеет вес $\aleph_0$, т. е. обладает счетной базой. Чтобы получить счетное множество, всюду плотное в $B_{\aleph_0}$, обозначим через H_1 множество всех последовательностей вида $(n_1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots)$, где n_1 пробегает все натуральные числа; через H_2 обозначим множество всех последовательностей вида $(n_1, n_2, 1, \ldots, 1, \ldots)$, где n_1 и n_2 пробегают независимо друг от друга множество всех натуральных чисел. Вообще, через H_k обозначим множество всех последовательностей вида

$$(n_1, \ldots, n_k, 1, \ldots, 1, \ldots),$$

где $n_1, \ldots, n_k$ пробегают независимо друг от друга множество всех натуральных чисел. Каждое из множеств H_k счетно; сумма H всех множеств H_k есть счетное множество, всюду плотное в бэровском пространстве $B_{\aleph_0}$.

Обозначим через M_n множество точек плоскости, состоящее из 2^{n-1} точек

$$\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right), \left(\frac{3}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right), \ldots, \left(\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right).$$

Множество E определим как сумму всех множеств M_n $(n=1, 2, \ldots)$. Предельными для множества E являются все точки сегмента $[0; 1]$ оси абсцисс.

Рассмотрим в качестве метрического пространства X множество (лежащее на плоскости R^2), состоящее из всех точек множества E и из всех точек сегмента $[0; 1]$ оси абсцисс. В этом пространстве множество E есть счетное всюду плотное множество.

Любопытно отметить, что множество E есть *минимальное* всюду плотное множество пространства X в том смысле, что всякое множество, всюду плотное в X, содержит все множество E. Читателю предоставляется убедиться в том, что *минимальное всюду плотное множество существует в метрическом пространстое лишь тогда, когда множество всех изолированных точек этого пространства всюду плотно в нем.* В частности, ни в евклидовых R^n, ни в гильбертовом H^τ, ни в бэровском пространствах минимальных всюду плотных множеств не существует: если из любого множества, всюду плотного в одном из поименованных пространств, вычесть конечное число точек, то оставшееся множество будет всюду плотным; можно из любого множества, всюду плотного в евклидовом, гильбертовом или бэровском пространстве, вычесть и некоторое бесконечное множество так, что оставшееся множество будет всюду плотным.

В заключение отметим, что почти все рассмотренные в этом параграфе метрические пространства, а именно: евклидовы пространства R^n произвольного числа измерений, гильбертово пространство R^∞, пространство C непрерывных функций на отрезке $[0; 1]$, бэровское пространство $B_{\aleph_0}$ — являются пространствами со счетной базой. В самом деле, все вышеуказанные пространства сепарабельны, следовательно, в силу теоремы 19 § 4 все они имеют счетный вес.

§ 7. Пространства со счетной базой

Пространства, имеющие счетную базу, т. е. пространства счетного веса, образуют один из важнейших классов топологических пространств, особенно часто встречающийся в приложениях. Мы видели, что такие важные для всей математики пространства, как евклидовы пространства любого числа измерений, гильбертово пространство, пространство C всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[0; 1]$, пространство Бэра $B_{\aleph_0}$ и ряд других пространств, являются пространствами со счетной базой. Мы уже знаем, что всякое пространство со счетной базой сепарабельно, т. е. содержит некоторое счетное всюду плотное множество. Докажем теперь следующее предложение:

Теорема 28. *Если в X имеется счетное всюду плотное множество, то всякая система S попарно не пересекающихся открытых множеств пространства X конечна или счетна.*

Так как каждая изолированная точка пространства X образует открытое множество, то в теореме 28 содержится

Теорема 29. *Если в X имеется счетное всюду плотное множество, то множество всех изолированных точек пространства X конечно или счетно.*

Доказательство теоремы 28. Пусть в X имеется всюду плотное счетное множество M. Ставя в соответствие каждому открытому множеству $\Gamma \in S$ некоторую определенную из содержащихся в нем точек множества M, получим взаимно однозначное соответствие между множеством S и некоторым подмножеством множества M, чем и доказано, что S конечно или счетно.

Примеры метрических пространств, не содержащих никакого счетного всюду плотного множества. 1. Обозначим через R какое-нибудь несчетное множество (о природе элементов которого не делаем никаких предположений). Для любых двух элементов $x \in R$, $y \in R$ полагаем $\rho(x, y) = 1$. Это определение расстояния превращает множество R в метрическое пространство, все точки которого изолированы в R. Поэтому единственное множество, всюду плотное в R, есть само R, которое, по предположению, несчетно.

2. Пусть R^2 — обыкновенная числовая плоскость, обычное расстояние между точками z, z' которой будем, как всегда, обозначать через $\rho(z, z')$. Пусть o — начало координат. Положим теперь для любых двух точек $z \in R^2$, $z' \in R^2$

$$\rho'(z, z') = \rho(z, z'),$$

если прямая zz' проходит через o, и

$$\rho'(z, z') = \rho(z, o) + \rho(o, z'),$$

если прямая zz' не проходит через o. Множество точек плоскости R^2 с расстоянием ρ' между ними есть метрическое пространство R. Если на какой-нибудь прямой, проходящей через o, возьмем множество всех точек, отличных от точки o, то это множество будет открыто. Значит, в пространстве R имеется несчетное множество попарно не пересекающихся открытых множеств и, следовательно, нет никакого счетного всюду плотного множества.

Вспомним, что точка a называется точкой конденсации множества M в пространстве X, если каждая окрестность точки a содержит несчетное множество точек множества M. Очевидно, что только несчетные множества могут иметь точки конденсации и что каждая точка конденсации и подавно является предельной точкой.

Имеет место следующая замечательная теорема, впервые доказанная Линделефом:

Первая теорема Линделефа. *Пусть M — множество, лежащее в пространстве со счетной базой. Тогда точки множества M, не являющиеся точками конденсации этого множества, образуют конечное или счетное множество.*

Доказательство. Прежде всего замечаем: если

$$S = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots\}$$

— какая-нибудь определенная счетная база пространства X, то, для того чтобы точка x была точкой конденсации множества M, необходимо и достаточно, чтобы каждая S-окрестность *) точки x содержала несчетное множество точек из M.

Итак, если x не есть точка конденсации множества M, то существует S-окрестность точки x, содержащая не более счетного множества точек из M. Выберем для каждой точки x множества M, не являющейся точкой конденсации этого множества, S-окрестность, содержащую не более счетного множества точек из M. Так как всех S-окрестностей — счетное множество, то число отобранных окрестностей и подавно не более чем счетно. В каждой из этих окрестностей помещается не более счетного множества точек из M; значит, не более чем счетно будет и множество всех точек множества M, попавших в сумму отобранных S-окрестностей. Так как каждая точка множества M, не являющаяся точкой конденсации, попала хотя бы в одну отобранную окрестность, то теорема доказана.

Теорема 30. *Множество Φ всех точек конденсации любого множества M, лежащего в пространстве со счетной базой, есть совершенное множество, пустое в том и только в том случае, если M не более чем счетно, и несчетное в случае несчетного M. Каждая точка $a \in \Phi$ есть точка конденсации и множества Φ.*

Доказательство. Обозначим через Φ множество всех точек конденсации множества M. Из предыдущей теоремы следует, что Φ в случае несчетного M несчетно; в случае, если M не более чем счетно, Φ, очевидно, пусто. Докажем, что Φ — совершенное множество.

---

*) Под S-окрестностью какой-нибудь точки x мы понимаем окрестность, принадлежащую базе S.

1. *Множество* Φ *замкнуто*. В самом деле, пусть a — точка прикосновения множества Φ. Тогда любая окрестность U точки a содержит некоторую точку $x \in \Phi$; в качестве открытого множества, содержащего точку x, множество U является окрестностью этой точки, а потому содержит несчетное множество точек из M. Так как U — произвольная окрестность точки a, то a есть точка конденсации множества M, т. е. $a \in \Phi$.

2. Докажем, что *каждая точка* $a \in \Phi$ *есть точка конденсации множества* Φ. В самом деле, пусть U — произвольная окрестность точки a. По определению точки a множество $U \cap M$ несчетно; значит, по теореме Линделефа все его точки (за исключением, самое большее, счетного их числа) суть точки конденсации этого множества $U \cap M$, а значит, и подавно точки конденсации множества M, т. е. принадлежат множеству Φ. Итак, любая окрестность точки a содержит не только бесконечное, но даже несчетное множество точек множества Φ.

Теорема 30 доказана.

Следствие. *Всякое замкнутое множество F, лежащее в пространстве со счетной базой, либо не более чем счетно, либо есть сумма несчетного совершенного множества своих точек конденсации и не более чем счетного множества остальных точек.*

В самом деле, обозначая через Φ множество всех точек конденсации множества F, имеем $\Phi \subseteq F$, в то время как $F \setminus \Phi$ по первой теореме Линделефа не более чем счетно.

Вторая теорема Линделефа. *Какова бы ни была несчетная система $\mathfrak{A}$ открытых множеств G, заданная в пространстве X со счетной базой, в системе $\mathfrak{A}$ можно найти счетную или конечную подсистему $\mathfrak{A}_0$, объединение элементов которой совпадает с объединением элементов системы $\mathfrak{A}$.*

Для доказательства возьмем какую-либо счетную базу

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots \tag{1}$$

пространства X. Элемент Γ_n этой базы назовем «отмеченным», если Γ_n содержится по крайней мере в одном $G \in \mathfrak{A}$. Пусть

$$\Gamma_{n_1}, \Gamma_{n_2}, \ldots, \Gamma_{n_k}, \ldots$$

— все «отмеченные» элементы база (1). Каждое Γ_{n_k} содержится, вообще говоря, в нескольких (возможно, и в бесконечно многих) различных $G \in V$; выберем для каждого «отмеченного» Γ_{n_k} вполне определенное содержащее его $G \in V$, которое обозначим через G_k. Получим не более чем счетную подсистему

$$G_1, G_2, \ldots, G_k \tag{2}$$

системы V. Мы утверждаем, что сумма всех множеств (2) равна сумме всех вообще множеств $G \in V$. Достаточно показать, что, какова бы ни была точка x, принадлежащая какому-нибудь $G \in V$, найдется в (2) множество G_k, содержащее точку x. Но, в самом деле, если $x \in G$, то (так как G открыто, а (1) есть база) существует Γ_n, содержащее x и содержащееся в данном G. Тогда Γ_n по самому определению есть отмеченный элемент базы (1) и, следовательно, содержится в некотором G_k из последовательности (2). Это G_k содержит и точку x, что и требовалось доказать.

Теорема 31 (Бэр—Хаусдорф). *Всякая вполне упорядоченная возрастающая или убывающая система множеств, которые либо все замкнуты, либо все открыты в пространстве X со счетной базой, содержит не более счетного числа различных элементов.*

Доказательство опирается на следующую лемму:

Лемма. *Вполне упорядоченная строго возрастающая (строго убывающая) система множеств*

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_\alpha \subset \ldots$$

(соответственно $M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_\alpha \supset \ldots$), состоящих из натуральных чисел, не более чем счетна.

В самом деле, пусть

$$x_\alpha \in M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha, \text{ соответственно } x_\alpha \in M_\alpha \setminus M_{\alpha+1}.$$

Если бы система всех M_α была несчетной, то мы имели бы несчетное множество попарно различных натуральных чисел x_α, чего не может быть.

Докажем теперь теорему Бэра—Хаусдорфа. Достаточно доказать ее утверждение, касающееся вполне упорядоченных возрастающих и убывающих систем открытых множеств: переход к дополнительным множествам даст утверждения, касающиеся систем замкнутых множеств. Итак, предположим, что в данной вполне упорядоченной системе открытых множеств имеется несчетная подсистема различных множеств

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_\alpha \subset \ldots, \text{ соответственно } G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_\alpha \supset \ldots$$

Возьмем какую-нибудь счетную базу пространства и раз навсегда занумеруем ее элементы:

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n,\ \ldots$$

Построим теперь для каждого G_α множество M_α, состоящее из всех тех натуральных чисел n, для которых $U_n \subseteq G_\alpha$. Очевидно, из того, что $G_\alpha \subset G_\beta$, следует, что $M_\alpha \subset M_\beta$. Поэтому множества M_α находятся в условиях леммы, и, значит, среди них не может иметься несчетного числа различных множеств. Поэтому и среди множеств G_α не может иметься несчетного числа различных множеств. Теорема Бэра—Хаусдорфа этим доказана.

Та же теорема может быть высказана и следующим образом (мы приводим лишь формулировку, касающуюся убывающих систем замкнутых множеств, предоставляя остальные три формулировки читателю):

Теорема 31.' *Какова бы ни была вполне упорядоченная убывающая система замкнутых множеств пространства X со счетной базой, занумерованных всеми порядковыми числами первого и второго классов:*

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_\alpha \supseteq \ldots, \quad \alpha < \omega_1, \tag{3}$$

найдется такое α, что все множества (3), *начиная с α-го, совпадают между собой:*

$$F_\alpha = F_{\alpha+1} = F_{\alpha+2} = \ldots$$

Доказательство от противного. Если такого α нет, то для каждого $\alpha < \omega_1$ можно найти наименьшее такое $\beta(\alpha)$, $\alpha < \beta(\alpha) < \omega_1$, что $F_\alpha \neq F_{\beta(\alpha)}$ и, следовательно, $F_\alpha \supset F_{\beta(\alpha)}$. Положим теперь $\nu_0 = 0$ и предположим, что для всякого порядкового числа ζ, меньшего чем некоторое $\alpha < \omega_1$, построено порядковое число $\nu_\zeta < \omega_1$, так что при $\zeta < \zeta' < \alpha$ имеем $\nu_\zeta < \nu_{\zeta'}$ и $F_{\nu_\zeta} \supset F_{\nu_{\zeta'}}$. Для построения числа ν_α обозначим через α' наименьшее число $< \omega_1$, большее чем все $\nu_\zeta, \zeta < \alpha$, и положим $\nu_\alpha = \beta(\alpha') > \alpha'$. Тогда $F_{\nu_\alpha} \subset$

$$\subset F_{\alpha'} \subseteq \bigcap_{\gamma<\alpha} F_\gamma \subset \bigcap_{\zeta<\alpha} F_{\nu_\zeta}, \text{ т. е. } F_{\nu_\alpha} \subset F_{\nu_\zeta} \text{ для любого } \zeta < \alpha.$$

Таким образом, для любого $\alpha < \omega_1$ строится ν_α так, что множества F_{ν_χ}, число которых несчетно ($=\aleph_1$), все различны между собою в противоречии с теоремой 31. Теорема 31' этим доказана.

Пусть теперь E — произвольное множество, лежащее в пространстве со счетной базой. Обозначим через $E^{(1)}$ производную множества E (т. е. множество всех предельных точек этого множества). Если дано $E^{(\alpha)}$, то определяем $E^{(\alpha+1)}$ как производную множества $E^{(\alpha)}$. Если β — предельное трансфинитное число второго класса, то обозначаем через $E^{(\beta)}$ пересечение всех $E^{(\alpha)}$, $\alpha < \beta$. Определенное таким образом для любого порядкового числа $\alpha < \omega_1$ замкнутое множество $E^{(\alpha)}$ называется производной порядка α от множества E. Множества $E^{(\alpha)}$ образуют вполне упорядоченную систему убывающих замкнутых множеств и потому, начиная с некоторого $\alpha < \omega_1$, совпадают между собою. Очевидно, множество $E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)}$ есть совершенное множество. Итак, имеет место

Теорема 32 (Кантор — Бендиксон). *Для каждого множества E, лежащего в пространстве со счетной базой, имеется первое такое порядковое число $\alpha < \omega_1$, что производная α-го порядка множества E есть совершенное множество (быть может, пустое), т. е. $E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)} = \ldots$*

Из первой теоремы Линделефа при этом следует, что $E^{(\alpha)}$ может быть пустым лишь в случае не более чем счетного E. В случае же несчетного E множество $E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)} = \ldots$ есть несчетное совершенное множество (содержащее множество всех точек конденсации множества E).

Пространства со счетной базой допускают дальнейшие теоремы, касающиеся мощностей различных систем множеств. Прежде всего, докажем следующее утверждение:

Теорема 33_G. *Множество всех открытых множеств данного пространства X со счетной базой не превышает мощности* $\mathfrak{c}$.

В самом деле, пусть

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots \tag{4}$$

— база пространства X. Каждому открытому множеству G однозначно соответствует подпоследовательность последовательности (4), состоящая из всех Γ_n, содержащихся в G. Двум различным открытым множествам соответствуют различные подпоследовательности, так как если G и G' различны, то существует точка x, принадлежащая одному из этих множеств, например G, и не принадлежащая другому; но тогда существует и окрестность Γ_n точки x, лежащая в G, но не лежащая в G'. Итак, установлено взаимно однозначное соответствие между всеми открытыми множествами пространства X и некоторыми последовательностями натуральных чисел (номеров элементов Γ_n последовательности (4)). Этим и доказано, что мощность множества всех открытых множеств пространства X не превосходит $\mathfrak{c}$.

Так как переход от открытого множества к его дополнению осуществляет взаимно однозначное отображение множества всех открытых множеств пространства X на множество всех замкнутых множеств этого пространства, то из теоремы 33_G следует

Теорема 33_F. *Мощность множества всех замкнутых множеств пространства со счетной базой не превосходит* $\mathfrak{c}$.

Из теоремы 33_F вытекает

Следствие. *Пусть в пространстве X все одноточечные множества замкнуты* (*такие пространства называются T_1-пространствами* (см. § 8)). *Если при этом пространство X имеет счетную базу, то мощность множества всех его точек не превосходит* $\mathfrak{c}$.

Так как евклидово пространство любого числа измерений, а также гильбертово пространство являются пространствами со счетной базой, то теоремы 33_F и 33_G применимы, в частности, и к евклидовым, и к гильбертову пространствам. Однако так как и в евклидовых пространствах, и в гильбертовом пространстве, и в фундаментальном параллелепипеде гильбертова пространства содержатся прямолинейные отрезки, например отрезок $\left[0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2}\right]$, $x_2 = x_3 = \ldots = 0$, то мощность каждого из поименованных пространств по теореме Кантора—Бернштейна в точности равна $\mathfrak{c}$. Так как в множестве всех замкнутых множеств данного пространства содержится, в качестве подмножества, множество всех точек этого пространства, то множество всех замкнутых множеств, лежащих в евклидовом пространстве любого числа измерений, а также в гильбертовом пространстве и в его фундаментальном параллелепипеде, имеет мощность $\mathfrak{c}$.

Итак:

Теорема 34. *Мощность n-мерного евклидова пространства при любом n, мощность гильбертова пространства и его фундаментального параллелепипеда, а также мощность множества всех замкнутых, равно как и мощность множества всех открытых, множеств, лежащих в каждом из этих пространств, равны* $\mathfrak{c}$.

Заметим, что первые два утверждения теоремы 34 могут быть легко доказаны непосредственно, что мы и рекомендуем сделать читателю.

Вспомним, наконец, что пространство всех непрерывных функций, определенных на сегменте $[0; 1]$ (или любом другом сегменте), есть пространство со счетной базой (см. § 6) и, следовательно, имеет мощность $\leqslant \mathfrak{c}$. Так как в числе непрерывных функций имеются, в частности, все константы, то заключаем, что множество всех непрерывных функций, определенных на каком-либо сегменте, имеет мощность $\mathfrak{c}$. Этот факт также легко доказать непосредственно (пользуясь тем, что всякая непрерывная функция вполне определена ее значениями в точках какого-либо всюду плотного множества, например ее значениями в рациональных точках).

§ 8. Аксиомы отделимости

Та общность, с которой мы ввели понятие топологического пространства, и возможность в столь общих предположениях определить основные понятия теории точечных множеств имеют во многих случаях принципиальное значение, а также позволяют внести в изложение топологических свойств точечных множеств простоту и логическую прозрачность. Однако свое полное геометрическое содержание теория множеств получает лишь при постепенном сужении класса топологических пространств, что достигается введением дополнительных условий, которым рассматриваемые пространства должны удовлетворять. Мы уже познакомились с одним из важнейших условий такого рода — с требованием, чтобы пространство имело счетную базу. Однако при всей важности этого, так сказать, «количественного» ограничения оно не исключает все пространства, топология в которых чересчур мало похожа на топологию, скажем, метрических пространств: мы видели, что даже в пространствах, состоящих из конечного числа точек, могут, например, иметься незамкнутые одноточечные множества. С другой стороны, существуют важные классы топологических пространств, не удовлетворяющих аксиомам счетности. Поэтому приходится налагать на топологические пространства требования совсем другой природы — прежде всего так называемые *условия*, или *аксиомы, отделимости*, к которым мы сейчас и обратимся.

«Нулевая» аксиома отделимости, или аксиома Колмогорова, требует, чтобы *из любых двух различных точек x и y по крайней мере одна точка имела окрестность, не содержащую другую точку*. Топологические пространства, удовлетворяющие нулевой аксиоме отделимости, называются *T_0-пространствами*. Можно с уверенностью сказать, что топологические пространства, не являющиеся T_0-пространствами (например, слипшееся двоеточие (см. стр. 103)), едва ли представляют интерес для исследования. Поэтому в дальнейшем под топологическим пространством мы всегда будем понимать T_0-пространство.

В качестве содержательного и важного результата, касающегося T_0-пространств во всей их общности, приведем следующую теорему:

Теорема Пономарева. *Среди всех T_0-пространств пространства с первой аксиомой счетности и только они являются образами метрических пространств при (непрерывных) открытых отображениях.*

Начнем со следующей очевидной леммы:

Лемма 1. *Пусть f — однозначное отображение пространства X на пространство Y. Если для любой точки $x \in X$ некоторая база $\mathfrak{B}_x$ этой точки переходит в базу точки $fx \in Y$, то отображение f непрерывно и открыто. Обратно, при открытом непрерывном отображении $f\colon X \to Y$ всякая база всякой точки $x \in X$ переходит в базу точки $fx \in Y$.*

Из этой леммы сразу следует, что при открытом непрерывном отображении первая аксиома счетности сохраняется. Отсюда вытекает одно из двух утверждений теоремы Пономарева, т. е. что только пространства с первой аксиомой счетности могут быть образами метрических пространств при (непрерывных) открытых отображениях.

Переходим к доказательству второго утверждения теоремы.

Пусть X — какое-нибудь T_0-пространство с первой аксиомой счетности, имеющее вес τ. Возьмем какую-нибудь базу $\mathfrak{B} = \{U_\alpha\}$ мощности τ пространства X. В бэровском пространстве B_τ (построенном на том же множестве индексов, что и база $\mathfrak{B}$) назовем точку $\xi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ отмеченной, если множества $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}, \ldots$ образуют базу некоторой (и тогда, очевидно, единственной) точки $x = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n} \in X$. Множество всех отмеченных точек пространства B_τ обозначим через W; каждой точке $\xi \in W$

соответствует та — единственная — точка $x = f\xi \in X$, для которой $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}, \ldots\}$ является базой и которая может быть записана в виде

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n}.$$

Таким образом определенное отображение $f\colon W \to X$ называется стандартным. Это отображение есть отображение на все пространство X.

В самом деле, возьмем какую-нибудь точку $x \in X$ и какую-нибудь счетную базу $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}, \ldots\}$ этой точки в пространстве X, составленную из элементов базы $\mathfrak{B}$. Тогда точка $\xi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\} \in B_\tau$ — отмеченная и $f\xi = x$.

Очевидно, и множество W, и его стандартное отображение f полностью определены заданием базы $\mathfrak{B}$ пространства X. Докажем, что

$$f(W \cap O_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}) = U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}\,^{*)}. \tag{1}$$

Включение $f(W \cap O_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}) \subseteq U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$ непосредственно следует из определения отображения f. Для доказательства обратного включения возьмем какую-нибудь точку $x \in U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$ и дополним окрестности $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ этой точки какими-нибудь окрестностями $U_{\alpha_{n+1}}, \ldots$ (взятыми из $\mathfrak{B}$) до базы точки x в X. Тогда, полагая $\xi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots)$, получим, очевидно, $f\xi = x$. Из равенства (1) в силу леммы 1 следует открытость и непрерывность отображения f. Теорема полностью доказана.

Усилением нулевой аксиомы отделимости является **первая аксиома отделимости**, требующая, чтобы *для любых двух различных точек x и y существовала окрестность точки x, не содержащая точку y, и окрестность точки y, не содержащая точку x*. Докажем, что *первая аксиома отделимости равносильна требованию, чтобы каждое множество, состоящее лишь из одной точки, было замкнуто*. В самом деле, если в топологическом пространстве выполнена первая аксиома отделимости, то никакая точка y, отличная от данной точки $x \in X$, не является точкой прикосновения одноточечного множества $\{x\}$ (так как имеется окрестность $U(y)$, не содержащая точку x). Поэтому замыкание одноточечного множества $\{x\}$ содержит лишь эту точку x. Обратно, если все одноточечные множества замкнуты, то, каковы бы ни были точки x и y пространства X, открытое множество $X \setminus y$ есть окрестность точки x, не содержащая точку y, а открытое

*) Множества $O_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ определены в § 6.

множество $X \setminus x$ есть окрестность точки y, не содержащаяся точку x.

Пространства, удовлетворяющие первой аксиоме отделимости, называются *T_1-пространствами*. Примером T_0-пространства, не являющегося T_1-пространством, может служить связное двоеточие.

Важно отметить следующий факт:

Пусть M — множество, лежащее в T_1-пространстве X. Всякая точка прикосновения x множества M есть либо предельная точка множества M (принадлежащая или не принадлежащая множеству M), либо точка множества M, изолированная в этом множестве *).

В самом деле, пусть $x \in [M]$ и пусть существует окрестность $U(x)$ точки x, содержащая лишь конечное число точек множества M. Обозначим через $x_1, \ldots, x_s$ лежащие в $U(x)$ точки множества M, отличные от самой точки x. Так как одноточечные множества в X замкнуты, то, вычитая из $U(x)$ конечное множество $\{x_1, \ldots, x_s\}$, получим окрестность $U_1(x)$ точки x, не содержащую ни одной точки множества M, отличной от точки x. Но так как $x \in [M]$, то $U_1(x) \cap M$ все же непусто и, следовательно, $x \in M$. При этом открытое в M множество $M \cap U_1(x)$ состоит из одной лишь точки x. Наше утверждение доказано. Из всего следует, что *замкнутые множества в T_1-пространстве X могут быть определены как множества, содержащие все свои предельные точки.*

Замечание 1. *Если T_1-пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то для каждой точки прикосновения x множества M можно найти сходящуюся к точке x последовательность точек x_n этого множества* (достаточно взять $x_n \in M \cap U_n(x)$, где $U_n(x)$ — элементы счетной локальной базы в точке x). *При этом, если x есть предельная точка множества M, то все точки x_n могут быть предположены различными.*

Вторая, или хаусдорфова, аксиома отделимости заключается в требовании, чтобы *любые две различные точки x и y топологического пространства X имели непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(y)$*. Пространства, удовлетворяющие этому требованию, называются *T_2-пространствами* или *хаусдорфовыми пространствами*.

Пример нехаусдорфова T_1-пространства X можно получить, взяв множество X, состоящее из всех действительных чисел и еще какого-нибудь отличного от них всех элемента ξ произвольной природы. Открытыми в X объявляются, во-первых, все открытые на числовой прямой множества, во-вторых, все множества вида $X \setminus D$, где D — произвольные конечные множества действительных чисел. Легко проверить, что множество X с этой

*) Напоминаем, что изолированность точки x в множестве M означает, что множество, состоящее из одной точки x, открыто в M.

топологией есть T_1-пространство. Это пространство не удовлетворяет хаусдорфовой аксиоме отделимости: какова бы ни была точка $x \in X$, $x \neq \xi$, любые две окрестности $U(\xi)$ и $U(x)$ пересекаются (так как $U(\xi)$ содержит все действительные числа, кроме, быть может, некоторого конечного их множества, тогда как $U(x)$ есть открытое множество на числовой прямой и, значит, содержит целый интервал).

Назовем *регулярным пространством* такое T_1-пространство, в котором для любой точки x и любого не содержащего эту точку замкнутого множества F существуют дизъюнктные окрестности Ox и OF. Всякое регулярное пространство, очевидно, хаусдорфово.

Для получения примера нерегулярного хаусдорфова пространства рассмотрим множество R всех действительных чисел и определим в R топологию при помощи системы окрестностей (см. § 4) следующим образом: окрестности всех точек $x \neq 0$ те же, что и на числовой прямой; окрестности точки $x = 0$ получаются вычитанием из любого содержащего эту точку интервала всех попавших в этот интервал точек вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число. Пространство R хаусдорфово; множество всех точек вида $\frac{1}{n}$ замкнуто в R; всякая окрестность этого замкнутого множества пересекается со всякой окрестностью точки 0.

Дальнейшее сужение класса пространств получим, если будем рассматривать так называемые нормальные пространства: *нормальным пространством* называется такое T_1-пространство X, в котором всякие два непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся окрестности.

Пример регулярного ненормального пространства можно построить следующим образом. Назовем *произведением двух топологических пространств* X и Y произведение двух множеств X и Y (т. е. множество всех пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$), в котором открытыми множествами являются произведения любого открытого $A \subseteq X$ на любое открытое $B \subseteq Y$ и всевозможные суммы таких произведений. Легко доказывается, что произведение двух регулярных пространств есть регулярное пространство. В частности, регулярным пространством является произведение S пространства всех порядковых чисел $\alpha \leqslant \omega_1$ на пространство всех порядковых чисел $\beta \leqslant \omega$. Пространство S, впрочем, есть не только регулярное, но даже нормальное пространство (читателю рекомендуется доказать это утверждение в качестве упражнения). Однако, вычитая из пространства S одну лишь точку (ω_1, ω), получим ненормальное пространство S^*. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим множество X', состоящее из всех точек вида (α, ω), где α — любое порядковое число $< \omega_1$, и множество Y', состоящее из всех точек вида (ω_1, n), где n — любое натуральное число, X' и Y' суть замкнутые в S^* множества без общих точек, любые две окрестности $U(X')$ и $U(Y')$ которых в пространстве S' пересекаются (последнее утверждение читатель также должен сам доказать, опираясь на простые свойства трансфинитных чисел второго класса). Пространство S^*, не будучи нормальным, является регулярным, поскольку всякое подпространство регулярного пространства регулярно.

Теорема 3 § 1 может теперь быть сформулирована так:

Всякое метрическое пространство нормально.

Так как всякое множество, лежащее в каком-нибудь метрическом пространстве, само является метрическим пространством, то метрические пространства могут служить примером так называемых *наследственно нормальных пространств*, понимая под наследственно нормальным такое нормальное пространство, всякое подмножество которого нормально; наоборот, пространство S, будучи нормальным, не является наследственно нормальным, так как содержит в качестве подмножества ненормальное пространство S^*.

Важнейшим подклассом класса наследственно нормальных пространств являются так называемые совершенно нормальные пространства.

Определение 10. Нормальное пространство X называется *совершенно нормальным*, если всякое замкнутое его подмножество есть G_δ-множество.

Доказательство наследственной нормальности совершенно нормальных пространств можно найти в книге Александрова — Пасынкова [1], гл. 1, § 5.

Теоремы 3 и 4 § 1 могут быть теперь объединены следующим образом:

Теорема 35. *Всякое метрическое пространство совершенно нормально.*

Теорема 36. *Всякое упорядоченное пространство нормально.*

Доказательство. Пусть A и B — дизъюнктные замкнутые подмножества упорядоченного пространства X. Рассмотрим открытое множество $W = X \setminus B$. По теореме 13 § 5 гл. 1 множество W распадается в дизъюнктную сумму порядковых компонент W_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, которые в данном случае, очевидно, открыты. Покажем, что для всякого $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует такое открытое множество U_α, что

$$A \cap W_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq [U_\alpha] \subseteq W_\alpha. \qquad (2)$$

Если $A \cap W_\alpha = \Lambda$, то положим $U_\alpha = \Lambda$. Пусть теперь $A \cap W_\alpha \neq \Lambda$. Множество $X \setminus W_\alpha$ распадается в сумму двух порядково выпуклых компонент C и D (при этом $x < y$ для $x \in C$ и $y \in D$). Построим такое открытое множество U_α^+, что

$$A \cap W_\alpha \subseteq U_\alpha^+ \subseteq [U_\alpha^+] \subseteq X \setminus C.$$

Возможны три случая.

1°. В множестве $X \setminus C$ существует наименьший элемент $a \in W_\alpha$. Тогда в множестве C существует наибольший элемент b, поскольку в противном случае найдется интервальная окрестность Oa точки a, содержащаяся в W_α и не пересекающаяся с C, чего не может быть. Полагаем $U_\alpha^+ = (b;\ +\infty)$. Множество U_α^+ искомое, поскольку $[U_\alpha^+] = U_\alpha^+ \supset W_\alpha$.

2°. В множестве $X \setminus C$ не существует наименьшего элемента, а в множестве C существует наибольший элемент a. В этом случае $a \in B$, поскольку в противном случае существует интервальная окрестность Oa, содержащаяся в W и не пересекающаяся с W_α, т. е. $Oa \subseteq W_\alpha$, что противоречит дизъюнктности множеств C и W_α. Поскольку $a \in B$, существует интервальная окрестность $(b;\ c)$ точки a, не пересекающаяся с A. Интервал $(a;\ c)$ непуст, так как в множестве $X \setminus C$ нет наименьшего элемента. Берем какую-нибудь точку $d \in (a;\ c)$ и полагаем $U_\alpha^+ = (d;\ +\infty)$. Имеем

$$A \cap W_\alpha \subseteq [c;\ +\infty) \subseteq (d;\ +\infty) = U_\alpha^+ \subseteq [U_\alpha^+] \subseteq [d;\ +\infty) \subseteq X \setminus C.$$

3°. Сечение $\{C,\ X \setminus C\}$ является щелью. В этом случае множества C и $X \setminus C$ открыто-замкнуты и можно положить $U_\alpha^+ = X \setminus C$.

Аналогичным образом, отправляясь от сечения $\{X \setminus D,\ D\}$, строим такое открытое множество U_α^-, что

$$A \cap W_\alpha \subseteq U_\alpha^- \subseteq [U_\alpha^-] \subseteq X \setminus D.$$

Теперь полагаем $U_\alpha = U_\alpha^- \cap U_\alpha^+$. Условие (2) очевидным образом выполнено.

Положим теперь $U = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha$ и $V = X \setminus [U]$. Открытые множества U и V дизъюнктны и $A \subseteq U$. Покажем, что $B \subseteq V$ или, что то же самое, $[U] \cap B = \Lambda$. Предположим, что $[U] \cap B \neq \Lambda$, и возьмем некоторую точку $x \in [U] \cap B$. Тогда либо всякий интервал вида $(a;\ x)$, либо всякий интервал вида $(x;\ b)$ пересекается с множеством U (не исключено, что имеют место оба случая одновременно). Пусть для определенности $(a;\ x) \cap U \neq \Lambda$ для всякого $a < x$. Пусть Ox — произвольная интервальная окрестность точки x. Существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$, что $\Lambda \neq U_\alpha \subseteq Ox$. В самом деле, в противном случае, ввиду порядковой выпуклости множеств U_α и условия $x \notin [U_\alpha]$, найдется такое $a < x$, что $(a;\ x) \cap U_\alpha = \Lambda$ для всякого $\alpha \in \mathfrak{A}$. Но если $\Lambda \neq U_\alpha \subseteq Ox$, то $Ox \cap A \neq \Lambda$. Следовательно, $x \in [A] = A$, что противоречит дизъюнктности множеств A и B. Теорема 36 доказана.

Замечание 2. Пусть X — упорядоченное пространство, а Y — некоторое его подмножество. На подмножестве Y имеется порядок, наследуемый из X. Поэтому множество Y можно рассматривать как упорядоченное пространство. При этом оказывается, что порядковая топология на множестве Y не обязана совпадать с топологией, индуцированной на множестве Y топологией пространства X, т. е. подпространство упорядоченного пространства, вообще говоря, не является упорядоченным пространством.

Проиллюстрируем это на следующем примере: пусть X — это отрезок $[-1; 1]$ числовой прямой, а Y состоит из точки $\{-1\}$ и полусегмента $(0; 1]$. Тогда точка $\{-1\}$ является изолированной в Y, как в подпространстве пространства X. В то же время в порядковой топологии на множестве Y последовательность $\left\{\frac{1}{n}: n=1, 2, \ldots\right\}$ сходится к точке $\{-1\}$.

Но несмотря на то, что свойство быть упорядоченным пространством не является наследственным, *упорядоченные пространства наследственно нормальны*. Это вытекает из нормальности всякого замкнутого подпространства нормального пространства и следующего утверждения, доказательство которого предоставляется читателю:

Для всякого подмножества Y упорядоченного пространства X существует такое упорядоченное пространство Z, которое содержит Y в качестве замкнутого подпространства. При этом можно считать, что $Z \subseteq X$.

Одной из интереснейших проблем теории топологических пространств является установление необходимых и достаточных условий для того, чтобы топологическое пространство было, как говорят, *метризуемо*, т. е. гомеоморфно некоторому метрическому пространству. Из сказанного выше следует, что необходимым условием метризуемости топологического пространства является его нормальность *). Однако это условие недостаточно: можно легко доказать, что, например, пространство $W(\omega_1)$ всех порядковых чисел $< \omega_1$ нормально **), между тем оно (как будет доказано в гл. 5) не метризуемо. Тем более замечательна следующая теорема Урысона, полностью решающая задачу метризации в применении к пространствам со счетной базой:

Первая метризационная теорема Урысона. *Для того чтобы топологическое пространство со счетной базой было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормально.*

---

*) Даже совершенная нормальность.

**) Будучи упорядоченным, оно даже наследственно нормально и, кроме того, удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Доказательство этой теоремы опирается на другое важное предложение, доказанное П. С. Урысоном и известное под названием «большой» леммы Урысона:

Большая лемма Урысона. *Пусть A и B — два замкнутых непересекающихся множества нормального пространства X. Для любых двух действительных чисел a, b, $a < b$, существует действительная непрерывная функция $f_{a,b}$, определенная во всем пространстве X, принимающая значение a во всех точках множества A, значение b во всех точках множества B и удовлетворяющая всюду в X неравенству*

$$a \leqslant f_{a,b}(x) \leqslant b.$$

Если одно из двух множеств, скажем A, пусто, то достаточно положить $f(x) = b$ для любого $x \in X$. Остается рассмотреть случай, когда ни одно из множеств A, B не пусто. При этом можно предположить, что $a = 0$, $b = 1$, так как $f_{a,b}(x)$ (для любых a, b) получается из $f_{0,1}(x)$ посредством формулы

$$f_{a,b}(x) = (b - a)\, f_{0,1}(x) + a.$$

Дальнейшие рассуждения и будут вестись в предположении $a = 0$, $b = 1$. Они опираются на следующую так называемую «малую» лемму Урысона:

Малая лемма Урысона. *Если X нормально и A замкнуто в X, то к любой окрестности $U(A)$ множества A можно найти такую окрестность $U_0(A)$ множества A, что $[U_0(A)] \subseteq U(A)$.*

В частности, в любой окрестности $U(x)$ любой точки x нормального пространства содержится замыкание $[U_0(x)]$ некоторой окрестности $U_0(x)$ той же точки x. Легко доказать, что последнее свойство выполнено не только в нормальных, но и в регулярных пространствах и характеризует эти последние (т. е. может быть принято за определение регулярности). Подобным же образом малая лемма Урысона в ее общем виде (т. е. для любого замкнутого A) характеризует нормальные пространства.

Характеризует нормальные пространства и большая лемма Урысона. В самом деле, будучи верной для любого нормального пространства, она выражает необходимое условие нормальности. Но это условие и достаточно. Назовем, в самом деле, два дизъюнктных замкнутых множества A и B *функционально отделимыми* (в топологическом пространстве X), если существует определенная на всем X непрерывная функция f, удовлетворяющая условиям $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ во всем X, равная нулю на A и единице на B. Если замкнутые множества A и B функционально отделимы в X, то они имеют дизъюнктные окрестности UA и UB. Действительно, достаточно определить UA и UB как множества всех точек x, в которых $f(x) < \frac{1}{2}$, соответственно $f(x) > \frac{1}{2}$. Итак, *нормаль-*

ные пространства могут быть определены как T_1-пространства, в которых любые два непересекающихся замкнутых множества функционально отделимы.

Очень важен класс T_1-пространств, в которых каждая точка функционально отделима от любого не содержащего эту точку замкнутого множества. Эти пространства, введенные А. Н. Тихоновым, называются *вполне регулярными*.

Простейшим примером вполне регулярных пространств являются индуктивно нульмерные T_1-пространства. В самом деле, пусть в индуктивно нульмерном пространстве X даны точка x и не содержащее эту точку замкнутое множество F. Тогда в окрестности $Ox = X \setminus F$ содержится открыто-замкнутая окрестность $O_1 x$. Функция, равная нулю на $O_1 x$ и единице на $X \setminus O_1 x$, непрерывна и отделяет точку x от множества F.

Вполне регулярные пространства будут подробно исследованы в главе 6.

Для доказательства малой леммы Урысона достаточно взять дизъюнктные окрестности $U_0(A)$ и V замкнутых множеств A и $X \setminus U(A)$; тогда множества $[U_0(A)]$ и V также не имеют общих точек, т. е. $[U_0(A)] \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus (X \setminus U(A)) = U(A)$.

Переходим к доказательству большой леммы Урысона. Полагаем $U(A) = \Gamma_1 = X \setminus B$ и находим по малой лемме окрестность $U_1(A) = \Gamma_0$ такую, что $[\Gamma_0] \subseteq \Gamma_1$. Предположим, что уже построены открытые множества $\Gamma_{\frac{p}{2^n}}$ (для данного натурального n и $p = 0, 1, \ldots, 2^n$) так, что при $p < p'$ имеем $\left[\Gamma_{\frac{p}{2^n}}\right] \subset \Gamma_{\frac{p'}{2^n}}$ (для $n = 0$ это действительно сделано). По малой лемме можно построить открытое $\Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}}$ так, чтобы

$$\left[\Gamma_{\frac{p}{2^n}}\right] \subseteq \Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}} \subseteq \left[\Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}}\right] \subseteq \Gamma_{\frac{p+1}{2^n}}.$$

Отсюда следует, что для всех двоично-рациональных чисел r, т. е. для всех чисел вида $r = \frac{p}{2^n}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, можно построить открытые в X множества Γ_r так, что $A \subseteq \Gamma_0$ и при $r < r'$

$$[\Gamma_r] \subseteq \Gamma_{r'}.$$

Положим теперь для всех остальных t, $0 < t < 1$,

$$\Gamma_t = \bigcup_{r < t} \Gamma_r.$$

Докажем, что всегда

$$[\Gamma_t] \subseteq \Gamma_{t'} \text{ при } t < t'.$$

В самом деле, беря двоично-рациональные r, r' так, чтобы было

$$t < r < r' < t',$$

имеем

$$\Gamma_t \subseteq \Gamma_r, \text{ значит, } [\Gamma_t] \subseteq [\Gamma_r] \subseteq \Gamma_{r'} \subseteq \Gamma_{t'},$$

чем утверждение доказано. Наконец, положим $\Gamma_t = \Lambda$ для $t < 0$ и $\Gamma_t = X$ для $t > 1$.

Построим теперь для каждой точки $x \in X$ некоторое сечение (A^x, B^x) в множестве всех действительных чисел: именно, отнесем число t к нижнему классу A^x, если x не содержится в Γ_t, и к верхнему B^x, если $x \in \Gamma_t$. Это сечение определяет действительное число τ_x, причем, очевидно, $0 \leqslant \tau_x \leqslant 1$. Другими словами, определена функция

$$f_{0,1}(x) = \tau_x$$

во всем пространстве X. При этом $f_{0,1}(x) = 0$ при $x \in A$ и $f_{0,1}(x) = 1$ при $x \in B$. Докажем, наконец, непрерывность функции $f(x)$ в каждой точке $x \in X$. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, рассмотрим окрестность

$$U(x) = \Gamma_{\tau_x + \varepsilon} \diagdown [\Gamma_{\tau_x - \varepsilon}]$$

точки x. Тогда по самому определению этой окрестности имеем для всех ее точек $x' \in U(x)$

$$\tau_x - \varepsilon < \tau_{x'} < \tau_x + \varepsilon,$$

т. е. $|f_{0,1}(x) - f_{0,1}(x')| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Применим теперь большую лемму Урысона к доказательству метризационной теоремы. Так как требуется доказать лишь достаточность условия этой теоремы, то наша цель будет, конечно, достигнута, если мы докажем следующее предложение:

Теорема Урысона (о погружении). *Всякое нормальное пространство со счетной базой гомеоморфно некоторому множеству, лежащему в основном параллелепипеде гильбертова пространства* *).

Доказательство теоремы о погружении. Возьмем какую-нибудь счетную базу S данного нормального пространства X. Пусть

$$U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots$$

---

*) Напомним, что «основной параллелепипед» Q (или «кирпич») гильбертова пространства R^∞ состоит, по определению, из всех точек $y = (t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots) \in R^\infty$, удовлетворяющих (при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$) условию $0 \leqslant t_n \leqslant \frac{1}{2^n}$.

— все элементы базы. Пару (U_i, U_k) назовем канонической, если

$$[U_i] \subseteq U_k.$$

Из малой леммы Урысона вытекает следующее замечание:

Каковы бы ни были точка $a \in X$ и ее окрестность $U(a)$, можно найти каноническую пару (U_i, U_k) такую, что $a \in U_i$, $U_k \subseteq U(a)$. В самом деле, так как S есть база, то существует такой элемент U_k этой базы, что $a \in U_k \subseteq U(a)$; после этого по малой лемме Урысона находим окрестность $U_0(a)$ с замыканием, содержащимся в U_k; наконец, берем элемент U_i базы S, удовлетворяющий условию $a \in U_i \subseteq U_0(a)$. Очевидно, (U_i, U_k) есть искомая каноническая пара.

Канонические пары образуют счетное множество и поэтому могут быть раз навсегда занумерованы в счетную последовательность

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots; \quad \pi_n = (U_i, U_k).$$

Согласно большой лемме Урысона строим для каждой канонической пары $\pi_n = (U_i, U_k)$ непрерывную функцию $\varphi_n(x)$, определенную во всем пространстве X и удовлетворяющую условиям:

$$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant 1 \text{ для любого } x \in X,$$
$$\varphi_n(x) = 0 \text{ для } x \in [U_i],$$
$$\varphi_n(x) = 1 \text{ для } x \in X \diagdown U_k.$$

Отнесем любой точке $x \in X$ последовательность чисел

$$t_n = t_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{2^n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

и поставим ей в соответствие точку

$$y = f(x) = (t_1(x), t_2(x), \ldots, t_n(x), \ldots)$$

гильбертова кирпича Q. Докажем, что полученное отображение f пространства X на некоторое множество $Y \subseteq Q$ есть топологическое отображение. Прежде всего докажем, что отображение f взаимно однозначно. Покажем, другими словами, что для двух различных точек x, x' пространства X точки $f(x)$ и $f(x')$ различны. Для этого возьмем окрестность $U(x)$ точки x, не содержащую точку x', и построим каноническую пару $\pi_n = (U_i, U_k)$, удовлетворяющую условию $x \in U_i$, $U_k \subseteq U(x)$. Тогда $\varphi_n(x) = 0$, $\varphi_n(x') = 1$, т. е. $t_n(x) = 0$, $t_n(x') = \frac{1}{2^n}$, значит, точки $f(x)$ и $f(x')$ (имея различные n-координаты) различны.

Докажем, что отображение f непрерывно. Берем произвольную точку $x \in X$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Очевидно, можем предположить, что $\varepsilon < 1$. Нам надо найти такую окрестность $U(x)$, чтобы для любой точки $x' \in U(x)$ было $\rho(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Для этого выбираем столь большое m, чтобы $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Вследствие непрерывности функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ можно найти такие окрестности $U_1(x), \ldots, U_m(x)$ точки x, что для $x' \in U_i(x)$ будем иметь $|\varphi_i(x)-\varphi_i(x')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ при $i=1, 2, \ldots, m$. Обозначим через $U(x)$ пересечение окрестностей $U_1(x), \ldots, U_m(x)$. Для $x' \in U(x)$ имеем

$$\rho(f(x), f(x')) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}[t_i(x)-t_i(x')]^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} + \sum_{i=m+1}^{\infty}} < \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\frac{1}{2^{2i}} + \sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2i}}} <$$

$$< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i} + \sum_{i=m+1}\frac{1}{2^i}} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon,$$

чем и доказана непрерывность отображения.

Докажем, наконец, непрерывность обратного отображения f^{-1} множества $Y \subseteq Q$ на X. Пусть дана произвольная точка $y \in Y$, и пусть $x = f^{-1}(y)$, т. е. $y = f(x)$. Для произвольной окрестности $U(x)$ требуется подобрать такое $\varepsilon > 0$, чтобы при $y' \in U(y, \varepsilon)$ было $f^{-1}(y') \in U(x)$. Для того чтобы найти нужное нам ε, подбираем сначала такую каноническую пару $\pi_n = (U_i, U_k)$, чтобы было $x \in U_i$, $U_k \subseteq U(x)$. Утверждается, что $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ есть искомое ε.

В самом деле, пусть $y' \in U(y, \varepsilon)$. Докажем, что $x' = f^{-1}(y') \in U(x)$. Но если бы $x' \in X \setminus U(x)$, то и подавно $x' \in X \setminus U_k(x)$, т. е. $\varphi_n(x') = 1$. А так как $x \in U_i(x)$, значит, $\varphi_n(x) = 0$, то мы имели бы

$$t_n(x') - t_n(x) = \frac{1}{2^n}$$

и

$$\rho(y, y') = \rho(f(x), f(x')) \geqslant |t_n(x) - t_n(x')| = \frac{1}{2^n} = \varepsilon,$$

вопреки условию, что $y' \in U(y, \varepsilon)$.

Теорема о погружении полностью доказана.

Этой теореме можно дать такую формулировку:

Для того чтобы топологическое пространство X было гомеоморфно множеству, лежащему в гильбертовом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормально и имело счетную базу.

(В самом деле, мы только что доказали достаточность этого условия; необходимость его очевидна, так как гильбертово пространство, будучи метрическим пространством, имеет счетную базу; значит, и всякое множество, лежащее в гильбертовом пространстве, есть метрическое, т. е. и подавно нормальное пространство со счетной базой.)

Принципиальное значение этой теоремы огромно: она полностью характеризует с топологической стороны множества, лежащие в гильбертовом пространстве, указывая неожиданно короткий путь, по которому можно прийти от самых общих топологических построений — топологических пространств — к совершенно конкретному объекту теории точечных множеств — к множествам, расположенным в гильбертовом пространстве.

Из теоремы о погружении, далее, вытекает:

Все метрические пространства, содержащие счетные всюду плотные множества, и только такие метрические пространства гомеоморфны множествам, лежащим в гильбертовом пространстве.

Из большой леммы Урысона вытекает

Предложение 1. *Во всякой окрестности OF замкнутого подмножества F нормального пространства X содержится F_σ-окрестность O_1F.*

В самом деле, пусть f — непрерывная функция на пространстве X, принимающая значения на отрезке $[0; 1]$, равная 0 на F и 1 на $X \setminus OF$. Положим $O_1F = \{x \in X\colon f(x) < 1\}$. Тогда открытое множество O_1F лежит в OF и является суммой счетного числа замкнутых множеств

$$F_n = \left\{x \in X\colon f(x) \leqslant \frac{n-1}{n}\right\}.$$

Применим теперь большую лемму Урысона к доказательству следующей весьма важной теоремы:

Теорема 37. *Ко всякой ограниченной непрерывной функции φ, заданной на замкнутом множестве Φ нормального пространства X, существует непрерывная во всем пространстве X функция f, совпадающая с φ во всех точках множества Φ* *). *При этом, если μ_0 есть верхняя грань функции $|\varphi|$ на Φ, то функцию f можно подобрать так, что верхней гранью ее абсолютной величины (во всем пространстве X) также будет число μ_0.*

Часто пользуются краткой формулировкой этой теоремы, говоря, что всякая непрерывная функция, заданная на замкнутом

*) Теорема о продолжении непрерывных функций характеризует нормальные пространства (среди всех T_1-пространств): если X ненормально, то существуют два дизъюнктных замкнутых множества A и B, не отделимых функционально; полагая $f=0$ на A, $f=1$ на B, имеем непрерывную функцию f, которая определена на замкнутом множестве $A \cup B$ и не может быть продолжена на все пространство X.

множестве пространства X, может быть непрерывно продолжена на все пространство X.

Доказательство теоремы 37. Полагаем $\varphi_0(x)=\varphi(x)$; эта функция определена лишь на множестве Φ. Пусть $\mu_0>0$ есть верхняя грань функции $|\varphi_0|$. Обозначим через A_0, соответственно B_0, замкнутое множество тех точек множества Φ, в которых $\varphi_0(x)\leqslant-\frac{\mu_0}{3}$, соответственно $\geqslant\frac{\mu_0}{3}$ *). Строим по лемме Урысона непрерывную во всем пространстве X функцию f_0, равную $-\frac{\mu_0}{3}$ на A_0, равную $\frac{\mu_0}{3}$ на B_0 и удовлетворяющую всюду в X неравенству $|f_0|\leqslant\frac{\mu_0}{3}$. Полагаем теперь на Φ

$$\varphi_1(x)=\varphi_0(x)-f_0(x).$$

Функция φ_1 непрерывна на Φ, и верхняя грань μ_1 функции $|\varphi_1|$ удовлетворяет неравенству $\mu_1\leqslant\frac{2}{3}\mu_0$.

Совершенно так же, как мы перешли от φ_0 к φ_1, переходим от φ_1 к φ_2: обозначаем через A_1, B_1 замкнутые множества тех точек множества Φ, в которых $\varphi_1(x)\leqslant-\frac{\mu_1}{3}$, соответственно $\varphi_1(x)\geqslant\frac{\mu_1}{3}$; строим функцию f_1, непрерывную во всем X, равную $-\frac{\mu_1}{3}$ на A_1, и равную $\frac{\mu_1}{3}$ на B_1; полагаем на Φ

$$\varphi_2(x)=\varphi_1(x)-f_1(x).$$

Верхняя грань μ_2 функции $|\varphi_3|$ удовлетворяет неравенству

$$\mu_2\leqslant\frac{2}{3}\mu_1.$$

Таким образом шаг за шагом строим функции

$$\varphi_0=\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n,\ \ldots,$$

непрерывные на Φ, и функции

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots,$$

непрерывные на всем X, причем на Φ имеем

$$\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)-f_n(x). \tag{3}$$

---

*) Одно из множеств A_0, B_0 при этом может оказаться пустым, что, однако, не влияет на дальнейшие рассуждения.

Далее, обозначая через μ_n верхнюю грань функции $|\varphi_n|$, имеем

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{\mu_n}{3}, \quad \mu_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}\mu_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

значит,

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_0, \quad |f_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\mu_0}{3}. \tag{4}$$

Положим теперь

$$s_n(x) = f_0(x) + \ldots + f_n(x).$$

В силу второго из неравенств (4) последовательность

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

равномерно сходится к непрерывной в X функции f, причем

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\mu_0}{3} = \mu_0, \tag{5}$$

так что функция $|f|$ ограничена в X тою же константой μ_0, что и функция $|\varphi|$ на Φ.

Далее, по формуле (3) имеем в любой точке $x \in \Phi$

$$f_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x),$$

значит,

$$s_n(x) = \varphi_0(x) - \varphi_{n+1}(x),$$

и так как в силу первого из неравенств (4) функции φ_{n+1} при $n \to \infty$ стремятся к нулю, то для любого $x \in \Phi$ имеем

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x) = \varphi_0(x) = \varphi(x),$$

чем все доказано.

Применим лемму Урысона к доказательству следующего важного утверждения:

Лемма Веденисова. а) *В нормальном пространстве X всякое замкнутое множество типа G_δ и только такое множество есть множество нулей некоторой непрерывной на X функции.*

б) *В нормальном пространстве X для всякого открытого множества U типа F_σ и только для такого множества существует непрерывная функция $f\colon X \to [0; 1]$ такая, что $U = \{x \in X\colon f(x) > 0\}$.*

Очевидно, что утверждения а) и б) эквивалентны. Докажем утверждение б). Пусть $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества F_n замкнуты. По большой лемме Урысона для всякого $n = 1, 2, \ldots$ существует такая непрерывная функция $f_n\colon X \to \left[0; \frac{1}{2^n}\right]$, что $f_n(F_n)=\frac{1}{2^n}$ и $f_n(X \setminus U)=0$. Положим теперь $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Функция f непрерывна, поскольку она является пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций $\varphi_n=\sum\limits_{m=1}^{n} f_m$. Очевидно, что $f(x)=0$ для всякой точки $x \in X \setminus U$. В то же время, если $x \in U$, то $x \in F_n$ при некотором n. Тогда $f(x) \geqslant f_n(x)=\frac{1}{2^n}>0$. Лемма Веденисова доказана.

§ 9. Ограниченные множества в R^n; теоремы Больцано — Вейерштрасса, Кантора и Бореля — Лебега. Теорема Коши

С ограниченными множествами на числовой прямой мы встречались в главе 2. Множество M, лежащее в евклидовом пространстве, называется *ограниченным*, если оно целиком лежит в некотором шаре (или, что то же самое, в некотором кубе). Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы проекции множества M на каждую координатную ось были ограниченными.

Имеет место следующая фундаментальная теорема:

Теорема 38 (Больцано — Вейерштрасс). *Всякое бесконечное ограниченное множество в евклидовом пространстве* *) *имеет хотя бы одну предельную точку.*

Докажем теорему Больцано — Вейерштрасса для плоских множеств. Доказательство опирается на следующую лемму:

Лемма. *Всякая убывающая последовательность замкнутых прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат и стремятся по длине к нулю, имеет пересечение, состоящее из одной-единственной точки.*

В самом деле, пусть

$$Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq \ldots \supseteq Q_n \supseteq \ldots$$

— данная последовательность прямоугольников. Спроектируем эти прямоугольники на ось абсцисс и на ось ординат. Получим

*) В гильбертовом пространстве теорема Больцано — Вейерштрасса уже не имеет места. В самом деле, бесконечное множество $M=\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, где точка x_m имеет единственную отличную от нуля m-ю координату, которая равна 1, ограничено (его диаметр равен $\sqrt{2}$). В то же время всякая сферическая окрестность радиуса $\sqrt{2}/2$ пересекается не более чем с одной точкой множества M, которое, тем самым, не имеет предельных точек.

последовательность сегментов

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq \ldots$$

на оси абсцисс и последовательность сегментов

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots \supseteq Y_n \supseteq \ldots$$

на оси ординат. Каждая из этих последовательностей имеет, в силу следствия 3 теоремы 10 § 2 гл. 2, пересечение, состоящее из одной точки x_0, соответственно y_0. Точка $\xi_0 = (x_0, y_0)$ плоскости принадлежит всем прямоугольникам Q_n; их пересечение, таким образом, непусто. Если бы это пересечение, кроме точки ξ_0, содержало еще какую-нибудь точку ξ, то, обозначив через d расстояние между точками ξ_0 и ξ и взяв столь большое n, чтобы обе стороны прямоугольника Q_n были меньше $\frac{d}{2}$, мы получили бы противоречие (всякие две точки прямоугольника Q_n имеют расстояние $< 2\frac{d}{2} = d$, а потому точки ξ_0 и ξ, отстоящие друг от друга на d, не могут в этом прямоугольнике уместиться).

Переходим непосредственно к доказательству теоремы Больцано—Вейерштрасса. Рассмотрим какое-нибудь ограниченное множество E на плоскости. В силу ограниченности множества E существует квадрат Q_0 со сторонами, параллельными осям координат, содержащий все множество E. Разобьем квадрат Q_0 прямыми, параллельными его сторонам, на четыре конгруэнтных между собою квадрата. Так как множество E бесконечно, то по крайней мере один из этих четырех квадратов—назовем его Q_1—содержит бесконечно много точек множества E. Квадрат Q_1 имеет сторону вдвое меньшую, чем сторона квадрата Q_0. Разобьем квадрат Q_1 на четыре равных квадрата прямыми, параллельными сторонам; хотя бы один из этих квадратов—обозначим его через Q_2—содержит бесконечно много точек множества E. Квадрат Q_2 имеет сторону вдвое меньшую, чем сторона квадрата Q_1. Продолжая это рассуждение, получим убывающую последовательность

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \ldots \supset Q_n \supset \ldots$$

квадратов со сторонами, параллельными осям координат, каждый из которых содержит бесконечно много точек множества E, причем сторона Q_{n+1} вдвое меньше стороны Q_n, так что мы находимся в условиях леммы и имеем точку ξ, принадлежащую всем квадратам Q_n.

Покажем, что ξ_0—предельная точка множества E. В самом деле, пусть $U(\xi_0, \varepsilon)$—произвольная окрестность точки ξ_0.

Возьмем n столь большим, чтобы сторона квадрата Q_n была меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Любые две точки этого квадрата отстоят друг от друга на расстояние $< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, откуда следует, что квадрат Q_n, содержа точку ξ_0, целиком лежит в $U(\xi_0, \varepsilon)$. По определению квадрата Q_n в нем содержится бесконечное подмножество множества E, и все это подмножество содержится в $U(\xi_0, \varepsilon)$. Так как ε — произвольно малое положительное число, то ξ_0 есть предельная точка множества E, и теорема Больцано — Вейерштрасса для плоских множеств доказана.

Это же доказательство (даже в несколько упрощенном виде) применимо и к случаю числовой прямой: вместо того, чтобы делить квадрат на четыре равных квадрата, придется отрезок делить пополам. В случае произвольного n-мерного евклидова пространства n-мерный куб придется делить на 2^n равных n-мерных кубов.

Установим ряд важных предложений, являющихся легкими следствиями теоремы Больцано — Вейерштрасса.

Теорема 39. *Если множество всех точек бесконечной последовательности*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

ограничено *), *то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Покажем прежде всего, что из последовательности (1) всегда можно выбрать либо стационарную подпоследовательность (т. е. такую, все элементы которой, начиная с некоторого, совпадают между собою), либо подпоследовательность, состоящую из попарно различных элементов. В самом деле, положим $n_1 = 1$ и будем искать в последовательности (1) первый элемент x_{n_2}, не равный элементу x_{n_1}; если такого элемента нет, то

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = \ldots$$

и вся последовательность (1) стационарна. Если же такой элемент x_{n_2} существует, то ищем первый элемент x_{n_3}, $n_3 > n_2 > n_1$, отличный как от x_{n_1}, так и от x_{n_2}. Продолжая этот процесс, мы либо найдем бесконечную подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_m < \ldots, \tag{2}$$

последовательности (1), состоящую из попарно различных элементов, либо выделим конечное число элементов

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_s}, \tag{3}$$

*) Говорят кратко: «если последовательность (1) ограничена».

обладающих тем свойством, что каждый из элементов последовательности (1) совпадает с одним из элементов (3). В этом втором случае некоторая бесконечная подпоследовательность

$$x_{m_1},\ x_{m_2},\ \ldots,\ x_{m_n},\ \ldots \tag{4}$$

последовательности (1) будет состоять из элементов, которые все равны одному и тому же элементу конечного множества (3).

Подпоследовательность (4), очевидно, стационарна и, следовательно, сходится. Остается рассмотреть случай, когда в (1) имеется бесконечная подпоследовательность (2), состоящая из попарно различных элементов. Эти элементы образуют бесконечное ограниченное множество, имеющее в силу теоремы Больцано—Вейерштрасса предельную точку ξ; выделяя из (2) подпоследовательность, сходящуюся к ξ, убедимся в справедливости теоремы 39.

Теорема 40 (Кантор). *Всякая последовательность непустых ограниченных убывающих замкнутых множеств*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots \tag{5}$$

имеет непустое пересечение.

Доказательство. Выбирая из каждого F_n по точке x_n, получаем ограниченную последовательность (1), из которой, по теореме 39, можно выделить подпоследовательность

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots, \tag{6}$$

сходящуюся к некоторой точке a. Докажем, что точка a принадлежит любому множеству F_n нашей последовательности (5) и, следовательно, пересечению этих множеств. Возьмем какое-нибудь F_n и выделим подпоследовательность последовательности (6), состоящую из тех x_{n_k}, у которых $n_k > n$; эта подпоследовательность (все элементы которой принадлежат F_n) сходится к той же точке a, которая, таким образом оказывается точкой прикосновения множества F_n, а так как F_n замкнуто, то $a \in F_n$, что и требовалось доказать.

Теорема 41 (Борель—Лебег). *Из всякой бесконечной системы Σ интервалов, покрывающей данный сегмент $[\alpha;\ \beta]$, можно выделить конечную подсистему, также покрывающую сегмент $[\alpha;\ \beta]$.*

Мы приводим здесь первоначальное доказательство, принадлежащее самому Лебегу. Ниже будет доказана значительно более общая теорема (§ 1 гл. 5), касающаяся, в частности, и замкнутых ограниченных подмножеств евклидова пространства.

Доказательство. Назовем какую-либо точку $a \in [\alpha;\ \beta]$ отмеченной, если существует конечная подсистема системы Σ, покрывающая сегмент $[\alpha;\ a]$. Обозначим через M множество всех отмеченных точек. Легко видеть, что M непусто (например, $\alpha \in M$). Пусть ξ — верхняя грань множества M. Так как $M \subseteq [\alpha; \beta]$, то $\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta$. Покажем, что $\xi = \beta$. В самом деле, точка ξ содержится в некотором интервале $\Delta = (x'; x'')$ системы Σ; по определению точки ξ в $(x'; x'')$ содержится отмеченная точка x, следовательно, сегмент $[\alpha; x]$ покрыт конечной подсистемой Σ_x системы Σ. Пусть Σ_x состоит из интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$. Тогда система Σ_ξ, состоящая из интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_p, \Delta$, очевидно, покрывает сегмент $[\alpha; \xi]$.

Однако система Σ_ξ покрывает не только сегмент $[\alpha; \xi]$, но даже сегмент $[\alpha; \xi']$, где ξ' — произвольная точка интервала $(\xi; x'')$, так что точка $\xi' > \xi$ оказывается отмеченной, если только $\xi' \in [\alpha; \beta]$. Но это лишь в том случае совместно с определением точки ξ (как верхней грани множества M отмеченных точек, *лежащих на* $[\alpha; \beta]$), если $\xi = \beta$; значит, весь сегмент $[\alpha; \beta]$ покрыт конечной подсистемой $\Sigma_{\xi=\beta}$ системы Σ, и теорема 41 доказана.

Замечание 1. Из теоремы Бореля — Лебега в свою очередь легко выводится теорема Больцано — Вейерштрасса. В самом деле, пусть множество $M \subseteq [a; b]$ не имеет ни одной предельной точки; тогда каждая точка $x \in [a; b]$ имеет окрестность $U(x, \varepsilon_x)$, содержащую лишь конечное число точек x. Система Σ всех этих $U(x, \varepsilon_x)$ покрывает сегмент $[a; b]$ и, значит, по теореме Бореля — Лебега, содержит конечную подсистему

$$U_1, \ldots, U_s,$$

также покрывающую сегмент $[a; b]$. Так как каждое из множеств $M \cap U_1, \ldots, M \cap U_s$ конечно, то и все множество $M = (M \cap U_1) \cup \ldots \cup (M \cap U_s)$ конечно, и теорема Больцано — Вейерштрасса доказана.

Замечание 2. Читателю рекомендуется доказать предложения, получающиеся путем замены в формулировке теоремы Бореля — Лебега сегмента $[\alpha; \beta]$:

1) произвольным ограниченным замкнутым множеством (на прямой);
2) замкнутым квадратом;
3) произвольным замкнутым ограниченным множеством плоскости.

Докажем теперь следующее предложение:

Теорема 42 (принцип сходимости Коши). *Для того чтобы последовательность*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

точек числовой прямой была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для каждого положительного числа ε *можно было найти такое натуральное число* n_ε, *чтобы было*

$$\rho(x_p, x_q) = |x_p - x_q| < \varepsilon$$

для всех p *и* q, *больших чем* n_ε.

Необходимость условия непосредственно следует из определения сходящейся последовательности.

Докажем, что условие достаточно. Обозначим (для $k=1, 2, 3, \ldots$) через E_k множество точек

$$x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots$$

последовательности (1). Очевидно, множество E_1, значит, тем более каждое из множеств E_k ограничено *) и

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots \supseteq E_k \supseteq E_{k+1} \supseteq \ldots$$

Положим

$$\alpha_k = \inf E_k, \quad \beta_k = \sup E_k.$$

На основании теорем 8 и 9 § 2 гл. 2 имеем

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_k \leqslant \ldots,$$
$$\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \beta_3 \geqslant \ldots \geqslant \beta_k \geqslant \ldots,$$

причем $\alpha_k \leqslant \beta_k$. Если $\alpha_k = \beta_k$, то все точки $x_k, x_{k+1}, \ldots$ совпадают, и тогда последовательность (1) сходится к точке $\xi = x_k = x_{k+1} = \ldots$ Если же ни при каком значении k точка α_k не совпадает с β_k, то сегменты $[\alpha_1; \beta_1]$, $[\alpha_2; \beta_2]$, $[\alpha_3; \beta_3]$, ... образуют убывающую последовательность. Докажем, что

$$\lim_{k \to \infty} (\beta_k - \alpha_k) = 0.$$

Для любого данного $\varepsilon > 0$ возьмем n_ε столь большим, чтобы при $p > n_\varepsilon$, $q > n_\varepsilon$ было $|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $k > n_\varepsilon$. Из определения чисел α_k, β_k следует, что можно найти x_p, x_q, $p \geqslant k$, $q \geqslant k$, так, что

$$0 \leqslant x_p - \alpha_k < \frac{\varepsilon}{3}, \quad 0 \leqslant \beta_k - x_q < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда и из $|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{3}$ следует, что $\beta_k - \alpha_k < \varepsilon$, чем наше утверждение доказано.

В силу следствия 3 теоремы 10 § 2 гл. 2 существует единственная точка ξ, принадлежащая всем сегментам $[\alpha_k; \beta_k]$. При этом, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, имеется столь большое k, что $U(\xi, \varepsilon) \supset [\alpha_k; \beta_k]$, так что все точки x_k, x_{k+1}, ... содержатся в $U(\xi, \varepsilon)$. А это и означает, что $\xi = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Определение 11. Последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

*) В самом деле, возьмем, например, $\varepsilon = 1$ и определим для этого ε число n_ε; пусть x_λ — самая левая, а x_μ — самая правая из точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n_\varepsilon+1}$; тогда все множество E_1 лежит на интервале $(x_\lambda - 1; x_\mu + 1)$.

действительных чисел называется *возрастающей*, если

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots,$$

и *убывающей*, если

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots \text{ *)}.$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяются одним названием *монотонных последовательностей.*

Теорема 43. *Всякая монотонная ограниченная последовательность есть последовательность сходящаяся, причем всякая ограниченная возрастающая последовательность сходится к своей верхней грани, а убывающая — к своей нижней грани.*

Доказательства в случае возрастающих и убывающих последовательностей совершенно аналогичны, рассмотрим поэтому лишь случай возрастающих последовательностей. Пусть имеем возрастающую последовательность

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots, \tag{7}$$

и пусть ξ есть верхняя грань множества всех точек, являющихся элементами нашей последовательности. Пусть $(\xi-\varepsilon;\ \xi+\varepsilon)$ — произвольная окрестность точки ξ. Сегмент $\left[\xi-\frac{\varepsilon}{2};\ \xi\right]$ содержит по крайней мере одну точку последовательности (7), пусть, например, точку x_k; так как никакая точка x_n, для которой $n>k$, не лежит влево от x_k и никакая вообще из точек x_n не лежит вправо от ξ, то все точки x_n, $n>k$, лежат на сегменте $\left[\xi-\frac{\varepsilon}{2};\ \xi\right]$, составляющем часть интервала $(\xi-\varepsilon;\ \xi+\varepsilon)$. Итак, какова бы ни была окрестность точки ξ, все x_n, начиная с некоторого, лежат в этой окрестности, а это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$, что и требовалось доказать.

Закончим этот параграф следующим утверждением:

Теорема 44. *Множество всех точек n-мерного евклидова пространства имеет мощность континуума.*

Замечание 3. Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 24″ § 6 гл. 3, согласно которой $\mathfrak{c}^n=\mathfrak{c}$. Но мы дадим здесь элементарное доказательство этого факта. Доказательство будет проведено для плоскости, но оно без труда переносится и на общий случай.

Доказательству предпошлем несколько элементарных фактов. Обозначим через r, φ полярные координаты на плоскости и установим на каждом луче $\varphi=\varphi_0\neq 0$ взаимно однозначное соот-

*) Таким образом, если последовательность является одновременно и возрастающей и убывающей, то все элементы ее равны между собой.

ветствие между множеством всех точек $0 < r < 1$ и множеством всех точек $0 < r < \infty$; на луче $\varphi = 0$ установим взаимно однозначное соответствие между всеми точками $0 \leqslant r < 1$ и всеми точками $0 \leqslant r < \infty$. В результате получится взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех точек открытого круга $r < 1$. Столь же легко установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех точек открытого квадрата $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

Итак, достаточно доказать, что множество Q всех точек (x, y) открытого квадрата $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ имеет мощность континуума. Запишем для этого координаты x, y произвольной точки $(x, y) \in Q$ в виде двоичных дробей, не имеющих единицы в периоде:

$$x = 0,\ x_1x_2x_3\ldots x_n\ldots \quad \left(\text{т. е. } x = \sum_n \frac{x_n}{2^n},\ x_n = {0 \atop 1}\right),$$

$$y = 0,\ y_1y_2y_3\ldots y_n\ldots \quad \left(\text{т. е. } y = \sum_n \frac{y_n}{2^n},\ y_n = {0 \atop 1}\right),$$

и поставим в соответствие точке (x, y) точку

$$t = 0,\ x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots x_ny_n\ldots \quad \left(\text{т. е. } t = \sum_n \left(\frac{x_n}{2^{2n-1}} + \frac{y_n}{2^{2n}}\right)\right)$$

интервала (0; 1). Каждая точка этого интервала, в двоичном разложении которой

$$t = 0,\ t_1t_2t_3\ldots t_n\ldots$$

имеются нули как на местах с произвольно большими нечетными номерами, так и на местах с произвольно большими четными номерами, окажется поставленной, таким образом, в соответствие одной-единственной точке $(x, y) \in Q$, именно точке с координатами

$$x = 0,\ t_1t_3t_5\ldots t_{2n-1},\ \ldots,$$
$$y = 0,\ t_2t_4t_6\ldots t_{2n},\ \ldots$$

Итак, установлено взаимно однозначное отображение квадрата Q на часть интервала (0; 1). С другой стороны, относя каждой точке t этого интервала точку $\left(t, \frac{1}{2}\right)$ квадрата Q, мы получим, очевидно, взаимно однозначное отображение интервала (0; 1) на часть квадрата Q. Следовательно, по теореме 14 § 6 гл. I квадрат Q имеет ту же мощность, что и интервал (0; 1), т. е. мощность континуума, и теорема 44 доказана.

Глава пятая

КОМПАКТНЫЕ И ПОЛНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Компактность в данном пространстве и компактность в себе

Определение 1. Множество M, лежащее в метрическом пространстве X, называется *компактным в пространстве* X, если из каждой бесконечной последовательности точек множества M можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке пространства X. Если выполнено более сильное условие, а именно, что из каждой бесконечной последовательности точек множества M можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества M, то множество M называется *компактным в себе*. Если говорят о компактности какого-либо метрического пространства (которое рассматривается само по себе, а не как множество, лежащее в каком-либо объемлющем пространстве), то, естественно, имеют в виду компактность в себе: метрическое пространство X называется *компактным* или просто *компактом*, если из каждой бесконечной последовательности точек этого пространства можно выделить сходящуюся в этом пространстве подпоследовательность.

Мы говорим, что метрическое пространство X *компактно в точке* $x \in X$ (или имеет точку x своей *точкой локальной компактности*), если у точки x существует окрестность Ux, замыкание $[Ux]_X$ которой есть компакт; пространство называется *локально компактным*, если каждая его точка есть точка локальной компактности.

Всякий компакт, очевидно, обладает свойством локальной компактности. Примером локально компактного пространства, не являющегося компактом, может служить числовая прямая и вообще евклидово пространство любого числа измерений. Гильбертово пространство R^∞ ни в какой своей точке не компактно. В самом деле, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в ε-окрестности любой точки $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ можно найти расходящуюся после-

довательность $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$, где $x_m = \left(a_1, a_2, \ldots \right.$
$\left. \ldots, a_m + \frac{\varepsilon}{2}, a_{m+1}, \ldots \right)$.

Теорема 1. *Множество Γ всех точек локальной компактности произвольного пространства X есть открытое в X, быть может пустое, множество, являющееся локально компактным пространством.*

В самом деле, для любой точки $x \in \Gamma$ существует окрестность Ux (относительно X), замыкание которой $[Ux]_X$ есть компакт. Отсюда сразу следует, что всякая точка $x \in Ux$ есть точка локальной компактности пространства, т. е. $Ux \subseteq \Gamma$; значит, Γ открыто в X. Выбрав окрестность U_1x так, чтобы $[U_1x] \subseteq Ux$, видим, что замыкание окрестности U_1x в Γ совпадает с ее замыканием в X и является компактом, откуда и следует, что Γ есть локально компактное пространство.

Локальную компактность топологических пространств мы будем изучать в § 12 гл. 6.

Определению компактности может быть придана и такая форма:

Множество $M \subseteq X$ называется компактным в пространстве X, если каждое бесконечное подмножество множества M имеет (в пространстве X) хотя бы одну предельную точку.

В самом деле, пусть только что сформулированное условие выполнено. Докажем, что из любой бесконечной последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$

точек множества M можно выделить сходящуюся подпоследовательность. В самом деле, положим $n_1 = 1$ и обозначим через n_2 наименьшее n такое, что точка x_n отлична от x_{n_1}. Такое n нельзя будет найти лишь в случае, если все точки (1) совпадают. Вообще, если $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ уже определены, то обозначим через n_{k+1} наименьшее n такое, что точка x_n отлична от $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$. При этом могут встретиться две возможности:

а) Для некоторого k (может быть, уже и для $k=1$) окажется, что $x_{n_{k+1}}$ построить нельзя, т. е. что каждая точка x_n совпадает с одной из точек $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$; тогда найдется бесконечная подпоследовательность последовательности (1), состоящая из совпадающих между собою точек; эта последовательность сходится, и наше утверждение доказано.

б) Процесс выделения элементов $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$ продолжается бесконечно и приводит к построению бесконечной подпоследовательности

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k} \ldots \tag{2}$$

последовательности (1), состоящей из попарно различных точек, так что (2) является бесконечным подмножеством множества M. Это подмножество имеет, по предположению, предельную точку x_0. Так как метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, то, в силу предложения 1 § 4 гл. 4, из последовательности (2) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке x_0.

Обратно, пусть из каждой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность и дано какое-нибудь бесконечное подмножество M_0 множества M; тогда в множестве M_0 содержится счетное множество M_1, элементы которого можно занумеровать в виде последовательности (1), состоящей, очевидно, из попарно различных точек. Выделяя из этой последовательности сходящуюся подпоследовательность и обозначая через x_0 ее предел, видим, что x_0 есть предельная точка множества M_1, а значит, и множества M. Итак, эквивалентность обоих определений компактности доказана.

В частности, когда M совпадает со всем X, имеем предложение:

Компакты могут быть определены как такие метрические пространства, в которых каждое бесконечное множество имеет хотя бы одну предельную точку.

Так как всякое подмножество ограниченного множества ограничено, то из теоремы Больцано—Вейерштрасса следует, что *всякое ограниченное множество евклидова n-мерного пространства компактно в этом пространстве.*

Пусть ε—какое-нибудь положительное число, а M—множество, лежащее в метрическом пространстве X. Конечное множество точек $a_1, a_2, \ldots, a_s$, лежащих в M, называется *ε-сетью* множества M, если для любой точки $x \in M$ найдется по крайней мере одна точка a_i, отстоящая от x на расстояние $< \varepsilon$. (Пример: пусть M есть обыкновенный квадрат; разобьем его на квадраты $M_1, M_2, \ldots, M_s$, диаметр, т. е. длина диагонали, каждого из которых меньше ε; если в каждом квадрате M_i возьмем по точке a_i, то множество этих точек будет ε-сетью квадрата M.) *Если множество M имеет при некотором данном $\varepsilon > 0$ хотя бы одну ε-сеть, то оно ограничено.* В самом деле, пусть $N_\varepsilon = \{a_1, \ldots, a_s\}$ есть ε-сеть множества M; обозначим через d диаметр множества N_ε, т. е. наибольшее среди чисел $\rho(a_i, a_j)$. Для любых двух точек x и x' множества M найдутся точки a_i, a_j нашей ε-сети такие, что $\rho(x, a_i) < \varepsilon$, $\rho(x', a_j) < \varepsilon$, так что

$$\rho(x, x') \leqslant \rho(x, a_i) + \rho(a_i, a_j) + \rho(a_j, x') < \varepsilon + d + \varepsilon = d + 2\varepsilon,$$

откуда следует, что диаметр множества M не превосходит $d + 2\varepsilon$.

Назовем теперь множество M *вполне ограниченным*, если оно при любом $\varepsilon > 0$ содержит некоторую ε-сеть. Мы только что убедились в том, что всякое вполне ограниченное множество M и подавно является ограниченным, поэтому название выбрано законно. Докажем следующее предложение:

Теорема 2. *Всякое множество M, компактное в каком-либо метрическом пространстве X, вполне ограничено.*

В самом деле, если множество $M \subseteq X$ не вполне ограничено, то существует некоторое $\varepsilon > 0$, при котором M не содержит никакой ε-сети. Возьмем произвольную точку $a_0 \in M$. Так как в M нет ε-сети, то ε-сетью, в частности, не является множество, состоящее из единственной точки a_0; поэтому в M можно найти точку a_1, отстоящую от a_0 на расстояние $> \varepsilon$. Но пара точек a_0,

a_1 также не образует ε-сети множества M; поэтому в M можно найти точку a_2, отстоящую от каждой из точек a_0, a_1 на расстояние $\geqslant \varepsilon$. Продолжая это рассуждение, мы шаг за шагом построим бесконечную последовательность точек

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots, \tag{3}$$

каждая из которых отстоит от всех предшествующих (в последовательности (3)) на расстояние $\geqslant \varepsilon$. Поэтому расстояние между любыми двумя точками последовательности (3) оказывается $\geqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что последовательность (3) не содержит никакой сходящейся подпоследовательности, и теорема 2 доказана.

Так как ограниченные множества евклидова пространства компактны, а компактные множества ограничены (даже вполне), то из доказанного вытекает

Теорема 3. *Для того чтобы множество, лежащее в евклидовом пространстве R^n, было компактным в R^n, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным.*

Из теорем 2 и 3 следует, что *всякое ограниченное множество, лежащее в n-мерном евклидовом пространстве, является и вполне ограниченным,*— обстоятельство, в котором легко убедиться и непосредственно.

Теорема 4. *Для того чтобы множество M, лежащее в метрическом пространстве X было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто и компактно в X.*

В самом деле, пусть M замкнуто и компактно в X. Тогда всякое бесконечное подмножество $M' \subseteq M$ имеет в X хотя бы одну предельную точку a. Так как M замкнуто, то $a \in M$, и, значит, M' имеет предельную точку в M, откуда и следует, что M — компакт. Обратно, пусть M компактно в себе. Тогда и подавно M компактно в X. Докажем, что M, кроме того, и замкнуто. Если бы это было не так, то существовала бы предельная точка a множества M, не принадлежащая этому множеству. Возьмем последовательность точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ множества M, сходящуюся к a. Всякая подпоследовательность этой последовательности также сходится к $a \in X \setminus M$, т. е. не сходится ни к какой точке множества M. Итак, последовательность точек $a_n \in M$ не содержит никакой подпоследовательности, сходящейся в M, и M не может быть компактно в себе.

Замечание 1. Одно из утверждений теоремы 4 обычно формулируют так: *всякий компакт замкнут в любом объемлющем метрическом пространстве* *).

Замечание 2. В гильбертовом пространстве легко найти ограниченное множество, не являющееся вполне ограниченным: таково, например, множество E, состоящее из всех точек, у

*) В § 1 гл. 6 будет доказано значительно более общее утверждение.

которых одна какая-нибудь координата равна 1, а все остальные равны нулю. Любые две точки этого множества находятся друг от друга на расстоянии $\sqrt{2}$, так что оно ограничено (имеет диаметр $\sqrt{2}$). В то же время оно не вполне ограничено (при $\varepsilon < \sqrt{2}$ в E не существует ε-сети).

Теорема 5. *Во всяком компакте, состоящем из бесконечного числа точек, имеется счетное всюду плотное множество.*

В самом деле, пусть X — компакт. Так как X, по доказанному, вполне ограничено, то для любого $\varepsilon > 0$ в X содержится ε-сеть N_ε. Давая ε значения $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, получим не более чем счетное множество

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}},$$

всюду плотное в X (так как, какова бы ни была точка $x \in X$, имеем $\rho(x, N) = 0$). Множество N не может быть конечным, так как всякое конечное подмножество компакта замкнуто.

Замечание 3. Из определения компактности непосредственно следует:

Если X — компакт, то всякое $M \subseteq X$ компактно в X; поэтому *всякое замкнутое множество какого-либо компакта X само является компактом.*

Теорема 6 (Кантор). *Пусть*

$$\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \Phi_3 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_n \supseteq \ldots \tag{4}$$

суть непустые замкнутые компактные множества метрического пространства X, т. е. компакты, лежащие в X. Их пересечение $\Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ непусто.

Замечание 4. Теорема Кантора может быть сформулирована и так:

Любая последовательность непустых убывающих замкнутых множеств (4) *компактного метрического пространства имеет непустое пересечение.*

Доказательство теоремы Кантора совпадает с данным в § 9 гл. 4 доказательством той же теоремы для замкнутых ограниченных множеств в R^n. Для любого n возьмем произвольную точку $a_n \in \Phi_n$. Из последовательности полученных таким образом точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ выберем сходящуюся последовательность

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots \tag{5}$$

(такая существует, так как все a_n лежат в Φ_1, а Φ_1 компактно). Пусть $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Докажем, что $a \in \Phi_n$ при любом n. Возьмем $n_k > n$. Последовательность $a_{n_k}, a_{n_{k+1}}, \ldots, a_{n_{k+s}}, \ldots$ состоит из точек множества Φ_n и сходится к той же точке a, что и вся последовательность (5). Поэтому a есть точка прикосновения множества Φ_n. Так как Φ_n, замкнуто, то $a \in \Phi_n$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Всякая убывающая последовательность непустых замкнутых ограниченных множеств n-мерного евклидова пространства имеет непустое пересечение.*

Замечание 5. Если диаметры множеств (4) стремятся к нулю, то пересечение всех множеств Φ_n (непустое в силу теоремы Кантора) состоит из одной-единственной точки.

Наряду с теоремой Кантора одним из важнейших предложений в теории компактных пространств является так называемая теорема Бореля — Лебега, доказанная первоначально для сегмента числовой прямой.

Теорема 7. *Пусть Φ — компакт, лежащий в метрическом пространстве X* (т. е. в силу теоремы 4 Φ — замкнутое и компактное в X множество). *Из всякой системы Σ открытых множеств пространства X, покрывающих*) множество Φ, можно выделить конечную подсистему, также покрывающую множество Φ.*

Другими словами, *всякое открытое покрытие компактного замкнутого множества Φ содержит конечное подпокрытие того же множества Φ.*

Доказательство основывается на следующей лемме:

Лемма. *Всякий компакт Φ при любом $\varepsilon > 0$ может быть представлен в виде суммы конечного числа замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$.*

Эта лемма весьма просто вытекает из того, что компакт Φ вполне ограничен. В самом деле, возьмем какую-либо $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть

$$N = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$$

компакта Φ. Тогда, по самому определению сети, Φ содержится в сумме множеств $U\left(a_1, \frac{\varepsilon}{3}\right), \ldots, U\left(a_s, \frac{\varepsilon}{3}\right)$, значит, и подавно в сумме множеств $\left[U\left(a_1, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right], \ldots, \left[U\left(a_s, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right]$ (замыкания берутся также в Φ). Так как каждое из множеств $\Phi_i = \Phi \cap$

*) Напомним, что система Σ множеств *покрывает* множество Φ, или образует *покрытие* множества Φ, если каждая точка множества Φ содержится хотя бы в одном множестве системы Σ. Покрытие называется *открытым* (соответственно *замкнутым*), если все его элементы суть открытые (замкнутые) множества. Покрытие, состоящее из конечного числа элементов, называется *конечным*.

$\cap \left[U\left(a_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)\right]$ есть замкнутое множество диаметра $\leqslant \frac{2}{3}\varepsilon$ и $\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_s$, то лемма доказана.

Докажем теперь теорему Бореля — Лебега от противного. Пусть компакт $\Phi \subseteq X$ покрыт некоторой бесконечной системой Σ открытых множеств Γ пространства X, и пусть никакая конечная подсистема системы Σ не покрывает Φ. Берем в лемме $\varepsilon = 1$ и представим Φ в виде суммы конечного числа замкнутых множеств $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$, диаметры которых <1. Если бы каждое из этих Φ_i было покрыто некоторой конечной подсистемой системы Σ, то и все Φ было бы покрыто конечной подсистемой системы Σ. Поэтому некоторое Φ_{i_1} не покрыто никакой конечной подсистемой системы Σ. Множество Φ_{i_1}, как замкнутое подмножество компакта Φ, есть компакт и потому может быть представлено в виде суммы конечного числа замкнутых множеств $\Phi_{i_1 1}, \Phi_{i_1 2}, \ldots, \Phi_{i_1 s_1}$ диаметра $< \frac{1}{2}$. По крайней мере одно из этих множеств, $\Phi_{i_1 i_2}$, не покрыто никакой конечной подсистемой системы Σ. Это $\Phi_{i_1 i_2}$ мы представляем в виде суммы конечного числа замкнутых множеств диаметра $< \frac{1}{3}$, выбираем среди них одно, $\Phi_{i_1 i_2 i_3}$, не покрытое никакой конечной подсистемой системы Σ, и продолжаем этот процесс до бесконечности. В результате получаем последовательность

$$\Phi \supseteq \Phi_{i_1} \supseteq \Phi_{i_1 i_2} \supseteq \Phi_{i_1 i_2 i_3} \supseteq \ldots \supseteq \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supseteq \ldots \tag{6}$$

компактов, причем ни один из них не покрыт никакой конечной подсистемой системы Σ и диаметр $\delta(\Phi_{i_1 \ldots i_n})$ множества $\Phi_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ меньше чем $\frac{1}{n}$. По доказанному пересечение множеств (6) состоит из одной точки a. Это a содержится в некотором $\Gamma \in \Sigma$. Так как Γ открыто, то существует $U(a, \varepsilon) \subseteq \Gamma$. Возьмем n столь большим, чтобы было $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тогда из $a \in \Phi_{i_1 \ldots i_n}$ и $\delta(\Phi_{i_1 \ldots i_n}) < \frac{1}{n}$ следует, что $\Phi_{i_1 \ldots i_n} \subseteq U(a, \varepsilon) \subseteq \Gamma$, т. е. что $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$ покрыто даже одним элементом Γ системы Σ (тогда как мы предположили, что никакое конечное число элементов системы Σ не покрывает $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$). Полученное противоречие доказывает теорему Бореля — Лебега.

Теорема Бореля — Лебега полностью характеризует компакты. Другими словами, имеет место следующая

Теорема 8'. *Пусть множество $M \subseteq X$ удовлетворяет тому условию, что из всякой системы открытых множеств пространства X, покрывающих M, можно выделить конечную подсистему, обладающую тем же свойством. Тогда M есть компакт.*

В самом деле, предположим противное. Тогда в M существует бесконечное подмножество M', не имеющее в M никакой предельной точки. Отсюда следует, что любая точка $x \in M$ имеет окрестность $U(x, \varepsilon_x)$, содержащую не более конечного числа точек множества M'. Окрестности $U(x, \varepsilon_x)$ покрывают все множество M. В силу наших предположений существует конечное число этих окрестностей $U_1 = U(x_1, \varepsilon_{x_1}), \ldots, U_s = U(x_s, \varepsilon_{x_s})$, также покрывающих M. Тогда

$$M' = (M' \cap U_1) \cup \ldots \cup (M' \cap U_s),$$

что невозможно, так как M'—бесконечное множество, а каждое из множеств $M' \cap U_i$ конечно.

Ограничиваясь наиболее важным частным случаем, когда $M = X$, мы приходим к такому предложению·

Теорема 8. *Для того чтобы метрическое пространство X было компактом, необходимо и достаточно, чтобы из каждой системы открытых множеств, дающих в сумме пространство X, можно было выбрать конечную подсистему, обладающую тем же свойством.*

§ 2. Непрерывные отображения компактов

Теорема 9. *Метрическое пространство, являющееся непрерывным образом компакта, само есть компакт* *).

Доказательство. Пусть дано непрерывное отображение f компакта X на метрическое пространство Y. Чтобы доказать, что Y есть компакт, надо доказать, что из каждой системы Σ_Y открытых в Y множеств Γ_α, покрывающих Y, можно выделить конечную подсистему, обладающую тем же свойством. Но система Σ_X открытых множеств $f^{-1}(\Gamma_\alpha)$ покрывает X и вследствие компактности X содержит конечную подсистему $\{f^{-1}(\Gamma_{\sigma_1}), \ldots, f^{-1}(\Gamma_{\sigma_s})\}$, также покрывающую X. Но тогда множества $\Gamma_{\sigma_1}, \ldots, \Gamma_{\sigma_s}$ образуют конечную подсистему системы Σ, покрывающую пространство Y, что и требовалось доказать.

Из теорем 9 и 4 следует

Теорема 10. *Всякое множество M, лежащее в каком-либо метрическом пространстве X и являющееся непрерывным образом компакта, замкнуто в пространстве X.*

Отсюда, далее, следует

Теорема 11. *Всякое непрерывное отображение компакта является замкнутым отображением.*

В самом деле, пусть f—непрерывное отображение компакта X в какое-либо метрическое пространство Y. Всякое замкнутое в X множество является компактом (§ 1, замечание 3), поэтому его образ при отображении f замкнут в Y, что и требовалось доказать.

Из теоремы 11 вытекает

Теорема 12. *Всякое взаимно однозначное и в одну сторону непрерывное отображение компакта непрерывно и в другую*

*) В частности, всякое метрическое пространство, гомеоморфное компакту, само есть компакт: свойство компактности в себе, как говорят, топологически инвариантно (что, впрочем, следует из самого определения компактности).

сторону и, следовательно, является топологическим отображением.

В самом деле, пусть f есть взаимно однозначное и непрерывное в одну сторону отображение компакта X на какое-нибудь метрическое пространство Y. В силу теоремы 9 пространство Y есть компакт. Требуется доказать, что отображение f^{-1} компакта Y на компакт X, обратное отображению f, непрерывно, т. е. требуется доказать, что прообраз при отображении f^{-1} всякого замкнутого в X множества M является замкнутым в Y множеством. Но прообраз $(f^{-1})^{-1} M$ множества M при отображении f^{-1} совпадает с образом множества M при отображении f, который в силу теоремы 11 замкнут в Y. Теорема 12 доказана.

Из теоремы 9, далее, вытекает

Теорема 13. *Всякая действительная функция $y = f(x)$, определенная на некотором компакте X и непрерывная на нем, ограничена и принимает в некоторой точке $x_0 \in X$ наибольшее и в некоторой точке $x_1 \in X$ наименьшее значение.*

В самом деле, образом пространства X при отображении f является некоторое множество Y действительных чисел, и это множество (в силу теоремы 9) есть компакт, т. е. (в силу теорем 3 и 4) замкнутое и ограниченное множество действительных чисел. Верхняя и нижняя грани этого множества принадлежат ему и являются искомыми наибольшим и наименьшим значениями нашей функции в пространстве X.

Частными случаями теоремы 13 являются известные из анализа теоремы о том, что всякая непрерывная функция, определенная на замкнутом и ограниченном множестве Φ (на прямой, на плоскости или вообще в R^n, например, модуль непрерывной функции комплексного переменного), принимает на Φ как наибольшее, так и наименьшее значения.

Замечание 1. Из теорем 11 и 12 § 3 гл. 4 и теоремы 13 следует, что совокупностью значений действительной функции, определенной и непрерывной на связном и компактном метрическом пространстве (например, на сегменте числовой прямой или на замкнутом квадрате или круге), является всегда сегмент числовой прямой (или — если функция постоянна — одна точка).

* * *

Отображение f пространства X в пространство Y называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x' \in X$, $x'' \in X$, расстояние между которыми в X меньше чем δ, имеем

$$\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon \text{ в } Y.$$

Очевидно, *всякое равномерно непрерывное отображение непрерывно.*

Теорема 14. *Всякое непрерывное отображение f компакта X равномерно непрерывно* *).

Доказательство (от противного). Если теорема 14 неверна, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ можно найти пару точек $x_{(\delta)}$, $x'_{(\delta)}$, удовлетворяющую условиям

$$\rho(x_{(\delta)}, x'_{(\delta)}) < \delta, \quad \rho(f(x_{(\delta)}), f(x'_{(\delta)})) \geqslant \varepsilon.$$

Давая δ значения $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ и обозначая $x_{\left(\frac{1}{n}\right)}$, $x'_{\left(\frac{1}{n}\right)}$ просто через x_n, соответственно x'_n, выбираем из последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

сходящуюся подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots, \quad \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0.$$

Так как $\rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$, то последовательность

$$x'_{n_1}, x'_{n_2}, \ldots, x'_{n_k}, \ldots$$

тоже сходится, и притом к тому же пределу x_0.

В силу непрерывности отображения имеем, полагая $y_k = f(x_{n_k})$, $y'_k = f(x'_{n_k})$, равенства

$$\lim_{k \to \infty} y_k = \lim_{k \to \infty} y'_k = f(x_0),$$

так что при достаточно большом k расстояние $\rho(y_k, y'_k)$ будет сколь угодно мало. Между тем по предположению $\rho(y_k, y'_k) \geqslant \varepsilon$ для всех k. Полученное противоречие доказывает теорему 14.

Замечание 2. Легко доказывается следующая

Теорема 15. *Метрическое произведение двух компактов есть компакт.*

В самом деле, пусть в произведении $X = [X' \times X'']$ двух компактов X' и X'' дана последовательность точек $\{x_n\}$, $x_n = (x'_n, x''_n)$. Выбираем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} = (x'_{n_k}, x''_{n_k})$ так, чтобы последовательности $\{x'_{n_k}\}$, $\{x''_{n_k}\}$ были сходящимися соответственно к x'_0 и к x''_0. Тогда подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится в X к точке $x_0 = (x'_0, x''_0)$.

Пример непрерывного отображения отрезка на треугольник («кривая Пеано»). Возьмем разбиение отрезка $[0; 1] = \delta$ на две его половины: $\delta_0 = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ и $\delta_1 = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Это разбиение отрезка $[0; 1]$

*) Эта теорема является обобщением известной из курса анализа теоремы.

назовем разбиением первого ранга, а отрезки $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ — отрезками первого ранга. Разбивая каждый отрезок первого ранга на две половины, получим четыре отрезка $\delta_{00}, \delta_{01}, \delta_{10}, \delta_{11}$ второго ранга, образующие разбиение второго ранга отрезка $[0; 1]$, и т. д. Разбиение n-го ранга состоит из 2^n отрезков $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ $\left(i_1, \ldots, i_n = \frac{0}{1}\right)$, длина каждого из которых есть $\frac{1}{2^n}$.

Аналогичным образом, проводя в равнобедренном прямоугольном треугольнике Δ высоту *), разобьем его на два равных равнобедренных прямоугольных треугольника Δ_0 и Δ_1. Это — треугольники «первого ранга»; они образуют «разбиение первого ранга» исходного треугольника Δ. Разбивая каждый треугольник первого ранга его высотой, получим четыре треугольника второго ранга $\Delta_{00}, \Delta_{01}, \Delta_{10}, \Delta_{11}$. Вообще, при любом n получим 2^n треугольников $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ $\left(i_1, \ldots, i_n = \frac{0}{1}\right)$ ранга n.

Замечание 3. Все треугольники в нашем построении считаются замкнутыми (т. е. к ним присоединяются их вершины и стороны).

Из нашей конструкции вытекает, очевидным образом, что всегда $\delta_{i_1 \ldots i_n} \supset \delta_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}}$ и $\Delta_{i_1 \ldots i_n} \supset \Delta_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}}$.

Далее, так как длина $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ равна $\frac{1}{2^n}$, то она стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Легко видеть также, что и диаметр треугольника $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ при неограниченном возрастании n стремится к нулю. Отсюда вытекает:

а) Если для любого n мы обозначим через P_n либо один треугольник n-го ранга, либо сумму двух прилегающих друг к другу треугольников n-го ранга, то при неограниченном возрастании n диаметр множества P_n будет стремиться к нулю.

Нам понадобится еще следующее свойство нашего построения, которое без труда доказывается (индукцией по рангу n):

б) Если два отрезка $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\delta_{j_1 \ldots j_n}$ ранга n имеют общий конец, то треугольники $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\Delta_{j_1 \ldots j_n}$ прилегают друг к другу по общей стороне.

Пусть теперь t — какая-либо точка отрезка $[0; 1]$. Для каждого ранга n имеем либо один-единственный отрезок $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ ранга n, содержащий внутри себя точку t, либо два отрезка $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\delta_{j_1 \ldots j_n}$, имеющих точку t своим общим концом. Обозначим через $P_n(t)$ в первом случае треугольник $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$, а во втором — сумму двух треугольников $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\Delta_{j_1 \ldots j_n}$, которые в этом случае, в силу замечания б), примыкают друг к другу. Легко видеть, что

$$P_1(t) \supset P_2(t) \supset \ldots \supset P_n(t) \supset \ldots, \qquad (1)$$

причем вследствие замечания а) пересечение всех $P_n(t)$ состоит из единственной точки, которую мы и обозначим через $f(t)$.

Мы получили, таким образом, отображение $f(t)$ отрезка $[0; 1]$ в треугольник Δ.

Докажем прежде всего, что это отображение есть отображение на весь треугольник Δ. В самом деле, пусть x — произвольная фиксированная точка треугольника Δ. Возьмем какую-нибудь последовательность наших треугольников

$$\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots \qquad (2)$$

*) Под высотой в прямоугольном треугольнике понимаем все время перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу.

под условием, чтобы x содержалось в каждом из треугольников $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ этой последовательности (для некоторых точек x такая последовательность оказывается определенной однозначно, для других — нет). Последовательности (2) соответствует последовательность

$$\delta_{i_1} \supset \delta_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \delta_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots, \tag{3}$$

определяющая единственную точку $t \in [0;\ 1]$, являющуюся точкой пересечения всех отрезков (3), причем из нашего построения легко следует, что для любого n имеем

$$\Delta_{i_1 \ldots i_n} \subseteq P_n(t). \tag{4}$$

Из того, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{i_1 \ldots i_n} = x,$$

из (4) и из того, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n(t)$ состоит из одной лишь точки, вытекает, что $x = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} P_n(t)$, т. е. $x = f(t)$.

Докажем, наконец, что отображение f непрерывно в любой точке $t_0 \in [0;\ 1]$. Пусть

$$x_0 = f(t_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n(t_0).$$

Берем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует такое n, что $P_n(t_0) \subseteq U(x_0, \varepsilon)$. Выбираем это n; точка t_0 принадлежит либо к единственному отрезку $\delta_{i_1 \ldots i_n}$, либо к двум отрезкам $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\delta_{j_1 \ldots j_n}$ ранга n. В первом случае полагаем $\delta'_n = \delta_{i_1 \ldots i_n}$, во втором обозначаем через δ'_n отрезок, являющийся суммой отрезков $\delta_{i_1 \ldots i_n}$ и $\delta_{j_1 \ldots j_n}$, и через η — расстояние от t_0 до ближайшего конца отрезка δ'_n. Тогда для всех $t \in [0;\ 1]$, отстоящих от t_0 меньше чем на η, имеем $P_n(t) \subseteq P_n(t_0)$, и, значит,

$$\rho(f(t_0), f(t)) < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 4. Дополним только что проведенное построение следующим замечанием (впервые сделанным Н. Н. Лузиным): *в трехмерном пространстве можно построить простую дугу* (т. е. множество, гомеоморфное отрезку $[0;\ 1]$) *таким образом, что проекцией этой дуги на плоскость будет треугольник* *). Для этого возьмем в плоскости $x_3 = 0$ трехмерного (x_1, x_2, x_3)-пространства треугольник Δ и непрерывно отобразим на него отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$. Запишем это отображение f в виде системы двух непрерывных функций

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t),$$

где $x_1 = \varphi_1(t)$ и $x_2 = \varphi_2(t)$ суть координаты точки $x = f(t)$ треугольника Δ.

---

*) Эта простая дуга может служить совершенно непроницаемой для дождя крышей дома!

Ставя в соответствие точке t отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$ точку x трехмерного пространства с координатами $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, $x_3 = t$, получим топологическое отображение отрезка $[0;\ 1]$ на некоторую простую дугу, проекцией которой на плоскость $x=0$ является треугольник Δ.

Замечание 5. Лебегу принадлежит следующее изящное построение непрерывного отображения канторова дисконтинуума Π на квадрат. Как известно, точки множества Π среди всех точек числовой прямой R^1 характеризуются тем, что могут быть выражены в виде бесконечной троичной дроби

$$t = \frac{\theta_1}{3} + \frac{\theta_2}{3^2} + \ldots + \frac{\theta_n}{3^n} + \ldots, \tag{5}$$

где каждое θ_n есть либо 0, либо 2 и, следовательно, может быть записано в виде $\theta_n = 2t_n$, где t_n есть уже либо 0, либо 1; в соответствии с этим переписываем (5) в виде

$$t = 2 \cdot \left(\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \ldots + \frac{t_3}{3^n} \right). \tag{6}$$

Поставим в соответствие каждой точке (6) множества Π точку $(x_1,\ x_2)$ единичного квадрата Q на плоскости R^2, полагая

$$x_1 = \varphi_1(t) = \frac{t_1}{2} + \frac{t_3}{2^2} + \frac{t_5}{2^3} + \ldots + \frac{t_{2n-1}}{2^n} + \ldots,$$

$$x_2 = \varphi_2(t) = \frac{t_2}{2} + \frac{t_4}{2^2} + \frac{t_6}{2^3} + \ldots + \frac{t_{2n}}{2^n} + \ldots$$

Получаем отображение f множества $\Pi \subset [0;\ 1]$ в единичный квадрат $Q = [0 \leqslant x_1 \leqslant 1;\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1]$ плоскости R^2. Пусть $x = (x_1,\ x_2)$ — произвольная точка квадрата Q; записывая ее координаты в виде двоичных дробей

$$x_1 = \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2^2} + \ldots + \frac{p_n}{2^n} + \ldots, \quad p_n = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix},$$

$$x_2 = \frac{q_1}{2} + \frac{q_2}{2^2} + \ldots + \frac{q_n}{2^n} + \ldots, \quad q_n = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix},$$

заключаем, что точка x, в силу отображения, поставлена в соответствие точке множества Π, определенной разложением (6), в котором на четных местах стоят подряд $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n,\ \ldots$, а на нечетных $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ \ldots$ Итак, отображение f есть отображение множества Π на весь квадрат Q.

Докажем, что это отображение непрерывно. В самом деле, если имеем две точки

$$t' = 2\left(\frac{t_1'}{3} + \frac{t_2'}{3^2} + \ldots + \frac{t_n'}{3^n} + \ldots \right)$$

и

$$t'' = 2\left(\frac{t_1''}{3} + \frac{t_2''}{3^2} + \ldots + \frac{t_n''}{3^n} + \ldots \right)$$

множества Π, у которых $t_n' \neq t_n''$, то

$$|t' - t''| \geqslant \frac{1}{3^n}.$$

Поэтому, если последовательность точек $\{t^{(k)}\}$, $t^{(k)} \in \Pi$,

$$t^{(k)} = 2\left(\frac{t_1^{(k)}}{3} + \frac{t_2^{(k)}}{3^2} + \ldots + \frac{t_n^{(k)}}{3^n} + \ldots \right),$$

сходится к $t=2\left(\frac{t_1}{3}+\frac{t_3}{3^2}+\ldots\right)$, то для любого n можно найти такое k_n, что при $k > k_n$ будем иметь

$$t_1^{(k)}=t_1, \quad \ldots, \quad t_n^{(k)}=t_n.$$

Но из этого условия следует, что и $x_1^{(k)}=\varphi_1(t^{(k)})$ и $x_2^{(k)}=\varphi_2(t^k)$ будут при неограниченно возрастающем k стремиться соответственно к $x_1=\varphi_1(t)$ и $x_2=\varphi_2(t)$, чем непрерывность функций φ_1 и φ_2, а значит, и отображения f доказана. В § 4 будет доказана более общая теорема, а именно: *всякий компакт есть образ канторова дисконтинуума при некотором непрерывном отображении.*

Функции φ_1 и φ_2, определенные на канторовом множестве П, проинтерполируем линейно на смежных интервалах к этому множеству, т. е. положим на каждом смежном интервале $(\alpha;\ \beta)$

$$\begin{cases} \varphi_1(t)=\dfrac{\beta-t}{\beta-\alpha}\varphi_1(\alpha)+\dfrac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\varphi_1(\beta), \\ \varphi_2(t)=\dfrac{\beta-t}{\beta-\alpha}\varphi_2(\alpha)+\dfrac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\varphi_2(\beta); \end{cases}$$

получим непрерывные функции (которые тоже обозначим через φ_1, φ_2), определенные уже на всем сегменте $[0;\ 1]$. Полагая для каждого $t \in [0;\ 1]$, как прежде, $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t)$, получим непрерывное отображение f отрезка $[0;\ 1]$ на квадрат Q (это отображение будет отображением на весь квадрат, потому что, как мы видели, даже $f(\text{П})=Q$).

Интерес лебеговского построения заключается, в частности, в том, что оно сразу же обобщается на случай любого числа измерений и приводит к непрерывным отображениям канторова дисконтинуума П и отрезка на куб любого числа измерений и даже на гильбертов кирпич *).

Закончим этот параграф доказательством следующей теоремы:

Теорема 16. *Если монотонная последовательность непрерывных функций **), определенных на компакте X, сходится*

---

*) Определение гильбертова кирпича дано в § 6 гл. 4; из того, что гильбертов кирпич является непрерывным образом отрезка, следует (на основании теоремы 9) его компактность, которая, впрочем, будет непосредственно доказана в § 8.

**) Последовательность действительных функций

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots, \tag{7}$$

определенных в пространстве X, называется *монотонной*, если она является возрастающей или убывающей последовательностью; при этом последовательность (7) называется *возрастающей* (соответственно *убывающей*) на X, если для любого $x \in X$ имеем

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots,$$

соответственно

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \ldots \geqslant f_n(x) \geqslant \ldots$$

Если, кроме того, по крайней мере для одной точки $x \in X$ имеем

$$f_1(x) < f_2(x) < \ldots < f_n(x) < \ldots,$$

соответственно

$$f_1(x) > f_2(x) > \ldots > f_n(x) > \ldots,$$

то последовательность (7) называется *строго возрастающей* (соответственно *строго убывающей*).

к функции, непрерывной на X, то эта последовательность сходится на X равномерно.

Достаточно доказать эту теорему для случая возрастающей последовательности

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots \tag{8}$$

функций, сходящейся во всех точках компакта X к непрерывной функции $f(x)$.

Требуется доказать, что для любого данного $\varepsilon > 0$ можно найти такое n_ε, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ для всех точек $x \in X$ будет

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Итак, пусть $\varepsilon > 0$ дано. Обозначим через Γ_n множество всех точек $x \in X$, для которых выполнено условие

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Так как и $f(x)$ и $f_n(x)$ — непрерывные в X функции, то непрерывна и функция $|f(x) - f_n(x)|$, и потому множество Γ_n при любом n открыто. Далее, так как последовательность (8) возрастает, то во всякой точке $x \in \Gamma$ имеем

$$|f(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant |f(x) - f_n(x)|.$$

Поэтому, если $x \in \Gamma_n$, то $x \in \Gamma_{n+1}$, т. е. $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$ при любом n, и, значит,

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \Gamma_3 \subseteq \ldots \subseteq \Gamma_n \subseteq \ldots \tag{9}$$

Наконец, так как последовательность (8) сходится в любой точке $x \in X$, то каждая точка x содержится в некотором Γ_n. Таким образом, открытые множества Γ_n в своей совокупности покрывают все пространство X. В силу его компактности отсюда следует, что пространство X покрыто конечным числом множеств Γ_n, пусть множествами $\Gamma_{n_1}, \Gamma_{n_2}, \ldots, \Gamma_{n_s}$. Считая индексы $n_1, n_2, \ldots, n_s$ возрастающими, заключаем из (9), что Γ_{n_s} совпадает со всем пространством X. А это означает, что при $n \geqslant n_s$ для любой точки $x \in X$ имеем

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Связность в компактных пространствах

Теорема 17. *Всякие два непустых дизъюнктных замкнутых множества метрического пространства X, из которых хотя бы одно компактно, находятся друг от друга на положительном расстоянии.*

Мы видели в § 1 гл. 4, что всякое метрическое пространство нормально, т. е. что всякие два дизъюнктных замкнутых множества в нем имеют дизъюнктные окрестности. Для компактных метрических пространств верно более сильное утверждение, а именно:

Следствие 1. *Всякие два непустых дизъюнктных замкнутых множества компакта X находятся друг от друга на положительном расстоянии.*

Замечание 1. Если F_1 и F_2—дизъюнктные замкнутые множества в метрическом пространстве X и $\rho(F_1, F_2)=d>0$, то сферические окрестности $O\left(F_1, \frac{d}{2}\right)$, $O\left(F_2, \frac{d}{2}\right)$ дизъюнктны.

С другой стороны, ветвь гиперболы и одна из ее асимптот могут служить примером пары дизъюнктных неограниченных замкнутых множеств на плоскости, расстояние между которыми равно нулю.

Если пространство X есть сумма двух интервалов $(0; 1)$ и $(1; 2)$ числовой прямой, то каждый из этих интервалов есть замкнутое ограниченное множество пространства X, а расстояние между ними равно нулю.

Следствие 2. *Всякие два непустых дизъюнктных замкнутых множеств евклидова n-мерного пространства, из которых хотя бы одно ограничено, находятся друг от друга на положительном расстоянии.*

Доказательство теоремы 17. Пусть F и Φ замкнуты в X, непусты, но имеют пустое пересечение. Пусть, кроме того, Φ компактно. Докажем, что $\rho(F, \Phi)>0$. В противном случае мы имели бы две последовательности точек

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_n \in F, \tag{1}$$

и

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots, y_n \in \Phi, \tag{2}$$

такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)=0$. Вследствие компактности множества Φ из (2) можно выбрать подпоследовательность

$$y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots, y_{n_k}, \ldots,$$

сходящуюся к некоторой точке $y \in \Phi$. Так как $\rho(x_n, y_n)$ стремится к нулю, то последовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$$

также сходится к точке y, причем из замкнутости множества F следует, что $y \in F$. Таким образом, точка y оказывается общей точкой множеств F и Φ, вопреки нашему предположению. Теорема 17 доказана.

Для всех вопросов о связности компактов следующее понятие (введенное еще Кантором) является основным:

Определение 2. Конечная последовательность точек $a_1, \ldots, a_s$ метрического пространства X называется *ε-цепью*, а именно ε-цепью, соединяющей точку a_1 с точкой a_s, если $\rho(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon$ для $i < s$. Множество M называется *ε-сцепленным*, если любые две его точки могут быть соединены ε-цепью, составленной из точек множества M. Множество M называется *сцепленным*, если оно является ε-сцепленным при любом $\varepsilon > 0$.

Теорема 18. *Всякое связное метрическое пространство X является сцепленным.*

Доказательство. Пусть X не сцеплено. Докажем, что X не может быть связным. В самом деле, так как X не сцеплено, то в X можно найти две точки a и b, которые при некотором $\varepsilon > 0$ не могут быть соединены никакой ε-цепью. Обозначим через A_ε множество всех точек пространства X, которые могут быть соединены с a посредством ε-цепи. Множество A_ε непусто (так как содержит точку a). Оно не совпадает со всем X (так как не содержит точки b). Далее, A_ε замкнуто: если a' — точка прикосновения множества A_ε, то имеется точка $a_s \in A_\varepsilon$, отстоящая от a' на расстояние $< \varepsilon$. Но a_s может быть соединено с a посредством ε-цепи $a = a_1, a_2, \ldots, a_s$; поэтому имеем и ε-цепь $a = a_1, a_2, \ldots, a_s, a_{s+1} = a'$, соединяющую a с a', т. е. $a' \in A$. Наконец, множество A_ε открыто: если $a' \in A_\varepsilon$, то a' может быть соединено с a посредством ε-цепи; но тогда и всякая точка $a'' \in U(a', \varepsilon)$ может быть соединена с a посредством ε-цепи. Теорема 18 доказана.

Теорема, обратная к теореме 18, неверна: сумма двух интервалов $(0; 1)$ и $(1; 2)$, а также множество всех рациональных точек числовой прямой могут служить примерами множеств сцепленных, но несвязных. Однако имеет место

Теорема 19. *Всякий сцепленный компакт является связным.*

В самом деле, если компакт Φ несвязен, то он может быть представлен в виде суммы двух непустых непересекающихся замкнутых множеств: $\Phi = \Phi_0 \cup \Phi_1$. По теореме 16 имеем $\rho(\Phi_0, \Phi_1) = \varepsilon > 0$. Взяв по произволу точки $x_0 \in \Phi_0$ и $x_1 \in \Phi_1$, видим, что эти две точки не могут быть соединены никакой ε-цепью.

Непустые связные компакты называются *континуумами*; среди них *собственно континуумами* называются континуумы, содержащие более одной точки (мы скоро увидим, что всякий собственно континуум имеет мощность $\mathfrak{c}$). Из теорем 18 и 19 следует:

Для того чтобы компакт был континуумом, необходимо и достаточно, чтобы он был сцеплен.

Теорема 20. *Пересечение убывающей последовательности континуумов есть континуум.*

Мы докажем даже более сильное предложение:

Теорема 20′. *Пусть* $\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_n \supseteq \ldots$, *причем* Φ_n *есть непустой* ε_n*-сцепленный компакт и* $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. *Тогда* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ *— континуум.*

Доказательство основывается на лемме, полезной и во многих других случаях.

Лемма. *Пусть дана убывающая последовательность непустых компактов*

$$\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_n \supseteq \ldots, \tag{3}$$

лежащих в метрическом пространстве X. *Какова бы ни была окрестность* Γ *пересечения* $\Phi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ *этих компактов, найдется такое* n_Γ, *что для всех* $n > n_\Gamma$ *будет* $\Phi_n \subseteq \Gamma$.

В самом деле, множество Γ есть открытое множество, содержащее Φ. Поэтому каждое множество $\Phi_n' = \Phi_n \setminus \Gamma$ (как пересечение двух замкнутых множеств Φ_n и $X \setminus \Gamma$) замкнуто в X, значит, и подавно в Φ_1. Кроме того, очевидно, $\Phi_n' \supseteq \Phi_{n+1}'$. Итак, множества Φ_n' образуют убывающую последовательность компактов. Их пересечение пусто, так как содержится, с одной стороны, в $\Phi \subseteq \Gamma$, а с другой стороны, в $X \setminus \Gamma$. Поэтому все Φ_n', начиная с некоторого $n = n_\Gamma$, пусты. Но если $\Phi_n' = \Phi_n \cap (X \setminus \Gamma)$ пусто, то, значит, $\Phi_n \subseteq \Gamma$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему 20′. Предположим, что Φ_n есть ε_n-сцепленный компакт $\left(\text{причем } \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0\right)$ и что (непустой) компакт $\Phi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ не является континуумом. Тогда $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$, где Φ' и Φ'' замкнуты, непусты и не пересекаются, и по теореме 17 имеем $\rho(\Phi', \Phi'') = \varepsilon > 0$. Положим $\Gamma' = U\left(\Phi', \frac{\varepsilon}{3}\right)$, $\Gamma'' = U\left(\Phi'', \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Открытое множество $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ является окрестностью компакта Φ; поэтому для любого достаточно большого n имеем $\Phi_n \subseteq \Gamma' \cup \Gamma''$. При этом $\Phi_n' = \Phi_n \cap \Gamma' \supseteq \Phi' \neq \Lambda$, $\Phi_n'' = \Phi_n \cap \Gamma'' \supseteq \Phi'' \neq \Lambda$, $\Phi_n' \cup \Phi_n'' = \Phi_n$ и $\rho(\Phi_n', \Phi_n'') \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Взяв при этом n столь большим, чтобы было $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{3}$, увидим, что Φ_n, вопреки предположению, не может быть ε_n-сцепленным.

Приведем несколько примеров континуумов. Очевидно, единственными собственно континуумами, лежащими на прямой, являются сегменты. Так как при непрерывных отображениях сохраняется как связность (теорема 12 § 3 гл. 4), так и компактность (теорема 9 § 2), то *непрерывный образ всякого континуума есть континуум.* Отсюда, в частности, следует, что *непрерывный образ прямолинейного сегмента есть континуум.* Поэтому всякая система n непрерывных функций

$$x_i = x_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

заданных на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 1$, определяет в n-мерном пространстве некоторый континуум, являющийся в силу самих уравнений (4) непрерывным образом отрезка $[0; 1]$ и называемый обычной *непрерывной кривой* в n-мерном пространстве (система уравнений (4) называется *параметрическим представлением* этой кривой).

Как мы знаем, понятие непрерывной кривой n-мерного пространства, определенное так, как мы это только что сделали, может даже при $n=2$ включать в себя геометрические образы, вовсе не похожие на то, что мы привыкли называть «линиями». Так, например, треугольник или квадрат в смысле только что приведенного определения — непрерывные кривые. Поэтому континуумы, являющиеся непрерывными образами прямолинейного сегмента, в настоящее время предпочитают называть не кривыми, а *жордановыми континуумами.* В книге Хаусдорфа [1], § 31, читатель может найти доказательство теоремы, устанавливающей, что жордановы континуумы тождественны с локально связными континуумами.

Доказательство опирается на следующую теорему Серпинского:

Для того чтобы континуум был локально связен, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ он представлялся в виде суммы конечного числа подконтинуумов диаметра $< \varepsilon$.

Один из простейших локально несвязных континуумов получим, если возьмем график функции $y = \sin\frac{1}{x}$, $0 < x \leqslant \frac{1}{\pi}$, и присоединим к нему все точки сегмента $[-1; 1]$ оси ординат. Континуум этот гомеоморфен континууму C, являющемуся суммой вертикальных сегментов

$$C_0 = \{x=0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}, \quad C_n = \left\{x = \frac{1}{n}, \ 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

и горизонтальных сегментов D_n, причем D_n при нечетном n лежит на оси абсцисс и соединяет точки $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ и $\left(\frac{1}{n+1}, 0\right)$, тогда как D_n при четном n лежит на прямой $y=1$ и соединяет точки $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ и $\left(\frac{1}{n+1}, 1\right)$ *).

*) Читателю рекомендуется сделать чертеж.

Приведем несколько примеров локально связных континуумов.

Если из всех точек

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2^n}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{2^n}\right), \ldots, \left(\frac{1}{n}, \frac{2^n-1}{2^n}\right)$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

опустить перпендикуляры на ось ординат и присоединить их к континууму C, то получится локально связный континуум.

Весьма замечательны следующие два локально связных континуума, впервые построенных польским математиком Серпинским.

Первый континуум Серпинского получается следующим образом. Берется равносторонний треугольник (рис. 8) и тремя его средними линиями разбивается на четыре равных треугольника. Внутренность среднего треугольника (на рис. 8 она заштрихована) выкидывается, а на каждом из оставшихся трех замкнутых треугольников (мы называем их треугольниками первого ранга) повторяется то же построение: каждый из этих треугольников тремя средними линиями делится на четыре равных треугольника, из которых внутренность среднего выбрасывается, так что получаются девять замкнутых треугольников второго ранга, и т. д.

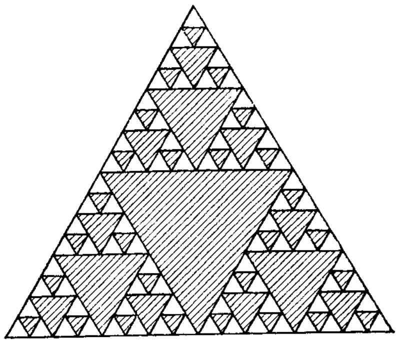

Рис. 8.

Обозначим через π_n сумму всех 3^n треугольников n-го ранга; так как все эти треугольники замкнутые, то их сумма π_n есть компакт. Этот компакт, очевидно, связен (любые две его точки могут быть соединены ломаной, лежащей на π_n). Так как $\pi_n \supset \pi_{n+1}$, то пересечение всех π_n есть континуум S, который и называется «кривой Серпинского». Чтобы иметь представление о ее виде, даем на чертеже изображение континуума π_4. На континууме S имеется всюду плотная бесконечнозвенная ломаная L — сумма контуров всех треугольников нашего построения. Легко видеть, что множество L связно, как сумма растущей последовательности континуумов L_n (где L_n есть сумма контуров всех треугольников рангов n). Однако L далеко не исчерпывает собою всего континуума S: на S имеется еще несчетное множество точек, не лежащих ни на одном из контуров наших треугольников. Легко видеть, что каждая точка континуума S имеет связную окрестность сколь угодно малого диаметра, так что континуум локально связен.

Второй континуум Серпинского, так называемый «ковер Серпинского», строится так (рис. 9). Квадрат Q со стороной 1 (назовем его квадратом нулевого ранга) делим на 9 равных квадратов со сторонами $\frac{1}{3}$ и удаляем внутренность среднего из них. Остаются 8 замкнутых квадратов первого ранга, сумма которых образует континуум C_1. На каждом из них повторяем то же построение, так что получаем 64 замкнутых квадрата второго ранга, сумма которых есть континуум C_2. Построение продолжается неограниченно и приводит к последовательности убывающих континуумов

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots,$$

причем C_n есть сумма 8^n квадратов со сторонами $\frac{1}{3^n}$.

Пересечение C всех континуумов C_n и есть континуум, называемый «ковром Серпинского».

Замечание 2. Только что рассмотренные континуумы обладают тем свойством, что каждый из них нигде не плотен на плоскости. Ковер Серпинского замечателен тем, что содержит топологический образ всякого континуума, лежащего в плоскости и нигде не плотного в ней. Такие континуумы называются плоскими. Собственно континуумы, лежащие на плоскости и нигде не плотные на ней, называются (плоскими) *канторовыми кривыми*. Из приведенных примеров видно, что канторова кривая может не быть жордановой и, обратно, жорданов континуум (например, квадрат) может не быть канторовой кривой. Свойство континуума быть жордановым, очевидно, топологически инвариантно: если C_1 есть жорданов континуум, а C_2 гомеоморфно C_1, то и C_2 является жордановым континуумом (потому что, если f_1 есть непрерывное отображение отрезка на C_1, а f_2 — топологическое отображение C_1 на C_2, то $f = f_2 f_1$ есть непрерывное отображение отрезка на C_2). Возникает естественный вопрос: является ли свойство плоского множества быть канторовой кривой топологически инвариантным? Другими словами: если C_1 — канторова кривая, а C_2 — плоское множество, гомеоморфное множеству C_1, то будет ли C_2 канторовой кривой? Из предыдущего нам известно, что C_2 во всяком случае — континуум. Остается доказать, что C_2 нигде не плотно на плоскости. Тонкость этого вопроса видна из того, что само по себе *свойство плоского множества быть нигде не плотным на плоскости топологической инвариантностью не обладает*. Действительно, обозначим через R_1 множество всех рациональных точек на прямой, а через R_2 множество всех рациональных точек на плоскости (т. е. множество всех точек плоскости, у которых обе координаты рациональны). Можно доказать, что множества R_1 и R_2 гомеоморфны; между тем R_1 нигде не плотно на плоскости, а R_2 всюду плотно. Однако *если из двух лежащих на плоскости и гомеоморфных между собою компактов один нигде не плотен на плоскости, то тем же свойством обладает и другой*. Это предложение вытекает из одной из основных теорем топологии плоскости, а именно из так называемой теоремы об инвариантности плоской области: *если из двух гомеоморфных между собою плоских множеств одно содержит внутренние точки, то и другое множество содержит внутренние точки*. Аналогичная теорема справедлива и для множеств, лежащих в евклидовом пространстве любого данного числа измерений n. Для гильбертова пространства аналогичное предложение уже не имеет места.

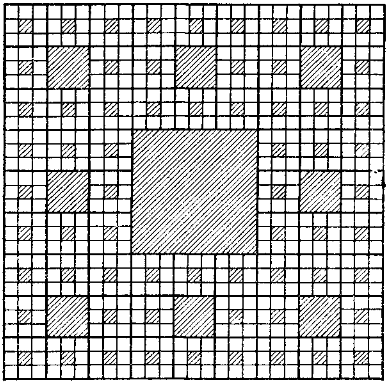

Рис. 9.

Вполне доступное доказательство фундаментальной теоремы об инвариантности плоской области и аналогичной теоремы для n-мерного пространства можно найти в главе 5 книги Александрова [10], а также в книге Александрова—Пасынкова [1], глава 3, теорема 4.

Назовем ε-компонентой $Q_\varepsilon(a)$ точки a компакта Φ множество всех тех точек этого компакта, которые могут быть соединены с точкой a посредством ε-цепи. Очевидно, $Q_\varepsilon(a)$ есть ε-сцепленное множество; при доказательстве теоремы 18 мы видели, что ε-компонента есть открыто-замкнутое множество. Замкнутым множеством будет и пересечение $Q(a)$ всех ε-компонент точки a, взятых для всевозможных $\varepsilon > 0$; причем, полагая $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ и $Q_n = Q_{\frac{1}{n}}(a)$, имеем $Q(a) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$, так что по теореме 20′ компакт $Q(a)$ связен и, значит, содержится в компоненте $C(a)$ точки a. Обратно, $C(a) \subseteq Q_\varepsilon(a)$ при любом ε, так что $C(a) \subseteq Q(a)$ и, значит, $C(a) = Q(a)$.

Итак:

Теорема 21. *Компонента любой точки a компакта Φ совпадает с пересечением ε-компонент этой точки, взятых для всевозможных $\varepsilon > 0$.*

Обозначая, как только что, $\frac{1}{n}$-компоненту точки a в Φ через Q_n, заключаем из равенства $C(a) = Q(a) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$ (по лемме к теореме 20), что к любой окрестности Γ множества $C(a)$ можно подобрать такое n, что $Q_n \subseteq \Gamma$. Так как Q_n открыто-замкнуто, то имеем такое следствие из теоремы 21:

Следствие. *Какова бы ни была окрестность Γ компоненты C компакта Φ, можно найти содержащуюся в Γ окрестность множества C, являющуюся не только открытым, но и замкнутым множеством.*

Пусть теперь компакт Φ не содержит никакого собственно континуума. Такие компакты назовем дисконтинуальными. Очевидно, дисконтинуальный компакт может быть определен как компакт, каждая точка которого совпадает со своей компонентой. Из только что сформулированного следствия вытекает, что в дисконтинуальном компакте Φ каждая точка содержится в открыто-замкнутом множестве произвольно малого диаметра. Возьмем же произвольно малое $\varepsilon > 0$ и заключим каждую точку x данного дисконтинуального компакта в открыто-замкнутое множество диаметра $< \varepsilon$. По теореме Бореля — Лебега из полученного таким образом покрытия компакта Φ можно выделить конечное подпокрытие, состоящее, положим, из множеств

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_s.$$

Положим теперь

$$H_1 = \Gamma_1, \quad H_2 = \Gamma_2 \setminus H_1, \ldots$$
$$\ldots, H_n = \Gamma_n \setminus (H_1 \cup \ldots \cup H_{n-1}), \ldots$$
$$\ldots, H_s = \Gamma_s \setminus (H_1 \cup \ldots \cup H_{s-1}).$$

Так как Γ_1 и Γ_2 открыто-замкнуты, то открыто-замкнутым множеством будет и разность $\Gamma_2 \setminus \Gamma_1$ *), т. е. H_2. Вообще, всякое H_n (где $n = 1, 2, \ldots, s$) открыто-замкнуто (как разность между открыто-замкнутыми множествами Γ_n и $H_1 \cup \ldots \cup H_{n-1}$).

Итак, Φ представлено как сумма конечного числа попарно не пересекающихся открыто-замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$. Обратно, если компакт Φ при любом $\varepsilon > 0$ допускает такое представление, то, очевидно, он не может содержать никакого связного множества, состоящего более чем из одной точки. Таким образом, мы пришли к следующему результату:

Теорема 22. *Для того чтобы компакт Φ не содержал никакого собственно континуума, необходимо и достаточно, чтобы он был нульмерным, т. е. чтобы при любом $\varepsilon > 0$ он мог быть представлен как сумма конечного числа попарно не пересекающихся замкнутых множеств диаметра $< \varepsilon$. Каждое из этих замкнутых множеств (как дополнение к сумме остальных) будет при этом и открытым.*

Замечание. 3 За определение нульмерного компакта, кроме каждого из двух эквивалентных свойств, фигурирующих в теореме 22, может быть, как легко видеть, принято еще и следующее свойство:

Каковы бы ни были две точки a и b компакта Φ, его можно представить в виде суммы двух непересекающихся замкнутых множеств, из которых первое содержит точку a, а второе — точку b. Это свойство называется «*разделенностью между любыми двумя точками*». Таким образом, в случае компакта X следующие свойства пространства X оказываются эквивалентными:

1) X не содержит никакого собственного континуума;

2) X не содержит никакого связного множества, состоящего более, чем из одной точки;

3) X разделено между любыми двумя точками;

4) каждая точка $a \in X$ содержится в сколь угодно малом по диаметру открыто-замкнутом множестве.

В случае компактного X каждое из этих свойств может быть принято за определение дисконтинуальности или нульмерности: без предположения компактности пространства X никакие два из этих свойств, вообще говоря, не эквивалентны.

Среди нульмерных компактов наиболее существенны совершенные (т. е. не содержащие изолированных точек); они называются *дисконтинуумами*. Примерами дисконтинуумов могут служить канторов дисконтинуум и все компакты, ему гомеоморфные.

В следующем параграфе мы увидим, что этими примерами и исчерпывается все разнообразие дисконтинуумов: именно, мы докажем, что всякий дисконтинуум гомеоморфен канторову.

---

*) В самом деле, разность между замкнутым и открытым множеством замкнута, а разность между открытым и замкнутым множеством открыта.

§ 4. Компакты как непрерывные образы канторова дисконтинуума

Теорема 23. *Каждый непустой совершенный (т. е. не имеющий изолированных точек) компакт содержит подмножество, гомеоморфное канторову дисконтинууму.*

Доказательство. Пусть Φ — компакт, не содержащий ни одной изолированной точки. Возьмем две какие-нибудь точки a_0 и a_1 компакта Φ и положительное ε, меньшее чем $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}\rho(a_0, a_1)$. Так как Φ не содержит изолированных точек, то нет изолированных точек и ни в одном из множеств $U(a_0, \varepsilon)$, $U(a_1, \varepsilon)$, а следовательно, и ни в одном из множеств $\Phi_0 = [U(a, \varepsilon)]$, $\Phi_1 = [U(a_1, \varepsilon)]$, которые являются непересекающимися компактами диаметров $< \frac{1}{2}$.

Предположим теперь, что для данного $n \geqslant 1$ и для любой системы из n индексов $i_1, \ldots, i_n$, каждый из которых равен 0 или 1, построены совершенные компакты $\Phi_{i_1 \ldots i_n} \subset \Phi$, обладающие следующими свойствами:

1) они попарно не пересекаются;

2) каждый из них имеет диаметр $< \frac{1}{2^n}$.

Для $n = 1$ такими компактами как раз и являются наши Φ_0 и Φ_1. Построим компакты $\Phi_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}}$ следующим образом. В $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$ возьмем две точки $a_{i_1 \ldots i_n 0}$ и $a_{i_1 \ldots i_n 1}$ и возьмем $\varepsilon > 0$, меньшее чем $\frac{1}{2}\rho(a_{i_1 \ldots i_n 0}, \; a_{i_1 \ldots i_n 1})$ и $\frac{1}{2^{n+2}}$. Тогда, беря в $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$ окрестности $U(a_{i_1 \ldots i_n 0}, \varepsilon)$ и $U(a_{i_1 \ldots i_n 1}, \varepsilon)$, получим два непересекающихся совершенных компакта

$$\Phi_{i_1 \ldots i_n 0} = [U(a_{i_1 \ldots i_n 0}, \varepsilon)],$$
$$\Phi_{i_2 \ldots i_n 1} = [U(a_{i_1 \ldots i_n 1}, \varepsilon)]$$

диаметра $< \frac{1}{2^{n+1}}$, что нам и требовалось.

Итак, для любого натурального n нами построены совершенные компакты $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$ — «компакты ранга n», удовлетворяющие условиям 1), 2). При этом из нашего построения следует, что всегда $\Phi_{i_1 \ldots i_n i_{n+1}} \subset \Phi_{i_1 \ldots i_n}$. Обозначая теперь через Φ^n сумму всех 2^n компактов n-го ранга $\Phi_{i_1 \ldots i_n}$, получим компакт $\Phi^\omega = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi^n \subset \Phi$. Каждой бесконечной последовательности

$$i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots, \qquad i_n = {0 \atop 1}, \tag{1}$$

соответствует единственная точка

$$\xi_{i_1 \ldots i_n \ldots} = (\Phi_{i_1} \cap \Phi_{i_1 i_2} \cap \ldots \cap \Phi_{i_1 \ldots i_n} \cap \ldots) \in \Phi^{\omega},$$

и обратно, для каждой точки $\xi \in \Phi^{\omega}$ существует лишь одно i_1 такое, что $\xi \in \Phi_{i_1}$, лишь одно i_2 такое, что $\xi \in \Phi_{i_1 i_2}$, и т. д., значит, существует однозначно определенная последовательность (1) такая, что

$$\xi = \Phi_{i_1} \cap \Phi_{i_1 i_2} \cap \ldots \cap \Phi_{i_1 \ldots i_n} \cap \ldots,$$

т. е. что

$$\xi = \xi_{i_1 \ldots i_n \ldots}$$

Вспомним теперь, что при построении канторова дисконтинуума Π мы для каждого натурального n имели 2^n сегментов ранга n, обозначенных через $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$, и что, ставя в соответствие каждой точке x канторова дисконтинуума единственный содержащий ее сегмент $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ ранга n, мы также имели взаимно однозначное соответствие между всеми последовательностями (1) и всеми точками канторова дисконтинуума, так что каждая точка $x \in \Pi$ однозначно записывалась в виде

$$x = x_{i_1 \ldots i_n \ldots}$$

Поставим теперь в соответствие каждой точке $x_{i_1 \ldots i_n \ldots} \in \Pi$ точку $\xi_{i_1 \ldots i_n \ldots} \in \Phi$. Это соответствие есть, очевидно, взаимно однозначное соответствие между Π и Φ^{ω}. Легко доказать, что оно взаимно непрерывно. В силу теоремы 12 достаточно доказать, что оно непрерывно в одну сторону, например в сторону от Π к Φ^{ω}. Для этого возьмем произвольную окрестность $U(\xi, \varepsilon)$ точки $\xi = \xi_{i_1 \ldots i_n \ldots}$ и возьмем n столь большим, чтобы $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Тогда $\Phi_{i_1 \ldots i_n} \subseteq U(\xi, \varepsilon)$. Возьмем $\delta < \frac{1}{3^n}$. Так как расстояние между двумя различными сегментами ранга n больше или равно $\frac{1}{3^n}$, то для всех точек $x \in \Pi$, отстоящих от $x_{i_1 \ldots i_n \ldots}$ меньше чем на δ, имеем $x \in \Delta_{i_1 \ldots i_n}$. Значит, образы этих точек x при нашем отображении Π на Φ^{ω} содержатся в $\Phi_{i_1 \ldots i_n} \subseteq U(\xi, \varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Теорема 24. *Всякий компакт есть непрерывный образ канторова дисконтинуума.*

Замечание 1. Из теоремы 9 § 2 следует, что всякое метрическое пространство, являющееся непрерывным образом канторова дисконтинуума, есть компакт; это обстоятельство, вместе с теоремой 24, позволяет сказать:

Для того чтобы метрическое пространство было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывным образом канторова дисконтинуума.

Доказательство теоремы 24. Пусть дан компакт Φ. Как мы знаем, он при любом $\varepsilon > 0$ может быть представлен в виде суммы конечного числа замкнутых множеств $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ диаметра $< \varepsilon$. При этом всегда можно заменить число s этих слагаемых любым заданным числом $s' > s$, положив

$$\Phi_{s+1} = \Phi_{s+2} = \ldots = \Phi_{s'} = \Phi_s,$$

так как мы вовсе не предполагаем, что множества Φ_i попарно различны между собою. В частности, можно всегда предположить, что число s имеет вид 2^n.

Представим теперь Φ в виде суммы $s_1 = 2^{n_1}$ замкнутых слагаемых $\Phi_1, \ldots, \Phi_{s_1}$ диаметра $< \frac{1}{2}$, которые будем называть компактами первого ранга. Каждый компакт Φ_{h_1} первого ранга представим в виде суммы 2^{n_2} компактов $\Phi_{h_1 h_2}$ диаметра $< \frac{1}{2^2}$. Таким образом, весь компакт Φ представится теперь в виде суммы $s_2 = 2^{n_1+n_2}$ компактов второго ранга $\Phi_{h_1 h_2}$. Каждый из компактов $\Phi_{h_1 h_2}$ представляем в виде суммы одного и того же числа 2^{n_3} компактов $\Phi_{h_1 h_2 h_3}$ диаметра $< \frac{1}{2^3}$ (компакты третьего ранга) и т. д. Вообще, для любого натурального числа m мы будем иметь представление компакта Φ в виде суммы $s_m = 2^{n_1 + \ldots + n_m}$ компактов $\Phi_{h_1 \ldots h_m}$ ранга m, кричем каждый компакт $\Phi_{h_1 \ldots h_{m-1}}$ ранга $m-1$ будет представлен в виде суммы 2^{n_m} компактов $\Phi_{h_1 \ldots h_{m-1} h_m}$ и диаметр каждого компакта m-го ранга будет $< \frac{1}{2^m}$. Параллельно с этим рассмотрим для каждого m данные нам в числе $s_m = 2^{n_1 + \ldots + n_m}$ сегменты $\Delta_{i_1 \ldots i_{r_m}}$ ранга $r_m = n_1 + \ldots + n_m$ $\left(\text{длины } \frac{1}{3^{r_m}}\right)$, служившие для построения канторова дисконтинуума. Каждый сегмент $\Delta_{i_1 \ldots i_{r_m}}$ ранга r_m обозначим теперь просто через $\Delta^{h_1 \ldots h_m}$, где h_k принимает значения $1, 2, 3, \ldots, 2^{n_k}$. Это обозначение основано на том, что каждый сегмент ранга $r_m = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ лежит на некотором сегменте $\Delta_{i_1 \ldots i_{n_1}} = \Delta^{h_1}$ ранга n_1, на некотором сегменте $\Delta_{i_1 \ldots i_{n_1} \ldots i_{n_2}} = \Delta^{h_1 h_2}$ ранга $n_1 + n_2$ и т. д., следовательно, естественнно получает обозначение $\Delta^{h_1 \ldots h_m}$ (где h_k принимает значения $1, 2, 3, \ldots, 2^{n_k}$). В силу этих обозначений оказывается установленным взаимно однозначное соответствие между всеми сегментами $\Delta^{h_1 \ldots h_m}$ ранга r_m и компактами $\Phi_{h_1 \ldots h_m}$ ранга m.

Каждой точке $x \in \Pi$ однозначно соответствуют последовательность

$$\Delta^{h_1} \supset \Delta^{h_1 h_2} \supset \ldots \supset \Delta^{h_1 h_2 \ldots h_m} \supset \ldots \tag{2}$$

содержащих ее сегментов, а следовательно, последовательность

$$\Phi_{h_1} \supset \Phi_{h_1 h_2} \supset \ldots \supset \Phi_{h_1 h_2 \ldots h_m} \supset \ldots \tag{3}$$

и единственная точка $\xi = f(x)$, составляющая пересечение компактов (3). С другой стороны, для каждой точки $\xi \in \Phi$ можем взять некоторый содержащий ее компакт Φ_{h_1} первого ранга (таких компактов первого ранга может быть, вообще говоря, несколько, тогда мы из них берем, например, тот, у которого индекс наименьший). Далее, берем некоторый компакт второго ранга $\Phi_{h_1 h_2}$, содержащий точку ξ (помня, что индекс h_1 при этом был уже зафиксирован), некоторый компакт третьего ранга $\Phi_{h_1 h_2 h_3}$ и т. д. Получаем, таким образом, последовательность (3), пересечением элементов которой и является точка ξ. Соответствующая последовательность (2) дает в пересечении точку $x \in \Pi$, и $\xi = f(x)$.

Итак, отображение f есть отображение канторова дисконтинуума Π на весь компакт Φ. Легко видеть, что отображение это непрерывно. В самом деле, при заданном $\varepsilon > 0$ берем столь большое m, чтобы было $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. После этого полагаем $\delta = \frac{1}{3^{r_m}}$. Рассмотрим теперь какую-либо точку $x = \Delta^{h_1} \cap \Delta^{h_1 h_2} \cap \ldots$ $\ldots \cap \Delta^{h_1 \ldots h_m} \cap \ldots$ Все точки $x' \in \Pi$, отстоящие от x меньше чем на δ, принадлежат тому же сегменту $\Delta^{h_1 \ldots h_m}$ ранга r_m, что и x. Поэтому их образы будут принадлежать компакту $\Phi_{h_1 \ldots h_m}$, содержащему $\xi = f(x)$, и, значит, $\rho(f(x), f(x')) < \delta(\Phi_{h_1 \ldots h_m}) < \frac{1}{2^m} < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. Если бы в предыдущем построении можно было выбрать компакты $\Phi_{h_1 \ldots h_m}$ так, чтобы два компакта одного и того же ранга не имели общих точек, то каждая точка $\xi \in \Phi$ однозначно определяла бы последовательность (2) содержащих ее компактов $\Phi_{h_1 \ldots h_m}$ различных рангов, а тогда однозначно определялась бы и точка x, для которой $\xi = f(x)$.

Другими словами, отображение канторова дисконтинуума на компакт Φ было бы взаимно однозначным и, в силу теоремы 12, сам компакт Φ был бы гомеоморфен канторову дисконтинууму. Очевидно, для этого необходимо, чтобы компакт Φ был нульмерным и притом совершенным компактом, т. е. дисконтинуумом. Это условие оказывается и достаточным. В самом деле, пусть Φ — совершенный нульмерный компакт. Тогда Φ при всяком $\varepsilon > 0$ может быть представлен в виде суммы попарно не пересекающихся компактов $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ диаметра $< \varepsilon$. Если бы хоть один из компактов Φ_i содержал изолированную точку, то она была бы изолированной точкой в Φ. Итак, все Φ_i суть дисконтинуумы диаметра $< \varepsilon$. Мы утверждаем, что, каково бы ни было натуральное $s' > s$, всегда можно заменить представление

$$\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_s, \quad \Phi_i \cap \Phi_j = \Lambda, \quad \delta(\Phi_i) < \varepsilon,$$

представлением

$$\Phi = \Phi'_1 \cup \ldots \cup \Phi'_{s'}, \quad \Phi'_i \cap \Phi'_j = \Lambda, \quad \delta(\Phi'_i) < \varepsilon.$$

Достаточно доказать это утверждение для $s' = s + 1$. Но в этом случае достаточно представить дисконтинуум Φ_s в виде суммы двух непересекающихся непустых компактов Φ'_s и Φ'_{s+1} и положить $\Phi'_i = \Phi_i$ для любого $i \leqslant s - 1$. Из этого замечания, в частности, следует, что дисконтинуум Φ можно представить в виде суммы попарно не пересекающихся непустых компактов $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$, где $s = 2^{n_1}$. После этого представляем каждый из компактов Φ_{h_1} ($h_1 = 1, \ldots, 2^{n_1}$) в виде суммы одного и того же числа 2^{n_2} попарно не пересекающихся компактов $\Phi_{h_1 h_2}$ диаметра $< \frac{1}{4}$ и т. д. Другими словами, мы можем провести всю конструкцию компактов $\Phi_{h_1 \ldots h_m}$ так, чтобы два компакта одного ранга не имели общих точек, откуда, как мы только что видели, следует гомеоморфизм между данным дисконтинуумом Φ и канторовым дисконтинуумом. Итак:

Теорема 24′. *Для того чтобы метрическое пространство X было гомеоморфно канторову дисконтинууму, необходимо и достаточно, чтобы оно было дисконтинуумом.*

Из теорем 23, 24 и результата, полученного в § 5 гл. 4, следует

Теорема 25. *Всякий непустой совершенный компакт (в частности, всякий собственно континуум) имеет мощность* $\mathfrak{c}$.

Отсюда следует

Теорема 25′. *Всякое непустое совершенное ограниченное множество евклидова пространства любого числа измерений имеет мощность* $\mathfrak{c}$.

Замечание 3. Читателю самому предоставляется убедиться в том, что эта теорема верна и для совершенных неограниченных множеств, расположенных в евклидовом пространстве любого числа измерений.

Из теоремы 24 в соединении с теоремой 30 § 7 гл. 4 следует, далее, что *всякий несчетный компакт (в частности, всякое несчетное замкнутое ограниченное множество евклидова пространства любого числа измерений) имеет мощность* $\mathfrak{c}$.

Из теоремы 24′ следует, что, как бы сложно данный дисконтинуум ни был расположен — например, в евклидовом пространстве того или иного числа измерений, — он все равно топологически эквивалентен канторову дисконтинууму.

Примеры.

1. Приведем конструкцию, являющуюся как бы двумерным аналогом первоначальной конструкции канторова дисконтинуума. Возьмем квадрат Q со стороной 1 и разобьем его на девять равных квадратов (рис. 10). Удалив внутренность заштрихованной крестообразной фигуры, состоящей из пяти квадратов, получим четыре замкнутых квадрата Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 («квадраты первого ранга»), расположенных по углам квадрата Q. С каждым из квадратов первого ранга повторим то же построение. Получим 16 квадратов второго ранга $Q_{i_1 i_2}$, изображенных на рис. 10 (незаштрихованные квадраты). Вообще, для любого n получаем 4^n попарно не пересекающихся замкнутых квадратов со стороной $\frac{1}{3^n}$ («квадраты n-го ранга»). Сумму всех замкнутых квадратов n-го ранга обозначим через Q^n. Пересечение всех Q^n есть дисконтинуум Φ. Если Q есть «единичный квадрат» $[0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1]$, то Φ состоит из всех тех точек этого квадрата, обе координаты которых имеют троичное разложение, состоящее лишь из нулей и двоек. Отсюда легко следует, что наш компакт Φ представляет собою метрическое произведение канторова дисконтинуума на себя. Легко сделать аналогичное построение в трехмерном и, вообще, в n-мерном пространстве, т. е. построить дисконтинуумы, являющиеся метрическими произведениями трех и более экземпляров канторова дисконтинуума. Все такие компакты являются дисконтинуумами, а следовательно, гомеоморфны канторову дисконтинууму.

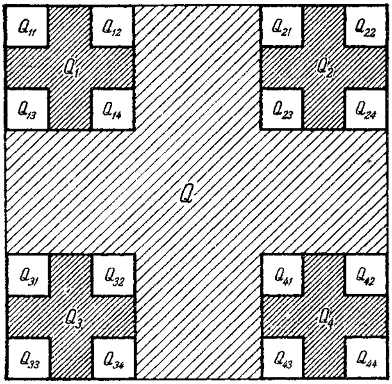

Рис. 10.

2. Пример Антуана. Это — один из самых замечательных дисконтинуумов трехмерного пространства. Его построению предпошлем несколько замечаний.

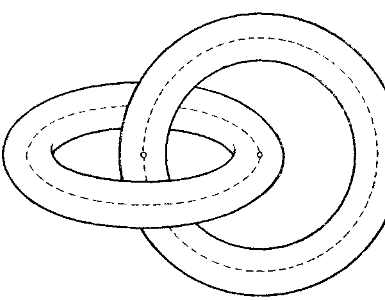

Рис. 11.

Под *тором* мы в последующем все время понимаем тело, полученное от вращения замкнутого круга K вокруг оси, лежащей в плоскости этого круга и его не пересекающей. Когда круг K, вращаясь вокруг прямой yy' описывает тор, то центр круга K описывает окружность, называемую *осевой окружностью тора*; ее центр назовем *центром тора*. Плоскость осевой окружности тора назовем *экваториальной плоскостью тора*. Назовем два дизъюнктных тора *зацепленными*, если они не имеют общих точек и их экваториальные плоскости взаимно перпендикулярны, причем осевая окружность каждого из двух торов проходит через внутренность круга, ограниченного осевой окружностью другого тора (рис. 11).

Конечная система торов $T_1, T_2, \ldots, T_s$ образует, по определению, замкнутую цепь, если каждые два из этих торов находятся друг от друга на положительном расстоянии и если T_1 и T_s, а также при любом $i=1, \ldots, s-1$ торы T_i и T_{i+1} зацеплены между собою. Замкнутая цепь торов называется ε-цепью, если каждый из составляющих ее торов имеет диаметр $< \varepsilon$. Положим теперь $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, и возьмем какой-либо тор T_0 диаметра $< \varepsilon_0 = 1$. Внутри тора T_0 возьмем замкнутую ε_1-цепь торов $T_1, T_2, \ldots, T_s$, центры которых лежат на осевой окружности тора T_0. Это — торы первого ранга. Внутри каждого тора T_{i_1} первого ранга возьмем замкнутую ε_2-цепь торов $T_{i_1 1}, \ldots, T_{i_1 s_{i_1}}$ (торы второго ранга), центры которых лежат на оси тора T_{i_1}. Продолжая это построение, получим при любом n систему торов n-го ранга $T_{i_1 \ldots i_n}$ диаметра $< \varepsilon_{n}$, причем торы одного и того же ранга не имеют общих точек, каждый тор n-го ранга $T_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n}$ лежит внутри тора $T_{i_1 \ldots i_{n-1}}$ ранга $n-1$ и все торы n-го ранга, лежащие внутри данного тора $(n-1)$-го ранга, образуют замкнутую ε_n-цепь и имеют свои центры на осевой окружности тора $T_{i_1 \ldots i_{n-1}}$. Обозначая через T^n сумму всех торов n-го ранга, получим дисконтинуум $\Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n$. Это и есть дисконтинуум Антуана. Его расположение в трехмерном пространстве очень замечательно. В самом деле, возьмем какую-либо точку C на осевой окружности тора T^0 и проведем через прямую yy^0 (рис. 12) и точку C плоскость α. В этой плоскости возьмем окружность Γ с центром в C, проходящую через центр тора T^0. Можно доказать следующую теорему: *возьмем какой-нибудь круг Q, например круг $x^2+y^2 \leqslant 1$, и любое его непрерывное отображение в трехмерное пространство, при котором окружность $x^2+y^2=1$ взаимно однозначно* (а следовательно, и взаимно непрерывно) *отображается на окружность Γ. Тогда образ внутренности круга Q непременно имеет общие точки с множеством* Φ. Наглядный смысл этой очень трудно доказываемой теоремы заключается в том, что если представлять себе окружность сделанной, например, из резины, то при всякой непрерывной деформации (всяком «стягивании») этой окружности в одну точку она в процессе этой деформации непременно заденет за множество Φ. Между тем дисконтинуум Φ, как всякий дисконтинуум, гомеоморфен канторову.

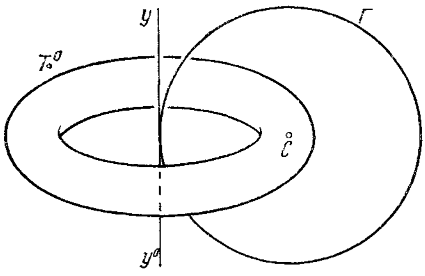

Рис. 12.

* * *

Замечание 4. Во всех рассуждениях этого параграфа основное место занимало построение в том или ином метрическом пространстве некоторой системы компактных замкнутых множеств $\Phi_{i_1 \ldots i_m}$, снабженных конечными системами индексов $i_1 \ldots i_m$, причем каждый из этих индексов принимал конечное число значений, число же m этих индексов — всевозможные значения 1, 2, 3, ... до бесконечности. При этом всегда

$$\Phi_{i_1 \ldots i_m} \supseteq \Phi_{i_1 \ldots i_m i_{m+1}}.$$

Такие системы множеств $\Phi_{i_1 \ldots i_m}$ называются *конечно ветвящимися системами*. Последовательности вида

$$\Phi_{i_1} \supseteq \Phi_{i_1 i_2} \supseteq \ldots \supseteq \Phi_{i_1 i_2 \ldots i_m} \supseteq \ldots$$

называются цепями ветвящейся системы; пересечение всех множеств, образующих цепь, называется ядром цепи, а сумма ядер всех цепей ветвящейся системы называется ядром этой системы.

Все эти понятия остаются в силе, если перейти от конечно ветвящейся к счетно ветвящейся системе множеств. *Счетно ветвящейся системой* или *A-системой* множеств пространства X называется система множеств $M_{i_1 \ldots i_m}$, каждое из которых снабжено конечным числом индексов $i_1, \ldots, i_m$, принимающих любые целые положительные значения (так что любой комбинации $i_1 \ldots i_m$ любого числа m натуральных чисел соответствует теперь элемент $M_{i_1 \ldots i_m}$ данной A-системы). Кроме того, требуется, чтобы всегда было $M_{i_1 \ldots i_m} \supseteq \supseteq M_{i_1 \ldots i_m i_{m+1}}$. Таким образом, A-система содержит счетное множество элементов $M_1, M_2, \ldots, M_{i_1}, \ldots$ первого ранга (т. е. несущих по одному индексу); каждому элементу M_{i_1} первого ранга «подчинено» счетное множество содержащихся в нем элементов второго ранга $M_{i_1 1}, \ldots, M_{i_1 i_2}, \ldots$, каждому элементу $M_{i_1 i_2}$ второго ранга подчинено счетное множество элементов третьего ранга $M_{i_1 i_2 1}, \ldots, M_{i_1 i_2 i_3}, \ldots$ и т. д. Последовательность вида

$$M_{i_1}, M_{i_1 i_2}, \ldots, M_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \ldots,$$

каждый элемент которой (кроме первого) подчинен предыдущему, называется *цепью* A-системы; пересечение элементов, образующих цепь, называется *ядром* этой *цепи*, и, наконец, сумма ядер всех цепей A-системы называется *ядром* данной *A-системы*. Существенно заметить, что в определении A-системы отнюдь не содержится требование, чтобы два множества, являющиеся элементами одного и того же ранга, не пересекались между собою; более того, различные элементы одного и того же ранга могут быть и тождественными точечными множествами; в связи с этим следует заметить, что каждый элемент $M_{i_1 \ldots i_{m-1} i_m}$ ранга $m > 1$ подчинен единственному элементу ранга $m-1$, а именно элементу $M_{i_1 \ldots i_{m-1}}$, но может быть подмножеством и других элементов ранга $m-1$. Поэтому, обозначая через M^m сумму всех элементов m-го ранга, мы получаем множество $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} M^m$, вовсе не совпадающее, вообще говоря, с ядром данной A-системы (а лишь содержащее это ядро); в случаях, когда это совпадение имеет место, сама A-операция, т. е. переход от заданной системы множеств $M_{i_1 \ldots i_m}$ к ее ядру, не представляет интереса, так как может быть заменена сложением множеств каждого данного ранга и взятием пересечения полученных множеств M^m. Чаще всего рассматриваются A-системы, элементами которых являются замкнутые множества данного пространства X. Те множества пространства X, которые могут быть получены в качестве ядра некоторой A-системы, составленной из замкнутых множеств пространства X, называются *A-множествами* пространства X. *Все борелевские множества являются частным случаем A-множеств* *).

---

*) Это доказать нетрудно; так как все замкнутые множества суть A-множества, все борелевские множества могут быть получены из замкнутых при-

A-множества, расположенные в евклидовых, а также в гильбертовом, пространствах, допускают очень далеко идущее изучение. В то же время за пределами A-множеств многие самые естественные задачи теории множеств оказываются, по крайней мере в настоящее время, неразрешимыми. Такова, например, простейшая из задач теории множеств — задача определения мощности множества: оказывается, всякое несчетное A-множество любого евклидова или гильбертова пространства, вообще всякого сепарабельного полного *) метрического пространства непременно содержит некоторый дисконтинуум **), а потому имеет мощность $\mathfrak{c}$, тогда как даже на числовой прямой задача определения мощности множеств, дополнительных к A-множествам, сталкивается с трудностями, представляющимися в настоящее время совершенно непреодолимыми. Множество, дополнительное к A-множеству, может само не быть A-множеством: A-множества, дополнительные к которым также являются A-множествами, суть не что иное, как борелевские множества. Эту замечательную теорему доказал М. Я. Суслин, построивший при помощи своей теоремы и первый пример A-множества, не являющегося борелевским множеством, в 1916 г. Только после этого примера и стало возможным говорить о классе A-множеств как о классе множеств, действительно более широком, чем класс борелевских множеств. Теория A-множеств является наиболее разработанной главой так называемой дескриптивной теории множеств; читателей, желающих познакомиться с ней, мы отсылаем к книге Х а у с д о р ф а [1], гл. 8 и 9 ***), и к книге К у р а т о в с к о г о [*1*], т. 1.

§ 5. Определение и примеры полных метрических пространств

Последовательность точек
$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{1}$$
метрического пространства X называется *фундаментальной последовательностью*, если ко всякому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое натуральное число n_ε, что для любых $p \geqslant n_\varepsilon$, $q \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь $\rho(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Очевидно, *всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.*

Метрическое пространство называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность является сходящейся. Подпространство числовой прямой, состоящее из всех рациональных точек, может служить примером неполного метрического пространства (доказательство будет приведено ниже).

менением счетного числа раз операций сложения и пересечения, то достаточно доказать, что сумма и пересечение счетного и числа A-множеств суть A-множества. Это последнее доказательство может быть проведено читателем самостоятельно.

*) Определение полного метрического пространства дано в следующем параграфе.

**) Доказано впервые П. С. Александровым в 1916 г.

***) Название «A-множество» было предложено Суслиным; Хаусдорф называет A-множества суслинскими множествами.

Если в данной фундаментальной последовательности (1) *имеется сходящаяся подпоследовательность*

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \tag{2}$$

с пределом a, то и вся последовательность (1) *сходится к пределу a.* В самом деле, выберем число n_ε столь большим, чтобы для любых $p \geqslant n_\varepsilon$, $q \geqslant n_\varepsilon$ выполнялось условие $\rho(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Докажем, что для любого $n \geqslant n_\varepsilon$ имеем

$$\rho(a, x_n) < \varepsilon.$$

В самом деле, достаточно взять в последовательности (2) такое x_{n_k}, чтобы одновременно выполнялись условия $n_k \geqslant n_\varepsilon$, $\rho(a, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$. При $n \geqslant n_\varepsilon$ будем иметь

$$\rho(a, x_n) \leqslant \rho(a, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Замечание 1. Только что доказанное утверждение можно высказать и так: если фундаментальная последовательность не является сходящейся, то она *вполне расходящаяся* (в том смысле, что никакая ее подпоследовательность не сходится).

Докажем, что пространство R всех рациональных точек числовой прямой неполно. Возьмем последовательность

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \tag{3}$$

рациональных чисел, сходящихся на прямой к некоторому иррациональному пределу ξ. Тогда в пространстве R последовательность (3) будет расходящейся фундаментальной последовательностью, а пространство R, следовательно, будет неполным.

Замечание 2. Из определения полного метрического пространства сразу следует, что *всякое замкнутое множество, лежащее в полном пространстве, само является полным пространством.*

Легко видеть, что *всякий компакт является полным метрическим пространством.* В самом деле, так как из всякой последовательности точек компакта можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то согласно замечанию 1 всякая фундаментальная последовательность точек компакта является сходящейся. Далее, мы видели еще в § 9 гл. 4, что всякая фундаментальная последовательность точек числовой прямой есть последовательность сходящаяся (в этом и заключается принцип сходимости Коши), так что *числовая прямая есть полное метрическое пространство.*

Докажем полноту n-мерного евклидова пространства. Пусть дана в R^n фундаментальная последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, \tag{4}$$

где $a_m = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$. Так как, очевидно,

$$\rho(x_i^{(p)}, x_i^{(q)}) \leqslant \rho(a_p, a_q)$$

при любом $i = 1, 2, \ldots, n$, то каждая из последовательностей

$$x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(m)}, \ldots, \tag{5}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$, есть фундаментальная последовательность действительных чисел и потому сходится к некоторому

$$x_i = \lim_{n \to \infty} x_i^{(m)} \tag{6}$$

(при $i = 1, 2, \ldots, n$). Но тогда и последовательность (4) сходится к точке $a = (x_1, \ldots, x_n)$.

Докажем теперь, что *гильбертово пространство есть полное метрическое пространство.* Доказательство аналогично только что приведенному доказательству для евклидова пространства, но осложняется, естественно, некоторыми вопросами сходимости. Пусть (4) есть снова фундаментальная последовательность, но теперь уже в гильбертовом пространстве, так что

$$a_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, \ldots). \tag{4'}$$

Для любого i, принимающего теперь любое из значений $1, 2, 3, \ldots$, имеем фундаментальную последовательность (5) с пределом (6). Надо прежде всего доказать, что

$$a = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \tag{7}$$

есть точка гильбертова пространства, т. е. что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ сходится. Это доказательство опирается на неравенство Коши — Буняковского

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||b_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}, \tag{8}$$

верное для любых двух последовательностей действительных чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \quad \text{и} \quad b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\text{*)}.$$

---

*) Конечный случай этого неравенства $\left(\text{в котором вместо } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \text{ стоит } \sum\limits_{n=1}^{N}\right)$ был доказан в § 6 гл. 4.

Докажем неравенство Коши — Бунявского для бесконечных сумм. Неравенство (8) несомненно верно, если хотя бы один из двух рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ является расходящимся, так как тогда справа стоит $+\infty$. Предположим, Докажем прежде всего, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое m_ε, что для $m > m_\varepsilon$ будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_n^{(m)})^2 < \varepsilon^2. \tag{9}$$

В самом деле, возьмем m_ε столь большим, чтобы для $l > m_\varepsilon$, $m > m_\varepsilon$ было $\rho(a_l, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^{(l)} - x_n^{(m)})^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Тогда для любого натурального числа k и подавно будем иметь

$$\sum_{n=1}^{k} (x_n^{(l)} - x_n^{(m)})^2 < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

значит, после предельного перехода $l \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{k} (x_n - x_n^{(m)})^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4},$$

что при $k \to \infty$ дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_n^{(m)})^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2,$$

что оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Тогда, беря в гильбертовом пространстве точки

$$o = (0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots),$$
$$a = (|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_n|, \ldots),$$
$$c = (|a_1| + |b_1|, |a_2| + |b_2|, \ldots, |a_n| + |b_n|, \ldots)$$

и записывая для них неравенство треугольника $\rho(o, c) \leqslant \rho(o, a) + \rho(a, c)$, получаем

$$\sqrt{\sum (|a_n| + |b_n|)^2} \leqslant \sqrt{\sum a_n^2} + \sqrt{\sum b_n^2},$$

$$\sum (|a_n| + |b_n|)^2 \leqslant \sum a_n^2 + \sum b_n^2 + 2\sqrt{\sum a_n^2 \cdot \sum b_n^2},$$

или, после очевидных сокращений,

$$\sum |a_n| |b_n| \leqslant \sqrt{\sum a_n^2 \cdot \sum b_n^2}.$$

т. е. неравенство (9). Для любого $m > m_\varepsilon$ имеем теперь по неравенству Коши—Буняковского

$$\left|\sum_n x_n^{(m)}(x_n - x_n^{(m)})\right| \leqslant \sqrt{\sum_n (x_n^{(m)})^2 \cdot \sum_n (x_n - x_n^{(m)})^2},$$

где справа под знаком радикала ряды сходятся. Следовательно, в выражении

$$\sum_n (x_n - x_n^{(m)})^2 + \sum_n (x_n^{(m)})^2 + 2\sum_n x_n^{(m)}(x_n - x_n^{(m)})$$

все ряды — абсолютно сходящиеся, так что имеем тождество

$$\sum_n (x_n - x_n^{(m)})^2 + \sum_n (x_n^{(m)})^2 + 2\sum_n x_n^{(m)}(x_n - x_n^{(m)}) = \sum_n x_n^2,$$

из которого и следует сходимость ряда $\sum\limits_n x_n^2$.

Итак, (7) есть действительно точка гильбертова пространства. Остается доказать, что к ней сходится последовательность (4). Но при $m > m_\varepsilon$ имеем, в силу (9) и определения точки (7),

$$\rho(a, a_m) < \varepsilon^2,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение. Доказать полноту пространства Бэра.

Полным является и пространство C всех непрерывных функций, определенных на каком-нибудь отрезке $[a; b]$ числовой прямой (см. § 6 гл. 4). Докажем более общее предложение.

Назовем отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y *ограниченным*, если множество $f(X) \subseteq Y$ ограничено (т. е. имеет конечный диаметр).

Если f и g — два ограниченных отображения пространства X в Y, то множество $f(X) \cup g(X) \subseteq Y$ ограничено, поэтому и

$$\sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$$

есть конечное неотрицательное число. Это число назовем *расстоянием* $\rho(f, g)$ *между отображениями* f *и* g. Если $f \neq g$, т. е. есть хотя бы одна точка $x \in X$, для которой $f(x) \neq g(x)$, то, очевидно, $\rho(f, g) > 0$; так как, с другой стороны, $\rho(f, f) = 0$, то введенное нами расстояние удовлетворяет аксиоме тождества. Удовлетворяет оно, очевидно, и аксиоме симметрии. Аксиома треугольника

$$\rho(f_1, f_3) \leqslant \rho(f_1, f_2) + \rho(f_2, f_3)$$

выполнена для любых трех ограниченных отображений f_1, f_2, f_3. В самом деле, какова бы ни была точка $x \in X$, имеем

$$\rho(f_1(x), f_3(x)) \leqslant \rho(f_1(x), f_2(x)) + \rho(f_2(x), f_3(x)) \leqslant \rho(f_1, f_2) + \rho(f_2, f_3),$$

поэтому и

$$\rho(f_1, f_3) = \sup_{x \in X} \rho(f_1(x), f_3(x)) \leqslant \rho(f_1, f_2) + \rho(f_2, f_3).$$

Итак, множество всех ограниченных отображений метрического пространства X в метрическое пространство Y с определенным нами в этом множестве расстоянием есть метрическое пространство; обозначим его через $B(X, Y)$. При этом последовательность

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

точек пространства $B(X, Y)$ тогда и только тогда сходится в $B(X, Y)$ к точке f, когда отображения f_n сходятся в X равномерно к отображению f. Отсюда и из предложения 8 § 2 гл. 4 следует, что множество $C(X, Y)$ всех ограниченных непрерывных отображений пространства X в Y замкнуто в пространстве $B(X, Y)$. Мы теперь и будем рассматривать лишь пространство $C(X, Y)$ (с метрикой, взятой из пространства $B(X, Y)$) и докажем следующее предложение:

Пространство $C(X, Y)$ всех ограниченных непрерывных отображений произвольного метрического пространства X в полное метрическое пространство Y есть полное метрическое пространство.

Отметим особо два частных случая:

1. *Пространство всех непрерывных отображений любого метрического пространства в ограниченное полное метрическое пространство (в частности, в компакт) есть полное пространство.*

2. *Пространство всех непрерывных ограниченных действительных функций, определенных в любом метрическом пространстве, есть полное пространство.*

Переходим к доказательству полноты пространства $C(X, Y)$ в общем случае любого X и любого полного Y.

Пусть

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \tag{10}$$

есть фундаментальная последовательность точек пространства $C(X, Y)$. Так как для каждой точки $x \in X$ последовательность

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

есть фундаментальная последовательность точек полного пространства Y, то она сходится к некоторой точке пространства Y; обозначим ее через $f(x)$. Таким образом, определено отображение

$$y = f(x)$$

пространства X в пространство Y. Надо доказать, во-первых что отображение f непрерывно и ограничено и, следовательно, является точкой пространства $C(X, Y)$, и, во-вторых, что последовательность (10) сходится в $C(X, Y)$ к f. Все утверждения будут доказаны, если мы докажем, что непрерывные отображения (10) пространства X в пространство Y сходятся к отображению f равномерно. Но это следует из того, что в силу определения метрики пространства $C(X, Y)$ последовательность (10), будучи фундаментальной в $C(X, Y)$, удовлетворяет условию: к каждому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое n_ε, что при любых $p > n_\varepsilon$, $q > n_\varepsilon$ неравенство

$$\rho(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon \tag{11}$$

выполнено для всех $x \in X$. Переходя при произвольном, но фиксированном $x \in X$ к пределу при $q \to \infty$, получаем

$$\rho(f_p(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$$

для всех $p \geqslant n_\varepsilon$ и всех $x \in X$, чем и доказана равномерная сходимость последовательности отображений (10).

§ 6. Пополнение метрического пространства

Мы приводили в качестве примера неполного метрического пространства пространство всех рациональных точек числовой прямой. Пространство это является всюду плотным подмножеством полного пространства, а именно всей числовой прямой. Мы сейчас покажем, что это всегда бывает так: имеет место

Теорема 26*). *Всякое метрическое пространство X является всюду плотным подмножеством некоторого полного пространства $\tilde{X}$. При этом полное пространство X определено однозначно с точностью до изометрического отображения**), оставляющего неподвижными все точки множества $X \subseteq \tilde{X}$***), и является наименьшим полным метрическим пространством, содержащим X* (т. е. всякое полное метрическое пространство X', содержащее X, содержит множество $X'' \supseteq X$, изометричное пространству $\tilde{X}$).

Определение 3. Пространство $\tilde{X}$ называется *пополнением* пространства X.

Доказательство. Введем сначала понятие расстояния между двумя фундаментальными последовательностями

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \tag{1}$$

и

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots). \tag{2}$$

Замечаем для этого, что при любых m, n мы имеем

$$\rho(x_m, y_m) \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_m),$$
$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(y_n, y_m),$$

откуда следует, что числовая последовательность

$$\rho(x_1, y_1), \rho(x_2, y_2), \ldots, \rho(x_n, y_n), \ldots$$

является фундаментальной, значит, сходящейся. Ее предел мы и назовем *расстоянием* между фундаментальными последовательностями (1) и (2):

$$\rho(x, y) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n). \tag{3}$$

*) Как сама эта теорема, так и приведенное здесь ее доказательство принадлежат Хаусдорфу.

**) Отображение f метрического пространства X на метрическое пространство Y называется *изометрическим* (или конгруэнтным), если оно сохраняет расстояния, т. е. если для любых $x' \in X$, $x'' \in X$ имеем $\rho(f(x'), f(x'')) = \rho(x', x'')$.

***) То есть если X' — какое-нибудь полное метрическое пространство, содержащее X в качестве всюду плотного множества, то существует изометрическое отображение f пространства X' на $\tilde{X}$, удовлетворяющее условию $f(x) = x$ для любой точки $x \in X$.

Из определения (3) следует: для любых трех фундаментальных последовательностей $x=\{x_n\}$, $y=\{y_n\}$, $z=\{z_n\}$ выполнено неравенство треугольника

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, z). \tag{4}$$

В самом деле, имеем $\rho(x_n, z_n) \leqslant \rho(x_n, y_n)+\rho(y_n, z_n)$, откуда неравенство (4) получается переходом к пределу при $n \to \infty$. В частности, если $\rho(x, y)=0$, $\rho(y, z)=0$, то и $\rho(x, z)=0$. Поэтому, называя две фундаментальные последовательности *эквивалентными*, если расстояние между ними равно нулю, получаем разбиение всего множества фундаментальных последовательностей на классы эквивалентных между собою последовательностей. Эти классы для краткости будем называть *пучками пространства* X. Пусть ξ и η — два пучка. Выбирая ξ и η по фундаментальной последовательности $x=\{x_n\}$, $y=\{y_n\}$, без труда убеждаемся в том, что $\rho(x, y)$ сохраняет свое значение, если заменим x, y последовательностями x', y', эквивалентными соответственно последовательностям x и y. Это позволяет определить расстояние $\rho(\xi, \eta)$ между двумя пучками по формуле

$$\rho(\xi, \eta)=\rho(x, y),$$

где $x \in \xi$, $y \in \eta$ выбраны произвольно. Расстояние $\rho(\xi, \eta)$, очевидно, удовлетворяет аксиоме симметрии: $\rho(\xi, \eta)=\rho(\eta, \xi)$, а также аксиоме тождества: $\rho(\xi, \eta)=0$ тогда и только тогда, когда $\xi=\eta$. Наконец, это расстояние $\rho(\xi, \eta)$ удовлетворяет и аксиоме треугольника (так как ей удовлетворяет, как мы только что видели, расстояние между фундаментальными последовательностями).

Итак, наше определение расстояния между пучками превращает множество всех пучков пространства X в метрическое пространство; обозначим его через $\tilde{X}_0$. Назовем отмеченным пучком такой пучок ξ, который в числе своих элементов содержит стационарную последовательность, т. е. последовательность вида

$$(x, x, \ldots, x, \ldots), \qquad x \in X.$$

Так как всякие две различные стационарные последовательности $\{x\}$ и $\{y\}$ имеют между собою положительное расстояние (равное расстоянию между точками x и y), то в каждом отмеченном пучке содержится лишь одна стационарная последовательность. Таким образом, отмеченные пучки взаимно однозначно соответствуют точкам пространства X, причем соответствие это сохраняет расстояние (расстояние между двумя отмеченными пучками равно расстоянию между соответствующими им точками пространства X). Заменим теперь в пространстве $\tilde{X}_0$ все отмеченные пучки соответствующими этим пучкам точками пространства X (все расстояния при этой замене остаются теми же, что и до замены). В результате получается метрическое пространство $\tilde{X}$, очевидно, изометричное пространству $\tilde{X}_0$. Это пространство $\tilde{X}$ и есть то, которое мы хотели построить. Пространство X содержится в $\tilde{X}$ как подмножество. Докажем, что X всюду плотно в $\tilde{X}$. В самом деле, при произвольном $\xi \in \tilde{X} \diagdown X$ и $x \in \xi$,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \tag{5}$$

расстояние между точками ξ и x_n пространства $\tilde{X}$ есть $\rho(\xi, x_n) = \rho(x, x_n)$, где $\rho(x, x_n)$ есть расстояние между фундаментальными последовательностями

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

и

$$x_n = (x_n, x_n, \ldots, x_n, \ldots).$$

Но это расстояние стремится к нулю при возрастании n. Следовательно, для любой фундаментальной последовательности (5), взятой в пучке ξ, имеем

$$\xi = \lim_{n \to \infty} x_n \text{ в } \tilde{X}. \tag{6}$$

Этим доказано, что каждая точка $\xi \in \tilde{X} \diagdown X$ есть точка прикосновения множества $X \subseteq \tilde{X}$ и, значит, X плотно в $\tilde{X}$.

Докажем теперь, что $\tilde{X}$ есть полное пространство. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{7}$$

— фундаментальная последовательность точек пространства $\tilde{X}$. Если ξ_n есть пучок, берем в нем фундаментальную последовательность $\{x_m\}$ и в ней точку $x'_n = x_{m_n}$ так, чтобы было $\rho(\xi_n, x_{m_n}) < \frac{1}{n}$. Если же ξ_n есть точка пространства X, то обозначаем эту точку через x'_n. Полученные точки

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots \tag{8}$$

пространства X образуют фундаментальную последовательность, которая однозначно определяет содержащий ее пучок ξ. Последовательность (8), а значит и последовательность (7), сходится к ξ, чем полнота пространства $\tilde{X}$ доказана.

Пусть теперь $\tilde{X}'$ — какое-нибудь полное метрическое пространство, содержащее пространство X в качестве всюду плотного множества. Тогда каждая точка $\xi' \in \tilde{X}'$ однозначно определяет пучок сходящихся к этой точке фундаментальных последовательностей пространства X и, следовательно, точку ξ пространства $\tilde{X}$. Различным точкам пространства $\tilde{X}'$ соответствуют при этом различные точки пространства $\tilde{X}$. В силу полноты пространства $\tilde{X}'$ каждый пучок пространства X состоит из последовательностей, сходящихся к некоторой точке $\xi' \in \tilde{X}'$, так что только что установленное соответствие есть взаимно однозначное соответствие между точками пространств $\tilde{X}'$ и $\tilde{X}$, при котором каждая точка из X соответствует самой себе. Более того, легко видеть, что полученное соответствие является изометрическим. Наконец, если X' — какое-нибудь полное пространство, содержащее X, то замыкание множества X в X' есть полное пространство, содержащее пространство X уже в качестве всюду плотного множества и потому изометричное пространству $\tilde{X}$. Теорема Хаусдорфа полностью доказана.

Замечание. Взяв пространство рациональных чисел R и построив его пополнение $\tilde{R}$, можно было бы не принадлежащие пространству R точки пространства $\tilde{R}$ назвать иррациональными числами. При этом пришлось бы ввести следующие дальнейшие замечания и определения. Если дано иррациональное число ξ и рациональное число x, то, взяв в пучке ξ какую-нибудь фундаментальную последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

можно было бы легко доказать, что для всех достаточно больших n имеем либо $x_n > x$, либо $x_n < x$. В первом случае полагаем $\xi > x$, во втором $\xi < x$; при этом без труда доказывается, что результат не зависит от того, какую именно последовательность $\{x_n\} \in \xi$ мы взяли. Точно так же, если ξ' и ξ'' — два различных иррациональных числа, то при любом выборе последовательностей $\{x'_n\} \in \xi'$ и $\{x''_n\} \in \xi''$ имеем для всех достаточно больших n либо $x'_n < x''_n$, либо $x'_n > x''_n$. В первом случае полагаем $\xi' < \xi''$, во втором $\xi' > \xi''$; при этом результат снова не зависит от специального выбора последовательностей $\{x'_n\} \in \xi'$ и $\{x''_n\} \in \xi''$. Таким образом, в множестве всех действительных (т. е. рациональных и иррациональных) чисел устанавливается отношение порядка, удовлетворяющее, как можно доказать, обычным аксиомам.

Далее, как мы видели (формула (6)), всякая последовательность $\{x_n\}$, взятая из пучка ξ, сходится в $\tilde{R}$ к точке ξ; итак, всякое иррациональное число ξ есть предел некоторой последовательности рациональных чисел (а именно предел любой последовательности $\{x_n\} \in \xi$). Это позволяет определить действия над действительными числами: чтобы получить, например, сумму двух действительных чисел ξ' и ξ'', возьмем какие-нибудь последовательности $\{x'_n\} \in \xi'$, $\{x''_n\} \in \xi''$, сходящиеся соответственно к ξ', ξ'' (если при этом, например, ξ' рационально, то можно положить $x'_n = \xi'$ для всех n), и рассмотрим последовательность $\{x'_n + x''_n\}$. Эта последовательность оказывается фундаментальной и, следовательно, сходится к некоторому действительному числу, которое и называется суммой двух данных чисел ξ' и ξ''. Читателю предоставляется доказать, что таким образом определенные действия над действительными числами обладают всеми установленными в элементарной алгебре свойствами основных четырех действий.

Намеченная в этом замечании теория иррациональных чисел известна под названием *теории Кантора* и с успехом может состязаться с более распространенной в учебниках дедекиндовой теорией в отношении своей простоты и естественности.

§ 7. Простейшие свойства полных метрических пространств

Мы уже видели, что всякое замкнутое множество в полном пространстве само является полным. Докажем некоторые дальнейшие свойства полных пространств.

Теорема 27. *В полном метрическом пространстве всякая последовательность убывающих замкнутых множеств*

$$\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_n \supseteq \ldots,$$

диаметры которых стремятся к нулю, имеет пересечение, состоящее из одной точки.

В самом деле, так как диаметры множеств Φ_n стремятся к нулю, то пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ во всяком случае не может содержать более одной точки. Беря в каждом из множеств Φ_n по точке x_n, получаем фундаментальную последовательность $\{x_n\}$, предел которой содержится в $\Phi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$.

Теорема 28. *Если каждое из открытых множеств $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ $\ldots, \Gamma_n, \ldots$ полного метрического пространства X плотно в X, то их пересечение $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ также есть всюду плотное в X множество (очевидно, типа G_δ).*

Сначала доказывается

Лемма. *Если открытое множество Γ плотно в метрическом пространстве X, то, каково бы ни было непустое открытое множество Γ_0, имеется открытое множество Γ' произвольно малого диаметра, замыкание которого содержится в $\Gamma \cap \Gamma_0$.*

В самом деле, так как Γ плотно в X, то $\Gamma \cap \Gamma_0$ — непустое открытое множество; всякая точка $x \in \Gamma \cap \Gamma_0$ имеет положительное расстояние ρ_x от дополнительного к $\Gamma \cap \Gamma_0$ замкнутого множества. Беря произвольно малое $\varepsilon < \rho_x$, видим, что замыкание ε-окрестности точки x содержится в $\Gamma \cap \Gamma_0$; лемма доказана.

Для доказательства теоремы 28 достаточно в любом открытом множестве Γ_0 найти точку множества $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$. Берем, в силу леммы, открытое множество Γ_1' диаметра < 1, удовлетворяющее условию $[\Gamma_1'] \subseteq \Gamma_1 \cap \Gamma_0$. Предполагая, что построены открытые множества

$$\Gamma_0' = \Gamma_0, \ \Gamma_1', \ \ldots, \ \Gamma_n',$$

$\delta(\Gamma_k') < \frac{1}{k}$ при $k=1, 2, 3, \ldots, n$, удовлетворяющие условию

$$[\Gamma_k'] \subseteq \Gamma_k \cap \Gamma_{k-1}' \quad (\text{при } k=1, 2, \ldots, n),$$

построим, на основании леммы, открытое множество Γ_{n+1}' диаметра $< \frac{1}{n+1}$ такое, что $[\Gamma_{n+1}'] \subseteq \Gamma_n \cap \Gamma_n'$. Пересечение $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\Gamma_n']$ непусто (состоит из одной точки) и содержится в $M \cap \Gamma_0$, что и требовалось доказать.

Легко видеть, что пересечением M любого конечного или счетного числа всюду плотных в данном полном метрическом пространстве X множеств типа G_δ есть также всюду плотное множество типа G_δ. Интересно заметить, что среди всех множеств, лежащих в каком-либо метрическом пространстве, все множества типа G_δ и только они гомеоморфны полным метрическим пространствам *).

Множество M, лежащее в полном метрическом пространстве X, называется *множеством второй категории* в нем, если множество M содержит всюду плотное G_δ-множество. Легко доказать, что дополнение $X \setminus M$ к множеству второй категории есть объединение конечного или счетного числа нигде не плотных в X множеств. Такие множества называются *множествами первой категории*. Пересечение конечного или счетного числа множеств второй категории есть множество второй категории, а объединение счетного числа множеств первой категории есть множество первой категории.

Упражнение. Может ли в полном метрическом пространстве X счетное (или даже конечное) множество быть множеством второй категории и при каких условиях?

§ 8. Компактность и полнота

Мы видели, что всякий компакт является полным пространством; еще раньше (в § 1) было доказано, что всякий компакт вполне ограничен. Докажем теперь обратное предложение: всякое вполне ограниченное полное метрическое пространство является компактом. Этим будет доказана

Теорема 29. *Для того чтобы метрическое пространство было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было полным и вполне ограниченным.*

---

*) Впервые доказано (для сепарабельных метрических пространств) Александровым [1]. Эта теорема освобождена от условия сепарабельности Хаусдорфом. Доказательство можно найти в книге Куратовского [1].

Достаточно показать, что из всякой последовательности точек

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{1}$$

вполне ограниченного пространства X можно выбрать фундаментальную подпоследовательность: в самом деле, если это утверждение будет доказано, то мы из любой последовательности (1) точек вполне ограниченного полного пространства X сможем выбрать фундаментальную, т. е. (вследствие полноты пространства X) сходящуюся подпоследовательность, а это и значит, что X — компакт.

Итак, пусть дана последовательность (1). Докажем сначала, что при любом $\varepsilon > 0$ из последовательности (1) можно выбрать бесконечную подпоследовательность диаметра $< \varepsilon$.

Доказательство не представляет затруднений: из полной ограниченности пространства X следует (лемма к теореме 7 § 1) возможность представить X в виде суммы конечного числа множеств диаметра $< \varepsilon$. По крайней мере одно из этих множеств содержит бесконечную подпоследовательность последовательности (1), и диаметр этой подпоследовательности, очевидно, $< \varepsilon$.

Основываясь на этом, можно из последовательности (1) выделить подпоследовательность

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots \tag{1_1}$$

диаметра < 1; далее, из последовательности (1_1) можно выбрать подпоследовательность

$$x_{n_{k_1}},\ x_{n_{k_2}},\ \ldots,\ x_{n_{k_i}},\ \ldots \tag{1_2}$$

диаметра $< \frac{1}{2}$, из последовательности (1_2) — подпоследовательность (1_3) диаметра $< \frac{1}{3}$ и т. д. «Диагональная» последовательность

$$x_{n_1},\ x_{n_{k_2}},\ \ldots\ {}^{*)} \tag{2}$$

обладает тем свойством, что совокупность ее членов, начиная с m-го, является подпоследовательностью подпоследовательности (1_m) и потому имеет диаметр $< \frac{1}{m}$. Отсюда следует, что подпоследовательность (2) последовательности (1) есть фундаментальная последовательность, что и требовалось доказать.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 2 § 1 мы показали, что во всяком не вполне ограниченном пространстве существует такая бесконечная последовательность (1), что расстояние между любыми двумя различными ее элементами больше

*) Третий член этой последовательности есть x с индексом $n_{k_{i_3}}$ и т. д.

некоторого $\varepsilon > 0$. Последовательность (1), обладающая этим свойством, очевидно, не может содержать никакой фундаментальной подпоследовательности. Итак, имеет место

Теорема 30. *Для того чтобы метрическое пространство было вполне ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы из всякой бесконечной последовательности точек этого пространства можно было выбрать фундаментальную подпоследовательность.*

Замечание 2. При помощи теоремы 29 легко доказывается компактность гильбертова кирпича Q (§ 6 гл. 4). Так как Q, легко видеть, представляет собою замкнутое множество в гильбертовом пространстве и, следовательно, является полным пространством, то достаточно доказать, что Q обладает свойством полной ограниченности, т. е. при каждом $\varepsilon > 0$ содержит ε-сеть. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Возьмем n столь большим, чтобы было $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$, и рассмотрим лежащий в Q евклидов n-мерный параллелепипед Q^n, состоящий из всех точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in Q$, удовлетворяющих условию $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$. Очевидно, для каждой точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Q$ точка $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in Q^n$ отстоит от x на расстояние

$$\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2} < \sqrt{\sum_{k=2n+1} \frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что всякая $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть в Q^n будет вместе с тем и ε-сетью в Q, чем полная ограниченность пространства Q доказана.

§ 9. Множества, являющиеся одновременно множествами F_σ и G_δ в компактных метрических пространствах

Пусть X — какое-либо метрическое пространство со счетной базой. Мы уже заметили, что множество Γ всех точек локальной компактности пространства X открыто в X (и локально компактно). Докажем более общее

Предложение 1. *Пусть M — какое-нибудь множество, лежащее в метрическом пространстве X. Рассмотрим M как подпространство, обозначим через Γ множество точек локальной компактности пространства M. Множество Γ открыто в замыкании $A = [M]_X$ множества M.* (Полагая $M = X$, получим первое утверждение теоремы 1 § 1.)

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in \Gamma$ и обозначим через $U = Ux$ окрестность точки x (относительно M), замыкание которой $[U]$ в M есть компакт. Так как $[U]$, будучи компактом, замкнуто во всяком объемлющем метрическом пространстве, в частности и в A, то $[U]$ является замыканием множества U не только в M, но и в A. Докажем, что U открыто в A; этим будет доказано, что произвольная точка $x \in \Gamma$ есть внутренняя (по отношению к A) точка, т. е. что Γ открыто в A. Для того чтобы убедиться в том, что U открыто в A, достаточно показать, что

$$[A \setminus U]_A \cap U = \Lambda.$$

Но

$$A \setminus U = (A \setminus [U]) \cup ([U] \setminus U).$$

Множество $[U] \setminus U$ есть компакт и потому совпадает со своим замыканием в любом объемлющем пространстве, в том числе и в A. Поэтому $[[U] \setminus U]_A = [U] \setminus U$ и не имеет общих точек с U. Остается показать, что

$$[A \setminus [U]]_A \cap U = \Lambda.$$

Но $A \setminus [U]$ открыто в A, а M всюду плотно в A. Поэтому $A \cap (A \setminus [U]) = M \setminus [U]$ плотно в $A \setminus [U]$ и, значит,

$$[A \setminus [U]]_A = [M \setminus [U]]_A. \tag{1}$$

Докажем, что

$$[M \setminus [U]]_A \cap U = [M \setminus [U]]_M \cap U. \tag{2}$$

Правая часть, очевидно, содержится в левой. Но любая точка левой части, будучи принадлежащей U, значит, и подавно принадлежащей M точкой прикосновения множества $M \setminus [U]$, содержится в правой части, чем тождество (2) доказано. Так как $M \setminus [U]$ и U суть дизъюнктные открытые в M множества, то $[M \setminus [U]]_M \cap U = \Lambda$; значит (в силу (1) и (2)), $[A \setminus [U]]_A \cap U = \Lambda$, что и требовалось доказать.

Положим теперь $X_0 = X$, $\Gamma_0 = \Gamma$ и предположим, что замкнутые в X множества X_ξ построены для всех порядковых чисел ξ, меньших чем данное порядковое число α. Если α — первого рода, $\alpha = \alpha' + 1$, то, обозначая через $\Gamma_{\alpha'}$ открытое в $X_{\alpha'}$ множество всех точек локальной компактности пространства $X_{\alpha'}$, полагаем $X_\alpha = X_{\alpha'} \setminus \Gamma_{\alpha'}$. Если же α — второго рода, то полагаем

$$X_\alpha = \bigcap_{\alpha' < \alpha} X_{\alpha'}.$$

Таким образом, пробегая все порядковые числа $\alpha < \omega_1$, получаем вполне упорядоченную систему убывающих замкнутых множеств X_α; множество X_α называется *вычетом порядка α пространства X*.

В силу теоремы Бэра — Хаусдорфа (теорема 31 § 7 гл. 4) имеется первое порядковое число $\rho < \omega_1$, для которого $X_\rho = X_{\rho+1}$, а тогда, очевидно, и $X_\rho = X_{\rho+1} = X_{\rho+2} = \ldots$ Множество X_ρ (первое в ряду $\{X_\alpha\}$, с которого начинается совпадение) называется *последним вычетом* пространства X. Если этот последний вычет пуст, то пространство X называется *приводимым*, а соответствующее порядковое число ρ — *классом приводимости* (или просто *классом*) пространства X. Очевидно, всякое метрическое пространство, гомеоморфное приводимому пространству, само приводимо (класс приводимых пространств есть топологически инвариантный класс). Очевидно также, что два гомеоморфных приводимых пространства имеют один и тот же класс.

Имеет место

Теорема 31. *Для того чтобы множество M, лежащее в компакте Φ, было одновременно множеством типа F_σ и типа G_δ, необходимо и достаточно, чтобы пространство M было приводимо.*

Отсюда и из только что сделанного замечания о топологической инвариантности класса приводимых пространств вытекают:

Следствие 1. *Пусть X — метрическое пространство со счетной базой, M — топологический образ пространства X в каком-либо компакте Φ (например, в гильбертовом кирпиче). Для того чтобы M было в Φ одновременно типа F_σ и G_δ, необходимо и достаточно, чтобы X было приводимо.*

Следствие 2. *Если A и A' — два гомеоморфных между собою множества, лежащих соответственно в компактах Φ и Φ', и если A есть в пространстве Φ множество типа F_σ и G_δ, то тем же свойством обладает и множество A' по отношению к компакту Φ'* (теорема о топологической инвариантности множеств, являющихся одновременно множествами типа F_σ и G_δ в компактах).

Доказательство теоремы 31. Введем следующее вспомогательное понятие. Назовем цепным представлением множества M, лежащего в каком-либо пространстве X, всякое представление вида

$$M = \bigcup_{\xi < \alpha} (P_\xi \setminus Q_\xi),$$

где ξ пробегает все порядковые числа, меньшие чем некоторое $\alpha < \omega_1$, а P_ξ, Q_ξ суть замкнутые множества пространства X, удовлетворяющие цепи включений

$$P_0 \supseteq Q_0 \supseteq P_1 \supseteq Q_1 \supseteq \ldots \supseteq P_\xi \supseteq Q_\xi \supseteq P_{\xi+1} \supseteq Q_{\xi+1} \supseteq \ldots \tag{3}$$

Назовем свойством I свойство какого-либо множества M, лежащего в данном компакте Φ, быть приводимым; свойством II — свойство допускать цепное представление; наконец, свойством III — свойство множества M быть одновременно множеством типа F_σ и G_δ (в Φ). Обозначая стрелкой логическое следование одного свойства из другого, докажем теорему по следующей схеме:

$$\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{II} \longrightarrow \mathrm{III} \longrightarrow \mathrm{I}.$$

$\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{II}$. Пусть M приводимо. Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} &M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_\alpha \supset \ldots \supset M_\rho = \Lambda, \\ &\Gamma_\alpha = M_\alpha \setminus M_{\alpha+1} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(где Γ — множество всех точек локальной компактности множества M_α) и

$$M = \bigcup_{\alpha < \rho} \Gamma_\alpha. \tag{5}$$

В силу предложения 1 Γ_α открыто в $[M_\alpha]$ (замыкание в Φ); поэтому $\Phi_{\alpha+1} = [M_\alpha] \setminus \Gamma_\alpha$ замкнуто в $[M_\alpha]$, следовательно, и в Φ, и

$$\Gamma_\alpha = [M_\alpha] \setminus \Phi_{\alpha+1}. \tag{6}$$

Так как

$$\Gamma_\alpha = M_\alpha \setminus M_{\alpha+1}$$

и $M_\alpha \subseteq [M_\alpha]$, то $M_{\alpha+1} \subseteq \Phi_{\alpha+1}$, значит, и $[M_{\alpha+1}] \subseteq \Phi_{\alpha+1}$, т. е.

$$[M_\alpha] \supset \Phi_{\alpha+1} \supseteq [M_{\alpha+1}]. \tag{7}$$

Компакты $\Phi_{\alpha+1}$ определены для всех порядковых чисел вида $\alpha + 1 < \rho$; для предельных трансфинитов λ полагаем

$$\Phi_\lambda = [M_\lambda] \subseteq \bigcap_{\alpha < \lambda} [M_\alpha] = \bigcap_{\alpha + 1 < \lambda} \Phi_{\alpha+1}.$$

Имеем

$$M = \bigcup_{\alpha < \rho} \Gamma_\alpha = \bigcup_{\alpha < \rho} ([M_\alpha] \setminus \Phi_{\alpha+1}),$$

откуда и следует, что M обладает свойством II.

II $\longrightarrow$ III. Пусть

$$M = \bigcup_{1 \leqslant \xi < \alpha} (P_\xi \setminus Q_\xi),$$

т. е.

$$M = (P_1 \setminus Q_1) \cup (P_2 \setminus Q_2) \cup \ldots \cup (P_\xi \setminus Q_\xi) \cup \ldots$$

(причем цепь включений (3) предполагается выполненной *)). Каждое слагаемое $P_\xi \setminus Q_\xi$, будучи открытым множеством метрического пространства P_ξ, есть F_σ (в Φ), следовательно, и M есть F_σ (в Φ). Но, полагая $Q_0 = X$, имеем

$$X \setminus M = (Q_0 \setminus P_1) \cup (Q_1 \setminus P_2) \cup \ldots \cup (Q_\xi \setminus P_{\xi+1}) \cup \ldots = \bigcup_{\xi < \alpha} (Q_\xi \setminus P_{\xi+1}),$$

т. е. $X \setminus M$ также обладает свойством II и, значит, по только что доказанному, есть F_σ. Так как $X \setminus M$ есть F_σ, то M (будучи F_σ) есть в то же время и G_δ. Утверждение доказано.

III $\longrightarrow$ I. Пусть множество M есть одновременно F_σ и G_δ в компакте Φ; рассмотрим систему всех вычетов M_α множества M, $M_\alpha \setminus M_{\alpha+1} = \Gamma_\alpha$. Нам нужно доказать, что последний вычет M_ρ есть пустое множество. Предположим противное и докажем две леммы.

Лемма 1. *Если N есть одновременно F_σ и G_δ в метрическом пространстве X, а F замкнуто в N, то и F есть одновременно F_σ и G_δ в X.*

В самом деле, так как $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n замкнуты в X, и F замкнуто в N, то существует замкнутое в X множество A такое, что

$$F = A \cap N = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A);$$

так как $A_n \cap A$ замкнуты в X, то F есть F_σ в R. С другой стороны, так как A, будучи замкнутым в X, есть G_δ в X, то существуют открытые в X множества G_n такие, что $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Но и N, будучи G_δ в X, есть пересечение счетного числа открытых в X множеств Γ_m. Поэтому

$$F = A \cap N = \left(\bigcap_n G_n \right) \cap \left(\bigcap_m \Gamma_m \right),$$

откуда следует, что F есть G_δ в X.

---

*) При этом, как легко убедиться, без ограничения общности можно считать, что для любого трансфинита λ второго рода имеет место $P_\lambda = \bigcap_{\xi < \lambda} P_\xi$. Мы и будем предполагать это условие выполненным.

Лемма 2. *Если N есть одновременно F_σ и G_δ в X и $X \supseteq E \supseteq N$, то N есть одновременно F_σ и G_δ в E.*

В самом деле, по предположению $N = \bigcap\limits_n G_n = \bigcup\limits_n A_n$, где A_n замкнуты, а G_n открыты в X. Так как $N \subseteq E$, то

$$N = E \cap N = \bigcap_n (E \cap G_n) = \bigcup_n (E \cap A_n),$$

откуда и вытекает, что N есть G_δ и F_σ в E.

Вернемся к рассмотрению последнего вычета M_ρ множества M и предположим, что $M_\rho \neq \Lambda$. Так как M_ρ замкнуто в M, а M есть F_σ и G_δ в Φ, то по лемме 1 множество M_ρ есть одновременно F_σ и G_δ в Φ. Положим

$$B = [M_\rho] \setminus M_\rho$$

(если не оговорено противное, то замыкание везде в этом доказательстве берется в Φ). Утверждается, что

$$M_\rho \subseteq [B]. \tag{8}$$

Для этого заметим, что множество M_ρ, будучи последним вычетом множества M, не имеет ни одной точки локальной компактности (иначе множество Γ_ρ было бы непусто и мы имели бы $M_{\rho+1} = M_\rho \setminus \Gamma_\rho \subset M_\rho$). Если бы включение (8) не имело места, то существовала бы точка $x \in M_\rho$, не предельная для $B = [M_\rho] \setminus M_\rho$ и, следовательно, внутренняя к M_ρ по отношению к компакту $\Phi_\rho = [M_\rho]$. Но тогда, беря окрестность $U(x)$ так, чтобы замыкание (в Φ_ρ) этой окрестности лежало в M_ρ, мы убедились бы в том, что x есть точка локальной компактности множества M_ρ, чего не может быть.

Переписывая теперь очевидное равенство

$$[[M_\rho] \setminus M_\rho] \setminus ([M_\rho] \setminus M_\rho) = M_\rho \cap [[M_\rho] \setminus M_\rho]$$

в виде

$$[B] \setminus B = M_\rho \cap [B]$$

и пользуясь включением (8), имеем

$$[B] \setminus B = M_\rho,$$

т. е. $[B] \supset M_\rho$, $[B] \supseteq [M_\rho]$. Но, с другой стороны, очевидно, $[B] \subseteq [M_\rho]$. Итак, $[B] = [M_\rho]$. Другими словами, взаимно дополнительные по отношению к компакту $[M_\rho]$ множества M_ρ и B оба всюду плотны в компакте $[M_\rho]$. Но тогда оба эти множества не могут быть одновременно множествами типа G_δ в $[M_\rho]$; между тем множество M_ρ, будучи одновременно F_σ и G_δ в Φ, по лемме 2 является одновременно F_σ и G_δ и в замкнутом $[M_\rho]$, откуда следует, что $B = [M_\rho] \setminus M_\rho$ также есть G_δ в $[M_\rho]$. Теорема 31 полностью доказана.

Замечание. Можно построить приводимое множество (даже состоящее из рациональных чисел), классом которого является любое наперед заданное порядковое число $\alpha < \omega_1$. В самом деле, возьмем какое-либо вполне упорядоченное множество M, состоящее из рациональных чисел отрезка $[0; 1]$ и такое, что его α-я производная (см. § 7 гл. 4, стр. 162) состоит из одной последней точки. Нетрудно убедиться, что для любого $\alpha < \omega_1$ такие множества существуют. Обозначим через $M^{(\xi)}$ производную порядка ξ множества M и положим *)

$$N = (M \setminus M^{(1)}) \cup (M^{(2)} \setminus M^{(3)}) \cup \ldots \cup (M^{(2\lambda)} \setminus M^{(2\lambda+1)}) \cup \ldots$$

(где $\lambda < \alpha$). Предоставляем читателю доказать, что

$$N_\xi = (M^{(2\xi)} \setminus M^{(2\xi+1)}) \cup (M^{(2\xi+2)} \setminus M^{(2\xi+3)}) \cup \ldots,$$

откуда следует, что класс множества N есть α.

Теорема 32. *Для того чтобы метрическое пространство со счетной базой было приводимым, необходимо и достаточно, чтобы каждое непустое замкнутое в X множество имело хотя бы одну точку локальной компактности.*

Условие необходимо. В самом деле, пусть X приводимо и A — непустое замкнутое в X множество. Рассмотрим вполое упорядоченную систему всех вычетов X_α, $\alpha \leqslant \rho$, пространства X. Так как $\bigcap_{\alpha \leqslant \rho} X_\alpha = \Lambda$, то для любой точки $x \in X$ существует наименьшее порядковое число $\alpha(x)$ такое, что x не содержится в $X_{\alpha(x)}$. Очевидно, $\alpha(x)$ первого рода. Пусть $\alpha_0 = \alpha(x_0) = \gamma + 1$ есть наименьшее среди всех чисел $\alpha(x)$, построенных для всевозможных $x \in A$. Тогда $A \subseteq X_\gamma$. Так как x_0 не содержится в $X_{\gamma+1}$, то x_0 есть точка локальной компактности пространства X_γ, а следовательно, и замкнутого в этом пространстве множества A.

Условие достаточно. Так как последний вычет X_ρ пространства X есть замкнутое множество, не содержащее точек локальной компактности, то из нашего условия следует, что $X_\rho = \Lambda$, что и требовалось доказать.

Выведем из доказанных результатов следующее предложение:

Теорема 33. *Для того чтобы счетное множество M, лежащее в компакте Φ, было множеством типа G_δ в Φ, необходимо и достаточно, чтобы Φ было разрозненным (т. е. не содержало непустого плотного в себе подмножества).*

В самом деле, если M разрознено, то всякое непустое подмножество множества M содержит изолированные точки, являющиеся, очевидно, точками локальной компактности. Поэтому, в силу теоремы 32, множество M приводимо, а поэтому, по теореме 31, является множеством G_δ.

Обратно, если счетное множество M есть G_δ в Φ, то, будучи (как всякое счетное множество) и множеством F_σ, оно приводимо. Пусть теперь A — плотное в себе подмножество множества M; докажем, что A пусто. Так как замыкание множества A в M также плотно в себе, то можно с самого начала предположить, что A замкнуто в M. Так как M приводимо, то A содержит точку локальной компактности x_0. Пусть $U(x_0) = \Gamma$ есть окрестность точки x_0 с компактным замыканием $[\Gamma]_M$. Так как Γ (как открытое подмножество плотного в себе множества A) плотно в себе, то и компакт $[\Gamma]_M$ не содержит изолированных точек, а потому имеет мощность континуума, что противоречит тому, что $[\Gamma]_M$ есть подмножество счетного множества M. Теорема 33 доказана.

---

*) Среди всех порядковых чисел $\alpha < \omega_1$ «четными» (т. е. допускающими представление вида $\alpha = 2\eta$, где η — какое-нибудь порядковое число $< \omega_1$) являются все числа λ второго рода, $\lambda < \omega_1$, и все числа первого рода вида $\lambda + 2n$, где λ — число второго рода, $\lambda < \omega_1$, а n — натуральное число. В самом деле,

$$\lambda = 2\lambda, \quad \lambda + 2n = 2(\lambda + n).$$

Глава шестая

УСЛОВИЯ ТИПА КОМПАКТНОСТИ И МЕТРИЗАЦИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. Бикомпактные пространства

В главе 5 было доказано (теорема 8 § 1), что компактность метрического пространства вполне характеризуется тем, что в данном пространстве выполнена теорема Бореля—Лебега. Другими словами, свойство, составляющее утверждение этой теоремы, может быть принято за определение компактности метрического пространства. Перенося это же свойство на топологические пространства, мы получаем следующее основное

Определение 1. Топологическое пространство X называется *бикомпактным*, если всякое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Теорема 8 гл. 5 может теперь быть сформулирована так: *Для метрических пространств понятие бикомпактности совпадает с понятием компактности.*

Топологическое пространство X называется *компактным*, если в нем каждое бесконечное множество имеет предельную точку *).

Замечание 1. Из компактности топологического пространства X, вообще говоря, не следует, что каждая бесконечная последовательность точек пространства X содержит сходящуюся подпоследовательность: существуют примеры компактных (и бикомпактных) хаусдорфовых пространств, в которых нет ни одной нестационарной сходящейся последовательности (см. § 4).

Докажем, что свойство компактности топологического пространства X эквивалентно каждому из следующих свойств:

---

*) Многие авторы называют компактным топологические пространства, бикомпактные в нашем смысле Эта терминология оправдана тем, что аналогом компактных метрических пространств среди топологических пространств действительно являются бикомпактные пространства. В этой книге, однако, мы будем придерживаться исторически сложившейся терминологии (см. замечание 2 к теореме 2).

б) Всякая последовательность непустых убывающих замкнутых множеств

$$\Phi_0 \supseteq \Phi_1 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_n \supseteq \ldots \tag{1}$$

пространства X имеет непустое пересечение.

в) Всякая счетная система открытых множеств, являющаяся покрытием пространства X, содержит конечную подсистему, обладающую тем же свойством *).

Докажем прежде всего, что всякое компактное топологическое пространство обладает свойством б). Пусть дана последовательность (1) непустых замкнутых множеств. Если все множества (1), начиная с некоторого, положим с Φ_m, совпадают между собою, то $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \Phi_n = \Phi_m$. Если же нет такого m, то легко выделить из последовательности (1) бесконечную подпоследовательность, все элементы которой различны. Предполагая, что этот выбор уже сделан, считаем, что все Φ_n в (1) различны. Берем для каждого n точку $x_n \in \Phi_n \diagdown \Phi_{n+1}$. Полученное бесконечное множество $M = \{x_n\}$ имеет, по предположению, предельную точку ξ. Точка ξ принадлежит всем Φ_n, так как если бы она не принадлежала, например, множеству Φ_m, то окрестность $X \diagdown \Phi_m$ точки ξ содержала бы лишь первые m точек x_n, вопреки тому, что ξ — предельная точка множества M.

Обратно, если пространство X не компактно, то в нем существует бесконечное множество M, не имеющее ни одной предельной точки. Беря счетное подмножество $M_0 \subseteq M$, состоящее из точек

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

и полагая $\Phi_n = [M_n]$, $M_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, получим убывающую последовательность замкнутых множеств Φ_n, имеющую пустое пересечение. В самом деле, если бы существовала точка $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n$, то любая окрестность точки x пересекалась бы со всеми множествами M_n и, следовательно, содержала бы бесконечное число точек множества $M_0 = \{x_0, x_1, \ldots\}$, т. е. x являлась бы предельной точкой множества M_0 — противоречие. Итак, свойство компактности (свойство а)) эквивалентно свойству б).

Докажем теперь, что свойства б) и в) эквивалентны между собою. Пусть свойство б) выполнено. Рассмотрим какое-нибудь покрытие Σ пространства X, состоящее из счетного числа

*) В этой номенклатуре свойством а) удобно назвать само свойство компактности.

открытых множеств

$$G_0,\ G_1,\ \ldots,\ G_n,\ \ldots \tag{2}$$

Положим $\Gamma_n = G_0 \cup \ldots \cup G_n$, $\Phi_n = X \setminus \Gamma_n$. Тогда имеем счетную последовательность убывающих замкнутых множеств Φ_n с пустым пересечением. Поэтому среди множеств Φ_n имеются пустые. Пусть $\Phi_m = \Lambda$. Тогда $\Gamma_m = G_0 \cup \ldots \cup G_m = X$ и $\{G_0, \ldots, G_m\}$ есть искомая подсистема системы (2). Обратно, пусть свойство б) не имеет места, так что некоторая последовательность (1) непустых замкнутых множеств имеет пустое пересечение. Тогда, полагая $G_n = X \setminus \Phi_n$, видим, что система (2) покрывает пространство X. Если дана конечная подсистема $\{G_{n_1}, \ldots, G_{n_s}\}$ системы (2) и $n_1 < \ldots < n_s$, то $G_{n_1} \subseteq \ldots \subseteq G_{n_s}$, так что $G_{n_1} \cup \ldots \cup G_{n_s} = G_{n_s} \neq X$, и условие в) не выполнено.

Из доказанного вытекает первое утверждение следующей теоремы:

Теорема 1. *Всякое бикомпактное топологическое пространство компактно. Для пространств со счетной базой понятия компактности и бикомпактности совпадают.*

Остается доказать, что всякое компактное топологическое пространство X со счетной базой бикомпактно. Пусть $\Sigma = \{G_\sigma\}$ есть система открытых множеств пространства X, покрывающая это пространство. В силу второй теоремы Линделефа (§ 7 гл.4) из системы Σ можно выделить счетную подсистему Σ_0, покрывающую пространство X. Согласно условию в) (выполненному в силу компактности пространства X), из Σ_0 можно выделить конечное покрытие Σ_1, которое и является нужной нам конечной подсистемой системы Σ.

Определение 2. Точка ξ топологического пространства X называется *точкой полного накопления* данного множества $M \subseteq X$, если пересечение множества M с любой окрестностью точки ξ имеет ту же мощность, что и все множество M.

Докажем теперь следующую основную теорему:

Теорема 2. *Свойство бикомпактности топологического пространства* (которое назовем свойством (В)) *эквивалентно каждому из следующих свойств:*

Свойство (А). *Всякое бесконечное множество M имеет в пространстве X хотя бы одну точку полного накопления.*

Свойство (Б). *Всякая вполне упорядоченная система непустых убывающих замкнутых множеств*

$$\Phi_0 \supseteq \Phi_1 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_\alpha \supseteq \ldots \tag{3}$$

пространства X имеет непустое пересечение.

Доказательство. Назовем какую-либо систему множеств *центрированной*, если любое конечное число множеств, являющихся элементами этой системы, имеет непустое пересечение. Введя это определение и помня, что открытые и замкнутые множества пространства X являются взаимно дополнительными и что дополнение к сумме множеств есть пересечение дополнений к этим множествам, а дополнение к пересечению множеств есть сумма дополнений к этим множествам, мы без труда убеждаемся в том, что свойство (В) (т. е. свойство бикомпактности пространства X) эквивалентно следующему свойству:

Свойство (В′). *Всякая центрированная система замкнутых множеств пространства X имеет непустое пересечение.*

Поэтому достаточно доказать, что

$$(\text{А}) \longrightarrow (\text{Б}) \longrightarrow (\text{В}'), \quad (\text{В}) \longrightarrow (\text{А})$$

(где стрелка означает логическое следование).

(А) ⟶ (Б). Пусть дана вполне упорядоченная система непустых замкнутых множеств (3). Если все элементы системы (3), начиная с некоторого Φ_α, совпадают между собою, то и пересечение всех элементов системы (3) равно этому Φ_α и потому непусто. Если в системе (3) за каждым Φ_α следует $\Phi_\beta \neq \Phi_\alpha$, то из (3) легко выделяется конфинальная подсистема, состоящая из попарно различных множеств. Предполагая, что этот переход к конфинальной подсистеме уже выполнен, можно предположить, что все Φ_α в (3) между собою различны. В этом предположении можно снова выделить подсистему системы (3), которой вся система была бы конфинальна и которая имела бы наименьший возможный порядковый тип. Заменив всю систему такой подсистемой, можно предположить, что система (3) не конфинальна никакой подсистеме, порядковый тип которой был бы меньше, чем порядковый тип всей системы (3). Но тогда порядковый тип системы (3) есть начальное (даже регулярное) порядковое число ω_τ. Итак, мы можем предположить, что система (3) имеет порядковый тип ω_τ и состоит из попарно различных множеств. Возьмем теперь в каждом из множеств $\Phi_\alpha \setminus \Phi_{\alpha+1}$ по точке x_α. Множество M всех отобранных нами точек x_α имеет мощность $\aleph_\tau$. Пусть ξ — точка полного накопления множества M. Точка ξ входит в пересечение всех Φ_α, так как если бы она не содержалась, например, в множестве Φ_β, то $X \setminus \Phi_\beta$ было бы окрестностью точки ξ, содержащей лишь такие точки x_α, для которых $\alpha < \beta$. Но так как порядковый тип системы (3) есть начальное число ω_τ, то множество M_β точек x_α, $\alpha < \beta$, имеет мощность, меньшую чем мощность $\aleph_\tau$ всего множества M, что противоречит предположению, что ξ есть точка полного накопления множества M.

(Б) ⟶ (В′). Предполагая (Б) верным, приведем к противоречию предположение, что (В′) неверно. Пусть $\aleph_\tau$ есть наименьшее (очевидно, бесконечное) кардинальное число, для которого существует центрированная система Σ мощности $\aleph_\tau$, состоящая из замкнутых множеств с пустым пересечением. Представим систему Σ в виде вполне упорядоченной системы типа ω_τ:

$$\Sigma = \{F_0, F_1, \ldots, F_\alpha, \ldots\}, \ \alpha < \omega_\tau.$$

Обозначим через Φ_α пересечение всех F_β с $\beta < \alpha$. Так как мощность множества таких F_β меньше чем $\aleph_\tau$, то из определения кардинального числа $\aleph_\tau$ вытекает, что каждое Φ_α, $\alpha < \omega_\tau$, непусто. Так как множества Φ_α убывают, то их пересечение, очевидно, совпадающее с пересечением всех F_α, непусто, вопреки определению системы Σ.

(B) $\longrightarrow$ (A). Надо доказать: если (A) неверно, то и (B) неверно. Но если (A) неверно, то существует бесконечное множество M, не имеющее ни одной точки полного накопления. Следовательно, каждая точка $x \in X$ имеет окрестность $U(x)$, пересекающуюся с множеством M по множеству, мощность которого меньше, чем мощность множества M. Выберем для каждой точки $x \in X$ такую окрестность $U(x)$ и обозначим полученную систему открытых множеств через Σ. Пусть

$$U_1, \ldots, U_s$$

— какая-нибудь конечная подсистема системы Σ. Так как мощность каждого из множеств $M \cap U_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, меньше мощности всего множества M и число этих множеств конечно, то их сумма не может быть равна всему множеству M (на основании теоремы 24_0 § 6 гл. 3). Поэтому никакая конечная подсистема системы Σ не может покрывать все множество M и тем более все пространство X, т. е. свойство (B) в пространстве X не выполнено.

Наша теорема полностью доказана.

Замечание 2. Так как для счетных множеств понятие точки полного накопления совпадает с понятием предельной точки и так как всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество, то свойство компактности топологического пространства может быть выражено в такой форме:

Свойство а). *Всякое счетное множество M имеет по крайней мере одну точку полного накопления.*

Поэтому, если бы мы согласились в применении к топологическим пространствам термин «бикомпактный» заменить термином «компактный», то компактные (в обычном смысле) топологические пространства было бы естественно называть «компактными для мощности $\aleph_0$». В связи с этим естественно возникают понятия (инициальной) компактности вплоть до данной мощности $\mathfrak{a} = \aleph_\alpha$ и (финальной) компактности начиная с данной мощности $\mathfrak{a}$. Пространство X называется инициально компактным до данной мощности $\mathfrak{a} \geqslant \aleph_0$, если всякое открытое покрытие мощности $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{a}$ содержит конечное подпокрытие пространства X. С другой стороны, пространство X называется финально компактным начиная с данной мощности $\mathfrak{a}$, если всякое открытое покрытие пространства X, имеющее мощность $> \mathfrak{a}$, содержит подпокрытие пространства X мощности $\leqslant \mathfrak{a}$.

Условие инициальной компактности эквивалентно условиям $(\mathrm{A}_\mathfrak{a})$ и $(\mathrm{Б}_\mathfrak{a})$, аналогичным условиям (A) и (Б) бикомпактности.

Для финальной компактности такая эквивалентность, вообще говоря, не имеет места (см. Мищенко [1]).

Бикомпактные пространства одновременно инициально компактны вплоть до любой мощности и финально компактны начиная с любой мощности $\mathfrak{A}$ (отсюда и термин «бикомпактный»).

Замечание 3. Пространство $W(\omega_1)$ всех порядковых чисел $<\omega_1$ компактно. Действительно, всякое бесконечное множество $M \subseteq W(\omega_1)$ содержит, как легко видеть, счетную последовательность строго возрастающих порядковых чисел

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

Первое число, большее чем все элементы этой последовательности, является ее пределом (см. § 3 гл. 3) и значит, предельной точкой множества M. Однако пространство $W(\omega_1)$ не бикомпактно: всякий интервал вида $(\alpha; \beta)$, $\alpha < \beta < \omega_1$, есть не более чем счетное множество, поэтому никакое несчетное множество не имеет в пространстве $W(\omega_1)$ точек полного накопления. В противоположность этому пространство $W(\omega_1+1)$ всех порядковых чисел $\leqslant \omega_1$ бикомпактно: всякое несчетное множество этого пространства имеет (единственную) точку полного накопления, и такой точкой является точка ω_1.

Среди бикомпактных топологических пространств наиболее важными являются бикомпактные хаусдорфовы пространства, называемые просто бикомпактами *). Ими мы и будем главным образом заниматься. При этом нам понадобятся две простые леммы.

Лемма 1. *Всякое замкнутое множество Φ, лежащее в бикомпактном топологическом пространстве X, есть бикомпактное топологическое пространство (в частности, замкнутое множество, лежащее в бикомпакте, есть бикомпакт).*

В самом деле, любое бесконечное множество $M \subseteq \Phi$ имеет в X точку полного накопления ξ, которая, в силу замкнутости Φ, лежит в Φ, откуда и следует бикомпактность Φ **).

Лемма 2. *Если $M \subseteq X$ есть бикомпактное пространство, то всякая система $\Sigma = \{\Gamma_\alpha\}$ открытых в X множеств,*

---

*) Итак, всякое бикомпактное пространство компактно (т. е. бикомпактные пространства являются частным случаем компактных), но компакты (т. е. компактные метрические пространства) образуют частный случай бикомпактов (т. е. бикомпактных хаусдорфовых пространств).

**) Можно, конечно, вывести это предложение и из свойства (B): пусть дана система Σ открытых в Φ множеств G_α; берем открытое в X множество Γ_α так, чтобы было $\Phi \cap \Gamma_\alpha = G_\alpha$; множества Γ_α и множество $\Gamma = X \setminus \Phi$ образуют систему Σ', покрывающую все пространство X; берем конечную подсистему σ системы Σ, также покрывающую X; пересечения элементов системы σ с множеством Φ образуют искомую конечную подсистему системы Σ, покрывающую множество Φ.

покрывающая M, содержит конечную подсистему Σ_0, также покрывающую M.

Доказательство. Система $\sigma = \{M \cap \Gamma_\alpha\}$, в силу бикомпактности M, содержит конечную подсистему $\sigma_0 = \{M \cap \Gamma_{\alpha_1}, \ldots$ $\ldots, M \cap \Gamma_{\alpha_s}\}$, покрывающую M; подсистема $\Sigma_0 = \{\Gamma_{\alpha_1}, \ldots, \Gamma_{\alpha_s}\}$ системы Σ тем более покрывает M, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Всякое хаусдорфово бикомпактное пространство X нормально.*

Доказательство. Докажем сначала, что бикомпакт X является регулярным пространством, т. е. что для каждой точки $x \in X$ и каждого не содержащего эту точку замкнутого множества $B \subset X$ можно найти непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(B)$. Для этого возьмем непересекающиеся окрестности $U_y(x)$ и $U(y)$ точки x и любой точки $y \in B$. Когда y пробегает все множество B, то отобранные нами $U(y)$ покрывают B. Из лемм 1 и 2 следует, что существует конечное число этих $U(y)$, пусть

$$U(y_1), \ldots, U(y_s),$$

которые также покрывают все B. Возьмем соответствующие $U_{y_1}(x), \ldots, U_{y_s}(x)$. Их пересечение $U(x)$ не имеет общих точек с суммой $U(B) = U(y_1) \cup \ldots \cup U(y_s)$.

Пусть теперь A и B — два непересекающихся непустых замкнутых множества бикомпакта X. Для каждой точки $x \in A$ возьмем пару непересекающихся окрестностей $U(x)$ и $U_x(B)$ точки x и множества B, существующую в силу уже доказанной регулярности пространства X. Когда x пробегает все множество A, то отобранные нами $U(x)$ покрывают множество A. Значит, существует конечная система

$$U(x_1), \ldots, U(x_s)$$

этих множеств, также покрывающая множество A. Множество $U(A) = U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_s)$ не имеет общих точек с пересечением $U(B) = U_{x_1}(B) \cap \ldots \cap U_{x_s}(B)$. Таким образом, множества A и B имеют непересекающиеся окрестности $U(A)$ и $U(B)$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь X — компактное хаусдорфово пространство со счетной базой. По теореме 1 пространство X бикомпактно, по только что доказанному — нормально, в качестве нормального пространства со счетной базой X — метризуемо (см. § 8 гл. 4, первая метризационная теорема Урысона). Обратно, всякое компактное метризуемое пространство является бикомпактным хаусдорфовым пространством со счетной базой.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 4 (вторая метризационная теорема Урысона). *Для того чтобы компактное (в частности бикомпактное) хаусдор-*

фово пространство было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно имело счетную базу.

Таким образом, компакты с топологической точки зрения суть не что иное, как бикомпакты, имеющие счетную базу.

Замечание 4. Необходимо иметь в виду, что (в отличие от метрических пространств, в которых существование счетного всюду плотного множества эквивалентно наличию счетной базы) бикомпакт, содержащий счетное всюду плотное множество, может еще не иметь счетной базы. Примером такого бикомпакта может служить рассмотренное в § 4 гл. 4 пространство «двух стрелок». Упорядоченное множество, на котором определено пространство «двух стрелок», имеет первый и последний элементы. Все его собственные сечения, очевидно, являются скачками. Поэтому бикомпактность «двух стрелок» вытекает из приводимого в конце этого параграфа критерия бикомпактности упорядоченных пространств.

Замечание 5. Следующее предложение значительно усиливает утверждение замечания 1 к теореме 4 § 1 гл. 5:

Теорема 5. *Если множество Φ, лежащее в каком-либо хаусдорфовом пространстве X, является бикомпактом, то Φ замкнуто в X.*

Мы сейчас докажем значительно более сильное утверждение, для чего введем понятие H-замкнутости. Хаусдорфово пространство X называется *H-замкнутым*, если X замкнуто во всяком объемлющем (т. е. содержащем X в качестве подпространства) хаусдорфовом пространстве $\overline{X}$. Можно сказать и так: пространство X H-замкнуто, если при всяком топологическом отображении f пространства X в какое-либо хаусдорфово пространство $\overline{X}$ образ fX является замкнутым множеством пространства $\overline{X}$. Покажем, что при этом можно ограничиться такими пространствами $\overline{X}$, для которых множество $\overline{X}\diagdown X$ состоит лишь из одной точки ξ.

Если X — незамкнутое множество хаусдорфова пространства $\overline{X}$, то обозначим через ξ какую-либо точку множества $\overline{X}\diagdown X$, предельную в $\overline{X}$ для множества X. Тогда X будет незамкнуто в пространстве $X\cup\xi$ (которое рассматривается как подпространство пространства $\overline{X}$). Всякое такое пространство $X\cup\xi$ называется *одноточечным* (нетривиальным) *расширением* пространства X. Таким образом, H-замкнутые пространства можно определить как хаусдорфовы пространства, не имеющие нетривиальных одноточечных хаусдорфовых расширений.

Теорема 6. *Для того чтобы хаусдорфово пространство X было H-замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве X выполнялось следующее*

Условие (A): *во всяком открытом покрытии $\omega=\{G\}$ пространства X имеется конечное число элементов $G_1, \ldots, G_s$, объединение которых всюду плотно в X.*

1. Условие (A) достаточно. Пусть оно выполнено; предположим, что X имеет одноточечное расширение $\overline{X}=X \cup \xi$. Покажем, что X замкнуто в $\overline{X}$. Так как $\overline{X}$ — хаусдорфово пространство, то для каждой точки $x \in X$ существует окрестность Ox, замыкание которой в пространстве $\overline{X}$ не содержит точки ξ, так что замыкание $[Ox]$ в X и в $\overline{X}$ одно и то же.

В силу выполненного по предположению условия (A) некоторое конечное число этих Ox, положим $Ox_1, \ldots, Ox_s$, имеет объединение, всюду плотное в X, так что замкнутое в X множество $[Ox_1] \cup \ldots \cup [Ox_s]$ совпадает с X, что и требовалось доказать.

2. Условие (A) необходимо. Предположим противное, т. е. что существует такое бесконечное открытое покрытие $\omega=\{G\}$ пространства X, что каждое конечное подсемейство $G_1, \ldots, G_s$ семейства ω имеет объединение, не являющееся всюду плотным в X, т. е. $\bigcup\limits_{i=1}^{s} [G_i] \neq X$.

Построим теперь пространство $\overline{X}$, дополняя пространство X единственной точкой ξ и объявляя открытой базой в $\overline{X}$ все открытые множества пространства X и все множества вида $\{\xi\} \cup X \diagdown \bigcup\limits_{i=1}^{s} [G_i]$, где $G_1, \ldots, G_s$ — произвольный конечный набор множеств покрытия ω. Полученное пространство X хаусдорфово (достаточно заметить, что для любой точки $x \in X$ и для точки ξ получим дизъюнктные окрестности Ox и $O\xi$ в $\overline{X}$, взяв в качестве Ox какое-нибудь содержащее точку x открытое множество $G \in \omega$ и положив $O\xi=\overline{X} \diagdown [G]$). В то же время точка ξ в $\overline{X}$, очевидно, является предельной для X, следовательно, X незамкнуто в $\overline{X}$ — противоречие с H-замкнутостью пространства X. Теорема 6 доказана.

Условие (A), характеризующее H-замкнутость, очевидно, является ослаблением условия бикомпактности, так что всякий бикомпакт есть H-замкнутое пространство. Таким образом, вместе с теоремой 6 мы доказали и теорему 5.

Мы знаем, что всякий бикомпакт есть регулярное (и даже нормальное) H-замкнутое пространство. Докажем обратное утверждение: *всякое регулярное H-замкнутое пространство X бикомпактно.* Пусть $\omega=\{G\}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Для любой точки $x \in X$ возьмем содержащее эту точку множество $G \in \omega$ и такое открытое множество Γ (существующее в силу регулярности пространства X), что $x \in \Gamma \subseteq [\Gamma] \subseteq G$. Из полученного покрытия $\{\Gamma\}$ выделим, согласно условию (А), конечное подсемейство $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s\}$ с всюду плотным объединением. Тогда множества $[\Gamma_1], \ldots, [\Gamma_s]$ и тем более содержащие их соответственно множества $G_1, \ldots, G_s$ из ω образуют конечное покрытие пространства X. Итак, доказана

Теорема 7. *Бикомпакты суть не что иное, как регулярные H-замкнутые пространства.*

Приведем еще один критерий бикомпактности, представляющийся наиболее естественным обобщением элементарной теоремы математического анализа «о вложенных отрезках»:

Теорема 8. *Регулярное пространство тогда и только тогда бикомпактно, когда в нем всякая направленная по включению*) система $\eta = \{A^\lambda\}$ непустых ка-множеств имеет непустое пересечение.*

Дадим элементарное доказательство теоремы 8. Так как бикомпакты тождественны с регулярными H-замкнутыми пространствами, то достаточно доказать

Предложение 1. *Хаусдорфово пространство, в котором все H-системы имеют непустое пересечение, всегда H-замкнуто.*

Доказываем это предложение. Пусть хаусдорфово пространство X не является H-замкнутым; покажем, что в нем имеется H-система $\zeta = \{A^\lambda\}$ с пустым пересечением.

Так как пространство X не H-замкнуто, то можно присоединить к нему точку z^* таким образом, что пространство $\overline{X} = X \cup z^*$ будет хаусдорфово, а точка z^* в нем — неизолированной.

Пусть $\{O^\lambda z^*\}$ — система всех окрестностей точки z^* в пространстве $\overline{X}$. Эта система направлена по включению, причем точка z^* не изолирована в пространстве $\overline{X} = X \cup z^*$; следовательно, открытые в X множества $H^\lambda = X \cap O^\lambda z^*$ непусты и также образуют систему, направленную по включению; полагая $A^\lambda = [H^\lambda]_X$, получим H-систему $\xi = \{A^\lambda\}$ в пространстве X. Достаточно доказать, что пересечение $\bigcap\limits_\lambda A^\lambda$ пусто. В противном случае пусть $x_0 \in A^\lambda$ и пусть Ox_0 — любая окрестность точки x_0 в пространстве X; тогда $Ox_0 \cap H^\lambda \neq \Lambda$ при любом H^λ — иначе было бы и $Ox_0 \cap [H^\lambda] = \Lambda$ для некоторого H^λ, что невозможно, так как $x_0 \in [H^\lambda]_X = A^\lambda$. Значит, и $Ox_0 \cap Oz^* \neq \Lambda$ для любой окрестности

*) Система множеств η является направленной по включению, если вместе со всякими двумя элементами A, $A' \in \eta$ она содержит третий $A'' \in \eta$, лежащий в их пересечении: $A'' \subseteq A \cap A'$. Направленная по включению система непустых ка-множеств называется H-системой.

Ox_0 точки x_0 и любой окрестности Oz^* точки z^* в $\overline{X}$, а это противоречит тому, что $\overline{X}$ есть хаусдорфово пространство.

Предложение 1, а следовательно, и теорема 8 доказана.

Применим теперь понятие H-замкнутости для получения следующего критерия бикомпактности упорядоченных пространств:

Теорема 9. *Упорядоченное пространство X бикомпактно тогда и только тогда, когда оно не имеет щелей.*

Доказательство. Если X имеет щели, то согласно теореме 5 § 1 гл. 3 пространство X вкладывается в качестве всюду плотного множества в упорядоченное пространство $\overline{X}$, где точками множества $\overline{X}\diagdown X$ являются все щели множества X. Поэтому пространство X не H-замкнуто и, следовательно, не бикомпактно.

Предположим теперь, наоборот, что пространство X не бикомпактно. Тогда существует вполне упорядоченная убывающая последовательность $\{F_\alpha\}$ непустых замкнутых множеств F_α, имеющая пустое пересечение. Обозначим через A множество всех точек $x \in X$, для каждой из которых существует такое множество F_α, что $x \prec y$ для всякой точки $y \in F_\alpha$. Тогда пара $(A,\ X\diagdown A)$ определяет щель. В самом деле, если $x \in A$ и $x' \prec x$, то $x' \in A$. Поэтому пара $(A,\ X\diagdown A)$ является сечением. Предположим сначала, что в верхнем классе $X\diagdown A$ имеется наименьший элемент a. Пусть a не принадлежит некоторому F_α. Существует интервальная окрестность $(b;\ c)$ точки a, не пересекающаяся с F_α. Точка b принадлежит A, поэтому она лежит слева от некоторого множества $F_{\alpha'}$. Кроме того, существует интервальная окрестность $(d;\ e)$ точки b, не пересекающаяся с $F_{\alpha'}$. Положим $\alpha'' = \max\{\alpha, \alpha'\}$. Тогда интервальная окрестность $(d;\ c)$ точки a не пересекается с $F_{\alpha''}$. Поэтому точка a лежит слева от множества $F_{\alpha''}$, т. е. $a \in A$. Это противоречие и доказывает отсутствие минимального элемента в верхнем классе.

Предположим теперь, что в нижнем классе A имеется максимальный элемент a. Тогда точка a лежит слева от некоторого множества F_α. Поскольку множество F_α замкнуто, существует интервальная окрестность $(b;\ c)$ точки a, не пересекающаяся с F_α. При этом интервал $(a;\ c)$ пуст и, следовательно, точка c является минимальным элементом в верхнем классе $(X\diagdown A)$, что противоречит уже доказанному. Теорема 9 доказана.

§ 2. Непрерывные отображения бикомпактных пространств

Если f — непрерывное отображение бикомпактного топологического пространства X на топологическое пространство Y, то пространство Y бикомпактно. Для доказательства возьмем какое-либо открытое покрытие $\omega_Y = \{G\}$ пространства Y и обозначим через ω_X покрытие пространства X, состоящее из прообразов $f^{-1}G$ элементов покрытия ω_Y. Так как ω_X — открытое покрытие бикомпактного пространства X, то в нем содержится конечное покрытие $f^{-1}G_1, \ldots, f^{-1}G_s$ этого пространства. Тогда $G_1, \ldots, G_s$ есть конечное покрытие пространства Y, содержащееся в (произвольном данном) открытом покрытии ω_Y этого пространства. Бикомпактность пространства Y доказана. Выведем из только что доказанного

Предложение 1 (Вейерштрасс). *Всякая действительная функция f, заданная на бикомпактном пространстве X, ограничена и принимает в некоторых точках пространства X свое максимальное, а также свое минимальное значения.*

В самом деле, если f — непрерывная вещественная функция на бикомпактном пространстве X, то fX есть бикомпактное подпространство числовой прямой, т. е. ограниченное замкнутое множество вещественных чисел, содержащее (в силу своей замкнутости) как свою верхнюю грань M, так и свою нижнюю грань m. Если $x_0 \in f^{-1}M$, $x_1 \in f^{-1}m$, то в точках x_0, x_1 пространства X функция f принимает свое максимальное значение M, соответственно свое минимальное значение m.

Предложение 2. *Всякое непрерывное отображение f бикомпактного топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y замкнуто.*

Пусть X — бикомпактное пространство и множество A замкнуто в X; надо доказать, что $B = fA$ замкнуто в Y. Это следует из того, что A, будучи замкнутым в бикомпактном пространстве X, само есть бикомпактное пространство; значит, B есть бикомпактное подпространство хаусдорфова пространства Y, а поэтому, по теореме 5, замкнуто в Y, что и требовалось доказать.

В связи с последним утверждением введем следующее

Определение 3. Непрерывное отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *совершенным*, если оно замкнуто и для всякой точки $y \in Y$ ее прообраз $f^{-1}y$ бикомпактен.

Для любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ в T_1-пространство Y прообраз всякой точки $f^{-1}y$ замкнут в X. Поэтому из леммы 1 к теореме 3 и предложения 2 вытекает

Предложение 3. *Всякое непрерывное отображение f бикомпактного пространства X в хаусдорфово пространство Y совершенно.*

Из предложения 3 и предложения 7 § 2 гл. 4 вытекает следующее.

Предложение 4. *Всякое взаимно однозначное и в одну сторону непрерывное отображение бикомпакта X на хаусдорфово пространство Y есть гомеоморфизм.*

При непрерывных отображениях вес топологического пространства может повышаться. Проиллюстрируем это на следующем примере. В качестве пространства X возьмем числовую прямую. В качестве пространства Y возьмем факторпространство пространства X (см. § 2 гл. 4) относительно разбиения $\mathfrak{M}$, единственным нетривиальным элементом которого является множество Z всех целых чисел. Наконец, за отображение $f\colon X \to Y$ возьмем естественную проекцию пространства X на факторпространство Y. Отображение f факторно и, следовательно, непрерывно (см. § 2 гл. 4). Пространство X имеет счетную базу. Покажем, что пространство Y не только не имеет счетной базы, но даже не удовлетворяет первой аксиоме счетности в точке ζ, являющейся образом множества Z при отображении f. Предположим, что точка ζ имеет счетную базу окрестностей $\{U_1, U_2, \ldots\}$. Для каждого целого числа k зафиксируем такой интервал V_k числовой прямой, что

1) $k \in V_k$,

2) длина V_k не превосходит $1/2$,

3) концы интервала V_k лежат в $f^{-1}U_{|k|}$.

Положим теперь $V = \bigcup\limits_{-\infty}^{+\infty} V_k$. Открытое на числовой прямой множество V обладает тем свойством, что $V = f^{-1}fV$. Поэтому по определению факторного отображения множество fV открыто. В силу свойства 1) имеем $\zeta \in fV$, а в силу свойств 2) и 3) имеем $U_k \setminus fV \neq \Lambda$ для всякого $k = 1, 2, \ldots$ Таким образом, система $\{U_k\}$ не является базой окрестностей точки ζ.

В то же время имеет место

Теорема 10. *Если хаусдорфово пространство Y является образом бикомпактного пространства X при непрерывном отображении f, то $wY \leqslant wX$.*

Из теоремы 10 и второй метризационной теоремы Урысона вытекает следующее утверждение:

Теорема 11. *Хаусдорфово пространство, являющееся непрерывным образом компакта, само является компактом.*

Доказательство теоремы 10. В пространстве X зафиксируем базу $\{V_\alpha\colon \alpha \in A\}$ мощности wX. Обозначим через T множество всех конечных подмножеств множества A. Из теоремы 24″ § 6 гл. 3 вытекает, что мощность множества T равна мощности множества A*). Для всякого $t \in T$ положим $V^t = \bigcup\limits_{\alpha \in t} V_\alpha$ и $U_t = Y \setminus f(X \setminus V^t)$. Согласно предложению 2 отображение f замкнуто, поэтому множество U_t открыто. Покажем, что

*) Предполагаем, что $wX \geqslant \aleph_0$. Если вес пространства X конечен, то утверждение теоремы очевидно.

совокупность $\{U_t\colon t \in T\}$ образует базу пространства Y. Пусть Oy — какая-нибудь окрестность произвольной точки $y \in Y$. Для всякой точки $x \in f^{-1}y$ зафиксируем некоторый элемент $V_\alpha(x)$ базы, содержащий x и содержащийся в $f^{-1}Oy$. В силу непрерывности отображения f множество $f^{-1}y$ замкнуто и, следовательно, бикомпактно. Поэтому из покрытия $\{V_{\alpha(x)}\colon x \in f^{-1}y\}$ этого множества можно выделить конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}\}$. Покажем, что $y \in U_t \subseteq Oy$, где $t = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Имеем $f^{-1}y \subset V^t$, т. е. $f^{-1}y \cap (X \setminus V^t) = \Lambda$. Поэтому $y \notin f(X \setminus V^t)$, т.е. $y \in Y \setminus f(X \setminus V^t)$. С другой стороны, $V^t \subseteq f^{-1}Oy$, т. е. $X \setminus f^{-1}Oy \subseteq X \setminus V^t$. Тогда $f(X \setminus f^{-1}Oy) \subseteq f(X \setminus V^t)$, т. е. $Y \setminus f(X \setminus V^t) \subseteq Y \setminus f(X \setminus f^{-1}Oy)$. Но $Y \setminus f(X \setminus V^t) = U_t$, а $Y \setminus f(X \setminus f^{-1}Oy) = Oy$. Итак, $U_t \subseteq Oy$. Теорема доказана.

Замечание. Читатель легко может убедиться, что фактически нами доказана более общая

Теорема 12. *Если топологическое пространство Y является образом топологического пространства X при совершенном отображении, то $wY \leqslant wX$.*

§ 3. Теорема Вейерштрасса—Стоуна

Пусть X — бикомпакт. Обозначаем через $C(X)$ кольцо (алгебру) всех действительных и непрерывных на X функций с обычным определением действий сложения и умножения. Рассматриваем $C(X)$ как метрическое пространство, полагая для любых каких-нибудь функций $f \in C(X)$, $g \in C(X)$

$$\rho(f, g) = \max |f(x) - g(x)|, \qquad x \in X.$$

Пусть C_0 — подкольцо кольца $C(X)$, обладающее следующими двумя свойствами:

1. C_0 разделяет точки X, т. е. для любых двух различных точек x_0 и x_1 пространства X найдется функция $f \in C_0$, принимающая в этих точках различные значения $f(x_0) \neq f(x_1)$.

2. Подкольцо C_0 содержит все константы; т. е. всякая функция, принимающая во всех точках $x \in X$ одно и то же значение, является элементом кольца C_0.

Теорема Вейерштрасса—Стоуна утверждает, что *всякое подкольцо $C_0 \subset C(X)$, обладающее этими двумя свойствами 1 и 2, является всюду плотным множеством в метрическом пространстве $C(X)$*, или что *всякая непрерывная на бикомпакте X функция f есть предел равномерно сходящейся последовательности функций, принадлежащих подкольцу C_0*, а это значит, что ко всякой функции $f \in C(X)$ и ко всякому $\varepsilon > 0$ существует такая функция $g \in C_0$, что $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in X$. Заметим прежде всего, что, наряду с подкольцом $C_0 \subset C(X)$, подкольцом кольца $C(X)$ является и замыкание $[C_0]$ множества C_0 в метрическом пространстве $C(X)$, причем C_0 тогда и только тогда всюду плотно в $C(X)$, когда всюду плотно $[C_0]$. Поэтому достаточно доказать утверждение теоремы Вейерштрасса—Стоуна для (удовлетворяющих условиям 1, 2) замкнутых подколец $C_0 \subset C(X)$.

Начнем с доказательства некоторых лемм.

Лемма 1. *Если кольцо C_0 разделяет точки пространства X, то оно сильно разделяет точки в X, т. е. для любых двух точек x_0, x_1 пространства X и любых двух действительных чисел a и b существует такая функция $f \in C_0$, что $f(x_0)=a$, $f(x_1)=b$.*

Доказательство. По предположению существует функция $g \in C_0$, для которой $g(x_0)=\alpha \neq g(x_1)=\beta$. Заменяя g через $g_0=g-\alpha \in C_0$, можем предположить, что $g(x_0)=0$, $g(x_1)=\beta \neq 0$. Тогда, полагая $f=\frac{b-a}{\beta}g+a \in C_0$, имеем $f(x_0)=a$, $f(x_1)=b$.

Лемма 2. *Если C_0—замкнутое подкольцо кольца $C(X)$, содержащее все константы, то для всякой функции $f \in C_0$ имеем и $|f| \in C_0$.*

Для доказательства леммы 2 заметим, что $|f|=\sqrt{f^2}$. Обозначая через c максимум функции $|f|$ на X, имеем

$$|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{c^2-c^2+f^2(x)}=c\sqrt{1-\left(1-\left(\frac{f(x)}{c}\right)^2\right)}.$$

Полагая $y(x)=1-\left(\frac{f(x)}{c}\right)^2$, имеем, далее, $|f(x)|=c\sqrt{1-y(x)}$, причем функция $y(x)$ непрерывна на всем X и $0 \leqslant y(x) \leqslant 1$. По формуле бинома Ньютона для любых y на отрезке $[0;1]$ функция $\sqrt{1-y}$ от y определена и разлагается в степенной ряд по степеням y, равномерно сходящийся для $0 \leqslant y \leqslant 1$; значит, $\sqrt{1-y(x)}$ разлагается в ряд по степеням $y(x)$, равномерно сходящийся на всем пространстве X. Так как $f \in C_0$, то и функция $y(x)$ и все ее положительные степени содержатся в кольце C_0, а так как C_0 замкнуто в $C(X)$, то и сумма равномерно сходящегося на X ряда по степеням $y(x)$ содержится в C_0, т. е. $|f| \in C_0$, чем лемма 2 доказана.

Пусть дано конечное число функций $f_1, \ldots, f_k$ из C_0. Обозначим через $M_{f_1, \ldots, f_k}$, соответственно $m_{f_1, \ldots, f_k}$, функцию, принимающую в каждой точке $x \in X$ значение, равное наибольшему, соответственно наименьшему, из чисел $f_1(x), \ldots, f_k(x)$.

Лемма 3. *Если подкольцо C_0 наряду с каждым своим элементом f содержит и $|f|$, то оно вместе с любыми своими элементами $f_1, \ldots, f_k$ в конечном числе содержит и элементы $M_{f_1, \ldots, f_k}$ и $m_{f_1, \ldots, f_k}$.*

Достаточно доказать это для $k=2$, т. е. для двух функций f и g. Доказательство непосредственно вытекает из того, что

$$2M_{f,g}(x)=f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|,$$
$$2m_{f,g}(x)=f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|.$$

Теперь достаточно доказать утверждение теоремы Вейерштрасса—Стоуна в предположении, что C_0 есть замкнутое подкольцо кольца $C(X)$, сильно разделяющее точки и удовлетворяющее следующему условию: если функции f и g суть элементы кольца C_0, то функции $M_{f,g}$ и $m_{f,g}$ также являются элементами этого кольца C_0. Проводим это доказательство.

Пусть даны произвольно функция $f\in C(X)$ и число $\varepsilon>0$. Задача заключается в том, чтобы найти функцию $g\in C_0$ так, чтобы было $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ для всех $x\in X$. Так как C_0 сильно разделяет точки, то для любых точек x и y пространства X существует функция $g_{xy}\in C_0$ такая, что $g_{xy}(x)=f(x)$ и $g_{xy}(y)=f(y)$ Из непрерывности функций f и g_{xy} во всем X следует существование такой окрестности $U_{xy}x$ точки x, что для всех точек $t\in U_{xy}x$ имеем $f(t)-\varepsilon<g_{xy}(t)<f(t)+\varepsilon$. Аналогично, существует и окрестность $V_{xy}y$ точки y, для всех точек t которой имеем $f(t)-\varepsilon<g_{xy}(t)<f(t)+\varepsilon$. Считая точку y фиксированной, берем для каждой точки $x\in X$ только что упомянутую окрестность $U_{xy}x$. Эти окрестности покрывают весь бикомпакт X, и из этого покрытия выделяем конечное покрытие $U_{x_1y}x_1$, $U_{x_2y}x_2$, ..., $U_{x_ky}x_k$ пространства X. Полагаем, далее, $Wy=\bigcap\limits_{i=1}^{k}V_{x_iy}y$ и обозначаем через g_y функцию, принимающую в каждой точке $t\in X$ значение $g_y(t)$, равное наименьшему из чисел $g_{x_1y}(t)$, ..., $g_{x_ky}(t)$. Тогда для любого $t\in Wy$ имеем $f(t)-\varepsilon<g_y(t)<f(t)+\varepsilon$. В самом деле, для данного t значение $g_y(t)$ равно некоторому $g_{x_iy}(t)>f(t)-\varepsilon$ при $t\in V_{x_iy}y$, значит, тем более при $t\in Wy$. Далее, кроме того, так как (все время при фиксированном $y\in X$) множества $U_{x_iy}x_i$ покрывают все X, то $g_y(t)<f(t)+\varepsilon$ для всех $t\in X$.

Итак, для каждой точки $y\in X$ мы построили функцию $g_y\in C_0$ и окрестность Wy так, чтобы было $g_y(t)<f(t)+\varepsilon$ для всех $t\in X$ и $f(t)-\varepsilon<g_y(t)$ для всех $t\in Wy$. Из множества этих Wy, построенных для всех $y\in X$, выбираем конечное число окрестностей, образующих покрытие Wy_1, ..., Wy_s бикомпакта X, и обозначим через g функцию, принимающую в каждой точке $x\in X$ значение, равное наибольшему из чисел $g_{y_i}(t)$. Так как в каждой точке x значение функции g равно некоторому $g_{y_i}(x)$, то

всегда $g(x) < f(x)+\varepsilon$. Кроме того, данная точка $x \in X$ принадлежит некоторому множеству Wy_i. Поэтому $f(x)-\varepsilon < g_{y_i}(x) \leqslant g(x)$. Таким образом, для всякой точки $x \in X$ имеем

$$f(x)-\varepsilon < g(x) < f(x)+\varepsilon.$$

Теорема доказана.

В случае отрезка числовой прямой многочлены, как легко видеть, образуют подкольцо C_0, удовлетворяющее условиям 1 и 2. В этом случае мы имеем классическую теорему Вейерштрасса о приближении непрерывной функции равномерно сходящейся последовательностью многочленов.

§ 4. Топологическое произведение и теоремы Тихонова

Весьма большое место в теории бикомпактных топологических пространств занимают ставшие уже классическими теоремы Тихонова.

Понятие произведения множеств было введено (в начале § 5 гл. 3) для двух множеств. Дадим обобщение этого понятия на случай любого конечного или бесконечного числа множеств.

Пусть дано некоторое множество $\mathfrak{A}$ любой мощности τ, элементы которого будем называть «индексами» и обозначать греческими буквами α, β, ... Пусть каждому индексу α отнесено некоторое определенное множество X_α. Произведение $X = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ полученной системы множеств *), по определению, есть множество X, элементами которого являются системы $\{x_\alpha\}$, получающиеся, если каждому индексу $\alpha \in \mathfrak{A}$ отнести по одному элементу $x_\alpha \in X_\alpha$.

Предположим теперь, что множества X_α суть топологические пространства. Следуя А. Н. Тихонову, введем в произведение $X = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ топологию следующим образом: возьмем произвольное конечное число индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, для каждого из этих α_i, $i=1, \ldots, s$, возьмем в X_{α_i} открытое множество u_{α_i} и назовем *элементарным открытым множеством* $O(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s})$ или открытым множеством, определенным данными $u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s}$, множество всех $x=\{x_\alpha\} \in X$, для которых $x_{\alpha_1} \in u_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_s} \in u_{\alpha_s}$

*) Множества X_α и X_β нашей системы могут состоять из одних и тех же элементов; поэтому, строго говоря, мы имеем систему так называемых *«обозначенных»* множеств X_α, понимая под обозначенным множеством пару, состоящую из данного множества и того индекса α, которому это множество отнесено. См. об этом Александров [10], п. 1:3, стр. 25.

(а остальные x_α совершенно произвольны). Пересечение любых двух элементарных открытых множеств является, как легко видеть, элементарным открытым множеством. Поэтому элементарные множества образуют базу некоторой топологии на X (см. предложение 2 § 4 гл. 4).

Эта топология превращает X в топологическое пространство, называемое *топологическим* (или *тихоновским*) *произведением заданной системы топологических пространств**). *Открытые множества топологического произведения суть всевозможные суммы элементарных открытых множеств.* Легко видеть, что *топологическое произведение любой системы хаусдорфовых пространств есть хаусдорфово пространство* (доказательство может быть предоставлено читателю).

Примеры топологических произведений. Произведение двух прямых есть плоскость, произведение n прямых есть n-мерное евклидово пространство (рассматриваемое как топологическое пространство), произведение двух окружностей есть тор. *Произведение счетного числа простых двоеточий гомеоморфно канторову дисконтинууму.*

В самом деле, каждая точка x канторова множества Π однозначно представима в виде $x=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_{i_1\ldots i_n}$, где Δ_{i_1}, $\Delta_{i_1i_2}$, ..., $\Delta_{i_1\ldots i_n}$, ... суть известные нам из § 5 гл. 4 сегменты рангов 1, 2, 3, ..., n, ..., содержащие точку $x\in\Pi$ и этим однозначно определенные. Таким образом, точки канторова множества находятся во взаимно однозначном соответствии с последовательностями i_1, i_2, ..., i_n, ..., где каждое i_k равно 0 или 1, т. е. с точками произведения $P=\prod D_n$. В качестве базы пространства $\prod D_n$ можно взять совокупность элементарных открытых множеств вида $O_{i_1\ldots i_n}$, где $O_{i_1\ldots i_n}$ состоит из всех точек $y=(j_1, \ldots, j_n, \ldots)\subset\prod D_n$, у которых $j_1=i_1$, ..., $j_n=i_n$. Но этим точкам y соответствуют точки множеств $\Pi\cap\Delta_{i_1\ldots i_n}$, и эти последние множества, очевидно, образуют базу множества Π, рассматриваемого как подпространство числовой прямой.

Если на начальном отрезке Δ_0 брать не два сегмента Δ_{00}, Δ_{01}, разделенные друг от друга интервалом δ, а любое число k таких сегментов и повторять этот процесс, переходя от ранга n к рангу $n+1$, как мы делали это при построении канторова множества, то получим снова совершенное нигде не плотное множество $\Pi(k)$, т. е. множество, гомеоморфное и даже подобное (как упорядоченное множество) канторову множеству Π, и точки множества $\Pi(k)$ будут находиться во взаимно однозначном соответствии с точками произведения $\prod D_n$, где D_n есть теперь пространство, состоящее из k изолированных точек. Если число сегментов $\Delta_{i_1\ldots i_n}$ ранга $n\geqslant 1$, которые мы берем на каждом сегменте $\Delta_{i_1\ldots i_{n-1}}$ ранга $n-1$, есть уже не постоянное, а зависящее от n число s_n, то придем посредством тех же рассуждений, что и выше, к гомео-

*) В пространстве X множества $O(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s})$, очевидно, образуют базу.

морфизму между канторовым дисконтинуумом Π и топологическим произведением $P=\prod D_n$ счетного числа пространств D_n, каждое из которых состоит из (произвольного) конечного числа s_n изолированных точек.

Почти столь же просто доказательство того, что *гильбертов кирпич Q есть топологическое произведение счетного числа прямолинейных сегментов.*

В самом деле, рассмотрим топологическое произведение сегментов X_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ Так как топологическое произведение определено в чисто топологических терминах, то мы можем взять за X_n отрезок $\left[0; \frac{1}{2^n}\right]$ числовой прямой. В этом предположении пространство $X=\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ и гильбертов кирпич Q состоят из одних и тех же точек

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \qquad 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Остается доказать, что тождественное отображение X на Q является топологическим. Так как Q — компакт, то для этого в свою очередь достаточно убедиться в том, что тождественное отображение X на Q непрерывно, т. е. что

(а) *каковы бы ни были точка x и $\varepsilon > 0$, можно найти такую окрестность точки x в пространстве X, что для всех точек x' этой окрестности будем иметь $\rho(x, x') > \varepsilon$ в Q.*

Доказательство утверждения (а). При заданном ε, $0<\varepsilon<1$, берем $n \geqslant 2$ столь большим, чтобы $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Окрестность U точки x в X, определенная условиями

$$|x_1-x_1'| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}, \ \ldots, \ |x_n-x_n'| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}},$$

есть искомая.

Произведение отображений. Пусть дана система отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$ топологических пространств X_α в топологические пространства Y_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Отображение f топологического произведения $X=\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha$ в топологическое произведение $Y=\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} Y_\alpha$, ставящее в соответствие точке $x=\{x_\alpha\} \in X$ точку $fx=\{f_\alpha x_\alpha\} \in Y$, называется *простым произведением отображений* и пишется: $f=\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} f_\alpha$.

Предложение 1. *Простое произведение $\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} f_\alpha$ непрерывных отображений f_α непрерывно.*

Доказательство. Достаточно показать, что прообраз $f^{-1}O$ всякого элементарного открытого множества $O=O(U_{\alpha_1}, \ldots$ $\ldots, U_{\alpha_s}) \subseteq Y=\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} Y_\alpha$ открыт. Но непосредственной проверкой убеждаемся в том, что этот прообраз $f^{-1}O$ сам будет элементарным открытым множеством $O(f_{\alpha_1}^{-1}U_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_s}U_{\alpha_s}) \subseteq X = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь дана система отображений f_α: $X \longrightarrow Y_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, топологического пространства X в топологические пространства Y_α. Тогда отображение f: $X \longrightarrow Y = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} Y_\alpha$, ставящее в соответствие точке x точку $fx = \{f_\alpha x\} \in Y$, называется *диагональным произведением отображений* f_α.

Возьмем теперь для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ по экземпляру X_α пространства X и рассмотрим отображение i: $X \longrightarrow \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, ставящее в соответствие точке x точку $i(x) \in \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, все координаты которой совпадают с x. Отображение i: $X \longrightarrow \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ непрерывно и даже является вложением пространства X в произведение $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$. Диагональное произведение f отображений f_α представляется в виде композиции вложения i и простого произведения отображений f_α: $X = X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$. Поэтому из предложения 1 вытекает

Предложение 2. *Диагональное произведение непрерывных отображений непрерывно.*

Теорема 13 (первая теорема Тихонова). *Топологическое произведение любой системы бикомпактных пространств есть бикомпактное пространство.*

Пусть дана какая-нибудь центрированная система S множеств, являющихся подмножествами некоторого множества M. Назовем центрированную систему S максимальной, если она не является подсистемой никакой отличной от нее центрированной системы подмножеств множества M. Легко доказать, что *всякая центрированная система* $S_0 = \{M^\lambda\}$, $M^\lambda \subseteq M$, *содержится по крайней мере в одной максимальной центрированной системе* S.

В самом деле, пусть система $S_0 = \{M_\alpha\}$ не максимальна. Тогда существует центрированная система $S_1 \supset S_0$. Предположим, что построены центрированные системы

$$S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_\nu \subset \ldots, \qquad \nu < \alpha.$$

Если α — первого рода, $\alpha = \alpha' + 1$, и система $S_{\alpha'}$ не есть максимальная центрированная система, то берем центрированную систему $S_{\alpha'+1} \supset S_{\alpha'}$. Если α — второго рода, полагая $S_\alpha = \bigcup\limits_{\nu < \alpha} S_\nu$, легко видеть, что S_α — центрированная система. Если мощность множества M есть $M = \aleph_\sigma$, то мощность множества N всех подмножеств множества M есть 2^m, а мощность множества всех подмножеств множества N (т. е. множества всех систем, составленных из множеств

$M^\lambda \subseteq M$) есть некоторое $\aleph_\tau = 2^{2^m}$. В частности, множество всех центрированных систем подмножеств множества M имеет мощность $\leqslant \aleph_\tau$; поэтому наш процесс построения систем S должен оборваться на некотором порядковом числе $\alpha < \omega_{\tau+1}$, т. е. мы должны встретиться с таким $\alpha < \omega_{\tau+1}$, что S_α есть максимальная центрированная система.

Докажем теперь следующую лемму:

Лемма 1. *Для того чтобы пространство X было бикомпактно, необходимо и достаточно, чтобы всякая центрированная система множеств $M^\lambda \subseteq X$ имела хотя бы одну общую точку прикосновения.*

В самом деле, если X бикомпактно, то система замкнутых множеств $[M^\lambda]$, будучи центрированной, имеет хотя бы одну общую точку, которая и является общей точкой прикосновения всех данных множеств M^λ. Обратно, если наше условие выполнено, то, в частности, всякая центрированная система замкнутых множеств имеет общую точку прикосновения, и пространство X бикомпактно.

Перейдем теперь собственно к доказательству первой теоремы Тихонова. Пусть X—топологическое произведение бикомпактных пространств X_α. Требуется доказать, что всякая центрированная система S множеств $M^\lambda \subseteq X$ имеет хотя бы одну общую точку прикосновения. Дополнив, если нужно, данную систему до максимальной центрированной системы, можно с самого начала предположить, что центрированная система S является максимальной. Обозначим через M_α^λ «проекцию» множества M^λ в X_α, т. е. множество всех точек $x_\alpha \in X_\alpha$, являющихся «*координатами*» точек *) $x \in M^\lambda$. Система всех множеств M_α^λ (здесь α постоянно, а λ переменно) есть центрированная система в пространстве X_α. Так как X_α бикомпактно, то множество M_α^λ имеют по крайней мере одну общую точку прикосновения $x_\alpha \in X_\alpha$. Докажем, что точка $x = \{x_\alpha\} \in X$ есть общая точка прикосновения всех M^λ. Для этого надо показать, что всякая элементарная окрестность точки x пересекается с любым M^λ. Произвольная элементарная окрестность точки x получается фиксированием некоторого конечного числа индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и выбором окрестностей u_{α_i} точек x_{α_i} в X_{α_i} для $i = 1, \ldots, s$. Но для «одноиндексных» окрестностей, т. е. таких, при определении которых фиксируется лишь один индекс $\alpha_1 = \alpha$, наше утверждение непосредственно следует из того, что каждая окрестность U_α точки x_α в X_α пересекается с любым M_α^λ. Далее, так как каждая одноиндексная окрестность пересекается со всеми M^λ, а система всех M^λ—*максимальная* центрированная система, то каждая одноиндексная окрестность непременно входит в систему S; действительно, пополнив какую-нибудь центрированную систему множеств любым множеством,

*) Если $x = \{x_\alpha\}$ есть точка топологического произведения $X = \prod X_\alpha$, то каждое x_α называется координатой точки x.

пересекающимся со всеми элементами данной центрированной системы, мы, как легко видеть, снова получаем центрированную систему. Из только что сделанного замечания вытекает, далее, что пересечение любого конечного числа элементов максимальной центрированной системы S есть опять-таки элемент системы S. Так как каждая элементарная окрестность произвольной точки пространства X есть пересечение конечного числа одноиндексных окрестностей, то система S, содержа, как мы видели, в числе своих элементов все одноиндексные окрестности точки x, необходимо содержит и все вообще окрестности точки x, откуда следует, что любая окрестность точки x (будучи элементом системы $S=\{M^\lambda\}$) пересекается с любым множеством M^λ, чем первая теорема Тихонова и доказана.

Так как произведение хаусдорфовых пространств есть хаусдорфово пространство, то из доказанного вытекает

Следствие. *Произведение любой системы бикомпактов есть бикомпакт.*

Легко доказать, что произведение кардинального числа $\tau \geqslant \aleph_0$ пространств, каждое из которых имеет вес $\leqslant \tau$, является пространством веса $\leqslant \tau$. В самом деле, возьмем в каждом из данных пространств X_α базу $\mathfrak{B}_\alpha$ мощности $\leqslant \tau$. Мы получим базу $\mathfrak{B}$ пространства $X=\prod\limits_\alpha X_\alpha$, если при определении элементарных открытых множеств $O(u_{\sigma_1}, \ldots, u_{\sigma_s})$ будем под u_α разуметь элементы базы $\mathfrak{B}_\alpha$. На каждую заданную комбинацию индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ придется не более τ комбинаций $u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s}$ и, значит, не более τ множеств $O(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s})$. Но если множество $\mathfrak{A}$ всех индексов α имеет мощность τ, то и множество всех конечных комбинаций $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ также имеет мощность τ; значит, и общее число всех элементарных множеств $O(u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_s})$, т. е. мощность базы $\mathfrak{B}$, не превосходит τ (легко видеть, что оно в точности равно τ, чем мы, однако, пользоваться не будем).

Первая теорема Тихонова дает много интересных и важных примеров бикомпактных пространств, в частности бикомпактов. Таковы: бикомпактное T_0-пространство $\mathfrak{F}^\tau$, являющееся произведением τ пространств, каждое из которых есть связное двоеточие; бикомпакт D^τ («обобщенный канторов дисконтинуум веса τ»), являющийся произведением τ простых двоеточий; бикомпакт I^τ, являющийся произведением τ сегментов числовой прямой («*тихоновский кирпич веса* τ») *); произведение τ окружностей («тор T^τ веса τ») и т. д. Все перечисленные пространства обладают рядом интересных свойств. Так, D^τ и T^τ являются, при надле-

---

*) По доказанному, гильбертов кирпич является частным случаем тихоновского: $Q=I^{\aleph_0}$; точно так же канторов дисконтинуум есть D^τ при $\tau=\aleph_0$.

жащем определении в них операции сложения, топологическими группами. Пространство $\mathfrak{F}^\tau$ замечательно тем, что содержит топологический образ любого T_0-пространства веса $\leqslant\tau$. Далее, каждое T_0-пространство веса $\leqslant\tau$ является взаимно однозначным и в одну сторону непрерывным образом некоторого множества, лежащего в D^τ, а каждый бикомпакт веса $\leqslant\tau$ является непрерывным образом некоторого замкнутого множества, лежащего в D^τ *) (см. § 10 этой главы).

Теорема 14 (вторая теорема Тихонова). *Всякое вполне регулярное пространство веса τ гомеоморфно некоторому множеству, лежащему в тихоновском кирпиче веса τ.*

Прежде чем доказывать эту теорему, сделаем по поводу нее некоторые замечания и выведем из нее некоторые следствия. Прежде всего, из нее следует, что тихоновский кирпич I^τ «веса τ» действительно имеет вес τ: в самом деле, будучи произведением τ отрезков, I^τ имеет вес $\leqslant\tau$, а содержа топологический образ любого вполне регулярного пространства веса τ **), не может иметь вес $<\tau$. Далее, *всякое множество A, лежащее во вполне регулярном пространстве X, само есть вполне регулярное пространство:* если $x_0\in A$ и $\Phi\subseteq A\setminus x_0$ замкнуто в A, то, беря замкнутое в X множество F так, чтобы $A\cap F=\Phi$, построим непрерывную в X функцию f, $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, равную 0 в точке x_0 и 1 на F. Рассматривая эту функцию лишь на A, видим, что точка x_0 и множество Φ функционально отделены в A. Из этого замечания, из того, что всякий бикомпакт, будучи нормальным пространством, и подавно является вполне регулярным, и из второй теоремы Тихонова вытекает

Теорема 15. *Класс вполне регулярных пространств совпадает с классом множеств, лежащих в бикомпактах, причем класс вполне регулярных пространств веса τ совпадает с классом подмножеств тихоновского кирпича веса τ.*

Далее, так как бикомпакты нормальны, а всякое множество, лежащее в нормальном пространстве, по только что доказанному, вполне регулярно, то можно сказать и так:

Теорема 15′. *Вполне регулярные пространства суть не что иное, как множества, лежащие в нормальных пространствах.*

Имеет место и следующее предложение:

Теорема 16. *Класс бикомпактов может быть определен как каждый из следующих классов:*

класс вполне регулярных пространств, замкнутых во всяком объемлющем хаусдорфовом (или вполне регулярном, или нормальном) пространстве;

---

*) Не все бикомпакты являются непрерывными образами всего D^τ (см. § 10 этой главы).

**) Например, пространства, состоящего из τ изолированных точек.

класс нормальных пространств, замкнутых во всяком объемлющем хаусдорфовом (или вполне регулярном, или нормальном) пространстве.

Это утверждение следует из того, что всякий бикомпакт является нормальным (следовательно, и вполне регулярным) пространством, замкнутым во всяком хаусдорфовом (значит, и подавно во всяком вполне регулярном и во всяком нормальном) пространстве, и что небикомпактное вполне регулярное пространство, будучи топологически отображено в тихоновский кирпич (являющийся нормальным, значит, вполне регулярным, значит, хаусдорфовым пространством), дает там незамкнутое множество *).

Переходим к доказательству второй теоремы Тихонова. Пусть X — вполне регулярное пространство. Рассмотрим какое-нибудь множество Ξ функций f, непрерывных в X и удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Всякое такое множество Ξ называем *множеством, расчленяющим пространство* X, если для любой точки x_0 и любой окрестности Ox_0 этой точки можно найти такую функцию $f \in \Xi$, что $f(x_0) = 0$ и $f(x) = 1$ для всех $x \in X \setminus Ox_0$. Расчленяющие множества функций существуют: таково, например, множество всех непрерывных в X функций, удовлетворяющих условию $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Вторая теорема Тихонова будет доказана, если мы докажем следующие два предложения:

А) *Если вполне регулярное пространство X имеет вес τ, то существует расчленяющее множество функций мощности $\leqslant \tau$.*

Б) *Если во вполне регулярном пространстве существует расчленяющее множество функций мощности τ', то существует и топологическое отображение φ пространства X в тихоновский кирпич $I^{\tau'}$* (из Б) следует, что мощность всякого расчленяющего множества функций не меньше, чем вес пространства X).

Лемма 2. *Пусть x_0 — точка вполне регулярного пространства X. Ко всякой окрестности Ox_0 точки x_0 можно найти такую окрестность O_1x_0 той же точки, что замкнутые множества $[O_1x_0]$ и $X \setminus Ox_0$ функционально отделимы в X (так что, в частности, $[O_1x_0] \subseteq Ox_0$).*

Для доказательства этой леммы возьмем какую-нибудь функцию f, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, непрерывную в X, равную 0 в x_0 и равную 1 на $X \setminus Ox_0$. Обозначим через O_1x_0 множество всех точек x, в

---

*) Мы только что видели, что бикомпакты могут быть также охарактеризованы как регулярные пространства, замкнутые во всяком объемлющем хаусдорфовом пространстве. К этому надо еще заметить, что существуют H-замкнутые небикомпактные и, следовательно, нерегулярные хаусдорфовы пространства (например, нерегулярное хаусдорфово пространство, упомянутое на стр. 168) и что всякое T_1-пространство, состоящее из бесконечного числа точек (следовательно, и любой бикомпакт, состоящий из бесконечного числа точек), является незамкнутым множеством некоторого T_1-пространства.

которых $f(x) < \frac{1}{2}$, и определим функцию f_1 так:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad f(x) \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2\left(f(x) - \frac{1}{2}\right), & \text{если} \quad \frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1. \end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ непрерывна, согласно предложению 4 § 2 гл. 4, и отделяет друг от друга множества $[O_1x_0]$ и $X \setminus Ox_0$.

Доказательство утверждения А). Возьмем теперь базу $\mathfrak{B} = \{U_\nu\}$ пространства X, имеющую мощность τ; пару $\pi_\alpha = (U_\mu, U_\nu)$, где $U_\mu \in \mathfrak{B}$, $U_\nu \in \mathfrak{B}$, назовем канонической, если $[U_\mu] \subseteq U_\nu$ и множества $[U_\mu]$, $X \setminus U_\nu$ являются функционально отделимыми. Множество всех канонических пар обозначим через C. Оно имеет мощность $\leqslant \tau$. Выберем теперь для каждой канонической пары $\pi_\alpha = (U_\mu, U_\nu)$ функцию f_α, $0 \leqslant f_\alpha(x) \leqslant 1$, непрерывную в X, равную 0 на $[U_\mu]$ и 1 на $X \setminus U_\nu$. Множество Ξ отобранных нами функций f_α имеет мощность $\leqslant \tau$ и есть множество, расчленяющее пространство X. В самом деле, каковы бы ни были точка $x_0 \in X$ и ее окрестность Γ в X, возьмем содержащуюся в Γ окрестность $Ox_0 = U_\nu \in \mathfrak{B}$, подберем к ней окрестность O_1x_0 согласно лемме 2 и лежащую в O_1x_0 окрестность $O_2x = U_\mu$; пара (U_μ, U_ν) есть каноническая пара π_α, причем $f_\alpha(x_0) = 0$ и $f_\alpha(x) = 1$ для $x \in X \setminus \Gamma$. Утверждение А) доказано.

Доказательство утверждения Б). Пусть дано множество

$$\Xi = \{f_\alpha\}$$

функций, расчленяющих пространство X, с индексами α, пробегающими некоторое множество $\mathfrak{A}$ мощности τ'. Топологическое отображение φ пространства X в $I^{\tau'}$ построим следующим образом. Пусть для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ взят сегмент

$$I_\alpha = [0 \leqslant t_\alpha \leqslant 1]$$

числовой прямой. Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие точку

$$f_\alpha(x) = t_\alpha \in I_\alpha.$$

Получим точку $\varphi(x) = \{f_\alpha(x)\} \in I^{\tau'}$. Этим определено отображение φ пространства X на некоторое множество $Y \subseteq I^{\tau'}$. Отображение φ является диагональным произведением отображений f_α; в силу предложения 2 оно непрерывно.

Отображение φ взаимно однозначно. В самом деле, пусть $x \in X$, $x' \in X$, $x' \neq x$. К окрестности $X \setminus x'$ точки x подбираем, согласно определению расчленяющего множества функций, функцию $f_\alpha \in \Xi$ так, чтобы $f_\alpha(x) = 0$ и $f_\alpha(x') = 1$; тогда α-е координаты $f_\alpha(x)$ и $f_\alpha(x')$ точек $\varphi(x)$ и $\varphi(x')$ различны, так что $\varphi(x) \neq \varphi(x')$.

Отображение φ^{-1} множества Y на X непрерывно. В самом деле, пусть $y = \{t_\alpha\} \in Y$, $\varphi^{-1}(y) = x$. К произвольной окрестности Ox точки x в X требуется подобрать такую окрестность Oy в $I^{\tau'}$, чтобы $\varphi^{-1}(Oy \cap Y) \subseteq Ox$. Берем функцию f_α так, чтобы было $f_\alpha(x) = 0$ и $f_\alpha(x') = 1$ для любого $x' \in X \setminus Ox$. Тогда α-я координата t_α точки $y = \varphi(x)$ есть $t_\alpha = f_\alpha(x) = 0$. Обозначаем через Oy множество всех точек $y' = \{t'_\alpha\} \in I^{\tau'}$, у которых $t'_\alpha < 1$. Для любой точки $y' \in Y$, попавшей в Oy, имеем $\varphi^{-1}(y') \in Ox$. В самом деле, если бы $x' = \varphi^{-1}(y') \in X \setminus Ox$, то было бы $f_\alpha(x') = 1$, т. е. α-я координата точки $\varphi(x') = y'$ равнялась бы 1, вопреки определению точки y'.

Утверждение Б), а значит, и вторая теорема Тихонова доказаны.

В заключение рассмотрим пространство I^c. По самому своему определению пространство I^c есть произведение отрезков

$$I_\alpha = [0 \leqslant x_\alpha \leqslant 1]$$

числовой прямой, причем индекс α пробегает некоторое множество значений мощности континуума. Поэтому можно считать, что индекс α принимает в качестве своих значений все действительные числа отрезка $[0; 1]$. Но тогда точкой

$$x = \{x_\alpha\}$$

пространства I^c является просто произвольная функция

$$x = x(\alpha),$$

определенная на сегменте $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и принимающая значения, также принадлежащие сегменту $[0; 1]$. При этом топология в пространстве I^c может быть описана так: чтобы получить произвольную окрестность точки $x_0 = x_0(\alpha)$ пространства I^c, надо задать произвольное $\varepsilon > 0$ и произвольные точки $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ отрезка $[0; 1]$ в конечном числе; тогда определенная этими данными окрестность $O(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \varepsilon)$ точки x_0 состоит из всех функций $x = x(\alpha)$, удовлетворяющих условиям

$$|x_0(\alpha_i) - x(\alpha_i)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, s.$$

Итак, *пространство I^c может быть определено как пространство всех функций $x = x(\alpha)$, определенных на отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, со значениями, принадлежащими отрезку $0 \leqslant x \leqslant 1$, при только что описанной топологии*; поэтому пространство I^c называют *тихоновским функциональным пространством*; по доказанному, оно представляет собой бикомпакт веса c. В то же время I^c содержит счетное всюду плотное множество. В качестве такого множества можно, например, взять множество всех кусочно постоянных («ступенчатых») функций, принимающих рациональные значения и имеющих конечное число точек разрыва.

Пусть дано счетное множество точек

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{1}$$

пространства I^c. Докажем, что *множество* (1) *тогда и только тогда имеет в* I^c *единственную предельную точку* x_0, *когда последовательность функций* $x_n = x_n(\alpha)$ *сходится к функции* $x_0(\alpha)$ *на всем отрезке* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ (это предложение при ссылках на него будем называть «леммой»).

Прежде всего, ясно, что если последовательность (1) сходится к функции x_0 в любой точке α, то x_0 есть единственная предельная точка множества (1) в пространстве I^c. Докажем обратное утверждение. Пусть x_0 — единственная предельная точка множества (1). Если последовательность функций (1) не сходится на отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ к функции x_0, то существуют точка α_0, $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1$, и подпоследовательность

$$x_{m_1},\ x_{m_2},\ \ldots,\ x_{m_k},\ \ldots \tag{2}$$

последовательности (1) такие, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнены неравенства

$$|x_0(\alpha_0) - x_{m_k}(\alpha_0)| \geqslant \varepsilon \tag{3}$$

для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$ В силу бикомпактности пространства I^c множество (2) имеет предельную точку x', причем из определения топологии пространства I^c следует, что в (2) найдется такая функция x_{m_k}, что

$$|x'(\alpha_0) - x_{m_k}(\alpha_0)| < \varepsilon,$$

откуда в силу неравенства (3) следует, что $x' \neq x_0$, в противоречии с предположением, что x_0 — единственная предельная точка множества (1) в I^c.

Построим в пространстве I^c замкнутое (следовательно, бикомпактное) бесконечное множество Φ, обладающее следующим замечательным свойством: Φ *не содержит никакой нестационарной* *) *сходящейся последовательности*. Для этого обозначим через D счетное множество функций $d_n(\alpha)$, заданных на отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, где $d_n(\alpha)$, по определению, есть n-й двоичный знак числа α, причем если α имеет два двоичных разложения, то берем то из них, которое оканчивается нулями. Докажем, что последовательность функций

$$d_1(\alpha),\ d_2(\alpha),\ \ldots,\ d_n(\alpha) \tag{4}$$

---

*) Напомним, что последовательность называется стационарной, если все ее элементы, начиная с некоторого, совпадают между собой.

не содержит никакой нестационарной подпоследовательности, сходящейся на всем отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Пусть, в самом деле,

$$d_{n_1}(\alpha),\ d_{n_2}(\alpha),\ \ldots,\ d_{n_k}(\alpha),\ \ldots \tag{5}$$

— какая-нибудь подпоследовательность последовательности (4). Определяем точку α_0, $0 < \alpha_0 < 1$, ее разложением в двоичную дробь

$$\alpha_0 = 0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

следующим образом: для всех целых $h \geqslant 1$ полагаем $\alpha_{n_{2h}} = 0$, а для n, не равного никакому n_{2h}, полагаем $\alpha_n = 1$. Так как

$$d_{n_{2h}}(\alpha_0) = \alpha_{n_{2h}} = 0,$$
$$d_{n_{2h+1}}(\alpha_0) = \alpha_{n_{2h+1}} = 1,$$

то последовательность (5) не может сходиться в точке α_0, и наше утверждение доказано.

Определим теперь Φ как замыкание в I^c множества D. Так как I^c есть бикомпакт, то и Φ — бикомпакт. Докажем, что в Φ нет никакой нестационарной сходящейся последовательности точек. В силу леммы достаточно показать, что из множества Φ нельзя выделить никакой последовательности попарно различных функций, сходящейся на всем отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Но пусть

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \qquad x_n \in \Phi, \tag{6}$$

— такая последовательность, и пусть она сходится на отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ к функции x_0. Тогда $x_0 \in \Phi$. Пусть O_1 — произвольная окрестность точки x_0 относительно Φ и $x_n \in O_1$. Берем окрестность O_2 точки x_0 относительно Φ так, чтобы $[O_2]_\Phi \subseteq O_1$ и чтобы $x_{n_1} \in O_1 \diagdown [O_2]$. Выбираем, далее, $x_{n_2} \in O_2$ и окрестность O_3: $[O_3]_\Phi \subseteq O_2$, $x_{n_2} \in O_2 \diagdown [O_3]$. Продолжая это рассуждение, получим последовательность окрестностей

$$O_1 \supseteq O_2 \supseteq \ldots \supseteq O_h \supseteq \ldots$$

точки x_0 и подпоследовательность $x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_h},\ \ldots$ последовательности (6), причем $x_{n_h} \in O_h \diagdown [O_{h+1}]$.

Положим

$$D_h = D \cap (O_h \diagdown [O_{h+1}]).$$

Ни одно из множеств D_h не пусто *), и они попарно не пересекаются. Элементы множества D_h суть некоторые из наших

*) В самом деле, $O_h \diagdown [O_{h+1}]$ есть окрестность точки x_{n_h} в $\Phi = [D]$, поэтому в этой окрестности содержится хотя бы одна точка множества D.

функций d_n; пусть это будут

$$d_{n_1^h},\ d_{n_2^h},\ \ldots,\ d_{n_i^h},\ \ldots$$

Назовем теперь натуральное число n числом первого рода, если существует такое i, что $n = n_i^h$ при нечетном h, и числом второго рода, если оно не есть число первого рода. Положим теперь

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ — первого рода,} \\ 0, & \text{если } n \text{ — второго рода,} \end{cases}$$

и рассмотрим действительное число α_0 с двоичным разложением

$$\alpha_0 = 0{,}\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

Тогда при нечетном h всякая функция $d_{n_i^h} \in D_h$ принимает в α_0 значение 1, а при четном h — значение 0; но x_{n_h} есть точка прикосновения множества D_h; поэтому функция x_{n_h} принимает в точке α_0 значение 1 при нечетном h и значение 0 при четном h, откуда вытекает, что последовательность $\{x_{n_h}\}$ в точке α_0 не может сходиться, что и требовалось доказать.

§ 5. Внутренняя характеристика вполне регулярных пространств

Как видно из предыдущего, вполне регулярные (тихоновские) пространства, первоначально определенные (фактически еще Урысоном) посредством требования функциональной отделимости любой точки от любого не содержащего ее замкнутого множества, могут быть определены и как подпространства бикомпактов. Эти определения при всем их изяществе и простоте не являются, однако, «внутренними»: первое из них требует привлечения вещественных функций, значит, и вещественных чисел, второе основано на погружении данного пространства в объемлющие его пространства. Поэтому с самого возникновения теории вполне регулярных (тихоновских) пространств возникла задача их внутреннего определения, т. е. такого определения, которое не опирается ни на какие понятия и построения, кроме непосредственно связанных с самой топологией данного пространства. После ряда посвященных этой задаче работ различных авторов ее полное решение дал Зайцев [1]. Это решение основано на простой и естественной идее рассмотрения, наряду с данной открытой или замкнутой базой Z топологического пространства, сопряженной ей базы $\bar{Z}$ (замкнутой, соответственно открытой), состоящей из множеств, дополнительных к элементам данной базы Z.

Открытая база пространства X называется *симметрической*, если она мультипликативно порождает замкнутую топологию пространства X. Аналогично, *замкнутая база* называется *симметрической*, если она аддитивно порождает открытую топологию, т. е. является сетью пространства X *). *Открытая база* Z называется *нормальной*, если она симметрична и если любые два дизъюнктных замкнутых множества, являющихся элементами сопряженной базы, имеют дизъюнктные окрестности, являющиеся элементами данной базы Z. Аналогично, *замкнутая база нормальна*, если она симметрична и любые два ее дизъюнктных элемента имеют в сопряженной открытой базе дизъюнктные окрестности. Очевидно, что *база, сопряженная нормальной базе, нормальна*.

Теорема Зайцева (критерий полной регулярности пространства). *Для того чтобы T_1-пространство было вполне регулярно, необходимо и достаточно, чтобы оно имело нормальную базу (все равно — открытую или замкнутую).*

Условие необходимо. Пусть X есть тихоновское пространство. Обозначим через $\Phi = \{\varphi\}$ множество всех непрерывных действительных функций, определенных на всем X и удовлетворяющих условию $0 \leqslant \varphi x \leqslant 1$ для всех $x \in X$. Множество $\varphi^{-1} 0$ всех точек $x \in X$, для которых $\varphi x = 0$, называется нулевым множеством функции φ. Докажем, что множество Z нулевых множеств всевозможных функций $\varphi \in \Phi$ образует нормальную замкнутую базу.

Прежде всего докажем, что Z — замкнутая база. Для этого достаточно доказать, что, каковы бы ни были замкнутое множество $F \subset X$ и точка $x_0 \in X \setminus F$, найдется такой $A \in Z$, что $F \subseteq A \subseteq X \setminus \{x_0\}$. Но это утверждение вытекает из полной регулярности пространства X: достаточно положить $A = \varphi^{-1} 0$, где $\varphi \in \Phi$ — функция, принимающая во всех точках $x \in F$ значение 0, а в точке x_0 значение 1. Доказываем, что Z есть сеть. В самом деле, каковы бы ни были точка $x_0 \in X$ и ее окрестность Ox_0, берем функцию $\varphi \in \Phi$, равную 0 в точке x_0 и равную 1 на $X \setminus Ox_0$. Полагая $A = \varphi^{-1} 0$, имеем $x_0 \in A \subseteq Ox_0$. Итак, Z есть замкнутая симметрическая база. Доказываем, что база Z нормальна.

Пусть $A_1 = \varphi_1^{-1} O$, $A_2 = \varphi_2^{-1} O$, $A_1 \cap A_2 = \Lambda$. Требуется найти такие $B_1 \in Z$, $B_2 \in Z$, что

$$A_1 \subseteq X \setminus B_1, \quad A_2 \subseteq X \setminus B_2, \quad B_1 \cup B_2 = X.$$

Так как не существует точки x, в которой было бы одновременно $\varphi_1 x = 0$, $\varphi_2 x = 0$, $\varphi_1 \in \Phi$, $\varphi_2 \in \Phi$, то $hx = \frac{\varphi_1 x}{\varphi_1 x + \varphi_2 x}$ — непрерывная функция, которая содержится в Φ и отделяет

*) Необходимые определения см. в § 4 гл. 4.

множества A_1 и A_2. Положим

$$\psi_1 x = \begin{cases} 3\left(^1/_3 - hx\right), & \text{если} \quad 0 \leqslant hx < {}^1/_3, \\ 0, & \text{если} \quad {}^1/_3 \leqslant hx \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\psi_2 x = \begin{cases} {}^3/_2\left(hx - {}^1/_3\right), & \text{если} \quad {}^1/_3 < hx \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant hx \leqslant {}^1/_3. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\psi_1 \in \Phi$, $\psi_2 \in \Phi$ и ψ_1 принимает значение нуль только на множестве, на котором ${}^1/_3 \leqslant hx \leqslant 1$, а ψ_2 — соответственно только на множестве, на котором $0 \leqslant hx \leqslant {}^1/_3$. Другими словами, полагая

$$B_1 = \psi_1^{-1} 0 \in Z, \quad B_2 = \psi_2^{-1} 0 \in Z,$$

имеем

$$A_1 \subseteq X \setminus B_1, \quad A_2 \subseteq X \setminus B_2,$$

причем, как легко видеть, множества $X \setminus B_1$ и $X \setminus B_2$ не пересекаются.

Доказательство первой части теоремы закончено.

Введем теперь следующее вспомогательное определение.

Пусть X есть T_1-пространство. Множество Σ пар (F, OF), где F замкнуто, а OF есть некоторая окрестность множества F, называется *плотной системой*, если для любой пары $(F, OF) \in \Sigma$ существуют окрестность $O'F$ множества F и замкнутое множество $\overline{F}$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $[O'F] \subseteq \overline{F} \subseteq OF$,

2) $(F, O'F) \in \Sigma$, $(\overline{F}, OF) \in \Sigma$.

Имеют место следующие простые леммы.

Лемма 1. *Пусть $Z = \{A\}$ есть нормальная замкнутая база T_1-пространства X. Тогда $\Sigma = \{(A, OA)\}$, где $A \in Z$, $OA \in \overline{Z}$ есть плотная система.*

Доказательство. Пусть (A, OA) есть произвольная пара из Σ. Рассмотрим $X \setminus OA = \overline{A}$; очевидно, $A \cap \overline{A} = \Lambda$. Тогда возьмем такие окрестности $O'A \in \overline{Z}$ и $O'\overline{A} \in \overline{Z}$, что $O'A \cap O'\overline{A} = \Lambda$. Положим $X \setminus O'\overline{A} = F$. Тогда $F \in Z$. Так как $O'A \cap O'A = \Lambda$, то $O'A \subseteq X \setminus O'\overline{A} = F$; следовательно, $[O'A] \subseteq F$. Покажем, что $F \subseteq OA$. Действительно, имеем

$$(X \setminus OA) \cap F = (X \setminus OA) \cap (X \setminus O'\overline{A}) = \overline{A} \cap (X \setminus O'\overline{A}) = \Lambda.$$

Итак, $A \subseteq [O'A] \subseteq F \subseteq OA$. Так как $A \in Z$, $O'A \in \overline{Z}$, $F \in Z$, $OA \in \overline{Z}$, то $(A, O'A) \in \Sigma$, $(F, OA) \in \Sigma$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть A и B — произвольные непересекающиеся замкнутые множества пространства X. Тогда, если для множе-*

ства A существует система окрестностей $\{\Gamma_r\}$, занумерованных всеми двоично-рациональными числами r $(0 \leqslant r \leqslant 1)$, так что $\Gamma_1 = X \setminus B$ и из $r < r'$ следует $[\Gamma_r] \subseteq \Gamma_{r'}$, то A и B функционально отделимы.

Для доказательства достаточно повторить классическое рассуждение П. С. Урысона: пусть $t \in [0; 1]$ не является двоично-рациональным числом; положим $\Gamma_t = \bigcup\limits_{r<t} \Gamma_r$. Если $t < t'$, то $[\Gamma_t] \subseteq \Gamma_{t'}$. Таким образом, каждому действительному числу $t \in \in [0; 1]$ соответствует окрестность Γ_t множества A, удовлетворяющая условию: $[\Gamma_t] \subseteq \Gamma_{t'}$ при $t < t'$. Следуя все время Урысону, положим, наконец, $\Gamma_t = \Lambda$ для $t < 0$ и $\Gamma_t = X$ для $t > 1$. Построим для каждой точки $x \in X$ некоторое сечение (A^x, B^x) в множестве всех действительных чисел: именно отнесем число t к нижнему классу A^x, если x не содержится в Γ_t, и к верхнему классу B^x, если $x \in \Gamma_t$. Это сечение определяет действительное число τ_x, причем, очевидно, $0 \leqslant \tau_x \leqslant 1$. Другими словами, определена функция $f_{0,1}(x) = \tau_x$ во всем пространстве X, которая и отделяет множества A и B.

Замечание. Легко видеть, что условие этой леммы является не только достаточным, но и необходимым для функциональной отделимости множеств A и B.

Лемма 3. *Пусть $(F, OF) \in \Sigma$, где Σ — некоторая плотная система пространства X. Тогда F и $X \setminus OF$ функционально отделимы.*

Доказательство снова повторяет доказательство леммы Урысона. Положим $OF = \Gamma_1$. В силу плотности системы Σ существуют окрестность Γ_0 и замкнутое множество Φ_0 такие, что

$$F \subseteq \Gamma_0 \subseteq [\Gamma_0] \subseteq \Phi_0 \subseteq \Gamma_1,$$

причем

$$(F, \Gamma_0) \in \Sigma, \tag{1}$$

$$(\Phi_0, \Gamma_1) \in \Sigma. \tag{2}$$

Из (2) следует существование окрестности $\Gamma_{1/2}$ и множества $\Phi_{1/2}$ таких, что

$$\Phi_0 \subseteq \Gamma_{1/2} \subseteq [\Gamma_{1/2}] \subseteq \Phi_{1/2} \subseteq \Gamma_1.$$

Продолжая рассуждать по индукции, мы построим для всех двоично-рациональных чисел $r = \frac{p}{2^n}$ $(0 \leqslant r \leqslant 1)$ такие замкнутые множества $\Phi_{\frac{p}{2^n}}$ и открытые $\Gamma_{\frac{p}{2^n}}$, что

$$\Phi_{\frac{p}{2^n}} \subseteq \Gamma_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}} \subseteq \left[\Gamma_{\frac{p+1}{2^{n+2}}}\right] \subseteq \Phi_{\frac{2p+1}{2^{n+2}}} \subseteq \Gamma_{\frac{p+1}{2^n}}.$$

Итак, для замкнутых множеств $A=F$, $B=X\setminus OF$ мы построили систему окрестностей Γ_r, удовлетворяющих условиям леммы 2, так что F и $X\setminus OF$ функционально отделимы. Теперь коротко доказывается вторая часть теоремы Зайцева (д о с т а т о ч н о с т ь содержащегося в ней условия).

Пусть $Z=\{A\}$ — нормальная база пространства X; тогда по лемме 1 $\Sigma=\{(A, OA)\}$ — плотная система. Пусть точка x и замкнутое множество F, не содержащее эту точку, выбраны произвольным образом. Так как $Z=\{A\}$ — замкнутая база, то существует элемент A_F такой, что $x\notin A_F$, $F\subseteq A_F$. Рассмотрим окрестность точки x:

$$Ox=X\setminus A_F.$$

Так как $Z=\{A\}$ — сеть, то существует такой элемент $A_x\in Z$, что $x\in A_x\subseteq Ox$. Следовательно, $A_x\cap A_F=\Lambda$, но тогда пара $(A_x, X\setminus A_F)\in\Sigma$. Следовательно, по лемме 3 множества A_x и A_F функционально отделимы. Отсюда получаем функциональную отделимость точки x и множества F. Теорема доказана.

§ 6. Максимальное бикомпактное расширение вполне регулярного пространства

Назовем *бикомпактным расширением* данного вполне регулярного пространства X всякий бикомпакт $\overline{X}=bX$, содержащий пространство X в качестве всюду плотного множества. Всякое расчленяющее семейство функций пространства X определяет некоторое бикомпактное расширение этого пространства. В самом деле, пусть τ — мощность данного расчленяющего множества функций. Мы имели топологическое отображение φ пространства X на некоторое множество $Y=\varphi X\subseteq I^\tau$. Возьмем замыкание $[Y]$ множества Y (в I^τ). Заменяя точки $y\in Y\subseteq[Y]$ взаимно однозначно соответствующими им точками $x\in X$, можем считать, что само X лежит в бикомпакте $[Y]$ и является всюду плотным множеством этого бикомпакта, который, таким образом, становится бикомпактным расширением пространства X. Особенно интересен случай, когда расчленяющее множество функций есть максимальное множество этого рода, т. е. состоит из всех непрерывных в X функций $f\colon X\to[0; 1]$. Соответствующее бикомпактное расширение $\overline{X}$ пространства X называется *максимальным бикомпактным расширением* этого пространства и обозначается через βX. Это расширение называется также расширением Стоуна—Чеха тихоновского пространства X.

Непрерывное отображение $f\colon bX\to b'X$ бикомпактного расширения bX пространства X в бикомпактное расширение $b'X$ того же пространства X называется *естественным*, если $fx=x$ для любой точки $x\in X$.

Так как $f(bX) \supseteq X$ и образ бикомпакта bX замкнут в $b'X$, то всегда (для естественного отображения $f\colon bX \to b'X$)

$$f(bX) = b'X,$$

т. е. естественное отображение является отображением «на».

Теорема 17 (М. Стоун [1], Чех [2]). *Каждое из следующих трех условий необходимо и достаточно для того, чтобы бикомпактное расширение bX было естественно гомеоморфно максимальному расширению βX.*

1°. *Любая непрерывная функция*

$$f\colon X \to [0;\ 1]$$

может быть продолжена до непрерывной функции

$$\bar{f}\colon bX \to [0;\ 1].$$

2°. *Любое непрерывное отображение*

$$\varphi\colon X \to B$$

пространства X в бикомпакт B может быть продолжено до непрерывного отображения

$$\bar{\varphi}\colon bX \to B.$$

3°. *Расширение bX обладает естественным отображением на любое бикомпактное расширение пространства X.*

Доказательство. Докажем, что βX удовлетворяет условию 1°. Пусть дана непрерывная функция

$$f\colon X \to [0;\ 1].$$

Так как расширение βX строится при помощи расчленяющей системы

$$\Xi_{\max} = \{f_\alpha\}, \qquad \alpha \in \mathfrak{A}$$

всех непрерывных на X функций

$$f_\alpha\colon X \to I_\alpha = [0;\ 1],$$

то функция f совпадает с одной из функций f_α. Пусть $f = f_{\alpha_0}$. Обозначая мощность множества $\{f_\alpha\}$ всех непрерывных функций $f_\alpha\colon X \to I_\alpha$ (т. е. мощность $\mathfrak{A}$) через τ, полагаем

$$\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha = I^\tau.$$

Как было показано в § 4, отображение

$$\varphi\colon X \to \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha \equiv I^\tau,$$

ставящее в соответствие точке $x\in X$ точку $\varphi x=\{f_\alpha x\}$, является гомеоморфизмом. При этом для любого $\alpha\in\mathfrak{A}$ справедливо соотношение

$$f_\alpha=\pi_\alpha\varphi,$$

где $\pi_\alpha\colon I^\tau\longrightarrow I_\alpha$, как всегда, есть проекция. Если пространство X отождествить при помощи гомеоморфизма φ с множеством $\varphi X\subseteq\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} I_\alpha$, то функция f_{α_0} отождествится с отображением

$$\pi_{\alpha_0}\colon\ X\equiv\varphi X\longrightarrow I_{\alpha_0}.$$

Отображение

$$\pi_{\alpha_0}\colon\ \beta X\equiv[\varphi X]\longrightarrow I_{\alpha_0}$$

будет, очевидно, искомым продолжением $\bar f$ отображения f. Теперь покажем, что из утверждения 1° следует утверждение 2°. Сначала рассмотрим тривиальный случай, когда вес бикомпакта конечен. Тогда сам бикомпакт B конечен и может быть рассматриваем как подмножество отрезка $I=[0;\ 1]$.

По условию отображение

$$\varphi\colon\ X\longrightarrow B\subseteq I$$

может быть продолжено до непрерывного отображения

$$\bar\varphi\colon\ bX\longrightarrow I.$$

Так как

$$\bar\varphi(bX)=\bar\varphi[X]_{bX}\subseteq[\bar\varphi X]_I=[\varphi X]_I\subseteq[B]_I=B,$$

то утверждение 2° в случае конечного веса бикомпакта B справедливо.

Пусть вес B равен $\tau\geqslant\aleph_0$. По теореме Тихонова можно считать бикомпакт B подмножеством тихоновского кирпича

$$I^\tau=\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} I_\alpha,\quad I_\alpha=[0;\ 1].$$

Каждая функция

$$f_\alpha=\pi_\alpha\varphi\colon\ X\longrightarrow I_\alpha$$

непрерывна, как суперпозиция непрерывных функций. Поэтому для каждого $\alpha\in\mathfrak{A}$, по предположению, существует непрерывное продолжение

$$\bar f_\alpha\colon\ bX\longrightarrow I_\alpha.$$

Диагональное произведение $\bar\varphi\colon\ bX\longrightarrow I^\tau$ отображений $\bar f_\alpha$ непрерывно (см. предложение 2 § 4); при этом, если $x\in X$, то

$$\bar\varphi x=\{\bar f_\alpha x\}=\{f_\alpha x\}=\{\pi_\alpha\varphi x\}=\varphi x,$$

так что на X отображение $\bar{\varphi}$ совпадает с φ. Наконец, в силу непрерывности отображения $\bar{\varphi}$ имеем включение

$$\bar{\varphi}(bX)=\bar{\varphi}[X]_{bX}\subseteq[\bar{\varphi}X]_{/\tau}=[\varphi X]_{/\tau}\subseteq B.$$

Итак, из утверждения 1° следует утверждение 2°.

Утверждение 3° вытекает из утверждения 2° очевидным образом. Итак, расширение βX удовлетворяет всем условиям 1°—3°.

Прежде чем получить из утверждения 3° естественный гомеоморфизм $bX=\beta X$, докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Если непрерывные отображения*

$$f_1\colon X\longrightarrow Y \quad \textit{и} \quad f_2\colon X\longrightarrow Y$$

топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y совпадают на всюду плотном в X множестве X', то они совпадают на всем пространстве X.

Доказательство. Предположим, что в X существует такая точка x_0, что

$$y_1=f_1x_0\neq y_2=f_2x_0.$$

Возьмем непересекающиеся окрестности O_1 и O_2 точек y_1 и y_2 соответственно. В силу непрерывности отображений f_1 и f_2 должна существовать такая окрестность V точки x_0, что $f_1V\subseteq O_1$ и $f_2V\subseteq O_2$. Так как множество X' всюду плотно в X, то множество $V'=V\cap X'$ непусто. Так как $f_1V'\subseteq O_1$ и $f_2V'\subseteq O_2$, то

$$f_1V'\cap f_2V'=\Lambda.$$

Но так как на X отображения f_1 и f_2 совпадают, то

$$f_1V'=f_2V'\neq\Lambda.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Из леммы 1 следует, что естественное отображение $f\colon bX\longrightarrow b'X$ определено однозначно (тождественным отображением $X\longrightarrow X$). Теперь выведем из утверждения 3° существование естественного гомеоморфизма расширений bX и βX.

Через h обозначим естественное отображение bX на βX (существующее в силу условия 3°).

Так как βX удовлетворяют условию 3°, то существует естественное отображение

$$h'\colon \beta X\longrightarrow bX.$$

Суперпозиция $h'h\colon bX\longrightarrow bX$ является естественным отображением, поэтому отображение $h'h$ на всюду плотном в bX множестве X совпадает с тождественным отображением бикомпакта в bX.

Из леммы 1 следует, что отображение $h'h$ вообще совпадает с тождественным отображением бикомпакта bX. Следовательно, отображение h взаимно однозначно. Так как естественное отображение есть отображение «на» и непрерывно, а bX — бикомпакт, то h есть естественный гомеоморфизм в bX на βX. Теорема 17 доказана.

В множестве $\mathfrak{B}_X$ всех бикомпактных расширений вполне регулярного пространства X можно ввести частичный порядок, считая $bX > b'X$, если существует естественное отображение bX на $b'X$. Из теоремы 17 следует, что стоун-чеховское расширение βX является максимальным элементом частично упорядоченного множества $\mathfrak{B}_X$, что и позволяет называть βX максимальным бикомпактным расширением пространства X.

Особенно хорошими свойствами обладает стоун-чеховское расширение βX в случае нормального пространства X.

Предложение 1. *Для произвольного замкнутого подмножества F нормального пространства X замыкание $[F]_{\beta X}$ гомеоморфно максимальному бикомпактному расширению βF пространства F.*

Доказательство. В силу теоремы 17 достаточно показать, что любое непрерывное отображение

$$f\colon F \longrightarrow [0; 1]$$

можно продолжить до непрерывного отображения

$$\tilde{f}\colon [F]_{\beta X} \longrightarrow [0; 1].$$

Фиксируем какое-нибудь непрерывное отображение

$$f\colon F \longrightarrow I = [0; 1].$$

Так как X — нормальное пространство, то существует непрерывное продолжение

$$\varphi\colon X \longrightarrow I$$

отображения f. По теореме 17 существует непрерывное продолжение

$$\tilde{\varphi}\colon \beta X \longrightarrow I$$

отображения φ. Отображение

$$\tilde{\varphi}\colon [F]_{\beta X} \longrightarrow I$$

будет искомым продолжением $\tilde{f}$ отображения f, что и требовалось доказать.

Предложение 2. *Если замкнутые в нормальном пространстве X множества F_1 и F_2 дизъюнктны, то дизъюнктны и их замыкания $[F_1]_{\beta X}$ и $[F_2]_{\beta X}$.*

Так как пара замкнутых дизъюнктных подмножеств нормального пространства функционально отделима, то предложение 2 вытекает из следующего утверждения:

Лемма 2. *Если замкнутые подмножества F_1 и F_2 вполне регулярного пространства X функционально отделимы, то*

$$[F_1]_{\beta X} \cap [F_2]_{\beta X} = \Lambda.$$

Доказательство. Из функциональной отделимости множеств F_1 и F_2 вытекает существование непрерывной на X функции

$$f\colon X \longrightarrow [0;\ 1],$$

равной 0 на F_1 и 1 на F_2. Продолжим функцию f до непрерывной функции

$$\tilde{f}\colon \beta X \longrightarrow [0;\ 1].$$

Множества $\Phi_1 = \tilde{f}^{-1}(0)$ и $\Phi_2 = \tilde{f}^{-1}(1)$ замкнуты в βX и дизъюнктны. Так как $F_i \subseteq \Phi_i$, $i = 1, 2$, то $[F_i]_{\beta X} \subseteq \Phi_i$, $i = 1, 2$, откуда

$$[F_1]_{\beta X} \cap [F_2]_{\beta X} \subseteq \Phi_1 \cap \Phi_2 = \Lambda,$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 17 вытекает следующая

Теорема 18. *Любое непрерывное отображение $f\colon X \longrightarrow Y$ вполне регулярных пространств X и Y может быть продолжено до непрерывного отображения $\bar{f}\colon \beta X \longrightarrow \beta Y$ их максимальных бикомпактных расширений.*

В самом деле, предполагая, что $Y \subseteq \beta Y$, можно считать, что f есть отображение X в βY. Тогда вследствие условия 2° теоремы 17 отображение f может быть продолжено до отображения $\bar{f}\colon \beta X \longrightarrow \beta Y$.

§ 7. Построение всех бикомпактных расширений данного вполне регулярного пространства

Подчинение для замкнутых и открытых множеств. Мы скажем, что в пространстве X введено *подчинение* для замкнутых и открытых множеств, если для некоторых пар вида F, H, где H — открытое, а F — замкнутое множество в X, определено отношение подчинения $F < H$, причем удовлетворяются аксиомы:

K1. Если $F < H$, то $X \setminus H < X \setminus F$.

K2. Если $F < H$, то $F \subseteq H$.

K3. Если $F_1 \subseteq F < H \subseteq H_1$, то $F_1 < H_1$.

K4. Если $F' < H'$, $F < H$, то $F \cup F' < H \cup H'$.

K5. Если $F < H$, то существует OF такое, что $F < OF \subseteq [OF] < H$.

K6. $\Lambda < \Lambda$.

К7. Ко всякой окрестности Ox произвольной точки $x \in X$ существует такая окрестность O_1x, что $[O_1x] < Ox$.

Замечание 1. В силу К3 и К5 аксиома К7 может быть сформулирована и так: $x < Ox$.

Замечание 2. Из К4 и К1 следует, что при $F < H$, $F' < H'$ всегда будет $(F \cap F') < H \cap H'$.

Примером подчинения во вполне регулярном пространстве X может служить так называемое *элементарное подчинение*: $F < H$, если F функционально отделимо от $X \setminus H$. При этом, если X — бикомпакт, то элементарное подчинение $F < H$ означает просто включение $F \subseteq H$ и является единственным существующим в X подчинением.

Построение всех бикомпактных расширений вполне регулярного пространства. Через H всегда обозначаем открытое, а через F — замкнутое множества в пространстве X.

1. Пространство vX. Пусть в пространстве X дано произвольное подчинение v для открытых и замкнутых множеств. Назовем систему $\sigma = \{H\}$ открытых в X множеств *v-правильной*, если для каждого $H_1 \in \sigma$ можно найти такое $H_2 \in \sigma$, что $[H_2] < H_1$. Центрированная и v-правильная система, максимальная по отношению к совокупности двух свойств центрированности и v-правильности, называется *v-концом*. v-концы $\xi = \{H\}$ суть, по определению, точки пространства vX. Взяв для каждого открытого множества $H_0 \subseteq X$ множество O_{H_0}, состоящее из всех v-концов $\xi = \{H\}$, содержащих в качестве элемента множество H_0, определим базу пространства vX как совокупность всех множеств O_{H_0}.

Легко видеть, что пересечение любого конечного числа элементов v-конца ξ снова есть элемент v-конца ξ и что всякий v-конец ξ содержит вместе с любым своим элементом H и всякое открытое множество $H_1 \supseteq H$. Другими словами, всякий v-конец является фильтром в системе всех открытых множеств пространства X.

Автоматически доказывается, что для любых двух открытых множеств H_1 и H_2 имеем $O_{H_1 \cap H_2} = O_{H_1} \cap O_{H_2}$.

Метод подчинения, по существу эквивалентный введению близости (см. Смирнов [1]), впервые был применен для построения максимального расширения βX (см. Александров [7]), но в полной общности был разработан В. И. Пономаревым и оказался чрезвычайно удобным и наглядным в самых различных вопросах, связанных с бикомпактными расширениями.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 19. *Если в пространстве X дано подчинение v для открытых и замкнутых множеств, то пространство vX всех v-концов есть бикомпактное расширение пространства X, т. е. бикомпакт содержащий топологически пространство X в качестве всюду плотного множества. Обратно, всякое бикомпактное рас-*

ширение $\overline{X}$ пространства X есть (с точностью до гомеоморфизма, оставляющего неподвижным все точки X) пространство vX для некоторого, определенного в X, подчинения v: это соответствие между бикомпактными расширениями и подчинениями взаимно однозначно.

2. Включение пространства X в vX.

Лемма 1. *Пространство X топологически содержится в vX и является в нем всюду плотным множеством.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка из X. По аксиоме К5 множество $\{Ux_0\}$ всех окрестностей точки x_0 в X есть v-правильная система. Из регулярности пространства следует, что систему $\{Ux_0\} = (x_0)$ нельзя пополнить никакими открытыми множествами, не нарушая ее центрированности и v-правильности.

Итак, множество всех Ux_0 есть v-конец, который обозначаем через $(x_0) = \{Ux_0\}$. Из хаусдорфовости пространства X следует, что соответствие $(x_0) = \{Ux_0\} \leftrightarrow x_0$ взаимно однозначно. Далее, легко видеть, что включения $x \in Ux_0$, $Ux_0 \in (x)$ выражают одно и то же. Отсюда следует, что, отождествляя каждую точку $x_0 \in X$ с концом $(x_0) = \{Ux_0\}$, можем записать последнее утверждение в виде тождества

$$X \cap O_{Ux_0} = Ux_0,$$

показывающего, что отождествление $x_0 \equiv (x_0)$ есть топологическое включение пространства X в vX. Так как x_0 — произвольная точка X, а Ux_0 — произвольная ее окрестность, то Ux_0 есть произвольное непустое открытое множество, и мы имеем

$$X \cap O_H = H,$$

откуда вытекает, что X всюду плотно в vX, или что vX есть расширение пространства X.

Отсюда в свою очередь вытекает

Лемма 2. *Для любого открытого в vX множества Γ имеем*

$$[O_{X \cap \Gamma}]_{vX} = [\Gamma]_{vX} \tag{1}$$

и, следовательно,

$$O_{X \cap \Gamma} \subseteq [\Gamma]_{vX}.$$

3. Оператор $O(H)$ *). Пусть X^* — какое-нибудь расширение пространства X; возьмем открытое множество $H \subseteq X$ и обозначим через $O(H)$ наибольшее открытое множество в X^*, высекающее из X множество H. Так как $O(H)$ есть сумма всех открытых в X^* множеств, высекающих из X множество H, то $X^* \setminus O(H)$ есть пересечение всех замкнутых в X^* множеств,

*) Оператор $O(H)$ впервые рассмотрел Н. А. Шанин.

высекающих $X \setminus H = F$, т. е.

$$X^* \setminus O(H) = [F]_{X^*}, \quad \text{или} \quad O(H) = X^* \setminus [F]_{X^*}. \tag{2}$$

Отметим некоторые простые свойства оператора $O(H)$.

1°. Оператор O дает взаимно однозначное отображение множества всех открытых множеств пространства X в множество всех открытых множеств пространства X^*.

2°. Имеем $O(H_1) \subseteq O(H_2)$ тогда и только тогда, когда $H_1 \subseteq H_2$, причем равенства $O(H_1) = O(H_2)$ и $H_1 = H_2$ эквивалентны.

Переходя к дополнениям, получаем для замкнутых множеств $F \subseteq X$:

3°. Тогда и только тогда $[F_2]_{X^*} \subseteq [F_1]_{X^*}$, когда $F_2 \subseteq F_1$.

4°. $O(H_1 \cap H_2) = O(H_1) \cap O(H_2)$.

Свойство 1° вытекает из 2°. Что касается свойства 2°, то из равенства $O(H_1) = O(H_2)$ следует равенство $X \cap O(H_1) = X \cap O(H_2)$, т. е. $H_1 = H_2$. Проверим, наконец, свойство 4°. Включение $O(H_1 \cap H_2) \subseteq O(H_1) \cap O(H_2)$ вытекает из свойства 2°. Обратное включение следует из равенства $X \cap O(H_1) \cap O(H_2) = H_1 \cap H_2$ и определения оператора $O(H)$.

Докажем, что для $X^* = vX$ имеем $O(H_0) = O_{H_0}$.

Мы уже видели, что $X \cap O_{H_0} = H_0$; остается доказать, что если для открытого в vX множества Γ имеем $X \cap \Gamma = H_0$, то $\Gamma \subseteq O_{H_0}$. Но если $\xi \in \Gamma$, то (так как множество O_H образуют базу пространства vX) существует такое H_1, что $\xi \in O_{H_1} \subseteq \Gamma$ и $H_1 \in \xi$. Но из $O_{H_1} \subseteq \Gamma$ следует $H_1 = X \cap O_{H_1} \subseteq X \cap \Gamma$, и, значит, $H_0 = X \cap \Gamma \in \xi$, т. е. $\xi \in O_{H_0}$, что и требовалось доказать.

Теперь обозначим через Φ_{F_0} (для данного произвольного замкнутого $F_0 \subseteq X$) множество всех таких $\xi = \{H\} \in vX$, что каждое $H \in \xi$ пересекается с F_0. Если $H_0 = X \setminus F_0$, то, как легко видеть, точка $\xi = \{H\}$ тогда и только тогда содержится в Φ_{F_0}, когда $H_0 \notin \xi$.

Итак, множества Φ_{F_0} и O_{H_0} взаимно дополнительны:

$$\Phi_{F_0} = vX \setminus O_{H_0}.$$

Сравнивая (1) и (2) и помня, что $O_{H_0} = O(H_0)$, видим, что

$$[F_0]_{vX} = \Phi_{F_0}.$$

4. Дальнейшие леммы. Выведем из предыдущего одно важное следствие. Возьмем какое-нибудь открытое множество $H_0 \subseteq X$. Так как H_0 всюду плотно в O_{H_0}, то

$$[O_{H_0}]_{vX} = [[H_0]_X]_{vX}.$$

Но правая часть, по предыдущему, есть $\Phi_{[H_0]_X}$. Итак, $[O_{H_0}]_{vX} = \Phi_{[H_0]_X}$. Это значит, что $[O_{H_0}]_{vX}$ состоит из всех таких $\xi = \{H\}$, в которых каждое $H \in \xi$ пересекается с $[H_0]$, т. е. (вследствие открытости H) пересекается с H_0. Итак, доказана

Лемма 3. *Точка* $\xi=\{H\}$ *тогда и только тогда содержится в* $[O_{H_0}]_{vX}$, *когда каждое* $H\in\xi$ *пересекается с* H_0.

Лемма 4. *Пусть (в смысле некоторого подчинения* v, *данного в пространстве* X) *имеем* $F<H_0$, *где, как всегда,* F *замкнуто, а* H_0 *открыто в* X. *Тогда в* vX *имеем* $\Phi_F\subseteq O_{H_0}$.

Доказательство. Пусть

$$\xi=\{H\}\in\Phi_F. \tag{3}$$

Нам надо доказать, что $\xi\in O_{H_0}$, т. е. что $H_0\in\xi$. Условие (3) означает, что $H\cap F\neq\Lambda$ при любом $O\in\xi$. Возьмем, согласно К5, такое $OF=H_1$, что

$$F<H_1\subseteq[H_1]<H_0.$$

Докажем, что $H_1\in\xi$, — этим будет доказано, что и $H_0\in\xi$, т. е. будет доказана вся лемма 4. Пусть H_1 не содержится в $\xi=\{H\}$. Пополним тогда систему ξ множеством H_1 и всеми такими H', что

$$F<H'\subseteq[H']<H_1. \tag{4}$$

Из самого соотношения (4) уже следует, что дополненная таким образом система будет по-прежнему v-правильной, тогда как из того, что $F\cap H\neq\Lambda$ при любом $H\in\xi$, следует, что она будет и центрированной. Но это противоречит определению системы ξ как максимальной центрированной и v-правильной системы. Лемма 4 доказана.

Следствие. *Пространство* vX *регулярно.*

В самом деле, пусть точка $\xi\in vH$ и ее окрестность O_{H_0} выбраны произвольно. Возьмем $H_1\in\xi$, $[H_1]<H_0$. Тогда из лемм 3 и 4 получаем

$$[O_{H_1}]=\Phi_{[H_1]_X}\subseteq O_{H_0},$$

чем регулярность пространства vX и доказана.

5. Подчинение v^* в пространстве vX.

Лемма 5. *Положим в пространстве* vX *(«первичное подчинение»)* $\Phi_F<O_H$, *если* $F<H$ *в* X; *для любых замкнутого* Φ *и открытого* O *множеств в* vX *положим («вторичное подчинение»)* $\Phi<O$, *если можно найти множество* $F<H$ *в* X *так, чтобы было*

$$\Phi\subseteq\Phi_F,\qquad O_H\subseteq O,$$

и тогда, по предыдущему, $\Phi\subseteq\Phi_F<O_H\subseteq O$. *Определенное таким образом в* vH *подчинение* v^* *удовлетворяет всем аксиомам* $K1$ — $K7$ *).

*) Надо еще доказать, что «вторичное подчинение» не может прийти в противоречие с первичным, т. е. что из $\Phi_F<O_H$ всегда следует $F<H$. Но $\Phi_F<O_H$ означает, что существует такое $F'<H'$, что $\Phi_F\subseteq\Phi_{F'}<O_{H'}\subseteq O_H$. Но мы знаем, что из $\Phi_F=[F]_{vX}\subseteq\Phi_{F'}=[F]_{vX}$ следует $F\subseteq F'$, точно так же из $O_{H'}=O(H')\subseteq O(H)=O_H$ следует $H'\subseteq H$. Поэтому имеем $F\subseteq F'<H'\subseteq H$, т. е. $F<H$.

Лемма 6. *Пусть в vX дана центрированная система $\sigma = \{\Gamma_\alpha\}$ открытых в vX множеств Γ_α, правильная в смысле подчинения v^* (т. е. ко всякому $\Gamma_\alpha \in \sigma$ существует такое $\Gamma_\beta \in \sigma$, что $[\Gamma_\beta] < \Gamma_\alpha$). Тогда центрированная система σ' множеств $H_\alpha = X \cap \Gamma_\alpha$ правильна (в смысле подчинения v); дополняя ее до максимальной правильной системы — v-конца $\xi = \{H\}$, получим точку $\xi \in vX$, содержащуюся в каждом из множеств $\Gamma_\alpha \in \sigma$.*

Для доказательства правильности системы σ' заметим сначала, что для любого $F \subseteq X$ будет $X \cap \Phi_F = F$. Пусть теперь дано произвольно $H_\alpha = X \cap \Gamma_\alpha \in \sigma'$. Берем $[\Gamma_\beta]_{vX} < \Gamma_\alpha$. Это значит, что существуют $\Gamma < H$ в X, так что

$$[\Gamma_\beta] \subseteq \Phi_F < O_H \subseteq \Gamma_\alpha,$$

и, следовательно,

$$[X \cap \Gamma_\beta]_X \subseteq X \cap [\Gamma_\beta]_{vX} \subseteq F < H \subseteq X \cap \Gamma_\alpha,$$

т. е. $[H_\beta]_X \subseteq F < H \subseteq H_\alpha$, и, следовательно, $[H_\beta]_X < H_\alpha$. Итак, правильность системы σ' доказана. Доказываем теперь, что $\xi \in \Gamma_\alpha$ при любом $\Gamma_\alpha \in \sigma$. Берем такое $\Gamma_\beta \in \sigma'$, что $[\Gamma_\beta] < \Gamma_\alpha$. По лемме 2 имеем $O_{H_\beta} = O_{X \cap \Gamma_\beta} \subseteq [\Gamma_\beta] < \Gamma_\alpha$, т. е. $O_{H_\beta} \subseteq \Gamma_\alpha$. Так как $H_\beta \in \xi$, то $\xi \in O_{H_\beta} \subseteq \Gamma_\alpha$, что и требовалось доказать.

6. Доказательство бикомпактности пространства vX.

Определение. Окрестность OF множества $F \subseteq X$ называется *уплотняемой*, если существует такая окрестность O_1F, что $[O_1F] < OF$.

Из регулярности пространства X и аксиом K5, K1, K7 следует, что всякое замкнутое множество $F \subseteq X$ имеет уплотняемую окрестность; более того: какова бы ни была точка $x_0 \in X \setminus F$, существует уплотняемая окрестность $OF \subseteq X \setminus x_0$.

Отсюда непосредственно вытекает

Лемма 7. *Всякое замкнутое множество F есть пересечение всех своих уплотняемых окрестностей.*

Переходим к доказательству основного предложения:

Регулярное, в силу следствия из леммы 4, *пространство vX бикомпактно (и, следовательно, есть бикомпактное расширение пространства X).*

Достаточно доказать, что всякая центрированная система $\sigma = \{\Phi_\alpha\}$ замкнутых в vX множеств Φ_α имеет непустое пересечение. Но из леммы 7 следует, что $\bigcap\limits_\alpha \Phi_\alpha = \bigcap\limits_\alpha \bigcap\limits_{U\Phi_\alpha} U\Phi_\alpha$, где $\{U\Phi_\alpha\}$ (для каждого Φ_α множество $U\Phi_\alpha$ пробегает все уплотняемые окрестности, а каждое Φ_α пробегает всю систему σ) есть центрированная v^*-правильная система vX. По лемме 6, пересекая каждую окрестность $U\Phi_\alpha$ с X, получим v-правильную центрированную систему $\sigma' = \{H'\}$, пополняя которую до максимальной получаем конец $\xi = \{H\}$, который принадлежит каждому множеству $U\Phi_\alpha$; следовательно $\left(\text{так как } \bigcap_\alpha \Phi_\alpha = \bigcap_\alpha \bigcap_{U\Phi_\alpha} U\Phi_\alpha\right)$, имеем $\xi \in \bigcap_\alpha \Phi_\alpha$, чем утверждение доказано.

7. Вторая часть теоремы 19. Пусть X^* — какое-нибудь бикомпактное расширение пространства X. Оно порождает подчинение v в пространстве X следующим образом:

$$F < H, \text{ если } [F]_{X^*} < O(H), \tag{5}$$

т. е. $[F]_{X^*} \subseteq O(H)$. Легко проверить, что (5) есть действительно подчинение.

Покажем теперь, что vX (бикомпактное расширение, порожденное подчинением v) совпадает с X^*. Пусть $\xi_0 = \{H^0\}$ есть v-конец. Рассмотрим систему множеств $\{O(H)\}$ в бикомпакте X^*. Прежде всего заметим, что

$$\bigcap_{H_0 \in \xi_0} O(H^0) = \eta_0 \in X^*. \tag{6}$$

В самом деле, при $[H_1]_X < H$ имеем

$$O(H_1) \subseteq [[H_1]_X]_{X^*} = [H_1]_{X^*} \subseteq O(H),$$

откуда $\bigcap_{H^0 \in \xi_0} O(H^0) = \bigcap_{\substack{[H_1^0] < H^0 \\ H_1^0,\ H^0 \in \xi_0}} [H_1^0]_{X^*}$. В силу бикомпактности пространства X^* множество $\bigcap [H_1^0]$ непусто, а в силу максимальности системы ξ_0 оно не может состоять более чем из одной точки.

Для доказательства того, что $vX = X^*$, ставим в соответствие каждой точке $\xi^* \in X^*$ систему $\xi = \{X \cap O\xi^*\}$, где $O\xi^*$ — произвольная окрестность точки ξ^*. Эта система центрирована, v-правильна (так как центрирована и v-правильна система $O\xi^*$). Она максимальна по отношению к совокупности этих двух свойств. В самом деле, если бы система $\xi = \{X \cap O\xi^*\}$ содержалась в центрированной и v-правильной системе $\eta \neq \xi$, $\eta = \{G\}$, то, пополнив систему $\{O\xi^*\}$ всеми $O(G)$, мы бы не нарушили ни v-правильности, ни центрированности системы $\{O\xi^*\}$, что противоречит максимальности этой системы, доказанной выше.

Итак, $\xi = \{X \cap O\xi^*\}$ есть v-конец, т. е. точка пространства vX. Таким образом, получаем отображение $f\xi^* = \xi$ пространства X^* в vX. В силу (6) отображение f есть отображение X^* на все vX.

Легко проверяется, что f есть взаимно однозначное непрерывное отображение бикомпакта X^*, т. е. гомеоморфизм между бикомпактами X^* и vX, оставляющий неподвижными точки X. Следовательно, расширения X^* и vX могут считаться тождественными.

Остается доказать последнее утверждение:

Если $v \neq v'$, то $vX \neq v'X$. Обозначим подчинение v через $<$, а подчинение v' — через $\lessdot$. По предположению подчинения v и v' различны, т. е. имеются такие F, H, что, например, $F < H$, $F \not\lessdot H$. Предположим, что $vX = v'X$. Тогда

$$\Phi_F^v = [F]_{vX} = [F]_{v'X} = \Phi_F^{v'} = \Phi,$$
$$O_H^v = O_v(H) = O_{v'}(H) = O_H^{v'} = \Gamma.$$

Из $F < H$ следует $\Phi_F^v < O_H^v$, т. е. $\Phi \subseteq \Gamma$. Но так как $\Phi = \Phi_F^{v'}$, $\Gamma = O_H^{v'}$, то из $\Phi \subseteq \Gamma$ следует $\Phi_F^{v'} < O_H^{v'}$, т. е. $\Gamma \lessdot H$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение и завершает доказательство теоремы 19.

§ 8. Свойства связности и нульмерности для бикомпактов

Связный бикомпакт называется *континуумом*, а если он состоит более чем из одной точки, то — *собственным* или *нетривиальным континуумом*.

Пространство называется *вполне несвязным*, если оно не содержит нетривиальных (т. е. состоящих более чем из одной точки) связных подпространств, и *вполне разрывным*, если оно не содержит нетривиальных континуумов. Очевидно, вполне несвязные пространства могут быть определены как такие, в которых компонента каждой точки есть сама эта точка. Очевидно также, что всякое вполне несвязное пространство является и вполне разрывным. Легко видеть, что всякое индуктивно нульмерное пространство X вполне несвязно. В самом деле, пусть Z — связное подпространство индуктивно нульмерного пространства X. В X существует база $\mathfrak{B}$, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Если бы в Z имелись две различные точки x и x', то мы взяли бы в базе $\mathfrak{B}$ элемент U, содержащий точку x и не содержащий точку x'. Но открыто-замкнутое множество U, содержа точку x связного множества Z, должно содержать и все множество $Z \ni x$! Полученное противоречие доказывает, что пространство X вполне несвязно. С другой стороны, даже среди метрических сепарабельных пространств (даже среди подпространств обыкновенной плоскости) имеются примеры вполне разрывных пространств, не являющихся вполне несвязными, а также вполне несвязных пространств, не являющихся индуктивно нульмерными (см. Александров — Пасынков [1], гл. 2). В то же время для бикомпактов, как мы увидим в этом же параграфе, три свойства:

полной разрывности, полной несвязности и индуктивной нульмерности — эквивалентны между собой. Индуктивная нульмерность является лишь одним из подходов к общему понятию нульмерности (нулевого «числа измерений») пространства. Наряду с определенной выше индуктивной нульмерностью пространства X, записываемой в виде формулы $\operatorname{ind} X=0$, существует еще свойство так называемой большой индуктивной нульмерности, или $\operatorname{Ind} X=0$, состоящее в том, что каждая окрестность $O\Phi$ произвольного замкнутого множества Φ, лежащего в X, содержит открыто-замкнутую окрестность $O'\Phi$, и, кроме того, свойство, называемое просто нульмерностью пространства X. Это свойство, записываемое в виде $\dim X=0$, заключается в том, что во всякое конечное открытое покрытие $\omega=\{O_1, \ldots, O_s\}$ пространства X можно вписать конечное открытое покрытие $\{O'_1, \ldots, O'_{s'}\}$, состоящее из дизъюнктных открыто-замкнутых множеств. Мы сейчас увидим, что *для бикомпактов* и даже для финально компактных *) пространств *все эти три свойства совпадают, т. е. высказывания* $\operatorname{ind} X=0$, $\operatorname{Ind} X=0$ *и* $\dim X=0$ *эквивалентны между собою.*

Замечание. Во всем этом параграфе под пространством X понимается всегда T_1-пространство. В этом предположении из $\operatorname{Ind} X=0$, очевидно, следует и $\operatorname{ind} X=0$. Докажем, кроме того, что из $\operatorname{Ind} X=0$ всегда следует нормальность пространства X. В самом деле, пусть Φ_1 и Φ_2 — дизъюнктные замкнутые множества в пространстве X. Так как $\operatorname{Ind} X=0$, то в окрестности $O\Phi_1=X\setminus\Phi_2$ множества Φ_1 содержится открыто-замкнутая окрестность $O'\Phi_1$, дополнение к которой есть открыто-замкнутая окрестность множества Φ_2. Нормальность пространства X доказана. Докажем, что из $\dim X=0$ для любого пространства X следует $\operatorname{Ind} X=0$, а значит, и $\operatorname{ind} X=0$ и нормальность пространства X. Берем произвольное замкнутое множество $\Phi\subset X$ и произвольную окрестность $O\Phi$. Пара множеств $O_1=O\Phi$ и $O_2=X\setminus\Phi$ образует открытое покрытие ω пространства X. Так как $\dim X=0$, то существует вписанное в покрытие ω покрытие $\gamma=\{O_1, \ldots, O_s\}$, состоящее из дизъюнктных открыто-замкнутых множеств. Пусть среди элементов покрытия γ множества $O_1, \ldots, O_k$ и только они пересекаются с Φ и, следовательно, содержатся в O_1 — в $O_2=X\setminus\Phi$ ни одно из них лежать не может. Тогда $O_1\cup\ldots\cup O_k=O'\Phi$ есть открыто-замкнутая окрестность множества Φ, лежащая в заданной окрестности $O\Phi$. Утверждение $\operatorname{Ind} X=0$ доказано. Оказывается, что из $\operatorname{Ind} X=0$ следует $\dim X=0$, т. е. что утверждения $\operatorname{Ind} X=0$ и $\dim X=0$ эквивалентны для любого пространства X. Но доказательство этой эквивалентности

---

*) Пространство называется финально компактным, если из любого открытого покрытия этого пространства можно выделить счетное подпокрытие. Мы вернемся к финально компактным пространства в § 11.

опирается на одно свойство нормальных пространств, которое будет изложено лишь в § 11. Откладывая до § 11 и окончание доказательства эквивалентности утверждений $\dim X=0$ и $\operatorname{Ind} X=0$ в полной общности, мы сейчас докажем эквивалентность трех утверждений $\dim X=0$, $\operatorname{Ind} X=0$, $\operatorname{ind} X=0$ лишь для бикомпактов X.

Мы доказали, что из $\dim X=0$ следует $\operatorname{Ind} X=0$, а из $\operatorname{Ind} X=0$ следует $\operatorname{ind} X=0$. Пусть X—бикомпакт. Докажем, что из $\operatorname{ind} X=0$ следует $\dim X=0$.

Берем любое конечное открытое покрытие $\Omega=\{O_1, \ldots, O_s\}$ бикомпакта X. В предположении $\operatorname{ind} X=0$ требуется найти дизъюнктное открытое покрытие ω, вписанное в Ω. Для каждой точки x выбираем содержащий ее элемент $O_{i(x)}$ покрытия Ω и открыто-замкнутое множество U_x, содержащее точку x и лежащее в $O_{i(x)}$. Эти U_x образуют покрытие всего бикомпакта X, и из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\gamma=\{U_1, \ldots, U_k\}$. Полагаем теперь $\sigma_1=U_1$, $\sigma_2=U_1\setminus U_2$, вообще, $\sigma_i=U_i\setminus(U_1\cup\ldots\cup U_{i-1})$. Так как все $U_1, \ldots, U_k$ открыто-замкнуты, то открыто-замкнуты и, кроме того, дизъюнктны все множества σ_i. Они образуют искомое покрытие γ', вписанное в γ, следовательно, и в Ω. Предложение доказано.

Бикомпакт X, удовлетворяющий какому-нибудь, а следовательно и любому из условий $\dim X=0$, $\operatorname{Ind} X=0$, $\operatorname{ind} X=0$, называется просто *нульмерным бикомпактом*.

Пусть x—произвольная точка топологического пространства X. Пересечение всех открыто-замкнутых множеств, содержащих точку x, есть замкнутое множество, обозначаемое через Q_x и называемое *квазикомпонентой* точки x в пространстве X. Из этого определения сразу следует, что всякое открыто-замкнутое множество A_α, содержащее точку x, содержит и все множество O_x. Мы знаем также, что всякое открыто-замкнутое A_α, содержащее x, содержит компоненту C_x точки x, значит, и пересечение Q_x всех этих A_α также содержит множество C_x. Итак, $Q_x\supseteq C_x$.

Пусть x и z—две точки пространства X. Докажем, что если $z\in Q_x$, то $Q_z=Q_x$. Обозначим через A_α любое открыто-замкнутое множество, содержащее точку x, а через A_γ—любое открыто-замкнутое множество, содержащее точку z. Прежде всего, из $z\in Q_x$ следует, что всякое A_γ содержит точку x: в противном случае имели бы для некоторого A_γ включение $x\in X\setminus A_\gamma$ и, значит, $Q_x\subseteq X\setminus A_\gamma$, вопреки тому, что $z\in Q_x$. Итак, из $z\in Q_x$ следует, что всякое A_γ есть и некоторое A_α, значит, $Q_x=\bigcap A_\alpha\subseteq$ $\subseteq\bigcap A_\gamma=Q_z$. С другой стороны, всякое A_α содержит x, значит, и $Q_x\ni z$, т. е. всякое A_α есть и некоторое A_γ, а потому $Q_z\subseteq Q_x$.

Итак, $Q_z = Q_x$. Мы доказали, что *квазикомпоненты двух различных точек пространства X или совпадают, или дизъюнктны: все пространство X есть объединение дизъюнктной системы своих квазикомпонент.* При этом каждая компонента пространства X содержится в единственной квазикомпоненте, и можно сказать, что разбиение пространства на его компоненты более мелко, чем разбиение на квазикомпоненты, или является подразделением этого последнего.

Приведем простой пример пространства X, в котором для некоторой точки x имеем $Q_x \neq C_x$. Это пространство определяется как подпространство обыкновенной евклидовой плоскости и есть объединение двух прямых d и d', имеющих соответственно уравнения $x=0$ и $x=1$, и контуров прямоугольников g_n, горизонтальные стороны которых имеют уравнения $y=n$, $y=-n$, а вертикальные имеют уравнения $x=\frac{1}{n}$, $x=1-\frac{1}{n}$.

Пусть a — какая-нибудь точка прямой d, а a' — произвольная точка прямой d'. Каждое открыто-замкнутое множество A, содержащее точку a, соответственно a', содержит всю прямую d, соответственно d', и контуры всех прямоугольников g_n с достаточно большим номером n, а следовательно (так как A замкнуто) и вторую прямую, т. е. d', соответственно d.

Поэтому пересечение всех открыто-замкнутых множеств, содержащих точку a, соответственно точку a', есть объединение двух прямых d и d', которое и является квазикомпонентой как точки a', так и точки a. В то же время компонента точки a есть прямая d, а компонента точки a' — прямая d'.

Теорема 20. *В бикомпакте X компонента C_x любой точки $x \in X$ совпадает с ее квазикомпонентой Q_x.*

Доказательство основывается на важном замечании, известном под названием леммы Шуры-Буры.

Лемма Шуры-Буры. *Пусть в бикомпакте X дана совокупность замкнутых множеств $\sigma = \{\Phi_\alpha\}$ с непустым пересечением $\Phi = \bigcap \Phi_\alpha$. Пусть $O\Phi$ — произвольная окрестность множества Φ. Тогда существует конечное число множеств $\Phi_\alpha \in \sigma$ с пересечением, лежащим в $O\Phi$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\{F_\alpha\}$ всех множеств вида $F_\alpha = \Phi_\alpha \setminus O\Phi$. Множества F_α замкнуты в бикомпакте X. Поэтому, если бы семейство $\{F_\alpha\}$ было центрированным, то пересечение всех его элементов было бы непусто, т. е.

$$\Lambda \neq \bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha \Phi_\alpha \setminus O\Phi = \Phi \setminus O\Phi,$$

что, очевидно, неверно.

Итак, имеем конечное число множеств F_α, пусть $F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_s}$, с пустым пересечением. Но тогда

$$\Lambda = F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_s} = \Phi_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Phi_{\alpha_s} \setminus O\Phi,$$

т. е. $\Phi_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Phi_{\alpha_s} \subseteq O\Phi$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если семейство непустых замкнутых множеств $\sigma = \{\Phi_\alpha\}$ бикомпакта X направлено по включению (т. е. для любых $\Phi_{\alpha_1} \in \sigma$, $\Phi_{\alpha_2} \in \sigma$ имеется $\Phi_{\alpha_3} \subseteq \Phi_{\alpha_1} \cap \Phi_{\alpha_2}$), то каждая окрестность $O\Phi$ непустого множества $\Phi = \bigcap\limits_\alpha \Phi_\alpha$ содержит некоторое $\Phi_\alpha \in \sigma$.*

В самом деле, находим по лемме Шуры-Буры множества $\Phi_{\alpha_1}, \ldots, \Phi_{\alpha_s}$ под условием $\Phi_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Phi_{\alpha_s} \subseteq O\Phi$. В силу направленности по включению семейства σ имеется $\Phi_\alpha \in \sigma$, лежащее в $\Phi_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \Phi_{\alpha_s}$, оно и является искомым $\Phi_\alpha \subseteq O\Phi$.

Это следствие, в частности, применимо к так называемым мультипликативным семействам σ непустых замкнутых множеств (т. е. семействам, которые вместе с любыми двумя элементами Φ_{α_1}, Φ_{α_2} содержат их пересечение).

Переходим к доказательству теоремы 20. Так как всегда $C_x \subseteq Q_x$, то достаточно доказать, что квазикомпонента Q_x точки x бикомпакта X содержится в компоненте C_x этой точки. Для этого, в свою очередь, надо лишь доказать, что Q_x связно: в самом деле, если мы это докажем, то Q_x, как связное множество, содержащее точку x, будет лежать в максимальном связном множестве, содержащем эту точку, т. е. в множестве C_x, и наша цель будет достигнута.

Итак, доказываем связность замкнутого в X множества Q_x. Доказываем снова от противного. Пусть $Q_x = F_1 \cup F_2$, где F_1 и F_2 — два непустых дизъюнктных замкнутых множества. Так как F_1 и F_2 — замкнутые множества бикомпакта X, а всякий бикомпакт есть нормальное пространство, то множества F_1 и F_2 имеют в X непересекающиеся окрестности OF_1 и OF_2, которые в своей сумме образуют окрестность $OQ_x = OF_1 \cup OF_2$ множества Q_x. Имеем по определению квазикомпоненты

$$Q_x = \bigcap_\alpha A_\alpha,$$

где $\{A_\alpha\}$ — семейство всех открыто-замкнутых множеств бикомпакта X, содержащих точку x. Так как пересечение двух открыто-замкнутых множеств открыто-замкнуто, то семейство всех A_α мультипликативно, так что мы находимся в условиях следствия леммы Шуры-Буры.

Поэтому существует A_α, лежащее в $OQ_x = OF_1 \cup OF_2$. Так как $C_x \subseteq Q_x$, то

$$C_x \subseteq OF_1 \cup OF_2.$$

Но C_x связно и потому, содержась в $OF_1 \cup OF_2$, лежит в одном из множеств OF_1 или OF_2. Пусть $C_x \subseteq OF_1$. Открыто-замкнутое A_α, по предположению, лежит в $OF_1 \cup OF_2$. Отсюда следует, что $A_\alpha \cap OF_1 = A_\alpha \setminus OF_2$, т. е. $A_\alpha \cap OF_1$ замкнуто. Кроме того, множество $A_\alpha \cap OF_1$, очевидно, открыто. Итак, $A_\alpha \cap OF_1$ есть открыто-замкнутое множество, содержащее точку x. Поэтому $Q_x \subseteq A_\alpha \cap OF_1$, что противоречит тому, что $F_2 \subseteq Q_x$.

Теорема 20 доказана.

Из доказанного легко следует основная

Теорема 21. *Для бикомпактов свойство нульмерности эквивалентно полной несвязности и полной разрывности.*

Доказательство. Как мы знаем, из нульмерности любого пространства следует его полная несвязность и тем более его полная разрывность.

Нам надо лишь доказать, что из полной разрывности бикомпакта уже следует его нульмерность.

Всякий вполне разрывный бикомпакт X вполне несвязен — в противном случае в нем содержалось бы связное множество, состоящее более чем из одной точки, и множество $[X_0]_X$ было бы лежащим в X собственным континуумом. Итак, компоненты вполне разрывного бикомпакта совпадают с его точками. Но компоненты бикомпакта являются и его квазикомпонентами, так что каждая точка x вполне разрывного бикомпакта X есть пересечение всех содержащих ее открыто-замкнутых множеств. Отсюда по лемме Шуры-Буры следует, что открыто-замкнутые множества, содержащие точку x, образуют базу этой точки в пространстве X. Этим доказано равенство $\mathrm{ind}_x X = 0$ для каждой точки $x \in X$, значит, и равенства $\mathrm{ind}\, X = 0$, $\mathrm{Ind}\, X = \dim X = 0$.

Сейчас время определить так называемые *основные размерностные инварианты топологического пространства* X. Их три: $\dim X$, $\mathrm{Ind}\, X$, $\mathrm{ind}\, X$. Размерность $\dim X$ определяется как наименьшее целое число $n \geqslant 0$, обладающее тем свойством, что во всякое конечное открытое покрытие ω пространства X вписано конечное открытое покрытие ω' кратности $\leqslant (n+1)$. Если такого числа нет, т. е. для каждого n существует такое конечное открытое покрытие ω_n, что всякое вписанное в него открытое покрытие ω' имеет кратность больше $n+1$, то пишем $\dim X = \infty$. Кроме того, $\dim \Lambda = -1$.

Большая, соответственно малая, индуктивная размерность $\mathrm{Ind}\, X$, соответственно $\mathrm{ind}\, X$, определяется по индукции следующим образом. Для пустого пространства Λ положим $\mathrm{Ind}\, \Lambda = \mathrm{ind}\, \Lambda = -1$. Предположим, что определены пространства X, для которых $\operatorname{Ind} X \leqslant n-1$, соответственно $\operatorname{ind} X \leqslant n-1$. Мы тогда говорим, что $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, соответственно $\operatorname{ind} X \leqslant n$, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и произвольной окрестности OF существует окрестность O_1F с $[O_1F] \subset OF$ и $\operatorname{Ind} \operatorname{гр} O_1F \leqslant n-1$, соответственно для любой точки $x \in X$ и окрестности Ox существует окрестность O_1x, для которой $[O_1x] \subseteq Ox$ и $\operatorname{ind} \operatorname{гр} O_1x \leqslant n-1$. Если $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, но при этом неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant n-1$ не имеет места, то, по определению, $\operatorname{Ind} X = n$. Аналогично определяется равенство $\operatorname{ind} X = n$. Если ни для какого $n \geqslant 0$ не имеем $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, соответственно $\operatorname{ind} X \leqslant n$, то полагаем $\operatorname{Ind} X = \infty$, соответственно $\operatorname{ind} X = \infty$.

Изучению размерностных инвариантов и связанных с ними многочисленных важных свойств топологических пространств (главным образом нормальных и, в частности, бикомпактов и метрических пространств) посвящена одна из самых значительных и содержательных частей общей топологии, известная под названием теории размерности (см. Александров—Пасынков [1]).

§ 9. Некоторые универсальные бикомпактные пространства

Теорема 22 (Александров [6], [8]). *Всякий бикомпакт веса τ есть непрерывный образ некоторого замкнутого подпространства пространства D^τ.*

Доказательство. Пусть снова $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ есть фиксированное множество индексов мощности τ. Без ограничения общности можем предполагать, что бикомпакт X есть замкнутое подпространство тихоновского кирпича $I^\tau = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} I_\alpha$ веса τ, а $D^\tau = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} C_\alpha$, где C_α — канторов дисконтинуум. Рассмотрим стандартное отображение $f_\alpha \colon C_\alpha \to I_\alpha$ канторова совершенного множества C_α на отрезок I_α (см. § 5 гл. 4). Простое произведение отображений f_α (см. § 4) есть непрерывное отображение пространства $D^\tau = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} C_\alpha$ на кирпич I^τ. Прообраз $\Phi = f^{-1}X$ множества X непрерывно отображен на X, что и требовалось доказать.

Назовем элементарное открытое множество $O_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ пространства $D^\tau = \prod D_\alpha$ множеством первого рода, если координаты $z_{\alpha_1}, \ldots, z_{\alpha_s}$ составляющих его точек равны нулю. В множестве всех точек пространства D^τ введем теперь новую топологию, меньшую чем первоначальная и имеющую своей открытой базой семейство $\mathfrak{F}$ всех элементарных множеств первого рода пространства D^τ. Получаем новое топологическое пространство, называемое пространством F^τ и являющееся, очевидно, взаимно однозначным непрерывным образом пространства D^τ. Легко проверить, что F^τ есть не что иное, как топологическое произведение $F^\tau = \prod F_\alpha$, где F_α—связное двоеточие и индекс α по-прежнему пробегает множество мощности τ. Следовательно, F^τ есть бикомпактное T_0-пространство веса τ.

Теорема 23 (Александров [6], [8]). *Всякое T_0-пространство X веса τ гомеоморфно некоторому подпространству пространства F^τ.*

Доказательство. Берем в пространстве X базу $\mathfrak{B} = \{V_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, мощности τ, обладающую тем свойством, что пересечение любого конечного числа элементов базы $\mathfrak{B}$ снова есть элемент этой базы. Очевидно, легко достигнуть выполнения этого условия, исходя от любой базы пространства X и пополняя ее всевозможными конечными пересечениями составляющих ее множеств. Пусть $F^\tau = \prod F_\alpha$, $F_\alpha = (0_\alpha, 1_\alpha)$. Пусть $z = \{z_\alpha\}$—произвольная точка пространства F^τ. Определим для каждого α множество $E_\alpha(z) \subseteq X$ следующим образом. Если $z_\alpha = 0_\alpha$, полагаем $E_\alpha(z) = V_\alpha$; если же $z_\alpha = 1_\alpha$, то $E_\alpha(z) = X \setminus V_\alpha$. Заметим прежде всего, что множество $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} E_\alpha(z)$ для любой данной точки $z = \{z_\alpha\}$ или пусто, или состоит из одной точки. В самом деле, пусть x, x'—две точки пространства X. Тогда существует такое α, что одна из этих точек лежит в V_α, а другая—в $X \setminus V_\alpha$, например, $x \in V_\alpha$, $x' \in X \setminus V_\alpha$. Значит, каково бы ни было $z = \{z_\alpha\} \in F^\tau$, обе точки x и x' не могут принадлежать множеству $E_\alpha(z)$ и тем более множеству $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} E_\alpha(z)$. Обозначим теперь через Z множество тех $z \in F^\tau$, для которых множество $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} E_\alpha(z)$ непусто и значит состоит из одной точки, которую и обозначим через $\varphi(z)$. Этим определено отображение $\varphi\colon Z \to X$. Докажем, что φ есть отображение на все пространство X, чем, в частности, будет доказана и непустота множества Z. Берем произвольную точку $x \in X$. Для каждого α полагаем $z_\alpha = 0$, если $x \in V_\alpha$, и $z_\alpha = 1$, если $x \in X \setminus V_\alpha$. Другими словами, при любом α имеем $x \in E_\alpha(z)$, значит, $x = \bigcap\limits_{\alpha} E_\alpha(z) = \varphi(z)$. Докажем, что отображение φ взаимно однозначно, В самом деле, если $z \in Z$, $z' \in Z$, $z \neq z'$, то для некоторого $\alpha \in \mathfrak{A}$ имеем $z_\alpha \neq z'_\alpha$. Пусть, например, $z_\alpha = 0$, $z'_\alpha = 1$; тогда $E_\alpha(z) = V_\alpha$, $E_\alpha(z') = X \setminus V_\alpha$ и, значит, $\varphi(z) \in V$, $\varphi(z') \in X \setminus V_\alpha$, $\varphi(z) \neq \varphi(z')$.

Докажем, наконец, что φ есть гомеоморфизм. Назовем элементарным множеством в Z всякое множество, являющееся пересечением множества Z с каким-либо элементарным открытым множеством первого рода пространства F^τ. Элементарные множества образуют базу пространства Z. Рассмотрим теперь произвольный элемент V_{α_0} базы $\mathfrak{B}$ пространства X. По определению отображения φ прообраз $\varphi^{-1}V_{\alpha_0}$ множества V_{α_0} совпадает с одноиндексным элементарным множеством $\{z \in Z\colon z_{\alpha_0}=0\}$. Но произвольное элементарное множество есть пересечение конечного числа одноиндексных множеств. Поэтому всякое элементарное множество отображается на пересечение конечного числа элементов базы $\mathfrak{B}$, т. е. снова на элемент базы $\mathfrak{B}$. Таким образом, отображение φ переводит базу пространства Z на базу пространства X. Согласно предложению 4 § 4 гл. 4 φ есть топологическое отображение. Теорема доказана.

Теорема 24 (Александров [6], [8]). *Для того чтобы пространство X было индуктивно нульмерно, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфно (непустому) подпространству пространства D^τ.*

Так как тихоновская база пространства D^τ состоит из открыто-замкнутых множеств, то пространство D^τ и всякое его непустое подпространство индуктивно нульмерно — одно утверждение теоремы 24 доказано. Переходим ко второму утверждению. Пусть X — индуктивно нульмерное пространство веса τ. В базе этого пространства, состоящей из всех открыто-замкнутых множеств, содержится база $\mathfrak{B}$ мощности τ. Предполагаем элементы этой базы занумерованными индексами α, пробегающими какое-либо фиксированное множество $\mathfrak{A}$, и предполагаем, что $D=\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} D_\alpha$, где $D_\alpha=\{0_\alpha, 1_\alpha\}$ — простое двоеточие. Положим $f_\alpha(X\setminus V_\alpha)=1_\alpha$, $f_\alpha V_\alpha = O_\alpha$. Определенная таким образом функция $f_\alpha\colon X\to D_\alpha$ тривиальным образом непрерывна. Обозначим через $f\colon X\to D^\tau=\prod\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} D_\alpha$ диагональное произведение функций f_α. В силу предложения 2 § 4 гл. 6 отображение f непрерывно. Так как для любых двух различных точек $x\in X$, $x'\in X$ существует такое V_α, что $x\in V_\alpha$, $x'\in X\setminus V_\alpha$ и, следовательно, $f_\alpha x\neq f_\alpha x'$ и $fx\neq fx'$, то f взаимно однозначно отображает пространство X на некоторое $Y=fX\subseteq D^\tau$. При этом $fV_\alpha = Y\cap \pi_\alpha^{-1}0_\alpha$, т. е. образы элементов базы $\mathfrak{B}$ открыты в Y.

Итак, f есть открытое взаимно однозначное и, значит, топологическое отображение пространства X на пространство Y, что и требовалось доказать.

При счетном τ получаем

Предложение 1. *Индуктивно нульмерные пространства со счетной базой и только они гомеоморфны подмножествам канторова совершенного множества.*

Так как пространство F^τ есть взаимно однозначный непрерывный образ пространства D^τ, то из теоремы 23 вытекает

Теорема 25 (Александров [6], [8]). *Всякое T_0-пространство X веса τ есть образ некоторого подпространства Z пространства D^τ при некотором непрерывном взаимно однозначном отображении.*

§ 10. Диадические бикомпакты

Уже из теорем 22 и 24 явствует важность пространств D^τ (обобщенных канторовых дисконтинуумов). Заметим еще и то, что при любом кардинальном числе τ пространство D^τ является топологической группой со следующим определением операции сложения: если $x=\{x_\alpha\}$ и $y=\{y_\alpha\}$ — две точки дисконтинуума D^τ, то полагаем $x+y=(x_\alpha+y_\alpha)$, где («покоординатное») сложение $x_\alpha+y_\alpha$ происходит по модулю два, т. е. по правилу $0+0=1+1=0$, $0+1=1+0=1$. Это значит, что топологическая группа D^τ есть топологическое прямое произведение групп $D_\alpha - \{0_\alpha, 1_\alpha\}$ второго порядка. Алгебраический интерес, представляемый бикомпактами D^τ, еще более возрастет, если мы перейдем от самих бикомпактов D^τ к так называемым *диадическим бикомпактам*, т. е. бикомпактным (хаусдорфовым) пространствам, являющимся непрерывными образами бикомпактов D^τ при различных кардинальных числах τ. В силу замечательной теоремы Ивановского и Кузьминова *) пространство всякой бикомпактной топологической группы (т. е. бикомпактная топологическая группа, рассматриваемая как топологическое пространство) всегда является диадическим бикомпактом. Нетрудно видеть, что класс диадических бикомпактов есть наименьший класс топологических пространств, замкнутый по отношению к операциям топологического умножения и перехода к непрерывному образу всякого содержащегося в нем пространства и имеющий в числе своих элементов все пространства, состоящие из конечного числа (или хотя бы из двух) изолированных точек. В частности, мы уже знаем, что все компакты являются диадическими бикомпактами (теорема 25 § 4 гл. 5).

Диадические бикомпакты обладают многими замечательными свойствами. Из этих свойств мы докажем в этом параграфе следующие:

I. *Диадические бикомпакты обладают свойством Суслина, т. е. всякая дизъюнктная система открытых непустых подмножеств какого-либо диадического бикомпакта X не более чем счетна.*

II. *Всякий диадический бикомпакт с первой аксиомой счетности метризуем.*

Каждое из этих свойств показывает, что не всякий бикомпакт является диадическим. Так, согласно первому свойству

*) Доказательство которой, к сожалению, выходит за рамки этой книги (см Ивановский [1], Кузьминов [1]).

диадическим бикомпактом не является пространство всех порядковых чисел $\leqslant \omega_1$, согласно второму — упорядоченный бикомпакт «две стрелки».

Введем сначала некоторые обозначения и определения.

Пусть $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ — топологическое произведение пространств X_α, и пусть $B \subset A$. Через π_B обозначим естественную проекцию пространства X на произведение $\prod_{\alpha \in B} X_\alpha$. Если $\alpha \in A$, то проекцию $\pi_{\{\alpha\}}$: $X \longrightarrow X_\alpha$ будем обозначать через π_α. Будем говорить, что множество $Y \subset X$ не зависит от множества индексов B, если $Y = \pi_{A \setminus B}^{-1} \pi_{A \setminus B} Y$. Отметим очевидное утверждение:

Если множество $Y \subset X$ не зависит от множества индексов B и $C \subset B$, то Y не зависит от C.

Пусть f: $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \longrightarrow Z$ — отображение. Скажем, что отображение f на множестве $Y \subseteq \prod X_\alpha$ не зависит от множества индексов $B \subset A$, если для всякой точки $y \in Y$ и всякой такой точки $y' \in \prod X_\alpha$, что $\pi_{A \setminus B} y = \pi_{A \setminus B} y'$, имеем $fy = fy'$.

Лемма 1. *Для всякого кардинального числа τ канторов дисконтинуум D^τ удовлетворяет свойству Суслина.*

Доказательство. Пусть $D^\tau = \prod_{\beta \in B} D_\beta$, где $|B| = \tau$. Предположим, что $\{V_\alpha\}$, $\alpha \in A$, — несчетная дизъюнктная система открытых множеств в D^τ. Без ограничения общности можно считать, что всякое V_α является элементарным открытым множеством. Каждое V_α зависит от конечного числа индексов — координат. Поэтому существует такое натуральное число k и такое несчетное множество $A_0 \subset A$, что каждое V_α, $\alpha \in A_0$, зависит ровно от k координат.

Существует такой индекс $\beta_1 \in B$ и такое несчетное множество $A_1 \subset A_0$, что всякое V_α, $\alpha \in A_1$, зависит от β_1 и $\pi_{\beta_1} V_{\alpha'} = \pi_{\beta_1} V_{\alpha''}$ для всяких α', $\alpha'' \in A_1$. В самом деле, берем произвольное множество V_{α_0}, $\alpha_0 \in A_0$. Для всякого $\alpha \in A_0 \setminus \{\alpha_0\}$ существует такое $\beta = \beta(\alpha) \in B$, что $\pi_{\beta(\alpha)} V_{\alpha_0} \cap \pi_{\beta(\alpha)} V_\alpha = \Lambda$. Из последнего равенства следует, что и V_{α_0} и V_α зависят от $\beta(\alpha)$. Поскольку V_{α_0} зависит от конечного числа координат, существует такое несчетное множество $A_1' \subset A_0$, что $\beta(\alpha') = \beta(\alpha'') = \beta_1$ для всякой пары α', $\alpha'' \in A_1'$. Но D_{β_1} состоит из двух точек, поэтому существует такое несчетное множество $A_1 \subset A_1'$, что $\pi_{\beta_1} V_{\alpha'} = \pi_{\beta_1} V_{\alpha''}$ для всех α', $\alpha'' \in A_1$. Множество A_1, очевидно, является искомым.

Повторяя это рассуждение еще $k-1$ раз, получаем k попарно различных индексов $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и несчетное множество $A_k \subset A_0$, так что всякое V_α, $\alpha \in A_k$, зависит от каждого из индексов $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и $\pi_{\beta_i} V_{\alpha'} = \pi_{\beta_i} V_{\alpha''}$ для всех α', $\alpha'' \in A_k$, и всех $i = 1, \ldots, k$. Но всякое множество V_α, $\alpha \in A_k$, зависит ровно от k координат, т. е. только от $\beta_1, \ldots, \beta_k$. Поэтому $V_{\alpha'} = V_{\alpha''}$ для всех α', $\alpha'' \in A_k$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Из леммы 1 непосредственно вытекает

Теорема 26. *Всякий диадический бикомпакт обладает свойством Суслина.*

Лемма 2. *Всякое замкнутое G_δ-множество в D^τ зависит от счетного числа координат.*

Доказательство. Пусть $F = [F] \subset D^\tau$ и $F = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$, где все U_i открыты в D^τ. В силу бикомпактности F для всякого i существует такое открытое множество V_i, являющееся объединением конечного числа элементарных открытых множеств, что $F \subset V_i \subset U_i$. Множество V_i, как объединение конечного числа множеств, зависящих от конечного числа координат, само зависит лишь от конечного множества координат B_i. Покажем, что множество F может зависеть лишь от множества $B_\infty = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. Пусть $x \in F$ и y — такая точка из D^τ, что $\pi_{B_\infty} x = \pi_{B_\infty} y$. Тогда тем более $\pi_{B_i} x = \pi_{B_i} y$. Но $x \in V_i$, а $V_i = \pi_{B_i}^{-1} \pi_{B_i} V_i$. Поэтому $y \in V_i$ для всякого i, т. е. $y \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} V_i = F$. Итак, $F = \pi_{B_\infty}^{-1} \pi_{B_\infty} F$. Лемма 2 доказана.

Теорема 27. *Всякий диадический бикомпакт X с первой аксиомой счетности удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Пусть $X = f(D^\tau)$, где $D^\tau = \prod\limits_{\beta \in B} D_\beta$. Мы построим такой лежащий в D^τ компакт Z, что $fZ = X$. При непрерывном отображении бикомпакта вес не повышается. Поэтому в бикомпакте X будет существовать счетная база.

Переходим к построению компакта Z. Для всякой точки $y \in D^\tau$ множество $f^{-1}fy$ является G_δ-множеством, поскольку X удовлетворяет первой аксиоме счетности. Согласно лемме 2 множество $f^{-1}fy$ зависит от счетного множества координат, которое мы обозначим через B_y. Определим теперь по индукции последовательность $\{B_i\}$ счетных подмножеств множества B и последовательность Y_i счетных подмножеств дисконтинуума D^τ так, чтобы для всех i выполнялись условия:

1. $Y_i \subset Y_{i+1}$.
2. $B_i = \bigcup\limits_{y \in Y_i} B_y$.
3. $\pi_{B_i}(Y_{i+1})$ всюду плотно в $\pi_{B_i}(D^\tau)$.

Положим $Y_0=\{y_0\}$, где y_0 — произвольно выбранная точка бикомпакта D^τ, и $B_0=B_{y_0}$. Индуктивный переход от i к $i+1$ не вызывает затруднений, ибо пространство $\pi_{B_i}D^\tau=\prod_{\beta\in B_i} D_\beta$ обладает счетной базой и, следовательно, сепарабельно. В качестве множества Y_{i+1} берем произвольное счетное множество, содержащее Y_i и отображающееся (посредством проекции π_{B_i}) на некоторое счетное всюду плотное подмножество компакта $\pi_{B_i}(D^\tau)$.

Положим теперь $Y_\infty=\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$, $B_\infty=\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ и $Y^*=f^{-1}fY_\infty$. Заметим, что $fY^*=fY_\infty$ и отображение f не зависит от множества $B\setminus B_\infty$ на Y_∞. В самом деле, пусть $y'\in Y_\infty$, $y''\in D^\tau$, $\pi_{B_\infty}y'=\pi_{B_\infty}y''$. Тогда y' принадлежит некоторому множеству Y_i. Из равенства $\pi_{B_\infty}y''=\pi_{B_\infty}y'$ следует равенство $\pi_{B_i}y''=\pi_{B_i}y'$ и тем более равенство $\pi_{B_{y'}}y''=\pi_{B_{y'}}y'$. Но $\pi^{-1}_{B_{y'}}\pi_{B_{y'}}f^{-1}fy'=f^{-1}fy'$. Поэтому $y''\in f^{-1}fy'$, т. е. $fy''=fy'$.

С другой стороны, $\pi_{B_\infty}Y^*$ всюду плотно в $\pi_{B_\infty}D^\tau$. Это сразу следует из определения топологии произведения и того, что $\pi_{B_i}Y^*$ плотно в $\pi_{B_i}D^\tau$ (последнее имеет место, так как $Y^*\supset Y_{i+1}$).

Теперь покажем, что Y^* не зависит от $B\setminus B_\infty$, т. е. $\pi^{-1}_{B_\infty}\pi_{B_\infty}Y^*=Y^*$. Пусть $y\in Y^*$, $y'\in D^\tau$ и $\pi_{B_\infty}y=\pi_{B_\infty}y'$. Существует такая точка $y''\in Y_\infty$, что $fy=fy''$. Имеем $\pi_{B_{y''}}y\in\pi_{B_{y''}}f^{-1}fy''$. Из $\pi_{B_\infty}y=\pi_{B_\infty}y'$ следует $\pi_{B_{y''}}y=\pi_{B_{y''}}y'$. Используя независимость множества $f^{-1}fy''$ от $B\setminus B_{y''}$, получаем

$$y'\in\pi^{-1}_{B_{y''}}(\pi_{B_{y''}}y')=\pi^{-1}_{B_{y''}}(\pi_{B_{y''}}y)\subseteq\pi^{-1}_{B_{y''}}\pi_{B_{y''}}f^{-1}fy''=f^{-1}fy''\subseteq Y^*.$$

Независимость Y^* от $B\setminus B_\infty$ доказана.

Так как $\pi_{B_\infty}(Y^*)$ всюду плотно в $\pi_{B_\infty}(D^\tau)$ и $\pi^{-1}_{B_\infty}\pi_{B_\infty}Y^*=Y^*$, то множество Y^* всюду плотно в D^τ, — это вытекает из открытости отображения π_{B_∞}. Следовательно, множество fY_∞, равное fY^*, всюду плотно в бикомпакте X.

Зафиксируем теперь некоторую точку $z\in D^\tau$. Положим

$$z_{B\setminus B_\infty}=\pi_{B\setminus B_\infty}(z)\in\prod_{\beta\in B\setminus B_\infty} D_\beta$$

и

$$\tilde{Y} = \pi_{B_\infty} Y_\infty \times z_{B \setminus B_\infty} \subset \prod_{\beta \in B_\infty} D_\beta \times \prod_{\beta \in B \setminus B_\infty} D_\beta = D^\tau.$$

Выше доказано, что отображение f на множестве Y_∞ не зависит от множества индексов $B \setminus B_\infty$. Поэтому множество $f\tilde{Y}$, равное fY_∞, всюду плотно в бикомпакте X. Положим $Z = [\tilde{Y}]_{D^\tau}$. Поскольку Z—бикомпакт, имеем $fZ = X$. Но бикомпакт Z лежит в бикомпакте $\pi_{B_\infty}(D^\tau) \times Z_{B \setminus B_\infty}$, гомеоморфном компакту $\pi_{B_\infty}(D^\tau) = \prod_{\beta \in B_\infty} D_\beta$. Таким образом, Z является компактом. Теорема 27 доказана.

Простым следствием теорем 26 и 27 является

Теорема 28. *Всякий упорядоченный диадический бикомпакт X метризуем.*

В самом деле, если в какой-нибудь точке x пространства X не выполнена первая аксиома счетности, то существует сходящаяся к этой точке возрастающая (или убывающая) вполне упорядоченная несчетная последовательность $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$. Тогда семейство интервалов $(x_\alpha; x_{\alpha+2})$, где α пробегает все предельные числа из A, будет несчетным дизъюнктным семейством открытых множеств. Это противоречие и доказывает теорему 28.

§ 11. Открытые покрытия; паракомпактность и другие свойства типа компактности

1. Семейства множеств и покрытия. В § 3 гл. 1 читатель уже получил первоначальные сведения о системах множеств и покрытиях. В этом параграфе мы познакомимся с семействами множеств и покрытиями более подробно.

Определение 4. Семейство множеств σ называется *звездно конечным* (*звездно счетным*), если каждый элемент семейства σ пересекается лишь с конечным (счетным) числом элементов этого семейства.

Теперь сделаем несколько замечаний о звездно счетных семействах (открытых) множеств.

Пусть Σ—какая-нибудь совокупность подмножеств произвольного данного множества X. Мы будем рассматривать сцепленные подсистемы σ системы Σ (система множеств $\sigma = \{M\}$ называется сцепленной, если любые два элемента M и M' системы σ, могут быть связаны цепочкой, т. е. конечной последовательностью множеств $M = M_1, \ldots, M_s = M'$ элементов системы σ таким образом, что любые два соседних элемента M_i и M_{i+1}, $i = 1, \ldots, s-1$, этой последовательности имеют непустое пересечение $M_i \cap M_{i+1} \neq \Lambda$).

Объединение двух сцепленных систем σ_α, σ_β с непустым пересечением тел есть снова сцепленная система. Поэтому любая сцепленная подсистема σ_0 данной системы множеств Σ содержится в максимальной сцепленной подсистеме или компоненте сцепленности системы Σ. В частности, каждый элемент системы Σ содержится в однозначно определенной этим элементом компоненте сцепленности системы Σ. Две различные компоненты сцепленности одной и той же системы множеств не могут иметь общих элементов. Более того, если множества M_α и M_β суть какие-либо элементы различных компонент сцепленности σ_α, соответственно σ_β, системы Σ, то непременно $M_\alpha \cap M_\beta = \Lambda$ (в противном случае система $\sigma_\alpha \cup \sigma_\beta$ была бы сцепленной подсистемой системы Σ, вопреки свойству максимальности компонент сцепленности). Отсюда вытекает, что и тела всяких двух различных компонент сцепленности данной системы множеств Σ суть дизъюнктные подмножества множества X. Предположим теперь, что X — топологическое пространство, а Σ — какая-либо система открытых в X множеств, являющаяся покрытием пространства X (в частности, может случиться, что Σ есть база пространства X). Тогда тело каждой компоненты сцепленности σ системы Σ, будучи дополнением до суммы тел всех отличных от σ компонент сцепленности системы Σ, является открыто-замкнутым множеством и все пространство X является суммой дизъюнктных открыто-замкнутых множеств — тел компонент сцепленности системы Σ. О мощности этой системы открыто-замкнутых множеств мы в общем случае ничего сказать не можем, она может принимать всевозможные значения от 1 до произвольно заданного кардинального числа.

Имеет место

Предложение 1. *Каждая сцепленная подсистема σ (в частности, каждая компонента сцепленности) звездно счетной системы Σ состоит не более чем из счетного числа элементов.*

Доказательство. Пусть M_0 — какой-либо фиксированный элемент системы σ. Обозначим через σ_k (где k — натуральное число) подсистему системы σ, состоящую из всех множеств $M \in \sigma$, которые могут быть связаны с M_0 цепочками длины $\leqslant k$ (длиной цепочки множеств называется число составляющих ее элементов).

Следующие утверждения очевидны:

1. Система σ_1 состоит из одного элемента M_0.

2. Система σ_{k+1} состоит из всех множеств $M \in \sigma$, пересекающихся хотя бы с одним элементом системы σ_k (или, что то же, с телом этой системы). Отсюда вытекает, что $\sigma_k \subset \sigma_{k+1}$.

3. $\sigma = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k$.

Для доказательства предложения 1 остается показать, что каждая система σ_k не более чем счетна. Для $k=1$ это так. Но из того, что σ_k является конечной или счетной подсистемой звездно счетной системы σ, следует, что не более чем счетной является и система σ_{k+1}. Предложение доказано.

Пусть $\alpha=\{A\}$ и $\beta=\{B\}$ — покрытия одного и того же множества X. Напомним, что покрытие β *вписано* в покрытие α, если всякий элемент B покрытия β содержится хотя бы в одном элементе A покрытия α. Если при этом $\alpha\neq\beta$, то говорят, что покрытие β *следует* за покрытием α, и пишут: $\beta>\alpha$. Отношение следования превращает множество покрытий данного множества X в частично упорядоченное множество.

Определение 5. Говорят, что покрытие β пространства X *звездно вписано* в покрытие α того же пространства, если семейство β^* *) вписано в α.

Лемма об ужатии точечно конечных покрытий **). *Пусть $u=\{U_\alpha;\ \alpha\in A\}$ — точечно конечное открытое покрытие нормального пространства X. Существует такое открытое покрытие $v=\{V_\alpha;\ \alpha\in A\}$ пространства X, что $[V_\alpha]\subseteq U_\alpha$ для всякого $\alpha\in A$.*

Доказательство. В силу теоремы Цермело можем считать, что множество A вполне упорядочено. Множество V_α построим, применяя метод трансфинитной индукции. Положим $F_1=X\setminus\bigcup\limits_{\alpha\geqslant 2}U_\alpha$. Множество F_1 замкнуто и содержится в U_1. В силу нормальности пространства X существует такая окрестность V_1 множества F_1, что $[V_1]\subset U_1$. Заметим, что система $v_1=\{V_1\}\cup\{U_\alpha\colon \alpha\geqslant 2\}$ является покрытием пространства X. Предположим, что для всякого $\alpha'<\alpha$ построено такое открытое множество $V_{\alpha'}$, что $[V_{\alpha'}]\subset U_{\alpha'}$ и система $v_{\alpha'}=\{V_{\alpha''}\colon \alpha''\leqslant\alpha'\}\cup\{U_{\alpha''}\colon \alpha''>\alpha'\}$ является покрытием пространства X.

Покажем, что система $v'_\alpha=\{V_{\alpha'}\colon \alpha'<\alpha\}\cup\{U_{\alpha'}\colon \alpha'\geqslant\alpha\}$ также является покрытием пространства X. Если α — изолированное число, то семейство v'_α совпадает с $v_{\alpha-1}$ и является покрытием по предположению индукции. Пусть теперь α — предельное число и $x\in X\setminus\bigcup\limits_{\alpha'\geqslant\alpha}U_{\alpha'}$. Существует лишь конечное число элементов покрытия u, содержащих точку x. Пусть это будут $U_{\alpha_1},\ \ldots,\ U_{\alpha_k}$. Существует такое число α_0, что $\max\{\alpha_i\colon i=1,\ \ldots,\ k\}\leqslant\alpha_0<\alpha$. По предположению индукции семейство v^{α_0} является покрытием

---

*) См. § 3 гл. 1.

**) Доказано для конечных покрытий Чехом [1], в общем случае Лефшецем [1].

пространства X. Но по выбору числа α_0 имеем $x \notin \bigcup\limits_{\alpha' > \alpha_0} U_{\alpha'}$. Следовательно, $x \in \bigcup\limits_{\alpha'' \leqslant \alpha_0} V_{\alpha'}$. Тем более $x \in \bigcup\limits_{\alpha' < \alpha} V_{\alpha'}$, и семейство v'_α тем самым является покрытием. Полагаем теперь $F_\alpha = X \diagdown \left(\bigcup\limits_{\alpha' < \alpha} V_{\alpha'} \cup \bigcup\limits_{\alpha' > \alpha} U_{\alpha'} \right)$. Множество F_α замкнуто и, очевидно, содержится в U_α. В силу нормальности X существует такая окрестность V_α множества F_α, что $[V_\alpha] \subseteq U_\alpha$. Индукция идет дальше. Взяв теперь порядковое число β большим всякого $\alpha \in A$, получаем искомое покрытие $v = v'_\beta$. Лемма доказана.

Частным случаем этой леммы является

Лемма об ужатии конечных покрытий (Чех [1]). *Для всякого конечного открытого покрытия* $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *нормального пространства* X *существует такое открытое покрытие* $\{V_1, \ldots, V_n\}$ *этого пространства, что* $[V_i] \subseteq U_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Читатель, впрочем, может доказать эту лемму самостоятельно, применяя элементарный метод математической индукции.

В § 8 этой главы было показано, что для нормального пространства X из $\dim X = 0$ следует, что $\operatorname{Ind} X = 0$. Теперь мы можем доказать и обратное утверждение. Пусть $\operatorname{Ind} X = 0$ и $\{U_1, \ldots, U_n\}$ — конечное открытое покрытие пространства X. По лемме об ужатии конечных покрытий существует такое покрытие $\{V_1, \ldots, V_n\}$, что $[V_i] \subseteq U_i$. Так как $\operatorname{Ind} X = 0$, то для всякого $i = 1, \ldots, n$ существует открыто-замкнутая окрестность O_i множества $[V_i]$, содержащаяся в U_i. Положим теперь $W_j = O_j \diagdown \bigcup\limits_{i < j} O_i$ для всякого $j = 1, \ldots, n$. Семейство $\{W_1, \ldots, W_n\}$ и будет дизъюнктным открытым покрытием, вписанным в покрытие $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Итак, нами доказана следующая

Теорема 29. *Для нормального пространства* X *равенство* $\operatorname{Ind} X = 0$ *эквивалентно равенству* $\dim X = 0$.

Завершим этот пункт, введя несколько новых понятий.

Определение 6. Семейство $\alpha = \{A\}$ подмножеств топологического пространства X называется *локально конечным*, если у всякой точки $x \in X$ существует окрестность Ox, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов семейства α.

Всякое звездно конечное открытое покрытие пространства X, очевидно, локально конечно. Предположение открытости здесь существенно.

Определение 7. Семейство $\alpha = \{A\}$ подмножеств топологического пространства X называется *дискретным*, если у всякой точки $x \in X$ существует окрестность, пересекающаяся не более чем с одним элементом семейства α.

Всякое дискретное семейство локально конечно. Дискретным является всякое дизъюнктное открытое покрытие пространства. Наоборот, если дискретное семейство является покрытием пространства, то его элементы открыты (даже открыто-замкнуты). Семейство всех одноточечных множеств данного пространства может служить примером звездно конечного, но не локально конечного покрытия.

Определение 8. Семейство $\alpha=\{A\}$ подмножеств топологического пространства X называется *консервативным*, если для всякого подсемейства α_0 семейства α имеем $\left[\bigcup\limits_{A\in\alpha_0} A\right]=\bigcup\limits_{A\in\alpha_0}[A]$, т. е. для всякого подсемейства сумма замыканий его элементов равна замыканию суммы.

Читатель без труда может убедиться в том, что произвольное семейство замкнутых множеств дискретно тогда и только тогда, когда оно дизъюнктно и консервативно.

Предложение 2. *Всякое локально конечное семейство консервативно.*

Доказательство. Пусть $\alpha=\{A\}$ — локально конечное семейство подмножеств пространства X, и пусть $\alpha_0\subseteq\alpha$. Включение $\bigcup\limits_{A\in\alpha_0}[A]\subseteq\left[\bigcup\limits_{A\in\alpha_0} A\right]$ вытекает из монотонности оператора замыкания. Проверим обратное включение. Пусть $x\notin\bigcup\limits_{A\in\alpha_0}[A]$, и пусть Ox — окрестность точки x, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов семейства α. Некоторые из этих элементов могут принадлежать семейству α_0. Пусть это будут множества $A_1, \ldots, A_n$. Поскольку $x\notin\bigcup\limits_{A\in\alpha_0}[A]$, то тем более $x\notin[A_1]\cup\ldots\cup[A_n]$. Поэтому множество $O'x=Ox\setminus([A_1]\cup\ldots\cup[A_n])$ будет окрестностью точки x. Эта окрестность, очевидно, не пересекается ни с одним элементом семейства α_0. Следовательно, $x\notin\left[\bigcup\limits_{A\in\alpha_0} A\right]$. Предложение доказано.

Определение 9. Система $\Omega=\{\omega\}$ открытых покрытий топологического пространства X называется *измельчающейся*, если для всякой точки $x\in X$ и произвольной ее окрестности Ox существует такое покрытие $\omega\in\Omega$, что $\text{Зв}_\omega x\subseteq Ox$.

2. Свойства типа компактности. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — два семейства покрытий топологического пространства X; при этом предполагается, что элементы семейства $\mathfrak{A}$ суть открытые покрытия.

Мы говорим, что пространство X есть $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-*компактное пространство* или обладает свойством $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-компактности, если в каждое покрытие α семейства $\mathfrak{A}$ вписано некоторое покрытие β семейства $\mathfrak{B}$. Свойства $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-компактности при различных $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и называются *свойствами типа компактности*. Важнейшими среди них являются:

(A_1) Бикомпактность: $\mathfrak{A}$ — семейство всех открытых покрытий, $\mathfrak{B}_1$ — семейство всех конечных открытых покрытий.

(A_2) Финальная компактность: $\mathfrak{A}$ — семейство всех открытых покрытий, $\mathfrak{B}_2$ семейство всех не более чем счетных покрытий.

(A_3) Паракомпактность, соответственно (A_4) сильная паракомпактность: $\mathfrak{A}$ — семейство всех открытых покрытий, $\mathfrak{B}_3$ — семейство всех локально конечных, соответственно $\mathfrak{B}_4$ — семейство всех звездно конечных, открытых покрытий.

(A_5) Счетная компактность: $\mathfrak{A}$ — семейство всех счетных, $\mathfrak{B}_5$ — всех конечных открытых покрытий. В случаях бикомпактности, финальной компактности и счетной компактности можно даже потребовать, не меняя класса получаемых пространств, чтобы покрытие $\beta \in \mathfrak{B}$ семейства $\mathfrak{B}$ не только было вписано в покрытие $\mathfrak{A}$, но содержалось в нем, $\beta \subset \alpha$.

Из определения $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-компактности вытекает, что всякое бикомпактное пространство является финально компактным, счетно компактным, а также сильно паракомпактным, а всякое сильно паракомпактное пространство паракомпактно. Ниже будет показано, что регулярное финально компактное пространство паракомпактно.

Предложение 3. *Замкнутое подпространство $\Phi \subseteq X$ пространства X, обладающего свойством (A_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5$, есть пространство, обладающее тем же свойством (A_i).*

Доказательство. Пусть $\omega = \{O_\alpha\}$ — какое-нибудь (в случае (A_5) — счетное) покрытие множества Φ открытыми в Φ множествами. Для каждого $O_\alpha \in \omega$ существует такое открытое во всем пространстве X множество U_α, что $O_\alpha = \Phi \cap U_\alpha$. Семейство $\Omega = \{X \setminus \Phi\} \cup \{U_\alpha\}$ является открытым покрытием пространства X, счетным в случае (A_5). Существует покрытие $\gamma = \{\Gamma_\lambda\}$, вписанное в Ω и принадлежащее классу $\mathfrak{B}_i$. Тогда множества $V_\lambda = \Phi \cap \Gamma_\lambda$ образуют вписанное в ω открытое и принадлежащее классу $\mathfrak{B}_i$ покрытие множества Φ, что и требовалось доказать.

Счетная компактность есть инициальная компактность вплоть до мощности $\aleph_0$. Поэтому, если пространство X одновременно финально компактно и счетно компактно, то оно бикомпактно.

В § 1 этой главы мы видели, что счетная компактность эквивалентна компактности, определяемой посредством предельных точек. Поэтому для метрических пространств понятия бикомпактности и счетной компактности совпадают.

Имеет место

Предложение 4. *Для паракомпактных пространств понятия бикомпактности и счетной компактности совпадают.*

Доказательство. Надо показать, что всякое счетно компактное паракомпактное пространство X бикомпактно. Для этого достаточно проверить, что всякое открытое локально конечное покрытие ω счетно компактного пространства X конечно. Предположим, что это не так, т. е. существует бесконечное локально конечное покрытие ω пространства X. Из всякого элемента O_α покрытия ω выберем по одной точке x_α. При этом может случиться, что из разных элементов покрытия ω мы выбрали одну и ту же точку. Но, поскольку покрытие ω локально конечно, множество $M=\{x_\alpha\}$, состоящее из всех выбранных точек, бесконечно и потому имеет предельную точку x. У точки x существует окрестность Ox, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия ω, следовательно, содержащая лишь конечное число точек множества M. Это противоречит тому, что x есть предельная точка множества M. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. *Всякое паракомпактное хаусдорфово пространство нормально.*

Доказательство аналогично доказательству нормальности бикомпактов. Сначала покажем, что всякий паракомпакт регулярен. Пусть F — произвольное замкнутое подмножество паракомпакта X и $x \in X \setminus F$. Для всякой точки $y \in F$ существует такая окрестность Oy, что $x \notin [Oy]$. Семейство $\omega = \{X \setminus F\} \cup \{Oy\colon\ y \in F\}$ является открытым покрытием пространства X. Существует локально конечное открытое покрытие $\omega_0 = \{O_\alpha\colon\ \alpha \in A\}$ пространства X, вписанное в покрытие ω. Положим $OF = \text{Зв}_{\omega_0} F$. Поскольку всякое локально конечное семейство консервативно, имеем

$$[OF] = \bigcup_{O_\alpha \cap F \neq \Lambda} [O_\alpha].$$

Но всякое O_α, пересекающееся с F, содержится в некотором O_y. Значит, из $O_\alpha \cap F \neq \Lambda$ следует, что $x \notin [O_\alpha]$. Поэтому $x \notin [OF]$. Итак, множества $X \setminus [OF]$ и OF являются непересекающимися окрестностями точки x и множества F соответственно. Регулярность пространства X доказана.

Нормальность доказывается аналогично. Пусть F_1 и F_2 — дизъюнктные замкнутые подмножества пространства X. В силу уже доказанной регулярности X, для всякой точки $y \in F_2$ существует окрестность Oy, замыкание которой не пересекается с F_1. Полагаем $\omega = \{X \setminus F_2\} \cup \{Oy\colon\ y \in F_2\}$ и так же, как при доказательстве регулярности, получаем такую окрестность OF_2, замыкание которой не пересекается с F_1, т. е. получаем дизъюнктные окрестности $X \setminus [OF_2]$ и OF_2 множеств F_1 и F_2. Предложение 5 доказано.

Предложение 6. *Всякое регулярное финально компактное пространство X паракомпактно* *).

Следствие. *Всякое регулярное финально компактное пространство X нормально.*

Доказательство предложения 6. Пусть $\omega=\{U\}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. В силу регулярности пространства X, для каждой его точки x существует окрестность Ox, со своим замыканием лежащая в некотором элементе U покрытия ω. Семейство $\omega_0=\{Ox\colon x\in X\}$ является покрытием пространства X. Существует счетное подпокрытие $\omega_0' = \{Ox_1, \ldots, Ox_k, \ldots\}$. Для каждого элемента Ox_k покрытия ω_0' зафиксируем такой элемент U покрытия ω, что $[Ox_k]\subseteq U$, и присвоим ему номер k. При этом может случиться, что одному и тому же элементу U покрытия ω мы присвоим несколько (может быть, даже бесконечно много) различных номеров. Во всяком случае семейство $\omega'=\{U_1, \ldots, U_k, \ldots\}$ будет открытым покрытием пространства X, вписанным в покрытие ω. Кроме того, покрытие ω_0' так вписано в покрытие ω', что $[Ox_k]\subseteq U_k$.

Положим теперь $V_1=U_1$ и $V_k=U_k\diagdown\bigcup\limits_{i<k}[Ox_i]$ при $k>1$. Семейство $\omega_1=\{V_1, \ldots, V_k\}$ состоит из открытых множеств и вписано в покрытие ω', а значит, и в покрытие ω. Семейство ω_1 является покрытием. В самом деле, пусть $x\in X$. Среди всех элементов покрытия ω', содержащих точку x, выберем элемент с наименьшим номером. Пусть это будет U_k. Тогда $x\notin[Ox_i]$ для всех $i<k$, поскольку $[Ox_i]\subseteq U_i$. Следовательно, $x\in V_k$. Покажем, наконец, что покрытие ω_1 локально конечно. Пусть x — произвольная точка пространства X. Она принадлежит некоторому элементу Ox_k покрытия ω_0'. Очевидно, что $Ox_k\cap V_l=\Lambda$ для всех $l>k$. Поэтому окрестность Ox_k точки x пересекается не более чем с k элементами покрытия ω_1. Итак, ω_1 является открытым локально конечным покрытием пространства X, вписанным в покрытие ω. Предложение доказано.

3. Большая теорема А. Стоуна и паракомпактность метрических пространств как ее следствие. С существующим с древних времен интуитивным представлением «непрерывного пространства» связано интуитивное же представление о «бесконечной делимости» пространства, которому в мире общетопологических идей соответствует идея о существовании для каждого открытого покрытия α пространства X «более мелкого» покрытия β этого же пространства. Понятие вписанности покрытия β в покрытие α еще не

*) И даже сильно паракомпактно, как будет показано в § 12. В то же время существуют простые примеры хаусдорфовых финально компактных, но не паракомпактных пространств.

гарантирует того, что покрытие β является существенно более мелким, чем покрытие α,—это следует уже из того, что каждое покрытие вписано в себя самого. Гарантию фактического измельчения, или «дробления», покрытия дает более сильное понятие звездной вписанности (см. п. 2, определение 5). Поэтому мы скажем, что данное *открытое покрытие* ω *пространства* X *допускает дробление*, если существует открытое покрытие ω', звездно вписанное в ω. И наконец, мы скажем, что *пространство* X *допускает дробление*, если допускает дробление каждое открытое покрытие этого пространства.

Естественно, возникает вопрос: каковы же те топологические пространства, которые допускают дробление? Принципиальный интерес этого вопроса определяется тем, что именно пространства, допускающие дробление, мы склонны считать наиболее отвечающими нашим интуитивным представлениям о пространстве как о некоторой «непрерывной среде». Полный ответ на поставленный вопрос дается глубокой и трудной теоремой А. Стоуна, несомненно принадлежащей к значительнейшим достижениям общей топологии,—в частности, и потому, что она связывает между собою два совершенно различных круга топологических понятий.

Теорема 30 (большая теорема А. Стоуна [1]). *Среди нормальных пространств все паракомпакты и только они допускают дробление.*

Эта теорема, очевидно, содержит два утверждения. Первое из них состоит в том, что всякий паракомпакт допускает дробление. Это утверждение легко вытекает из следующего:

Предложение 7. *Всякое открытое локально конечное покрытие нормального пространства* X *допускает дробление.*

Если предложение 7 доказано и X—паракомпакт, то во всякое открытое покрытие ω пространства X можно вписать локально конечное открытое покрытие ω', а в ω' можно, в силу предложения 7, звездно вписать открытое покрытие ω'', которое, очевидно, звездно вписано и в ω. Значит, ω допускает дробление, а так как ω—произвольное открытое покрытие пространства X, то допускает дробление и пространство X.

Переходим к доказательству предложения 7.

Пусть $\omega=\{O_\alpha\}$, $\alpha\in\mathfrak{A}$,—локально конечное покрытие пространства X. В силу леммы об ужатии бесконечных покрытий существует замкнутое покрытие $\lambda=\{F_\alpha\}$, $\alpha\in\mathfrak{A}$, комбинаторно *) вписанное в покрытие ω, т. е. $F_\alpha\subseteq O_\alpha$, $\alpha\in\mathfrak{A}$. Из комбинаторной вписанности λ и ω вытекает локальная конечность и, следовательно, консервативность покрытия λ.

---

*) Говорят, что система σ' *комбинаторно вписана* в систему σ, если элементы обеих систем можно таким образом поставить во взаимно однозначное соответствие, что каждый элемент системы σ' содержится в соответствующем ему элементе системы σ.

Для произвольного конечного набора индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ положим

$$V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s} = \bigcap_{i=1}^{s} O_{\alpha_i} \setminus \bigcup_{\substack{\alpha \neq \alpha_i \\ i=1, \ldots, s}} F_\alpha .$$

Множества $V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}$, очевидно, открыты. Покажем, что система v всевозможных множеств $V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}$ звездно вписана в покрытие ω и сама является покрытием пространства X.

Рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Так как покрытие λ локально конечно, то точка x содержится лишь в конечном числе элементов этого покрытия. Пусть это будут множества $F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_s}$. Тогда, очевидно, $x \in V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}$. Следовательно, система v есть покрытие пространства X. Пусть $x \in F_{\alpha_1}$. Покажем, что $\text{Зв}_v x \subseteq O_{\alpha_1}$, покажем, другими словами, что из $x \in V_{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r} \in v$ следует, что $V_{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r} \subseteq O_{\alpha_1}$. Но если $x \in V_{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r}$, то $x \notin F_\alpha$ при $\alpha \neq \alpha'_j$, $j = 1, \ldots, r$. Между тем $x \in F_{\alpha_1}$, значит, $\alpha_1 = \alpha'_{j_0}$ при некотором $j_0 = 1, \ldots, r$. Но

$$V_{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r} \subseteq \bigcap_{j=1}^{r} O_{\alpha_j} \subseteq O_{\alpha'_{j_0}}, \quad \text{а} \quad O_{\alpha'_{j_0}} = O_{\alpha_1},$$

т. е. $V_{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r} \subseteq O_{\alpha_1}$,— утверждение доказано.

Итак, v есть искомое покрытие, звездно вписанное в покрытие ω. Первое утверждение теоремы 30 доказано.

Переходим к доказательству второго утверждения теоремы 30.

Предложение 8. *Нормальное пространство X, допускающее дробление, паракомпактно.*

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{G} = \{G_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, есть счетное открытое покрытие нормального пространства X, и пусть в $\mathfrak{G}$ можно так комбинаторно вписать замкнутое покрытие $\mathfrak{F} = \{F_n\}$, что $F_n \subseteq G_n$.*

Тогда в $\mathfrak{G}$ можно так комбинаторно вписать открытое локально конечное счетное покрытие $\mathfrak{H} = \{H_n\}$, что $H_n \subseteq G_n$.

Доказательство. Для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ берем такое открытое множество G'_n, что

$$F_n \subseteq G'_n \subseteq [G'_n] \subseteq G_n .$$

Очевидно, семейство открытых множеств $\mathfrak{G}' = \{G'_n\}$ и тем более семейство замкнутых множеств $\overline{\mathfrak{G}'} = \{[G'_n]\}$ является покрытием пространства X.

Полагаем $H_n = G_n \setminus \left[\bigcup\limits_{k<n} G'_k \right]$ и доказываем, что $\mathfrak{H} = \{H_n\}$ есть покрытие пространства X. В самом деле, для каждого $x \in X$ берем такое наименьшее n, что $x \in [G'_n]$. Тогда $x \in G_n$ и $x \notin \left[\bigcup\limits_{k<n} G'_k \right]$, значит, $x \in H_n$. Очевидно, $\mathfrak{H}$ комбинаторно вписано в $\mathfrak{G}$. Остается доказать, что покрытие $\mathfrak{H}$ локально конечно.

Пусть $x \in X$. Так как $\mathfrak{G}'$ — покрытие, то существует множество G'_p, содержащее точку x. Множество G'_p не может пересекаться с H_n, $n > p$, так как $H_n = G_n \setminus \bigcup\limits_{k<n} [G_n] \subseteq X \setminus [G'_p]$ при $n > p$. Следовательно, G'_p есть окрестность точки x, не пересекающаяся ни с одним из множеств $H_{p+1}, H_{p+2}, \ldots$, т. е. пересекающаяся лишь с конечным числом элементов H_n покрытия $\mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Пусть пространство X допускает дробление. Докажем, что X паракомпактно. Возьмем произвольное открытое покрытие $\gamma = \gamma_0 = \{U_\alpha\}$ пространства X. Будем строить локально конечное покрытие, вписанное в γ.

а) Возьмем открытое покрытие $\gamma_1 = \{U^1_\alpha\}$, звездно вписанное в γ_0, и, вообще, открытое покрытие $\gamma_n = \{U^n_\alpha\}$, звездно вписанное в $\gamma_{n-1} = \{U^{n-1}_\alpha\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ индексы α пробегают все порядковые числа, меньшие чем некоторое $\omega_\alpha = \omega_\tau(n)$, являющееся наименьшим порядковым числом, мощность которого равна мощности покрытия γ_n.

Звезду какого-либо множества $M \subseteq X$ относительно покрытия γ_n обозначим через $\text{Зв}_n M$; звезду точки $x \in X$ относительно покрытия γ_n обозначим через $\text{Зв}_n x$.

Каждое γ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, звездно вписано во все предыдущие покрытия γ_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Заметим, что из звездной вписанности какого-нибудь покрытия π' в покрытие π следует его так называемая «правильная» вписанность, состоящая в том, что объединение всяких двух пересекающихся элементов покрытия π' содержится в некотором элементе покрытия π.

б) Полагаем

$$F'_{n\alpha} = \{x \in U_\alpha \mid \text{Зв}_n x \subseteq U_\alpha\}$$

и доказываем прежде всего тождество

$$F'_{n\alpha} = X \setminus \text{Зв}_n (X \setminus U_\alpha). \tag{1}$$

В самом деле, пусть $x \in F'_{n\alpha}$. Тогда $\text{Зв}_n x \subseteq U_\alpha$, т. е.

$$\text{Зв}_n x \cap (X \setminus U_\alpha) = \Lambda.$$

Если бы $x \in \text{Зв}_n(X \setminus U_\alpha)$, то существовало бы некоторое $U_\beta^n \in \gamma_n$, пересекающееся с $X \setminus U_\alpha$ и содержащее точку x, так что $\text{Зв}_n x \cap (X \setminus U_\alpha) \neq \Lambda$, тогда как $\text{Зв}_n x \subseteq U_\alpha$. Итак, левая часть равенства содержится в правой.

Докажем, что правая содержится в левой. Пусть $x \in X \setminus \text{Зв}_n(X \setminus U_\alpha)$. Тогда для всякого $U_\beta^n \in \gamma_n$ и $x \in U_\beta^n$ следует $U_\beta^n \cap (X \setminus U_\alpha) = \Lambda$, т. е. $U_\beta^n \subseteq U_\alpha$. Другими словами, $\text{Зв}_n x \subseteq U_\alpha$ и $x \in F'_{n\alpha}$. Равенство (1) доказано.

Так как покрытие γ_{n+1} вписано в γ_n (даже звездно), то для любого $M \subseteq X$, в частности для $M \subseteq X \setminus U_\alpha$, имеем $\text{Зв}_{n+1} M \subseteq \text{Зв}_n M$; поэтому непосредственным следствием тождества (1) является включение $F'_{n\alpha} \subseteq F'_{n+1,\,\alpha}$. Мы докажем больше, а именно:

$$\text{Зв}_{n+1} F'_{n\alpha} \subseteq F'_{n+1,\,\alpha}. \tag{2}$$

Пусть $x \in \text{Зв}_{n+1} F'_{n\alpha}$. Это значит, что существует такое $U_\beta^{n+1} \in \gamma_{n+1}$, что $x \in U_\beta^{n+1}$ и $U_\beta^{n+1} \cap F'_{n\alpha} \neq \Lambda$. Отсюда надо вывести, что

$$\text{Зв}_{n+1} x \subseteq U_\alpha.$$

Но покрытие γ_{n+1} звездно вписано в γ_n; значит, существует такое $U_\mu^n \in \gamma_n$, что

$$\text{Зв}_{n+1} x \subseteq U_\mu^n \tag{3}$$

(и, очевидно, $U_\mu^n \cap F'_{n\alpha} \neq \Lambda$). Из последнего неравенства вытекает, что U_μ^n не содержится в $X \setminus F'_{n\alpha} = \text{Зв}_n(X \setminus U_\alpha)$, т. е. $U_\mu^n \cap$ $\cap (X \setminus U_\alpha) = \Lambda$, а это значит, что $U_\mu^n \subseteq U_\alpha$. Отсюда и из (3) следует, что $x \in F'_{n+1,\,\alpha}$. Формула (2) доказана.

Так как звезда всякого множества $M \subseteq X$ относительно открытого покрытия есть открытое в X множество, то из (1) следует, что все $F'_{n\alpha}$ замкнуты, а из (2) вытекает, что множество

$$V_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} F'_{n\alpha}$$

открыто в X.

Докажем теперь, что при любом заданном n семейство $\mathfrak{F} = \{F'_{n\alpha}\}$ есть замкнутое покрытие пространства X. В самом деле, пусть $x \in X$ произвольно. Так как γ_n звездно вписано в γ, то $\text{Зв}_n x$ содержится в некотором U_α, а тогда $x \in F'_{n\alpha} \in \mathfrak{F}$, что и требовалось доказать.

Положим (имея в виду, что индексы α суть порядковые числа)

$$F_{n\alpha} = F'_{n\alpha} \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta. \tag{4}$$

Так как множества V_β открыты, то $F_{n\alpha}$ замкнуто. Из определения множества V_β следует, далее, что тождество (4) можно записать и так:

$$F_{n\alpha} = F'_{n\alpha} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \bigcup_{k=1}^{\infty} F'_{k\beta}. \tag{4'}$$

Докажем, что совокупность $\mathfrak{F}_0$ всех $F_{n\alpha}$ (где n пробегает все натуральные числа, а α для каждого n — все порядковые числа $< \omega_\tau(n)$) есть покрытие пространства X, очевидно, замкнутое.

Берем произвольно точку $x \in X$. Обозначим через α наименьшее порядковое число, $\alpha < \omega_\tau(n)$, удовлетворяющее условию: существует такое натуральное n, что $x \in F'_{n\alpha}$; такое α существует, так как $\mathfrak{F}' = \{F'_{n\alpha}\}$ есть покрытие, значит (при всяком n точка x содержится в некотором $F'_{n\alpha}$), мы ищем такое n, чтобы α было при этом наименьшим.

Итак, $x \in F'_{n\alpha}$, но $x \overline{\in} F'_{k\beta}$, каково бы ни было натуральное k и $\beta < \alpha$. Но это и значит, что $x \in F'_{n\alpha} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \bigcup_{k} F'_{k\beta}$, т. е. что $x \in F_{n\alpha}$.

в) Не существует такого $U_\eta^{n+1} \in \gamma_{n+1}$, которое одновременно пересекалось бы с каким-либо $F_{n\alpha}$ и $F_{n\beta}$ при $\alpha \neq \beta$.

Пусть $\alpha > \beta$. Очевидно, достаточно доказать, что

$$F_{n\alpha} \cap \text{Зв}_{n+1} F_{n\beta} = \Lambda.$$

Но (см. (2) и (4))

$$\text{Зв}_{n+1} F_{n\beta} \subseteq \text{Зв}_{n+1} F'_{n\beta} \subseteq F'_{n+1,\ \beta} \subseteq V_\beta \subseteq X \setminus F_{n\alpha},$$

откуда утверждение следует.

Из только что доказанного выводим, далее, утверждение:

г) Не существует $U_v^{n+3} \in \gamma_{n+3}$, одновременно пересекающегося с $\text{Зв}_{n+3} F_{n\alpha}$ и $\text{Зв}_{n+3} F_{n\beta}$ при $\beta \neq \alpha$.

Пусть существует U_v^{n+3}, пересекающееся с $\text{Зв}_{n+3} F_{n\alpha}$ и $\text{Зв}_{n+3} F_{n\beta}$. Тогда существуют такие $U_{\alpha'}^{n+3}$ и $U_{\beta'}^{n+3}$, что

$$F_{n\alpha} \cap U_{\alpha'}^{n+3} \neq \Lambda, \qquad F_{n\beta} \cap U_{\beta'}^{n+3} \neq \Lambda,$$
$$U_v^{n+3} \cap U_{\alpha'}^{n+3} \neq \Lambda, \qquad U_v^{n+3} \cap U_{\beta'}^{n+3} \neq \Lambda.$$

Следовательно, объединение $U_v^{n+3} \cup U_{\alpha'}^{n+3}$ содержится в некотором U_λ^{n+2}, а объединение $U_v^{n+3} \cup U_{\beta'}^{n+3}$ — в некотором U_μ^{n+2}. Но тогда $U_\lambda^{n+2} \cap U_\mu^{n+2} = \Lambda$, а поэтому $U_\lambda^{n+2} \cup U_\mu^{n+2}$ содержится в некотором U_η^{n+1}, которое пересекается как с $F_{n\alpha}$, так и с $F_{n\beta}$, вопреки доказанному в пункте в).

д) Положим $G_{n\alpha} = \text{Зв}_{n+3} F_{n\alpha}$. Из доказанного следует, что семейство $\mathfrak{G} = \{G_{n\alpha}\}$ есть дискретная система множеств. Следовательно, дискретной будет и система $\mathfrak{F} = \{F_{n\alpha}\}$.

Положим, наконец,

$$F_n = \bigcup_\alpha F_{n\alpha}, \quad G_n = \bigcup_\alpha G_{n\alpha}.$$

Очевидно, $F_n \subseteq G_n$.

Как тело дискретной системы замкнутых множеств, множество F_n замкнуто.

Далее, так как семейство $\mathfrak{F}_0 = \{F_{n\alpha}\}$ есть замкнутое покрытие пространства X, то замкнутым покрытием этого пространства является и семейство

$$\mathfrak{F} = \{F_n\}.$$

Тем более семейство $\mathfrak{G} = \{G_n\}$ есть открытое покрытие пространства X. При этом $F_n \subseteq G_n$, так что находимся в условиях леммы 1. Из нее следует существование локально конечного покрытия $\mathfrak{H} = \{H_n\}$ пространства X, комбинаторно вписанного в $\mathfrak{G}$, так что $H_n \subseteq G_n$, $\bigcup_n H_n = X$.

Положим

$$H_{n\alpha} = H_n \cap G_{n\alpha}$$

и докажем, что семейство γ' всех множеств $H_{n\alpha}$ (при любых n и α) есть покрытие пространства X. В самом деле, для множества $H_n \subseteq G_n$ имеем

$$H_n = \bigcup_\alpha (H_n \cap G_{n\alpha}), \text{ т. е. } H_n = \bigcup_\alpha H_{n\alpha},$$

значит,

$$\bigcup_{n,\,\alpha} H_{n\alpha} = \bigcup_n \bigcup_\alpha H_{n\alpha} = \bigcup_n H_n = X.$$

Далее, согласно формуле (2) имеем

$$H_{n\alpha} \subseteq G_{n\alpha} = \text{Зв}_{n+3} F_{n\alpha} \subseteq F'_{n+2,\,\alpha},$$

поэтому покрытие γ' вписано в $\gamma = \{U_\alpha\}$.

Остается доказать, что покрытие γ' локально конечно. Пусть $x \in X$. Так как $\mathfrak{H} = \{H_n\}$ локально конечно, то существует окрестность Ox точки x, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств H_n (т. е. не пересекающаяся ни с одним H_n, номер n которого больше некоторого числа n_0). Так как система $\mathfrak{G}$ дискретна, то для каждого $n \leqslant n_0$ существует окрестность $O_n x \subseteq Ox$, пересекающаяся не более чем с одним $G_{n\alpha}$. Тогда окрестность $O'x = \bigcap_{n=1}^{n_0} O_n x$ не пересекается ни с каким $H_{n\alpha} \subseteq H_n$ при $n > n_0$, а при $n \leqslant n_0$ может пересекаться не более чем с одним $H_{n\alpha} \subseteq G_{n\alpha}$, значит, всего может пересекаться лишь с конечным числом элементов покрытия γ'.

Паракомпактность пространства и вместе с нею вся теорема 30 доказаны.

Из теоремы А. Стоуна вытекает

Теорема 31. *Всякое метрическое пространство паракомпактно.*

Доказательство. Пусть X — метрическое пространство. Будем считать $\operatorname{diam} X < \infty$ *). Требуется доказать, что ко всякому открытому покрытию $\gamma = \{\Gamma_\alpha\}$ имеется звездно вписанное в него открытое покрытие γ'. Относительно индексов α, которыми занумерованы элементы покрытия γ, вновь предполагаем, что они являются порядковыми числами (пробегающими все значения, начиная с 0 до наименьшего порядкового числа ω_τ, мощность которого равна мощности покрытия γ, $0 \leqslant \alpha < \omega_\tau$).

Для каждой точки $x \in X$ обозначаем через $\alpha(x)$ наименьшее такое порядковое число α, что $x \in \Gamma_\alpha$. Тогда через $\varepsilon(x)$ обозначаем число

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{4}\rho(x, X \setminus \Gamma_{\alpha(x)})$$

и полагаем

$$U(x) = O(x, \varepsilon(x)). \tag{5}$$

Замечание. Если для точки $y \in X$ имеем $\rho(x, y) < 4\varepsilon(x)$, то

$$\rho(x, y) < \rho(x, X \setminus \Gamma_{\alpha(x)})$$

и, значит, $y \in \Gamma_{\alpha(x)}$.

Этим замечанием мы существенно воспользуемся в конце нашего доказательства; пока же заметим лишь, что из него следует включение

$$U(x) = O(x, \varepsilon(x)) \subseteq O(x, 4\varepsilon(x)) \subseteq \Gamma_{\alpha(x)}.$$

Множество всех $U(x)$, взятых для всех точек $x \in X$, образует покрытие

$$\gamma' = \{U(x)\}, \quad x \in X,$$

пространства X.

---

*) Всякое метрическое пространство (X, ρ) гомеоморфно метрическому пространству (X, ρ') диаметра < 1.

Достаточно для любых двух точек $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ положить

$$\rho'(x_1, x_2) = \frac{\rho(x_1, x_2)}{1 - \rho(x_1, x_2)}.$$

Пространства (X, ρ) и (X, ρ') гомеоморфны между собой (это следует из того, что всякая последовательность точек $\{x_k\}$, сходящаяся к x_0 в одной из двух метрик ρ, ρ', сходится к этой точке и в другой метрике).

Докажем, что γ' есть искомое покрытие, звездно вписанное в γ.

Берем произвольную точку $a \in X$; полагаем

$$E_a = \{x\colon\ U(x) \ni a\} = \{x\colon\ \varepsilon(x) > \rho(x, a)\}. \tag{6}$$

Положим

$$d(a) = \sup_{x \in E_a} \varepsilon(x). \tag{7}$$

Очевидно, $d(a)$ есть положительное число (конечное в силу сделанного предположения о конечности диаметра пространства X).

Берем точку $b \in E_a$ под условием $\varepsilon(b) > \frac{2}{3} d(a)$, т. е. под условием

$$d(a) < \frac{3}{2} \varepsilon(b). \tag{8}$$

Наша цель достигнута, если мы докажем, что $\text{Зв}_{\gamma'}(a)$, т. е. множество $\bigcup\limits_{U(x) \ni a} U(x)$, содержится в элементе $\Gamma_{\alpha(b)}$ покрытия γ.

Для этого в свою очередь достаточно доказать, что из $U(x) \ni a$, т. е. из $x \in E_a$, следует $U(x) \subseteq \Gamma_\alpha(b)$.

Итак, пусть $x \in E_a$. Это значит, что

$$\varepsilon(x) > \rho(x, a). \tag{9}$$

Требуется доказать, что тогда для любой точки $y \in U(x)$ имеем $y \in \Gamma_{\alpha(b)}$. Но из сделанного выше замечания следует, что для этого в свою очередь достаточно доказать, что

$$\rho(b, y) < 4\varepsilon(b).$$

Итак, нам даны: точка $a \in X$, точка $b \in E_a$ и, значит, $\varepsilon(b) > \rho(b, a)$ (по формуле (6)), точка $x \in E_a$ и, значит, $\rho(x, a) < \varepsilon(x)$, точка $y \in U(x)$ и, значит, $\rho(x, \rho) < \varepsilon(x)$. Вычисляем в этих условиях

$$\rho(y, b) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, a) + \rho(a, b) < \varepsilon(x) + \varepsilon(x) + \varepsilon(b). \tag{10}$$

Но $x \in E_a$, поэтому из (7) и (8) следует

$$\varepsilon(x) \leqslant d(a) < \frac{3}{2} \varepsilon(b).$$

Подставляя это в последнюю часть неравенства (10), получаем

$$\rho(y, b) < \frac{3}{2} \varepsilon(b) + \frac{3}{2} \varepsilon(b) + \varepsilon(b) = 4\varepsilon(b),$$

что и требовалось доказать.

§ 12. Локально бикомпактные пространства

1. Определение 10. Пространство X называется *локально бикомпактным*, если каждая точка x имеет окрестность U, замыкание которой $[U]$ бикомпактно.

Теорема 32. *Всякое открытое множество* Γ *бикомпакта* X *локально бикомпактно.*

В самом деле, вследствие нормальности бикомпакта X каждая точка $x \in \Gamma$ имеет окрестность U, замыкание $[U]$ которой лежит в Γ и, как замкнутое множество в бикомпакте X, само есть бикомпакт.

Докажем предложение, обратное теореме 32, даже в значительно усиленном виде:

Теорема 33. *Ко всякому локально бикомпактному хаусдорфову пространству* X *(и только к такому пространству) можно присоединить одну точку* ξ *так, что получится бикомпакт* $X' = X \cup \xi$ *(причем топология в* X*, как в множестве, лежащем в бикомпакте* X'*, будет совпадать с топологией, a priori данной в* X*); при этом топология в* X' *однозначно определена топологией в* X *и требованием, чтобы* X' *было бикомпактом.*

В самом деле, пусть $X' = X \cup \xi$ есть бикомпакт. Отсюда уже следует, что X (как открытое множество в бикомпакте X') есть локально бикомпактное пространство. Далее, все те и только те из множеств, лежащих в X, открыты в X', которые открыты в X (иначе топология, данная в X a priori, не совпадала бы с топологией, полученной из X'). Если Γ' есть открытое множество в X', содержащее точку ξ, то $\Gamma' = \xi \cup \Gamma$, где Γ открыто в X, причем $\Phi = X \setminus \Gamma = X' \setminus \Gamma'$, как замкнутое множество в бикомпакте X', само бикомпактно. Обратно, всякое множество вида $\Gamma' = \Gamma \cup \xi$, где $\Phi = X \setminus \Gamma$ есть бикомпакт, открыто в X', так как его дополнение $X' \setminus \Gamma' = X \setminus \Gamma = \Phi$, будучи бикомпактом, замкнуто в X.

Итак, если существует бикомпакт $X' = X \cup \xi$, содержащий данное хаусдорфово пространство X, то это возможно во всяком случае лишь тогда, когда X локально бикомпактно, причем топология в X' однозначно определена тем, что открытые множества в X', не содержащие точку ξ, суть все открытые множества в X и только они, а открытые множества в X', содержащие точку ξ, суть не что иное, как множества вида $\xi \cup \Gamma$, где $\Gamma = X \setminus \Phi$ и $\Phi \subseteq X$ есть бикомпакт. Докажем, что в том случае, когда X — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, пространство X' с только что описанной топологией действительно есть бикомпакт. Прежде всего, легко проверяется, что в X' выполнены аксиомы топологического пространства. Докажем, далее, что хаусдорфова аксиома отделимости также выполнена в пространстве X'. Это ясно для любых двух точек x и x', лежащих в X; но для ξ и любой точки $x \in X$ также можно найти непересекающиеся окрестности: для этого достаточно взять $U(x)$ так, чтобы $\Phi=[U(x)]$ было бикомпактно, тогда окрестности $U(x)$ и $U(\xi)=\xi\cup(X\setminus\Phi)$ не пересекаются. Наконец, X' бикомпактно. В самом деле, пусть Σ — система открытых в X' множеств Γ_α, покрывающих все X. Среди множеств Γ_α имеется некоторое $\Gamma_0=U(\xi)=\xi\cup(X\setminus\Phi)$. Остальные множества Γ_α, $\alpha\neq 0$, во всяком случае покрывают бикомпакт Φ; среди них можно выбрать конечное число множеств $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, покрывающих Φ. Множества $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ покрывают все пространство X', чем бикомпактность этого пространства доказана.

Можно вывести бикомпактность пространства X' и при помощи свойства (A) из теоремы 2 § 1. Пусть M — произвольное множество какой-либо бесконечной мощности m. Если существует бикомпакт $\Phi\subseteq X$, пересекающийся с множеством M по множеству мощности m, то в Φ имеется точка полного накопления множества M. Если же для любого бикомпакта $\Phi\subset X$ множество $M\cap\Phi$ имеет мощность $< m$, то это означает, что множество $M\cap(X'\setminus\Phi)$, т. е. множество $M\cap U(\xi)$, имеет мощность m при любом выборе окрестности $U(\xi)$. Но тогда ξ есть точка полного накопления множества M. Итак, пространство X' обладает свойством (A) и, следовательно бикомпактно.

Теорема 33 доказана*).

В заключение покажем, что в теоремах 32, 33 предположение, что пространство X' хаусдорфово, существенно. В самом деле, имеет место

Теорема 34. *Всякое T_1-пространство (значит, и подавно всякое T_2-пространство) X', содержащее бесконечное число точек, может быть присоединением одной точки ξ дополнено до бикомпактного T_1-пространства $X'=X\cup\xi$, в котором ξ не есть изолированная точка.*

Доказательство. Берем произвольный элемент ξ и вводим в $X'=X\cup\xi$ топологию, объявляя открытыми в X' все множества, открытые в X, и все множества вида $\xi\cup(X\setminus K)$, где K — произвольное множество, состоящее из конечного числа точек пространства X. Легко проверить, что X' есть T_1-пространство. Так как любая окрестность точки ξ содержит все точки пространства X', кроме, быть может, некоторого конечного их числа, то ξ есть точка полного накопления для всякого бесконечного множества $M\subseteq X'$, что и требовалось доказать.

2. Паракомпактные локально бикомпактные пространства

Лемма 1. *Всякое открытое локально конечное покрытие произвольного бикомпактного пространства конечно.*

Доказательство предоставляется читателю.

Из леммы 1 непосредственно вытекает

Лемма 2. *Пусть X — локально бикомпактное пространство и $\omega=\{O_\alpha\}$ — такое открытое локально конечное покрытие про-*

---

*) Всякий бикомпакт X и подавно является локально бикомпактным пространством. В этом случае пространство $X'=X\cup\xi$ содержит точку ξ в качестве изолированной точки, и теорема 33, оставаясь верной, становится тривиальной и излишней.

странства X, что замыкание $[O_\alpha]$ всякого его элемента бикомпактно. Тогда покрытие ω звездно конечно.

Предложение 1. *Всякое паракомпактное локально бикомпактное пространство X сильно паракомпактно.*

Доказательство. В произвольное открытое покрытие ω пространства X вписываем открытое покрытие ω_1, замыкания элементов которого бикомпактны. В покрытие ω_1 вписываем открытое локально конечное покрытие ω_2, которое согласно лемме 2 будет звездно конечным, что и требовалось доказать.

Итак, всякое локально бикомпактное паракомпактное пространство X имеет открытое звездно конечное покрытие ω, замыкания элементов которого бикомпактны. Из замечания о звездно счетных системах открытых множеств (см. п. 1 § 11) вытекает, что пространство X является суммой дизъюнктных открытых множеств Γ_α—тел компонент сцепленности покрытия ω. Кроме того, из предложения 1 § 11 вытекает, что каждая компонента сцепленности покрытия ω не более чем счетна. Таким образом, имеет место

Предложение 2. *Каждое локально бикомпактное паракомпактное пространство X может быть представлено в виде $X=\bigcup\limits_\alpha \Gamma_\alpha$, где множества Γ_α дизъюнктны и открыты в X, причем каждое Γ_α есть сумма счетного числа открытых множеств Γ_{α_i}, замыкания которых бикомпактны.*

Доказательство следующего простого утверждения может быть предоставлено читателю.

Предложение 3. *Всякое локально бикомпактное пространство, являющееся суммой счетного числа бикомпактов, финально компактно.*

Применим теперь предложения 1 и 3 к доказательству следующего утверждения:

Теорема 35. *Всякое регулярное финально компактное пространство X сильно паракомпактно.*

Сначала докажем следующую вспомогательную лемму:

Лемма 3. *Во всякой окрестности U финально компактного подпространства Y нормального пространства X содержится окрестность V, являющаяся F_σ-множеством.*

Доказательство. Для всякой точки $y\in Y$ существует окрестность Oy, замыкание которой $[Oy]$ (в пространстве X) содержится в U. Из семейства $\{Oy\colon\ y\in Y\}$ можно выделить счетное подсемейство $\{Oy_1, \ldots, Oy_k, \ldots\}$, покрывающее множество Y.

Согласно предложению 1 § 8 гл. 4 для всякого $k=1, 2, \ldots$ существует F_σ-окрестность V_k множества $[Oy_k]$, содержащаяся в U.

Множество $V=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_k$, являющееся F_σ-множеством, как сумма счетного числа F_σ-множеств, и будет искомой окрестностью множества Y. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 35. Пусть $\omega=\{O_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Согласно следствию из предложения 6 § 11 пространство X нормально и, значит, вполне регулярно. По второй теореме Тихонова пространство X можно считать подмножеством некоторого бикомпакта B. Для всякого элемента O_α покрытия ω существует такое открытое подмножество U_α бикомпакта B, что $O_\alpha = X \cap U_\alpha$. Согласно лемме 3 существует такое открытое в бикомпакте B F_σ-множество V, что $X \subseteq V \subseteq U = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$. По предложению 3 пространство V финально компактно, а по предложению 6 из § 11 паракомпактно. Семейство $\{V_\alpha\}$, где $V_\alpha = U_\alpha \cap V$, является открытым покрытием пространства V. Согласно предложению 1 существует звездно конечное покрытие $\gamma=\{\Gamma\}$ пространства V, вписанное в покрытие $\{V_\alpha\}$. Семейство γ_0, образованное пересечениями элементов Γ покрытия γ с множеством X, является звездно конечным открытым покрытием пространства X, вписанным в исходное покрытие ω. Теорема 35 доказана.

3. Метризация локально бикомпактных пространств.

Предложение 4. *Всякое локально бикомпактное хаусдорфово пространство со счетной базой метризуемо.*

Утверждение следует из регулярности всякого локально бикомпактного хаусдорфова пространства и из первой метризационной теоремы Урысона.

Предложение 5. *Если топологическое пространство X есть сумма своих дизъюнктных метризуемых открытых подпространств: $X=\bigcup\limits_{\alpha}\Gamma_\alpha$, где каждое Γ_α открыто, следовательно, в данных условиях и замкнуто в X и метризуемо, то и пространство X метризуемо.*

В каждое подпространство Γ_α можно ввести такую метрику ρ_α, что диаметр $\operatorname{diam}\Gamma_\alpha < 1$. Введем теперь во все пространство X метрику ρ следующим образом.

Если две точки x и x' пространства X принадлежат одному какому-нибудь Γ_α, то полагаем $\rho(x, x')=\rho_\alpha(x, x')$. Если же точки x и x' принадлежат различным множествам: $x\in\Gamma_\alpha$, соответственно $x'\in\Gamma_{\alpha'}$, то полагаем $\rho(x, x')=1$. Предложение 5 доказано.

Доказана и одна половина (достаточность) следующего метризационного критерия:

Для метризуемости локально бикомпактного хаусдорфова пространства X необходимо и достаточно, чтобы X являлось дизъюнктным объединением любого (конечного или бесконечного) числа $r \geqslant 1$ своих открытых подпространств, каждое из которых имеет счетную базу.

Для доказательства этой теоремы остается показать, что каждое метризуемое локально бикомпактное пространство является объединением некоторого дизъюнктного семейства своих открытых подпространств со счетной базой. Согласно предложению 2 каждое локально бикомпактное паракомпактное пространство X может быть представлено в виде $X = \bigcup\limits_{\alpha} \Gamma_\alpha$, где множества Γ_α дизъюнктны и все открыты в X, причем для каждого Γ_α имеем $\Gamma_\alpha = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Gamma_{\alpha_i}$, а каждое Γ_{α_i} есть открытое ядро бикомпакта $[\Gamma_{\alpha_i}]$. Пусть теперь X не только паракомпактно, но и метризуемо. Тогда каждый бикомпакт $[\Gamma_{\alpha_i}]$ метризуем и, следовательно, имеет счетную базу. Счетную базу $\mathfrak{B}_{\alpha_i}$ имеет и каждое открытое подпространство Γ_{α_i} пространства Γ_α, тогда $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}_{\alpha_i}$ есть искомая счетная база пространства Γ_α, что и требовалось доказать.

§ 13. Метризационные теоремы Александрова — Урысона и Нагата — Смирнова

Метризационная теорема Нагата — Смирнова. *Для того чтобы топологическое пространство было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было регулярно и обладало σ-локально конечной базой, т. е. базой, являющейся объединением счетного числа локально конечных семейств открытых множеств.*

Так как все метризуемые пространства регулярны, то для доказательства необходимости условия Нагата — Смирнова надо лишь построить в произвольном метрическом пространстве X σ-локально конечную базу. Это делается следующим образом. Обозначим через γ_n покрытие пространства X, состоящее из всех сферических окрестностей радиуса $1/n$. Так как пространство X по теореме 31 § 11 паракомпактно, то существует локально конечное открытое покрытие γ_n' пространства X, вписанное в покрытие γ_n. Система множеств $\mathfrak{B} = \bigcup \gamma_n'$, очевидно, σ-локально конечна и является базой пространства X, что нам и требовалось.

Переходим к доказательству второй части теоремы Нагата—Смирнова, т. е. к доказательству метризуемости всякого регулярного пространства X, имеющего базу $\mathfrak{B}=\bigcup\gamma_n$, являющуюся объединением счетного числа локально конечных семейств открытых множеств $\gamma_n=\{\Gamma_{n\alpha}\}$. Докажем прежде всего, что в этих условиях пространство X нормально. Пусть A и B — два дизъюнктных замкнутых в X множества. Так как пространство X регулярно, то для каждой точки $x\in A\subset X\setminus B$ существует принадлежащая базе $\mathfrak{B}$ окрестность $\Gamma_{n(x)\alpha(x)}$ точки x с замыканием, лежащим в $X\setminus B$. Точно так же для каждой точки $y\in B$ существует такая окрестность $\Gamma_{n(y)\alpha(y)}$, что $[\Gamma_{n(y)\alpha(y)}]\subseteq X\setminus A$. Для каждого натурального числа n обозначим через G_n сумму $\bigcup\limits_{x\in A,\, n(x)=n}\Gamma_{n(x)\alpha(x)}$, взятую по всем $x\in A$, для которых $n(x)=n$. Точно так же положим $H_n=\bigcup\limits_{n(y)=n,\, y\in B}\Gamma_{n(y),\alpha(y)}$. Очевидно, $A\subseteq\bigcup\limits_n G_n$, $B\subseteq\bigcup\limits_n H_n$. Так как при любом n система γ_n локально конечна и, значит, консервативна, то

$$[G_n]=\bigcup_{x\in A}[\Gamma_{n\alpha(x)}]\subseteq X\setminus B,\quad [H_n]=\bigcup_{y\in B}[\Gamma_{n\alpha(y)}]\subseteq X\setminus A.$$

Положим, далее,

$$U_n=G_n\setminus\bigcup_{k\leqslant n}[H_k],\quad V_n=H_n\setminus\bigcup_{k\leqslant n}[G_k],$$

$$U=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n,\quad V=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n,$$

так что $A\subseteq U$, $B\subseteq V$. При любых m, n имеем $U_m\cap V_n=\Lambda$. В самом деле, пусть, например, $m\geqslant n$. Тогда $U_m\cap V_n\subseteq X\setminus[H]_n\subseteq X\setminus[V_n]$, т. е. $U_m\cap V_n=\Lambda$. Следовательно, $U\cap V=\Lambda$, т. е. U и V являются дизъюнктными окрестностями соответственно множеств A и B. Нормальность пространства X доказана.

Докажем совершенную нормальность пространства X, т. е. докажем, что каждое открытое в X множество G есть объединение счетного числа замкнутых множеств. Находим для каждой точки $x\in G$ окрестность $\Gamma_{n(x)\alpha(x)}$ под условием $[\Gamma_{n(x)\alpha(x)}]\subseteq G$ и полагаем $\Gamma_n=\bigcup\Gamma_{n(x)\alpha(x)}$ (сумма по всем $x\in G$, для которых $n(x)=n$). В силу консервативности семейства γ_n имеем $[\Gamma_n]=$

$= \bigcup\limits_{x\in G} [\Gamma_{n\,\alpha(x)}]$, а так как всякая точка $x \in G$ лежит в некотором Γ_n, то $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\Gamma_n]$, что и требовалось доказать.

Переходим к построению топологического отображения пространства X, имеющего σ-локально конечную базу $\mathfrak{B} = \{O_\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}\}$ и вес τ, в обобщенное гильбертово пространство H^τ. Без ограничения общности можно предположить, что мощность τ имеет база $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n$, где $\gamma_n = \{O_\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}_n\}$ — локально конечные семейства.

По лемме Веденисова (§ 8 гл. 4) для каждого элемента O_α системы γ_i существует непрерывная функция f_α: $X \to [0; 1]$, равная нулю в точках множества $X \setminus O_\alpha$ и только в них. Из локальной конечности семейства γ_i следует, что произвольная точка $x \in X$ имеет окрестность Ox, пересекающуюся лишь с конечным числом множеств — элементов системы γ_i при данном произвольно фиксированном натуральном i. Значит, при данном i существует не более конечного числа индексов $\alpha \in \mathfrak{A}_i$, для которых функция f_α может принимать в какой-либо точке x окрестности Ox отличное от нуля значение. Поэтому на X для каждого натурального числа i определена и непрерывна положительная функция

$$f_i(x) = 1 + \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} f_\alpha(x).$$

Следовательно, для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}_i$ на X определена и непрерывна функция

$$g_\alpha(x) = \frac{f_\alpha(x)}{f_i(x)}.$$

Очевидно,

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} [g_\alpha(x)]^2 < 1 \tag{1}$$

и

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} [g_\alpha(x) - g_\alpha(y)]^2 \leqslant \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} [g_\alpha(x)]^2 + \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} [g_\alpha(y)]^2 \tag{2}$$

для любых x и y из X.

Для $\alpha \in \mathfrak{A}_i$ положим $t_\alpha = \frac{1}{2^{i/2}} g_\alpha(x)$, $x \in X$. Тогда

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} [t_\alpha(x)]^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} [g_\alpha(x)]^2 < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

Следовательно, набор $hx = \{t_\alpha(x)\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, можно рассматривать как точку обобщенного гильбертова пространства H^τ (см. § 6 гл. 4).

Покажем, что полученное отображение h: $X \to H^\tau$ является топологическим.

Если x и x' — различные точки пространства X, то существует такой элемент O_α базы $\mathfrak{B}$, что $x \in O_\alpha$ и $x' \in X \setminus O_\alpha$. Тогда $t_\alpha(x) > 0$, $t_\alpha(x') = 0$, следовательно, $h(x) \neq h(x')$. Таким образом, отображение h взаимно однозначно.

Докажем, что отображение h пространства X на $Y = hX \subseteq H^\tau$ непрерывно. Берем произвольную точку $x_0 \in X$, $y_0 = fx_0$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Берем такое натуральное число n, что $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Локальная конечность семейств γ_i позволяет выбрать окрестность Ux_0 точки x_0, пересекающуюся не более чем с конечным числом элементов каждого из семейств γ_i при $i \leqslant n$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ — все те индексы из $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{B}_n$, для которых пересечения $Ux_0 \cap O_\alpha$ непусты. Из непрерывности функций t_α вытекает существование такой окрестности $Vx_0 \subseteq Ux_0$, что

$$|t_{\alpha_j}(x_0) - t_{\alpha_j}(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2s}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, s, \quad y \in Vx_0.$$

Так как пересечения $Ux_0 \cap O_\alpha$ пусты для отличных от $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ индексов $\alpha \in \mathfrak{B}_n$, то для этих индексов имеем равенства $t_\alpha(x_0) = t_\alpha(y) = 0$, $y \in Vx_0$. Следовательно,

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{B}_n} [t_\alpha(x_0) - t_\alpha(y)]^2 < s \cdot \frac{\varepsilon^2}{2s} = \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{3}$$

В силу выбора числа n и оценок (1) и (2) имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}_n} [t_\alpha(x_0) - t_\alpha(y)]^2 =$$

$$= \sum_{i \geqslant n} \frac{1}{2^i} \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_i} [g_\alpha(x_0) - g_\alpha(y)]^2 \leqslant \sum_{i > n} \frac{1}{2^i} 2 = 2 \cdot \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{4}$$

Из неравенств (3) и (4) для любой точки $y \in Vx_0$ вытекает неравенство

$$\rho(hx_0, hy) = \Big(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} [t_\alpha(x_0) - t_\alpha(y)]^2\Big)^{1/2} < \varepsilon,$$

доказывающее непрерывность отображения h.

Докажем непрерывность обратного отображения h^{-1}: $hX \to X$. Берем произвольную точку $y = hx \in Y$ и произвольную окрестность Ox точки $x = h^{-1}y$. Найдется такой элемент O_α базы $\mathfrak{B}$, что $x \in O_\alpha \subseteq Ox$. Если $x' = h'y'$, $y' \in hX$ и $\rho(y, y') < \varepsilon < t_\alpha(x)$, то и подавно $|t_\alpha(x) - t_\alpha(x')| < \varepsilon$, следовательно, $t_\alpha x' > 0$, т. е. $x' \in O_\alpha$. Итак, $h^{-1}y \in Ox_0$. Непрерывность отображения h^{-1}, а с нею и вся теорема Нагата—Смирнова доказаны.

Из только что доказанной теоремы легко вытекает доказанная для частного случая $\tau = \aleph_0$ еще Урысоном

Теорема Даукера. *Обобщенное гильбертово пространство H^τ содержит топологический образ любого метризуемого пространства X веса τ.*

Для доказательства достаточно взять в X σ-локально конечную базу мощности τ и повторить рассуждения второй части доказательства теоремы Нагата—Смирнова (достаточность).

Понятие паракомпактности позволяет очень просто сформулировать исторически первый общий метризационный критерий (Александров и Урысон), а именно:

Хаусдорфово пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда оно паракомпактно и имеет счетную измельчающуюся систему открытых покрытий.

Доказательство. 1°. Метрическое пространство является паракомпактом. Для получения в нем счетной измельчающейся системы открытых покрытий достаточно для любого натурального числа n взять покрытие, состоящее из всех сферических окрестностей радиуса $1/n$.

2°. Пусть, обратно, в паракомпакте X дана счетная измельчающаяся система открытых покрытий $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots$ Вписывая в каждое γ_n локально конечное покрытие γ_n', получим измельчающуюся счетную систему локально конечных покрытий γ_n'. Так как покрытия γ_n' образуют измельчающуюся систему, то их объединение $\gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n'$ есть база пространства X, а так как покрытия γ_n' локально конечны, а число их счетно, то база γ является σ-локально конечной. По теореме Нагата—Смирнова пространство X метризуемо, что и требовалось доказать.

Прибавление к главе шестой

Теорема о мощности бикомпактов с первой аксиомой счетности

Теорема 1 (Архангельский [2]). *Всякий бикомпакт X, удовлетворяющий первой аксиоме счетности, имеет мощность $\leqslant \mathfrak{c}$.*

Доказательство*). Обозначим через $\mathfrak{B}_x = \{O_x\}$ счетную базу окрестностей произвольной точки $x \in X$. Для каждого поряд-

*) Приводимый здесь вариант доказательства принадлежит польскому математику Р. Полю.

кового числа $\xi < \omega_1$ построим замкнутое множество $F_\xi \subset X$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1°. $F_\alpha \subseteqq F_\xi$ при $\alpha < \xi$.

2°. Если γ — конечная подсистема системы $\mathfrak{A}_\xi = \bigcup \left\{ \mathfrak{B}_x : x \in \bigcup\limits_{\alpha<\xi} F_\alpha \right\}$ и γ не является покрытием пространства X, то γ не покрывает и F_ξ.

3°. $|F_\xi| \leqslant \mathfrak{c}$ *) для любого $\xi < \omega_1$.

Построение множеств F_ξ будем вести по индукции. Для $\xi = 0$ положим $F_0 = p$, где p — некоторая точка бикомпакта X. Предположим, что нами уже построены множества F_α для $\alpha < \xi$. В этом предположении мы можем утверждать, что система множеств $\mathfrak{A}_\xi$ имеет мощность $\leqslant \mathfrak{c}$. Такую же мощность будет иметь и система $\mathfrak{A}_\xi^* = \left\{ X \diagdown \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_i : O_i \in \mathfrak{A}_\xi \right\}$ дополнений к телам конечных подсистем системы $\mathfrak{A}_\xi$. Следовательно, выбирая из каждого непустого множества системы $\mathfrak{A}_\xi^*$ по точке, мы получим множество E, мощность которого не превосходит $\mathfrak{c}$.

Положим теперь $F_\xi = \left[E \cup \bigcup\limits_{\alpha<\xi} F_\alpha \right]$. Выполнение условий 1° и 2° сразу следует из построения множества F_ξ. Выполнение условия 3° вытекает из следующего утверждения:

Если $Y \subset X$, $|Y| \leqslant \mathfrak{c}$ и X — пространство с первой аксиомой счетности, то $|[Y]_X| \leqslant \mathfrak{c}$.

Переходим к доказательству этого утверждения. Пусть y — точка, лежащая в $[Y]$. Выберем в Y какую-нибудь последовательность $\{y_n\}$, сходящуюся к точке y. Таким образом, мы получаем взаимно однозначное отображение множества $[Y]$ в множество счетных последовательностей множества Y, мощность которого $\leqslant \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (см. формулу (9) на стр. 91). Следовательно, $|[Y]| \leqslant \mathfrak{c}$.

Итак, условие 3° для множества F_ξ выполнено. Продолжая индукцию, мы получаем искомую последовательность замкнутых множеств

$$F_0, F_1, \ldots, F_\xi, \ldots, \quad \xi < \omega_1.$$

Положим $F = \bigcup\limits_{\xi<\omega_1} F_\xi$ и докажем, что множество F замкнуто. В самом деле, пусть $x \in [F]$. Тогда в F существует последовательность точек $\{x_i : x_i \in F_{\xi_i}\}$, сходящаяся к x. Возьмем порядковое число ξ больше всех ξ_i. Тогда в силу условия 1° $x_i \in F_\xi$

*) Здесь, как обычно, $|A|$ обозначает мощность множества A.

для любого i, а так как множество F_ξ замкнуто, то и $x \in F_\xi \subseteq F$ — замкнутость множества F доказана.

Мощность множества F не превосходит мощности континуума, поэтому доказательство теоремы будет закончено, если мы установим равенство $F = X$. Предположим противное, т. е. что существует точка $y \in X \setminus F$. Для любой точки $x \in F$ возьмем окрестность $O_x \in \mathfrak{B}_x$, $y \notin Ox$. Из покрытия $\{Ox\}$ бикомпакта F выделим конечное подпокрытие $Ox_1, \ldots, Ox_k$. Возьмем $\alpha < \omega_1$ так, чтобы $x_i \in F_\alpha$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда для $\xi = \alpha + 1$ имеем

$$Ox_1, \quad \ldots, \quad Ox_k \in \mathfrak{A}_\xi, \quad y \notin UOx_i, \quad F_\xi \subseteq F \subseteq UOx_i$$

—противоречие с условием 2°. Теорема доказана.

Докажем теперь следующее

Предположение 1 (Александров—Урысон [2]). *Всякий бикомпакт X без изолированных точек имеет мощность $\geqslant \mathfrak{c}$.*

Доказательство. Возьмем в X две различные точки x_0 и x_1 и их окрестности O_0, O_1 с непересекающимися замыканиями. Так как бикомпакт X не содержит изолированных точек, то любое непустое открытое в X множество состоит более чем из одной точки. Поэтому в каждом множестве O_0, O_1 мы также можем выбрать по две различных точки x_{i0}, x_{i1}, $i = 1, 2$, и их окрестности O_{i0}, O_{i1}, причем потребуем, чтобы $O_{ij} \subset O_i$ и $[O_{i0}] \cap [O_{i1}] = \Lambda$.

Продолжая по индукции это построение, мы получим для каждой двоичной последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ последовательность открытых множеств

$$O_{i_1} \supset O_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset O_{i_1 \ldots i_n} \supset \ldots$$

Пересечение

$$[O_{i_1}]x \cap [O_{i_1 i_2}]x \cap \ldots \cap [O_{i_1 \ldots i_n}]x \cap \ldots$$

непусто, поскольку X—бикомпакт. Зафиксируем произвольную точку из этого пересечения и поставим ее в соответствие последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$

Итак, мы построили некоторое отображение f множества $\mathfrak{N}$ всех двоичных последовательностей в бикомпакт X. Покажем, что это отображение взаимно однозначно. Пусть $\alpha = (i_1, \ldots$ $\ldots, i_n, \ldots)$ и $\alpha' = (i_1', \ldots, i_n', \ldots)$—две различные двоичные последовательности, т. е. для некоторого n имеем $i_n \neq i_n'$. Но тогда $f\alpha \in [O_{i_1 \ldots i_n}]$, $f\alpha' \in [O_{i_n' \ldots i_n'}]$, а $[O_{i_1 \ldots i_n}] \cap [O_{i_1' \ldots i_n'}] = \Lambda$, следовательно, $f\alpha \neq f\alpha'$. Итак, мы взаимно однозначно отобразили множество $\mathfrak{N}$ мощности $\mathfrak{c}$ в бикомпакт X. Предложение этим доказано.

Предложение 2 (Александров—Урысон [2]). *Всякий несчетный бикомпакт X с первой аксиомой счетности имеет мощность $\geqslant \mathfrak{c}$.*

Доказательство. Согласно предложению 1 достаточно показать, что в X существует непустой бикомпакт без изолированных точек. Обозначим через Y множество всех точек $y \in X$, каждая из которых имеет счетную окрестность. Множество Y открыто в X, и всякое замкнутое в X множество F, лежащее в Y, не более чем счетно. Поэтому замкнутое множество $X \setminus Y$ непусто. Осталось проверить, что в $X \setminus Y$ нет изолированных точек. Предположим, что точка $x \in X \setminus Y$ изолирована в $X \setminus Y$. Возьмем такую локальную базу $\{U_n: n = 1, 2, \ldots\}$ в точке x, что $[U_1] \cap (X \setminus Y) = \{x\}$. Тогда для всякого n замкнутое множество $F_n = [U_1] \setminus U_n$ лежит в Y и, следовательно, не более чем счетно. Поэтому множество $[U_1] = \{x\} \cup \bigcup\limits_n F_n$ также счетно. Но это противоречит тому, что $x \notin Y$. Предложение 2 доказано.

Из теоремы 1 и предложения 2 вытекает

Теорема 2. *Всякий бикомпакт с первой аксиомой счетности либо конечен, либо счетен, либо имеет мощность континуума.*

Прибавление

ПРОЕКЦИОННЫЕ СПЕКТРЫ И АБСОЛЮТ

§ 1. Общее понятие обратного спектра топологических пространств. Абстрактные проекционные спектры

Большое место в разнообразных топологических и тополого-алгебраических исследованиях занимает понятие (обратного) спектра топологических пространств.

Пусть дано направленное множество $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$, элементы которого будем называть индексами. Пусть каждому $\alpha\in\mathfrak{A}$ поставлено в соответствие T_0-пространство X_α и каждой паре индексов α, α', для которых $\alpha'>\alpha$ в направленном множестве $\mathfrak{A}$, соответствует непрерывное отображение $\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}$ пространства $X_{\alpha'}$ на пространство X_α, причем для $\alpha''>\alpha'>\alpha$ имеет место свойство транзитивности $\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha''}=\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\mathfrak{S}_{\alpha'}^{\alpha''}$. Тогда говорим, что дан *обратный спектр* $S=\{X_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ топологических пространств X_α с проекциями $\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}$. Точка $x=\{x_\alpha\}$ топологического произведения $X=\prod\limits_\alpha X_\alpha$ называется *нитью спектра* S, если $x_\alpha=\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}x_{\alpha'}$, как только $\alpha'>\alpha$. Множество всех нитей спектра $S=\{x_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$, рассматриваемое как подпространство топологического произведения $\prod\limits_\alpha X_\alpha$, называется *полным пределом* (*предельным пространством*) спектра S и обозначается через $\bar{S}$. По определению топологии произведения $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ базу в $\bar{S}$ образуют множества вида $\bar{S}\cap\bigcap\limits_{i=1}^{s}\pi_{\alpha_i}^{-1}O_{\alpha_i}$, где множества O_{α_i} открыты в X_{α_i}, а π_{α_i} — проекции произведения $\prod\limits_\alpha X_\alpha$ на сомножитель X_{α_i}. Докажем более сильное

Предложение 1. *Базу в $\bar{S}$ образуют множества вида $\bar{S}\cap\pi_\alpha^{-1}O_\alpha$, где O_α — открытое в X_α множество, $\alpha\in\mathfrak{A}$.*

Действительно, пусть $O=\bar{S}\cap\bigcap\limits_{i=1}^{s}\pi_{\alpha_i}^{-1}O_{\alpha_i}$, где множества O_{α_i} открыты в X_{α_i}. Возьмем $\alpha\geqslant\alpha_i$, $i=1, \ldots, s$. Тогда множество $O_\alpha=\bigcap\limits_{i=1}^{s}(\tilde{\omega}_{\alpha_i}^{\alpha})^{-1}O_{\alpha_i}$ открыто в пространстве X_α и

$$\bar{S}\cap\bigcap_{i=1}^{s}\pi_{\alpha_i}^{-1}O_{\alpha_i}=\bar{S}\cap\bigcap_{i=1}^{s}\pi_{\alpha}^{-1}(\tilde{\omega}_{\alpha_i}^{\alpha})^{-1}O_{\alpha_i}=\bar{S}\cap\pi^{-1}O_\alpha.$$

Предложение доказано.

Нас в этом Прибавлении будут интересовать спектры $S=\{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'}\}$, элементами X_α которых являются так называемые *дискретные* (в широком смысле) топологические пространства, т. е. T_0-пространства, определяемые каким-нибудь данным частично упорядоченным множеством X следующим образом: базу этой топологии образуют так называемые минимальные окрестности точек $x\in X$. Минимальной окрестностью точки $x\in X$ частично упорядоченного множества X называется множество всех точек $x'\in X$, для которых $x'\geqslant x$. Полученная топология удовлетворяет аксиоме T_0 и называется обычной или нормальной. Топологию, двойственную к нормальной, получим, если определим минимальную окрестность точки $x\in X$ как множество тех $x'\in X$, для которых $x'\leqslant x$. Другими словами, двойственная топология в частично упорядоченном множестве X есть нормальная топология в том частично упорядоченном множестве $\overline{X}$, которое получается из X обращением порядка (т. е. $x<x'$ в $\overline{X}$ есть то же, что $x'>x$ в X).

К важнейшим в топологии дискретным пространствам принадлежат симплициальные комплексы *). Под симплициальным геометрическим комплексом понимается любое множество открытых симплексов, лежащих в каком-либо евклидовом или гильбертовом пространстве. Если $t\in K$ и $t'\in K$ — два симплекса, из которых t' есть грань симплекса t, то пишем $t'\leqslant t$. Сам симплекс t считается своей «несобственной» гранью. Этим в мно-

---

*) От читателя предполагается знание того, что такое n-мерный симплекс $T^n=|e_0, e_1, \ldots, e_n|$ (как открытый, так и замкнутый), его остов (т. е. множество всех его вершин $e_0, \ldots, e_n$), его грани $|e_{i_0}, \ldots, e_{i_r}|$ — собственные, если $r<n$; сам симплекс считается своей (единственной) несобственной гранью. См. Александров [11], стр. 355.

Всякая точка замкнутого симплекса, не являющаяся его вершиной, и только такая точка есть середина некоторого отрезка, содержащегося в данном (замкнутом) симплексе. Отсюда следует, что каждый симплекс однозначно определяет свой остов (и, очевидно, однозначно определяется им).

жество K вводится естественный (нормальный) порядок, а вместе с ним и нормальная топология, превращающая комплекс K в дискретное T_0-пространство. Минимальная окрестность симплекса t_0 в K есть его звезда в комплексе K, т. е. подкомплекс $Ot_0 \subseteq K$, состоящий из всех симплексов t, имеющих симплекс t_0 своею собственной или несобственной гранью.

Мы будем в основном рассматривать так называемые полные комплексы (т. е. комплексы K, которые вместе с произвольным данным симплексом $t \in K$ содержат и все грани этого симплекса). Однако в полных симплексах мы будем постоянно иметь дело и с неполными подкомплексами, в частности с открытыми подкомплексами (объединениями звезд симплексов комплекса K). Так как симплексы евклидовых пространств любого числа измерений взаимно однозначно соответствуют своим остовам, то во многих случаях удобно рассматривать вместо данного полного симплициального комплекса K множество остовов всех составляющих его симплексов. Эти остовы называются тогда абстрактными симплексами, а их множество — абстрактным комплексом. Приходим к следующему общему определению. Пусть дано какое-нибудь множество $E = \{e\}$, элементы которого будем называть вершинами. Всякое непустое конечное множество $t \subset E$ будем называть остовом или симплексом «данного поля вершин E». (Собственные) подмножества t' множества t назовем (собственными) гранями симплекса t. Две грани $t' \subset t$ и $t'' \subset t$ будем называть взаимно противоположными, если они дизъюнктны и $t = t' \cup t''$. Числом измерений или размерностью симплекса называется уменьшенное на единицу число его вершин. Всякое множество K симплексов данного поля вершин E называется комплексом этого поля вершин. Условие полноты комплекса K формулируется так же, как и раньше: всякая грань симплекса $t \in K$ есть симплекс t' комплекса K. Отождествляя, когда это удобно, обычные геометрические симплексы с их остовами, можно считать геометрические комплексы частным случаем абстрактных. Все рассуждения этого Прибавления относятся к любым абстрактным комплексам.

Важнейшим примером абстрактных комплексов являются нервы семейств множеств. Пусть дано семейство α каких-либо подмножеств M некоторого множества X. Поставим в соответствие каждому элементу M семейства α некоторую вершину $e(M)$, взятую из какого-либо поля вершин E. По определению вершины $e_1 = e(M_1), \ldots, e_r = e(M_r)$ тогда и только тогда образуют остов (абстрактный симплекс) $T = e_1, \ldots, e_r$, когда $M_1 \cap \ldots \cap M_r \neq \Lambda$. Полученное таким образом множество симплексов есть (очевидно, полный) симплициальный комплекс, называемый *нервом семейства множеств* α и обозначаемый обычно через N_α. Мы в этом Прибавлении будем рассматривать главным образом нервы конечных систем множеств; они являются конечными полными комплексами.

Симплициальное отображение f комплекса K' в комплекс K есть отображение, ставящее в соответствие каждой вершине e' комплекса K' вершину $e = fe'$ комплекса K таким образом, что при этом «не разрываются остовы», т. е. каждый остов какого-либо симплекса $t' \in K'$ отображается на остов некоторого симплекса $t = ft'$ комплекса K, так что f оказывается отображением всего комплекса K' в комплекс K. Определенное таким образом отображение $f\colon K' \to K$ и называется симплициальным отображением. Легко проверить, что если рассматривать симплициальные комплексы K' и K как дискретные топологические пространства, то всякое симплициальное отображение оказывается непрерывным отображением одного из пространств в другое.

Проекционным спектром называется спектр $S = \{K_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$, элементами K_α которого являются полные симплициальные комплексы, снабженные топологией, двойственной к нормальной, а проекции суть симплициальные отображения $\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\colon K_{\alpha'} \xrightarrow{\text{на}} K_\alpha$ при $\alpha' > \alpha$. Спектр называется конечным, если конечны все комплексы K_α. Нитью спектра является всякий набор $x = \{t_\alpha\}$ симплексов по одному из каждого K_α, удовлетворяющий условию $t_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'} t_{\alpha'}$, если $\alpha' > \alpha$. Нити спектра суть точки полного предельного пространства $\overline{S}$ спектра S, топология в котором, в силу предложения 1, определяется открытой базой, состоящей из всех элементарных открытых множеств Ot_{α_0}, где Ot_{α_0} есть множество всех нитей $x' = \{t'_\alpha\}$, для которых t'_{α_0} есть собственная или несобственная грань симплекса t_{α_0} ($t'_{\alpha_0} \leqslant t_{\alpha_0}$) и t_{α_0} — произвольный симплекс произвольного комплекса K_{α_0} нашего спектра. Полное предельное пространство (полный предел) $\overline{S}$ спектра S является подпространством произведения T_0-пространств $\prod\limits_\alpha K_\alpha$, поэтому $\overline{S}$ есть T_0-пространство. В дальнейшем мы покажем, что полный предел всякого конечного спектра есть полурегулярное T_0-пространство.

В полном пределе $\overline{S}$ содержится *верхний*, соответственно *нижний*, предел спектра: $\hat{S}$, соответственно $\check{S}$. Для определения заметим, что нить $\xi = \{t_\alpha\}$ объемлет нить $\xi' = \{t'_\alpha\}$, если для любого α имеем $t_\alpha \geqslant t'_\alpha$. Нить ξ называется *максимальной*, если не существует никакой отличной от нее объемлющей нити. Аналогично определяются *минимальные* нити. Подпространство пространства $\overline{S}$, состоящее из всех максимальных, соответственно всех минимальных, нитей спектра, называется его верхним, соответственно нижним, пределом и обозначается через $\hat{S}$, соответственно $\check{S}$. Легко доказывается

Предложение 2. *Верхний предел $\hat{S}$ и нижний предел $\check{S}$ суть T_1-пространства.*

Действительно, пусть $\xi=\{t_\alpha\}$ есть максимальная, соответственно минимальная, нить и $\xi'=\{t'_\alpha\}$ — точка прикосновения точки ξ в пространстве $\hat{S}$, соответственно в пространстве $\check{S}$. Тогда для произвольного α имеем $\xi \in O_\alpha \xi'$ в $\hat{S}$, соответственно в $\check{S}$. Это значит, что для произвольного α имеем $t_\alpha \leqslant t'_\alpha$, $t_\alpha \in \xi$, $t'_\alpha \in \xi'$. Следовательно, в силу максимальности нити $\xi=\{t_\alpha\}$, соответственно минимальности нити $\xi'=\{\xi'_\alpha\}$, получим $t_\alpha=t'_\alpha$, т. е. $\xi=\xi'$. Итак, одноточечные множества в пространствах $\hat{S}$ и $\check{S}$ замкнуты, что и требовалось доказать.

Предложение 3. *Каждая нить конечного спектра объемлется некоторой максимальной нитью.*

Пусть ξ — какая-нибудь нить конечного спектра $S=\{K_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'}\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Пусть τ — мощность множества всех индексов $\mathfrak{A}$. Занумеруем все эти индексы посредством всех порядковых чисел $\lambda < \omega_\tau$, где ω_τ — наименьшее порядковое число мощности τ. Тогда все наши индексы запишутся в виде трансфинитной последовательности

$$\alpha_0, \ldots, \alpha_\lambda, \ldots,$$

что позволит и нить ξ записать в виде $\{t_{\alpha_\lambda}\}$. Будем искать нить $\xi^0=\{t^0_\alpha\}$, объемлющую нить ξ и такую, чтобы было $t^0_{\alpha_0}=t'_{\alpha_0}$ для любой нити ξ', объемлющей ξ^0. Так как комплекс K_{α_0} конечен, то после конечного числа шагов мы такую нить ξ^0 найдем.

Предположим теперь, что для каждого $\lambda' < \lambda$ построена нить $\xi^{\lambda'}=\{t^{\lambda'}_\alpha\}$, объемлющая всякую нить $\xi^{\lambda''}$, $\lambda'' < \lambda'$, и такая, что любая объемлющая ее нить $\xi'=\{t'_\alpha\}$ имеет $t'_{\alpha_\mu}=t^{\lambda'}_{\alpha_\mu}$, $\mu=0, \ldots, \lambda'$. Рассмотрим последовательность симплексов $\{t^\mu_\alpha\}$, $\mu<\lambda$. Имеем $t^{\mu'}_\alpha \geqslant t^\mu_\alpha$ при $\mu' > \mu$. Поэтому в этой последовательности существует максимальный элемент, который мы обозначим через t_α. Пусть $\eta=\{t_\alpha\}$ — множество всех максимальных элементов. Покажем, что η — нить. Пусть $\alpha > \beta$, $t_\alpha=t^{\lambda_1}_\alpha$, $t_\beta=t^{\lambda_2}_\beta$, $\lambda_1, \lambda_2 < \lambda$. В силу максимальности симплексов t_α и t_β имеем $t^{\lambda_1}_\alpha \geqslant t^{\lambda_2}_\alpha$, $t^{\lambda_1}_\beta \leqslant t^{\lambda_2}_\beta$. С другой стороны, так как $\tilde{\omega}^\alpha_\beta t^{\lambda_1}_\alpha = t^{\lambda_1}_\beta$, $\tilde{\omega}^\alpha_\beta t^{\lambda_2}_\alpha = t^{\lambda_2}_\beta$, то $t^{\lambda_1}_\beta \geqslant t^{\lambda_2}_\beta$, откуда получаем $t^{\lambda_1}_\beta = t^{\lambda_2}_\beta = t_\beta$. Следовательно, $\tilde{\omega}^\alpha_\beta t_\alpha = t_\beta$ при $\alpha > \beta$. Значит, система η является нитью, которая, очевидно, объемлет все нити ξ^λ, $\lambda' < \lambda$. Следовательно, индукцию можно провести и на шаге λ.

В конце концов мы исчерпаем все индексы и остановимся на некоторой максимальной нити, объемлющей ξ. Предложение доказано.

Со всяким спектром $S=\{K_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'}\}$ связан нульмерный спектр $S^\cdot=\{K^\cdot_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'}\}$, введенный В. И. Пономаревым под названием *полного расслабления* спектра S. Комплексами спектра $S^\cdot$ являются нульмерные комплексы $K^\cdot_\alpha$, состоящие (соответственно) из всех вершин комплексов K_α с проекциями $\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}$, взятыми из спектра S. Так как $S^\cdot$ — нульмерный спектр, то его полный, верхний и нижний пределы совпадают между собой.

Второй нульмерный спектр $S^{(0)} = \{K_\alpha^{(0)}, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ можно для данного спектра $S = \{K_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ определить следующим образом. Для каждого комплекса K_α спектра S рассмотрим нульмерный комплекс $K_\alpha^{(0)}$, вершинами a_α которого являются всевозможные симплексы t_α комплекса K_α. Для $\alpha' \geqslant \alpha$ определяем отображение $\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}$: $K_{\alpha'}^{(0)} \to K_\alpha^{(0)}$ следующим образом. Если

$$a_\alpha \equiv t_\alpha \in K_\alpha \text{ и } a_{\alpha'} \equiv t_{\alpha'} \in K_{\alpha'},\ \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'} t_{\alpha'} = t_\alpha$$

в S, то полагаем $\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'} a_{\alpha'} = a_\alpha$ в $S^{(0)}$.

Так определенные отображения $\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}$: $K_{\alpha'}^{(0)} \to K_\alpha^{(0)}$ суть, очевидно, отображения «на» (если отображениями «на» были исходные проекции), удовлетворяющие условию транзитивности $\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\mathfrak{S}_{\alpha'}^{\alpha''} = \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha''}$ при $\alpha'' \geqslant \alpha' \geqslant \alpha$, так что $S^{(0)} = \{K_\alpha^{(0)}, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ есть нульмерный проекционный спектр; мы называем его производным спектром спектра S.

Автоматически доказывается

Предложение 4. *Для того чтобы в спектре S всякий симплекс содержался в некоторой нити, необходимо и достаточно, чтобы тем же свойством обладал производный спектр $S^{(0)}$.*

Переходим теперь к одному из основных предложений теории проекционных спектров, восходящему к В. И. Пономареву и даже еще к А. Г. Курошу.

Предложение 5. *В произвольном конечном спектре $S = \{K_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ каждая вершина содержится в некоторой нити.*

Докажем чуть более общее предложение. Назовем q-множеством данного спектра всякое непустое множество Q, состоящее из симплексов этого спектра и удовлетворяющее следующим двум условиям:

1°. Для каждого $t_\alpha \in Q$, $t_\alpha \in K_\alpha$ и каждого $\alpha' \geqslant \alpha$ существует такое $t_{\alpha'} \in Q$, $t_{\alpha'} \in K_{\alpha'}$, что $\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'} t_{\alpha'} = t_\alpha$.

2°. Если $\alpha' \geqslant \alpha$ и $t_{\alpha'} \in Q$, то и $\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'} t_{\alpha'} \in Q$. В частности, множество всех симплексов спектра есть q-множество.

Доказываем теперь предложение 6, очевидно более общее, чем предложение 5.

Предложение 6. *Пусть Q — произвольное q-множество конечного спектра s и t_{α_0} произвольно взято в Q. Тогда существует содержащаяся в Q нить, содержащая элемент t_{α_0}.*

Доказательство. Без ограничения общности можем предположить спектр s нульмерным (иначе перешли бы к производному спектру). Занумеруем все α посредством порядковых чисел $\lambda < \omega_\tau$: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_\lambda, \ldots$, начиная с $\alpha = \alpha_0$.

I. Пусть $\lambda=0$. В нульмерном комплексе $K_{\alpha_0}=K_\alpha$ мы уже взяли вершину $e_{\alpha_0}\in Q$. Тогда для всякого α_ν, $\alpha_\nu\geqslant\alpha_0$, в K_{α_ν} найдется такая вершина e'_{α_ν}, что $\mathfrak{S}_{\alpha_0}^{\alpha_\nu}e'_{\alpha_\nu}=e_{\alpha_0}$.

II. Пусть теперь $\lambda<\omega_\tau$ — произвольное число. Предположим, что для всех $\mu<\lambda$ в $Q\cap K_{\alpha_\mu}$ выбрано по вершине $e_{\alpha_\mu}=e(\mu)$ так, что для любого конечного набора $\alpha_{\mu_1}, \ldots, \alpha_{\mu_r}$, где $\mu_1, \ldots, \mu_r<\lambda$, и любого α_ν, $\alpha_\nu\geqslant\alpha_{\mu_1}, \ldots, \alpha_{\mu_r}$, в $Q\cap K_{\alpha_\nu}$ можно выбрать такую вершину $e'_{\alpha_\nu}=e'(\nu)$, что

$$\mathfrak{S}_{\alpha_{\mu_i}}^{\alpha_\nu}e'(\nu)=e(\mu_i),\qquad i=1, \ldots, r.$$

Итак, мы имеем содержащиеся в Q вершины

$$e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_\mu},\qquad \mu<\lambda, \tag{1}$$

удовлетворяющие условию: для любого конечного набора $\mu_1, \ldots, \mu_r<\lambda$ и любого α_ν, $\alpha_\nu\geqslant\alpha_{\mu_1}; \ldots, \alpha_{\mu_r}$, в комплексе K_{α_ν} найдется такая вершина $e'_{\alpha_\nu}\equiv e'(\nu)\in Q$, что

$$\mathfrak{S}_{\alpha_{\mu_i}}^{\alpha_\nu}e'(\nu)=e(\mu_i),\qquad i=1, \ldots, r. \tag{2}$$

Докажем, что последовательность вершин (1) можно пополнить вершиной $e_{\alpha_\lambda}\in K_{\alpha_\lambda}\cap Q$ так, что для любого набора α_λ, $\alpha_{\mu_1}, \ldots, \alpha_{\mu_r}$, $\mu_1, \ldots, \mu_r<\lambda$ и любого α_ν, $\alpha_\nu\geqslant\alpha_{\mu_1}, \ldots, \alpha_{\mu_r}$, в $Q\cap K_{\alpha_\nu}$ найдется такая вершина $e'_{\alpha_\nu}=e'(\nu)$, что

$$\mathfrak{S}_{\alpha_{\mu_i}}^{\alpha_\nu}e'(\nu)=e(\mu_i),\qquad i=1, \ldots, r.$$

Предположим, что это не так. Тогда для любой вершины $e^i_{\alpha_\lambda}\in K_{\alpha_\lambda}\cap Q$ можно найти такие $\mu_1^i, \ldots, \mu_{r(i)}^i<\lambda$ и такое

$$\alpha_{\nu_i},\qquad \alpha_{\nu_i}\geqslant\alpha_{\mu_k^i},\qquad k=1, \ldots, r(i),$$

$\alpha_{\nu_i}\geqslant\alpha_\lambda$, что в комплексе $K_{\alpha_{\nu_i}}\cap Q$ не будет ни одной вершины

$$e'_{\alpha_{\nu_i}}=e'(\nu_i),$$

которая бы удовлетворяла условиям

$$\mathfrak{S}_{\alpha_{\mu_k^i}}^{\alpha_{\nu_i}}e'(\nu_i)=e(\mu_k^i),\qquad \mathfrak{S}_{\alpha_\lambda}^{\alpha_{\nu_i}}e(\nu_i)=e^i(\lambda)=e^i_{\alpha_\lambda}. \tag{3}$$

Заметим прежде всего, что условия (3) имеют место и для любого α, $\alpha\geqslant\alpha_{\nu_i}$, т. е. что для любого $\alpha\geqslant\alpha_{\nu_i}$ в $Q\cap K_\alpha$ нет вершин, удовлетворяющих условиям (3).

Положим теперь

$$(i)=\left\{\alpha_{\mu_1^i}, \ldots, \alpha_{\mu_{r(i)}^i}\right\}, \quad \{\alpha_{\mu_1}, \ldots, \alpha_{\mu_n}\}=\dot{\bigcup_{i=1}^{s}}(i),$$

где s — число элементов множества $K_{\alpha_\lambda} \cap Q$. Заметим, что если $\alpha \geqslant \alpha_{\nu_1}, \ldots, \alpha_{\nu_s}$, то и $\alpha \geqslant \alpha_{\mu_1}, \ldots, \alpha_{\mu_n}$. Так как $\mu_1, \ldots, \mu_n < \lambda$, то для всякого α^*: $\alpha^* \geqslant \alpha_{\nu_1}, \ldots, \alpha_{\nu_s}$, по индуктивному предположению, в $Q \cap K_{\alpha^*}$ найдется вершина e'_{α^*}, для которой

$$\mathfrak{S}_{\alpha_{\mu_m}}^{\alpha^*} e'_{\alpha^*}=e(\mu_m), \qquad m=1, \ldots, n.$$

В то же время, так как $\alpha^* \geqslant \alpha_\lambda$, то существует вершина $\mathfrak{S}_{\alpha_\lambda}^{\alpha^*} e'_{\alpha^*} = e^i_{\alpha_\lambda} \in K_{\alpha_\lambda} \cap Q$, и, следовательно, вопреки нашему предположению, условие (3) выполнено.

Итак, индукция идет дальше, и мы получаем множество вершин $\{e_{\alpha_\lambda}\}$, по одной из каждого множества $Q \cap K_\alpha$, которое, очевидно, является нитью, содержащейся в Q и содержащей в качестве элемента вершину e_α. Предложение 6, а значит, и предложение 5 доказаны.

Из предложений 3 и 5 следует

Теорема 1. *Всякий симплекс конечного проекционного спектра содержится в некоторой нити и объемлется некоторой максимальной нитью.*

Следствие 1. *Каждая грань любой координаты нити $\xi = \{t_\alpha\}$ спектра $S=\{K_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ содержится в некоторой нити $\xi' \leqslant \xi$.*

В самом деле, достаточно применить предложение 5 к конечному спектру $S_\xi=\{[t_\alpha], \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$.

Следствие 2. *Нижний предел $\check{S}$ конечного спектра S совпадает с пределом полного расслабления спектра S.*

Доказательство. Всякая нить спектра $S^\cdot$ является (очевидно, минимальной) нитью спектра S. Обратно, в силу следствия 1 всякая минимальная нить спектра S состоит из нульмерных симплексов и, следовательно, является нитью спектра $S^\cdot$.

Предложение 7. *Полное предельное пространство $\bar{S}$ конечного спектра S бикомпактно.*

Доказательство. Пусть M-произвольное бесконечное множество, лежащее в $\bar{S}$. Требуется доказать, что множество M имеет в $\bar{S}$ хотя бы одну точку полного накопления. Обозначим через $\mathfrak{m}$ мощность множества M. Берем произвольный комплекс K_α спектра S. Так как K_α — конечное множество симплексов, а $M=\{\xi\}$ — множество нитей, имеющее бесконечную мощность $\mathfrak{m}$, то имеется хотя бы один симплекс $t_\alpha \in K_\alpha$, яляющийся элементом нитей, образующих множество $M_0 \subseteq M$ мощности $\mathfrak{m}$. Всякий такой симплекс назовем отмеченным. Легко проверить, что множество Q всех отмеченных симплексов есть q-множество, содержащее, в силу предложения 6, некоторую нить $\xi_0 = \{t_\alpha^0\}$, каждая координата которой является координатой множества мощности $\mathfrak{m}$ элементов множества M. Тем более каждая окрестность $O\xi_0$ точки ξ_0 пересекается с множеством M по множеству мощности $\mathfrak{m}$, что и требовалось доказать.

Таким же образом доказывается, что верхний и нижний пределы конечного спектра являются бикомпактными пространствами.

Предложение 8. *Полный предел всякого конечного спектра есть полурегулярное T_0-пространство.*

Мы знаем, что $\bar{S}$ есть T_0-пространство, открытую базу которого образуют множества вида Ot_α. Положим $\Phi e_\alpha = \{\xi = \{t_\alpha\}: e_\alpha \leqslant t_\alpha\}$. Сначала мы докажем, что для любой вершины e_α множество Φ_{e_α} есть $\varkappa a$-множество. Для этого достаточно доказать равенство

$$[Oe_\alpha]_{\bar{S}} = \Phi_{e_\alpha}. \tag{4}$$

Очевидно, что $Oe_\alpha \subseteq \Phi e_\alpha$. Значит, в силу замкнутости Φe_α включение $[Oe_\alpha] \subseteq \Phi e_\alpha$ доказано. Доказываем обратное включение. Фиксируем $\alpha = \alpha_0$. Пусть $\xi = \{t_\alpha\} \in \Phi e_{\alpha_0}$. Берем произвольную окрестность $O_{\alpha_1}\xi$ точки ξ. Берем далее α_2: $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$, $\alpha_2 \geqslant \alpha_0$. Тогда в симплексе $t_{\alpha_2} \in \xi$ найдется такая вершина e_{α_2}, что $\tilde{\omega}_{\alpha_0}^{\alpha_2} e_{\alpha_2} = e_{\alpha_0}$. Существует нить $\xi' = \{t'_\alpha\}$, для которой $t'_{\alpha_0} = e_{\alpha_0}$, $t'_{\alpha_2} = e_{\alpha_2}$. Отсюда получаем

$$\xi' = \{t'_\alpha\} \in Oe_{\alpha_0}, \quad \xi' = \{t'_\alpha\} \in Oe_{\alpha_2}.$$

Но $Oe_{\alpha_2} \subseteq O_{\alpha_1}\xi$, следовательно, $O_{\alpha_1}\xi \cap Oe_{\alpha_0} \neq \Lambda$, т. е. $\xi \in [Oe_{\alpha_0}]$. Итак, равенство (4) доказано, а вместе с ним доказана и каноническая замкнутость множеств Φe_α. Пусть теперь t_α — произвольный симплекс произвольного комплекса K_α. Обозначая через σ_α множество тех Φe_α, $e_\alpha \in K_\alpha$, для которых e_α не есть вершина симплекса t_α, имеем формулу

$$Ot_\alpha = \bar{S} \setminus \tilde{\sigma}_\alpha,$$

вытекающую из того, что для любой точки $\xi' = \{t'_\alpha\}$ оба включения $\xi' \in Ot_\alpha$ и $\xi' \in \bar{S} \setminus \tilde{\sigma}_\alpha$ обозначают одно и то же, а именно что всякая вершина симплекса t'_α есть вершина симплекса t_α. С другой стороны, по доказанному, множество $\tilde{\sigma}$ есть $\varkappa a$-множество; значит, его дополнение $\bar{S} \setminus \tilde{\sigma}_\alpha = Ot_\alpha$ есть $\varkappa o$-множество. Полурегулярность пространства $\bar{S}$ доказана.

§ 2. Проекционные спектры над семействами разбиений

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Локально конечное покрытие пространства X $\varkappa a$-множествами $\alpha = \{A_\alpha\}$ называется *разбиением* пространства X, если открытые ядра множеств A_α дизъюнктны. Семейство всех разбиений пространства X естественным образом упорядочено: $\alpha' > \alpha$, если разбиение α' вписано в α. Так как при $\alpha' > \alpha$ каждое множество $A_{\alpha'}$ содержится в единственном множестве A_α, то определено симплициальное отображение нерва $N_{\alpha'}$ в нерв N_α. Покажем, что это отображение является отображением на N_α. В самом деле, пусть $t_\alpha \in N_\alpha$, $t_\alpha = |A_\alpha^0, \ldots, A_\alpha^r|$. Берем точку $x \in A_\alpha^0 \cap \ldots \cap A_\alpha^r$ и для каждого $i = 0, \ldots, r$ такое множество $A_{\alpha'}^{\lambda_i} \in \alpha'$, что $x \in A_{\alpha'}^{\lambda_i} \subset A_\alpha^i$. (Существование множеств $A_{\alpha'}^{\lambda_i}$ вытекает из консервативности покрытия α'.) Тогда $\left|A_{\alpha'}^{\lambda_0}, \ldots, A_{\alpha'}^{\lambda_r}\right|$ есть симплекс $t_{\alpha'} \in N_{\alpha'}$ и $\tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'} t_{\alpha'} = t_\alpha$.

Таким образом, над любым направленным семейством разбиений пространства X строится проекционный спектр. Нас в дальнейшем будут интересовать спектры над семействами:

1° $\varkappa_X$ — всех конечных разбиений пространства X,

2° ζ_X — всех разбиений пространства X,

которые мы будем обозначать соответственно через $S_\varkappa X$ (максимальный конечный спектр) и $S_\zeta X$ (максимальный спектр).

Оказывается, что верхним пределом спектра $S_\varkappa X$ является так называемое пространство $\omega_\varkappa X$ (пространство Волмэна — Пономарева над пространством X), которое мы сейчас определим. Точки пространства $\omega_\varkappa X$ суть максимальные центрированные системы $\varkappa a$-множеств или $\varkappa$-концы пространства X, а топология в пространстве $\omega_\varkappa X$ есть так называемая волмэновская топология, определяемая открытой базой, состоящей из всех множеств вида V_H, где H — какое-нибудь $\varkappa o$-множество, т. е. канонически открытое множество пространства X, а V_H есть множество всех $\varkappa$-концов $\xi = \{A\}$, каждый из элементов A_α которых имеет непустое пересечение с множеством H. Ту же топологию можно определить с помощью замкнутой базы, элементами которой являются множества вида Φ_A, где Φ_A определено как множество всех $\varkappa$-концов, содержащих в числе своих элементов данное произвольно $\varkappa a$-множество A. Естественный гомеоморфизм между пространствами $\omega_\varkappa X$ и $\hat{S}_\varkappa X$ осуществляется посредством так называемого спектрального отображения η: $\omega_\varkappa X \to \hat{S}_\varkappa X$. Однако, прежде чем определять это отображение, мы слегка видоизменим определение пространства $\omega_\varkappa X$, что приведет нас к пространству $\omega_\pi X$, находящемуся в отношении естественного и очень простого гомеоморфизма с $\omega_\varkappa X$, а это позволит нам в последующих рассуждениях поставить $\omega_\pi X$ на место $\omega_\varkappa X$. Напомним, что π-множеством пространства X называется всякое множество $P \subseteq X$, являющееся пересечением конечного числа $\varkappa a$-множеств этого пространства. Назовем π-концом всякую максимальную центрированную систему π-множеств. В множество всех π-концов введем ту же волмэновскую топологию, что и в $\omega_\varkappa X$, с той лишь разницей, что множества H берутся дополнительными к π-множествам. Полученное топологическое пространство и обозначаем через $\omega_\pi X$. Строим теперь отображение пространства $\omega_\pi X$ в $\omega_\varkappa X$, ставя в соответствие каждому π-концу множество тех его элементов, которые являются $\varkappa a$-множествами. Получим некоторый $\varkappa$-конец, причем, как легко видеть, каждый $\varkappa$-конец можно получить таким образом, дополняя его до π-конца всеми конечными пересечениями его элементов. Итак, мы получили отображение пространства $\omega_\pi X$ на пространство $\omega_\varkappa X$, и легко проверить, что это отображение есть топологическое отображение пространства $\omega_\pi X$ на $\omega_\varkappa X$. Теперь мы можем отождествлять между собой оба эти пространства.

Теорема 2. *Верхний предел $\hat{S}_\varkappa X$ максимального конечного спектра $S_\varkappa X$ пространства X гомеоморфен пространству $\omega_\varkappa X$ Волмэна — Пономарева.*

Доказательство. Построим следующее отображение η: $\omega_\varkappa X \to \hat{S}_\varkappa X$. Пусть $\xi^\varkappa = \{A\}$ — произвольная точка пространства $\omega_\varkappa X$, т. е. произвольный $\varkappa$-конец пространства X. Обозначим через ξ^π соответствующий π-конец, состоящий из всевозможных конечных пересечений элементов конца $\xi^\varkappa$. Заметим прежде всего, что каждое разбиение $\alpha = \left\{A_1^\alpha, \ldots, A_{s_\alpha}^\alpha\right\}$ содержит по крайней мере один элемент, пересекающийся со всеми элементами конца $\xi^\varkappa$ и, следовательно (в силу свойства максимальности конца $\xi^\varkappa$), содержащийся в нем. В противном случае к каждому A_i^α, $1 \leqslant i \leqslant s_\alpha$, покрытия α существовал бы не пересекающийся с ним элемент A^i конца $\xi^\varkappa$. Тогда множество $\bigcap A^i$ не пересекалось бы с суммой $\bigcup A_i^\alpha = X$, т. е. было бы пусто — противоречие с центрированностью конца $\xi^\varkappa$. Пусть $A_{i_0}^\alpha, \ldots, A_{i_r}^\alpha$ суть все элементы покрытия α, принадлежащие концу $\xi^\varkappa$. Тогда имеем в нерве N_α симплекс $t_\alpha = \left| A_{i_0}^\alpha, \ldots, A_{i_r}^\alpha \right|$. Докажем, что полученный таким образом набор симплексов $\eta = \eta(\xi^\varkappa) = \{t_\alpha\}$ по одному из каждого α есть нить спектра $S_\varkappa X$. Для этого докажем, что при $\alpha' > \alpha$ имеем $\tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'} t_{\alpha'} = t_\alpha$. Неравенство $\tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'} t_\alpha \leqslant t_\alpha$ вытекает из того, что всякое A_i^α, содержащее некоторое $A_j^{\alpha'} \in \xi^\varkappa$, само принадлежит концу $\xi^\varkappa$. Доказываем обратное неравенство $t_\alpha \leqslant \tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'} t_{\alpha'}$.

Пусть A_i^α — произвольная вершина симплекса t_α. Пусть $A_1^{\alpha'}, \ldots, A_q^{\alpha'}$ — все элементы разбиения α', лежащие в A_i^α, т. е.

удовлетворяющие условию $\tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'} A_j^{\alpha} = A_i^{\alpha}$. Требуется лишь доказать, что хоть одно из этих A_j^{α}, $j \leqslant q$, принадлежит концу $\xi^\varkappa$. В противном случае каждому $A_j^{\alpha'}$, $j \leqslant q$, соответствовало бы некоторое $A^j \in \xi^\pi$, не пересекающееся с ним, и пересечение этих A^j было бы элементом конца ξ^π, не пересекающимся с суммой $\bigcup_{j=1}^{q} A_j^{\alpha'} = A_i^{\alpha} \in \xi^\pi$, что невозможно. Итак, каждому $\varkappa$-концу $\xi^\varkappa \in \omega_\varkappa X$ соответствует нить $\eta(\xi^\varkappa) = \{t_\alpha\}$ спектра $S_\varkappa X$, причем вершины симплекса t_α — это те A_i^{α}, которые являются элементами конца $\xi^\varkappa$. Отождествляя каждый симплекс нерва $t_\alpha = \left| A_{i_0}^{\alpha} \ \ldots \ A_{i_q}^{\alpha} \right|$ с множеством его вершин и считая этими вершинами сами элементы покрытия α, можно написать $\xi^\varkappa = \bigcup_\alpha t_\alpha$, где $\eta(\xi^\varkappa) = \{t_\alpha\}$. При этом из свойства максимальности конца $\xi^\varkappa$ следует, что и нить $\eta(\xi^\varkappa)$ является максимальной. Обратно, если $\nu = \{t_\alpha\}$ — какая-либо максимальная нить спектра $S_\varkappa X$, то $\bigcup t_\alpha$ есть максимальная центрированная система $\varkappa\alpha$-множеств, т. е. $\varkappa$-конец пространства X, так что мы построили взаимно однозначное отображение η пространства $\omega_\varkappa X$ на $\hat{S}_\varkappa X$. Для доказательства того, что полученное отображение η является гомеоморфизмом, достаточно доказать, что оно отображает некоторую базу пространства $\omega_\varkappa X$ на некоторую базу пространства $\hat{S}_\varkappa X$. Доказательству предпошлем следующее простое замечание.

Пусть $A_{i_0}^{\alpha}, \ldots, A_{i_r}^{\alpha}$ — некоторые элементы разбиения $\alpha = \left\{ A_1^{\alpha}, \ldots \right.$ $\left. \ldots A_{s_\alpha}^{\alpha} \right\}$. Тогда

$$\left\langle \bigcup_{k=0}^{r} A_{i_k} \right\rangle = X \setminus \bigcup_{j \neq i_0, \ldots, i_r} A_j. \qquad (1)$$

Вспомним определение множества V_H (для любого $\varkappa o$-множества $H \subset X$) как множества всех тех $\varkappa$-концов, каждый из элементов которых имеет непустое пересечение с H. Если $t_\alpha = \left| A_{i_0}^{\alpha} \ \ldots \ A_{i_r}^{\alpha} \right|$, то обозначим через $\tilde{t}_\alpha$ множество $A_{i_0}^{\alpha} \cup \ldots \cup A_{i_r}^{\alpha} \subseteq X$. При этих обозначениях легко вывести из формулы (1) формулу

$$\eta V_{\langle \tilde{t}_\alpha \rangle} = O t_\alpha. \qquad (2)$$

Доказательство формулы (2). Фиксируем $\alpha = \alpha_0$, $t_{\alpha_0} = A_1^{\alpha_0}, \ldots$ $\ldots, A_p^{\alpha_0}$, и пусть $\xi' = \bigcup t_\alpha \subseteq V_{\langle \tilde{t}_{\alpha_0} \rangle}$, $\eta' = \eta(\xi') = \{t'_\alpha\}$. Докажем, что $\eta' \in Ot_{\alpha_0}$. Этим будет доказано включение $\eta V_{\langle \tilde{t}_{\alpha_0}\rangle} \subseteq Ot_{\alpha_0}$. Пусть $t'_{\alpha_0} = A^{\alpha_0}_{j_0}, \ldots, A^{\alpha_0}_{j_q}$. Из $\xi' \in V_{\langle \tilde{t}_{\alpha_0}\rangle}$ следует, что каждое $A^{\alpha_0}_j$, где $j = j_0, \ldots, j_q$, имеет общие точки с $\langle \tilde{t}_{\alpha_0}\rangle$ и, значит, в силу (1) является одним из $A^{\alpha_0}_1, \ldots, A^{\alpha_0}_p$, так что $t'_{\alpha_0} \leqslant t_{\alpha_0}$. Включение $\eta V_{\langle \tilde{t}_{\alpha_0}\rangle} \subseteq Ot_{\alpha_0}$ этим доказано. Переходим к доказательству обратного включения. Пусть $\eta' = \eta(\xi') \in Ot_{\alpha}$, т.е. $t'_{\alpha_0} \leqslant t_{\alpha_0}$. Тогда все $A^{\alpha_0}_{j_0}, \ldots, A^{\alpha_0}_{j_q}$ являются некоторыми из $A^{\alpha_0}_1, \ldots, A^{\alpha_0}_p$, откуда вытекает, что каждое из $A_\lambda = A^{\alpha}_h \in \xi'$, $\alpha \geqslant \alpha_0$, содержится в одном из $A^{\alpha_0}_1, \ldots, A^{\alpha_0}_p$ и, значит, имеет общие точки с $\langle \tilde{t}_{\alpha_0}\rangle$. Надо доказать, что то же справедливо для любого $A_\lambda = A^{\alpha}_h \in \xi'$. Для этого берем α', следующее как за α_0, так и за α. Пусть A^{α}_h — произвольный элемент системы ξ', тогда $A^{\alpha}_h \in t'_\alpha \in \eta(\xi')$. Выбираем такое $A^{\alpha'}_{h'} \in t_{\alpha'} \subset \eta(\xi')$, чтобы было $\mathfrak{D}^{\alpha'}_{\alpha} A^{\alpha'}_{h'} = A^{\alpha}_h$. Другими словами, $A^{\alpha'}_{h'} \in \xi'$, $A^{\alpha'}_{h'} \subseteq A^{\alpha}_h \in \xi$. Так как $A^{\alpha'}_{h'} \cap \langle \tilde{t}_{\alpha_0}\rangle \neq \Lambda$, то тем более $A^{\alpha}_h \cap \langle \tilde{t}_{\alpha_0}\rangle \neq \Lambda$. Формула (2) доказана.

Всякое $\varkappa o$-множество H есть некоторое множество $\langle \tilde{t}_\alpha\rangle$: чтобы убедиться в этом, достаточно положить $\alpha = \{A^{\alpha}_1, A^{\alpha}_2\}$, где $A^{\alpha}_1 = [H]$, $A^{\alpha}_2 = [X \setminus [H]]$ и t_α — нульмерный симплекс нерва N_α, состоящий из вершины A^{α}_1.

Обратно, для любого разбиения $\alpha = \{A^{\alpha}_1, \ldots, A^{\alpha}_{s_\alpha}\}$ и любого симплекса $t^\alpha = \left| A^{\alpha}_{i_0}, \ldots, A^{\alpha}_{i_r} \right| \in N_\alpha$ множество $\langle \tilde{t}_\alpha\rangle$ есть $\varkappa o$-множество. Итак, система всех множеств $V_{\langle \tilde{t}_\alpha\rangle}$ совпадает с системой всех V_H (где H пробегает все $\varkappa o$-множества пространства X) и является открытой базой пространства $\omega_\varkappa X$, переходящей при отображении η в базу пространства $\hat{S}_\varkappa X$, состоящую из всех множеств вида Ot_α. Теорема 2 доказана.

Из бикомпактности верхнего предела $\hat{S}_\varkappa X$ и доказанной теоремы вытекает

Следствие. *Пространство $\omega_\varkappa X$ бикомпактно.*

Заметим, что бикомпактность пространства $\omega_\varkappa X$ легко доказать и непосредственно. Пусть $\{F_\lambda\}$, $\lambda \in \mathfrak{B}$, — произвольная центрированная система замкнутых множеств пространства $\omega_\varkappa X$. Покажем, что $\bigcap\limits_{\lambda} F_\lambda \neq \Lambda$. По определению топологии в $\omega_\varkappa X$, $F_\lambda = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}_\lambda} \Phi_{A^{\alpha}_\lambda}$, где A^{α}_λ суть $\varkappa a$-множества в X. Нетрудно видеть, что система $\varkappa a$-множеств $\{A^{\alpha}_\lambda\}$ $\lambda \in \mathfrak{B}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_\lambda$, центрирована (иначе нарушалась бы центрированность системы $\{F_\lambda\}$). Дополнив эту систему до $\varkappa$-конца, получим точку ξ, принадлежащую $\bigcap\limits_{\lambda,\ \alpha} \Phi_{A_\lambda^\alpha} = \bigcap\limits_\lambda F_\lambda$. Таким образом, $\bigcap\limits_\lambda F_\lambda \neq \Lambda$, что и требовалось доказать.

Нам понадобится еще одна аксиома отделимости, а именно следующее *условие квазинормальности* *): любые два дизъюнктных π-множества имеют дизъюнктные окрестности. Регулярные пространства, удовлетворяющие этому условию, называются *квазинормальными* **). Всякое нормальное пространство квазинормально. С другой стороны, имеются квазинормальные пространства, не являющиеся нормальными. Таковы, например, все ненормальные экстремально несвязные пространства ***).

Введенный класс квазинормальных пространств очень важен, потому что только для этих пространств верхний предел спектра $S_\varkappa X$ совпадает с пространством βX Стоуна — Чеха (или, что то же самое, в силу теоремы 2 пространство $\omega_\varkappa X$ совпадает с βX). Это утверждение мы получим как следствие теорем 3 и 4.

Нам будет удобно отождествлять точки квазинормального пространства X с теми $\varkappa$-концами $\xi \in \omega_\varkappa X$, которые их касаются $\left(\varkappa\text{-конец } \xi = \{A_\alpha\} \text{ касается точки } x \in X, \text{ если } x \in \bigcap\limits_{A_\alpha \in \xi} A_\alpha\right)$. Нетрудно доказать, что это отождествление определяет вложение квазинормального пространства X в $\omega_\alpha X$ в качестве всюду плотного подмножества. Таким образом, пространство $\omega_\varkappa X$ можно рассматривать как бикомпактное расширение пространства X.

Теорема 3. *Для того чтобы пространство $\omega_\varkappa X$ было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы X было квазинормальным.*

---

*) Естественно было бы назвать условие квазинормальности π-нормальностью, по аналогии с условием $\varkappa$-нормальности, которое ввел Щепин [1]. Пространство удовлетворяет условию $\varkappa$-нормальности, если любые дизъюнктные $\varkappa a$-множества имеют дизъюнктные окрестности. Условие $\varkappa$-нормальности можно усилить, если потребовать дополнительно, чтобы всякое $\varkappa a$-множество являлось пересечением счетного числа $\varkappa o$-множеств. Тогда мы получим совершенную $\varkappa$-нормальность (Е. В. Щепин), которая естественно возникает из $\varkappa$-нормальности, так же как совершенная нормальность возникает из условия нормальности.

**) Получится тот же класс квазинормальных пространств, если вместо регулярности потребовать выполнение аксиомы T_λ. Пространство удовлетворяет аксиоме T_λ (Зайцев [2]), если оно есть полурегулярное T_1-пространство и π-множества образуют в нем сеть в смысле Архангельского. Все регулярные пространства суть T_λ-пространства.

Квазинормальные пространства были введены Зайцевым в работе [2].

***) Определение экстремально несвязного пространства см. в § 6 этого Прибавления.

Доказательство. 1°. Пусть X квазинормально. Для доказательства того, что $\omega_\varkappa X$ хаусдорфово, возьмем в $\omega_\varkappa X$ две точки $\xi_1=\{A_\lambda\}$ и $\xi_2=\{B_\mu\}$. Так как эти точки различны, то существует $\varkappa a$-множество $B\equiv B_\mu\in\xi_2$, отличное от всех $A_\lambda\in\xi_1$. В силу максимальности конца ξ_1 найдутся такие $A_{\lambda_1}, \ldots, A_{\lambda_r}\in\xi_1$, что $B\cap A_{\lambda_1}\cap\ldots\cap A_{\lambda_r}=\Lambda$. Так как X квазинормально, то существуют в X дизъюнктные окрестности H_1 и H_2 соответственно множеств $A_{\lambda_1}\cap\ldots\cap A_{\lambda_r}$ и B, и эти окрестности H_1 и H_2 могут быть предположены каноническими. Докажем, что в пространстве $\omega_\varkappa X$ множества V_{H_1} и V_{H_2} содержат соответственно точки ξ_1 и ξ_2. В самом деле, для каждого $A_\lambda\in\xi_1$ мы имеем $\Lambda\neq A_\lambda\cap(A_{\lambda_1}\cap\ldots\cap A_{\lambda_r})\subseteq A_\lambda\cap H_1$, а это значит, что $\xi_1\in V_{H_1}$. Аналогично доказывается, что $\xi_2\in V_{H_2}$. Остается доказать, что $V_{H_1}\cap V_{H_2}=\Lambda$. Пусть, в противоречии с этим, существует точка $\xi_3=\{C_\nu\}\subset V_{H_1}\cap V_{H_2}$. Тогда существуют конечные множества элементов $C_{\nu_1}, \ldots, C_{\nu_p}$ и $C_{\nu'_1}, \ldots, C_{\nu'_{p'}}$ конца ξ_3, удовлетворяющие условиям

$$C_{\nu_1}\cap\ldots\cap C_{\nu_p}\subseteq H_1, \quad C_{\nu'_1}\cap\ldots\cap C_{\nu'_{p'}}\subseteq H_2$$

и, следовательно,

$$\Lambda\neq C_{\nu_1}\cap\ldots\cap C_{\nu_p}\cap C_{\nu'_1}\cap\ldots\cap C_{\nu'_{p'}}\subseteq H_1\cap H_2,$$

— вопреки предположению о дизъюнктности множеств H_1 и H_2.

2°. Пусть теперь известно, что пространство $\omega_\varkappa X=\omega_\pi X$ является хаусдорфовым, а следовательно (будучи бикомпактным), и нормальным. Докажем, что в этих условиях любые два дизъюнктных π-множества P_1 и P_2 в X имеют дизъюнктные окрестности H_1 и H_2.

Так как $P_1\cap P_2=\Lambda$, то мы имеем в $\omega_\pi X$

$$\Phi_{P_1}\cap\Phi_{P_2}=\Lambda.$$

Берем в $\omega_\pi X$ дизъюнктные окрестности $O\Phi_1$ и $O\Phi_2$ множеств Φ_{P_1} и Φ_{P_2}. Полагая

$$H_1=X\cap O\Phi_1, \quad H_2=X\cap O\Phi_2,$$

получаем дизъюнктные открытые множества в X. Остается доказать, что $P_1\subseteq H_1$, $P_2\subseteq H_2$. И то и другое следует из включения

$$P\subseteq\Phi_P, \tag{3}$$

верного для любого π-множества $P\subseteq X$ (и соответственно $\Phi_P\subseteq\omega_\pi X$). Для доказательства включения (3) берем какую-нибудь точку $x\in P$ и рассматриваем π-конец $\xi^\pi(x)=\{P_\lambda\}\in\omega_\pi X$, где $P_\lambda\subseteq X$ пробегает все π-множества, содержащие точку x. Тогда $P\in\xi^\pi(x)$, т. е. $\xi^\pi(x)\in\Phi_P$. Так как точки x и $\xi^\pi(x)$ отождествлены в $\omega_\pi X$, то формула (3) доказана. Доказана и теорема 3.

Так как пространство X вкладывается в $\omega_\varkappa X$, получаем

Следствие. *Квазинормальное пространство вполне регулярно.*

Напомним, что непрерывное отображение $f\colon b_1X \to b_2X$ расширения b_1X пространства X на расширение b_2X называется естественным, если при этом отображении все точки $x \in X$ остаются неподвижными.

Теорема 4. *Для всякого вполне регулярного пространства X существует естественное отображение $f\colon \omega_\varkappa X \to bX$ пространства $\omega_\varkappa X$ на всякое хаусдорфово бикомпактное расширение bX пространства X.*

Доказательство. 1°. Построение отображения $f\colon \omega_\pi X \to bX$. Для каждой точки $\xi = \{P_\lambda\} \in \omega_\pi X$ положим

$$f(\xi) = \bigcap_\lambda [P_\lambda] \subseteq bX \tag{4}$$

(здесь и далее замыкания рассматриваются в bX). Так как семейство множеств P_λ центрировано, то множество $\Phi = \bigcap\limits_\lambda [P_\lambda]$ есть непустое множество, лежащее в бикомпакте bX. Мы докажем, что оно состоит из одной точки. Достаточно для этого доказать формулу

$$[Oy] \cap X \in \xi \tag{5}$$

для любой окрестности Oy любой точки $y \in \Phi$.

В самом деле, предположим, что формула (5) доказана. Если y_1 и y_2—две различные точки множества Φ, а Oy_1 и Oy_2—две их окрестности с непересекающимися замыканиями в X, то множества $[Oy_1] \cap X$ и $[Oy_2] \cap X$ не пересекаются и не могут быть одновременно элементами центрированного семейства ξ.

Итак, переходим к доказательству формулы (5). Так как $y \in \bigcap\limits_\lambda [P_\lambda]$, мы имеем $Oy \cap P_\lambda \neq \Lambda$ для любого P_λ. Но $P_\lambda \subseteq X$; значит, $P_\lambda = P_\lambda \cap X$ и

$$([Oy] \cap X) \cap P_\lambda \supseteq Oy \cap P_\lambda \neq \Lambda.$$

Так как $[Oy] \cap X$ есть *ка*-множество, а значит, и подавно π-множество в X, включение (5) тем самым доказано.

Теперь мы ставим в соответствие каждой точке $\xi = \{P_\lambda\} \in \omega_\pi X$ единственную точку $y = f(\xi) = \bigcap\limits_\lambda [P_\lambda]$ и получим, таким образом, отображение $f\colon \omega_\pi X \to bX$.

2. Отображение f есть отображение на все bX. В самом деле, берем произвольно $y \in bX$ и рассматриваем семей-

ство $\{O^\alpha y\}$ всех окрестностей точки y в bX. Семейство $\{[O^\alpha y]\cap X\}$ есть центрированное семейство множеств в X, оно содержится в некотором π-конце $\xi=[P_\lambda]$. Тогда

$$\Lambda\neq f(\xi)=\bigcap_\lambda [P_\lambda]\subseteq\bigcap_\lambda [O^\alpha y]=y$$

и $f(\xi)=y$.

3°. Отображение f непрерывно. Пусть, в самом деле,

$$\xi=\{P_\lambda\}\in\omega_\pi X,\quad y=f(\xi)\in bX.$$

Берем произвольную окрестность Oy в bX и меньшую окрестность $O_1y=H_1$ с условием $[O_1y]\subseteq Oy$. Открытое множество H_1 может быть предположено каноническим в bX. Тогда $H=X\cap H_1$ есть $\varkappa o$-множество в X. Возьмем V_H в $\omega_\pi X=\omega_\varkappa X$ и докажем, что $\xi\in V_H$. В противном случае имели бы $\xi\in\omega_\pi X\setminus V_H=\Phi_{X\setminus H}$, т. е. $X\setminus H\in\xi$. Отсюда следовало бы, что

$$y\in[X\setminus H]=[X\setminus(H_1\cap X)]=bX\setminus H_1$$

— противоречие.

Мы только что доказали, что V_H есть окрестность точки ξ в $\omega_\pi X$. Остается доказать, что ее образ $f(V_H)$ содержится в Oy. Пусть $\xi'=\{P_{\lambda'}\}\in V_H$. Для некоторого $\lambda'=\lambda_0'$ имеем $P_{\lambda_0'}\subseteq H$. Тогда

$$f(\xi')=\bigcap_\lambda [P_{\lambda'}]\subseteq[P_{\lambda_0'}]\subseteq[H]\subseteq[H_1]\subseteq Oy$$

— непрерывность отображения f доказана.

4°. Каждая точка $x\in X$ остается при отображении f неподвижной. В самом деле, точка $x\in X$ отождествлена с π-концом $\xi(x)=\{P_\lambda(x)\}$, состоящим из всех π-множеств $P_\lambda\ni x$. Тогда

$$\bigcap_\lambda [P_\lambda(x)]=x,\quad f(\xi(x))=\bigcap_\lambda [P_\lambda(x)]=x,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Мы фактически доказали теорему 4 для пространства $\omega_\pi X$ вместо собственно $\omega_\varkappa X$. Но при естественном гомеоморфизме $\varkappa^{-1}$: $\omega_\varkappa X\to\omega_\pi X$, отождествляющем между собой эти пространства, точки $x\in X$ остаются неподвижными и суперпозиция отображений $\varkappa^{-1}$ и f дает нам нужное естественное отображение $\omega_\varkappa X$ на bX.

Непосредственным следствием теорем 3 и 4 является

Теорема 5. *Для всех квазинормальных пространств X и только для них пространство $\omega_\varkappa X$ Волмэна—Пономарева совпадает с пространством βX Стоуна—Чеха.*

В силу естественного гомеоморфизма между пространствами $\omega_\varkappa X$ и $\hat{S}_\varkappa X$ теорема 5 может быть сформулирована и так:

Теорема 5′. *Для всех квазинормальных пространств X и только для них верхний предел $\hat{S}_\varkappa X$ спектра $S_\varkappa X$ совпадает с пространством βX.*

Теорема 6 (Пономарев [2]). *Паракомпакт X гомеоморфен пределу $\hat{S}_\xi X$ максимального спектра $S_\xi X$.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем два предложения о паракомпактных пространствах.

Предложение 1. *В любое покрытие $\omega = \{O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, паракомпакта X можно вписать разбиение.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что покрытие ω локально конечно. По лемме об ужатии точечно конечных покрытий (см. § 11 гл. 6) в ω можно комбинаторно вписать покрытие ν, состоящее из $\varkappa a$-множеств V_α.

Пусть мощность покрытия ω равна τ, а множество индексов $\mathfrak{A}$ состоит из всех порядковых чисел $0 \leqslant \alpha < \omega_\tau$.

Построим теперь разбиение $\eta = \{F_\lambda\}$, вписанное в покрытие ν. Положим $F_\lambda = \left[V_\lambda \setminus \bigcup\limits_{\alpha < \lambda} [V_\alpha]\right]$. Система $\{F_\lambda\}$ $\varkappa a$-множеств локально конечна, так как она комбинаторно вписана в локально конечную систему ν. Очевидно, что $\langle F_\lambda \rangle \cap \langle F_{\lambda'} \rangle = \Lambda$ при $\lambda \neq \lambda'$. Остается показать, что система $\{F_\lambda\}$ является покрытием пространства X. В самом деле, для любой точки $x \in X$ существует такое λ_0, что $x \in [V_{\lambda_0}]$ и $x \notin [V_\lambda]$ при $\lambda < \lambda_0$. Следовательно,

$$x \in [V_{\lambda_0}] \setminus \bigcup_{\alpha < \lambda_0} [V_\alpha] \subseteq \left[V_{\lambda_0} \setminus \bigcup_{\alpha < \lambda_0} [V_\alpha]\right] = F_{\lambda_0},$$

т. е. система $\{F_\lambda\}$ покрывает все точки пространства X. Итак, мы доказали, что система $\eta = \{F_\lambda]$ является искомым разбиением пространства X. Предложение 1 доказано.

Будем говорить, что система $\sigma = \{F_\lambda\}$ замкнутых множеств пространства X *касается* покрытия α, если найдется элемент $V \in \alpha$, пересекающийся со всеми множествами системы σ.

Предложение 2 (Пономарев [1]). *Для того чтобы пространство X было паракомпактно, необходимо и достаточно, чтобы всякая система σ, касающаяся всех локально конечных покрытий пространства X, имела непустое пересечение.*

Доказательство. 1°. Пусть любая система замкнутых множеств σ, касающаяся всех локально конечных покрытий пространства X, имеет непустое пересечение. Докажем, что X паракомпактно. В противном случае существует открытое покрытие $\omega = \{U_\lambda\}$, в которое нельзя вписать никакое локально конечное покрытие. Тогда система $\sigma = \{X \setminus U_\lambda\}$ касается всех локально конечных покрытий и имеет пустое пересечение.

2°. Пусть пространство X паракомпактно и $\sigma = \{F_\lambda\}$ есть произвольная система замкнутых множеств, касающаяся всех локально конечных покрытий. Пусть $\bigcap F_\lambda = \Lambda$. Тогда $\omega = \{X \setminus F_\lambda\}$ есть покрытие пространства X. В него можно вписать локально конечное покрытие $\alpha = \{V\}$. Так как система σ касается покрытия α, то имеется элемент $V^* \in \alpha$, пересекающийся со всеми $F_\lambda \in \sigma$, что противоречит тому, что V^* содержится в некотором элементе $U_\lambda \in \omega$. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 6. Каждой точке $x \in X$ соответствует в N_α симплекс $t_\alpha(x) = |e_\alpha^0, \ldots, e_\alpha^r|$, образованный всеми теми e_α^i, для которых $x \in A_\alpha^i$. Очевидно, что при $\alpha' > \alpha$ имеем $\tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'} t_{\alpha'}(x) = t_\alpha(x)$. Итак, $\{t_\alpha(x)\}$ — нить спектра $S_\xi X$. Докажем, что $\{t_\alpha(x)\}$ — максимальная нить. Пусть нить $\xi = \{t_\alpha\}$ объемлет нить $\{t_\alpha(x)\}$ и отлична от нее. Это значит, что $t_\alpha(x) \leqslant t_\alpha$, причем для некоторого α_0 имеем $t_{\alpha_0}(x) < t_{\alpha_0}$, так что $t_{\alpha_0} = |e_{\alpha_0}^0, \ldots$ $\ldots, e_{\alpha_0}^r, e_{\alpha_0}^{r+1}, \ldots, e_{\alpha_0}^s|$.

Пусть $A(t_\alpha)$ — пересечение всех A_α^i, где e_α^i — вершина симплекса t_α. Рассмотрим систему $\sigma = \{A(t_\alpha)\}$ замкнутых множеств паракомпакта X; очевидно, что при $\alpha' > \alpha$ мы имеем $A(t_{\alpha'}) \subseteq A(t_\alpha)$, откуда следует, что система σ центрирована. Докажем, что она касается всех локально конечных открытых покрытий паракомпакта X. В самом деле, каково бы ни было локально конечное покрытие ω, имеется вписанное в него разбиение ψ_{α_1}. Возьмем произвольную вершину $e_{\alpha_1}^i$ симплекса $t_{\alpha_1} \in \xi$. В покрытии ω имеется элемент U, содержащий множество $A_{\alpha_1}^i$, а значит, и подавно множество $A(t_{\alpha_1})$ и всякое $A(t_{\alpha'})$ при $\alpha' > \alpha_1$. Пусть дано произвольное α. Так как существует $\alpha' > \alpha$, α_1 и $A(t_{\alpha'}) \subseteq U$, $A(t_{\alpha'}) \subseteq A(t_\alpha)$, то $A(t_\alpha) \cap U \neq \Lambda$, чем доказано, что U пересекается со всеми $A(t_\alpha) \in \sigma$, т. е. что σ — система, касающаяся всех локально конечных покрытий пространства X. Но тогда, в силу предложения 2, имеем $\bigcap\limits_\alpha A(t_\alpha) \neq \Lambda$. Так как $A(t_\alpha) \subseteq A_\alpha^0$ (где A_α^0 — фиксированное множество из разбиения α, содержащее точку x) и $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha^0 = x$, то и $\bigcap\limits_\alpha A(t_\alpha) = x$.

В частности, $x \in A_{\alpha_0}^{r+1}$, а это противоречит тому, что множества $A_\alpha^0, \ldots, A_\alpha^r$ — все элементы разбиения ψ_α, содержащие точку x.

Итак, каждой точке $x \in X$ соответствует максимальная нить $\{t_\alpha(x)\}$.

Обратно, каждая максимальная нить $\xi = \{t_\alpha\}$ есть нить вида $\{t_\alpha(x)\}$ для некоторой точки $x \in X$. В самом деле, мы видели, что, полагая при $t_\alpha = |e^0_\alpha, \ldots, e^r_\alpha|$

$$A(t_\alpha) = \bigcap_{i=0}^{r} A^i_\alpha,$$

мы можем найти точку $x \in \bigcap_\alpha A(t_\alpha)$. Если хотя бы для одного α, точка x принадлежала, кроме множеств $A^0_{\alpha_0}, \ldots, A^r_{\alpha_0}$, соответствующих вершинам $e^0_{\alpha_0}, \ldots, e^r_{\alpha_0}$ симплекса t_{α_0}, еще хотя бы одному $A^{r+1}_{\alpha_0}$, то нить ξ не была бы максимальной. Поэтому $t_\alpha = t_\alpha(x)$ для всех α. Итак, ставя в соответствие каждой точке $x \in X$ максимальную нить $\xi = \{t_\alpha(x)\}$, получим отображение $f\colon X \longrightarrow \hat{S}_\zeta X$ пространства X на пространство $\hat{S}_\zeta X$. Это отображение взаимно однозначно (так как если $t_\alpha(X) = t_\alpha(x')$ для всех α, то, поскольку система ζ_X измельчающаяся, $x = x'$). Для доказательства того, что отображение f топологично, посмотрим, чему соответствуют для данной точки $x \in X$ и соответствующей точки $\xi = f(x)$ множества $O_\alpha\xi = O_{t_\alpha}$. Так как для $\xi = \{t_\alpha\} = f(x)$ имеем $t_\alpha = t_\alpha(x)$, то $O_\alpha\xi$ состоит из тех точек $\xi' = f(x')$, для которых x' лежит только в тех $A_\alpha \in \psi_\alpha$, в которых содержится x. Другими словами,

$$f^{-1}O_\alpha\xi = X \diagdown \bigcup_{x \notin A_\alpha} A^\lambda_\alpha.$$

Ввиду консервативности разбиения ψ_α множество $O_\alpha x = X \diagdown \bigcup_{x \notin A^\lambda_\alpha} A^\lambda_\alpha$ — открытое множество, содержащее точку x и, значит, окрестность этой точки. Так как система разбиений ζ_X измельчающаяся, то множества $O_\alpha x$ образуют базу точки x в пространстве X. Итак, при взаимно однозначном соответствии f между пространствами X и $\hat{S}_\zeta X$ базе пространства $\hat{S}_\zeta X$ соответствует база пространства X, что и означает, что соответствие f — топологическое. Теорема доказана.

§ 3. Теорема реализации для абстрактных спектров

Два спектра называются *эквивалентными* (Александров [9]), если от одного из них можно перейти к другому посредством конечного числа следующих операций: переход от данного спектра к изоморфному ему; переход от данного спектра к его конфинальной части; переход от данного спектра к спектру, содержащему данный в качестве конфинальной части. Два спектра называются *сильно эквивалентными*, если они эквивалентны и, кроме того, состоят из одних и тех же (или изоморфных) комплексов. Например, два спектра, из которых один получается из другого усилением (или ослаблением) порядка, сильно эквивалентны между собой.

Другим частным случаем сильной эквивалентности двух спектров S и S^* является случай, когда спектр S^* получается из S посредством так называемой мультипликации. Мы получаем, по определению, мультипликацию данного направленного множества $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$, если заменяем каждый его элемент α совокупностью новых элементов, которые будем обозначать $\alpha\lambda$, $\alpha\mu$ и т. д. В множество $\mathfrak{A}^*=\{\alpha\lambda\}$ полученных таким образом элементов $\alpha\lambda$ вводим порядок, полагая $\alpha'\lambda' \geqslant \alpha\lambda$ тогда и только тогда, когда $\alpha' \geqslant \alpha$. Если $S=\{K_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ есть спектр над направленным множеством $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$, то его мультипликацией, определенной данной мультипликацией $\mathfrak{A}^*=\{\alpha\lambda\}$ его множества индексов $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$, называется спектр $S^*=\{K_{\alpha\lambda}, \mathfrak{S}_{\alpha\lambda}^{\alpha'\lambda'}\}$ над направленным множеством $\mathfrak{A}^*=\{\alpha\lambda\}$ (мультипликацией множества $\mathfrak{A}$), причем $K_{\alpha\lambda}$ есть тот же комплекс K_α, лишь снабженный индексом λ, и при $\alpha'\lambda' \geqslant \alpha\lambda$ (т. е. при $\alpha' \geqslant \alpha$) проекция $\mathfrak{S}_{\alpha\lambda}^{\alpha'\lambda'}\colon K_{\alpha'\lambda'} \to K_{\alpha\lambda}$ совпадает с проекцией $\mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\colon K_{\alpha'} \to K_\alpha$. Можно сказать, что спектр $S^*=\{K_{\alpha\lambda}, \mathfrak{S}_{\alpha\lambda}^{\alpha'\lambda'}\}$ получается из спектра $S=\{K_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ тем, что каждый комплекс K_α «повторяется» столько раз, сколько имеется пар (α, λ) при данном α (и проекции на S переходят в S^* без изменения).

Сформулируем теорему реализации для конечных спектров.

Теорема $7_\varkappa$. *Всякий конечный абстрактный проекционный спектр сильно эквивалентен спектру над некоторым семейством конечных разбиений бикомпактного полурегулярного T_0-пространства (а именно над семейством $\varphi=\{\varphi_\alpha\}$ конечных разбиений) полного предела $\bar{S}$ спектра S.*

Доказательство теоремы $7_\varkappa$.

Основная лемма. *В конечном спектре $S=\{K_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ семейство $\varphi_\alpha=\{\Phi e_\alpha\}$, где e_α пробегает все вершины комплекса K_α, есть разбиение пространства $\bar{S}$.*

Очевидно, что для каждого α семейство $\varphi_\alpha=\{\Phi e_\alpha\}$ есть покрытие пространства $\bar{S}$. Ранее мы установили, что множества Φe_α суть $\varkappa a$-множества и $\Phi e_\alpha=[Oe_\alpha]_{\bar{S}}$ (см. доказательство предложения 8 § 1). Остается проверить дизъюнктность открытых ядер множеств Φe_α. Но для различных вершин e_α и $e_{\alpha'}$ комплекса K_α имеем $Oe_\alpha \cap Oe_{\alpha'}=\Lambda$, значит, $\langle[Oe_\alpha]\rangle \cap \langle[Oe_{\alpha'}]\rangle=\langle\Phi e_\alpha\rangle \cap \langle\Phi e_{\alpha'}\rangle=\Lambda$. Следовательно, φ_α есть разбиение.

Для доказательства теоремы $7_\varkappa$ остается убедиться в том, что конечный спектр S сильно эквивалентен спектру S_φ над семейством $\varphi=\{\varphi_\alpha\}$ конечных разбиений пространства $\bar{S}$.

Прежде всего, очевидно, что спектры S и S_φ направлены одним и тем же множеством индексов $\mathfrak{A}=\{\alpha\}$.

Доказываем теперь, что нерв N_α покрытия φ_α совпадает с комплексом K_α, т. е. что какие-нибудь вершины $e_\alpha^0, \ldots, e_\alpha^r$ комплекса K_α тогда и только тогда образуют остов в этом комплексе, когда $\Phi e_\alpha^0 \cap \ldots \cap \Phi e_\alpha^r \neq \Lambda$.

Фиксируем $\alpha = \alpha_0$, и пусть $\xi = \{t_\alpha\} \in \Phi e_{\alpha_0}^0 \cap \ldots \cap \Phi e_{\alpha_0}^2 \neq \Lambda$. Тогда симплекс t_{α_0} имеет в числе своих вершин $e_{\alpha_0}^0, \ldots, e_{\alpha_r}^r$, которые, следовательно, образуют остов в K_{α_0}. Пусть теперь, наоборот, $\tau_{\alpha_0} = |e_{\alpha_0}^0, \ldots, e_{\alpha_0}^r|$ — произвольный симплекс комплекса K_{α_0}. В силу теоремы 1 § 1 существует нить $\xi = \{t_\alpha\}$, объемлющая симплекс τ_{α_0}, и тогда $\xi \in \Phi e_{\alpha_0}^0 \ldots \Phi e_{\alpha_0}^r \neq \Lambda$. Наше утверждение доказано. Итак, спектры S и S_φ состоят из одних и тех же комплексов $K_\alpha = N_\alpha$.

Пусть $\alpha' > \alpha$. Тогда, очевидно, из $\mathfrak{D}_\alpha^{\alpha'} e_{\alpha'} = e_\alpha$ следует $\Phi e_{\alpha'} \subseteq \Phi e_\alpha$. Обратно (в предположении $\alpha' > \alpha$), из $\Phi e_{\alpha'} \subseteq \Phi e_\alpha$ следует, что $\mathfrak{D}_\alpha^{\alpha'} e_{\alpha'} = e_\alpha$; в противном случае имели бы $\mathfrak{D} e_\alpha^{\alpha'} = e_\alpha^* \neq e_\alpha$ и $\Phi e_{\alpha'} \subseteq \subseteq \Phi e_\alpha \cap \Phi e_\alpha^*$, что невозможно, так как φ_α есть разбиение.

Итак, при $\alpha' > \alpha$ разбиение $\varphi_{\alpha'}$ вписано в разбиение φ_α, причем утверждения $\mathfrak{D}_\alpha^{\alpha'} e_{\alpha'} = e_\alpha$ и $\Phi e_{\alpha'} \subseteq \Phi e_\alpha$ равнозначны.

Введем теперь в множество $\mathfrak{A} = \{\alpha\}$ новый порядок, полагая $\alpha' \overset{*}{>} \alpha$, если $\varphi_{\alpha'}$ вписано в φ_α. Из только что доказанного вытекает, что порядок $\overset{*}{>}$ больше порядка $>$ (или совпадает с ним) в том смысле, что из $\alpha' > \alpha$ вытекает, что $\alpha' \overset{*}{>} \alpha$.

Замечание 1. Из предыдущего следует, что порядок $\overset{*}{>}$ является максимальным из всех порядков, которые можно ввести в спектр S, не изменяя его полного предела.

Внеся новый порядок $\overset{*}{>}$ в спектр S, мы должны еще определить проекции $\overset{*}{\mathfrak{D}}{}_\alpha^{\alpha'}$ для $\alpha' \overset{*}{>} \alpha$. Делаем это, полагая $\overset{*}{\mathfrak{D}} e_{\alpha'} = e_\alpha$, если $\Phi e_{\alpha'} \subseteq \Phi e_\alpha$.

В силу только что доказанного, вводя в спектр S новый порядок $\overset{*}{>}$, мы получаем спектр $S' = \{K_\alpha, \overset{*}{\mathfrak{D}}{}_\alpha^{\alpha'}\}$, являющийся порядковым усилением спектра S и, следовательно, сильно эквивалентный исходному спектру S.

Определение 1. Спектр S_φ над семейством $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$ разбиений пространства $\bar{S}$ называется спектром, *сопряженным* к спектру S.

Замечание 2. Так как все φ_α конечны, то проекции в спектре S_φ суть отображения «на».

Различным индексам $\alpha' \neq \alpha$ может соответствовать одно и то же разбиение $\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha'}$ пространства S_φ. Поэтому получим мультипликацию S'_φ спектра S_φ, если каждое разбиение φ_α повторим столько раз, сколько имеется для него таких индексов. Спектры S_φ и S'_φ сильно эквивалентны между собой; поэтому для доказательства теоремы $7_\varkappa$ достаточно показать, что спектры $S_\varphi = \{N_\alpha, \mathfrak{D}_\alpha^{\alpha'}\}$ и $S' = \{K_\alpha, \overset{*}{\mathfrak{D}}{}_\alpha^{\alpha'}\}$ изоморфны.

Ввиду доказанного равенства $N_\alpha = K_\alpha$ для завершения доказательства изоморфизма спектров S' и S'_φ надо только вспомнить, что проекции в обоих спектрах одни и те же.

Теорема $7_\varkappa$ доказана. Она является весьма частным случаем общей теоремы реализации, доказанной Зайцевым [3] и утверждающей, что любой спектр S, принадлежащий к определенному чрезвычайно широкому классу проекционных спектров, эквивалентен спектру над некоторым направленным семейством φ канонических покрытий полурегулярного T_0-пространства $\overline{S}$.

§ 4. Леммы о неприводимых замкнутых отображениях

Определение 2. Пусть дано произвольное отображение $f\colon X \longrightarrow Y$ пространства X на Y. Это отображение называется *неприводимым*, если для всякого замкнутого $A \subseteq X$, $A \neq X$, множество fA отлично от Y.

Предложение 1. (Пономарев [2]). *Для того чтобы непрерывное отображение $f\colon X \longrightarrow Y$ было одновременно замкнуто и неприводимо, необходимо и достаточно, чтобы малый образ $f^\# U$ всякого непустого открытого в X множества U был непустым открытым множеством в Y.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ замкнуто и неприводимо и $\Lambda \neq U = \langle U \rangle \subseteq X$. Положив $F = X \setminus U$, имеем: fF замкнуто и отлично от Y, т. е. $Y \setminus fF$ — открытое непустое множество. Но $Y \setminus fF = f^\# U$. Достаточность проверяется так же просто с применением равенства $fF = Y \setminus f^\# (X \setminus F)$.

Предложение 2 (Пономарев [2]). *Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ — замкнутое неприводимое отображение и U — непустое открытое подмножество пространства X. Тогда $f[U] = [f^\# U]$. В частности, образ $\varkappa\alpha$-множества есть $\varkappa\alpha$-множество.*

Доказательство. Ясно, что $f[U] \supseteq fU \supseteq f^\# U$. Поэтому вследствие замкнутости отображения f имеем $f[U] \supseteq [f^\# U]$. Для проверки обратного включения, в силу общего для всех непрерывных f включения $f[M] \subseteq [fM]$, достаточно доказать, что $fU \subseteq [f^\# U]$. Предположим, что это не так, т. е. существует точка $x \in fU \setminus [f^\# U]$. Возьмем такую точку $y \in U$, что $fy = x$. Существует такая окрестность Oy точки y, что $Oy \subseteq U$ и $fOy \subset Ox = X \setminus [f^\# U]$. Тогда $fOy \cap [f^\# U] = \Lambda$ и тем более $f^\# Oy \cap f^\# U = \Lambda$. Но последнее противоречит тому, что $f^\# Oy \neq \Lambda$ в силу неприводимости отображения f, и $f^\# Oy \subseteq f^\# U$. Предложение 2 доказано.

Выведем теперь из предложения 2 следующее

Предложение 3. *Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ — замкнутое неприводимое отображение пространства X на пространство Y, и пусть F есть $\varkappa\alpha$-множество в пространстве Y. Тогда существует единственное $\varkappa\alpha$-множество пространства X, отображающееся на множество F.*

Доказательство. Проверим, что таким множеством является множество $[f^{-1}\langle F\rangle]$. Применяя предыдущее предложение при $U=f^{-1}\langle F\rangle$, получаем $f[f^{-1}\langle F\rangle]=F$. Предположим теперь, что в пространстве X существуют два таких различных $\varkappa a$-множества Φ_1 и Φ_2, что $f\Phi_1=f\Phi_2=F$. Положив $U_i=\langle\Phi_i\rangle$, $i=1$, 2, имеем $U_1\neq U_2$; тогда одна из разностей $U_1\setminus\Phi_2$ и $U_2\setminus\Phi_1$ непуста. Пусть, например, $V=U_1\setminus\Phi_2\neq\Lambda$. Тогда, с одной стороны, $f^{\#}V\subseteq f(U_1\setminus\Phi_2)\subseteq fU_1\subseteq F$. С другой стороны, $f^{\#}V=f^{\#}U_1\setminus f\Phi_2$. Следовательно, $f^{\#}V\cap F=\Lambda$. Это противоречит тому, что множество $f^{\#}V$ непусто. Предложение доказано.

Из последних двух предложений вытекает важное.

Следствие. *Пусть f: $X\to Y$ — замкнутое неприводимое отображение. Оно порождает отображение множества $\mathfrak{A}_X$ $\varkappa a$-множеств пространства X в множество $\mathfrak{A}_Y$ $\varkappa a$-множеств пространства Y, которое будем обозначать также через f. Отображение f: $\mathfrak{A}_X\to\mathfrak{A}_Y$ есть взаимно однозначное сохраняющее порядок отображение $\mathfrak{A}_X$ на $\mathfrak{A}_Y$, т. е. изоморфизм частично упорядоченных множеств $\mathfrak{A}_X$ и $\mathfrak{A}_Y$.*

§ 5. Абсолют регулярного пространства

Напомним, что H-системой регулярного пространства X называется всякая система $\xi=\{A\}$ непустых $\varkappa a$-множеств пространства X, направленная по включению, т. е. удовлетворяющая условию: ко всяким двум элементам $A\in\xi$, $A'\in\xi$ имеется третий $A''\in\xi$, содержащийся в них обоих: $A''\subseteq A'\cap A$. Максимальные H-системы назовем H-концами. Методом трансфинитной индукции всякую H-систему можно дополнить до H-конца.

Отметим следующие простые свойства H-концов:

1°. Для любого конечного набора элементов A_i H-конца p найдется элемент $A'\in p$, содержащийся во всех A_i.

2°. Если $A_i\in p$, $i=1, \ldots, n$, то $\left[\bigcap\limits_{i=1}^{n}\langle A_i\rangle\right]\in p$.

3°. Если $A_1\in p$ и A_2 есть $\varkappa a$-множество, содержащее A_1, то $A_2\in p$.

4°. $\varkappa a$-множество A принадлежит H-концу p в том и только в том случае, если для любого $A'\in p$ имеем $A'\cap\langle A\rangle\neq\Lambda$.

Свойства 1°—3° автоматически вытекают из определения H-конца. Проверим свойство 4°. Пусть открытое ядро $\varkappa a$-множества A пересекается со всеми элементами A_α H-конца p. Тогда все множества системы $\eta_0'=\{[\langle A\rangle\cap\langle A_\alpha\rangle]\mid A_\alpha\in p\}$ непусты. Нетрудно проверить, что система η_0' является H-системой. Дополним ее до некоторого H-конца η'. Из свойства 3° следует, что $A\in\eta'$ и $p\subseteq\eta'$, откуда в силу максимальности p получаем: $p=\eta'$ и, следовательно, $A\in p$. Свойство 4° проверено.

В дальнейшем нам потребуется следующее

Предложение 1. *Пусть $\alpha=\{A_i\}$ — конечное покрытие пространства X κa-множествами. Тогда для любого H-конца p пересечение $p\cap\alpha$ непусто (т. е. всегда найдется элемент покрытия α, который принадлежит H-концу p).*

Доказательство. В силу свойства 4° достаточно доказать, что открытое ядро некоторого элемента покрытия α пересекается со всеми элементами H-конца p. Предположим противное, т. е. для любого $A_i\in\alpha$ найдется такое $A_{\alpha_i}\in p$, что $\langle A_i\rangle\cap A_{\alpha_i}=\Lambda$. Но тогда пересечение $\bigcap\limits_i A_{\alpha_i}$, имеющее непустое открытое ядро, содержится в множестве $X\diagdown\bigcup\limits_i\langle A_i\rangle$, ядро которого, очевидно, пусто, — противоречие. Предложение доказано.

Обозначим теперь через $H(X)$ множество всех H-концов пространства X. В множестве $H(X)$ зададим классическую топологию, базой которой является совокупность всех множеств вида O_A, где под O_A понимается множество всех H-концов, содержащих множество A в качестве элемента. Эта база, определенная в качестве открытой базы, оказывается, как мы сейчас покажем, и замкнутой.

Теорема 8. *Пространство $H(X)$ — индуктивно нульмерное бикомпактное хаусдорфово пространство.*

Прежде всего докажем следующие формулы:

а) $O_{A_1\cup A_2}=O_{A_1}\cup O_{A_2}$;

б) $O_A=H(X)\diagdown O_{X\diagdown\langle A\rangle}$.

Действительно, пусть $p\in O_{A_1}$, т. е. $A_1\in p$. Тогда, в силу свойства 3°, и $A_1\cup A_2\in p$, т. е. $p\in O_{A_1\cup A_2}$; следовательно, $O_{A_1}\cup O_{A_2}\subseteq O_{A_1\cup A_2}$. Пусть теперь $p\in O_{A_1\cup A_2}$, т. е. $A_1\cup A_2\in p$. Если $A_1\notin p$, то $X\diagdown\langle A_1\rangle\in p$ *) и, следовательно (в силу свойства 2°), $[(X\diagdown A_1)\cap\langle A_1\cup A_2\rangle]\in p$. Но $[(X\diagdown A_1)\cap\langle A_1\cup A_2\rangle]\subseteq A_2$, следовательно, $A_2\in p$, т. е. $p\in O_{A_2}$. Итак, $O_{A_1\cap A_2}\subseteq O_{A_1}\cup O_{A_2}$, т. е. равенство а) доказано. Положив в нем $A_1=A$, $A_2=X\diagdown\langle A\rangle$ и заметив, что любой H-конец содержит X в качестве элемента, получим равенство б).

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Непосредственно из определения топологии вытекает, что $H(X)$ есть T_1-пространство. Каждое открытое множество O_A, в силу равенства б), является замкнутым. Следовательно, пространство $H(X)$ имеет базу из открыто-замкнутых множеств, т. е. $H(X)$ индуктивно нульмерно. Из индуктивной нульмерности и T_1-отделимости

---

*) В силу предложения 1.

вытекает хаусдорфовость пространства $H(X)$. Покажем, наконец, что $H(X)$ бикомпактно. Пусть дано некоторое покрытие $\{O_{A_\alpha}\}$ пространства $H(X)$ множествами базы. Если из этого покрытия нельзя выделить конечного подпокрытия, то все $\varkappa a$-множества вида $\left[X\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}\right]$ непусты. Иначе система $\varkappa a$-множеств $\{A_{\alpha_i}\}$ являлась бы покрытием пространства X и, в силу предложения 1, множества $O_{A_{\alpha_i}}$ покрывали бы $H(X)$. Далее, легко видеть, что система множеств вида $\left[X\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}\right]$ образует H-систему (поскольку $\left[X\setminus\bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}\right]\cap\left[X\setminus\bigcup_{i=n+1}^{m} A_{\alpha_i}\right]\supseteq\left[X\setminus\bigcup_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}\right]$). Дополним эту H-систему до некоторого H-конца p. Ясно, что p не входит ни в одно O_{A_α}, так как p содержит, в частности, все множества $[X\setminus A_\alpha]$. Полученное противоречие доказывает бикомпактность пространства $H(X)$. Теорема доказана.

Будем говорить, что H-конец p касается точки x или что x есть точка прикосновения H-конца p, если $x\in\bigcap_{A_\alpha\in p} A_\alpha$. Множество H-концов, имеющих точки прикосновения, образует подпространство $h(X)$ в пространстве $H(X)$ всех H-концов.

Предложение 2. *H-конец p касается точки x тогда и только тогда, когда p содержит замыкания всех окрестностей точки x.*

Доказательство. Пусть p касается точки x и Ox — произвольная окрестность этой точки. В силу предложения 1 одно из множеств $[Ox]$ или $X\setminus Ox$ принадлежит p. Но так как $x\notin X\setminus Ox$ и $x\in A$ для любого $A\in p$, то $[Ox]\in p$, что и требовалось доказать.

Обратно, пусть p содержит замыкания всех окрестностей точки x. В силу свойства 4° для любого A из p множество $[X\setminus A]$ не принадлежит p; следовательно, $X\setminus A$ не является окрестностью точки x, т. е. $x\in A$. Предложение доказано.

Следствие. *Для любой точки x существует H-конец, который ее касается.*

Для доказательства достаточно дополнить H-систему замыканий всех окрестностей точки x до H-конца.

Таким образом, ставя в соответствие каждому H-концу $p\in h(X)$ его (единственную) точку прикосновения, мы получим естественное отображение $\pi_X\colon h(X)\to X$ пространства $h(X)$ на X.

Пространство hX и есть (как мы покажем) *абсолют* aX *регулярного пространства* X, т. е. *единственный максимальный совершенный неприводимый прообраз* этого пространства.

Замечание 1. Если пространство X есть H-замкнутое пространство (значит, и подавно, если X — бикомпакт), то все H-концы $p \in H(X)$ имеют точки прикосновения и абсолют $aX = h(H) = H(X)$ является бикомпактом.

Переходим к доказательству того, что $h(X)$ действительно есть абсолют пространства X.

Этот основной факт является следствием нескольких частных результатов, которые мы будем последовательно формулировать и доказывать.

Лемма 1. *Пусть* X — *регулярное пространство. Тогда естественное отображение* π_X: $h(X) \to X$ *пространства* $h(X)$ *на* X *является неприводимым и совершенным.*

Доказательство. Непрерывность π_X сразу следует из включения $\pi_X\ (O_A \cap h(X)) \subseteq A$ и регулярности пространства X. В силу предложения 2 $\pi_X^{-1}x = \bigcap\limits_{Ox} O_{[Ox]}$. Поэтому множество $\pi_X^{-1}x$ бикомпактно, как замкнутое подмножество бикомпакта $H(X)$.

Для доказательства замкнутости и неприводимости отображения π_X нам потребуется равенство

$$\pi_X^{\#}(O_A \cap h(X)) = \langle A\rangle \tag{1}$$

для любого $\varkappa a$-множества A, которое мы сейчас докажем.

Включение $\pi_X^{\#}(O_A \cap h(X)) \supseteq \langle A\rangle$ сразу следует из предложения 2. Докажем обратное включение $\pi_X^{\#}(O_A \cap h(X)) \subseteq \langle A\rangle$. Возьмем произвольную точку x, не лежащую в $\langle A\rangle$. Пусть $\xi = \{[Ox]\}$ есть H-система замыканий всех окрестностей точки x. Дополним ее до H-системы $\xi' = \xi \cup \{[Ox \cap (X \setminus A)]\}$. Любой H-конец p, содержащий H-систему ξ', касается точки x, так как $p \supset \xi$. В то же время $p \not\ni A$, поскольку $p \ni X \setminus \langle A\rangle$. Значит, $p \notin O_A$, и, следовательно, $x \notin \pi_X^{\#} O_A$. Равенство (1) доказано.

Неприводимость отображения π_X следует из равенства (1) автоматически. Докажем замкнутость π_X. Пусть Φ — замкнутое подмножество в $h(X)$, и пусть $x \in X \setminus \pi_X \Phi$. Нужно доказать, что существует такая окрестность U точки x в пространстве X, что $U \cap \pi_X \Phi = \Lambda$. Так как $\pi_X^{-1}x$ бикомпактно, то найдется открытое в $h(X)$ множество V, содержащее $\pi_X^{-1}x$ и не пересекающееся с Φ. В силу бикомпактности $\pi_X^{-1}x$ и формулы а) можно считать, что V имеет вид $O_{A'} \cap h(X)$. Тогда открытое множество $\pi_X^{\#}(O_{A'} \cap h(X)) = \langle A'\rangle$ содержит точку x и не пересекается с множеством $\pi_X \Phi$. Замкнутость π_X доказана. Доказательство леммы закончено.

Итак, пространство $h(X)$ (вполне регулярное как подпространство бикомпакта $H(X)$) посредством неприводимого совершенного отображения π_X отображено на X. Другими словами, $h(X)$ есть неприводимый совершенный прообраз пространства X.

Остается доказать, что этот прообраз является максимальным и притом единственным максимальным прообразом, т. е. абсолютом пространства X.

Пусть f есть неприводимое совершенное отображение регулярного пространства X на регулярное пространство Y. Из лемм о неприводимых отображениях, доказанных в § 4, вытекает следующий основной для нас результат:

Лемма 2. *Всякое совершенное неприводимое отображение f пространства X на пространство Y порождает вполне определенное топологическое отображение $f^{\bullet}$ пространства $h(X)$ на пространство $h(Y)$, продолжающееся до топологического отображения $\overline{f}^{\bullet}$ бикомпакта $H(X)$ на бикомпакт $H(Y)$.*

Доказательство. Мы знаем (см. следствие из предложения 3 § 4), что при неприводимом замкнутом отображении $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ множество $\mathfrak{A}_X$ всех $\varkappa a$-множеств пространства X изоморфно отображается на множество $\mathfrak{A}_Y$ всех $\varkappa a$-множеств пространства Y. Нетрудно видеть, что это изоморфное отображение порождает гомеоморфизм $\overline{f}^{\bullet}$ пространств $H(X)$ и $H(Y)$, причем всякий H-конец, касающийся точки x, переходит в H-конец, касающийся точки $f(x)$, т. е. $\overline{f}^{\bullet} h(X) \subseteq h(Y)$. Докажем, что если неприводимое замкнутое отображение $f\colon X \to Y$ является бикомпактным (т. е. совершенным), то, и обратно, всякий H-конец $p \in h(Y)$ является при отображении $\overline{f}$ образом некоторого H-конца $q \in h(X)$, другими словами, отображение $\overline{f}^{\bullet}$, рассматриваемое на $h(X)$, топологически отображает $h(X)$ на $h(Y)$. В самом деле, пусть H-конец $p \in h(Y)$ касается точки y и $p = \overline{f}^{\bullet}(q)$.

Множество $\Phi = f^{-1}y$ бикомпактно в силу бикомпактности отображения f. Система замкнутых подмножеств $\{\Phi \cap A_\alpha \mid A_\alpha \in q\}$ бикомпакта Φ, очевидно, центрирована и, следовательно, имеет непустое пересечение: $\bigcap\limits_{A_\alpha \in q} (\Phi \cap A_\alpha) = \Phi \cap \bigcap\limits_{A_\alpha \in q} A_\alpha \neq \Lambda$, откуда следует, что H-конец q имеет точку прикосновения, т. е. $q \in h(X)$. Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 следует, что пространство $h(h(X))$ гомеоморфно $h(X)$.

Рассмотрим теперь естественные отображения π_X и π_Y пространств $h(X)$, $h(Y)$ соответственно на X и Y и докажем следующее предложение:

Лемма 3. *Всякое совершенное неприводимое отображение f пространства X на пространство Y может быть представлено в виде*

$$f = \pi_Y f^{\bullet} \pi_X^{-1}, \tag{2}$$

где $f^{\bullet}$ есть (однозначно определенное отображением f) топологическое отображение пространства $h(X)$ на $h(Y)$.

Заметим прежде всего, что из самого определения отображений π_X, π_Y, $f^{\bullet}$ следует, что, какова бы ни была точка $x \in X$ и $\dot{x} \in \pi_X^{-1}x$, имеем $\pi_Y f^{\bullet}\dot{x} = fx$.

В самом деле, если $\dot{x} \in \{A_\alpha\} \in \pi_X^{-1}x$, то $x = \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$; тогда $f^{\bullet}\dot{x} = \{fA_\alpha\}$ $fx = \bigcap\limits_\alpha fA_\alpha = \pi_Y f^{\bullet}\dot{x}$. А это значит, что отображение f представляется в виде (2) *).

Наконец, мы доказываем завершающее предложение:

Лемма 4. *Пространство $h(X)$ есть единственное пространство, являющееся неприводимым совершенным прообразом всякого неприводимого совершенного прообраза пространства X.*

Доказательство. Согласно леммам 1 и 2 пространство $h(X)$ неприводимо и совершенно отображается на всякий неприводимый совершенный прообраз пространства X. Пусть теперь другое пространство X_0 неприводимо и совершенно отображается на всякий неприводимый совершенный прообраз пространства X, значит, в частности, и на $h(X)$, так что существует неприводимое совершенное отображение g пространства X_0 на $h(X)$. Так как $h(X_0) = h(h(X)) = h(X)$, то имеем диаграмму (где I — тождественное отображение)

$$\begin{tikzcd}
h(X) \arrow[r, "\dot{g}"] \arrow[d, "\pi_{X_0}"'] & h(X) \arrow[d, "I"] \\
X_0 \arrow[r, "g"'] & h(X)
\end{tikzcd}$$

откуда $g = I\dot{g}\pi_{X_0}^{-1}$. Если бы $\pi_{X_0}^{-1}$ было многозначным, то было бы многозначным и g, что противоречит предположению. Итак $\pi_{X_0}^{-1}$ однозначно, значит, π_{X_0} — взаимно однозначное совершенное,

---

*) Если $f^{\bullet}$ — произвольное топологическое отображение пространства $h(X)$ на пространство $h(Y)$, то отображение f, определяемое равенством (2), есть, вообще говоря, многозначное совершенное и неприводимое отображение. Многозначное отображение называется совершенным (неприводимым), если оно допускает представление в виде $f = p_Y p_X^{-1}$, где p_X есть однозначное совершенное (неприводимое) отображение некоторого пространства Z на X, а p_Y — однозначное совершенное (неприводимое) отображение того же пространства Z на Y.

Всякое многозначное неприводимое совершенное отображение f пространства X на пространство Y представимо в виде (2) (см. Пономарев [2]).

т. е. топологическое, отображение пространства $h(X)$ на X_0 — наше утверждение доказано.

Подведем итог:

Основная теорема. *Вполне регулярное пространство $h(X)$, построенное для всякого регулярного пространства X, является единственным максимальным неприводимым и совершенным прообразом, т. е. абсолютом пространства X.*

Следствие. *Если всякий H-конец $\xi = \{A\}$ в регулярном пространстве X имеет непустое пересечение, то X — бикомпакт.*

В самом деле, из нашего предположения, что абсолют $aX = h(X)$ пространства X есть бикомпакт $H(X) = h(X)$, а тогда X, как непрерывный образ своего абсолюта, также есть бикомпакт.

Так как утверждение, обратное к этому следствию, очевидно, то

Регулярное пространство тогда и только тогда бикомпактно, когда в нем всякая направленная по включению система непустых κа-множеств имеет непустое пересечение.

Мы получили вновь теорему 8 гл. 6, элементарное доказательство которой дано в § 1 гл. 6.

Рассмотрим для данного регулярного пространства X спектр $S_\varkappa^{\cdot}X$, являющийся полным расслаблением спектра $S_\varkappa X$. Предельное пространство $\bar{S}_\varkappa^{\cdot}X$ обозначим через $\bar{D}$, а нульмерные комплексы спектра $S_\varkappa^{\cdot}X$ — через D_α.

Назовем точку (нить) $\xi = \{e_\alpha^i\} \in \bar{D} \subseteq \prod\limits_\alpha D_\alpha$ отмеченной, если $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha^i \subseteq X$ непусто; так как X — хаусдорфово пространство, то множество $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha^i$ состоит из одной точки $x = \pi'_X\xi$. Обозначим через D множество всех отмеченных точек бикомпакта $\bar{D}$; мы построили отображение $\pi'_X \colon D \longrightarrow X$ множества D в X. Оказывается, что множество D (рассматриваемое как подпространство бикомпакта $\bar{D}$) гомеоморфно пространству $h(X)$ (причем этот гомеоморфизм продолжается до гомеоморфизма бикомпактов $\bar{D}$ и $H(X)$) и, следовательно, является абсолютом пространства X. При этом отображение π'_X является совершенным и неприводимым отображением D на X.

Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующее

Предложение 3. *Множество всех элементов нульмерной нити $\xi = \{A_\alpha\}$ спектра $S_\varkappa X$ есть H-конец $\eta = \eta(\xi)$. Обратно, если $\eta = \{A_\lambda\}$ — какой-нибудь H-конец, то для любого $\alpha \in \varkappa_X$ пересечение $\eta \cap \alpha$ состоит из единственного элемента A_α и $\xi = \{A_\alpha\}$ есть нульмерная нить, для которой (очевидно) $\eta(\xi) = \eta$.*

Доказательство. Если $\xi=\{A_\alpha\}$ есть нульмерная нить спектра $S_\varkappa X$, то, взяв произвольно $A_\alpha\in\xi$, $A_{\alpha'}\in\xi$ и α'', следующее как за α, так и за α', получим $A_{\alpha''}\in\xi$, содержащееся как в A_α, так и в $A_{\alpha'}$. Другими словами, если $\xi=\{A_\alpha\}$ есть нульмерная нить, то множество ее элементов $\eta=\eta(\xi)$ есть H-система. Докажем, что $\eta(\xi)$ — максимальная H-система. Если бы H-система η содержалась в отличной от нее H-системе $\eta'=\{A'\}$, то имелось бы некоторое $A'_0\in\eta'$, $A'_0\notin\eta$. Возьмем какое-нибудь разбиение α, содержащее элемент A'_0. Так как α содержит и некоторый элемент $A_\alpha\in\eta(\xi)$, то разбиение содержало бы два различных элемента H-конца η', что невозможно.

Итак, первое утверждение предложения 3 доказано. Переходим к доказательству второго утверждения. Если $\eta=\{A_\lambda\}$ есть H-конец, то в силу предложения 1 пересечение $\eta\cap\alpha$ непусто и, следовательно, состоит из одного элемента. Докажем, что набор $\xi=\{A_\alpha^\eta\}$ этих элементов есть нить спектра $S_\varkappa X$, т. е. что при $\alpha'>\alpha$ всегда $A_{\alpha'}^\eta\subseteq A_\alpha^\eta$. Но это сразу следует из существования в H-конце ξ элемента $A^*\subseteq A_\alpha^\eta\cap A_{\alpha'}^\eta$ (и из того, что $\alpha'>\alpha$). Предложение доказано.

Таким образом, мы имеем взаимно однозначное отображение η: $\bar D\longrightarrow H(X)$ пространства $\bar D$ на пространство $H(X)$, при котором, как легко видеть, $\eta O_e=O_A$, где e — вершина спектра $S_\varkappa X$, соответствующая $\varkappa a$-множеству A. Из этого равенства заключаем, что отображение η переводит открытую базу пространства $\bar D$ в открытую базу пространства $H(X)$. Следовательно, η — гомеоморфизм между пространствами D и $H(X)$, причем $\eta D=h(X)$. Итак, имеет место

Теорема 9 (Пономарев). *Абсолют aX регулярного пространства X есть пространство D; при этом $\bar D=H(X)$.*

Замечание 2. Если пространство X имеет вес $\mathfrak{m}$, то его абсолют aX имеет вес $\leqslant\tau=2^{\mathfrak{m}}$ и мощность $\leqslant 2^\tau=2^{2^{\mathfrak{m}}}$. Это непосредственно следует из того, что aX есть подпространство бикомпакта $\prod\limits_\alpha D_\alpha$. Эти оценки не могут быть улучшены: так, абсолютом компакта N, состоящего из счетного числа изолированных точек N и одной предельной точки, является пространство βN (расширение Стоуна — Чеха натурального ряда N), имеющее вес $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$ и мощность $2^{\mathfrak{c}}$ (см. § 6, стр. 357).

Теорема 10 (Пономарев [2]). *Абсолют aX паракомпакта X совпадает с пределом полного расслабления максимального спектра $S_\zeta X$.*

Доказательство. Будем называть нить спектра $S_\zeta X$ непустой, если непусто пересечение ее элементов. При доказательстве теоремы 6 § 2 мы получили, что все нити спектра $S_\zeta X$

(в частности, и нульмерные нити) непусты. Легко проверить, что множество элементов нульмерной ζ-нити *) образует H-систему (чтобы в этом убедиться, достаточно дословно повторить доказательство этого утверждения для нульмерной $\varkappa$-нити, которая в силу непустоты ζ-нити является h-системой, т. е. H-системой, имеющей точку прикосновения). Мы уже установили взаимно однозначное соответствие между h-системами и непустыми нульмерными $\varkappa$-нитями, а именно каждой непустой $\varkappa$-нити была поставлена в соответствие h-система ее элементов. Поэтому для завершения доказательства теоремы нам достаточно доказать

Предложение 4. *Всякая непустая $\varkappa$-нить $\xi_\varkappa = \{A\}$ единственным образом дополняется до непустой ζ-нити $\xi_\zeta = \zeta\xi_\varkappa$; при этом нити $\zeta\xi_\varkappa$ и $\xi_\varkappa$ состоят из одного и того же множества элементов.*

Доказательство. Сначала докажем, что в любом разбиении $\alpha \in \zeta_X$ содержится элемент A_α — очевидно, единственный, принадлежащий данной непустой нити $\xi_\varkappa$. Для доказательства обозначим через x_0 единственную точку, принадлежащую всем множествам $A \in \xi_\varkappa$. Пусть $\sigma = \{A_\alpha^1, \ldots, A_\alpha^s\}$ — совокупность всех элементов разбиения α, содержащих точку x_0. Положим $\alpha' = \alpha \setminus \sigma$, $B = \tilde{\alpha}' = [X \setminus \tilde{\sigma}]$. Среди элементов конечного разбиения $\{A_\alpha^1, \ldots, A_\alpha^s, B\}$ пространства X один-единственный содержится в $\xi_\varkappa$. Этим элементом не может быть B, так как $x_0 \notin B$; значит, один из элементов $A_\alpha^1, \ldots, A_\alpha^s$ покрытия α содержится в $\xi_\varkappa$.

Итак, в каждом $\alpha \in \zeta_X$ содержится единственный элемент A_α нити $\xi_\varkappa$. Покажем, что полученный набор $\xi = \{A_\alpha\}$ есть ξ-нить, т. е. что при $\alpha' \geqslant \alpha$ имеем $A_{\alpha'} \subseteq A_\alpha$ (и, значит, $\tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'} A_{\alpha'} = A_\alpha$). Множество всех A_α есть H-система (как множество всех элементов $\varkappa$-нити $\xi_\varkappa$), поэтому для A_α и $A_{\alpha'}$ найдется элемент $A^* \in \xi_\varkappa$, лежащий в $A_\alpha \cap A_{\alpha'}$; но так как $\alpha' \geqslant \alpha$, то $A_{\alpha'}$ содержится в единственном элементе разбиения α и ни с каким другим элементом этого разбиения не имеет общих внутренних точек; поэтому из $A^* \in A_\alpha \cap A_{\alpha'}$ следует, что $A_{\alpha'} \subseteq A_\alpha$, так что $\xi = \{A_\alpha\}$ есть ζ-нить, и предложение 4 доказано.

Итак, мы имеем естественный гомеоморфизм между пространствами $S_\zeta X$ и $h(X)$. Этим теорема 10 доказана.

§ 6. Экстремально несвязные пространства

Топологическое пространство называется *экстремально несвязным*, если оно регулярно и граница каждого его канонического множества (открытого или замкнутого) пуста. Так как

---

*) Чтобы в дальнейшем различать нити спектров $S_\varkappa X$ и $S_\zeta X$, мы будем называть их соответственно $\varkappa$-нить и ζ-нить.

ка- и *ко*-множества взаимно дополнительны, то все равно, требовать ли в этом определении пустоту границы *ка*- или *ко*-множеств. Очевидно, что экстремально несвязные пространства могут быть определены как регулярные пространства, удовлетворяющие произвольному из следующих условий:

1°. Все *ко*-множества пространства X замкнуты.

2°. Все *ка*-множества открыты.

3°. Замыкание любого открытого множества открыто.

4°. Открытое ядро всякого замкнутого множества замкнуто.

5°. Непересекающиеся открытые множества имеют непересекающиеся замыкания.

Всякое экстремально несвязное пространство X, очевидно, индуктивно нульмерно.

В § 4 было доказано, что замкнутое непрерывное отображение пространства X на пространство Y тогда и только тогда неприводимо, когда для любого открытого в X непустого множества U множество $f^{\#}U$ открыто и непусто. Выведем отсюда

Предложение 1. *Неприводимое замкнутое непрерывное отображение f хаусдорфова пространства X на экстремально несвязное пространство Y является топологическим.*

Доказательство. Достаточно доказать, что отображение f взаимно однозначно. Предположим, что это не так, т. е. в пространстве X существуют две точки x_1 и x_2, отображающиеся в одну точку $y \in Y$. У точек x_1 и x_2 существуют непересекающиеся окрестности Ox_1 и Ox_2. Их малые образы $f^{\#}Ox_1$ и $f^{\#}Ox_2$ открыты и также не пересекаются. Тогда не пересекаются и их замыкания. Но $y \in fOx_i \subseteq f[Ox_i] = [f^{\#}Ox_i]$ и, значит, $y \in [f^{\#}Ox_1] \cap [f^{\#}Ox_2]$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

Теорема 11. *Абсолют $aX = h(X) = D$ регулярного пространства X экстремально несвязен. Пространство $H(X) = \overline{D}$ также экстремально несвязно.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что всюду плотное подпространство экстремально несвязного пространства экстремально несвязно. Это сразу следует из формулы $[O \cap X_0]_{X_0} = [O]_X \cap X_0$, верной для любого плотного в X подпространства X_0 и любого открытого в X множества O. Доказательство этой формулы не составляет труда.

Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить экстремальную несвязность пространства $H(X)$, которая в свою очередь, очевидно, вытекает из равенства

$$\left[\bigcup_\alpha O_{A_\alpha}\right]_{H(X)} = O_{\left[\bigcup\limits_\alpha \langle A_\alpha\rangle\right]_X}. \qquad (*)$$

Это равенство мы сейчас докажем. Включение $\left[\bigcup\limits_\alpha O_{A_\alpha}\right] \subseteq$

$\subseteq O_{\left[\bigcup\limits_{\alpha}\langle A_\alpha\rangle\right]}$ следует из свойства 3° H-концов (см. § 5) и из замкнутости множества $O_{\left[\bigcup\limits_{\alpha}\langle A_\alpha\rangle\right]}$. Докажем обратное включение $O_{\left[\bigcup\limits_{\alpha}\langle A_\alpha\rangle\right]} \subseteq \left[\bigcup\limits_{\alpha} O_{A_\alpha}\right]$. Пусть $p \in O_{\left[\bigcup\limits_{\alpha}\langle A_\alpha\rangle\right]}$ и O_A — произвольная окрестность точки p. Тогда $\langle A\rangle \cap \bigcup\limits_{\alpha} \langle A_\alpha\rangle \neq \Lambda$. Значит, найдется такое α_0, что $\langle A\rangle \cap \langle A_{\alpha_0}\rangle \neq \Lambda$. Но тогда $O_A \cap O_{A_\alpha} \neq \Lambda$ и, следовательно, $O_A \cap \bigcup\limits_{\alpha} O_{A_\alpha} \neq \Lambda$. Итак, любая окрестность точки p пересекается с $\bigcup\limits_{\alpha} O_{A_\alpha}$, т. е. $p \in \left[\bigcup\limits_{\alpha} O_{A_\alpha}\right]$. Равенство (*) доказано; вместе с ним доказана и теорема.

Из теоремы 11 вытекает

Теорема 12. *Для того чтобы пространство X_0 было абсолютом какого-нибудь пространства X, необходимо и достаточно, чтобы X_0 было экстремально несвязным. В этом случае пространство X_0 является абсолютом самого себя.*

Пространство $H(X)=\overline{D}$. Для любого регулярного пространства X бикомпакт $H(X)=\overline{D}$ есть экстремально несвязное пространство и поэтому, будучи бикомпактным расширением пространства $aX=h(X)=D$, является необходимо его максимальным (т. е. стоун-чеховским) расширением βaX, поскольку читатель легко может проверить, что всякое естественное отображение одного бикомпактного расширения на другое неприводимо. Итак, для любого X имеем $H(X)=\beta h(X)$ ($\overline{D}=\beta D$).

Пусть теперь X — вполне регулярное пространство. Докажем, что тогда $H(X)=a\beta X$ и, значит, $\beta aX=a\beta X$.

Из равенства $H(X)=\beta aX$, в силу теоремы 18 § 6 гл. 6, вытекает существование отображения $\overline{\pi}$: $H(X)\to\beta X$ бикомпакта $H(X)$ в βX, являющегося продолжением отображения π_X: $h(X)\to X$. Из неприводимости отображения π_X следует и неприводимость отображения $\overline{\pi}$. Итак, экстремально несвязный бикомпакт $H(X)$ есть неприводимый совершенный прообраз βX, т. е. абсолют пространства βX. Доказана формула $H(X)=a\beta X=\beta aX$.

Так как всякое хаусдорфово бикомпактное расширение вполне регулярного пространства X является совершенным неприводимым прообразом пространства βX, то

$$abX=a\beta X=\beta aX=H(X)=\overline{D} \tag{1}$$

— все хаусдорфовы бикомпактные расширения пространства X имеют один и тот же абсолют.

Рассмотрим, в частности, пространство N, состоящее из счетного числа изолированных точек. Оно экстремально несвязно и, значит, совпадает со своим абсолютом. Значит, для любого бикомпактного расширения bN имеем

$$abN = a\beta N = \beta a N = \beta N. \tag{2}$$

Некоторые свойства βN. В этом пункте мы докажем, что вес βN равен $\mathfrak{c}$, а мощность — $2^{\mathfrak{c}}$.

Как мы знаем, тихоновский куб $I^{\mathfrak{c}}$ веса $\mathfrak{c}$ имеет счетное всюду плотное подмножество A (см. стр. 263). Рассмотрим отображение $\varphi\colon N \to I^{\mathfrak{c}}$, которое (взаимно однозначно) отображает множество N на множество A. Отображение φ непрерывно, как и всякое отображение дискретного пространства. По теореме 17 главы 6 (стр. 271) отображение φ может быть продолжено до непрерывного отображения $\tilde{\varphi}\colon \beta N \to I^{\mathfrak{c}}$. Поскольку непрерывный образ бикомпактного пространства бикомпактен, множество $\tilde{\varphi}\beta N$ бикомпактно и, значит, замкнуто в $I^{\mathfrak{c}}$. В то же время $\tilde{\varphi}\beta N$ содержит всюду плотное в $I^{\mathfrak{c}}$ подмножество A. Поэтому $\tilde{\varphi}\beta N = I^{\mathfrak{c}}$. Итак, пространство βN может быть непрерывно отображено на тихоновский куб $I^{\mathfrak{c}}$. Отсюда, с одной стороны, получаем, что мощность множества βN не меньше мощности тихоновского куба $I^{\mathfrak{c}}$, которая равна $2^{\mathfrak{c}}$. С другой стороны, при непрерывном отображении бикомпактов вес не увеличивается (см. теорему 10 гл. 6 на стр. 250). Поэтому вес βN не меньше веса тихоновского куба I, который равен $\mathfrak{c}$.

Покажем теперь, что мощность множества βN не больше, чем $2^{\mathfrak{c}}$. Это вытекает из следующего общего утверждения:

Предложение 2. *Мощность произвольного сепарабельного хаусдорфова пространства не превосходит $2^{\mathfrak{c}}$.*

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово пространство и A — счетное всюду плотное в X множество. Для произвольной точки x пространства X положим $\mathfrak{F}_x = \{A \cap Ox\colon Ox$ — произвольная окрестность точки $x\}$. Всякое множество $A \cap Ox$ есть элемент множества $P(A)$ всех подмножеств множества A. Поэтому $\mathfrak{F}_x$ есть подмножество множества $P(A)$ или элемент множества $P(P(A))$. Далее, $\mathfrak{F}_x$ является центрированной системой множеств. Поэтому для различных точек x и y системы $\mathfrak{F}_x$ и $\mathfrak{F}_y$ различны, поскольку в противном случае, взяв непересекающиеся окрестности Ox и Oy точек x и y, получили бы пустое множество $Ox \cap A \cap Oy$, принадлежащее системе $\mathfrak{F}_x$. Значит, $x \to \mathfrak{F}_x$ есть взаимно однозначное отображение множества X в множество $P(P(A))$. Следовательно, мощность множества X не превосходит мощности множества $P(P(A))$, которая равна $2^{2^{\aleph_0}} = 2^{c}$ (см. замечание 3 на стр. 32). Предложение 2 доказано.

Осталось проверить неравенство $w(\beta N) \leqslant c$. Всякое каноническое открытое множество однозначно определяется любым своим всюду плотным подмножеством. В частности, всякое каноническое открытое множество $U \subseteq \beta N$ однозначно определяется не более чем счетным множеством $U \cap N$, а именно $U = \langle [U \cap N] \rangle$. Следовательно, множество $\mathfrak{B}$ всех канонических открытых подмножеств пространства βN находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех подмножеств множества N, т. е. имеет мощность $2^{\aleph_0} = c$. С другой стороны, канонические открытые подмножества образуют базу в любом полурегулярном пространстве, в частности и в βN. Поэтому вес пространства βN не превосходит мощности континуума.

§ 7. Соабсолютные пространства

Регулярное пространство X называется *соабсолютным* данному регулярному пространству Y, если абсолюты aX и aY пространств X и Y гомеоморфны.

Таким образом, на классе всех регулярных пространств определено отношение *соабсолютности*, которое, очевидно, удовлетворяет свойствам рефлексивности, симметрии и транзитивности, т. е. является отношением эквивалентности (см. стр. 16).

Теорема 13. *Для того чтобы произвольные регулярные пространства X и Y были соабсолютны, необходимо и достаточно, чтобы существовало регулярное пространство Z и совершенные неприводимые отображения $f\colon Z \to X$ и $g\colon Z \to Y$.*

Доказательство. Предположим, что пространства X и Y соабсолютны. Тогда существует гомеоморфизм их абсолютов $h\colon aX \to aY$. Положим $Z = aX$, $f = \pi_X$ и $g = \pi_Y h$. Пространство Z регулярно как подмножество бикомпакта $H(X)$, а отображения f и g совершенны и неприводимы в силу леммы 1 из § 6.

Наоборот, пусть даны регулярное пространство Z и совершенные неприводимые отображения $f\colon Z \to X$ и $g\colon Z \to Y$. Тогда по лемме 2 из § 5 абсолют aX пространства X гомеоморфен абсолюту aZ пространства Z, который в свою очередь гомеоморфен абсолюту aY пространства Y. Теорема 13 доказана.

Из этой теоремы вытекает

Теорема 14. *Все бесконечные компакты, в которых изолированные точки образуют всюду плотные подмножества, попарно соабсолютны.*

В самом деле, достаточно показать, что абсолют всякого такого компакта X гомеоморфен пространству βN. Пусть A — множество всех изолированных точек компакта X. Множество A

открыто, счетно и всюду плотно в компакте X. Отождествив множества A и N, получаем, что пространство X совпадает с некоторым бикомпактным расширением bN пространства натуральных чисел N. Следовательно, в силу равенств (2) на стр. 357 имеем

$$aX = abN = \beta N.$$

Теперь укажем другой класс соабсолютных компактов. Но для этого предварительно докажем одно вспомогательное утверждение, имеющее и самостоятельный интерес и показывающее, что неприводимых отображений достаточно много.

Лемма. *Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное бикомпактное отображение*) произвольного пространства X на пространство Y. Тогда существует такое замкнутое в X множество, которое посредством отображения f неприводимо отображается на Y.*

Доказательство. Полагаем $X_0 = X$ и предположим, что для всех порядковых чисел $\mu < \lambda$ определено замкнутое подмножество X_μ пространства X, так что $fX_\mu = Y$ и при $\mu'' > \mu'$ имеем $X_{\mu''} \subset X_{\mu'}$. Если λ — изолированное порядковое число, $\lambda = \mu + 1$, и отображение f неприводимо на множестве X_μ, то построение закончено и требуемое множество найдено. Если же отображение f на множестве X_μ не является неприводимым, то существует собственное подмножество $X_{\mu+1}$ множества X_μ, которое посредством f отображается на все пространство Y.

Пусть теперь λ — предельное трансфинитное число Тогда положим $X_\lambda = \bigcap\limits_{\mu < \lambda} X_\mu$ и докажем, что для всякой точки $y \in Y$ непусто множество $X_\lambda \cap f^{-1}y$. Это вытекает из того, что $X_\lambda \cap f^{-1}y = \bigcap\limits_{\mu < \lambda} (X_\mu \cap f^{-1}y)$, а множества $X_\mu \cap f^{-1}y$ образуют вполне упорядоченную убывающую систему непустых замкнутых подмножеств бикомпактного пространства $f^{-1}y$. Итак, множество X_λ отображается посредством отображения f на все пространство Y. Индукция идет дальше и заканчивается лишь на таком множестве X_λ, которое посредством отображения f неприводимо отображается на все пространство Y. Лемма доказана.

Теорема 15. *Все компакты без изолированных точек попарно соабсолютны.*

Доказательство. Достаточно показать, что абсолют aX всякого компакта X без изолированных точек гомеоморфен абсолюту $a\Pi$ канторова дисконтинуума Π. По теореме 24 на стр. 212 существует непрерывное отображение $f\colon \Pi \to X$ канторова дисконтинуума Π на компакт X. По только что доказанной лемме

*) Отображение $f\colon X \to Y$ называется *бикомпактным*, если для всякой точки $y \in Y$ ее полный прообраз $f^{-1}y$ бикомпактен.

существует такое замкнутое подмножество Y канторова дисконтинуума Π, что отображение $f\colon Y \to X$ неприводимо. Поскольку в пространстве X нет изолированных точек, а отображение $f\colon Y \to X$ неприводимо, в пространстве Y также нет изолированных точек. По теореме 25 на стр. 146 множество Y как непустое совершенное подмножество канторова дисконтинуума Π гомеоморфно всему дисконтинууму Π. С другой стороны, по лемме 2 из § 5 абсолюты пространств X и Y гомеоморфны, значит, абсолют компакта X гомеоморфен абсолюту канторова дисконтинуума. Теорема 15 доказана.

Теперь дадим следующее принадлежащее В. И. Пономареву

Определение. Семейство $\mathfrak{B}$ открытых подмножеств топологического пространства X называется *π-базой* этого пространства, если во всяком непустом открытом множестве U пространства X содержится некоторое непустое множество V, принадлежащее семейству $\mathfrak{B}$.

Всякая открытая база пространства X, очевидно, является и его π-базой. Но, как мы увидим ниже, понятие π-базы значительно шире понятия открытой базы.

Наименьшая мощность π-баз пространства X называется его *π-весом* и обозначается через $\pi w X$. Очевидно, что π-вес произвольного пространства не превосходит его веса. Следующее утверждение неожиданным образом связывает π-вес с неприводимыми отображениями.

Предложение 1. *Если существует замкнутое неприводимое отображение f пространства X на пространство Y, то*

$$\pi w X = \pi w Y.$$

Доказательство. Если $\mathfrak{B} = \{V\}$ — какая-нибудь π-база пространства X, то согласно предложению 1 из § 4 семейство $f^{\#}\mathfrak{B} = \{f^{\#}V\}$ является π-базой в пространстве Y. Поэтому $\pi w Y \leqslant \pi w X$. Если же $\mathfrak{B} = \{V\}$ есть π-база в пространстве Y, то семейство $f^{-1}\mathfrak{B} = \{f^{-1}V\}$ является π-базой пространства X и, значит, $\pi w X \leqslant \pi w Y$. В самом деле, для всякого непустого открытого множества U пространства X его малый образ $f^{\#}U$ непуст и открыт в силу того же предложения 1 из § 4. Следовательно, существует непустое множество $V \in \mathfrak{B}$, содержащееся в множестве $f^{\#}U$. Тогда $f^{-1}V \subseteq U$. Предложение 1 доказано.

Заметим, что пространства счетного π-веса сепарабельны. Для построения счетного всюду плотного множества достаточно взять по точке в каждом элементе счетной π-базы. Имеет место и частичное обращение этого утверждения.

Предложение 2. *Всякое сепарабельное пространство X, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, имеет счетный π-вес.*

Доказательство. Пусть A—счетное всюду плотное подмножество пространства X. Зафиксируем для каждой точки x

этого множества A какую-нибудь счетную базу окрестностей $\{O_n x\}$. Непосредственная проверка показывает, что счетное семейство $\{O_n x\colon x \in A,\ n=1, 2, \ldots\}$ является π-базой пространства X. Предложение 2 доказано.

Теорема 16 (Пономарев (4)). *Для того чтобы бикомпакт X был соабсолютен с компактом, необходимо и достаточно, чтобы π-вес бикомпакта X был счетен.*

Доказательство. Необходимость вытекает из предложения 1. Проверим достаточность. Пусть $\mathfrak{B}$ — счетная π-база в бикомпакте X. Пару непустых элементов U, V π-базы $\mathfrak{B}$ назовем отмеченной, если $[U] \subseteq V$. Для всякой отмеченной пары U, V зафиксируем функцию $f_{UV}\colon X \to [0;\ 1] = I_{UV}$, так что $f_{UV}[U] = 0$ и $f_{UV}(X \setminus V) = 1$ (такая функция существует по лемме Урысона). Множество всех отмеченных пар счетно. Теперь стандартным образом строим отображение f бикомпакта X в гильбертов кирпич $I^{\aleph_0} = \prod I_{UV}$, полагая f равным диагональному произведению отображений f_{UV} (см. стр. 257). Покажем, что отображение $f\colon X \to fX$ неприводимо. Пусть W — непустое открытое подмножество бикомпакта X. По определению π-базы в W содержится некоторый непустой элемент V π-базы $\mathfrak{B}$. В силу регулярности X существует такое непустое открытое множество Γ, что $[\Gamma] \subseteq V$. Наконец, множество Γ содержит некоторый непустой элемент U π-базы $\mathfrak{B}$. Итак, нашли отмеченную пару $\{U, V\}$, лежащую в W.

Пусть $\pi_{UV}\colon I^{\aleph_0} \to I_{UV}$ — проекция гильбертова кирпича $I^{\aleph_0} = \prod I_{U'V'}$ на сомножитель I_{UV}. Тогда по определению диагонального произведения имеем

$$f_{UV} = \pi_{UV} f.$$

Значит, для любой точки t отрезка I_{UV} имеет место равенство

$$f_{UV}^{-1}(t) = f^{-1}\pi_{UV}^{-1}(t).$$

В частности, это равенство верно при $t=0$. Но $f_{UV}^{-1}(0) \subseteq V$. В то же время $fX \cap \pi_{UV}^{-1}(0) \supseteq f[U]$. Следовательно, для всякой точки $y \in f[U]$ имеем $f^{-1}y \subseteq f_{UV}^{-1}(0) \subseteq V \subseteq W$. Таким образом, малый образ $f^{\#}W$ множества W содержит множество $f[U]$ и, следовательно, непуст. Согласно предложению 1 из § 4 отображение $f\colon X \to fX$ неприводимо. По лемме 2 из § 5 пространства X и fX соабсолютны. Но fX есть компакт как замкнутое подмножество гильбертова кирпича. Теорема 16 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

Александров П.С.

[1] Sur les espaces de la premiere classe et les espaces abstraits, C.R. Acad. Scr. Paris 178 (1924), 185—187.

[2] Zur Begrundung der n-dimensionale mengentheoretischen Topologie, Math. Ann 94 (1925), 296—308.

[3] Ueber stetige Abbildungen kompakter Räume, Proc. Koninkl. Acad. Amsterdam 28 (1925), 997—999; Math. Ann. 96 (1927), 555—571.

[4] Untersachungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen, Ann. Math. 30 (1928—1929), 101—187.

[5] Sur les suites des espaces topologiques. C.R. Acad. Sci. Paris 200 (1935), 1708—1711

[6] К теории топологических пространств, ДАН СССР 2 (1936), 51—54.

[7] О бикомпактных расширениях топологических пространств, Матем. сб. 5 (47) (1939), 403—424.

[8] О понятии пространства в топологии, УМН 2, № 1 (1947), 5—57.

[9] Основные теоремы двойственности для незамкнутых множеств, Матем. сб. 21 (1947), 161—231.

[10] Комбинаторная топология, М., Гостехиздат, 1947.

[11] Лекции по аналитической геометрии.

Александров П. С., Пасынков Б. А.

[1] Введение в теорию размерности, «Наука», 1973.

Александров П.С., Урысон П. С.

[1] Une condition necessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D), C.R. Acad. Sci. Paris 177 (1923), 1274—1276.

[2] Мемуар о компактных топологических пространствах. Изд. 3, «Наука», 1971.

Александров П. С., Хопф Х. (Alexandroff P., Hopf H.)

[1] Topologie, I, Berlin, Springer, 1935.

Архангельский А. В.

[1] Аддиционная теорема для веса множеств, лежащих в бикомпактах, ДАН СССР 126, № 2 (1959), 239—241.

[2] О мощности бикомпактов, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, ДАН СССР 187, № 5 (1969), 967—970.

Зайцев В. И.

[1] К теории тихоновских пространств, Вестн. МГУ, сер. матем., № 3 (1967), 48—57.

[2] О некоторых классах топологических пространств и их бикомпактных расширений, ДАН СССР 178, № 4 (1968), 778.

[3] Проекционные спектры, Тр. Моск. матем. о-ва, т. 27 (1972), 129—193.

Ивановский Л.Н.

[1] Об одной гипотезе П. С. Александрова, ДАН СССР 123, № 5 (1958), 785—787.

Йех Т. (Jech T. J.)

[1] Теория множеств и метод форсинга, «Мир», 1973.

Кузьминов В. И.
[1] О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп, ДАН СССР **125**, № 4 (1959), 727—730.
Куратовский К.
[1] Топология, т. 1, «Мир», 1966, т. 2, «Мир», 1969.
Курош А. Г.
[1] Kombinatorischer Aufbau der bikompacten topologischen Räumen, Compositio Math. **2** (1935), 471—476.
Лефшец С.
[1] Алгебраическая топология, ИЛ, 1949.
Мищенко А.
[1] О финально компактных пространствах, ДАН СССР **145**, № 6 (1962), 1224—1227.
Пономарев В. И.
[1] О свойствах типа компактности, Вестн. МГУ, сер. матем., № 2 (1962), 33—35.
[2] Паракомпакты, их проекционные спектры и непрерывные отображения, Матем. сб. **60**, № 1 (1963). 89—119
[3] Об абсолюте топологического пространства, ДАН СССР **153**, № 5 (1963), 1013—1016.
[4] О пространствах, соабсолютных с метрическими, УМН **21**, № 4 (1966), 101—132.
Смирнов Ю. М.
[1] О пространствах близости, Матем. сб. **31**, № 3 (1952), 543—574.
Стоун А. (Stone A. H.)
[1] Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977—982.
Стоун М (Stone M. H.)
[1] Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375—481.
Хаусдорф (Hausdorff F.)
[1] Теория множеств, ОНТИ, 1934.
Чех (Cech E.)
[1] Sur la dimension des espaces parfaitement normaux, Bull. Int. Acad. Sci. de Bohême **33** (1932), 149—183.
[2] On bicompact spaces, Ann. Math. **38** (1937), 823—844.
Шанин Н. А.
[1] О произведении топологических пространств, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. Стеклова, XXIV, Изд-во АН СССР, 1948.
Щепин Е. В.
[1] Действительные функции и пространства, близкие к нормальным, Сиб. матем. ж. **13**, № 5 (1972), 1182—1196.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Павел Сергеевич АЛЕКСАНДРОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ И ОБЩУЮ ТОПОЛОГИЮ

Учебное пособие

Издание второе, стереотипное

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 17.04.10.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 19,32. Тираж 1500 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru