ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ СЕРИЯ

Основана в 1998 г. издательством “Научная книга” (ИДМИ)

Учебники и учебные пособия по теоретической математике. Авторы — известные ученые и лекторы ведущих университетов мира. Оригиналы и переводы на русский язык. Избранные тома серии Graduate Studies in Mathematics (Американское математическое общество)

5. **Фурсиков А. В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения, 1999.
4. **Годунов С. К., Роменский Е. И.** Элементы механики сплошных сред и законы сохранения, 1998.
3. **Годунов С. К., Михайлова Т.Ю.** Представления группы вращений и сферические функции, 1998
2. **Крылов Н.В.** Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера, 1998. *Пер. с англ.* (GSM–12)
1. **Либ Э., Лосс М.** Анализ, 1998. *Пер. с англ.* (GSM–14)

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ СЕРИЯ Том 5

Основана в 1998 г. издательством “Научная книга” (ИДМИ)

Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения

Рекомендовано к изданию
Российским центром математического образования
Министерства общего и профессионального образования РФ
в качестве учебного пособия для студентов
математических специальностей
высших учебных заведений

А. В. Фурсиков

Московский госуниверситет, Россия

Новосибирск • Научная книга • 1999

Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения— Новосибирск: Научная книга, 1999. — 352+xii с. — (Университетская серия. Т. 5).

ISBN 5–88119–017–3

Строится общая теория оптимального управления распределенными системами, т. е. системами, которые описываются с помощью краевой задачи для уравнения с частными производными или для системы таких уравнений. При этом рассматривается случай не только корректных по Адамару линейных или нелинейных краевых задач, но также и некорректные задачи (задача Коши для эллиптического уравнения, краевые задачи для системы уравнений Навье — Стокса размерности 2 и 3 на пространстве гладких векторных полей и др.). Основной материал следует лекциям обязательных и специальных курсов, прочитанных автором по кафедре общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета.

Перевод на английский язык данной книги одновременно издан Американским математическим обществом в серии Translations of Mathematical Monographs, 1999 (http://e-math.ams.org/bookstore).

Для математиков, физиков, инженеров. Представляет интерес для научных сотрудников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся по математическому анализу, оптимальному управлению, обратным задачам, вычислительной математике.

Ответственный редактор:
профессор *А. В. Кажихов* (ИГ СО РАН, Новосибирск)

Рецензенты:
д.ф.-м.н., профессор *М. И. Вишик* (ИППИ РАН, Москва)
д.ф.-м.н., профессор *В. М. Тихомиров* (МГУ, Москва)

Без объявления

© Издательство “Научная книга” (ИДМИ), 1999
© Художественное оформление. Н. А. Рожковская, 1999

Предисловие

Книга посвящена изучению задач оптимального управления распределенными системами, т. е. системами, которые описываются с помощью краевой задачи для уравнения с частными производными или для системы таких уравнений. Схематично задачи изучаемого класса можно записать в виде

$$J(y,u) \to \inf, \tag{0.1}$$

$$F(y,u) = 0, \tag{0.2}$$

$$u \in U_\partial, \tag{0.3}$$

где $J(\cdot,\cdot) : Y \times U \to \mathbb{R}$ — функционал, $F(\cdot,\cdot) : Y \times U \to V$ — оператор, Y, U, V — банаховы пространства и $U_\partial \subset U$. Пространства Y и U обычно называют соответственно пространством состояний и пространством управлений, а переменные y и u — состоянием и управлением. Функционал J называют функционалом стоимости или целевым функционалом. Множество U_∂ — это множество ограничений, а оператор $F(y,u)$ задается с помощью некоторой краевой задачи для уравнения с частными производными.

Простейшим примером задачи (0.1)–(0.3) является следующая задача оптимального управления распределенной системой, заданной в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞:

$$J(y,u) = \int\limits_\Omega \left(|y(x) - w(x)|^2 + N|u(x) - f(x)|^2\right) dx \to \inf, \tag{0.4}$$

$$\Delta y(x) = u(x), \quad y\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{0.5}$$

$$u(x) \in U_\partial, \tag{0.6}$$

где $w \in L_2(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$ — заданные функции, $N > 0$ — параметр (так называемый параметр цены), U_∂ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\Omega)$. Искомыми являются функция состояния $y(x)$ и управление $u(x)$. Таким образом, абстрактное уравнение (0.2) в данном случае задается соотношениями (0.5), которые при фиксированной $u \in L_2(\Omega)$ являются задачей Дирихле для оператора Лапласа.

Исследование задачи (0.4)–(0.6) можно начать с решения краевой задачи (0.5), т. е. сначала можно выразить y через u, затем полученное выражение подставить в (0.4) и свести задачу к минимизации на множестве U_∂ функционала, зависящего лишь от u. Такой подход давно используется при изучении широкого класса задач оптимального управления распределенными системами, которые описываются с помощью корректных краевых задач.

Однако этот метод применим не всегда. В более сложных ситуациях часто возможен другой подход, основанный на использовании некоторых свойств функционала J.

Ниже мы рассматриваем ограниченные снизу функционалы $J(y,u)$, стремящиеся к $+\infty$ при $(y,u) \to \infty$. При этих условиях можно значительно ослабить требования на краевую задачу (0.2), в результате чего в круг рассматриваемых задач входят экстремальные задачи, для которых краевая задача (0.2) не обязательно корректна по Адамару. Например, в книге изучается следующая задача оптимального управления распределенной системой, заданной в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, граница $\partial\Omega$ которой состоит из двух непересекающихся многообразий Γ_0 и Γ_1:

$$J(y,u_1,u_2) = \int\limits_{\Gamma_0} |y(x) - w(x)|^2 d\sigma$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_1} \left(|u_1(x) - f_1(x)|^2 + |u_2(x) - f_2(x)|^2\right) d\sigma \to \inf, \tag{0.7}$$

$$\Delta y(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad y\big|_{\Gamma_1} = u_1, \quad \partial_n y\big|_{\Gamma_1} = u_2, \tag{0.8}$$

$$u_1 \in U_\partial, \quad u_2 \in V_\partial, \tag{0.9}$$

где $w \in L_2(\Gamma_0)$, $f_i \in L_2(\Gamma_1)$, $i = 1,2$, — заданные функции, ∂_n — дифференцирование по векторному полю внешних нормалей к Γ_1, y, u_1, u_2 — искомые функции, U_∂ и V_∂ — выпуклые замкнутые подмножества $L_2(\Gamma_1)$. Типичными примерами U_∂ и V_∂ являются множества

$$\begin{aligned} &\{u \in L_2(\Gamma_1) : 0 \leqslant u(x) \leqslant 1 \text{ при почти всех } x \in \Gamma_1\}, \\ &\{u \in L_2(\Gamma_1) : u(x) \leqslant 0 \text{ при почти всех } x \in \Gamma_1\}. \end{aligned} \tag{0.10}$$

При фиксированных u_1 и u_2 соотношения (0.8) задают задачу Коши для оператора Лапласа, которая является классическим примером краевой задачи некорректной по Адамару. То обстоятельство, что в экстремальной задаче u_1 и u_2 не фиксированы, позволяет успешно исследовать задачу (0.7)–(0.9).

Одна из основных целей данной книги состоит в построении общей теории оптимального управления системами с распределенными параметрами вида (0.1)–(0.3), у которых уравнение (0.2) может задаваться не только корректными по Адамару линейными или нелинейными краевыми задачами, но также и некорректными, такими, как задача Коши для эллиптического уравнения (0.8), краевые задачи (корректные и некорректные) для системы уравнений Навье — Стокса размерности 2 и 3 на пространстве гладких векторных полей и др.

Первая глава посвящена вопросу существования решений задач оптимального управления распределенными системами. Сначала для абстрактной экстремальной задачи вида (0.1)–(0.3) формулируются условия, достаточные для существования решения. При выполнении этих условий доказывается разрешимость экстремальной задачи (0.1)–(0.3). Среди этих условий основными являются условия нетривиальности, коэрцитивности и компактности (последнее условие возникает лишь когда уравнение (0.2) нелинейно по y). Условие нетривиальности состоит в предположении, что

множество пар (y, u), удовлетворяющих (0.2), (0.3), непусто. Условие коэрцитивности родственно одноименному условию для эллиптических краевых задач, которое возникает при их решении вариационным методом, а условие компактности близко условию компактности в теории нелинейных краевых задачах.

Основная часть главы состоит в применении указанной выше теоремы существования к широкому классу конкретных задач оптимального управления, включая случаи, в которых уравнение (0.2) описывается некорректными по Адамару краевыми задачами. Это применение, как правило, сводится к проверке условий нетривиальности, коэрцитивности и компактности. Однако в ряде случаев такая проверка слишком сложна и оказывается проще применить непосредственно метод доказательства теоремы существования решений абстрактной задачи.

Метод доказательства теоремы существования, положенный в основу гл. 1, впервые был предложен автором в случае задач оптимального управления системой Навье — Стокса с положительной и отрицательной вязкостью (см. А. В. Фурсиков [1–3]). Впоследствии Ж.-Л. Лионс [3] исследовал аналогичным методом широкий класс сингулярных задач оптимального управления.

Выводу необходимых условий экстремума для задач оптимального управления посвящена гл. 2. Набор соотношений, описывающих эти необходимые условия экстремума, вместе с ограничениями (0.2), (0.3) исходной задачи называются системой оптимальности. Для вывода систем оптимальности здесь используются различные варианты принципа Лагранжа. Современный вариант этого принципа, удобный для применения к широкому классу задач оптимального управления, был доказан А. Д. Иоффе, В. М. Тихомировым [1]. Однако для многих сингулярных задач оптимального управления теорема А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова не применима.

Ж.-Л. Лионс [3] предложил метод вывода систем оптимальности для широкого класса сингулярных задач. Этот метод не связан с принципом Лагранжа, а основан на методе штрафных функций. В гл. 2 мы даем обоснование таких вариантов принципа Лагранжа, которые применимы не только к сингулярным задачам оптимального управления, изученным в книге Ж.-Л. Лионса [3], но к ряду задач, включенных в указанной книге в список нерешенных проблем. Их решение изложено в гл. 2. Основная часть гл. 2 посвящена выводу систем оптимальности для конкретных экстремальных задач, разрешимость которых доказана в гл. 1.

Конкретные задачи из гл. 1, 2 можно условно разделить на две группы. Первая группа — это задачи, для которых теорема о разрешимости и вывод системы оптимальности давно известны. Они приводятся здесь для демонстрации естественности и простоты методов, излагаемых в настоящей книге. Вторая группа — это задачи оптимального управления некорректными или сингулярными распределенными системами, для которых результаты о разрешимости и, особенно, о выводе системы оптимальности являются новыми и в монографической литературе ранее не излагались. Примерами таких задач является оптимизация в некорректных краевых задачах (задача Коши для оператора Лапласа, задачи для обратного урав-

нения теплопроводности) с множествами ограничений U_∂, имеющими пустую внутренность в L_2, такими, как множества (0.10).

Среди предположений, используемых при доказательстве теорем о разрешимости задач оптимального управления, условие нетривиальности занимает особое место. Очевидно, что это условие существенно для разрешимости экстремальной задачи, так как если оно не выполнено, т. е. система (0.2), (0.3) не имеет решений, то пустым является множество пар (y, u), на которых минимизируется функционал (0.1). Проверка условия нетривиальности обычно не представляет труда, когда уравнение (0.2) описывается корректной краевой задачей, в которой y — искомая функция, а u — исходное данное задачи. Но если (0.2) задается с помощью некорректной краевой задачи, положение коренным образом меняется и для проверки условия нетривиальности нужна разработка специальных методов. Эта область является совсем новой, и здесь нерешенных проблем больше, чем результатов. Однако в случае, когда отображение $F(y, u)$ аффинно по y и u, уже обрисовываются контуры общей теории. Изложению результатов, полученных в этом направлении, посвящена гл. 3. В ней доказаны некоторые результаты о нетривиальности ряда конкретных экстремальных задач из гл. 1 и 2. Они сводятся к доказательству плотности в соответствующем функциональном пространстве множества исходных данных, для которых краевая задача (0.2) имеет решение.† Такой результат получен в случае, когда a) $F(x, y)$ — задача Коши для эллиптического уравнения, а исходными данными u являются данные Коши, b) F — смешанная краевая задача для обратного уравнения теплопроводности, а исходными данными u являются правые части этого уравнения. К этому же кругу результатов относятся теоремы об аппроксимативной управляемости параболического уравнения, также изложенные в гл. 3.

В случае, когда уравнение (0.2) нелинейно по y, в этом направлении имеются лишь несколько разрозненных результатов. Мы ограничились полным изложением лишь одного из них. Имеется в виду утверждение о плотности в соответствующем пространстве множества правых частей, для которых смешанная краевая задача для трехмерных уравнений Навье — Стокса имеет достаточно гладкое, а потому единственное, решение (см. А. В. Фурсиков [2, 3]). Этот результат представляет, по-видимому, бóльший интерес в теории однозначной разрешимости "в целом" трехмерной системы Навье — Стокса, чем в теории экстремальных задач.

Главы 4 и 5 посвящены решению конкретных задач управления течением вязкой несжимаемой жидкости, которое описывается с помощью системы уравнений Навье — Стокса. В гл. 4 исследуется задача оптимального управления с распределенным управлением, т. е. когда управлением является правая часть системы Навье — Стокса (т. е. плотность внешних сил). Физическая задача состоит в том, чтобы разогнать покоящуюся жидкость к заданному моменту времени до заданного векторного поля скорости при минимально возможных затратах работы внешних сил. Даны необходимые

† Из этого результата сразу следует справедливость условия нетривиальности, когда множество U_∂ обладает непустой внутренностью. Отметим, что этот же результат применяется и при проверке условия нетривиальности для ряда конкретных множеств U_∂ с пустой внутренностью.

и достаточные условия на исходные данные экстремальной задачи, при которых решение этой задачи существует. Получены также необходимые и достаточные условия минимума для этой задачи, содержащие помимо системы оптимальности и необходимого условия минимума второго порядка еще некоторое неравенство, учитывающее глобальную структуру задачи.

Отметим, что в указанной задаче естественно возникает большой параметр M. Доказано, что при достаточно больших значениях параметра M решение экстремальной задачи единственно. Этот результат, видимо, является наиболее существенным в гл. 4. По мнению автора, идея доказательства этого результата может быть с успехом использована при исследовании единственности решения ряда важных для приложений задач оптимального управления. Получена также асимптотика решения указанной задачи оптимального управления при $M \to \infty$.

В гл. 5 изучена задача о минимизации силы сопротивления тела, движущегося в жидкости, заполняющей пространство, причем минимизация производится за счет управления скоростью жидкости на границе тела. Точнее, изучен двумерный аналог этой задачи. Указанная задача легко сводится к исследованию оптимального управления двумерным потоком жидкости, обтекающим двумерную ограниченную область с управлением на границе этой области. Основными результатами является доказательство разрешимости указанной экстремальной задачи и вывод системы оптимальности. Для получения этих результатов оказалось необходимым развить теорию неоднородных краевых задач для нестационарных уравнений Навье — Стокса. что также сделано в гл. 5.

Последние две главы посвящены некоторым приложениям теории оптимального управления распределенными системами. В гл. 6 изучается задача Коши для эллиптического уравнения второго порядка в условно-корректной постановке. Характерной особенностью этой постановки указанной выше некорректной краевой задачи является тот факт, что решений существует континуум и вместо теоремы единственности необходимо доказать близость всех решений друг к другу (что и делается в гл. 6). Далее, для конструктивного решения этой задачи необходимо построить одно из решений — так называемое квазирешение. Квазирешение определяется как решение некоторой экстремальной задачи. С использованием развитой в предыдущих главах теории экстремальных задач, строится квазирешение и исследуются его свойства.

Глава 7 посвящена исследованию локальной точной управляемости двумерной системы Навье — Стокса, заданной в ограниченной области Ω. Рассматривается случай граничного управления и распределенного управления, сосредоточенного в подобласти области Ω.

Пусть $\widehat{v}(t,x)$, $t \in (0,T)$, $x \in \Omega$, — заданное решение системы Навье — Стокса (без управления) и $v_0(x)$ — начальное условие, достаточно близкое к $\widehat{v}(0,\cdot)$ относительно соответствующей нормы. Задача точной локальной управляемости состоит в выборе такого управления из заданного класса, что решение $v(t,x)$ системы Навье — Стокса, соответствующее этому управлению и выходящее из начального условия v_0 в момент времени $t = T$ совпадает с $\widehat{v}(T,x)$. Свойство локальной точной управляемости гарантиру-

ет возможность стабилизации неустойчивого стационарного решения $\widehat{v}(x)$ с помощью управления из заданного класса.

Доказательство локальной точной управляемости сводится к проверке того же свойства для линеаризованных уравнений Навье — Стокса. Дело сводится к изучению некорректной краевой задачи для этих уравнений. В качестве регуляризации этой краевой задачи выписывается система оптимальности некоторой задачи управления. Разрешимость этой системы устанавливается с помощью некоторых карлемановских оценок. Таким образом, теория оптимального управления используется в гл. 7 при доказательстве свойства локальной точной управляемости.

Все главы книги снабжены краткими библиографическими комментариями. Литература по оптимальному управлению распределенными системами огромна, и эти комментарии ни в коей мере не претендуют на полноту. В них указаны, в основном, работы, наиболее близко примыкающие к содержанию соответствующей главы.

Несколько слов о нумерации. При ссылках на формулы, утверждения и т. д. внутри главы используется двузначная нумерация: (5.2) означает формулу с номером 2 в § 5. При ссылках на формулы и т.д. из других глав добавляется номер главы: (3.5.2) — это формула (5.2) из гл.3.

Если требуется сослаться на определенное соотношение из нумерованной формулы, мы пишем номер формулы с индексом, который указывает номер соотношения. Например, если формула (3.2) объединяет несколько соотношений, при ссылке на третье соотношение в (3.2) мы пишем (3.2_3).

Благодарности

Мой интерес к тематике этой книги обусловлен, в частности, работой на кафедре общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета. Дискуссии по теории управления с сотрудниками кафедры, и в первую очередь с В. М. Тихомировым, принесли мне большую пользу. Всем им я выражаю свою искреннюю признательность.

Я рад возможности высказать благодарность профессору М. Ганзбургеру, заведующему математическим департаментом государственного университета штата Айова, за прекрасные условия, созданные для работы с этой книгой, во время моих визитов в 1997 и 1999 гг.

Я глубоко благодарен Тамаре Рожковской — главному редактору издательства “Научная книга” — взявшей на себя решение большого числа проблем, связанных с подготовкой рукописи к печати и ее публикацией. Без ее поддержки эта книга вряд ли была бы опубликована.

Мне приятно выразить сердечную признательность моей жене Ирине Фурсиковой за постоянную поддержку и терпение.

Мои научные исследования, результаты которых представлены в данной книге, частично поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты No. 96-01-00947 и No. 96-15-96072).

А. В. Фурсиков

Июнь, 1999

Москва

Содержание

Глава 1. Существование решений задач оптимального управления 1
1. Функциональные пространства и краевые задачи 1
2. Абстрактные экстремальные задачи 13
3. Линейные стационарные экстремальные задачи 22
4. Задачи оптимального управления, связанные с линейными параболическими уравнениями 30
5. Жесткое управление 40
6. Нелинейные стационарные экстремальные задачи 45
7. Нелинейные параболические экстремальные задачи 52
8. Гиперболические экстремальные задачи 62
9. Комментарии 72

Глава 2. Система оптимальности для задач оптимального управления . . 73
1. Принцип Лагранжа для абстрактной задачи 73
2. Линейные регулярные стационарные задачи 85
3. Оптимизация в задаче Коши для оператора Лапласа 94
4. Линейные регулярные эволюционные задачи 100
5. Краевая задача для обратного уравнения теплопроводности. Распределенное управление 106
6. Краевая задача для обратного уравнения теплопроводности. Граничное и стартовое управления 118
7. Нелинейные стационарные задачи 126
8. Системы оптимальности в случае управления сингулярным полулинейным параболическим уравнением 134
9. Комментарии 145

Глава 3. О разрешимости краевых задач для плотного множества исходных данных 147
1. Разрешимость задачи Коши для эллиптического уравнения для плотного множества начальных данных 148
2. Аппроксимативная управляемость параболических уравнений . 153
3. Разрешимость обратного параболического уравнения с правой частью из множеств с пустой внутренностью 165
4. Система Навье — Стокса 168
5. Однозначная разрешимость “в целом” трехмерной системы Навье — Стокса для плотного множества правых частей 181
6. Комментарии 185

Глава 4. Задача о минимизации работы при разгоне покоящейся жидкости до заданной скорости 187
1. Постановка задачи и теорема существования 187
2. Необходимые и достаточные условия минимума 193
3. Единственность решения 198

4. Асимптотика решений экстремальных задач 209
5. Комментарии 217

Глава 5. Оптимальное управление с границы в нестационарных задачах обтекания и неоднородные краевые задачи для уравнений Навье — Стокса 219
1. Формализация задачи 220
2. Точная постановка экстремальной задачи 225
3. Неоднородная краевая задача для нестационарных уравнений Навье — Стокса 229
4. Существование оптимального решения 243
5. Система оптимальности 247
6. Комментарии 265

Глава 6. Задача Коши для эллиптического уравнения в условно-корректной постановке 266
1. Постановка задачи 266
2. Модельная задача. Формулировка теоремы об основной оценке 270
3. Замена переменных 275
4. Основная оценка 283
5. Определение квазирешения 290
6. Построение квазирешения 293
7. Свойства квазиобратного оператора 297
8. Комментарии 302

Глава 7. Точная локальная управляемость течения вязкой несжимаемой жидкости 303
1. Постановка задачи и формулировка основного результата 304
2. Сведение к линейной задаче управляемости 306
3. Вспомогательная экстремальная задача и разрешимость ее системы оптимальности 311
4. Свойства функции w 314
5. Разрешимость линейной задачи управляемости и оценки решений 319
6. Доказательство основных результатов 324
7. Карлемановские оценки 326
8. Комментарии 340

Литература 341

Глава 1

Существование решений задач оптимального управления

Эта глава посвящена доказательству теорем существования решений задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. Чтобы выяснить, какие условия гарантируют разрешимость экстремальных задач, мы в § 2 исследуем абстрактные экстремальные задачи с линейной и с нелинейной управляемыми системами. Показано, что линейная экстремальная задача разрешима при выполнении условий нетривиальности и коэрцитивности, введенных в § 2. Для разрешимости нелинейной экстремальной задачи к указанным выше условиям необходимо добавить условие компактности.

Остальная часть главы (§ 3–8) посвящена доказательству разрешимости различных классов задач оптимального управления. Доказательство, как правило, сводится к проверке указанных выше условий нетривиальности, коэрцитивности, компактности, а также некоторых других условий. Для этой проверки используются достаточно глубокие факты из теории функциональных пространств и теории разрешимости краевых задач для эллиптических и параболических уравнений. Сводка необходимых результатов из этой области помещена в § 1.

Следует обратить внимание на условие нетривиальности. Проверка этого условия в случаях, когда управляемая система описывается корректной краевой задачей, обычно достаточно просто осуществляется при любом непустом множестве ограничений на управление. В случае некорректных управляемых систем дело значительно усложняется. В таких ситуациях условие нетривиальности в этой главе обычно постулируется. Некоторым методам проверки условия нетривиальности в случае некорректных управляемых систем посвящена гл. 3.

Следует отметить, что не всегда при доказательстве существования решения экстремальных задач целесообразно использовать абстрактную схему из § 1. Так, в пп. 4.3, 7.3, 8.3 мы вместо проверки условий абстрактных теорем используем методы их доказательств, чтобы доказать разрешимость конкретных экстремальных задач.

§ 1. Функциональные пространства и краевые задачи

В этом параграфе дана сводка сведений по функциональным пространствам и краевым задачам, которые будут использоваться на протяжении всей книги. Бóльшая часть результатов приводится без доказательства.

1.1. Пространства Соболева и Бесова. Пусть Ω — (ограниченная) область в пространстве $\mathbb{R}^d$, граница которой $\partial\Omega$ является $(d-1)$-мерным многооб-

разием класса C^∞, причем Ω локально расположена по одну сторону от $\partial\Omega$.

Пространство $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, — это множество функций, определенных на Ω, для которых конечна норма

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_d), \quad dx = dx_1 \ldots dx_d.$$

При этом функции, отличающиеся лишь на множестве лебеговой меры нуль, отождествляются.[1]

Справедливо *неравенство Гёльдера*

$$\left|\int\limits_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leqslant \|u\|_{L_p(\Omega)}\|v\|_{L_q(\Omega)}, \quad 1/p + 1/q = 1,$$

$u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$. При $p = q = 2$ это неравенство обычно называют *неравенством Коши — Буняковского.*

Пространство $L_\infty(\Omega)$ — это множество функций на Ω, измеримых относительно меры Лебега dx, для которых конечна норма

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|,$$

т. е. равная нижней грани всех констант C, для которых множество $\{x : |u(x)| > C\}$ имеет лебегову меру нуль.

Пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ — это множество бесконечно дифференцируемых функций на замыкании Ω.

Пространство $C_0^\infty(\Omega)$ — это множество бесконечно дифференцируемых функций $u(x)$, каждая из которых обращается в нуль вне некоторого компактного подмножества Ω, зависящего от u.

Пусть s — целое неотрицательное число и $1 \leqslant p < \infty$. *Пространство Соболева* $W_p^s(\Omega)$ — это множество функций, определенных на Ω, для которых конечна норма

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant s} |D^\alpha u(x)|^p dx\right)^{1/p}, \tag{1.1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, α_j — целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, $D_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_d^{\alpha_d}$, производные в (1.1) понимаются в смысле теории обобщенных функций (см. Гельфанд, Шилов [1]). В случае $0 < s < 1$ пространство Соболева $W_p^s(\Omega)$ состоит из функций $u \in L_p(\Omega)$ таких, что

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L_p(\Omega)} + \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{d+ps}} dx\, dy\right)^{1/p}. \tag{1.2}$$

[1] Это замечание относится ко всем пространствам, определенным ниже, у которых при определении норм используются интегралы, а также к пространству L_∞.

Для нецелого $s > 1$ положим $s = [s]+\sigma$, где $[s]$ — целая часть s. Тогда $W_p^s(\Omega)$ состоит из элементов $u \in W_p^{[s]}(\Omega)$ таких, что $D^\alpha u \in W_p^\sigma(\Omega)$ для $|\alpha| = [s]$ с нормой

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{W_p^{[s]}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[s]} \|D^\alpha u\|^p_{W_p^\sigma(\Omega)} \right)^{1/p}, \tag{1.3}$$

причем нормы $\|\cdot\|_{W_p^{[s]}(\Omega)}$, $\|\cdot\|_{W_p^\sigma(\Omega)}$ определены в (1.1), (1.2).

Справедлива следующая теорема Соболева о вложении пространств (см. доказательство Соболев [1]; Гальярдо [1]; Адамс [1]).

Теорема 1.1. (a) *Для функции $u(x) \in W_p^s(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|D^\alpha u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\,\|u\|_{W_p^s(\Omega)},$$

если $|\alpha| \leqslant s$ и $d(1/p - 1/q) \leqslant s - |\alpha|$, $1 < p \leqslant q < \infty$, где C не зависит от u.

(b) *Если $|\alpha| + d/p < s$, то любая функция $u \in W_p^s(\Omega)$ почти всюду совпадает с $|\alpha|$ раз непрерывно дифференцируемой функцией, причем*

$$\|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant C\,\|u\|_{W_p^s(\Omega)},$$

где C не зависит от u.

Сформулируем теорему Реллиха — Кондрашова о компактном вложении пространств (см. доказательство Соболев [1]; Гальярдо [1]; Адамс [1]).

Теорема 1.2. (a) *Пусть $s_1 > s_2$, $1 < p_1, p_2 < \infty$ и $d(1/p_1 - 1/p_2) < s_1 - s_2$. Тогда вложение пространств $W_{p_1}^{s_1}(\Omega) \subset W_{p_2}^{s_2}(\Omega)$ вполне непрерывно.*[2]

(b) *Если $1 < p < \infty$, $d < sp$, то оператор вложения $W_p^s(\Omega)$ в $C(\Omega)$ вполне непрерывен.*

Предложение 1.1. *Пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W_p^s(\Omega)$, где $1 \leqslant p < \infty$, $s \in \mathbb{R}_+$.*

Доказательство см. Адамс [1]; Бесов, Ильин, Никольский [1].

Пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^s(\Omega)$ определяется как пополнение множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (1.1).

Пусть $n(x)$, $x \in \partial\Omega$ — поле внешних нормалей к границе $\partial\Omega$. На множестве $C^\infty(\overline{\Omega})$ определен оператор

$$u \to \gamma^j_{\partial\Omega} u \equiv \left.\frac{\partial^j u}{\partial n^j}\right|_{\partial\Omega} \qquad (0 \leqslant j < s - 1/p) \tag{1.4}$$

сужения на границу $\partial\Omega$. (В случае $j = 0$ здесь $\gamma^j_{\partial\Omega} u = \left.\frac{\partial^j u}{\partial n^j}\right|_{\partial\Omega} = u\big|_{\partial\Omega} = \gamma_{\partial\Omega} u$.)

Предложение 1.2. *Оператор* (1.4) *продолжается до непрерывного оператора, действующего из $W_p^s(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. Функция $u(x) \in W_p^s(\Omega)$ $(1 < p < \infty,$*

[2] т. е. из любой ограниченной в $W_{p_1}^{s_1}(\Omega)$ последовательности $\{u_k(x)\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в пространстве $W_{p_2}^{s_2}(\Omega)$. Отметим, что для справедливости теоремы 1.2 существенно, чтобы область Ω была ограниченной.

$s > 1/p$) принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^s_p(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\gamma^j_{\partial\Omega} u = 0$ $(0 \leqslant j < s - 1/p)$.

Доказательство предложения см. в Бесов, Ильин, Никольский [1]; Гальярдо [1]; Адамс [1].

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и U — банахово пространство, плотное в $\mathcal{H}$, причем вложение $U \subset \mathcal{H}$ непрерывно.

Определение 1.1. Пространством U', *сопряженным* к U относительно скалярного произведения в $\mathcal{H}$ называется пополнение $\mathcal{H}$ по норме

$$\|v\|_{U'} = \sup_{\|w\|_U=1} |(v,w)| \tag{1.5}$$

Пусть $s \in \mathbb{R}_+$ (s — неотрицательное число) и $p \geqslant 1$ таковы, что $\overset{\circ}{W}{}^s_p(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Положим в определении 1.1 $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, $U = \overset{\circ}{W}{}^s_p(\Omega)$. Тогда пространство U' обозначается через W^{-s}_q, где $1/q + 1/p = 1$. Оно является пространством с отрицательным индексом гладкости $-s$.

В дальнейшем пространство $W^s_p(\Omega)$ с $p = 2$ обозначается через $H^s(\Omega)$: $W^s_2(\Omega) = H^s(\Omega)$. Кроме того, $\overset{\circ}{W}{}^s_2(\Omega) = H^s_0(\Omega)$, если $s > 1/2$.

В дальнейшем мы используем следующее известное неравенство Пуанкаре — Стеклова (доказательство см., например, Курант [1]).

Лемма 1.1. *Для любой функции $u(x) \in H^1_0(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx \leqslant C \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^d \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right|^2 dx, \tag{1.6}$$

где константа $C > 0$ зависит лишь от Ω.

В теории краевых задач существенно используется теорема о следах функций на границе области. Как известно, в качестве функциональных пространств следов функций естественно использовать пространства Бесова. *Пространство Бесова* $B^s_p(\mathbb{R}^d)$ функций, заданных в пространстве $\mathbb{R}^d$ для $1 < p < \infty$ и нецелых $s > 0$ по определению совпадает с $W^s_p(\mathbb{R}^d)$. Определение пространства Соболева $W^s_p(\mathbb{R}^d)$ функций, заданных на $\mathbb{R}^d$ полностью аналогично определению (1.1)–(1.3). Для натуральных s пространство $B^s_p(\mathbb{R}^d)$ состоит из функций $u \in W^{s-1}_p(\mathbb{R}^d)$ таких, что

$$\begin{aligned} \|u\|_{B^s_p(\mathbb{R}^d)} = \Bigg(&\|u\|^p_{W^{s-1}_p(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \sum_{i=1}^d \int\limits_0^\infty \tau^{-p-1} \sum_{|\alpha|=s-1} \|\delta^2(D^\alpha u, \tau, i)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)} d\tau \Bigg)^{1/p} < \infty, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\delta^2(\varphi,\tau,i) = \varphi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+\tau,x_{i+1},\ldots,x_d) - 2\varphi(x) + \varphi(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i - \tau,x_{i+1},\ldots,x_d)$.

Для $s < 0$, в соответствии с общим определением (1.5) положим $B_p^s(\mathbb{R}^d) = (B_{p'}^{-s}(\mathbb{R}^d))'$, $1/p + 1/p' = 1$

Наконец, основное для нас понятие пространства Бесова $B_p^s(\partial\Omega)$ функций, заданных на многообразии $\partial\Omega$, определяется по $B_p^s(\mathbb{R}^{d-1})$ с помощью известной конструкции, связанной с выбором на границе $\partial\Omega$ некоторого покрытия $\{U_j\}$ и подчиненного ему разбиения единицы (см., например, Лионс, Мадженес [2, с. 48–50]).

Справедливы следующие соотношения между пространствами $W_p^s(\mathbb{R}^d)$ и $B_p^s(\mathbb{R}^d)$ (см. Бесов [1]; Успенский [1]):

$B_p^s(\mathbb{R}^d)$ не совпадает с $W_p^s(\mathbb{R}^d)$ при целом s и $p \neq 2$,

$$B_p^s(\mathbb{R}^d) \subset W_p^s(\mathbb{R}^d), \quad s \in \mathbb{R},\ 1 < p \leqslant 2, \tag{1.8}$$

$$W_p^s(\mathbb{R}^d) \subset B_p^s(\mathbb{R}^d), \quad s \in \mathbb{R},\ 2 \leqslant p < \infty. \tag{1.9}$$

Справедлива следующая теорема о следах (доказательство см. Лионс, Мадженес [1, 2]; Адамс [1]; Трибель [1]).

Теорема 1.3. *Пусть* $1 < p < \infty$, $s > 1/p$ *и* $\Gamma u = \{\gamma_{\partial\Omega}^j u,\ 0 \leqslant j < s - 1/p\}$, *где* $\gamma_{\partial\Omega}^j$ *— операторы* (1.4). *Тогда оператор следов* Γ, *определенный на* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *продолжается до непрерывного оператора*

$$\Gamma : W_p^s(\Omega) \to \prod_{j=0}^{j_0} B_p^{s-j-1/p}(\partial\Omega), \tag{1.10}$$

где j_0 *— наибольшее целое число такое, что* $j_0 < s - 1/p$. *Оператор* (1.10) *является эпиморфизмом, и у* Γ *существует линейный непрерывный правый обратный оператор.*

Отметим, что теорема 1.3 остается справедливой, если $W_p^s(\Omega)$ заменить на $B_p^s(\Omega)$.

В силу соотношений (1.8), (1.9) теорему 1.3 в случае $p = 2$ можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1.4. *Пусть* $s > 1/2$ *и* $\Gamma u = \{\gamma_{\partial\Omega}^j u,\ 0 \leqslant j \leqslant m\}$, *где* $\gamma_{\partial\Omega}^j$ *— операторы* (1.4) *и* $m < s - 1/2$. *Тогда оператор следов* Γ, *определенный на* $C^\infty(\Omega)$, *продолжается до непрерывного оператора*

$$\Gamma : H^s(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m} H^{s-j-1/2}(\partial\Omega), \tag{1.11}$$

и этот оператор является отображением "на".

1.2. Эллиптические краевые задачи в пространствах Соболева. Общей теории эллиптических краевых задач посвящена обширная литература. Наиболее полно нашим целям отвечают книга Лионс, Мадженес [2], в которой изложена эллиптическая теория в пространствах H^s, а также работы Лионса, Мадженеса [1] и Мадженеса [1], где изучен случай W_p^s при $p \neq 2$. В этих же работах изучен и важный для нас случай интерполяционных

пространств и разрешимость в них эллиптических краевых задач. Доказательство всех теорем из п. 1.2 можно найти в цитированных выше работах.

В этой книге мы в основном используем лишь результаты о краевых задачах Дирихле и Неймана для оператора Лапласа, поэтому здесь мы ограничимся только этими задачами и не будем рассматривать общих эллиптических краевых задач. Начнем с задачи Дирихле для оператора Лапласа в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$:

$$-\Delta y(x) = f(x), \tag{1.12}$$

$$\gamma_{\partial\Omega} y = g, \tag{1.13}$$

где $\Delta y = \sum\limits_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x_j^2}$ — оператор Лапласа.

Теорема 1.5. *Пусть $s \geqslant 2$, $1 < p < \infty$. Тогда для любых $f(x) \in W_p^{s-2}(\Omega)$, $g \in B_p^{s-1/p}(\partial\Omega)$ существует единственное решение $y(x) \in W_p^s(\Omega)$ задачи* (1.12), (1.13). *Это решение удовлетворяет неравенству*

$$\|y\|^p_{W_p^s(\Omega)} \leqslant C(\|f\|^p_{W_p^{s-2}(\Omega)} + \|g\|^p_{B_p^{s-1/p}(\partial\Omega)}), \tag{1.14}$$

где константа C не зависит от f и g.

Заменим условие Дирихле (1.13) условием Неймана

$$\gamma^1_{\partial\Omega} y = g, \tag{1.15}$$

где $\gamma^1_{\partial\Omega}$ — оператор (1.4) и рассмотрим краевую задачу (1.12), (1.15).

Теорема 1.6. *Пусть $s \geqslant 2$ и $f(x) \in W_p^{s-2}(\Omega)$, $g(x) \in B_p^{s-1-1/p}(\partial\Omega)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условию*

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx - \int\limits_{\partial\Omega} g(x')\,dx' = 0. \tag{1.16}$$

Тогда существует решение $y(x) \in W_p^s(\Omega)$ задачи (1.12), (1.15). *Множество решений этой задачи состоит из функций вида $y(x) + r$, где r — произвольная константа. Любое решение $z(x)$ задачи* (1.12), (1.15) *удовлетворяет оценке*

$$\|z\|^p_{W_p^s(\Omega)} \leqslant C(\|f\|^p_{W_p^{s-2}(\Omega)} + \|g\|^p_{B_p^{s-1-1/p}(\partial\Omega)} + \|z\|^p_{L_p(\Omega)}), \tag{1.17}$$

где константа C не зависит от f и g.

Для вывода систем оптимальности в гл. 2 мы будем использовать *формулу Грина*

$$\int\limits_{\Omega} (y(x)\Delta z(x) - z(x)\Delta y(x))\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} (y(x')\partial_n z(x') - z(x')\partial_n y(x'))\,dx', \tag{1.18}$$

где $y(x) \in W_p^2(\Omega)$, $z(x) \in W_{p'}^2(\Omega)$, $1/p + 1/p' = 1$, $1 < p, p' < \infty$, $\partial_n z = \dfrac{\partial z}{\partial n}$ (см. (1.4)).

С помощью теоремы 1.3 о следах легко устанавливается

Предложение 1.2. *Пусть $s \geqslant 2$ и $1 < p < \infty$. Операторы*

$$(-\Delta, \gamma^j_{\partial\Omega}) : W^s_p(\Omega) \to W^{s-2}_p(\Omega) \times B^{s-1/p-j}_p(\partial\Omega), \quad j = 0, 1, \tag{1.19}$$

непрерывны.

В теории оптимального управления распределенными системами часто оказываются полезными теоремы о разрешимости эллиптических краевых задач в так называемых интерполяционных пространствах. Этой теме будет посвящен следующий пункт.

1.3. Интерполяционные пространства и эллиптические краевые задачи. Пусть $s \in [0, 2)$ и $1 < p < \infty$. Определим пространство $W^s_{p,\Delta}(\Omega)$, связанное с оператором Лапласа, по формуле

$$W^s_{p,\Delta}(\Omega) = \{y(x) \in W^s_p(\Omega) : \Delta y(x) \in L_p(\Omega)\}. \tag{1.20}$$

Норма пространства $W^s_{p,\Delta}(\Omega)$ определяется стандартным способом, как норма графика:

$$\|y\|^p_{W^s_{p,\Delta}(\Omega)} = \|y\|^p_{W^s_p(\Omega)} + \|\Delta y\|^p_{L_p(\Omega)}. \tag{1.21}$$

При $p = 2$ в гл. 1, 2 используется обозначение $H^s_\Delta(\Omega) = W^s_{2,\Delta}(\Omega)$. Справедлива следующая теорема о следах.

Теорема 1.7. *Пусть $s \in [0, 2)$, $1 < p < \infty$ и если $p \neq 2$, то число $s - 1/p$ является нецелым. Тогда оператор следа $u \to (\gamma_{\partial\Omega} u, \gamma^1_{\partial\Omega} u)$ определен и действует непрерывно из $W^s_{p,\Delta}(\Omega)$ на $B^{s-1/p}_p(\partial\Omega) \times B^{s-1-1/p}_p(\partial\Omega)$.*

Рассмотрим задачу Дирихле (1.12), (1.13).

Теорема 1.8. *Пусть $s \in [0, 2)$, $1 < p < \infty$ и при $p \neq 2$ число $s - 1/p$ является нецелым. Тогда для любых $f(x) \in L_p(\Omega)$, $g \in B^{s-1/p}_p(\partial\Omega)$ существует единственное решение $y \in W^s_{p,\Delta}(\Omega)$ задачи* (1.12), (1.13). *Это решение удовлетворяет неравенству*

$$\|y\|^p_{W^s_{p,\Delta}(\Omega)} \leqslant C(\|f\|^p_{L_p(\Omega)} + \|g\|^p_{B^{s-1/p}_p(\partial\Omega)}). \tag{1.22}$$

Подробная схема доказательства теорем 1.7 и 1.8 изложена в Мадженес [1]. Полное доказательство этих теорем см. Лионс, Мадженес [1, 2].

Аналогично доказывается теорема о разрешимости задачи Неймана (см. Лионс, Мадженес [1, 2]; Мадженес [1]).

Теорема 1.9. *Пусть $s \in [0, 2)$, $1 < p < \infty$ и в случае $p \neq 2$ число $s - 1/p$ является нецелым, а $f \in L_p(\Omega)$, $g \in B^{s-1-1/p}_p(\partial\Omega)$ — произвольные функции, удовлетворяющие соотношению*[3] (1.16). *Тогда существует единственное с точностью до слагаемого-константы решение $y(x) \in W^s_{p,\Delta}(\Omega)$ задачи* (1.12),

[3] Если $s - 1 - 1/p < 0$, то второй из интегралов в (1.16) понимается как значение обобщенной функции g на пробной функции $\varphi(x) \equiv 1$.

(1.15). *Все решения $z(x)$ этой задачи удовлетворяют оценке*

$$\|z\|^p_{W^s_{p,\Delta}(\Omega)} \leqslant C(\|f\|^p_{L_p(\Omega)} + \|g\|^p_{B_p^{s-1-1/p}(\partial\Omega)} + \|z\|_{L_p(\Omega)}). \tag{1.23}$$

Для полной ясности отметим, что в цитированных работах вместо пространства (1.20) рассматривалось пространство вида $\{y(x) \in W^s_p(\Omega) : \Delta y(x) \in X\}$, где X — некоторое банахово пространство правых частей $\{f\}$ задачи (1.12), (1.13), причем $L_p(\Omega) \subset X$. Здесь нет необходимости давать точное определение пространства X. Для нас сейчас важно лишь, что $L_p(\Omega)$ непрерывно вкладывается в X. В силу этого вложения теоремы 1.7–1.9 очевидным образом следуют из результатов цитированных работ Лионса, Мадженеса.

Пусть S — множество (область, многообразие в $\mathbb{R}^d$), на котором естественным образом вводится мера Лебега. Через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(S)}$ будем обозначать соотношение двойственности, порожденное скалярным произведением в $L_2(S)$ (см. (1.5)). Для функций из $W^s_{p,\Delta}(\Omega)$, где s, p удовлетворяют условиям теоремы 1.7, справедлива формула Грина

$$\langle y, \Delta z\rangle_{(\Omega)} - \langle z, \Delta y\rangle_{(\Omega)} = \langle y, \partial_n z\rangle_{(\partial\Omega)} - \langle \partial_n y, z\rangle_{(\partial\Omega)}, \tag{1.24}$$

где ∂_n — оператор дифференцирования по внешней нормали к $\partial\Omega$, $y \in W^s_{p,\Delta}(\Omega)$, $z \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Формула Грина (1.24) тесно связана с теоремой 1.7 и доказана в Лионс, Мадженес [1].

Приведем также один результат об однозначной разрешимости задачи Дирихле для оператора Лапласа, полученный с помощью интерполяции разрешающего оператора этой задачи, построенного вариационным методом на основе неравенства Вишика — Гординга (доказательство см. Лионс, Мадженес [1]; Мадженес [1]).

Теорема 1.10. *Для действительного $s \in [1,2]$ такого, что $s - 1/p$ — нецелое $(1 < p < \infty)$, оператор $(-\Delta, \gamma_{\partial\Omega})$ есть изоморфизм $W^s_p(\Omega)$ на $W^{s-2}_p \times B_p^{s-1/p}(\partial\Omega)$.*

Замечание 1.1. В силу (1.8), (1.9), если $p = 2$ в теоремах 1.3–1.10, то в этих теоремах пространства Бесова B^γ_p можно заменить пространствами Соболева H^γ.

Нам понадобится следующий вариант теорем 1.8, 1.9. Предположим, что граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из двух непересекающихся замкнутых многообразий Γ_0 и Γ_1: $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$.

Предложение 1.3. *Уравнение (1.12) с граничными условиями*

$$y\big|_{\Gamma_0} = g_0, \quad \partial_n y\big|_{\Gamma_1} = g_1$$

при любых $f \in L_p(\Omega)$, $g_0 \in B_p^{s-1/p}(\Gamma_0)$, $g_1 \in B_p^{s-1-1/p}(\Gamma_1)$ имеет единственное решение $y \in W^s_{p,\Delta}(\Omega)$ если $s \geqslant 0$ и в случае $p \neq 2$ число $s - 1/p$ не равно 0 или 1. При этом справедлива оценка

$$\|y\|^p_{W^s_{p,\Delta}(\Omega)} \leqslant c(\|f\|^p_{L_p(\Omega)} + \|g_0\|^p_{B_p^{s-1/p}(\Gamma_0)} + \|g_1\|_{B_p^{s-1-1/p}(\Gamma_1)}),$$

где c не зависит от f, g_0, g_1.

Для вывода предложения 1.3 из общих результатов эллиптической теории (Лионс, Мадженес [1, 2]) достаточно проверить, что сопряженная краевая задача имеет нулевое ядро. Проверка этого факта очевидна.

1.4. Анизотропные пространства Соболева и Бесова и параболические краевые задачи. Ниже рассматриваются анизотропные функциональные пространства с одной выделенной переменной (временем). Эти пространства приспособлены для изучения параболических уравнений.

Если E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, S — область или многообразие в $\mathbb{R}^d$, то через $L_p(S;E)$, $1 \leqslant p < \infty$, обозначается множество функций, заданных на S со значениями в E, для которых конечна норма

$$\|y\|_{L_p(S;E)} = \left(\int\limits_S \|y(x)\|^p dx\right)^{1/p}. \tag{1.25}$$

Через $C(S;E)$ обозначается пространство непрерывных функций $x \to y(x) \in E$, $x \in S$, с нормой $\|y\|_{C(S;E)} = \max_{x\in S} \|y(x)\|$.

Справедлива следующая лемма Дубинского о компактном вложении (доказательство см. Дубинский [1]; Лионс [1]) [4].

Лемма 1.2. *Пусть $1 < p_j < \infty$, $j = 1,2,3$, а E_j $(j = 1,2,3)$ — нормированные пространства, причем вложение $E_1 \subseteq E_2$ вполне непрерывно, а вложение $E_2 \subset E_3$ непрерывно. Рассмотрим пространство $X = \{y(t) \in L_{p_1}(0,T;E_1) : \dot{y}(t) \in L_{p_3}(0,T;E_3)\}$, где $t \in [0,T]$ и $[0,T]$ — отрезок вещественной прямой, а $\dot{y}(t) = \partial y(t)/\partial t$. Тогда пространство X вполне непрерывно вложено в пространство $L_{p_2}(0,T;E_2)$.*

Пусть $Q = (0,T) \times \Omega$, где $0 < T \leqslant \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^\infty$, $s > 0$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда анизотропное пространство Соболева $W_p^{s,2s}(Q)$ определяется соотношением $W_p^{s,2s}(Q) = L_p(0,T;W_p^{2s}(\Omega)) \cap L_p(\Omega;W_p^s(0,T))$. Пространство $W_p^{s,2s}(Q)$ снабжается нормой

$$\|y\|_{W_p^{s,2s}(Q)} = \left(\int\limits_0^T \|y(t,\cdot)\|^p_{W_p^{2s}(\Omega)} dt + \int\limits_\Omega \|y(\cdot,x)\|^p_{W_p^s(0,T)} dx\right)^{1/p}. \tag{1.26}$$

Для анизотропных пространств Соболева справедлива следующая теорема вложения (доказательство см. Бесов, Ильин, Никольский [1]).

Теорема 1.11. *Пусть $s \geqslant 0$, $1 < p \leqslant q_i < \infty$, $i = 1,2$.*

(a) *Для функций $u \in W_p^{s,2s}(Q)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L_{q_1}(0,T;L_{q_2}(\Omega))} \leqslant C\|u\|_{W_p^{s,2s}(Q)}, \tag{1.27}$$

если $(1/p - 1/q_1) + d/2(1/p - 1/q_2) \leqslant s$, где C не зависит от u.

---

[4] См. также Aubin J.P. Un theoreme de compacite, C.R.Acad. Sci., 256 (1963), 5042–5044; Simon J. Compact sets in $L^p(0,T;B)$, Ann. Math. Pura Appl. VCXLVI (1987), 65–96. — *Прим. ред.*

(b) *Если* $(d+2)/2p < s$, *то любая функция* $u \in W_p^{s,2s}(Q)$ *почти всюду в* Q *совпадает с непрерывной функцией, причем*

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \leqslant C\|u\|_{W_p^{s,2s}(Q)},$$

где C *не зависит от* u.

Предложение 1.4. *Пространство* $C^\infty(\overline{Q})$ *плотно в* $W_p^{s,2s}(Q)$, *где* $s \geqslant 0$, $1 \leqslant p < \infty$.

Теорема 1.12. *Пусть* $s \geqslant 0$, $1 < p \leqslant q_i < \infty$, $i = 1, 2$.

(a) *Если* $(1/p - 1/q_1) + (d/2)(1/p - 1/q_2) < s$, *то вложение* $W_p^{s,2s}(Q) \Subset L_{q_1}(0,T; L_{q_2}(\Omega))$ *вполне непрерывно.*

(b) *Если* $s > (d+2)/2p$, *то вложение* $W_p^{s,2s}(Q) \Subset C(\overline{Q})$ *вполне непрерывно.*

Доказательство см. Бесов, Ильин, Никольский [1].

Для формулировки теоремы о следах нам потребуются анизотропные пространства Бесова.

Пространства Бесова $B_p^{s,2s}(\mathbb{R}^{1+d})$ для $1 < p < \infty$ и нецелых $s > 0$ по определению совпадают с $W_p^{s,2s}(\mathbb{R}^{1+d})$. Для натуральных s пространство $B_p^{s,2s}(\mathbb{R}^{1+d})$ состоит из $u \in W_p^{s-1,2(s-1)}(\mathbb{R}^{1+d})$ таких, что

$$\|u\|^p_{B_p^{s,2s}(\mathbb{R}^{1+d})} = \Bigg(\|u\|^p_{W_p^{s-1,2(s-1)}(\mathbb{R}^{1+d})} + \sum_{i=1}^{d} \int_0^\infty \sum_{2k+|\alpha|=2(s-1)} \tau^{-1-p} \left\| \delta^2\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} D_x^\alpha u, \tau, i \right) \right\|^p_{L_p(\mathbb{R}^{1+d})} d\tau \Bigg)^{1/p}, \tag{1.27}$$

где $\delta^2(\varphi, \tau, i)$ определено сразу после формулы (1.7).

Пусть $u(x)$, $x \in \Omega$, — функция, заданная в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Функция $Lu(x)$ называется *продолжением* функции $u(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$, если $Lu(x)$ определена на $\mathbb{R}^d$ и ее сужение на Ω совпадает с $u(\cdot)$: $Lu(x) = u(x)$ для всех $x \in \Omega$.

Пространством Бесова $B_p^s(\Omega)$ функций, заданных на Ω, называется множество функций $u(x)$, имеющих продолжение $Lu(x)$ на $\mathbb{R}^d$, принадлежащее пространству $B_p^s(\mathbb{R}^d)$. Норма в $B_p^s(\Omega)$ определяется соотношением

$$\|u\|_{B_p^s(\Omega)} = \inf_L \|Lu\|_{B_p^s(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.28}$$

где нижняя грань берется по всем продолжениям функции $u(x)$ на $\mathbb{R}^d$, принадлежащим $B_p^s(\mathbb{R}^d)$.

Пространство Бесова $B_p^{s,2s}(\mathbb{R} \times \partial\Omega)$ строится по $B_p^{s,2s}(\mathbb{R}^{1+(d-1)})$ с помощью выбора покрытия $\{U_j\}$ на $\partial\Omega$ и соответствующего ему разбиения единицы так же, как $B_p^s(\partial\Omega)$ строится по $B_p^s(\mathbb{R}^{d-1})$.

Пусть $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$ — боковая поверхность цилиндра $Q = (0,T) \times \Omega$. Тогда пространство Бесова $B_p^{s,2s}(\Sigma)$ определяется как множество сужений на Σ функций из пространства $B_p^{s,2s}(\mathbb{R} \times \partial\Omega)$; норма пространства $B_p^{s,2s}(\Sigma)$ определяется аналогично (1.28).

На пространстве $C^\infty(\overline{Q})$ определим операторы сужения

$$\gamma_\tau y(\cdot) = y(t,\cdot)\big|_{t=\tau}, \quad \gamma_\Sigma y = y\big|_\Sigma, \quad \gamma_\Sigma \partial_n y = \partial_n y\big|_\Sigma, \tag{1.29}$$

где ∂_n — дифференцирование вдоль внешней нормали к $\partial\Omega$.

Теорема 1.13. *Пусть $s>0$, $1<p<\infty$. Операторы* (1.29) *продолжаются с $C^\infty(\overline{Q})$ до непрерывных операторов*

$$\begin{aligned}
&\gamma_\tau : W_p^{s,2s}(Q) \to B_p^{2s-2/p}(\Omega), \quad s>1/p,\\
&\gamma_\Sigma : W_p^{s,2s}(Q) \to B_p^{s-1/2p,2s-1/p}(\Sigma), \quad 2s>1/p,\\
&\gamma_\Sigma \partial_n : W_p^{s,2s}(Q) \to B_p^{s-1/2-1/(2p),2s-1-1/p}(\Sigma), \quad 2s>1+1/p.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Доказательство см. Бесов, Ильин, Никольский [1]; Солонников [1].

Отметим, что оператор

$$\begin{aligned}
&(\gamma_\tau, \gamma_\Sigma, \gamma_\Sigma\partial_n) : W_p^{s,2s}(Q)\\
&\to B_p^{2s-\frac{2}{p}}(\Omega) \times B_p^{s-1/(2p),2s-1/p}(\Sigma) \times B_p^{s-1/2-1/(2p),2s-1-1/p}(\Sigma)
\end{aligned} \tag{1.31}$$

не является отображением “на”, так как функции из образа этого оператора удовлетворяют условиям согласования при $(t,x)\in\{\tau\}\times\partial\Omega$

$$\gamma_\tau \partial_t^k(\gamma_\Sigma \partial_n^j u) = \gamma_\Sigma \partial_n^j(\gamma_\tau \partial_t^k u)$$

при некоторых k и j, величина которых ограничена сверху константами, зависящими от s и p.

В случае $p=2$ анизотропные пространства Соболева и Бесова совпадают и обозначаются символом $H^{s,2s}$:

$$\begin{aligned}
&W_2^{s,2s}(\mathbb{R}^{1+d}) = B_2^{s,2s}(\mathbb{R}^{1+d}) = H^{s,2s}(\mathbb{R}^{1+d})\\
&W_2^{s,2s}(Q) = H^{s,2s}(Q), \quad B_2^{s,2s}(\Sigma) = H^{s,2s}(\Sigma).
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующую смешанную краевую задачу Дирихле для уравнения теплопроводности с $\mu>0$:

$$\dot y(t,x) - \mu\Delta y(t,x) = f(t,x), \tag{1.32}$$

$$(\gamma_0 y)(x) = v_0(x), \tag{1.33}$$

$$\gamma_\Sigma y = \varphi, \tag{1.34}$$

где $\dot y = \partial y/\partial t$. Кроме того, рассмотрим задачу Неймана, т. е. задачу (1.32), (1.33), снабженную краевым условием Неймана на Σ:

$$\gamma_\Sigma \partial_n y = \psi. \tag{1.35}$$

Для разрешимости этих краевых задач в классе гладких функций необходимо выполнение условий согласования между исходными данными (f, v_0, φ) или (f, v_0, ψ). Предполагая решение y, как и исходные данные (f, v_0, φ) задачи (1.32)–(1.34), бесконечно дифференцируемыми, легко выписать рекуррентные формулы для определения $\partial_t^k y\big|_{t=0}$ через v_0 и f:

$$\partial_t^k y\big|_{t=0} = \mu\Delta\partial_t^{k-1} y\big|_{t=0} + \partial_t^{k-1} f\big|_{t=0}, \quad y\big|_{t=0} = v_0(x), \quad k=1,2,\ldots.$$

Условиями согласования порядка m для задачи (1.32)–(1.34) называются равенства

$$\gamma_{\partial\Omega}\gamma_0\partial_t^k y = \gamma_0\partial_t^k\varphi, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{1.36}$$

Аналогично, используя те же рекуррентные формулы, получим следующие условия согласования порядка m для задачи (1.32), (1.33), (1.35):

$$\gamma_{\partial\Omega}\gamma_0\partial_n\partial_t^k y = \gamma_0\partial_t^k\psi, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{1.37}$$

Сформулируем теоремы о разрешимости смешанных краевых задач для уравнения теплопроводности.

Теорема 1.14. *Пусть $1 < p < \infty$, $s \geqslant 1$, и число $s - 3/2p > 0$ не является целым. Тогда для любых $f \in W_p^{(s-1),2(s-1)}(Q)$, $v_0 \in B_p^{2(s-1/p)}(\Omega)$, $\varphi \in B_p^{s-1/2p,2(s-1/2p)}(\Sigma)$, удовлетворяющих условиям согласования порядка $[s - 3/2p]$, существует единственное решение $y \in W_p^{s,2s}(Q)$ задачи (1.32)–(1.34). Для этого решения справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\|y\|_{W_p^{s,2s}(Q)} \leqslant C(\|f\|_{W_p^{(s-1),2(s-1)}(Q)}\\&+ \|v_0\|_{B_p^{2s-2/p}(\Omega)} + \|\varphi\|_{B_p^{s-1/2p,2(s-1/2p)}(\Sigma)}),\end{aligned} \tag{1.38}$$

где константа $C > 0$ не зависит от f, v_0, φ.

Теорема 1.15. *Пусть $1 < p < \infty$, $s \geqslant 1$, и число $s - 3/(2p) - 1/2 > 0$ не является целым. Тогда для любых $f \in W_p^{(s-1),2(s-1)}(Q)$, $v_0 \in B_p^{2(s-1/p)}(\Omega)$, $\psi \in B_p^{s-1/2-1/2p,2(s-1/2-1/2p)}(\Sigma)$, удовлетворяющих условию согласования порядка $[s - 3/(2p) - 1/2]$, существует единственное решение $y \in W_p^{s,2s}(Q)$ задачи (1.32), (1.33), (1.35). Для этого решения справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\|y\|_{W_p^{s,2s}(Q)} \leqslant C(\|f\|_{W_p^{(s-1),2(s-1)}(Q)}\\&+ \|v_0\|_{B_p^{2s-2/p}(\Omega)} + \|\psi\|_{B_p^{s-1/2-1/(2p),2(s-1/2-1/(2p))}(\Sigma)}),\end{aligned} \tag{1.39}$$

где константа $C > 0$ не зависит от f, v_0, ψ.

Доказательство теорем 1.14 и 1.15 см. Солонников [1].

В заключение отметим, что для $y \in W_p^{1,2}(Q)$, $z \in W_q^{1,2}(Q)$, $1/p+1/q \leqslant 1$, справедлива формула Грина (доказательство см., например, Лионс, Мадженес [3])

$$\begin{aligned}&\int\limits_Q (\partial_t y - \mu\Delta y)z\,dx\,dt = \int\limits_\Omega (\gamma_T y(x)\gamma_T z(x) - \gamma_0 y(x)\gamma_0 z(x))\,dx\\&- \mu\int\limits_\Sigma (\partial_n y\cdot z - y\partial_n z)dx'dt - \int\limits_Q y(\partial_t z + \mu\Delta z)\,dx\,dt.\end{aligned} \tag{1.40}$$

В заключение сформулируем один результат о разрешимости параболических краевых задач, который не укладывается в рамки теории, изложенной в п. 1.4, но используется в дальнейшем.

Рассмотрим смешанную краевую задачу теплопроводности с нулевыми условиями Дирихле:

$$\dot{y}(t,x) - \mu\Delta y(t,x) = f(t,x), \quad \gamma_0 y = y_0, \quad \gamma_\Sigma y = 0. \tag{1.41}$$

Предположим, что $f \in L_2(Q)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $\mu > 0$, а в качестве пространства решений возьмем пространство

$$Y = \{y(t,x) \in L_2(0,T; H_0^1(\Omega)) : \dot{y} \in L_2(0,T; H^{-1}(\Omega))\}. \tag{1.42}$$

Теорема 1.16. (a) *При любом* $\tau \in (0,T)$ *отображение*

$$\gamma_\tau : Y \to L_2(\Omega)$$

является непрерывным отображением "на".

(b) *Отображение*

$$(\partial_t - \Delta, \gamma_0) : Y \to L_2(Q) \times L_2(\Omega)$$

является изоморфизмом.

В обоих случаях (a) *и* (b) Y *— это пространство* (1.42).

Доказательство см. Лионс, Мадженес [2].

§ 2. Абстрактные экстремальные задачи

В этом параграфе доказаны теоремы существования решения для некоторых абстрактных экстремальных задач. Эти теоремы в дальнейшем постоянно используются для доказательства различных теорем существования. Мы начнем с линейных задач, т. е. экстремальных задач с линейными связями. Для линейных задач помимо существования мы установим также единственность.

2.1. Линейная экстремальная задача. Пусть X — линейное нормированное пространство, X_∂ — выпуклое[5] замкнутое подмножество пространства X, $J(x)$ — функционал, определенный и ограниченный снизу на X_∂:

$$\infty \geqslant J(x) \geqslant C > -\infty \quad \forall x \in X_\partial. \tag{2.1}$$

Предполагается, что $J(x)$ полунепрерывен снизу на X_∂ относительно слабой сходимости в X, т. е. для любых элемента $\widehat{x} \in X_\partial$ и последовательности элементов $x_n \in X_\partial$, слабо сходящейся к $\widehat{x}$

$$J(\widehat{x}) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} J(x_n).$$

Пусть X_1 — рефлексивное банахово пространство, непрерывно вложенное в X, и V — линейное нормированное пространство. Рассмотрим линейный непрерывный оператор

$$L : X_1 \to V \tag{2.2}$$

[5]Напомним, что множество $X_0 \subset X$ называется выпуклым, если из включений $x_1 \in X_0$ и $x_2 \in X_0$ следует $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in X_0$ при любом $\alpha \in [0,1]$.

и экстремальную задачу

$$J(x) \to \inf, \tag{2.3}$$

$$Lx + F_0 = 0, \tag{2.4}$$

$$x \in X_\partial, \tag{2.5}$$

где $F_0 \in V$ — заданный вектор.

Допустимым элементом задачи (2.3)–(2.5) называется любой вектор $x \in X_1$, которые удовлетворят (2.4), (2.5) и условию $J(x) < \infty$. Множество допустимых элементов задачи (2.3)–(2.5) обозначается $\mathfrak{A}$.

Будем предполагать выполненными следующие условия.

Условие 2.1 (нетривиальность). Множество $\mathfrak{A}$ допустимых элементов задачи (2.3)–(2.5) непусто.

Условие 2.2 (коэрцитивность). Для любого $R > 0$ множество $\{x \in \mathfrak{A} : J(x) < R\}$ ограничено в пространстве X_1.

Решением задачи (2.3)–(2.5) называется элемент $\widehat{x} \in \mathfrak{A}$, на котором функционал J достигает минимального значения:

$$J(\widehat{x}) = \inf_{x \in \mathfrak{A}} J(x). \tag{2.6}$$

Теорема 2.1. *Задача* (2.3)–(2.5) *имеет решение* $\widehat{x} \in X_1$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{A} \neq \varnothing$, существует минимизирующая последовательность $x_m \in \mathfrak{A}$:

$$\lim_{m \to \infty} J(x_m) = \inf_{x \in \mathfrak{A}} J(x), \tag{2.7}$$

причем $J(x_m) \leqslant C < \infty$, где C не зависит от m. Поэтому в силу условия 2.2

$$\|x_m\|_{X_1} \leqslant C_1. \tag{2.8}$$

Вследствие (2.8), переходя, если потребуется, к подпоследовательности, получим, что

$$x_n \to \widehat{x} \text{ слабо в } X_1. \tag{2.9}$$

Так как вложение $X_1 \subset X$ непрерывно, любой линейный непрерывный функционал на X непрерывен и на X_1 и, следовательно, в силу (2.9) имеем

$$x_n \to \widehat{x} \text{ слабо в } X. \tag{2.10}$$

Так как множество X_∂ выпукло и замкнуто в X, в силу теоремы Мазура оно секвенциально слабо замкнуто[6] в X (см., например, Иоффе, Тихомиров [1, с. 177]). Поэтому из (2.10) следует включение $\widehat{x} \in X_\partial$.

[6] т. е. если последовательность x_n слабо в X сходится к элементу x и $x_n \in X_\partial$ для любого n, то $x \in X_\partial$.

Пусть $L^* : V^* \to X_1^*$ — оператор, сопряженный к оператору (2.2).[7] Тогда из (2.9) вытекает, что для любого $w \in V^*$

$$\langle Lx_m, w\rangle_V = \langle x_m, L^* w\rangle_{X_1} \to \langle \widehat{x}, L^* w\rangle_{X_1} = \langle L\widehat{x}, w\rangle_V . \tag{2.11}$$

В силу $x_m \in \mathfrak{A}$, имеем равенство $Lx_m + F_0 = 0$. Из этого равенства и (2.11) следует, что $L\widehat{x} + F_0 = 0$. Так как J полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости в X, вследствие (2.10) имеем

$$J(\widehat{x}) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} J(x_m). \tag{2.12}$$

Таким образом, $\widehat{x} \in \mathfrak{A}$, а из (2.7), (2.12) вытекает, что $\widehat{x}$ — решение задачи (2.3)–(2.5). □

Замечание 2.1. Доказательство теоремы 2.1 не меняется, если условие непрерывности оператора (2.2) ослабить следующим образом: существует плотное подмножество $S \subset V^*$ такое, что для любого $s \in S$ функционал $x \to \langle Lx, s\rangle_V$ продолжается по непрерывности с области определения оператора (2.2) до линейного непрерывного функционала на X_1.

Напомним, что функционал $J(x)$, заданный на выпуклом подмножестве X_0 пространства X, называется *выпуклым,* если для любых $x_1, x_2 \in X_\partial$ и $\alpha \in [0,1]$ справедливо *неравенство Иенсена*

$$J(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha J(x_1) + (1-\alpha)J(x_2). \tag{2.13}$$

Если при любых $x_1 \neq x_2$ и $\alpha \in (0,1)$ в (2.13) имеет место строгое неравенство, то функционал J называется *строго выпуклым.*

Замечание 2.2. Известно (см., например, Экланд, Темам [1, с. 20]), что выпуклый полунепрерывный снизу функционал полунепрерывен снизу относительно слабой сходимости. Поэтому в теореме 2.1 вместо предположения о полунепрерывности снизу функционала $J(x)$ относительно слабой сходимости в пространстве X можно на J наложить следующие условия:

(a) J полунепрерывен снизу на X_∂ относительно сильной сходимости линейного нормированного пространства X,

(b) J — выпуклый функционал.

Решение задачи (2.3)–(2.5) единственно.

Теорема 2.2. *Если J — строго выпуклый функционал, то решение задачи* (2.3)–(2.5) *единственно.*

Доказательство. Пусть x_1, x_2 — два решения задачи (2.3)–(2.5). Множество $\mathfrak{A}$ допустимых элементов выпукло. Поэтому из включений $x_1 \in \mathfrak{A}$ и $x_2 \in \mathfrak{A}$ следует $(x_1+x_2)/2 \in \mathfrak{A}$. Если $x_1 \neq x_2$, то в силу строгой выпуклости функционала J

$$J((x_1+x_2)/2) < \frac{1}{2}(J(x_1) + J(x_2)),$$

[7] Через Z^* обозначается, как обычно, пространство, сопряженное к линейному нормированному пространству Z, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle_Z$ — отношение двойственности между Z и Z^*.

что противоречит предположению, что x_1 и x_2 — решения задачи (2.3)–(2.5). □

Хорошо известно следующее достаточное условие выпуклости (Рокафеллар [1]).

Предложение 2.1. *Пусть $J(x)$ — функционал, определенный и дважды дифференцируемый по Гато на выпуклом подмножестве X_∂ линейного нормированного пространства X. Если для любого $\widehat{x} \in X_\partial$ справедливо неравенство $J''(\widehat{x})(h,h) \geqslant 0$ при всех $h \in X$, то J — выпуклый функционал на X_∂. Если $J''(x)(h,h) \geqslant \alpha\|h\|^2$ при всех $h \in X$ и $\alpha > 0$ не зависит от h, то J — строго выпуклый функционал.*

Следствие 2.1. *Пусть X — гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и $x_0 \in X$. Тогда функционал $J(x) = \|x - x_0\|^2$ является строго выпуклым.*

Доказательство. Так как для любого $\widehat{x} \in X$ имеем $J''(\widehat{x})(h,h) = 2\|h\|^2$, утверждение следует из предложения 2.1. □

2.2. Линейная задача управления. В этом пункте рассмотрим один важный частный случай задачи (2.3)–(2.5), который мы называем *абстрактной линейной задачей управления.*

Пусть Y, V — линейные нормированные пространства, Y_1, U — рефлексивные банаховы пространства, причем

$$Y_1 \text{ непрерывно вложено в } Y. \tag{2.14}$$

Заданы выпуклое замкнутое подмножество U_∂ пространства U и выпуклый функционал $J(y,u)$, определенный, полунепрерывный снизу и ограниченный снизу на $Y \times U_\partial$. Кроме того определен линейный непрерывный оператор

$$L : Y_1 \times U \to V. \tag{2.15}$$

Рассматривается следующая экстремальная задача:

$$J(y,u) \to \inf, \tag{2.16}$$

$$L(y,u) + F_0 = 0, \tag{2.17}$$

$$u \in U_\partial, \tag{2.18}$$

где $F_0 \in V$ — заданный вектор. Эта задача называется *задачей управления.* При этом u называется *управлением, y — состоянием*, а минимизируемый функционал $J(y,u)$ называется *функционалом стоимости* или *целевым функционалом.*

Для точной постановки задачи, так же как в п. 2.1, введем множество $\mathfrak{A}$ допустимых пар (y,u) задачи (2.16)–(2.18), т. е. таких пар $(y,u) \in Y_1 \times U$, удовлетворяющих соотношениям (2.17), (2.18), для которых $J(y,u) < \infty$.

Предполагаются выполненными следующие условия нетривиальности и коэрцитивности задачи (2.16)–(2.18).

Условие 2.3 (нетривиальность). Множество $\mathfrak{A}$ допустимых элементов непусто.

Условие 2.4 (коэрцитивность). Для любого $R > 0$ множество $\{(y,u) \in \mathfrak{A} : J(y,u) \leqslant R\}$ ограничено в $Y_1 \times U$.

Как и в п. 2.1, *решением задачи* (2.16)–(2.18) называется пара $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in \mathfrak{A}$, на которой достигается минимум функционала J:

$$J(\widehat{y}, \widehat{u}) = \inf_{(y,u)\in\mathfrak{A}} J(y,u).$$

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия, сформулированные в п.* 2.2. *Тогда задача* (2.16)–(2.18) *имеет решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times U$. *Если функционал* J *строго выпуклый, то это решение единственно.*

Доказательство. Покажем, что теорема 2.3 сводится к теоремам 2.1, 2.2. Положим $X = Y \times U$, $X_1 = Y_1 \times U$, $X_\partial = X \times U_\partial$. Тогда из (2.14), условий 2.3, 2.4 и других предположений, сформулированных в этом пункте, следует справедливость всех предположений пункта 2.1. Поэтому из теоремы 2.1 следует существование, а из теоремы 2.2 — единственность решения задачи (2.16)–(2.18). □

2.3. Задача управления, нелинейная по фазовой переменной. Пусть пространства Y, Y_1, U, V, множество U_∂, функционал $J(y,u)$ и оператор L удовлетворяют условиям, сформулированным в п. 2.2. Рассмотрим нелинейный непрерывный оператор

$$F : Y_1 \to V. \tag{2.19}$$

Пусть Y_{-1} — линейное нормированное пространство такое, что

$$\text{вложение } Y \subset Y_{-1} \text{ непрерывно,} \tag{2.20}$$

и выполнено следующее условие.

Условие 2.5 (компактность). (1) Вложение

$$Y_1 \Subset Y_{-1} \tag{2.21}$$

вполне непрерывно.

(2) Существует всюду плотное подмножество S пространства V^* такое, что для любого $v \in S$ функционал

$$y \to \langle F(y), v\rangle_V \tag{2.22}$$

продолжается по непрерывности с Y_1 на Y_{-1}.

Рассмотрим нелинейную экстремальную задачу.

$$J(y,u) \to \inf, \tag{2.23}$$

$$L(y,u) + F(y) = 0, \tag{2.24}$$

$$u \in U_\partial. \tag{2.25}$$

Определение 2.1. *Допустимым элементом задачи* (2.23)–(2.25) называется пара $(y,u) \in Y_1 \times U_\partial$, удовлетворяющая соотношению (2.24) и условию $J(y,u) < \infty$. Множество допустимых элементов задачи (2.23)–(2.25) обозначается $\mathfrak{A}$.

Предполагается, что помимо условия 2.5 выполнены условие нетривиальности 2.3 и условие коэрцитивности 2.4, где $\mathfrak{A}$ — множество из определения 2.1. Решение задачи (2.23)–(2.25) определяется аналогично решению из п. 2.1. При выполнении всех перечисленных в этом пункте условий справедлива

Теорема 2.4. *Задача* (2.23)–(2.25) *имеет решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times U_\partial$.

Доказательство. В силу условий нетривиальности и коэрцитивности, как и при доказательстве теоремы 2.1, можно выбрать последовательность $(y_m, u_m) \in \mathfrak{A}$, для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(y_m, u_m) = \inf_{(y,u)\in\mathfrak{A}} J(y, u), \tag{2.26}$$

$$\|y_m\|_{Y_1} \leqslant C, \quad \|u_m\|_U \leqslant C, \tag{2.27}$$

где $C < \infty$ не зависит от m и

$$y_m \to \widehat{y} \text{ слабо в } Y_1, \quad u_m \to \widehat{u} \text{ слабо в } U \quad \text{при } m \to \infty. \tag{2.28}$$

Так как из выпуклости и замкнутости множества U_∂ следует его секвенциальная слабая замкнутость, в силу (2.28) имеем $\widehat{u} \in U_\partial$. Аналогично (2.11) выводим из (2.28), что для любого $w \in V^*$

$$\langle L(y_m, u_m), w\rangle_V \to \langle L(\widehat{y}, \widehat{u}), w\rangle_V \quad \text{при } m \to \infty. \tag{2.29}$$

Из (2.28), (2.21) следует, что

$$y_m \to \widehat{y} \text{ сильно в } Y_{-1}.$$

В силу условия 2.5

$$\langle F(y_m), w\rangle_V \xrightarrow[m\to\infty]{} \langle F(\widehat{y}), w\rangle \quad \forall w \in S \subset V^*. \tag{2.30}$$

Так как $(y_m, u_m) \in \mathfrak{A}$, из (2.29), (2.30) и плотности множества S в V^* следует, что

$$L(\widehat{y}, \widehat{u}) + F(\widehat{y}) = 0. \tag{2.31}$$

Так как из выпуклости и полунепрерывности снизу на $Y \times U_\partial$ функционала $J(y, u)$ следует его полунепрерывность снизу относительно слабой сходимости в $Y \times U$, имеем

$$J(\widehat{y}, \widehat{u}) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} J(y_m, u_m). \tag{2.32}$$

Действительно, $\|y_m\|_Y \leqslant C_2$ в силу (2.27), (2.14) и $y_m \to \widehat{y}$ слабо в Y ввиду (2.28). Из (2.31), (2.32) и включения $\widehat{u} \in U_\partial$, следует, что $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in \mathfrak{A}$, а в силу (2.26), (2.32) $(\widehat{y}, \widehat{u})$ — решение задачи (2.23)–(2.25). □

Замечание 2.3. Аналогично замечанию 2.1 условие непрерывности оператора (2.15), как в теореме 2.3, так и в теореме 2.4 можно заменить следующим более слабым условием: существует плотное подмножество $S \subset V^*$ такое, что для любого $s \in S$ функционал $(y, u) \to \langle L(y, u), s\rangle_V$ можно продолжить до линейного непрерывного функционала на пространстве $Y_1 \times U$.

Докажем секвенциально слабую замкнутость множества $\mathfrak{A}$ допустимых пар задачи (2.16), (2.23), (2.18).

Лемма 2.1. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.4 *и функционал* $J(y,u)$ *ограничен на любом ограниченном подмножестве из* $Y \times U_\partial$. *Тогда множество* $\mathfrak{A}$ *допустимых пар задачи* (2.23)–(2.25) *секвенциально слабо замкнуто в* $Y \times U$.

Доказательство. Пусть при любом $m \in \mathbb{N}$ $(y_m, u_m) \in \mathfrak{A}$ и $(y_m, u_m) \to (\widehat{y}, \widehat{u})$ слабо в $Y \times U$. Так как $\sup\limits_m(\|y_m\|_Y + \|u_m\|_U) < \infty$, имеем $\sup\limits_m J(y_m, u_m) < \infty$. Поэтому в силу условия коэрцитивности 2.4 справедливы соотношения (2.28). Как показано при доказательстве теоремы 2.4, из (2.28) следуют соотношения (2.31), (2.32) и включение $\widehat{u} \in U_\partial$, которые означают, что $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in \mathfrak{A}$. □

2.4. Нелинейная экстремальная задача. В заключение рассмотрим нелинейный аналог задачи (2.3)–(2.5).

Пусть пространства X, X_1, V, множество X_∂, функционал $J(x)$ удовлетворяют условиям, сформулированным в п. 2.1 перед формулой (2.2). Рассмотрим линейное нормированное пространство X_{-1}, такое, что

$$\text{вложение } X \subset X_{-1} \text{ непрерывно,} \tag{2.33}$$

$$\text{вложение } X_1 \Subset X_{-1} \text{ вполне непрерывно.} \tag{2.34}$$

Пусть задан нелинейный непрерывный оператор

$$F : X_1 \to V, \tag{2.35}$$

удовлетворяющий следующему условию.

Условие 2.6. Существует всюду плотное подмножество $S \subset V^*$ такое, что для любого $w \in S$ функционал $x \to \langle F(x), w\rangle_V$ продолжается по непрерывности с X_1 на X_{-1}.

Зададим соотношение

$$F(x) = 0 \tag{2.36}$$

и рассмотрим экстремальную задачу (2.3), (2.36), (2.5). Через $\mathfrak{A}$, как и раньше, обозначим множество допустимых элементов этой задачи, т. е. множество $x \in X_\partial$, удовлетворяющих (2.36) и условию $J(x) < \infty$. Предположим, что выполнены условия 2.1, 2.2, в которых $\mathfrak{A}$ — множество допустимых элементов задачи (2.3), (2.36), (2.5).

При условиях, сформулированных в этом пункте, справедлива

Теорема 2.5. *Существует решение*[8] $\widehat{x} \in X_1$ *задачи* (2.3), (2.36), (2.5).

Доказательство. Так же, как в теореме 2.1, устанавливается существование последовательности $x_m \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющей соотношениям (2.7), (2.9), (2.12) и справедливость включения $\widehat{x} \in X_\partial$. Из (2.9), (2.34) следует,

[8] Как и раньше, решением задачи (2.3), (2.36), (2.5) называется $\widehat{x} \in \mathfrak{A}$ такой, что $J(\widehat{x}) = \inf\limits_{x \in \mathfrak{A}} J(x)$.

что

$$x_m \to \widehat{x} \text{ сильно в } X_{-1}.$$

В силу условия 2.6 и включения $x_m \in \mathfrak{A}$ имеем

$$0 = \langle F(x_m), w\rangle_V \to \langle F(\widehat{x}), w\rangle_V = 0 \quad \text{при } m \to \infty \qquad \forall w \in V^*.$$

Итак, $\widehat{x} \in U_\partial$, $F(\widehat{x}) = 0$. Поэтому ввиду (2.12) $\widehat{x} \in \mathfrak{A}$, а вследствие (2.7), (2.12) $\widehat{x}$ — решение задачи (2.3), (2.36), (2.5). □

2.5. Контрпримеры. Поясним на простейших примерах, насколько существенны основные предположения теорем существования решений экстремальных задач (точнее, условия коэрцитивности и компактности). Условие нетривиальности, конечно, тоже является важным. Однако оно не нуждается в специальном примере, потому что если оно не выполняется, то экстремальная задача становится бессодержательной. Начнем с примера, когда не выполнено условие коэрцитивности.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу (2.3)–(2.5), в которой $X = X_1 = V = \mathbb{R}$, $X_\partial = \mathbb{R}$, $J(x)$ — ограниченная снизу непрерывная функция, определенная на $\mathbb{R}$, $F_0 = 0$, L — оператор умножения на нуль. В этом случае задача (2.3)–(2.5) перепишется в виде

$$J(x) \to \inf, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.37}$$

а ее множество $\mathfrak{A}$ допустимых элементов совпадает с $\mathbb{R}$. Очевидно, что все условия теоремы 2.1, кроме, возможно, условия коэрцитивности, выполнены. Условие коэрцитивности задачи (2.37) эквивалентно условию

$$J(x) \to \infty \text{ при } x \to \pm\infty. \tag{2.38}$$

Если $J(x) = 1/(1 + x^2)$, то условие (2.38) не выполнено и решение задачи (2.37) не существует.

Для пояснения существенности условия компактности используем подходящую для нас запись примера Больца из классического вариационного исчисления (Алексеев, Тихомиров, Фомин [1, с. 71]).

Пример 2.2. Рассмотрим частный случай задачи (2.23)–(2.25)

$$J(y, u) = \int_0^1 (y^2(t) + u^2(t))\, dt \to \inf, \tag{2.39}$$

$$u(t) + \dot{y}^2(t) - 1 = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \tag{2.40}$$

где $\dot{y}(t) = \partial y/\partial t$. Вид функционала (2.39) диктует следующий выбор пространств Y и U: $Y = U = L_2(0, 1)$; при этом $U_\partial = L_2(0, 1)$. Равенства (2.40) определяют операторы L, F и пространства Y_1, V: $L(y, u) = u(t)$, $F(y) = \dot{y}^2(t) - 1$, $Y_1 = \overset{\circ}{W}{}^1_4(0, 1) = \{y \in W^1_4(0, 1) : y(0) = y(1) = 0\}$, $V = L_2(0, 1)$. Задача (2.39), (2.40) при указанном выборе пространств и операторов удовлетворяет всем предположениям теоремы 2.4 за исключением условия ком-

пактности. При этом в проверке нуждается только условия нетривиальности и коэрцитивности, так как справедливость остальных условий очевидна.

Множество $\mathfrak{A} = \{(y,u) \in \overset{\circ}{W}{}_4^1(0,1) \times L_2(0,1) : u + \dot{y}^2 = 1\}$ допустимых элементов задачи (2.39), (2.40) не пусто, так как $(y,u) = (\sin \pi t, 1 - \pi^2 \cos^2 \pi t) \in \mathfrak{A}$. Для проверки условия коэрцитивности докажем справедливость соотношений

$$\begin{aligned}
&\left\{ y \in \overset{\circ}{W}{}_4^1(0,1) : \int_0^1 (y^2(t) + (1 - \dot{y}^2(t))^2)\, dt \leqslant R \right\} \\
&\subset \left\{ y \in \overset{\circ}{W}{}_4^1(0,1) : \int_0^1 \dot{y}^4 dt \leqslant R - 1 + 2 \int_0^1 \dot{y}^2 dt \right\} \\
&\subset \{ y \in \overset{\circ}{W}{}_4^1(0,1) : \|\dot{y}\|^4_{L_4(0,1)} - 2\|\dot{y}\|^2_{L_4(0,1)} + 1 - R \leqslant 0 \} \\
&= \{ y \in \overset{\circ}{W}{}_4^1(0,1) : \|\dot{y}\|^4_{L_4(0,1)} \leqslant (1 + \sqrt{R})^2 \}. \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

Действительно, первое включение получено с помощью простых преобразований неравенства, задающего первое множество, и отбрасывания в нем члена $\int y^2 dt$; второе включение получено с помощью неравенства Коши — Буняковского

$$\int_0^1 \dot{y}^2(t)\, dt \leqslant \left(\int_0^1 \dot{y}^4(t)\, dt \right)^{1/2},$$

а последнее равенство в (2.41) — в результате решения неравенства $a^2 - 2a + 1 - R \leqslant 0$ при $a \geqslant 0$. В силу (2.41), при любом $R > 0$

$$\begin{aligned}
&\{(y,u) \in \mathfrak{A} : J(y,u) \leqslant R\} \\
&= \left\{ (y,u) : \int_0^1 (y^2 + (1 - \dot{y}^2)^2)\, dt \leqslant R,\ u = 1 - \dot{y}^2 \right\} \\
&\subset \left\{ (y,u) : \|\dot{y}\|^4_{L_4(0,1)} \leqslant (1 + \sqrt{R})^2, \int_0^1 u^2 dt = \int_0^1 (1 - \dot{y}^2)\, dt \leqslant R \right\}.
\end{aligned}$$

Так как множество из правой части последнего включения ограничено в $\overset{\circ}{W}{}_4^1(0,1) \times L_2(0,1)$, коэрцитивность задачи (2.39), (2.40) доказана.

Покажем, что задача (2.39), (2.40) не имеет решений. В силу теоремы 2.4 будет следовать, что задача (2.39), (2.40) не удовлетворяет условию компактности. С помощью (2.40) выразим u через $\dot{y}$ и подставим это выражение в (2.39). В результате задача (2.39), (2.40) запишется в виде

$$I(y) = \int_0^1 (y^2(t) + (\dot{y}^2(t) - 1)^2)\, dt \to \inf, \quad y(0) = y(1) = 0. \qquad (2.42)$$

Покажем, что нижняя грань функционала (2.42), определенного на $\overset{\circ}{W}{}_4^1(0,1)$, равна нулю. Для этого рассмотрим последовательность функций

$$y_n(t) = \int\limits_0^t \operatorname{sign}\sin(2\pi n\tau)\,d\tau.$$

Очевидно, что $y_n(0) = y_n(1) = 0$, $|y_n(t)|^2 = 1$ для любых t за исключением конечного множества точек и $y_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по $t \in [0,1]$. Поэтому $I(y_n) \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны, если $y(t) \equiv 0$, то $I(y) = 1$ и $I(y) \geqslant \int\limits_0^1 y^2\,dt > 0$ для $y(\cdot) \not\equiv 0$.

§ 3. Линейные стационарные экстремальные задачи

В оставшейся части главы строится теория существования решения задач управления распределенными системами. Мы выясняем специфические черты этой теории, указываем на ее отличия и связи с теорией краевых задач для уравнений с частными производными. Теоремы существования доказываются, как правило, с помощью абстрактной схемы из § 2. В этом параграфе рассмотрены стационарные задачи. Всюду ниже Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, граница которой $\partial\Omega$ — замкнутое $(d-1)$-мерное многообразие класса C^∞.

3.1. Простейшая управляемая система. Распределенное управление. Пусть $w(x) \in L_2(\Omega)$, $f(x) \in L_2(\Omega)$ — заданные функции, U_∂ — непустое замкнутое выпуклое подмножество в $L_2(\Omega)$. Рассмотрим следующую экстремальную задачу: найти пару функций $(y(x), u(x))$ такую, что

$$J(y,u) \equiv \int\limits_\Omega (|y(x) - w(x)|^2 + N|u(x) - f(x)|^2)\,dx \to \inf, \tag{3.1}$$

$$\Delta y(x) = u(x), \quad y\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.2}$$

$$u(\cdot) \in U_\partial, \tag{3.3}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $dx = dx_1 \ldots dx_d$, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^d \partial^2/\partial x_j^2$ — оператор Лапласа, $N > 0$ — параметр, который называется *параметром цены.* Отметим, что функция $u(x)$ называется *управлением*, а $y(x)$ — *состоянием* управляемой системы. Минимизация целевого функционала (3.1) дает компромиссное решение двух взаимно противоречащих задач: выбрать функцию состояния y по возможности ближе к заданной функции w, причем при наименьших затратах на управление. (Затраты на управление нулевые, если $u = f$.) Целевой функционал вида (3.1), содержащий как функцию состояния y, так и управление u, называется *компромиссным функционалом.*

Приведем характерные примеры множеств U_∂:

$$U_\partial = \{u(x) \in L_2(\Omega) : \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant R^2\},$$

$$U_\partial = \{u(x) \in L_2(\Omega) : u(x) \geqslant 0 \text{ при почти всех } x \in \Omega\},$$

$$U_\partial = \{u(x) \in L_2(\Omega) : \alpha(x) \leqslant u(x) \leqslant \beta(x) \text{ при почти всех } x \in \Omega\},$$

где $\alpha(x), \beta(x) \in L_\infty(\Omega)$ и $\alpha(x) \leqslant \beta(x)$ при почти всех $x \in \Omega$.

Выпуклость первого множества доказывается с помощью неравенства Иенсена для функционала $J(u) = \|u\|^2_{L_2(\Omega)}$, которое установлено в следствии 2.1. Действительно, пусть $u_1, u_2 \in U_\partial$ и $\alpha \in (0,1)$. Тогда

$$\|\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \alpha\|u_1\|^2 + (1-\alpha)\|u_2\|^2 \leqslant R^2.$$

Выпуклость остальных множеств легко выводится непосредственно из определения выпуклого множества.

Замкнутость первого множества очевидна. Для доказательства замкнутости остальных множеств достаточно воспользоваться известным утверждением о возможности выбрать из сходящейся в $L_2(\Omega)$ последовательности подпоследовательность, сходящуюся при почти всех $x \in \Omega$.

Для полной постановки задачи (3.1)–(3.3) необходимо выбрать функциональные пространства, указанные при формулировке абстрактной задачи из п. 2.2. Вид функционала (3.1) диктует выбор пространств Y и U: положим $Y = U = L_2(\Omega)$. В силу (3.2), естественно положить $L(y,u) = \Delta y - u$, $Y_1 = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $F_0 = 0$. Чтобы при выбранных Y_1, U, L, оператор (2.15) был непрерывен, нужно положить $V = L_2(\Omega)$.

Теорема 3.1. *Существует единственное решение* $(\widehat{y}, \widehat{u})$ *задачи* (3.1)–(3.3) *в* $(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times L_2(\Omega)$.

Доказательство. Достаточно показать, что задача удовлетворяет всем условиям, сформулированным в п. 2.2 перед теоремой 2.3. Выбор функциональных пространств и оператора L сделан выше, а в качестве J берется функционал из (3.1). Тогда выполняется условие (2.14), а J определяет квадрат нормы на гильбертовом пространстве $Y \times U = (L_2(\Omega))^2$. Поэтому функционал J непрерывный, ограниченный снизу и (в силу следствия 2.1) строго выпуклый на $Y \times U$.

В силу теоремы 1.5 для любого $u(x) \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $y(x) \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ задачи (3.2), причем

$$\|y\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{L_2(\Omega)},$$

где C не зависит от u. Так как $U_\partial \neq \varnothing$ и при любом $u \in U_\partial$ задача (3.2) разрешима, справедливо условие нетривиальности 2.3. В силу приведенного выше неравенства и определения (3.1) функционала J

$$\|(y,u)\|^2_{Y_1 \times U} \equiv \|y\|^2_{H^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant (C^2+1)\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1 J(y,u) + C_2, \tag{3.4}$$

откуда следует справедливость условия коэрцитивности 2.4. Поэтому все утверждения теоремы вытекают из теоремы 2.3. □

Изменим функционал в задаче (3.1)–(3.3) и рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(y,u) = \int\limits_\Omega (|\nabla(y(x) - w(x))|^2 + N|u(x) - f(x)|^2)\,dx \to \inf \tag{3.5}$$

при выполнении условий (3.2), (3.3). Напомним, что

$$|\nabla z(x)|^2 = \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial z(x)}{\partial x_j} \right)^2 .$$

Теорема 3.2. *Задача* (3.5), (3.2), (3.3) *имеет единственное решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Доказательство. Положим $Y = Y_1 = H_0^1(\Omega)$, $U = L_2(\Omega)$, $V = H^{-1}(\Omega)$, $L(y,u) = \Delta y - u$, $F_0 = 0$, J — функционал из (3.5). Проверим лишь условия 2.3, 2.4, так как справедливость остальных условий теоремы 2.3 очевидна. Условие 2.3 проверяется так же, как в теореме 3.1, а условие 2.4 тривиально, так как $Y_1 = Y = H_0^1$ и $\|y\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int |\nabla y(x)|^2 dx$. Теперь остается воспользоваться теоремой 2.3. □

Отметим, что разрешимость экстремальной задачи (3.1)–(3.3) получена с использованием корректности краевой задачи (3.2) при фиксированной u, так как условие коэрцитивности установлено с помощью оценки (3.4). Такой подход широко используется в теории оптимального управления распределенными системами, которые описываются с помощью корректных краевых задач (см., например, Лионс [2]; Егоров [1]; Литвинов [1]). Однако возможен и другой подход. Например, коэрцитивность а затем и разрешимость задачи (3.5), (3.2), (3.3) установлена без использования корректности краевой задачи (3.2), а только за счет свойств функционала (3.5). В следующем пункте мы разовьем этот подход, доказав разрешимость задач оптимального управления для некоторых распределенных систем, заданных с помощью некорректных краевых задач.

3.2. Некорректные управляемые системы. Распределенное управление. Для лучшего понимания специфики задач управления распределенными системами, рассмотрим экстремальные задачи, у которых управляемая система описывается с помощью некорректно поставленной краевой задачи.

Рассмотрим задачу

$$J(y,u) = \|y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + N\|u - f\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf, \tag{3.6}$$

$$\Delta y(x) = u(x), \tag{3.7}$$

$$u(x) \in U_\partial, \tag{3.8}$$

где $w \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ — заданные функции, $N > 0$, U_∂ — непустое замкнутое выпуклое подмножество в $L_2(\Omega)$. Отметим, что в задаче (3.7), описывающей управляемую систему, отсутствуют краевые условия. Поэтому задача (3.7) определения фазовой функции $y(x)$ по управлению u недоопределена, а, следовательно, некорректна.

Теорема 3.3. *Задача* (3.6)–(3.8) *имеет единственное решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Доказательство. Положим $Y = Y_1 = U = L_2(\Omega)$, $V = H^{-2}(\Omega)$, $F_0 = 0$, $L(y,u) = \Delta y - u$. Проверка всех условий теоремы 2.3 за исключением

условия нетривиальности 2.3 очевидна. Пусть $u \in U_\partial$, а $y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ — решение задачи $\Delta y = u$, $y\big|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда $(y, u) \in \mathfrak{A}$. Следовательно, условие 2.3 выполнено. Поэтому теорема 3.3 верна в силу теоремы 2.3. □

Рассмотрим вместо (3.7) соотношения

$$\Delta y(x) = u(x), \quad y\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial_n y\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.9}$$

где $\partial_n = \partial/\partial n$ — дифференцирование по направлению внешней нормали n к границе $\partial\Omega$ области Ω. Задача (3.9) определения $y(x)$ по заданной функции $u(x)$ имеет слишком много граничных условий (два вместо одного). Поэтому она переопределена, а, следовательно, некорректна.

Введем обозначение

$$\Delta H_0^2(\Omega) = \{\Delta z(x) : z(x) \in H_0^2(\Omega)\}.$$

Рассмотрим экстремальную задачу (3.6), (3.9), (3.8).

Теорема 3.4. *Пусть $U_\partial \cap \Delta H_0^2(\Omega) \neq \varnothing$. Тогда задача* (3.6), (3.9), (3.8) *имеет единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H_0^2(\Omega) \times L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Положим $Y = U = V = L_2(\Omega)$, $Y_1 = H_0^2(\Omega)$, $L(y, u) = \Delta y - u$. Из предположения $U_\partial \cap \Delta H_0^2(\Omega) \neq \varnothing$ следует справедливость условия 2.3. Ограничимся проверкой условия 2.4, так как проверка всех остальных предположений теоремы 2.3 очевидна. Множество допустимых пар $\mathfrak{A}$ задачи (3.6), (3.9), (3.8) удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &\equiv \{(y, u) \in H_0^2(\Omega) \times L_2(\Omega) : \Delta y = u,\ u \in U_\partial\} \\ &\subset \{(y, u) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times L_2(\Omega) : \Delta y = u,\ u \in U_\partial\} \equiv \mathfrak{A}_1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Отметим, что $\mathfrak{A}_1$ — множество допустимых пар задачи (3.1)–(3.3). Ограниченность в $H^2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ множества $\{(y, u) \in \mathfrak{A}_1 : J(y, u) \leqslant R\}$ при любом $R > 0$ следует из оценки (3.4). Отсюда и из (3.10) следует ограниченность при любом $R > 0$ множества $\{(y, u) \in \mathfrak{A} : J(y, u) \leqslant R\}$ по норме пространства $H^2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. □

Итак, на примерах этого пункта проиллюстрировано коренное отличие природы теорем существования и единственности решений линейных экстремальных задач и теории корректности краевых задач, описывающих управляемые системы.

3.3. Граничное управление. Пусть заданы функции $w(x) \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(\partial\Omega)$ и U_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\partial\Omega)$, $N > 0$. Рассмотрим следующую задачу управления:

$$\int\limits_\Omega |y(x) - w(x)|^2 dx + N \int\limits_{\partial\Omega} |u(x') - f(x')|^2 dS \to \inf, \tag{3.11}$$

$$\Delta y(x) = g(x),\ x \in \Omega, \quad \gamma \partial_n y(x') = u(x'),\ x' \in \partial\Omega, \tag{3.12}$$

$$u(x') \in U_\partial, \tag{3.13}$$

где $\partial_n y = \partial y/\partial n$, n — внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$.

Положим

$$L_g = \left\{ v(x') \in L_2(\partial\Omega) : \int\limits_{\partial\Omega} v(x')\, dS = \int\limits_{\Omega} g(x)\, dx \right\}. \tag{3.13'}$$

Теорема 3.5. *Пусть $U_\partial \cap L_g \neq \varnothing$. Тогда задача* (3.11)–(3.13) *имеет единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^{3/2}_\Delta(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$, где $H^{3/2}_\Delta(\Omega)$ — пространство* (1.20) *с $s = 3/2$, $p = 2$.*

Доказательство. Положим $Y = L_2(\Omega)$, $Y_1 = H^{3/2}_\Delta(\Omega)$, $U = L_2(\partial\Omega)$, $V = L_2(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$, $F_0 = (-g, 0)$, $L(y, u) = (\Delta y, \gamma\partial_n y - u)$. Тогда справедливость условия (2.14) очевидна, а непрерывность оператора (2.15) следует из определения (1.20) пространства $H^{3/2}_\Delta$ и теоремы 1.7 о следах для $H^s_\Delta(\Omega)$.

В силу теоремы 1.9 и замечания 1.1 при фиксированных $g(x) \in L_2(\Omega)$, $u(x') \in L_2(\partial\Omega)$ задача (3.12) имеет решение $y \in H^{3/2}_\Delta(\Omega)$, когда правая часть $(g, u) \in L_2(\Omega) \times L_2(\times\Omega)$ ортогональна ядру сопряженной задачи, т. е.

$$\int\limits_{\Omega} g(x)\, dx - \int\limits_{\partial\Omega} u(x')\, dS = 0.$$

При этом справедлива оценка

$$\|y\|^2_{H^{3/2}(\Omega)} + \|y\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\|g\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|y\|^2_{L_2(\Omega)}). \tag{3.14}$$

Так как $U_\partial \cap L_g \neq \varnothing$, существует $u_0 \in U_\partial \cap L_g$. Для правой части (g, u_0) задача (3.12) имеет решение $y_0 \in H^{3/2}_\Delta(\Omega)$ и, очевидно, пара (y_0, u_0) является допустимой для задачи (3.11)–(3.13), что доказывает справедливость условия 2.3. В силу (3.14), (3.11) для допустимой пары (y, u) задачи (3.11)–(3.13) справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\|(y, u)\|^2_{Y_1 \times U} \equiv \|y\|^2_{H^{3/2}(\Omega)} + \|y\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \\ &\leqslant (C+1)(\|g\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + \|y\|^2_{L_2(\Omega)}) \leqslant C_1 J(y, u) + C, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где J — функционал из (3.11), а C_1 и C не зависят от (y, u). Эта оценка устанавливает справедливость условия 2.4. Теперь остается воспользоваться теоремой 2.3. □

Рассмотрим задачу, в которой управляющая функция определена на части границы области и является условием Дирихле в краевой задаче, описывающей управляемую систему.

Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω разбита на два множества: $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$, причем $\operatorname{meas}\Gamma_0 > 0$, где $\operatorname{meas}\Gamma_0$ — мера Лебега множества Γ_0 на многообразии $\partial\Omega$. Рассматривается задача

$$\|y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + N\|u - f\|^2_{L_2(\Gamma_0)} \to \inf, \tag{3.16}$$

$$\Delta y(x) = g(x),\ x \in \Omega, \quad y\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad y\big|_{\Gamma_0} = u, \tag{3.17}$$

$$u(x) \in U_\partial, \tag{3.18}$$

где $w \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(\Gamma_0)$ — заданные функции, $N > 0$, U_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\Gamma_0)$.

Теорема 3.6. *Существует единственное решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^{1/2}_\Delta \times L_2(\Gamma_0)$ *задачи* (3.16)–(3.18).

Доказательство. Положим $Y = L_2(\Omega)$, $Y_1 = \{y(x) \in H^{1/2}_\Delta(\Omega) : y\big|_{\Gamma_1} = 0\}$, $U = L_2(\Gamma_0)$, $V = L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma_0)$, $L(y,u) = (\Delta y, y\big|_{\Gamma_0} - u)$, $F_0 = (-g, 0)$. Справедливость условия (2.14) и непрерывность оператора (2.15) очевидны. Из теоремы 1.8 об однозначной разрешимости задачи Дирихле (3.17) при любом $u \in L_2(\Gamma_0)$ следует справедливость условия 2.3, а из оценки (1.22) решений $y(x)$ задачи (3.17)

$$\|y\|^2_{H^{1/2}(\Omega)} + \|\Delta y\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\|u\|^2_{L_2(\Gamma_0)} + \|g\|^2_{L_2(\Omega)}) \tag{3.19}$$

аналогично (3.15) выводится условие 2.4. Поэтому из теоремы 2.3 следует утверждение теоремы. □

Рассмотрим задачу граничного управления, в которой наблюдение является не распределенным, а граничным:

$$J(y - w, u - f) = \|\gamma\partial_n y - w\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + N\|u - f\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \to \inf, \tag{3.20}$$

$$\Delta y = g, \quad y\big|_{\partial\Omega} = u, \tag{3.21}$$

$$u \in U_\partial, \tag{3.22}$$

где функции $w \in L_2(\partial\Omega)$, $f \in L_2(\partial\Omega)$, $g \in L_2(\Omega)$ заданы, $N > 0$, $U_\partial \neq \varnothing$ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\partial\Omega)$, ∂_n — дифференцирование по внешней нормали n к $\partial\Omega$, γ — оператор сужения функции на $\partial\Omega$.

Теорема 3.7. *Пусть* $U_\partial \cap H^1(\partial\Omega) \neq \varnothing$. *Тогда задача* (3.20)–(3.22) *имеет единственное решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^{3/2}_\Delta(\Omega) \times H^1(\partial\Omega)$.

Доказательство. Положим $Y = Y_1 = H^{3/2}_\Delta(\Omega)$, $U = L_2(\partial\Omega)$, $V = L_2(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$, $L(y,u) = (\Delta y, \gamma y - u)$, $F_0 = (-g, 0)$. Очевидно, что справедливо (2.14) и оператор (2.15) непрерывен. В силу теоремы 1.7 оператор $\gamma\partial_n : H^{3/2}_\Delta \to L_2(\partial\Omega)$ непрерывен. Поэтому функционал (3.20) непрерывен относительно $(y,u) \in H^{3/2}_\Delta(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$. Из условия $U_\partial \cap H^1(\partial\Omega) \neq \varnothing$ и разрешимости в $H^{3/2}_\Delta(\Omega)$ задачи Дирихле (3.21) при любом $u \in H^1(\partial\Omega)$ следует условие нетривиальности 2.3.

Пусть $(y,u) \in H^{3/2}_\Delta(\Omega) \times L_2(\partial\Omega) \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — множество допустимых пар задачи (3.20)–(3.22). Справедлива следующая оценка решения задачи Неймана для уравнения $\Delta y = g$ (см. (1.23)):

$$\|y\|^2_{H^{3/2}_\Delta(\Omega)} \leqslant C_1(\|\gamma\partial_n y\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + \|g\|^2_{L_2(\Omega)} + \|y\|^2_{L_2(\Omega)}).$$

Учитывая непрерывность вложения $H^{1/2}_\Delta(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, применим к $\|y\|^2_{L_2(\Omega)}$ из правой части этого неравенства оценку решения задачи Дирихле, ана-

логичную (3.19). В результате получим

$$\|y\|^2_{H^{3/2}_\Delta(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant C(\|\gamma\partial_n y\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + \|g\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)})$$
$$\leqslant C_1 J(y-w, u-f) + C_2, \tag{3.23}$$

где J — функционал из (3.20). Из оценки (3.23) следует справедливость условия коэрцитивности 2.4. Тем самым выполнены все условия, при которых в теореме 2.3 доказано существование решения. Следовательно, решение $(\widehat{y}, \widehat{u})$ задачи (3.20)–(3.22) существует в $Y_1 \times U = H^{3/2}_\Delta(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$. В силу теоремы о следах $\gamma y \in H^1(\partial\Omega)$ при $y \in H^{3/2}_\Delta(\Omega)$ и $\widehat{u} = \gamma\widehat{y}$. Поэтому $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^{3/2}_\Delta(\Omega) \times H^1(\partial\Omega)$.

Так как функционал $J(y-w, u-f)$ из (3.20) не является строго выпуклым на $Y_1 \times U = H^{3/2}_\Delta(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$, утверждение о единственности решения необходимо доказывать особо. Пусть (y_i, u_i), $i = 1, 2$, — два решения задачи (3.20)–(3.22). Повторяя рассуждения теоремы 2.2, легко видеть, что $\gamma\partial_n y_1 = \gamma\partial_n y_2$, $u_1 = u_2$. Так как $u_i = \gamma y_i$, имеем $\gamma y_1 = \gamma y_2$. Таким образом, функция $z = y_1 - y_2 \in H^{3/2}_\Delta(\Omega)$ удовлетворяет условиям

$$\Delta z(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad \gamma z(x') = 0,\ \gamma\partial_n z(x') = 0, \quad x' \in \partial\Omega.$$

По теореме о гладкости решений эллиптических краевых задач (см., например, Лионс, Мадженес [2]), $z(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, а в силу теоремы Кальдерона о единственности решения задачи Коши для эллиптического уравнения (см., например, Мизохата [1, с. 261]; Хёрмандер [1]), $z(x) \equiv 0$, т. е. $y_1(x) \equiv y_2(x)$, и, следовательно, $u_1(x) \equiv u_2(x)$. □

3.4. Управление в задаче Коши для оператора Лапласа. Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из двух замкнутых многообразий класса C^∞: $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$. Рассмотрим задачу

$$J(y-w, u_0-f_0, u_1-f_1) = \frac{1}{2}\|\gamma_1 y - w\|^2_{L_2(\Gamma_1)}$$
$$+\frac{N_0}{2}\|u_0 - f_0\|^2_{L_2(\Gamma_0)} + \frac{N_1}{2}\|u_1 - f_1\|^2_{L_2(\Gamma_0)} \to \inf, \tag{3.24}$$
$$\Delta y(x) = 0,\ x \in \Omega;\ \gamma_0 y = u_0,\ \gamma_0\partial_n y = u_1 \text{ на } \Gamma_0, \tag{3.25}$$
$$u \equiv \{u_0, u_1\} \subset U_\partial, \tag{3.26}$$

где $w \in L_2(\Gamma_1)$, $f_i \in L_2(\Gamma_0)$, $i = 0, 1$, — заданные функции, $N_0 > 0$, $N_1 > 0$, γ_i — оператор, переводящий функцию, заданную в Ω, в ее сужение на Γ_i $(i = 0, 1)$, U_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0)$.

Введем пространство

$$Y_1 = \{y(x) \in H^{1/2}_\Delta(\Omega) : \gamma_0\partial_n y \in L_2(\Gamma_0)\}, \tag{3.27}$$

с нормой

$$\|y\|^2_{Y_1} = \|y\|^2_{H^{1/2}_\Delta(\Omega)} + \|\gamma_0\partial_n y\|^2_{L_2(\Gamma_0)}.$$

Лемма 3.1. *Если* $y(x) \in Y_1$, *то* $\gamma_0 y \in H^1(\Gamma_0)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi(x) = 1$ в окрестности Γ_0 и $\varphi(x) = 0$ в окрестности Γ_1. В силу теоремы о гладкости решений эллиптического уравнения внутри области для $y \in Y_1$, имеем $y \in H^2(\Omega_1)$ в любой подобласти Ω_1, компактно вложенной в Ω. Поэтому $\Delta(\varphi y(x)) \in L_2(\Omega)$. Так как $\gamma_1 \partial_n \varphi y = 0$ и $\gamma_0 \partial_n(\varphi y) = \gamma_0 \partial_n y \in L_2(\Gamma_0)$, в силу теоремы 1.9 $\varphi y \in H^{3/2}_\Delta(\Omega)$. Следовательно, $\gamma_0 y \in H^1(\Gamma_0)$. □

Пусть множество U_∂ из (3.26) удовлетворяет следующему условию.

Условие 3.1. Существуют пара $\{u_0, u_1\} \in U_\partial$ и функция $y \in Y_1$ (Y_1 — пространство (3.27)), удовлетворяющие (3.25).

Теорема 3.8. *Пусть выполнено условие* 3.1. *Тогда задача* (3.24)–(3.26) *имеет единственное решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}_0, \widehat{u}_1) \in Y_1 \times H^1(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0)$.

Доказательство. Пусть $Y = Y_1$ (Y_1 — пространство (3.27)), $U = L_2(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0)$, $V = L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0)$, $L(y,u) \equiv L(y,u_0,u_1) = (\Delta y, \gamma_0 y - u_0, \gamma_0 \partial_n y - u_1)$, $F_0 = (0,0,0)$. Проверим лишь условие коэрцитивности 2.4, так как проверка остальных условий теоремы 2.3 очевидна. Из теоремы 1.8 о разрешимости эллиптической краевой задачи

$$\Delta y = 0 \text{ в } \Omega, \quad \gamma_0 y = u_0 \in L_2(\Gamma_0), \quad \gamma_1 y = v \in L_2(\Gamma_1),$$

оценки (1.22) для ее решения и третьего равенства в (3.25) следует оценка

$$\begin{aligned}
&\|y\|^2_{Y_1} + \|u_0\|^2_{L_2(\Gamma_0)} + \|u_1\|^2_{L_2(\Gamma_0)} \leqslant \|y\|^2_{H^{1/2}_\Delta(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L_2(\Gamma_0)} + 2\|u_1\|^2_{L_2(\Gamma_0)} \\
&\leqslant C\|\gamma_1 y\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + (C+1)\|u_0\|^2_{L_2(\Gamma_0)} + 2\|u_1\|^2_{L_2(\Gamma_0)} \\
&\leqslant C_3 J(y-w, u_0 - f_0, u_1 - f_1) + C_4,
\end{aligned}$$

где J — функционал из (3.24). Это неравенство доказывает условие 2.4. Поэтому из теоремы 2.3 следует существование решения $(\widehat{y}, \widehat{u}_0, \widehat{u}_1) \in Y_1 \times L_2(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0)$ задачи (3.24)–(3.26). В силу леммы 3.1 $\widehat{u}_0 \in H^1(\Gamma_0)$. Единственность решения доказывается аналогично соответствующему утверждению теоремы 3.7. □

Приведем примеры множеств U_∂, удовлетворяющих условию 3.1. Для этого нам потребуется

Теорема 3.9. *Пусть* U_i, $i = 1, 2$, — *выпуклые подмножества пространства* $L_2(\Gamma_0)$ *и существует* $k \geqslant -1$ *такое, что*

$$U_1 \cap H^{k+1}(\Gamma_0) \neq \varnothing, \quad \operatorname{Int}_{H^k(\Gamma_0)}(U_2 \cap H^k(\Gamma_0)) \neq \varnothing \tag{3.28}$$

либо

$$\operatorname{Int}_{H^{k+1}(\Gamma_0)}(U_1 \cap H^{k+1}(\Gamma_0)) \neq \varnothing, \quad U_2 \cap H^k(\Gamma_0) \neq \varnothing, \tag{3.29}$$

где $\operatorname{Int}_X W$ — *внутренность множества* $W \subset X$ *в смысле топологии нормированного пространства* X. *Тогда существует набор* $(y, u, v) \in H^{k+3/2}_\Delta(\Omega) \times H^{k+1}(\Gamma_0) \times H^k(\Gamma_0)$, *удовлетворяющий соотношениям*

$$\Delta y(x) = 0, \ x \in \Omega, \quad \gamma_0 y \in U_1, \ \gamma_0 \partial_n y \in U_2. \tag{3.30}$$

Доказательство приведено ниже (см. теорему 3.1.1).

Пример 3.1. Положим

$$U_1 = L_2(\Gamma_0)^+, \quad U_2 = L_2(\Gamma_0)^-, \tag{3.31}$$

где

$$L_2(\Gamma_0)^+ = \{u \in L_2(\Gamma_0) : u(x) \geqslant 0 \text{ при почти всех } x \in \Gamma_0\}, \tag{3.32}$$

$$L_2(\Gamma_0)^- = \{u \in L_2(\Gamma_0) : u(x) \leqslant 0 \text{ при почти всех } x \in \Gamma_0\}. \tag{3.33}$$

Пример 3.2. Пусть

$$\alpha_j(x) \in C(\Gamma_0),\ \beta_j(x) \in C(\Gamma_0),\ \alpha_j(x) < \beta_j(x) - \varepsilon \tag{3.34}$$

при почти всех $x \in \Gamma_0$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое число и $j = 1, 2$. Положим

$$U_j = \{u(x) \in L_\infty(\Gamma_0) : \alpha_j \leqslant u(x) \leqslant \beta_j(x) \text{ при почти всех } x \in \Gamma_0\}. \tag{3.35}$$

Множества U_1, U_2 из обоих примеров удовлетворяют условиям (3.28), (3.29). При доказательстве этого факта ограничимся случаем множества (3.35), как более сложным. Возьмем $k > (d-1)/2$, где $d-1 = \dim \Gamma_0$. В силу (3.34) существует функция $u_j(x) \in C^{k+1}(\Gamma_0) \subset H^{k+1}(\Gamma_0)$, принадлежащая множеству (3.35), что доказывает справедливость условий (3.28_1) и (3.29_2). Очевидно, что функцию $u_j(x)$ можно выбрать такой, что

$$\alpha_j(x) + \varepsilon/2 < u_j(x) < \beta_j(x) - \varepsilon/2. \tag{3.36}$$

Согласно теореме вложения Соболева $H^{k+1}(\Gamma_0) \subset H^k(\Gamma_0) \subset C(\Gamma_0)$. В силу (3.36) можно выбрать столь малое $\delta > 0$, что

$$B_1 \equiv \{v \in H^{k+1}(\Gamma_0) : \|v - u_j\|_{H^{k+1}} < \delta\} \subset U_j,$$

$$B_2 \equiv \{v \in H^k(\Gamma_0) : \|v - u_j\|_{H^k} < \delta\} \subset U_j.$$

Эти соотношения доказывают (3.28_2), (3.29_1).

§ 4. Задачи оптимального управления, связанные с линейными параболическими уравнениями

В этом параграфе исследуются разрешимость и единственность решений экстремальных задач, связанных с эволюционным уравнением параболического типа. Изучены случаи как корректных, так и некорректных краевых задач, описывающих управляемую систему.

4.1. Распределенные управление и наблюдение. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $T > 0$, $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$. Предполагается, что заданы $w(t,x) \in L_2(Q)$, $f(t,x) \in L_2(Q)$, $y_0(x) \in L_2(\Omega)$, $N > 0$. В Q рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$J(y - w, u - f) = \frac{1}{2}\|y - w\|^2_{L_2(Q)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(Q)} \to \inf, \tag{4.1}$$

$$\dot{y}(t,x) - \nu\Delta y(t,x) = u(t,x),\ (t,x) \in Q; \quad y\big|_{\Sigma} = 0,\ y\big|_{t=0} = y_0, \tag{4.2}$$

$$u(t,x) \in U_\partial, \tag{4.3}$$

где $w \in L_2(Q)$, $f \in L_2(Q)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$, U_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество из $L_2(Q)$, $\dot{y}(t,x) = \partial y(t,x)/\partial t$, $\nu \neq 0$. Задача (4.2) при фиксированных u и $\nu > 0$ — это смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности, которая, как известно, является корректной. Если же $\nu < 0$, то (4.2) — краевая задача для обратного уравнения теплопроводности. Эта задача некорректна.

Характерные примеры множества U_∂ из задачи (4.1)–(4.3) аналогичны примерам множеств U_∂ для стационарных задач:

$$U_\partial = \{u \in L_2(Q) : \|u - u_0\| \leqslant R\},\ u_0 \in L_2(Q), \tag{4.4}$$

$$U_\partial = \{u \in L_2(Q) : u(t,x) \geqslant 0 \text{ при почти всех } (t,x) \in Q\}, \tag{4.5}$$

$$U_\partial = \{u \in L_2(Q) : \alpha_1(t,x) \leqslant u(t,x) \leqslant \alpha_2(t,x)\}, \tag{4.6}$$

где $\alpha_i(t,x) \in L_\infty(Q)$, $\alpha_1(t,x) < \alpha_2(t,x)$ при почти всех $(t,x) \in Q$.

Введем пространство

$$Z = \{z \in L_2(Q) : \dot{z} - \nu\Delta z \in L_2(Q)\}, \tag{4.7}$$

с нормой

$$\|z\|_Z^2 = \|z\|_{L_2(Q)}^2 + \|\dot{z} - \nu\Delta z\|_{L_2(Q)}^2.$$

Это пространство используется при доказательстве разрешимости задачи (4.1)–(4.3). Исследуем вопрос о следах функций $u \in Z$ на боковую поверхность и основание цилиндра Q. Введем оператор γ_τ, переводящий функцию $u(t,x)$ в ее сужение при $t = \tau$, и оператор γ_Σ, переводящий функцию $u(t,x)$ в ее сужение на боковую поверхность Σ:

$$\gamma_\tau u = u\big|_{t=\tau}, \quad \gamma_\Sigma u = u\big|_{\Sigma}.$$

Лемма 4.1. *Определены и непрерывны следующие операторы следов*:

$$\gamma_\tau : Z \to H^{-1}(\Omega)$$

$$\gamma_\Sigma \partial_n^j : Z \to H^{-1/2-j}(\partial\Omega; H^{-1}(0,T)), \quad j = 0, 1. \tag{4.9}$$

где ∂_n^1 — оператор дифференцирования по внешней нормали к Σ, а ∂_n^0 — тождественный оператор.

Доказательство. В силу (4.7) и непрерывности оператора $\Delta : L_2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega)$ из включения $z \in Z \subset L_2(0,T; L_2(\Omega))$ имеем $\Delta z \in L_2(0,T; H^{-2}(\Omega))$. Следовательно, $\partial_t z \in L_2(0,T; H^{-2}(\Omega))$. Поэтому из теоремы о следах (см. Лионс, Мадженес [2]) вытекает непрерывность первого оператора в (4.9).

Каждой функции $\varphi(t) \in H_0^1(0,T)$ сопоставим отображение

$$\Gamma_\varphi : Z \to H_\Delta^0(\Omega), \quad (\Gamma_\varphi z)(x) = \int_0^T z(t,x)\varphi(t)\,dt. \tag{4.10}$$

Чтобы доказать непрерывность оператора (4.10), с учетом соотношения

$$\Delta\Gamma_\varphi z = -(\Gamma_{\dot\varphi} z + \Gamma_\varphi(\dot z - \nu\Delta z))/\nu$$

выведем оценку

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma_\varphi z\|^2_{H^0_\Delta(\Omega)} = \|\Gamma_\varphi z\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\Gamma_\varphi z\|^2_{L_2(\Omega)}\\
&\leqslant \|\Gamma_\varphi z\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{2}{\nu^2}\|\Gamma_\varphi(\dot z - \nu\Delta z)\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{2}{\nu^2}\|\Gamma_{\dot\varphi} z\|^2_{L_2(\Omega)}\\
&\leqslant \left(\|z\|^2_{L_2(Q)} + \frac{2}{\nu^2}\|\dot z - \nu\Delta z\|^2_{L_2(Q)}\right)\|\varphi\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{2}{\nu^2}\|z\|^2_{L_2(Q)}\|\dot\varphi\|^2_{L_2(0,T)}\\
&\leqslant C\|z\|^2_Z\|\varphi\|_{H^1(0,T)}.
\end{aligned}$$

Эта оценка, помимо непрерывности оператора (4.10), доказывает непрерывность вложения

$$Z \subset H^0_\Delta(\Omega; H^{-1}(0,T)).$$

Из последнего соотношения и теоремы 1.7 о следах функций из H^0_Δ ввиду (1.8), (1.9) следует непрерывность второго оператора в (4.9). □

В силу леммы 4.1 корректно определено пространство

$$Z_1 = \{z \in Z : \gamma_\Sigma z = 0\}, \quad \|z\|_{Z_1} = \|z\|_Z, \tag{4.11}$$

где Z — пространство (4.7). В пространстве (4.11) естественно искать решение y задачи (4.2), если $u \in L_2(Q)$. На множество U_∂ из (4.3) наложим следующее условие.

Условие 4.1. Существует пара $(y,u) \in Z_1 \times U_\partial$, удовлетворяющая (4.2).

Справедлива следующая теорема об однозначной разрешимости задачи (4.1)–(4.3).

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие* 4.1. *Тогда задача* (4.1)–(4.3) *имеет единственное решение* $(\widehat y, \widehat u) \in Z_1 \times L_2(Q)$, *где* Z_1 *— пространство* (4.11).

Доказательство. Положим $Y = U = L_2(Q)$, $Y_1 = Z_1$, где Z_1 — пространство (4.11), $V = L_2(Q) \times H^{-1}(\Omega)$, $L(y,u) = (\dot y - \nu\Delta y - u, \gamma_0 y)$. Тогда непрерывность оператора (2.15) следует из определения (4.11), (4.7) пространства Z_1 и леммы 4.1. Условие нетривиальности 2.3 следует из условия 4.1, а условие коэрцитивности 2.4 — из следующей оценки, справедливой для любой пары $(y,u) \in Y_1 \times U$, удовлетворяющей соотношениям (4.2):

$$\begin{aligned}
&\|y\|^2_{Y_1} + \|u\|^2_U = \|y\|^2_{L_2(Q)} + \|\dot y - \nu\Delta y\|^2_{L_2(Q)} + \|u\|^2_{L_2(Q)}\\
&= \|y\|^2_{L_2(Q)} + 2\|u\|^2_{L_2(Q)} \leqslant C\,J(y-w, u-f) + C_1,
\end{aligned}$$

где J — функционал из (4.1). Поэтому доказываемые утверждения следуют из теоремы 2.3. □

Весьма существенным для справедливости теоремы 4.1 является условие 4.1, наложенное на исходные данные задачи. В случае $\nu > 0$, т. е. для корректной краевой задачи условие 4.1 легко проверяется при любых $y_0 \in L_2(\Omega)$, $w \in L_2(Q)$, $f \in L_2(Q)$ и любого непустого замкнутого выпуклого

множества $U_\partial \subset L_2(Q)$. Действительно, для любого $u \in U_\partial$ в силу теоремы 1.16 существует решение $y \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ задачи (4.2). Так как в силу (4.2_1) $\dot y - \nu\Delta y = u \in U_\partial \subset L_2(Q)$, имеем $y \in Z_1$.

В случае некорректной краевой задачи, т. е. при $\nu < 0$ проверка условия 4.1 значительно сложнее. Здесь мы проверим условие 4.1 для множества вида (4.4). В теоремах 3.3.1 и 3.3.2 (ниже) условие 4.1 будет также проверено для множеств (4.5) и (4.6).

Лемма 4.2. *Пусть* $y_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ *и* $\operatorname{Int} U_\partial \neq \varnothing$ *($L_2(Q)$-внутренность множества U_∂ не пуста). Тогда существует пара* $(\widehat y, \widehat u) \in Z_1 \times \operatorname{Int} L_2(Q)$, *удовлетворяющая* (4.2) (*следовательно, выполняется условие* 4.1).

Доказательство. В силу теоремы 1.14 для $y_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ существует функция $y(t,x) \in H^{1,2}(Q)$ такая, что $y\big|_\Sigma = 0$ и $\gamma_0 y = y_0(x)$. Очевидно, что $\dot y - \nu\Delta y \in L_2(Q)$. Положим $g = \dot y - \nu\Delta y$. Тогда разрешимость задачи (4.2) при некотором $u \in U_\partial$ эквивалентна разрешимости задачи

$$\dot z(t,x) - \nu\Delta z = v(t,x), \quad z\big|_\Sigma = 0,\ z(0,x) = 0 \tag{4.12}$$

при некотором

$$v \in V_\partial \equiv \{v = u - g : u \in U_\partial\}. \tag{4.13}$$

Так как $\operatorname{Int} U_\partial \neq \varnothing$, имеем $\operatorname{Int} V_\partial \neq \varnothing$. Пусть $v \in \operatorname{Int} V_\partial$. Обозначим через e_k и λ_k соответственно собственные функции и собственные значения спектральной задачи

$$-\Delta e = \lambda e, \quad e\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.14}$$

где λ_k расположены в порядке возрастания: $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_k \leqslant \dots$. Положим

$$v_n(t,x) = \sum_{k=1}^n v^k(t) e_k(x), \quad v^k(t) = \int_\Omega v(t,x) e_k(x)\,dx,$$

$$z_n(t,x) = \sum_{k=1}^n z^k(t) e_k(x), \quad z^k(t) = \int_0^t e^{\nu\lambda_k(\tau - t)} v^k(\tau)\,d\tau.$$

Очевидно, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\dot z_n - \nu\Delta z_n = v_n, \quad z\big|_\Sigma = 0,\ z_n\big|_{t=0} = 0.$$

Так как $\|v - v_n\|_{L_2(Q)} \to 0$ при $n \to \infty$, пара (z_n, v_n) удовлетворяет соотношениям (4.12), (4.13) при достаточно больших n. □

Из леммы 4.2, в частности, следует, что множество (4.4) удовлетворяет условию 4.1, если $y_0(x) \in H_0^1(\Omega)$.

4.2. Стартовое управление. Финальное наблюдение. Рассмотрим экстремальную задачу, связанную с эволюционной системой, у которой управлением является начальное условие, а наблюдаемой функцией — значение функции состояния в конечный момент времени T. Пусть заданы $w \in L_2(\Omega)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(Q)$, $N > 0$, $\nu \neq 0$, где Ω — ограниченная

область в $\mathbb{R}^d$, $Q = (0,T) \times \Omega$. Рассматривается задача

$$J(y-w, u-y_0) = \frac{1}{2}\|y(T,\cdot) - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - y_0\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf, \tag{4.15}$$

$$\dot{y}(t,x) - \nu\Delta y = g(t,x), \quad \gamma_\Sigma y = 0,\ \gamma_0 y = u, \tag{4.16}$$

$$u(x) \in U_\partial, \tag{4.17}$$

где U_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество из $L_2(\Omega)$.

Положим

$$Y_1 = \{y \in L_2(0,T; H^1_0(\Omega)) : \dot{y} \in L_2(0,T; H^{-1}(\Omega))\} \tag{4.18}$$

и предположим, что выполнено следующее условие.

Условие 4.2. Существует пара $(y,u) \in Y_1 \times U_\partial$, удовлетворяющая (4.16), где Y_1 — пространство (4.18).

Теорема 4.2. *Если выполнено условие* 4.2, *то существует единственное решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times L_2(\Omega)$ *задачи* (4.15)–(4.17).

Доказательство. Пусть $Y = Y_1$ — пространство (4.18), $U = L_2(\Omega)$, $V = L_2(0,T; H^{-1}) \times L_2(\Omega)$, $F_0 = (-g, 0)$, $L(y,u) = (\dot{y} - \nu\Delta y, \gamma_0 y - u)$. Непрерывность оператора (2.15) следует из теоремы 1.16, справедливость условия 2.3 постулируется условием 4.2. Проверим условие 2.4. Умножая дифференциальное уравнение в (4.16) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $y(t,x)$, после интегрирования по частям и интегрирования по t получим равенство

$$\frac{1}{2}\|y(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|y(0,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \nu\int_0^T \|\nabla y(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} dt = \int_0^T (g,y)_{L_2(\Omega)} dt,$$

из которого следует

$$\begin{aligned} \nu\int_0^T \|\nabla y(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} dt &\leqslant \frac{1}{2}\|y(0,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(Q)}\|y\|_{L_2(Q)} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|y(0,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + C_\nu\|g\|^2_{L_2(Q)} + \frac{\nu}{2}\int_0^T \|\nabla y(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} dt \end{aligned} \tag{4.19}$$

при $\nu > 0$ и

$$\begin{aligned} &|\nu|\int_0^T \|\nabla y(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} dt \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|y(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + C_\nu\|g\|^2_{L_2(Q)} + \frac{|\nu|}{2}\int_0^T \|\nabla y(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} dt \end{aligned} \tag{4.20}$$

при $\nu < 0$. Оценивая $\dot{y}$ с помощью (4.16), получим, учитывая (4.19), (4.20), что

$$\|y\|^2_{Y_1} \leqslant C \begin{cases} \|y(0,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|g\|^2_{L_2(Q)}, & \nu > 0, \\ \|y(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|g\|^2_{L_2(Q)}, & \nu < 0, \end{cases} \tag{4.21}$$

где Y_1 — пространство (4.18), а константа C в (4.21) зависит лишь от ν. Из (4.21) следует, что для любой пары $(y,u) \in Y_1 \times L_2(\Omega)$, удовлетворяющей (4.16), справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\|y\|^2_{Y_1} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\|y(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|g\|^2_{L_2(Q)}) \\ &\leqslant C_1 J(y-w, u-y_0) + C_2, \end{aligned}$$

где J — функционал из (4.15). Эта оценка доказывает справедливость условия 2.4. Поэтому существование решения задачи (4.15)–(4.17) следует из теоремы 2.3.

Пусть (y_1,u_1), (y_2,u_2) — два решения задачи (4.15)–(4.17) и $z = y_1 - y_2$, $v = u_1 - u_2$. Рассуждая так же, как в теореме 2.2, легко видеть, что

$$z(T,x) = 0, \quad z(0,x) = v(x) = 0, \quad \dot{z} - \nu\Delta z = 0, \quad z\big|_{\Sigma} = 0.$$

Используя теорему единственности решения параболической краевой задачи с начальным условием $z(0,x) \equiv 0$, если $\nu > 0$ и $z(T,x) \equiv 0$, если $\nu < 0$, получим, что $z(t,x) \equiv 0$. □

Приведем достаточное условие на U_∂, при котором выполняется условие 4.2. В силу теоремы 1.16 о разрешимости параболических краевых задач при $\nu > 0$ условие 4.2 выполнено для любого подмножества $U_\partial \neq \varnothing$ пространства $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим случай $\nu < 0$.

Лемма 4.3. *Пусть $\nu < 0$ и $\operatorname{Int} U_\partial \neq \varnothing$. Тогда справедливо условие* 4.2.

Доказательство. Пусть $z(t,x) \in Y_1$ — решение задачи

$$\dot{z} - \nu\Delta z = g, \quad z(T,x) \equiv 0, \quad z\big|_{\Sigma} = 0$$

и $V_\partial = \{v = u - z(0,\cdot) : u \in U_\partial\}$. Очевидно, что $\operatorname{Int} V_\partial \neq \varnothing$. Пусть $v \in \operatorname{Int} V_\partial$. Положим

$$z_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} e^{-\nu\lambda_k t} v_k e_k(x),$$

где

$$v_k = \int_\Omega v(x) e_k(x)\, dx,$$

а $e_k(x)$ и λ_k определены в доказательстве леммы 4.2. Так как

$$\|z_n(0,\cdot) - v\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

$z_n(0,x) \in V_\partial$ при достаточно большом n. Поэтому пара $(y(t,x), u(x)) = (z(t,x) + z_n(t,x), z(0,x) + z_n(0,x)) \in Y_1 \times U_\partial$ удовлетворяет (4.16). □

4.3. Граничное управление. Финальное наблюдение. Рассмотрим задачу управления, в которой управляющая функция является граничным условием Неймана параболической задачи

$$J(y-w,u-y_\Sigma)=\frac{1}{2}\|y(T,\cdot)-w\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{N}{2}\|u-y_\Sigma\|^2_{L_2(\Sigma)}\to\inf, \tag{4.24}$$

$$\dot y(t,x)-\nu\Delta y(t,x)=g(t,x),\ (t,x)\in Q,$$

$$\gamma_\Sigma\partial_n y=u,\ (t,x)\in\Sigma;\quad y(0,x)=y_0(x),\ x\in\Omega, \tag{4.25}$$

$$u\in U_\partial, \tag{4.26}$$

где $w\in L(\Omega)$, $y_\Sigma\in L_2(\Sigma)$, $g\in L_2(Q)$, $y_0\in H^{1/2}(\Omega)$ — заданные функции, $N>0$, $\nu\neq 0$, $U_\partial\neq\varnothing$ — выпуклое замкнутое множество из $L_2(\Sigma)$, ∂_n — производная по внешней нормали к Σ. (Напомним, что $\Sigma=(0,T)\times\partial\Omega$ — боковая поверхность цилиндра $Q=(0,T)\times\Omega$.)

Доказательство существования решения задачи (4.24)-(4.26) целесообразно проводить непосредственно, без использования абстрактной задачи из п. 2.2. Дело в том, что решение рассматриваемой задачи удается найти в классе пар (y,u), удовлетворяющих соотношениям (4.25) в слабом смысле.

Определение 4.1. *Пара $(y,u)\in L_2(0,T;H^1(\Omega))\times L_2(\Sigma)$ удовлетворяет соотношениям (4.25) в слабом смысле, если для любой функции $\varphi\in H^{1,2}(Q)$ такой, что $\gamma_\Sigma\partial_n\varphi=0$, и любого $\tau\in(0,T]$ справедливо тождество*

$$\int_0^\tau\int_\Omega[y(\tau,x)(\dot\varphi(t,x)+\nu\Delta\varphi(t,x))+g(t,x)\varphi(t,x)]\,dx\,dt$$
$$=\int_\Omega(y(\tau,x)\varphi(\tau,x)-y_0(x)\varphi(0,x))\,dx-\nu\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}u(t,x')\varphi(t,x')\,dx'dt. \tag{4.27}$$

Если дополнительно известно, что $y\in H^{1,2}(Q)$, то (4.27) эквивалентно (4.25) в силу формулы Грина. Полагая в (4.27) $\varphi(t,x)\equiv\varphi(x)\in H^2(\Omega)$ и выражая $\int_\Omega y(\tau,x)\varphi(\tau,x)\,dx$ через остальные члены, получим равенство

$$\int_\Omega y(\tau,x)\varphi(x)\,dx=\int_\Omega y_0(x)\varphi(x)\,dx$$
$$+\int_0^\tau\int_\Omega(y(t,x)\nu\Delta\varphi(x)+g(t,x)\varphi(x))\,dx\,dt+\nu\int_0^\tau\int_{\partial\Omega}u(t,x')\varphi(x')\,dx'dt. \tag{4.28}$$

Очевидно, что правая часть (4.28) непрерывна по τ. Более того, взяв $\varphi\in H^2_0(\Omega)$ и проинтегрировав в (4.28) по частям член с $\nu\Delta\varphi$, легко видеть, что правая часть равенства (4.28) продолжается по непрерывности по φ с пространства $H^2_0(\Omega)$ на $H^1_0(\Omega)$. Поэтому при любом τ определен след $y(\tau,\cdot)\in H^{-1}(\Omega)$. Из приведенной ниже леммы следует, что на самом деле $y(t,x)\big|_{t=\tau}\in L_2(\Omega)$.

Лемма 4.4. *Если пара* (y, u) *удовлетворяет соотношениям* (4.25) *в слабом смысле, то*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(y^2(\tau,x)-y_0^2(x))\,dx+\nu\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}|\nabla y(t,x)|^2dx\,dt$$
$$=\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\Omega}g(t,x)y(t,x)\,dx\,dt+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\partial\Omega}u(t,x')y(t,x')\,dx'dt. \tag{4.29}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_j(x)$ и $0<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\dots\leqslant\mu_k\leqslant\dots$ — соответственно собственные функции и собственные значения спектральной задачи

$$-\Delta\varepsilon_j+\varepsilon_j=\mu_j\varepsilon_j,\quad x\in\Omega,\qquad \partial_n\varepsilon_j(x')=0,\quad x'\in\partial\Omega.$$

Если $\mu_j\neq\mu_k$, то с помощью интегрирования по частям получим, что

$$(\varepsilon_j,\varepsilon_k)_{H^1(\Omega)}=\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{l=1}^{d}\partial_{x_l}\varepsilon_j\partial_{x_l}\varepsilon_k+\varepsilon_j\varepsilon_k\right)dx=((-\Delta+1)\varepsilon_j,\varepsilon_k)_{L_2(\Omega)}$$
$$=(\varepsilon_j,(-\Delta+1)\varepsilon_k)_{L_2(\Omega)}=\mu_j(\varepsilon_j,\varepsilon_k)_{L_2(\Omega)}=\mu_k(\varepsilon_j,\varepsilon_k)_{L_2(\Omega)}.$$

В силу этих равенств (после соответствующей нормировки) можно считать, что $\{\varepsilon_j\}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$ и ортогональный базис в $H^1(\Omega)$.

Положим $y_j(t)=(y(t,\cdot),\varepsilon_j)_{L_2(\Omega)}$. Определим оператор

$$(P_ky)(t,x)=\sum_{j=1}^{k}y_j(t)\varepsilon_j(x).$$

Очевидно, что P_k — ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство, порожденное элементами $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_k$ базиса $\{\varepsilon_j\}$.

Подставляя $\varphi=\varepsilon_j$ в (4.28), получим $y_j(t)\in H^1(0,T)$. Поэтому $P_ky\in H^{1,2}(Q)$. Очевидно, что $\gamma_\Sigma\partial_nP_ky=0$. Возьмем в (4.27) $\varphi=P_ky$. Тогда после простого преобразования получим

$$\frac{1}{2}(\|P_ky(\tau,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}-\|P_ky_0\|^2_{L_2(\Omega)})+\nu\int\limits_0^{\tau}\|\nabla P_ky(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}dt$$
$$=\int\limits_0^{\tau}(g(t,\cdot),P_ky(t,\cdot))_{L_2(\Omega)}dt+\int\limits_0^{\tau}\int\limits_{\partial\Omega}u(t,x')(P_ky)(t,x')\,dx'dt. \tag{4.30}$$

Так как $\|P_kw-w\|_{L_2(\Omega)}\to0$ и $\|P_kw-w\|_{H^1(\Omega)}\to0$ при $k\to\infty$, мы получим равенство (4.29) переходом к пределу в (4.30) при $k\to\infty$. □

На множество U_∂ из (4.26) наложим следующее условие.

Условие 4.3. Существует пара $(y,u) \in L_2(0,T;H^1(\Omega)) \times U_\partial$, удовлетворяющая (4.25) при заданных $y_0 \in H^{1/2}(\Omega)$, $g \in L_2(Q)$ в слабом смысле.

Замечание 4.1. Если $\nu > 0$, то в силу теоремы о разрешимости параболических краевых задач (см. Лионс, Мадженес [3, с. 86, 87]) любое подмножество $U_\partial \neq \varnothing$ пространства $L_2(\Sigma)$ удовлетворяет условию 4.3. Если $\nu < 0$, то не при всех $y_0 \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(Q)$, существуют U_∂ удовлетворяющие условию 4.3.

Если, например, $g = 0$, $y_0 = 0$, то такие множества U_∂ существуют. Действительно, любое множество $U_\partial \subset L_2(\Sigma)$, содержащее 0, удовлетворяет условию 4.3, так как в этом случае для пары $(y,u) = (0,0)$ выполнены соотношения (4.25). Более общие примеры множеств U_∂, для которых задача (4.24)–(4.26) с $g = 0$, $y_0 = 0$ удовлетворяет при $\nu < 0$ условию нетривиальности, будут приведены ниже (см. гл. 2, лемма 6.1).

Множество пар $(y,u) \in L_2(0,T;H^1(\Omega)) \times U_\partial$, удовлетворяющих (4.25) в слабом смысле, называется множеством *допустимых* пар задачи (4.24)–(4.26) и обозначается $\mathfrak{A}$.

В силу леммы 4.4 для любой пары $(y,u) \in \mathfrak{A}$ определен функционал J из (4.24). В соответствии с общими определениями *решением* задачи (4.24)–(4.26) будем называть пару $(\widehat{y},\widehat{u}) \in \mathfrak{A}$ такую, что

$$J(\widehat{y} - w, \widehat{u} - y_\Sigma) = \inf_{(y,u)\in\mathfrak{A}} J(y - w, u - y_\Sigma) = s \tag{4.31}$$

(число s введено для удобства дальнейшего изложения.)

Теорема 4.3. *Если выполнено условие* 4.3, *то задача* (4.24)–(4.26) *имеет единственное решение* $(\widehat{y},\widehat{u}) \in L_2(0,T;H^1(\Omega)) \times L_2(\Sigma)$.

Доказательство. Пусть $(y,u) \in \mathfrak{A}$. Вычитая из равенства (4.29) с $\tau = \tau_2$ то же равенство с $\tau = \tau_1$ при $\tau_1 < \tau_2$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(y^2(\tau_2,x) - y^2(\tau_1,x)\right)dx + \nu\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega |\nabla y(t,x)|^2 dx\,dt$$
$$= \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_\Omega gy\,dx\,dt + \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\partial\Omega} uy\,dx'dt. \tag{4.32}$$

Пусть $\nu < 0$. Положив в (4.32) $\tau_2 = T$, $\tau_1 = \tau$, получим

$$\int\limits_\Omega y^2(\tau,x)\,dx + 2|\nu|\int\limits_\tau^T\int\limits_\Omega |\nabla y(t,x)|^2 dx\,dt \leqslant \int\limits_\Omega y^2(T,x)\,dx$$
$$+ 2\int\limits_\tau^T \|g(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}\|y(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}dt + 2\int\limits_\tau^T \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\|y(t,\cdot)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}dt$$
$$\leqslant \int\limits_\Omega y^2(T,x)\,dx + C_\varepsilon\left(\int\limits_0^T \|g(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}dt + \int\limits_0^T \|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}dt\right)$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^T \|y(t,\cdot)\|^2_{H^1(\Omega)}dt \equiv I_0,$$

где последнее равенство является определением числа I_0. Из этого равенства следует, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega y^2(\tau,\cdot)\,dx\,d\tau \leqslant TI_0, \qquad \int\limits_0^T\int\limits_\Omega |\nabla y|^2 dx\,dt \leqslant I_0/(2|\nu|).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \|y(\tau,\cdot)\|^2_{H^1(\Omega)}d\tau \leqslant C_{1\varepsilon}(\|g\|^2_{L_2(Q)} + \|u\|^2_{L_2(\Sigma)})$$

$$+\varepsilon\left(T+\frac{1}{2|\nu|}\right)\int\limits_0^T \|y\|^2_{H^1(\Omega)}dt + \left(T+\frac{1}{2|\nu|}\right)\int\limits_\Omega y^2(T,x)\,dx.$$

Выбрав $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}(T+1/(2\nu))^{-1}$, из этого неравенства находим

$$\|y\|^2_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C(\|g\|^2_{L_2(Q)} + \|u\|^2_{L_2(\Sigma)} + \|y(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}), \tag{4.33}$$

где C не зависит от y и u. В случае $\nu > 0$ аналогично из (4.32) получаем

$$\|y\|^2_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant C(\|g\|^2_{L_2(Q)} + \|u\|^2_{L_2(\Sigma)} + \|y_0\|^2_{L_2(\Omega)}). \tag{4.34}$$

Пусть $(y_n, u_n) \in \mathfrak{A}$ последовательность, минимизирующая функционал J, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} J(y_n - w, u_n - y_\Sigma) = s, \tag{4.35}$$

где s — число, определенное в (4.31). В силу (4.35), (4.24), (4.33), (4.34)

$$\|y_n\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} + \|u_n\|_{L_2(\Sigma)} \leqslant C,$$

где C не зависит от n. Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, можно считать, что

$$y_n \to \widehat{y} \text{ слабо в } L_2(0,T;H^1(\Omega)), \quad u_n \to \widehat{u} \text{ слабо в } L_2(\Sigma). \tag{4.36}$$

Подставляя в (4.28) $y = y_n$, легко видеть, что функции $t \to (y_n(t,\cdot),\varphi)_{L_2(\Omega)}$ принадлежат $H^1(0,T)$ и справедлива оценка

$$\|(y_n(t,\cdot),\varphi)_{L_2(\Omega)}\|_{H^1(0,T)} \leqslant C,$$

где C не зависит от n. Поэтому можно считать, что

$$(y_n(t,\cdot),\varphi)_{L_2(\Omega)} \to (\widehat{y}(t,\cdot),\varphi)_{L_2(\Omega)} \text{ сильно в } C[0,T]. \tag{4.37}$$

Подставляя (y_n, u_n) в (4.27), переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая (4.36), (4.37), легко видеть, что $(\widehat{y},\widehat{u})$ также удовлетворяет (4.27). В силу второго соотношения в (4.36) $\widehat{u} \in U_\partial$. Поэтому $(\widehat{y},\widehat{u}) \in \mathfrak{A}$.

Из (4.29) с $\tau = T$ следует, что

$$\|y_n(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C,$$

где C не зависит от n. Из этого неравенства, в силу (4.37) получаем

$$y_n(T,\cdot) \to \widehat{y}(T,\cdot) \text{ слабо в } L_2(\Omega). \tag{4.38}$$

Из (4.38) и второго соотношения в (4.36) вытекает, что

$$J(\widehat{y}-w,\widehat{u}-y_\Sigma) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} J(y_n-w,\widehat{u}-y_\Sigma),$$

откуда в силу (4.35), (4.31) заключаем, что $(\widehat{y},\widehat{u})$ — решение задачи (4.24)–(4.26).

Пусть (y_1,u_1) и (y_2,u_2) — два решения задачи (4.24)–(4.26). Так же, как в теореме 2.2, убеждаемся, что $y_1(T,x) = y_2(T,x)$, $u_1(t,x') \equiv u_2(t,x')$. Поэтому функции $z(t,x) = y_1(t,x) - y_2(t,x)$ и $v(t,x') \equiv 0$ при $(t,x') \in \Sigma$ удовлетворяют в слабом смысле соотношениям

$$\dot z(t,x) - \nu\Delta z = 0,\ (t,x)\in Q, \quad \gamma_\Sigma \partial_n z = 0,\ (t,x)\in\Sigma,$$

$z(0,x) = 0$ и $z(T,x) = 0$. Отсюда в силу теоремы о единственности слабых решений параболической краевой задачи, вытекающей из (4.33), (4.34), получаем, что $z(t,x) \equiv 0$. При этом, если $\nu > 0$, то в качестве начального условия используется равенство $z(0,x) = 0$, а при $\nu < 0$ — равенство $z(T,x) = 0$. □

Замечание 4.2. Предложенное выше доказательство теоремы 4.3 приведено исключительно из соображений простоты и замкнутости изложения. Теорему 4.3 при $\nu > 0$ можно доказать и с помощью абстрактной теоремы 2.3, если использовать результат Лионса, Мадженеса [3, с. 86, 87], доказательство которого довольно сложно. (Отметим, что этот результат мы тем не менее используем при проверке условия 4.3.) В этом случае удается доказать существование решения $(\widehat{y},\widehat{u})$ задачи (4.24)–(4.26) в пространстве $Y_1\times L_2(\Sigma)$, где $Y_1 = \{y \in L_2(0,T;H^{3/2}(\Omega)) \cap H^{3/4}(0,T;L_2(\Omega)) : \dot y - \nu\Delta y \in L_2(Q)\}$. При $\nu < 0$ для доказательства теоремы 4.3 можно также использовать теорему 2.3.

§ 5. Жесткое управление

Во всех задачах управления, рассмотренных выше, использовался компромиссный целевой функционал J. Его минимизация позволяла выбрать функцию состояния y возможно близкой к заданной функции w при наименьших затратах на управление. Однако с физической точки зрения имеют смысл и задачи, в которых затраты нас не интересуют, а требуется выбрать функцию состояния y, максимально близкой к w. Математически это означает, что в целевом функционале J отсутствует член с u. Управление с таким функционалом мы называем *жестким.* В этом параграфе исследуется вопрос о корректных постановках экстремальных задач с жестким управлением.

5.1. Стационарная задача. Рассмотрим задачу управления

$$\|\gamma y - w\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \to \inf, \tag{5.1}$$

$$\Delta y(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (\gamma\partial_n y)(x') = u(x'), \quad x' \in \partial\Omega, \tag{5.2}$$

$$u(\cdot) \in U_\partial, \tag{5.3}$$

где $w(x') \in L_2(\partial\Omega)$ — заданная функция, U_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество из $L_2(\partial\Omega)$. Наложим на U_∂ следующие условия.

Условие 5.1.

$$U_\partial \cap \left\{ u(x') \in L_2(\partial\Omega) : \int\limits_{\partial\Omega} u(x')\,dx' = 0 \right\} \neq \varnothing.$$

Условие 5.2. U_∂ ограничено в $L_2(\partial\Omega)$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* 5.1 *и* 5.2. *Тогда задача* (5.1)–(5.3) *имеет единственное решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^{3/2}_\Delta(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$.

Доказательство. Положим $Y = Y_1 = H^{3/2}_\Delta(\Omega)$, $U = L_2(\partial\Omega)$, $V = L_2(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$, $F_0 = (0,0)$, $L(y,u) = (\Delta y, \gamma\partial_n y - u)$, $J(y,u) = \|\gamma y - w\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$. Непрерывность оператора (2.15) следует из теоремы 1.7. Из той же теоремы следует непрерывность функционала $J(y,u)$ на $Y_1 \times U$. Условие нетривиальности 2.3 выполняется в силу условия 5.1 и теоремы 1.9. Используя оценки (1.23), (1.22) решений задач Неймана и Дирихле для оператора Лапласа и условие 5.2, получим

$$\|y\|^2_{H^{3/2}_\Delta(\Omega)} \leqslant C(\|\gamma\partial_n y\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + \|y\|^2_{L_2(\Omega)}) \leqslant C_1(\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + \|y\|^2_{H^{1/2}(\Omega)})$$
$$\leqslant C_1(C + C_2\|\gamma y\|^2_{L_2(\partial\Omega)}) \leqslant C_3(\,\|\gamma y - w\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + C_4),$$

откуда следует условие коэрцитивности 2.4. Таким образом, разрешимость исследуемой задачи вытекает из теоремы 2.3.

Пусть (y_1, u_1), (y_2, u_2) — два решения задачи (5.1)–(5.3). Так же, как в теореме 2.2, устанавливается, что $\gamma y_1 = \gamma y_2$. Поэтому в силу теоремы единственности решений задачи Дирихле для оператора Лапласа имеем $y_1(x) \equiv y_2(x)$, $x \in \Omega$. Следовательно, $u_1 = u_2$, что доказывает единственность решения задачи (5.1)–(5.3). □

При доказательстве условия коэрцитивности в теореме 5.1 существенно использовалось условие 5.2 ограниченности множества U_∂. Покажем, что при доказательстве теоремы существования решения в задаче с жестким управлением можно обойтись без условия 5.2, если норму, определяющую функционал в (5.1), заменить более сильной.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\|\gamma y - w\|^2_{H^1(\partial\Omega)} \to \inf \tag{5.4}$$

при ограничениях (5.2), (5.3). Пусть $w \in H^1(\partial\Omega)$ — заданная функция.

Теорема 5.2. *Пусть выполнено условие* 5.1. *Тогда задача* (5.4), (5.2), (5.3) *имеет единственное решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^{3/2}_{\Delta}(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$.

Доказательство. Определим пространства Y, Y_1, V, U и оператор L так же, как в теореме 5.1. Положим $J(y,u) = \|y - w\|^2_{H^1(\partial\Omega)}$. Все условия теоремы 2.3 за исключением условия 2.4 проверяются так же, как в теореме 5.1. Из оценки (1.22) решения задачи Дирихле для оператора Лапласа получаем

$$\|y\|^2_{H^{3/2}_{\Delta}(\Omega)} \leqslant C\|\gamma y\|^2_{H^1(\partial\Omega)} \leqslant C_1\|\gamma y - w\|^2_{H^1(\partial\Omega)} + C_2$$
$$\|u\|^2_{H^0(\partial\Omega)} = \|\gamma\partial_n y\|^2_{H^0(\partial\Omega)} \leqslant C_3\|y\|^2_{H^{3/2}_{\Delta}(\Omega)} \leqslant C_3(C_1\|\gamma y - w\|^2_{H^1(\partial\Omega)} + C).$$

Из этих оценок вытекает справедливость условия 2.4, а, следовательно, разрешимость задачи (5.4), (5.2), (5.3). Единственность решения этой задачи доказывается так же, как в теореме 5.1. □

Условия, при которых доказано существование решений в теоремах 5.1, 5.2, существенны. Для обоснования этого утверждения рассмотрим задачу (5.1)–(5.3), в которой $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ — единичный круг, $U_\partial = L_2(\partial\Omega)$.

Предложение 5.1. *Пусть* Ω *— единичный круг,* $U_\partial = L_2(\partial\Omega)$. *Тогда существуют функции* $w \in L_2(\partial\Omega)$ *такие, что задача* (5.1)–(5.3) *не имеет решения* $(\widehat{y}, \widehat{u})$ *с* $\widehat{u} \in U_\partial = L_2(\partial\Omega)$.

Доказательство. Хорошо известно (см., например, Курант [1, с. 33]), что решение $y(x_1, x_2)$ краевой задачи

$$\Delta y(x_1, x_2) = 0, \quad y\big|_{\partial\Omega} = g \tag{5.5}$$

в единичном круге Ω определяется формулой

$$y(x_1, x_2) = y(r, \theta) = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(g_{k1}\cos k\theta + g_{k2}\sin k\theta)r^k, \tag{5.6}$$

где

$$g_{k1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi, \quad g_{k2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi$$

обозначают коэффициенты Фурье функции g, а $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(x_2/x_1)$ — полярные координаты. Из (5.6) следует, что для любой функции $g \in L_2(\partial\Omega)$

$$u = \frac{\partial y(r,\theta)}{\partial r}\bigg|_{r=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k(g_{k1}\cos k\theta + g_{k2}\sin k\theta), \tag{5.7}$$

где ряд Фурье понимается в смысле теории обобщенных функций. Пусть коэффициенты Фурье функции w из (5.1) определяются соотношениями

$$w_0 = 0, \quad w_{k1} = w_{k2} = k^{-3/4}. \tag{5.8}$$

В силу равенства Парсеваля

$$\|w\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}(w_{k1}^2 + w_{k2}^2) = 2C\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2} < \infty.$$

Определим y^n формулой (5.6), в которой

$$g_{k,j} = \begin{cases} k^{-3/4}, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \quad j = 1, 2, \tag{5.9}$$

а u^n — формулой (5.7) с $g_{k,j}$ из (5.9). Очевидно, что $(y^n, u^n) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times C^\infty(\partial\Omega) \subset H^{3/2}_\Delta(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$, пары (y^n, u^n) удовлетворяют соотношениям (5.2), (5.3) и $\|\gamma y^n - w\|_{L_2(\partial\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому если задача (5.1)–(5.3) имеет решение $(\widehat{y}, \widehat{u})$, то $\gamma\widehat{y} = w$. Тогда $\widehat{u}$ определяется соотношением (5.7) с $g_{kj} = w_{kj} = k^{-3/4}$, откуда, используя равенство Парсеваля, легко установить, что $\widehat{u} \notin L_2(\partial\Omega)$. □

5.2. Эволюционная задача. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$. Рассмотрим следующую эволюционную задачу с жестким управлением:

$$\|y\|^2_{L_2(Q)} \to \inf, \tag{5.10}$$

$$\dot{y}(t,x) - \Delta y(t,x) = u(t,x), \quad \gamma_0 y = 0,\ \gamma_\Sigma y = 0, \tag{5.11}$$

$$\gamma_T y = y_T, \tag{5.12}$$

$$\|u\|_{L_2(Q)} \leqslant \alpha, \tag{5.13}$$

где $\alpha > 0$ — некоторое положительное число. По условию этой задачи $u \in L_2(Q)$. Решая задачу (5.11) с заданным u, получим, что $y \in H^{1,2}(Q)$. В силу теоремы 1.13 $\gamma_T y \in H^1_0(\Omega)$. Поэтому в (5.12) естественно предполагать, что $y_T \in H^1_0(\Omega)$. На y_T и α наложим следующее условие.

Условие 5.3. Существует пара $(y,u) \in H^{1,2}(Q) \times L_2(Q)$, удовлетворяющая (5.11)–(5.13).

Замечание 5.1. Задаче (5.10)–(5.13) можно придать физический смысл и трактовать ее как, например, задачу об оптимальном разогреве тела до заданной температуры. Отметим, что она близка по структуре задаче из гл. 4 о том, как оптимальным образом разогнать покоящуюся жидкость до заданной скорости.

Положим

$$Y_1 = \{y(t,x) \in H^{1,2}(Q) : \gamma_0 y = 0,\ \gamma_\Sigma y = 0\}. \tag{5.14}$$

Теорема 5.3. *Пусть выполнено условие* 5.3. *Тогда существует единственное решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times L_2(Q)$ *задачи* (5.10)–(5.13), *где* Y_1 *— пространство* (5.14).

Доказательство. Положим $Y = U = L_2(Q)$, $V = L_2(Q) \times H^1_0(\Omega)$, $F_0 = (0,0)$, $L(y,u) = (\dot{y} - \Delta y - u, \gamma_T y)$, $J(y,u) = \|y\|^2_{L_2(Q)}$, а пространство

Y_1 определим формулой (5.14). Непрерывность оператора (2.15) следует из теоремы 1.13, условие 2.3 — из условия 5.3, а условие 2.4 — из оценки решений параболической краевой задачи (5.11) и (5.13):

$$\|y\|_{H^{1,2}(Q)} \leqslant C\|u\|_{L_2(Q)} \leqslant C\alpha.$$

Поэтому из теоремы 2.3 следует существование решения.

Пусть (y_1, u_1) и (y_2, u_2) — два решения задачи (5.10)–(5.13). Так же, как в теореме 2.2, устанавливается, что $y_1 = y_2$. Поэтому $u_1 = u_2$ в силу (5.11). □

Для лучшего понимания условия 5.3 полезно следующее

Предложение 5.2. *Для любого $y_T \in H_0^1(\Omega)$ существует $\alpha_0 \geqslant 0$ такое, что при любом $\alpha \geqslant \alpha_0$ условие 5.3 выполняется, а при любом $\alpha \in (0, \alpha_0)$ — не выполняется.*

Доказательство. Пусть функция $y_T \in H_0^1(\Omega)$ фиксирована. Положим

$$G = \{y \in Y_1 : \gamma_T y = y_T\}, \tag{5.15}$$

где Y_1 — пространство (5.14). Покажем, что $G \neq \varnothing$. Действительно, пусть $z(t,x) \in H^{1,2}(Q)$ — решение параболической задачи

$$\dot{z}(t,x) + \Delta z(t,x) = 0, \quad \gamma_T z = y_T, \ \gamma_\Sigma z = 0,$$

и $\varphi(t) \in C^\infty(0,T)$, причем $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(T) = 1$. Тогда $\varphi(t)z(t) \in G$. Легко видеть, что множество G выпукло и замкнуто в Y_1. Рассмотрим задачу

$$J(y) = \|\dot{y} - \Delta y\|^2_{L_2(Q)} \to \inf, \quad y \in G, \tag{5.16}$$

и докажем, что существует решение $\widehat{y}$. Пусть $y_n \in G$ — минимизирующая последовательность:

$$\lim_{n\to\infty} J(y_n) = \inf_{y\in G} J(y).$$

Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, можно считать, что

$$y_n \to \widehat{y} \text{ слабо в } H^{1,2}(Q).$$

Очевидно, что $\widehat{y}$ — решение задачи (5.16).

Если положить $\alpha_0 = J(\widehat{y})$, где J — функционал из (5.16), то при $\alpha \geqslant \alpha_0$ условие 5.3 выполняется, а при $\alpha < \alpha_0$ — нет. □

Покажем, что условие (5.13) существенно для разрешимости задачи (5.10)–(5.13).

Предложение 5.3. *Пусть $y_T \neq 0$. Тогда задача (5.10)–(5.12) не имеет решения $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times L_2(Q)$, где Y_1 — пространство (5.14).*

Доказательство. Пусть y — произвольный элемент из множества G, определенного формулой (5.15),

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, T - 1/n], \\ n\left(t - T + \frac{1}{n}\right), & t \in [T - 1/n, T]. \end{cases}$$

Очевидно, что при любом n функция $y_n = \varphi_n(t)y(t,x)$ удовлетворяет соотношениям (5.11), (5.12) с $u_n = \dot{y}_n - \Delta y_n$ и $\|y_n\|_{L_2(Q)} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому если существует решение $\widehat{y}$ задачи (5.10)–(5.12), то $\widehat{y} \equiv 0$. Но функция $\widehat{y}(t,x) \equiv 0$ не удовлетворяет условию $\gamma_T \widehat{y} = y_T$. □

Как и в случае стационарной задачи из п. 5.1, при замене нормы, определяющей функционал в (5.10), на более сильную, полученная задача может оказаться разрешимой даже без условия (5.13). Действительно, рассмотрим экстремальную задачу

$$\|y\|^2_{H^1(Q)} \to \inf \tag{5.17}$$

при выполнении условий (5.11), (5.12), где $u \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Положим $H^{1/2}_{00}(\Omega) = \{u(x) \in H^{1/2}(\Omega) : \rho^{-1/2}(x)u(x) \in L_2(\Omega)\}$, где $\rho(x) = \inf\limits_{y\in\partial(\Omega)} |x-y|$ (см. Лионс, Мадженес [2, с. 85]).

Теорема 5.4. *Пусть $y_T \in H^{1/2}_{00}(\Omega)$ — задано. Тогда задача* (5.17), (5.11), (5.12) *имеет единственное решение $(\widehat{y},\widehat{u}) \in H^1(Q) \times L_2(Q)$.*

Доказательство. Положим $Y = Y_1 = \{y \in H^1(Q) : \gamma_\Sigma y = 0,\ \gamma_0 y = 0\}$, $U = L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $V = L_2(0,T;H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}_{00}(\Omega))$, $L(y,u) = (\dot{y} - \Delta y - u, \gamma_T y)$, $F_0 = (0, -y_T)$, $J(y,u) = \|y\|^2_{H^1(Q)}$. Так как проверка всех условий теоремы 2.3 очевидна, из этой теоремы следует разрешимость задачи (5.17), (5.11), (5.12). Единственность решения доказывается так же, как в теореме 5.3. □

§ 6. Нелинейные стационарные экстремальные задачи

Из результатов предыдущих параграфов напрашивается вывод, что если целевой функционал задается некоторой нормой, то чем сильнее эта норма, тем меньше сведений об управляемой системе требуется для доказательства коэрцитивности, а, следовательно, и разрешимости экстремальной задачи. Это наблюдение оказывается особенно существенным при изучении вопросов оптимального управления системами, которые описываются нелинейными краевыми задачами для уравнений с частными производными. Дело в том, что многие нелинейные краевые задачи математической физики пока еще мало изучены, и в этой ситуации дело можно поправить за счет правильного выбора функционала стоимости. Этот параграф посвящен задачам управления нелинейными стационарными системами. Основное внимание уделяется вопросу, при каких условиях на целевой функционал рассматриваемая экстремальная задача разрешима.

6.1. Распределенные управление и наблюдение. I. Пусть на вещественной прямой задана непрерывная функция $b(y)$, удовлетворяющая оценке

$$|b(y)| \leqslant C\,(1+|y|)^{\varkappa}, \quad C > 0,\ \varkappa \geqslant 1. \tag{6.1}$$

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$ заданы функции $w(x) \in L_\alpha(\Omega)$, $f(x) \in L_2(\Omega)$, где $1 < \alpha < \infty$. Рассмотрим экстремальную

задачу

$$J(y-w,u-f)=\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{\alpha}|y(x)-w(x)|^{\alpha}+\frac{N}{2}|u(x)-f(x)|^2\right)dx\to\inf, \tag{6.2}$$

$$-\Delta y(x)+b(y(x))=u(x),\ x\in\Omega;\quad \gamma y(x')=0,\ x'\in\partial\Omega, \tag{6.3}$$

$$u\in U_{\partial}, \tag{6.4}$$

где U_{∂} — непустое замкнутое выпуклое подмножество пространства $L_2(\Omega)$, $N>0$. Предполагается выполненным следующее условие.

Условие 6.1. При некотором $s>1$ существует пара $(y,u)\in(W_s^2(\Omega)\cap L_{\alpha}(\Omega))\times L_2(\Omega)$, удовлетворяющая (6.3), (6.4).

Отметим, что при $U_{\partial}=L_2(\Omega)$ такая пара всегда существует. Достаточно взять любую функцию $y(x)\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ такую, что $\gamma y=0$, и положить $u=\Delta y+b(y)$.

Если $U_{\partial}\neq L_2(\Omega)$, то проверка условия 6.1 — непростая задача. Ее иногда удается решить при выполнении некоторых дополнительных предположений. Например, если $b(0)\in U_{\partial}$, то условие 6.1 справедливо, так как пара $(y,u)=(0,b(0))$ удовлетворяет соотношениям (6.3). Конечно, можно наложить дополнительные ограничения на $b(y)$, гарантирующие разрешимость задачи (6.3) при фиксированном u, например,

$$b(y)=b_1(y)+b_2(y),\qquad |b_1(y)|\leqslant\mathrm{const}<\infty,\quad \partial b_2(y)/\partial y\geqslant 0 \tag{6.5}$$

(см. Курант [1, с. 370]). В этом случае условие 6.1 выполняется при любом непустом $U_{\partial}\subset L_2(\Omega)$. Однако для нас интереснее ситуация, когда (6.5) или другие предположения, гарантирующие разрешимость задачи (6.3), не выполнены, а условие 6.1 — справедливо. Именно поэтому мы предполагаем, что $\varkappa\geqslant 1$ в (6.1) и аналогичных условиях, используемых ниже, так как при выполнении (6.1) с $\varkappa<1$ вопрос о разрешимости краевой задачи (6.3) при любом фиксированном $u\in L_2(\Omega)$ легко решается.

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (6.2)–(6.4), предполагая, что показатели степеней $\varkappa$ и α из (6.1) и (6.2) связаны соотношением $\alpha\geqslant\varkappa$. Рассмотрим сначала случай $\alpha>\varkappa$.

Теорема 6.1. *Пусть $\alpha>\varkappa$ и выполнено условие* 6.1. *Тогда существует решение $(\widehat{y},\widehat{u})\in(W_r^2(\Omega)\cap L_{\alpha}(\Omega))\times L_2(\Omega)$ задачи* (6.2)–(6.4), *где*

$$r=\min\{2,\alpha/\varkappa\}. \tag{6.6}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.4. Для этого проверим, что выполнены все предположения этой теоремы. Положим $Y=L_{\alpha}(\Omega)$, $U=L_2(\Omega)$, $Y_1=W_r^2(\Omega)\cap L_{\alpha}(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_r^1(\Omega)$, $V=L_r(\Omega)$, $Y_{-1}=L_{\varkappa}(\Omega)$, $L(y,u)=\Delta y-u$, $F(y)=b(y)$, J — функционал (6.2). В силу (6.6) операторы (2.15) и (2.19) непрерывны. Если (y,u) — пара из условия 6.1, то $b(y)-u\in L_r(\Omega)$ и в силу теоремы 1.8 о разрешимости задачи $\Delta y=f(x)\equiv u-b(y)$,

$\gamma y = 0$, справедливо включение $y \in W_r^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_r^1(\Omega)$. Поэтому выполнено условие нетривиальности 2.3. Используя оценку решения задачи Дирихле для оператора Лапласа с правой частью $f = u - b(y)$, получим, что для $(y, u) \in Y_1 \times U$, удовлетворяющих (6.3)

$$\|y\|_{Y_1} + \|u\|_U = \|y\|_{W_r^2} + \|y\|_{L_\alpha} + \|u\|_{L_2} \leqslant C(\|b(y)\|_{L_r} + \|y\|_{L_\alpha} + \|u\|_{L_2})$$
$$\leqslant C_1 J(y - w, u - f) + C_2,$$

где J — функционал (6.2). Следовательно, выполнено условие коэрцитивности 2.4. Для проверки условия компактности 2.5 докажем следующее утверждение.

Лемма 6.1. *Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ и $X(G)$ — нормированное пространство функций $y(x)$, $x \in G$, компактно вложенное в $L_1(G)$. Тогда при $\beta > \gamma \geqslant 1$ вложение $X(G) \cap L_\beta(G) \Subset L_\gamma(G)$ вполне непрерывно.*

Доказательство. Пусть последовательность функций $\{z_n(x)\}$ ограничена в $X(G) \cap L_\beta(G)$:

$$\|z_n\|_{X(G)} + \|z_n\|_{L_\beta(G)} \leqslant C. \tag{6.7}$$

Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, можно считать, что

$$z_n \to \widehat{z} \text{ сильно в } L_1(G), \quad z_n \to \widehat{z} \text{ слабо в } L_\beta(G). \tag{6.8}$$

Для показателей $1 < \gamma < \beta$ справедливо известное интерполяционное неравенство

$$\|f\|_{L_\gamma} \leqslant \|f\|_{L_\beta}^{\frac{\gamma-1}{\beta-1}} \|f\|_{L_1}^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-1}}.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно к интегралу

$$\|f\|_{L_\gamma} = \left(\int |f|^a |f|^{\gamma - a} dx \right)^{1/\gamma},$$

где $a = [(\gamma - 1)\beta]/(\beta - 1)$, применить неравенство Гёльдера

$$\int fg\, dx \leqslant \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}, \quad p = \frac{\beta - 1}{\gamma - 1},\ q = \frac{\beta - 1}{\beta - \gamma}.$$

Используя это неравенство, получим в силу (6.7) и (6.8)

$$\|z_n - \widehat{z}\|_{L_\gamma} \leqslant \|z_n - \widehat{z}\|_{L_\beta}^{\frac{\gamma-1}{\beta-1}} \|z_n - \widehat{z}\|_{L_1}^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-1}} \leqslant C^{\frac{\gamma-1}{\beta-1}} \|z_n - \widehat{z}\|_{L_1}^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-1}} \to 0$$

при $n \to \infty$. При $\gamma = 1$ утверждение леммы 6.1 следует из (6.8). □

Доказательство теоремы 6.1 (окончание). Непрерывность вложения (2.20) для Y и Y_{-1}, указанных в начале доказательства, очевидна. Компактность вложения (2.21) следует из леммы 6.1 с $X(G) = W_r^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_r^1(\Omega)$, $\beta = \alpha$ и $\gamma = \varkappa$, так как $\alpha > \varkappa$. Поэтому справедливость условия 2.5 следует из (6.1), если положить $S = C(\overline{\Omega})$. □

Рассмотрим случай $\alpha = \varkappa$.

Теорема 6.2. *Пусть* $\alpha = \varkappa$, *выполнено условие* 6.1 *и*

$$1 < \varkappa < d/(d-2) \text{ при } d \geqslant 3, \quad \varkappa > 1 \text{ при } d = 2, \tag{6.9}$$

где d *— размерность области* Ω. *Тогда существует решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in (H^2(\Omega) \cap L_\alpha(\Omega)) \times L_2(\Omega)$ *задачи* (6.2)–(6.4).

Доказательство. Положим $Y = Y_{-1} = L_\varkappa(\Omega)$, $U = L_2(\Omega)$, $Y_1 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $V = L_2(\Omega)$, а операторы и функционал определим так же, как в теореме 6.1. Из (6.9) следует неравенство $d(1/2 - 1/(2\varkappa)) < 2$, из которого по теореме 1.2 (теорема Реллиха — Кондрашова о компактном вложении)

$$H^2(\Omega) \Subset L_{2\varkappa}(\Omega) \subset L_\varkappa(\Omega), \tag{6.10}$$

что доказывает непрерывность вложений (2.14), (2.20), (2.21), а также непрерывность оператора (2.19). Достаточно проверить лишь условия 2.3, 2.4. При $y \in L_\varkappa(\Omega)$, $u \in L_2(\Omega)$

$$b(y) - u \in L_1(\Omega) \subset W_p^{-\gamma}(\Omega), \quad 1/p + \gamma/d > 1,\ p > 1, \tag{6.11}$$

так как при $d(1 - 1/p) < \gamma$ в силу теоремы 1.1 (теорема вложения Соболева) непрерывно сопряженное вложение $W_{p'}^{\gamma} \subset L_\infty(\Omega)$, где $1/p' = 1 - 1/p$. Предполагая, что $\gamma \subset (0,1)$, а (y,u) удовлетворяют (6.3), согласно теореме 1.8 (теорема о разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta y = b(y) - u$) и включению (6.11) получим $y \in W_p^{2-\gamma}(\Omega)$. Вследствие теоремы 1.1

$$y \in W_p^{2-\gamma}(\Omega) \subset L_{p_1}(\Omega), \quad 1/p_1 = 1/p - 2/d + \gamma/d > 1 - 2/d. \tag{6.12}$$

При $d = 2$ в (6.12) можно взять $p_1 = 2\varkappa$, откуда $b(y) + u \in L_2(\Omega)$. Поэтому в силу (6.3) $y \in H^2(\Omega)$. Согласно приведенным выше рассуждениям справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\|y\|_{H^2} \leqslant C(\,\|y\|_{L_{2\varkappa}} + \|u\|_{L_2}) \leqslant C_1(\|y\|_{W_p^{2-\gamma}} + \|u\|_{L_2}) \\ &\leqslant C_2(\|b(y) + u\|_{W_p^{-\gamma}} + \|u\|_{L_2}) \leqslant C_3(\|y\|_{L_\varkappa} + \|u\|_{L_2}) \\ &\leqslant C_4 J(y - w, u - f) + C_5, \end{aligned} \tag{6.13}$$

откуда следует условие 2.4 при $d = 2$. В случае $d \geqslant 3$ выберем p и γ в (6.11) так, чтобы для p_1 из (6.12) выполнялось неравенство $p_1 > \varkappa$. Это можно сделать в силу (6.9). Так как $y \in L_{p_1}$, имеем $b(y) \in L_{p_1/\varkappa}$. Если $p_1/\varkappa < 2$, то в силу (6.3) $y \in W_{p_1/\varkappa}^2 \subset L_{p_2}$, где $1/p_2 = \varkappa/p_1 - 2/d$. Из этого равенства, неравенства $p_1 > \varkappa$ и (6.9) следует, что

$$\frac{p_1}{p_2} = \varkappa - \frac{2}{d} p_1 < \varkappa\left(1 - \frac{2}{d}\right) < 1. \tag{6.14}$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, из условия $y \in L_{p_2}$ выводим, если $p_2/\varkappa < 2$, что $y \in L_{p_3}$, где аналогично (6.14) $p_2/p_3 < \varkappa(1 - 2/d) < 1$. Повторяя эти рассуждения несколько раз, в силу неравенств, аналогичных (6.14), для некоторого k получим $p_k/\varkappa \geqslant 2$, откуда $y \in W_2^2$. В силу приведенных выше рассуждений справедливы оценки, аналогичные (6.13), из которых следует условие 2.4. Приведенные выше рассуждения доказывают

также, что из условия 6.1 следует условие 2.3. Таким образом, существование решения задачи (6.2)–(6.4) при $\alpha = \varkappa$ и условии (6.9) следует из теоремы 2.4. □

Замечание 6.1. Если функционал (6.2) заменить функционалом

$$J(y-w, u-f) = \int\limits_{\Omega} (|y(x)-w(x)|^{\alpha} + |u(x)-f(x)|^{\beta})\, dx,$$

где $1 < \beta < \infty$, то теоремы 6.1, 6.2 с естественными изменениями в формулировках остаются справедливыми. При этом их доказательства остаются верными без каких-либо существенных изменений.

Замечание 6.2. Утверждение теоремы 6.2 остается справедливым и в случае, когда условие (6.9) заменено предположением $\varkappa = d/(d-2)$, $d \geqslant 3$. При этом на нелинейный член b накладываются следующие дополнительные условия:

$$b(\lambda)\lambda \geqslant C_1|\lambda|^{\varkappa+1} - C_0, \quad F(z) = \int\limits_0^z b(\xi)\, d\xi \geqslant \alpha b(z)z - C_1,$$

где $\alpha > (d-2)/(2d)$, $C_0 > 0$, $C_1 > 0$.

Существование решения задачи (6.2)–(6.4) доказано в пространстве $H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Этот результат доказан в Эмануилов [1].

6.2. Распределенные управление и наблюдение. II. Рассмотрим случай, когда функционал J задается не с помощью L_p-норм, а с помощью норм пространств Соболева $H^s(\Omega)$:

$$J(y-w, u-f) = \frac{1}{2}\|y-w\|^2_{H^k(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u-f\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf, \tag{6.15}$$

где функции $w \in H^k(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$ заданы, $k \geqslant 0$ — целое число, $N > 0$. При этом вместо полулинейного уравнения (6.3) рассмотрим краевую задачу для более общего квазилинейного стационарного уравнения

$$Ay(x) + B(y(x)) = u(x),\ x \in \Omega; \quad \gamma_{\partial\Omega} y(x') = 0,\ x' \in \partial\Omega, \tag{6.16}$$

где A — линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x_i \partial x_j} \tag{6.17}$$

с коэффициентами $a_{ij}(x) \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$,

$$B(y) = g(y(x), \partial y/\partial x_1, \ldots, \partial y/\partial x_d), \tag{6.18}$$

где $g(y, z_1, \ldots, z_d) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{d+1})$, — нелинейный оператор.

На управление наложим ограничение

$$u \in U_{\partial}, \tag{6.19}$$

где U_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\Omega)$. На задачу (6.15), (6.16), (6.19) наложим следующее условие.

Условие 6.2. Существует пара $(y, u) \in H^k(\Omega) \times U_\partial$, удовлетворяющая (6.16).

Замечание 6.3. В условии 6.2 остается неясным, в каком смысле понимаются соотношения (6.16). Ниже мы накладываем на задачу (6.15), (6.16), (6.19) дополнительные ограничения, при выполнении которых соотношения (6.16) оказываются хорошо определенными.

Как видно из приведенной ниже теоремы, если k из (6.15) достаточно велико, то для разрешимости задачи (6.15), (6.16), (6.19) на операторы A, B из (6.16) не нужно накладывать никаких дополнительных условий.

Теорема 6.3. *Пусть k — целое число и $k > d/2+1$, где d — размерность Ω, и выполнено условие 6.2. Тогда существует решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^k(\Omega) \times L_2(\Omega)$ задачи (6.15), (6.16), (6.19).*

Доказательство. Пусть $Y = H^k(\Omega)$, $Y_1 = H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $Y_{-1} = C^1(\overline{\Omega})$, $U = V = L_2(\Omega)$, $L(y, u) = Ay - u$, $F(y) = B(y)$, J — функционал (6.15). Согласно теореме вложения Реллиха — Кондрашова (теорема 1.2), $H^k(\Omega) \Subset C^1(\overline{\Omega})$ при $k > d/2 + 1$, что доказывает (2.21) и непрерывность оператора (2.19). Проверка всех предположений теоремы 2.4 в данном случае очевидна. Из теоремы 2.4 следует доказываемое утверждение. □

При более слабых ограничениях на k приходится накладывать дополнительные ограничения на операторы A и B из (6.16). Предположим, что функция $g(y, z_1, \ldots, z_d)$ из (6.18) удовлетворяет условию

$$\forall \alpha + |\beta| \leqslant k \quad \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} D_z^\beta g(y, z) \right| \leqslant C(1 + |y| + |z|)^\varkappa, \tag{6.20}$$

где $C > 0$, $\varkappa > 1$ — некоторые числа.

Теорема 6.4. *Пусть k — целое число, причем либо $\varkappa \in (1, 2)$, $k \geqslant 2$, либо $\varkappa \geqslant 2$, $k > 1 + d(1/2 - 1/\varkappa)$. Тогда при выполнении условия 6.2 существует решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^k(\Omega) \times L_2(\Omega)$ задачи (6.15), (6.16), (6.19).*

Доказательство. Положим $Y_{-1} = W_\varkappa^1(\Omega)$, $V = L_1(\Omega)$, а остальные пространства, операторы и функционал определим так же, как в теореме 6.3. Проверка всех условий теоремы 2.4 очевидна. □

Рассмотрим случай, когда (6.16) при фиксированном u определяет корректную краевую задачу. Точнее, предположим, что оператор A эллиптичен в $\overline{\Omega}$, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant C \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d,\ x \in \overline{\Omega}, \tag{6.21}$$

где $C > 0$ не зависит от ξ и x. Относительно нелинейного оператора B предположим, что

$$B(y) = b(y(x)), \tag{6.22}$$

где $b \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ — функция, удовлетворяющая (6.1), а также оценке

$$b(y)y \geqslant \gamma|y|^{\varkappa+1} - \gamma_1, \quad \gamma > 0,\ \gamma_1 \in \mathbb{R}. \tag{6.23}$$

В этом случае теорема существования решений задачи (6.15), (6.16), (6.19) справедлива при $k = 0, 1$ и $\varkappa > 1$.

Отметим, что для оператора $B(y)$ вида (6.22), т. е. не зависящего от $\partial y/\partial x_j$, теорема 6.4 верна при $k > d(1/2 - 1/\varkappa)$, когда $\varkappa \geqslant 2$. Поэтому при размерностях $d = 2, 3, 4$ теорема 6.4 верна при всех $k \geqslant 2$ и $\varkappa > 1$ и, следовательно, остается рассмотреть случай $k = 0, 1$ и $\varkappa > 1$.

Теорема 6.5. *Пусть A и B — операторы* (6.17), (6.22), *удовлетворяющие условиям* (6.21), (6.1), (6.23). *Предполагается, что $k = 0, 1$, $\varkappa > 1$, $U_\partial \neq \varnothing$. Тогда существует решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in (W^2_{(\varkappa+1)/\varkappa}(\Omega) \cap L_{\varkappa+1}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times L_2(\Omega)$ задачи* (6.15), (6.16), (6.19).

Доказательство. Положим $Y = H^k(\Omega) \cap L_\varkappa(\Omega)$, $U = L_2(\Omega)$, $Y_{-1} = L_\varkappa(\Omega)$, $Y_1 = W^2_{(\varkappa+1)/\varkappa}(\Omega) \cap L_{\varkappa+1}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $V = L_{(\varkappa+1)/\varkappa}(\Omega)$, $L = Ay - u$, $F(y) = B(y)$. В силу леммы 6.1, вложение $Y_1 = W^2_{(\varkappa+1)/\varkappa}(\Omega) \cap L_{\varkappa+1}(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \Subset L_\varkappa(\Omega) = Y_{-1}$ вполне непрерывно. Очевидно, что достаточно проверить условия 2.3, 2.4. Если $(y, u) \in Y_1 \times U$ удовлетворяет уравнению (6.16), то умножив скалярно в $L_2(\Omega)$ обе части этого уравнения на $y(x)$, после интегрирования по частям находим

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial_i y\, \partial_j y\, dx + \int\limits_\Omega b(y(x))y(x)\, dx$$
$$= \int\limits_\Omega u(x)y(x)\, dx - \int\limits_\Omega (\partial_j a_{ij}(x))y\partial_i y\, dx. \tag{6.24}$$

Используя в левой части (6.24) соотношения (6.21), (6.23), а в правой — неравенство Коши — Буняковского, получим

$$C\|\nabla y\|^2_{L_2} + \gamma\|y\|^{\varkappa+1}_{L_{\varkappa+1}} \leqslant C_\varepsilon\|u\|^2_{L_2} + \frac{C}{2}\|\nabla y\|^2_{L_2} + \varepsilon\|y\|^2_{L_2} + C_3. \tag{6.25}$$

Применим к $\|y\|_{L_2}$ в правой части (6.25) неравенство Пуанкаре — Стеклова (1.6) и перенесем все члены с ∇y в левую часть. Опять используя неравенство Пуанкаре — Стеклова, получаем

$$\|y\|^2_{H^1} + \|y\|^{\varkappa+1}_{L_{\varkappa+1}} \leqslant C_4(\|u\|^2_{L_2} + 1). \tag{6.26}$$

Так как $y \in Y_1 \subset L_{\varkappa+1}$, в силу (6.16) имеем

$$Ay = u - B(y) \in L_{(\varkappa+1)/\varkappa}(\Omega), \tag{6.27}$$

откуда согласно теореме 1.8 $y \in W^2_{(\varkappa+1)/\varkappa}(\Omega)$ и

$$\|y\|_{W^2_{(\varkappa+1)/\varkappa}} \leqslant C(\,\|u\|_{L_2} + \|y\|_{L_{\varkappa+1}}). \tag{6.28}$$

Из (6.26), (6.28) следует справедливость условия 2.4. Для проверки условия 2.3 отметим, что при любом $u \in U_\partial \subset L_2(\Omega)$ можно доказать разрешимость

задачи (6.16) методами теории монотонных операторов (см. Вишик [2]; Лионс [1]): сначала с помощью оценки (6.26) доказывается существование решения $y \in H_0^1(\Omega) \cap L_{\varkappa+1}(\Omega)$, а затем с помощью (6.27), (6.28) — принадлежность этого решения y пространству $W^2_{(\varkappa+1)/\varkappa}(\Omega)$. □

§ 7. Нелинейные параболические экстремальные задачи

В этом параграфе рассматривается случай задач управления системами, которые описываются с помощью полулинейных параболических уравнений. Нас в первую очередь интересует случай сингулярных уравнений, для которых соответствующая краевая задача разрешима не при всех исходных данных. Ниже показано, что соответствующие задачи оптимального управления разрешимы не только для "сильных" функционалов стоимости, которые задаются L_p-нормами с достаточно большими p, но и для целевых функционалов, определенных с помощью L_2-норм.

7.1. Распределенные управление и наблюдение. Пусть Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^\infty$, $T > 0$, $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$. Рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$J(y-w, u-f) = \int\limits_Q \frac{1}{\alpha}|y(t,x) - w(t,x)|^\alpha dx\, dt$$

$$+\frac{N}{2}\int\limits_Q |u(t,x) - f(t,x)|^2 dx\, dt \to \inf, \tag{7.1}$$

$$\dot y(t,x) - \Delta y(t,x) + b(y(t,x)) = u(t,x), \tag{7.2}$$

$$\gamma_0 y = y_0(x), \quad \gamma_\Sigma y = 0, \tag{7.3}$$

$$u \in U_\partial, \tag{7.4}$$

где $\dot y = \partial y/\partial t$, $\alpha > 1$, $y_0(x)$, $w(t,x)$, $f(t,x)$ — заданные функции, $N > 0$, γ_0 — оператор сужения функции $y(t,x)$ при $t = 0$, γ_Σ — оператор сужения функции y на Σ, U_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(Q)$. Предполагается, что $b(\lambda) \in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет неравенству (6.1). Кроме того, предполагается выполненным следующее условие.

Условие 7.1. При некотором $s > 1$ существует пара $(y,u) \in (W_s^{1,2}(Q) \cap L_\alpha(Q)) \times L_2(Q)$, удовлетворяющая (7.2), (7.3), (7.4).

При $U_\partial = L_2(Q)$ условие 7.1 выполняется. Для его проверки достаточно подобрать $z \in W_\beta^{1,2}(Q)$, $\beta \geqslant \max\{\alpha, (d+2)/2\}$, удовлетворяющую условиям $\gamma_0 z = y_0$, $\gamma_\Sigma z = 0$ (существование такой функции гарантируется теоремой 1.13, если $y_0 \in \overset{\circ}{B}{}^{2-2/\beta}_\beta(\Omega) = \{z \in B^{2-2/\beta}(\Omega) : \gamma_{\partial\Omega} z = 0\}$) и в качестве пары (y,u) взять $(y,u) = (z, \partial_t z - \Delta z + b(z)) \in W_\alpha^{1,2}(Q) \times L_2(Q)$. При $U_\partial \neq L_2(Q)$ для удовлетворения условия 7.1, как и в случае условия 6.1, нужно накладывать условия на $b(\lambda)$ и U_∂. Так, при $y_0 = 0$ и $b(0) \in U_\partial$, пара $(y,u) = (0, b(0))$ удовлетворяет условию 7.1. Условие 7.1 будет выполнено для широкого класса множеств U_∂, если $b(\lambda)$ удовлетворяет условиям, до-

пускающим применение известных методов доказательства разрешимости параболических краевых задач.

Докажем разрешимость задачи (7.1)–(7.4) в случае $\alpha > \varkappa$.

Теорема 7.1. *Пусть* $\alpha > \varkappa$, $w \in L_\alpha(Q)$, $f \in L_2(Q)$, $y_0 \in \overset{\circ}{B}{}_r^{2(1-1/r)}(\Omega)$, *где*

$$r = \min\{2, \alpha/\varkappa\}, \tag{7.5}$$

и выполнено условие 7.1. *Тогда существует решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in (W_r^{1,2}(Q) \cap L_\alpha(Q)) \times L_2(Q)$ *задачи* (7.1)–(7.4).

Доказательство. Положим $Y = L_\alpha(Q)$, $Y_{-1} = L_\varkappa(Q)$, $U = L_2(Q)$, $Y_1 = L_\alpha(Q) \cap \{y \in W_r^{1,2}(Q) : \gamma_\Sigma y = 0\}$, $V = L_r(Q) \times \overset{\circ}{B}{}_r^{2(1-1/r)}(\Omega)$, где r — число (7.5), $L(y,u) = (\dot{y} - \Delta y - u, \gamma_0 y)$, $F(y) = (b(y), -y_0)$. Справедливость (2.14), (2.20) очевидна, а (2.21) следует из леммы 6.1. Непрерывность операторов (2.15), (2.19) и проверка условия 2.5 с $S = C(\overline{\Omega})$ очевидны. Справедливость условия 2.4 вытекает из оценки (1.38) решений линейных параболических краевых задач:

$$\begin{aligned} \|y\|_{W_r^{1,2}(Q)} &\leqslant C(\|u - b(y)\|_{L_r(Q)} + \|y_0\|_{B_r^{2(1-1/r)}(\Omega)}) \\ &\leqslant C_1 + C_2(\|u\|_{L_2(Q)} + \|y\|_{L_\alpha(Q)}). \end{aligned} \tag{7.6}$$

Если (y,u) — пара, существование которой постулируется условием 7.1, то в силу (7.6) $y \in Y_1$, что доказывает справедливость условия 2.3. Поэтому утверждение теоремы 7.1 следует из теоремы 2.4. □

7.2. Априорные оценки. В этом пункте мы получим некоторые априорные оценки для сингулярных полулинейных параболических уравнений, которые полезны при доказательстве разрешимости задач оптимального управления.

Рассмотрим в Q краевую задачу

$$\dot{y}(t,x) - \Delta y + b(y(t,x)) = u(t,x), \quad \gamma_0 y = y_0(x), \tag{7.7}$$

$$\gamma_\Sigma y = 0, \tag{7.8}$$

где нелинейный член $b(y)$ задается непрерывной функцией $b(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей следующему условию.

Условие 7.2. (a) Либо $\sup\limits_{\lambda \geqslant 1} |b(\lambda)/\lambda| < \infty$, либо $\lim\limits_{\lambda \to \infty} |b(\lambda)/\lambda| = \infty$. При этом, если $b(\lambda)/\lambda \to -\infty$ при $\lambda \to \infty$, то существуют $\varepsilon > 0$ и $K > 0$ такие, что при любом $\lambda > 0$

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_0^\lambda b(\mu)\, d\mu \geqslant \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) |b(\lambda)\lambda| - K. \tag{7.9}$$

(b) Либо $\sup\limits_{\lambda \leqslant -1} |b(\lambda)/\lambda| < \infty$, либо $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} |b(\lambda)/\lambda| = \infty$. При этом, если $b(\lambda)/\lambda \to \infty$ при $\lambda \to -\infty$, то существуют $\varepsilon > 0$ и $K > 0$ такие, что при любом $\lambda < 0$ справедливо неравенство (7.9).

Отметим, что условие 7.2 выполнено для достаточно широкого класса функций, включающих любые многочлены, функции $b(\lambda) = \pm|\lambda|^\alpha\lambda$, где $\alpha \geqslant 0$, $b(\lambda) = \pm e^\lambda$, $b(\lambda) = \pm \operatorname{ch}\lambda$ и др.

При $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ положим

$$X_{\alpha,\beta} = \{y(t,x) \in L_2(Q) : \|y\|^2_{X_{\alpha,\beta}} < \infty\} \tag{7.10}$$

где

$$\|y\|^2_{X_{\alpha,\beta}} = \int\limits_Q (\dot{y}^2(t,x)(T-t)^\alpha + |\nabla y(t,x)|^2(T-t)^\beta)dx\,dt.$$

Теорема 7.2. *Пусть для $b(\lambda) \in C(\mathbb{R})$ выполнено условие 7.2, $y_0 \in H^1_0(\Omega)$ и*

$$\int\limits_\Omega |\Phi(y_0(x))|\,dx < \infty.$$

Тогда решение $y \in X_{1,0}$ задачи (7.7), (7.8), для которого

$$\int\limits_Q (T-t)^\alpha |b(y)y|\,dx\,dt < \infty \tag{7.11}$$

с $\alpha = 0$, удовлетворяет неравенству

$$\|y\|^2_{X_{1,0}} + \int\limits_Q |b(y)y|\,dx\,dt \leqslant C(E + \|u\|^2_{L_2(Q)} + \|\gamma_T y\|^2_{L_2(\Omega)} + 1), \tag{7.12}$$

где

$$E_0 = \frac{1}{2}\|\nabla y_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_\Omega |\Phi(y_0(x))|\,dx, \quad E = E_0 + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{7.13}$$

а константа C не зависит от y. Для решения $y \in X_{2,1}$ задачи (7.7), (7.8), удовлетворяющего (7.11) с $\alpha = 1$, справедлива оценка

$$\|y\|^2_{X_{2,1}} + \int\limits_Q (T-t)|b(y)y|\,dx\,dt \leqslant C(E + \|u\|^2_{L_2(Q)} + \|y\|^2_{L_2(Q)} + 1), \tag{7.14}$$

где C не зависит от y.

Доказательство. Пусть $\psi_l(t) = (T-t)^l$, $l = 1, 2$. Умножим (7.7_1) на $\psi_l(t)\dot{y}$ скалярно в $L_2(Q)$ и проинтегрируем по частям сначала по x, а затем по t. Используя (7.13) и соотношение $\psi_l(T) = 0$, получим равенства

$$\int\limits_Q \psi_l \dot{y} u\,dx\,dt = \int\limits_Q \psi_l \left[\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla y|^2 + \frac{d}{dt}\Phi(y)\right]dxdt$$

$$= \int\limits_Q \psi_l \dot{y}^2 - \dot{\psi}_l \left[\frac{1}{2}|\nabla y|^2 + \Phi(y)\right]dx\,dt - \psi_l(0)E_0. \tag{7.15}$$

Применяя к левой части (7.15) неравенство Коши — Буняковского, после простых преобразований получим

$$\theta(y) \equiv \int\limits_Q \left[\frac{1}{2}(\psi_l \dot{y}^2 - \dot{\psi}_l |\nabla y|^2) - \dot{\psi}_l \Phi(y)\right] dx\, dt \leqslant \psi_l(0) E_0 + \frac{1}{2}\int\limits_Q \psi_l u^2 dx\, dt. \tag{7.16}$$

Пусть $y_+(t,x) = \max\{0, y(t,x)\}$ и $y_-(t,x) = \min\{0, y(t,x)\}$. Для $y \in X_{\alpha,\beta}$ справедливы равенства

$$\begin{gathered} \dot{y}_+ = \max\{0, \dot{y}\}, \quad \dot{y}_- = \min\{0, \dot{y}\}, \\ \frac{\partial y_+}{\partial x_j} = \max\left\{0, \frac{\partial y}{\partial x_j}\right\}, \quad \frac{\partial y_-}{\partial x_j} = \min\left\{\frac{\partial y}{\partial x_j}\right\}, \end{gathered} \tag{7.17}$$

понимаемые в смысле теории распределений (см. Киндерлерер, Стампаккья [1, с. 47]). Поэтому для функционала $\theta(y)$, определенного в (7.16), выполнено соотношение $\theta(y) = \theta(y_+) + \theta(y_-)$, а само неравенство (7.16) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\theta(y_-) + \frac{1}{2}\int\limits_Q (\psi_l \dot{y}_+^2 - \dot{\psi}_l |\nabla y_+|^2)\, dx\, dt \\ &\leqslant \psi_l(0) E_0 + \frac{1}{2}\int\limits_Q \psi_l u^2 dx\, dt + \int\limits_Q \dot{\psi}_l \Phi(y_+)\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Преобразуем сначала члены в (7.18), содержащие y_+. Рассмотрим случай $\lim\limits_{\lambda\to\infty} b(\lambda)/\lambda = -\infty$. Очевидно, что существует $K_1 > 0$ такое, что при любом $\lambda \geqslant 0$

$$|b(\lambda)\lambda| \leqslant -b(\lambda)\lambda + K_1. \tag{7.19}$$

Учитывая, что $\dot{\psi}_l(t) \leqslant 0$, в силу (7.9), (7.19) получим

$$\int\limits_Q \dot{\psi}_l \Phi(y_+)\, dx\, dt \leqslant \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \int\limits_Q \dot{\psi}_l b(y_+) y_+ dx\, dt + C. \tag{7.20}$$

Умножая (7.7) на $\dot{\psi}_l y_+$ скалярно в $L_2(Q)$, используя (7.17) и интегрируя по частям по x и по t, получим следующее выражение для члена, содержащего $b(y_+)y_+$:

$$\begin{aligned} &\int\limits_Q \dot{\psi}_l b(y_+) y_+ dx\, dt = \int\limits_Q \left(\dot{\psi}_l u y_+ - \frac{\dot{\psi}_l}{2}\frac{d}{dt} y_+^2 - \dot{\psi}_l |\nabla y_+|^2\right) dx\, dt \\ &= \int\limits_Q \left[\dot{\psi}_l (u y_+ - |\nabla y_+|^2) + \frac{1}{2}\ddot{\psi}_l y_+^2\right] dx\, dt \\ &- \frac{1}{2}\dot{\psi}_l(T) \|y_+(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{\dot{\psi}_l(0)}{2}\|y_+(0,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Подставляя (7.21) в (7.20), а полученное неравенство — в (7.18), находим

$$\theta(y_-) + \int\limits_Q \frac{1}{2}(\psi_l \dot{y}_+^2 - \dot{\psi}_l |\nabla y_+|^2)\, dx\, dt \leqslant \psi_l(0) E_0 + \frac{1}{2}\int\limits_Q \psi_l u^2 dx\, dt + C$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\left\{\int\limits_Q \left[\dot{\psi}_l (u y_+ - |\nabla y_+|^2) + \frac{1}{2}\ddot{\psi}_l y_+^2\right] dx\, dt\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\dot{\psi}_l(T)\|y_+(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\dot{\psi}_l(0)\|y_+(0,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}\right\}.$$

Перенесем член с $|\nabla y_+|^2$ в левую часть. После простых преобразований находим

$$\theta(y_-) + \varepsilon\int\limits_Q (\psi_l \dot{y}_+^2 - \dot{\psi}_l |\nabla y_+|^2)\, dx\, dt \leqslant C_1\Bigg(E + 1$$
$$+ \int\limits_Q (|\dot{\psi}_l| u^2 + (|\dot{\psi}_l| + \ddot{\psi}_l) y_+^2)\, dx\, dt + |\dot{\psi}_l(T)|\, \|y_+(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}\Bigg). \tag{7.22}$$

Из (7.19), (7.21) и неравенства $\dot{\psi}_l(t) \leqslant 0$, вытекает неравенство

$$\int\limits_Q (|\dot{\psi}_l|\, |b(y_+) y_+| + \dot{\psi}_l |\nabla y_+|^2)\, dx\, dt \leqslant C_2\Bigg(E + 1$$
$$+ \int\limits_Q (|\dot{\psi}_l| u^2 + (|\dot{\psi}_l| + \ddot{\psi}_l) y_+^2)\, dx\, dt + |\dot{\psi}_l(T)|\, \|y_+(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}\Bigg). \tag{7.23}$$

Так как $|b(\lambda)/\lambda| \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, для любого $\delta > 0$ существует такое K_δ, не зависящее от y_+, что

$$\int\limits_Q |\dot{\psi}_l| y_+^2 dx\, dt \leqslant \delta \int\limits_Q |\dot{\psi}_l|\, |b(y_+) y_+|\, dx\, dt + K_\delta. \tag{7.24}$$

Умножим (7.23) на $\varepsilon/2$ и сложим с (7.22). Тогда из полученных неравенств с помощью (7.24) легко выводится следующая оценка:

$$\theta(y_-) + \frac{\varepsilon}{4}\int\limits_Q [\psi_l \dot{y}_+^2 + |\dot{\psi}_l|(|\nabla y_+|^2 + |b(y_+) y_+|)]\, dx\, dt$$
$$\leqslant C_3\Bigg(E + 1 + \int\limits_Q (u^2 + \ddot{\psi}_l y_+^2)\, dx\, dt + |\dot{\psi}_l(T)|\, \|y_+(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}\Bigg). \tag{7.25}$$

Пусть $\lim\limits_{\lambda\to\infty} b(\lambda)/\lambda = \infty$. Вследствие (7.21) имеем

$$-\int\limits_Q \dot\psi_l(b(y_+)y_+ + |\nabla y_+|^2)\,dx\,dt - \frac{1}{2}\dot\psi_l(T)\|y_+(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_Q \ddot\psi_l y_+^2\,dx\,dt \leqslant -\frac{1}{2}\dot\psi_l(0)\|y_+(0,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int\limits_Q |\dot\psi_l|(u^2+y_+^2)\,dx\,dt. \tag{7.26}$$

Так как при $\lambda \geqslant 0$ $b(\lambda)\lambda \geqslant |b(\lambda)\lambda| - K$, из (7.26), (7.24) следует неравенство

$$\int\limits_Q |\dot\psi_l|(|b(y_+)y_+| + |\nabla y_+|^2)\,dx\,dt \leqslant C\Big(\|y_+(0,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_Q u^2 dx\,dt + 1\Big). \tag{7.27}$$

При $\lambda > 0$ имеем $b(\lambda) \geqslant |b(\lambda)| - K$. Следовательно, $\Phi(\lambda) = \int\limits_0^\lambda b(\mu)\,d\mu \geqslant -K_1\lambda$. Поэтому

$$\int\limits_Q \dot\psi_l\Phi(y_+)\,dx\,dt \leqslant K_1\int\limits_Q |\dot\psi_l| y_+\,dx\,dt \leqslant C\Big(\int\limits_Q |\dot\psi_l| y_+^2\,dx\,dt + 1\Big).$$

Подставляя это неравенство в (7.18) и учитывая (7.24), получаем оценку

$$\theta(y_-) + \int\limits_Q \frac{1}{2}(\psi_l\dot y_+^2 - \dot\psi_l|\nabla y_+|^2)\,dx\,dt$$
$$\leqslant C\Big(E + \int\limits_Q \psi_l u^2 dx\,dt + \delta\int\limits_Q |\dot\psi_l b(y_+)y_+|\,dx\,dt + K_\delta\Big). \tag{7.28}$$

Складывая (7.27) и (7.28), получим (7.25).

Рассмотрим, наконец, случай $\sup\limits_{\lambda\geqslant 1}|b(\lambda)/\lambda| < \infty$. В этом случае существуют $\gamma > 0$ и $K > 0$ такие, что при любом $\lambda \geqslant 0$

$$|b(\lambda)\lambda| \leqslant \gamma\lambda^2 + K. \tag{7.29}$$

Умножая (7.7_1) на $y_+(t,x)$ скалярно в $L_2(\Omega)$, после простых преобразований находим

$$\frac{1}{2}\|y_+(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_0^t \|\nabla y_+\|^2_{L_2(\Omega)} d\tau \leqslant \frac{1}{2}\|y_+(0,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}$$
$$+(\gamma + C_1)\int\limits_0^t \|y_+(\tau,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u\|^2_{L_2(\Omega)} d\tau + C.$$

Ввиду леммы Гронуолла (см. Хартман [1])

$$\|y_+\|^2_{L_2(Q)} \leqslant C(\|y_+(0,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(Q)} + 1). \tag{7.30}$$

В силу (7.29) $|\Phi(\lambda)| \leqslant \gamma_1\lambda^2 + K_1$ при $\lambda > 0$. Поэтому из (7.18), (7.30) и (7.29) вытекает (7.25).

В силу определения θ из (7.16) неравенство (7.25) можно переписать в виде

$$\theta_1(y_+) + \int\limits_Q \frac{1}{2}(\psi_l \dot{y}_-^2 - \dot{\psi}_l |\nabla y_-|^2)\, dx\, dt$$
$$\leqslant C_3\Big(E + 1 + \int\limits_Q u^2\, dx\, dt\Big) + \int\limits_Q \dot{\psi}_l \Phi(y_-)\, dx\, dt, \tag{7.31}$$

где

$$\theta_1(y_+) = \frac{\varepsilon}{4}\int\limits_Q [\psi_l \dot{y}_+^2 + |\dot{\psi}_l|(|\nabla y_+|^2 + |b(y_+)y_+|)]\, dx\, dt$$
$$- C_3\Big(\int\limits_Q \ddot{\psi}_l y_+^2\, dx\, dt + |\dot{\psi}_l(T)|\, \|y_+(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big). \tag{7.32}$$

Неравенство (7.31) аналогично неравенству (7.18). В них лишь y_+ и y_- поменялись местами. Проводя с (7.31) те же рассуждения, примененные к y_-, какие использовались при преобразованиях неравенства (7.18) применительно к y_+, получим следующий аналог неравенства (7.25):

$$\theta_1(y_+) + \theta_1(y_-) \leqslant C\Big(E + 1 + \int\limits_Q u^2 dx\, dt\Big).$$

Это неравенство ввиду (7.32) и свойств y_+, y_- легко переписать в виде

$$\int\limits_Q [\psi_l \dot{y}^2 + |\dot{\psi}_l|(|\nabla y|^2 + |b(y)y|)]\, dx\, dt$$
$$\leqslant C\Big(E + 1 + \int\limits_Q (u^2 + \ddot{\psi}_l y^2)\, dx\, dt + |\dot{\psi}_l(T)|\, \|y(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big). \tag{7.33}$$

Из (7.33) при $l = 1$ следует (7.12), а при $l = 2$ — (7.14). □

Замечание 7.1. Легко видеть, что утверждение теоремы 7.2 остается справедливым, когда (7.8) заменяется условием $\gamma_\Sigma \partial_n y = 0$, где ∂_n — дифференцирование по нормали к боковой поверхности Σ цилиндра Q.

Замечание 7.2. Оценки (7.12), (7.14) доказаны, в частности, для решений уравнения

$$\dot{y} - \Delta y - y^3 = u. \tag{7.34}$$

Известно (см. Фуджита [1]; Левайн [1]; Калантаров, Ладыженская [1]; Лионс [3]), что при некоторых правых частях и начальных условиях решение $y(t,x)$ этого уравнения при конечных t обращается в бесконечность в соответствующей норме (явление коллапса), и поэтому может не сущест-

вовать на всем временном отрезке $[0,T]$. Таким образом, оценки (7.12), (7.14) не гарантируют разрешимости краевой задачи (7.7), (7.8). Однако с помощью этих оценок удается установить разрешимость ряда задач оптимального управления системой (7.7), (7.8), в которых функционал стоимости задается с помощью L_2-норм. Это будет установлено в следующем пункте.

7.3. Сингулярные экстремальные задачи со слабым функционалом стоимости. Рассмотрим задачу

$$J(y,u) = \|y-w\|^2_{L_2(Q)} + N\|u-f\|^2_{L_2(Q)} \to \inf, \tag{7.35}$$

$$\dot{y} - \Delta y + b(y) = u, \quad \gamma_0 y = y_0, \quad \gamma_\Sigma y = 0, \tag{7.36}$$

$$u \in U_\partial, \tag{7.37}$$

где $w \in L_2(Q)$, $f \in L_2(Q)$, $y_0 \in H^1_0(\Omega)$ — заданные функции, причем $\|\Phi(y_0)\|_{L_1(\Omega)} < \infty$ (Φ — функция из (7.9)). Предполагается, что U_∂ — выпуклое замкнутое подмножество из $L_2(Q)$, а функция $b(\lambda) \in C(\mathbb{R})$ из (7.36_1) удовлетворяет условию 7.2. Предполагается выполненным следующее условие.

Условие 7.3 (нетривиальность). Существует пара $(y,u) \in X_{2,1} \times U_\partial$, удовлетворяющая (7.36), причем

$$\int\limits_Q (T-t)|b(y)y|\,dx\,dt < \infty, \tag{7.38}$$

где $X_{2,1}$ — пространство (7.10).

Теорема 7.3. *Существует решение $(\widehat{y},\widehat{u}) \in X_{2,1} \times L_2(Q)$ задачи* (7.35)–(7.37), *и для $\widehat{y}$ конечен интеграл из* (7.38).

Доказательство. Множеством $\mathfrak{A}$ допустимых элементов называется множество пар $(y,u) \in X_{2,1} \times U_\partial$, удовлетворяющих соотношениям (7.36), (7.38). В силу условия 7.3 $\mathfrak{A} \neq \varnothing$. Поэтому существует последовательность $(y_n,u_n) \in \mathfrak{A}$, минимизирующая функционал J из (7.35). Из (7.35) и (7.14) следует, что

$$\|y_n\|_{X_{2,1}} + \|y_n\|_{L_2(Q)} + \int\limits_Q (T-t)|b(y_n)y_n|\,dx\,dt + \|u_n\|_{L_2(Q)} \leqslant C, \tag{7.39}$$

где C не зависит от n. Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, можно считать, что

$$y_n \to \widehat{y} \text{ слабо в } X_{2,1} \text{ и в } L_2(Q), \quad u_n \to \widehat{u} \text{ слабо в } L_2(Q). \tag{7.40}$$

Справедлива следующая лемма, которая будет доказана после доказательства теоремы 7.3.

Лемма 7.1. *Для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(Q)$*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_Q b(y_n)\varphi dx\,dt = \int\limits_Q b(\widehat{y})\varphi dx\,dt. \tag{7.41}$$

Так как выпуклое замкнутое множество секвенциально слабо замкнуто, в силу (7.40_2) имеем $\widehat{u} \in U_\partial$. Подставляя (y_n, u_n) в (7.36) и переходя к пределу при $n \to \infty$ с помощью (7.40_1) и леммы 7.1 получаем, что $(\widehat{y}, \widehat{u})$ удовлетворяет соотношениям (7.36). Поэтому $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in \mathfrak{A}$. Так как (y_n, u_n) минимизирует функционал J из (7.35), в силу (7.40) $(\widehat{y}, \widehat{u})$ есть решение задачи (7.35)–(7.37). □

Доказательство леммы 7.1. Так как

$$\|(T-t)y\|^2_{H^1(Q)} \leqslant C(\|y\|^2_{X_{2,1}} + \|y\|^2_{L_2(Q)}),$$

в силу (7.40_1) $(T-t)y_n \to (T-t)\widehat{y}$ слабо в $H^1(Q)$, а, следовательно, и сильно в $L_2(Q)$. Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, можно считать, что $y_n(t,x) \to \widehat{y}(t,x)$ при почти всех $(t,x) \in Q$. В силу леммы Фату и (7.39) имеем

$$\int\limits_Q (T-t)|b(\widehat{y})\widehat{y}|\,dx\,dt \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_Q (T-t)|b(y_n)y_n|\,dx\,dt \leqslant C < \infty. \tag{7.42}$$

Положим $y_{n+} = \max\{0, y_n\}$, $y_{n-} = \min\{0, y_n\}$ и аналогично определим $\widehat{y}_+$, $\widehat{y}_-$. Для доказательства леммы 7.1 достаточно доказать соотношение (7.41), в котором y_n, $\widehat{y}$ заменены на y_{n+}, $\widehat{y}_+$, а также на y_{n-}, $\widehat{y}_-$. Если $\sup\limits_{\lambda \geqslant 0} |b(\lambda)/(1+\lambda)| < \infty$, то (7.41) с y_{n+}, $\widehat{y}_+$ следует из сходимости $y_{n+} \to \widehat{y}_+$ в $L_2(Q)$. Пусть $\lim\limits_{\lambda\to\infty} |b(\lambda)/\lambda| = \infty$. Наименьший элемент $\lambda_R = \min\{\lambda : \lambda \in \Lambda_R\}$ числового множества $\Lambda_R = \{\lambda > 0 : |b(\lambda)| > R\}$ удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{R\to\infty} \lambda_R = \infty$. При $\lambda > 0$ положим

$$b_{R,1}(\lambda) = \begin{cases} b(\lambda), & \lambda \notin \Lambda_R, \\ 0, & \lambda \in \Lambda_R, \end{cases} \quad b_{R,2}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \notin \Lambda_R, \\ b(\lambda), & \lambda \in \Lambda_R. \end{cases}$$

Очевидно, что $b_{R,1}(\lambda) + b_{R,2}(\lambda) = b(\lambda)$. Поэтому

$$\left|\int\limits_Q (b(y_{n+}) - b(\widehat{y}_+))\varphi dx\,dt\right| \leqslant C \int\limits_Q |b_{R,1}(y_{n+}) - b_{R,1}(\widehat{y}_+)|\,dx\,dt$$
$$+ C_1 \int\limits_Q (T-t)(|b_{R,2}(y_{n+})| + |b_{R,2}(\widehat{y}_+)|)\,dx\,dt. \tag{7.43}$$

В силу (7.39), (7.42)

$$\lambda_R \int\limits_Q (T-t)(|b_{R,2}(y_{n+})| + |b_{R,2}(\widehat{y}_+)|)\,dx\,dt$$
$$\leqslant \int\limits_Q (T-t)(|b(y_{n+})y_{n+}| + |b(\widehat{y}_+)\widehat{y}_+|)\,dx\,dt \leqslant 2C, \tag{7.44}$$

а вследствие теоремы Лебега при любом R

$$\int |b_{R,1}(y_{n+}) - b_{R,1}(\widehat{y}_+)|\, dx\, dt \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{7.45}$$

Из (7.43)–(7.44) следует (7.41) для y_{n+}, $\widehat{y}_+$. Соотношение (7.41) для y_{n-}, $\widehat{y}_-$ доказывается аналогично. □

Рассмотрим задачу с финальным наблюдением

$$J(y,u) = \|\gamma_T y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + N\|u - f\|^2_{L_2(Q)} \to \inf, \tag{7.46}$$

где $w \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q)$ — заданные функции, а искомые функции y, u удовлетворяют соотношениям (7.36), (7.37). Предполагается выполненным следующее условие.

Условие 7.4. Существует пара $(y,u) \in X_{1,0} \times U_\partial$, удовлетворяющая (7.36), (7.37), причем

$$\int\limits_Q |b(y)y|\, dx\, dt < \infty. \tag{7.47}$$

Теорема 7.4. *Пусть в* (7.36) $y_0 \in H^1_0(\Omega)$, $\|\Phi(y_0)\|_{L_1(\Omega)} < \infty$, $b(\lambda) \in C(\mathbb{R})$ *удовлетворяет условию* 7.2. *Тогда существует решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in X_{1,0} \times L_2(Q)$ *задачи* (7.46), (7.36), (7.37), *причем для* $\widehat{y}$ *конечен интеграл* (7.47).

Доказательство. Множество допустимых элементов определяется формулой

$$\mathfrak{A} = \{(y,u) \in X_{1,0} \times U_\partial : (y,u) \textit{удовлетворяют } (7.36), (7.37)\}.$$

Умножая (7.36_1) на y скалярно в $L_2(\Omega)$, после простых преобразований получим, что для любого $t \in (0,T]$

$$\|y(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} = -2\int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\nabla y|^2 dx\, d\tau + \|y_0\|^2_{L_2(\Omega)} - 2\int\limits_0^t \int\limits_\Omega b(y)y\, dx\, d\tau. \tag{7.48}$$

Умножив (7.36_1) на $\psi \in C^2(\overline{\Omega}) \cap H^1_0(\Omega)$, после простых преобразований выводим формулу

$$\int\limits_\Omega y(t_1,x)\psi(x)\, dx - \int\limits_\Omega y(t_2,x)\psi(x)\, dx = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega (\nabla y \cdot \nabla\psi + b(y)\psi)\, dx\, dt. \tag{7.49}$$

Из (7.48), (7.49) следует, что если $(y,u) \in \mathfrak{A}$, то $y \in C(0,T; L^\omega_2(\Omega))$, где $L^\omega_2(\Omega)$ — пространство L_2, снабженное топологией слабой сходимости. Поэтому $J(y,u) < \infty$, где J — функционал (7.46). С учетом этого обстоятельства доказательство теоремы 7.4 проводится аналогично доказательству теоремы 7.3. □

§ 8. Гиперболические экстремальные задачи

Этот параграф посвящен исследованию задач оптимального управления системами, которые описываются краевыми задачами для гиперболических уравнений. Эти задачи имеют специфические черты по сравнению с эллиптическими и параболическими задачами, что отражается и на исследовании соответствующих экстремальных задач. Однако, как и в параболическом случае, для задач оптимального управления сингулярными полулинейными гиперболическими уравнениями с функционалом стоимости, определенным с помощью L_2-норм, также удается доказать существование решений.

8.1. Распределенные управление и наблюдение. Пусть, как и раньше, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^\infty$, $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$. В цилиндре Q рассматривается экстремальная задача

$$\frac{1}{\alpha}\|y-w\|^\alpha_{L_\alpha(Q)} + \frac{N}{2}\|u-f\|^2_{L_2(Q)} \to \inf, \tag{8.1}$$

$$\ddot{y} - \Delta y + b(y) = u, \tag{8.2}$$

$$\gamma_0 y = y_0, \quad \gamma_0 \dot{y} = y_1, \tag{8.3}$$

$$\gamma_\Sigma y = 0, \tag{8.4}$$

$$u \in U_\partial, \tag{8.5}$$

где U_∂ — выпуклое замкнутое подмножество $L_2(Q)$, $b(y) \in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет оценке (6.1), причем показатели $\varkappa$ из (6.1) и α из (8.1) связаны соотношением

$$\alpha > \varkappa > 1. \tag{8.6}$$

Предполагается, что $w \in L_\alpha(Q)$, $f \in L_2(Q)$, $y_0 \in H^1_0(\Omega)$, $y_1 \in L_2(\Omega)$ — заданные функции, $N > 0$. Положим

$$r = \min\{2, \alpha/\varkappa\} \tag{8.7}$$

и введем пространство

$$Z = \{y \in L_\alpha(Q) : \ddot{y} - \Delta y \in L_r(Q),\ \gamma_\Sigma y = 0\} \tag{8.8}$$

с нормой

$$\|y\|_Z = \|y\|_{L_\alpha(Q)} + \|\ddot{y} - \Delta y\|_{L_r(Q)}. \tag{8.9}$$

Для обоснования корректности определения (8.8), докажем

Предложение 8.1. *На пространстве $Z_1 = \{y \in L_\alpha(Q) : \ddot{y} - \Delta y \in L_r(Q)\}$ определены оператор γ_Σ сужения функции $y(t,x)$, $(t,x) \in Q$, на боковую поверхность Σ и оператор $\gamma_\Sigma\partial_\nu$ сужения нормальной производной к Σ, причем операторы*

$$\gamma_\Sigma : Z_1 \to B^{-1/r}_r(\partial\Omega; W^{-2}_r(0,T)), \quad \gamma_\Sigma\partial_\nu : Z_1 \to B^{-1-1/r}_r(\partial\Omega; W^{-2}_r(0,T)) \tag{8.10}$$

непрерывны.

Доказательство. Напомним, что обобщенная функция $u(t,x)$ принадлежит пространству $B_r^{-1/r}(\partial\Omega; W_r^{-2}(0,T))$, если для любой пробной функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^2_{r/(r-1)}(0,T)$ обобщенная функция

$$u_\varphi(x) = \int\limits_0^T u(t,x)\varphi(t)\,dt, \quad x \in \partial,\Omega$$

принадлежит пространству Бесова $B_r^{-1/r}(\partial\Omega)$ (см. (1.7)), причем интеграл понимается в смысле теории обобщенных функций, т. е. как соотношение двойственности между $\overset{\circ}{W}{}^2_{r/(r-1)}(0,T)$ и $W_r^{-2}(0,T)$.

Если $y \in Z_1$, то $y \in L_\alpha(Q)$ и $\ddot{y} - \Delta y \equiv h \in L_r(Q)$. Из этих соотношений и (8.6), (8.7) следует, что

$$y \in L_r(\Omega; L_r(0,T)), \quad -\Delta y = h - \ddot{y} \in L_r(\Omega; W_r^{-2}(0,T)).$$

Поэтому с помощью теоремы 1.7 на пространстве Z_1 определяются операторы γ_Σ, $\gamma_\Sigma\partial_\nu$, и они непрерывно действуют в пространствах (8.10). □

В силу предложения 8.1 для функций $y \in Z_1$ имеет смысл равенство $\gamma_\Sigma y = 0$. Поэтому определение (8.8) корректно.

В дальнейшем решение (y,u) задачи (8.1)–(8.5) будем искать в подмножестве пространства $Z_1 \times L_2(Q)$. Поэтому предложение 8.1 придает смысл равенству (8.4). Если $y \in L_\alpha(Q)$, $\ddot{y} - \Delta y \equiv h \in L_r(Q)$, то $\ddot{y} = h + \Delta y \in L_r(0,T; W_r^{-2}(\Omega))$. Поэтому определены и непрерывны операторы

$$\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} : Z_1 \to W_r^{-2}(\Omega), \quad \gamma_0 : Z_1 \to W_r^{-2}(\Omega). \tag{8.11}$$

В силу (8.11) имеют смысл также соотношения (8.3).

Пусть $A = -\Delta$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n \leqslant \dots$ — собственные значения, $\{e_j\}$ — собственные функции оператора A, рассматриваемого в $L_2(\Omega)$. Введем равенства

$$\mathcal{H}^s = \left\{ v(x) = \sum_{j=1}^\infty c_j e_j \,:\, \|v\|^2_{\mathcal{H}^s} = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^s |c_j|^2 < \infty \right\},\ s \in \mathbb{R}. \tag{8.12}$$

Известно (см., например, Лионс, Мадженес [2]), что $\mathcal{H}^0 = L_2(\Omega)$, $\mathcal{H}^1 = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{H}^2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, и для $\mathcal{H}^s$ справедлива следующая теорема вложения Соболева: $L_q(\Omega) \supset \mathcal{H}^s$ при $d(1/2 - 1/q) \leqslant s$. Введем пространство

$$Y_1 = \{y(t,x) \in L_{r/(r-1)}(0,T; \mathcal{H}^{1-s}) \cap Z \,:\, \dot{y} \in L_{r/(r-1)}(0,T; \mathcal{H}^{-s})\}, \tag{8.13}$$

где r определено в (8.7), $s = d(1/r - 1/2)$, Z — пространство (8.8).

Наложим на задачу (8.1)–(8.5) условие нетривиальности.

Условие 8.1 (нетривиальность). Существует пара $(y,u) \in Y_1 \times U_\partial$, удовлетворяющая (8.2)–(8.5).

Отметим, что при $U_\partial = L_2(Q)$ и, например, $y_0, y_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, условие 8.1 выполнено. Действительно, можно выбрать функцию $y \in C^\infty(Q)$ такую, что $\gamma_\Sigma y = 0$. Тогда пара $(y, u) \equiv (y, \ddot{y} - \Delta y + b(y))$ удовлетворяет соотношениям (8.2)–(8.5). Если $U_\partial \neq L_2(Q)$, то гарантировать выполнение условия 8.1 можно, накладывая некоторые условия на U_∂. Например, если $y_0 = y_1 \equiv 0$, то включение $b(0) \in U_\partial$ гарантирует выполнение условия 8.1, так как пара $(y, u) = (0, b(0))$ тогда удовлетворяет (8.2)–(8.4). Если на $U_\partial \neq \varnothing$ не накладывать никаких дополнительных условий, то гарантировать выполнение условия 8.1 можно, наложив дополнительные условия на $b(y)$ и применяя известные теоремы о разрешимости нелинейных гиперболических краевых задач (см., например, Лионс [1]).

Для доказательства разрешимости задачи (8.1)–(8.5) нам понадобится одна известная лемма о решениях краевой задачи для волнового уравнения (Лионс [3, с. 170])

$$\ddot{y}(t,x) - \Delta y(t,x) = F(t,x), \quad \gamma_\Sigma y = 0, \quad \gamma_0 y = y_0, \quad \gamma_0 \dot{y} = y_1. \tag{8.14}$$

Лемма 8.1. *Пусть $y_0 \in \mathcal{H}^{1-s}(\Omega)$, $y_1 \in \mathcal{H}^{-s}(\Omega)$, $F \in L_r(Q)$ и $y(t,x) \in Y_1$ — решение задачи (8.14), где Y_1 — пространство (8.13). Тогда $y(t,x)$ удовлетворяет оценке*

$$\|y\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{H}^{1-s})} + \|\dot{y}\|_{L_\infty(0,T;\mathcal{H}^{-s})} \leqslant \gamma(\|y_0\|_{\mathcal{H}^{1-s}} + \|y_1\|_{\mathcal{H}^{-s}} + \|F\|_{L_r(Q)}), \tag{8.15}$$

где $\gamma(\lambda)$ непрерывная положительная монотонно растущая функция, определенная на $\mathbb{R}_+ \equiv \{\lambda \geqslant 0\}$.

Доказательство. Так как $s = d(1/r - 1/2) = d(1/2 - 1/r')$, где $1/r' = 1 - 1/r$, из вложения $\mathcal{H}^s \subset L_{r'}(\Omega)$ следует $L_r(\Omega) \subset \mathcal{H}^{-s}$. Поэтому $F \in L_r(0,T;\mathcal{H}^{-s})$. Умножая первое уравнение из (8.14) скалярно в $\mathcal{H}^0 = L_2(\Omega)$ на $A^{-s}\dot{y}$ и интегрируя по t, получим

$$\int_0^t (\ddot{y}(\tau,\cdot) - \Delta y(\tau,\cdot), \dot{y})_{\mathcal{H}^{-s}}\, d\tau = \int_0^t (F(\tau,\cdot), \dot{y})_{\mathcal{H}^{-s}}\, d\tau. \tag{8.16}$$

Пусть $P_k : \mathcal{H}^0 \to [e_1, \ldots, e_k]$ — ортопроектор в $\mathcal{H}^0$ на подпространство $[e_1, \ldots, e_k]$, порожденное первыми k собственными векторами оператора A. Так как $P_k y$ определяется с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных после применения к (8.14) оператора P_k, имеем $P_k y \in W_r^2(0,T;[e_1, \ldots, e_k])$. Поэтому

$$\int_0^t (\ddot{y} - \Delta y, P_k \dot{y})_{\mathcal{H}^{-s}}\, d\tau = \int_0^t \frac{1}{2}\partial_t(\|P_k\dot{y}\|^2_{\mathcal{H}^{-s}} + \|P_k y\|^2_{\mathcal{H}^{1-s}})\, d\tau$$
$$= \frac{1}{2}(\|P_k\dot{y}(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{H}^{-s}} + \|P_k y(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{H}^{1-s}} - \|P_k y_1\|^2_{\mathcal{H}^{-s}} - \|P_k y_0\|^2_{\mathcal{H}^{1-s}}).$$

Так как левая часть первого равенства и последние два члена правой части второго равенства имеют предел при $k \to \infty$, в силу теоремы Беппо Леви имеют предел и первые два члена второго равенства. Переходя в этом

равенстве к пределу при $k \to \infty$ и используя (8.16), получим, что при любом $t \in [0, T]$

$$\frac{1}{2}(\|\dot{y}(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{H}^{-s}} + \|y(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{H}^{1-s}})$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(\|y_1\|^2_{\mathcal{H}^{-s}} + \|y_0\|^2_{\mathcal{H}^{1-s}}) + \int\limits_0^t (\ddot{y} - \Delta y, \dot{y})_{\mathcal{H}^{-s}}\, d\tau$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(\|y_1\|^2_{\mathcal{H}^{-s}} + \|y_0\|^2_{\mathcal{H}^{1-s}}) + \int\limits_0^t \|F(\tau,\cdot)\|_{\mathcal{H}^{-s}} \|\dot{y}\|^{1/r} \|\dot{y}\|^{1/r'},$$

так как $1/r + 1/r' = 1$. Из этого неравенства и непрерывности вложения $L_r(\Omega) \subset \mathcal{H}^{-s}$ следует, что

$$\|\dot{y}(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{H}^{-s}} + \|y(t,\cdot)\|^2_{\mathcal{H}^{1-s}}$$
$$\leqslant \|y_1\|^2_{\mathcal{H}^{-s}} + \|y_0\|^2_{\mathcal{H}^{1-s}} + \int\limits_0^t \left(\frac{c}{r}\|F(\tau,\cdot)\|^r_{L_r(\Omega)} + \frac{1}{r'}\right)\|\dot{y}\|\, d\tau. \tag{8.17}$$

Положив $z(t) = \|\dot{y}(t,\cdot)\|^r_{\mathcal{H}^{-s}}$, из (8.17) получим, что при некотором $\beta(t) \leqslant 0$

$$\dot{z}(t) = \left(\frac{c}{r}\|F(t,\cdot)\|^r_{L_r(\Omega)} + \frac{1}{r'} + \beta(t)\right)\sqrt{z(t)}.$$

Решим это уравнение, отбросив в полученной формуле $\beta(t)$. Используя после этого (8.17), получим (8.15). □

Докажем теорему о разрешимости задачи (8.1)–(8.5).

Теорема 8.1. *Пусть, помимо* (8.6), *выполнено условие*

$$\alpha > \frac{2d\varkappa}{d+2}. \tag{8.18}$$

Тогда задача (8.1)–(8.5) *имеет решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times L_2(Q)$, *где* Y_1 — *пространство* (8.13).

Доказательство. Положим $Y = L_2(Q)$, $Y_{-1} = L_\varkappa(Q)$, Y_1 — пространство (8.13), $U = L_2(Q)$, $V = L_r(Q) \times W^{-2}_\alpha(\Omega) \times W^{-2}_\alpha(\Omega)$, где r — число (8.7), $L(y,u) = (\dot{y} - \Delta y - u, \gamma_0 y, \gamma_0 \dot{y})$, $F(y) = (b(y), -y_0, -y_1)$. Если $(y,u) \in Y_1 \times U$ удовлетворяют (8.2)–(8.4), то в силу леммы 8.1

$$\|y\|_{Y_1} + \|u\|_U \equiv \|y\|_{L_\alpha(Q)} + \|\ddot{y} - \Delta y\|_{L_r(Q)} + \|\dot{y}\|_{L_{r/(r-1)}(0,T;\mathcal{H}^{-s})}$$
$$+ \|y\|_{L_{r/(r-1)}(0,T;\mathcal{H}^{1-s})} + \|u\|_{L_2(Q)} \leqslant \|y\|_{L_\alpha(Q)} + C\|u\|_{L_2(Q)}$$
$$+ \gamma(\|y_0\|_{H^1_0(\Omega)} + \|y_1\|_{L_2(\Omega)} + \|b(y)\|_{L_r(Q)} + \|u\|_{L_2(Q)})$$
$$\leqslant \|y\|_{L_\alpha(Q)} + C\|u\|_{L_2(Q)} + \gamma(C_1 + C_2(\|y\|_{L_\alpha(Q)} + \|u\|_{L_2(Q)})),$$

откуда следует справедливость условия 2.4. В силу (8.13) непрерывно вложение

$$Y_1 \subset Z_2 \equiv \{y \in L_{r/(r-1)}(0,T;\mathcal{H}^{1-s}) : \dot{y} \in L_{r/(r-1)}(0,T;\mathcal{H}^{-s})\}, \tag{8.19}$$

где $s = d(1/r - 1/2)$. В силу (8.18), (8.7) имеем $s \in [0, 1)$. Согласно лемме 1.2 Z_2 вполне непрерывно вкладывается в $L_2(Q)$. Вследствие (8.13), (8.8) вложение $Y_1 \subset Z_2 \cap L_\alpha(Q)$ непрерывно. Поэтому в силу (8.6) и леммы 6.1 вложение $Y_1 \subset L_\varkappa(Q)$ вполне непрерывно, что доказывает (2.21). Проверка остальных предположений теоремы 2.4 очевидна. □

Отметим, что при $d = 1$ теорема 8.1 справедлива даже при $\alpha = \varkappa$ (см. Лионс [3, с. 169]). При $d = 2$ неравенство (8.18) эквивалентно первому из неравенств (8.6). При $d \geqslant 3$ неравенство (8.18) более ограничительно, чем (8.6).

8.2. Априорные оценки. Ограничение на α в теореме 8.1 можно значительно ослабить, если наложить на нелинейный член $b(\lambda)$ из уравнения 8.1 одно не очень ограничительное условие. Это условие позволяет получить априорные оценки для функции y, удовлетворяющей соотношениям (8.2)–(8.4). Настоящий пункт посвящен выводу этих оценок.

Итак, будем предполагать, что нелинейный член $b(\lambda)$ в задаче (8.1)–(8.4) удовлетворяет следующему условию.

Условие 8.2. $b(\lambda) \in C(\mathbb{R})$,

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \left| \frac{b(\lambda)}{\lambda} \right| = \infty,$$

и существуют $\varepsilon > 0$ и $K > 0$ такие, что при любом $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\lambda b(\mu)\, d\mu \geqslant -(1/2 - \varepsilon)|b(\lambda)\lambda| - K. \tag{8.20}$$

Условию 8.2 удовлетворяет любой многочлен степени не меньше 2, функции $b(\lambda) = \pm|\lambda|^\alpha \lambda$, где $\alpha > 0$, $b(\lambda) = \pm \operatorname{ch} \lambda$, $b(\lambda) = \pm \operatorname{sh} \lambda$ и др.

Положим

$$L_{2,\alpha}(Q) = \left\{ u(t,x) : \|u\|^2_{L_{2,\alpha}} = \int_Q |T - t|^\alpha |u(t,x)|^2 dx\, dt < \infty \right\}. \tag{8.21}$$

Будем предполагать, что пара $(y, u) \in X_{\alpha,\alpha} \times L_{2,\alpha}(Q)$ удовлетворяет соотношениям (8.2)–(8.4), причем

$$\int_Q |T - t|^\alpha |b(y)y|\, dx\, dt < \infty. \tag{8.22}$$

Напомним, что $X_{\alpha,\alpha}$ — пространство (7.10). Величина α будет указана ниже, в формулировке теоремы.

Теорема 8.2. *Пусть $b(\lambda)$ удовлетворяет условию 8.2, $y_0 \in H^1_0(\Omega)$, $y_1 \in L_2(\Omega)$, причем*

$$\int_\Omega |\Phi(y_0)|\, dx < \infty. \tag{8.23}$$

(a) *Если для пары* $(y,u) \in X_{0,0} \times L_{2,0}(Q)$ *выполнены* (8.2)–(8.4) *и* (8.22), $\alpha = 0$ *и* $\|\dot{y}(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} < \infty$, *то*

$$\|y\|^2_{X_{0,0}} + \int\limits_0^T \|b(y)y\|_{L_1(\Omega)} dt \leqslant C(E_0 + \|u\|^2_{L_2(Q)} + \|\dot{y}(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + 1), \tag{8.24}$$

где

$$E_0 = \|y_0\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|y_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_\Omega |\Phi(y_0)|\, dx. \tag{8.25}$$

(b) *Если* $(y,u) \in X_{1,1} \times L_{2,1}(Q)$, *справедливы* (8.2)–(8.4), (8.22), $\alpha = 1$ *и* $\|y(T,\cdot)\|^2_{H^1_0(\Omega)} < \infty$, *то*

$$\|y\|^2_{X_{1,1}} + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (T-t)|b(y)y|\, dx\, dt \leqslant C(E_0 + \|u\|^2_{L_{2,1}(Q)} + \|y(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + 1). \tag{8.26}$$

(c) *Если* $(y,u) \in X_{2,2} \times L_{2,2}(Q)$, *удовлетворяют* (8.2)–(8.4), (8.22), $\alpha = 2$, *то*

$$\|y\|^2_{X_{2,2}} + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (T-t)^2|b(y)y|\, dx\, dt \leqslant C(E_0 + \|u\|^2_{L_{2,2}(Q)} + \|y\|^2_{L_2(Q)} + 1). \tag{8.27}$$

Доказательство. Пусть $\psi_l(t) = (T-t)^l$, где $l = 1,2,3$. Умножая (8.2) скалярно в $L_2(Q)$ на $\psi_l(t)\dot{y}$ и производя простые преобразования, получим равенство

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T (u,\dot{y})\psi_l(t)\, dt = \int\limits_0^T \psi_l(t)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{y}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla y\|^2 + \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \Phi(y)\, dx\right) dt \\
&= \psi_l(T)\left(\frac{\|\dot{y}(T,\cdot)\|^2}{2} + \frac{\|\nabla y(T,\cdot)\|^2}{2} + \int\limits_\Omega \Phi(y(T,\cdot))\, dx\right) \\
&- \psi_l(0)\left(\frac{\|y_1\|^2}{2} + \frac{\|\nabla y_0\|^2}{2} + \int\limits_\Omega \Phi(y_0)\, dx\right) \\
&- \int\limits_0^T \dot{\psi}_l(t)\left(\frac{\|\dot{y}\|^2}{2} + \frac{\|\nabla y\|^2}{2} + \int\limits_\Omega \Phi(y)\, dx\right) dt,
\end{aligned}$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ и $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L_2(\Omega)}$. Из этого равенства, учитывая (8.25) и соотношение $\psi_l(T) = 0$, получим

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int\limits_0^T \dot\psi_l(t)(\|\dot y\|^2 + \|\nabla y\|^2)\,dt \\
&\leqslant \int\limits_0^T (u,\dot y)\psi_l\,dt + \psi_l(0)E_0 + \int\limits_0^T \dot\psi_l(t)\int\limits_\Omega \Phi(y)\,dx\,dt. \qquad (8.28)
\end{aligned}
$$

Положим $y_+ = \max\{0, y\}$ и $y_- = \min\{0, y\}$. Умножим (8.2) скалярно в $L_2(Q)$ на $\dot\psi_l y_\pm$ (т. е. на y_+ или на y_-). Делая простые преобразования и учитывая, что при почти всех (t,x) имеем $b(y)y_\pm = b(y_\pm)y_\pm$, $(\nabla y, \nabla y_\pm) = \|\nabla y_\pm\|^2$, $(\dot y, \dot y_\pm) = \|\dot y_\pm\|^2$, получим следующую цепочку равенств:

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_0^T \dot\psi_l(b(y_\pm)y_\pm)\,dt = \int\limits_0^T \dot\psi_l(\|\nabla y_\pm\|^2 - (u, y_\pm))\,dt + \dot\psi_l(T)(\dot y(T), y_\pm(T)) \\
&-\dot\psi_l(0)(\dot y(0), y_\pm(0)) - \int\limits_0^T \left[\dot\psi_l\|\dot y_\pm\|^2 + \frac{\ddot\psi_l}{2}\frac{d}{dt}\|y_\pm\|^2\right] dt \\
&= \int\limits_0^T \left[\dot\psi_l(\|\nabla y_\pm\|^2 - (u, y_\pm) - \|\dot y_\pm\|^2) + \frac{\dddot\psi_l}{2}\|y_\pm\|^2\right] dt + \dot\psi_l(T)(\dot y(T), y_\pm(T)) \\
&-\dot\psi_l(0)(\dot y(0), y_\pm(0)) - \frac{\ddot\psi_l(T)}{2}\|y_\pm(T)\|^2 + \frac{\ddot\psi_l(0)}{2}\|y_\pm(0)\|^2. \qquad (8.29)
\end{aligned}
$$

В силу непрерывности $b(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{R}$ и условия

$$
\lim_{\lambda\to\pm\infty}\left|\frac{b(\lambda)}{\lambda}\right| = \infty
$$

существует константа $K > 0$ такая, что при всех $(t,x) \in Q$

$$
\begin{aligned}
&|b(y_+)y_+| \leqslant (\operatorname{sign} b(\infty))b(y_+)y_+ + K, \\
&|b(y_-)y_-| \leqslant -(\operatorname{sign} b(-\infty))b(y_-)y_- + K.
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega |b(y)y|\,dx \leqslant \int\limits_\Omega (|b(y_+)y_+| + |b(y_-)y_-|)\,dx \\
&\leqslant \int\limits_\Omega (\operatorname{sign} b(\infty))b(y_+)y_+\,dx - \int\limits_\Omega (\operatorname{sign} b(-\infty))b(y_-)y_-\,dx + 2K|\Omega|. \qquad (8.30)
\end{aligned}
$$

Из (8.30), (8.29) следует, что

$$\int_0^T |\dot\psi_l| \int_\Omega |b(y)y|\,dx\,dt \leqslant \int_0^T \left(|\dot\psi_l|(\|\nabla y\|^2 + \|\dot y\|^2 + |(u,y)|) + \frac{|\dddot\psi_l|}{2}\|y\|^2 \right) dt$$
$$+ |\dot\psi_l(T)(\dot y(T,\cdot), y(T,\cdot))| + \frac{|\ddot\psi_l(T)|}{2}\|y(T,\cdot)\|^2 + CE_0 + K_1. \tag{8.31}$$

Подставляя (8.20) в (8.28) и учитывая (8.31), получим неравенство

$$\frac{1}{2}\int_0^T |\dot\psi_l|(\|\dot y\|^2 + \|\nabla y\|^2)\,dt \leqslant \int_0^T (u,\dot y)\psi_l\,dt + C_1E_0$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\int_0^T \left(|\dot\psi_l|(\|\nabla y\|^2 + \|\dot y\|^2 + |(u,y)|) + \frac{|\dddot\psi_l|}{2}\|y\|^2 \right) dt$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\left(|\dot\psi_l(T)(\dot y(T), y(T))| + \frac{|\ddot\psi_l(T)|}{2}\|y(T,\cdot)\|^2 \right) + K_2$$
$$\leqslant \delta\int_0^T |\dot\psi_l|\,\|y\|^2 dt + C_{\varepsilon,\delta}\int_0^T |\dot\psi_l|\,\|u\|^2 dt + \delta\int_0^T |\psi_l|\|\dot y\|^2 dt$$
$$+ C_{\varepsilon,\delta}\int_0^T |\psi_l|\|u\|^2 dt + C_1E_0$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\int_0^T \left(|\dot\psi_l|(\|\nabla y\|^2 + \|\dot y\|^2) + \frac{|\dddot\psi_l|}{2}\|y\|^2 \right) dt$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\left(|\dot\psi_l(T)(\dot y(T), y(T))| + \frac{|\ddot\psi_l(T)|}{2}\|y(T,\cdot)\|^2 \right) + K_2. \tag{8.32}$$

Применяя к первому члену правой части (8.32) неравенство Пуанкаре $\|y\|^2 \leqslant C\|\nabla y\|^2$ и выбирая δ достаточно малым, получим

$$\int_0^T |\dot\psi_l|(\|\dot y\|^2 + \|\nabla y\|^2)\,dt \leqslant C\Bigg(\int_0^T |\dot\psi_l|\,\|u\|^2 dt + \int_0^T |\dddot\psi_l|\,\|y\|^2 dt$$
$$+ |\dot\psi_l(T)(\dot y(T,\cdot), y(T,\cdot))| + |\ddot\psi_l(T)|\,\|y(T,\cdot)\|^2 + E_0 + 1 \Bigg). \tag{8.33}$$

Из (8.31), (8.33) следует неравенство

$$\int\limits_0^T |\dot\psi_l| \int\limits_\Omega |b(y)y|\,dx\,dt \leqslant C\Bigg(\int\limits_0^T (|\dot\psi_l|\,\|u\|^2 + |\dddot\psi_l|\,\|y\|^2)\,dt$$
$$+ |\dot\psi_l(T)(\dot y(T,\cdot), y(T,\cdot))| + |\ddot\psi_l(T)|\,\|y(T,\cdot)\|^2 + E_0 + 1\Bigg). \tag{8.34}$$

Учитывая равенство $\psi_l(t) = (T-t)^l$ из (8.33), (8.34) при $l = 2,3$ сразу получаем оценки (8.26), (8.27). При $l = 1$ из (8.33), (8.34) следует, что

$$\|y\|^2_{X_{0,0}} + \int\limits_Q |b(y)y|\,dx\,dt$$
$$\leqslant C(\|u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon\|y(T,\cdot)\|^2 + C_\varepsilon\|\dot y(T,\cdot)\|^2 + E_0 + 1). \tag{8.35}$$

Подставляя в (8.35) очевидное неравенство

$$\|y(T,\cdot)\|^2 \leqslant C\Bigg(\int\limits_0^T \|\dot y\|\,\|y\|\,dt + \|y(0,\cdot)\|^2\Bigg)$$
$$\leqslant C_1\Bigg(\int\limits_0^T (\,\|\dot y\|^2 + \|\nabla y\|^2)\,dt + \|y(0,\cdot)\|^2\Bigg)$$

и выбирая ε достаточно малым, получим неравенство (8.24). □

Замечание 8.1. Нетрудно доказать аналог теоремы 8.2 и в том случае, когда в задаче (8.1)–(8.4) условие (8.4) заменено условием $\gamma_\Sigma \partial_n y = 0$.

8.3. Распределенное или финальное наблюдение. Случай слабых функционалов. В задаче (8.1)–(8.5) заменим функционал (8.1) более слабым и рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\frac{1}{2}\|y - w\|^2_{L_2(Q)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(Q)} \to \inf \tag{8.36}$$

при условиях (8.2)–(8.5). Будем считать, что $w \in L_2(Q)$, $y_0 \in H^1_0(\Omega)$,

$$\int\limits_\Omega |b(y_0)y_0|\,dx < \infty,$$

$b(\lambda)$ удовлетворяет условию 8.2, а для f, y_1 и U_∂ выполнены предположения п. 8.1. Предполагается, что выполнено следующее условие.

Условие 8.3 (нетривиальность). Существует пара $(y,u) \in X_{2,2,} \times U_\partial$, удовлетворяющая (8.2)–(8.4), причем $\|(T-t)^2 b(y)y\|_{L_1(Q)} < \infty$.

Теорема 8.3. *Существует решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in X_{2,2} \times U_\partial$ *задачи* (8.36), (8.2)–(8.5), *причем*

$$\int\limits_Q (T-t)^2 |b(\widehat{y})\widehat{y}|\, dx\, dt < \infty. \tag{8.37}$$

Доказательство. В силу условия 8.3 существует минимизирующая последовательность (y_n, u_n) рассматриваемой задачи, причем вследствие неравенства (8.27)

$$\|y_n\|^2_{X_{2,2}} + \int\limits_Q (T-t)^2 |b(y_n)y_n|\, dx\, dt + \|u_n\|^2_{L_2(Q)} \leqslant C,$$

где C не зависит от n. Из этой оценки утверждение теоремы выводится аналогично доказательству теоремы 7.3. □

Рассмотрим две задачи с финальным наблюдением. Начнем с задачи минимизации функционала

$$\frac{1}{2}\|\gamma_T y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(Q)} \to \inf \tag{8.38}$$

при условиях (8.2)–(8.5), где $w \in L_2(\Omega)$, а предположения на f, $b(\lambda)$, U_∂, y_0, y_1 те же, что в предыдущей задаче. Кроме того, выполнено

Условие 8.4 (нетривиальность). Существует пара $(y, u) \in X_{1,1} \times U_\partial$, удовлетворяющая (8.2)–(8.4), причем

$$\|(T-t)b(y)y\|_{L_1(Q)} < \infty, \quad \|y(T,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} < \infty.$$

Теорема 8.4. *Существует решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in X_{1,1} \times U_\partial$ *задачи* (8.38), (8.2)–(8.5), *причем*

$$\int\limits_Q (T-t) |b(\widehat{y})\widehat{y}|\, dx\, dt < \infty. \tag{8.39}$$

Доказательство. Условие 8.4 гарантирует существование минимизирующей последовательности (y_n, u_n), а из (8.26) следует оценка

$$\|y_n\|^2_{X_{1,1}} + \int\limits_Q (T-t) |b(y_n)y_n|\, dx\, dt + \|u_n\|^2_{L_2(Q)} + \|y_n(T,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C,$$

где C не зависит от n. Из этого неравенства выводится утверждение теоремы аналогично доказательству теорем 7.3, 7.4. □

Исследуем задачу минимизации функционала

$$\frac{1}{2}\|\gamma_T \dot{y} - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(Q)} \to \inf \tag{8.40}$$

при условиях (8.2)–(8.5), причем предположения на w, f, y_0, y_1, U_∂ те же, что в предыдущей задаче. Пусть выполнено следующее условие.

Условие 8.5. Существует пара $(y, u) \in X_{0,0} \times U_\partial$, удовлетворяющая (8.2)–(8.4), причем $\|b(y)y\|_{L_1(Q)} < \infty$ и $\|\dot{y}(T, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} < \infty$.

Теорема 8.5. *Существует решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in X_{0,0} \times U_\partial$ *задачи* (8.40), (8.2)–(8.5), *причем* $\|b(\widehat{y})\widehat{y}\|_{L_1(Q)} < \infty$.

Доказательство теоремы основано на условии 8.5 и оценке (8.24) и аналогично доказательству теорем 7.4, 7.5. □

§ 9. Комментарии

Теория оптимального управления распределенными системами интенсивно развивается усилиями многих авторов в течение нескольких десятков лет. Периоду строгих математических исследований в этой теории предшествовало изучение прикладных задач оптимального управления (см., например, Бутковский [1] и цитированную там литературу).

Одной из первых книг по математической теории оптимального управления распределенными системами была книга Лионс [2]. В настоящее время литература по этой области математики огромна, а проблематика этой теории значительно шире круга вопросов, рассмотренных в настоящей монографии. Приведенный ниже список книг не претендует на полноту и призван лишь дать некоторое представление о круге вопросов, исследуемых в теории оптимального управления распределенными системами: Барбу [1, 2]; Бенсуссан [1]; Васильев [1]; Егоров [1]; Забкзик [1]; Иваненко, Мельник [1]; Лазиешка, Триджиани [1, 2]; Ли, Йонг [1]; Лионс [2, 3]; Литвинов [1]; Неиттаанмаки, Тиба [1]; Райтум [1]. Ниже указаны лишь работы, имеющие самое непосредственное отношение к тематике главы.

Общий подход к доказательству разрешимости задач оптимального управления в случае, когда управляемая система описывается некорректной краевой задачей или задачей, корректность которой не установлена, впервые предложен Фурсиковым [1–3]. Широкий класс задач оптимального управления сингулярными распределенными системами изучен Лионсом [3]. Исследование этого класса задач продолжено в гл. 1–3.

В § 1 приведены известные результаты по функциональным пространствам и краевым задачам для эллиптических и параболических дифференциальных уравнений, которые используются в дальнейшем изложении. Там же приведены ссылки на соответствующую литературу.

Абстрактные задачи управления, моделирующие задачи оптимального управления некорректными и сингулярными распределенными системами и методы доказательства существования решения таких задач, приведенные в § 2, предложены Фурсиковым [3, 13].

Примеры задач оптимального управления распределенными системами, приведенные в § 3–8, призваны очертить контуры общей теории разрешимости экстремальных задач. Разрешимость примеров, где управляемая система описывается корректной краевой задачей, хорошо известна.

Изучение примеров из пп. 3.1, 4.1, 6.1, 7.1, 8.1 начато Лионсом [3]. Там же поставлен вопрос о разрешимости задач оптимального управления из пп. 7.3, 8.3. Эта проблема решена Эмануиловым [2]. Изложение результатов из пп. 7.2, 7.3 близко к работе Фурсикова [12]. В связи с примерами из п. 6.1 см. также Александров [1].

Глава 2

Система оптимальности для задач оптимального управления

В этой главе изложены методы, с помощью которых для задачи оптимального управления выводятся необходимые условия минимума. Эти условия состоят из набора уравнений и вариационных неравенств и называются системой оптимальности. В случае линейных задач оптимального управления с выпуклым функционалом стоимости система оптимальности обычно является не только необходимым, но и достаточным условием минимума экстремальной задачи.

Для вывода системы оптимальности мы применяем принцип Лагранжа (см. § 1). Для разных классов задач доказательство этого принципа различно. Основные усилия в § 1 приложены к доказательству принципа Лагранжа, приспособленного к задачам, у которых управляемая система описывается с помощью некорректных краевых задач (типа задачи Коши для оператора Лапласа или для обратного уравнения теплопроводности) либо с помощью нелинейных сингулярных краевых задач.

Параграфы 2–8 посвящены выводу систем оптимальности для различных классов конкретных задач оптимального управления. Как правило, этот вывод состоит в проверке условий абстрактных теорем из § 1, которые гарантируют справедливость принципа Лагранжа, затем в применении принципа Лагранжа и, наконец, в выводе из полученных интегральных равенств сопряженной краевой задачи. Для вывода сопряженной краевой задачи используются формулы Грина. Сложность указанной выше процедуры существенно зависит от конкретной экстремальной задачи. Она достаточно проста, когда управляемая система описывается с помощью линейной корректной управляемой краевой задачи, и значительно сложнее в случае некорректной или нелинейной сингулярной управляемой системы.

§ 1. Принцип Лагранжа для абстрактной задачи

В этом параграфе выводятся необходимые условия экстремума для абстрактных экстремальных задач. Когда функционал стоимости выпуклый, а управляемая система линейна, доказывается, что эти необходимые условия экстремума являются также достаточными. Необходимые условия выводятся с помощью общего принципа Лагранжа. Подробно рассмотрен случай, моделирующий линейные некорректные управляемые системы.

1.1. Предварительные сведения. Пусть X — линейное нормированное пространство, X^* — пространство, сопряженное к X, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — соотношение двойственности между X и X^* (иногда используется также обозначение

$\langle\cdot,\cdot\rangle_X$). Пусть K — конус в X с вершиной в нуле, т. е. множество, которое вместе с любым элементом $x \in K$ содержит луч $\{\alpha x : \alpha > 0\}$. Множество $K^* = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle \geqslant 0\ \forall x \in K\}$ называется *сопряженным конусом*.

Теорема 1.1. *Пусть K_1 и K_2 — выпуклые конусы в линейном нормированном пространстве X, причем конус K_1 открыт. Если $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$, то $(K_1 \cap K_2)^* = K_1^* + K_2^*$.*

Доказательство. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} K_1^* + K_2^* &= \{x_1^* + x_2^* : x_i^* \in X^*,\ \langle x_i^*, x\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K_i,\ i = 1,2\} \\ &\subset \{x_1^* + x_2^* : x_i^* \in X^*,\ i = 1,2,\ \langle x_1^* + x_2^*, x\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in K_1 \cap K_2\} \\ &= (K_1 \cap K_2)^*. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно проверить включение $(K_1 \cap K_2)^* \subset K_1^* + K_2^*$, т. е. достаточно доказать, что для любого $f \in (K_1 \cap K_2)^*$ существуют $x_i^* \in K_i^*$, $i = 1,2$, такие, что

$$f = x_1^* + x_2^*. \tag{1.1}$$

Если K_2 расположено по одну сторону от гиперплоскости $f^\perp$, имея, возможно, с $f^\perp$ непустое пересечение, то $f \in K_2^*$. Действительно, в противном случае существует $x_0 \in K_2$ такой, что $\langle f, x_0\rangle < 0$. Так как $f \in (K_1 \cap K_2)^*$, имеем $\langle f, x_1\rangle > 0$ при некотором $x_1 \in K_2$. Следовательно, векторы $x_0 \in K_2$ и $x_1 \in K_2$ расположены по разные стороны от $f^\perp$, что противоречит предположению. Поэтому (1.1) справедливо с $x_1^* = 0$, $x_2^* = f$. Таким образом можно считать, что

$$M \equiv f^\perp \cap K_2 \neq \varnothing, \quad M \neq 0, \quad \exists e \in K_2 \backslash M, \quad \langle f, e\rangle < 0. \tag{1.2}$$

Докажем, что $M \cap K_1 = \varnothing$. Действительно, в противном случае для $x_0 \in M \cap K_1$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $x_0 + \varepsilon e \in K_2 \cap K_1$ (множество K_1 открыто). Но $\langle f, x_0 - \varepsilon e\rangle = \varepsilon\langle f, e\rangle < 0$, что противоречит включению $f \in (K_1 \cap K_2)^*$. В силу доказанного соотношения по первой теореме отделимости (см., например, Алексеев, Тихомиров, Фомин [1, с. 124]) существует функционал $g \in X^*$, разделяющий M и K_1:

$$\forall x \in K_1 \quad \langle g, x\rangle > 0 \geqslant \langle g, y\rangle \quad \forall y \in M. \tag{1.3}$$

Отметим, что возможность поставить нуль в неравенствах (1.3) обусловлена тем, что K_1 и M — конусы и для них нуль — предельная точка.

Пусть $N = f^\perp \cap g^\perp$, X/N — фактор-пространство и $\pi\colon X \to X/N$ — естественная проекция (т. е. $\pi x = x + N \in X/N$ при всех $x \in X$). Так как $\operatorname{codim} N = 2$, плоскость X/N двумерна. Пусть $\varepsilon_i \in X$, $i = 1,2$, $\langle g, \varepsilon_1\rangle = 0$, $\langle f, \varepsilon_2\rangle = 0$, $\langle f, \varepsilon_1\rangle = 1$, $\langle g, \varepsilon_2\rangle = 1$. Положим $e_1 = \pi\varepsilon_1$ и $e_2 = \pi\varepsilon_2$. На X/N определим функционалы $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$ по формулам $\langle \widehat{f}, \pi x\rangle_{X/N} = \langle f, x\rangle_X$ и $\langle \widehat{g}, \pi x\rangle_{X/N} = \langle g, x\rangle_X$ для всех $x \in X$. Очевидно, что это определение корректно. Векторы e_1 и e_2 образуют базис на X/N, причем $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$ при всех $y \in X/N$, где $y_1 = \langle y, e_1\rangle_{X/N}$ и $y_2 = \langle y, e_2\rangle_{X/N}$. Очевидно, что множества πK_1 и πK_2 суть конусы в $X/N = \mathbb{R}^2 = \{y = (y_1, y_2)\}$, причем $\pi K_1 \subset \{y = (y_1, y_2) : y_2 > 0\}$ в силу (1.3).

Пусть лучи $l_1, l_2 \subset X/N$, выходящие из начала координат, являются образующими конуса πK_2. Так как $\pi K_1 \cap \pi K_2 \neq \varnothing$, ввиду (1.3) имеем $l_1 \subset \pi K_1 \subset \{y = (y_1, y_2) : y_2 > 0\}$. Поскольку в силу (1.3) $\pi M = \{y = (y_1, y_2) : y_1 = 0, y_2 < 0\} \subset \pi K_2$ и конус πK_2 выпуклый, можно считать, что

$$l_1 \subset \{y = (y_1, y_2) : y_1 \geqslant 0, y_2 > 0\}, \quad l_2 \subset \{y = (y_1, y_2) : y_1 \leqslant 0, y_2 < 0\}.$$

Пусть φ_i — угол между e_1 и l_i. Ввиду выпуклости πK_2 имеем $\operatorname{ctg}\varphi_1 \geqslant \operatorname{ctg}\varphi_2 > 0$. Возьмем число α, удовлетворяющее соотношениям $\operatorname{ctg}\varphi_1 \geqslant \alpha \geqslant \operatorname{ctg}\varphi_2 > 0$, и определим функционал $\widehat{h}$ на X/N по формуле

$$\widehat{h}(y) = \widehat{f}(y) - \alpha\widehat{g}(y) = y_1 - \alpha y_2, \quad y = (y_1, y_2), \tag{1.4}$$

причем второе равенство следует непосредственно из определений функционалов $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$. Покажем, что

$$\widehat{h}(y) \geqslant 0 \quad \forall y \in \pi K_2. \tag{1.5}$$

Для y из четверти плоскости $\{y = (y_1, y_2) : y_1 \geqslant 0, y_2 \leqslant 0\}$ это неравенство следует из (1.4), так как $\alpha > 0$. Если $y \in \pi K_2 \cap \{y = (y_1, y_2) : y_1 < 0, y_2 < 0\}$, то $\widehat{h}(y) = y_1 - \alpha y_2 = |y_2|(\alpha - y_1/y_2) \geqslant |y_2|(\alpha - \operatorname{ctg}\varphi_2) \geqslant 0$. Аналогично для $y \in \pi K_2 \cap \{y = (y_1, y_2) : y_1 \geqslant 0, y_2 > 0\}$ получаем $\widehat{h}(y) = y_1 - \alpha y_2 = y_2(y_1/y_2 - \alpha) \geqslant y_2(\operatorname{ctg}\varphi_1 - \alpha) \geqslant 0$. Таким образом, если определить h на X по формуле $h = \pi^*\widehat{h}$, то в силу (1.5) получим $\langle h, x\rangle \geqslant 0$ при всех $x \in K_2$. А в силу (1.4) и определения функционалов $\widehat{f}$, $\widehat{g}$ имеем $f = \alpha g + h$. Итак, мы получили разложение (1.1) при $x_1^* = \alpha g$, $x_2^* = h$. □

Теорема 1.2 (Дубовицкий, Милютин). *Пусть K_1 и K_2 — выпуклые конусы в X, причем K_1 открыт. Для того, чтобы выполнялось $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы существовали функционалы $x_1^* \in K_1^*$ и $x_2^* \in K_2^*$, не равные нулю и такие, что $x_1^* + x_2^* = 0$.*

Доказательство. Пусть $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Тогда по первой теореме отделимости существует ненулевой функционал $y^* \in X^*$ такой, что

$$\inf_{x \in K_1} \langle y^*, x\rangle \geqslant \sup_{x \in K_2} \langle y^*, x\rangle. \tag{1.6}$$

Поскольку точка $x = 0$ предельная, как для K_1, так и для K_2, из (1.5) следует $y^* \in K_1^*$, $-y^* \in K_2^*$ и можно положить $x_1^* = y^*$, $x_2 = -y^*$. Пусть $x_i^* \in K_i^*$, $x_i^* \neq 0$, $i = 1, 2$, и $x_1^* + x_2^* = 0$, но существует $x \in K_1 \cap K_2$. Так как конус K_1 открыт, имеем $x \neq 0$. Поэтому $\langle x_1^*, x\rangle > 0$ и $\langle x_2^*, x\rangle \geqslant 0$, что противоречит равенству $x_1^* + x_2^* = 0$. □

1.2. Случай X_∂ с непустой внутренностью. Пусть X и V — банаховы пространства, $J\colon X \to \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — функционал, $L\colon X \to V$ — линейный ограниченный оператор, $F_0 \in V$ и X_∂ — выпуклое подмножество пространства X. Рассмотрим экстремальную задачу

$$J(x) \to \inf, \tag{1.7}$$

$$Lx + F_0 = 0, \tag{1.8}$$

$$x \in X_\partial. \tag{1.9}$$

Пусть $x_0 \in X$ — вектор, удовлетворяющий (1.8). Напомним, что множество $\mathcal{A} = \{x \in X_\partial \cap \{x_0 + \operatorname{Ker} L\} : J(x) < \infty\}$ называется *множеством допустимых элементов*, а вектор $\widehat{x} \in \mathcal{A}$, удовлетворяющий равенству $J(\widehat{x}) = \inf\limits_{x \in \mathcal{A}} J(x)$, называется *решением задачи* (1.7)–(1.9). Ниже предполагается, что решение $\widehat{x}$ задачи (1.7)–(1.9) существует. Систему оптимальности для задачи (1.7)–(1.9) можно вывести с помощью принципа Лагранжа. Для применения этого принципа следует составить функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda, p) = \lambda J(x) + \langle p, Lx + F_0 \rangle, \tag{1.10}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $p \in V^*$. Согласно принципу Лагранжа существует пара $(\lambda, p) \neq 0$ такая, что решение $\widehat{x}$ задачи (1.7)–(1.9) является также решением задачи

$$\mathcal{L}(x, \lambda, p) \to \inf, \quad x \in X_\partial. \tag{1.11}$$

Если функционал $J\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ дифференцируем по Гато в точке $\widehat{x}$, то необходимое условие минимума для задачи (1.11) имеет вид

$$\langle \mathcal{L}'_x(\widehat{x}, \lambda, p), x - \widehat{x} \rangle_X \geqslant 0 \quad \forall x \in X_\partial, \tag{1.12}$$

где $\mathcal{L}'_x$ — производная по Гато функции (1.10) по переменной x. Если удастся доказать, что $\lambda \neq 0$ в (1.11), то можно положить $\lambda = 1$. Соотношения (1.8), (1.9), (1.11), где $\mathcal{L}$ — функция (1.10) при $\lambda = 1$, называются *системой оптимальности задачи* (1.7)–(1.9).

Дадим обоснование принципа Лагранжа в случае, когда множество X_∂ имеет непустую внутренность, т. е. когда

$$\operatorname{Int} X_\partial \neq \varnothing. \tag{1.13}$$

Кроме того, используя линейность оператора L и выпуклость функционала J, докажем, что система оптимальности дает достаточные условия минимума для задачи (1.7)–(1.9).

Теорема 1.3. *Пусть $\widehat{x}$ — решение задачи* (1.7)–(1.9) *и J дифференцируем по Гато в $\widehat{x}$. Предположим, что выполнено условие* (1.13) *и множество* $\operatorname{Im} L \equiv LX$ *замкнуто в V. Тогда существует пара* $(\lambda, p) \in (\mathbb{R}_+ \times V^*) \setminus \{0\}$ *такая, что для функции* (1.10) *справедливо неравенство* (1.12). *Если* $\operatorname{Int} X_\partial \cap \{\widehat{x} + \operatorname{Ker} L\} \neq \varnothing$, *то в* (1.10) *и* (1.12) *можно взять $\lambda = 1$. Обратно, если J — выпуклый функционал, $\widehat{x} \in X_\partial$ удовлетворяет* (1.8), (1.12) *с некоторым $p \in V^*$ и $\lambda = 1$, то $\widehat{x}$ — решение задачи* (1.7)–(1.9).

Доказательство. Напомним, что *конической оболочкой множества M* называется множество $\operatorname{Cone} M = \{\alpha x : x \in M, \alpha > 0\}$. Непосредственно из определения решения $\widehat{x}$ задачи (1.7)–(1.9) следует, что при $\alpha \in (0, 1)$

$$0 \leqslant \frac{J(\widehat{x} + \alpha v) - J(\widehat{x})}{\alpha} \underset{\alpha \to 0}{\to} \langle J'(x), v \rangle \quad \forall v \in (X_\partial - \widehat{x}) \cap \operatorname{Ker} L,$$

где $J'(x)$ — производная по Гато функционала J. Поэтому

$$J'(\widehat{x}) \in (\operatorname{Cone}(X_\partial - \widehat{x}) \cap \operatorname{Ker} L)^*. \tag{1.14}$$

Если $\operatorname{Int} X_\partial \cap \{\widehat{x} + \operatorname{Ker} L\} \neq \varnothing$, то $\operatorname{Cone}(\operatorname{Int}(X_\partial - \widehat{x})) \cap \operatorname{Ker} L \neq \varnothing$. В силу теоремы 1.1 и включения (1.14) существуют $x_1^* \in (\operatorname{Ker} L)^\perp$ и $x_2^* \in (\operatorname{Cone}(X_\partial - \widehat{x}))^*$

такие, что

$$f'(\widehat{x}) - x_1^* = x_2^*. \tag{1.15}$$

Если $\operatorname{Int} X_\partial \cap \{\widehat{x} + \operatorname{Ker} L\} = \varnothing$, то $\operatorname{Cone}(\operatorname{Int}(X_\partial - \widehat{x})) \cap \operatorname{Ker} L = \varnothing$ и согласно теореме 1.2 существуют $x_1^* \in (\operatorname{Ker} L)^\perp$ и $x_2^* \in (\operatorname{Cone}(X_\partial - \widehat{x}))^*$, не равные нулю, такие, что

$$-x_1^* = x_2^*. \tag{1.16}$$

Так как $\operatorname{Im} L$ замкнут в V, имеем $(\operatorname{Ker} L)^\perp = \operatorname{Im} L^*$ (см. Иосида [1, с. 284]). Поэтому

$$-x_1^* = L^* p \tag{1.17}$$

при некотором $p \in V^*$. Подставляя (1.17) в (1.16), (1.15) и учитывая определение сопряженного конуса, получим

$$\langle \lambda f'(\widehat{x}) + L^* p, y\rangle \geqslant 0 \quad \forall y \in X_\partial - \widehat{x}, \tag{1.18}$$

где $\lambda = 1$ в случае (1.15) и $\lambda = 0$ в случае (1.16). В силу определения (1.10) функции Лагранжа $\mathcal{L}$ неравенство (1.18) эквивалентно неравенству (1.12), в котором $x = y + \widehat{x}$.

Докажем, что соотношений (1.8), (1.9) и неравенства (1.12) при $\lambda = 1$ и некоторым $p \in V^*$ достаточно, чтобы вектор $\widehat{x}$ был решением задачи (1.7)–(1.9), если функционал J выпуклый. Из (1.10) и (1.12) следует, что

$$0 \leqslant \langle J'(\widehat{x}), x - \widehat{x}\rangle + \langle L^* p, x - \widehat{x}\rangle = \langle J'(\widehat{x}), x - \widehat{x}\rangle \quad \forall x \in X_\partial \cap \{\widehat{x} + \operatorname{Ker} L\},$$

так как $x - \widehat{x} \in \operatorname{Ker} L$ и $L^* p \in (\operatorname{Ker} L)^\perp$. Из этого неравенства и неравенства Иенсена следует, что для любого $x \in X_\partial \cap \{\widehat{x} + \operatorname{Ker} L\}$, $\alpha \in (0, 1)$,

$$J(x) - J(\widehat{x}) \geqslant \frac{J(\widehat{x} + \alpha(x - \widehat{x})) - J(\widehat{x})}{\alpha} \underset{\alpha \to 0}{\to} \langle J'(\widehat{x}), x - \widehat{x}\rangle \geqslant 0.$$

Следовательно, $\widehat{x}$ — решение задачи (1.7)–(1.9). □

Рассмотрим теперь частный случай задачи (1.7)–(1.9), когда $X_\partial = X$. Из теоремы 1.3 вытекает

Следствие 1.1. *Пусть $\widehat{x}$ — решение задачи* (1.7), (1.8), *функционал J дифференцируем по Гато и $\operatorname{Im} L$ замкнут в V. Тогда существует $p \in V^*$ такой, что для функции* (1.10) *справедливо равенство*

$$\langle \mathcal{L}'_x(\widehat{x}, 1, p), x\rangle_X = 0 \quad \forall x \in X. \tag{1.19}$$

Обратно, если J — выпуклый функционал и $\widehat{x}$ удовлетворяет (1.8), (1.19) *с некоторым $p \in V^*$, то $\widehat{x}$ — решение задачи* (1.7), (1.8).

Доказательство. Достаточно показать, что при $X_\partial = X$ из соотношения (1.18) следует (1.19). Для этого достаточно в (1.18) положить $y = (\widehat{x} \pm h) - \widehat{x}$, где $\widehat{x} \pm h \in X_\partial = X$. □

1.3. Случай множества X_∂ с пустой внутренностью. Условие (1.13), при выполнении которого доказана теорема 1.3, для многих приложений к некорректным управляемым системам является слишком ограничительным.

Наша ближайшая цель — избавиться от условия (1.13) или, по крайней мере, его ослабить. Пусть X и X_0 — банаховы пространства, X_∂ — выпуклое множество, лежащее в X, и $\widehat{x} \in X_\partial$. Заменим условие (1.13) следующим:

$$\operatorname{Int}_{X_0}((X_\partial - \widehat{x}) \cap X_0) \neq \varnothing, \tag{1.20}$$

где $\operatorname{Int}_{X_0} M$ — внутренность множества M относительно топологии пространства X_0. Как правило, в приложениях имеет место непрерывное вложение $X_0 \subset X$. Для любого выпуклого множества X_∂, содержащего помимо $\widehat{x}$ хотя бы одну точку, легко построить пространство X_0 так, чтобы было выполнено (1.20).

Действительно, если $x \in X_\partial$ и $x \neq \widehat{x}$, то в качестве X_0 можно взять прямую, проходящую через начало координат и точку $x - \widehat{x}$. Однако, чтобы получать точные необходимые, а также достаточные условия минимума, в задаче (1.7)–(1.9), полезно выбирать X_0 так, чтобы множество $(X_\partial - \widehat{x}) \cap X_0$ было как можно шире.

Лемма 1.1. *Пусть X_∂ – выпуклое замкнутое сепарабельное (т. е. X_∂ содержит счетное множество элементов, всюду плотное в X_∂) подмножество банахова пространства X и $\widehat{x} \in X_\partial$. Тогда существует банахово пространство X_0, непрерывно вложенное в X и плотное в $\overline{\operatorname{Lin}(X_\partial - \widehat{x})}$ такое, что выполнено* (1.20).

В формулировке леммы и ниже используются следующие обозначения: $\operatorname{Lin}(X_\partial - \widehat{x})$ — линейная оболочка множества $(X_\partial - \widehat{x})$ и $\operatorname{Lin}\overline{(X_\partial - \widehat{x})}$ — замыкание множества $\operatorname{Lin}(X_\partial - \widehat{x})$ в топологии пространства X.

Доказательство леммы 1.1. Пусть $Y = X_\partial - \widehat{x}$ и $\{\widetilde{e}_j\}$ — счетное всюду плотное подмножество множества Y. Положим $e_1 = \widetilde{e}_1/\|\widetilde{e}_1\|_X$, а векторы $e_2, e_3, \ldots$ построим по индукции следующим образом: $e_m = \widetilde{e}_{k_{m-1}}/\|\widetilde{e}_{k_{m-1}}\|_X$, где $\widetilde{e}_{k_0} = e_1$, а $\widetilde{e}_{k_{m-1}}$ — первый среди векторов $e_{k_{m-2}+1}, e_{k_{m-2}+2}, \ldots$, который не лежит в линейном подпространстве E_{m-1}, натянутом на векторы $e_1, \ldots, e_{m-1}$. Очевидно равенство

$$\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m} = \overline{\operatorname{Lin}(X_\partial - \widehat{x})}. \tag{1.21}$$

Для любого j существует $\alpha_j \neq 0$ такое, что $\alpha_j e_j \in Y$. Можно считать, что $\sup\limits_j |\alpha_j| < \infty$. Так как $\widehat{x} \in X_\partial$, имеем $0 \in X_\partial - \widehat{x}$, а в силу выпуклости Y при любом j имеем $\alpha e_j \in Y$, если $\operatorname{sgn}\alpha = \operatorname{sgn}\alpha_j$ и $|\alpha| \leqslant |\alpha_j|$. Пусть $p_j > 0$ — последовательность такая, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. Положим

$$Q = \left\{ x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j : \forall j \ \operatorname{sgn} x_j = \operatorname{sgn}\alpha_j, \ |x_j| < |\alpha_j| p_j \right\}. \tag{1.22}$$

Докажем, что $Q \subset Y$. Действительно, пусть $x \in Q$, т. е. $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j e_j$, где x_j удовлетворяют условиям из (1.22). Положим $x^k = \sum\limits_{j=1}^{k} x_j e_j$. Пусть $q_j \geqslant p_j$, $j = 1, \ldots, k$, причем

$$\sum_{j=1}^{k} q_j = 1. \tag{1.23}$$

Очевидно, что $|x_j|/q_j \leqslant |\alpha_j| p_j/q_j \leqslant |\alpha_j|$. Поэтому $(x_j/q_j)e_j \in Y$. Ввиду выпуклости Y и (1.23)

$$x^k = \sum_{j=1}^{k} q_j \frac{x_j}{q_j} e_j \in Y.$$

Поскольку $\|x - x^k\|_X \to 0$ при $k \to \infty$, а Y — замкнутое множество, имеем $x \in Y$. Положим

$$X_0 = \left\{ x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j : \|x\|_{X_0} = \sup_j \left(|x_j|/p_j|\alpha_j|\right) < \infty \right\}. \tag{1.24}$$

Пространство X_0 банахово. Так как для $x = \sum x_j e_j$

$$\|x\|_X = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \right\|_X \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} p_j |\alpha_j| \frac{|x_j|}{p_j|\alpha_j|} \leqslant \|x\|_{X_0} \sum_{j=1}^{\infty} p_j |\alpha_j|,$$

пространство X_0 непрерывно вкладывается в X. Из (1.21) следует, что X_0 всюду плотно в $\overline{\mathrm{Lin}(X_\partial - \widehat{x})}$. Положим

$$V = \left\{ x \in X_0 : \|x - y_0\|_{X_0} < 1/2,\ y_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_j \alpha_j}{2} e_j \right\}. \tag{1.25}$$

Множество V открыто в X_0. Кроме того, если $x = \sum x_j e_j \in V$, то в силу (1.24), (1.25) имеем $|x_j - (p_j\alpha_j)/2| < (p_j|\alpha_j|)/2$ при любом j. Из последнего неравенства следует, что $|x_j| < p_j|\alpha_j|$, $\operatorname{sgn} x_j = \operatorname{sgn} \alpha_j$. Следовательно, $x \in Q$ в силу (1.22). Так как $Q \subset Y$, получаем $V \subset Y$. □

Продолжим изучение необходимых и достаточных условий минимума в задаче (1.7)–(1.9). Предположим, что X_0 — банахово пространство,

$$X_0 \subset X, \tag{1.26}$$

а вместо условия (1.13) выполнено условие (1.20). Пусть V_0 — банахово пространство и выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} &LX_0 \subset V_0,\ L : X_0 \to V_0 \text{ непрерывен,} \\ &LX_0 \text{ замкнуто в топологии } V_0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Предположим, что функционал J дифференцируем по Гато вдоль X_0 в точке $\widehat{x}$, т. е. существует линейный функционал $J'(\widehat{x})$: $X_0 \to \mathbb{R}$ такой, что $J(\widehat{x} +$

$\lambda h) - J(\widehat{x}) - \lambda J'(\widehat{x})h = \alpha(\lambda)$, $\|\alpha(\lambda)\|/|\lambda| \to 0$ при $\lambda \to 0$ для любых $h \in X_0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Отметим, что при этом вектор $\widehat{x}$ не обязательно принадлежит X_0.

Теорема 1.4. *Пусть $\widehat{x}$ — решение задачи* (1.7)–(1.9), *функционал J дифференцируем по Гато вдоль X_0 в точке $\widehat{x}$ и выполнены условия* (1.26), (1.27), (1.20). *Тогда существует пара $(\lambda, p) \in (\mathbb{R}_+ \times V_0^*)\backslash\{0\}$ такая, что*

$$\langle \mathcal{L}'_x(\widehat{x}, \lambda, p), x\rangle_{X_0} \geqslant 0 \quad \forall x \in (X_\partial - \widehat{x}) \cap X_0, \tag{1.28}$$

где $\mathcal{L}$ — функция Лагранжа (1.10). *Если*

$$\mathrm{Int}_{X_0}((X_\partial - \widehat{x}) \cap X_0) \cap \mathrm{Ker}\, L \neq \varnothing, \tag{1.29}$$

то справедливо (1.28) *при $\lambda = 1$. Обратно, если $\widehat{x} \in X$ удовлетворяет для некоторого $p \in V_0^*$ и $\lambda = 1$ неравенству* (1.28), *а также* (1.8) *и* (1.9), *J — выпуклый функционал, дифференцируемый по Гато вдоль X_0 в $\widehat{x}$, и*

$$X_0 \cap (\mathrm{Ker}_X\, L \cap (X_\partial - \widehat{x})) \text{ плотно в } \mathrm{Ker}_X\, L \cap (X_\partial - \widehat{x}) \tag{1.30}$$

относительно топологии, в которой непрерывен функционал J, то $\widehat{x}$ — решение задачи (1.7)–(1.9). *Здесь* $\mathrm{Ker}_X\, L = \{x \in X : Lx = 0\}$.

Доказательство. Для $y \in X_0$ положим $g(y) = J(\widehat{x} + y)$ и рассмотрим задачу

$$g(x) \to \inf, \quad Lx = 0, \quad x \in X_0 \cap (X_\partial - \widehat{x}), \tag{1.31}$$

где $\widehat{x}$ — решение задачи (1.7)–(1.9). Очевидно, что решением задачи (1.31) является вектор $x = 0$. При этом задача (1.31) удовлетворяет условиям теоремы 1.3, в которой в качестве пространств X и V взяты соответственно X_0 и V_0, а вместо X_∂ — множество $(X_\partial - \widehat{x}) \cap X_0$. Применяя теорему 1.3, получаем необходимое условие (1.28). Кроме того, в силу этой теоремы из (1.28) при $\lambda = 1$, а также из (1.31_2), (1.31_3) (т. е. второго и третьего соотношений в (1.31)) следует, что $x = 0$ является решением задачи (1.31). Так как $g(x) = (\widehat{x} + x)$, это означает, что

$$J(\widehat{x}) \leqslant J(\widehat{x} + x) \quad \forall x \in X_0 \cap (\mathrm{Ker}_X\, L \cap (X_\partial - \widehat{x})). \tag{1.32}$$

Из (1.32) в силу (1.30) и непрерывности J получаем, что $\widehat{x}$ — решение задачи (1.7)–(1.9). □

Замечание 1.1. Условие (1.26) не существенно. Теорема 1.4 остается справедливой, если (1.26) заменить предположением, что решением задачи (1.31) является $y = 0$.

Иногда при изучении достаточных условий минимума вместо (1.30) удобно использовать другое условие.

Лемма 1.2. *Пусть $\widehat{x} \in X$ удовлетворяет соотношениям* (1.8), (1.9), *а также неравенству* (1.28) *при некотором $p \in V_0^*$ и $\lambda = 1$, причем известно, что решение $(\widehat{x}, p)$ системы* (1.8), (1.9), (1.28) *при $\lambda = 1$ единственно в пространстве $X \times V_0^*$. Предположим также, что решение задачи* (1.7)–(1.9) *существует и удовлетворяет* (1.28) *при некотором $p_1 \in V_0^*$ и $\lambda = 1$. Тогда $\widehat{x}$ — решение задачи* (1.7)–(1.9).

Доказательство. Пусть x_1 — решение задачи (1.7)–(1.9). По предположению существует $p_1 \in V_0^*$ такое, что (x_1, p_1) является решением системы (1.8), (1.9), (1.28) при $\lambda = 1$. Так как решение этой системы единственно, имеем $x_1 = \widehat{x}$ и $p_1 = p$. Следовательно, $\widehat{x}$ — решение задачи (1.7)–(1.9). □

1.4. Случай корректной управляемой системы. Характерная особенность теорем 1.3 и 1.4 заключается в относительно слабых требованиях на оператор L, что компенсируется наличием условий на ограничение X_∂. В случае теоремы 1.3 это — условие (1.13), а в случае теоремы 1.4 — условия (1.20) и (1.27). Теоремы 1.3 и 1.4 удобны при исследовании задач управления некорректными распределенными системами. Когда управляемая система описывается корректной краевой задачей, удобнее использовать другие теоремы, обосновывающие принцип Лагранжа. В этих теоремах $X = Y \times U$, где Y — пространство состояний, а U — пространство управлений. Множество ограничений U_∂ является подмножеством U, и на U_∂ по-существу никаких условий не накладывается. Это компенсируется более жесткими, чем ранее, условиями на уравнение, описывающее управляемую систему. Отметим, что тем не менее это уравнение может быть нелинейным по y.

Пусть Y, U, V — банаховы пространства, $J\colon Y \times U \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ — функционал, $F\colon Y \times U \to V$ — отображение, U_∂ — выпуклое подмножество пространства U, содержащее более одной точки. Рассмотрим экстремальную задачу

$$J(y, u) \to \inf, \tag{1.33}$$

$$F(y, u) = 0, \quad u \in U_\partial. \tag{1.34}$$

Как и выше, множество $\mathfrak{A}$ допустимых пар определяется соотношением

$$\mathfrak{A} = \{(y, u) \in Y \times U_\partial : F(y, u) = 0, J(y, u) < \infty\},$$

а решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in \mathfrak{A}$ задачи (1.33), (1.34) — соотношением

$$J(\widehat{y}, \widehat{u}) = \inf_{(y,u)\in\mathfrak{A}} J(y, u).$$

Функция Лагранжа задачи (1.33), (1.34) определяется равенством

$$\mathcal{L}(y, u, \lambda, p) = \lambda J(y, u) + \langle F(y, u), p\rangle, \tag{1.35}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $p \in V^*$.

Теорема 1.5 (Иоффе, Тихомиров [5]). *Пусть $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y \times U$ — решение задачи (1.33), (1.34) при любом $u \in U_\partial$, отображения $y \to J(y, u)$ и $y \to F(y, u)$ непрерывно дифференцируемы при $y \in \mathcal{O}(\widehat{y})$, где $\mathcal{O}(\widehat{y})$ — некоторая окрестность точки $\widehat{y}$ и $\operatorname{Im} F'_y(\widehat{y}, \widehat{u})$ замкнут и имеет конечную коразмерность в V. Пусть, кроме того, при любом $y \in \mathcal{O}(\widehat{y})$ функция $u \to J(y, u)$ выпукла, J дифференцируема по Гато по u в точке $(\widehat{y}, \widehat{u})$, а отображение $u \to F(y, u)$ непрерывно из U в V и аффинно, т. е.*

$$F(y, \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) = \alpha F(y, u_1) + (1-\alpha)F(y, u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in U,\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.36}$$

Тогда существует пара $(\lambda, p) \in (\mathbb{R}_+ \times V^*)\backslash\{0\}$ *такая, что*

$$\langle \mathcal{L}'_y(\widehat{y}, \widehat{u}, \lambda, p), h\rangle = 0 \tag{1.37}$$

при любом $h \in Y$ *и*

$$\langle \mathcal{L}'_u(\widehat{y}, \widehat{u}, \lambda, p), u\rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in U_\partial - \widehat{u}. \tag{1.38}$$

Если $\operatorname{Im} F'_y(\widehat{y}, \widehat{u}) = V$, *то можно считать, что* $\lambda = 1$ *в* (1.37), (1.38).

Замечание 1.2. В силу (1.35) для существования производной по Гато $\mathcal{L}'_u$, что предполагается в (1.38), необходимо, чтобы оператор $u \to F(\widehat{y}, u)$ был дифференцируем в точке $\widehat{u}$. Однако из (1.36) следует, что оператор $u \to (F(y, u) - F(y, 0))$ линеен при любом $Y \in \mathcal{O}(\widehat{y})$. Ввиду непрерывности отображение $u \to F(y, u)$ дифференцируемо и $F'_u(y, u)h = F(y, h) - F(y, 0)$.

Замечание 1.3. Пусть функционал J из (1.33) выпуклый по y и u, а оператор F из (1.34) аффинный по совокупности переменных, т. е. $F(y, u) = L(y, u) + F_0$, где $L\colon Y \times U \to V$ — линейный непрерывный оператор. Тогда необходимые условия минимума задачи (1.33), (1.34) являются также достаточными. Точнее, пусть пара $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y \times U$ удовлетворяет соотношениям (1.34) и (1.37), (1.38) при $\lambda = 1$. Тогда $(\widehat{y}, \widehat{u})$ является решением задачи (1.33), (1.34). Для доказательства этого утверждения достаточно положить $(y, u) = x$, $J(y, u) = J(x)$, $L(y, u) = Lx$ и дословно повторить соответствующую часть доказательства теоремы 1.3 (см. конец доказательства).

Ниже будет показано, что теорему 1.5 можно успешно применять при выводе системы оптимальности для широкого класса задач оптимального управления распределенными системами. Однако имеются примеры сингулярных распределенных систем, для которых удобнее использовать не теорему 1.5, а некоторое ее обобщение. Сформулируем соответствующую теорему. Пусть $(\widehat{y}, \widehat{u})$ — решение задачи (1.33), (1.34). Кроме пространств Y, U, V, в которых поставлена задача и определено ее решение, введем банаховы пространства Y_0, U_0, V_0. Положим

$$\begin{aligned} g(y, u) &= J(\widehat{y} + y, \widehat{u} + u) - J(\widehat{y}, \widehat{u}), \\ G(y, u) &= F(\widehat{y} + y, \widehat{u} + u) - F(\widehat{y}, \widehat{u}). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Предположим, что выполнено следующее условие.

Условие 1.1. (a) Отображения $g(y, u) : Y_0 \times U_0 \to \mathbb{R}$ и $G(y, u) : Y_0 \times U_0 \to V_0$, введенные в (1.39), определены при любых $(y, u) \in Y_0 \times U_0$, а множество $(U_\partial - \widehat{u}) \cap U_0$ содержит более одной точки.

(b) При любом $u \in (U_\partial - \widehat{u}) \cap U_0$ отображения $y \to g(y, u)$, $y \to G(y, u)$ непрерывно дифференцируемы при $y \in \mathcal{O}_0$, где $\mathcal{O}_0$ — окрестность нуля в пространстве Y_0.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$g(y, u) \to \inf, \quad G(y, u) = 0, \quad u \in (U_\partial - \widehat{u}) \cap U_0 \tag{1.40}$$

и сформулируем теорему о системе оптимальности для решения $(\widehat{y}, \widehat{u})$ задачи (1.33), (1.34).

Теорема 1.6. *Пусть* $(y,u)=(0,0)\in Y_0\times U_0$ *является решением задачи* (1.40), *выполнено условие* 1.1 *и* $\operatorname{Im}G'_y(0,0)$ *замкнут и имеет конечную коразмерность в* V_0. *Кроме того, пусть функция* $u\to g(y,u)$ *выпукла и дифференцируема по Гато на* U_0 *в точке* $(y,u)=(0,0)$, *а отображение* $u\to G(y,u)$ *непрерывно из* U_0 *в* V_0 *и аффинно при любом* $y\in\mathcal{O}_0$, *где* $\mathcal{O}_0$ — *окрестность нуля в* Y_0. *Тогда существует пара* $(\lambda,p)\in(\mathbb{R}_+\times V_0^*)\backslash\{0\}$ *такая, что справедливы соотношения* (1.37) *при любом* $h\in Y_0$ *и* (1.38) *при* $u\in(U_\partial-\widehat{u})\cap U_0$, *где* $\mathcal{L}$ — *функция Лагранжа* (1.35). *Если* $\operatorname{Im}G'_y(0,0)=V_0$, *то можно считать, что* $\lambda=1$ *в* (1.37), (1.38).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что решение $(y,u)=(0,0)$ задачи (1.40) удовлетворяет предположениям теоремы 1.5, в которой в качестве Y, U, V, U_∂, f, F, $(\widehat{y},\widehat{u})$ взяты Y_0, U_0, V_0, $(U_\partial-\widehat{u})\cap U_0$, g, G, $(0,0)$ соответственно. Функция Лагранжа $\mathcal{L}$ задачи (1.40) имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{L}}(y,u,\lambda,p)=\lambda g(y,u)+\langle G(y,u),p\rangle_{V_0},\quad \lambda\geqslant 0,\ p\in V_0^*. \tag{1.41}$$

В силу теоремы 1.5 существуют $(\lambda,p)\in(\mathbb{R}_+\times V_0^*)\backslash\{0\}$ такие, что

$$\langle\widetilde{\mathcal{L}}'_y(0,0,\lambda,p),h\rangle_{Y_0}=0,\quad \langle\widetilde{\mathcal{L}}'_u(0,0,\lambda,p),v\rangle_{V_0}\geqslant 0 \tag{1.42}$$

для любой $v\in(U_\partial-\widehat{u})\cap U_0$. Из (1.35), (1.41), (1.39) следует, что соотношения (1.42) совпадают с (1.37), в котором $h\in Y_0$, и (1.38), в котором $u=v\in(U_\partial-\widehat{u})\cap U_0$.

Замечание 1.4. Пусть функционал J из (1.33) выпуклый, а оператор F из (1.34) имеет вид $F(y,u)=L(y,u)+F_0$, где $L\colon Y\times U\to V$ — линейный непрерывный оператор. Если Y_0 плотно в Y, V_0 плотно в V и оператор $L'_y\colon Y_0\to V_0$ является эпиморфизмом, то соотношения (1.34) и (1.37), (1.38) при $\lambda=1$ достаточны для того, чтобы пара $(\widehat{y},\widehat{u})$ являлась решением задачи (1.33), (1.34). Для доказательства, как и в замечании 1.3, следует повторить конец доказательства теоремы 1.3.

1.5. Экстремальная задач без ограничений типа включения. В заключение параграфа приведем простые необходимые условия экстремума для нелинейной экстремальной задачи, не содержащей ограничений типа $x\in X_\partial$.

Пусть X,V — банаховы пространства, функционал $J\colon X\to\mathbb{R}$ и отображения $F\colon X\to V$ непрерывно дифференцируемы. Рассмотрим экстремальную задачу

$$J(x)\to\inf, \tag{1.43}$$

$$F(x)=0 \tag{1.44}$$

и предположим, что $\widehat{x}$ — решение этой задачи. Как всегда, определим функцию Лагранжа этой задачи формулой

$$\mathcal{L}(x,\lambda,p)=\lambda J(x)+\langle F(x),p\rangle. \tag{1.45}$$

Теорема 1.7. *Пусть* $\widehat{x}$ — *решение задачи* (1.43), (1.44), *и пусть известно, что образ оператора* $F'(\widehat{x})\colon X\to V$ *замкнут. Тогда существует нену-*

левая пара $(\lambda, p) \in \mathbb{R} \times V^*$ *такая, что*

$$\langle \mathcal{L}'_x(\widehat{x}, \lambda, p), x\rangle = 0 \quad \forall x \in X. \tag{1.46}$$

Если дополнительно известно, что $\operatorname{Im} F'(\widehat{x}) = V$, *то в равенстве* (1.46) $\lambda \neq 0$ (*и можно считать, что* $\lambda = 1$).

Доказательство теоремы 1.7 изложено в книгах Иоффе, Тихомиров [1]; Алексеев, Тихомиров, Фомин [1].

Рассмотрим теперь обобщение теоремы 1.7. Пусть $\widehat{x} \in X$ — решение задачи (1.43), (1.44) и X_0, V_0 — банаховы пространства. Аналогично (1.39) положим

$$g(x) = J(\widehat{x} + x) - J(\widehat{x}), \quad G(x) = F(\widehat{x} + x) - F(\widehat{x}) \tag{1.47}$$

и допустим, что выполнено следующее условие.

Условие 1.2. (a) Отображения $g\colon X_0 \to \mathbb{R}$ и $G\colon X_0 \to V_0$, введенные в (1.47), определены при любых $x \in X_0$ и непрерывно дифференцируемы в окрестности $x = 0$.

(b) Образ отображения $G'(0)\colon X_0 \to V_0$ замкнут.

Теорема 1.8. *Пусть* $\widehat{x}$ *— решение задачи* (1.43), (1.44), *и для отображений* (1.47) *выполнено условие* 1.2. *Тогда существует ненулевая пара* $(\lambda, p) \in \mathbb{R} \times V_0^*$ *такая, что для функции Лагранжа* (1.45) *справедливо равенство*

$$\langle \mathcal{L}'_x(\widehat{x}, \lambda, p), x\rangle = 0 \quad \forall x \in X_0. \tag{1.48}$$

Если дополнительно известно, что образ оператора $G'(0)\colon X_0 \to V_0$ *совпадает с* V_0, *то* λ *в* (1.48) *отлично от нуля* (*и можно считать, что* $\lambda = 1$).

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$g(x) \to \inf, \quad G(x) = 0, \tag{1.49}$$

где g и G определены в (1.47). Так как $\widehat{x}$ — решение задачи (1.43), (1.44), мы видим, что 0 — решение задачи (1.49). Очевидно, что задача (1.49) удовлетворяет условиям теоремы 1.7, в которой $\widehat{x} = 0$, $X = X_0$, $V = V_0$, $J = g$, $F = G$. В силу этой теоремы существует ненулевая пара $(\lambda, p) \in \mathbb{R} \times V_0^*$ такая, что функция Лагранжа $M(x, \lambda, p) = \lambda g(x) + \langle G(x), p\rangle$ удовлетворяет условию $\langle M'_x(0, \lambda, p), x\rangle = 0$ для всех $x \in X_0$. Так как $M'_x(0, \lambda, p) = \mathcal{L}'_x(\widehat{x}, \lambda, p)$, где $\mathcal{L}$ определено в (1.45), справедливо равенство (1.48). □

Рассмотрим теперь следующую абстрактную экстремальную задачу. Пусть X_1 и X_2 — банаховы пространства, $f\colon X_1 \to \mathbb{R}$, $g_j\colon X_1 \to \mathbb{R}$ — функционалы и $F\colon X_1 \to X_2$ — отображение. Требуется найти $w \in X_1$ такое, что

$$f(w) = \inf_{u \in \mathcal{W}_{ad}} f(u), \tag{1.50}$$

где $\mathcal{W}_{ad} = \{u \in X_1 : F(u) = 0, g_j(u) \leqslant 0, j = 1, \cdots, m\}$. Функционал Лагранжа для экстремальной задачи (1.50) определяется формулой

$$\mathcal{L}(w, \boldsymbol{\lambda}, q) = \lambda_0 f(w) + \langle F(w), q\rangle + \sum_{i=1}^{m} \lambda_j g_j(w)$$

при всех $w \in X_1$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ и $q \in X_2^*$, где X_2^* — пространство, сопряженное к X_2. Справедлив следующий принцип Лагранжа (см. Алексеев, Тихомиров, Фомин [1]).

Теорема 1.9. *Пусть w — решение задачи* (1.50), *отображения f, g_j, F непрерывно дифференцируемы и образ оператора $F'(w)$: $X_1 \to X_2$ замкнут. Тогда существуют $q \in X_2^*$ и $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ такие, что $(q, \boldsymbol{\lambda}) \neq (0, 0)$, и для этой пары $(q, \boldsymbol{\lambda})$ справедливы соотношения*

$$\langle \mathcal{L}'_w(w, \boldsymbol{\lambda}, q), h\rangle = 0 \quad \forall\, h \in X_1, \tag{1.51}$$

$$\lambda_j \geqslant 0,\ j = 0, 1, \cdots, m, \quad \lambda_j g_j(w) = 0,\ j = 1, \cdots, m, \tag{1.52}$$

где $\mathcal{L}'_w(\cdot, \cdot, \cdot)$ обозначает производную Фреше функционала $\mathcal{L}$ по первому аргументу. Более того, если $F'(w)$: $X_1 \to X_2$ является эпиморфизмом, а ограничения $g_i(w) \leqslant 0$ отсутствуют в задаче (1.50), *то $\lambda_0 \neq 0$ и λ_0 можно взять равным* 1.

§ 2. Линейные регулярные стационарные задачи

Этот параграф посвящен выводу необходимых и достаточных условий для решения экстремальных задач, у которых функция состояния определяется с помощью линейной стационарной краевой задачи (такой набор необходимых и достаточных условий называется системой оптимальности). Эта краевая задач корректна в большинстве примеров. Однако мы рассмотрим также случай недоопределенных некорректных краевых задач. Во всех примерах образ оператора, задающего краевую задачу, имеет конечную коразмерность. Поэтому при выводе систем оптимальности в § 2 мы используем теорему 1.5.

2.1. Задачи с распределенным управлением. Рассмотрим сначала задачи управления системами, которые описываются с помощью корректных задач. Начнем с задачи (1.3.1)–(1.3.3):

$$\frac{1}{2}\|y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf, \tag{2.1}$$

$$\Delta y(x) = u(x),\ x \in \Omega, \quad \gamma y(x') = 0,\ x' \in \partial\Omega, \tag{2.2}$$

$$u \in U_\partial, \tag{2.3}$$

где $w \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, $N > 0$, U_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество $L_2(\Omega)$. Согласно теореме 1.3.1 существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times L_2(\Omega)$ задачи (2.1)–(2.3).

Теорема 2.1. *Для того, чтобы* $(\widehat{y},\widehat{u}) \in (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\times L_2(\Omega)$ *было решением задачи* (2.1)–(2.3), *необходимо и достаточно, чтобы при некотором* $p(x)\in H^2(\Omega)$ *тройка* $(\widehat{y}(x),\widehat{u}(x),p(x))$ *удовлетворяла следующей системе соотношений*:

$$\Delta\widehat{y}(x)-\widehat{u}(x)=0,\ x\in\Omega,\quad \gamma y(x')=0,\ x'\in\partial\Omega, \tag{2.4}$$

$$\Delta p(x)+\widehat{y}(x)=w(x),\ x\in\Omega,\quad \gamma p(x')=0,\ x'\in\partial\Omega, \tag{2.5}$$

$$\widehat{u}\in U_\partial,\quad \int\limits_\Omega [N(\widehat{u}(x)-f(x))-p(x)](u(x)-\widehat{u}(x))\,dx\geqslant 0\quad \forall u(x)\in U_\partial. \tag{2.6}$$

Замечание 2.1. Система соотношений (2.4)–(2.6) называется *системой оптимальности* или *системой Эйлера — Лагранжа*, соответствующей задаче (2.1)–(2.3).

Доказательство теоремы 2.1. Для вывода системы (2.4)–(2.6) воспользуемся теоремой 1.5. Положим $Y=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $U=V=L_2(\Omega)$, $F(y,u)=\Delta y-u$. Для любого $g\in L_2(\Omega)$ задача

$$\Delta y(x)=g(x),\ x\in\Omega,\quad \gamma y=0 \tag{2.7}$$

имеет решение $y\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Поэтому $\operatorname{Im}F'_y=V$. Таким образом, предположения теоремы 1.5 выполнены. Составим функцию Лагранжа с $\lambda=1$, определенную в (1.35):

$$\mathcal{L}(y,u,p)=\frac{1}{2}\|y-w\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{N}{2}\|u-f\|^2_{L_2(\Omega)}+(\Delta y-u,p)_{L_2(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Согласно теореме 1.5 существует $p\in L_2(\Omega)=V^*$ такое, что для функции Лагранжа $\mathcal{L}$ справедливы соотношения (1.37), (1.38), причем (1.37) в силу (2.8) принимает вид

$$\int\limits_\Omega(\widehat{y}(x)-w(x))z(x)\,dx+\int\limits_\Omega\Delta z(x)p(x)\,dx=0\quad\forall z\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \tag{2.9}$$

а (1.38) совпадает с (2.6). Из (2.9) при $z\in C_0^\infty(\Omega)$ следует, что

$$\Delta p(x)=w(x)-\widehat{y}(x), \tag{2.10}$$

если равенство (2.10) понимать в смысле теории обобщенных функций. Вследствие (2.10) $p\in H^0_\Delta(\Omega)$ (определение $H^s_\Delta(\Omega)$ см. в (1.1.20) при $p=2$). Воспользуемся формулой Грина

$$\int\limits_\Omega\Delta z(x)p(x)\,dx=\int\limits_\Omega\Delta p(x)z(x)\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}(\partial_n z(x')p(x')-\partial_n p(x')z(x'))\,ds, \tag{2.11}$$

которая справедлива для любых $p\in H^0_\Delta(\Omega)$, $z\in H^2(\Omega)$ (см. (1.1.24)). Подставляя правую часть (2.11) на место второго слагаемого в (2.9) и учитывая (2.10), а также соотношение $\gamma z=0$, $z\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, получим

$$\int\limits_{\partial\Omega}\partial_n z(x')p(x')\,ds=0. \tag{2.12}$$

Так как в силу теоремы 1.1.4 о следах отображение $\gamma\partial_n : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$ является эпиморфизмом, из (2.12) следует

$$\gamma p = 0. \tag{2.13}$$

Из (2.13), (2.10) получаем (2.5), а в силу теоремы о гладкости решений задачи (2.10), (2.13) справедливо включение $p \in H^2(\Omega)$.

Соотношение (2.4) совпадает с (2.2). Ввиду замечания 1.3 соотношения (2.4)–(2.6) являются также достаточными условиями минимума. □

Рассмотрим теперь задачу минимизации функционала

$$\frac{1}{2}\|\nabla y - \nabla w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf \tag{2.14}$$

при ограничениях (2.2), (2.3), где $w \in H^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, $N > 0$. Вследствие теоремы 1.3.2 существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ задачи (2.14), (2.2), (2.3). Так как $(\widehat{y}, \widehat{u})$ удовлетворяют (2.2), имеем $\widehat{y} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Теорема 2.2. *Пара* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times L_2(\Omega)$ *является решением задачи* (2.14), (2.2), (2.3) *тогда и только тогда, когда при некотором* $p \in H_0^1(\Omega)$ *тройка* $(\widehat{y}, \widehat{u}, p)$ *удовлетворяет* (2.2), (2.3), (2.6), *а также соотношениям*

$$\Delta p(x) - \Delta\widehat{y}(x) = \Delta w(x),\ x \in \Omega, \quad \gamma p(x') = 0,\ x' \in \partial\Omega. \tag{2.15}$$

Доказательство. Положим $Y = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $U = V = L_2(\Omega)$, $F(y, u) = \Delta y - u$. Проверка предположений теоремы 1.5 проводится так же, как в теореме 2.1. Функция Лагранжа в данном случае имеет вид

$$\mathcal{L}(y, u, p) = \frac{1}{2}\|\nabla y - \nabla w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(\Omega)} + (\Delta y - u, p)_{L_2(\Omega)}, \tag{2.16}$$

где $p \in L_2(\Omega)$. В силу теоремы 1.5 из (1.38) и (2.16) следует (2.6), а из (1.37) и (2.16) вытекает равенство

$$\int\limits_\Omega (\nabla\widehat{y}(x) - \nabla(w(x)) \cdot \nabla z(x)\, dx + \int\limits_\Omega \Delta z(x) p(x)\, dx = 0 \ \ \forall z \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \tag{2.17}$$

В случае $w \in H^2(\Omega)$ соотношения (2.15) выводятся из (2.16) в точности так же, как из (2.9) получено (2.5). При $w \in H^1(\Omega)$ требуются другие рассуждения. В силу леммы 1.1.1 (Пуанкаре — Стеклов) можно считать, что $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$. Вследствие (2.17) имеем $|(\Delta z, p)_{L_2(\Omega)}| \leqslant c\|\nabla z\|_{L_2(\Omega)}$. Поэтому отображение $z \to (\Delta z, p)_{L_2(\Omega)}$ продолжается по непрерывности с пространства $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ на $H_0^1(\Omega)$. Согласно теореме Рисса существует $q \in H_0^1(\Omega)$ такое, что $(\Delta z, p)_{L_2(\Omega)} = (\nabla z, \nabla q)_{L_2(\Omega)} = \langle \Delta z, q \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — отношение двойственности между $H^{-1}(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$, порожденное скалярным произведением в $L_2(\Omega)$. Из этого равенства следует, что $p = q \in H_0^1(\Omega)$, т. е. краевое условие в (2.15) выполняется. Кроме того, выполняется также дифференциальное уравнение из (2.15), понимаемое в смысле теории

обобщенных функций. Справедливость утверждения о достаточных условиях минимума следует из замечания 1.3. □

Выше рассмотрены задачи оптимального управления системами, которые описываются с помощью корректной краевой задачи (2.2). Рассмотрим теперь случай системы, описываемой некорректной задачей

$$\Delta y(x) = u(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.18}$$

без краевых условий. Рассмотрим экстремальную задачу (2.1), (2.3), (2.18). В силу теоремы 1.3.3 эта задача имеет единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Из (2.18) следует $\widehat{y} \in H^0_\Delta(\Omega)$.

Теорема 2.3. *Пара* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^0_\Delta(\Omega) \times L_2(\Omega)$ *является решением задачи* (2.1), (2.3), (2.18) *тогда и только тогда, когда при некотором* $p \in H^2(\Omega)$ *тройка* $(\widehat{y}, \widehat{u}, p)$ *удовлетворяет* (2.18), (2.3), (2.6) *и соотношениям*

$$\Delta p(x) + \widehat{y}(x) = w(x),\ x \in \Omega, \quad \gamma p(x') = 0,\ \gamma \partial_n p(x') = 0,\ x' \in \partial\Omega. \tag{2.19}$$

Доказательство. Положим $Y = H^0_\Delta(\Omega)$, $U = V = L_2(\Omega)$, $F(y,u) = \Delta y - u$. Ввиду разрешимости задачи (2.7) разрешима также задача $\Delta y(x) = g(x)$, $x \in \Omega$, $g \in L_2(\Omega)$. Поэтому $\operatorname{Im} F'_y = V$, т. е. выполнены предположения теоремы 1.5.

Функция Лагранжа задачи (2.1), (2.3), (2.18) определяется соотношением (2.8) при $p \in L_2(\Omega)$. В силу (1.38) получаем (2.6), а из (1.37) следует равенство

$$\int\limits_\Omega (\widehat{y}(x) - w(x)) z(x)\, dx + \int\limits_\Omega \Delta z(x) p(x)\, dx = 0 \quad \forall z \in H^0_\Delta(\Omega). \tag{2.20}$$

Из (2.20) при $z \in C_0^\infty(\Omega)$ следует (2.10). Поэтому $p \in H^0_\Delta(\Omega)$. Для $p \in H^0_\Delta(\Omega)$ справедлива формула Грина (2.11) при $z \in H^2(\Omega)$. Из (2.11), (2.20), (2.10) получаем

$$\int\limits_\Omega (\partial_n z(x') p(x') - z(x') \partial_n p(x'))\, dx' = 0 \quad \forall z \in H^2(\Omega). \tag{2.21}$$

Так как в силу теоремы 1.1.4 о следах отображение $(\gamma, \gamma\partial_n) \colon H^2(\Omega) \to H^{3/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)$ является эпиморфизмом, из (2.21) следуют равенства

$$\gamma p(x') = 0, \quad \gamma \partial_n p(x') = 0, \quad x' \in \partial\Omega. \tag{2.22}$$

Из (2.10) и (2.22) вытекает (2.19). Кроме того, из (2.10) и (2.22) следует, что $p \in H^2(\Omega)$. Утверждение о достаточных условиях минимума справедливо в силу замечания 1.3. □

2.2. Регулярные задачи с граничным управлением. Рассмотрим задачу

$$\frac{1}{2}\|y-w\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{N}{2}\|u-f\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\to\inf, \tag{2.23}$$

$$\Delta y(x)=g(x),\ x\in\Omega,\quad \gamma\partial_n y=u, \tag{2.24}$$

$$u\in U_\partial, \tag{2.25}$$

где $w\in L_2(\Omega)$, $f\in L_2(\partial\Omega)$, $g\in L_2(\Omega)$, $N>0$, U_∂ — выпуклое замкнутое подмножество $L_2(\Omega)$, причем $U_\partial\cap L_g\neq\varnothing$, где L_g — множество (1.3.13′). Согласно теореме 1.3.5 задача (2.23)–(2.25) имеет единственное решение $(\widehat{y},\widehat{u})\in H^{3/2}_\Delta(\Omega)\times L_2(\partial\Omega)$.

Теорема 2.4. *Пара $(\widehat{y},\widehat{u})\in H^{3/2}_\Delta(\Omega)\times L_2(\partial\Omega)$ является решением задачи* (2.23)–(2.25) *тогда и только тогда, когда существует $p\in H^2(\Omega)$ такое, что тройка $(\widehat{y},\widehat{u},p)\in H^{3/2}_\Delta(\Omega)\times L_2(\partial\Omega)\times H^2(\Omega)$, кроме условий* (2.24), (2.25), *удовлетворяет соотношениям*

$$\Delta p(x)+(\widehat{y}(x)+w(x))=0,\quad x\in\Omega,\quad \gamma_n p=0, \tag{2.26}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega}(N(\widehat{u}(x')-f(x'))+\gamma p(x'))(u(x')-\widehat{u}(x'))\,dx'\geqslant 0\quad\forall u\in U_\partial. \tag{2.27}$$

Доказательство. Положим

$$U^0_\partial=U_\partial\cap\left\{u\in L_2(\partial\Omega):\int\limits_{\partial\Omega}u\,ds=\int\limits_{\partial\Omega}\widehat{u}\,ds\right\} \tag{2.28}$$

и выведем необходимые условия экстремума для задачи (2.23), (2.24) с включением

$$u\in U^0_\partial. \tag{2.29}$$

Положим $Y=H^{3/2}_\Delta(\Omega)$, $U=L_2(\partial\Omega)$, $F(y,u)=(\Delta y-g,\gamma\partial_n y-u)$. В силу теоремы 1.1.9 задача

$$\Delta z=h_1,\quad \gamma\partial_n z=h_2 \tag{2.30}$$

имеет решение $z\in H^{3/2}_\Delta(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $h_1\in L_2(\Omega)$, $h_2\in L_2(\partial\Omega)$ и выполнено соотношение

$$\int\limits_\Omega h_1dx-\int\limits_{\partial\Omega}h_2\,ds=0.$$

Положим

$$V=\left\{(h_1,h_2)\in L_2(\Omega)\times L_2(\partial\Omega):\int\limits_\Omega h_1dx-\int\limits_{\partial\Omega}h_2\,ds=0\right\}. \tag{2.31}$$

Очевидно, что $F'_yY=V$ и $F(Y,U^0_\partial)\subset V$ в силу (2.28). Следовательно, $F(Y,U^0_\partial)=V$. Таким образом, выполнены предположения теоремы 1.5. Для применения этой теоремы необходимо описать пространство V^*. Отож-

дествим пространство $L_2(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$ с его сопряженным. Тогда пространство V^*, сопряженное к (2.31), состоит из пар $(\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2) = \{(\eta_1 + \lambda, \eta_2 + \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$, где $\eta_1 \in L_2(\Omega)$, $\eta_2 \in L_2(\partial\Omega)$, а значение функционала $(\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2)$ на $(h_1, h_2) \in V$ равно

$$\begin{aligned}
&\langle(\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2), (h_1, h_2)\rangle_V = \int\limits_{\Omega} (\eta_1(x) + \lambda) h_1 dx - \int\limits_{\partial\Omega} (\eta_2(x') + \lambda) h_2 \, ds \\
&= \int\limits_{\Omega} \eta_1 h_1 dx - \int\limits_{\partial\Omega} \eta_2 h_2 \, ds + \lambda \Big(\int\limits_{\Omega} h_1 dx - \int\limits_{\partial\Omega} h_2 \, ds \Big) \\
&= \int\limits_{\Omega} \eta_1 h_1 dx - \int\limits_{\partial\Omega} \eta_2 h_2 \, ds. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Функция Лагранжа задачи (2.23), (2.24), (2.29) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(y, u, \widetilde{p}, \widetilde{q}) = \frac{1}{2} \|y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2} \|u - f\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \\
&+ \langle(\widetilde{p}, \widetilde{q}), (\Delta y - g, \gamma \partial_n y - u)\rangle_V, \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

где $(\widetilde{p}, \widetilde{q}) = \{(p + \lambda, q + \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\} \in V^*$, $p \in L_2(\Omega)$, $q \in L_2(\partial\Omega)$. Из (2.33), (2.32), (1.37) следует, что

$$(\widehat{y} - w, z)_{L_2(\Omega)} + (p, \Delta z)_{L_2(\Omega)} = (q, \gamma \partial_n z)_{L_2(\partial\Omega)} \quad \forall z \in H^{3/2}_{\Delta}(\Omega). \qquad (2.34)$$

Из (2.34) вытекает равенство (2.10), понимаемое в смысле теории обобщенных функций, а следовательно, включение $p \in H^0_{\Delta}(\Omega)$. Из (2.34), (2.10), (2.11) получаем равенство

$$\int\limits_{\partial\Omega} ((\partial_n z)(p - q) - (\partial_n p) z) \, ds = 0 \quad \forall z \in H^2(\Omega),$$

из которого следует

$$\gamma p = q, \quad \gamma \partial_n p = 0. \qquad (2.35)$$

Из (2.10), (2.35) вытекает (2.26), а из (2.33), (1.38), (2.35) — неравенство

$$\int\limits_{\partial\Omega} (N(\widehat{u}(s) - f(s)) - p(s) - \lambda)(u(s) - \widehat{u}(s)) \, ds \geqslant 0 \quad \forall u \in U^0_{\delta}, \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (2.36)$$

Очевидно, что соотношениям (2.26) удовлетворяет также $p(x) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Покажем, что при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ неравенство (2.36) верно для любого $u \in U_{\partial}$. Действительно, пусть $u \in U_{\partial}$, а константы α, μ определяются из

равенств

$$\int\limits_{\partial\Omega} (N(\widehat{u}(x') - f(x')) - p(x'))\, ds = \alpha \int\limits_{\partial\Omega} ds,$$
$$\int\limits_{\partial\Omega} u\, ds + \mu \int\limits_{\partial\Omega} ds = \int\limits_{\partial\Omega} \widehat{u}\, ds. \tag{2.37}$$

Из (2.36), (2.37) следует

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int\limits_{\partial\Omega} (N(\widehat{u} - f) - p - \alpha)(u + \mu - \widehat{u})\, ds \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} (N(\widehat{u} - f) - p - \alpha)(u - \widehat{u})\, ds + \mu \int\limits_{\partial\Omega} (N(\widehat{u} - f) - p - \alpha)\, ds \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} (N(\widehat{y} - f) - p_1)(u - \widehat{u})\, ds, \end{aligned} \tag{2.38}$$

где $p_1 = p + \alpha$. Неравенство (2.38) доказывает (2.27). Утверждение о достаточных условиях минимума следует из замечания 1.3. □

Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω разбита на два множества Γ_0 и Γ_1:

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing, \quad \operatorname{meas} \Gamma_0 > 0. \tag{2.39}$$

Через γ_i будем обозначать оператор сужения на Γ_i, $i = 0, 1$, а через γ — как и раньше — оператор сужения на $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу

$$\frac{1}{2}\|y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(\Gamma_0)} \to \inf, \tag{2.40}$$

$$\Delta y(x) = g(x),\ x \in \Omega, \quad \gamma_1 y = 0,\ \gamma_0 y = u, \tag{2.41}$$

$$u \in U_\partial, \tag{2.42}$$

где $w \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(\Gamma_0)$, $g \in L_2(\Omega)$, $N > 0$, U_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\Gamma_0)$. Согласно теореме 1.3.6 существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^{1/2}_\Delta(\Omega) \times L_2(\Gamma_0)$ задачи (2.40)–(2.42).

Теорема 2.5. *Пара $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^{1/2}_\Delta(\Omega) \times L_2(\Gamma_0)$ является решением задачи* (2.40)–(2.42) *тогда и только тогда, когда существует функция $p \in H^2(\Omega)$ такая, что тройка $(\widehat{y}, \widehat{u}, p) \in H^{1/2}_\Delta(\Omega) \times L_2(\Gamma_0) \times H^2(\Omega)$ кроме условий* (2.41), (2.42) *удовлетворяет соотношениям*

$$\Delta p(x) = w(x) - \widehat{y}(x),\ x \in \Omega, \quad \gamma p = 0, \tag{2.43}$$

$$\int\limits_{\Gamma_0} (N(\widehat{u}(x) - f(x)) - \partial_n p(x))(u(x) - \widehat{u}(x))\, ds \geqslant 0 \quad \forall u \in U_\partial. \tag{2.44}$$

Доказательство. Положим $Y = \{y \in H^{1/2}_\Delta(\Omega) : \gamma_1 y = 0\}$, $U = L_2(\Gamma_0)$, $V = L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma_0)$, $F(y, u) = (\Delta y - g, \gamma_0 y - u)$. Так как задача $\Delta z = h_1$, $\gamma_0 z = h_2$, $\gamma_1 z = 0$ при любых $(h_1, h_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma_0)$ в силу теоремы 1.1.8

имеет единственное решение $z \in H^{1/2}_{\Delta}(\Omega)$, выполнены все предположения теоремы 1.5. Функция Лагранжа задачи (2.40)–(2.42) имеет вид

$$\mathcal{L}(y,u,p) = \frac{1}{2}\|y-w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u-f\|^2_{L_2(\Gamma_0)} + (\Delta y - g, p)_{L_2(\Omega)} + (\gamma_0 y - u, q)_{L_2(\Gamma_0)}, \tag{2.45}$$

где $p \in L_2(\Omega)$, $q \in L_2(\Gamma_0)$. В силу (2.45), (1.37)

$$(\widehat{y} - w, z)_{L_2(\Omega)} + (\Delta z, p)_{L_2(\Omega)} + (\gamma_0 z, q)_{L_2(\Gamma_0)} = 0 \quad \forall z \in H^{1/2}_{\Delta}(\Omega). \tag{2.46}$$

Из (2.46) при $z \in C_0^\infty(\Omega)$ вытекает (2.10), а следовательно, включение $p \in H^0_{\Delta}(\Omega)$. Из (2.46), (2.10), (2.11) при $z \in Y \cap H^2(\Omega)$ вытекают соотношения

$$\gamma p = 0, \quad \gamma_0 \partial_n p = q. \tag{2.47}$$

В силу (2.10) и первого равенства в (2.47) справедливы соотношения (2.43), а из (1.38), (2.45), и второго равенства в (2.47) следует (2.44). Утверждение о достаточных условиях минимума справедливо ввиду замечания 1.3. □

Рассмотрим теперь задачу с граничным наблюдением

$$\frac{1}{2}\|\gamma\partial_n y - w\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + \frac{N}{2}\|u-f\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \to \inf, \tag{2.48}$$

$$\Delta y(x) = g(x),\ x \in \Omega, \quad \gamma y = u,\ u \in U_\partial, \tag{2.49}$$

где $w \in L_2(\partial\Omega)$, $f \in L_2(\partial\Omega)$, $g \in L_2(\Omega)$, $N > 0$, U_∂ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\partial\Omega)$, причем $U_\partial \cap H^1(\partial\Omega) \neq \varnothing$. В силу теоремы 1.3.7 существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^{3/2}_{\Delta}(\Omega) \times H^1(\partial\Omega)$ задачи (2.48), (2.49).

Теорема 2.6. *Пара* $(\widehat{y}, \widehat{u})$ *является решением задачи* (2.48), (2.49) *тогда и только тогда, когда существует функция* $p \in H^{1/2}_{\Delta}(\Omega)$ *такая, что тройка* $(\widehat{y}, \widehat{u}, p) \in H^{3/2}_{\Delta}(\Omega) \times H^1(\partial\Omega) \times H^{1/2}_{\Delta}(\Omega)$ *удовлетворяет* (2.49) *и следующим соотношениям*:

$$\Delta p(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad \gamma p(x) + \gamma\partial_n \widehat{y}(x) = w(x'), \tag{2.50}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} (N(\widehat{u}(x') - f(x')) - \partial_n p(x'))(u(x') - \widehat{u}(x'))\, ds \geqslant 0 \quad \forall u \in U_\partial. \tag{2.51}$$

Доказательство. Положим $Y = H^{3/2}_{\Delta}(\Omega)$, $U = H^1(\partial\Omega)$, $V = L_2(\Omega) \times H^1(\partial\Omega)$, $F(y,u) = (\Delta y - g, \gamma y - u)$. Из существования решения $z \in H^{3/2}(\Omega)$ задачи $\Delta z = h_1$, $\gamma z = h_2$ при любых $h_1 \in L_2(\Omega)$, $h_2 \in H^1(\partial\Omega)$, которое гарантируется теоремой 1.1.8, вытекает справедливость условий теоремы 1.5. Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(y,u,p) = \frac{1}{2}\|\gamma\partial_n y - w\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + \frac{N}{2}\|u-f\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + (\Delta y - g, p)_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma y - u, q\rangle, \tag{2.52}$$

где $p \in L_2(\Omega)$, $q \in H^{-1}(\partial\Omega)$. Вследствие (2.52) и (1.37)

$$(\gamma\partial_n\widehat{y} - w, \gamma\partial_n z)_{L_2(\partial\Omega)} + (\Delta z, p)_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma z, q\rangle = 0 \quad \forall z \in H^{3/2}_{\Delta}(\Omega), \tag{2.53}$$

откуда вытекает, что

$$\Delta p(x) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{2.54}$$

Следовательно, $p \in H^0_{\Delta}(\Omega)$. Из (2.53), (2.54), (2.11) следуют соотношения

$$\gamma\partial_n p = q, \quad \gamma p + \gamma\partial_n\widehat{y} = w. \tag{2.55}$$

В силу (2.54) и второго равенства в (2.55) справедливо (2.50). Из (2.52), (1.38) и первого равенства в (2.55) вытекает (2.51). Утверждение о достаточных условиях минимума следует из замечания 1.3. □

2.3. Жесткое управление. Рассмотрим задачу

$$\|\gamma y - w\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \to \inf, \tag{2.56}$$

$$\Delta y = 0, \quad \gamma\partial_n y = u, \quad u \in U_{\partial}, \tag{2.57}$$

где $w \in L_2(\partial\Omega)$, U_{∂} — выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\partial\Omega)$, удовлетворяющее условиям 1.5.1 и 1.5.2. Тогда согласно теореме 1.5.1 существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^{3/2}_{\Delta}(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$ задачи (2.56), (2.57).

Теорема 2.7. *Пара* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^{3/2}_{\Delta}(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$ *является решением задачи* (2.56), (2.57) *тогда и только тогда, когда при некотором* $p \in H^{3/2}_{\Delta}(\Omega)$ *тройка* $(\widehat{y}, \widehat{u}, p) \in H^{3/2}_{\Delta}(\Omega) \times L_2(\partial\Omega) \times H^{3/2}_{\Delta}(\Omega)$ *удовлетворяет условию* (2.57) *и следующим соотношениям*:

$$\Delta p(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad \gamma\partial_n p = \gamma\widehat{y} - w, \tag{2.58}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \gamma p(x')(u(x') - \widehat{u}(x'))\, ds \geqslant 0 \quad \forall u \in U_{\partial}. \tag{2.59}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4.

Заменим теперь (2.56) соотношением

$$\|\gamma y - w\|^2_{H^1(\partial\Omega)} \to \inf \tag{2.60}$$

и рассмотрим задачу (2.60), (2.57), где $w \in H^1(\partial\Omega)$, U_{∂} — выпуклое замкнутое подмножество $L_2(\partial\Omega)$, удовлетворяющее условию 1.5.1. В силу теоремы 1.5.2 существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^{3/2}_{\Delta}(\Omega) \times L_2(\partial\Omega)$ задачи (2.60), (2.57). Для формулировки необходимых и достаточных условий экстремума у задачи (2.60), (2.57) введем самосопряженный положительно определенный оператор $\Lambda\colon L_2(\partial\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$ с областью определения $D(\Lambda) = H^1(\partial\Omega)$, удовлетворяющий условию $\|\Lambda u\|_{L_2(\partial\Omega)} = \|u\|_{H^1(\partial\Omega)}$ для всех $u \in H^1(\partial\Omega)$. Существование оператора Λ доказано в Лионс, Мадженес [2].

Теорема 2.8. *Пара* $(\widehat{y}, \widehat{u})$ *является решением задачи* (2.60), (2.57) *тогда и только тогда, когда существует функция* $p \in H^{1/2}_{\Delta}(\Omega)$ *такая, что тройка* $(\widehat{y}, \widehat{u}, p) \in H^{3/2}_{\Delta}(\Omega) \times L_2(\partial\Omega) \times H^{1/2}_{\Delta}(\Omega)$ *удовлетворяет условия* (2.57), (2.59) *и следующему соотношению*:

$$\Delta p(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad \gamma\partial_n p = \Lambda^2(\gamma\widehat{y} - w). \tag{2.61}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4.

§ 3. Оптимизация в задаче Коши для оператора Лапласа

Мы рассматриваем задачу с нулевыми данными Коши и распределенным управлением, а также задачу оптимального управления данными Коши. В первом случае для вывода системы оптимальности удается воспользоваться теоремой 1.5. Во втором случае оператор, порождающий задачу Коши, имеет незамкнутую область значений, и поэтому мы вынуждены использовать теорему 1.4. Выбор функциональных пространств, необходимых для применения теоремы 1.4, во многом определяется свойствами множества U_∂ ограничений для управления. Мы исследуем нетривиальный и важный для приложений случай, когда U_∂ имеет непустую внутренность в пространстве непрерывных функций.

3.1. Распределенное управление. Рассмотрим задачу

$$\frac{1}{2}\|y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf, \tag{3.1}$$

$$\Delta y(x) = u(x),\ x \in \Omega, \quad \gamma y = 0, \quad \gamma\partial_n y = 0, \tag{3.2}$$

$$u \in U_\partial, \tag{3.3}$$

где $w \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$, $N > 0$, U_∂ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\Omega)$. Предполагается, что $\Delta H^2_0(\Omega) \cap U_\partial \neq \varnothing$, где $\Delta H^2_0(\Omega) = \{\Delta u(x) : u \in H^2_0(\Omega)\}$. Согласно теореме 1.3.4 существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^2_0(\Omega) \times L_2(\Omega)$ задачи (3.1), (3.2).

Теорема 3.1. *Пара* $(\widehat{y}, \widehat{u})$ *является решением задачи* (3.1)–(3.3) *тогда и только тогда, когда существует* $p \in H^0_{\Delta}(\Omega)$ *такое, что тройка* $(\widehat{y}, \widehat{u}, p) \in H^2_0(\Omega) \times \Delta H^2_0(\Omega) \times H^0_{\Delta}(\Omega)$ *кроме условий* (3.2), (3.3) *удовлетворяет соотношениям*

$$\Delta p(x) = w(x) - \widehat{y}(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.4}$$

$$\int\limits_{\Omega} (N(\widehat{u}(x) - f(x)) - p(x))(u(x) - \widehat{u}(x))\,dx \geqslant 0 \quad \forall u \in U_\partial. \tag{3.5}$$

Доказательство. Введем пространство

$$H = \{v \in L_2(\Omega) : \Delta v = 0\}, \tag{3.6}$$

снабженное нормой пространства $L_2(\Omega)$. Справедливо разложение

$$L_2(\Omega) = \Delta H^2_0 \oplus H. \tag{3.7}$$

Действительно, если $v \in H$, то в силу (2.11)

$$\int\limits_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \int\limits_{\Omega} u \Delta v \, dx = 0 \quad \forall u \in H_0^2(\Omega). \tag{3.8}$$

Следовательно, $H \subset (\Delta H_0^2(\Omega))^{\perp}$. С другой стороны, если $v \in (\Delta H_0^2(\Omega))^{\perp}$, то в силу (3.8) имеем $\Delta v = 0$, т. е. $v \in H$.

Пусть $Q : L_2(\Omega) \to \Delta H_0^2$ — ортопроектор на ΔH_0^2, и пусть

$$u \in U_{\partial}^0 \equiv Q U_{\partial}. \tag{3.9}$$

Очевидно, что решение $(\widehat{y}, \widehat{u})$ задачи (3.1)–(3.3) является также решением задачи (3.1), (3.2), (3.9). Получим сначала необходимые условия экстремума для задачи (3.1), (3.2), (3.9). Положим $Y = H_0^2(\Omega)$, $U = V = \Delta H_0^2$, $F(y, u) = \Delta y - u$. Очевидно, что оператор $F_y' = \Delta : Y \to V$ осуществляет изоморфизм пространств. Следовательно, справедливы все предположения теоремы 1.5. Воспользуемся этой теоремой. Функция Лагранжа $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L}(y, u, p) = \frac{1}{2}\|y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(\Omega)} + \langle \Delta y - u, \widetilde{p} \rangle_{\Delta H_0^2}, \tag{3.10}$$

где $\widetilde{p} \in (\Delta H_0^2)^*$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Delta H_0^2}$ — соотношение двойственности между пространством ΔH_0^2 и его сопряженным. Очевидно, что в силу (3.7) можно отождествить $(\Delta H_0^2)^*$ с $L_2(\Omega)/H$. Тогда $\widetilde{p} = p_0 + H$, где $p_0 \in \Delta H_0^2$, и при любом $v \in \Delta H_0^2$ имеем

$$\langle v, \widetilde{p} \rangle_{\Delta H_0^2} = (v, p_0)_{L_2(\Omega)} = (v, p_0 + p_1)_{L_2(\Omega)}, \quad p_1 \in H. \tag{3.11}$$

Из (1.37), (3.10), (3.11) следует (3.4) при $p = p_0 \in \Delta H_0^2$. Вследствие (1.38), (3.10), (3.11)

$$(N(u - f) - p_0, u - \widehat{u})_{L_2(\Omega)} \geqslant 0 \quad \forall u \in U_{\partial}^0. \tag{3.12}$$

Выведем теперь необходимые условия экстремума для задачи (3.1)–(3.3). Возьмем $p = p_0 + p_1$, где p_0 совпадает с функцией p_0 из (3.12), а $p_1 \in H$ выбрано так, что $Nf + p_1 \in \Delta H_0^2$. Такой выбор p_1 возможен в силу разложения (3.7). Так как $\Delta p_0 = w - y$ и $\Delta p_1 = 0$, для $p = p_0 + p_1$ справедливо равенство (3.4). В силу (3.7), (3.9) для любого $u \in U_{\partial}$ существуют $u_0 \in U_{\partial}^0$ и $u_1 \in H$ такие, что $u = u_0 + u_1$. Поэтому, учитывая включения $\widehat{u}, u_0, p_0, Nf + p_1 \in \Delta H_0^2$, $u_1, p_1 \in H$ и соотношение $\Delta H_0^2 \perp H$, для $u \in U_{\partial}$ получим

$$\begin{aligned}(N(\widehat{u} - f) - p, u - \widehat{u})_{L_2(\Omega)} &= (N(\widehat{u} - f) - p_0, u_0 - \widehat{u})_{L_2(\Omega)} - (p_1, u_0 - \widehat{u})_{L_2(\Omega)} \\ &+ (N(\widehat{u} - f) - p_0 - p_1, u_1)_{L_2(\Omega)} = (N(\widehat{u} - f) - p_0, u_0 - \widehat{u})_{L_2(\Omega)} \geqslant 0,\end{aligned} \tag{3.13}$$

причем последнее неравенство справедливо в силу (3.12). Ввиду (3.13) справедливо (3.5). Утверждение о достаточных условиях минимума следует из замечания 1.3. □

3.2. Оптимизация данных Коши. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — связная ограниченная область, граница которой $\partial\Omega \in C^{\infty}$ состоит из двух замкнутых непересекающихся многообразий Γ_0, Γ_1: $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 =$

$\varnothing$, $\dim\Gamma_j = d-1$, $j=0,1$. В области Ω рассмотрим задачу оптимального управления системой, которая описывается с помощью задачи Коши для оператора Лапласа:

$$J(y,u,v) = \frac{1}{2}\|\gamma_1 y - w\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \frac{N_0}{2}\|u-f\|^2_{L_2(\Gamma_0)}$$
$$+\frac{N_1}{2}\|v-g\|^2_{L_2(\Gamma_0)} \to \inf, \tag{3.14}$$
$$\Delta y(x) = 0, \quad \gamma_0 y = u, \quad \gamma_0\partial_n y = v, \tag{3.15}$$
$$u \in U_\partial, \quad v \in V_\partial, \tag{3.16}$$

где $x=(x_1,\dots,x_d)\in\Omega$, γ_j, $j=0,1$, — оператор сужения функции, определенной на Ω, на многообразие Γ_j, ∂_n — оператор дифференцирования по внешней нормали к границе Ω, $N_0>0$, $N_1>0$ — заданные числа, $w\in L_2(\Gamma_1)$, $f\in L_2(\Gamma_0)$, $g\in L_2(\Gamma_0)$ — заданные функции, $U_\partial\subset L_2(\Gamma_0)$, $V_\partial\subset L_2(\Gamma_0)$ — выпуклые замкнутые множества. Предполагается, что существует тройка $(y,u,v)\in H^{1/2}_\Delta(\Omega)\times L_2(\Gamma_0)\times L_2(\Gamma_0)$, удовлетворяющая соотношениям (3.15), (3.16). Согласно теореме 1.3.8 существует единственное решение $(\widehat{y},\widehat{u},\widehat{v})\in H^{1/2}_\Delta(\Omega)\times H(\Gamma_0)\times L_2(\Gamma_0)$ задачи (3.14)–(3.16).

При выводе системы оптимальности для задачи (3.14)–(3.16) мы ограничимся рассмотрением двух примеров множеств U_∂, V_∂.

Пример 3.1. Положим

$$U_\partial = L_2^+(\Gamma_0), \quad V_\partial = L_2^-(\Gamma_0), \tag{3.17}$$

где

$$L_2^+(\Gamma_0) = \{u\in L_2(\Gamma_0) : u(x)\geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_0\},$$
$$L_2^-(\Gamma_0) = \{u\in L_2(\Gamma_0) : u(x)\leqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma_0\}.$$

Пример 3.2. Пусть $\alpha_j\in C(\Gamma_0)$, $\beta_j\in C(\Gamma_0)$, $j=1,2$, и существует $\eta>0$ такое, что $\alpha_j(x)<\beta_j(x)-\eta$, $x\in\Gamma_0$, $j=1,2$.

Положим

$$U_\partial = \{u\in L_\infty(\Gamma_0) : \alpha_1(x)\leqslant u(x)\leqslant\beta_1(x) \text{ для почти всех } x\in\Gamma_0\},$$
$$V_\partial = \{u\in L_\infty(\Gamma_0) : \alpha_2(x)\leqslant u(x)\leqslant\beta_2(x) \text{ для почти всех } x\in\Gamma_0\}. \tag{3.18}$$

При выводе систем оптимальности помимо пространств Соболева $W^k_\beta(\Omega)$ и пространств Бесова $B^s_\beta(\Gamma_0)$, а также пространств вида

$$W^k_{\beta,\Delta}(\Omega) = \{y\in W^k_\beta(\Omega) : \Delta y\in L_\beta(\Omega)\}, \tag{3.19}$$

определенных в гл. 1, § 1, нам понадобятся пространства

$$Y = \{y\in H^{1/2}_\Delta(\Omega) : \gamma_0\partial_n y\in L_2(\Gamma_0)\}, \tag{3.20}$$
$$P_\beta = \{p\in W^0_{\beta,\Delta}(\Omega) : \gamma_0 p\in (C(\Gamma_0))^*,\ \gamma_0\partial_n p\in (C(\Gamma_0))^*\}. \tag{3.21}$$

Норма в пространстве P_β определяется равенством

$$\|p\|_{P_\beta} = \|p\|_{L_\beta(\Omega)} + \|\Delta p\|_{L_\beta(\Omega)} + \|\gamma_0 p\|_{(C(\Gamma_0))^*} + \|\gamma_0 \partial_n p\|_{(C(\Gamma_0))^*},$$

где $\beta > 1$ и $\|q\|_{(C(\Gamma_0))^*} = \sup\limits_{\|\varphi\|_{C(\Gamma_0)=1}} |\langle q, \varphi\rangle_{(\Gamma_0)}|$. При этом для множества S через $\langle q, \varphi\rangle_{(S)}$ обозначается скалярное произведение в $L_2(S)$, а также порожденное им соотношение двойственности. Очевидно, что Y — гильбертово, а P_β — банахово пространства.

3.3. Система оптимальности. Пример 3.1. Выведем систему оптимальности для задачи (3.14)–(3.16) для множеств U_∂ и V_∂ вида (3.17).

Теорема 3.2. *Набор $(\widehat{y}, \widehat{u}, \widehat{v})$ является решением задачи* (3.14)–(3.17), *тогда и только тогда, когда существует $p \in P_\beta$, $\beta < d/(d-1)$, такое, что $(\widehat{y}, \widehat{u}, \widehat{v}, p) \in Y \times H^1(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0) \times P_\beta$ кроме условий* (3.15), (3.16) *удовлетворяет соотношениям*

$$\Delta p(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad \gamma_1 \widehat{y} - \gamma_1 \partial_n p = w, \quad \gamma_1 p = 0, \tag{3.22}$$

$$\langle N_0(\widehat{u} - f) - \gamma_0 \partial_n p, v_0\rangle_{(\Gamma_0)} \geqslant 0 \quad \forall v_0 \in W_0, \tag{3.23}$$

$$\langle N_1(\widehat{v} - g) + \gamma_0 p, v_1\rangle_{(\Gamma_0)} \geqslant 0 \quad \forall v_1 \in W_1, \tag{3.24}$$

где $W_0 = \{v \in C(\Gamma_0) : v(x) \geqslant -\widehat{u}(x)$ для почти всех $x \in \Gamma_0\}$, и $W_1 = \{v \in C(\Gamma_0) : v(x) \leqslant -\widehat{v}(x)$ для почти всех $x \in \Gamma_0\}$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.4. Положим $X = Y \times L_2(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0)$, где Y — пространство (3.20), $V = L_2(\Omega) \times (L_2(\Gamma_0))^2$, $L(y, u, v) = (\Delta y, \gamma_0 y - u, \gamma_0 \partial y - v)$, $F_0 = 0$, $X_\partial = Y \times U_\partial \times V_\partial$. Очевидно, что $\widehat{x} = (\widehat{y}, \widehat{u}, \widehat{v}) \in X$ и $L(\widehat{y}, \widehat{u}, \widehat{v}) \in V$. Так как $\operatorname{Int}_X X_\partial = \varnothing$, если U_∂, V_∂ — множества (3.17), прежде всего необходимо выбрать пространство X_0 со столь сильной топологией, чтобы относительно этой топологии X_∂ имело бы непустую внутренность. Пусть $U_0 = C(\Gamma_0) \times C(\Gamma_0)$. Тогда

$$\operatorname{Int}_{U_0}((U_\partial \times V_\partial) - (\widehat{u}, \widehat{v})) \cap U_0 \neq \varnothing. \tag{3.25}$$

Теперь подберем пространства Y_0 и V_0 так, чтобы для $X_0 = Y_0 \times U_0$ и V_0 выполнялись условия (1.26) и (1.27). Возьмем $Y_0 = W^2_\alpha(\Omega)$, где $\alpha > d \geqslant 2$, $V_0 = L_\alpha(\Omega) \times (C(\Gamma_0))^2$. Непрерывность вложений $X_0 \subset X$ и $V_0 \subset V$ очевидна. Так как $\alpha > d$, вследствие теоремы 1.1.3 (теорема о следах для $W^k_\beta(\Omega)$) и теоремы 1.1.1 из включения $y \in W^2_\alpha(\Omega)$ следует $\gamma_0 y \in B^{2-1/\alpha}_\alpha(\Gamma_0) \subset C(\Gamma_0)$, $\gamma_0 \partial y \in B^{1-1/\alpha}_\alpha(\Gamma_0) \subset C(\Gamma_0)$. Поэтому $LX_0 \subset V_0$. Для доказательства равенства $LX_0 = V_0$ достаточно показать, что для любых $(f, \varphi, \psi) \in V_0$ существует $(z, u, v) \in X_0$ такое, что

$$\Delta z = f, \quad \gamma_0 z - u = \varphi, \quad \gamma_0 \partial_n z - v = \psi. \tag{3.26}$$

Пусть $z \in W^2_\alpha(\Omega)$ — решение задачи $\Delta z = f$, $\gamma_1 z = 0$, $\gamma_0 \partial_n z = 0$, $u = \gamma_0 z - \varphi$, $v = -\psi$. Разрешимость этой задачи следует из предложения 1.3. Очевидно, что (z, u, v) удовлетворяют (3.26). Следовательно, справедливы условия (1.27). Из (3.25) следует (1.20).

Функция Лагранжа задачи (3.14)–(3.16) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(y,u,v,\lambda,p,q_0,q_1)\\
&=\lambda\left(\frac{1}{2}\|\gamma_1 y-w\|^2_{L_2(\Gamma_1)}+\frac{N_0}{2}\|u-f\|^2_{L_2(\Gamma_0)}+\frac{N_1}{2}\|v-g\|^2_{L_2(\Gamma_0)}\right)\\
&+\langle\Delta y,p\rangle_{(\Omega)}+\langle q_0,\gamma_0 y-u\rangle_{(\Gamma_0)}+\langle q_1,\gamma_0\partial_n y-v\rangle_{(\Gamma_0)},
\end{aligned}\tag{3.27}$$

где $\lambda\geqslant 0$, $p\in L_\beta(\Omega)$, $\beta=\alpha/(\alpha-1)$, $q_i\in(C(\Gamma_0))^*$, $i=0,1$, причем $(\lambda,p,q_0,q_1)\neq 0$. Подставив (3.27) в (1.28) и полагая $y=(h,0,0)\in((Y\times U_\partial\times V_\partial)-\widehat{x})\cap X_0$ в (1.28), для любого $h\in Y_0=W^2_\alpha(\Omega)$ получим

$$\lambda\langle\gamma_1\widehat{y}-w,\gamma_1 h\rangle_{(\Gamma_1)}+\langle\Delta h,p\rangle_{(\Omega)}+\langle q_0,\gamma_0 h\rangle_{(\Gamma_0)}+\langle q_1,\gamma_0\partial_n h\rangle_{(\Gamma_0)}=0.\tag{3.28}$$

Полагая $h\in C_0^\infty(\Omega)$ в (3.28), получим равенство (3.22_1), понимаемое в смысле теории обобщенных функций. Поэтому $p\in W^0_{\beta,\Delta}(\Omega)$ и, подставляя в (3.28) вместо $\langle\Delta h,p\rangle_{(\Omega)}$ его выражение из формулы Грина (2.11), в которой $z=h$, находим

$$\lambda(\gamma_1\widehat{y}-w)=\gamma_1\partial_n p,\tag{3.29}$$

$$q_1=-\gamma_0 p,\quad q_0=\gamma_0\partial_n p,\tag{3.30}$$

а также (3.22_3). Если $\lambda=0$, то из (3.22_1), (2.22_3), (3.29) и теоремы Кальдерона о единственности решения задачи Коши (см., например, Мизохата [1]) следует $p=0$. В силу (3.30) тогда $q_1=0$, $q_2=0$. Но это противоречит утверждению теоремы 1.4 $(\lambda,p,q_0,q_1)\neq 0$. Поэтому можно считать, что $\lambda=1$. Из (3.29) вытекает (3.22_2). Подставляя (3.27) в (1.28) и полагая $x=(0,v_0,0)$, $x=(0,0,v_1)$ в (1.28), получим (3.23), (3.24).

Мы покажем, что условия (3.22)–(3.24), (3.15), (3.16) достаточны для того, чтобы $(\widehat{y},\widehat{u},\widehat{v})$ было решением задачи (3.14)–(3.16), если проверим единственность решения (y,u,v,p) задачи (3.22)–(3.24), (3.15), (3.16) и воспользуемся леммой 1.2.

Пусть (y_i,u_i,v_i,p_i), $i=1,2$, — два решения задачи (3.22)–(3.24), (3.15), (3.16) и $(\widetilde{y},\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{p})=(y_1-y_2,u_1-u_2,v_1-v_2,p_1-p_2)$. Набор $(\widetilde{y},\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{p})$ удовлетворяет следующей системе соотношений:

$$\Delta\widetilde{y}(x)=0,\ x\in\Omega;\quad \gamma_0\widetilde{y}=\widetilde{u},\ \gamma_0\partial_n\widetilde{y}=\widetilde{v},\tag{3.31}$$

$$\Delta\widetilde{p}(x)=0,\ x\in\Omega;\quad \gamma_1\widetilde{y}-\gamma_1\partial_n\widetilde{p}=0,\ \gamma_1\widetilde{p}=0,\tag{3.32}$$

$$\langle N_0\widetilde{u}-\gamma_0\partial_n\widetilde{p},\widetilde{u}\rangle_{(\Gamma_0)}\leqslant 0,\quad \langle N_1\widetilde{v}+\gamma_0\widetilde{p},\widetilde{v}\rangle_{(\Gamma_0)}\leqslant 0.\tag{3.33}$$

Действительно, равенства (3.31), (3.32) следуют из равенств (3.15), (3.22) для (y_i,u_i,v_i,p_i), $i=1,2$. Для проверки, например, второго неравенства в (3.33), перепишем (3.24) в виде

$$\begin{aligned}
&\langle N_1(v_1-g)+\gamma_0 p_1,v-v_1\rangle_{(\Gamma_0)}\geqslant 0,\\
&\langle N_1(v_2-g)+\gamma_0 p_2,v-v_2\rangle_{(\Gamma_0)}\geqslant 0\quad\forall v\in L_2^-(\Gamma_0).
\end{aligned}$$

Подставляя $v=v_2$ в первое неравенство и $v=v_1$ во второе неравенство, затем вычитая из первого неравенства второе, получим (3.33_2). Неравенство (3.33_1) доказывается аналогично.

Подставляя в формулу Грина (2.11) при $z = \widetilde{y}$, $p = \widetilde{p}$ соотношения (3.31), (3.32) и учитывая (3.33), получим

$$0 = \int\limits_{\Omega} \Delta\widetilde{y}\widetilde{p}\,dx = \int\limits_{\Omega} \Delta\widetilde{p}\widetilde{y}\,dx + \int\limits_{\Gamma_0} \widetilde{v}\widetilde{p} - \widetilde{u}\partial_n\widetilde{p}\,dx' + \int\limits_{\Gamma_1} \partial_n\widetilde{y}\widetilde{p} - \widetilde{y}\partial_n\widetilde{p}\,dx'$$
$$\leqslant -\int\limits_{\Gamma_0} (N_1\widetilde{v}^2 + N_0\widetilde{u}^2)\,dx' - \int\limits_{\Gamma_1} (\partial_n p)^2 dx'.$$

Отсюда следуют равенства $\widetilde{u} = \gamma_0\widetilde{y} = 0$, $\widetilde{v} = \gamma_0\partial_n y = 0$, $\gamma_1\partial_n p = 0$. Из этих равенств и (3.31_1) $(3.32_{1,3})$ в силу единственности решения задачи Коши для оператора Лапласа получаем $\widetilde{y}(x) \equiv 0$ и $\widetilde{p}(x) \equiv 0$ при $x \in \Omega$. Итак, единственность решения задачи (3.22)–(3.24), (3.15), (3.16) установлена, а в силу леммы 1.2 доказано также утверждение о достаточных условиях минимума. □

Замечание 3.1. Так как $p \in P_\beta$, в силу теоремы Рисса и определения (3.21) пространства P_β следы $\gamma_0 p$ и $\gamma_0\partial p$ функции p из теоремы 3.2 являются регулярными борелевскими мерами на Γ_0 (вообще говоря, не знакоопределенными).

Замечание 3.2. Совершенно аналогично получаются необходимые и достаточные условия для задачи (3.14)–(3.16), в которой $U_\partial = L_2^+(\Gamma_0)$ и $V_\partial = L_2^+(\Gamma_0)$.

3.4. Система оптимальности. Пример 3.2. Рассмотрим теперь задачу (3.14)–(3.16), (3.18). Пусть $(\widehat{y}, \widehat{u}, \widehat{v}) \in H_\Delta^{1/2}(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times L_2(\Gamma_0)$ — решение этой задачи. В силу (3.18) имеем $\widehat{u} \in L_\infty(\Gamma_0)$, $\widehat{v} \in L_\infty(\Gamma_0)$. Используя теоремы о гладкости решений эллиптических краевых задач и включение $\gamma_0\partial_n\widehat{y} = \widehat{v} \in L_\infty(\Gamma_0)$, получим $\gamma_0\widehat{y} = \widehat{u} \in C(\Gamma_0)$. Поэтому $\mathrm{Int}_{C(\Gamma_0)}(U_\partial - \widehat{u}) \cap C(\Gamma_0) \neq \varnothing$, где U_∂ — множество (3.18). Основная особенность задачи (3.14)–(3.16), (3.18) по сравнению с (3.14)–(3.16), (3.17) состоит в том, что соотношение $\mathrm{Int}_{C(\Gamma_0)}(V_\partial - \widehat{v}) \cap C(\Gamma_0) \neq \varnothing$ может оказаться неверным. Действительно, пусть, например, $\dim\Omega = 2$ и, следовательно, $\dim\Gamma_0 = 1$, $\tau(t)$ — локальная координата на Γ_0 и в точке $\tau(0)$ функция $\widehat{v}(\tau(t))$ терпит разрыв, причем $\widehat{v}(\tau(t)) = \beta_2(\tau(t))$ при $t \in (-\varepsilon, 0)$, $v(\tau(t)) = \alpha_2(\tau(t))$ при $t \in (0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, где α_2, β_2 — функции из определения (3.18) множества V_∂. Очевидно, что если $\varphi \in (V_\partial - \widehat{v}) \cap C(\Gamma_0)$, то $\varphi(\tau(0)) = 0$. Поэтому $(V_\partial - \widehat{v}) \cap C(\Gamma_0)$ принадлежит некоторому замкнутому подпространству пространства $C(\Gamma_0)$, не совпадающему с $C(\Gamma_0)$.

В дальнейшем нам удобно трактовать $\widehat{v}(x)$ не как элемент $L_\infty(\Gamma_0)$, т. е. не как класс ограниченных измеримых функций, совпадающих при почти всех $x \in \Gamma_0$, а как некоторую измеримую функцию из этого класса, т. е. как элемент пространства $\mathcal{L}_\infty(\Gamma_0)$ измеримых ограниченных функций. В качестве элемента класса $\widehat{v} \in L_\infty$ будем брать функцию $\rho(\widehat{v}(x)) \in \mathcal{L}_\infty(\Gamma_0)$ $(\rho(\widehat{v}(x)) \in \widehat{v}(x))$, где ρ — сильный лифтинг. Напомним, что гомоморфизм банаховых алгебр $\rho : L_\infty(\Gamma_0) \to \mathcal{L}_\infty(\Gamma_0)$ называется *лифтингом*, если для любой функции $\varphi \in L_\infty(\Gamma_0)$ выполняются соотношения $\rho(\varphi) \in \varphi$, $\rho(0)(x) \equiv$

0 при всех $x \in \Gamma_0$, $\rho(1_{\Gamma_0}) \equiv 1_{\Gamma_0}$. Лифтинг ρ называется *сильным*, если $\rho(\varphi) = \varphi_0$ для любой $\varphi \in L_\infty(\Gamma_0)$, содержащей $\varphi_0 \in C(\Gamma_0)$. Существование сильных лифтингов доказано, например, в книге Левин [1].

Теорема 3.3. *Набор* $(\widehat{y}, \widehat{u}, \widehat{v}) \in Y \times C(\Gamma_0) \times \mathcal{L}_\infty(\Gamma_0)$, *где* Y — *пространство* (3.20), *является решением задачи* (3.14)–(3.16), (3.18) *тогда и только тогда, когда существует* $p \in L_\beta(\Omega)$, $\beta < d/(d-1)$, *такое, что* $(\widehat{y}, \widehat{u}, \widehat{v}, p)$ *удовлетворяет* (3.15), (3.16), (3.22)–(3.24), *где*

$$W_0 = \{v \in C(\Gamma_0) : \alpha_1(x) - \widehat{u}(x) \leqslant v(x) \leqslant \beta_1(x) - \widehat{u}(x) \ \textit{п. в. в } \Gamma_0\}, \tag{3.34}$$

$$W_1 = \{v \in C^1(\Gamma_0) : \alpha_2(x) - \widehat{v}(x) \leqslant v(x) \leqslant \beta_2(x) - \widehat{v}(x) \ \textit{п. в. в } \Gamma_0\}. \tag{3.35}$$

Доказательство. Пусть $K \subset \Gamma_0$ — множество тех точек, в которых обращаются в нуль все функции из множества W_1, определенного в (3.35). Через $C^1_K(\Gamma_0)$ обозначим подпространство функций из $C^1(\Gamma_0)$, равных нулю в точках K. Пусть X, V, L определяются как при доказательстве теоремы 3.2, $X_\partial = Y \times U_\partial \times V_\partial$, где U_∂, V_∂ определены в (3.18), $U_0 = C(\Gamma_0) \times C^1_K(\Gamma_0)$, $Y_0 = \{y \in W^2_\alpha(\Omega) : \gamma_0 \partial_n y \in C^1(\Gamma_0), \gamma_0 \partial_n y\big|_K = 0\}$, где $\alpha > d \geqslant 2$, $X_0 = Y_0 \times U_0$. Тогда выполняется (1.20), где $\widehat{x} = (\widehat{y}, \widehat{u}, \widehat{v})$. Положим $V_0 = L_\alpha(\Omega) \times C(\Gamma_0) \times C^1_K(\Gamma_0)$. Тогда равенство $LX_0 = V_0$ доказывается так же, как в теореме 3.2. А именно, для доказательства разрешимости задачи (3.26) при любых $f \in L_\alpha(\Omega)$, $\varphi \in C(\Gamma_0)$, $\psi \in C^1_k(\Gamma_0)$ рассмотрим задачу $\Delta z = f$, $\gamma_0 \partial_n z = \psi$, $\gamma_1 z = 0$, где f и ψ из (3.26). Эта задача имеет единственное решение $z \in Y_0$. Очевидно, что набор z, $u = \gamma_0 z - \varphi$, $v = \gamma_0 \partial_n z - \psi$ является решением задачи (3.26). Функция Лагранжа имеет вид (3.27), где $\lambda \geqslant 0$, $p \in L_\beta(\Omega)$, $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$, $q_0 \in C^*(\Gamma_0)$, $q_1 \in (C^1_K(\Gamma_0))^*$. Так же, как в теореме 3.2, устанавливаются соотношения (3.22), (3.30_2) и следующий аналог (3.30_1):

$$\langle q_1, \varphi \rangle_{(\Gamma_0)} + \langle \gamma_0 p, \varphi \rangle_{(\Gamma_0)} = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_K(\Gamma_0). \tag{3.36}$$

Подставляя (3.27) в (1.28) при $y = (0, 0, v_1)$, где $v_1 \in (V_\partial - \widehat{v}) \cap C^1(\Gamma_0) \subset C^1_K(\Gamma_0)$, и учитывая (3.36), получим неравенство (3.24). Неравенство (3.23) устанавливается аналогично. Утверждение о достаточности условий доказывается в точности так же, как в теореме 3.2. □

§ 4. Линейные регулярные эволюционные задачи

Этот параграф посвящен необходимым и достаточным условиям минимума в задачах управления линейными эволюционными системами, которые описываются параболическими и обратно параболическими краевыми задачами.

4.1. Распределенные управление и наблюдение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $T > 0$, $Q = (0, T) \times \Omega$. В цилиндре Q рассмотрим задачу

$$\frac{1}{2}\|y - w\|^2_{L_2(Q)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(Q)} \to \inf, \tag{4.1}$$

$$\dot{y}(t,x) - \Delta y(t,x) = u(t,x), \quad (t,x) \in Q, \quad \gamma_\Sigma y = 0,\ \gamma_0 y = y_0, \quad u \in U_\partial, \tag{4.2}$$

где $w \in L_2(Q)$, $f \in L_2(Q)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $N > 0$, $\dot{y} = \partial y/\partial t$, γ_Σ — оператор сужения функции $u(t,x)$, заданной на Q, на боковую поверхность $\Sigma = [0,T] \times \partial\Omega$ цилиндра Q, γ_0 — оператор сужения функции $y(t,x)$, заданной на Q, при $t = 0$: $\gamma_0 y = y(0,x)$, U_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(Q)$. Аналогично (1.4.11) положим

$$Z_1 = \{z \in L_2(Q) : \dot{z} - \Delta z \in L_2(Q), \gamma_\Sigma z = 0\}. \tag{4.3}$$

В силу теоремы 1.1.16 о разрешимости параболических краевых задач для $u \in U_\partial$ существует функция $y \in Z_1$, удовлетворяющая соотношениям (4.2), т. е. выполнено условие 1.4.1. Поэтому в силу теоремы 1.4.1 существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Z_1 \times L_2(Q)$ задачи (4.1), (4.2). Кроме того из теоремы 1.1.16 и включения $y_0 \in L_2(\Omega)$ следует, что решение $(\widehat{y}, \widehat{u})$ задачи (4.1), (4.2) принадлежит пространству $Y \times L_2(Q)$, где

$$Y = \{y(t,x) \in L_2(0,T; H_0^1(\Omega)) : \dot{y} \in L_2(0,T; H^{-1}(\Omega))\}. \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. *Пара* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y \times L_2(Q)$ *является решением задачи* (4.1), (4.2) *тогда и только тогда, когда существует* $p \in Y$ *такое, что тройка* $(\widehat{y}, \widehat{u}, p)$ *удовлетворяет* (4.2) *и следующим соотношениям*:

$$\dot{p}(t,x) + \Delta p(t,x) = \widehat{y}(t,x) - w(t,x),\ (t,x) \in Q; \quad \gamma_T p(x) \equiv 0,\ \gamma_\Sigma p = 0, \tag{4.5}$$

$$\int\limits_Q (N(\widehat{u}(t,x) - f(t,x)) - p(t,x))(u(t,x) - \widehat{u}(t,x))\, dx\, dt \geqslant 0 \quad \forall u \in U_\partial. \tag{4.6}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.5, взяв в качестве Y пространство (4.4) и положив $U = L_2(Q)$, $V = L_2(0,T; H^{-1}(\Omega)) \times L_2(\Omega)$, $F(y,u) = (\dot{y} - \Delta y - u, \gamma_0 y - y_0)$. Тогда в силу теоремы 1.1.16 оператор $F'_y = L'_y : Y \to V$ осуществляет изоморфизм пространств Y и V. Поэтому выполнены предположения теоремы 1.5.

Функция Лагранжа задачи (4.1), (4.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y,u,p,q) &= \frac{1}{2}\|y - w\|^2_{L_2(Q)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(Q)} \\ &+ (\dot{y} - \Delta y - u, p)_{L_2(Q)} + (\gamma_0 y - y_0, q)_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $(p,q) \in V^* = L_2(0,T; H_0^1(\Omega)) \times L_2(\Omega)$. Вследствие (4.7) и (1.37)

$$(y - w, z)_{L_2(Q)} + (\dot{z} - \Delta z, p)_{L_2(Q)} + (\gamma_0 z, q)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \forall z \in Y, \tag{4.8}$$

откуда следует равенство

$$\dot{p} + \Delta p = y - w, \tag{4.9}$$

понимаемое в смысле теории обобщенных функций. Из (4.9) следует, что $\dot{p} \in L_2(0,T; H^{-1}(\Omega))$. Поэтому, интегрируя в (4.8) по частям и учитывая

(4.9), получим равенства $\gamma_T p = 0$ и

$$\gamma_0 p = q. \tag{4.10}$$

Так как из включения $p \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ следует, что $\gamma_\Sigma p = 0$, соотношения (4.5) доказаны. Из (4.7), (1.38) получаем (4.6).

Пусть набор $(\widehat{y},\widehat{u},p) \in Y \times L_2(Q) \times Y$ удовлетворяет соотношениям (4.2), (4.5), (4.6). Определим q по формуле (4.10). Тогда из (4.10), (4.5) следует (4.8), а из (4.6)–(4.8) и замечания 1.3 следует, что $(\widehat{y},\widehat{u})$ — решение задачи (4.1), (4.2). □

4.2. Стартовое управление. Финальное наблюдение. Рассмотрим задачу

$$\frac{1}{2}\|\gamma_T y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - y_0\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf, \tag{4.11}$$

$$\dot{y}(t,x) - \Delta y(t,x) = g(t,x), \quad \gamma_\Sigma y = 0, \quad \gamma_0 y = u, \quad u \in U_\partial, \tag{4.12}$$

где $w \in L_2(\Omega)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(Q)$, $N > 0$, U_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\Omega)$. Аналогично (4.4) положим

$$Y_1 = \{y \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega)) : \dot{y} \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)\}. \tag{4.13}$$

Тогда согласно теореме 1.4.2 существует единственное решение $(\widehat{y},\widehat{u}) \in Y_1 \times L_2(\Omega)$ задачи (4.11), (4.12).

Теорема 4.2. *Пара $(\widehat{y},\widehat{u}) \in Y_1 \times L_2(\Omega)$ является решением задачи* (4.11), (4.12) *тогда и только тогда, когда существует $p \in Y_1$ такое, что тройка $(\widehat{y},\widehat{u},p)$ удовлетворяет условию* (4.12), *а также соотношениям*

$$\dot{p}(t,x) + \Delta p(t,x) = 0, \quad \gamma_T y + \gamma_T p = w, \quad \gamma_\Sigma p = 0, \tag{4.14}$$

$$\langle N(\widehat{u} - y_0) - \gamma_0 p, u - \widehat{u}\rangle_{(\Omega)} \geqslant 0 \quad \forall u \in U_\partial, \tag{4.15}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(S)}$ — скалярное произведение в $L_2(S)$ и порожденное им соотношение двойственности.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.5. Положим $Y = Y_1$, где Y_1 — пространство (4.13), $U = L_2(\Omega)$, $V = L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \times L_2(\Omega)$, $F(y,u) = (\dot{y} - \Delta y - g, \gamma_0 y - u)$ В силу теоремы 1.1.16 оператор $L'_y\colon Y \to V$ осуществляет изоморфизм пространств Y и V, поэтому выполнены все предположения теоремы 1.5. Функция Лагранжа задачи (4.11), (4.12) имеет вид

$$\mathcal{L}(y,u,p,q) = \left(\frac{1}{2}\|\gamma_T y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$
$$+ \langle \dot{y} - \Delta y - u, p\rangle_{(Q)} + \langle \gamma_0 y - u, q\rangle_{(\Omega)}, \tag{4.16}$$

где $p \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $q \in L_2(\Omega)$. Вывод необходимых условий (4.14), (4.15) из (4.16) проводится с помощью теоремы 1.5 совершенно так же, как в теореме 4.1. Так же, как в теореме 4.1 устанавливается достаточность условий (4.12), (4.14), (4.15). □

4.3. Граничное управление. Финальное наблюдение. Рассмотрим задачу

$$\frac{1}{2}\|\gamma_T y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - y_\Sigma\|^2_{L_2(\Sigma)} \to \inf, \tag{4.17}$$

$$\dot{y} - \Delta y = g, \quad \gamma_\Sigma \partial_n y = u, \quad \gamma_0 y = y_0, \quad u \in U_\partial, \tag{4.18}$$

где $w \in L_2(\Omega)$, $y_\Sigma \in L_2(\Sigma)$, $g \in L_2(Q)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $N > 0$, U_∂ — непустое выпуклое замкнутое множество из $L_2(\Sigma)$, содержащее более одной точки. Согласно теореме 1.4.3 существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in L_2(0,T;H^1(\Omega)) \times L_2(\Sigma)$ задачи (4.17), (4.18). Из приведенного выше включения в силу (4.18) следует, что

$$\widehat{y} \in Y = \{y \in L_2(0,T;H^1(\Omega) : \dot{y} - \Delta y \in L_2(Q)\}. \tag{4.19}$$

Теорема 4.3. *Для того, чтобы пара $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y \times L_2(\Sigma)$, где Y — пространство* (4.19), *была решением задачи* (4.17), (4.18), *необходимо и достаточно, чтобы при некотором $p \in L_2(Q)$ тройка $(\widehat{y}, \widehat{u}, p)$ удовлетворяла условию* (4.18) *и соотношениям*

$$\dot{p}(t,x) + \Delta p(t,x) = 0, \quad \gamma_T p + \gamma_T \widehat{y} = w, \quad \gamma_\Sigma \partial_n p = 0, \tag{4.20}$$

$$\langle N(\widehat{u} - y_\Sigma) - \gamma_\Sigma p, u - \widehat{u}\rangle_{(\Sigma)} \geqslant 0 \quad \forall u \in U_\partial. \tag{4.21}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.6. Пусть Y — пространство (4.19), $U = L_2(\Sigma)$, $V = L_2(Q) \times H^{1/2}(\partial\Omega; H^{-1}(0,T)) \times L_2(\Omega)$, $Y_0 = \{y \in L_2(0,T;H^{3/2}(\Omega) \cap H^{3/4}(0,T;L_2(\Omega)) : \dot{y} - \Delta y \in L_2(Q)\}$, $U_0 = L_2(\Sigma)$, $V_0 = L_2(Q) \times L_2(\Sigma) \times H^{1/2}(\Omega)$, $F(\widehat{y}, \widehat{u}) = (\dot{\widehat{y}} - \Delta\widehat{y} - g, \gamma_\Sigma \partial_n \widehat{y} - \widehat{u}, \gamma_0 \widehat{y} - y_0)$, $G(y,u) = (\dot{y} - \Delta y, \gamma_\Sigma \partial_n y - u, \gamma_0 y)$, $g(y,u) = f(\widehat{y} + y, \widehat{u} + u) - f(\widehat{y}, \widehat{u})$, где f — функционал из (4.17). Очевидно, что справедливо условие 1.1 и достаточно доказать, что оператор G'_y: $Y_0 \to V_0$ осуществляет эпиморфизм. Это утверждение следует из результатов книги Лионс, Мадженес [3, с. 86, 87]. Таким образом, выполнены предположения теоремы 1.6. Функция Лагранжа задачи (4.17), (4.18) имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y,u,\lambda,p,q_\Sigma,q_0) &= \frac{1}{2}\|\gamma_T y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - y_\Sigma\|^2_{L_2(\Sigma)} \\ &+ \langle \dot{y} - \Delta y - g, p\rangle_{(Q)} + \langle \gamma_\Sigma \partial_n y - u, q_\Sigma\rangle_{(\Sigma)} + \langle \gamma_0 y - y_0, q_0\rangle_{(\Omega)},\end{aligned} \tag{4.22}$$

где $p \in L_2(Q)$, $q_\Sigma \in L_2(\Sigma)$, $q_0 \in (H^{1/2}(\Omega))^*$. Из (4.22), (1.37) следует, что

$$\langle \gamma_T \widehat{y} - w, \gamma_T z\rangle_{(\Omega)} + \langle \dot{z} - \Delta z, p\rangle_{(Q)} + \langle \gamma_\Sigma \partial_n z, q_\Sigma\rangle_{(\Sigma)} + \langle \gamma_0 z, q_0\rangle_{(\Omega)} = 0, \tag{4.23}$$

откуда вытекает равенство (4.20_1), понимаемое в смысле теории обобщенных функций. Поэтому

$$p \in Z \equiv \{p \in L_2(Q) : \dot{p} + \Delta p \in L_2(Q)\} \tag{4.24}$$

и в силу леммы 1.4.1 для p определены операторы сужения γ_0, γ_T, γ_Ω, $\gamma_\Sigma \partial_n$, причем $\gamma_\Sigma p \in H^{-1/2}(\partial\Omega; H^{-1}(0,T))$, $\gamma_\Sigma \partial_n p \in H^{-3/2}(\partial\Omega; H^{-1}(0,T))$,

$\gamma_T p$, $\gamma_0 p \in H^{-1}(\Omega)$. Введем обозначение

$$\widehat{C}^\infty(\overline{Q}) = \{z(t,x) \in C^\infty(Q) : z(t,x) = 0 \\ \text{в окрестности } (t,x) \in (\{0\} \cup \{T\}) \times \partial\Omega\}. \tag{4.25}$$

Доказательство следующей леммы приводится после доказательства теоремы 4.3.

Лемма 4.1. *Для функций $p \in \boldsymbol{Z}$ и $z \in \widehat{C}^\infty(\overline{Q})$, где $\boldsymbol{Z}$ — пространство* (1.4.7)*, справедлива формула Грина*

$$\langle \dot p + \nu\Delta p, z\rangle_{(Q)} = \langle \gamma_T p, \gamma_T z\rangle_{(\Omega)} - \langle \gamma_0 p, \gamma_0 z\rangle_{(\Omega)} + \nu\langle \gamma_\Sigma \partial_n p, \gamma_\Sigma z\rangle_{(\Sigma)} \\ - \nu\langle \gamma_\Sigma p, \gamma_\Sigma \partial_n z\rangle_{(\Sigma)} - \langle p, \dot z - \nu\Delta z\rangle, \quad \nu = \pm 1. \tag{4.26}$$

Доказательство теоремы 4.3 (окончание). Выразив $\langle \dot z - \Delta z, p\rangle_{(Q)}$ из (4.23) и подставив полученное выражение в (4.26) при $\nu = 1$, в силу (4.20_1) получим

$$\langle \gamma_T \widehat{y} + \gamma_T p - w, \gamma_T z\rangle_{(\Omega)} + \langle q_0 - \gamma_0 p, \gamma_0 z\rangle_{(\Omega)} \\ + \langle q_\Sigma - \gamma_\Sigma p, \gamma_\Sigma \partial_n z\rangle_{(\Sigma)} + \langle \gamma_\Sigma \partial_n p, \gamma_\Sigma z\rangle_{(\Sigma)} = 0. \tag{4.27}$$

Из (4.27) следуют равенства (4.20_2), (4.20_3), а также соотношения

$$\gamma_\Sigma p = q_\Sigma, \quad \gamma_0 p = q_0. \tag{4.28}$$

Из (4.22), (4.28_1), (1.38) следует (4.21). Достаточность условий (4.18), (4.20), (4.21) следует из замечания 1.4. □

Доказательство леммы 4.1. (a) Пусть $z = \varphi(t)\psi(x)$, где $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$, $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$,

$$\Gamma_\varphi p(x) = \int_0^T \varphi(t) p(t,x)\, dt.$$

Как показано в лемме 1.4.1, $\Gamma_\varphi p \in H^0_\Delta(\Omega)$ для $p \in \boldsymbol{Z}$. Поэтому в соответствии с (1.1.24) справедлива формула Грина

$$\langle \Delta\Gamma_\varphi p, \psi\rangle_{(\Omega)} = \langle \gamma_{\partial\Omega}\partial_n \Gamma_\varphi p, \gamma_{\partial\Omega}\psi\rangle_{(\partial\Omega)} - \langle \gamma_{\partial\Omega}\Gamma_\varphi p, \gamma_{\partial\Omega}\partial_n\psi\rangle_{(\partial\Omega)} + \langle \Gamma_\varphi p, \Delta\psi\rangle.$$

Из этой формулы следует (4.26) для z указанного выше вида.

(b) Пусть $z = \varphi(t)\psi(x)$, где $\varphi \in C^\infty[0,t]$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ и

$$B_\psi p(t) = \int \psi(x) p(t,x)\, dt.$$

Для $p \in \boldsymbol{Z}$, очевидно, $B_\psi p \in L_2(0,T)$, $B_\psi \dot p = B_{\nu\Delta\psi} p + B_\psi(\dot p - \nu\Delta p) \in L_2(0,T)$. Поэтому $\langle \partial_t(B_\psi p), \varphi\rangle = \gamma_T(B_\psi p)\varphi(T) - \gamma_0(B_\psi p)\varphi(0) - \langle B_\psi p, \dot\varphi\rangle$. Из этой формулы следует (4.26) для указанных z.

Очевидно, что любую функцию $z \in \widehat{C}^\infty(Q)$ можно аппроксимировать в пространстве $C^2(\overline{Q})$ конечными суммами вида $\sum \varphi_i(t)\psi_i(x)$, где функции φ_i и ψ_i такие же, как в пп. (a) и (b). Поэтому формула (4.26) справедлива для $z \in \widehat{C}^\infty(\overline{Q})$. □

4.4. Жесткое управление. Рассмотрим задачу

$$\frac{1}{2}\|y\|^2_{L_2(Q)} \to \inf, \tag{4.29}$$

$$\dot{y}(t,x) - \Delta y(t,x) = u(t,x), \quad \gamma_0 y = 0, \quad \gamma_\Sigma y = 0, \quad \gamma_T y = y_T, \tag{4.30}$$

$$\|u\|_{L_2(Q)} \leqslant \alpha, \tag{4.31}$$

где $y_T \in H^1_0(\Omega)$, $\alpha > 0$. Согласно теореме 1.5.3 и предложению 1.5.2 существует число $\alpha_0 = \alpha_0(y_T)$ такое, что при $\alpha \geqslant \alpha_0$ существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y \times L_2(Q)$ задачи (4.29)–(4.31), где

$$Y = \{y \in L_2(0,T; H^2(\Omega) : \dot{y} \in L_2(Q), \gamma_\Sigma y = 0, \gamma_0 y = 0\}. \tag{4.32}$$

Теорема 4.4. *Пусть $\alpha \geqslant \alpha_0(y_T)$. Тогда для решения $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y \times L_2(Q)$ задачи (4.29)–(4.31) существуют $\lambda \geqslant 0$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $p \in L_2(Q)$, $(\lambda, \lambda_1, p) \neq 0$ такие, что*

$$\dot{p}(t,x) + \Delta p(t,x) = \lambda \widehat{y}(t,x), \quad \gamma_\Sigma p = 0, \quad p(t,x) = \lambda_1 \widehat{u}(t,x), \tag{4.33}$$

$(t,x) \in Q$. Если $\lambda_1 = 0$, то $y_T \equiv 0$. В случае $\alpha > \alpha_0(y_T)$ справедливо неравенство $\lambda > 0$ и можно считать, что $\lambda = 1$. Если $\lambda = 1$ и $(\widehat{y}, \widehat{u}, p) \in Y \times L_2(Q) \times L_2(Q)$ удовлетворяют (4.30), (4.31), (4.33), то $(\widehat{y}, \widehat{u})$ — решение задачи (4.29)–(4.31).

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.3. Пусть $X = Y \times U$, где Y — пространство (4.32), $U = L_2(Q)$, $V = L_2(Q) \times H^1_0(\Omega)$, $Lx \equiv L(y,u) = (\dot{y} - \Delta y - u, \gamma_T y)$, $F_0 = (0, -y_T)$,

$$U_\partial = \{u \in L_2(Q) : \|u\|_{L_2(Q)} \leqslant \alpha\}, \quad X_\partial = Y \times U_\partial. \tag{4.34}$$

Очевидно, что $\operatorname{Int}_X X_\partial \neq \varnothing$. Для доказательства соотношения $LX = V$ покажем, что при любых $g \in L_2(Q)$, $h \in H^1_0(\Omega)$ существует пара $(y,u) \in Y \times L_2(Q)$ такая, что $\dot{y} - \Delta y - u = g$, $\gamma_T y = h$. Для этого достаточно взять функцию $y \in Y$ такую, что $\gamma_T y = h$ (такие функции построены при доказательстве предложения 1.5.2), и положить $u = \dot{y} - \Delta u - g$. Итак, предположения теоремы 1.3 проверены.

Функция Лагранжа задачи (4.29)–(4.31) имеет вид

$$\mathcal{L}(y,u,\lambda,p) = \frac{\lambda}{2}\|y\|^2_{L_2(Q)} + \langle \dot{y} - \Delta y - u, p\rangle_{(Q)} + \langle \gamma_T y - y_T, q\rangle_{(\Omega)}, \tag{4.35}$$

где $\lambda \geqslant 0$, $p \in L_2(Q)$, $q \in H^{-1}(\Omega)$. В силу (1.12) $\mathcal{L}_y = 0$, $\langle \mathcal{L}_u(\widehat{y}, \widehat{u}, p, \lambda), u - \widehat{u}\rangle \geqslant 0$, $u \in U_\partial$. Первое равенство и (4.35) приводят к соотношению

$$\lambda(\widehat{y}, z)_{(Q)} + \langle \dot{z} - \Delta z, p\rangle_{(Q)} + \langle \gamma_T z, q\rangle_{(\Omega)} = 0 \quad \forall z \in Y, \tag{4.36}$$

откуда следует (4.33_1). Это равенство и включение $p \in L_2(Q)$ в силу лемм 1.4.1 и 4.1 гарантируют существование у p сужений $\gamma_0 p$, $\gamma_T p$, $\gamma_\Sigma p$, $\gamma_\Sigma \partial_n p$ и справедливость формулы Грина (4.26). Из (4.36), (4.33_1) и (4.26) следуют равенства (4.33_2) и $\gamma_T p = -q$. Из (4.35), (1.12) вытекает неравенство

$$-\langle p, u - \widehat{u}\rangle_{(Q)} \geqslant 0 \quad \forall u \in U_\partial, \tag{4.37}$$

где U_∂ — множество из (4.34). Так как U_∂ — шар, из (4.37) следует либо (4.33_3) при $\lambda_1 \geqslant 0$, либо $p \equiv 0$. Но последнее равенство также реализуется с помощью (4.33_3) при $\lambda_1 = 0$. Если $\lambda_1 = 0$, то согласно (4.33_3) $p \equiv 0$ и, следовательно, $\lambda \neq 0$. Но тогда в силу $p \equiv 0$ и (4.33_1) получаем $y(t,x) \equiv 0$. Поэтому $y_T = \gamma_T y = 0$.

Пусть $\alpha > \alpha_0(y_T)$, $y_0 \in Y$ — решение задачи (1.5.16) и $u_0 = \dot{y}_0 - \Delta y_0$. Очевидно, что $\|u_0\|_{L_2(Q)} = \alpha_0$. Поэтому $u_0 \in \operatorname{Int} U_\partial$, где U_∂ — множество из (4.34). Ясно, что $(y_0, u_0) \in (Y \times \operatorname{Int} U) \cap (\operatorname{Ker} L + (\widehat{y}, \widehat{u}))$. В силу теоремы 1.3 имеем $\lambda > 0$. Утверждение о достаточных условиях минимума следует из теоремы 1.3. □

Рассмотрим теперь задачу

$$\frac{1}{2}\|y\|^2_{H^1(Q)} \to \inf \tag{4.38}$$

при выполнении условий (4.30). В силу теоремы 1.5.4 существует решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^1(Q) \times L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ задачи (4.38), (4.30).

Теорема 4.5. *Для того, чтобы* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^1(Q) \times L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ *было решением задачи* (4.38), (4.30), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$-\ddot{y} - \Delta y + y = 0, \quad y\big|_\Sigma = 0, \quad \gamma_0 y = 0, \quad \gamma_T y = y_T, \tag{4.39}$$

$$u = \dot{y} - \Delta y. \tag{4.40}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.3. Положим $X = Y \times U$, где $Y = \{y \in H^1(Q) : \gamma_\Sigma y = 0, \gamma_0 y = 0\}$, $U = L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $V = L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \times L_2(\Omega)$, $X_\partial = X$, $Lx \equiv L(y,u) = (\dot{y} - \Delta y - u, \gamma_T y)$, $F_0 = (0, -y_T)$. Так как $L\colon X \to V$ является эпиморфизмом, условия теоремы 1.3 выполнены. Функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(y,u,p) = \frac{1}{2}\|y\|^2_{H^1(Q)} + \langle \dot{y} - \Delta y - u, p\rangle_{(Q)} + \langle \gamma_T y - y_T, q\rangle_{(\Omega)},$$

где $p \in L_2(0,T;H^1_0(\Omega))$, $q \in L_2(\Omega)$. Так как $X_\partial = X$, неравенство (1.12) превращается в равенства, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\langle v, p\rangle_{(Q)} = 0 \quad \forall v \in U,$$
$$\langle y, z\rangle_{H^1(Q)} + \langle \dot{z} - \Delta z, p\rangle_{(Q)} + \langle \gamma_T z, q\rangle_{(\Omega)} = 0 \quad \forall z \in Y.$$

Из этих соотношений и (4.30) следует (4.39). Достаточность условий (4.39), (4.40) следует из теоремы 1.3. □

§ 5. Краевая задача для обратного уравнения теплопроводности. Распределенное управление

Этот параграф посвящен строгому выводу системы оптимальности для задачи оптимального управления, когда управляемая система задается некорректной краевой задачей для обратного уравнения теплопроводности, а управление является распределенным. Для этого используется принцип

Лагранжа (теорема 1.4), приводящий к некоторым интегральным соотношениям. Основные усилия затрачены на вывод из этих соотношений сопряженной краевой задачи.

5.1. Случай $\mathrm{Int}_{L_2} U_\partial \neq 0$**.** Рассмотрим задачу оптимального управления аналогичную задаче (4.1), (4.2), но с обратным уравнением теплопроводности:

$$\frac{1}{2}\|y-w\|^2_{L_2(Q)} + \frac{N}{2}\|u-f\|^2_{L_2(Q)} \to \inf, \tag{5.1}$$

$$\dot{y}(t,x) + \Delta y(t,x) = u(t,x); \quad \gamma_\Sigma y = 0, \gamma_0 y = y_0, u \in U_\partial, \tag{5.2}$$

где $w \in L_2(Q)$, $f \in L_2(Q)$, $N > 0$, $y_0 \in L_2(\Omega)$, U_∂ — непустое замкнутое выпуклое подмножество пространства $L_2(Q)$. Пусть

$$Z_1 = \{y(t,x) \in L_2(Q) : \dot{y} + \Delta y \in L_2(Q), \gamma_\Sigma y = 0\}. \tag{5.3}$$

В теореме 1.4.1 доказано, что при выполнении условия нетривиальности существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{x}) \in Z_1 \times L_2(Q)$ задачи (5.1), (5.2), где Z_1 — пространство (5.3). Выведем систему оптимальности для задачи (5.1), (5.2). Сложность этой задачи существенно зависит от свойств множества ограничений U_∂. Рассмотрим сначала более простой случай, когда

$$\mathrm{Int}_{L_2(Q)} U_\partial \neq \varnothing. \tag{5.4}$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие* (5.4) *и* $y_0 \in H^1_0(\Omega)$. *Пара* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Z_1 \times L_2(Q)$ *является решением задачи* (5.1), (5.2) *тогда и только тогда, когда существует* $p \in L_2(Q)$ *такое, что тройка* $(\widehat{y}, \widehat{u}, p)$ *удовлетворяет условию* (5.2) *и соотношениям*

$$\dot{p}(t,x) - \Delta p(t,x) = \widehat{y}(t,x) - w(t,x), \quad \gamma_T p = 0, \gamma_\Sigma p = 0, \tag{5.5}$$

$$\langle N(\widehat{u} - f) - p, u - \widehat{u}\rangle_{(Q)} \geqslant 0, \quad \forall u \in U_\partial. \tag{5.6}$$

Доказательство. Применим теорему 1.3. Положим $X = Z_1 \times L_2(Q)$, где Z_1 — пространство (5.3), $V = L_2(Q) \times H^1_0(\Omega)$, $X_\partial = Z_1 \times U_\partial$, $Lx \equiv L(y,u) = (\dot{y} + \Delta y - u, \gamma_0 y)$. Покажем, что оператор $L : X \to V$ непрерывен. Для этого, очевидно, достаточно доказать непрерывность оператора взятия следа $\gamma_0 : Z_1 \to H^1_0(\Omega)$. Пусть $y \in Z_1$. Тогда

$$\dot{y} + \Delta y \equiv g \in L_2(Q). \tag{5.7}$$

Так как $y \in L_2(Q)$, существует[1] $t_0 \in (T/2, T)$ такое, что

$$\|y(t_0,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{2}{T}\int\limits_{T/2}^{T} \|y(t,\cdot)\|^2 dt \leqslant \frac{2}{T}\|y\|^2_{L_2(Q)} \tag{5.8}$$

[1] В приведенном ниже рассуждении мы из класса $y \in L_2(Q)$ функций, совпадающих при почти всех $(t,\cdot)$, выбрали с помощью сильного лифтинга функцию, определенную при всех $(t,\cdot) \in Q$.

(первое неравенство в (5.8) легко доказывается от противного). В силу энергетической оценки для решения параболических краевых задач получаем

$$\int\limits_0^{t_0} \|y(\tau,\cdot)\|^2_{H^1_0(\Omega)} d\tau \leqslant C\Bigg(\int\limits_0^{t_0} \|g(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} dt + \|y(t_0,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)}\Bigg). \tag{5.9}$$

Аналогично (5.8) устанавливается существование точки $t_1 \in (T/4, T/2)$ такой, что

$$\|y(t_1,\cdot)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \frac{4}{T}\int\limits_{T/4}^{T/2} \|y(\tau,\cdot)\|^2_{H^1_0(\Omega)} d\tau \leqslant \frac{4}{T}\int\limits_0^{t_0} \|y(\tau,\cdot)\|^2_{H^1_0(\Omega)} d\tau, \tag{5.10}$$

а в силу оценки (1.1.38) решения параболических задач имеем

$$\|y\|^2_{H^{1,2}((0,t_1)\times\Omega)} \leqslant C(\|g\|^2_{L_2((0,t_1)\times\Omega)} + \|y(t_1,\cdot\|^2_{H^1_0(\Omega)}). \tag{5.11}$$

Применяя теорему 1.1.13, а затем последовательно оценки (5.11), (5.10), (5.9), (5.8), получим оценку

$$\|\gamma_0 y\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leqslant C\|y\|^2_{H^{1,2}((0,t_1)\times\Omega)} \leqslant \ldots \leqslant C_1(\|g\|^2_{L_2(Q)} + \|y\|^2_{L_2(Q)}) = C_1\|y\|^2_{Z_1}. \tag{5.12}$$

Для любого $(g, y_0) \in V$ выберем функцию $y \in H^{1,2}(Q)$ такую, что $\gamma_0 y = y_0$, $\gamma_\Sigma y = 0$ (это возможно в силу теоремы 1.1.13) и положим $u = \dot{y} - \Delta y - g$. Тогда $L(y,u) = (g, y_0)$. Поэтому $LX = Y$. Покажем, что

$$(Z_1 \times \operatorname{Int} U_\partial) \cap \{(\widehat{y}, \widehat{u}) + \operatorname{Ker} L\} \neq \varnothing. \tag{5.13}$$

Действительно, в силу леммы 1.4.2 существует пара $(z, v) \in Z_1 \times \operatorname{Int}(U_\partial - \widehat{u})$, удовлетворяющая соотношениям $\dot{z} + \Delta z = v$, $\gamma_\Sigma z = 0$, $\gamma_0 z = 0$. Очевидно, что $(z, v) \in \operatorname{Ker} L$, и из построения v следует $(\widehat{y}, \widehat{u}) + (z, v) \in Z_1 \times \operatorname{Int} U_\partial$. Это доказывает (5.13), и тем самым условия теоремы 1.3 проверены. Функция Лагранжа задачи (5.1), (5.2) имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y,u,p,q) &= \frac{1}{2}\|y-w\|^2_{L_2(Q)} + \frac{N}{2}\|u-f\|^2_{L_2(Q)} \\ &+ \langle \dot{y} + \Delta y - u, p\rangle_{(Q)} + \langle \gamma_0 y - y_0, q\rangle_{(\Omega)},\end{aligned} \tag{5.14}$$

где $p \in L_2(Q)$, $q \in H^{-1}(\Omega)$. Вследствие (1.12) $\mathcal{L}'_y = 0$, $\langle \mathcal{L}'_u, u - \widehat{u}\rangle \geqslant 0$. Применяя первое соотношение к (5.14), получим

$$\langle y - w, z\rangle_{(Q)} + \langle \dot{z} + \Delta z, p\rangle_{(Q)} + \langle \gamma_0 z, q\rangle_{(\Omega)} = 0 \quad \forall z \in Z_1, \tag{5.15}$$

откуда следует равенство

$$\dot{p} - \Delta p = y - w, \tag{5.16}$$

понимаемое в смысле теории обобщенных функций. В силу (5.16)

$$p \in Z = \{p \in L_2(Q) : \dot{p} - \Delta p \in L_2(Q)\}. \tag{5.17}$$

Поэтому в силу лемм 1.4.1 и 4.1 для p определены операторы сужения $\gamma_0 p$, $\gamma_T p$, $\gamma_\Sigma p$, $\gamma_\Sigma \partial_n p$ и справедлива формула Грина (4.26) с $\nu = -1$. Из (5.15) и (4.26) при $\nu = -1$, так же, как в теоремах 4.1, 4.4, выводятся соотношения (5.5). Из (1.12) следует (5.6).

5.2. Случай $\operatorname{Int}_{L_2} U_\partial = \varnothing$. Применение принципа Лагранжа. Прежде всего наложим следующие условия на начальную функцию $y_0(x)$ задачи (5.1), (5.2): $y_0(x) \in C^3(\overline{\Omega})$, $\gamma_{\partial\Omega} y_0(x) \equiv 0$. Исследования в рассматриваемом случае во многом зависят от вида множества U_∂. Мы ограничимся изучением задачи, в которой

$$U_\partial = \{u(t,x) \in L_2(Q) : \alpha(t,x) \leqslant u(t,x) \leqslant \beta(t,x), \text{ п. в. в } Q\}, \tag{5.18}$$

где $\alpha(t,x)$, $\beta(t,x) \in C(\overline{Q})$, и при любых $(t,x) \in Q$ выполняются неравенства $\beta(t,x) - \alpha(t,x) \geqslant \eta > 0$, где $\eta > 0$— некоторое число. Кроме того, предполагается, что U_∂ и $y_0(x)$ согласованы следующим образом: $\gamma_{\partial\Omega}\alpha(0,x) < \gamma_{\partial\Omega}\Delta y_0(x) < \gamma_{\partial\Omega}\beta(0,x)$. Применим принцип Лагранжа к задаче (5.1), (5.2), (5.18).

Лемма 5.1. *Пара $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Z_1 \times L_2(Q)$ является решением задачи* (5.1), (5.2), (5.18) *тогда и только тогда, когда $(\widehat{y}, \widehat{u})$ удовлетворяют условиям* (5.2), (5.18) *и существует $\theta \in L^*_\infty(Q)$ такое, что*

$$\langle \widehat{y} - w, z\rangle_{(Q)} + \langle \dot{z} + \Delta z, \theta\rangle_{(Q)} = 0 \quad \forall z \in Y_0, \tag{5.19}$$

$$\langle N(\widehat{u} - f) - \theta, v\rangle_{(Q)} \geqslant 0 \quad \forall v \in U_\partial - \widehat{u}, \tag{5.20}$$

где $L^*_\infty(Q)$ — пространство, сопряженное к $L_\infty(Q)$,

$$Y_0 = \{y \in L_2(Q) : \dot{y} + \Delta y \in L_\infty(Q), \gamma_\Sigma y = 0, \gamma_0 y = 0\}, \tag{5.21}$$

а U_∂ — множество (5.18).

Доказательство. Прежде всего отметим, что неравенство (5.20) корректно, так как в силу (5.18) имеем $U_\partial - \widehat{u} \subset L_\infty(Q)$. Воспользуемся теоремой 1.4. Положим $X = Z_1 \times L_2(Q)$, где Z_1 — пространство (5.3), $V = L_2(Q) \times H^{-1}(\Omega)$, $L(y,u) = (\dot{y} + \Delta y - u, \gamma_0 y)$, $F_0 = (0, -y_0)$, Y_0 — пространство (5.21), $U_0 = L_\infty(Q)$, $X_0 = Y_0 \times U_0$, $X_\partial = Z_1 \times U_\partial$, $V_0 = L_\infty(Q) \times \{0\}$. Тогда (1.26) и (1.27) очевидны. Докажем (1.29). В силу теоремы 3.3.2 (ниже) существует пара $(y,u) \in W_\mu^{1+l,2(1+l)}(Q) \times W_\mu^{l,2l}(Q)$ при $l \in (0,1)$, $\mu > 1$, $1 + d/2 < l\mu < (\mu+1)/2$ ($d = \dim\Omega$), которая удовлетворяет соотношениям (5.2). В силу (5.18) для компоненты u справедливо неравенство $\alpha(t,x) < u(t,x) < \beta(t,x)$ для всех $(t,x) \in Q$. Очевидно, что $(y,u) \in \operatorname{Int}_{X_0}(X_\partial \cap X_0)$. В силу определения (5.18) множества U_∂ решение $\widehat{x} = (\widehat{y}, \widehat{u})$ принадлежит $X_0 \cap X_\partial$. Поэтому, если $\gamma \in (0,1)$, то $((1-\gamma)\widehat{y} + \gamma y$, $(1-\gamma)\widehat{u} + \gamma u \in \operatorname{Int}_{X_0}(X_\partial \cap X_0)$. Следовательно, $\gamma(y - \widehat{y}, u - \widehat{u}) \in \operatorname{Int}_{X_0}(X_\partial - \widehat{x}) \cap X_0)$. Так как $\gamma(y - \widehat{y}, u - \widehat{u}) \in \operatorname{Ker}$, (1.29) доказано.

Функция Лагранжа задачи (5.1), (5.2) имеет вид

$$\mathcal{L}(y,u,\theta) = \frac{1}{2}\|y - w\|^2_{L_2(Q)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(Q)} + \langle \dot{y} - \Delta y - u, \theta\rangle_{(Q)}, \tag{5.22}$$

где $\theta \in L^*_\infty(Q)$.[2] Получаем (5.19), полагая $x = (z, 0) \in Y_0 \times U_0$ в (1.28), и (5.20), полагая $x = (0, v) \in Y_0 \times U_0$. В рассматриваемом случае множества из (1.30) совпадают. Поэтому справедливо утверждение леммы о достаточности условий (5.19), (5.20). □

5.3. Сингулярные функционалы. Отметим, что $\theta \in L^*_\infty(Q)$ из леммы 5.1 не является обобщенной функцией, и поэтому мы не можем трактовать соотношение (5.19) как слабую форму записи задачи (5.5). Известно (Иосида, Хьюит [1], Дубовицкий, Милютин [2]), что для любого функционала $\theta \in L^*_\infty(Q)$ существует единственное разложение

$$\theta = p + p_1, \tag{5.23}$$

где $p \in L_1(Q)$, а p_1 — сингулярный функционал. Напомним, что $p_1 \in L^*_\infty(Q)$ называется *сингулярным функционалом*, если существует убывающая последовательность множеств $\mathcal{A}_n \subset Q$ положительной лебеговой меры такая, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \varnothing$, и справедливы равенства $\langle \chi_{Q\setminus\mathcal{A}_n} f, p_1\rangle_{(Q)} = 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, $f \in L_\infty(Q)$, где $\chi_{Q\setminus\mathcal{A}_n}(t,x) = 1$ при $(t,x) \in Q \setminus \mathcal{A}_n$ и $\chi(t,x) = 0$ при $(t,x) \notin Q \setminus \mathcal{A}_n$.

Покажем, что в соотношениях (5.19), (5.20) функционал θ можно заменить на функцию p из разложения (5.23).

Лемма 5.2. *Пусть $\theta \in L^*_\infty(Q)$ удовлетворяет равенству* (5.19), *а p_1 — сингулярный функционал из разложения* (5.23). *Тогда*

$$\langle \dot z + \Delta z, p_1\rangle_{(Q)} = 0 \quad \forall z \in Y_0. \tag{5.24}$$

Доказательство состоит из трех частей.

1. Покажем сначала, что

$$\langle \psi\varphi, p_1\rangle_{(Q)} = 0 \quad \forall \psi \in L_\infty(Q), \quad \varphi \in C^1[0,T],\ \varphi(0) = 0. \tag{5.25}$$

Допустим противное, т. е.

$$\exists \psi \in L_\infty(Q), \varphi(t) \in C^1[0,T], \varphi(0) = 0, \quad \langle \psi\varphi, p_1\rangle_{(Q)} = 1. \tag{5.26}$$

По определению сингулярного функционала существует последовательность множеств $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_j \subset \cdots \subset Q$ такая, что $\operatorname{meas} B_j \to \operatorname{meas} Q$ при $j \to \infty$ и выполнено следующее утверждение:

$$\text{если } \operatorname{supp}\chi(t,x) \subset B_j, \text{ то } \langle \chi, p_1\rangle = 0. \tag{5.27}$$

Пусть $\psi_j = \psi(t,x)$ при $(t,x) \notin B_j$ и $\psi_j = 0$ при $(t,x) \in B_j$. Вследствие (5.26), (5.27)

$$\langle \psi_j\varphi, p_1\rangle_{(Q)} = \langle \psi\varphi, p_1\rangle_{(Q)} = 1. \tag{5.28}$$

Пусть $z_j(t,x) \in W^{1,2}_\varkappa(Q)$, $\varkappa > 1 + d/2$ (где $d = \dim\Omega$) — решение задачи $\dot z_j + \Delta z_j = \psi_j$, $\gamma_\Sigma z_j = 0$, $\gamma_T z_j = 0$.

[2]Согласно (1.10) к правой части (5.22) следует приписать также член $\langle \gamma_0 y - y_0, q\rangle_{(\Omega)}$, где $q \in H^{-1}(\Omega)$. Так как функцию Лагранжа (5.22) мы будем дифференцировать вдоль подпространства Y_0, а $\gamma_0 z = 0$ для $z \in Y_0$, этот член в (1.28) всегда будет равен нулю.

Очевидно, что $\psi_j \to 0$ в $L_\varkappa(Q)$. В силу теорем 1.1.14, 1.1.11 $z_j \to 0$ в $C(\overline{Q})$ при $j \to \infty$. Функция $y_j = \varphi(t) z_j$ является решением задачи

$$\dot{y}_j + \Delta y_j = \varphi\psi_j + \dot{\varphi} z_j, \quad \gamma_\Sigma y_j = 0, \quad \gamma_0 y_j = 0. \tag{5.29}$$

При $j \to \infty$ имеем

$$\varphi\psi_j \to 0 \ *\text{-слабо в } L_\infty(Q), \tag{5.30}$$

$$\dot{\varphi} z_j \to 0, \quad y_j \to 0 \text{ в } C(\overline{Q}). \tag{5.31}$$

Из (5.19), (5.23), (5.29) следует, что

$$\langle \widehat{y} - w, y_j \rangle_{(Q)} + \langle \varphi\psi_j + \dot{\varphi} z_j, p \rangle_{(Q)} + \langle \dot{\varphi} z_j, p_1 \rangle = -\langle \varphi\psi_j, p_1 \rangle. \tag{5.32}$$

Правая часть (5.32) вследствие (5.28) равна -1 при любом j. Мы придем к противоречию и, следовательно, докажем (5.25), если установим, что левая часть (5.32) стремится к нулю при $j \to \infty$. Стремление к нулю первых двух членов следует из (5.30), (5.31). Отметим, что сужение функционала $p_1 \in L^*_\infty(Q)$ на $C(\overline{Q})$ можно трактовать как борелевскую регулярную меру. Поэтому третий член в левой части (5.32) также стремится к нулю в силу (3.31).

2. Обозначим через $\{e_j\}$ собственные функции, а через $\{\lambda_j\}$ — собственные значения спектральной задачи

$$-\Delta e(x) = \lambda e(x), \quad x \in \Omega, \quad e(x)\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5.33}$$

Докажем, что

$$\langle e_k \varphi, p_1 \rangle_{(Q)} = 0 \quad \forall \varphi \in L_\infty(0,T) \quad \forall k. \tag{5.34}$$

Пусть

$$\exists \varphi(t) \in L_\infty(0,T) \text{ и } \exists k : \langle e_k \varphi, p_1 \rangle = 1. \tag{5.35}$$

Положим

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0, 1/j], \\ 0, & t > 1/j. \end{cases} \tag{5.36}$$

Из (5.25), (5.35), (5.36) следует, что при каждом j

$$\langle e_k \varphi_j, p_1 \rangle_{(Q)} = \langle e_k \varphi, p_1 \rangle = 1. \tag{5.37}$$

Пусть $z_j(t)$ определяется соотношениями

$$\dot{z}_j(t) - \lambda_k z_j = \varphi_j(t), \quad z_j(0) = 0,$$

где λ_k — собственное значение задачи (5.33), соответствующее собственной функции $e_k(x)$. Очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial t}(z_j e_k) + \Delta(z_j e_k) = \varphi_j e_k, \quad \gamma_\Sigma(z_j e_k) = 0, \quad \gamma_0(z_j e_k) = 0, \tag{5.38}$$

$$\varphi_j e_k \to 0 \ *\text{-слабо в } L_\infty(Q), \quad z_j e_k \to 0 \text{ в } C(\overline{Q}) \tag{5.39}$$

при $j \to \infty$. Подставляя (5.38) и (5.23) в (5.19) и учитывая (5.37), получим

$$\langle \widehat{y} - w, z_j e_k \rangle_{(Q)} + \langle p, \varphi_j e_k \rangle_{(Q)} = -\langle p_1, \varphi_j e_k \rangle_{(Q)} = -1.$$

Но левая часть этого равенства в силу (5.39) стремится к нулю при $j \to \infty$.

3. Докажем (5.24). Пусть

$$z \in Y_0, \quad \dot{z} + \Delta z = \psi \in L_\infty(Q). \tag{5.40}$$

При $\varepsilon > 0$ определим функции

$$\psi_\varepsilon(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{(1+\varepsilon\lambda_k)^m} e_k(x), \quad \psi_\varepsilon^N(t,x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\psi_k(t)}{(1+\varepsilon\lambda_k)^m} e_k(x), \tag{5.41}$$

где $\psi_k(t) = \langle \psi(t,\cdot), e_k \rangle_{(\Omega)}$, $m > d/2$, m целое, e_k — собственные функции и λ_k — собственные значения задачи (5.33). Введем функции

$$z_\varepsilon(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k(t)}{(1+\varepsilon\lambda_k)^m} e_k(x), \quad z_\varepsilon^N(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k(t)}{(1+\varepsilon\lambda_k)^m} e_k(x), \tag{5.42}$$

где $z_k(t) = \langle z(t,x), e_k \rangle_{(\Omega)}$. Очевидно, что

$$z_\varepsilon \in Y_0, \quad z_\varepsilon^N \in Y_0, \quad \dot{z}_\varepsilon + \Delta z_\varepsilon = \psi_\varepsilon, \quad \dot{z}_\varepsilon^N + \Delta z_\varepsilon^N = \psi_\varepsilon^N. \tag{5.43}$$

В силу (5.41_2), (5.34) имеем $\langle \psi_\varepsilon^N, p_1 \rangle_{(Q)} = 0$. Подставляя последнее равенство из (5.43) в (5.19) и учитывая (5.23), (5.34), получаем

$$\langle \widehat{y} - w, z_\varepsilon^N \rangle_{(Q)} + \langle \psi_\varepsilon^N, p \rangle_{(Q)} = 0. \tag{5.44}$$

Очевидно, что $\psi_\varepsilon^N \to \psi_\varepsilon$ при $N \to \infty$ слабо в $L_2(Q)$, а также

$$z_\varepsilon^N \to z_\varepsilon \text{ слабо в } L_2(Q) \text{ при } N \to \infty. \tag{5.45}$$

Так как $m > d/2$, используя теорему вложения Соболева и неравенство $\|e_k\|_{H^m(\Omega)} \leqslant c\lambda_k^{m/2}$, где c не зависит от k, получим, что при почти всех $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \|\psi_\varepsilon(t,\cdot) - \psi_\varepsilon^N(t,\cdot)\|_{L_\infty(\Omega)} &\leqslant c \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|\psi_k(t)|}{(1+\varepsilon\lambda_k)^m} \lambda_k^{m/2} \\ &\leqslant \frac{c}{\varepsilon^m} \sum_{k=N+1}^{\infty} |\psi_k(t)|^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda_k^{-m} \to 0 \end{aligned} \tag{5.46}$$

при $N \to \infty$. При этом правая часть неравенства (5.46) конечна, поскольку $\lambda_k \sim k^{2/d}$ при $k \to \infty$ и $m > d/2$.

Из (5.46) следует $\psi_\varepsilon^N \to \psi_\varepsilon$ при $N \to \infty$ в $L_\infty(Q)$. В силу (5.45), переходя в (5.44) к пределу при $N \to \infty$, получим

$$\langle \widehat{y} - w, z_\varepsilon \rangle_{(Q)} + \langle \psi_\varepsilon, p \rangle_{(Q)} = 0. \tag{5.47}$$

Положим

$$\psi(t,x) = \psi^0(t,x), \quad \psi^k(t,x) = (-\varepsilon\Delta + 1)\psi^{k+1}(t,x), \ \ \gamma_\Sigma \psi^{k+1} = 0, \tag{5.48}$$

где $k = 0, 1, \ldots$. Тогда в силу (5.41) $\psi_\varepsilon(t,x) = \psi^m(t,x)$ при почти всех $t \in [0,T]$. Применяя к (5.48) принцип максимума (см., например, Ладыженская, Уральцева [1, с. 133]), получим, что при почти всех $t \in [0,T]$

$$\|\psi_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \|\psi^{m-1}(t,\cdot)\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \cdots \leqslant \|\psi(t,\cdot)\|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{5.49}$$

Ввиду (5.41) при почти всех $t \in [0,T]$ имеем $\psi_\varepsilon(t,\cdot) \to \psi(t,\cdot)$ в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому в силу (5.49) и теоремы Лебега

$$\psi_\varepsilon \to \psi \ \ *\text{-слабо в } L_\infty(Q) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{5.50}$$

Из (5.42) следует, что

$$z_\varepsilon \to z \text{ в } L_2(Q) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{5.51}$$

Переходя в (5.47) к пределу при $\varepsilon \to 0$, в силу (5.50) и (5.51) находим

$$\langle \widehat{y} - w, z\rangle_{(Q)} + \langle \dot{z} + \Delta z, p\rangle_{(Q)} = 0. \tag{5.52}$$

Подставляя в (5.19) разложение (5.23) и сравнивая полученное выражение с (5.52), получим (5.24). □

Лемма 5.3. *Пусть функционал $\theta \in L^*_\infty(Q)$, допускающий разложение* (5.23), *удовлетворяет неравенству* (5.20). *Тогда*

$$\langle N(\widehat{u} - f) - p, v\rangle_{(Q)} \geqslant 0 \tag{5.53}$$

при любом $v \in U_\partial - \widehat{u}$.

Доказательство. По определению для сингулярного функционала p_1 из разложения (5.23) существует возрастающая последовательность $B_j \subset Q$ такая, что $\operatorname{meas} B_j \to \operatorname{meas} Q$ при $j \to \infty$ и

$$\langle p_1, \chi_{B_j}\psi\rangle_{(Q)} = 0 \quad \forall \psi \in L_\infty(Q), \tag{5.54}$$

где χ_{B_j} — характеристическая функция множества B_j.

Из включения $\widehat{u} \in U_\partial$, где U_∂ — множество (5.18), следует, что $\alpha(t,x) - \widehat{u}(t,x) \leqslant 0 \leqslant \beta(t,x) - \widehat{u}(t,x)$ при почти всех $(t,x) \in Q$. Поэтому если $v \in U_\partial - \widehat{u}$, то $\chi_{B_j} v \in U_\partial - \widehat{u}$. Заменим в (5.20) v на $\chi_{B_j} v$ и подставим разложение (5.23) в (5.20). В силу (5.54) имеем $\langle N(\widehat{u} - f) - p, \chi_{B_j} v\rangle_{(Q)} \geqslant 0$ при всех $v \in U_\partial - \widehat{u}$ и j. Так как $\chi_{B_j} v \to v$ при $j \to \infty$ $*$-слабо в $L_\infty(Q)$, перейдя к пределу в последнем неравенстве при $j \to \infty$, получим (5.53). □

Из лемм 5.1–5.3 следует

Теорема 5.2. *Пара $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Z_1 \times L_2(Q)$ является решением задачи* (5.1), (5.2), (5.18) *тогда и только тогда, когда $(\widehat{y}, \widehat{u})$ удовлетворяет* (5.2), (5.18) *и существует $p \in L_1(Q)$ такое, что выполнены неравенство* (5.53) *и равенство*

$$\langle \widehat{y} - w, z\rangle_{(Q)} + \langle \dot{z} + \Delta z, p\rangle_{(Q)} = 0 \quad \forall z \in Y_0, \tag{5.55}$$

где Y_0 *— пространство* (5.21), *а* U_∂ *— множество* (5.18).

5.4. Вывод соотношений (5.5). Используя хорошо известные методы, покажем, что задачу (5.55) для p можно трактовать как краевую задачу (5.5). Положив $z \in C_0^\infty(Q)$ в (5.55), мы видим, что p удовлетворяет уравнению (5.5_1) в смысле распределений. Введем пространство

$$G = \{z \in W_\mu^{1+l,2(1+l)}(Q) : \gamma_\Sigma z = 0,\ \gamma_0 z = 0\}, \tag{5.56}$$

где

$$l \in (0,1),\ \mu > 1,\ 1 + d/2 < l\mu < \mu/2, \quad d = \dim\Omega. \tag{5.56$'$}$$

Отметим, что $L_1(Q) \subset W_{\mu'}^{-l,-2l}(Q)$, где $\mu' = \mu/(\mu-1)$, μ, l удовлетворяют (5.56′), а $W_{\mu'}^{-l,-2l}(Q)$ — пространство, сопряженное пространству $V = \{y \in W_\mu^{l,2l}(Q) : y\big|_{\partial Q} = 0\}$ относительно скалярного произведения в $L_2(Q)$. Поэтому

$$p \in P \equiv \{p \in W_{\mu'}^{-l,-2l}(Q) : \dot p + \Delta p \in L_2(Q)\}. \tag{5.57}$$

Предложение 5.1. *Пусть* P *— пространство* (5.57) *и выполнены соотношения* (5.56′). *Тогда оператор* γ_Σ *определен на* P *и непрерывно действует из* P *в* $W_{\mu'}^{-1-l}(0,T; B_{\mu'}^{-2l-1/\mu'}(\partial\Omega))$, *где* $1/\mu' + 1/\mu = 1$.

Доказательство. Для $p \in P$ и $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_\mu^l[0,T]$[3] определим p_φ формулой

$$\langle p_\varphi, \psi\rangle_{(\Omega)} = \langle p, \varphi\otimes\psi\rangle_{(Q)} \quad \forall \psi \in \overset{\circ}{W}{}_\mu^{2l}(\Omega). \tag{5.58}$$

Если $p \in P$, то $\dot p + \Delta p = g \in L_2(Q)$. Поэтому для $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_\mu^{1+l}[0,T]$ имеем

$$\langle \Delta p_\varphi, \psi\rangle_{(\Omega)} = \langle g, \varphi\otimes\psi\rangle_{(Q)} - \langle \dot p, \varphi\otimes\psi\rangle_{(Q)} = \langle g_\varphi, \psi\rangle_{(\Omega)} + \langle p_{\dot\varphi}, \psi\rangle_{(\Omega)} \tag{5.59}$$

для всех $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_\mu^{2l}(\Omega)$. Из (5.58), (5.59) следует, что при $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_\mu^{1+l}[0,T]$

$$p_\varphi \in P_{\mu'}^{-2l} \equiv \{p \in W_{\mu'}^{-2l}(\Omega) : \Delta p \in W_{\mu'}^{-2l}(\Omega)\}. \tag{5.60}$$

□

Отметим, что $0 < 2l < 1$ в силу (5.56′) и $\mu', \mu > 1$.

Лемма 5.4. *Пусть* $P_{\mu'}^{-2l}$ *— пространство* (5.60), $2l \in (0,1)$, $\mu' > 1$. *Тогда оператор* $\gamma : C^\infty(\overline{\Omega}) \to C^\infty(\partial\Omega)$ *сужения функции на границу* $\partial\Omega$ *продолжается по непрерывности до оператора* $\gamma : P_{\mu'}^{-2l} \to B_{\mu'}^{-2l-1/\mu'}(\partial\Omega)$. *При этом для любых* $q \in P_{\mu'}^{-2l}$ *и* $\psi \in \{y \in W_\mu^{2l+2}(\Omega) : \gamma y = 0, \gamma\Delta y = 0\}$ *справедлива*

[3] $\overset{\circ}{W}{}_\mu^l[0,T]$ — это замыкание пространства $C_0^\infty(0,T)$ по норме пространства W_μ^l. Аналогично определяются пространства $\overset{\circ}{W}{}_\mu^{1+l}[0,T]$, $\overset{\circ}{W}{}_\mu^{2l}(\Omega)$ и т. д.

формула Грина

$$\langle \Delta q, \psi\rangle_{(\Omega)} - \langle q, \Delta\psi\rangle_{(\Omega)} = -\langle \gamma q, \gamma\partial_n \psi\rangle_{(\partial\Omega)}. \tag{5.61}$$

Лемма 5.4 доказана в следующем пункте. Из леммы 5.4 следует, что $\gamma p_\varphi \in B_{\mu'}^{-2l-1/\mu'}(\partial\Omega)$ для $p_\varphi \in P_{\mu'}^{-2l}$. Поэтому для $p \in P$ определено сужение $\gamma_\Sigma p$ и $\gamma_\Sigma p \in W_{\mu'}^{-1-l}(0,T; B_{\mu'}^{-2l-1/\mu'}(\partial\Omega))$.

Рассмотрим пространство

$$P_0 = \{p \in P : \gamma_\Sigma p = 0\}, \tag{5.62}$$

где P — пространство (5.57). Пусть $e_j(x)$ — собственная функция спектральной задачи (5.33), а λ_i — соответствующее собственное значение. Для $p \in P_0$ определим p^j по формуле

$$\langle p^j, \varphi\rangle_{(0,T)} = \langle p, \varphi \otimes e_j\rangle_{(Q)} \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_\mu^l(0,T). \tag{5.63}$$

Лемма 5.5. *При любом j*

$$p^j(t) \in H^1(0,T) \subset C[0,T]. \tag{5.64}$$

Доказательство. Так как $\dot p + \Delta p = g \in L_2(Q)$ для $p \in P_0$, используя формулу Грина (5.61) для $q = p \in P_0$ и $\psi = e_j$, получим $\langle \dot p^j, \varphi\rangle_{(0,T)} = -\langle \Delta p, \varphi \otimes e_j\rangle_{(Q)} + \langle g, \varphi \otimes e_j\rangle_{(Q)} = -\lambda_j \langle p, \varphi \otimes e_j\rangle_{(Q)} + \langle g, \varphi \otimes e_j\rangle_{(Q)}$, откуда

$$\dot p^j + \lambda_j p^j = g^j, \quad g^j = \langle g, e_j\rangle_{(\Omega)}. \tag{5.65}$$

Очевидно, что $g^j \in L_2(0,T)$. Поэтому в силу (5.65) имеем $p^j \in H^1[0,T] \subset C(0,T)$. □

Из предложения 5.1 и леммы 5.5 следует

Теорема 5.3. *Пусть p — функция, построенная в теореме 5.2. Тогда $p \in P$, где P — пространство (5.57), и p удовлетворяет соотношениям (5.5_1) в смысле теории распределений и соотношениям (5.5_2). Кроме того, p удовлетворяет (5.5_3) в смысле равенства элементов пространства $W_{\mu'}^{-l-1}(0,T; B_{\mu'}^{-2l-1/\mu'}(\partial\Omega))$.*

Доказательство. Справедливость (5.5_1) и включения (5.57) установлена выше. В предложении 5.1 показано, что $\gamma_\Sigma p \in W_{\mu'}^{-l-1}(0,T; B_{\mu'}^{-2l-1/\mu'}(\partial\Omega))$. Полагая в (5.55) $z = \varphi(t)\psi(x)$, где $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_\mu^{1+l}(0,T)$, $\psi \in W_\mu^{2l+2}(\Omega)$, $\gamma\psi = \gamma\Delta\psi = 0$, и учитывая (5.58), получим

$$\langle \widehat{y}_\varphi - w_\varphi, \psi\rangle_{(\Omega)} + \langle p_{\dot\varphi}, \psi\rangle_{(\Omega)} + \langle p_\varphi, \Delta\psi\rangle_{(\Omega)} = 0. \tag{5.66}$$

Из (5.66), (5.61) при $q = p_\varphi$ и (5.5_1) вытекает $\langle \gamma p_\varphi, \gamma\partial_n\psi\rangle_{(\partial\Omega)} = 0$ и, следовательно, $\gamma_{\partial\Omega} p_\varphi = 0$. Из этого равенства получаем (5.5_3). Соотношение (5.5_2) выводится аналогично из (5.55) при $z = \varphi(t)e_j(x)$ и леммы 5.5. □

Для доказательства леммы 5.4 нам понадобятся две леммы.

Лемма 5.6. *Любой линейный непрерывный функционал $L(f)$ на $P_{\mu'}^{-2l}$ представи́м в виде*

$$L(f) = \langle f, \varphi \rangle_{(\Omega)} + \langle \Delta f, \psi \rangle_{(\Omega)}, \tag{5.67}$$

где $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{-2l}(\Omega)$, $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{-2l}(\Omega)$, а $P_{\mu'}^{-2l}$ — пространство (5.60).

Доказательство. Рассмотрим подпространство $\pi = \{(f, \Delta f)\}$ пространства $W_{\mu'}^{-2l}(\Omega) \times W_{\mu'}^{-2l}(\Omega)$. Очевидно, что π — замкнутое подпространство и π изоморфно пространству $P_{\mu'}^{-2l}$, причем изоморфизм $\varkappa : P_{\mu'}^{-2l} \to \pi$ устанавливается с помощью отображения $\varkappa f = (f, \Delta f)$. Для любого функционала L на $P_{\mu'}^{-2l}$ существует единственный функционал M на π такой, что $L(f) = M(f, \Delta f)$. По теореме Хана — Банаха функционал M продолжается с π на все пространство $W_{\mu'}^{-2l}(\Omega) \times W_{\mu'}^{-2l}(\Omega)$ с сохранением нормы. Обозначим продолженный функционал через $\widetilde{M}$. Очевидно, что $\widetilde{M}(f, g) = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \psi \rangle$ с некоторыми $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{2l}(\Omega)$ и $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{2l}(\Omega)$. Отсюда следует (5.67). □

Лемма 5.7. *Пространство $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ плотно в $P_{\mu'}^{-2l}$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $L \in (P_{\mu'}^{-2l})^*$ и $L(f) = 0$ для всех $f \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, то $L = 0$. С учетом леммы 5.6 предположим, что

$$L(f) = \langle f, \varphi \rangle + \langle \Delta f, \psi \rangle = 0 \quad \forall f \in C^{\infty}(\overline{\Omega}), \tag{5.68}$$

где $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{2l}(\Omega)$, $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{2l}(\Omega)$. Продолжим φ и ψ нулем вне Ω и обозначим продолженные функции соответственно через $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$. Продолжим функцию f вне Ω до функции $\widetilde{f} \in C_0^{\infty}(R^n)$. Очевидно, что $\widetilde{\varphi} \in L_2(R^n)$, $\widetilde{\psi} \in W_{\mu}^{2l}(R^n)$ и вследствие (5.68)

$$\int\limits_{R^n} (\widetilde{\varphi}(x)\widetilde{f}(x) + \widetilde{\psi}(x)\Delta\widetilde{f}(x))\, dx = 0.$$

Поэтому $\Delta\widetilde{\psi}(x) = -\widetilde{\varphi}(x)$ в смысле распределений на R^n, откуда $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{2l}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Применяя к второму слагаемому в (5.68) формулу Грина (2.11), получим $L(f) = \langle f, \varphi + \Delta\psi \rangle_{(\Omega)} - \langle \gamma\partial_n f, \gamma\partial_n \psi \rangle_{(\partial\Omega)} = -\langle \gamma\partial_n f, \gamma\partial_n \psi \rangle_{(\partial\Omega)} = 0$ при всех f, т. е. $L = 0$. □

Доказательство леммы 5.4. В силу теоремы 1.1.3 оператор

$$(\gamma, \gamma\partial_n, \gamma\partial_{nn}^2) : W_{\mu'}^{2l+2}(\Omega) \to B_{\mu}^{2l+2-1/\mu}(\partial\Omega) \times B_{\mu}^{2l+1-1/\mu}(\partial\Omega) \times B_{\mu}^{2l-1/\mu}(\partial\Omega)$$

непрерывен и является эпиморфизмом. Существует линейный непрерывный оператор $R : B_{\mu}^{2l+1-1/\mu}(\partial\Omega) \to W_{\mu}^{2l+2}(\Omega)$, сопоставляющий функции $\varphi \in B_{\mu}^{2l+1-1/\mu}(\partial\Omega)$ функцию $R\varphi \in W_{\mu}^{2l+2}(\Omega)$ такую, что $\gamma R\varphi = 0$, $\gamma\partial_n R\varphi = \varphi$, $\gamma\Delta R\varphi = 0$. Оператор R можно определить многими способами. Пусть

$f \in P_{\mu'}^{-2l}$. Определим на $B_{\mu}^{2l+1-1/\mu}(\partial\Omega)$ функционал

$$z(\varphi) = \langle f, \Delta R\varphi\rangle - \langle \Delta f, R\varphi\rangle. \tag{5.69}$$

Этот функционал не зависит от выбора R, так как если R_1 — оператор продолжения, аналогичный R, то $(R\varphi - R_1\varphi) \in \overset{\circ}{W}{}_{\mu}^{2l+2}(\Omega)$. Тогда по определению Δf имеем $\langle f, \Delta(R\varphi - R_1\varphi)\rangle - \langle \Delta f, R\varphi - R_1\varphi\rangle = 0$. Очевидно, что функционал (5.69) ограничен на $B_{\mu}^{2l+1-1/\mu}(\partial\Omega)$ и зависит только от f. Поэтому существует линейный непрерывный оператор $\tau : P_{\mu'}^{-2l} \to B_{\mu'}^{-2l-1+1/\mu}(\partial\Omega)$ такой, что

$$z(\varphi) = \langle \tau f, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in B_{\mu}^{2l+1-1/\mu}(\partial\Omega). \tag{5.70}$$

Если $f \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, то $\tau f = \gamma f$. В силу леммы 5.7 пространство $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ плотно в $P_{\mu'}^{-2l}$. Поэтому τ — оператор сужения на $\partial\Omega$. Из (5.69) и (5.70) следует формула Грина (5.61). □

5.6. Основной результат. Докажем основной результат этого параграфа.

Теорема 5.4. *Пара* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Z_1 \times L_2(Q)$ *является решением задачи* (5.1), (5.2), (5.18) *тогда и только тогда, когда* $(\widehat{y}, \widehat{u})$ *удовлетворяют условию* (5.2) *и существует* $p \in P$ *такое, что выполнено неравенство* (5.53) *и равенства* (5.5), *понимаемые в смысле теоремы* 5.3.

Доказательство. Необходимость условий (5.2), (5.5), (5.53) доказана в теоремах 5.2, 5.3 и леммах 5.1, 5.3. Для доказательства достаточности условий (5.2), (5.5), (5.53) в силу леммы 1.2 надо доказать единственность решения $(\widehat{y}, \widehat{u}, p)$ задачи (5.2), (5.5), (5.53) в пространстве $Z_1 \times L_2(Q) \times P$, где Z_1 и P — пространства (5.3) и (5.57).

Пусть (y_i, u_i, p_i), $i = 1, 2$, — два решения задачи (5.2), (5.5), (5.53) и $(z, v, q) = (y_1 - y_2, u_1 - u_2, p_1 - p_2)$. Тогда (z, v, q) удовлетворяет системе

$$\dot{z}(t,x) + \Delta z(t,x) = v(t,x), \quad \gamma_{\Sigma} z = 0,\ \gamma_0 z = 0, \tag{5.71}$$

$$\dot{q}(t,x) - \Delta q(t,x) = z(t,x), \quad \gamma_{\Sigma} q = 0,\ \gamma_T q = 0, \tag{5.72}$$

$$\langle Nv - q, v\rangle_{(Q)} \leqslant 0. \tag{5.73}$$

(Неравенство (5.73) выводится так же, как (3.33).) Так как $v \in L_2(Q)$, ввиду теоремы о гладкости решений параболических краевых задач для решения z задачи (5.71) справедливо включение $z \in H^{1,2}((0, T-\varepsilon) \times \Omega)$ при любом $\varepsilon > 0$. Аналогично ввиду $z \in L_2(Q)$ решение q задачи (5.72) принадлежит $H^{1,2}((\varepsilon, T) \times \Omega)$ для всех $\varepsilon > 0$. Продолжим в (5.71) z и v нулем при $t < 0$ и полученные функции обозначим через z и v. При $\varepsilon > 0$ положим $z_{\varepsilon}(t,x) = z(t-\varepsilon, x)$ и $v_{\varepsilon}(t,x) = v(t-\varepsilon, x)$. Очевидно, что z_{ε} и v_{ε} удовлетворяют (5.71) при $(t,x) \in Q$ и $z_{\varepsilon} \in H^{1,2}(Q)$ для всех $\varepsilon > 0$. Аналогично продолжим в (5.72) q и z нулем при $t > T$ и при $\varepsilon > 0$ положим $q_{-\varepsilon}(t,x) = q(t+\varepsilon, x)$ и $z_{-\varepsilon}(t,x) = z(t+\varepsilon, x)$. Тогда $q_{-\varepsilon}$ и $z_{-\varepsilon}$ удовлетворяют (5.72) и $q_{-\varepsilon} \in H^{1,2}(Q)$ для всех $\varepsilon > 0$.

Умножим обе части (5.72) для $q_{-\varepsilon}$ и $z_{-\varepsilon}$ на z_{ε} скалярно в $L_2(Q)$ и применим формулу Грина (что допустимо, так как $q_{-\varepsilon}, z_{\varepsilon} \in H^{1,2}(Q)$). Используя

соотношения (5.71) и (5.72), получим

$$\int\limits_Q z_{-\varepsilon} z_\varepsilon dx = \int (\dot q_{-\varepsilon} - \Delta q_{-\varepsilon}) z_\varepsilon dx\, dt$$

$$= -\int q_{-\varepsilon}(\dot z_\varepsilon + \Delta z_\varepsilon)\, dx\, dt = -\int q_{-\varepsilon} v_\varepsilon dx\, dt. \tag{5.74}$$

Переходя в (5.74) к пределу при $\varepsilon \to 0$ и используя (5.73), имеем

$$0 = \int\limits_Q (z^2 + qv)\, dx\, dt \geqslant \int\limits_Q (z^2 + Nv^2)\, dx\, dt.$$

Следовательно, $z \equiv 0$ и $v \equiv 0$. В силу (5.72) заключаем, что $q \equiv 0$. □

§ 6. Краевая задача для обратного уравнения теплопроводности. Граничное и стартовое управления

В этом параграфе выводится система оптимальности для задачи оптимального управления обратным уравнением теплопроводности с граничным управлением. При этом мы не используем абстрактные теоремы из § 1, а применим другой подход, основанный на теоремах о точной граничной управляемости для параболических уравнений.

6.1. Граничное управление. Предварительные сведения. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{J}(y,u) \equiv \frac{1}{2}\|\gamma_T y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - y_\Sigma\|^2_{L_2(\Sigma)} \to \inf, \tag{6.1}$$

$$\dot y(t,x) + \Delta y(t,x) = 0, \quad \gamma_\Sigma \partial_n y = u, \quad \gamma_0 y = 0, \tag{6.2}$$

$$u \in U_\partial, \tag{6.3}$$

где $N > 0$, $w \in L_2(\Omega)$, $y_\Sigma \in L_2(\Sigma)$, а относительно U_∂ предполагается выполненным следующее условие.

Условие 6.1. Множество U_∂ является выпуклым подмножеством пространства $L_\infty(\Sigma)$ с непустой внутренностью: $\mathrm{Int}_{L_\infty(\Sigma)} U_\partial \neq \varnothing$. Существует функция $\psi \in C(\overline{\Sigma})$ такая, что $\psi(0,x) \equiv 0$ и $\psi \in \mathrm{Int}_{L_\infty(\Sigma)} U_\partial$. Множество U_∂ замкнуто в пространстве $L_2(\Sigma)$.

Замечание 6.1. Предположение о замкнутости U_∂ в пространстве $L_2(\Sigma)$ существенно использовалось при доказательстве теоремы 1.4.3 о существовании решения задачи (6.1)–(6.3). Отметим, что замкнутость U_∂ в пространстве $L_2(\Sigma)$ не вытекает из предположения о замкнутости U_∂ в $L_\infty(\Sigma)$. Например, множество $U_\partial = \{u(x) \in L_\infty(0,1) : |u(x)| \leqslant |\ln x|\}$ замкнуто в $L_\infty(0,1)$, но не замкнуто в $L_2(0,1)$. Однако, если U_∂ — ограниченное подмножество пространства $L_\infty(\Sigma)$, то вместо замкнутости U_∂ в $L_2(\Sigma)$ достаточно предполагать, что U_∂ замкнуто в $L_\infty(\Sigma)$.

Из условия 6.1 можно вывести условие нетривиальности задачи (6.1)–(6.3), гарантирующее в силу теоремы 1.4.3 разрешимость этой задачи. Од-

нако для вывода системы оптимальности нам требуется большее. Наша ближайшая цель — доказать разрешимость задачи (6.2) хотя бы при одном $u \in \operatorname{Int}_{L_\infty(\Sigma)} U_\partial$. Для этого мы воспользуемся результатами о точной граничной управляемости. Пусть $0 \leqslant \tau < \tau_0 \leqslant T$, $Q_{(\tau,\tau_0)} = (\tau,\tau_0) \times \Omega$, $\Sigma_{(\tau,\tau_0)} = (\tau \times \tau_0) \times \partial\Omega$. Рассмотрим краевую задачу

$$\dot z(t,x) + \Delta z(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_{(\tau,\tau_0)}, \tag{6.4}$$

$$\gamma_{\Sigma_{(\tau,\tau_0)}} \partial_n z = v, \quad \gamma_{\tau_0} z = g, \tag{6.5}$$

где $g \in L_2(\Omega)$ — заданная функция, а v — управление. Задача точной граничной управляемости состоит в следующем. Требуется выбрать управление v таким образом, чтобы в момент времени τ решение z задачи (6.4), (6.5) удовлетворяло условию[4]

$$\gamma_\tau z = 0. \tag{6.6}$$

Справедлив следующий результат о точной граничной управляемости (см. Рассел [1]; Че, Эмануилов, Ким [1]). Этот результат легко получить методами гл. 7, где исследованы значительно более сложные задачи точной управляемости.

Теорема 6.1. *Пусть $g \in L_2(\Omega)$. Тогда существует решение $(z,v) \in L_2(\tau,\tau_0; H^1(\Omega)) \times L_\infty(\Sigma_{(\tau,\tau_0)})$ задачи (6.4)–(6.6), удовлетворяющее оценке*

$$\|z\|_{L_2(\tau,\tau_0;H^1(\Omega))} + \|v\|_{L_\infty(\Sigma_{(\tau,\tau_0)})} \leqslant c(\tau,\tau_0)\|g\|_{L_2(\Omega)}, \tag{6.7}$$

где константа $c(\tau,\tau_0)$ зависит лишь от $|\tau_0 - \tau|$ и не зависит от g.

Лемма 6.1. *Пусть выполнено условие 6.1. Тогда существует пара $(z,u) \in L_2(0,T;H^1(\Omega)) \times L_\infty(\Sigma)$, удовлетворяющая соотношениям (6.2), такая, что $u \in \operatorname{Int}_{L_\infty(\Sigma)} U_\partial$.*

Доказательство. Пусть $0 = \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \dots \leqslant \lambda_k \leqslant \dots$ — собственные значения и $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — и собственные функции следующей спектральной задачи в области Ω:

$$-\Delta\varphi_k(x) = \lambda_k \varphi_k(x); \quad \gamma_{\partial\Omega}\partial_n\varphi_k = 0, \quad \|\varphi_k\|_{L_2(\Omega)} = 1. \tag{6.8}$$

Обозначим через $P_N : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ ортопроектор на линейное пространство, натянутое на первые N функций φ_k. Если $\psi \in C(\overline{\Sigma})$ — функция из условия 6.1, то $\psi(0,x) \equiv 0$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tau_0 \in (0,T)$ такое, что $\|\psi\|_{C(\overline{\Sigma}_{(0,\tau_0)})} < \varepsilon$. Поэтому существует функция $\psi_1 \in C(\overline{\Sigma}) \cap \operatorname{Int}_{L_\infty(\Sigma)} U_\partial$ такая, что $\psi_1(t,x) \equiv 0$, $t \in (0,\tau_0)$, $x \in \Omega$, при некотором $\tau_0 \in (0,\tau)$. Краевая задача $\dot y_1 + \Delta y_1 = 0$ в Q, $\gamma_\Sigma \partial_n y_1 = \psi_1$, $\gamma_T y_1 = 0$ является корректной параболической задачей, и у нее существует решение $y_1 \in L_2(0,T;H^1(\Omega)) \cap C(0,T;L_2(\Omega))$ (см. Лионс, Мадженес [3]). В силу теоремы 6.1 задача точной

[4] Хотя (6.4) — это обратное уравнение теплопроводности, сформулированная задача фактически является задачей точной граничной управляемости для прямого уравнения теплопроводности, потому что начальное условия задается в момент времени τ_0, который больше момента времени τ, когда выполнено условие (6.6).

граничной управляемости

$$\dot{z}_N + \Delta z_N = 0 \text{ в } Q_{(0,\tau_0)}, \quad \gamma_{\Sigma_{(0,\tau_0)}} \partial_n z_N = v_N, \tag{6.9}$$

$$\gamma_{\tau_0} z_N = (1 - P_N)\gamma_{\tau_0} y_1, \quad \gamma_0 z_N = 0 \tag{6.10}$$

разрешима при любом натуральном N. Благодаря оценке (6.7) функцию v_{N_0} при достаточно большом N_0 можно выбрать так, что

$$\mathrm{Int}_{L_\infty(\Sigma)} U_\partial \ni u = \begin{cases} \psi_1 + v_{N_0}, & t \in (0, \tau_0), \\ \psi_1, & t \in (\tau_0, \tau). \end{cases}$$

Пусть $y_2(t,x)$ — решение параболической краевой задачи $\dot{y}_2 + \Delta y_2 = 0$ в Q, $\gamma_\Sigma \partial_n y_2 = u$, $\gamma_T y_2 = 0$. При $(t,x) \in Q_{(0,\tau_0)}$ справедливо разложение $y_2(t,x) = y_2^1(t,x) + y_2^2(t,x)$, где $y_2^1(t,x)$ — решение задачи

$$\dot{y}_2^1 + \Delta y_2^1 = 0, \quad \gamma_{\tau_0} y_2^1 = P_{N_0}\gamma_0 y_1, \quad \gamma_{\Sigma_{(0,\tau_0)}} \partial_n y_2^1 = 0, \tag{6.11}$$

а $y_2^2 = z_{N_0}$, где z_{N_0} — решение задачи (6.9), (6.10) при $N = N_0$. Решая задачу (6.11) методом Фурье, в силу (6.10_2) получим $P_{N_0} y_2(0,\cdot) = P_{N_0} y_2^1(0,\cdot) = y_2^1(0,\cdot) = y_2(0,\cdot)$. Следовательно, существует решение обратной параболической краевой задачи $\dot{y}_3 + \Delta y_3 = 0$ в Ω, $\gamma_\Sigma \partial_n y_3 = 0$, $\gamma_0 y_3 = y_2(0,\cdot)$ (что легко устанавливается методом Фурье). Положим $y = y_2 - y_3$. Тогда $(y,u) \in L_2(0,T;H^1(\Omega)) \times L_\infty(\Sigma)$ удовлетворяет (6.2) и $u \in \mathrm{Int}_{L_\infty(\Sigma)} U_\partial$. □

Вследствие леммы 6.1 условие 6.1 гарантирует выполнение условия 1.4.3. Поэтому в силу теоремы 1.4.3 существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in L_2(0,T;H^1(\Omega)) \times U_\partial$ задачи (6.1)–(6.3).

Положим

$$R_\infty = \{u \in L_\infty(\Sigma) : \exists y(t,x) \in L_2(0,T;H^1(\Omega)) : \\ \dot{y} + \Delta y = 0 \text{ в } Q,\ \gamma_0 y = 0,\ \gamma_T y \in L_2(\Omega),\ \gamma_\Sigma \partial_n y = u\}.$$

Следствие 6.1. *Пусть $p \in L_1(\Sigma)$ и $\langle p, v\rangle_{(\Sigma)} = 0$ для любого $v \in R_\infty$. Тогда $p = 0$.*

Доказательство. Из доказательства леммы 6.1 следует, что для любых $\tau_0 \in (0,T)$ и $u \in C(\overline{\Sigma})$, $\operatorname{supp} u \subset \Sigma_{(\tau_0,\tau)}$, существует последовательность $v_N \in L_\infty(\Sigma_{(0,\tau_0)})$ такая, что $\|v_N\|_{L_\infty(\Sigma_{(0,\tau_0)})} \to 0$ при $N \to \infty$, и для любого N функция

$$u_N = \begin{cases} v_N(t,x), & (t,x) \in \Sigma_{(0,\tau_0)}, \\ u, & (t,x) \in \Sigma_{(\tau_0,\tau)} \end{cases}$$

принадлежит R_∞. Поэтому $0 = \langle p, u_N\rangle_{(\Sigma)} \to \langle p, u\rangle$. Следовательно, $p = 0$. □

6.2. Граничное управление. Вывод системы оптимальности. Основным результатом этого пункта является следующая теорема.

Теорема 6.2. *Пусть выполнено условие* 6.1. *Пара $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in L_2(0,T;H^1(\Omega)) \times L_\infty(\Sigma)$ является решением задачи* (6.1)–(6.3) *тогда и только тогда, когда*

существует функция $p \in C^2((0,\tau] \times \overline{\Omega})$ *такая, что*

$$\dot{\widehat{y}} + \Delta\widehat{y} = 0, \quad \dot{p} - \Delta p = 0 \ \text{в}\ Q, \tag{6.12}$$

$$\gamma_0\widehat{y} = 0, \quad \gamma_T p = w - \gamma_T\widehat{y}, \tag{6.13}$$

$$\gamma_\Sigma\partial_n\widehat{y} = \widehat{u}, \quad \widehat{u} \in U_\partial, \quad \gamma_\Sigma\partial_n p\big|_\Sigma = 0, \tag{6.14}$$

$$\langle p + N\widehat{u}, u - \widehat{u}\rangle_{(\Sigma_T)} \geqslant 0 \quad \forall u \in U_\partial \cap R_\infty. \tag{6.15}$$

Доказательство. Необходимость. На множестве R_∞ определим оператор $\mathcal{A}$, сопоставляющий функции $v \in R_\infty$ функцию $\gamma_T z$, где $z(t,x)$ — решение обратной параболической краевой задачи

$$\partial_t z + \Delta z = 0, \quad \gamma_0 z = 0, \quad \gamma_\Sigma\partial_n z = v. \tag{6.16}$$

Таким образом, $\mathcal{A}v = \gamma_T z$ и $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = R_\infty$.

Пусть $u \in R_\infty \cap U_\partial$, $z(t,x)$ решение задачи (6.16) при $v = u - \widehat{u}$. Для функционала $\mathcal{J}$, определенного в (6.1), справедлива оценка

$$\frac{1}{\alpha}(\mathcal{J}(\widehat{y} + \alpha z, \widehat{u} + \alpha(u - \widehat{u})) - \mathcal{J}(\widehat{y}, \widehat{u})) \geqslant 0.$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $\alpha \to 0$, учитывая, что $\gamma_T z = \mathcal{A}(u - \widehat{u})$, получим неравенство

$$\langle \gamma_T\widehat{y} - w, \mathcal{A}(u - \widehat{u})\rangle_{(\Omega)} + N\langle \widehat{u}, u - \widehat{u}\rangle_{(\Sigma)} \geqslant 0. \tag{6.17}$$

Рассмотрим на линейном пространстве R_∞ функционал $R_\infty \ni v \to \langle F, v\rangle$, который определяется формулой

$$\langle F, v\rangle = \langle \gamma_T\widehat{y} - w, \mathcal{A}v\rangle_{(\Omega)}. \tag{6.18}$$

Покажем, что F можно продолжить до непрерывного функционала, заданного на всем пространстве $L_\infty(\Sigma)$. В силу леммы 6.1 существуют функция $\widehat{\psi} \in R_\infty$ и шар $B_r = \{u \in L_\infty(\Sigma) : \|u\|_{L_\infty(\Sigma)} < r\}$ такие, что $\widehat{\psi} + B_r \subset U_\partial$. Из (6.17) и (6.18) вытекает неравенство

$$\langle F, v + \widehat{\psi} - \widehat{u}\rangle \geqslant -N\langle \widehat{u}, v + \widehat{\psi} - \widehat{u}\rangle_{(\Sigma)} \quad \forall v \in B_r \cap R_\infty.$$

Поэтому

$$\sup_{v \in B_r \cap R_\infty} |\langle F, v\rangle| = -\inf_{v \in B_r \cap R_\infty} \langle F, v\rangle \leqslant |\langle F, \widehat{\psi} - \widehat{u}\rangle|$$
$$+ \sup_{v \in B_r \cap R_\infty} N|\langle \widehat{u}, v + \widehat{\psi} - \widehat{u}\rangle_{(\Sigma)}| \leqslant c_0.$$

Следовательно, $|\langle F, v\rangle| \leqslant c\|v\|_{L_\infty(\Sigma)}$ для всех $v \in R_\infty$. По теореме Хана — Банаха функционал F может быть продолжен до линейного непрерывного функционала, заданного на всем пространстве $L_\infty(\Sigma)$. Этот новый функционал также будет обозначаться F.

По теореме Иосиды — Хьюитта (Иосида, Хьюитт [1]; Дубовицкий, Милютин [2]) функционал F можно единственным образом представить в виде $F = p_1 + p_2$, где $p_1 \in L_1(\Sigma)$ и p_2 — сингулярный функционал, т. е. функционал F обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется

множество $B \subset \Sigma$, $\operatorname{meas}(\Sigma \setminus B) \leqslant \varepsilon$, такое, что $\langle p_2, v\rangle = 0$ при $v \in L_\infty(\Sigma)$ и $\operatorname{supp} v \subset B$, где $\operatorname{meas}(C)$ обозначает лебегову меру множества C на боковой поверхности Σ.

Лемма 6.2. *Для любого* $v \in R_\infty$

$$\langle p_2, v\rangle = 0. \tag{6.19}$$

Доказательство. Предположим, что найдутся $\alpha \in (0,T)$ и функция $v \in L_\infty(\Sigma)$, $\operatorname{supp} v \subset [\alpha, T]$, такие, что $\langle p_2, v\rangle \neq 0$. По определению функционала p_2 существует последовательность множеств B_k таких, что $\operatorname{meas}(B_k) \leqslant 1/k$ и имеем место равенство

$$\langle p_2, v\rangle = \langle p_2, \chi_{B_k} v\rangle, \tag{6.20}$$

где $\chi_{B_k}(x) = 1$ при $x \in B_k$ и $\chi_{B_k}(x) = 0$ при $x \notin B_k$, т. е. $\chi_{B_k}(x)$ — характеристическая функция множества B_k. Положим $v_k = \chi_{B_k} v$. Рассмотрим последовательность функций z_k^1 таких, что $\dot z_k^1 + \Delta z_k^1 = 0$ в $Q_{(\alpha,T)}$, $\gamma_T z_k^1 = 0$, $\gamma_\Sigma \partial_n z_k^1\big|_{\Sigma_{(\alpha,T)}} = v_k$. Поскольку

$$v_k \rightharpoonup 0 \ \ *\text{-слабо в } L_\infty(\Sigma_{(\alpha,T)}), \tag{6.21}$$

$v_k \rightharpoonup 0$ в $L_2(\Sigma_{(\alpha,T)})$. Ввиду Лионс, Мадженес [3, с. 86, 87] $z_k^1 \rightharpoonup 0$ в $L_2(\alpha, T; H^{3/2}(\Omega))$ и $\dot z_k^1 \rightharpoonup 0$ в $L_2(\alpha, T; H^{-1/2}(\Omega))$. В силу теоремы о следах $\gamma_\alpha z_k^1$ сходится к нулю слабо в $H^{1/2}(\Omega)$ и, следовательно, сильно в $L_2(\Omega)$. Согласно теореме 6.1 найдутся $u_k \in L_\infty(\Sigma_{(0,\alpha)})$ $z_k^2 \in L_2(0,\alpha; H^1(\Omega))$ такие, что $\dot z_k^2 + \Delta z_k^2 = 0$ в $Q_{(0,\alpha)}$, $\gamma_{\Sigma_{(0,\alpha)}} \partial_n z_k^2 = u_k$, $\gamma_\alpha z_k^2 = \gamma_\alpha z_k^1$, $\gamma_0 z_k^2 = 0$, причем в силу (6.7) и соотношения $\|\gamma_\alpha z_k^1\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $k \to \infty$ имеем

$$\|u_k\|_{L_\infty(\Sigma_{(0,\alpha)})} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{6.22}$$

Продолжим u_k нулем на $\Sigma_{(\alpha,T)}$ и полученную функцию, определенную на Σ, обозначим через u_k. Положим

$$z_k(t,x) = \begin{cases} z_k^1(t,x), & t \in (\alpha, T), \\ z_k^2(t,x), & t \in (0,\alpha). \end{cases}$$

Тогда

$$\dot z_k + \Delta z_k = 0 \text{ в } Q, \quad \gamma_T z_k = 0, \quad \gamma_0 z_k = 0, \quad \gamma_\Sigma \partial_n z_k = v_k + u_k. \tag{6.23}$$

Из (6.23), (6.18) и определения оператора $\mathcal{A}$ (см. определение после формулы (6.16)) следует, что

$$\langle F, v_k + u_k\rangle = 0. \tag{6.24}$$

Так как $F = p_1 + p_2$, из (6.20) и (6.24) получаем

$$\langle p_2, v\rangle = \langle p_2, v_k\rangle = -\langle p_1, u_k + v_k\rangle - \langle p_2, u_k\rangle. \tag{6.25}$$

Ввиду (6.21) и (6.22) правая часть (6.25) стремится к нулю при $k \to \infty$. Поэтому $\langle p_2, v\rangle = 0$.

Пусть v — произвольная функция из множества R_∞, а $z(t,x)$ — соответствующее ей решение задачи (6.16). Продолжим z нулем на $(-\infty,0)\times\Omega = Q_{(-\infty,0)}$. Для любого натурального k положим $(z_k(t,x),\psi_k(t,x)) = (z(t-1/k,x), v(t-1/k,x))$. Поскольку $\langle p_2,\psi_k\rangle = 0$ для сингулярного функционала p_2 из разложения $F = p_1 + p_2$, в силу (6.18) справедливо равенство

$$\langle p_1,\psi_k\rangle_{(\Sigma)} = \langle \gamma_T\widehat{y} - w, \mathcal{A}\psi_k\rangle_{(\Omega)} = \langle \gamma_T\widehat{y} - w, z(T-1/k,\cdot)\rangle_{(\Omega)}. \tag{6.26}$$

Учитывая, что $\psi_k \to v$ $*$-слабо в $L_\infty(\Sigma)$, а $z(T-1/k,\cdot)\to z(T,\cdot)$ в $L_2(\Omega)$ при $k\to\infty$, перейдем к пределу в (6.26). Имеем $\langle p_1, v\rangle_{(\Sigma)} = \langle \gamma_T\widehat{y} - w, \mathcal{A}v\rangle_{(\Omega)}$. В силу (6.18) и разложения $F = p_1 + p_2$ получаем (6.19). □

Доказательства теоремы 6.2 (продолжение). Покажем, что существует функция $p\in C^2((0,T]\times\overline{\Omega})$ такая, что

$$\dot p - \Delta p = 0 \text{ в } Q, \quad \gamma_\Sigma\partial_n p = 0, \quad p(T,x) = w(x) - \widehat{y}(T,x). \tag{6.27}$$

Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ функция $\widehat{y}(T,x) - w(x)$ представима в виде

$$\widehat{y}(T,x) - w(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\varepsilon)e^{-\lambda_j(T-\varepsilon)}\varphi_j(x), \tag{6.28}$$

где $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j^2(\varepsilon) < \infty$, λ_j — собственные значения и $\varphi_j(x)$ — собственные функции задачи (6.8). Положим

$$g_N(x) = \left(\sum_{j=1}^{N} a_j(\varepsilon)e^{\lambda_j(T-\varepsilon)}\varphi_j(x)\right)\Bigg/\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^2(\varepsilon)\right)^{1/2}, \tag{6.29}$$

где $a_j(\varepsilon)$ — коэффициенты из (6.28) (однозначно определяемые из этого равенства). Пусть (z_N, v_N) — решение задачи управляемости (6.4), (6.5) при $\tau_0 = T$, $\tau = 0$ такое, что $v_N(t,x)\equiv 0$ при $t\in(\varepsilon,T)$. Для решения этой задачи мы сначала методом Фурье решаем краевую задачу (6.4), (6.5) при $\tau=\varepsilon$, $\tau_0 = T$, $v\equiv 0$, $g = g_N$. В результате получаем

$$z_N(\varepsilon,x) = \left(\sum_{j=1}^{N} a_j(\varepsilon)\varphi_j(x)\right)\Bigg/\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^2(\varepsilon)\right)^{1/2}.$$

На отрезке $t\in(0,\varepsilon)$ мы решаем задачу управляемости (6.4)–(6.6) при $\tau=0$, $\tau_0=\varepsilon$, $g = z_N(\varepsilon,\cdot)$. Так как $\|z_N(\varepsilon,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} = 1$, в силу теоремы 6.1 можно выбрать $(z_N(t,x), v_N(t,x))$, $t\in(0,\varepsilon)$, так, что

$$\|v_N\|_{L_\infty(\Sigma)} = \|v_N\|_{L_\infty(\Sigma_{(0,\varepsilon)})} \leqslant c_1, \tag{6.30}$$

где c_1 не зависит от N. Очевидно, что $v_N\in R_\infty$. Подставляя v_N в (6.18) и учитывая, что $F = p_1$, $\mathcal{A}v_N = g_N$, а функции g_N, $\widehat{y}(T_j) - w$ допускают разложения (6.29), (6.28), получим равенство

$$\langle p_1, v_N\rangle_{(\Sigma)} = \langle \widehat{y}(T_j) - w, g_N\rangle_{(\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^{N} a_j^2(\varepsilon)\right)^{1/2}. \tag{6.31}$$

Из (6.30) и (6.31) следует, что $\sum\limits_{j=1}^{N} a_j^2(\varepsilon) \leqslant c_2$, где c_2 не зависит от N, а, следовательно, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j^2(\varepsilon) < \infty$. Учитывая последнее неравенство, соотношение (6.28) и решая задачу (6.27) методом Фурье, получим, что решение $p(t,x)$ задачи (6.27) существует и $p \in C^2((\varepsilon, T] \times \overline{\Omega})$ для любого $\varepsilon > 0$. Другими словами, $p \in C^2((0,T] \times \overline{\Omega})$.

Пусть $v \in R_\infty$, а $z(t,x)$ — решение задачи (6.16). Для любого натурального k положим $z_k(t,x) = z(t-1/k, x)$, $v_k(t,x) = v(t-1/k, x)$, $t \in (1/k, T)$. При $t \in (0, 1/k)$ положим $z_k(t,x) \equiv 0$ и $v_k(t,x) \equiv 0$. Интегрируя по частям по x и t, в силу (6.16), (6.27), (6.18) и леммы 6.2 находим

$$0 = \int\limits_{Q(1/k,T)} p(\dot{z}_k + \Delta z_k) + z_k(\dot{p} - \Delta p)\, dx\, dt = \langle w - \widehat{y}(T,\cdot), z(T-1/k,\cdot)\rangle_{(\Omega)}$$
$$+ \langle p, v_k\rangle_{(\Sigma_{(1/k,T)})} = \langle p, v_k\rangle_{(\Sigma_{(1/k,T)})} - \langle p_1, v_k\rangle_{(\Sigma_{(1/k,T)})}. \tag{6.32}$$

Переходя в (6.32) к пределу при $k \to \infty$ получим $\langle p - p_1, v\rangle_{(\Sigma)} = 0$ для всех $v \in R_\infty$. Из этого равенства в силу следствия 6.1 вытекает, что $\gamma_\Sigma p = p_1$. Из равенства (6.18) при $F = p_1 = \gamma_\Sigma p$ и $v = u - \widehat{u}$, где $u \in R_\infty \cap U_\partial$, и неравенства (6.17) следует (6.15). Соотношения (6.12)–(6.14) справедливы в силу (6.2), (6.3), (6.27).

Достаточность. В силу леммы 1.2 достаточно доказать единственность решения задачи (6.12)–(6.15). Предположим, что существуют две тройки

$$(\widehat{y}_i, \widehat{u}_i, p_i) \in L_2(0,T; H^1(\Omega)) \times L_\infty(\Sigma) \times C^2((0,T] \times \overline{\Omega}), \quad i = 1,2, \tag{6.33}$$

для которых выполнены (6.12)–(6.15). Положим $z = \widehat{y}_1 - \widehat{y}_2$, $h = \widehat{u}_1 - \widehat{u}_2$, $q = p_1 - p_2$. Ввиду (6.12)–(6.15) (z,h,q) удовлетворяет соотношениям

$$\dot{z} + \Delta z = 0, \quad \dot{q} - \Delta q = 0 \text{ в } Q, \tag{6.34}$$
$$\gamma_\Sigma \partial_n z = h, \quad \gamma_\Sigma \partial_n q = 0, \langle h + q, h\rangle_{(\Sigma)} \leqslant 0, \tag{6.35}$$
$$\gamma_0 z = 0, \quad \gamma_T q + \gamma_T z = 0. \tag{6.36}$$

Поэтому

$$0 = \int\limits_Q q(\dot{z} + \Delta z) + z(\dot{q} - \Delta q)\, dx\, dt = \langle \gamma_T q, \gamma_T z\rangle_{(\Omega)} + \langle q, h\rangle_{(\Sigma)}$$
$$= -\frac{1}{2}\big(\|\gamma_T q\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma_T z\|^2_{L_2(\Omega)}\big) - \|h\|^2_{L_2(\Sigma)} + \langle h + q, h\rangle_{(\Sigma)}.$$

Следовательно, $\gamma_T q = 0$, $\gamma_T z = 0$, $h = 0$. Их этих равенств, соотношений (6.34)–(6.36) и теоремы 1.1.15 о единственности решений параболических краевых задач, а также из теоремы о единственности решений обратных параболических задач следует, что $\widehat{y}_1 = \widehat{y}_2$, $\widehat{u}_1 = \widehat{u}_2$, $p_1 = p_2$. $\square$

6.3. Стартовое управление. Рассмотрим задачу со стартовым управлением и финальным наблюдением:

$$\frac{1}{2}\|\gamma_T y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - y_0\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf, \tag{6.37}$$

$$\dot{y}(t,x) + \Delta y(t,x) = g(t,x), \quad \gamma_\Sigma y = 0, \quad \gamma_0 y = u, \quad u \in U_\partial, \tag{6.38}$$

где $w \in L_2(\Omega)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(Q)$, $N > 0$,

$$U_\partial = \{u(x) \in L_2(\Omega) : \alpha_1 \leqslant u(x) \leqslant \alpha_2(x) \text{ для почти всех } x \in \Omega\}, \tag{6.39}$$

где $\alpha_i(x) \in C(\overline{\Omega})$, причем существуют функция $\varphi(x) \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi\big|_{\partial\Omega} \equiv 0$, и $\varepsilon > 0$ такие, что $\alpha_1(x) \leqslant \varphi(x) - \varepsilon < \varphi(x) + \varepsilon \leqslant \alpha_2(x)$ при всех $x \in \Omega$.

В силу теоремы 2.6 из гл. 3 об аппроксимативной управляемости параболических уравнений множество U_∂ удовлетворяет условию 1.4.2, если

$$g \in L_2(Q) \cap L_\mu(Q), \quad \mu > 1 + d/2. \tag{6.40}$$

В силу теоремы 1.4.2 существует единственное решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times L_2(\Omega)$ задачи (6.37), (6.38), где

$$Y_1 = \{y \in L_2(0,T; H^1_0(\Omega)) : \dot{y} \in L_2(0,T; H^{-1}(\Omega))\}. \tag{6.41}$$

Лемма 6.3. *При условии* (6.40) *компонента* $\widehat{u}$ *решения* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times L_2(\Omega)$ *задачи* (6.37), (6.38) *является непрерывной функцией*: $\widehat{u} \in C(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Вследствие (6.38)

$$\dot{\widehat{y}} + \Delta\widehat{y} = g \in L_\mu(Q), \quad \gamma_\Sigma \widehat{y} = 0. \tag{6.42}$$

Так как $\widehat{y} \in Y_1$, при некотором $t_1 \in (0,T)$ имеем $\gamma_{t_1}\widehat{y} \in H^1_0(\Omega)$. В силу (6.42) и теоремы 1.1.14 $\widehat{y} \in L_2(0,t_1; H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$. Поэтому $\gamma_{t_2}\widehat{y} \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \subset \overset{\circ}{B}{}^1_{\mu_1}(\Omega)$ при некотором $t_2 \in (0,t_1)$, где в силу теоремы 1.1.1 $\mu_1 = 2d/(d-2)$ при $d \geqslant 3$ и $\mu_1 \in (0,\infty)$ при $d = 2$. Если $d \leqslant 4$, то по теореме 1.1.14 $\widehat{y} \in L_{\mu_1}(0,t_2; W^2_{\mu_1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_{\mu_1}(\Omega))$ $\dot{y} \in L_{\mu_1}(0,t_2; L_{\mu_1}(\Omega))$ и по теоремам 1.1.13 и 1.1.1 $\widehat{u} = \gamma_0\widehat{y} \in B^{2-2/\mu_1}_{\mu_1} \subset C(\overline{\Omega})$. Если $d \geqslant 5$, то $\gamma_{t_3}\widehat{y} \in B^{2-2/\mu_1}_{\mu_1}(\Omega) \subset B^1_{\mu_2}(\Omega)$ при некотором $t_3 \in (0,t_2)$, где $1/\mu_2 = 1/\mu_1 - 2/d(1 - 1/\mu_1)$. Повторяя аналогичные рассуждения, получим $\widehat{u} \in C(\overline{\Omega})$. □

Теорема 6.3. *Пара* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times C(\overline{\Omega})$ *является решением задачи* (6.37)–(6.39) *тогда и только тогда, когда существует* $p \in L_{\mu'}(Q)$, $\mu' = \mu/(\mu-1)$, *такое, что тройка* $(\widehat{y}, \widehat{u}, p)$ *удовлетворяет условию* (6.38) *и соотношениям*

$$\dot{p}(t,x) - \Delta p(t,x) = 0, \quad \gamma_T y(x) + \gamma_T p(x) = w(x), \quad \gamma_\Sigma p = 0, \tag{6.43}$$

$$\langle N(\widehat{u} - f) - \gamma_0 p, u - \widehat{u}\rangle_{(\Omega)} \geqslant 0 \quad \forall u \in U_\partial \cap C(\overline{\Omega}). \tag{6.44}$$

Доказательство. Чтобы воспользоваться теоремой 1.4, возьмем $X = Y_1 \times U$, где Y_1 — пространство (6.41), $U = L_2(\Omega)$, $V = L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \times L_2(\Omega)$, $L(y,u) = (\dot y + \Delta y, \gamma_0 y - u)$, $F_0 = (-g, 0)$. Положим $Y_0 = \{W^{1,2}_\mu(\Omega) : \gamma_\Sigma y = 0\}$, $U_0 = C(\overline{\Omega})$, $X_0 = Y_0 \times U_0$, $V_0 = L_\mu(Q) \times C(\overline{\Omega})$, $X_\partial = Y \times U_\partial$. Непрерывность вложений $X_0 \subset X$, $V_0 \subset V$ очевидна. Условия (1.27) в силу леммы 6.3 также выполнены, а условие (1.20) справедливо в силу требований на множество (6.39) и включения $\widehat{u} \in C(\overline{\Omega})$. Функция Лагранжа задачи (6.37), (6.38) имеет вид

$$\mathcal{L}(y,u,\lambda,p,q) = \lambda\left(\frac{1}{2}\|\gamma_T y - w\|^2_{L_2(Q)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$
$$+ \langle \dot y + \Delta y - u, p\rangle_{(Q)} + \langle \gamma_0 y - u, q\rangle_{(\Omega)}, \tag{6.45}$$

где $\lambda \geqslant 0$, $p \in L_{\mu'}(Q)$, $g \in (C(\overline{\Omega}))^*$. Из (1.28) при $x = (y,u)$ следует, что $\langle \mathcal{L}'_y, z\rangle = 0$ для всех $z \in Y_0$, откуда в силу (6.45) получаем

$$\lambda\langle \gamma_T \widehat{y} - w, z\rangle_{(\Omega)} + \langle \dot z + \Delta z, p\rangle_{(Q)} + \langle \gamma_0 z, q\rangle_{(\Omega)} = 0 \quad \forall z \in Y_0. \tag{6.46}$$

Из (6.46) при $z \in C_0^\infty(Q)$ вытекает (6.43_1). Следовательно, $p \in Z_{\mu'} \equiv \{p \in L_{\mu'}(Q) : \dot p - \Delta p \in L_{\mu'}(Q)\}$.

Лемма 6.4. *Пусть $p \in Z_{\mu'}$. Тогда определены операторы следов $\gamma_\Sigma p$, $\gamma_\Sigma \partial_n p$, $\gamma_t p$, где $\gamma_\Sigma p \in B^{-1/\mu'}_{\mu'}(\partial\Omega; W^{-1}_{\mu'}(0,T))$, $\gamma_\Sigma \partial_n p \in B^{-1-1/\mu'}_{\mu'}(\partial\Omega; W^{-1}_{\mu'}(0,T))$, $\gamma_t p \in B^{-2}_{\mu'}(\Omega)$, и для любой функции $z(t,x) \in C^\infty(\overline{Q})$ такой, что $z(T,x)\big|_{\partial\Omega} = z(0,x)\big|_{\partial\Omega} = 0$, справедлива формула Грина*

$$\langle \dot p - \Delta p, z\rangle_{(Q)} = \langle \gamma_T p, \gamma_T z\rangle_{(\Omega)} - \langle \gamma_0 p, \gamma_0 z\rangle_{(\Omega)}$$
$$- \langle \gamma_\Sigma \partial_n p, \gamma_\Sigma z\rangle_{(\Sigma)} + \langle \gamma_\Sigma p, \gamma_\Sigma \partial_n z\rangle_{(\Sigma)} - \langle p, \dot z + \Delta z\rangle_{(Q)}.$$

Относительно доказательства этой леммы см. Лионс, Мадженес [1]. (Отметим, что доказательство леммы 6.4 при $\mu' = 2$ приведено выше в лемме 4.1 из гл. 1 и лемме 4.1 этой главы. Случай произвольного $\mu > 1$ рассматривается аналогично.) С помощью (6.46) и формулы Грина так же, как при доказательстве теоремы 5.3, выводим $(6.43_{2,3})$. Соотношение (6.44) следует из (1.28).

§ 7. Нелинейные стационарные задачи

Этот параграф посвящен выводу необходимых условий экстремума для задач управления нелинейными стационарными системами.

7.1. Распределенное управление и наблюдение. Случай L_p-норм. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \subset C^\infty$. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{J}(y,u) = \frac{1}{\alpha}\|y - w\|^\alpha_{L_\alpha(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf, \tag{7.1}$$

$$\Delta y(x) + b(y(x)) = u(x), \quad \gamma y = 0, \tag{7.2}$$

где $\alpha > 1$, $N > 0$, $w \in L_\alpha(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ — заданные функции, а функция $b(\lambda) \in C^1(R^1)$ удовлетворяет условиям

$$|b(y)| \leqslant c(1+|y|)^{\varkappa}, \quad |b'(y)| \leqslant c(1+|y|)^{\varkappa-1}, \tag{7.3}$$

где $c > 0$, $\varkappa > 1$. Более простой случай $\varkappa \leqslant 1$ здесь рассматриваться не будет. Через γ обозначается оператор сужения функции на границу $\partial\Omega$ области Ω, т. е. $\gamma y = y\big|_{\partial\Omega}$. Для простоты рассмотрим сначала задачу (7.1), (7.2) без ограничения $u \in U_\partial$, и в этом случае выясним, при каких условиях на α и $\varkappa$ можно вывести необходимые условия экстремума.

Пусть выполнены предположения теоремы 1.6.1 или теоремы 1.6.2. Тогда существует решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in W_r^2(\Omega) \cap L_\alpha(\Omega) \times L_2(\Omega)$ задачи (7.1), (7.2), где $r = \min\{2, \alpha/\varkappa\}$.

Теорема 7.1. *Пусть $\alpha \geqslant 2(\varkappa - 1)$. Тогда существует $p \in L_2(\Omega)$ такое, что тройка $\widehat{y}, \widehat{u}, p$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\Delta\widehat{y}(x) + b(\widehat{y}(x)) = \frac{p(x)}{N} + f(x), \quad \gamma y = 0, \tag{7.4}$$

$$\Delta p(x) + b'(\widehat{y}(x))p(x) = |\widehat{y}(x) - w(x)|^{\alpha-1}\operatorname{sgn}(\widehat{y}(x) - w(x)), \quad \gamma p = 0, \tag{7.5}$$

$$p(x) = N(\widehat{u}(x) - f(x)). \tag{7.6}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.8. Положим $X = \big(W_r^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_r^1(\Omega) \cap L_\alpha(\Omega)\big) \times L_2(\Omega)$, $V = L_r(\Omega)$, $X_0 = (C^2(\overline{\Omega})) \cap H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$, $V_0 = L_2(\Omega)$, где $r = \min\{2, \alpha/\varkappa\}$, и $F(x) = F(y,u) = \Delta y + b(y) - u$ для $x = (y,u) \in X$. Функционал $g(x)$, определенный в (1.47) по функционалу $\mathcal{J}$ из (7.1), непрерывно дифференцируем на X_0. Так как в $b(\lambda) \in C^1(R^1)$, при любых $x = (y,u) \in X_0$ и $h = (h_1, h_2) \in X_0$ для оператора G, определенного в (1.47) по F, получим

$$G(x+h) - G(x) - G'(x)h = b(\widehat{y} + y + h_1) - b(\widehat{y} + y) - b'(\widehat{y} + y)h_1,$$

откуда следует непрерывная дифференцируемость оператора $G : X_0 \to V_0$ в силу непрерывной дифференцируемости оператора Немыцкого (см. Алексеев, Тихомиров, Фомин [1]). Покажем, что оператор $G'(0)h = F'(\widehat{x})h = \Delta y_1 + b'(\widehat{y})y_1 - u_1$, где $h = (y_1, u_1)$, отображает $X_0 = (C^2(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)) \times L_2(\Omega)$ на $V_0 = L_2(\Omega)$. Действительно, для любого $g \in L_2(\Omega)$ существует пара $(y_1, u_1) \in X_0$ такая, что $\Delta y_1(x) + b'(\widehat{y}(x))y_1(x) - u_1(x) = g(x)$, так как можно взять $y_1 \equiv 0$ и $u_1 = g$. Положим

$$\mathcal{L}(y,u,p) = \frac{1}{\alpha}\|y - w\|_{L_\alpha}^\alpha + \frac{N}{2}\|u - f\|_{L_2}^2 + (\Delta y + b(y) - u, p)_{(\Omega)}. \tag{7.7}$$

В силу теоремы 1.8 существует $p \in L_2(\Omega)$ такое, что

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_y'(\widehat{y}, \widehat{u}, p), y_1\rangle &= \big(|y - w|^{\alpha-1}\operatorname{sgn}(y - w), y_1\big)_{(\Omega)} \\ &+ \big(\Delta y_1 + b(\widehat{y})y_1, p\big)_{(\Omega)} = 0 \quad \forall y_1 \in C^2(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega),\end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\langle \mathcal{L}'_u(\widehat{y},\widehat{u},p)u_1\rangle = N\big(u-f,u_1\big)_{(\Omega)} - \big(u_1,p\big)_{(\Omega)} = 0 \quad \forall u_1 \in L_2(\Omega). \tag{7.9}$$

Из (7.9) следует (7.6). Полагая $y_1 \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ в (7.8), получим первое соотношение из (7.5), которое понимается в смысле теории обобщенных функций. Покажем, что для функции $p(x)$ определено сужение γp на $\partial\Omega$ и $\gamma p = 0$. В силу (7.3) $b'(\widehat{y}(x)) \in L_{\alpha/(\varkappa-1)}(\Omega)$. Так как $p \in L_2(\Omega)$ и $\alpha \geqslant 2(\varkappa-1)$, имеем $b'(\widehat{y}(x))p(x) \in L_1(x)$. Вследствие (7.5_1) получаем

$$\Delta p(x) = f_1(x) \equiv |y(x)-w(x)|^{\alpha-1}\operatorname{sgn}(y(x)-w(x)) - b'(\widehat{y}(x))p(x) \in L_1(\Omega). \tag{7.10}$$

Покажем, что при некоторых $s \in (0,1)$, $q > 1$

$$p \in P_{q'}^{-s}(\Omega), \quad q' = q/(q-1), \tag{7.11}$$

где $P_{q'}^{-s}(\Omega)$ — пространство (5.60). При $s \in (0,1)$ и q таких, что $s > d/q$, в силу теоремы вложения Соболева получим $L_1(\Omega) \subset W_{q'}^{-s}(\Omega)$. В силу (7.10) находим

$$\Delta p = f_1(x) \in W_{q'}^{-s}(\Omega). \tag{7.12}$$

Так как $s > d/q$, получаем $s > d(1/q-1/2)$ и $W_q^s(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, откуда $L_2(\Omega) \subset (W_q^s(\Omega))^*$. Из последнего включения и (7.12) вытекает (7.11). Поэтому в силу леммы 5.4 определено сужение γp. Из (5.61) и (7.8) следует, что $\gamma p = 0$. Из (7.2) и (7.6) получаем (7.4). □

Рассмотрим задачу (7.1), (7.2) с дополнительным ограничением

$$u \in U_\partial, \tag{7.13}$$

где U_∂ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(\Omega)$. Для простоты будем считать, что

$$\alpha = 2\varkappa, \quad 1/2 - 1/(2\varkappa) - 2/d < 0. \tag{7.14}$$

Кроме того, предположим, что выполнено условие 1.6.1, гарантирующее в силу теоремы 1.6.1 существование решения $(\widehat{y},\widehat{u}) \in \big(W_2^2(\Omega)\cap L_{2\varkappa}\big)\times L_2$ задачи (7.1), (7.2), (7.13).

Теорема 7.2. *Существует пара* $(\lambda,p) \in (R_+ \times L_2(\Omega)) \setminus \{0\}$ *такая, что набор* $(\widehat{y},\widehat{u},p)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\Delta p(x) + b'(\widehat{y}(x))p(x) = \lambda|\widehat{y}(x)-w(x)|^{2\varkappa-1}\operatorname{sgn}(\widehat{y}(x)-w(x)), \quad \gamma p = 0, \tag{7.15}$$

$$\int \big(N\lambda(\widehat{u}(x)-f(x)) - p(x)\big)(v(x)-\widehat{u}(x))\,dx \geqslant 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{7.16}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.5. Положим $Y = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $U = V = L_2(\Omega)$, $F(y,v) = \Delta y + b(y) - u$, $\mathcal{J}(u,v)$ — функционал (7.1) с условием (7.14). Очевидно, что функционал $Y : Y \times U \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируем в окрестности $(\widehat{y},\widehat{u})$. В силу теоремы вложения Соболева и неравенства (7.14_2) вложение $H^2(\Omega) \subset L_{2\varkappa}(\Omega)$ непрерывно, откуда легко

следует непрерывная дифференцируемость оператора

$$F'_y(\widehat{y},\widehat{u}) = \Delta + b'(\widehat{y}) : H^2 \cap H^1_0 \to L_2. \tag{7.17}$$

Вследствие (7.14_2) вложение $H^2 \subset L_{2\varkappa}$ вполне непрерывно, а оператор $h \to b'(\widehat{y})h$ непрерывно действует из $L_{2\varkappa}$ в L_2. Поэтому в силу непрерывности оператора $\Delta^{-1} : L_2 \to H^2 \cap H^1_0$, обратного к $\Delta : H^2 \cap H^1_0 \to L_2$, оператор $h \to \Delta^{-1}b'(\widehat{y})h$ вполне непрерывно действует из $H^2 \cap H^1_0$ в $H^2 \cap H^1_0$. Отсюда следует фредгольмовость оператора (7.17) и, в частности, замкнутость в L_2 множества $\operatorname{Im} F'_y(\widehat{y},\widehat{u})$ и неравенство $\operatorname{Codim}\operatorname{Im} F'_y(\widehat{y},\widehat{u}) < \infty$. Таким образом, мы проверили все предположения теоремы 1.5. С помощью этой теоремы выводятся соотношения (7.15) и (7.16). При этом рассуждения аналогичны соответствующим рассуждениям из теоремы 7.1. □

При использовании (7.15) и (7.16), как правило, необходимо установить, что $\lambda \neq 0$. Приведем ряд случаев, когда это удается сделать.

Случай I. Пусть нелинейный член $b(y)$ из (7.2) удовлетворяет условию

$$b'(t) \leqslant 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{7.18}$$

Тогда $\lambda \neq 0$ в (7.15), (7.16) (и можно считать, что $\lambda = 1$). Докажем это утверждение. Пусть $\lambda = 0$. В силу теоремы 7.2 $p \in L_{q_1}(\Omega)$, где $q_1 = 2$ и $b'(\widehat{y}(x)) \in L_{2\varkappa/(\varkappa-1)}(\Omega)$, Поэтому $b'(\widehat{y}(x))p(x) \in L_\alpha(\Omega)$, где $1/\alpha = 1/q_1 + 1/2 - 1/2\varkappa$. Из (7.15) при $\lambda = 0$ следует, что $p \in W^2_\alpha(\Omega)$. В силу теоремы вложения Соболева $p(x) \in L_{q_2}(\Omega)$, где $1/q_2 = \max\{0, 1/\alpha - 2/d\} = \max\{0, 1/q_1 + 1/2 - 1/2\varkappa - 2/d\}$. Ввиду (7.14_2) имеем $q_2 > q_1$. Повторяя это рассуждение несколько раз, находим

$$\begin{aligned}\frac{1}{q_k} &= \max\{0, 1/q_{k-1} + (1/2 - 1/(2\varkappa) - 2/d)\}\\ &= \max\{0, 1/q_1 + (k-1)(1/2 + 1/(2\varkappa) - 2/d)\},\end{aligned}$$

откуда при достаточно большом k получим $q_k = \infty$, т. е. $p \in L_\infty(\Omega)$. Умножая (7.15_1) при $\lambda = 0$ на $p(x)$ скалярно в $L_2(\Omega)$, интегрируя по частям и учитывая (7.15_2) и (7.18), получаем

$$\|\nabla p\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega b'(\widehat{y}(x))p^2(x)\,dx \leqslant 0.$$

Поэтому $\nabla p = 0$ и, следовательно, $p = 0$, что противоречит утверждению теоремы 7.2 о том, что $(\lambda, p) \neq (0,0)$.

В приведенном ниже случае не предполагается выполненным условие (7.18), гарантирующее тривиальность ядра оператора $\Delta + b'(\widehat{y})$, но рассматриваются множества U_∂ специального вида.

Случай II. Пусть при любом $t \in \mathbb{R}$

$$b'(t)t - b(t) + \gamma > 0. \tag{7.19}$$

Условию (7.19) удовлетворяет любой многочлен $b(t)$ четной степени и константа γ такая, что $\gamma > \gamma_0$, где γ_0 — некоторое число, зависящее от $b(t)$.

В качестве U_∂ рассмотрим множество

$$U_\partial = \{u(x) \in L_2(\Omega) : u(x) \geqslant \gamma \text{ для почти всех } x \in \Omega\}, \tag{7.20}$$

где γ —фиксированная константа. Тогда в (7.15), (7.16) $\lambda \neq 0$ (и можно считать, что $\lambda = 1$).

Действительно, пусть $\lambda = 0$. Покажем, что неравенство (7.16) для множества (7.20) эквивалентно системе соотношений, справедливой при почти всех $x \in \Omega$:

$$p(x) \leqslant 0, \quad \widehat{u}(x) \geqslant \gamma, \quad p(x)(\widehat{u}(x) - \gamma) = 0. \tag{7.21}$$

Действительно, неравенство (7.21_2) следует из включения $\widehat{u} \in U_\partial$, а (7.21) эквивалентно оценке (7.16), в которой $v(x) = \widehat{u}(x) + \varphi(x)$, где $\varphi(x) \geqslant 0$. Пусть $\operatorname{meas}\Gamma > 0$, где $\Gamma = \{x : \widehat{u}(x) > \gamma\}$. Подставив в (7.16) функцию $v(x)$ такую, что $v(x) - \widehat{u}(x) < 0$ при $x \in \Gamma$ и $\operatorname{supp}(v(x) - \widehat{u}(x)) \subset \overline{\Gamma}$, и учитывая (7.21_1), получим $p(x) = 0$ при $x \in \Gamma$. Следовательно, (7.21_3) справедливо.

Перепишем равенство (7.2) в виде

$$\Delta\widehat{y}(x) + b'(\widehat{y})\widehat{y} = b'(\widehat{y})\widehat{y} - b(\widehat{y}) + \widehat{u}(x), \quad \gamma\widehat{y}(x) = 0. \tag{7.22}$$

Ввиду теоремы Фредгольма правая часть равенства (7.22_1) ортогональна ядру оператора $\Delta + b'(\widehat{y})$ с нулевыми условиями Дирихле. Так как в силу (7.15) при $\lambda = 0$ $p(x)$ она принадлежит этому ядру, имеем

$$\int\limits_\Omega (b'(\widehat{y}(x))\widehat{y}(x) - b(\widehat{y}(x)) + \widehat{u}(x))p(x)\,dx = 0.$$

Из этого равенства и $(7.21_{1,2})$ следует, что

$$\int\limits_\Omega (b'(\widehat{y}(x))\widehat{y}(x) - b(\widehat{y}(x)) + \gamma)p(x)\,dx \geqslant 0.$$

В силу (7.21_1) и (7.19) получаем $p(x) \equiv 0$, что противоречит условию $(\lambda, p) \neq (0, 0)$. □

Имеются также другие случаи, для которых доказано, что $\lambda \neq 0$. (см. Лионс [3, с. 266, 267]).

7.2. Распределенное управление и наблюдение. Случай H^k-норм. Мы опишем эффект, возникающий при выводе необходимых условий экстремума в задачах с функционалом стоимости, порожденным нормами пространств Соболева H^k. Этот эффект при $k = 2$ состоит в появлении неоднородности в одном из граничных условий, а при $k > 2$ — в появлении, кроме того, дополнительных граничных условий в уравнениях Эйлера — Лагранжа. Для простоты мы ограничимся рассмотрением задачи

$$\frac{1}{2}\|y - w\|^2_{H^k(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf, \tag{7.23}$$

$$\Delta y + b(y) = u, \quad \gamma y = 0, \tag{7.24}$$

где $b(\lambda) \in C^2(R)$, а k — целое число, удовлетворяющее условиям

$$k \geqslant 2, \quad k > d/2. \tag{7.25}$$

Отметим, что для этой задачи можно установить, как в теореме 1.6.3, существование решения $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in H^k(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Приведем формулу Грина для эллиптического оператора произвольного порядка, которая понадобится далее при выводе необходимых условий экстремума в задачах (7.23), (7.24).

Пусть

$$\mathcal{A}u = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant k} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{D}^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) \mathcal{D}^\beta u(x)), \tag{7.26}$$

где $a_{\alpha\beta} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ — эллиптический оператор, т. е.

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=k} (-1)^k a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \geqslant c|\xi|^2 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где $\xi^{\alpha+\beta} = \xi_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n+\beta_n}$, а $c > 0$ — не зависит от x и ξ. Рассмотрим также систему граничных операторов

$$B_j \varphi = \sum_{|\alpha| \leqslant k_j} b_{j\alpha}(x) \gamma \mathcal{D}^\alpha \varphi, \quad b_{j\alpha}(x) \in C^\infty(\partial\Omega), \tag{7.27}$$

где γ — оператор сужения на границу $\partial\Omega$. Порядки операторов $\mathcal{A}$ и B_j равны соответственно $2k$ и k_j ($\operatorname{ord} \mathcal{A} = 2k$, $\operatorname{ord} B_j = k_j$). Система операторов $\{B_j\}_{j=0}^{\nu-1}$ называется *нормальной* на $\partial\Omega$, если $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$ и при любом j $\sum\limits_{|\alpha|=k_j} b_{j\alpha} n^\alpha(x) \neq 0$ при всех $x \in \partial\Omega$, где $n(x)$ — нормаль к $\partial\Omega$ в точке x. Нормальная система называется *системой Дирихле* на $\partial\Omega$, если порядки m_j пробегают все множество значений $0, 1, \ldots, k-1$. Для эллиптического оператора (7.26) и системы Дирихле $\{F_j\}_{j=0}^{k-1}$ можно определить нормальную систему $\{B_j\}_{j=0}^{k-1}$ такую, что $\operatorname{ord} F_j + \operatorname{ord} B_j = 2k - 1$, и справедлива формула Грина

$$\int\limits_\Omega \mathcal{A}u \cdot v \, dx = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant k} a_{\alpha\beta} \mathcal{D}^\alpha u \mathcal{D}^\beta v \, dx - \sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{\partial\Omega} B_j u F_j v \, dS. \tag{7.28}$$

Эта формула доказана в Лионс, Мадженес [2, с. 145]. Из формулы Грина (7.28) вытекает

Лемма 7.1. *Существует нормальная система* $\{B_j\}_{j=0}^{k-1}$ *такая, что* $\operatorname{ord} B_j = 2k - j - 1$ *и справедливо равенство*

$$\int\limits_\Omega \sum_{j=0}^{k} (-1)^k \Delta^k u \cdot v = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant k} \mathcal{D}^\alpha u \mathcal{D}^\alpha v - \sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{\partial\Omega} B_j u \frac{\partial^j v}{\partial n_j} \, dS, \tag{7.29}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ *— дифференцирование по внешней нормали* n *к границе* $\partial\Omega$.

Доказательство. Так как $\{\partial^j/\partial n^j\}_{j=0}^{k-1}$ — система Дирихле, а оператор $\sum\limits_{j=0}^{k}(-1)^k\Delta^k$ эллиптический, для вывода (7.29) из (7.28) достаточно показать, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \mathcal{D}^\alpha u \mathcal{D}^\alpha v\,dx = (-1)^m \int\limits_\Omega \Delta^m u\cdot v\,dx, \quad \forall u,v\in C_0^\infty(\Omega).$$

Последняя формула легко доказывается индукцией по m интегрированием по частям. □

Выведем необходимые условия экстремума в задаче (7.23), (7.24).

Теорема 7.3. *Пусть* $(\widehat{y},\widehat{u})\in H^k(\Omega)\times L_2(\Omega)$ *— решение задачи* (7.23), (7.24), *в которой* k *— натуральное число, удовлетворяющее условиям* (7.25), $w\in H^k(\Omega)$, $f\in L_2(\Omega)$,

$$f_1 = f-\Delta w\in H^2(\Omega). \tag{7.30}$$

Тогда $\widehat{y}-w\in H^k_\Lambda(\Omega)$,[5] *где* $\Lambda=\sum\limits_{j=0}^{k-1}(-1)^j\Delta^j$ *и* $\widehat{y}$ *вместе с функцией*

$$p = N(\widehat{u}-f) \tag{7.31}$$

удовлетворяет в Ω *дифференциальным уравнениям*

$$\Delta p + b(\widehat{y})p + \Lambda(\widehat{y}-w) = 0, \quad \Delta\widehat{y} + b(\widehat{y}) - \frac{1}{N}p = f, \tag{7.32}$$

а на $\partial\Omega$ *— граничным условиям*

$$\gamma\widehat{y}=0, \quad \gamma(p+B_1(\widehat{y}-w))=0, \quad \gamma B_j(\widehat{y}-w)=0, \quad j=2,\dots,k-1, \tag{7.33}$$

где B_j, $j=1,\dots,k-1$, *— граничные операторы из* (7.29).

Доказательство. Сделаем замену $y_1=y-w$, $u_1=u-\Delta w$. Тогда задача (7.23), (7.24) перепишется в виде

$$\frac{1}{2}\|y_1\|^2_{H^k(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u_1-f_1\|^2_{L_2(\Omega)} \to \inf, \tag{7.34}$$

$$\Delta y_1 + b(y_1+w) = u_1, \quad \gamma_0(y_1+w)=0, \tag{7.35}$$

и функции $\widehat{y}_1=\widehat{y}-\widehat{w}\in H^k(\Omega)$, $\widehat{u}_1=\widehat{u}-\Delta w\in L_2(\Omega)$ будут решением задачи (7.34), (7.35). Выведем необходимые условия экстремума для этой задачи с помощью теоремы 1.7. Положим $X=H^k(\Omega)\times L_2(\Omega)\ni x=(y_1,u_1)$, $V=L_2(\Omega)\times H^{k-1/2}(\partial\Omega)$, $F(x)\equiv F(y_1,u_1)=(\Delta y_1+b(y_1+w)-u_1,\gamma_0(y_1+w))$. Тогда $F'(\widehat{x})h=F'(\widehat{y}_1,\widehat{u}_1)h=(\Delta h_1+b'(\widehat{y}_1+w)h_1-h_2,\gamma h_1)$, где $h=(h_1,h_2)$. Очевидно, что для любого $g=(g_1,g_2)\in V$ существует $h\in X$ такое, что

$$\Delta h_1 + b'(\widehat{y}_1+w)h_1 - h_2 = g_1, \quad \gamma h_1 = g_2. \tag{7.36}$$

[5]Напомним, что $H^k_\Lambda(\Omega)=\{v(x)\in H^k(\Omega):\Lambda v(x)\in L_2(\Omega)\}$.

Действительно, в силу теоремы 1.1.4 для любого $g_2 \in H^{k-1/2}(\partial\Omega)$ существует функция $h_1 \in H^k(\Omega)$ такая, что $\gamma_0 h_1 = g_2$. В силу (7.25), теоремы вложения Соболева и включения $b'(\lambda) \in C(\mathbb{R})$ имеем $b'(\widehat{y}_1(x)+w(x)) \in C(\overline{\Omega})$, откуда $\Delta h_1 + b'(\widehat{y}_1 + w)h_1 \in L_2(\Omega)$. Положив $h_2 = \Delta h_1 + b'(\widehat{y} + w)h_1 - g_1$, получим (7.36).

В силу теоремы 1.7 для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(y,u,p) = \frac{1}{2}\|y_1\|^2_{H^k(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u_1 - f_1\|^2_{L_2(\Omega)}$$
$$+ (p, \Delta y_1 + b(y_1 + w) - u_1)_{(\Omega)} + (\gamma_0 y_1, q)_{(\partial\Omega)}$$

при некоторых $p \in L_2(\Omega)$, $q \in H^{-k+1/2}(\partial\Omega)$ справедливо соотношение (1.46). Другими словами,

$$(\widehat{y}_1, h_1)_{H^k(\Omega)} + (p, \Delta h_1 + b'(\widehat{y}_1 + w)h_1)_{(\Omega)} + (\gamma h_1, q)_{(\partial\Omega)} = 0 \tag{7.37}$$

для каждого $h_1 \in H^k(\Omega)$,

$$N(\widehat{u}_1 - f_1, h_2)_{(\Omega)} - (p, h_2)_{(\Omega)} = 0 \quad \forall h_2 \in L_2(\Omega). \tag{7.38}$$

Из (7.38) вытекает

$$p = N(\widehat{u}_1 - f_1), \tag{7.39}$$

откуда получаем (7.31) в силу (7.30) и формулы для $\widehat{u}_1$ в терминах u. Из (7.31), (7.24) выводим (7.32_2). Полагая $h_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ в (7.37), в силу (7.29) получим равенство

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \Delta^j \widehat{y}_1 + \Delta p + b'(\widehat{y}_1 + w)p = 0, \tag{7.40}$$

понимаемое в смысле теории обобщенных функций. Из (7.40) следует (7.32_1). Из (7.32_2), (7.30) и соотношения $\widehat{y}_1 = \widehat{y} - w$ вытекает равенство

$$\frac{1}{N}p = \Delta\widehat{y}_1 + b(\widehat{y}_1 + w) - f_1. \tag{7.41}$$

Подставляя это выражение для p в (7.40), получим

$$\Lambda_1 \widehat{y}_1 = NF \quad (\Lambda_1 = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \Delta^j), \tag{7.42}$$

$$F = -\Delta(\Delta\widehat{y}_1 + b(\widehat{y}_1 + w) - f_1) - b'(\widehat{y}_1 + w)(\Delta\widehat{y}_1 + b(\widehat{y}_1 + w) - f_1). \tag{7.43}$$

В силу предположений теоремы $\widehat{y}_1 \in H^k(\Omega)$ и $w \in H^k(\Omega)$. Из этих включений, включения (7.30), условий (7.25) и теоремы вложения Соболева следует, что $F \in L_2(\Omega)$, где F — функция, определенная в (7.43). Поэтому $\widehat{y}_1 \in H^k_{\Lambda_1}$, где Λ_1 — эллиптический оператор порядка $2k$, определенный в (7.42). Как доказано в Лионс, Мадженес [2], для функции $\widehat{y}_1$ определены следы $\gamma\dfrac{\partial^j}{\partial n^j}\widehat{y} \in H^{k-j-1/2}(\partial\Omega)$, $j = 0, 1, \ldots, 2k-1$, и справедлива формула Грина

(7.29) дляс $u = \widehat{y}_1$ и $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. В силу (7.41), ($7.32_1$), (7.30) и $y_1 \in H^k_{\Lambda_1}$ получаем $p \in H^0_\Delta(\Omega)$. Поэтому для p определены следы $\gamma \dfrac{\partial^j}{\partial n^j} p \in H^{-j-1/2}(\partial\Omega)$, $j = 0, 1$, и справедлива формула Грина (2.11). Выразив первый член из (7.37) с помощью (7.29), где $u = \widehat{y}_1$, $v = h_1$, а второй член — с помощью (2.11), где $z = h_1$, получим равенство

$$\left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \Delta^j \widehat{y}_1, h_1\right)_{(\Omega)} + \big(\Delta p + b'(\widehat{y}_1 + w)p, h_1\big)_{(\Omega)} + \big(\gamma h_1, q\big)_{(\partial\Omega)}$$
$$+ \big(\gamma p, \gamma \partial_n h_1\big)_{(\partial\Omega)} - \big(\gamma \partial_n p, \gamma h_1\big)_{(\partial\Omega)} + \sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{\partial\Omega} B_j \widehat{y}_1 \frac{\partial^j h_1}{\partial n^j}\, ds = 0$$

для всех $h_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Из этого равенства, учитывая (7.40), находим

$$q = \gamma \partial_n p - \gamma B_0 \widehat{y}_1, \quad \gamma p + \gamma B_1 \widehat{y}_1 = 0, \quad \gamma B_j \widehat{y}_1 = 0, \quad j = 2, \ldots, k-1. \tag{7.44}$$

Отметим, что первое соотношение в (7.44) фактически является определением q и поэтому не содержит информации. Остальные соотношения в (7.44) и (7.24_2) эквивалентны (7.33). □

§ 8. Системы оптимальности в случае управления сингулярным полулинейным параболическим уравнением

В этом параграфе с помощью теорем 1.5 и 1.6 выведены системы оптимальности для экстремальных задач, изученных в гл. 1, § 7. Начнем с доказательства одного вспомогательного результата.

8.1. Параболическое уравнение с негладким коэффициентом. В цилиндре $Q = [0, T] \times \Omega$ рассматривается краевая задача

$$\dot{y}(t, x) - \Delta y(t, x) + m(t, x) y(t, x) = f(t, x), \tag{8.1}$$

$$\gamma_\Sigma y = 0, \quad \gamma_0 y = 0, \tag{8.2}$$

где $f(t, x)$ — заданная правая часть. Предполагается, что

$$m(t, x) \in L_\beta(0, T; L_\gamma(\Omega)). \tag{8.3}$$

Лемма 8.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^\infty$ и справедливо включение (8.3), где β и γ удовлетворяют условиям*

$$d/(2\gamma) + 1/\beta < 1, \quad \gamma > 1, \quad \beta > 1. \tag{8.4}$$

Тогда при любом $f \in L_\lambda(Q)$, $1 < \lambda < \min\{\beta, \gamma\}$, существует единственное решение $y \in W^{1,2}_\lambda(Q)$ задачи (8.1), (8.2). Если

$$d/(2\gamma) + 1/\beta \leqslant 1, \quad d \geqslant 3, \quad \gamma > 2, \quad \beta > 2, \tag{8.5}$$

то при любом $f \in L_2(Q)$ существует единственное решение $y \in W^{1,2}_2(Q)$ задачи (8.1), (8.2).

Доказательство. Рассмотрим случай (8.4). Пусть $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(Q) = \{y \in W^{1,2}_{\lambda}(Q), \gamma_0 y = 0, \gamma_\Sigma y = 0\}$ и $R : L_\lambda(Q) \to \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(Q)$ — разрешающий оператор задачи $\dot{y} - \Delta y = f$, $\gamma_0 y = 0$, $\gamma_\Sigma y = 0$. Существование и непрерывность оператора R следуют из теоремы 1.1.14. Применяя оператор R к обеим частям (8.1), получим следующее уравнение в $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(Q)$:

$$y + (R \circ m)y = Rf. \tag{8.6}$$

В силу теоремы 1.1.12 вложение $W^{1,2}_{\lambda}(Q) \subset L_p(0,T; L_q(\Omega))$ вполне непрерывно, если

$$\frac{d}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{q}\right) + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{p}\right) < 1. \tag{8.7}$$

С помощью неравенства Гёльдера устанавливается непрерывность оператора умножения $m : L_p(0,T; L_q(\Omega)) \to L_\lambda(Q)$ на функцию $m(t,x)$, удовлетворяющую условию (8.3), если

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\lambda}. \tag{8.8}$$

Если $1 < \lambda < \min\{\beta, \gamma\}$, то при выполнении (8.4) всегда существуют p и q, удовлетворяющие (8.7), (8.8). Следовательно, оператор $R \circ m : \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda} \to \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}$ вполне непрерывен, и (8.6) — это уравнение Фредгольма. Воспользуемся теоремой о единственности слабых решений задачи (8.1), (8.2) (см. Лионс, Мадженес [3, с. 43]; Гишларкаев [1]). В данном случае эта теорема применима ввиду непрерывности оператора $m : \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda} \to L_\lambda(Q)$. Согласно этой теореме решение задачи (8.6) единственно в $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}$, а так как $I + R \circ m$ — оператор Фредгольма, и поэтому имеет нулевой индекс, из единственности следует также существование решения задачи (8.6). Тем самым доказана однозначная разрешимость задачи (8.1), (8.2).

Рассмотрим случай (8.5). Умножив обе части равенства (8.1) на $-\Delta y$ скалярно в $L_2(\Omega)$, после простых преобразований получим

$$\frac{1}{2}\|\nabla y(t,\cdot)\|_0^2 + \int_0^t \|\Delta y(\tau,\cdot)\|_0^2\, d\tau \leqslant c_\varepsilon \int_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_0^2\, d\tau$$
$$+ \varepsilon \int_0^t \|\Delta y(\tau,\cdot)\|_0^2\, d\tau + \int_0^t \|m(\tau,\cdot)\|_{L_\gamma(\Omega)} \|y\|_{L_q} \|\Delta y\|_0\, d\tau, \tag{8.9}$$

где $q = (1/2 - 1/\gamma)^{-1}$. В (8.9) и везде ниже в этом параграфе используется обозначение $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$. Известно (см. ниже, гл. 3, лемму 4.1), что при $k < l < m$

$$\|u\|_l \leqslant c\|u\|_k^{(m-l)/(m-k)} \|u\|_m^{(l-k)/(m-k)}. \tag{8.10}$$

Предположим сначала, что $\gamma < d$. Используя теорему вложения Соболева $H^{d/\gamma} \subset L_q$, неравенство (8.10) при $k = 1$, $l = d/\gamma$, $m = 2$ и неравенство

Гёльдера, в силу (8.8) получим

$$\int_0^t \|m\|_{L_\gamma}\|y\|_{L_q}\|\Delta y\|_0\,d\tau \leqslant c\int_0^t \|m\|_{L_\gamma}\|y\|_1^{2-\frac{d}{\gamma}}\|y\|_2^{\frac{d}{\gamma}}\,d\tau$$

$$\leqslant c_\varepsilon\int_0^t \|m\|_{L_\gamma}^\beta\|y\|_1^2\,d\tau+\varepsilon\int_0^t \|y\|_2^2\,d\tau. \tag{8.11}$$

В силу неравенства Пуанкаре и оценок решения эллиптических краевых задач

$$\frac{1}{2}\|\nabla y(t,\cdot)\|_0^2+\int_0^t \|\Delta y(\tau,\cdot)\|_0^2\,d\tau \geqslant c\Big(\|y(t_1,\cdot)\|_1^2+\int_0^t \|y(\tau,\cdot)\|_2^2\,d\tau\Big).$$

Из этого неравенства и оценок (8.9), (8.11) следует, что

$$\|y(t,\cdot)\|_1^2+\int_0^t \|y(\tau,\cdot)\|_2^2\,d\tau\leqslant c\Big(\int_0^t \|f\|_0^2\,d\tau+\int_0^t \|m(\tau,\cdot)\|_{L_\gamma}^\beta\|y(\tau,\cdot)\|_1^2\,d\tau\Big). \tag{8.12}$$

Из (8.12) и леммы Гронуолла (см. Хартман [1]) получаем

$$\|y(t,\cdot)\|_1^2+\int_0^t \|y(\tau,\cdot)\|_2^2\,d\tau\leqslant \mathrm{const},$$

откуда легко выводится существование и единственность решения $y\in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,2}(Q)$ задачи (8.1), (8.2). При $\gamma>d$, используя вложения $H^1\subset H^{d/\gamma}\subset L_q$, неравенство Коши — Буняковского и оценку $\beta>2$, легко доказать (8.11). После этого доказательство завершается так же, как выше. □

8.2. Распределенное управление и наблюдение. Рассмотрим задачу

$$\frac{1}{\alpha}\|y-w\|_{L_\alpha(Q)}^\alpha+\frac{N}{2}\|u-f\|_{L_2(Q)}^2\to\inf, \tag{8.13}$$

$$\dot y(t,x)-\Delta y(t,x)+b(y(t,x))=u(t,x),\quad \gamma_\Sigma y=0,\ \gamma_0 y=y_0, \tag{8.14}$$

$$u\in U_\partial, \tag{8.15}$$

где $\alpha>1$, $N>0$, $w\in L_\alpha(Q)$, $f\in L_2(Q)$, функция $b(\lambda)\in C^1(R^1)$ удовлетворяет условиям (7.3) при $\varkappa\in(1,\alpha)$ и $U_\partial\in L_2(Q)$ — выпуклое замкнутое подмножество, удовлетворяющее условию 1.7.1.

Напомним, что если $y_0\in \overset{\circ}{B}{}_r^{2(1-1/r)}(\Omega)$, то в силу теоремы 1.7.1 существует решение $(\widehat y,\widehat u)\in\big(W_r^{1,2}(Q)\cap L_\alpha(Q)\big)\times L_2(Q)$ задачи (8.13)–(8.15), где $r=\min\{2,\alpha/\varkappa\}$. Выведем систему оптимальности для этого решения $(\widehat y,\widehat u)$. Сначала рассмотрим случай

$$\alpha/\varkappa\geqslant 2. \tag{8.16}$$

Теорема 8.1. *Пусть* $(\widehat{y},\widehat{u}) \in \big(W_2^{1,2}(Q)\cap L_\alpha(Q)\big)\times L_2(Q)$ *— решение задачи* (8.13)–(8.15) *и множество ограничений* U_∂ *удовлетворяет условию*

$$\big(U_\partial - \widehat{u}\big)\cap L_{\frac{\alpha}{\varkappa}}(Q) \text{ содержит более одной точки,} \tag{8.17}$$

а числа α *и* $\varkappa$ *удовлетворяют условию* (8.16) *и соотношению*

$$\frac{\alpha}{\varkappa-1} > \frac{d+2}{2}. \tag{8.18}$$

Тогда существует функция $p(t,x) \in L_{\alpha/(\alpha-\varkappa)}(Q)$ *такая, что* $\dot{p}+\Delta p \in L_{\alpha/(\alpha-1)}(Q)$ *и тройка* $(\widehat{y},\widehat{u},p)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\dot{p}(t,x)+\Delta p(t,x)+b'(\widehat{y}(t,x))p = |\widehat{y}-w|^{\alpha-2}(\widehat{y}-w), \quad \gamma_T p = 0, \quad \gamma_\Sigma p = 0, \tag{8.19}$$

$$\int\limits_Q \big(N(\widehat{u}(t,x)-f(t,x)\big)v(t,x)\,dx\,dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \big(U_\partial-\widehat{u}\big)\cap L_\beta(Q), \tag{8.20}$$

где $\beta = \alpha/\varkappa$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.6. Положим $Y = L_\alpha(Q)\cap\{y \in W_2^{1,2}(Q), \gamma_\Sigma y = 0\big)$, $U = L_2(Q)$, $F(y,u) = (\dot{y}-\Delta y+b(y)-u, \gamma_0 y - y_0)$, $V = L_2(Q)\times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $Y_0 = \{y \in W_{\alpha/\varkappa}^{1,2}(Q) : \gamma_\Sigma = 0\}$, $U_0 = L_{\alpha/\varkappa}$, $V_0 = L_{\alpha/\varkappa}(Q)\times \widehat{B}_{\alpha/\varkappa}^{2(1-\varkappa/\alpha)}(\Omega)$, где

$$\widehat{B}_\lambda^{2(1-1/\lambda)}(\Omega) = \begin{cases} B_\lambda^{2(1-\frac{1}{\lambda})}(\Omega), & 1<\lambda\leqslant 3/2,\\ \{z \in B_\lambda^{2(1-1/\lambda)}(\Omega),\ \gamma_{\partial\Omega} z = 0\}, & \lambda > 3/2, \end{cases} \tag{8.21}$$

функционал g строится по функционалу (8.13), а оператор G — по введенному выше оператору F с помощью формулы (1.39).

В силу (8.16), (8.18) и теоремы 1.1.11 вложения Соболева, вложение $Y_0 \subset L_\alpha(Q)$ непрерывно. Поэтому функционал $g(\cdot) : Y_0\times U_0 \to R$ непрерывно дифференцируем на $Y_0\times U_0$, а отображение $G(\cdot) : Y_0\times U_0 \to V_0$ непрерывно. Очевидно, что проверка непрерывной дифференцируемости отображения G сводится к доказательству непрерывной дифференцируемости оператора Немыцкого

$$b(\widehat{y}+\cdot) : L_\alpha(Q) \to L_{\alpha/\varkappa}(Q). \tag{8.22}$$

В силу простого следствия теоремы о среднем (см. Алексеев, Тихомиров, Фомин [1, с. 149]) при почти всех $(t,x)\in Q$ имеем

$$\begin{aligned} &|b(\widehat{y}(t,x)+y(t,x)+h(t,x)) - b(\widehat{y}(t,x)+y(t,x)) - b'(\widehat{y}(t,x)+y(t,x))h(t,x)|\\ &\leqslant |b'(\widehat{y}(t,x)+y(t,x)+c(t,x)) - b'(\widehat{y}(t,x)+y(t,x))||h(t,x)|, \end{aligned}$$

где $c(t,x)$ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенству $|c(t,x)| \leqslant |h(t,x)|$. Из этой оценки с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{aligned} &\|b(\widehat{y}+y+h) - b(\widehat{y}+y) - b'(\widehat{y}+y)h\|_{L_{\alpha/\varkappa}(Q)}\\ &\leqslant \|b'(\widehat{y}+y+c) - b'(\widehat{y}+y)\|_{L_{\alpha/(\varkappa-1)}(Q)}\|h\|_{L_\alpha(Q)}. \end{aligned} \tag{8.23}$$

Используя теорему Лебега, можно показать, что

$$\|b'(\widehat{y}+y+c)-b'(\widehat{y}+y)\|_{L_{\alpha/(\varkappa-1)}(Q)}\to 0,\quad \|h\|_{L_\alpha(Q)}\to 0. \tag{8.24}$$

Из (8.23) и (8.24) следует непрерывная дифференцируемость отображения (8.22). Итак, для применения теоремы 1.6 осталось доказать, что $\operatorname{Im} G'_y(0,0)=V_0$. Для этого достаточно при любых $(y_0,v)\in V_0$ найти функцию $y\in Y_0$, которая является решением краевой задачи

$$\dot y-\Delta y+b'(\widehat{y})y=v,\quad \gamma_0 y=y_0. \tag{8.25}$$

В силу теорем 1.1.13 и 1.1.14 для любого $y_0\in \widehat{B}^{2(1-\varkappa/\alpha)}_{\alpha/\varkappa}(\Omega)$ существует функция $z\in W^{1,2}_{\alpha/\varkappa}(Q)$, $\gamma_\Sigma z=0$, такая, что $\gamma_0 z=y_0$. Будем искать решение задачи (8.25), решая краевую задачу

$$\dot w-\Delta w+b'(\widehat{y})w=v_1,\quad \gamma_0 w=0,\quad \gamma_\Sigma w=0, \tag{8.26}$$

где $v_1=v-(\dot z-\Delta z+b'(\widehat{y})z)$. Так как $z\in W^{1,2}_{\alpha/\varkappa}$ и $W^{1,2}_{\alpha/\varkappa}\subset L_\alpha(Q)$, имеем $v_1\in L_{\alpha/\varkappa}(Q)$. Для доказательства однозначной разрешимости задачи (8.26) воспользуемся леммой 8.1, положив $\beta=\gamma=\alpha/\varkappa$, $\lambda=\alpha/(\varkappa-1)$. Тогда условие (8.4) следует из неравенства (8.18). В силу леммы 8.1 однозначно разрешима задача (8.26), а, следовательно, и задача (8.25). Итак, проверены все предположения теоремы 1.6. В силу этой теоремы для функции Лагранжа

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y,u,\lambda,p,q)&=\frac{1}{\alpha}\|y-w\|^\alpha_{L_\alpha(\Omega)}+\frac{N}{2}\|u-f\|^2_{L_2(Q)}\\&+(\dot y-\Delta y+b(y)-u,p)_{(Q)}+(\gamma_0 y-y_0,q)_{(\Omega)},\end{aligned}$$

где $p\in L_{\alpha/(\alpha-\varkappa)}(Q)$, $q\in\big(\widehat{B}^{2(1-\varkappa/\alpha)}_{\alpha/\varkappa}(\Omega)\big)^*$, справедливо соотношение

$$\int\limits_Q\left[|\widehat{y}-w|^{\alpha-2}(\widehat{y}-w)h+(\dot h-\Delta h+b'(\widehat{y})h)p\right]dx\,dt+\langle\gamma_0 h,q\rangle_{(\Omega)}=0 \tag{8.27}$$

при любом $h\in Y_0$. Из (8.27) при $h\in C_0^\infty(\Omega)$ следует

$$-\dot p-\Delta p+b'(\widehat{y})p=-|\widehat{y}-w|^{\alpha-2}(\widehat{y}-w). \tag{8.28}$$

Из включений $b'(\widehat{y})\in L_{\alpha/(\varkappa-1)}(Q)$, $p\in L_{\alpha/(\alpha-\varkappa)}(Q)$ с помощью неравенства Гёльдера получаем $b'(\widehat{y})p\in L_{\alpha/(\alpha-1)}(Q)$ Так как $|\widehat{y}-w|^{\alpha-2}(\widehat{y}-w)\in L_{\alpha/(\alpha-1)}(Q)$, из (8.28) следует включение

$$\dot p+\Delta p\in L_{\alpha/(\alpha-1)}(Q). \tag{8.29}$$

Соотношения (8.19_2), (8.19_3), (8.20) получаем так же, как в предыдущих примерах для уравнения теплопроводности, с помощью формулы Грина для функции p. Формула Грина для функции $p\in L_{\alpha/(\alpha-\varkappa)}$, удовлетворяющей (8.28), (8.29), доказывается методами п. 5.4. □

Рассмотрим теперь случай

$$1<\alpha/\varkappa<2 \tag{8.30}$$

в предположении, что α и $\varkappa$ удовлетворяют неравенству (8.18). Из этих условий следует, что $(d+2)/2(\varkappa-1) < \alpha < 2\varkappa$. Поэтому неравенства (8.18) и (8.30) совместны, если

$$d = 1, 2, \quad \varkappa \in (1, \infty), \quad d > 2, \quad 1 < \varkappa < \frac{d+2}{d-2}. \tag{8.31}$$

Теорема 8.2. *Пусть выполнены соотношения* (8.30), (8.18) *и* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in \big(W^{1,2}_{\alpha/\varkappa}(Q) \cap L_\alpha(Q)\big) \times L_2(Q)$ *— решение задачи* (8.13)–(8.15). *Тогда существует функция* $p \in L_{\alpha/(\alpha-\varkappa)}(Q)$ *такая, что* $\dot{p} + \Delta p \in L_{\alpha/(\alpha-1)}(Q)$ *и тройка* $(\widehat{y}, \widehat{u}, p)$ *удовлетворяет соотношениям* (8.19), (8.20) (*причем* $\beta = 2$ *в* (8.20)).

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.5. Положим $Y = \{y \in W^{1,2}_{\alpha/\varkappa} : \gamma_\Sigma y = 0\}$, $U = L_2(Q)$, $V = L_{\alpha/\varkappa}(Q) \times \widehat{B}^{2(1-\varkappa/\alpha)}_{\alpha/\varkappa}(\Omega)$, где $\widehat{B}^{2(1-\frac{1}{\lambda})}_{\lambda}(\Omega)$ определено соотношением (8.21), и $F(y,u) = (\dot{y} - \Delta y + b(y) - u, \gamma_0 y - y_0)$. В силу (8.18) и теоремы 1.1.11 $W^{1,2}_{\alpha/\varkappa}(Q) \subset L_\alpha(Q)$. Из (8.30) и теоремы 1.1.13 легко следует непрерывность оператора $F : Y \times U \to V$. Доказательство непрерывной дифференцируемости оператора $F(\cdot, u) : Y \to V$ при любом $u \in U$ сводится к доказательству непрерывной дифференцируемости оператора (8.22) из теоремы 8.1. Доказательства равенства $\operatorname{Im} F'_y(\cdot, u) = V$, а также вывод необходимых условий экстремума с помощью теоремы 1.5 проводятся так же, как в теореме 8.1. □

8.3. Финальное наблюдение со слабым функционалом стоимости. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{J}(y,u) = \frac{1}{2}\|\gamma_T y - w\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u - f\|^2_{L_2(Q)} \to \inf, \tag{8.32}$$

$$\dot{y} - \Delta y + b(y) = u, \quad \gamma_0 y = y_0, \quad \gamma_\Sigma y = 0, \tag{8.33}$$

$$u \in U_\partial, \tag{8.34}$$

где $N > 0$, $w \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q)$, $y_0 \in H^1_0(\Omega)$ — заданные функции, причем

$$\|\Phi(y_0)\|_{L_1(\Omega)} < \infty, \quad \Phi(\lambda) = \int\limits_0^\lambda b(\mu)\, d\mu. \tag{8.35}$$

Предполагается, что для функции $b(\lambda)$ из (8.33) выполнено условие 1.7.2, а U_∂ — выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_2(Q)$, удовлетворяющее условию 1.7.4. Напомним, что

$$\begin{aligned} X_{\alpha,\beta} = \{y \in L_2(Q) : \|y\|^2_{X_{\alpha,\beta}} \\ = \int\limits_Q \big(|\dot{y}(t,x)|^2 (T-t)^\alpha + |\nabla y(t,x)|^2 (T-t)^\beta dx\, dt < \infty\}, \end{aligned} \tag{8.36}$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. В силу теоремы 1.7.4 существует решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in X_{1,0} \times L_2(Q)$ задачи (8.32)–(8.34) такое, что

$$\int\limits_Q |b(\widehat{y})\widehat{y}|\, dx\, dt < \infty. \tag{8.37}$$

Выведем необходимые условия экстремума для этой задачи.

Везде в этом параграфе будем предполагать, что функция $b(\lambda)$, задающая нелинейный член в (8.33), удовлетворяет условиям

$$b(\lambda) \in C^1(R), \quad \lim_{\lambda \to \pm\infty} \frac{|b(\lambda)|}{|\lambda|^{\varkappa}} = c_{\pm} < \infty, \quad |b'(\lambda)| \leqslant c(1 + |\lambda|)^{\varkappa_1}, \tag{8.38}$$

где $c_{\pm}, c > 0$, $\varkappa \geqslant 0$ — некоторые константы, $\varkappa_1 = \max\{\varkappa - 1, 0\}$.

Лемма 8.2. *Пусть $y \in X_{1,0} \cap L_\infty(0, T; H^0(\Omega))$ удовлетворяет оценке* (8.37), *а для $b(\lambda)$ справедливы условия* (8.38). *Пусть*

$$\varkappa \leqslant \frac{d+4}{d} \text{ при } d \geqslant 3, \quad \varkappa < \frac{d+4}{d} \text{ при } d = 1, 2. \tag{8.39}$$

Тогда

$$b'(y) \in L_\beta(0, T; L_\gamma(\Omega)), \tag{8.40}$$

где β и γ удовлетворяют (8.4) *или* (8.5).

Доказательство. Если $\varkappa \leqslant 1$, то $b'(y(t,x)) \in L_\infty(Q)$ в силу (8.38_3). Следовательно, справедливо (8.40). Поэтому будем считать, что $\varkappa > 1$. Из (8.37) и $(8.38_{2,3})$ следуют включения

$$b'(y) \in L_{(\varkappa+1)/(\varkappa-1)}(Q). \tag{8.41}$$

Пусть $d \geqslant 3$. Тогда $\beta = \gamma = (d+2)/2$ удовлетворяет (8.5). При условии

$$\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} \geqslant \frac{d+2}{2},$$

эквивалентном (8.39_1), из (8.41) следует (8.40). Случай $d = 1, 2$ рассматривается аналогично: при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в силу (8.39_2) числа

$$\beta = \gamma = (d + 2 + \varepsilon)/2 < \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}$$

удовлетворяют (8.4). Поэтому из (8.41) следует (8.40). □

Выведем теперь систему оптимальности для задачи (8.32)–(8.34). Рассмотрим сначала случай $\dim \Omega = d \geqslant 2$.

Теорема 8.3. *Пусть $d \geqslant 2$, $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in X_{1,0} \times L_2(Q)$ — решение задачи* (8.32)–(8.34), *удовлетворяющее оценке* (8.37), *$b(\lambda)$ удовлетворяет* (8.38), *а $\varkappa$ —* (8.39). *Тогда существует функция $p \in L_2(Q)$ такая, что $\dot{p} + \Delta p \in L_\alpha(Q)$,*

где $\alpha = [2(\gamma+1)]/[3(\varkappa-1)]$, *и* $(\widehat{y}, \widehat{u}, p)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\dot{p}(t,x) + \Delta p - b'(\widehat{y}(t,x))p = 0, \quad \gamma_T(p+\widehat{y}) = w, \quad \gamma_\Sigma p = 0, \tag{8.42}$$

$$\int\limits_Q \big(N(\widehat{u}(t,x) - f(t,x)) - p(t,x)\big)(v(t,x) - \widehat{u}(t,x))\,dx\,dt \geqslant 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{8.43}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.6. Положим $Y = \{y \in X_{1,0} \cap L_{\varkappa+1}(Q) : \gamma_\Sigma y = 0\}$, $U = V = V_0 = L_2(Q)$, $Y_0 = \{y \in L_2(0,T;H^2(\Omega)) : \dot{y} \in L_2(0,T;H^0(\Omega)), \gamma_0 y = 0, \gamma_\Sigma y = 0\}$, $F(y,u) = \dot{y} - \Delta y + b(y) - u$, $f(y,u) = \mathcal{J}(y,u)$, где $\mathcal{J}$ — функционал из (8.32). В силу теоремы вложения Соболева имеем $Y_0 \subset L_{\varkappa+1}(Q)$ при $\varkappa \leqslant (d+4)/d$. Для отображения

$$G(y,u) = F(\widehat{y}+y, \widehat{u}+u) - F(\widehat{y},\widehat{u}) = \dot{y} - \Delta y + b(\widehat{y}+y) - b(\widehat{y}) - u$$

справедлива оценка

$$\|G(y,u)\|_{L_2(Q)} \leqslant \|y\|_{Y_0} + \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 1} \|b'(\widehat{y}+\theta y)y\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{L_2(Q)}. \tag{8.44}$$

Так как $b'(\widehat{y}+\theta y) \in L_{(\varkappa+1)/(\varkappa-1)}(Q)$ и по теореме вложения Соболева $y \in Y_0 \subset L_{[2(d+2)]/(d-2)}(Q)$, в силу неравенства Гёльдера и соотношения имеем

$$\frac{2(\varkappa-1)}{\varkappa+1} + \frac{d-2}{d+2} \leqslant 1,$$

которое эквивалентно (8.39), справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\|b'(\widehat{y}+\theta y)y\|_{L_2(Q)} \leqslant \|b'(\widehat{y}+\theta y)\|_{L_{(\varkappa+1)/(\varkappa-1)}} \|y\|_{L_{[2(d+2)]/(d-2)}} \\ &\leqslant c\big(1 + \|\widehat{y}\|^{\varkappa-1}_{L_{\varkappa+1}} + \|y\|^{\varkappa-1}_{L_{\varkappa+1}}\big)\|y\|_{Y_0}. \end{aligned} \tag{8.45}$$

Из (8.44), (8.45) следует непрерывность отображения $G(y,u) : Y_0 \times U \to V_0$. Из тех же оценок легко выводится непрерывная дифференцируемость отображения $G(y,u)$. Непрерывная дифференцируемость функционала

$$g(y,u) = f(\widehat{y}+y, \widehat{u}+u) - f(\widehat{y},\widehat{u}) : Y_0 \times U \to \mathbb{R}$$

очевидна. Так как $Y_0 \subset Y$ и $(\widehat{y},\widehat{u}) \in Y \times U$ является решением задачи (8.32)–(8.34), пара $(\widehat{y},\widehat{u}) = (0,0)$ является решением задачи

$$g(y,u) \to \inf, \quad G(y,u) = 0, \quad (y,u) \in Y_0 \times U. \tag{8.46}$$

Соотношение $\operatorname{Im} G'_y(0,0) \equiv F'_y(\widehat{y},\widehat{u})Y_0 = V_0$ следует из леммы 8.1. Действительно, $m = b'(\widehat{y}) \in L_{(\varkappa+1)/(\varkappa-1)}$. Поэтому выполнено включение (8.3) при $\beta = \gamma = (\varkappa+1)/(\varkappa-1)$. Соотношения (8.4) и (8.5_1) при таких β и γ эквивалентны (8.39) и (8.40). Кроме того, при $d \geqslant 2$ в лемме 8.1 можно считать $\lambda = 2$, так как неравенство $\beta = \gamma = (\varkappa+1)/(\varkappa-1) > 2$ эквивалентно условию $\varkappa < 3$, а предположения (8.39) при $d \geqslant 2$ приводят к более жестким ограничениям на $\varkappa$. Итак, проверены все предположения теоремы 1.6, причем функцию Лагранжа можно брать при $\lambda = 1$. Функция Лагранжа имеет

вид

$$\mathcal{L}(y,u,p)=\int\limits_Q\{(\dot y-\Delta y-b(y)-u)p+\frac{N}{2}(u-f)^2\}dx\,dt$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega|\gamma_T y-w|^2dx, \tag{8.47}$$

где $p\in L_2(Q)$. Из (8.47) и (1.42_2) следует (8.43), а из (8.47) и (1.42_1) — соотношение

$$\int\limits_Q(\dot h-\Delta h-b'(\widehat y)h)p\,dx\,dt+\int\limits_\Omega(\gamma_T\widehat y-w)\gamma_T h\,dx=0\quad\forall h\in Y_0. \tag{8.48}$$

Из (8.48) при $h\in C_0^\infty(Q)$ получаем (8.42_1), откуда $\dot p+\Delta p\in L_{[2\varkappa+2]/(3\varkappa-1)}(Q)$. Соотношения ($8.42_{2,3}$) выводятся с помощью формулы Грина. □

Рассмотрим теперь случай $d=\dim\Omega=1$.

Теорема 8.4. *Пусть $d=1$, $(\widehat y,\widehat u)\in(X_{1,0}\cap L_{\varkappa+1}(Q))\times L_2(Q)$ — решение задачи* (8.32)–(8.34), *а $b((\lambda)$ и $\varkappa$ удовлетворяют* (8.38) *и* (8.39) *соответственно. Тогда существует функция $p\in L_3(Q)$ такая, что $\dot p+\Delta p\in L_\alpha(Q)$, где $\alpha=[3(\varkappa+1)]/[4\varkappa-2]$, и $(\widehat y,\widehat u,p)$ удовлетворяет* (8.42), (8.43).

Доказательство. Определим все функции, за исключением Y_0 и V_0, так же, как в теореме 8.3, и положим $V_0=L_{3/2}(Q)$, $Y_0=\{y\in W^{1,2}_{3/2}(Q):\gamma_0 y=0,\gamma_\Sigma=0\}$. Отметим, что в этом случае включения $Y_0\subset Y$, $V_0\subset V$ не верны. По теореме 1.1.11 $y\in Y_0\subset L_p(Q)$ для всех $p>1$. В силу (8.39) $\varkappa<5$. Поэтому $b'(y)\in L_{(\varkappa+1)/(\varkappa-1)}(Q)$, $(\varkappa+1)/(\varkappa-1)>3/2$. Следовательно,

$$\|b'(\widehat y+\theta y)y\|_{L_{3/2}(Q)}\leqslant c\|b'(\widehat y+\theta y)\|_{L_{(\varkappa+1)/(\varkappa-1)}},\|y\|_{Y_0}$$

откуда, как и при доказательстве теоремы 8.3, следует непрерывность и непрерывная дифференцируемость отображения $G(y,u):\to Y_0\times U\to V_0$. Соотношение $G'_y(0,0)Y_0=V_0$ следует из леммы 8.1. Докажем, что $(y,u)=(0,0)$ является решением задачи (8.46). Для этого достаточно показать, что если пара $(y,u)\in Y_0\times U$ удовлетворяет соотношению $G(y,u)=0$, то $y\in X_{1,0}\cap L_{\varkappa+1}(Q)$. Так как $Y_0\subset L_{\varkappa+1}(Q)$, достаточно проверить включение $y\in X_{1,0}$. Из $G(y,u)=0$, $F(\widehat y,\widehat u)=0$ получаем

$$\dot y-\Delta y=u-(b(\widehat y+y)-b(\widehat y)),\quad\gamma_0 y=0,\quad\gamma_\Sigma y=0. \tag{8.49}$$

Так как $y\in Y_0\subset L_p$ для всех $p>1$, умножая (8.49) на y скалярно в $L_2(Q)$, легко получить что

$$\|y\|_{L_\infty(0,T;H^0(\Omega))}+\|y\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))}<\infty. \tag{8.50}$$

Пусть $Q_\varepsilon=[0,T-\varepsilon]\times\Omega$. Из включения $\widehat y\in X_{1,0}$ следует, что $\widehat y\in H^1(Q_\varepsilon)\subset L_p(Q_\varepsilon)$ для всех $p>1$. Поэтому $y\in W^{1,2}_2(Q_\varepsilon)$ в силу (8.49). Ввиду $G(y,u)=$

0 и $F(\widehat{y},\widehat{u})=0$ получаем

$$\frac{d}{dt}(\widehat{y}+y)-\Delta(\widehat{y}+y)+b(\widehat{y}+y)=\widehat{u}+u,\quad \gamma_0(\widehat{y}+y)=y_0,\quad \gamma_\Sigma(\widehat{y}+y)=0. \tag{8.51}$$

Умножая (8.51) на $(T-t-\varepsilon)(\widehat{y}+y)$ скалярно в $L_2(Q_\varepsilon)$, аналогично (1.7.16) выводим¡ что

$$\int\limits_{Q_\varepsilon}\frac{1}{2}(T-t-\varepsilon)|\dot{\widehat{y}}+\dot{y}|^2dx\,dt\leqslant c\Bigg(E_0+\int\limits_{Q_\varepsilon}|\nabla(\widehat{y}+y)|^2dx\,dt+$$
$$\int\limits_{Q_\varepsilon}(\Phi(\widehat{y}+y)+\frac{1}{2}(T-t-\varepsilon)|u|^2)\,dx\,dt\Bigg). \tag{8.52}$$

В силу (8.50) и включений $\widehat{y}\in X_{1,0}\subset L_2(0,T;H^1(\Omega))$, $\widehat{y}\in L_{\varkappa+1}(Q)$, $y\in L_p(Q)$ для всех $p>0$ правая часть (8.52) ограничена константой, не зависящей от ε. Устремляя в (8.52) ε к 0, получим $\sqrt{(T-t)}\dot{y}\in L_2(Q)$. Следовательно, $y\in X_{1,0}$. Итак, все предположения теоремы 1.5 проверены. Далее доказательство проводится в точности так же, как в теореме 8.3. □

8.4. Распределенное наблюдение со слабым функционалом стоимости. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{J}(y,u)=\frac{1}{2}\|y-w\|^2_{L_2(Q)}+\frac{N}{2}\|u-f\|^2_{L_2(Q)}\to\inf, \tag{8.53}$$

где y и u удовлетворяют соотношениям (8.33), (8.34), $N>0$, $w\in L_2(Q)$, $f\in L_2(Q)$ — заданные функции. Предполагается выполненным условие 1.7.3. Тогда в силу теоремы 1.7.3 существует решение $(\widehat{y},\widehat{u})\in X_{2,1}\times L_2(Q)$ задачи (8.53), (8.33), (8.34), причем для $\widehat{y}$ конечен интеграл из (1.7.38).

Перейдем к выводу системы оптимальности для задачи (8.53), (8.33), (8.34).

Лемма 8.3. *Пусть $y\in X_{1,2}\cap L_2(Q)$ удовлетворяет оценке* (1.7.38), *а для $b(\lambda)$ справедливы условия* (8.38). *Предположим, что*

$$\varkappa<(d+6)/(d+2). \tag{8.54}$$

Тогда

$$b'(y)\in L_\beta(0.T;L_\gamma(\Omega)), \tag{8.55}$$

где β и γ удовлетворяют (8.4) *и* (8.5).

Доказательство. Из условий леммы следует, что

$$\int\limits_{Q_\varepsilon}(T-t)|y(t,x)|^{\varkappa+1}dx\,dt<\infty. \tag{8.56}$$

Применяя известное интерполяционное неравенство

$$\|y\|^q_{L_q}\leqslant\|y\|^{s\frac{p-q}{p-s}}_{L_s}\|y\|^{p\frac{q-s}{p-s}}_{L_p},\quad 1\leqslant s<q<p\leqslant\infty,$$

при $s=2$ и $p=\varkappa+1$, получим, что при почти всех $t\in[0,T]$

$$\|y(t,\cdot)\|^{\alpha}_{L_q}\leqslant\big(\|y(t,\cdot)\|^2_{L_2}\big)^{\frac{\alpha}{q}\frac{\varkappa+1-q}{\varkappa-1}}\big((T-t)\|y(t,\cdot)\|^{\varkappa+1}_{L_{\varkappa+1}}\big)^{\frac{\alpha}{q}\frac{q-2}{\varkappa-1}}(T-t)^{-\frac{\alpha}{q}\frac{q-2}{\varkappa-1}}.$$

Интегрируя это неравенство по t и применяя к правой части неравенство Гёльдера, получим, что

$$\|y\|^{\alpha}_{L_\alpha(0,T;L_q(\Omega))}\leqslant\Big(\int\limits_0^T(T-t)^{-(1-\varepsilon)}\,dt\Big)^{\eta_1}$$
$$\times\Big(\int\limits_0^T\|y(t,\cdot)\|^{\frac{2\alpha(\varkappa+1-q)(1-\varepsilon)}{\zeta}}_{L_2}\big(\|y(t,\cdot)\|^{\varkappa+1}_{L_{\varkappa+1}}(T-t)\big)^{\frac{\alpha(q-2)(1-\varepsilon)}{\zeta}}\,dt\Big)^{\eta_2},\tag{8.57}$$

где $\zeta=q(\varkappa-1)(1-\varepsilon)-\alpha(q-2)$, $\varepsilon>0$ достаточно мало, а числа $\eta_j>0$ легко определяются по α, $\varkappa$, q, ε. Если

$$\frac{\alpha(\varkappa+1-q)}{q(\varkappa-1)-\alpha(q-2)}+\frac{\alpha(q-2)}{q(\varkappa-1)-\alpha(q-2)}<1,\tag{8.58}$$

то при достаточно малом $\varepsilon>0$, применив к правой части (8.57) неравенство Гёльдера, получим неравенство

$$\int\limits_0^T\|y(t,\cdot)\|^{\frac{2\alpha(\varkappa+1-q)(1-\varepsilon)}{\zeta}}\big(\|y(t,\cdot)\|^{\varkappa+1}_{L_{\varkappa+1}}(T-t)\big)^{\frac{\alpha(q-2)(1-\varepsilon)}{\zeta}}\,dt$$
$$\leqslant\|y\|^{\eta_3}_{L_2(Q)}\Big(\int\limits_Q(T-t)|y|^{\varkappa+1}dx\,dt\Big)^{\eta_4},\tag{8.59}$$

где η_3, η_4 — некоторые числа. Из (8.57) и (8.59) следует $y\in L_\alpha(0,T;L_q(Q))$, если α и q удовлетворяют (8.58). Пусть $d\geqslant 3$. Включение (8.55) при β и γ, удовлетворяющими (8.5), справедливо в силу (8.38), если

$$\frac{d}{2q}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\varkappa-1}.\tag{8.60}$$

После простых преобразований (8.58) и (8.60) запишутся в виде

$$\alpha<(q(\varkappa-1))/(\varkappa+q-3),$$
$$\alpha=(2q(\varkappa-1))/(2q-d(\varkappa-1)),$$

откуда

$$\frac{2q(\varkappa-1)}{2q-d(\varkappa-1)}<\frac{q(\varkappa-1)}{\varkappa+q-3},$$

что эквивалентно (8.54). В случае $d=1$ или $d=2$ вместо (8.60) имеем неравенство

$$\frac{d}{2q}+\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\varkappa-1},$$

которое с помощью тех же рассуждений, что и при $d \geqslant 3$, приводит к соотношению (8.54). □

Теорема 8.5. *Пусть* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in X_{2,1} \times L_2(Q)$ *— решение задачи* (8.53), (8.33), (8.34), *удовлетворяющее оценке* (1.7.38), *а* $b(\lambda)$ *и* $\varkappa$ *удовлетворяют* (8.38) *и* (8.54) *соответственно. Тогда существует функция* $p(t,x)$, *удовлетворяющая следующим условиям.*

(a) $p \in L_k(Q)$, *где* $k = 2$ *при* $d \geqslant 2$, $k = 3$ *при* $d = 1$ *и* $\dot{p} + \Delta p \in L_\alpha(Q)$, *где* $\alpha > 1$ *— число, зависящее от* $\varkappa$ *и* d.

(b) *Набор* $(\widehat{y}, \widehat{u}, p)$ *удовлетворяет соотношениям*

$$\dot{p}(t,x) + \Delta p(t,x) - b'(\widehat{y}(t,x)) = \widehat{y}(t,x) - w(t,x), \quad \gamma_T p = 0, \quad \gamma_\Sigma p = 0, \tag{8.61}$$

$$\int\limits_Q \big(N(\widehat{u}(t,x) - f(t,x)) - p(t,x)\big)(v(t,x) - \widehat{u}(t,x))\, dx\, dt \geqslant 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{8.62}$$

Доказательство аналогично доказательству теорем 8.3 и 8.4.

§ 9. Комментарии

К настоящему времени в теории оптимального управления распределенными системами разработано много методов вывода системы оптимальности. В настоящей книге для вывода систем оптимальности используется принцип Лагранжа. Этот принцип впервые сформулировал Лагранж [1]. Первый и весьма существенный шаг в обосновании принципа Лагранжа сделал Люстерник [1]. Обоснованию и развитию принципа Лагранжа посвящено много работ (см. обзор Иоффе, Тихомиров [1]). Мы отметим лишь работы, которые используются в этой книге: Дубовицкий, Милютин [1]; Иоффе, Тихомиров [1]; Алексеев, Тихомиров, Фомин [1]. Принцип Лагранжа, приспособленный для вывода систем оптимальности в задачах оптимального управления некорректными системами в случае, когда множество ограничений $\mathcal{U}_\partial$ на управление имеет пустую внутренность, получен Фурсиковым [12].

Системы оптимальности для задач оптимального управления с корректно поставленными управляемыми системами выводятся в этой главе с помощью варианта принципа Лагранжа, который установлен Иоффе, Тихомировым [1].

Вывод системы оптимальности в случае, когда управляемая система задается задачей Коши для оператора Лапласа для простейших множеств допустимых управлений $\mathcal{U}_\partial$, предложен Лионсом [3]. Системы оптимальности для той же задачи, но для более широкого класса множеств $\mathcal{U}_\partial$ выведены Фурсиковым [12]. Результаты [12] изложены в пп. 3.2–3.4.

Система оптимальности для задачи с распределенным управлением, когда управляемая система задается обратным уравнением теплопроводности, а множество ограничений на управление $\mathcal{U}_\partial$ имеет непустую внутренность, получена в работах Лионс [3]; Ривера, Васконселлос [1]. Характерный пример множества $\mathcal{U}_\partial$ с пустой внутренностью для той же задачи

изучен Фурсиковым [12]. Эти результаты из [12] изложены в пп. 5.2–5.6. Результаты пп. 6.1, 6.2 получены Эмануиловым [4].

Система оптимальности для сингулярных задач оптимального управления, когда управляемая система описывается полулинейным эллиптическим или параболическим уравнениями, выведена Лионсом [3]. Эти результаты усилены Фурсиковым [12] и, вместе с другими результатами изложены в § 7, 8.

Глава 3

О разрешимости краевых задач для плотного множества исходных данных

Как показано в гл. 1, условие нетривиальности является одним из важных предположений, гарантирующих существование решения задачи оптимального управления. Это условие легко проверяется, когда управляемая система описывается корректной краевой задачей. Положение дел меняется, если соответствующая краевая задача некорректна. Тогда для проверки условия нетривиальности необходимы специальные методы.

В настоящей главе представлены некоторые общие методы проверки условия нетривиальности, когда управляемая система задана с помощью линейной некорректной краевой задачи. Речь идет о методах доказательства разрешимости некорректных задач для исходных данных, принадлежащих некоторому всюду плотному множеству соответствующего функционального пространства. Действительно, если исходные данные являются управлением, а множество управлений U_∂ имеет непустую внутренность, то ввиду теорем о плотности множества разрешимости (т. е. множества исходных данных, при которых задача разрешима) условия нетривиальности выполняется.

Следует отметить, что теоремы о плотности множества разрешимости позволяют доказать условие нетривиальности для многих множеств U_∂, возникающих в приложениях, внутренность которых пуста. Для этого достаточно найти банахово пространство X с достаточно сильной топологией такое, что внутренность множества $U_\partial \cap X$ непуста в X, и доказать плотность в пространстве X множества разрешимости краевой задачи, описывающей управляемую систему.

В § 1–3 исследована плотность множества разрешимости линейных краевых задач для эллиптических и параболических уравнений.

В § 5 доказана плотность множества разрешимости в случае нелинейной краевой задачи, корректность которой не доказана. Речь идет о доказательстве существования гладких решений смешанной краевой задачи для трехмерной системы Навье — Стокса с правой частью из плотного множества соответствующего функционального пространства. При этом множество оказывается плотным относительно достаточно слабой топологии.

Параграф 4 носит вспомогательный характер. В § 4 вводится система уравнений Навье — Стокса, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области, с условиями прилипания на границе.

§ 1. Разрешимость задачи Коши для эллиптического уравнения для плотного множества начальных данных

В этом параграфе исследуется разрешимость задачи Коши для оператора Лапласа. Хорошо известно, что эта задача разрешима не при всех данных Коши из классов непрерывно дифференцируемых функций или из пространств Соболева. Ниже доказано, что множество начальных данных, при которых задача Коши разрешима, всюду плотно в соответствующем пространстве данных Коши. Приводятся два метода доказательства этого утверждения: метод, основанный на применении теоремы Хана — Банаха (см. 1.1) и метод штрафа (см. 1.2).

1.1. Метод, основанный на теореме Хана — Банаха. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, граница которой $\partial\Omega$ состоит из двух замкнутых многообразий класса C^∞: $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \varnothing$. Рассмотрим в Ω задачу Коши для оператора Лапласа с начальными данными на Γ_0:

$$\Delta y(x) = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1.1}$$

$$\gamma_0 y = u_0, \quad \gamma_0 \partial_n y = u_1 \text{ на } \Gamma_0, \tag{1.2}$$

где γ_0 — оператор сужения на Γ_0 функции, заданной на Ω. Исследование задачи (1.1), (1.2) необходимо для проверки условия нетривиальности экстремальной задачи (1.3.24)–(1.3.26), так как множество ее ограничений включает соотношения (1.1), (1.2). Докажем плотность множества начальных данных (u_0, u_1) в соответствующем функциональном пространстве, для которых задача (1.1), (1.2) разрешима.[1]

Теорема 1.1. *Пусть $k \geqslant -3/2$.*

(a) *Для любого фиксированного $u_0 \in H^{k+1}(\Gamma_0)$ множество начальных данных u_1, для которых существует решение $y \in H^{k+3/2}_\Delta(\Omega)$ задача Коши* (1.1), (1.2), *всюду плотно в пространстве $H^k(\Gamma_0)$.*

(b) *Для любого фиксированного $u_1 \in H^k(\Gamma_0)$ множество данных u_0, для которых задача Коши* (1.1), (1.2) *имеет решение $y \in H^{k+3/2}_\Delta(\Omega)$, всюду плотно в пространстве $H^{k+1}(\Gamma_0)$.*

Доказательство. Ограничимся доказательством утверждения (a), так как (b) доказывается аналогично. Рассмотрим задачу

$$\Delta z = 0, \quad \gamma_0 z = 0, \quad \gamma_0 \partial_n z = u. \tag{1.3}$$

Докажем, что утверждение (a) эквивалентно следующему утверждению:

(a′) множество данных u, для которых задача (1.3) имеет решение $z \in H^{k+3/2}_\Delta(\Omega)$, всюду плотно в пространстве $H^k(\Gamma_0)$.

Действительно, пусть $y_0 \in H^{k+3/2}_\Delta(\Omega)$ — решение задачи

$$\Delta y_0 = 0, \quad \gamma_0 y_0 = u_0, \quad \gamma_1 \partial_n y_0 = 0, \tag{1.4}$$

где γ_1 — оператор сужения на Γ_1 функции, определенной в Ω. Существование решения $y_0 \in H^{k+3/2}_\Delta$ задачи (1.4) при $u_0 \in H^k(\Gamma_0)$ вытекает из

[1] На самом деле в теореме 1.1 доказан более сильный результат.

предложения 1.1.3. Вычитая (1.4) из (1.1), (1.2), получим задачу (1.3), в которой $z = y - y_0$, $u = u_1 - \gamma_0 \partial_n y_0$. Отсюда следует эквивалентность утверждений (a) и (a′).

Предположим, что утверждение (a′) неверно. В силу теоремы Хана — Банаха существует ненулевой элемент w_0 пространства $H^{-k}(\Gamma_0)$ такой, что

$$\langle w_0, u\rangle_{(\Gamma_0)} = 0 \quad \forall u \in R, \tag{1.5}$$

где R — *множество разрешимости задачи* (1.3), т. е. подпространство пространства $H^k(\Gamma_0)$, состоящее из $u \in H^k(\Gamma_0)$, для которых существует решение $z \in H^{k+3/2}(\Omega)$ задачи (1.3).

Как легко вывести из результатов Лионс, Мадженес [2], существует решение $\varphi(x)$ задачи

$$\Delta\varphi(x) = 0, \quad \gamma_0\varphi = w_0, \quad \gamma_1\partial_n\varphi = 0, \tag{1.6}$$

причем $\varphi(x)$ принадлежит пространству $\{\psi \in H^{1/2-k}(\Omega) : \Delta\psi = 0\}$.[2] Подставляя в формулу Грина (1.1.24)[3] решение z задачи (1.3) с $u \in R$ и решение φ задачи (1.6), учитывая краевые условия функций z, φ из (1.3), (1.6), а также соотношение (1.5), получим равенство

$$\langle \partial_n z, \varphi\rangle_{(\Gamma_1)} = 0. \tag{1.7}$$

При любом $\chi \in C^\infty(\Gamma_1)$ краевая задача

$$\Delta z = 0, \quad \gamma_0 z = 0, \quad \gamma_1\partial_n z = \chi$$

имеет единственное решение $\widehat{z} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $\gamma_0\partial_n\widehat{z}$ принадлежит множеству R разрешимости задачи (1.3). Поэтому из (1.7) следует $\gamma_1\varphi = 0$. Так как $\Delta\varphi = 0$ и $\gamma_1\partial_n\varphi = 0$ в силу (1.6), согласно теореме Кальдерона о единственности решения задачи Коши для эллиптического уравнения (Мизохата [1]) имеем $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \in \Omega$. Ввиду (1.6_2) имеем $w_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

1.2. Метод штрафа. Метод, изложенный в 1.1, прост, удобен и применим к широкому классу выпуклых экстремальных задач. Однако он не является конструктивным. Мы приведем более конструктивный метод доказательства теоремы 1.1, близкий идейно к классическому методу штрафа. Этот метод позволяет построить алгоритм, с помощью которого произвольные данные Коши $(u_0, u_1) \in H^{k+1}(\Gamma_0) \times H^k(\Gamma_0)$ аппроксимируются данными Коши $(u_{0,\varepsilon}, u_{1,\varepsilon}) \in H^{k+1}(\Gamma_0) \times H^k(\Gamma_0)$, для которых задача (1.1),

---

[2]Это пространство при $k \geqslant 1/2$ является подпространством пространства $D_\Delta^{1/2-k}(\Omega) = \{u\colon u \in H^{1/2-k}\colon \Delta u \in \Xi^{-3/2-k}\}$, введенным в гл. 2 (формула (6.24)) книги Лионса, Мадженеса [2]. Здесь $\Xi^{-3/2-k}$ — некоторое функциональное пространство, точное определение которого для нас сейчас не существенно, так как правая часть в уравнении (1.6_1) равна нулю. В силу теоремы 6.7 из Лионс, Мадженес [2, гл. 2] при любых $f \in \Xi^{-3/2-k}$, $w_0 \in H^{-k}(\Gamma_0)$ существует решение $y \in D_\Delta^{1/2-k}(\Omega)$ задачи $\Delta y = f$, $\gamma_0 y = w_0$, $\gamma_1\partial_n y = 0$, откуда следует разрешимость задачи (1.6). Разрешимость задачи (1.6) при $-3/2 \leqslant k \leqslant 1/2$ следует из теорем 1.1.8 и 1.1.9.

[3]Справедливость формулы Грина в данной ситуации следует из результатов Лионс, Мадженес [2].

(1.2) имеет решение $y_\varepsilon \in H^{k+3/2}(\Omega)$. Для простоты изложения условия на индекс гладкости k здесь несколько сильнее, чем в 1.1.

Доказательство теоремы 1.1 (случай $k \geqslant -1$). Ограничимся доказательством утверждения (b), так как утверждение (a) доказывается аналогично. Рассмотрим задачу

$$\Delta z = 0, \quad \gamma_0 \partial_n z = 0, \quad \gamma_0 z = u. \tag{1.8}$$

Как и выше, доказательство сводится к доказательству плотности в $H^{k+1}(\Gamma_0)$ множества элементов u, при которых задача (1.8) имеет решение $z \in H^{k+3/2}_\Delta(\Omega)$. Докажем это утверждение. Рассмотрим экстремальную задачу

$$J(z) = \frac{\varepsilon}{2}\|\gamma_1 z\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \frac{1}{2}\|\gamma_0 z - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_0)} \to \inf, \tag{1.9}$$

$$\Delta z(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad \gamma_0 \partial_n z = 0, \tag{1.10}$$

где $u_0 \in H^{k+1}(\Gamma_0)$ — произвольная фиксированная функция, $\varepsilon > 0$ — параметр. Для доказательства разрешимости задачи (1.9), (1.10) воспользуемся теоремой 1.2.1. Положим $X = H^{1/2}_\Delta(\Omega)$, $X_1 = \{z \in H^{1/2}_\Delta(\Omega) : \gamma_0 \partial_n z = 0\}$, $F_0 = 0$, $X_\partial = X$. Множество $\mathfrak{A}$ допустимых элементов задачи (1.9), (1.10), т. е. множество $z \in X_1$, удовлетворяющих (1.10), непусто, так как $z \equiv 0 \in \mathfrak{A}$. В силу предложения 1.1.3 для $z \in \mathfrak{A}$ справедлива оценка

$$\|z\|_{X_1} \equiv \|z\|_{H^{1/2}_\Delta(\Omega)} \leqslant C\|\gamma_1 z\|_{L_2(\Gamma_1)} \leqslant \frac{2C}{\varepsilon} J(z),$$

где $J(z)$ — функционал (1.9). Следовательно, задача (1.9), (1.10) удовлетворяет условию 1.2.2 (коэрцитивность). Таким образом, мы проверили все условия теоремы 1.2.1, и согласно этой теореме существует решение $y \in H^{1/2}_\Delta(\Omega)$ экстремальной задачи (1.9), (1.10).

Выведем систему оптимальности для задачи (1.9), (1.10), используя теорему 2.1.3. Положим $X = X_\partial = \{z \in H^{1/2}_\Delta(\Omega) : \gamma_0 \partial_n z = 0\}$, $V = L_2(\Omega)$, $Lz = \Delta z$, $F_0 = 0$. Отметим, что $\operatorname{Im} L \equiv LX = V$, так как согласно предложению 1.1.3 для любого $f \in L_2(\Omega)$ существует решение $z \in H^2(\Omega) \subset H^{1/2}_\Delta(\Omega)$ краевой задачи $\Delta z = f$, $\gamma_0 \partial_n z = 0$, $\gamma_1 z = 0$. Проверка остальных условий теоремы 2.1.3 очевидна. Выпишем функцию Лагранжа задачи (1.9), (1.10):

$$\mathcal{L}(z,p) = \frac{\varepsilon}{2}\|\gamma_1 z\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \frac{1}{2}\|\gamma_0 z - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_0)} + \int\limits_\Omega \Delta z p\, dx. \tag{1.11}$$

В силу теоремы 2.1.3 справедливо неравенство (2.1.12), которое при $X_\partial = X$ и функции $\mathcal{L}$, определенной равенством (1.11), имеет вид

$$\langle \mathcal{L}_x(z,p), h\rangle = \varepsilon(\gamma_1 z, \gamma_1 h)_{(\Gamma_1)} + (\gamma_0 z - u_0, \gamma_0 h)_{(\Gamma_0)} + \int\limits_\Omega \Delta h \cdot p\, dx = 0 \tag{1.12}$$

при любом $h \in X$. Из равенства (1.12) с помощью процедуры, описанной в гл. 2, § 2, выводится следующая система оптимальности задачи (1.9),

(1.10):

$$\Delta y(x) = 0, \quad \Delta p(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.13}$$

$$\gamma_0 y - \gamma_0 \partial_n p = u_0, \quad \gamma_0 \partial_n y = 0, \tag{1.14}$$

$$\gamma_1 p = 0, \quad \gamma_1 \partial_n p = \varepsilon \gamma_1 y, \tag{1.15}$$

где $y \in H^{1/2}_{\Delta}(\Omega)$ — решение задачи (1.9), (1.10), а $p \in L_2(\Omega)$ — сопряженная функция. Из (1.13_1), (1.14_2) и теоремы о локальной гладкости решений эллиптических краевых задач вытекает $\gamma_0 y \in C^\infty(\Gamma_0)$. Следовательно, $u_0 - \gamma_0 y \in H^{k+1}(\Gamma_0)$. Поэтому решение p задачи (1.13_2), (1.14_1), (1.15_1) принадлежит пространству $H^{k+5/2}_{\Delta}(\Omega)$ $(p \in H^{k+5/2}_{\Delta}(\Omega))$. В силу (1.13_2), (1.15_1) и теоремы о локальной гладкости решений эллиптических краевых задач имеем $\gamma_1 \partial_n p \in C^\infty(\Gamma_1)$. Поэтому решение y задачи (1.13_1), (1.14_2), (1.15_2) с бесконечно гладкими исходными данными бесконечно дифференцируемо $(y \in C^\infty(\overline{\Omega}))$.

Определим на Γ_0 функцию

$$q = \gamma_0 \partial_n p \tag{1.16}$$

и сведем задачу (1.13)–(1.15) к уравнению относительно q. Для этого введем оператор $G_1{:}H^{k+1}(\Gamma_0) \to H^{k+1}(\Gamma_1)$, сопоставляющий функции q функцию $\gamma_1 \partial_n p$, где p — решение задачи

$$\Delta p = 0, \quad \gamma_0 \partial_n p = q, \quad \gamma_1 p = 0, \quad G_1 q = \gamma_1 \partial_n p. \tag{1.17}$$

Введем также оператор $G_2 : H^{k+1}(\Gamma_1) \to H^{k+1}(\Gamma_0)$, сопоставляющий функции w функцию $\gamma_0 y$, где y — решение задачи

$$\Delta y = 0, \quad \gamma_1 y = w, \quad \gamma_0 \partial_n y = 0; \quad G_2 w = \gamma_0 y. \tag{1.18}$$

В силу (1.13), (1.15), (1.17), подставляя в (1.15_2) выражение из (1.17_4), получим

$$\gamma_1 y = \varepsilon^{-1} G_1 q. \tag{1.19}$$

Подставив в (1.14_1) выражение для $\gamma_0 y$ из (1.18), (1.19) и выражение для $\gamma_0 \partial p$ из (1.16), придем к искомому уравнению

$$\varepsilon^{-1} G_2 G_1 q - q = u_0. \tag{1.20}$$

Подставив в формулу Грина (1.1.18) функцию p из (1.17) и $h = y$, где y — функция из (1.18), получим равенство

$$\int\limits_{\Gamma_0} G_2 w \cdot q \, ds = -\int\limits_{\Gamma_1} w \cdot G_1 q \, ds,$$

из которого следует, что оператор $G_2 : H^0(\Gamma_1) \to H^0(\Gamma_0)$ сопряжен оператору $-G_1 : H^0(\Gamma_0) \to H^0(\Gamma_1)$, т. е. $G_2 = -G_1^*$. Поэтому оператор

$$A = -G_2 G_1 = G_1^* G_1 \tag{1.21}$$

неотрицателен, если его рассматривать в $H^0(\Gamma_0)$. Из (1.21), (1.17), (1.18) и теоремы Хольмгрена о единственности решения задачи Коши легко сле-

дует, что $\ker A = 0$. Из (1.21), (1.17), (1.18) и теорем о гладкости решений эллиптических краевых задач вытекает, что для сколь угодно большого $m > 0$ оператор

$$A : H^0(\Gamma_0) \to H^{0+m}(\Gamma_0) \tag{1.22}$$

непрерывен.[4] Следовательно, оператор $A : H^0(\Gamma_0) \to H^0(\Gamma_0)$ является самосопряженным положительно определенным вполне непрерывным оператором. По теореме Гильберта — Шмидта собственные функции оператора A образуют в $H^0(\Gamma_0)$ ортонормированный базис $\{e_j\}$. Через $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_j \searrow 0$ при $j \to \infty$ обозначим соответствующие собственные значения. Из (1.20), (1.21) следует, что

$$Aq + \varepsilon q = -\varepsilon u_0. \tag{1.23}$$

В силу положительной определенности оператора A при любом $\varepsilon > 0$ и произвольном $u_0 \in H^0(\Gamma_0)$ уравнение (1.23) имеет единственное решение $q \in H^0(\Gamma_0)$. Ввиду непрерывности оператора (1.22), если $u_0 \in H^{k+1}(\Gamma_0)$ в (1.23), то $q \in H^{k+1}(\Gamma_0)$. Следовательно, уравнение (1.23) однозначно разрешимо в пространстве $H^{k+1}(\Gamma_0)$. Аналогично рассуждая, легко установить, что спектр оператора $A : H^{k+1}(\Gamma_0) \to H^{k+1}(\Gamma_0)$ состоит из указанных выше собственных значений $\{\lambda_j\}$, а соответствующие им собственные функции $\{e_j\}$ бесконечно дифференцируемы: $e_j \in C^\infty(\Gamma_0)$.

Пусть $u_0 \in H^{k+1}(\Gamma_0)$ имеет вид

$$u_0 = \sum_{p=1}^{N} u_p e_p, \quad N < \infty. \tag{1.24}$$

---

[4] Действительно, в силу (1.21) достаточно доказать непрерывность оператора $G_1 : H^s(\Gamma_0) \to H^{s+m}(\Gamma_1)$. Для определенности рассмотрим случай $s < 0$ (случай $s \geqslant 0$ рассматривается аналогично). Пусть $\Omega = \mathcal{U}_0 \ni \mathcal{U}_1 \ni \mathcal{U}_2 \ni \cdots \ni \mathcal{U}_m \supset \Gamma_0$ — сужающиеся компактно вложенные окрестности части границы Γ_0, а $\varphi_j(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ — функции, причем $\varphi_j(x) = 1$ при $x \in \mathcal{U}_j$ и $\operatorname{supp} \varphi_j \subset \Omega \setminus \mathcal{U}_{j-1}$, $j = 1, \ldots, m$. Если $p \in D_\Delta^{s+3/2}(\Omega) \subset H^{s+3/2}(\Omega)$ — решение задачи (1.17) (относительно определения пространства $D_\Delta^\alpha(\Omega)$ (см. сноску 2 на с. 149 этой главы), то $\varphi_1 p$ является решением задачи $\Delta(\varphi_1 p) = g_1$, $(\varphi_1 p)\big|_{\partial\Omega} = 0$, где $g_1 = -(\Delta\varphi)p - 2\sum\limits_{j=1}^{d} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^s}\dfrac{\partial p}{\partial x^j} \in \Xi^{s+1/2}(\Omega) \subset H^{s+1/2}(\Omega)$. Поэтому из теоремы 6.7, Лионс, Мадженес [2, гл. 2] следует, что $\varphi_1 p \in D_\Delta^{s+5/2}(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|\varphi_1 p\|_{H^{s+5/2}(\Omega)} \leqslant \|\varphi_1 p\|_{D_\Delta^{s+5/2}(\Omega)} \leqslant c\,\|g_1\|_{\Xi^{s+1/2}(\Omega)} \leqslant c_1\,\|p\|_{D_\Delta^{s+3/2}(\Omega)},$$

где c_1 не зависит от p. Повторяя аналогичные рассуждения для $\varphi_2 p, \varphi_3 p, \ldots, \varphi_m p$, получим

$$\begin{aligned}\|\varphi_m p\|_{H^{s+3/2+m}(\Omega)} &\leqslant \|\varphi_m p\|_{D_\Delta^{s+3/2+m}(\Omega)} \leqslant c_1\,\|\varphi_{m-1} p\|_{D_\Delta^{s+3/2+m-1}(\Omega)} \\ &\leqslant \cdots \leqslant c_{m-1}\,\|\varphi_1 p\|_{D_\Delta^{s+3/2+1}(\Omega)} \leqslant c_m\,\|p\|_{D_\Delta^{s+3/2}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Из этой оценки и теоремы о следах вытекает непрерывность оператора $G_1 : H^s(\Gamma_0) \to H^{s+m}(\Gamma_1)$ при любых $s \in \mathbb{R}$ и натуральных m.

Тогда решение $q \in H^{k+1}(\Gamma_0)$ записывается в виде

$$q = -\sum_{p=1}^{N} \frac{\varepsilon u_p}{\lambda_p + \varepsilon} e_p. \tag{1.25}$$

В силу (1.25)

$$\|q\|_{H^{k+1}(\Gamma_0)} \leqslant \sum_{p=1}^{N} \frac{\varepsilon |u_p|}{\lambda_p + \varepsilon} \|e_p\|_{H^{k+1}(\Gamma_0)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.26}$$

Из (1.26), (1.16), (1.13), (1.14) следует, что если u_0 имеет вид (1.24), то существует последовательность гармонических в Ω функций $y_\varepsilon(x)$, удовлетворяющих условию $\gamma_0 \partial y_\varepsilon = 0$, такая, что

$$\|u_0 - \gamma_0 y_\varepsilon\|_{H^{k+1}(\Gamma_0)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{1.27}$$

Из (1.27) следует утверждение о плотности множества разрешимости задачи (1.8), если мы докажем, что система собственных функций $\{e_j\}$ оператора $A : H^{k+1}(\Gamma_0) \to H^{k+1}(\Gamma_0)$ полна в $H^{k+1}(\Gamma_0)$. Допустим противное. Тогда существует вектор $w \in H^{-(k+1)}(\Gamma_0)$ такой, что

$$\langle w, v \rangle_{(\Gamma_0)} = 0 \quad \forall v \in E_\infty, \tag{1.28}$$

где E_∞ — множество всех конечных линейных комбинаций, составленных из функций $\{e_j\}$. В силу теоремы 6.7 из Лионс, Мадженес [2, гл. 2] легко вывести (см. сноску 4 на с. 152), что задачи из (1.17), (1.18) однозначно разрешимы при любых $q \in H^s(\Gamma_0)$, $w \in H^s(\Gamma_1)$ и $s \in \mathbb{R}$. Оператор (1.21) продолжается до оператора

$$A : H^{-(k+1)}(\Gamma_0) \to H^{-(k+1)}(\Gamma_0). \tag{1.29}$$

При этом сопряженный оператор $A^* : H^{k+1}(\Gamma_0) \to H^{k+1}(\Gamma_0)$ совпадает с сужением оператора (1.29) на $H^{k+1}(\Gamma_0)$. Последнее утверждение доказывается так же, как самосопряженность оператора $A : H^0(\Gamma_0) \to H^0(\Gamma_0)$. Очевидно, что $AE_\infty \subset E_\infty$. В силу (1.28)

$$0 = \langle w, Av \rangle_{(\Gamma_0)} = \langle Aw, v \rangle_{(\Gamma_0)} \quad \forall v \in E_\infty. \tag{1.30}$$

Так как E_∞ плотно в $L_2(\Gamma_0)$, а в силу (1.22) $Aw \in L_2(\Gamma_0)$, вследствие (1.30) заключаем, что $Aw = 0$. Следовательно, $w = 0$. □

§ 2. Аппроксимативная управляемость параболических уравнений

Ниже доказывается аппроксимативная управляемость уравнения теплопроводности для управлений различных классов. Для доказательства используется метод, близкий методу из п. 1.1.

2.1. Локальное распределенное управление. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, ω — произвольная фиксированная

подобласть области Ω такая, что $\overline{\omega} \subset \Omega$, где $\overline{\omega}$ — замыкание ω. Для уравнения теплопроводности рассмотрим смешанную краевую задачу с управлением

$$\dot{y}(t,x) - \Delta y(t,x) = f(t,x) + u(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{2.1}$$

$$y\big|_{\Sigma} = 0, \tag{2.2}$$

$$y(t,x)\big|_{t=0} = y_0(x), \tag{2.3}$$

где $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$, $T > 0$ — заданное число, $f \in L_2(Q)$, $\dot{y} = \partial y/\partial t$, $y_0 \in L_2(\Omega)$ — заданные функции, а $u(t,x)$ — управление. Предполагается, что управление $u(t,x)$ сосредоточено в $(0,T) \times \omega$. Более точно, введем пространство управлений

$$U_\omega = \{u \in L_2(Q) : \operatorname{supp} u(t,x) \subset (0,T) \times \omega\}. \tag{2.4}$$

Предположим, что задана функция $y_1 \in L_2(\Omega)$.

Определение 2.1. Задача (2.1)–(2.3) называется *аппроксимативно управляемой относительно класса управлений* U_ω, если для любых $\varepsilon > 0$ и $y_1 \in L_2(\Omega)$ существует управление $u \in U_\omega$ такое, что решение y задачи (2.1)–(2.3) с управлением u удовлетворяет условию

$$\|y(T,\cdot) - y_1(\cdot)\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. *Задача* (2.1)–(2.3) *является аппроксимативно управляемой относительно класса управлений* U_ω, *определенного в* (2.4).

Доказательство. Сведем доказательство теоремы к случаю задачи

$$\dot{z}(t,x) - \Delta z(t,x) = u(t,x), \tag{2.6}$$

$$z\big|_{\Sigma} = 0, \quad z(t,x)\big|_{t=0} = 0. \tag{2.7}$$

Для этого положим

$$y(t,x) = \widehat{y}(t,x) + z(t,x), \tag{2.8}$$

где $\widehat{y}(t,x)$ — решение задачи (2.1)–(2.3), в которой $u(t,x) \equiv 0$. В силу теоремы 1.1.16 решение $\widehat{y}(t,x)$ задачи (2.1)–(2.3) при $u \equiv 0$ существует и принадлежит пространству $Y = \{y \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega)) : \dot{y} \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}$. Предположим, что задача (2.6), (2.7) аппроксимативно управляема. Тогда для любых $y_1 \in L_2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$ существует $u \in U_\omega$ такое, что решение z задачи (2.6), (2.7) удовлетворяет неравенству

$$\|z(T,\cdot) - (\widehat{y}(T,\cdot) + y_1(\cdot))\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon. \tag{2.9}$$

Тогда функция y, определенная в (2.8), удовлетворяет (2.1)–(2.3) и (2.5). Поэтому задача (2.1)–(2.3) также аппроксимативно управляема.

Пусть W — подмножество пространства $L_2(\Omega)$, которое заметается следами $\gamma_T z = z(T,\cdot)$ решений $z(t,x)$ задачи (2.6), (2.7), когда управление u пробегает все пространство U_ω. Докажем аппроксимативную управляемость задачи (2.6)–(2.8) от противного, предполагая, что линейное многообразие W не является всюду плотным в $L_2(\Omega)$. Это означает, что существует

ненулевой элемент $\varphi_0 \in L_2(\Omega)$ такой, что

$$\langle \varphi_0, z(T,\cdot)\rangle_{(\Omega)} = 0 \quad \forall z(T,\cdot) \in \overline{W}, \tag{2.10}$$

где $\langle \cdot,\cdot\rangle_{(\Omega)}$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим краевую задачу для обратного уравнения теплопроводности

$$\dot{\varphi}(t,x) + \Delta\varphi(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q, \tag{2.11}$$

$$\varphi\big|_{\Sigma} = 0, \quad \varphi(t,x)\big|_{t=T} = \varphi_0(x). \tag{2.12}$$

Заменой $\tau = T - t$ эта задача сводится к смешанной задаче Дирихле для уравнения теплопроводности. Поэтому вследствие теоремы 1.1.16 существует единственное решение $\varphi \in Y$ задачи (2.11), (2.12). Более того, из теоремы 1.1.14 легко вывести, что $\varphi \in C^\infty(Q)$.

Умножим обе части уравнения (2.11) скалярно в $L_2(Q)$ на решение z задачи (2.6), (2.7) и воспользуемся формулой Грина (1.1.40), соотношением (2.10), краевыми условиями (2.7), (2.12) и уравнением (2.6). В результате получим равенство

$$\int\limits_Q \varphi(t,x)u(t,x)\,dx\,dt = 0 \quad \forall u \in U_\omega,$$

из которого следует

$$\varphi(t,x) \equiv 0, \quad (t,x) \in (0,T)\times\omega. \tag{2.13}$$

Пусть ω_1 — шар, содержащийся в ω. В силу (2.13) $\varphi(t,x)$ является решением задачи Коши для уравнения (2.11) в $(0,T)\times(\Omega\setminus\omega)$ с нулевыми данными Коши $\varphi\big|_{(0,T)\times\partial\omega_1} = 0$, $\partial_n\varphi\big|_{(0,T)\times\partial\omega_1} = 0$. В силу теоремы Хольмгрена о единственности решения задачи Коши $\varphi(t,x) \equiv 0$ при $(t,x) \in Q$. Следовательно, $\varphi_0(x) \equiv 0$. □

В теореме 2.1 фактически доказана L_2-управляемость задачи (2.1)–(2.3), т. е. справедливость оценки (2.5) для L_2-нормы. Представляет интерес вопрос об аппроксимативной управляемости задачи (2.1)–(2.3) относительно других норм. Для исследования этого вопроса обобщим определение 2.1. Пусть N — нормированное пространство функций, определенных на области Ω, а U — нормированное пространство функций, определенных на Q и имеющих носитель в $(0,T)\times\omega$. Предполагается, что $N \subset L_1(\Omega)$, $U \subset L_1(Q)$ и выполнено следующее условие.

Условие 2.1. Данные $f \in L_1(Q)$, $y_0 \in L_1(\Omega)$ таковы, что при любом $u \in U$ задача (2.1)–(2.3) имеет единственное решение $y \in L_1(Q)$, причем для этого решения определен след $\gamma_T y \in N$.

Определение 2.2. Задача (2.1)–(2.3) называется *N-аппроксимативно управляемой относительно класса управлений U*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $y_1 \in N$ существует управление $u \in U$ такое, что решение y задачи (2.1)–(2.3) с управлением u удовлетворяет условию

$$\|\gamma_T y - y_1\|_N < \varepsilon. \tag{2.14}$$

Справедливо следующее обобщение теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L_p(Q)$, $y_0 \in L_p(\Omega)$, $U_{\omega,p} = L_p(Q) \cap U_\omega$, *где* U_ω *— пространство* (2.4). *Тогда задача* (2.1)–(2.3) *является* L_p-*аппроксимативно управляемой относительно пространства управлений* $U_{\omega,p}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1. При этом элемент φ_0, ортогональный множеству $W \subset L_p(\Omega)$ (т. е. удовлетворяющий (2.10)), предполагается принадлежащим пространству $L_q(Q)$, где $1/q+1/p = 1$. □

Менее тривиален вопрос об H^k-управляемости задачи (2.1)–(2.3), который будет изучен в следующем пункте.

2.2. Случай аппроксимативной неуправляемости. Покажем, что задача (2.1)–(2.3) не является H^k-аппроксимативно управляемой для пространства Соболева $H^k(\Omega)$ при $k \geqslant 3$. Для этого введем некоторые функциональные пространства. Пусть $e_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots,$ — собственные функции, а $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j \leqslant \ldots$ — соответствующие собственные значения спектральной задачи

$$-\Delta e(x) = \lambda e(x), \quad x \in \Omega; \quad e\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.15}$$

Известно, что $\{e_j\}$ образуют ортогональный базис в $L_2(\Omega)$. Будем считать этот базис нормированным.

Пространство $G^\alpha(\Omega)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, — это множество функций вида

$$z(x) = \sum_{j=1}^{\infty} z_j e_j(x), \quad z_j \in \mathbb{R}, \tag{2.16}$$

для которых конечна норма

$$\|z\|^2_{G^\alpha} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha |z_j|^2. \tag{2.17}$$

Очевидно, что $G^0(\Omega) = H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$. Как следует из леммы 2.1 (ниже), $G^k(\Omega)$ при натуральном k является подпространством пространства $H^k(\Omega)$.

Лемма 2.1. *Справедливы следующие равенства*:

$$G^{2k+1}(\Omega) = \{z \in H^{2k+1}(\Omega) \colon \Delta^j z\big|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 0, 1, \ldots, k\}, \tag{2.18}$$

$$G^{2k}(\Omega) = \{z \in H^{2k}(\Omega) \colon \Delta^j z\big|_{\partial\Omega} = 0,\ j = 0, 1, \ldots, k-1\}, \tag{2.19}$$

где k *— натуральное число,* $\Delta^0 z = z$ *и* Δ^j, $j = 1, 2, \ldots,$ *— j-я степень оператора* Δ. *В пространстве* $G^k(\Omega)$ *норма* $\|\cdot\|_{G^k}$, *определенная в* (2.16), *эквивалентна норме в пространстве Соболева* $H^k(\Omega)$.

Доказательство. Из теорем о гладкости решений эллиптических краевых задач при любом j собственная функция $e_j(x)$ задачи (2.15) с $\lambda = \lambda_j$ бесконечно дифференцируема на $\overline{\Omega}$. Поэтому из (2.15_1) в силу (2.15_2) сле-

дует, что $\Delta e_j(x)\big|_{\partial\Omega} = 0$. Применяя к обеим частям (2.15_1) последовательно операторы $\Delta, \Delta^2, \ldots$, получим по индукции, что

$$\Delta^k e_j(x)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \ j = 1, 2, \ldots. \tag{2.20}$$

Докажем эквивалентность норм $\|\cdot\|_{G^m}$ и $\|\cdot\|_{H^m}$ в пространстве $G^m(\Omega)$ в случае нечетных m (случай четных m исследуется аналогично). При этом вместо функции вида (2.16) рассмотрим сначала функцию

$$z^N(x) = \sum_{j=1}^{N} z_j e_j(x). \tag{2.21}$$

Очевидно, что функции вида (2.21) при любом k удовлетворяют краевым условиям (2.20). Учитывая это обстоятельство, (2.17) и ортогональность базиса $\{e_j\}$ в $G^{2k+1}(\Omega)$, получим

$$\begin{aligned} \|z^N\|^2_{G^{2k+1}} &= \Big(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{k+1} z_j e_j, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^k z_i e_i\Big)_{(\Omega)} = (\Delta\Delta^k z^N, \Delta^k z^N)_{(\Omega)} \\ &= \|\nabla\Delta^k z^N\|^2_{H^0(\Omega)} \leqslant C\|z^N\|^2_{H^{2k+1}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

где C не зависит от N. Используя известную оценку решения эллиптической краевой задачи

$$\Delta^k z(x) = f(x), \quad \Delta^j z\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

неравенство Пуанкаре — Стеклова (см. (1.1.6)) и (2.22), получим

$$\begin{aligned} \|z^N\|^2_{H^{2k+1}} &\leqslant C_1\|\Delta^k z\|^2_{H^1} = C_1(\|\nabla\Delta^k z^N\|^2_{L_2} + \|\Delta^k z^N\|^2_{L_2}) \\ &\leqslant C_2\|\nabla\Delta^k z^N\|^2_{H^0} = C_2\,\|z^N\|^2_{G^{2k+1}}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

где константа C_2 не зависит от N. Для доказательства оценки (2.23) при $k = 0$ достаточно использовать лишь (1.1.6) и (2.22). Так как константы C и C_2 в неравенствах (2.22), (2.23) не зависят от N, переходя в этих неравенствах к пределу при $N \to \infty$, докажем эквивалентность норм $\|\cdot\|_{G^{2k+1}}$ и $\|\cdot\|_{H^{2k+1}}$. Для доказательства справедливости краевых условий из (2.18) для любой функции $z \in G^{2k+1}(\Omega)$ отметим, что эти краевые условия справедливы для функций вида (2.21). Поэтому в силу теоремы 1.1.4 и (2.23)

$$\sum_{j=0}^{k} \|\gamma_{\partial\Omega}\Delta^j z^N\|^2_{H^{2(k-j)+1/2}(\partial\Omega)} \leqslant C\|z^N\|^2_{H^{2k+1}(\Omega)} \leqslant C_1\|z^N\|^2_{G^{2k+1}(\Omega)}, \tag{2.24}$$

где C и C_1 не зависят от N. Так как левая часть первого неравенства в (2.24) равна нулю для z^N вида (2.21), переходя в (2.24) к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$\sum_{j=0}^{k} \|\gamma_{\partial\Omega}\Delta^j z\|^2_{H^{2(k-j)+1/2}(\partial\Omega)} = 0$$

для любой функции $z \in G^{2k+1}(\Omega)$. □

Введем пространство

$$G^{1,\alpha}(Q) = \{y \in L_2(0,T;G^{\alpha}(\Omega)) : \dot{y} \in L_2(0,T;G^{\alpha-2}(\Omega))\}. \tag{2.25}$$

Рассмотрим задачу

$$\dot{y}(t,x) - \Delta y = f(t,x), \quad y\big|_{t=0} = y_0, \quad y \in G^{1,\alpha}(Q). \tag{2.26}$$

Отметим, что при $\alpha > 1/2$ из условия $y \in G^{1,\alpha}(Q)$ следует $y\big|_{\Sigma} = 0$. Таким образом, предположение $y \in G^{1,\alpha}(Q)$ заменяет в задаче (2.26) краевое условие Дирихле на боковой поверхности Σ цилиндра Q.

Лемма 2.2. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Для любых $f \in L_2(0,T;G^{\alpha-2}(\Omega))$, $y_0 \in G^{\alpha-1}(\Omega)$ существует единственное решение y задачи* (2.26), *принадлежащее пространству $G^{1,\alpha}(Q)$.*

Доказательство. Применим метод Фурье. Разложим решение $y(t,x)$ и исходные данные f, y_0 в ряды по базису $\{e_j(x)\}$. Тогда задача (2.26) сведется к решению бесконечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решив эти уравнения и проведя соответствующие оценки, докажем лемму. В случае $\alpha = 2$ это доказательство со всеми деталями проведено в Вишик, Фурсиков [1]. Случай произвольного α исследуется аналогично. □

Исследуем аппроксимативную управляемость задачи (2.6), (2.7). В качестве пространства управлений рассмотрим

$$U_{\omega}^{k} = \{u \in L_2(0,T;H^{k}(\Omega)) : \operatorname{supp} u \subset (0,T) \times \omega\}. \tag{2.27}$$

В силу леммы 2.1 $U_{\omega}^{k} \subset L_2(0,T;G^{k}(\Omega))$. Поэтому по лемме 2.2 при любом $u \in U_{\omega}^{k}$ решение $z(t,x)$ задачи (2.6), (2.7) принадлежит пространству $G^{1,k+2}(Q)$ и согласно теореме о следах (см. Вишик, Фурсиков [1]) $\gamma_T z \in G^{k+1}(\Omega)$. Поэтому естественно рассматривать вопрос об $G^{k+1}(\Omega)$-аппроксимативной управляемости задачи (2.6), (2.7) относительно пространства управлений (2.27).

Теорема 2.3. (a) *при любом целом $k \geqslant 2$ задача* (2.6), (2.7) *не является $H^{k+1}(\Omega)$-аппроксимативно управляемой относительно пространства U_{ω}^{k},*

(b) *при любом целом $k \geqslant 0$ задача* (2.6), (2.7) *$G^{k+1}(\Omega)$-аппроксимативно управляема относительно пространства управлений* (2.27).

Доказательство. Начнем с доказательства утверждения (b). Как и при доказательстве теоремы 2.1, предположив противное, придем к существованию ненулевой функции $\varphi_0 \in G^{-k-1}(\Omega)$, удовлетворяющей соотношению (2.10), где W — подмножество в $G^{k+1}(\Omega)$, которое заметает следы $\gamma_T z$ решений z задачи (2.6), (2.7), когда u пробегает U_{ω}^{k}. В силу леммы 2.2 решение $\varphi(t,x)$ задачи (2.11), (2.12) при $\varphi_0 \in G^{-k-1}(\Omega)$ существует в пространстве $G^{1,-k}(Q)$ и по теореме о гладкости решений задачи Дирихле для уравнения теплопроводности (к которому сводится задача (2.11), (2.12) заменой $\tau = -t$) $\varphi \in C^{\infty}(Q)$. После этого доказательство утверждения (b) завершается точно так же, как доказательство теоремы 2.1.

Докажем утверждение (a). В силу единственности решения в пространстве $W_p^{k,2k}(Q)$ задачи Дирихле для параболического уравнения (см. теорему 1.1.14) решение $z(t,x)$ задачи (2.6), (2.7) для $u \in U_\omega^k$, которое будем искать в пространстве $W_2^{1,2}(Q)$, в силу леммы 2.2 принадлежит пространству $G^{1,k+2}(Q)$, а его след $\gamma_T z$ — пространству $G^{k+1}(\Omega)$. В силу (2.18), (2.19) при $k \geqslant 2$ пространство $G^{k+1}(\Omega)$ не является всюду плотным в $H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. □

Замечание 2.1. При $k = 0, 1$ задача (2.6), (2.7) является $H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$-аппроксимативно управляемой относительно пространства управлений U_ω^k. Это утверждение следует из утверждения (b) теоремы 2.3 и равенства $G^{k+1}(\Omega) = H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, справедливого при $k = 0, 1$ в силу формул (2.18), (2.19).

2.3. Импульсное и стартовое управления. Рассмотрим сначала случай импульсного управления. Напомним, что управление называется *импульсным*, если оно может быть записано в виде

$$u(t,x) = \delta(t - t_0)v(x), \tag{2.28}$$

где $\delta(t - t_0)$ — δ-функция Дирака с носителем в точке $t_0 \in (0,T)$. Предположим, что

$$v \in V_\omega = \{u \in L_2(\Omega) : \operatorname{supp} u \subset \omega\}, \tag{2.29}$$

где, как и раньше, $\omega \Subset \Omega$ — подобласть, компактно вложенная в Ω. Рассмотрим краевую задачу с импульсным управлением

$$\dot{y}(t,x) - \Delta y(t,x) = \delta(t - t_0)v(x), \quad y\big|_\Sigma = 0, \tag{2.30}$$

$$y(t,x)\big|_{t=0} = y_0. \tag{2.31}$$

Предложение 2.1. *Пусть $y_0 \in L_2(\Omega)$ и $t_0 \in (0,T)$. Тогда при любом $k \in \mathbb{R}$ задача* (2.30), (2.31) *$G^k(\Omega)$-управляема относительно класса импульсных управлений* (2.28) *при $v \in V_\omega$.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.1, сведем задачу (2.30), (2.31) к задаче

$$\dot{z}(t,x) - \Delta z = \delta(t - t_0)v(x), \quad z\big|_\Sigma = 0, \quad z\big|_{t=0} = 0, \tag{2.32}$$

положив $y(t,x) = z(t,x) + \widehat{y}(t,x)$, где $\widehat{y}(t,x)$ — решение краевой задачи

$$\dot{\widehat{y}} - \Delta\widehat{y} = 0, \quad \widehat{y}\big|_\Sigma = 0, \quad \widehat{y}\big|_{t=0} = y_0(x). \tag{2.33}$$

Решая задачу (2.33) методом Фурье, получим

$$\widehat{y}(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} y_{0j} e_j(x), \tag{2.34}$$

где $e_j(x)$ — собственные функции и λ_j — собственные значения задачи (2.15), входящие в определение (2.16), (2.17) пространства $G^\alpha(\Omega)$, а y_{0j} — коэффициенты разложения $y_0(x)$ по базису $\{e_j\}$. В силу (2.34) $\gamma_T \widehat{y} \in G^k(\Omega)$

при любом k. Поэтому задача о G^k-аппроксимативной управляемости задачи (2.30), (2.31) сводится к доказательству G^k-аппроксимативной управляемости задачи (2.32). Использованные в теореме 2.1 рассуждения от противного приводят к сопряженной задаче (2.11), (2.12) при $\varphi_0 \in G^{-k}(\Omega)$. Умножая (2.11) на решение z задачи (2.32) скалярно в $L_2(Q)$ и интегрируя по частям, получаем равенство

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(t_0, x) v(x)\, dx = 0 \quad \forall v \in V_\omega. \tag{2.35}$$

Следовательно, $\varphi(t_0, x) \equiv 0$ при $x \in \omega$. Функция $\varphi(t_0, x)$ аналитична по x в любой точке $x \in \Omega$. Действительно, решая задачу (2.11), (2.12) методом Фурье, находим

$$\varphi(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j (t-T)} \varphi_{0j} e_j(x), \quad \varphi_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{0j} e_j(x). \tag{2.36}$$

Будучи решением эллиптического уравнения (2.15_1) при $\lambda = \lambda_j$, функция $e_j(x)$ аналитична в Ω (Хёрмандер [1]). Поэтому ряд (2.36_1) аналитичен по x при $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$. Из этого условия и равенства $\varphi(t_0, x) \equiv 0$, $x \in \omega$, следует, что $\varphi(t_0, x) \equiv 0$ при $x \in \Omega$. Но ввиду последнего равенства и соотношения (2.36_1) $\varphi_{0j} = 0$ при любом j. Поэтому $\varphi_0(x) \equiv 0$. $\square$

Из леммы 2.1 и предложения 2.1 вытекает

Теорема 2.4. *Пусть $y_0 \in L_2(\Omega)$, $t_0 \in (0, T)$. Тогда задача* (2.30), (2.31) *$H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$-аппроксимативно управляема относительно управлений $v \in V_\omega^k$ при $k = 1, 2$ и не является $H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$-аппроксимативно управляемой при натуральных $k \geqslant 3$.*

Рассмотрим случай задачи со стартовым управлением

$$\dot{y}(t, x) - \Delta y(t, x) = 0, \quad y\big|_{\Sigma} = 0, \quad y\big|_{t=0} = y_0(x) + v(x), \tag{2.37}$$

где $y_0 \in L_2(\Omega)$ — фиксированная функция, а $v \in V_\omega$ — управление (здесь V_ω — пространство (2.29)).

Предложение 2.2. *Пусть $y_0 \in L_2(\Omega)$. При любом $k \in \mathbb{R}$ задача* (2.37) *$G^k(\Omega)$-управляема относительно класса управлений V_ω.*

Доказательство проводится так же, как доказательство предложения 2.1, только вместо равенства (2.35) при $t_0 \in (0, T)$ мы получаем (2.35) при $t_0 = 0$. Однако это не влияет на последующие рассуждения.

Из предложения 2.2 и леммы 2.1 следует

Теорема 2.5. *Пусть $y_0 \in L_2(\Omega)$. Тогда задача* (2.37) *$H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$-аппроксимативно управляема относительно класса управлений V_ω, если $k = 1, 2$, и не является $H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$-аппроксимативно управляемой относительно V_ω при натуральных $k \geqslant 3$.*

2.4. Приложения к оптимальному управлению. Докажем справедливость условия 1.4.2 (нетривиальность) для задачи (1.4.15)–(1.4.17) оптимального

управления со стартовым управлением и финальным наблюдением, когда множество U_∂ ограничений на управление задается одной из формул

$$U_\partial = \{u \in L_2(\Omega) : u(x) \geqslant 0 \text{ при почти всех } x \in \Omega\}, \tag{2.38}$$

$$U_\partial = \{u \in L_2(\Omega) : \alpha_1(x) \leqslant u(x) \leqslant \alpha_2(x) \text{ при почти всех } x \in \Omega\}. \tag{2.39}$$

Отметим, что проверка условия нетривиальности, когда $\nu > 0$ в (1.4.16), т. е. когда дифференциальное уравнение в (1.4.16) является уравнением теплопроводности, легко осуществляется с помощью теоремы 1.1.14 о разрешимости смешанной краевой задачи Дирихле для этого уравнения и теоремы вложения Соболева. Поэтому рассмотрим случай $\nu < 0$. После замены переменных $t_1 = \nu(t - T)$ множество ограничений (1.4.16), (1.4.17) перепишется в виде

$$\partial_{t_1} z(t_1, x) - \Delta z = g_1(t_1, x), \quad \gamma_\Sigma z = 0, \quad \gamma_{T_1} z = u, \quad u \in U_\partial, \tag{2.40}$$

где $z(t_1, x) = y(T + t_1/\nu)$, $g_1(t_1, x) = g(T + t_1/\nu)/\nu$, $T_1 = -\nu T$. Сделав для простоты записи в (2.40) переобозначения $t_1 \to t$, $T_1 \to T$, $g_1 \to g$, перепишем (2.40) в виде

$$\partial_t z(t, x) - \Delta z = g(t, x), \quad \gamma_\Sigma z = 0, \tag{2.41}$$

$$\gamma_T z \in U_\partial. \tag{2.42}$$

Для проверки условия 1.4.2 нужно доказать существование функции

$$z \in Y_1 \equiv \{y(t, x) \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)) : \dot{y} \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}, \tag{2.43}$$

удовлетворяющей соотношениям (2.41), (2.42), когда U_∂ — множество (2.38) или (2.39). Рассмотрим сначала случай множества (2.39), предполагая, что существует ε такое, что

$$\alpha_1(x) + \varepsilon \leqslant \alpha_2(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \alpha_i(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad i = 1, 2. \tag{2.44}$$

На правую часть $g(t, x)$ мы наложим дополнительное условие

$$g(t, x) \in L_\mu(Q), \quad \mu > (d + 2)/2. \tag{2.45}$$

Докажем существование функции z, удовлетворяющей (2.41), (2.42), такой, что

$$z \in Z \equiv \{z \in W_\mu^{1,2}(Q) : \gamma_\Sigma z = 0\}, \quad \mu > (d + 2)/2. \tag{2.46}$$

Очевидно, что $Z \subset Y_1$, и этого достаточно для проверки условия 1.4.2. Если $z \in Z$ удовлетворяет (2.41), (2.42), то в силу (2.41_2) должно выполняться следующее необходимое условие согласования:

$$(\gamma_{\partial\Omega}\alpha_1)(x') \leqslant 0 \equiv \gamma_{\partial\Omega}\partial_T z \leqslant (\gamma_{\partial\Omega}\alpha_2)(x'), \quad x' \in \partial\Omega. \tag{2.47}$$

Мы наложим на α_1, α_2 несколько более сильное условие

$$(\gamma_{\partial\Omega}\alpha_1)(x') < 0 < (\gamma_{\partial\Omega}\alpha_2)(x') \quad \forall x' \in \partial\Omega. \tag{2.48}$$

Теорема 2.6. *Пусть g удовлетворяет включению* (2.45), *а для функций $\alpha_j(x)$, определяющих множество* (2.39), *выполнены условия* (2.44), (2.49).

Тогда существует функция z из пространства (2.46), *удовлетворяющая соотношениям* (2.41), (2.42), *где U_∂ — множество* (2.39).

Доказательство. Выберем функцию $z_1(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ такую, что

$$\gamma_{\partial\Omega} z_1 \equiv 0, \quad \alpha_1(x) < z_1(x) < \alpha_2(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{2.49}$$

что возможно в силу (2.44), (2.48). Введем пространство

$$\widehat{W}^\alpha_\mu(\Omega) = \{v(x) \in W^\alpha_\mu(\Omega) \colon v\big|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (\alpha > 1/\mu).$$

Достаточно для любого наперед заданного $\delta > 0$ найти начальное условие $u \in \widehat{W}^{2-2/\mu}_\mu(\Omega)$:

$$\gamma_0 z = u, \tag{2.50}$$

такое, что решение z задачи (2.41), (2.42) удовлетворяет неравенству

$$\|\gamma_T z - z_1\|_{W^{2-2/\mu}_\mu(\Omega)} \leqslant \delta. \tag{2.51}$$

Тогда в силу теоремы 1.1.1 и условия $\mu > (d+2)/2$ имеем

$$\|\gamma_T - z_1\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant c\,\|\gamma_T z - z_1\|_{W^{2-2/\mu}_\mu(\Omega)} \leqslant c\delta. \tag{2.52}$$

В силу (2.49), (2.52) при достаточно малом δ получаем $\alpha_1(x) < \gamma_T z(x) < \alpha_2(x)$ для всех $x \in \overline{\Omega}$. Таким образом, достаточно проверить $\widehat{W}^{2-2/\mu}_\mu(\Omega)$-аппроксимативную управляемость задачи (2.41), (2.50) относительно пространства управлений $u \in \widehat{W}^{2-2/\mu}_\mu(\Omega)$.

Как и при доказательстве теоремы 2.1, дело сводится к случаю $g(t,x) \equiv 0$ путем замены $z(t,x) = y(t,x) + \widehat{y}(t,x)$, где $\widehat{y}(t,x) \in W^{1,2}_\mu(Q)$ — решение задачи $\partial_t \widehat{y} - \Delta\widehat{y} = g$, $\gamma_\Sigma \widehat{y} = 0$, $\gamma_0 \widehat{y} = 0$, существование которого гарантируется теоремой 1.1.14.

Рассуждения от противного, использованные в теореме 2.1, приводят к сопряженной задаче (2.11), (2.12) при $\varphi_0 \in (\widehat{W}^{2-2/\mu}_\mu(\Omega))^*$. Отметим, что при $k > (4+d)/2$ согласно теореме вложения Соболева вложение $G^k \subset \widehat{W}^{2-2/\mu}_\mu(\Omega)$ непрерывно, где G^k — пространство (2.16), (2.17).

Пусть G^∞ — пространство конечных линейных комбинаций собственных функций $\{e_i\}$ задачи (2.15). Покажем, что G^∞ плотно в $L_\mu(\Omega)$. Действительно, G^∞ плотно в G^α относительно нормы (2.17) пространства G^α. Если $\alpha \geqslant d(1/2 - \mu)$, то согласно теореме 1.1.1 G^∞ плотно в G^α также относительно нормы $L_\mu(\Omega)$. Так как $C^\infty_0(\Omega) \subset G^\alpha$, пространство G^α плотно в $L_\mu(\Omega)$, что доказывает плотность G^∞ в $L_\mu(\Omega)$. Поэтому в силу теоремы 1.1.5 G^∞ плотно в $\widehat{W}^2_\mu(\Omega)$. Так как $\widehat{W}^2_\mu(\Omega)$ плотно в $\widehat{W}^{2-2/\mu}_\mu(\Omega)$ и $G^\infty \subset G^k \subset \widehat{W}^2_\mu \subset \widehat{W}^{2-2/\mu}_\mu(\Omega)$, пространство G^k плотно в $\widehat{W}^{2-2/\mu}_\mu(\Omega)$. Отождествляя пространство $L_2(\Omega)$ с его сопряженным, получим цепочку непрерывных и плотных вложений:

$$G^k \subset \widehat{W}^{2-2/\mu}_\mu(\Omega) \subset L_2(\Omega) \subset (\widehat{W}^{2-2/\mu}_\mu(\Omega))^* \subset G^{-k}.$$

Следовательно, задача (2.11), (2.12) разрешима при $\varphi_0 \in (\widehat{W}_\mu^{2-2/\mu}(\Omega))^* \subset G^{-k}$ и решение записывается в виде, аналогичном (2.34):

$$(\varphi(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j(t-T)} \varphi_{0j} e_j(x), \tag{2.53}$$

где λ_j — собственные значения и $e_j(x)$ — собственные функции задачи (2.15), а φ_{0j} — коэффициенты разложения $\varphi_0(x)$ по базису $\{e_j\}$. Доказательство завершается так же, как в предложении 2.1. □

Из теоремы 2.6 вытекает

Следствие 2.1. *Пусть в задаче* (1.4.15)–(1.4.17) $g(t,x) \in W_\mu^{1,2}(Q)$, $\mu > (d+2)/2$, U_∂ *— множество* (2.39) *и* α_j *удовлетворяют* (2.44), (2.45). *Тогда задача* (1.4.15)–(1.4.17) *удовлетворяет условию* 1.4.2 (*нетривиальность*).

Рассмотрим случай множества (2.38), наложив на g несколько более сильное условие, чем (2.45).

Теорема 2.7. *Пусть* $g(t,x) \in L_\mu(Q)$, $\mu > d+2$. *Тогда существует функция* z *из пространства* (2.46) *при* $\mu > d+2$, *удовлетворяющая* (2.41), (2.42), *где* U_∂ *— множество* (2.38).

Доказательство. Выберем функцию $z_1(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую условиям

$$z_1(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \gamma_{\partial\Omega} z_1 \equiv 0, \quad \partial_n z_1\big|_{\partial\Omega} < -1, \tag{2.54}$$

где ∂_n — дифференцирование вдоль внешней нормали к $\partial\Omega$. Повторяя без изменений доказательство теоремы 2.6, для любого $\delta > 0$ построим начальное условие $u \in \widehat{W}_\mu^{2-2/\mu}(\Omega)$ такое, чтобы решение z задачи (2.41), (2.50) удовлетворяло условию (2.51). В силу предположения $\mu > d+2$, теоремы 1.1.1 и (2.51) имеем

$$\|\gamma_T z - z_1\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leqslant c\,\|\gamma_T z - z_1\|_{W_\mu^{2-2/\mu}(\Omega)} \leqslant c\,\delta. \tag{2.55}$$

Выбрав в (2.55) δ достаточно малым, в силу (2.54_3) получим

$$\partial_n \gamma_T z\big|_{\partial\Omega} \leqslant -1 \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{2.56}$$

Поэтому $\gamma_T z(x) \geqslant 0$ при x из некоторой окрестности $\partial\Omega$. Из (2.54_1), (2.55), (2.56) следует, что $\gamma_T z(x) \geqslant 0$ для каждой точки $x \in \Omega$. □

Из теоремы 2.7 получаем

Следствие 2.2. *Пусть в задаче* (1.4.15)–(1.4.17) $g(t,x) \in W_\mu^{1,2}(Q)$, $\mu > d+2$, U_∂ *— множество* (2.38). *Тогда задача* (1.4.15)–(1.4.17) *удовлетворяет условию* 1.4.2 (*нетривиальность*).

2.4. Граничное управление. Пусть Γ — некоторое подмножество границы $\partial\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Рассмотрим задачу

$$\dot{y}(t,x) - \Delta y = 0, \quad y\big|_{t=0} = y_0, \tag{2.57}$$

$$y\big|_\Sigma = w, \tag{2.58}$$

где $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ — заданное начальное условие, w — управление такое, что $\operatorname{supp} w \subset (0,T) \times \Gamma$. Введем пространство управлений

$$W(\Gamma, I) = \{w \in C^2([0,T] \times \partial\Omega) : \operatorname{supp} w \subset I \times \Gamma\}, \tag{2.59}$$

где $I = [a,b] \subset [0,T)$. Существование и единственность решения $y(t,x)$ задачи (2.57), (2.58) в пространстве $H^{1,2}(Q)$ при любом $w \in W(\Gamma, I)$ следует из теоремы 1.1.14.

Теорема 2.8. *Пусть $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\alpha \geqslant 0$. Тогда задача* (2.57), (2.58) *$G^\alpha(\Omega)$-аппроксимативно управляема относительно $W(\Gamma, I)$.*

Доказательство. Как и в предыдущих теоремах, доказательство сводится к случаю $y_0 = 0$. При любом $w \in W(\Gamma, I)$ решение $y(t,x)$ задачи (2.57), (2.58), рассмотренное при $t \in (b,T)$, является решением задачи

$$\dot{y} - \Delta y = 0, \quad y\big|_{(b,T)\times\partial\Omega} = 0, \quad y\big|_{t=0} = \widehat{y}_0, \tag{2.60}$$

где $\widehat{y}_0 = \gamma_b \widetilde{y}$, а $\widetilde{y}$ — решение задачи (2.57), (2.58) при $(t,x) \in (a,b) \times \Omega$. Аналогично (2.34) решение y задачи (2.41) имеет вид

$$y(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j (t-b)} \widehat{y}_{0j} e_j(x).$$

Поэтому $\gamma_T y \in G^\alpha(\Omega)$ при любом $\alpha \geqslant 0$. Пусть

$$\Phi = \{\gamma_T y : y \text{ — решение задачи (2.57), (2.58) при } w \in W(\Gamma, I)\}.$$

Из предположения $\overline{\Phi} \neq G^\alpha(\Omega)$ следует существование ненулевой функции $\varphi_0 \in G^\alpha(\Omega)$, ортогональной множеству $\overline{\Phi}$, т. е. $\langle \varphi_0, \gamma_T y \rangle_{(\Omega)} = 0$ для каждой $\gamma_T y \in \overline{\Phi}$. Пусть $\varphi(t,x)$ — решение задачи (2.11), (2.12). Умножая (2.11) на решение y задачи (2.37) скалярно в $L_2(Q)$ и используя формулу Грина (1.1.40), получим

$$\int\limits_{I\times\Gamma} \partial_n \varphi w \, dt \, dx = 0 \quad \forall w \in C_0^2([0,T] \times \Gamma),$$

откуда $\partial_n \varphi\big|_{I\times\Gamma} \equiv 0$. Таким образом, $\varphi(t,x)$ является решением уравнения (2.11) и удовлетворяет нулевым данным Коши $\varphi\big|_{I\times\Gamma} = 0$ и $\partial_n \varphi\big|_{I\times\Gamma} = 0$. В силу теоремы единственности решения задачи Коши на открытом подмножестве боковой поверхности Σ цилиндра Q (Татару [1]) имеем $\varphi(t,x) \equiv 0$ при $(t,x) \in Q$. Следовательно, $\varphi_0 \equiv 0$. □

Из теоремы 2.6 и леммы 2.1 вытекает

Следствие 2.3. *Задача* (2.38), (2.39) *$H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$-аппроксимативно управляема относительно $W(\Gamma, I)$, $k = 1, 2$, и не является $H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$-аппроксимативно управляемой относительно $W(\Gamma, I)$ при натуральных $k \geqslant 3$.*

§ 3. Разрешимость обратного параболического уравнения с правой частью из множеств с пустой внутренностью

Цель этого параграфа — проверка условия нетривиальности для задачи (1.4.1)–(1.4.3) оптимального управления системой, описываемой обратным уравнением теплопроводности. При этом исследуются случаи, когда множества U_∂ допустимых управлений имеют пустую внутренность в $L_2(Q)$. Решение этой проблемы сводится к доказательству плотности множества разрешимости для обратного параболического уравнения (в пространствах, отличных от $L_2(Q)$).

3.1. Постановка задачи и формулировка результатов. Рассмотрим множество ограничений экстремальной задачи (1.4.1)–(1.4.3), а именно, исследуем разрешимость задачи

$$\dot{y}(t,x) + \Delta y(t,x) = u(t,x),\ (t,x) \in Q; \quad y\big|_{\Sigma} = 0,\ y\big|_{t=0} = y_0(x), \tag{3.1}$$

$$u(t,x) \in U_\partial, \tag{3.2}$$

где $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$, $y_0(x)$ — заданное начальное условие, U_∂ — выпуклое замкнутое подмножество из $L_2(Q)$. Мы рассмотрим два конкретных множества

$$U_\partial = \{u \in L_2(Q) : u(t,x) \geqslant 0 \text{ п. в. в } Q\}, \tag{3.3}$$

$$U_\partial = \{u \in L_2(Q) : \alpha(t,x) \leqslant u(t,x) \leqslant \beta(t,x) \text{ п. в. в } Q\}, \tag{3.4}$$

где $\alpha, \beta \in C(\overline{Q})$. Предполагается, что

$$\beta(t,x) - \alpha(t,x) \geqslant \eta, \quad (t,x) \in Q, \tag{3.5}$$

для некоторого числа $\eta > 0$. Мы установим разрешимость задачи (3.1), (3.2) с помощью развитых в этой главе методов доказательства плотности множеств разрешимости.

Отметим, что внутренность множеств (3.3), (3.4) пуста в $L_2(Q)$, однако аналогичные множества, рассмотренные в пространстве $C(\overline{Q})$ или в пространствах с более сильной топологией, обладают непустой внутренностью. В силу этого обстоятельства будем изучать задачу (3.1), (3.2) в пространствах Соболева $W_\mu^{l,2l}(Q)$ (см. (1.1.26)). Мы хотим, чтобы правая часть $u \in W_\mu^{l,2l}(Q)$ принадлежала пространству $C(\overline{Q})$. С другой стороны, нам не выгодно, чтобы l было слишком большим. Поэтому на l и μ мы наложим следующие условия:

$$l \in (0,1),\ \mu > 1,\ 1 + d/2 < l\mu < (\mu+1)/2 \quad (d = \dim\Omega). \tag{3.6}$$

Будем предполагать, что начальная функция y_0 задачи (3.1), (3.2) фиксирована и удовлетворяет условию

$$y_0(x) \in B_\mu^{2(1+l-1/\mu)}(\Omega), \quad \gamma_{\partial\Omega} y_0(x) = 0, \tag{3.7}$$

где $\gamma_{\partial\Omega}$ обозначает оператор сужения на $\partial\Omega$ функции, определенной в Ω, и $B_\mu^{2(1+l-1/\mu)}(\Omega)$ — пространство Бесова (см. (1.1.7)).

Если $(y,u) \in W_\mu^{1+l,2(1+l)}(Q) \times W_\mu^{l,2l}(Q)$ удовлетворяет (3.1), то функции y_0 и u должны удовлетворять условию согласования

$$\gamma_{\partial\Omega}\Delta y_0(x) = \gamma_{\partial\Omega}(\gamma_0 u)(x). \tag{3.8}$$

Это условие следует из (3.1), так как $\dot{y} \in W_\mu^{l,2l}(Q) \subset C(\overline{Q})$ в силу (3.1_1) и $y\big|_\Sigma = 0$ в силу (3.1_2). Поэтому $\dot{y}\big|_\Sigma = 0$. В силу (3.8) необходимым условием существования пары $(y,u) \in W_\mu^{1+l,2(1+l)}(Q) \times W_\mu^{l,2l}(Q)$, удовлетворяющей (3.1), (3.2), являются условия согласования

$$\begin{aligned} &\gamma_{\partial\Omega}\Delta y_0(x) \geqslant 0, \text{ если } U_\partial \text{ — множество (3.3)} \\ &\gamma_{\partial\Omega}\gamma_0\alpha \leqslant \gamma_{\partial\Omega}\Delta y_0 \leqslant \gamma_{\partial\Omega}\gamma_0\beta, \text{ если } U_\partial \text{ — множество (3.4).} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Мы будем предполагать, что выполнены более сильные условия

$$\gamma_{\partial\Omega}\Delta y_0(x) > 0, \text{ если } U_\partial \text{ — множество (3.3)}, \tag{3.10}$$

$$\gamma_{\partial\Omega}\gamma_0\alpha < \gamma_{\partial\Omega}\Delta y_0 < \gamma_{\partial\Omega}\gamma_0\beta, \text{ если } U_\partial \text{ — множество (3.4).} \tag{3.11}$$

Цель этого параграфа состоит в доказательстве следующих теорем.

Теорема 3.1. *Пусть y_0 удовлетворяет условиям* (3.7), (3.10). *Тогда существует решение $(y,u) \in W_\mu^{1+l,2(1+l)}(Q) \times W_\mu^{l,2l}(Q)$ задачи* (3.1), (3.2), *в которой U_∂ — множество* (3.3). *При этом $u(t,x) > 0$ для почти всех $(t,x) \in Q$.*

Теорема 3.2. *Пусть y_0 удовлетворяет условиям* (3.7), (3.11). *Тогда существует решение $(y,u) \in W_\mu^{1+l,2(1+l)}(Q) \times W_\mu^{l,2l}(Q)$ задачи* (3.1), (3.2), *где множество U_∂ определено в* (3.4). *При этом*

$$\alpha(t,x) < u(t,x) < \beta(t,x) \text{ для почти всех } (t,x) \in Q. \tag{3.12}$$

3.2. О плотности множества разрешимости. Центральным шагом в доказательстве теорем 3.1, 3.2 является доказанное здесь утверждение о плотности множества разрешимости обратного уравнения теплопроводности.

Лемма 3.1. *Множество $(\partial_t + \Delta)G$ плотно в F, где*

$$F = \{u \in W_\mu^{l,2l}(Q) : \gamma_{\partial\Omega}\gamma_0 u = 0\}, \tag{3.13}$$

$$G = \{y \in W_\mu^{1+l,2(1+l)}(Q) : \gamma_0 y = 0,\ \gamma_\Sigma y = 0\}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует ненулевой функционал $g \in F^*$ такой, что

$$\langle \dot{y} + \Delta y, g\rangle = 0 \quad \forall y \in G. \tag{3.15}$$

Обозначим через g_0 сужение функционала g на пространство

$$\begin{aligned} F_0 &= \{u \in W_\mu^{l,2l}(Q) : u\big|_{\partial Q} = 0\} \\ &= \{\text{замыкание } C_0^\infty(Q) \text{ по } W_\mu^{l,2l}(Q)\text{-норме}\}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Отметим, что последнее равенство в (3.16) справедливо в силу (3.6) и теоремы 1.1.13. Из (3.15) при $y \in C_0^\infty(Q)$ следует равенство

$$-\dot{g}_0 + \Delta g_0 = 0, \tag{3.17}$$

которое понимается в смысле теории обобщенных функций. Очевидно, что $g_0 \in P$, где $P = \{p \in W_{\mu'}^{-l,-2l}(Q) : -\dot{p} + \Delta p \in L_2(Q)\}$ и $1/\mu' + 1/\mu = 1$. В силу предложения 2.5.1, леммы 2.5.5 и теоремы 2.5.3 для функции g_0 определены следы $\gamma_\Sigma g_0$ и $\gamma_T g_0$, причем

$$\gamma_\Sigma g_0 = 0, \quad \gamma_T g_0 = 0. \tag{3.18}$$

Из соотношений (3.17), (3.18) и теоремы о гладкости решений параболических уравнений следует, что $g_0 \in C^\infty((0,T] \times \Omega)$. Поэтому в силу теоремы о единственности гладких решений краевой задачи для обратного уравнения теплопроводности имеем $g_0 = 0$. Следовательно,

$$\langle g, \psi \rangle = \langle g, \psi + \varphi \rangle \quad \forall \psi \in F, \varphi \in F_0. \tag{3.19}$$

Однако равенство (3.19) означает, что функционал g является обобщенной функцией, определенной на границе ∂Q цилиндра Q. Более точно,

$$\langle g, \psi \rangle = \langle g_1, \gamma_\Pi \psi \rangle_{(\Pi)} + \langle g_2, \gamma_0 \psi \rangle_{(\Omega)} \quad \forall \psi \in F, \tag{3.20}$$

где $\Pi = \Sigma \cup (\{T\} \times \Omega)$ — липшицево многообразие, g_1 — функционал на пространстве $\gamma_\Pi F$, γ_Π — оператор сужения на Π и g_2 — распределение на Ω. В силу (3.20) равенство (3.15) можно переписать в виде

$$\langle \gamma_\Pi(\dot{y} + \Delta y), g_1 \rangle_{(\Pi)} + \langle \gamma_0(\dot{y} + \Delta y), g_2 \rangle_{(\Omega)} = 0 \quad \forall y \in G. \tag{3.21}$$

Пусть $\psi(t) \in C^\infty(0,T)$, $\psi(t) \equiv 1$ при $t \in (0, T/2)$ и $\psi(t) \equiv 0$ при $t \in (3T/4, T)$. Очевидно, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ функция $y(t,x) = \varphi(x) t \psi(t)$ принадлежит G, равна нулю в окрестности Π и удовлетворяет равенству $\gamma_0(\dot{y} + \Delta y) = \varphi$. Подставляя y в (3.21), получим $\langle \varphi, g_2 \rangle_{(\Omega)} = 0$ для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно,

$$g_2 = 0. \tag{3.22}$$

В силу теоремы 1.1.14 для любой функции $f \in W_\mu^{l,2l}(Q)$ можно найти функцию $y \in W_\mu^{1+l,2(1+l)}(Q)$, удовлетворяющую соотношениям

$$y\big|_\Sigma = 0, \quad \dot{y} + \Delta y = f. \tag{3.23}$$

Пусть

$$\chi(t) \in C^\infty[0,T], \quad \chi(t) \equiv 1, \quad t \in [T/2, T], \qquad \chi(0) = 0. \tag{3.24}$$

Очевидно, что $z = \chi(t) y(t,x) \in G$. Подставляя эту функцию в (3.21) и учитывая (3.22), (3.23), получим

$$\langle \chi \gamma_\Pi(f), g_1 \rangle_{(\Pi)} = 0 \quad \forall f \in W_\mu^{l,2l}(Q). \tag{3.25}$$

В силу определения (3.13) пространства F справедливо равенство

$$\gamma_\Pi F = \{z \in \gamma_\Pi W_\mu^{l,2l}(Q) : \gamma_0 z = 0\}. \tag{3.26}$$

Из условий (3.6) следует, что множество функций вида $\chi(t)\gamma_\Pi f$, где $f \in W_\mu^{l,2l}(Q)$, а $\chi(t)$ — функция вида (3.24), всюду плотно в функциональном пространстве (3.26). Поэтому из (3.25) следует, что $g_1 = 0$. □

3.3. Доказательство основных результатов. Мы ограничимся доказательством теоремы 3.2, так как теорема 3.1 доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 3.2. Сведем сначала задачу к случаю $y_0 = 0$. Пусть $w(t,x) \in W_\mu^{l,2l}(Q)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию согласования

$$\gamma_{\partial\Omega}\Delta y_0(x) + \gamma_{\partial\Omega}(\gamma_0 w)(x) = 0. \tag{3.27}$$

В силу теоремы 1.1.14 при выполнении условий (3.7), (3.27) существует решение $\widetilde{y}(t,x) \in W_\mu^{1+l,2(1+l)}(Q)$ задачи

$$\dot{\widetilde{y}} - \Delta\widetilde{y} = w, \quad \gamma_\Sigma\widetilde{y} = 0, \quad \gamma_0\widetilde{y} = y_0.$$

Будем искать пару (y,u), удовлетворяющую условиям (3.1), (3.12), в виде $y = \widetilde{y} + z$, $u = \widetilde{u} + v$, где $\widetilde{u} = 2\dot{\widetilde{y}} - w$. Очевидно, что пара (y,u) удовлетворяет (3.1), (3.12) тогда и только тогда, когда для (z,v) выполнены соотношения

$$\dot{z} + \Delta z = v, \quad z\big|_\Sigma = 0, \quad \gamma_0 z = 0, \tag{3.28}$$

$$\alpha(t,x) - \widetilde{u}(t,x) < v(t,x) < \beta(t,x) - \widetilde{u}(t,x). \tag{3.29}$$

Из (3.8), (3.27) вытекает следующее условие согласования для задачи (3.28), (3.29):

$$\gamma_{\partial\Omega}\gamma_0 v = 0. \tag{3.30}$$

Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству разрешимости задачи (3.28), (3.29) при выполнении условия

$$\gamma_{\partial\Omega}\gamma_0(\alpha - \widetilde{u}) < 0 < \gamma_{\partial\Omega}\gamma_0(\beta - \widetilde{u}). \tag{3.31}$$

Условие (3.31) выполняется в силу (3.11), (3.27) и равенства $\gamma_{\partial\Omega}\gamma_0 w = -\gamma_{\partial\Omega}\gamma_0\widetilde{u}$.

Докажем разрешимость задачи (3.31). В силу (3.5) и (3.31) можно найти функцию $\psi \in F$, где F — пространство (3.13), такую, что $\alpha(t,x) - \widetilde{u}(t,x) < \psi(t,x) < \beta(t,x) = \widetilde{u}(t,x) \quad \forall (t,x) \in \overline{Q}$. Из последнего соотношения и вложения $W_\mu^{l,2l}(Q) \subset C(\overline{Q})$, справедливого в силу (3.6), следует $B_\varepsilon(\psi) \equiv \{v \in F : \|\psi - v\|_{W_\mu^{l,2l}} < \varepsilon\} \subset U_\partial - \widetilde{u}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. По лемме 3.1 при некотором $v \in B_\varepsilon(\psi)$ существует $z \in G$ такое, что пара (z,v) удовлетворяет (3.28), (3.29). □

§ 4. Система Навье — Стокса

В этом параграфе вводится краевая задача для системы Навье — Стокса с условиями прилипания на границе, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости. Эта краевая задача записывается в виде обыкновенного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами.

4.1. Краевая задача для системы Навье — Стокса. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, с границей $\partial\Omega \in C^\infty$ рассматривается система Навье — Стокса

$$\dot{y}(t,x) + (y,\nabla)y - \nu\Delta y + \nabla p(t,x) = f(t,x), \tag{4.1}$$

$$\operatorname{div} y(t,x) = 0, \tag{4.2}$$

где $(t,x) \in Q \equiv (0,T) \times \Omega$, $T > 0$, $y(t,x) = (y^1(t,x), \dots, y^d(t,x))$ — векторное поле скорости течения жидкости, $\nu > 0$ — коэффициент вязкости (заданное число), $\nabla p(t,x) = (\partial p/\partial x^1, \dots, \partial p/\partial x^d)$ — градиент давления, $f(t,x) = (f^1(t,x), \dots, f^d(t,x))$ — плотность внешних сил, Δ — оператор Лапласа, $\dot{y}(t,x) = \partial y/\partial t$,

$$(y,\nabla)y = \sum_{j=1}^{d} y^j \frac{\partial y}{\partial x^j}, \quad \operatorname{div} y = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial y^j}{\partial x^j}.$$

Система Навье — Стокса (4.1), (4.2) снабжается краевыми условиями прилипания

$$y\big|_{\Sigma} = 0, \tag{4.3}$$

где $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$ — боковая поверхность цилиндра Q. Предполагается, что в начальный момент времени

$$y(t,x)\big|_{t=0} = y_0(x), \tag{4.4}$$

где $y_0(x)$ — заданное векторное поле, удовлетворяющее условию бездивергентности $\operatorname{div} y_0(x) = 0$.

4.2. Пространства и операторы. Краевую задачу (4.1)–(4.4) для многих целей удобно свести к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами. Для этого введем функциональные пространства

$$V = \{v(x) = (v^1, \dots, v^d) \in (C_0^\infty(\Omega))^d \colon \operatorname{div} v = 0\}, \tag{4.5}$$

$$V^0 = \text{замыкание } V \text{ по } (L_2(\Omega))^d\text{-норме}, \tag{4.6}$$

$$V^1 = \text{замыкание } V \text{ по } (H^1(\Omega))^d\text{-норме}, \tag{4.7}$$

$$V^2 = V^1 \cap (H^2(\Omega))^d, \tag{4.8}$$

где $H^k(\Omega)$ — пространство Соболева (см. (1.1.1), (1.1.2)). Отметим, что пространство (4.6) можно определить следующим образом:

$$V^0 = \{v(x) \in (L_2(\Omega))^d \colon \operatorname{div} v = 0,\ (v,n)\big|_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{4.6$'$}$$

где $\operatorname{div} v$ понимается в смысле теории обобщенных функций, а корректность оператора сужения на $\partial\Omega$ нормальной компоненты v доказана, например, в Темам [1]. Это определение пространства V^0 эквивалентно определению (4.6). Мы будем использовать хорошо известное разложение Вейля векторных полей из $(L_2(\Omega))^d$ (см., например, Ладыженская [1]; Темам [1])

$$(L_2(\Omega))^d = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega), \tag{4.9}$$

где V^0 — пространство (4.6), $\nabla H^1(\Omega) = \{\nabla p : p \in H^1(\Omega)\}$, $\oplus$ — знак ортогональной суммы (пространства V^0 и $\nabla H^1(\Omega)$ ортогональны в $(L_2(\Omega))^d$).

Пусть $\pi : (L_2(\Omega))^d \to V^0$ — ортопроектор в $(L_2(\Omega))^d$ на подпространство V^0. В пространстве V рассмотрим оператор

$$A = -\nu\pi\Delta. \tag{4.10}$$

Известно (см. Солонников [2]; Ворович, Юдович [1]), что оператор A, продолженный до замкнутого оператора в пространстве V^0, является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным оператором. Область определения оператора A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов можно считать, что собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_k \leqslant \dots$ — собственные значения оператора A. Положим

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\},$$

где N зависит от v, и определим пространство V^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_\alpha = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \Big)^{1/2}. \tag{4.11}$$

Скалярное произведение в V^α будем обозначать $(\cdot,\cdot)_\alpha$. Можно показать (см. лемму 4.5 ниже), что при $\alpha = 0, 1, 2$ введенное пространство V^α совпадает с пространствами (4.6)–(4.8). Из определения V^α следует, что оператор

$$A : V^\alpha \to V^{\alpha-2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

непрерывен и осуществляет изоморфизм пространств V^α и $V^{\alpha-2}$.

Для норм (4.11) справедливо хорошо известное интерполяционное неравенство, указанное в следующей лемме.

Лемма 4.1. *Пусть $-\infty < k \leqslant l \leqslant m < \infty$, $k < m$. Тогда*

$$\|y\|_l \leqslant \|y\|_k^{\frac{m-l}{m-k}} \|y\|_m^{\frac{l-k}{m-k}}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Применив к сумме

$$\|y\|_l^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^l y_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j, \qquad a_j = \lambda_j^{\frac{k(m-l)}{m-k}} y_j^{\frac{2(m-l)}{m-k}}, \quad b_j = \lambda_j^{\frac{m(l-k)}{m-k}} y_j^{\frac{2(l-k)}{m-k}},$$

неравенство Гёльдера

$$\sum a_j b_j \leqslant \Big(\sum a_j^p \Big)^{1/p} \Big(\sum b_j^q \Big)^{1/q},$$

$p = (m-k)/(m-l)$, $q = (m-k)(l-k)$, получим (4.13). $\square$

Для $u, v \in V^2$ определим билинейный оператор

$$B(u,v) = \pi\left(\sum_{j=1}^{d} u^j \frac{\partial v}{\partial x^j}\right) \tag{4.14}$$

и соответствующую ему трилинейную форму

$$b(u,v,w) = (B(u,v),w)_0 = \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} w^i dx, \quad u,v,w \in V^2. \tag{4.15}$$

Лемма 4.2. *Трилинейная форма* (4.15) *непрерывна на пространстве* $V^{s_1} \times V^{s_2+1} \times V^{s_3}$, *если* $s_i \geqslant 0$, $i = 1,2,3$, *и выполнено одно из следующих условий*:

$$\sum_{j=1}^{3} s_j > d/2 \text{ или } \sum_{j=1}^{3} s_j \geqslant d/2, \text{ если } s_i + s_j > 0 \quad \forall i \neq j. \tag{4.16}$$

Доказательство. Используя методы из Вишик, Фурсиков [1] (см. также лемму 4.5 ниже), легко показать, что вложение $V^\alpha \subset H^\alpha(\Omega)$ непрерывно при любом $\alpha \geqslant 0$, где V^α — пространство с нормой (4.11), а $H^\alpha(\Omega)$ — пространство Соболева (см. (1.1.1), (1.1.2)). Поэтому в силу теоремы 1.1.1 непрерывны вложения

$$V^\alpha \subset L_q(\Omega), \quad d(1/2 - 1/q) \leqslant \alpha, \quad 2 \leqslant q < \infty, \tag{4.17}$$

$$V^\alpha \subset C(\overline{\Omega}), \quad \alpha > d/2. \tag{4.18}$$

Докажем сначала лемму в случае, когда $s_i + s_j > 0 \quad \forall i \neq j$, т. е. когда все s_j (кроме, возможно, одного) положительны. Пусть

$$p_i \geqslant 2, \quad d(1/2 - 1/p_i) \leqslant s_i, \quad i = 1,2,3, \ 1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 = 1. \tag{4.19}$$

Так как $\sum s_j \geqslant d/2$ и все s_j (кроме, возможно, одного) положительны, существуют конечные числа p_j, $j = 1,2,3$, удовлетворяющие (4.19). Применяя к правой части неравенства (4.15) неравенство Гёльдера при p_j из (4.19), а затем теорему вложения (4.17), получим неравенства

$$|b(u,v,w)| \leqslant \|u\|_{L_{p_1}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_{p_2}(\Omega)} \|w\|_{L_{p_3}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{s_1}\|v\|_{s_2+1}\|w\|_{s_3},$$

которые доказывают лемму в случае $s_i + s_j > 0$ при $i \neq j$.

Пусть теперь это условие не выполнено. Предположим, что два числа из s_j равны нулю и лишь одно из них положительно (так как $s_j \geqslant 0$, $\sum s_j > d/2$). Пусть для определенности $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 > d/2$. Используя теорему вложения (4.18), получим неравенства

$$|b(u,v,w)| \leqslant \|u\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \|w\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{s_1}\|v\|_{s_2+1}\|w\|_{s_3},$$

которые доказывают лемму. □

Интегрируя по частям правую часть (4.15), получим

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v). \tag{4.20}$$

Из леммы 4.2 и (4.20) следует непрерывность формы (4.15) на пространстве $V^{s_1} \times V^{s_3} \times V^{s_2+1}$, если s_j удовлетворяют условиям леммы 4.2.

Из леммы 4.2 и (4.20) вытекает непрерывность оператора (4.14) в пространствах

$$B : V^{s_1} \times V^{s_2+1} \to V^{-s_3}, \tag{4.21}$$

$$B : V^{s_1} \times V^{s_3} \to V^{-s_2-1}, \tag{4.22}$$

где s_1, s_2, s_3 удовлетворяют условиям леммы 4.2.

В дальнейшем используется обозначение

$$L_p^\alpha = L_p(0,T;V^\alpha), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.23}$$

4.3. Сведение к абстрактному уравнению. Покажем, что задача (4.1)–(4.4) для системы Навье — Стокса сводится к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с операторными коэффициентами

$$\dot{y}(t) + Ay + B(y) = f(t), \tag{4.24}$$

$$y(t)\big|_{t=0} = y_0, \tag{4.25}$$

где $y(t) = y(t,\cdot)$, $f(t) = f(t,\cdot)$, A — оператор (4.10), $B(y)$ — квадратичный оператор, соответствующий билинейному оператору (4.14):

$$B(y) = \pi\left(\sum_{j=1}^{d} y^j \frac{\partial y}{\partial x^j}\right). \tag{4.26}$$

При этом относительно исходных данных $f(t)$, y_0 будем предполагать, что

$$f(t) \in L_2^0, \quad y_0 \in V^1. \tag{4.27}$$

Решение $y(t)$ задачи (4.24), (4.25) будем искать в пространстве

$$V^{1,2}(Q) = \{y(t) \in L_2^2 : \dot{y}(t) \in L_2^0\}. \tag{4.28}$$

Теорема 4.1. *Пусть f, y_0 удовлетворяют условиям* (4.27). *Функция $y \in V^{1,2}(Q)$ является решением задачи* (4.24), (4.25) *тогда и только тогда, когда существует функция $p(t,x) \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$ такая, что пара $(y, \nabla p)$ удовлетворяет краевой задаче* (4.1)–(4.4).

Доказательство. Известно (см., например, Вишик, Фурсиков [1]), что вложение

$$V^{1,2}(Q) \subset C([0,T];V^1) \tag{4.29}$$

непрерывно. Поэтому в силу непрерывности оператора (4.21) при $s_1 = s_2 = 1$, $s_3 = 0$ справедлива оценка

$$\|B(y)\|_{L_2^0}^2 \leqslant C \int_0^T \|y(t)\|_1^2 \|y(t)\|_2^2\, dt \leqslant \|y\|_{C([0,T];V^1)}^2 \|y\|_{L_2^2}^2 \leqslant C_1 \|y\|_{V^{1,2}(Q)}^2. \tag{4.30}$$

Пусть $y \in V^{1,2}(Q)$ — решение задачи (4.24), (4.25). Решение y удовлетворяет (4.4) в силу (4.25) и удовлетворяет (4.2), (4.3) в силу (4.29) и определения (4.7) пространства V^1.

Учитывая (4.24), (4.27) и определения (4.10), (4.26) операторов A, B, получим

$$\begin{aligned} &\dot y + (y,\nabla)y - \nu\Delta y = \dot y + B(y) + Ay + (I-\pi)((y,\nabla)y) - \nu(I-\pi)\Delta y \\ &= f + (I-\pi)((y,\nabla)y - \nu\Delta y), \end{aligned} \tag{4.31}$$

где I — единичный оператор. Так как $y \in V^{1,2}(Q) \subset L_2(0,T;H^2(\Omega))$, имеем $-\nu\Delta y \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Поскольку $y \in V^{1,2}(Q) \subset \{z \in L_2(0,T;H^2(\Omega)) \colon \dot z \in L_2(0,T;L_2(\Omega))\}$, аналогично лемме 4.2 и (4.30) устанавливаем, что $(y,\nabla)y \in L_2(Q)$. В силу разложения Вейля (4.9) существует $p \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$ такой, что

$$(I-\pi)[(y,\nabla)y - \nu\Delta y] = \nabla p(t,x). \tag{4.32}$$

Из (4.31), (4.32) следует, что пара $(y,\nabla p)$ удовлетворяет (4.1).

Пусть $(y,p) \in V^{1,2} \times L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ — решение задачи (4.1)–(4.4). Выше установлено, что $-\nu\Delta y \in L_2(Q)$, $(y,\nabla)y \in L_2(Q)$. Применяя к обеим частям (4.1) оператор π и учитывая, что $\pi\dot y = \dot y$, $\pi f = f$, $\pi(\nabla p) = 0$, заключаем, что y удовлетворяет уравнению (4.24). □

Лемма 4.3. *Решение y задачи* (4.24), (4.25) *удовлетворяет энергетическому неравенству*

$$\|y(t)\|_0^2 + \int_0^t \|y(\tau)\|_1^2\,d\tau \leqslant \|y_0\|_0^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_{-1}^2\,d\tau. \tag{4.33}$$

Доказательство. Умножая обе части равенства (4.24) скалярно в V^0 на $y(t)$ и учитывая, что в силу определения (4.11) нормы в пространстве V^α $(Ay,y)_0 = \|y\|_1^2$, а вследствие (4.15), (4.20) имеем $(B(y),y)_0 = (B(y,y),y)_0 = 0$, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|_0^2 + \|y(t)\|_1^2 = (f(t),y(t)) \leqslant \frac{1}{2}\|f(t)\|_{-1}^2 + \frac{1}{2}\|y(t)\|_1^2.$$

Интегрируя левую и правую части последнего соотношения по t и учитывая (4.25), получим неравенство (4.33). □

Замечание 4.1. Хорошо известно (см., например, Фойаш [1], Темам [1]), что краевая задача (4.1)–(4.4) может быть сведена также к задаче Коши (4.24), (4.25), которая рассматривается в пространствах функций меньшей гладкости, чем в теореме 4.1. Мы не приводим здесь этих результатов, так как в дальнейшем они нам не понадобятся.

4.4. Оценка трилинейной формы. Ниже мы докажем некоторую оценку трилинейной формы $b(u,v,w)$, усиливающую результат леммы 4.2. Эта оценка нам будет необходима в гл. 4. Сначала мы оценим произведение двух периодических функций.

Рассмотрим тор $T_a^d \equiv \{x = (x_1, \ldots, x_d)\,; -a/2 \leqslant x_j \leqslant a/2,\, x_j = -a/2$ отождествляется с $x_j = a/2,\ j = 1, \ldots, d\}$. Функция $\psi(x)$, заданная на торе T^d, естественным образом отождествляется с периодической функцией $\psi(x_1, \ldots, x_d)$, имеющей период a по каждой из переменных x_j, $j = 1, \ldots, d$. Функция ψ разлагается в ряд Фурье

$$\psi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_a^d} e^{i(x,\xi)} \widehat{\psi}(\xi),$$

где $\mathbb{Z}_a^d = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) : \xi_j = \dfrac{2\pi}{a} k_j,\ k_j$ — целое число $, j = 1, \ldots, d\}$, $\widehat{\psi}(\xi) = a^{-d} \int\limits_{T_a^d} e^{-(y,\xi)} \psi(y)\, dy$ — коэффициенты Фурье функции ψ. Пространство Соболева $H^s(T^d)$, $s \in \mathbb{R}$, функций, заданных на торе, снабжается нормой

$$\|\psi\|_s^2 = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_a^d} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{\psi}(\xi)|^2. \tag{4.34}$$

Легко показать, что норма (4.34) эквивалентна норме (1.1.3) пространства Соболева $W_2^s(T_a^d)$, введенной в гл. 1, § 1.

Лемма 4.4. *Пусть $\alpha \geqslant 0$. Существует константа $c > 0$, не зависящая от $\varphi \in H^\beta(T^d)$ и $\psi \in H^\gamma(T^d)$, такая, что*

$$\|\varphi\psi\|_\alpha \leqslant c\, \|\varphi\|_\beta \|\psi\|_\gamma, \tag{4.35}$$

если либо $\beta > \alpha$, $\gamma > \alpha$, $\beta + \gamma \geqslant \alpha + d/2$, либо $\beta \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \alpha$, $\beta + \gamma > \alpha + d/2$.

Доказательство. Пусть $\beta > \alpha \geqslant 0$, $\gamma > \alpha$, $\beta + \gamma = \alpha + d/2$. Из (4.34) и неравенства $(1 + |\xi|^2)^s \leqslant c\,[(1 + |\xi - \eta|^2)^s + (1 + |\eta|^2)^s]$, где $s \geqslant 0$ и c не зависит от ξ, $\eta \in \mathbb{Z}_a^d$, получаем

$$\|\varphi\psi\|_\alpha \leqslant c\,(J_1 + J_2), \tag{4.36}$$

где

$$J_1 = \left(\sum_\xi \left| \sum_\eta (1 + |\xi - \eta|^2)^{\alpha/2} \widehat{\varphi}(\xi - \eta) \widehat{\psi}(\eta) \right|^2 \right)^{1/2},$$

$$J_2 = \left(\sum_\xi \left| \sum_\eta (1 + |\eta|^2)^{\alpha/2} \widehat{\varphi}(\xi - \eta) \widehat{\psi}(\eta) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим оператор

$$\Lambda w(x) = \sum_\xi e^{i(x,\xi)} \widehat{w}(\xi) (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2}$$

и зададим числа $2 < p, q < \infty$, удовлетворяющие условиям

$$1/p + 1/q = 1/2, \quad \beta - \alpha = d(1/2 - 1/p), \quad \gamma = d(1/2 - 1/q) \tag{4.37}$$

(числа p, q удовлетворяющие (4.37), существуют, так как $\beta > \alpha$ и $\beta - \alpha + \gamma = d/2$). Тогда в силу равенства Парсеваля, (4.37) и теоремы вложения

Соболева имеем

$$J_1 \leqslant c\,\|\psi\Lambda\varphi\|_{L_2} \leqslant c\,\|\psi\|_{L_q}\|\Lambda\varphi\|_{L_p} \leqslant c_1\,\|\psi\|_\gamma\|\Lambda\varphi\|_{\beta-\alpha} \leqslant c_1\,\|\psi\|_\gamma\|\varphi\|_\beta. \tag{4.38}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$J_2 \leqslant c\,\|\psi\|_\gamma\|\varphi\|_\beta. \tag{4.39}$$

Из (4.36), (4.38), (4.39) следует (4.35).

Пусть теперь $\beta \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \alpha$, $\beta+\gamma > \alpha + d/2$. Достаточно рассмотреть случай, когда либо $\beta = \alpha$, либо $\gamma = \alpha$. Пусть, например, $\gamma = \alpha$. Тогда $\beta > d/2$. В силу неравенства Юнга

$$J_2 \leqslant \|\psi\|_\alpha \sum_\eta |\widehat{\varphi}(\eta)| \leqslant \|\psi\|_\gamma\|\varphi\|_\beta \sum_\eta (1+|\eta|^2)^{-\beta} \leqslant c\,\|\psi\|_\gamma\|\varphi\|_\beta. \tag{4.40}$$

Пусть $\alpha = \gamma < d/2$. Тогда аналогично (4.38)

$$J_1 \leqslant c\,\|\psi\Lambda\varphi\|_{L_2} \leqslant c_1\,\|\Lambda\varphi\|_{d/2-\gamma}\|\psi\|_\gamma \leqslant c_2\,\|\varphi\|_\beta\|\psi\|_\gamma. \tag{4.41}$$

При $\alpha = \gamma = d/2$ положим $0 < \varepsilon < \min\{d/2, \beta-\alpha\}$. Аналогично (4.41) имеем

$$J_1 \leqslant c_1\,\|\psi\|_{d/2-\varepsilon}\|\Lambda\varphi\|_\varepsilon \leqslant c_1\,\|\psi\|_\gamma\|\varphi\|_\beta. \tag{4.42}$$

В случае $\alpha = \gamma > d/2$, используя неравенство Соболева, получим

$$J_1 \leqslant c\,\|\psi\Lambda\varphi\|_{L_2} \leqslant c_1 \sup_x |\psi(x)|\,\|\Lambda\varphi\|_0 \leqslant \|\psi\|_\gamma\|\varphi\|_\beta.$$

Из (4.36), (4.40)–(4.42) следует (4.35). □

Вернемся к пространствам функций, заданных в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Ниже нам понадобится следующее утверждение о свойствах пространств V^α.

Лемма 4.5. *Пусть $\alpha > -1/2$. На пространстве V^α норма* (4.11) *эквивалентна норме $\|\cdot\|_{H^\alpha(\Omega)}$ пространства $(H^\alpha(\Omega))^d$.*

Доказательство. 1. Докажем сначала утверждение леммы в случае целого неотрицательного α с помощью метода математической индукции. При $\alpha = 0$ утверждение следует непосредственно из определений (4.6), (4.6′). Собственные функции e_j и собственные значения λ_j являются спектральными параметрами оператора (4.10), действующего в V^0 с областью определения, совпадающей с V^2 (см. (4.8)). Поэтому e_j и λ_j определяются из равенств

$$Ae_j(x) \equiv -\nu\pi\Delta e_j(x) = \lambda_j e_j(x), \quad x \in \Omega, \quad e_j\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad e_j \in V^0. \tag{4.43}$$

Так как пространство E_∞ конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, по определению плотно в V^α, эквивалентность норм достаточно доказать для $v \in E_\infty$. Очевидно, что $E_\infty \subset (C^\infty(\Omega))^d$. Поэтому из (4.43) следует, что для всех $v \in E_\infty$ и неотрицательных целых k

$$A^k v(x)\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.44}$$

Из определения (4.11) нормы $\|\cdot\|_\alpha$, (4.43), (4.44) и формулы Грина (1.1.24) для оператора Лапласа находим

$$\|v\|_1^2 = -\int\limits_\Omega \nu(\pi\Delta v, v)\,dx = -\nu\int\limits_\Omega (\Delta v, v)\,dx = \nu\int\limits_\Omega |\nabla v|^2 d\,x \leqslant \nu\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{4.45}$$

С другой стороны, в силу этих соотношений, равенства (4.44) при $k=0$ и неравенства Пуанкаре — Стеклова (см. (1.1.6)) имеем

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant c\int\limits_\Omega |\nabla v|^2 dx = c_1\|v\|_1^2.$$

Итак, лемма 4.5 доказана для $k=1$.

Нам понадобится оценка оператора $\pi\colon (L_2(\Omega))^d \to V^0$ в пространствах H^s. Запишем разложение Вейля (4.9) для $v \in (L_2(\Omega))^d$:

$$v = \pi v + \nabla p, \tag{4.45}$$

где $\pi v \in V^0$, $p \in H^1(\Omega)$. Применяя к этому разложению оператор div и учитывая (4.6′), получим,

$$\Delta p = \operatorname{div} v, \quad \partial_n p\big|_{\partial\Omega} = (v,n)\big|_{\partial\Omega} \tag{4.46}$$

для достаточно гладких v. Поэтому для оператора π справедливо следующее представление:

$$\pi v = v - \nabla R(\operatorname{div} v, (v,n)\big|_{\partial\Omega}), \tag{4.47}$$

где R — разрешающий оператор задачи Неймана (4.46). В силу теорем 1.1.6 и 1.1.4 при $s \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|\pi v\|_{H^s(\Omega)} &\leqslant c(\|v\|_s + \|R(\operatorname{div} v, (v,n)\big|_{\partial\Omega}\|_{H^{s+1}})\\ &\leqslant c_1(\|v\|_{H^s(\Omega)} + \|\operatorname{div} v\|_{H^{s-1}(\Omega)} + \|(v,n)\big|_{\partial\Omega}\|_{H^{s-1/2}(\partial\Omega)}) \leqslant c_2\,\|v\|_{H^s(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.48}$$

Пусть утверждение леммы доказано для $\alpha = 0,1,\ldots,2m-2$. Тогда в силу (4.11), (4.48) и предположения индукции $\|v\|_{2m} = \|A^{m-1}\nu\pi\Delta v\|_0 \leqslant c\,\|\pi\Delta v\|_{H^{2m-2}(\Omega)} \leqslant c\,\|v\|_{H^{2m}(\Omega)}$. Учитывая (4.44) при $k=0$ и используя оценку решения задачи Дирихле для стационарного уравнения Стокса (см. Ладыженская [1]; Темам [1]), а затем используя предположение индукции, получим

$$\|v\|_{H^{2m}(\Omega)} \leqslant c\,\|\pi\Delta v\|_{H^{2m-2}(\Omega)} \leqslant c_1\,\|\pi\Delta v\|_{2m-2} = c_1\,\|v\|_{2m}. \tag{4.49}$$

Утверждение леммы доказано для четных k.

Пусть утверждение доказано для $\alpha = 0,1,\ldots,2m-1$. Аналогично (4.45), используя (4.48), получим

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{2m+1} &= \nu\,\|\nabla A^m v\|_0 \leqslant c\,\|\pi\Delta A^{m-1}v\|_{H^1(\Omega)}\\ &\leqslant c_1\,\|\pi\Delta A^{m-2}v\|_{H^3(\Omega)} \leqslant \cdots \leqslant c\,\|v\|_{H^{2m+1}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Аналогично (4.49) с помощью оценки для задачи Стокса и предположения индукции выводится оценка $\|v\|_{H^{2m+1}(\Omega)} \leqslant c\,\|v\|_{2m+1}$.

2. Для доказательства леммы в случае дробных неотрицательных α воспользуемся теоремой о следах (Лионс, Мадженес [2, гл. 1, теорема 4.2]). Пусть k — натуральное число, $s > 1/2$, X, Y — сепарабельные гильбертовы пространства такие, что

$$X \subset Y, \quad X \text{ плотно в } Y \text{ и непрерывно вложено в } Y. \tag{4.50}$$

Определим пространство

$$W(s, X, Y) = \{u(t) \in L_2(R_t, X) \colon \widehat{u}(\tau)|\tau|^s \in L_2(R_\tau; Y)\},$$

где

$$\widehat{u}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau t} u(t)\, dt$$

обозначает преобразование Фурье функции $u(t)$. Положим $\gamma u = u(0)$. Тогда согласно теореме о следах отображение

$$\gamma : W(s, X, Y) \to [X, Y]_{1/(2s)} \tag{4.51}$$

непрерывно и сюръективно. Здесь $[X, Y]_\Theta$, $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$, — интерполяционное пространство, связанное с областью определения оператора $D(\Lambda^{1-\Theta})$. При этом Λ — неограниченный самосопряженный положительный оператор, действующий в Y, такой, что норма $\|\cdot\|_X$ пространства X эквивалентна норме графика $(\|u\|_Y^2 + \|\Lambda u\|_Y^2)^{1/2}$, $u \in D(\Lambda) = X$. Норма пространства $[X, Y]_\Theta$ определяется формулой

$$\|u\|^2_{[X,Y]_\Theta} = \|u\|_Y^2 + \|\Lambda^{1-\Theta} u\|_Y^2 \tag{4.52}$$

(подробности см. Лионс, Мадженес [2]). В пространстве $W(s, X, Y)$ рассмотрим подпространство

$$W_0(s, X, Y) = \{u(t) \in W(s, X, Y) \colon u(0) = 0\}. \tag{4.53}$$

Докажем его замкнутость. В силу равенства Парсеваля норму пространства $W(s, X, Y)$ можно определить соотношением

$$\|u\|^2_{W(s,X,Y)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\|\widehat{u}(\tau)\|_X^2 + |\tau|^{2s} \|\widehat{u}(\tau)\|_Y^2)\, d\tau.$$

Очевидно, что $u \in W_0(s, X, Y)$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\tau)\, d\tau = 0. \tag{4.54}$$

Пусть $u_n \in W_0(s,X,Y)$ и $u_n \to u$ в $W(s,X,Y)$. Поскольку $s > 1/2$, в силу неравенства Коши — Буняковского получим

$$\left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\widehat{u}(\tau) - u_n(\tau))\, d\tau \right\|_Y \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \|u(\tau) - u_n(\tau)\|_Y (1+|\tau|^2)^{s/2} (1+|\tau|^2)^{-s/2}\, d\tau$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|\tau|^2)^{-s}\, d\tau \int (1+|\tau|^2)^s \, \|\widehat{u}(\tau) - \widehat{u}_n(\tau)\|_Y^2\, d\tau) \right)^{1/2}$$
$$\leqslant c\, \|u - u_n\|_{W(s,X,Y)} \to 0.$$

Из этого соотношения и (4.54) для u_n следует, что u удовлетворяет (4.54) и, следовательно, принадлежит $W_0(s,X,Y)$. Так как $W_0(s,X,Y)$ — замкнутое подпространство, фактор-пространство $W(s,X,Y)/W_0(s,X,Y)$ является банаховым (см., например, Алексеев, Тихомиров, Фомин [1]). Отображение (4.51) естественным образом порождает отображение

$$\widetilde{\gamma} : W(s,X,Y)/W_0(s,X,Y) \to [X,Y]_{1/(2s)}. \tag{4.55}$$

Отображение (4.55) имеет нулевое ядро и сюръективно ввиду сюръективности отображения (4.51). В силу теоремы Банаха об обратном операторе оператор $\widetilde{\gamma}$ является изоморфизмом.

Пусть, как и в п. 4.2, V^k — пополнение E_∞ по норме (4.11) при $\alpha = k$, где k — натуральное число, и V^k снабжено нормой $\|\cdot\|_k$, определенной в (4.11), а $\widetilde{V}^k$ — множество V^k, снабженное нормой $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$. В силу (а) доказательства леммы пространства V^k и $\widetilde{V}^k$ — это одно и то же пространство, снабженное эквивалентными нормами. Следовательно,

$$W(s,V^k,V^0) = W(s,\widetilde{V}^k,V^0),$$
$$W(s,V^k,V^0)/W_0(s,V^k,V^0) = W(s,\widetilde{V}^k,V^0)/W_0(s,\widetilde{V}^k,V^0),$$

и нормы этих пространств эквивалентны. Поскольку оператор (4.55) осуществляет изоморфизм, пространства $[V^k,V^0]_{1/(2s)}$ и $[\widetilde{V}^k,V^0]_{1/(2s)}$ совпадают и их нормы эквивалентны. Согласно определениям

$$[V^k,V^0]_{1/(2s)} = V^{k(1-1/(2s))}, \tag{4.56}$$

причем пространство в правой части снабжено нормой (4.11) при $\alpha = k(1-1/(2s))$. Как показано в Лионс, Мадженес [2], норма пространства $[\widetilde{V}^k,V^0]_{1/(2s)}$ эквивалентна норме пространства Соболева $H^{k(1-1/(2s))}(\Omega)$.

Для доказательства утверждения леммы для любого нецелого положительного α возьмем любое натуральное $k > \alpha$, а число s получим из уравнения $\alpha = k(1-1/(2s))$. В силу этого уравнения $s = [2(1-\alpha/k)]^{-1} > 1/2$, поэтому приведенные выше рассуждения доказывают требуемое утверждение.

3. Рассмотрим случай $\alpha \in (-1/2, 0)$. Так как $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $H^s(\Omega)$ при $s \in (0, 1/2)$, имеем $H^s(\Omega) = H_0^s(\Omega)$ при таких s. Поэтому

$$\|v\|_{H^{-s}(\Omega)} = \sup_{\substack{\varphi \in H^s(\Omega) \\ \|\varphi\|_{H^s} \leqslant 1}} (v, \varphi)_{(\Omega)}, \tag{4.57}$$

где $(v, \varphi)_{(\Omega)} = \int\limits_\Omega v\varphi dx$. Справедлива цепочка соотношений ($s \in (0, 1/2)$)

$$\|v\|_{-s} = \sup_{\substack{\varphi \in V^s \\ \|\varphi\|_s \leqslant 1}} (v, \varphi)_{(\Omega)} \leqslant c \sup_{\substack{\varphi \in V^s \\ \|\varphi\|_{H^s} \leqslant 1}} (v, \varphi)_{(\Omega)} \leqslant c \sup_{\substack{\varphi \in (H^s)^d \\ \|\varphi\|_{H^s} \leqslant 1}} (v, \varphi)_{(\Omega)} = \|v\|_{H^{-s}}. \tag{4.58}$$

Действительно, первое соотношение в (4.58) является определением нормы $\|v\|_{-s}$, эквивалентным (4.11), второе справедливо в силу эквивалентности на V^s норм $\|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|_{H^s}$, третье вытекает из очевидного включения $V^s \subset (H^s(\Omega))^d$, а четвертое совпадает с (4.57). Справедливо равенство

$$V^s = \{\varphi \in V^0 \colon \|\varphi\|_{H^s(\Omega)} < \infty\}, \quad 0 \leqslant s < 1/2. \tag{4.59}$$

Докажем соотношения, обратные (4.58):

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^{-s}} &= \sup_{\substack{\varphi \in (H^s)^d \\ \|\varphi\|_{H^s} \leqslant 1}} (v, \varphi)_{(\Omega)} = \sup_{\substack{\varphi \in (H^s)^d \\ \|\varphi\|_{H^s} \leqslant 1}} (v, \pi\varphi)_{(\Omega)} \leqslant \sup_{\substack{\psi \in V^s \\ \|\psi\|_{H^s} \leqslant 1}} (v, \psi)_{(\Omega)} \\ &\leqslant c \sup_{\substack{\psi \in V^s \\ \|\psi\|_s \leqslant 1}} (v, \psi)_{(\Omega)} = c\,\|v\|_{-s}. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Первое соотношение совпадает с (4.57), а второе верно, так как для $v \in E_\infty \subset V^0$ имеем $\pi v = v$ и π — ортопроектор в $(L_2(\Omega))^d$. В силу (4.48) при $s = 1$, непрерывности ортопроектора $\pi \colon (L_2(\Omega))^d \to V^0$ и теоремы об интерполяции (Лионс, Мадженес [2]) справедливо неравенство

$$\|\pi\varphi\|_{H^\gamma(\Omega)} \leqslant c\,\|\varphi\|_{H^\gamma(\Omega)}, \quad \gamma \in [0, 1]. \tag{4.61}$$

Поэтому $\pi\varphi \in H^s(\Omega)$, если $\varphi \in H^s(\Omega)$. Так как $\pi\varphi \in V^0$, из (4.59) следует $\pi\varphi \in V^s$. Это доказывает третье соотношение в (4.60). Четвертое соотношение справедливо ввиду эквивалентности норм $\|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|_{H^s}$ на V^s, а пятое есть определение $\|\cdot\|_{-s}$. □

Лемма 4.6. *Пусть $d \geqslant 2$. Трилинейная форма $b(u, v, w)$, определенная равенством* (4.15) *непрерывна на пространстве $V^{s_1} \times V^{s_2+1} \times V^{s_3}$, если $s_i > -1/2$, $i = 1, 2, 3$, и, кроме того, либо $s_i + s_j \geqslant 0$ при всех $i \neq j$ и $\sum\limits_{j=1}^3 s_j > d/2$, либо $s_i + s_j > 0$ при всех $i \neq j$ и $\sum\limits_{j=1}^3 s_j \geqslant d/2$.*

Доказательство. Случай $s_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, 3$, рассмотрен в лемме 4.2. Предположим, что $s_j < 0$ при некотором j, например, $s_1 < 0$. Так как $0 < -s_1 < 1/2$, пространство $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $H^{-s_1(\Omega)}$ (см. Лионс, Мадженес

[2]). Поэтому

$$|b(u,v,w)| \leqslant c\,\|u\|_{H^{s_1}(\Omega)} \sum_{i,j=1}^{d} \Big\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \Big\|_{H^{-s_1}(\Omega)}. \tag{4.62}$$

Пусть число a столь велико, что область Ω содержится в кубе $Q_a^d = \{x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d : |x_j| < a/2,\ j = 1,\dots,d\}$. Пусть $\widehat{R}: H^s(\Omega) \to H^s(Q_a^d)$, $s > 0$, — оператор продолжения по Уитни (относительно определения см., например, Лионс, Мадженес [2]). Этот оператор непрерывен и $(\widehat{R}_j v)(x) \equiv v(x)$, $x \in \Omega$. Положив $Rv(x) = \varphi(x)(\widehat{R}v)(x)$, где $\varphi(x) \in C_0^\infty(Q_a^d)$, $\varphi(x) \equiv 1$, $x \in \Omega$, получим непрерывный оператор продолжения $R: H^s(\Omega) \to H^s(T_a^d)$. Используя лемму 4.4 при $\alpha = -s_1$, $\beta = s_2$, $\gamma = s_3$ и непрерывность оператора R, находим

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{d} \Big\| \frac{\partial v_i}{\partial x_i} w_j \Big\|_{H^{-s_1}(\Omega)} \leqslant c \sum_{i,j=1}^{d} \Big\| \frac{\partial R v_i}{\partial x_i} R w_j \Big\|_{H^{-s_1}(T_a^d)} \\
&\leqslant c_1 \sum_{i,j=1}^{d} \|Rv_i\|_{H^{s_2+1}(T_a^d)} \|Rw_j\|_{H^{s_3}(T_a^d)} \leqslant c_2 \sum_{i,j=1}^{d} \|Rv_i\|_{H^{s_2+1}(\Omega)} \|w_j\|_{H^{s_3}(\Omega)} \\
&\leqslant c_4\, \|v\|_{s_2+1} \|w\|_{s_3},
\end{aligned} \tag{4.63}$$

где последнее неравенство справедливо в силу леммы 4.5. Из соотношений (4.62), (4.63) и леммы 4.5 следует утверждение леммы в случае $-1/2 < s_1 < 0$. Случаи $-1/2 < s_j < 0$, $j = 2,3$, рассматриваются аналогично. □

Из леммы 4.6 вытекает

Следствие 4.1. *Оператор* (4.14) *непрерывен в пространствах* (4.21), (4.22), *где* s_1, s_2, s_3, *удовлетворяют условиям леммы* 4.6.

Нам потребуется следующее утверждение о непрерывности оператора (4.14).

Лемма 4.7. *Для оператора* (4.14) *справедлива оценка*

$$\|B(u,v)\|_{H^{s_3}(\Omega)\cap V^0} \leqslant c\,\|u\|_{s_1}\,\|v\|_{s_2+1}, \tag{4.64}$$

где c *не зависит от* $u \in V^{s_1}$, $v \in V^{s_2+1}$, *а* s_j, $j = 1,2,3$, *удовлетворяют неравенствам* $-1/2 < s_3 \leqslant s_j$ *при* $j = 1,2$, $s_1 + s_2 - s_3 > d/2$ *либо* $-1/2 < s_3 < s_j$ *при* $j = 1,2$, $s_1 + s_2 - s_3 \geqslant d/2$.

Доказательство. Из (4.48), (4.61) и определения (4.14) оператора B следует оценка

$$\|B(u,v)\|_{H^{s_3}(\Omega)\cap V^0} \leqslant c \sum_{i,j=1}^{d} \Big\| u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \Big\|_{H^{s_3}(\Omega)}.$$

Применяя к правой части этого неравенства лемму 4.4, а затем лемму 4.5 получим неравенство (4.64). □

§ 5. Однозначная разрешимость “в целом” трехмерной системы Навье — Стокса для плотного множества правых частей

В математической теории вязкой несжимаемой жидкости хорошо известен результат о существовании обобщенного решения краевой задачи (4.1)–(4.4) для системы Навье — Стокса при любых исходных данных f, y_0 из соответствующих функциональных пространств. Однако в трехмерном случае ($d = 3$) не удается доказать гладкость обобщенного решения даже для бесконечно дифференцируемых функций f и y_0. Следует отметить, что иметь теорему о разрешимости в классе гладких решений чрезвычайно важно, так как единственность решений[5] задачи (4.1)–(4.4) пока доказана лишь в классе достаточно гладких функций. Кроме того, исследование многих задач (в частности, задач оптимального управления) удается продвинуть гораздо дальше, если пространство состояний содержит только достаточно гладкие функции.

Этот параграф посвящен доказательству разрешимости системы Навье — Стокса в пространстве достаточно гладких векторных полей в случае, когда правая часть f задачи (4.1)–(4.4) принадлежит некоторому всюду плотному (в соответствующей топологии) множеству.

5.1. Постановка задачи и формулировка результата. Рассмотрим краевую задачу (4.1)–(4.4) для системы Навье — Стокса, записанную в форме задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (4.24), (4.25):

$$\Theta(y) \equiv \dot{y} + Ay + B(y) = f(t), \tag{5.1}$$

$$y\big|_{t=0} = y_0. \tag{5.2}$$

Будем предполагать, что f, y_0 удовлетворяют условиям (4.27). Решение y задачи (5.1), (5.2) будем искать в пространстве $V^{1,2}(Q)$, определенном формулой (4.28). В случае двумерной ($d = 2$) системы Навье — Стокса известно, что для любых f, y_0, удовлетворяющих (4.27), существует решение $y \in V^{1,2}(Q)$ задачи (5.1), (5.2). Поэтому мы рассмотрим систему Навье — Стокса лишь в трехмерном случае.

Прежде всего покажем, что решение y задачи (5.1), (5.2) единственно в пространстве $V^{1,2}(Q)$, и в этом смысле $V^{1,2}(Q)$ состоит из достаточно гладких функций.

Лемма 5.1. *Решение y задачи* (5.1), (5.2) *единственно в* $V^{1,2}(Q)$.

Доказательство. Пусть y_1, y_2 — два решения задачи (5.1), (5.2) класса $V^{1,2}(Q)$. Положим $z(t) = y_1(t) - y_2(t)$. Вычитая уравнение (5.1) для y_2 из уравнения (5.1) для y_1 и используя квадратичность оператора B, получим

$$\dot{z}(t) + Az + B(z, y_1) + B(y_2, z) = 0, \quad z\big|_{t=0} = 0. \tag{5.3}$$

Умножая обе части первого уравнения в (5.3) скалярно в V^0 на $z(t)$ и учитывая, что $(Az, z)_0 = \|z\|_1^2$ в силу определения (4.11) нормы пространства

[5] Теорема о единственности решения, в частности, подтверждает, что система Навье — Стокса адекватно описывает течение вязкой несжимаемой жидкости.

V^1 и $(B(y_2, z), z) = 0$ в силу (4.15), (4.20), получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|_0^2 + \|z(t)\|_1^2 = -b(z, y_1, z).$$

Интегрируя это равенство по t, используя (5.3_2), лемму 4.2 при $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 1$, неравенство Коши — Буняковского и оценку $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$, находим

$$\|z(t)\|_0^2 + 2\int\limits_0^t \|z(\tau)\|_1^2\,d\tau \leqslant C\int\limits_0^t \|z(\tau)\|_0\|y_1(\tau)\|_2\|z(\tau)\|_1\,d\tau$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^t \|z(t)\|_1^2\,d\tau + C_1\int\limits_0^t \|y_1(\tau)\|_2^2\|z(t)\|_0^2\,d\tau.$$

Следовательно,

$$\|z(t)\|_0^2 \leqslant C_1\int\limits_0^t \|y_1(\tau)\|_2^2\|z(\tau)\|_0^2\,d\tau.$$

В силу леммы Гронуолла (см. Хартман [1]) имеем $z(t) \equiv 0$. □

Лемма 5.2. *Оператор*

$$(\Theta, \gamma_0) : V^{1,2}(Q) \to L_2^0 \times V^1, \tag{5.4}$$

соответствующий задаче (5.1), (5.2), *непрерывен.*

Доказательство. Непрерывность отображения $\partial_t + A : V^{1,2}(Q) \to L_2^0$ следует из определения пространств $V^{1,2}(Q)$ и L_2^0. Непрерывность оператора $B : V^{1,2}(Q) \to L_2^0$ вытекает из непрерывности оператора (4.21) при $s_1 = 1$, $s_2 = 1$, $s_3 = 0$ и оценки (4.30). Непрерывность отображения $\gamma_0 : V^{1,2}(Q) \to V^1$ следует из непрерывности вложения (4.29). □

Определим множество F_{y_0} правых частей f, для которых задача (5.1), (5.2) имеет решение y в пространстве $V^{1,2}(Q)$. Для произвольно заданного начального условия $y_0 \in V^1$ определим аффинное многообразие $U_{y_0} = \{y \in V^{1,2}(Q) : \gamma_0 y = y_0\}$. Обозначим через F_{y_0} образ множества U_{y_0} при отображении Θ, определенном в (5.1):

$$F_{y_0} = \Theta U_{y_0}. \tag{5.5}$$

В силу леммы 5.2

$$F_{y_0} \subset L_2^0. \tag{5.6}$$

Непосредственно из определения F_{y_0} следует, что множество F_{y_0} состоит из тех и только тех правых частей $f \in L_2^0$, для которых существует решение y задачи (5.1), (5.2), принадлежащее пространству $V^{1,2}(Q)$. Мы хотим выяснить, насколько велико множество F_{y_0}. Этой цели посвящена основная теорема настоящего параграфа.

Теорема 5.1. *Множество F_{y_0}, будучи подмножеством пространства L_2^0, всюду плотно относительно топологии пространства L_p^{-l}, где l и p удовлетворяют следующим условиям*:

$$\begin{aligned} &\text{если } 1/2 < l < 3/2, \ \text{то } 1 \leqslant p < 4/(5-2l), \\ &\text{если } l \geqslant 3/2, \ \text{то } p = 2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

5.2. Доказательство теоремы 5.1. Пусть правая часть f в (5.1) — произвольная функция из L_2^0. Покажем, что ее можно аппроксимировать в L_p^{-l}-норме правыми частями из F_{y_0}.

Пусть E_k — подпространство в V^0, натянутое на собственные векторы $e_1, \ldots, e_k$ оператора A, и $P_k : V^0 \to E_k$ — ортопроектор на E_k. Положим

$$y_k(t) = z_k(t) + v_k(t), \tag{5.8}$$

где $z_k(t)$ — решение галёркинской системы уравнений

$$\dot{z}_k(t) + Az_k + P_k B(z_k) = P_k f, \quad \gamma_0 z_k = P_k y_0, \tag{5.9}$$

$z_k(t) \in E_k$, $t \in [0, T]$, а $v_k(t)$ — решение линейной задачи

$$\dot{v}_k(t) + Av_k = 0, \quad \gamma_0 v_k = (I - P_k) y_0, \tag{5.10}$$

где I — единичный оператор.

Докажем разрешимость задачи (5.9). Так как (5.9) есть задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, ее разрешимость при малых t следует из общих теорем о разрешимости. При этом для доказательства разрешимости задачи (5.9) при $t \in [0, T]$ достаточно доказать следующее энергетическое неравенство для ее решений:

$$\|z_k(t)\|_0^2 + \int\limits_0^t \|z_k(\tau)\|_1^2 \, d\tau \leqslant 2\left(\|y_0\|_0^2 + \int\limits_0^t \|f(\tau)\|_{-1}^2 \, d\tau \right). \tag{5.11}$$

Умножая (5.9_1) скалярно в V^0 на $z_k(t)$, учитывая, что $(Az_k, z_k)_0 = \|z_k\|_1^2$ в силу (4.11) и $(P_k B(z_k), z_k) = (B(z_k), z_k) = 0$ в силу (4.15), (4.20), интегрируя по t и применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\|z_k(t)\|_0^2 + 2\int\limits_0^t \|z_k(\tau)\|_1^2 \, d\tau \leqslant \|P_k y_0\|_0^2 + \int\limits_0^t \|f(\tau)\|_{-1}^2 \, d\tau + \int\limits_0^t \|z_k(\tau)\|_1^2 \, d\tau.$$

Из этого неравенства следует (5.11). Так как $e_j \in C^\infty(\Omega)$, из (5.11) вытекает, что $z_k \in V^{1,2}(Q)$.

Задача (5.10) эквивалентна задаче Коши для бесконечной распавшейся системы обыкновенных дифференциальных уравнений (при разложении v_k в ряд по базису $\{e_j\}$). Поэтому ее разрешимость вытекает из оценки

$$\|v_k(t)\|_1^2 + 2\int\limits_0^t \|v_k(\tau)\|_2^2 \, d\tau = \|(I - P_k) y_0\|_1^2 \leqslant \|y_0\|_1^2. \tag{5.12}$$

Для доказательства (5.12) достаточно умножить (5.10_1) на $Av_k(t)$ скалярно в V^0 и полученное равенство проинтегрировать по t. Из (5.10), (5.12) легко получим $v_k \in V^{1,2}(Q)$. Таким образом, $y_k(t) \in V^{1,2}(Q)$ в силу (5.8) и $\gamma_0 y_k = y_0$ в силу (5.9), (5.10).

Подставляя $y_k(t)$ в левую часть равенства (5.1), находим $\dot{y}_k + Ay_k + B(y_k) = f + g_k$, где

$$g_k = (1 - P_k)B(z_k) + B(z_k, v_k) + B(v_k, z_k) + B(v_k, v_k) + (P_k - I)f. \tag{5.13}$$

Итак, чтобы установить плотность F_{y_0}, достаточно показать, что

$$\|g_k\|_{L_p^{-l}} \to 0, \quad k \to \infty, \tag{5.14}$$

если l и p удовлетворяют условиям теоремы.

Лемма 5.3. *Пусть $1/2 \leqslant r < 3/2$ и $p = 4/(5-2r)$. Тогда*

$$\int\limits_0^T \|B(z,v)\|_{-r}^p \, dt \leqslant C\|z\|_{L_\infty^0}^{p(r-1/2)} \|z\|_{L_2^1}^{p(3/2-r)} \|v\|_{L_2^1}^p, \tag{5.15}$$

где C не зависит от z и v. Если $3/2 \leqslant r < 5/2$ и $p = 4/(5-2r)$, то

$$\int\limits_0^T \|B(z,v)\|_{-r}^p \, dt \leqslant C\|z\|_{L_\infty^0}^{p(2r-1)/4} \|v\|_{L_\infty^0}^{p(2r-1)/4} \|z\|_{L_2^1} \|v\|_{L_2^1}. \tag{5.16}$$

Доказательство. Выведем сначала оценку (5.15). В силу (4.21), (4.13)

$$\|B(z,v)\|_{-r} \leqslant C_1 \|z\|_{(3-2r)/2} \|v\|_1 \leqslant C_2 \|v\|_1 \|z\|_0^{r-1/2} \|z\|_1^{3/2-r}. \tag{5.17}$$

Поэтому

$$\int\limits_0^T \|B(z,v)\|_{-r}^p \, dt \leqslant C_2 \|z\|_{L_\infty^0}^{p(r-1/2)} \int\limits_0^T \|v\|_1^p \|z\|_1^{p(3/2-r)} \, dt. \tag{5.18}$$

Применяя к интегралу в правой части (5.18) неравенство Гёльдера $\left|\int fg\,dt\right| \leqslant \|f\|_{L_\alpha} \|g\|_{L_\beta}$ при $\alpha = 2/p$, $\beta = 2/(2-p)$, получим (5.15). Для доказательства (5.16) заметим, что в силу (4.22), (4.13) верна оценка

$$\begin{aligned} &\|B(z,v)\|_{-r} \leqslant C\|z\|_{(5-2r)/4} \|v\|_{(5-2r)/4} \\ &\leqslant C_1 \|z\|_0^{(2r-1)/4} \|z\|_1^{(5-2r)/4} \|v\|_0^{(2r-1)/4} \|v\|_1^{(5-2r)/4}, \end{aligned}$$

из которой легко следует (5.16). □

Доказательство теоремы 5.1 (продолжение). Пусть $1/2 < l \leqslant 3/2$, $1 \leqslant p < 4/(5-2l)$, а число r определяется из равенства $p = 4/(5-2r)$. Тогда

$1/2 \leqslant r < l$. В силу (4.11)

$$\int_0^T \|(I-Q_k)B(z_k)\|_{-l}^p\,dt \leqslant \lambda_k^{-\varepsilon}\int_0^T \|B(z_k)\|_{-r}^p\,dt, \tag{5.19}$$

где $\varepsilon > 0$ определяется по p, l, r. Из (5.19), (5.15), (5.11) следует

$$\|(I-Q_k)B(z_k)\|_{L_p^{-l}} \leqslant C\lambda_k^{-\varepsilon} \to 0, \quad k\to\infty. \tag{5.20}$$

Полагая в (5.15) $z = z_k$, $v = v_k$ и учитывая (5.11), (5.12), получим

$$\int_0^T \|B(z_k,v_k)\|_{-l}^p\,dt \leqslant \int_0^T \|B(z_k,v_k)\|_{-r}^p\,dt \leqslant C\|(I-Q_k)y_0\|_0^p \to 0 \tag{5.21}$$

при $k\to\infty$. Аналогично выводятся оценки

$$\int_0^T \|B(v_k,z_k)\|_{-l}^p\,dt \leqslant C\|(I-Q_k)y_0\|_0^p > 0, \quad k\to\infty, \tag{5.22}$$

$$\int_0^T \|B(v_k,v_k)\|_{-l}^p\,dt \leqslant C\|(I-Q_k)y_0\|_0^{2p} > 0, \quad k\to\infty. \tag{5.23}$$

Кроме того, при $l \geqslant 1/2$, $1 \leqslant p \leqslant 2$

$$\int_0^T \|(I-Q_k)f\|_{-l}^p\,dt \leqslant C\int_0^T \|(I-Q_k)f\|_0^2\,dt > 0, \quad k\to\infty. \tag{5.24}$$

Из (5.20)–(5.24) следует (5.14).

Пусть $l > 3/2$, $p = 2$. Возьмем $r = 3/2$. Используя вместо (5.15) неравенство (5.16), получим оценки, аналогичные (5.20)–(5.24). Из этих оценок опять следует (5.14). □

Замечание 5.1. Множество F_{y_0} всюду плотно также относительно других топологий. Так, в Зор, Вал [1] доказано, что при $y_0 \in V^4$ множество F_{y_0} всюду плотно относительно топологии пространства $L_s(0,T;(L_q(\Omega)^3)$, если $s,q \in (1,\infty)$ и $4 < 2/s + 3/q$.

Замечание 5.2. Множество F_{y_0} открыто в L_2^0. Этот факт следует из хорошо известных результатов о непрерывной зависимости решения $y \in V^{1,2}(Q)$ системы Навье — Стокса от исходных данных $(f,y_0) \in L_2^0 \times V^1$ (см., например, Ладыженская [1], Вишик, Фурсиков [1]).

§ 6. Комментарии

Плотность в $C(\Gamma_0)\times C(\Gamma_0)$ данных Коши, при которых задача Коши для оператора Лапласа разрешима, доказана Мергеляном [1]. Доказательство теоремы 1.1 при $k+1=0$, основанное на теореме Хана — Банаха, получено

Латтесом, Лионсом [1], а конструктивное доказательство при $k+1=0$ приведено в Романович, Фурсиков [1]. Теорема 1.1 в общем случае доказана Фурсиковым [12].

Результаты по аппроксимативной управляемости для параболических уравнений получены впервые Фатторини [1] и Лионсом [2]. В последние годы результаты по аппроксимативной управляемости системы Стокса получены Лионсом [4]; Фурсиковым, Эмануиловым [1–3]; Диазом, Фурсиковым [1]; Лионсом, Зуазуа [1]. Аппроксимативная управляемость полулинейными параболическими уравнениями с нелинейностью, удовлетворяющей условию Липшица, изучена Фабрэ, Пуэлем, Зуазуа [1, 2]. Результаты гл. 3, пп. 2.1–2.4 по аппроксимативной управляемости являются адаптацией результатов работ Фурсикова, Эмануилова [2, 3] к случаю уравнения теплопроводности.

Результаты § 3 получены в работе Фурсикова [12]. Результаты § 4 общеизвестны. (см., например, Фойаш [1]; Лионс [1]; Вишик, Фурсиков [1]; Темам [1]). Лемма 4.4 доказана в работе Фурсикова [5], а частный случай леммы 4.5 — в книге Вишик, Фурсиков [1]. Результаты § 5 получены Фурсиковым [1, 2, 3].

Глава 4

Задача о минимизации работы при разгоне покоящейся жидкости до заданной скорости

Настоящая глава посвящена изучению одной конкретной задачи управления течением вязкой несжимаемой жидкости, рассматриваемой в ограниченной области Ω. Управлением в этой задаче является плотность внешних сил, заданная на всей области Ω. С помощью управления указанного вида требуется разогнать покоящуюся жидкость до заданной скорости, затратив на это минимально возможную работу. В главе проводится достаточно полное исследование указанной задачи. Изучен вопрос о существовании решения этой задачи: существование или несуществование решения зависит от некоторых соотношений между исходными данными задачи. Проведение дальнейшего исследования существенно зависит от того, является ли задача регулярной или нет (понятие регулярности задачи также вводится в этой главе). Задача о минимизации работы оказывается регулярной в случае двумерной системы Навье — Стокса. В этом случае выведены необходимые и достаточные условия минимума, доказана единственность решения задачи о минимизации работы при больших значениях параметра M (M — величина, ограничивающая сверху L_2-норму управления), построена асимптотика решения (y, u) при $M \to \infty$, где y — функция состояния и u — оптимальное управление.

Задача о минимизации работы является задачей с жестким управлением. Для ее решения большое значение имеет некоторая вспомогательная задача управления с компромиссным функционалом стоимости, которая также подробно исследуется в настоящей главе.

§ 1. Постановка задачи и теорема существования

В этом параграфе ставится задача о том, как разогнать покоящуюся жидкость до заданной скорости $v(x)$, затратив на это минимум работы, а также некоторые ее математические аналоги. Полученная задача оптимального управления является задачей с жестким управлением. Поэтому на управление (которым является плотность внешних сил) накладывается ограничение, обеспечивающее существование решения (см. гл. 1, § 5). После этого исследуется вопрос о существовании решения указанной задачи. Ответ на этот вопрос является положительным либо отрицательным в зависимости от соотношений между исходными данными задачи. Исследуется также разрешимость аналогичной задачи с компромиссным функционалом.

1.1. Постановка задачи. Опишем задачу о минимизации работы при разгоне покоящейся жидкости до заданного векторного поля скорости. Предположим, что жидкость находится в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ и ее векторное поле скорости $y(t,x)$ описывается с помощью системы Навье — Стокса

$$\dot{y}(t,x) + (y,\nabla)y - \Delta y + \nabla p(t,x) = u(t,x), \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} y = 0, \tag{1.2}$$

$$y\big|_{\Sigma} = 0, \tag{1.3}$$

$$y\big|_{t=0} = 0, \tag{1.4}$$

где $\nabla p(t,x)$ — градиент давления, $u(t,x)$ — плотность внешних сил, которая в нашем случае является управлением, $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$ — боковая поверхность цилиндра $Q = (0,T) \times \Omega$ и $T > 0$ — заданный момент времени.

Предположим, что мы можем воздействовать на жидкость с помощью объемных сил, имеющих плотность $u(t,x)$. Требуется за данное время T разогнать жидкость, которая при $t = 0$ находится в состоянии покоя (1.4), до заданной скорости $v(x)$:

$$y(t,x)\big|_{t=T} = v(x), \tag{1.5}$$

совершив при этом минимальную работу.

Чтобы определить функционал, который требуется минимизировать, выпишем работу объемных сил с плотностью $u(t,x)$, затраченную на перемещение жидкости со скоростью $y(t,x)$. Воспользовавшись соотношениями (1.1)–(1.5), проведем простые выкладки:

$$\int_0^T \int_\Omega (u(t,x), y(t,x))\, dx\, dt = \int_0^T \int_\Omega (\dot{y} + (y,\nabla)y - \Delta y + \nabla p, y)\, dx\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |v(x)|^2 dx + \int_0^T \int_\Omega |\nabla y|^2 dx\, dt = \frac{1}{2}\|v\|_0^2 + \int_0^T \|y(t,\cdot)\|_1^2 dt, \tag{1.6}$$

где $\|y\|_1^2 = \|\nabla y\|^2_{L_2(\Omega)}$ — норма (3.4.11) при $\alpha = 1$. Ниже мы используем обозначения, введенные в гл. 3, § 4.

Математическая формализация задачи о минимизации работы при разгоне покоящейся жидкости до заданной скорости выглядит следующим образом:

$$J_1(y) = \int_0^T \|y(t)\|_1^2 dt \to \inf, \tag{1.7}$$

$$\Theta(y) = \dot{y} + Ay + B(y) = u(t), \tag{1.8}$$

$$\gamma_0 y = 0, \tag{1.9}$$

$$\gamma_1 y = v, \tag{1.10}$$

$$\int\limits_0^T \|u(t)\|_0^2 dt \leqslant M^2, \tag{1.11}$$

где $M > 0$, $v(x) \in V^2(\Omega)$ — исходные данные задачи. (Мы записали систему Навье — Стокса в абстрактном виде, как в гл. 3, § 4, п. 4.3.)

Замечание 1.1. Так как (1.7)–(1.11) — задача с жестким управлением, введение ограничения (1.11) на управление u необходимо для разрешимости поставленной задачи (в соответствии с результатами гл. 1, § 5). Ниже показано, что задача (1.7)–(1.10) (без ограничения (1.11)) действительно не имеет решения.

Для лучшего понимания некоторых математических закономерностей, связанных с задачами управления, полезно вместо (1.7)–(1.11) рассмотреть следующую более общую задачу:

Найти векторное поле $(y(t,x), u(t,x))$, удовлетворяющее условиям (1.8)–(1.11), такое, что

$$J_\alpha(y) = \int\limits_0^T \|y(t)\|_\alpha^2 dt \to \inf, \tag{1.12}$$

где $\alpha \in [0,2]$ — фиксированное число, а v в (1.10) — заданное векторное поле, удовлетворяющее условиям

$$v \in V^2, \quad v \not\equiv 0. \tag{1.13}$$

Помимо размерностей $d = 2, 3$ области Ω будем рассматривать также размерность $d = 4$:

$$2 \leqslant d = \dim\Omega \leqslant 4. \tag{1.14}$$

Кроме задачи (1.8)–(1.12) мы рассмотрим следующую экстремальную задачу.

Требуется минимизировать функционал

$$I(y,u) = \int\limits_0^T \|y(t)\|_\alpha^2 dt + N \int\limits_0^T \|u(t)\|_0^2 dt \to \inf \tag{1.15}$$

по (y,u), удовлетворяющим (1.8)–(1.10), где $v \in V^2(\Omega)$ и $N > 0$ заданы.

Сформулированная задача является вспомогательной относительно задачи (1.8)–(1.12). Однако, она имеет самостоятельный интерес.

Напомним, что функционалы вида (1.15) называются компромиссными и часто возникают в задачах управления. Задачу минимизации функционала (1.15) можно трактовать как задачу минимизации функционала

(1.12) при условии, что величина $\int\limits_0^T \|u(t)\|_0 dt$ "не очень велика". Размер этой величины контролируется значением параметра N.

1.2. Теоремы существования. Изучим вопрос о существовании решений задач (1.15), (1.8)–(1.10) и (1.8)–(1.12), используя теорему 1.2.4. Положим

$$U = L_2^0, \quad Y_1 = \{y \in L_2^\alpha \cap L_2^1 : \dot{y} \in L_2^{-d}, \gamma_0 y = 0\}. \tag{1.16}$$

Теорема 1.1. *Для любых $v \in V^2$, $N > 0$ существует решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times U$ задачи* (1.15), (1.8)–(1.10), *где Y_1, U — пространства* (1.16).

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.2.4. Пусть $Y = L^\alpha$, $V = L_2^{-d} \times V^{(1-d)/2}$, Y_1, U — пространства (1.16), $U_\partial = U$, $L(y,u) = (y + Ay - u, \gamma_T y)$, $F(y) = (B(y), -v)$, $S = \{s(t) \in C^1(0,T;V^{d+1}) : s(0) = s(T) = 0\} \times V^{(d-1)/2}$, $Y_{-1} = L_2^0$, J — функционал (1.15). Для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость условий 2.3, 2.4, 2.5 из гл. 1, т. е. условий нетривиальности, коэрцитивности и компактности. Положим

$$(y,u) = \left(\frac{vt}{T}, \frac{v}{T} + A\frac{vt}{T} + B\left(\frac{vt}{T}\right)\right).$$

Так как пара (y,u) удовлетворяет соотношениям (1.8)–(1.10), для доказательства условия нетривиальности достаточно проверить включения

$$y = \frac{vt}{T} \in Y_1, \quad u = \frac{v}{T} + A\frac{vt}{T} + B\left(\frac{vt}{T}\right) \in L_2^0.$$

Первое включение очевидно, а второе следует из (1.13) и (3.4.12), (3.4.21). Если $(y,u) \in \Lambda_R \equiv \{(y,u) \in \mathfrak{A} : I(y,u) \in R\}$, где $\mathfrak{A}$ — множество допустимых элементов задачи (1.15), (1.8)–(1.10), то

$$\|y\|^2_{L_2^\alpha} \leqslant R, \quad \|u\|^2_{L_2^0} \leqslant R/N, \tag{1.17}$$

а в силу энергетического неравенства (3.4.33)

$$\|y\|^2_{L_\infty^0} + \|y\|^2_{L_2^1} \leqslant c(R). \tag{1.18}$$

Выразив $\dot{y}$ из дифференциального уравнения (1.8) и оценив правую часть полученного равенства с помощью (1.17), (1.18) и (3.4.21), получим

$$\|\dot{y}\|_{L_2^{-d}} \leqslant c_1(R). \tag{1.19}$$

Из (1.17)–(1.19) следует справедливость условия коэрцитивности. Если $s = (s_1, s_2) \in S$, $y \in Y_1$, то из леммы 3.4.2 и равенств

$$\langle F(y), s\rangle = (B(y,y), s_1)_{L_2^0} + (v, s_2)_0 = -(B(y,s_1), y)_{L_2^0} + (v, s_2)_0$$

следует, что функционал $y \to \langle F(y), s\rangle$ продолжается по непрерывности на пространство $Y_{-1} = L_2^0$. Компактность вложения $Y_1 \subset Y_{-1}$, где $Y_{-1} = L_2^0$, Y_1 — пространство из (1.16), хорошо известна (см. Дубинский [1]; Вишик, Фурсиков [1]). Таким образом, все условия теоремы 1.2.4 проверены. Из этой теоремы следует доказываемое утверждение. □

Перейдем к исследованию существования решения задачи (1.8)–(1.12). Характерной особенностью этой задачи является наличие ограничения $u \in U_\partial$. В данном случае $U_\partial = \{u \in L_2^0 : \|u\|_{L_2^0} \leqslant M\}$ — шар радиуса M. Здесь ответ на вопрос о существовании решения зависит от некоторого соотношения между исходными данными v и M.

Теорема 1.2. *Существует положительное число $M_0 = M_0(v)$ такое, что при $M > M_0(v)$ задача* (1.8)–(1.12) *имеет решение $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times U$, где Y_1, U — пространства* (1.16), *а при $M < M_0(v)$ решения у задачи* (1.8)–(1.12) *не существует.*

Доказательство. Все пространства, операторы и другие объекты, кроме U_∂ и J_α, определим так же, как в теореме 1.1. Положим $U_\partial = \{u \in L_2^0 : \|u\|_{L_2^0} \leqslant M\}$ и $J = J_\alpha$, где J_α — функционал (1.12). Пусть исходное векторное поле $v \in V^2$, $v \neq 0$, фиксировано. Покажем, что

(a) при достаточно больших M выполнено условие нетривиальности задачи (1.8)–(1.12),

(b) при достаточно малых $M > 0$ условие нетривиальности задачи (1.8)–(1.12) не выполнено.

(a) Рассмотрим пару $(y(t), u(t)) = \left(\dfrac{vt}{T}, \dfrac{v}{T} + \dfrac{t}{T}Av + \dfrac{t^2}{T^2}B(v)\right)$. При достаточно больших M эта пара принадлежит множеству $\mathfrak{A}$ допустимых пар, что устанавливается так же, как в теореме 1.1.

(b) Допустим противное, т. е. для любого сколь угодно малого $M > 0$ существует допустимая пара $(y_M, u_M) \in \mathfrak{A}$ задачи (1.8)–(1.12). Как известно (см. Вишик, Фурсиков [1]), при достаточно малом $M = \|u_M\|_{L_2^0}$ существует единственное решение $w \in L_2^2$ задачи

$$\dot{w} + Aw + B(w) = u_M(t), \quad w\big|_{t=0} = 0, \quad t \in [0, T],$$

причем $\dot{w} \in L_2^0$. Кроме того,

$$\|w\|_{L_2^2}^2 + \|\dot{w}\|_{L_2^0}^2 \leqslant c\,\|y_M\|_{L_2^0}^2, \tag{1.20}$$

где c — константа, не зависящая от $M \in (0, \widehat{M})$.

В силу леммы 3.5.1 о единственности решения имеем $y_M(t) \equiv w(t)$. Вследствие (1.20) и теоремы о следах, приходим к противоречию:

$$0 < \|v\|_1^2 \leqslant c_1(\|w\|_{L_2^2}^2 + \|\dot{w}\|_{L_2^0}^2) \leqslant c_1 c\,\|u_M\|_{L_2^0}^2 = c_1 c M^2 \to 0.$$

Пусть $M_0 = M_0(v)$ — нижняя грань M, для которых задача (1.8)–(1.12) удовлетворяет условию нетривиальности. Если $M > M_0(v)$, то существование решения задачи (1.8)–(1.12) следует из теоремы 1.2.4, поскольку проверка справедливости предположений этой теоремы проводится так же, как в теореме 1.1. В силу определения $M_0(v)$ при $M < M_0(v)$ множество допустимых элементов $\mathfrak{A}$ пусто. Поэтому задача (1.8)–(1.12) не имеет решения. □

Предельный случай $M = M_0(v)$ рассмотрим при $\alpha = 1$, т. е. для задачи (1.7)–(1.11).

Теорема 1.3. *При $M = M_0(v)$ задача* (1.7)–(1.11) *имеет решение* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times U$, *где* Y_1, U — *пространства* (1.16) *с* $\alpha = 1$.

Доказательство. Зададим все пространства, операторы и т. д. так же, как в теореме 1.2. Достаточно доказать справедливость условия нетривиальности. Обозначим через (y_n, u_n) решение задачи (1.7)–(1.11) при $M = M_n$, где $M_n > M_0$ и $M_n \to M_0$ при $n \to \infty$. Пары (y_n, u_n) существуют вследствие теоремы 1.2. При достаточно больших n

$$\|u_n\|_{L_2^0} \leqslant 2M^0, \tag{1.21}$$

и вследствие энергетического неравенства (3.4.33)

$$\|y_n\|_{L_2^1} \leqslant \mathrm{const}, \tag{1.22}$$

где константа не зависит от n. Из (1.21), (1.22), перейдя, если потребуется, к подпоследовательности, получаем

$$y_n \to \widehat{y} \text{ слабо в } L_2^1, \quad u_n \to \widehat{u} \text{ слабо в } L_2^0.$$

Очевидно, что $\|\widehat{u}\|_{L_2^0} \leqslant M_0$, $\|\widehat{y}\|_{L_2^1} < \infty$. Так же, как в теореме 1.2.4, устанавливаем, что $(\widehat{y}, \widehat{u})$ удовлетворяет (1.8)–(1.10). □

1.3. О несуществовании решения. Покажем (см. замечание 1.1), что задача (1.8)–(1.10), (1.12) (без условия (1.11)) не имеет решения $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times L_2^0$. Докажем сначала

Предложение 1.1. *Если* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times L_2^0$ — *решение задачи* (1.8)–(1.12) *при* $M > 0$, *то*

$$\int_0^T \|\widehat{u}\|_0^2 dt = M^2. \tag{1.23}$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует $M > 0$ такое, что решение $(\widehat{y}, \widehat{u})$ задачи (1.8)–(1.12) удовлетворяет неравенству

$$\int_0^T \|\widehat{u}\|_0^2 dt = \|\Theta(\widehat{y})\|_{L_2^0}^2 < M^2. \tag{1.24}$$

Введем пространство

$$\Phi = \{\varphi(t) \in C^1(0, T; V^3) : \varphi(0) = \varphi(T) = 0\}. \tag{1.25}$$

Положим

$$\Theta'(y)\varphi = \dot{\varphi} + A\varphi + B(\varphi, y) + B(y, \varphi). \tag{1.26}$$

Разложим оператор Θ из (1.8) по формуле Тейлора в окрестности $\widehat{y}$. В силу (1.26), (3.4.12) и леммы 3.4.2 при любом $\varphi \in \Phi$ имеем

$$\begin{aligned} \|\Theta(\widehat{y} + \varphi)\|_{L_2^0}^2 &= \|\Theta(\widehat{y})\|_{L_2^0}^2 + 2(\widehat{u}, \Theta'(\widehat{y})\varphi)_{L_2^0} + 2(\widehat{u}, B(\varphi))_{L_2^0} \\ &+ \|\Theta'(\widehat{y})\varphi\|_{L_2^0}^2 + 2(\Theta'(\widehat{y})\varphi, B(\varphi)) + \|B(\varphi)\|_{L_2^0}^2, \end{aligned} \tag{1.27}$$

причем каждый член в правой части (1.27) определен и является непрерывным функционалом по $\varphi \in \Phi$. В силу (1.24) при достаточно малых $\|\varphi\|_\Phi$ имеем

$$\|\Theta(\widehat{y}+\varphi)\|^2_{L_2^0} < M^2. \tag{1.28}$$

Так как $(\widehat{y},\widehat{u})$ — решение задачи (1.8)–(1.12), из (1.28) в силу теоремы Ферма следует $(J'_\alpha(\widehat{y}),\varphi) = 2(\widehat{y},\varphi)_{L_2^\alpha} = 0$ для всех $\varphi \in \Phi$. Поэтому $\widehat{y} \equiv 0$, что противоречит (1.10). □

Предположим, что задача (1.8)–(1.10), (1.12) при $v \not\equiv 0$ имеет решение $(\widehat{y},\widehat{u}) \in Y_1 \times L_2^0$. Определим число M из формулы

$$\|\widehat{u}\|^2_{L_2^0} = (M/2)^2. \tag{1.29}$$

Пусть $M > 0$. Тогда $(\widehat{y},\widehat{u})$ является также решением задачи (1.8)–(1.12) при M из (1.29). Но в силу предложения 1.1 справедливо соотношение (1.23), противоречащее (1.29). Пусть $M = 0$ в (1.29) и, следовательно, $\widehat{u} \equiv 0$. Тогда из (1.8), (1.9) и энергетического неравенства (3.4.33) следует равенство $\widehat{y} \equiv 0$, противоречащее (1.10) и (1.13).

Отметим, что с точки зрения абстрактной задачи из гл. 1, § 2 несуществование решения задачи (1.8)–(1.10), (1.12) является следствием невыполнения условия коэрцитивности для этой задачи.

§ 2. Необходимые и достаточные условия минимума

Мы выводим необходимые условия минимума для задач управления, определенных в § 1. При этом для задач без ограничения (1.11) на управление помимо системы оптимальности выводятся условия второго порядка и некоторое нелокальное условие. Определяется класс регулярных экстремальных задач, для которых выведенные необходимые условия являются достаточными условиями абсолютного минимума.

2.1. Необходимые условия минимума в задаче без ограничений на управление. До конца этой главы мы исследуем задачи (1.8)–(1.12) и (1.8)–(1.10), (1.15), предполагая, что $\alpha \in [0,2]$, $d = 2,3$. Начнем с вывода необходимых условий для задачи (1.8)–(1.10), (1.15).

Теорема 2.1. *Пусть $(\widehat{y},\widehat{u}) \in Y_1 \times L_2^0$ — решение экстремальной задачи* (1.8)–(1.10), (1.15). *Тогда при любом $\varphi \in \Phi$ пара $(\widehat{y},\widehat{u})$ удовлетворяет соотношениям*

$$\int_0^T [(\widehat{y},\varphi)_\alpha + N(\widehat{u},\Theta'(\widehat{y})\varphi)_0]dt = 0, \tag{2.1}$$

$$a_2(\varphi) \equiv \int_0^T [\|\varphi\|^2_\alpha + 2N(\widehat{u},B(\varphi))_0 + N\|\Theta'(\widehat{y})\varphi\|^2_0]dt \geqslant 0, \tag{2.2}$$

$$\left(\int_0^T N(\Theta'(\widehat{y})\varphi, B(\varphi))_0 dt\right)^2 \leqslant \int_0^T N\|B(\varphi)\|_0^2 dt a_2(\varphi), \tag{2.3}$$

где $(\cdot,\cdot)_s$ *— скалярное произведение в* V^s, Φ *— пространство* (1.25), *а* $\Theta'(y)\varphi$ *— определено в* (1.26).

Доказательство. Если $(\widehat{y}, \widehat{u})$ — решение задачи (1.8)–(1.10), (1.15), то $\delta(t) \equiv 0$ является решением задачи

$$\Psi(\delta) \equiv \int_0^T (\|\widehat{y}+\delta\|_\alpha^2 + N\|\Theta(\widehat{y}+\delta)\|_0^2)\, dt \to \inf, \quad \delta \in \Phi \tag{2.4}$$

(отметим, что при $y \in Y_1$ функционал Ψ определен при любом $\delta \in \Phi$).

Подставив в (2.4) $\delta = \gamma\varphi$, где $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \Phi$, и учитывая соотношения (1.8) и (1.26), определяющие $\Theta(y) = u$ и $\Theta'(y)\varphi$, получим

$$\Psi(\gamma\varphi) = a_0 + a_1\gamma + \gamma^2(a_2 + a_3\gamma + a_4\gamma^2), \tag{2.5}$$

где

$$a_0 = \Psi(0) = J(\widehat{y}), \quad a_1 = 2\int_0^T \left((\widehat{y},\varphi)_\alpha + N(\widehat{u}, \Theta'(\widehat{y})\varphi)_0\right) dt, \tag{2.6}$$

$$a_2 = \int_0^T (\|\varphi\|_\alpha^2 + 2N(\widehat{u}, B(\varphi))_0 + N\,\|\Theta'(\widehat{y})\varphi\|_0^2)\, dt, \tag{2.7}$$

$$a_3 = 2N\int_0^T (\Theta'(\varphi), \varphi)_0 dt, \quad a_4 = N\int_0^T \|B(\varphi)\|_0^2 dt. \tag{2.8}$$

По условию многочлен (2.5) имеет абсолютный минимум при $\gamma = 0$. Чтобы точка $\gamma = 0$ была абсолютным минимумом многочлена (2.5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$a_1 = 0, \quad a_2 + a_3\gamma + a_4\gamma^2 \geqslant 0 \quad \forall\gamma \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Соотношения (2.9) при a_i, определенные в (2.6)–(2.8), эквивалентны условиям $a_1 = 0$, $a_2 \geqslant 0$, $a_3^2 \leqslant 4a_2a_4$, которые эквивалентны условиям (2.1)–(2.3). □

Замечание 2.1. Условие (2.1) является необходимым условием экстремума первого порядка, (2.2) — необходимое условие минимума второго порядка, а соотношение (2.3) — нелокальное условие абсолютного минимума, учитывающее алгебраическую структуру задачи. Из доказательства теоремы 2.1 видно, что условия (2.1)–(2.3) близки к достаточным условиям. Действительно, ниже будет установлено, что если в задаче (1.8)–(1.10), (1.15) $\alpha > 3/2$ при $d = 3$ и $\alpha \geqslant 1$ при $d = 2$, то условия (2.1)–(2.3) являются необходимыми и достаточными условиями абсолютного минимума задачи (1.8)–(1.10), (1.15). Соотношение (2.1) можно трактовать как со-

пряженное уравнение для двойственной функции $p = \widehat{u}$. Чтобы пояснить это утверждение, определим оператор $B^*(v, w)$ по формуле

$$(B^*(v, w), u)_0 = -(B(u, w), v)_0 = -b(u, w, v) \quad \forall u, v, w \in E^\infty. \tag{2.10}$$

Из (2.10) легко вывести оценки для оператора B^*, аналогичные (3.4.21) и (3.4.22). С помощью этих оценок оператор B^* продолжается по непрерывности на $V^\alpha \times V^\beta$ с соответствующими α и β.

Следствие 2.1. *Двойственная функция* $p = \widehat{u} \in L_2^0$ *задачи* (1.8)–(1.10), (1.15) *удовлетворяет сопряженному уравнению*

$$\dot{p} - Ap + B^*(p, y) + B(y, p) = N^{-1}A^\alpha y, \tag{2.11}$$

которое понимается в смысле тождества (2.1).

2.2. Необходимые условия для задачи с жестким управлением. Выведем необходимые условия экстремума для задачи (1.8)–(1.12). Для этого достаточно самого простейшего средства: метода множителей Лагранжа для гладких задач с ограничением типа равенства (см. теорему 1.1.7).

Теорема 2.2. *Пусть* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in Y_1 \times L_2^0$ *— решение задачи* (1.8)–(1.12). *Тогда*

$$\|\widehat{u}\|^2_{L_2^0} = M \tag{2.12}$$

и существует $\lambda \in \mathbb{R}$ *такое, что*

$$\dot{\widehat{u}}(t) - A\widehat{u} + B^*(\widehat{u}, \widehat{y}) + B(\widehat{y}, \widehat{u}) = \lambda A^\alpha \widehat{y}(t). \tag{2.13}$$

Дифференциальное уравнение (2.13) *понимается в смысле теории обобщенных функций, т. е. в смысле интегрального тождества*

$$-(\widehat{u}, \Theta'(\widehat{y})\varphi)_{L_2^0} = \lambda(\widehat{y}, \varphi)_{L_2^\alpha} \quad \forall \varphi \in \Phi, \tag{2.14}$$

где $(\cdot, \cdot)_{L_2^0}$ *— соотношение двойственности, порожденное скалярным произведением в* L_2^0.

Доказательство. Соотношение (2.12) следует из предложения 1.1. Для $\varphi \in \Phi$ рассмотрим экстремальную задачу

$$f_0(\varphi) \equiv \|\widehat{y} + \varphi\|^2_{L_2^\alpha} \to \inf, \quad f_1(\varphi) \equiv \|\Theta(\widehat{y} + \varphi)\|^2_{L_2^\alpha} - M = 0, \tag{2.15}$$

где Θ — оператор из (1.8). В силу предложения 1.1 функция $\varphi \equiv 0$ является точкой минимума в задаче (2.15). Так же, как в (1.27), устанавливается, что функции $f_0(\varphi)$, $f_1(\varphi)$, $\varphi \in \Phi$, непрерывно дифференцируемы. Согласно методу множителей Лагранжа при некоторых λ_0, λ_1, $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 \neq 0$, имеем

$$\lambda_0(\widehat{y}, \varphi)_{L_2^\alpha} + \lambda_1(\widehat{u}, \Theta'(\widehat{y})\varphi)_{L_2^0} = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi. \tag{2.16}$$

Покажем, что $\lambda_1 \neq 0$ в (2.16). Действительно, если $\lambda_1 = 0$, то $\lambda_0 \neq 0$ и в силу (2.16) $\widehat{y} \equiv 0$. Поэтому в силу (1.8) имеем $\widehat{u} \equiv 0$, что противоречит (2.12). Так как $\lambda_1 \neq 0$, из (2.16) следует (2.14) при $\lambda = -\lambda_0/\lambda_1$. □

2.3. Регулярные задачи. Как будет показано ниже, задачи (1.8)–(1.10), (1.15) и (1.8)–(1.12) при $\alpha \in (d/2, 2]$, а в случае $d = 2$ также и при $\alpha = d/2 = 1$

обладают рядом замечательных свойств. Назовем эти задачи *регулярными* и приступим к их изучению.

Введем пространства

$$\mathcal{Y}^\alpha = \{y(t) \in L_2^\alpha : \dot{y}(t) \in L_2^{\alpha-2}\}, \quad \mathcal{Y}_0^\alpha = \{y(t) \in Y^\alpha : y(0) = 0\}. \tag{2.17}$$

Нам понадобится следующая лемма о гладкости решения $y(t)$ задачи

$$\dot{y}(t) + Ay + B(y) = u, \quad y(0) = 0. \tag{2.18}$$

Лемма 2.1. *Пусть $y \in L_2^\alpha \cap L_\infty^0$ — решение задачи* (2.18) *с правой частью $u \in L_2^0$. Если $\alpha \in (3/2, 2]$ при $d = 3$ либо $\alpha \in [1, 2]$ при $d = 2$, то $y \in \mathcal{Y}^2$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\alpha \in (d/2, 2]$. Умножим уравнение в (2.18) на Ay скалярно в V^0 и проинтегрируем по t. В силу леммы 3.4.2 получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|y(t)\|_1^2 + \int_0^t \|y(t)\|_2^2 d\tau = -\int_0^t b(y, y, Ay) d\tau + \int_0^t (u, Ay)_0 d\tau \\
&\leqslant c\int_0^t \|y\|_\alpha \|y\|_1 \|y\|_2 d\tau + \int_0^t \|u\|_0 \|y\|_2 d\tau \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \|y\|_2^2 d\tau + c_1 \int_0^t \|y\|_\alpha^2 \|y\|_1^2 d\tau + 2\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что

$$\|y(t)\|_1^2 + \int_0^t \|y(\tau)\|_2^2 d\tau \leqslant 2c_1 \int_0^t \|y\|_\alpha^2 \|y\|_1^2 d\tau + 4\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau. \tag{2.20}$$

Из этого неравенства в силу леммы Гронуолла вытекает оценка

$$\|y\|_{L_\infty^1}^2 + \|y\|_{L_2^2}^2 \leqslant c(\|y\|_{L_2^0}^2, \|u\|_{L_2^0}). \tag{2.21}$$

Выразив из (2.18) $\dot{y}$ и используя (3.4.21), получим

$$\|\dot{y}\|_{L_2^0} \leqslant \|y\|_{L_2^2} + \|y\|_{L_\infty^1} \|y\|_{L_2^2} + \|u\|_{L_2^0}. \tag{2.22}$$

Из (2.21), (2.22) легко выводится, что $y \in \mathcal{Y}^2$.

Рассмотрим теперь случай $d = 2$, $\alpha = d/2 = 1$. Умножая (2.18) на $A^{1/2}y$ скалярно в V^0, аналогично (2.19) получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|y(t)\|_{1/2}^2 + \int\limits_0^t \|y\|_{3/2}^2 d\tau \\
&\leqslant C_1 \int\limits_0^t \|y\|_{L_4}\|y\|_1\|A^{1/2}y\|_{L_4} d\tau + \int\limits_0^t \|y\|_1\|u\|_0 d\tau \\
&\leqslant C_2 \int\limits_0^t \|y\|_{1/2}\|y\|_1\|y\|_{3/2} d\tau + \|u\|_{L_2^0}\Big(\int\limits_0^t \|y\|_1^2 d\tau\Big)^{1/2} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|y\|_{3/2}^2 d\tau + C_3 \int\limits_0^t \|y\|_1^2\|y\|_{1/2}^2 d\tau + \|u\|_{L_2^0}\Big(\int\limits_0^t \|y\|_1^2 d\tau\Big)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Так как в силу энергетического неравенства (4.4.33)

$$\|u\|_{L_2^0}\Big(\int\limits_0^t \|y\|_1^2 d\tau\Big)^{1/2} \leqslant c\|u\|_{L_2^0}^2, \tag{2.24}$$

из (2.23), (2.24) и леммы Гронуолла следует, что

$$\|y\|_{L_\infty^{1/2}}^2 + \|y\|_{L_2^{3/2}}^2 \leqslant \mathrm{const}\,. \tag{2.25}$$

Поскольку в силу (2.25) имеем $y \in L_2^{3/2} \cap L_\infty^0$ и $3/2 > d/2 = 1$, из доказанного в случае $\alpha \in (d/2, 2]$ следует, что $y \in \mathcal{Y}^2$. □

В регулярном случае справедливо следующее уточнение теоремы 2.1.

Теорема 2.3. *Пусть* $\alpha \in (d/2, 2]$ *либо* $d = 2$ *и* $\alpha = 1$. *Пара* $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in \mathcal{Y}^2 \times L_2^0$, *удовлетворяющая соотношениям* (1.8)–(1.10), *является решением задачи* (1.8)–(1.10), (1.15) *тогда и только тогда, когда при любом* $\varphi \in \mathcal{Y}^2$ *выполняются соотношения* (2.1)–(2.3).

Доказательство. Так как $\widehat{y} \in \mathcal{Y}^2$, в силу леммы 3.5.2 функционал (2.4) продолжается по непрерывности с пространства Φ на пространство $\mathcal{Y}^2$. Так как в силу леммы 2.1 все решения $(\widehat{y}, \widehat{u})$ принадлежат $\mathcal{Y}^2 \times L_2^0$, все точки минимума функционала (2.4) принадлежат $\mathcal{Y}^2$. Это позволяет, повторяя доказательство теоремы 2.1 в обратном порядке, вывести достаточность условий (2.1)–(2.3). □

Отметим, что с помощью теоремы 2.3 можно вывести необходимые и достаточные условия экстремума также для задачи (1.8)–(1.12) при достаточно больших M. Это будет сделано в § 3 после доказательства теорем единственности для задач (1.8)–(1.12) и (1.8)–(1.10), (1.15).

§ 3. Единственность решения

Цель этого параграфа — доказать в регулярном случае единственность решения экстремальной задачи (1.8)–(1.10), (1.15) при малых значениях параметра N и единственность решения задачи (1.8)–(1.12) при больших значениях параметра M. Начнем с задачи (1.8)–(1.10), (1.15).

3.1. Предварительные утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть* $(\widehat{y},\widehat{u}) \equiv (y_N, u_N) \in \mathcal{Y}^2 \times L_2^0$ *— решение задачи* (1.8)–(1.10), (1.15), *а* $I(y,u) \equiv I_N(y,u)$ *— функционал из* (1.15). *Тогда*

$$I_N(y_N, u_N) \leqslant cN^{1/2}, \tag{3.1}$$

где константа c *не зависит от* $N < N_0$, *где* $N_0 > 0$ *фиксировано.*

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\ddot{z} - A^2 z - \frac{1}{N} A^\alpha z = 0, \tag{3.2}$$

$$\gamma_0 z = 0, \quad \gamma_T z = v, \tag{3.3}$$

где $v \in V^2$ — вектор из (1.10). Пусть $v = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k e_k$ — разложение вектора v по базису $\{e_k\}$, составленному из собственных векторов оператора A. Решение z задачи (3.2), (3.3) задается формулами

$$z(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t) e_i, \tag{3.4}$$

$$z_i(t) = v_i \operatorname{sh}\left(t\sqrt{\lambda_i^2 + \lambda_i^\alpha/N}\right) \Big/ \operatorname{sh}\left(T\sqrt{\lambda_i^2 + \lambda_i^\alpha/N}\right). \tag{3.5}$$

Используя (3.4), (3.5), определение (3.4.11) нормы пространства V^α и соотношение

$$\int_0^T \operatorname{sh}^2 \gamma t dt = \frac{1}{4\gamma}(\operatorname{sh}(2\gamma T) - 2\gamma T) \leqslant \frac{\operatorname{sh}(2\gamma T)}{4\gamma} \quad (\gamma > 0),$$

получим следующую оценку:

$$\|z\|_{L_2^2}^2 = \sum_k \lambda_k^2 v_k^2 \left(\int_0^T \operatorname{sh}^2\left(t\sqrt{\lambda_k^2 + \lambda_k^\alpha/N}\right) dt\right) \Big/ \operatorname{sh}^2\left(T\sqrt{\lambda_k^2 + \lambda_k^\alpha/N}\right)$$

$$\leqslant c \sum_k \lambda_k^2 v_k^2 (\lambda_k^2 + \lambda_k^\alpha/N)^{-1/2} \leqslant c_1 N^{1/2} \|v\|_{2-\alpha/2}^2. \tag{3.6}$$

Аналогично (3.6) при $\alpha \in (0,2]$ доказывается неравенство

$$\|\partial_t z\|_{L_2^\beta}^2 \leqslant c \sum_k \lambda_k^\beta v_k^2 \sqrt{\lambda_k^2 + \lambda_k^\alpha/N} \leqslant c_2 N^{-1/2} \|v\|_{\beta+1}^2. \tag{3.7}$$

Так как функция $\operatorname{sh}\tau$ монотонно возрастает, имеем

$$\begin{aligned}
&\|z\|^2_{L^1_\infty} \leqslant c_3\|z\|^2_{L^{3/2}_\infty}\\
&\leqslant c_3\sum_k \lambda_k^{3/2}\sup\nolimits_{t\in[0,T]}\left(\operatorname{sh}\left(t\sqrt{\lambda_k^2+\lambda_k^\alpha/N}\right)\Big/\operatorname{sh}\left(T\sqrt{\lambda_k^2+\lambda_k^\alpha/N}\right)\right)^2 v_k^2\\
&\leqslant c_3\|v\|^2_{3/2}.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

Отметим, что константы c_1, c_2, c_3 из (3.6)–(3.8) не зависят от $N < N_0$. С помощью (3.6)–(3.8) для оператора $\Theta(y)$, определенного в (1.8), выводится неравенство

$$\|\Theta(z)\|^2_{L^0_2} \leqslant CN^{-1/2}\|v\|^2_2. \tag{3.9}$$

Для решения (y_N, u_N) задачи (1.8)–(1.10), (1.15) из (3.6), (3.8) получим оценку $I_N(y_N, u_N) \leqslant I_N(z, \Theta(z)) \leqslant cN^{1/2}$, доказывающую (3.1). □

Лемма 3.2. *Пусть $\alpha \in (d/2, 2]$ либо $d = 2$, $\alpha = d/2 = 1$, $(y, u) \equiv (y_N, u_N) \in \mathcal{Y}^2 \times L^0_2$ — решение задачи* (1.8)–(1.10), (1.15). *Тогда при малых $N > 0$*

$$\|y_N\|^2_{L^1_\infty} \leqslant CN^{-1/2}, \quad \|y_N\|^2_{L^2_2} \leqslant CN^{-1/2}, \tag{3.10}$$

где c не зависит от N.

Доказательство. Из (3.1), (1.15) следует, что при малых N

$$\|y\|^2_{L^\alpha_2} \leqslant cN^{1/2}, \quad \|u\|^2_{L^0_2} \leqslant CN^{-1/2}. \tag{3.11}$$

Пусть сначала $\alpha \in (d/2, 2]$. Из (2.20) и (3.11) с помощью леммы Гронуолла выводится неравенство

$$\|y\|^2_{L^1_\infty} \leqslant 2\|u\|^2_{L^0_2}\exp(C_2\|y\|^2_{L^\alpha_2}) \leqslant cN^{-1/2}. \tag{3.12}$$

Подставляя (3.11), (3.12) в (2.20), получим второе неравенство в (3.10). Рассмотрим случай $d = 2$, $\alpha = d/2 = 1$. В силу (3.11) при $\alpha = 1$ левая часть (2.24) ограничена сверху константой, не зависящей от N. Поэтому из (2.23) и леммы Гронуолла аналогично (3.12) следуют неравенства

$$\|y\|^2_{L^{1/2}_\infty} \leqslant C, \quad \|y\|^2_{L^{3/2}_2} \leqslant C, \tag{3.13}$$

где C не зависит от N. Из (3.12) при $\alpha = 3/2$ и (3.13) следует (3.10_1), а в силу (2.20) получаем (3.10). □

3.2. Оценка сопряженной функции. Пусть $p = u_N$. Для доказательства единственности решения задачи (1.8)–(1.10), (1.15) при малом N необходимо оценить норму $\|p\|_{L^{1-\alpha}_\infty}$. Для этого воспользуемся уравнениями (1.8)–(1.10), (2.11). Запишем это соотношения в виде

$$\dot y + Ay - p = f(t), \quad y\big|_{t=0} = 0, \quad y\big|_{t=T} = v, \tag{3.14}$$

$$\dot p - N^{-1}A^\alpha y - Ap = g(t), \tag{3.15}$$

где

$$f(t) = -B(y), \quad g(t) = -B^*(p, y) - B(y, p). \tag{3.16}$$

Решим задачу (3.14), (3.15) предполагая, что f, g, v заданы, причем

$$f \in L_2^0, \quad g \in L_2^{-2}, \quad v \in V^2. \tag{3.17}$$

Прежде всего отметим, что решение (y, p) задачи (3.14), (3.15) единственно в пространстве $\mathcal{Y}^2 \times \mathcal{Y}^0$. Действительно, пусть $(y, p) \in \mathcal{Y}^2 \times \mathcal{Y}^0$ — решение задачи (3.14), (3.15) с $f \equiv g \equiv 0$, $v = 0$. Умножая уравнение в (3.14) на $p(t)$, а (3.15) на $y(t)$ скалярно в L_2^0 и складывая полученные тождества, после простых преобразований получаем равенство

$$\int_0^T (\|p\|_0^2 + N^{-1}\|y\|_\alpha^2)\, dt = 0,$$

которое доказывает, что $p(t) \equiv 0$ и $y(t) \equiv 0$.

Получим явные формулы для решения задачи (3.14), (3.15). С этой целью запишем уравнения в (3.14), (3.15) в матричной форме

$$\dot{w}(t) + \mathfrak{A} w(t) = h(t), \tag{3.18}$$

где

$$w(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ p(t) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} A, & -I \\ -N^{-1}A^\alpha, & -A \end{bmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

I — единичный оператор. Приведем матрицу $\mathfrak{A}$ в (3.18) к диагональной форме. Ее "собственными" значениями будут операторы

$$\pm\mu = \pm\sqrt{A^2 + N^{-1}A^\alpha}, \tag{3.20}$$

а проекторы на соответствующие "собственные подпространства" определяются по формулам

$$P_1 = (2\mu)^{-1}(\mu E + \mathfrak{A}), \quad P_2 = (2\mu)^{-1}(\mu E - \mathfrak{A}). \tag{3.21}$$

Подействовав на обе части уравнения в (3.18) оператором P_i, $i = 1, 2$, получим распавшуюся систему уравнений

$$\dot{w}_1 + \mu w_1 = h_1, \quad \dot{w}_2 - \mu w_2 = h_2, \tag{3.22}$$

$$w_i = P_i w, \quad h_i = P_i h, \quad i = 1, 2. \tag{3.23}$$

Из (3.22) следует, что

$$\begin{aligned} w_1(t) &= e^{-\mu t} w_1(0) + \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} h_1(\tau) d\tau, \\ w_2(t) &= e^{\mu(t-T)} w_2(T) - \int_t^T e^{\mu(t-\tau)} h_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Складывая оба уравнения в (3.24) и учитывая (3.23), (3.21), получим

$$w(t) = e^{-\mu t}P_1 w(0) + e^{\mu(t-T)}P_2 w(T) + \int\limits_0^t e^{-\mu(t-\tau)}P_1 h(\tau)d\tau$$
$$- \int\limits_t^T e^{\mu(t-\tau)}P_2 h(\tau)d\tau. \tag{3.25}$$

Положим в (3.25) $t = 0$, а затем $t = T$. Сложив полученные равенства, получим

$$(P_2 - e^{-\mu T}P_1)w(0) + (P_1 - e^{-\mu T}P_2)w(T)$$
$$= \int\limits_0^T (e^{-\mu(T-\tau)}P_1 h(\tau) - e^{-\mu\tau}P_2 h(\tau))d\tau. \tag{3.26}$$

Положим

$$\gamma p = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(T) \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Используя определение (3.19) матрицы $\mathfrak{A}$ и определения (3.21) операторов P_i и учитывая, что $w(0) = (0, p(0))$, $w(T) = (v, p(T))$, из (3.26) выводим равенство

$$\gamma p = \int\limits_0^T (e^{-\mu(T-\tau)}\Gamma P_1 h(\tau) - e^{-\mu\tau}\Gamma P_2 h(\tau))d\tau - \Gamma F, \tag{3.28}$$

где

$$\Gamma = (I - e^{-2\mu T})^{-1} \begin{pmatrix} (\mu - A) - e^{-\mu T}(\mu + A), I + e^{-\mu T} \\ e^{-\mu T}(\mu - A) - (\mu + A), I + e^{-\mu T} \end{pmatrix},$$
$$F = (2\mu)^{-1} \begin{pmatrix} [(\mu + A) - e^{-\mu T}(\mu - A)]v \\ -\frac{A^\alpha}{N}(I + e^{-\mu T})v \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Отметим, что по определению (3.20) μ — самосопряженный положительный оператор, и его собственные значения μ_k определяются по формуле

$$\mu_k = \sqrt{\lambda_k^2 + \lambda_k^\alpha / N}, \tag{3.30}$$

где $0 < \lambda_k \to \infty$ — собственные значения оператора A. Поэтому собственные значения оператора $I - e^{-2\mu T}$ равны $1 - e^{-2T\mu_k}$ и удовлетворяют оценке $1 - e^{-2T\lambda_1} \leqslant 1 - e^{-2T\lambda_k} \leqslant 1$. Следовательно, оператор $I - e^{-2\mu T}$ обратим и для обратного оператора справедлива оценка

$$\|z\|_\beta \leqslant \|(I - e^{-2T\mu})^{-1}z\|_\beta \leqslant (1 - e^{-2T\lambda_1})^{-1}\|z\|_\beta. \tag{3.31}$$

Тем самым обоснована, в частности, корректность первой формулы в (3.29). Для дальнейших оценок нам понадобятся формулы

$$\Gamma F = r\begin{pmatrix} -4\mu^2 e^{-\mu T} v \\ -[(\mu+A)^2 + \frac{A^\alpha}{N} + e^{-2\mu T}((\mu-A)^2 + \frac{A^\alpha}{N})]v \end{pmatrix}, \tag{3.32}$$

где $r = (I - e^{-2\mu T})^{-1}(2\mu)^{-1}$,

$$\Gamma P_1 = r\begin{pmatrix} -e^{-\mu T}((\mu+A)^2 + \dfrac{A^\alpha}{N}), 2\mu e^{-\mu T} \\ -(\mu+A)^2 - \dfrac{A^\alpha}{N}, 2\mu \end{pmatrix},$$

$$\Gamma P_2 = r\begin{pmatrix} (\mu-A)^2 + \dfrac{A^\alpha}{N}, 2\mu \\ e^{-\mu T}[(\mu-A)^2 + \dfrac{A^\alpha}{N}], 2\mu e^{-\mu T} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Лемма 3.3. *Пусть $h(t) = (f(t), g(t)) \in L_2^{\beta+1} \times L_2^{\beta-1}$, $v \in V^{\beta+2}$. Тогда для координаты $p(t)$ вектора $(y(t), p(t))$, определенного в* (3.19), (3.25), *справедливы оценки*

$$\|p\|_{L_\infty^\beta} \leqslant c(\|f\|_{L_2^{\beta+1}} + N^{-1/4}\|f\|_{L_2^{\beta+\alpha/2}} + \|g\|_{L_2^{\beta-1}} + N^{-1/2}\|v\|_{\beta+2}), \tag{3.34}$$

$$\|p\|_{L_2^\beta} \leqslant c(\|f\|_{L_2^\beta} + \|g\|_{L_2^{\beta-2}} + N^{-1/4}\|v\|_{\beta+1}). \tag{3.35}$$

Доказательство. Пусть $\varphi_k(t) \in L_2(0,T)$, $\mu_k > 0$,

$$\zeta_k = \int_0^t e^{-\mu_k(t-\tau)}\varphi_k(\tau)d\tau.$$

Тогда (см., например, Вишик, Фурсиков [1 с. 28])

$$\|\zeta_k\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant \mu_k^{-2}\|\varphi_k\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{3.36}$$

Кроме того (см. Вишик, Фурсиков [1 с. 26])

$$\mu_k\|\zeta_k\|^2_{L_\infty(0,T)} \leqslant \mu_k^2\|\zeta_k\|^2_{L_2(0,T)} + \|\partial_t\zeta_k\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant c\|\varphi_k\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{3.37}$$

Положим

$$\zeta(t) = \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\varphi(\tau)d\tau, \quad \eta(t) = \int_t^T e^{\mu(t-\tau)}\psi(\tau)d\tau, \tag{3.38}$$

где μ — оператор (3.20), $\zeta(t) = \sum \zeta_k(t)e_k$, $\varphi(\tau) = \sum \varphi_k(\tau)e_k$. В силу (3.36)

$$\|\zeta\|^2_{L_2^\beta} = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\beta\|\zeta_k\|^2_{L_2(0,T)} \leqslant \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\beta\mu_k^{-2}\|\varphi_k\|^2_{L_2(0,T)} = \|\mu^{-1}\varphi\|^2_{L_2^\beta}. \tag{3.39}$$

Аналогично, в силу (3.37)

$$\|\zeta\|^2_{L^\beta_\infty} \leqslant c\|\mu^{-1/2}\varphi\|^2_{L^\beta_2}. \tag{3.40}$$

Интеграл, определяющий η в (3.38), с помощью простой замены переменных переходит в интеграл, определяющий ζ. Поэтому аналогично (3.39), (3.40) получаем

$$\|\eta\|^2_{L^\beta_2} \leqslant \|\mu^{-1}\psi\|^2_{L^\beta_2}, \quad \|\eta\|^2_{L^\beta_\infty}, \leqslant c\|\mu^{-1/2}\psi\|^2_{L^\beta_2}. \tag{3.41}$$

Везде ниже в этом доказательстве j-я координата вектора a будет обозначаться символом a^j (т. е. $a = (a^1, a^2, \ldots, a^i, \ldots)$. Покажем, что справедливы неравенства

$$\|(\Gamma P_i h)^k\|_\beta \leqslant c(\|\mu f\|_\beta + \|g\|_\beta), \quad \|(\Gamma F)^k\|_\beta \leqslant \|\mu v\|_\beta, \tag{3.42}$$

где $k = 1, 2$, $i = 1, 2$. Так как все оценки в (3.42) получаются одинаково, рассмотрим для определенности $(\Gamma P_1 h)^2$. В силу (3.30) $\lambda_k \leqslant \mu_k$ и $\lambda_k^\alpha/N \leqslant \mu_k^2$. Учитывая (3.33) и (3.31), получим

$$\begin{aligned}
&\|(\Gamma P_1 h)^2\|^2_\beta \leqslant c\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\beta[\mu_k^{-2}((\mu_k+\lambda_k)^2 + \lambda_k^\alpha/N)^2|f_k|^2 + 2|g_k|^2] \\
&\leqslant c(\|\mu f\|^2_\beta + \|g\|^2_\beta).
\end{aligned}$$

Используя (3.40)–(3.42) и (3.30), оценим γp из равенства (3.28):

$$\begin{aligned}
&\|p(0)\|_\beta + \|p(T)\|_\beta \leqslant c\Bigg(\sum_{i,k=1}^2 \|(\Gamma P_i \mu^{-1/2} h)^k\|_{L^\beta_2} + \|\mu v\|_\beta\Bigg) \\
&\leqslant c(\|\mu^{1/2} f\|_{L^\beta_2} + \|\mu^{-1/2} g\|_{L^\beta_2} + \|\mu v\|_\beta) \\
&\leqslant c(\|f\|_{L^{\beta+1}_2} + N^{-1/4}\|f\|_{L^{\beta+\alpha/2}_2} + \|g\|_{L^{\beta-1}_2} + N^{-1/2}\|v\|_{\beta+2}).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Так как $w(0) = (0, p(0))$ и $w(T) = (v, p(T))$, из определения (3.21) операторов P_i получаем

$$\begin{aligned}
&\sup_t \|e^{\mu(t-T)}(P_2 w(T))^2\|_\beta \leqslant c\left(\left\|\frac{A^\alpha}{N}\mu^{-1}v\right\|_\beta + \left\|\mu^{-1}(\mu + A)p(T)\right\|_\beta\right) \\
&\leqslant c_1(N^{-1/2}\|v\|_{\beta+2} + \|p(T)\|_\beta),
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\sup_t \|e^{-\mu t}(P_1 w(0))^2\|_\beta \leqslant c\|p(0)\|_\beta. \tag{3.45}$$

Теперь равенство (3.34) выводится из соотношения (3.25) аналогично оценке (3.43) с помощью (3.39)–(3.45).

Выведем (3.35). Аналогично (3.44), (3.45)

$$\begin{aligned}
&\|e^{\mu(\cdot-T)}(P_2 w(T))^2\|_{L^\beta_2} \leqslant \|\mu^{-1/2}(P_2 w(T))^2\|_\beta \\
&\leqslant c(\|v\|_{\beta+1}N^{-1/4} + \|\mu^{-1/2}p(T)\|_\beta),
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\|e^{-\mu\cdot}(P_1w(0))^2\|_{L_2^\beta} \leqslant c\|\mu^{-1/2}p(0)\|_\beta. \tag{3.47}$$

Применяя к (3.28) оператор $\mu^{-1/2}$ и рассуждая как при выводе (3.43), получим

$$\|\mu^{-1/2}p(T)\|_\beta + \|\mu^{-1/2}p(0)\|_\beta \leqslant c(\|f\|_{L_2^\beta} + \|g\|_{L_2^{\beta-2}} + N^{-1/4}\|v\|_{\beta+1}). \tag{3.48}$$

Из соотношения (3.25) с помощью (3.46)–(3.48), (3.39), (3.41) находим

$$\begin{aligned}
&\|p\|_{L_2^\beta} \leqslant c(\|f\|_{L_2^\beta} + \|g\|_{L_2^{\beta-2}} + N^{-1/4}\|v\|_{\beta+1}) + \|\mu^{-1}(P_1h)^2\|_{L_2^\beta}\\
&+ \|\mu^{-1}(P_2h)^2\|_{L_2^\beta} \leqslant c(\|f\|_{L_2^\beta} + \|g\|_{L_2^{\beta-2}} + \|v\|_{\beta+1}N^{-1/4}) + c_1(\|f\|_{L_2^\beta}\\
&+ \|\mu^{-1}g\|_{L_2^\beta}) \leqslant c_2(\|f\|_{L_2^\beta} + \|g\|_{L_2^{\beta-2}} + N^{-1/4}\|v\|_{\beta+1}).
\end{aligned}$$

Эта оценка доказывает (3.35). □

Мы будем использовать оценки (3.34), (3.35) при более слабых предположениях на f, чем в лемме 3.3.

Лемма 3.4. *Пусть* $h(t) = (f,g) \in L_2(0,T;V^0 \cap (H_2^{\beta+1}(\Omega))^d) \times L_2^{\beta-1}$ *и* $v \in V^{\beta+2}$, *где* $\beta < 1/2$. *Тогда компонента* p *вектора* $w = (y,p)$ *в* (3.25) *удовлетворяет оценкам*

$$\begin{aligned}
&\|p\|_{L_\infty^\beta} \leqslant c(\|f\|_{L_2(0,T;V^0\cap(H^{\beta+1}(\Omega))^d)} + N^{-1/4}\|f\|_{L_2(0,T;V^0\cap(H^{\beta+\frac{\alpha}{2}}(\Omega))^d)}\\
&+ \|g\|_{L_2^{\beta-1}} + N^{-1/2}\|v\|_{\beta+2},
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\|p\|_{L_2^{\beta+1}} \leqslant c(\|f\|_{L_2(0,T;V^0\cap(H^{\beta+1}(\Omega))^d)} + \|g\|_{L_2^{\beta-1}} + N^{-1/4}\|v\|_{\beta+2}), \tag{3.50}$$

где $H^\beta(\Omega)$ *— пространство Соболева.*

Доказательство. Анализ доказательства леммы 3.3 показывает, что в модификации нуждается лишь последнее неравенство в (3.43). Точнее, необходимо доказать следующие оценки для $f \in V^0 \cap (H^{\beta+1}(\Omega))^d$:

$$\|\sqrt{A}f\|_\beta \leqslant c(\|f\|_{H^{\beta+1}} + \|f\|_0), \quad \beta < 1/2, \tag{3.51}$$

$$\|A^{\alpha/4}f\|_\beta \leqslant c(\|f\|_{H^{\beta+\alpha/2}} + \|f\|_0), \quad \beta \in [-1,0], \alpha \in [1,2]. \tag{3.52}$$

Отметим, что $\sqrt{A}f$ и $A^{\alpha/4}f$ корректно определены, так как $f \in V^0$. Докажем (3.51) с $\beta \in (0,1/2)$. Пусть $\varphi \in V^{1+\beta} \cap (C^\infty(\Omega))^d$ и $f \in V^\beta \cap (C^\infty(\Omega))^d$. Используя формулу Грина и равенство $A^{\beta/2}\varphi\big|_{\partial\Omega} = 0$ (вытекающее из включения $\varphi \in V^{1+\beta}$), после простых преобразований получим

$$\begin{aligned}
&|(\sqrt{A}f, \sqrt{A}\varphi)_\beta| = \left|\int\limits_\Omega \Delta A^{\beta/2}f \cdot A^{\beta/2}\varphi dx\right| = \left|\int\limits_\Omega \nabla A^{\beta/2}f \cdot \nabla A^{\beta/2}\varphi dx\right|\\
&\leqslant c\|A^{\beta/2}f\|_{H^1}\|A^{\beta/2}\varphi\|_1 \leqslant c\|f\|_{H^{1+\beta}}\|\sqrt{A}\varphi\|_\beta.
\end{aligned}$$

Отсюда следует оценка (3.51) при $\beta \in (0, 1/2)$. Так как неравенство (3.51) при $\beta \leqslant -1$ очевидно, оценка (3.51) при $\beta \in (-1, 0)$ следует из теоремы об интерполяции (см. Лионс, Мадженес [2]). Положим $\beta_1 = \alpha/2 + \beta - 1$. Используя (3.51), получим

$$\|A^{\alpha/4} f\|_\beta = \|\sqrt{A} f\|_{\beta_1} \leqslant c(\|f\|_{H^{\beta_1+1}} + \|f\|_0) = c(\|f\|_{H^{\beta+\alpha/2}} + \|f\|_0).$$

Эта оценка доказывает (3.52). □

Лемма 3.5. *Пусть $\alpha \in (d/2, 2]$ или $d = 2$, $\alpha = d/2 = 1$, $(y, u) = (y_N, u_N) \in \mathcal{Y}^2 \times L_2^0$ — решение задачи (1.8)–(1.10), (1.15) и $p = p_N = u_N$ — двойственная функция. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1/20)$ существует константа b, не зависящая от N, такая, что*

$$\|p\|_{L_\infty^{1-d/2+\varepsilon}} \leqslant bN^{-7/8}. \tag{3.53}$$

Доказательство. В силу (3.16), лемм 3.4.2, 3.4.7 и соотношений (3.10), (3.11)

$$\begin{aligned} &\|f\|_{L_2(0,T;V^0\cap H^{2-d/2-\varepsilon})} = \|B(y,y)\|_{L_2(0,T;V^0\cap H^{2-d/2-\varepsilon})} \\ &\leqslant c\,\|y\|_{L_\infty^1}\|y\|_{L_2^2} \leqslant cN^{-1/2}, \end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} &\|g\|_{L_2^{-d/2-\varepsilon}} \leqslant \|B^*(p,y)\|_{L_2^{-d/2-\varepsilon}} + \|B(y,p)\|_{L_2^{-d/2-\varepsilon}} \\ &\leqslant c\,\|p\|_{L_2^0}\|y\|_{L_1^\infty} \leqslant cN^{-1/2}, \end{aligned} \tag{3.55}$$

если $\varepsilon > 0$. В силу (3.50) при $\beta = 1 - d/2 - \varepsilon$ и (3.54), (3.55) имеем

$$\|p\|_{L_2^{2-d/2-\varepsilon}} \leqslant cN^{-1/2}. \tag{3.56}$$

Из (3.4.13), (3.56), (3.11) следует неравенство

$$\|p\|_{L_2^\varepsilon} \leqslant \|p\|_{L_2^0}^{\frac{2-d/2-2\varepsilon}{2-d/2-\varepsilon}} \|p\|_{L_2^{2-d/2-\varepsilon}}^{\frac{\varepsilon}{2-d/2-\varepsilon}} \leqslant cN^{-\frac{2-d/2}{4(2-d/2-\varepsilon)}}, \quad 0 < \varepsilon < 1/4. \tag{3.57}$$

Нам потребуется оценка

$$\|y\|_{L_2^{1+\varepsilon}} \leqslant cN^{-\frac{2-d/2}{4(2-d/2-\varepsilon)}}, \quad \|y\|_{L_2^{2+\varepsilon}} \leqslant cN^{-\frac{2-d/2}{4(2-d/2-\varepsilon)}}, \quad 0 < \varepsilon < 1/4. \tag{3.58}$$

Для доказательства умножим скалярно в V^0 уравнение (1.8) с $u = p$ на $A^{1+\varepsilon} y$ и, так же, как в (2.19), с помощью леммы 3.4.6 и следствия 3.4.1 получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|y(t)\|_{1+\varepsilon}^2 + \int_0^t \|y(t)\|_{2+\varepsilon}^2 dt \leqslant \int_0^t \|p\|_\varepsilon \|y\|_{2+\varepsilon} dt + \int_0^t \|B(y,y)\|_\varepsilon \|y\|_{2+\varepsilon} dt \\ &\leqslant \|p\|_{L_2^\varepsilon}^2 + \frac{1}{4}\int_0^t \|y\|_{2+\varepsilon}^2 dt + c\int_0^t \|y\|_{3/2}^2 \|y\|_{1+\varepsilon}^2 dt. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства, (3.13) и леммы Гронуолла следует оценка

$$\|y\|^2_{L^{1+\varepsilon}_\infty} + \|y\|^2_{L^{2+\varepsilon}_2} \leqslant c\|p\|^2_{L^\varepsilon_2}$$

Из этого неравенства и (3.57) вытекает (3.58).

Из (3.16), (3.57), (3.58), (3.10) с помощью лемм 3.4.7 и 3.4.2 аналогично (3.54), (3.55) выводятся неравенства

$$\|f\|_{L_2(0,T;H^{2-d/2})} \leqslant \|f\|_{L_2(0,T;H^{2-d/2+\varepsilon})} \leqslant c\,\|y\|_{L^{1+2\varepsilon}_\infty}\|y\|_{L^{2+2\varepsilon}_2}$$
$$\leqslant cN^{-\frac{2-d/2}{2(2-d/2-2\varepsilon)}}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1/8, \tag{3.59}$$
$$\|g\|_{L_2^{-d/2}} \leqslant \|B^*(p,y)\|_{L_2^{-d/2}} + \|B(y,p)\|_{L_2^{-d/2}} \leqslant c\,\|p\|_{L^\varepsilon_2}\|y\|_{L^1_\infty}$$
$$\leqslant cN^{-\frac{2(2-d/2)-\varepsilon}{4(2-d/2-\varepsilon)}}, \quad 0<\varepsilon<1/4. \tag{3.60}$$

Из (3.50) с $\beta = 1-d/2$, (3.59), (3.60) вытекает оценка

$$\|p\|_{L_2^{2-d/2}} \leqslant c(N^{-\frac{2-d/2}{2(2-d/2-2\varepsilon)}} + N^{-\frac{2-d/2-\frac{\varepsilon}{2}}{2(2-d/2-\varepsilon)}})$$
$$\leqslant cN^{-\frac{2-d/2}{2(2-d/2-2\varepsilon)}}, \quad 0<\varepsilon<1/8. \tag{3.61}$$

Используя (3.61), (3.57), (3.10) имеем

$$\|g\|_{L_2^{-d/2+\varepsilon}} \leqslant \|B^*(p,y)\|_{L_2^{-d/2+\varepsilon}} + \|B(y,p)\|_{L_2^{-d/2+\varepsilon}} \leqslant c(\|p\|_{L_2^{2\varepsilon}}\|y\|_{L^1_\infty}$$
$$+ \|p\|_{L_2^{2-d/2}}\|y\|_{L^1_\infty}) \leqslant c(N^{-\frac{2-d/2}{4(2-d/2-2\varepsilon)}} + N^{-\frac{2-d/2}{2(2-d/2-2\varepsilon)}})N^{-1/4}$$
$$\leqslant cN^{-\frac{2-d/2-\varepsilon}{2(2-d/2-2\varepsilon)}-\frac{1}{4}}, \tag{3.62}$$

если $0<\varepsilon<1/8$. Так как $\alpha\leqslant 2$, имеем

$$\|f\|_{L_2(0,T;H^{\beta+\frac{\alpha}{2}})} \leqslant c\,\|f\|_{L_2(0,T;H^{\beta+1})}.$$

Поэтому из (3.49) с $\beta = 1-d/2+\varepsilon$, используя (3.59), (3.62) при $0<\varepsilon<1/20$ находим

$$\|p\|_{L^{1-d/2+\varepsilon}_\infty} \leqslant c_1(1+N^{-1/4})N^{-\frac{2-d/2}{2(2-d/2-2\varepsilon)}} + c_2N^{-\frac{2-d/2-\varepsilon}{2(2-d/2-2\varepsilon)}-1/4}$$
$$+ c_3N^{-1/4} \leqslant cN^{-7/8}.$$

Это неравенство доказывает (3.53). □

3.3. Теорема единственности в случае компромиссных функционалов. Докажем теоремы единственности решения задачи (1.8)–(1.10), (1.15).

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha\in(d/2,2]$ или $d=2$, $\alpha=d/2=1$. Существует положительная константа $N_0=N_0(v)$ такая, что для любого $N\in(0,N_0)$ решение задачи* (1.8)–(1.10), (1.15) *единственно.*

Доказательство. Пусть (y_i,u_i), $i=1,2,$ — два разных решения задачи (1.8)–(1.10), (1.15) и $p_i=u_i$. Тогда (y_i,p_i) удовлетворяют (1.8)–(1.10), (2.11)

и, следовательно, для $\delta = y_1 - y_2$, $q = p_1 - p_2$ выполнены соотношения

$$\dot{\delta} + A\delta - q + B(\delta, y_1) + B(y_2, \delta) = 0, \quad \delta\big|_{t=0} = \delta\big|_{t=T} = 0, \tag{3.63}$$

$$\dot{q} - Aq - N^{-1}A^{\alpha}\delta + B^*(q, y_1) + B^*(p_2, \delta) + B(\delta, p_1) + B(y_2, q) = 0. \tag{3.64}$$

В силу леммы 2.1 $\delta \in \mathcal{Y}^2$, а из (3.55) и (2.11) легко вывести, что $q \in \mathcal{Y}^0$. Учитывая это, умножим скалярно в L_2^0 уравнение из (3.63) на q и уравнение (3.64) на δ и сложим полученные равенства. Используя граничные условия из (3.63) и соотношения (3.4.15), (3.4.20), (2.10), получим

$$\int_0^T \Big[\frac{d}{dt}(q, \delta)_0 - \|q\|_0^2 - N^{-1}\|\delta\|_\alpha^2 + (B(\delta, y_1), q)_0 + (B(y_2, \delta), q)_0$$

$$+ (B^*(q, y_1), \delta)_0 + (B(y_2, q), \delta)_0 + (B^*(p_2, \delta), \delta)_0 + (B(\delta, p_1), \delta)_0\Big]\, dt$$

$$= -\int_0^T (\|q\|_0^2 + N^{-1}\|\delta\|_\alpha^2 + (B(\delta), p_1 + p_2)_0)\, dt = 0. \tag{3.65}$$

Пусть $\alpha \in [d/2, 2]$. Так как в силу леммы 3.4.6 при $0 < \varepsilon < 1/20$

$$|(B(\delta), p_1 + p_2)| \leqslant c\|\delta\|_\alpha^2 (\|p_1\|_{1-d/2+\varepsilon} + \|p_2\|_{1-d/2+\varepsilon}),$$

из (3.65), (3.53) следует, что при достаточно малом N

$$0 \geqslant \int_0^T (\|q\|_0^2 + N^{-1}\|\delta\|_\alpha^2)\, dt - c(\|p_1\|_{L_\infty^{1-d/2+\varepsilon}} + \|p_2\|_{L_\infty^{1-d/2+\varepsilon}})\|\delta\|_{L_2^\alpha}^2$$

$$\geqslant \|q\|_{L_2^0}^2 + (N^{-1} - cN^{-3/4})\|\delta\|_{L_2^\alpha}^2 > 0.$$

Мы пришли к противоречию. □

3.4. Теорема единственности в случае жесткого управления. Перейдем к исследованию единственности решения задачи (1.8)–(1.12). Для этого потребуются некоторые сведения о задаче (1.8)–(1.10), (1.15). Положим

$$\varphi(N) = \|u_N\|_{L_2^0}^2, \tag{3.66}$$

где (y_N, u_N) — решение задачи (1.8)–(1.10), (1.15) и N — значение параметра в (1.15).

Лемма 3.6. *Пусть $\alpha \in (d/2, 2)$ или $d = 2$, $\alpha = 1$. Существует $N_0 > 0$ такое, что*

$$\varphi(N) \in C(0, N_0), \tag{3.67}$$

$$\lim_{N \to 0} \varphi(N) = \infty. \tag{3.68}$$

Доказательство. Пусть $N_0 = N_0(v)$ — то же число, что и в теореме 3.1. Предположим, что $\varphi(N)$ разрывна в некоторой точке $\widehat{N} \in (0, N_0)$. Тогда

существует последовательность $\{N_i\}$ такая, что

$$\lim_{i\to\infty} N_i = \widehat{N}, \quad \lim_{i\to\infty} \varphi(N_i) = \widehat{\varphi} \neq \varphi(\widehat{N}). \tag{3.69}$$

Если $(y_{N_i}, u_{N_i}) \in L_2^\alpha \times L_2^0$ — решение задачи (1.8)–(1.10), (1.15) с параметром $N = N_i$, то для некоторой подпоследовательности $\{N_i'\}$ последовательности $\{N_i\}$

$$(y_{N_i'}, u_{N_i'}) \to (y_{\widehat{N}}, u_{\widehat{N}}) \text{ слабо в } L_2^\alpha \times L_2^0 \text{ при } i \to \infty. \tag{3.70}$$

Доказательство утверждения (3.70) аналогично доказательству теоремы 1.2.4. В силу (3.70) и полунепрерывности снизу гильбертовой нормы относительно слабой сходимости имеем

$$\varphi(\widehat{N}) \leqslant \underline{\lim}\varphi(N_i). \tag{3.71}$$

Следовательно,

$$\widehat{\varphi} > \varphi(\widehat{N}). \tag{3.72}$$

Рассмотрим функцию $J(N) = I_N(y_N, u_N)$, где $I = I_N$ — функционал (1.15). Функция $J(N)$ — минимум функционала $I_N(y, u)$, аналитически зависящего от параметра N и непрерывного по (y, u) на множестве $\mathfrak{A}$ допустимых элементов, снабженном топологией пространства $\mathcal{Y}^2 \times L_2^0$. Следовательно, $J(N)$ непрерывна по $N \in (0, N_0)$. Поэтому из (3.71) следует противоречащее (3.70) соотношение $\lim_{i\to\infty} \|y_{N_i}\|_{L_2^\alpha} \leqslant k < \|\widehat{y}\|_{L_2^\alpha}$.

Докажем (3.68). Допустим противное, т. е.

$$\|u_{N_i}\|_{L_2^0} \leqslant c \tag{3.73}$$

для некоторой последовательности $N_i \to 0$. Так как $\alpha \geqslant 1$, в силу (3.1) имеем

$$\|y_N\|^2_{L_2^1} \leqslant J_N(y_N, u_N) \to 0, \quad N \to 0. \tag{3.74}$$

Умножив дифференциальное уравнение в (1.8) на y_N, в силу (1.6), (3.73), (3.74) получим

$$\|v\|_0^2 + \|y_{N_i}\|^2_{L_2^1} = \int_0^T (u_{N_i}(\tau, \cdot), y_{N_i}(\tau, \cdot))_0 d\tau \to 0, \quad N_i \to 0,$$

откуда $v = 0$. □

Докажем единственность решения задачи (1.8)–(1.12).

Теорема 3.2. *Пусть $\alpha \in (d/2, 2]$ либо $d = 2$, $\alpha = 1$. Существует константа $M_1 = M_1(v)$ такая, что при $M > M_1$ решение (y^M, u^M) задачи* (1.8)–(1.12) *единственно в $Y_1 \times L_2^0$, где Y_1 — пространство* (1.16).

Доказательство. В силу предложения 1.1 для компоненты u^M решения (y^M, u^M) задачи (1.8)–(1.12) справедливо соотношение (1.23). Предположим, что существует $N = N(M)$ такое, что для компоненты $u_{N(M)}$

решения $(y_{N(M)}, u_{N(M)})$ задачи (1.8)–(1.10), (1.15) имеем

$$\|u_{N(M)}\|^2_{L^0_2} = M^2. \tag{3.75}$$

Легко видеть, что множество решений (y^M, u^M) задачи (1.8)–(1.12) содержится в множестве решений $(y_{N(M)}, u_{N(M)})$ задачи (1.8)–(1.10), (1.15). Пусть $N_0 = N_0(v)$ — константа из теоремы 3.1, $N_1 < N_0$, $M_1 = \varphi(N_1)$, где φ — функция (3.71). Согласно лемме 3.6 при любом $M > M_1$ найдется число $N \in (0, N_1)$ такое, что $\varphi(N) = M^2$. Это число N по определению равно числу $N(M) \in (0, N_1)$, для которого выполнено (3.75). Но в силу теоремы 3.1 решение $(y_{N(M)}, u_{N(M)})$ задачи (1.8)–(1.10), (1.15) единственно. Поэтому единственно также решение (y^M, u^M) задачи (1.8)–(1.12). □

3.5. Необходимые и достаточные условия минимума в случае жесткого управления. С помощью леммы 3.6 и теоремы 3.2 получим необходимые и достаточные условия минимума в задаче (1.8)–(1.12).

Теорема 3.3. *Пусть $\alpha \in (d/2, 2]$ или $d = 2$, $\alpha = 1$, а $M_1 = M_1(v)$ — константа из теоремы 3.2. Тогда пара $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in \mathcal{Y}^2 \times L^0_2$ является решением задачи (1.8)–(1.12) при $M > M_1$ тогда и только тогда, когда существует константа $N = N(M) > 0$ такая, что выполнены соотношения (1.8)–(1.10), (1.23), (2.1)–(2.3).*

Доказательство. Пусть $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in \mathcal{Y}^2 \times L^0_2$ — решение задачи (1.8)–(1.12). При доказательстве теоремы 3.2 установлено, что пара $(\widehat{y}, \widehat{u})$ является решением задачи (1.8)–(1.10), (1.15) с некоторым $N = N(M)$. Поэтому согласно теореме 2.1 $(\widehat{y}, \widehat{u})$ удовлетворяет соотношениям (2.1)–(2.3) с этой константой N. Соотношение (1.23) справедливо в силу предложения 1.1.

Пусть пара $(\widehat{y}, \widehat{u}) \in \mathcal{Y}^2 \times L^0_2$ удовлетворяет соотношениям (1.8)–(1.10), (1.23), (2.1)–(2.3) с некоторыми $N > 0$, $M > 0$. В силу теоремы 2.3 $(\widehat{y}, \widehat{u})$ — решение задачи (1.8)–(1.10), (1.15). Предположив, что $(\widehat{y}, \widehat{u})$ не является решением задачи (1.8)–(1.12), обозначим решение этой задачи через $(\widetilde{y}, \widetilde{u})$. Тогда

$$\|\widetilde{y}\|^2_{L^\alpha_2} < \|\widehat{y}\|^2_{L^\alpha_2}. \tag{3.76}$$

Применяя к $(\widetilde{y}, \widehat{u})$ предложение 1.1 и учитывая, что $\widehat{u}$ удовлетворяет (1.23), получим

$$\|\widehat{u}\|^2_{L^0_2} = \|\widetilde{u}\|^2_{L^0_2} = M^2. \tag{3.77}$$

Из (3.76), (3.77) следует неравенство $I_N(\widetilde{y}, \widetilde{u}) < I_N(\widehat{y}, \widehat{u})$, противоречащее тому, что $(\widehat{y}, \widehat{u})$ — решение задачи (1.8)–(1.10), (1.15). □

§ 4. Асимптотика решений экстремальных задач

В этом параграфе будет построена асимптотика решений задач (1.8)–(1.12) и (1.8)–(1.10), (1.15) при $M \to \infty$ и $N \to 0$ соответственно. Для краткости мы ограничимся случаем $d = 2$, $\alpha = 1$, когда задачу (1.8)–(1.12) можно трактовать как задачу о минимизации работы при выводе скорости течения жидкости на заданное векторное поле.

4.1. Асимптотика решения задачи с компромиссным функционалом.

Теорема 4.1. *Пусть* $d = 2$, $\alpha = 1$, $(\widehat{y}, \widehat{u}) \equiv (y_N, u_N)$ — *решение задачи* (1.8)–(1.10), (1.15), *а* z — *функция, определенная равенствами* (3.4), (3.5). *Тогда при достаточно малых* $N > 0$ *справедливы неравенства*

$$\|y_N - z\|^2_{L^2_2} + \|\dot{y}_N - \dot{z}\|^2_{L^0_2} + N^{-1}\|y_N - z\|^2_{L^1_2} \leqslant cN^{1/2}, \tag{4.1}$$

$$\|u_N - \Theta(z)\|^2_{L^0_2} \leqslant cN^{1/2}, \tag{4.2}$$

где константа c *не зависит от* N, *а* Θ — *оператор из* (1.8).

Доказательство. Подставим в (2.11) $p = u_N = \Theta(y_N)$, где Θ — оператор, определенный в (1.8). Тогда y_N удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}&\ddot{y}_N - A^2 y_N - N^{-1}Ay_N + \frac{d}{dt}B(y_N) + B^*(\dot{y}_N, y_N) + B(y_N, \dot{y}_N) - AB(y_N)\\ &+ B^*(Ay_N, y_N) + B(y_N, Ay_N) + B^*(B(y_N), y_N) + B(y_N, B(y_N)) = 0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Положим $\delta = y_N - z$. Отметим, что z удовлетворяет уравнению (3.2) и краевым условиям (3.3). Поэтому, учитывая краевые условия (1.9), (1.10), получим краевые условия для δ

$$\delta\big|_{t=0} = 0, \quad \delta\big|_{t=T} = 0. \tag{4.4}$$

Вычтем из (4.3) уравнение (3.2). В полученных уравнениях в операторах B, B^* заменим y_N на $\delta + z$. Воспользовавшись билинейностью B и B^*, выводим следующее уравнение, не содержащее y_N:

$$\ddot{\delta} - A^2\delta - N^{-1}A\delta + \sum_{i=1}^{4} P_i = 0, \tag{4.5}$$

где

$$\begin{aligned}P_1 = {}&\frac{d}{dt}B(z) + B^*(\dot{z}, z) + B(z, \dot{z}) - AB(z) + B^*(Az, z)\\ &+ B(z, Az) + B^*(B(z), z) + B(z, B(z)),\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$P_2 = \frac{d}{dt}B(\delta) + B^*(\dot{\delta}, \delta) + B(\delta, \dot{\delta}) - AB(\delta) + B^*(A\delta, \delta) + B(\delta, A\delta), \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}P_3 = {}&B^*(B(z, \delta) + B(\delta, z) + B(\delta), z + \delta) + B^*(B(z), \delta)\\ &+ B(z + \delta, B(z, \delta) + B(\delta, z) + B(\delta)) + B(\delta, B(z)),\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}P_4 = {}&\frac{d}{dt}(B(z, \delta) + B(\delta, z)) + B^*(\dot{z}, \delta) + B^*(\dot{\delta}, z)\\ &+ B(z, \dot{\delta}) + B(\delta, \dot{z}) - A(B(z, \delta) + B(\delta, z))\\ &+ B^*(Az, \delta) + B^*(A\delta, z) + B(z, A\delta) + B(\delta, Az).\end{aligned} \tag{4.9}$$

Для выражений P_i справедливы оценки, которые мы приведем в виде отдельной леммы. Эта лемма будет доказана после доказательства теоремы.

Лемма 4.1. *Справедливы следующие неравенства:*

$$|(P_i,\delta)_{L_2^0}| \leqslant kN^{1/2} + \frac{1}{8}(\|\dot\delta\|^2_{L_2^0} + \|\delta\|^2_{L_2^2} + \|\delta\|^2_{L_2^1}/N) + k_1\|\delta\|^2_{L_2^1} \tag{4.10}$$

при $i = 1,2,3,4$, *где* k, k_1 *— константы, не зависящие от* N.

Умножим обе части уравнения (4.5) на δ скалярно в L_2^0. Проинтегрируем в первом члене по частям, воспользовавшись (4.4) и оценим $(P_i,\delta)_{L_2^0}$ с помощью (4.10). В результате получим, что

$$\begin{aligned}&\|\dot\delta\|^2_{L_2^0} + \|\delta\|^2_{L_2^2} + N^{-1}\|\delta\|^2_{L_2^1}\\ &\leqslant cN^{1/2} + \frac{1}{8}(\|\dot\delta\|^2_{L_2^0} + \|\delta\|^2_{L_2^2} + \|\delta\|^2_{L_2^1}\cdot N^{-1}) + k_1\|\delta\|^2_{L_2^1}.\end{aligned}$$

Из этой оценки при достаточно малых N следует (4.1).

Вычитая из уравнения (1.8) тождество $\dot z + Az + B(z) = \Theta(z)$ и учитывая соотношение $\delta = y_N - z$, получим

$$\begin{aligned}&\|u_N - \Theta(z)\|^2_{L_2^0} = \|\dot\delta + A\delta + B(\delta) + B(z,\delta) + B(\delta,z)\|^2_{L_2^0}\\ &\leqslant c(\|\dot\delta\|_{L_2^0} + \|\delta\|_{L_2^2} + \|\delta\|_{L_\infty^1}\|\delta\|_{L_2^2} + \|z\|_{L_\infty^1}\|\delta\|_{L_2^2})^2.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Из (4.11), (4.1), (3.8) и неравенства $\|\delta\|_{L_\infty^1} \leqslant c\|\delta\|_{L_2^2}\|\dot\delta\|_{L_2^0} \leqslant cN^{1/2}$, справедливого в силу (4.1), следует (4.2). □

Таким образом, решение (y_N, u_N) задачи (1.8)–(1.10), (1.15) имеет следующую асимптотику:

$$y_N \sim z, \quad u_N \sim \Theta(z), \quad N \to 0, \tag{4.12}$$

где z — функция (3.4), (3.5). При этом соотношения (4.12) понимаются в смысле неравенств (4.1), (4.2).

4.2. Доказательство леммы 4.1. Из (3.4.15), (3.4.20), (2.10) и леммы 3.4.2 следует, что

$$\begin{aligned}&|(P_1,\delta)_{L_2^0}| \leqslant \int_0^T (|b(z,z,\dot\delta)| + |b(\delta,z,\dot z)| + |b(z,\delta,\dot z)|\\ &+ |b(z,z,A\delta)| + |b(\delta,z,Az)| + |b(z,\delta,Az)| + |b(\delta,z,B(z))|\\ &+ |b(z,\delta,B(z))|)\,dt \leqslant c(\|z\|_{L_2^2}\|z\|_{L_\infty^1}\|\dot\delta\|_{L_2^0} + \|\delta\|_{L_2^1}\|z\|_{L_\infty^{3/2}}\|\dot z\|_{L_2^0}\\ &+ \|\delta\|_{L_2^2}\|z\|_{L_2^2}\|z\|_{L_\infty^1} + \|\delta\|_{L_2^1}\|z\|_{L_\infty^{3/2}}\|z\|_{L_2^2} + \|\delta\|_{L_2^1}\|z\|^2_{L_\infty^{3/2}}\|z\|_{L_2^2})\\ &\leqslant \frac{1}{8}\left(\|\dot\delta\|^2_{L_2^0} + \frac{1}{N}\|\delta\|^2_{L_2^1} + \|\delta\|^2_{L_2^2}\right) + kN(\|z\|^2_{L_\infty^{3/2}}\|\dot z\|^2_{L_2^0}\\ &+ \|z\|^2_{L_\infty^{3/2}}\|z\|^2_{L_2^2} + \|z\|^4_{L_\infty^{3/2}}\|z\|^2_{L_2^2}) + k_1\|z\|^2_{L_2^2}\|z\|^2_{L_\infty^1}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Применяя к правой части (4.13) неравенства (3.6)–(3.8), выводим (4.10) при $i = 1$. В силу (4.7), (2.10), (3.4.20), (3.4.13) и леммы 3.4.2 получим

$$
\begin{aligned}
|(P_2,\delta)_{L_2^0}| &\leqslant 3\int\limits_0^T (|b(\delta,\delta,\dot\delta)| + |b(\delta,\delta,A\delta)|)\,dt \\
&\leqslant c\int\limits_0^T \|\delta\|_{1/2}\|\delta\|_{3/2}(\|\delta\|_2 + \|\dot\delta\|_0)\,dt \\
&\leqslant c\int\limits_0^T \|\delta\|_{1/2}\|\delta\|_1^{1/2}\|\delta\|_2^{1/2}(\|\delta\|_2 + \|\dot\delta\|_0)\,dt \\
&\leqslant c\,\|\delta\|_{L_\infty^{1/2}}(\|\delta\|_{L_2^1}^{1/2}\|\delta\|_{L_2^2}^{3/2} + \|\delta\|_{L_2^1}^{1/2}\|\delta\|_{L_2^2}^{1/2}\|\dot\delta\|_{L_2^0}).
\end{aligned}
$$

Применяя к выражению в скобках в правой части этой оценки неравенство Гёльдера и учитывая (3.8), (2.25), находим

$$
|(P_2,\delta)_{L_2^0}| \leqslant \frac{1}{8}(\|\delta\|_{L_2^2}^2 + \|\dot\delta\|_{L_2^0}^2) + k\,\|\delta\|_{L_2^1}^2. \tag{4.14}
$$

Из этого неравенства следует (4.10) при $i = 2$.

В силу (4.8), (2.10), (3.4.20) и леммы 3.4.2 имеем

$$
\begin{aligned}
|(P_3,\delta)_{L_2^0}| &\leqslant \int\limits_0^T (|b(\delta,z+\delta,B(z,\delta)+B(\delta,z)+B(\delta))| + |b(\delta,\delta,B(z))| \\
&+ |b(z+\delta,\delta,B(z,\delta)+B(\delta,z)+B(\delta))| + |b(\delta,\delta,B(z))|dt \\
&\leqslant c\int\{(\|\delta\|_{1/2}(\|z\|_{3/2} + \|\delta\|_{3/2}) + \|z\|_{3/2}\|\delta\|_1 + \|\delta\|_{1/2}\|\delta\|_{3/2})(\|B(z,\delta) \\
&+ B(\delta,z) + B(\delta,\delta)\|_0) + \|\delta\|_{1/2}\|\delta\|_{3/2}\|B(z)\|_0\}dt \leqslant c_1\int\{(\|\delta\|_{3/2}\|\delta\|_{1/2} \\
&+ \|z\|_{3/2}\|\delta\|_1)(\|\delta\|_1\|z\|_{3/2} + \|\delta\|_{1/2}\|\delta\|_{3/2}) + \|\delta\|_{1/2}\|\delta\|_{3/2}\|z\|_{1/2}\|z\|_{3/2}\}dt.
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Применяя (3.4.13), а затем неравенство Гёльдера и (3.8), (2.25), из (4.15) находим

$$
\begin{aligned}
|(P_3,\delta)_{L_2^0}\| &\leqslant c\int\limits_0^T (\|\delta\|_2^{1/2}\|\delta\|_1^{3/2}\|\delta\|_{1/2}\|z\|_{3/2} + \|\delta\|_2\|\delta\|_1\|\delta\|_{1/2}^2 \\
&+ \|\delta\|_1^2\|z\|_{3/2}^2 + \|\delta\|_2\|\delta\|_0\|z\|_{1/2}\|z\|_{3/2})\,dt \leqslant \frac{1}{8}\,\|\delta\|_{L_2^2}^2 + k\,\|\delta\|_{L_2^1}^2.
\end{aligned}
$$

Это неравенство доказывает (4.10) с $i = 3$.

Из (4.9) с помощью (2.10), (3.4.20), интегрирования по частям и дальнейшего применения леммы 3.4.2, оценок (3.13), (3.6)–(3.8) получим

$$
\begin{aligned}
&|(P_4,\delta)_{L_2^0}| \leqslant c\int\limits_0^T (|b(z,\delta,\dot\delta)| + |b(\delta,z,\dot\delta)| + |b(\delta,\dot z,\delta)| \\
&+ |b(z,\delta,A\delta)| + |b(\delta,z,A\delta)| + |b(\delta,\delta,Az)|)\,dt \leqslant c_1\int\limits_0^T (\|z\|_{3/2}\|\delta\|_1\|\dot\delta\|_0 \\
&+ \|\delta\|_0\|\delta\|_1\|\dot z\|_1 + \|z\|_{3/2}\|\delta\|_1\|\delta\|_2 + \|\delta\|_0\|\delta\|_2\|z\|_2)\,dt \\
&\leqslant \frac{1}{8}(\|\dot\delta\|^2_{L_2^0} + \|\delta\|^2_{L_2^2} + \|\delta\|^2_{L_2^1}/N) + k(\|\delta\|^2_{L_2^1}\|z\|^2_{L_\infty^{3/2}} \\
&+ N\,\|\dot z\|^2_{L_2^1}\|\delta\|^2_{L_\infty^0} + \|\delta\|^2_{L_\infty^0}\|z\|^2_{L_2^2}) \\
&\leqslant \frac{1}{8}(\|\dot\delta\|^2_{L_2^0} + \|\delta\|^2_{L_2^2} + \|\delta\|^2_{L_2^1}/N) + k_1N^{1/2} + k_1\,\|\delta\|^2_{L_2^1}.
\end{aligned}
$$

Из этих неравенств следует (4.10) при $i=4$. □

4.3. Асимптотика решения задачи с жестким управлением. Построим теперь асимптотику решения $(y^M,u^M)\in\mathcal{Y}^2\times L_2^0$ задачи (1.8)–(1.12) при $M\to\infty$. При этом будет использована асимптотика решения (y_N,u_N) задачи (1.8)–(1.10), (1.15) при $N\to 0$, построенная в теореме 4.1. Из доказательств теорем 3.2, 3.3 следует, что при $M>M_1(v)$ существует функция $N(M)$ такая, что $(y^M,u^M)=(y_{N(M)},u_{N(M)})$ и $N(M)\to 0$ при $M\to\infty$. Наша ближайшая цель — найти асимптотику $N(M)$ при $M\to\infty$.

Лемма 4.2. *Функция $N(M)$ при $M\to\infty$ имеет асимптотику*

$$
N(M) = \frac{\|v\|^4_{1/2}}{4}M^{-4} + O(M^{-6}), \quad |O(M^{-6})| \leqslant cM^{-6}. \tag{4.16}
$$

Доказательство. Простое конструктивное описание имеет функция $M(N)$. Действительно, если (y_N,u_N) — решение задачи (1.8)–(1.10), (1.15) с $N>0$, то

$$
M(N) = \|u_N\|_{L_2^0}. \tag{4.17}
$$

Пусть $I_N(y,u)$ — функционал (1.15), а (y_N,u_N) — решение задачи (1.8)–(1.10), (1.15). Справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\|u_{N+\varepsilon}\|^2_{L_2^0} = I_{N+\varepsilon}(y_{N+\varepsilon},u_{N+\varepsilon}) - I_N(y_{N+\varepsilon},u_{N+\varepsilon}) \\
&\leqslant I_{N+\varepsilon}(y_{N+\varepsilon},u_{N+\varepsilon}) - I_N(y_N,u_N) \leqslant I_{N+\varepsilon}(y_N,u_N) - I_N(y_N,u_N) \\
&= \varepsilon\|u_N\|^2_{L_2^0}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, функция $M(N)$ монотонно не возрастает при всех $N>0$. Из приведенных ниже оценок следует, что при малых N она монотонно убывает. Поэтому $M(N)$ при малых N имеет обратную функцию $N(M)$, которая и является предметом нашего исследования. Изучим сначала функцию

(4.17). Если z — функция (3.4), (3.5), то в силу (3.6), (3.8), (4.2)

$$|M(N) - \|\dot z\|_{L_2^0}| \leqslant \|u_N - \dot z\|_{L_2^0}$$
$$\leqslant \|u_N - \Theta(z)\|_{L_2^0} + \|z\|_{L_2^2} + \|B(z)\|_{L_2^0} \leqslant cN^{1/4}. \tag{4.18}$$

Вычислим величину $\|\partial_t z\|_{L_2^0}$. В силу (3.4), (3.5)

$$\|\dot z\|^2_{L_2^0} = \int\limits_0^T \sum_{k=1}^\infty v_k^2(\lambda_k^2 + \lambda_k/N)\frac{\operatorname{ch}^2 t\sqrt{\lambda_k^2+\lambda_k/N}}{\operatorname{sh}^2 T\sqrt{\lambda_k^2+\lambda_k/N}}dt$$
$$= \sum_{k=1}^\infty \frac{(v_k)^2(\lambda_k^2+\lambda_k/N)}{\operatorname{sh}^2(T\sqrt{\lambda_k^2+\lambda_k/N})}\left[\frac{T}{2} + \frac{1}{4\sqrt{\lambda_k^2+\lambda_k/N}}(\operatorname{sh} 2t\sqrt{\lambda_k^2+\lambda_k/N})\Big|_0^T\right]$$
$$= \sum_{k=1}^\infty v_k^2\frac{\sqrt{\lambda_k^2+\lambda_k/N}}{2} + o(N). \tag{4.19}$$

Положим

$$\sum_{k=1}^\infty v_k^2\frac{\sqrt{\lambda_k^2+\lambda_k/N}}{2} - \frac{\|v\|^2_{1/2}N^{-1/2}}{2} = I. \tag{4.20}$$

Поскольку $\sqrt{1+\alpha} - 1 \leqslant \alpha$ при $\alpha \geqslant 0$, получим

$$I = \sum_{k=1}^\infty \frac{v_k^2}{2}\sqrt{\lambda_k/N}(\sqrt{\lambda_k N+1} - 1) \leqslant \sum_{k=1}^\infty \frac{v_k^2}{2}\lambda_k^{3/2}N^{1/2} = \frac{N^{1/2}}{2}\|v\|^2_{3/2}. \tag{4.21}$$

Из (4.18)–(4.21) следует, что

$$M(N) = \|\dot z\|_{L_2^0} + O(N^{1/4}) = O(N^{1/4}) + \sqrt{\frac{\|v\|^2_{1/2}N^{-1/2}}{2} + I + O(N)}$$
$$= \frac{\|v\|_{1/2}}{\sqrt{2}}N^{-1/4}((1+O(N))^{1/2} + O(N^{1/2})).$$

Таким образом

$$M(N) = \frac{\|v\|_{1/2}}{\sqrt{2}}N^{-1/4}(1 + O(N^{1/2})). \tag{4.22}$$

Перейдем к доказательству формулы (4.16). Очевидно, что

$$N(M) = \frac{\|v\|^4_{1/2}}{4}M^{-4} + O(M^{-\gamma}) = \frac{\|v\|^4_{1/2}}{4}M^{-4}(1 + O(M^{4-\gamma})), \tag{4.23}$$

где число γ необходимо определить. Подставляя (4.22) в (4.23) и учитывая, что эти функции взаимно обратны, получим

$$\begin{aligned} N \equiv N(M(N)) &= \frac{\|v\|_{1/2}^4}{4}\left(\frac{\|v\|_{1/2}}{\sqrt{2}}N^{-1/4}(1+O(N^{1/2}))\right)^{-4}(1+O(N^{(\gamma-4)/4})) \\ &= N(1+O(N^{1/2}))(1+O(N^{(\gamma-4)/4})) \\ &= N(1+O(N^{1/2})+O(N^{(\gamma-4)/4})+O(N^{(\gamma-4)/4+1/2})). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Чтобы правая часть (4.24) тождественно равнялась N, необходимо, чтобы $1/2 = (\gamma-4)/4$, т. е. $\gamma = 6$. □

Пусть $z = z_N$ — функция (3.4), (3.5). Учитывая, что $(y^M, u^M) = (y_{N(M)}, u_{N(M)})$ при больших M и используя (4.1), (4.2), (4.16), получим следующее разложение функции (y^M, u^M):

$$\|y^M - z_{N(M)}\|_{L_2^2}^2 + \|\dot{y}^M - \dot{z}_{N(M)}\|_{L_2^0}^2 + M^4\|y^M - z_{N(M)}\|_{L_2^1}^2 \leqslant cM^{-2}, \tag{4.25}$$

$$\|u^M - Q(z_{N(M)})\|_{L_2^0}^2 \leqslant cM^{-2}. \tag{4.26}$$

Чтобы получить асимптотику для (y^M, u^M), необходимо в (4.25), (4.26) заменить $z_{N(M)}$ на функцию, допускающую более явное описание. Положим

$$z^M(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i^M(t)e_i, \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} z_i^M &= v_i \operatorname{sh}(r(i,M)t)/\operatorname{sh}(r(i,M)T), \\ r(i,M) &= \sqrt{\lambda_i^2 + 4\lambda_i M^4/\|v\|_{1/2}^4}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

а v_i — координаты разложения вектора v по базису $\{e_i\}$.

Теорема 4.2. *Пусть $d = 2$, $\alpha = 1$, $(y^M, u^M) \in \mathcal{Y}^2 \times L_2^0$ — решение задачи* (1.8)–(1.12), *а z^M — функция* (4.27), (4.28). *Тогда при больших M справедливы неравенства*

$$\|y^M - z^M\|_{L_2^\gamma}^2 + \|\dot{y}^M - \dot{z}^M\|_{L_2^{\gamma-2}}^2 \leqslant cM^{-2\beta}, \tag{4.29}$$

где $\gamma \in [0,1)$, $\beta \in (0, 2(1-\gamma))$,

$$\|u^M - \Theta(z^M)\|_{L_2^{\gamma-2}}^2 \leqslant cM^{-2\beta}, \quad \gamma \in [0,1),\ \beta \in (0, 2(1-\gamma)), \tag{4.30}$$

где константа c не зависит от M, а Θ — оператор, определенный в (1.8).

Доказательство. Нам необходимо оценить нормы разности $z^M - z_{N(M)}$. Отметим, что в силу (3.5), (4.16) координаты $\overline{z}_i^M(t)$ разложения вектора $z_{N(M)}$ по базису $\{e_i\}$ определяются формулой

$$\overline{z}_i^M(t) = \operatorname{sh}(tR(i,M))/\operatorname{sh}(TR(i,M)), \tag{4.31}$$

где

$$R(i,M)=\sqrt{\lambda_i^2+(4\lambda_i M^4/\|v\|_{1/2}^4)(1+O(M^{-2}))}. \tag{4.32}$$

Из (4.28), (4.31) с помощью простых преобразований получим

$$\begin{aligned}|\overline{z}_i^M(t)-z_i^M(t)|&=\left|\frac{\operatorname{sh}(tR)}{\operatorname{sh}(TR)}-\frac{\operatorname{sh}(tr)}{\operatorname{sh}(Tr)}\right|\leqslant c\,\frac{|\operatorname{sh}(tR)\operatorname{sh}(Tr)-\operatorname{sh}(tr)\operatorname{sh}(TR)|}{\exp(T(R+r))}\\&\leqslant c\,\frac{|\exp(tR+Tr)-\exp(tr+TR)|}{\exp(T(R+r))}+c_1(e^{-Tr}+e^{-TR})\\&=c\,|e^{(t-T)R}-e^{(t-T)r}|+c_1\,|e^{-Tr}+e^{-TR}|.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^T|e^{(t-T)R}-e^{(t-T)r}|^2dt=\int\limits_0^T|e^{-tR}-e^{-tr}|^2dt\\&=\frac{1-e^{-2TR}}{2R}-2\frac{1-e^{-T(R+r)}}{R+r}\\&+\frac{1-e^{-2Tr}}{2r}=\frac{(r-R)^2}{2rR(r+R)}-\frac{e^{-2TR}}{2R}+2\frac{e^{-T(R+r)}}{r+R}-\frac{e^{-2Tr}}{2r}.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Из равенств (4.28), (4.32) следуют соотношения

$$R^2-r^2=\lambda_i\alpha,\quad |\alpha|\leqslant cM^2, \tag{4.35}$$

где c не зависит от i и M. Учитывая, что $e^{-|a|}\leqslant c_k\,|a|^{-k}$ для любого натурального k, получим из (4.33)–(4.35) неравенства

$$\int\limits_0^T|\overline{z}_i^M(t)-z_i^M(t)|^2dt\leqslant c_1\frac{\lambda_i^2}{r^5},\quad r=r(i,M), \tag{4.36}$$

где c_1 не зависит от i и M. Отметим, что собственные значения λ_i оператора A, определенного в (3.4.10), обладают асимптотикой

$$\lambda_i\sim ci,\quad i\to\infty, \tag{4.37}$$

если $d=\dim\Omega=2$. В силу неравенства Юнга при $\alpha\in[0,1]$ имеем

$$\lambda_i^{1+\alpha}M^{4(1-\alpha)}=\lambda_i^{2\alpha}(\lambda_i^{1-\alpha}M^{4(1-\alpha)})\leqslant c(\lambda_i^2+\lambda_iM^4).$$

По определению $r(i,M)$ из (4.28) имеем

$$r(i,M)\geqslant c\lambda_i^{(1+\alpha)/2}M^{2(1-\alpha)}\quad\forall\alpha\in[0,1], \tag{4.38}$$

где c не зависит от i, M, α.

Пусть $\gamma\in[0,1)$, $0\leqslant\beta<2(1-\gamma)$. Умножим (4.36) на λ_i^γ и просуммируем полученное неравенство по i от 1 до ∞. После этого, используя (4.37), (4.38) при $\alpha=(3-\beta)/5$, получим оценку

$$\|z^M-z_{M(N)}\|^2_{L_2^\gamma}\leqslant cM^{-2\beta},\quad\gamma\in[0,1),\ \beta\in(0,2(1-\gamma)). \tag{4.39}$$

Вычисляя интеграл и применяя неравенство $e^{-|a|} \leqslant c_k\,|a|^{-k}$ при $k \geqslant 0$, находим

$$\int\limits_0^T |\dot{\overline{z}}_i^M - \dot{z}_i^M|^2 dt = \int\limits_0^T \left| R\frac{\operatorname{ch} Rt}{\operatorname{sh} RT} - r\,\frac{\operatorname{ch} rt}{\operatorname{sh} rT}\right|^2 dt = \frac{R^2}{4\operatorname{sh}^2 RT}\left(2T + \frac{\operatorname{sh} 2RT}{R}\right)$$
$$+ \frac{r^2}{4\operatorname{sh}^2 rT}\left(2T + \frac{\operatorname{sh} 2rT}{r}\right) - \frac{Rr}{\operatorname{sh} RT \operatorname{sh} rT}\left(\frac{\operatorname{sh}(R+r)T}{R+r} + \frac{\operatorname{sh}(R-r)T}{R-r}\right)$$
$$\leqslant \frac{R+r}{2} - \frac{2Rr}{R+r} + cr^{-3} = \frac{(R^2-r^2)^2}{2(R+r)^3} + cr^{-3} \leqslant c_1\frac{\lambda_i^2}{r^3}M^4. \tag{4.40}$$

Аналогично (4.39) из (4.40) выводится неравенство

$$\|\partial_t z^M - \partial_t z_{M(N)}\|^2_{L_2^{\gamma-2}} \leqslant cM^{-2\beta}, \quad \gamma \in [0,1),\ \beta \in (0, 2(1-\gamma)). \tag{4.41}$$

Из неравенств (4.25), (4.39), (4.41) следует (4.29). С помощью (4.39), (4.41) получим

$$\|Q(z^M) - Q(z_{M(N)})\|_{L_2^{\gamma-2}} \leqslant cM^{-2\beta}, \tag{4.42}$$

где γ и β такие же как в (4.41). Наконец, неравенство (4.30) следует из (4.26), (4.42). □

Таким образом, в теореме 4.2 построена следующая асимптотика решения (y^M, u^M) задачи (1.8)–(1.12):

$$y^M \sim z^M, \quad u^M \sim \Theta(z^M), \quad M \to \infty, \tag{4.43}$$

причем асимптотики в (4.43) понимаются в смысле соотношений (4.29), (4.30).

§ 5. Комментарии

Теоремы существования решения задач оптимального управления системой уравнений Навье — Стокса с распределенным (а также начальным и граничным) управлением получены Фурсиковым [1–3] в случае ограниченной области. В случае неограниченной области теоремы существования для системы Навье — Стокса с распределенным управлением получены Сризараном [1, 3]. Теоремы существования решения задачи оптимального управления в случае, когда у системы Навье — Стокса фиксировано не только начальное условие, но и скорость в момент времени T, исследована Эмануиловым [3] и Фурсиковым [13] (именно такая задача рассмотрена в § 1). Задачам оптимального управления системой Навье — Стокса посвящены также работы Барбу [3, 4].

Результаты § 2 о необходимых и достаточных условиях глобального минимума получены Фурсиковым [4–6]. Различные теоремы единственности решения задач оптимального управления системой Навье — Стокса с распределенным управлением получены Фурсиковым [4, 5]. Некоторые теоремы единственности для задач оптимального управления нелинейны-

ми эллиптическими уравнениями получены Яшиной [1]. Теорема единственности из § 3 доказана Фурсиковым [13]. Результаты по асимптотике из § 4 принадлежат Фурсикову [13].

Глава 5

Оптимальное управление с границы в нестационарных задачах обтекания и неоднородные краевые задачи для уравнений Навье — Стокса

Эта глава, как и предыдущая, посвящена оптимальному управлению системой, которая описывается уравнениями Навье — Стокса. Теперь мы рассматриваем случай граничного управления Дирихле, когда жидкость заполняет внешность ограниченной области, обтекая эту область.

Основная проблема, которая решается в этой главе, — это вывод системы оптимальности соответствующей задачи оптимального управления. Доказывается также теорема существования решения задачи.

Система оптимальности выводится с помощью принципа Лагранжа. В отличие от случая распределенного управления (см. гл. 4) вывод удается провести лишь для регулярного случая, т. е. для класса достаточно гладких решений, в котором квадратичные члены уравнения Навье — Стокса являются подчиненными по отношению к линейным. Классом регулярных решений минимальной гладкости в двумерном случае (именно двумерный случай системы Навье — Стокса рассматривается в этой главе) является класс функций с "конечной энергией".

Чтобы описать класс ограничений на граничное управление, которые приводят к регулярным задачам, нам потребовалось дать точное описание следов векторных полей с конечной энергией.

Для вывода системы оптимальности в сильной форме, т. е. в виде краевой задачи для системы уравнений в частных производных, потребовалось обосновать существование следа нормальной производной на боковой поверхности цилиндра у сопряженной функции, а также построить теорию неоднородных краевых задач для системы Навье — Стокса, так как информации, содержащейся в известной нам литературе и, в частности, классических книгах Ладыженская [1]; Темам [1], оказалось недостаточно. Эта теория строится по той же схеме, как и аналогичная теория неоднородных параболических краевых задач (см. Агранович, Вишик [1]; Лионс, Мадженес [3]), однако содержит ряд характерных черт. Например, условия согласования начальных и граничных условий для системы Навье — Стокса необходимо накладывать также в случае негладких решений, нормальная и тангенциальная компоненты следов векторных полей с конечной энергией имеют разную гладкость и т. д.

§ 1. Формализация задачи

Этот параграф посвящен формализации задачи минимизации работы, затрачиваемой на преодоление сопротивления обтекаемого тела. Сначала на физическом уровне строгости выводится составляющая функционала цены для функции состояния, а затем обсуждается вопрос об ограничениях на управление.

1.1. Вывод функционала работы. Выведем формально функционал, определяющий работу по преодолению сопротивления, создаваемого ограниченным телом, обтекаемым потоком жидкости. Мы рассматриваем течение несжимаемой жидкости в неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, которая является дополнением ограниченной области B ($\Omega \cup \overline{B} = \mathbb{R}^2$):

$$\dot{\boldsymbol{v}} - \Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \text{ в } (0,T) \times \Omega, \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{v}\big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \qquad \boldsymbol{v}\big|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{g} \quad \boldsymbol{t} \in (0,T), \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v}_\infty, \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty, \tag{1.3}$$

где $\dot{\boldsymbol{v}} = \partial v/\partial t$, $\boldsymbol{v}_\infty$ — скорость жидкости на бесконечности, которая является константой. Мы предполагаем, что граница $\partial\Omega$ области Ω — бесконечно гладкая замкнутая связная кривая без самопересечений. Ниже мы добавим условия на давление p, заданные векторные поля $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{g}$ и вектор $\boldsymbol{v}_\infty$. Эти условия гарантируют существование единственного решения y задачи (1.1)–(1.3). Если $\boldsymbol{g} = 0$, то (1.1)–(1.3) является задачей обтекания жидкостью тела B с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_\infty$ на бесконечности.

Обозначим через $\partial\Omega_\varepsilon$ замкнутую кривую в окрестности $\partial\Omega$, окружающую $\partial\Omega$ и лежащую внутри Ω и через Ω_ε подобласть Ω с границей $\partial\Omega_\varepsilon$ (Ω_ε содержит бесконечно удаленную точку). Через $\mathcal{T} = -pI + 2\mathcal{D}$ обозначен тензор напряжений, где I — единичный тензор, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^T)$ — тензор скоростей деформации жидкости, а ∇v^T — тензор, транспонированный к ∇v (т. е. матрица, задающая тензор ∇v^T, транспонирована к матрице $\left\| \dfrac{\partial}{\partial x^j} v^j \right\|$, задающей ∇v). Тогда для $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega_\varepsilon$ вектор $\mathcal{T}\boldsymbol{n}(t,\boldsymbol{x})$ является силой, приложенной к точке $\boldsymbol{x}$ на $\partial\Omega_\varepsilon$, которая действует на жидкость в Ω_ε в момент времени t, где $\boldsymbol{n}$ — единичная нормаль к $\partial\Omega_\varepsilon$, внешняя относительно Ω_ε. Следовательно, интеграл

$$\int_0^T dt \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty) \cdot (\mathcal{T}\boldsymbol{n}) ds$$

определяет работу, затрачиваемую на преодоление сопротивления "тела" $B_\varepsilon = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon$ за время $(0,T)$. Перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы получаем работу, затрачиваемую на преодоление сопротивления заданного тела $B = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$:

$$\mathcal{W} = \int_0^T dt \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty) \cdot (\mathcal{T}\boldsymbol{n}) ds.$$

Используя определения тензоров $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$ и учитывая, что $\boldsymbol{v}_\infty$ является постоянным вектором, получаем

$$\mathcal{W} = \int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \{-p\boldsymbol{n} + (\nabla\boldsymbol{v} + \nabla\boldsymbol{v}^T)\boldsymbol{n}\}$$

$$= \int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \big\{-p\boldsymbol{n} + \big(\nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty) + \nabla(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty)^T\big)\boldsymbol{n}\big\} ds.$$

Поэтому при $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty$

$$\mathcal{W} = \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \{-p\boldsymbol{n} + 2\mathcal{D}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{n}\}\, ds\, dt. \tag{1.4}$$

В силу формулы Грина

$$\int\limits_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \big(\nabla \cdot \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\big)\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{n} ds - \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \nabla\boldsymbol{w} d\boldsymbol{x}, \tag{1.5}$$

где через $\nabla\cdot\mathcal{S}$ для тензора $\mathcal{S} = \{S_{ij}\}$ ранга 2 обозначен вектор $(\partial_j S_{1j}, \partial_j S_{2j})^T$, а двоеточие обозначает операцию скалярного произведения двух тензоров ранга 2, т. е. $\mathcal{T} : \mathcal{S} = T_{ij}S_{ij}$ для двух тензоров $\mathcal{T} = \{T_{ij}\}$ и $\mathcal{S} = \{S_{ij}\}$ (предполагается, что по повторяющимся индексам производится суммирование). Напомним, что $\partial_j = \partial/\partial_{x_j}$ — дифференцирование по x_j. В силу (1.1) векторное поле $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty$ бездивергентно, т. е. $\nabla \cdot \boldsymbol{w} \equiv \operatorname{div}\boldsymbol{w} = 0$. Поэтому из (1.5) и тождества $2\nabla \cdot \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) = \Delta\boldsymbol{w} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{w})$ следует равенство

$$\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{n} ds = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \Delta\boldsymbol{w}\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \nabla\boldsymbol{w}\, d\boldsymbol{x}.$$

В силу симметричности тензора $\mathcal{D}(\boldsymbol{w})$

$$\int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \nabla\boldsymbol{w}\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{x}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{n}\, ds = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \Delta\boldsymbol{w} d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{x}.$$

Подстановка последнего равенства в (1.4) приводит к соотношению

$$\mathcal{W} = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \boldsymbol{w} \cdot (\Delta\boldsymbol{w} - \nabla p)\, d\boldsymbol{x}\, dt + 2\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{x}\, dt. \tag{1.6}$$

В силу (1.1) $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\boldsymbol{w}} - \Delta\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\boldsymbol{w} + \nabla p = 0.$$

Из последнего уравнения и (1.6) следует, что

$$\mathcal{W} = 2\int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega \partial_t |\boldsymbol{w}|^2\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega (\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{w}\, d\boldsymbol{x}$$
$$= 2\int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w}|^2 \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, ds$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\boldsymbol{w}(0,\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x}, \tag{1.7}$$

где $\partial_t = \partial/\partial_t$. Интеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\boldsymbol{w}(t,\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x}$$

задает (конечную) кинетическую энергию флюктуации потока $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty$. Отметим, что кинетическая энергия самого потока бесконечна:

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})|^2\, \boldsymbol{x} = \infty.$$

Мы можем переписать (1.7) как энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T |\boldsymbol{w}(0,\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{w}\cdot\mathcal{T}\boldsymbol{n}\, ds = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ 2\int\limits_0^T dt \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w}|^2 (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\boldsymbol{n}\, ds.$$

Эти соотношения можно интерпретировать следующим образом: начальная кинетическая энергия флюктуации потока плюс работа по преодолению силы сопротивления равна конечному, т. е. при $t = T$ значению кинетической энергии флюктуации потока плюс диссипация энергии, т. е. энергия, ушедшая на преодоление силы трения плюс работа, произведенная граничным управлением. В случае отсутствия управления, когда $\boldsymbol{v}\big|_{\partial\Omega} = (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\big|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{g} = 0$, третий интеграл в правой части последнего уравнения равен нулю. Так как начальная кинетическая энергия флюктуации потока задана, естественно взять правую часть последнего равенства в качестве функционала стоимости (для удобства введен множитель 1/2) в случае

жесткого управления:

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{4}\int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x})|^2\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_0^T dt \int\limits_{\Omega} \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\,d\boldsymbol{x}$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w}|^2(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\boldsymbol{n}\,ds. \tag{1.8}$$

1.2. Ограничения на управление. Как по физическим, так и по математическим причинам, величина соответствующей нормы для управления должна быть ограничена. Физически невозможно реализовать управления со сколь угодно большой нормой. При этом в оптимизационном процессе должна учитываться также стоимость управления, так как нецелесообразно уменьшать работу по преодолению сопротивления за недопустимо высокую цену. Ограничения на величину управления необходимы также для постановки математически корректной задачи, для которой можно гарантировать существование оптимального решения в некотором функциональном классе. Конечно, физические и математические причины, заставляющие ввести ограничения на величину управления, не являются независимыми.

Соображения, связанные с ограничением величины управления, проще объяснить в случае стационарного потока жидкости, который описывается системой

$$-\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + \nabla p = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{v}\big|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{v}\to\boldsymbol{v}_\infty \text{ при } |\boldsymbol{x}|\to\infty, \tag{1.10}$$

и функционала силы сопротивления

$$\mathcal{J}_s(\boldsymbol{v}) = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{w}\cdot\mathcal{T}\boldsymbol{n}ds = \int\limits_{\Omega} \mathcal{D}(\boldsymbol{v}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x} + \frac{1}{4}\int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w}|^2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,ds, \tag{1.11}$$

где, как и раньше, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty$. Во многих физически интересных случаях требуется минимизировать функционал силы сопротивления (1.11). Если нет ограничений на управление (т. е. на сужение $\boldsymbol{v}$ на границу $\partial\Omega$), то легко найти тривиальное управление, для которого $\mathcal{J}_s(\boldsymbol{v}) = 0$. Действительно, при $\boldsymbol{v}\big|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{v}_\infty$ решение задачи (1.9)–(1.11) задается формулой $\boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{v}_\infty$ и $\nabla p = 0$. Очевидно, что $\mathcal{J}_s(\boldsymbol{v}) = \mathcal{J}_s(\boldsymbol{v}_\infty) = 0$. Следовательно, $\mathcal{J}_s(\boldsymbol{v})$ может быть отрицательным, т. е. тело не оказывает сопротивления потоку жидкости, а "толкается" граничным управлением в противоположном направлении. Однако это не та задача, которую мы собираемся изучать. Таким образом, ограничения на управление естественны не только с физической точки зрения сохранения ресурсов. Они необходимы в задаче оптимизации, адекватно моделирующей исследуемую задачу о минимизации силы сопротивления. (Отметим, что в нестационарном случае мы не можем взять $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\infty$ ввиду начального условия (1.2); однако приведенные выше аргументы и здесь не теряют своей силы.)

Как уже отмечалось ранее, имеются два способа наложить ограничения на управления. При первом способе (в случае жесткого управления) накладываются внешние ограничения. В стационарном случае можно положить

$$\int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{v}|^k ds \leqslant M, \quad k \geqslant 3, \tag{1.12}$$

где M — заданная положительная константа. Ограничение (1.12) позволяет управлению концентрироваться на малых частях границы и является поэтому более полезным, так как дает информацию, на каких частях границы управление наиболее эффективно. Такая информация полезна в исследовании локальных управлений, которые реализуются в конечном числе правильно выбранных малых подмножеств границы.

Второй способ состоит в добавлении некоторой нормы управления к функционалу цены, т. е. вместо (1.11) вводится компромиссный функционал

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{D}(\boldsymbol{v}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} + \frac{1}{4}\int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w}|^2 \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} ds + N\int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{v}|^k ds \tag{1.13}$$

с некоторым $k \geqslant 3$ и $N > 0$. Если $k = 3$, необходимо требовать, чтобы $N > 1/4$.

При обоих способах введения ограничения на управление можно использовать различные нормы, определяющие величину управления. Физическая задача не указывает выбор нормы, хотя желаемые физические свойства, такие как присутствие или отсутствие острых пиков у управления на границе, должны влиять на выбор. На выбор нормы влияет необходимость получения корректной постановки задачи, что позволяет доказать существование оптимального решения, изучить его гладкость, вывести систему оптимальности и т. д. Например, ограничения на величину k мотивированы необходимостью придать управлению соответствующую цену, т. е. сделать последний член в (1.13) главным (в соответствующем смысле, указанном ниже) по сравнению со вторым членом.

Мы в этой главе интересуемся нестационарными задачами, и сейчас мы обсудим, как можно выбрать удобную норму для измерения управления. Мы исходим из требования, чтобы решения системы Навье — Стокса удовлетворяли энергетическому неравенству, которое ниже будет использоваться при изучении задачи оптимального управления и, в частности, при выводе системы оптимальности. Минимальный уровень гладкости поля скоростей $\boldsymbol{v}$, при котором выполнено энергетическое неравенство, определяется включениями $\boldsymbol{w} \equiv \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty \in L_2(0,T;\boldsymbol{H}^1(\Omega))$ и $\dot{\boldsymbol{v}} \in L_2(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$. Отметим, что из этих включений следует соответствующее поведение на бесконечности. Граничное управление должно принадлежать подмножеству пространства следов на $\partial\Omega$ пространства векторных полей $\boldsymbol{v}$. Будет показано, что норма этого пространства следов определяется формулой

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega))} + \|\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\|_{\boldsymbol{H}^{3/4}(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\partial\Omega))} \\ &+ \|\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega))} + \|\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}\|_{\boldsymbol{H}^{1/4}(0,T;L_2(\partial\Omega))}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный касательный вектор к $\partial\Omega$, направленный против часовой стрелки. Естественно, управление должно измеряться нормой, которая не слабее указанной нормы пространства следов. Для удобства вычислений мы усилим в функционале дробные производные по времени до первой производной ∂_t.

С другой стороны, присутствие в функционале (1.8) члена

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{x}\, dt$$

позволяет утверждать, что для принадлежности $\boldsymbol{w}$ необходимому пространству следов достаточно для управления использовать норму

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} |\dot{\boldsymbol{w}}|^2 ds\, dt.$$

Так же, как в (1.12), следует включить ограничения, связанные с членом

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty|^k ds\, dt, \quad k \geqslant 3.$$

Итак, два подхода к заданию ограничений на управление в нестационарном случае можно описать следующим образом. Первый подход (жесткое управление) предписывает, чтобы для некоторой константы $M > 0$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty|^k ds\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} |\dot{\boldsymbol{w}}|^2 ds\, dt \leqslant M, \quad k \geqslant 3. \tag{1.15}$$

Второй подход (компромиссный функционал) приводит к функционалу стоимости

$$\mathcal{J}_N(\boldsymbol{w}) = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{x}\, dt + \frac{1}{4} \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w}|^2 (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \boldsymbol{n}\, ds\, dt$$
$$+ \frac{1}{4} \int\limits_\Omega |\boldsymbol{w}(T, \boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x} + N \left(\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty|^k ds\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} |\dot{\boldsymbol{w}}|^2 ds\, dt \right), \tag{1.16}$$

где $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty$, $k \geqslant 3$ и $N > 0$ ($N > 1/4$ при $k = 3$).

§ 2. Точная постановка экстремальной задачи

2.1. Функциональные пространства. В отличие от гл. 3, § 4, 5 и гл. 4 здесь рассматриваются краевые задачи для уравнений Навье — Стокса с неоднородными граничными условиями. Поэтому нам понадобятся функциональные пространства соленоидальных векторных полей, отличные от

введенных в предыдущих главах. Ниже, в отличие от пространств Лебега и Соболева L_p, H^m скалярных функций, пространства Лебега и Соболева векторнозначных функций обозначаются $\boldsymbol{L}_p$, $\boldsymbol{H}^m$. Определим при $m \geqslant 0$ пространства

$$\boldsymbol{V}^m(\Omega) = \big\{\boldsymbol{u} \in (\boldsymbol{H}^m(\Omega))^2 : \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}ds = 0\big\}^1.$$

$\boldsymbol{V}_0^m(\Omega)$ — замыкание $\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega) \cap \boldsymbol{V}^0(\Omega)$ по $\boldsymbol{H}^m(\Omega)$-норме,

При $m = 0$ интеграл $\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}ds$ понимается как соотношение двойственности между $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ и функции $1 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Отметим, что ввиду неограниченности области Ω условие $\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}ds = 0$ в определении пространства $\boldsymbol{V}^m(\Omega)$ не вытекает из предположения $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ без дополнительных предположений о поведении $\boldsymbol{u}$ на бесконечности. Отождествляя $(\boldsymbol{V}_0^0(\Omega))^{*2}$ с $\boldsymbol{V}_0^0(\Omega)$ введем двойственные пространства $\boldsymbol{V}^{-m}(\Omega) = \big[\boldsymbol{V}_0^m(\Omega)\big]^*$ при $m \geqslant 1$. Нормы в пространствах $\boldsymbol{V}^m(\Omega)$ и $\boldsymbol{V}_0^m(\Omega)$ равны норме в пространстве $\boldsymbol{H}^m(\Omega)$.

Для функций, определенных на $Q = \mathbb{R}\times\Omega$, введем пространство

$$\mathcal{H}^{(s)}(Q) = \{f \in L_2\big(\mathbb{R}; H^s(\Omega)\big) : \dot{f} \in L_2\big(\mathbb{R}; H^{s-2}(\Omega)\big)\}$$

с нормой

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}^{(s)}(Q)} = \|f\|^2_{L_2(\mathbb{R};H^s(\Omega))} + \|\dot{f}\|^2_{L_2(\mathbb{R};H^{s-2}(\Omega))}$$

и соответствующее соленоидальное функциональное пространство

$$\mathcal{V}^{(s)}(Q) = \{\boldsymbol{v} \in L_2(\mathbb{R}; \boldsymbol{V}^s(\Omega)) : \dot{\boldsymbol{v}} \in L_2(\mathbb{R}; \boldsymbol{V}^{s-2}(\Omega))$$

с нормой

$$\|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathcal{V}^{(s)}(Q)} = \|\boldsymbol{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R};\boldsymbol{V}^s(\Omega))} + \|\dot{\boldsymbol{v}}\|^2_{L_2(\mathbb{R};\boldsymbol{V}^{s-2}(\Omega))}.$$

Аналогично определяются пространства $\mathcal{H}^{(s)}(Q_T)$ и $\mathcal{V}^{(s)}(Q_T)$ функций, определенных на $Q_T = (0,T)\times\Omega$. В конце п. 3.1 будет доказана

Лемма 2.1. *Пространство $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ непрерывно вложено в пространство $C([0,T]; \boldsymbol{V}^0(\Omega))$.*

2.2. Формулировка экстремальной задачи. Начнем с точного определения обобщенного решения краевой задачи для системы Навье — Стокса.

---

[1] Напомним, что $\partial\Omega$ предполагается связной кривой. Если бы $\partial\Omega$ состояла из нескольких компонент $\partial\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \partial\Omega_j$, то условие $\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}ds = 0$ нужно было бы заменить условиями $\int\limits_{\partial\Omega_j} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}ds = 0$, $j = 1,\ldots,N$.

[2] Пространства $\boldsymbol{V}^m(\Omega)$, введенные в этом пункте, не совпадают с пространствами $V^m(\Omega)$, определенными в гл. 3, § 4 и используемыми в гл. 3 и 4, однако не использованных в этой главе. Это исключает возможность недоразумений.

Определение 2.1. Векторное поле $\boldsymbol{v}$ называется *решением* задачи (1.1)–(1.3), если $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty$, а $\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ удовлетворяет соотношениям

$$\langle \dot{\boldsymbol{w}}(t,\cdot), \boldsymbol{z}\rangle + 2\int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}(t,\cdot)) : \mathcal{D}(\boldsymbol{z})\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \big(\boldsymbol{w}(t,\cdot)\cdot\nabla\big)\boldsymbol{w}(t,\cdot)\cdot\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{x}$$

$$+\int\limits_\Omega \big(\boldsymbol{v}_\infty\cdot\nabla\big)\boldsymbol{w}(t,\cdot)\cdot\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{x} = 0, \quad \boldsymbol{z}\in \boldsymbol{V}_0^1(\Omega),\ t\in(0,T), \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{g} - \boldsymbol{v}_\infty \text{ в } L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)\big), \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{w}\big|_{t=0} = \boldsymbol{w}_0 \equiv \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_\infty \text{ в } \boldsymbol{V}^0(\Omega).$$

Отметим, что начальное условие в определении 2.1 имеет смысл в силу леммы 2.1. В этой главе угловые скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначают соотношение двойственности между банаховым пространством и его сопряженным; само банахово пространство может меняться в зависимости от контекста. В частности, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в (2.1) обозначает соотношение двойственности между $\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)$ и $\boldsymbol{V}_0^1(\Omega)$. Отметим, что мы использовали тождество

$$2\int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{z})\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \nabla\boldsymbol{w} : \nabla\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{w}\in\boldsymbol{V}^1(\Omega),\ \boldsymbol{z}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega).$$

Экстремальные задачи, которые мы изучаем, состоят в минимизации работы сопротивления тела обтекающему потоку. В соответствии с двумя способами введения ограничений на управление мы получим два функционала для формулировки экстремальных задач. Удобно использовать переменную $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty$. Мы не вводим специального обозначения для граничного управления, обозначая его просто $\boldsymbol{v}\big|_{\partial\Omega}$, поэтому граничное условие из (2.2) не будет явно фигурировать в неравенстве, задающем ограничение на управление. Решение экстремальной задачи ищется в пространстве

$$\mathcal{Y} = \Big\{\boldsymbol{w}\in\mathcal{V}^{(1)}(Q_T) : (\dot{\boldsymbol{w}})\big|_{\partial\Omega} \in L_2\big(0,T;\boldsymbol{L}^2(\partial\Omega)\big),$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \dot{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{n}ds = 0, \boldsymbol{w}\big|_{\partial\Omega}\in \boldsymbol{L}_k\big((0,T)\times\partial\Omega\big)\Big\},$$

с нормой

$$\|\boldsymbol{w}\|_Y = \|\boldsymbol{w}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)} + \|\dot{\boldsymbol{w}}\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\partial\Omega))} + \|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{L}_k((0,T)\times\partial\Omega)},$$

где $k \geqslant 3$ и $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. При этом мы по определению считаем, что $(\dot{\boldsymbol{w}})\big|_{\partial\Omega} = \partial_t(\boldsymbol{w}\big|_{\partial\Omega})$. Правая часть этого равенства определена в пространстве обобщенных функций для любого $\boldsymbol{w}\in\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$. Следовательно, пространство $\mathcal{Y}$ корректно определено. Введем также пространство

$$\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{V}^0(\Omega) : (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})\big|_{\partial\Omega}\in H^{1/4}(\partial\Omega)\cap L_{1+k/2}(\partial\Omega)\}.$$

Так как след $\gamma_{\boldsymbol{n},\partial\Omega}(\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})\big|_{\partial\Omega}$ корректно определен и принадлежит $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см. Темам [1]), определение пространства $\boldsymbol{W}$ имеет смысл. Отметим, что оператор сужения γ_0: $\mathcal{Y}\to\boldsymbol{W}$, определенный по формуле

$\gamma_0 \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}\big|_{t=0}$, непрерывен. Действительно, положим

$$\mathcal{Y}_\delta = \Big\{ \boldsymbol{w} \in L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)\big) \cap \boldsymbol{L}_k\big((0,T)\times\partial\Omega\big) :$$

$$\dot{\boldsymbol{w}} \in \boldsymbol{L}_2\big((0,T)\times\partial\Omega\big), \int\limits_{\partial\Omega} \dot{\boldsymbol{w}}\, ds = 0 \Big\}.$$

Ввиду непрерывности операторов $\gamma_{n,\partial\Omega}$: $\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_\delta$ и γ_0: $\mathcal{Y}_\delta \to H^{1/4}(\partial\Omega) \cap L_{1+k/2}(\partial\Omega)$ сужение $\gamma_0 \boldsymbol{w}$ для произвольного $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ обладает свойством

$$\gamma_{n,\partial\Omega}(\gamma_0 \boldsymbol{w}) = \gamma_0(\gamma_{n,\partial\Omega}\boldsymbol{w}) \in H^{1/4}(\partial\Omega) \cap L_{1+k/2}(\partial\Omega).$$

Это доказывает, что включение $\gamma_0 \mathcal{Y} \subset \boldsymbol{W}$ непрерывно.

Поскольку решение экстремальной задачи ищется в пространстве $\mathcal{Y}$, следует наложить на начальное условие $\boldsymbol{w}_0$ в определении 2.1 более сильное ограничение, а именно:

$$\boldsymbol{w}\big|_{t=0} = \boldsymbol{w}_0 \equiv \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_\infty \in \boldsymbol{W}. \tag{2.3}$$

Задача 2.1. Пусть $\boldsymbol{w} \equiv \boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}_\infty \in \boldsymbol{W}$. Найти векторное поле $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$, минимизирующее функционал

$$\mathcal{J}_N(\boldsymbol{w}) = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{x}\, dt + \frac{1}{4}\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w}|^2 (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty)\cdot \boldsymbol{n} ds\, dt$$

$$+ \frac{1}{4}\int\limits_\Omega |\boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x} + N \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \big(|\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty|^k + |\dot{\boldsymbol{w}}|^2\big) ds\, dt, \tag{2.4}$$

в котором $k \geqslant 3$, $N > 0$ с $N > 1/4$ при $k = 3$, в предположении, что выполнены условия (2.1) и (2.3).

Задача 2.2. Предположим, что $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\infty \in \boldsymbol{W}$. Найти векторное поле $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$, минимизирующее функционал

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{w}) = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{x}\, dt$$

$$+ \frac{1}{4}\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w}|^2 (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty)\cdot \boldsymbol{n}\, ds\, dt + \frac{1}{4}\int\limits_\Omega |\boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x}, \tag{2.5}$$

в предположении, что $\boldsymbol{w}$ удовлетворяет (2.1), (2.3) и условию

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \big(|\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty|^k + |\dot{\boldsymbol{w}}|^2\big)\, ds\, dt \leqslant M, \quad k \geqslant 3,\ M > 0. \tag{2.6}$$

В силу леммы 2.1 функционалы (2.4), (2.5) корректно определены на $\mathcal{Y}$.

Определение 2.2. Элемент $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ называется *допустимым*, если он удовлетворяет (2.1) и (2.3) в случае задачи 2.1 и удовлетворяет (2.1), (2.3) и (2.6) в случае задачи 2.2. Множество допустимых элементов обозначается символом $\mathfrak{A}$.

Определение 2.3. Элемент $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{A}$ называется *решением задачи* 2.1, если $\mathcal{J}_N(\widehat{\boldsymbol{w}}) = \inf_{\boldsymbol{w}\in\mathfrak{A}} \mathcal{J}_N(\boldsymbol{w})$, где $\mathcal{J}_N$ — функционал вида (2.4). Элемент $\widehat{w} \in \mathcal{V}_{ad}$ называется *решением задачи* 2.2, если $\mathcal{J}(\widehat{\boldsymbol{w}}) = \inf_{\boldsymbol{w}\in\mathfrak{A}} \mathcal{J}(\boldsymbol{w})$, где $\mathcal{J}$ — функционал вида (2.5).

§ 3. Неоднородная краевая задача для нестационарных уравнений Навье — Стокса

Наша цель — доказать теорему существования решений задач 2.1, 2.2 и получить системы оптимальности, которым должны удовлетворять эти решения. Для этого в настоящем параграфе мы докажем три результата, связанные со смешанной краевой задачей Дирихле для нестационарных уравнений Навье — Стокса, которые имеют и самостоятельный интерес.

Первый результат (см. п. 3.1) заключается в описании пространства следов пространства $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T) = L_2(0,T;\boldsymbol{V}^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega))$, т. е. множества граничных значений для векторного поля скоростей, которые могут быть продолжены до векторных полей из пространства $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$.

Второй результат (см. п. 3.2) состоит в доказательстве разрешимости уравнений Навье — Стокса с граничными условиями из упомянутого выше пространства следов и в выводе оценок для полученных решений.

Третий результат (см. п. 3.3) состоит в доказательстве существования сужения на границу у тензора напряжений, построенного по допустимому решению.

3.1. Теорема о продолжении граничных данных. Мы докажем несколько результатов о продолжении функций с боковой поверхности пространственно-временного цилиндра на цилиндр, т. е. с $(0,T)\times\partial\Omega$ на $(0,T)\times\Omega$.

Пусть $Q = \mathbb{R}\times\Omega$ — бесконечный пространственно-временной цилиндр и $S = \mathbb{R}\times\partial\Omega$ — боковая поверхность бесконечного пространственно-временного цилиндра. Мы хотим описать пространства векторных полей, определенных на S, которые можно продолжить до соленоидальных векторных полей, заданных на Q и принадлежащих пространству $\mathcal{V}^{(1)}(Q)$, которое, напомним, определяется формулой

$$\mathcal{V}^{(s)}(Q) = \{\boldsymbol{v} \in L_2\big(\mathbb{R};\boldsymbol{V}^{(s)}(\Omega)\big) : \dot{\boldsymbol{v}} \in L_2\big(\mathbb{R};\boldsymbol{V}^{(s-2)}(\Omega)\big)\}. \tag{3.1}$$

Другими словами, наша цель — описать пространство следов функций из $\mathcal{V}^{(1)}(Q)$. Как будет видно далее, необходимо отдельно описывать нормальную и тангенциальную компоненты следов, так как они принадлежат разным функциональным пространствам.

Обозначим через $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1,\tau_2)^T$ единичное касательное к $\partial\Omega$ векторное поле, направленное против часовой стрелки, а через $\boldsymbol{n} = (n_1,n_2)^T$ — поле внешних нормалей к $\partial\Omega$. Справедливы соотношения $\tau_1 = n_2$ и $\tau_2 = -n_1$.

Для заданного векторного поля

$$\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}) = b_n(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) + b_\tau(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}), \quad (t,\boldsymbol{x}) \in S, \tag{3.2}$$

удовлетворяющего условию

$$\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}\,ds = 0 \text{ для почти всех } t \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

где $b_n = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}$ и $b_\tau = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\tau}$, мы ищем соленоидальное продолжение $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2)^T \in \mathcal{V}^{(1)}(Q)$ в виде

$$u_1 = \partial_2 F, \quad u_2 = -\partial_1 F, \tag{3.4}$$

где F — функция тока для $\boldsymbol{u}$ и $\partial_i F = \partial F/\partial x_i$. Другими словами, для заданного векторного поля $\boldsymbol{b}$, удовлетворяющего (3.3), мы ищем функцию F такую, что

$$b_n = -(\nabla F\cdot\boldsymbol{\tau})\big|_S \equiv -\partial_\tau F\big|_S, \tag{3.5}$$

$$b_\tau = (\nabla F\cdot\boldsymbol{n})\big|_S \equiv \partial_n F\big|_S. \tag{3.6}$$

Так как мы ищем соленоидальное продолжение граничного условия $\boldsymbol{b}$, условие (3.3) необходимо.

В силу (3.3) соотношение (3.5) эквивалентно равенству

$$F\big|_S = h \equiv -\int\limits_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} b_n(t,\boldsymbol{x}(s))\,ds, \tag{3.7}$$

где криволинейный интеграл берется вдоль $\partial\Omega$ в направлении против часовой стрелки, начиная с фиксированной точки $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$. Итак, для любой пары (b_τ, h), определенной на S, мы хотим построить $F \in \mathcal{H}^{(2)}(Q)$, удовлетворяющую (3.6), (3.7), где

$$\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}\times\Theta) = \{u \in L_2\big(\mathbb{R}; H^s(\Theta)\big) : \dot{u} \in L_2\big(\mathbb{R}; H^{s-2}(\Theta)\big)\}.$$

Здесь $s \in \mathbb{R}$, Θ — произвольная пространственная область и норма в $\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}\times\Theta)$ определяется равенством

$$\|F\|^2_{\mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}\times\Theta)} = \|F\|^2_{L_2(\mathbb{R};H^s(\Theta))} + \|\dot{F}\|^2_{L_2(\mathbb{R};H^{s-2}(\Theta))}, \quad F \in \mathcal{H}^{(s)}(\mathbb{R}\times\Theta).$$

Покажем, что для заданных граничных условий существует продолжение F из соответствующего функционального пространства.

Предложение 3.1. *Для пары (b_τ, h), определенной на S, существует продолжение $F \in \mathcal{H}^{(2)}(Q)$, удовлетворяющее* (3.6), (3.7), *оценке*

$$\begin{aligned}\|F\|^2_{\mathcal{H}^{(2)}(Q)} \leqslant C\big\{&\|b_\tau\|^2_{L_2(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega))} + \|b_\tau\|^2_{H^{1/4}(\mathbb{R};L^2(\partial\Omega))}\\ &+ \|h\|^2_{L_2(\mathbb{R};H^{3/2}(\partial\Omega))} + \|h\|^2_{H^{3/4}(\mathbb{R};L^2(\partial\Omega))}\big\},\end{aligned} \tag{3.8}$$

и условию

$$F \text{ обращается в нуль вне окрестности } S = \mathbb{R}\times\partial\Omega, \tag{3.9}$$

где константа C не зависит от b_τ, h и F, тогда и только тогда, когда

$$b_\tau \in L_2\big(\mathbb{R}; H^{1/2}(\partial\Omega)\big) \cap H^{1/4}\big(\mathbb{R}; L^2(\partial\Omega)\big), \tag{3.10}$$

$$h \in L_2\big(\mathbb{R}; H^{3/2}(\partial\Omega)\big) \cap H^{3/4}\big(\mathbb{R}; L^2(\partial\Omega)\big). \tag{3.11}$$

Доказательство. Для заданных b_τ и h из пространств (3.10) и (3.11) построим продолжение F, удовлетворяющее (3.6)–(3.9). Обратный результат получится повторением того же доказательства в обратном порядке. Так как $\partial\Omega \in C^\infty$, можно выбрать окрестность U кривой $\partial\Omega$ и систему координат $(x_1', x_2')^T$ так, что $U = \big\{\boldsymbol{x} = (x_1', x_2')^T : (x_1', 0)^T \in \partial\Omega, x_2' \in [0, \varepsilon]\big\}$ при некотором $\varepsilon > 0$. Пространство $\mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R} \times U)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R} \times U) = \big\{&F(x_2', t, x_1') \in L_2\big(0, \varepsilon; L_2(\mathbb{R}; H^2(\partial\Omega))\big)\\ &\cap L_2\big(0, \varepsilon; H^1(\mathbb{R}; L^2(\partial\Omega))\big) : \partial_{x_2'x_2'}F \in L_2\big(0, \varepsilon; L_2(\mathbb{R}; L^2(\partial\Omega))\big)\big\}.\end{aligned}$$

В силу теоремы о следах (см. Лионс, Мадженес [2]) отображения $\gamma_0\colon F \to F\big|_{x_2'=0}$ и $\gamma_1\colon F \to \partial_{x_2'}F\big|_{x_2'=0}$ корректно определены на $\mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R} \times U)$. Более того, оператор $F \mapsto (\gamma_0 F, \gamma_1 F)$ такой, что

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R} \times U) \to &\big[L_2\big(\mathbb{R}; H^2(\partial\Omega)\big) \cap H^1\big(\mathbb{R}; L_2(\partial\Omega)\big), L_2\big(\mathbb{R}; L_2(\partial\Omega)\big)\big]_{3/4}\\ &\times \big[L_2\big(\mathbb{R}; H^2(\partial\Omega)\big) \cap H^1\big(\mathbb{R}; L_2(\partial\Omega)\big), L_2\big(\mathbb{R}; L_2(\partial\Omega)\big)\big]_{1/4},\end{aligned}$$

непрерывен и сюръективен. Здесь мы используем промежуточные пространства $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$ гильбертовых пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, определенные в Лионс, Мадженес [2]. Используя это определение промежуточных пространств, получим

$$\begin{aligned}&\big[L_2\big(\mathbb{R}; H^2(\partial\Omega)\big) \cap H^1\big(\mathbb{R}; L_2(\partial\Omega)\big), L_2\big(\mathbb{R}; L_2(\partial\Omega)\big)\big]_{3/4}\\ &= L_2\big(\mathbb{R}; H^{3/2}(\partial\Omega)\big) \cap H^{3/4}\big(\mathbb{R}; L_2(\partial\Omega)\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\big[L_2\big(\mathbb{R}; H^2(\partial\Omega)\big) \cap H^1\big(\mathbb{R}; L_2(\partial\Omega)\big), L_2\big(\mathbb{R}; L_2(\partial\Omega)\big)\big]_{1/4}\\ &= L_2\big(\mathbb{R}; H^{1/2}(\partial\Omega)\big) \cap H^{1/4}\big(\mathbb{R}; L_2(\partial\Omega)\big).\end{aligned}$$

Следовательно, отображение $F \to (\gamma_0 F, \gamma_1 F)$ непрерывно и сюръективно из $\mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R} \times U)$ в

$$\begin{aligned}&\big[L_2\big(\mathbb{R}; H^{3/2}(\partial\Omega)\big) \cap H^{3/4}\big(\mathbb{R}; L_2(\partial\Omega)\big)\big]\\ &\times \big[L_2\big(\mathbb{R}; \boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)\big) \cap H^{1/4}\big(\mathbb{R}; \boldsymbol{L}_2(\partial\Omega)\big)\big].\end{aligned}$$

Наконец, мы можем выбрать другую окрестность $\widetilde{U}$ множества $(0, T) \times \partial\Omega$, содержащую замыкание множества U. Хорошо известные результаты о продолжении позволяют продолжить функции из пространства $\mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R} \times U)$ до функций из пространства $\{F \in \mathcal{H}^{(2)}(\mathbb{R} \times \Omega) : F = 0 \text{ вне } \widetilde{U}\}$. □

Докажем основной результат о продолжении. Обозначим конечный пространственно-временной цилиндр через $Q_T = (0, T) \times \Omega$ и его боковую поверхность через $S_T = (0, T) \times \partial\Omega$.

Теорема 3.1. *Предположим, что b_n и b_τ удовлетворяют соотношениям*

$$\int\limits_{\partial\Omega} b_n\,ds = 0 \text{ для почти всех } t \in [0,T], \tag{3.12}$$

$$b_n \in L_2\big(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)\big) \cap H^{3/4}\big(0,T;H^{-1}(\partial\Omega)\big), \tag{3.13}$$

$$b_\tau \in L_2\big(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)\big) \cap H^{1/4}\big(0,T;L_2(\partial\Omega)\big). \tag{3.14}$$

Тогда существует векторное поле $\boldsymbol{u} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ такое, что

$$\boldsymbol{u}\big|_{S_T} = \boldsymbol{b} \equiv b_n\boldsymbol{n} + b_\tau\boldsymbol{\tau}, \tag{3.15}$$

и справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)} &\leqslant C\big\{\|b_n\|^2_{L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))} + \|b_n\|^2_{H^{3/4}(0,T;H^{-1}(\partial\Omega))}\\ &+ \|b_\tau\|^2_{L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))} + \|b_\tau\|^2_{H^{1/4}(0,T;L_2(\partial\Omega))}\big\},\end{aligned} \tag{3.16}$$

где константа C не зависит от b_n, b_τ, а $\boldsymbol{u}$ обращается в нуль вне некоторой окрестности множества $(0,T)\times\partial\Omega$.

Доказательство. По определению пространство $H^r(0,T;H^s(\partial\Omega))$ с дробными индексами r и s является пространством сужений на $(0,T)\times\partial\Omega$ функций из $H^r(\mathbb{R};H^s(\partial\Omega))$. Поэтому мы можем продолжить заданные функции по времени, т. е. существуют

$$\begin{aligned}&\widetilde{b}_n \in L_2\big(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega)\big) \cap H^{3/4}\big(\mathbb{R};H^{-1}(\partial\Omega)\big),\\ &\widetilde{b}_\tau \in L_2\big(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega)\big) \cap H^{1/4}\big(\mathbb{R};L_2(\partial\Omega)\big)\end{aligned}$$

такие, что $\widetilde{b}_n = b_n$ и $\widetilde{b}_\tau = b_\tau$ на $(0,T)\times\partial\Omega$, и справедливы оценки

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{b}_n\|^2_{L_2(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega))} + \|\widetilde{b}_n\|^2_{H^{3/4}(\mathbb{R};H^{-1}(\partial\Omega))}\\ &\leqslant C\big\{\|b_n\|^2_{L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))} + \|b_n\|^2_{H^{3/4}(0,T;H^{-1}(\partial\Omega))}\big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{b}_\tau\|^2_{L_2(\mathbb{R};H^{1/2}(\partial\Omega))} + \|\widetilde{b}_\tau\|^2_{H^{1/4}(\mathbb{R};L_2(\partial\Omega))}\\ &\leqslant C\big\{\|b_\tau\|^2_{L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))} + \|b_\tau\|^2_{H^{1/4}(0,T;L_2(\partial\Omega))}\big\}.\end{aligned}$$

Более того, без ограничения общности можно считать, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} \widetilde{b}_n\,ds = 0 \text{ для почти всех } t \in \mathbb{R}.$$

Действительно, при необходимости $\widetilde{b}_n$ можно заменить величиной

$$\widetilde{\widetilde{b}}_n = \widetilde{b}_n - \int\limits_{\partial\Omega} \widetilde{b}_n\,ds \Big/ \int\limits_{\partial\Omega} ds.$$

Положим

$$\widetilde{h}(t,\boldsymbol{x}) = -\int\limits_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} \widetilde{b}_n(t,\boldsymbol{x}(s))\,ds, \qquad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,$$

где криволинейный интеграл в правой части берется вдоль направления против часовой стрелки, начиная с заданной точки $\boldsymbol{x}_0\in\partial\Omega$. Очевидно, что

$$\widetilde{h}\in L_2(\mathbb{R};H^{3/2}(\partial\Omega))\cap H^{3/2}(\mathbb{R};L_2(\partial\Omega)).$$

Из предложения 3.1 следует существование функции $F\in\mathcal{H}^2(Q)$, которая обращается в нуль вне окрестности множества $\mathbb{R}\times\partial\Omega$ и удовлетворяет условиям $F\big|_S=\widetilde{h}$, $\partial_n F\big|_S=\widetilde{b}_\tau$. Положив $\boldsymbol{u}=\operatorname{rot}F=\begin{pmatrix}\partial_2 F\\ -\partial_1 F\end{pmatrix}$, мы видим, что $\boldsymbol{u}\in\mathcal{V}^{(1)}(Q)$,

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\big|_S=\operatorname{rot}F\cdot\boldsymbol{n}\big|_S=-\nabla F\cdot\boldsymbol{\tau}\big|_S=-\partial_\tau F\big|_S=-\partial_\tau\widetilde{h}=\widetilde{b}_n,$$
$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau})\big|_S=\operatorname{rot}F\cdot\boldsymbol{\tau}\big|_S=\nabla F\cdot\boldsymbol{n}\big|_S=\partial_n F\big|_S=\widetilde{b}_\tau.$$

Следовательно, $\widetilde{\boldsymbol{b}}\big|_{S_T}=\boldsymbol{b}=\widetilde{b}_n\big|_{S_T}\boldsymbol{n}+\widetilde{b}_\tau\big|_{S_T}\boldsymbol{\tau}$, т. е. $\boldsymbol{u}$ удовлетворяет (3.15). Оценка (3.16) следует из предложения 3.1. □

Пусть $\widehat{H}^k(\Omega)=\{u(x)\in H^k(\Omega):\int\limits_\Omega u(x)\,dx=0\}$. Для доказательства непрерывности операторов следа, определенных на пространстве $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ нам понадобится

Предложение 3.2. *Оператор* $\operatorname{rot}:\widehat{H}^k(\Omega)\to V^{k-1}(\Omega)$ *при* $k=0,1,2$ *непрерывен и имеет непрерывный обратный.*

Доказательство. Непрерывность оператора rot при $k=0,1,2$ очевидна. Для $F\in H^1(\Omega)$, $v\in V_0^1(\Omega)$ справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_\Omega \operatorname{rot}F\cdot v\,dx=\int\limits_\Omega(\partial_2 F v_1-\partial_1 F v_2)\,dx=\int\limits_\Omega(\partial_1 v_2-\partial_2 v_1)F\,dx.$$

Положив $\operatorname{rot}^*(v)=\partial_1 v_2-\partial_2 v_1$, получим, что оператор $\operatorname{rot}^*:V_0^1(\Omega)\to\widehat{H}^0(\Omega)$ сопряжен оператору $\operatorname{rot}:\widehat{H}^0(\Omega)\to V^{-1}(\Omega)$. Как известно (см., например, Иосида [1]), для доказательства равенства $\operatorname{rot}\widehat{H}^0(\Omega)=V^{-1}(\Omega)$ достаточно доказать, что $\operatorname{Ker}\operatorname{rot}^*=0$. Докажем последнее равенство. Пусть $v\in\operatorname{Ker}\operatorname{rot}^*$. Это означает, что $v=(v_1,v_2)\in V_0^1$, $\partial_1 v_2-\partial_2 v_1=0$, $\partial_1 v_1+\partial_2 v_2=0$, $v_i\in H_0^1(\Omega)$, $i=1,2$. Дифференцируя первое равенство по x_1 и учитывая остальные соотношения, получим $\Delta v_2=0$, $x\in\Omega$, $v_2\in H_0^1(\Omega)$. Следовательно, $v_2(x)\equiv 0$. Аналогично доказывается, что $v_1(x)\equiv 0$.

Итак, доказано, что $\operatorname{rot}\widehat{H}^0(\Omega)=V^{-1}(\Omega)$. Для доказательства обратимости оператора rot покажем, что $\operatorname{Ker}\operatorname{rot}=0$. Действительно, если $F\in\operatorname{Ker}\operatorname{rot}$, то $\partial_1 F=0$, $\partial_2 F=0$ и, следовательно, $F\equiv\text{const}$. Так как $\int\limits_\Omega F\,dx=0$, имеем $F\equiv 0$. Таким образом, оператор $\operatorname{rot}^{-1}:V^{-1}(\Omega)\to\widehat{H}^0(\Omega)$

определен, а в силу теоремы Банаха об обратном операторе он также непрерывен. Для доказательства обратимости оператора $\operatorname{rot}\colon \widehat{H}^k \to V^{k-1}$ при $k = 1, 2$, заметим следующее:

(a) $\{F \in \widehat{H}^k : \operatorname{rot} F = 0\} \subset \{F \in \widehat{H}^0 : \operatorname{rot} F = 0\} = \operatorname{Ker} \operatorname{rot} = 0$, $k = 1, 2$,

(b) в силу обратимости оператора $\operatorname{rot}\colon \widehat{H}^0 \to V^{-1}$ для любого $v \in V^{k-1} \subset V^{-1}$, $k = 1, 2$ существует $F \in \widehat{H}^0(\Omega)$ такой, что $\partial_2 F = v_1$ и $\partial_1 F = -v_2$.

Следовательно, $F \in \widehat{H}^k(\Omega)$. Применение теоремы Банаха об обратном операторе завершает доказательство. □

Из предложения 3.2 сразу следует теорема о непрерывности оператора сужения на S_T векторных полей из $\mathcal{V}^1(Q_T)$.

Теорема 3.2. *Для любого $u \in \mathcal{V}^1(Q_T)$ определено сужение $u\big|_{S_T}$ на боковую поверхность S_T цилиндра Q_T. При этом справедлива оценка*

$$\|b_n\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega))\cap H^{3/4}(0,T;H^{-1}(\partial\Omega))} + \|b_\tau\|^2_{L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))\cap H^{1/4}(0,T;L_2(\partial\Omega))}$$
$$\leqslant c\,\|u\|_{\boldsymbol{\mathcal{V}}^{(1)}(Q_T)},$$

где c не зависит от u, а b_n и b_τ определены в (3.15).

Доказательство. Пусть b_n, b_τ — компоненты сужения $u \in \mathcal{V}^1(Q_T)$ на S_T, определенные в (3.15), $F = \operatorname{rot}^{-1} u$, т. е. F и u связаны соотношениями (3.4). Тогда F, b_n и b_τ связаны соотношениями (3.5) и (3.6). Используя эти соотношения, непрерывность оператора $\operatorname{rot}^{-1}\colon \mathcal{V}^{(1)}(Q_T) \to \widehat{\mathcal{H}}^{(2)}(Q_T)$, где

$$\widehat{\mathcal{H}}^{(2)}(Q_T) = \{u \in \mathcal{H}^{(2)}(Q_T) : \int\limits_\Omega u\,dx = 0 \text{ для почти всех } t \in (0,T)\},$$

а также непрерывность оператора следов

$$(\gamma_{S_T}\partial_\tau, \gamma_{S_T}\partial_n)\colon \mathcal{H}^{(2)}(Q_T) \to L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)) \cap H^{3/4}(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$$
$$\times L_2(0,T;H^{1/4}(\partial\Omega)) \cap H^{1/4}(0,T;L_2(\partial\Omega))$$

(см. теорему 1.1.13), получим утверждение теоремы. □

Доказательство леммы 2.1. Пусть $u \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$, $\operatorname{rot} F = u$ и, следовательно, $F \in \widehat{\mathcal{H}}^{(2)}(Q_T)$. Так как $\widehat{\mathcal{H}}^{(2)}(Q_T) \subset C(0,T;\widehat{H}^1(\Omega))$ (см. Лионс, Мадженес [2]), в силу предложения 3.2 имеем

$$\|u(t)\|_{V^0(\Omega)} \leqslant c\,\|F(t)\|_{\widehat{H}^1(\Omega)} \leqslant c_1\,\|F\|_{\widehat{\mathcal{H}}^{(2)}(Q_T)} \leqslant c_2\,\|u\|_{\boldsymbol{\mathcal{V}}^{(1)}(Q_T)}.$$

Аналогичные оценки доказывают, что вложение $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T) \subset C(0,T;\widehat{H}^1(\Omega))$ непрерывно. □

Замечание 3.1. Из теоремы 3.2 видно, что оператор сужения $\boldsymbol{u} \mapsto (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\big|_{\partial\Omega}$ непрерывно действует из пространства $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ в пространство

$$H^{3/4}\big(0,T;H^{-1}(\partial\Omega)\big) \cap L_2\big(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)\big).$$

Точно так же, оператор следа $b_n \mapsto b_n\big|_{t=0}$ непрерывен из пространства

$$H^{3/4}\big(0,T;H^{-1}(\partial\Omega)\big)\cap L_2\big(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)\big)$$

в пространство $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см. Лионс, Мадженес [2]). Следовательно, композиция этих операторов, т. е. оператор $\boldsymbol{u}\mapsto[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\big|_{\partial\Omega}]\big|_{t=0}$ непрерывно действует из $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ в $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. С другой стороны, композиция операторов $\boldsymbol{u}\mapsto\boldsymbol{u}\big|_{t=0}$ и $\boldsymbol{u}\big|_{t=0}\mapsto(\boldsymbol{u}\big|_{t=0}\cdot\boldsymbol{n})\big|_{\partial\Omega}$ непрерывна из $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ в $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ (см. лемму 2.1 и Темам [1]). Используя плотность пространства $C^\infty(Q_T)\cap\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ в $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$, мы получаем следующее условие согласования для продолжения $\boldsymbol{u}$ из теоремы 3.1: $(\boldsymbol{u}\big|_{t=0}\cdot\boldsymbol{n})\big|_{\partial\Omega}=\big((\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\big|_{\partial\Omega}\big)\big|_{t=0}$ для $\boldsymbol{u}\in\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$. □

3.2. Оценки решений уравнений Навье — Стокса с неоднородными граничными данными Дирихле. Рассмотрим краевую задачу для уравнений Навье — Стокса в форме, введенной в определении 2.1. Будем предполагать, что граничное условие $\boldsymbol{b}$ удовлетворяет соотношению (3.12). Мы хотим установить с помощью теорем о продолжении из п. 3.1 разрешимость задачи (2.1)–(2.3) и оценить эти решения в пространстве критической гладкости[3] через исходные данные $\boldsymbol{w}_0$ и $\boldsymbol{b}$.

Обозначим через b_n и b_τ ортогональную и касательную компоненты граничной вектор-функции $\boldsymbol{b}$. Предположим, что b_n и b_τ удовлетворяют (3.12)–(3.14) и выполнено условие

$$\boldsymbol{w}_0\in\boldsymbol{V}^0(\Omega). \tag{3.17}$$

Предположим также, что выполнены условия согласования

$$(\boldsymbol{w}_0\cdot\boldsymbol{n})\big|_{\partial\Omega}=b_n\big|_{t=0} \tag{3.18}$$

в соответствии с замечанием 3.1. Запишем решение $\boldsymbol{w}$ задачи (2.1)–(2.3) в виде $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\eta}$, где $\boldsymbol{u}\in\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ — вектор-функция, построенная в теореме 3.1, и потому удовлетворяющая (3.15), (3.16). В силу леммы 2.1 из включения $\boldsymbol{u}\in\mathcal{V}^{(1)}(Q)$ следует $\boldsymbol{u}\big|_{t=0}\in L_2(\Omega)$. Подставляя $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\eta}$ в (2.1)–(2.3), получим следующее уравнение для $\boldsymbol{\eta}$:

$$\begin{gathered}\langle\dot{\boldsymbol{\eta}},\boldsymbol{z}\rangle+\int\limits_\Omega\nabla\boldsymbol{\eta}(t):\nabla\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{x}+\int\limits_\Omega\big((\boldsymbol{\eta}(t)+\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\nabla\big)\boldsymbol{\eta}(t)\cdot\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{x}\\+\int\limits_\Omega(\boldsymbol{\eta}(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{x}=\langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{z}\rangle\\ \forall\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{V}_0^1(\Omega)\text{ для почти всех }t\in(0,T),\end{gathered} \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{\eta}\big|_{S_T}=\boldsymbol{0}\text{ в }L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)\big), \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{\eta}\big|_{t=0}=\boldsymbol{\eta}_0\equiv\boldsymbol{w}_0-\boldsymbol{u}\big|_{t=0}\text{ в }\boldsymbol{V}_0^0(\Omega), \tag{3.21}$$

[3] т. е. в пространстве минимальной гладкости, гарантирующей регулярность решений (в частности, их единственность).

где

$$\langle \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{z}\rangle = -\int\limits_{\Omega} \nabla \boldsymbol{u}(t) : \nabla \boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x} - \langle \partial_t \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{z}\rangle$$
$$- \int\limits_{\Omega} [(\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{v}_\infty)\cdot\nabla]\boldsymbol{u}(t)\cdot \boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x}. \tag{3.22}$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и* $\boldsymbol{u}$ *— векторное поле, построенное в теореме* 3.1. *Если выполнено условие согласования* (3.18), *то существует единственное решение* $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ *задачи* (3.19)–(3.21), *причем справедлива оценка*

$$\|\dot{\boldsymbol{\eta}}\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega))} + \|\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_\infty(0,T;\boldsymbol{V}^0(\Omega))} + \|\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^1(\Omega))}$$
$$\leqslant A\big(\|\boldsymbol{f}\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega))}, \|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)}, \|\boldsymbol{\eta}_0\|_{\boldsymbol{V}^0(\Omega)}, |\boldsymbol{v}_\infty|\big),$$

где $A(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ *— непрерывная положительная функция, определенная в* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ *и* $A(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,|\boldsymbol{v}_\infty|) \to 0$ *при* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \to (0,0,0)$.

Доказательство. Заметим, что существование и единственность решения $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ задачи (3.19)–(3.21) доказывается в точности так же, как в случае двумерной системы уравнений Навье — Стокса в неограниченной области с нулевыми граничными условиями (см., например, Ладыженская [1]; Темам [1]). Мы остановимся лишь на доказательстве оценок.

Положив $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\eta}(t,\cdot)$ в (3.19), получим

$$\frac{1}{2}\partial_t \|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^2_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} + \|\nabla\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^2_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} = \langle \boldsymbol{f}(t,\cdot), \boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\rangle - \int\limits_{\Omega} (\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\eta}\, d\boldsymbol{x}$$
$$\leqslant \|\boldsymbol{f}(t,\cdot)\|^2_{\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{4}\big(\|\nabla\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^2_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^2_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\big)$$
$$+ \|\nabla\boldsymbol{u}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\, \|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^2_{\boldsymbol{L}_4(\Omega)}.$$

Применяя к последнему члену неравенство Ладыженской (см. Ладыженская [1])

$$\|\eta\|^2_{L_4(\Omega)} \leqslant \sqrt{2}\, \|\eta\|_{L_2(\Omega)}\, \|\nabla\eta\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall \eta \in H^1(\Omega)$$

и затем интегрируя по t, выводим оценку

$$\|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^2_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} + \int\limits_0^t \|\nabla\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^2_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\, dt \leqslant \|\boldsymbol{\eta}_0\|^2_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}$$
$$+ 2\int\limits_0^t \|\boldsymbol{f}(\tau,\cdot)\|^2_{\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)}\, d\tau + \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2} + 4\,\|\nabla\boldsymbol{u}(\tau,\cdot)\|^2_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\right) \|\boldsymbol{\eta}(\tau,\cdot)\|^2_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\, d\tau.$$

Из этого соотношения и неравенства Гронуолла следует оценка

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_\infty(0,T;\boldsymbol{L}_2(\Omega))} + \|\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{H}^1(\Omega))}$$
$$\leqslant A_1\big(\|\boldsymbol{f}\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega))}\,,\ \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}_2(0,T;\boldsymbol{H}^1(\Omega))}\,,\ \|\boldsymbol{\eta}_0\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\big),$$

где $A_1(\cdot,\cdot,\cdot)$ — непрерывная положительная функция, определенная на $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$. Из этой оценки вытекает неравенство

$$\|\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_\infty(0,T;\boldsymbol{V}^0(\Omega))} + \|\boldsymbol{\eta}\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^1(\Omega))}$$
$$\leqslant A_1\bigg(\|\boldsymbol{f}\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega))}\,,\ \|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)}\,,\ \|\boldsymbol{\eta}_0\|_{\boldsymbol{V}^0(\Omega)}\bigg). \tag{3.23}$$

Взяв в (3.19) супремум по $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{V}^1_0$, $\|\boldsymbol{z}\|_{\boldsymbol{V}^1_0}=1$ и опять применяя неравенство Ладыженской, получим

$$\|\dot{\boldsymbol{\eta}}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)} \leqslant \|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} + C\,\|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)}\,\|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}$$
$$+ C\,\|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\|^{1/2}_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)}\,\|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\|^{1/2}_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\,\|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^{1/2}_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)}\,\|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^{1/2}_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}$$
$$+ C\,|\boldsymbol{v}_\infty|\,\|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} + \|\boldsymbol{f}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)}.$$

Поэтому

$$\|\dot{\boldsymbol{\eta}}(t,\cdot)\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega))} \leqslant C\,\|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{H}^1(\Omega))}$$
$$+ C\,\|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^2_{L_\infty(0,T;\boldsymbol{L}_2(\Omega))}\,\|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{H}^1(\Omega))}$$
$$+ C\,\|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\|_{L_\infty(0,T;\boldsymbol{L}_2(\Omega))}\,\|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|_{L_\infty(0,T;\boldsymbol{L}_2(\Omega))}$$
$$\times\,\|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{H}^1(\Omega))}\,\|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{H}^1(\Omega))}$$
$$+ C\,|\boldsymbol{v}_\infty|^2\,\|\boldsymbol{\eta}(t,\cdot)\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{L}_2(\Omega))} + C\,\|\boldsymbol{f}(t,\cdot)\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega))}.$$

Используя (3.23) и лемму 2.1, мы получим требуемое утверждение. □

Теорема 3.3. *Пусть* $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{w}_0$ *удовлетворяют соотношениям* (3.12)–(3.14) *и* (3.17), (3.18). *Тогда существует единственное решение* $\boldsymbol{w}\in\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ *задачи* (2.1)–(2.3), *и это решение удовлетворяет оценке*

$$\|\boldsymbol{w}\|^2_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)} \leqslant B\big(\|\boldsymbol{w}_0\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\,,\ \|b_n\|_{L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))} + \|b_n\|_{H^{3/4}(0,T;H^{-1}(\partial\Omega))},$$
$$\|b_\tau\|_{L_2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))} + \|b_\tau\|_{H^{1/4}(0,T;L_2(\partial\Omega))}\,,\ |\boldsymbol{v}_\infty|\big), \tag{3.24}$$

где $B(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ — *непрерывная положительная функция, определенная на* $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{u}\in\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ — продолжение граничного условия $\boldsymbol{b}$ в цилиндр Q_T, построенное в теореме 3.1, а $\boldsymbol{\eta}$ — решение задачи (3.19)–(3.21) с правой частью $\boldsymbol{f}$, определенной в (3.22). Существование и единственность $\boldsymbol{\eta}$ гарантируется леммой 3.1. Если $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\eta}$, то $\boldsymbol{w}$ будет единственным решением задачи (2.1)–(2.3). Таким образом, остается лишь доказать оценку (3.24).

Так как носитель функции $\boldsymbol{u}$ ограничен (см. теорему 3.1), в силу (3.22) имеем

$$\|\boldsymbol{f}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)} \leqslant \|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} + \|\partial_t \boldsymbol{u}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}\|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)} + |\boldsymbol{v}_\infty|\,\|\boldsymbol{u}(t,\cdot)\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega)}. \tag{3.25}$$

В силу (3.21)

$$\|\boldsymbol{\eta}_0\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} \leqslant \|\boldsymbol{w}_0\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}(0,\cdot)\|_{\boldsymbol{L}_2(\Omega)}. \tag{3.26}$$

Теперь неравенство (3.24) следует из теоремы 3.1, лемм 2.1, 3.1 и оценок (3.25), (3.26). □

Замечание 3.2. Подчеркнем, что при доказательстве разрешимости неоднородной краевой задачи для системы Навье — Стокса мы должны требовать различной гладкости от ортогональной и касательной компонент граничного условия. Эта особенность характерна для неоднородных краевых задач в случае системы Навье — Стокса, но отсутствует у неоднородных краевых задач для систем параболических уравнений второго порядка.

3.3. Сужение на границу тензора напряжений у допустимых решений. Ниже показано, что для допустимого в смысле определения 2.2 элемента $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ и соответствующего ему давления p сужение на границу $(0,T)\times\partial\Omega$ тензора напряжений $\big(-pI + (\nabla\boldsymbol{w} + (\nabla\boldsymbol{w})^T)\big)\cdot\boldsymbol{n}\big|_{(0,T)\times\partial\Omega}$ корректно определено в некотором функциональном пространстве. Этот результат потребуется в п. 5.4 для вывода системы оптимальности в форме смешанной краевой задачи для уравнений с частными производными. Отметим, что требование допустимости $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{A}$ сильнее, чем просто предположение о том, что $\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ удовлетворяет соотношениям (2.1) и (2.3). Фактически мы покажем, что каждое из слагаемых $(p\boldsymbol{n})\big|_{(0,T)\times\partial\Omega}$, $(\nabla\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})\big|_{(0,T)\times\partial\Omega}$ и $((\nabla\boldsymbol{w})^T\cdot\boldsymbol{n})\big|_{(0,T)\times\partial\Omega}$ корректно определено.

Пусть $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ — допустимый элемент. Тогда $\boldsymbol{w}$ удовлетворяет (2.1) и (2.3). Из определения пространства $\mathcal{Y}$ следует, что сужение $\boldsymbol{w}\big|_{(0,T)\times\partial\Omega}$ корректно определено и

$$\boldsymbol{w}\big|_{(0,T)\times\partial\Omega} \in H^1\big(0,T;\boldsymbol{L}_2(\partial\Omega)\big) \cap L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)\big) \cap \boldsymbol{L}_k\big((0,T)\times\partial\Omega\big).$$

В силу леммы Де Рама (см. Ладыженская [1], Темам [1]) существует $p \in L_2\big(0,T;L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)\big)$ такое, что $\nabla p \in L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\big)$ и справедливо равенство

$$\dot{\boldsymbol{w}} - \Delta\boldsymbol{w} + [(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\nabla]\boldsymbol{w} + \nabla p = 0, \tag{3.27}$$

понимаемое в смысле обобщенных функций на Q_T. Это давление p мы и будем считать соответствующим элементу $\boldsymbol{w}$.

Для изучения нормального напряжения на $\partial\Omega$ поведение $\boldsymbol{w}$ и p на бесконечности не существенно, и мы можем проводить рассмотрения в ограниченной области с границей, содержащей $\partial\Omega$. С этой целью введем ограниченную область $\Theta \subset \Omega$ с границей $\partial\Theta$ класса C^∞, такой, что $\partial\Omega \subset \partial\Theta$. Обозначим через γ оператор сужения на $\partial\Omega$ и через F функцию тока векторного поля $\boldsymbol{w}$, которая может быть построена в области Θ так же, как в

п. 3.1. По определению

$$w_1 = \partial_2 F, \quad w_2 = -\partial_1 F. \tag{3.28}$$

Так как $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}(Q_\Theta) \subset \mathcal{V}^{(1)}(Q_\Theta)$, где $Q_\Theta = (0,T) \times \Theta$, в силу предложения 3.2 имеем $F \in \mathcal{H}^{(2)}(Q_\Theta)$. Сужая уравнение (3.27) и условие дивергентности для $\boldsymbol{w}$ на Q_Θ, получим

$$\dot{\boldsymbol{w}} - \Delta \boldsymbol{w} + [(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \nabla]\boldsymbol{w} + \nabla p = 0, \tag{3.29}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0, \tag{3.30}$$

где производные понимаются в смысле обобщенных функций на Q_Θ. Напомним, что $\operatorname{rot}^* v = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ для $v = (v_1, v_2)$. Применяя оператор rot^* к (3.29) и учитывая (3.28), получим

$$\Delta \dot{F} - \mu \Delta^2 F = G, \tag{3.31}$$

где

$$G = -\operatorname{rot}^*\{[(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \nabla]\boldsymbol{w}\} = -(w_1 + v_{\infty,1})\Delta w_2 + (w_2 + v_{\infty,2})\Delta w_1. \tag{3.32}$$

Лемма 3.2. *Пусть $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ — решение уравнения* (2.1), *а функция G определена в* (3.22). *Тогда $G \in L_1\big(0,T; W_\alpha^{-1}(\Theta)\big)$ для любого $\alpha \in (1,2)$.*

Доказательство. Пусть α' и β определяются равенствами

$$\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\alpha} = 1, \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{2}.$$

Пусть задана функция $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\alpha'}(\Theta)$. Интегрируя по частям и применяя неравенство Гёльдера, при почти всех $t \in (0,T)$ получим

$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_\Theta (w_1 + v_{\infty,1})\Delta w_2 \varphi \, d\boldsymbol{x} \right| = \left| \int\limits_\Theta \big((\varphi \nabla w_1 \cdot \nabla w_2 + (w_1 + v_{\infty,1})\nabla w_2 \cdot \nabla \varphi \big) \, d\boldsymbol{x} \right| \\
&\leqslant \|\nabla w_1\|_{\boldsymbol{L}_2(\Theta)} \, \|\nabla w_2\|_{\boldsymbol{L}_2(\Theta)} \, \|\varphi\|_{L_\infty(\Theta)} \\
&+ \|w_1 + v_{\infty,1}\|_{L_\beta(\Theta)} \, \|\nabla w_2\|_{\boldsymbol{L}_2(\Theta)} \, \|\nabla \varphi\|_{\boldsymbol{L}_{\alpha'}(\Theta)}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Так как $\alpha' \in (2,\infty)$ и $\beta \in (2,\infty)$, из теорем вложения Соболева следуют неравенства

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Theta)} \leqslant C \, \|\varphi\|_{W^1_{\alpha'}(\Theta)}, \quad \|w_1 + v_{\infty,1}\|_{L_\beta(\Theta)} \leqslant C \, \|w_1 + v_{\infty,1}\|_{H^1(\Theta)}.$$

Поэтому

$$\|(w_1 + v_{\infty,1})\Delta w_2\|_{L_1(0,T;W_\alpha^{-1}(\Theta))} \leqslant C\big(\|\boldsymbol{w}\|^2_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_\Theta)} + |\boldsymbol{v}_\infty|^2\big).$$

Точно так же можно установить неравенство

$$\|(w_2 + v_{\infty,2})\Delta w_1\|_{L_1(0,T;W_\alpha^{-1}(\Theta))} \leqslant C\big(\|\boldsymbol{w}\|^2_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_\Theta)} + |\boldsymbol{v}_\infty|^2\big).$$

Из последних двух неравенств и (3.32) получаем $G \in L_1(0,T; W_\alpha^{-1}(\Theta))$. $\square$

Так как $F \in \mathcal{H}^{(2)}(Q_\Theta)$, имеем $\Delta F \in L_2(0,T;L_2(\Theta))$. Вследствие (3.31), (3.32) и леммы 3.2 имеем $\Delta(\dot{F} - \mu\,\Delta F) \in L_1\big(0,T;W_\alpha^{-1}(\Theta)\big)$. Введем пространство $X_\alpha = \big\{f \in L_2(\Theta) : \Delta f \in W_\alpha^{-1}(\Theta)\big\}$, снабженное нормой $\|f\|_{X_\alpha} = \|f\|_{L_2(\Theta)} + \|\Delta f\|_{W_\alpha^{-1}(\Theta)}$. Легко проверить, что пространство X_α банахово. Мы докажем теорему о следах для функций из X_α. Для этого нам потребуются две леммы. Следующая лемма доказывается так же, как лемма 2.5.6.

Лемма 3.3. *Каждый ограниченный линейный функционал L из X_α допускает представление*

$$Lf = (f,\varphi) + \langle \Delta f, \psi\rangle \quad \forall f \in X_\alpha, \tag{3.34}$$

где $\varphi \in L_2(\Theta)$, $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\alpha'}(\Theta)$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Theta)$, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — соотношение двойственности между $W_\alpha^{-1}(\Theta)$ и $\overset{\circ}{W}{}^1_{\alpha'}(\Theta)$.

Лемма 3.4. *Пространство $C^\infty(\overline{\Theta})$ плотно в X_α.*

Доказательство. Достаточно показать, что если для ограниченного линейного функционала L на X_α справедливо равенство $Lf = 0$ для любой $f \in C^\infty(\overline{\Theta})$, то тогда $L = 0$. Пусть функционал L удовлетворяет указанным предположениям. В силу леммы 3.3 существуют $\varphi \in L_2(\Theta)$ и $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\alpha'}$ такие, что $Lf = (f,\varphi) + \langle\Delta f,\psi\rangle = 0$ для всех $f \in C^\infty(\overline{\Theta})$. Из этого равенства следует соотношение $\Delta\psi = -\varphi$, понимаемое в смысле обобщенных функций. Так как $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\alpha'}(\Theta)$ и $\varphi \in L_2(\Theta)$, по теореме о гладкости решений эллиптических краевых задач имеем $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\alpha'}(\Theta) \cap H^2(\Theta)$. Следовательно, $\partial_n\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Для каждой функции $f \in C^\infty(\overline{\Theta})$ с помощью интегрирования по частям выводим

$$\begin{aligned} 0 &= (f,\varphi) + (\Delta f,\psi) = (f,\varphi) + (f,\Delta\psi) - (\partial_n\psi, f)_{L_2(\partial\Omega)} \\ &= (f,\varphi) + (f,-\varphi) - (\partial_n\psi, f)_{L_2(\partial\Omega)} = -(\partial_n\psi, f)_{L_2(\partial\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Следовательно, $\partial_n\psi\big|_{\partial\Omega} = 0$, т. е. $\psi \in H_0^2(\Omega)$. Используя плотность $C_0^\infty(\Theta)$ в $H_0^2(\Theta)$, выберем последовательность $\{\psi_n\} \in C_0^\infty(\Theta)$ такую, что $\psi_n \to \psi$ в $H^2(\overline{\Theta})$. Тогда для каждого $f \in X_\alpha$

$$\begin{aligned} &(f,\varphi) + \langle\Delta f,\psi\rangle = (f,\varphi) + \lim_{n\to\infty}\langle\Delta f,\psi_n\rangle = (f,\varphi) + \lim_{n\to\infty}(f,\Delta\psi_n) \\ &= (f,\varphi) + (f,\Delta\psi) = (f,\varphi) + (f,-\varphi) = 0, \end{aligned}$$

т. е. $Lf = 0$ для всех $f \in X_\alpha$. Следовательно, $L = 0$. □

Предложение 3.3. *Пусть $1 < \alpha < 2$. Тогда оператор γ, определенный на $C^\infty(\overline{\Theta})$ равенством $\gamma f = f\big|_{\partial\Theta}$, можно непрерывно продолжить до оператора следа*

$$\gamma \in \mathcal{L}\big(X_\alpha; B_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Theta)\big). \tag{3.36}$$

Доказательство.[4] В силу теоремы 1.1.3 можно выбрать непрерывный линейный оператор

$$K\colon B^{1-1/\alpha'}_{\alpha'}(\partial\Theta) \to W^2_{\alpha'}(\Theta) \tag{3.37}$$

такой, что

$$\gamma K\varphi = 0, \quad \gamma\partial_n K\varphi = \varphi \quad \forall\varphi \in B^{1-1/\alpha'}_{\alpha'}(\partial\Theta). \tag{3.38}$$

Пусть $f \in X_\alpha$. Определим линейный функционал Z на $B^{1-1/\alpha'}_{\alpha'}(\partial\Theta)$ по формуле $Z\varphi = Z_K(\varphi) = (f, \Delta K\varphi) - \langle \Delta f, K\varphi\rangle \quad \forall\varphi \in B^{1-1/\alpha'}_{\alpha'}(\partial\Theta)$. Покажем, что Z не зависит от выбора K. Действительно, пусть K_1 и K_2 — непрерывные линейные операторы, удовлетворяющие (3.37) и (3.38). Тогда в силу (3.38) $\gamma(K_1 - K_2)\varphi = 0, \quad \gamma\partial_n(K_1 - K_2)\varphi = 0 \quad \forall\varphi \in B^{1-1/\alpha'}_{\alpha'}(\partial\Theta)$. Если $f \in C^\infty(\overline{\Theta})$, то, интегрируя по частям, получаем $Z_{K_1}(\varphi) - Z_{K_2}(\varphi) = (f, \Delta(K_1 - K_2)\varphi) - \langle \Delta f, (K_1 - K_2)\varphi\rangle = 0$. В силу леммы 3.4 это равенство верно для произвольного $f \in X_\alpha$. Следовательно, мы показали, что $Z_{K_1} = Z_{K_2}$, т. е. оператор Z корректно определен. Очевидно, что Z_K ограничен на $B^{1-1/\alpha'}_{\alpha'}(\partial\Theta)$. По тереме Рисса существует элемент $Rf \in B^{-1/\alpha}_{\alpha}(\partial\Theta)$ такой, что $(Rf, \varphi) = Z(\varphi) = (f, \Delta K\varphi) - \langle \Delta f, K\varphi\rangle$ для каждой $\varphi \in B^{1-1/\alpha'}_{\alpha'}(\partial\Theta)$. Применяя формулу Грина (1.1.18) к этому равенству при $f \in C^\infty(\overline{\Theta})$, получаем, что $Rf = \gamma f$. В силу леммы 3.4 и ограниченности оператора в (3.37) можно продолжить γ по непрерывности до оператора (3.36). □

Введем множество $\Upsilon = \{\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y} : \boldsymbol{w}$ удовлетворяет (2.1)$\}$, снабженное топологией, порожденной нормой пространства $\mathcal{Y}$.

Теорема 3.4. *Пусть $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ — решение уравнения* (2.1) *и $F \in \mathcal{H}^{(2)}(Q_\Theta)$ — функция тока* (3.28). *Пусть $G \in L_1(0,T; W^{-1}_\alpha(\Theta))$, $\alpha \in (1,2)$ — функция, определенная равенством* (3.32). *Тогда $\gamma\big(\nabla\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\big) \in L_1\big(0,T;\boldsymbol{B}^{-1/\alpha}_\alpha(\partial\Theta)\big)$ и $\gamma\big((\nabla\boldsymbol{w})^T\cdot\boldsymbol{n}\big) \in L_1\big(0,T;\boldsymbol{B}^{-1/\alpha}_\alpha(\partial\Theta)\big)$. Кроме того, отображения $\boldsymbol{w} \mapsto \gamma(\nabla\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n})$ и $\boldsymbol{w} \mapsto \gamma\big((\nabla\boldsymbol{w})^T\cdot\boldsymbol{n}\big)$ непрерывны из топологического пространства Υ в $L_1\big(0,T;\boldsymbol{B}^{-1/\alpha}_\alpha(\partial\Theta)\big)$.*

Доказательство. Так как $F \in \mathcal{H}^{(2)}(Q_\Theta)$, в силу (3.31) и леммы 3.2 имеем $\dot F - \mu\,\Delta F \in L_2\big(0,T;L_2(\Theta)\big)$ и $\Delta(\dot F - \mu\,\Delta F) \in L_1\big(0,T;W^{-1}_\alpha(\Theta)\big)$. Поэтому из предложения 3.3 следует, что при почти всех $t \in (0,T)$ сужение $\gamma\big(\dot F(t,\cdot) - \mu\,\Delta F(t,\cdot)\big)$ корректно определено и имеет место включение

$$\gamma(\dot F - \mu\,\Delta F) \in L_1\big(0,T;B^{-1/\alpha}_\alpha(\partial\Theta)\big), \tag{3.39}$$

где $1 < \alpha < 2$. В силу $F \in \mathcal{H}^{(2)}(Q_\Theta)$ имеем $\nabla\dot F \in H^1(\Theta, H^{-1}(0,T))$. Следовательно, сужение $\gamma(\nabla\dot F)$ на $(0,T)\times\partial\Theta$ корректно определено в пространстве $H^{1/2}(\partial\Theta, H^{-1}(0,T))$. Более того, из включения $\boldsymbol{w} = (\partial_2 F, -\partial_1 F) \in \mathcal{Y}$ следует, что $\gamma\nabla\dot F \in L_2((0,T)\times\partial\Theta)$. Поэтому

$$\gamma\partial_n\dot F \in L_2\big((0,T)\times\partial\Theta\big), \quad \gamma\partial_\tau\dot F \in L_2\big((0,T)\times\partial\Theta\big). \tag{3.40}$$

[4]Напомним, что $B^{-1/\alpha}_\alpha(\partial\Theta)$ — пространство Бесова (см. гл. 1, § 1)

В силу (3.40) имеем

$$\gamma\dot{F} \in L_2\big(0,T;H^1(\partial\Theta)\big), \tag{3.41}$$

а в силу (3.39) и (3.41) —

$$\gamma\Delta F \in L_1\big(0,T;B_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Theta)\big) \tag{3.42}$$

при $1<\alpha<2$. Так как

$$F \in \mathcal{H}^{(2)}(Q_\Theta) \subset L_2\big(0,T;H^2(\Theta)\big), \tag{3.43}$$

мы видим, что

$$\gamma F \in L_2\big(0,T;H^{3/2}(\partial\Theta)\big), \quad \gamma\partial_\tau F \in L_2\big(0,T;H^{1/2}(\partial\Theta)\big), \tag{3.44}$$

$$\gamma\partial_n F \in L_2\big(0,T;H^{1/2}(\partial\Theta)\big). \tag{3.45}$$

Докажем включения

$$\gamma\partial_{n\tau} F \in L_2\big(0,T;H^{-1/2}(\partial\Theta)\big), \quad \gamma\partial_{\tau\tau} F \in L_2\big(0,T;H^{-1/2}(\partial\Theta)\big). \tag{3.46}$$

Умножим F на срезающую функцию с носителем в окрестности $\partial\Theta$. Без потери общности можно считать, что Θ совпадает с полуплоскостью $\mathbb{R}^2_+ = \{(x_1,x_2) : x_2>0\}$ и $\partial\Theta$ совпадает с $\{(x_1,x_2) : x_2=0\}$. Положим $F_1=\partial_\tau F$ и $F_2=\partial_{\tau\tau}F$. Из (3.43) легко следует, что

$$F_2 \in L_2((0,T)\times\mathbb{R}^2_+), \quad \partial_{\tau\tau}F_2 \in L_2((0,T)\times\mathbb{R}_+;H^{-2}(\mathbb{R})), \tag{3.47}$$

$$\Delta F_2 = \partial_{\tau\tau}(\partial_{nn}+\partial_{\tau\tau})F \in L_2\big((0,T)\times\mathbb{R}_+;H^{-2}(\mathbb{R})\big). \tag{3.48}$$

Поэтому

$$\partial_{nn}F_2 = \Delta F_2 - \partial_{\tau\tau}F_2 \in L_2\big((0,T)\times\mathbb{R}_+;H^{-2}(\mathbb{R})\big). \tag{3.49}$$

Из соотношений (3.47)–(3.49) и теоремы о следах (см. Лионс, Мадженес [2, гл.5, § 3] следует второе соотношение в (3.46). Соотношение (3.46_1) доказывается аналогично.

Обозначив вектор нормали к границе через $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2)$, а единичный касательный вектор — через $\boldsymbol{\tau}=(n_2,-n_1)$, получим

$$\partial_1 F = n_1\partial_n F + n_2\partial_\tau F, \quad \partial_2 F = n_2\partial_n F - n_1\partial_\tau F, \tag{3.50}$$

$$\Delta F = \partial_{nn}F + \partial_{\tau\tau}F + \rho_1\partial_n F + \rho_2\partial_\tau F, \tag{3.51}$$

где ρ_1 и ρ_2 — некоторые гладкие функции. Выражая $\partial_{nn}F$ через ΔF, $\partial_{\tau\tau}F$, $\partial_n F$, $\partial_\tau F$ с помощью (3.51) и учитывая (3.42), (3.44)–(3.46) и включение $L_2\big(0,T;H^{-1/2}(\partial\Theta)\big) \subset L_1\big(0,T;B_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Theta)\big)$, $1<\alpha<2$, мы получим, что $\partial_{nn}F$ имеет след на $\partial\Theta$, причем

$$\gamma\partial_{nn}F \in L_1\big(0,T;B_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Theta)\big). \tag{3.52}$$

Вследствие уравнений (3.28) и (3.50) имеем $\nabla w_1\cdot\boldsymbol{n} = n_2\partial_{nn}F - n_1\partial_{n\tau}F + \beta_1\partial_n F + \beta_2\partial_\tau F$ и $\nabla w_2\cdot\boldsymbol{n} = -n_1\partial_{nn}F - n_2\partial_{n\tau}F + \delta_1\partial_n F + \delta_2\partial_\tau F$, где β_1,

β_2, δ_1 и δ_2 — некоторые гладкие функции. Эти два соотношения дают нам выражение для $\nabla \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}$ через $\partial_{nn}F$, $\partial_{n\tau}F$, $\partial_n F$, $\partial_\tau F$. Аналогично мы получаем следующие выражения для $(\nabla \boldsymbol{w})^T \cdot \boldsymbol{n}$ через $\partial_{nn}F$, $\partial_{n\tau}F$, $\partial_n F$ и $\partial_\tau F$:

$$(\partial_1 \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n} = -n_2 \partial_{\tau\tau} F - n_1 \partial_{n\tau} F + b_1 \partial_n F + b_2 \partial_\tau F,$$
$$(\partial_2 \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n} = n_1 \partial_{\tau\tau} F - n_2 \partial_{n\tau} F + d_1 \partial_n F + d_2 \partial_\tau F,$$

где β_1, β_2, d_1 и d_2 — некоторые гладкие функции. Из этих соотношений и (3.44)–(3.46), (3.52) следует утверждение теоремы. □

Докажем теорему о следах для давления p, удовлетворяющего (3.27).

Теорема 3.5. *Пусть $\boldsymbol{w}$ удовлетворят предположениям теоремы* 3.4 *и p — функция такая, что $p \in L_2(0,T;L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega))$, $\nabla p \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ и справедливо равенство* (3.27). *Тогда $p \in L_1(0,T;X_\alpha(\Theta))$ и отображение сужения $\gamma\colon p \to (p\boldsymbol{n})\big|_{\partial\Omega}$ принадлежит $\mathcal{L}\big(L_1(0,T;X_\alpha(\Theta)), L_1(0,T;\boldsymbol{B}_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega))\big)$, $1 < \alpha < 2$.*

Доказательство. Взяв дивергенцию от обеих частей (3.27) и используя условие (3.30) бездивергентности $\boldsymbol{w}$, получим

$$\Delta p = E, \tag{3.53}$$

где $E = -2[(\partial_1 w_1)^2 + (\partial_1 w_2)(\partial_2 w_1)]$. Пусть α' — число, сопряженное к α, т. е. $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$. Так как $\alpha' > 2$ и вложение $W^1_{\alpha'}(\Theta) \hookrightarrow C(\overline{\Theta})$ непрерывно, получаем

$$\int_0^T \int_\Theta E(t,\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,dt \leqslant 2\int_0^T \|\boldsymbol{w}\|^2_{\boldsymbol{V}^1(\Theta)}\,dt\,\|\varphi\|_{C(\overline{\Theta})}$$
$$\leqslant C\,\|\boldsymbol{w}\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^1(\Theta))}\,\|\varphi\|_{W^{1,\alpha'}(\Theta)} \quad \forall \varphi \in W^1_{\alpha'}(\Theta).$$

Следовательно, $\Delta p \in L_1\big(0,T;W_\alpha^{-1}(\Theta)\big)$. Кроме того $p \in L_2\big(0,T;L_2(\Theta)\big)$. Поэтому $p \in L_1(0,T;X_\alpha)$, и доказываемый результат о следе функции p вытекает из предложения 3.3 и включения $\partial\Omega \subset C^\infty$. □

Комбинируя теоремы 3.4 и 3.5, мы получим следующий результат о сужении на границу вектора напряжений, соответствующего допустимому решению.

Следствие 3.1. *Пусть $\boldsymbol{w}$ и p удовлетворяют предположениям теорем* 3.4 *и* 3.5. *Тогда сужение на границу вектора напряжений, т. е. $\big(-p\boldsymbol{n} + \mu(\nabla \boldsymbol{w} + (\nabla \boldsymbol{w})^T) \cdot \boldsymbol{n}\big)\big|_{(0,T)\times\partial\Omega}$ принадлежит $L_1\big(0,T;\boldsymbol{B}_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big)$.*

§ 4. Существование оптимального решения

В этом параграфе доказываются теоремы существования оптимального решения для задач 2.1 и 2.2. Применение для этой цели абстрактных теорем из гл. 1, § 2 возможно после незначительных модификаций условия компактности, которые необходимы ввиду неограниченности области.

Однако мы не будем проводить этих модификаций, а приведем прямое доказательство теорем существования.

4.1. Подготовительные утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть $R > 0$ настолько велико, что $\partial\Omega \subset \{x : |x| < R\}$. Положим $\Omega_R = \Omega \cap \{x : |x| < R\}$. Тогда существует положительная константа C, зависящая только от R, такая, что*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega_R)} \leqslant C\left(\int\limits_{\Omega_R} |\mathcal{D}(\boldsymbol{u})|^2\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{u}|^2\,ds\right) \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega_R),$$

где $\mathcal{D}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla v + \nabla v^T)$ — тензор скоростей деформации.

Доказательство. Предполагая, что лемма неверна, выберем последовательность $\{\boldsymbol{u}_n\} \subset H^1(\Omega_R)$ такую, что $\|\boldsymbol{u}_n\|_{H^1(\Omega_R)} = 1$,

$$1 > n\left(\int\limits_{\Omega_R} |\mathcal{D}(\boldsymbol{u}_n)|^2\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{u}_n|^2\,ds\right),$$

так что

$$\int\limits_{\Omega_R} |\mathcal{D}(\boldsymbol{u}_n)|^2\,d\boldsymbol{x} \to 0, \quad \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{u}_n|^2\,ds \to 0, \quad n \to \infty. \tag{4.1}$$

Тогда $\mathcal{D}(\boldsymbol{u}_n) \to \mathbf{0}$ в $L_2(\Omega_R)$ (где $\mathbf{0}$ — нулевой тензор) и $\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}$ в $L_2(\partial\Omega)$. В силу соотношения $\|\boldsymbol{u}_n\|_{H^1(\Omega_R)} = 1$ можно выбрать подпоследовательность (которую мы так же обозначим через $\{\boldsymbol{u}_n\}$) такую, что при $n \to \infty$

$$\boldsymbol{u}_n \rightharpoonup \boldsymbol{u} \text{ слабо в } \boldsymbol{H}^1(\Omega_R), \quad \boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u} \text{ в } \boldsymbol{L}_2(\Omega_R), \quad \boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}, \text{ в } \boldsymbol{L}_2(\partial\Omega) \tag{4.2}$$

для некоторого $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega_R)$. Поэтому $\mathcal{D}(\boldsymbol{u}_n) \to \mathcal{D}(\boldsymbol{u})$ слабо в $L_2(\Omega_R)$. Следовательно, $\mathcal{D}(\boldsymbol{u}) = 0$ в $L_2(\Omega_R)$ и $\boldsymbol{u} = 0$ в $L_2(\partial\Omega)$, т. е. $\mathcal{D}(\boldsymbol{u}) \equiv 0$ в Ω_R и $\boldsymbol{u} \equiv 0$ на $\partial\Omega$. Таким образом, $\boldsymbol{u}$ описывает движение твердого тела и, следовательно, может быть записано в виде $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x}$ для всех $\boldsymbol{x} \in \Omega_R$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы (см. Дюво, Лионс [1]). Так как $\boldsymbol{u}$ — линейная функция, равная нулю на замкнутом многообразии $\partial\Omega$, имеем $\boldsymbol{a} = 0$ и $\boldsymbol{b} = 0$. Следовательно, $\boldsymbol{u} \equiv 0$ в Ω.

С другой стороны, из (4.1), (4.2) следует, что $\mathcal{D}(\boldsymbol{u}_n) \to \mathcal{D}(\boldsymbol{u})$ в $L_2(\Omega_R)$ и $\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}$ в $L_2(\Omega_R)$. Используя неравенство Корна (см. Дюво, Лионс [1])

$$\int\limits_{\Omega_R} \left(|\mathcal{D}(\boldsymbol{z})|^2 + |\boldsymbol{z}|^2\right) d\boldsymbol{x} \geqslant C\,\|\boldsymbol{z}\|^2_{\boldsymbol{H}^1(\Omega_R)} \quad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega_R),$$

можно заключить, что $\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}$ в $\boldsymbol{H}^1(\Omega_R)$. Поэтому

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega_R)} = \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{u}_n\|_{\boldsymbol{H}^1(\Omega_R)} = 1,$$

т. е. $\boldsymbol{u} \neq 0$. Это противоречие доказывает лемму. □

Из леммы 4.1 вытекает

Следствие 4.1. *Существует константа $C > 0$, зависящая только от Ω, такая, что*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \leqslant C\Big(\int\limits_{\Omega} |\mathcal{D}(\boldsymbol{u})|^2\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{u}|^2\,ds\Big) \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega).$$

Доказательство. Зафиксируем $R > 0$ так, чтобы $\partial\Omega \subset \{x : |x| < R\}$. Тогда по лемме 4.1 и теореме о следах для $\boldsymbol{H}^1(\Omega_R)$

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \leqslant C\Big(\int\limits_{\Omega_R} |\mathcal{D}(\boldsymbol{u})|^2\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{u}|^2\,ds\Big) \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega_R),$$

где C — некоторая константа. Отсюда следует доказываемая оценка, так как $\Omega_R \subset \Omega$. □

4.2. Теорема существования.

Теорема 4.1. *Существует решение $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ задачи* 2.1. *Существует решение $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ задачи* 2.2..

Доказательство. Рассуждения для задач 2.1 и 2.2 по существу совпадают, поэтому мы рассмотрим только задачу 2.1. Теорема 3.3 гарантирует непустоту множества $\mathfrak{A}$ допустимых элементов. Действительно, выберем граничные условия из $C^\infty([0,T]\times\partial\Omega)$. По теореме 3.3 существует решение класса $\mathcal{V}^1(Q_T)$ уравнений Навье — Стокса при выбранных гладких граничных условиях. Это решение принадлежит $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A}$ непусто. Легко видеть, что функционал $\mathcal{J}_N(\cdot)$ ограничен снизу на $\mathcal{Y}$. Поэтому можно выбрать последовательность $\{\boldsymbol{w}_n\} \subset \mathfrak{A}$ такую, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_N(\boldsymbol{w}_n) = \inf\nolimits_{\boldsymbol{w}\in\mathfrak{A}} \mathcal{J}_N(\boldsymbol{w}),\\
&\langle \dot{\boldsymbol{w}}_n, \boldsymbol{z}\rangle + \int\limits_{\Omega} \nabla\boldsymbol{w}_n : \nabla\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega} \big([\boldsymbol{w}_n + \boldsymbol{v}_\infty]\cdot\nabla\big)\boldsymbol{w}_n\cdot\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{x} = 0\\
&\forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}_0^1(\Omega) \text{ для почти всех } t \in (0,T),\\
&\boldsymbol{w}_n\big|_{t=0} = \boldsymbol{w}_0 \quad \text{в } \boldsymbol{V}^0(\Omega).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Используя (2.4) и условия на k и N из постановки задачи 2.1, получим

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} \mathcal{D}(\boldsymbol{w}_n) : \mathcal{D}(\boldsymbol{w}_n)\,d\boldsymbol{x}\,dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \big(|\dot{\boldsymbol{w}}_n|^2 + |\boldsymbol{w}_n|^k\big)\,ds\,dt \leqslant C. \tag{4.4}$$

Из (4.4) и следствия 4.1 вытекает оценка

$$\|\boldsymbol{w}_n\|_{L_k((0,T)\times\partial\Omega)} + \|\boldsymbol{w}_n\|_{H^1(0,T;\boldsymbol{L}^2(\partial\Omega))} + \|\boldsymbol{w}_n\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega))} \leqslant C. \tag{4.5}$$

Соотношения (3.24) и (4.5) приводят к оценке

$$\|\dot{\boldsymbol{w}}_n\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega))} + \|\boldsymbol{w}_n\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^1(\Omega))} \leqslant C,$$

которая позволяет выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность

$$\boldsymbol{w}_n \rightharpoonup \widehat{\boldsymbol{w}} \text{ в } L_2(0,T;\boldsymbol{V}^1(\Omega)), \tag{4.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{w}}_n \rightharpoonup \dot{\widehat{\boldsymbol{w}}} \text{ в } L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)) \tag{4.7}$$

для некоторого $\widehat{w} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$. Для $R > 0$ положим $B_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$. Так как пространство

$$\mathcal{V}_R^{(1)} \equiv \big\{\boldsymbol{u} \in L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}^1(\Omega \cap B_R)\big) : \dot{\boldsymbol{u}} \in L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega \cap B_R)\big)\big\},$$

снабженное нормой

$$\|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathcal{V}_R^{(1)}} = \|\boldsymbol{u}\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^1(\Omega\cap B_R))} + \|\dot{\boldsymbol{u}}\|^2_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega\cap B_R))},$$

компактно вложено в $\boldsymbol{L}_2\big((0,T)\times(\Omega\cap B_R)\big)$, в силу (4.6), (4.7) имеем

$$\boldsymbol{w}_n \to \widehat{\boldsymbol{w}} \text{ в } \boldsymbol{L}_2\big((0,T)\times(\Omega\cap B_R)\big). \tag{4.8}$$

Взяв в (4.3) произвольное $\boldsymbol{z} \in C_0^\infty(\Omega) \cap \boldsymbol{V}_0^1(\Omega)$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, в силу (4.6)–(4.8) получим равенство

$$\langle \dot{\widehat{\boldsymbol{w}}}(t), \boldsymbol{z}\rangle + \int\limits_\Omega \nabla \widehat{\boldsymbol{w}}(t) : \nabla \boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \big([\widehat{\boldsymbol{w}}(t) + \boldsymbol{v}_\infty]\cdot\nabla\big)\widehat{\boldsymbol{w}}(t)\cdot \boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x} = 0 \tag{4.9}$$

для почти всех $t \in (0,T)$. Ввиду плотности $C_0^\infty(\Omega)\cap\boldsymbol{V}_0^1(\Omega)$ в $V_0^1(\Omega)$ получим, что (4.9) справедливо для всех $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}_0^1(\Omega)$ и почти всех $t \in (0,T)$. Другими словами, $\widehat{\boldsymbol{w}}$ удовлетворяет слабой форме уравнений Навье — Стокса. В силу (4.6) и теорем о следах $\boldsymbol{w}_n \rightharpoonup \widehat{\boldsymbol{w}}$ в $L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)\big)$. Поэтому $\boldsymbol{w}_n \rightharpoonup \widehat{\boldsymbol{w}}$ в $\boldsymbol{L}_2\big((0,T)\times\partial\Omega\big)$. В силу (4.5) $\boldsymbol{w}_n \rightharpoonup \boldsymbol{h}$ в $\boldsymbol{L}_k\big((0,T)\times\partial\Omega\big)\cap H^1\big(0,T;\boldsymbol{L}_2(\partial\Omega)\big)\cap L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)\big)$ для некоторого $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{L}_k\big((0,T)\times\partial\Omega\big)\cap H^1\big(0,T;\boldsymbol{L}_2(\partial\Omega)\big)\cap L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)\big)$. Очевидно, что $\boldsymbol{h} = \widehat{\boldsymbol{w}}$ на $(0,T)\times\partial\Omega$. Следовательно,

$$\boldsymbol{w}_n \rightharpoonup \widehat{\boldsymbol{w}} \text{ в } \boldsymbol{L}_k\big((0,T)\times\partial\Omega\big)\cap H^1\big(0,T;\boldsymbol{L}_2(\partial\Omega)\big)\cap L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)\big). \tag{4.10}$$

Итак, мы показали, что $\widehat{\boldsymbol{w}} \in \mathcal{Y}$. Поскольку вложение $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ в пространство $C([0,T];\boldsymbol{V}^0)$ непрерывно (см. лемму 2.1), при каждом $\tau \in [0,T]$ оператор следа $\boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{w}\big|_{t=\tau}$ ограничен как оператор из $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ в $\boldsymbol{V}^0(\Omega)$. Так как ограниченные линейные операторы сохраняют слабую сходимость, в силу слабой сходимости $\boldsymbol{w}_n \to \widehat{\boldsymbol{w}}$ в $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ получаем равенства $\boldsymbol{w}_0 = \boldsymbol{w}_n\big|_{t=0} \rightharpoonup \widehat{\boldsymbol{w}}\big|_{t=0}$ в $\boldsymbol{V}^0(\Omega)$ и $\boldsymbol{w}_n\big|_{t=T} \rightharpoonup \widehat{\boldsymbol{w}}\big|_{t=T}$ в $\boldsymbol{V}^0(\Omega)$.

Перейдем к пределу в функционале $\mathcal{J}_N$. Начнем с члена

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w}|^2 \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\, ds\, dt.$$

В силу теоремы 1.1.2 о компактности вложения имеем

$$\boldsymbol{L}_k\big((0,T)\times\partial\Omega\big)\cap H^1\big(0,T;\boldsymbol{L}_2(\partial\Omega)\big)\cap L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)\big)$$
$$\hookrightarrow \boldsymbol{H}^{1/2}\big((0,T)\times\partial\Omega\big)\hookrightarrow\hookrightarrow \boldsymbol{L}_3\big((0,T)\times\partial\Omega\big).$$

Поэтому из (4.10) следует сильная сходимость $\boldsymbol{w}_n\big|_{\partial\Omega}\to\widehat{\boldsymbol{w}}\big|_{\partial\Omega}$ в $\boldsymbol{L}_3\big((0,T)\times\partial\Omega\big)$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}|\boldsymbol{w}_n|^2\boldsymbol{w}_n\cdot\boldsymbol{n}\,ds\,dt=\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}|\widehat{\boldsymbol{w}}|^2\dot{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{n}\,ds\,dt.$$

Все остальные члены функционала $\mathcal{J}_N$ секвенциально слабо непрерывны снизу. Ввиду результатов о слабой сходимости (см. выше) имеем $\mathcal{J}_N(\widehat{\boldsymbol{w}})\leqslant\liminf_{n\to\infty}\mathcal{J}_N(\boldsymbol{w}_n)$. Таким образом, мы показали, что $\widehat{\boldsymbol{w}}\in\mathcal{Y}$ является решением задачи 2.1. □

Замечание 4.1. Доказательство теоремы 4.1 для задачи 2.2 можно сразу получить, подставив в (2.6) $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_n$ и перейдя к пределу при $n\to\infty$.

Замечание 4.2. Оптимальное решение ищется в пространстве $\mathcal{Y}$ функций с краевыми условиями, более гладкими, чем у функций из $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$. Поэтому можно ожидать, что оптимальное решение является более гладкой функцией, чем произвольный элемент из $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$.

Замечание 4.3. Результат о существовании справедлив также для многих других функционалов стоимости, например, для L_2-нормы вихря, использованной в Абержел, Темам [1], или для функционала

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{w})=\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}_0|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\big(|\dot{\boldsymbol{w}}|^2+|\boldsymbol{w}|^2+|\nabla_s\boldsymbol{w}|^2\big)\,ds\,dt,$$

где ∇_s — градиент на $\partial\Omega$. Рассуждая как выше, заключаем, что существует $\widehat{\boldsymbol{w}}\in\mathfrak{A}$ такое, что $\mathcal{K}(\widehat{\boldsymbol{w}})=\inf\limits_{\boldsymbol{w}\in\mathfrak{A}}\mathcal{K}(\boldsymbol{w})$.

§ 5. Система оптимальности

В этом параграфе выводится система оптимальности для задач 2.1 и 2.2. Используя некоторый вариант принципа Лагранжа, мы получаем систему оптимальности, записанную в слабой форме. Затем с помощью некоторых результатов теории неоднородных краевых задач для системы Навье — Стокса мы получаем сильную форму системы оптимальности, т. е. систему оптимальности, записанную в форме краевой задачи для сопряженной функции q.

5.1. Слабая форма системы оптимальности. Применим абстрактный принцип Лагранжа к задаче 2.1 и задаче 2.2, чтобы в каждом случае получить систему оптимальности. Начнем с задачи 2.1. Выведем для нее сопряженное уравнение в слабой форме.

Теорема 5.1. *Пусть* $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}^{(1)}(Q_T)$ *— решение задачи* 2.1. *Тогда существует* $\boldsymbol{q} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T) \cap L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}_0^1(\Omega)\big)$ *такое, что*

$$
\begin{aligned}
&2\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{h})\,d\boldsymbol{x}\,dt + 2\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{h}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{q})\,d\boldsymbol{x}\,dt\\
&+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \big\{(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{w}\cdot\nabla)\boldsymbol{h} + (\boldsymbol{v}_\infty\cdot\nabla)\boldsymbol{h}\big\}\cdot\boldsymbol{q}\,d\boldsymbol{x}\,dt\\
&+\int\limits_0^T \langle \dot{\boldsymbol{h}}(t,\cdot)\,,\,\boldsymbol{q}(t,\cdot)\rangle\,dt + N\Bigg(\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} 2\dot{\boldsymbol{w}}\cdot\dot{\boldsymbol{h}}\,ds\,dt\\
&+k\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty|^{k-2}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\boldsymbol{h}\,ds\,dt\Bigg)\\
&+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} \big\{(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n})|\boldsymbol{w}|^2\big\}\,ds\,dt\\
&+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{h}(T,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall \boldsymbol{h}\in\mathcal{Y}_0,
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

где $\mathcal{Y}_0 \equiv \{\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y} : \boldsymbol{y}\big|_{t=0} = 0\}$. (Напомним, что пространство $\mathcal{Y}$ определено в п. 2.2.)

Доказательство. Для доказательства используем теорему 2.1.9. Положим $X_1 = \mathcal{Y}_0$ и $X_2 = L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)\big)$. Определим отображения $f\colon X_1 \to \mathbb{R}$, $F\colon X_1 \to X_2$ следующим образом:

$$
f(\boldsymbol{y}) = \mathcal{J}_N(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}), \tag{5.2}
$$

$$
F(\boldsymbol{y}) = P(\dot{\boldsymbol{w}}+\dot{\boldsymbol{y}}) - P\Delta(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}) + P\big[\big((\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\nabla\big)(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y})\big], \tag{5.3}
$$

где $P\colon (\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))^2 \to \boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)$ — оператор проектирования. В задаче (2.1) ограничения $g_j(\boldsymbol{w})$ отсутствуют, или, что эквивалентно, можно считать, что $g_j(\boldsymbol{w})$ — это функционалы, тождественно равные нулю. Тогда $y = 0$ является решением соответствующей экстремальной задачи и $F'(0)\colon X_1 \to X_2$ определяется формулой

$$
\langle F'(\boldsymbol{0}),\boldsymbol{y}\rangle = P\dot{\boldsymbol{y}} - P\Delta\boldsymbol{y} + P\big[(\boldsymbol{y}\cdot\nabla)\boldsymbol{w} + \big((\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\nabla\big)\boldsymbol{y}\big]. \tag{5.4}
$$

Чтобы показать, что $F'(\boldsymbol{0})$ является эпиморфизмом, отметим сначала, что этот оператор непрерывен. Дальше нужно показать, что при любом $\boldsymbol{f} \in$

$L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)\big)$ система

$$\langle\dot{\boldsymbol{y}}(t),\boldsymbol{z}\rangle+\int\limits_{\Omega}\nabla\boldsymbol{y}(t):\nabla\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{x}+\int\limits_{\Omega}\big((\boldsymbol{w}(t)+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\nabla\big)\boldsymbol{y}(t)\cdot\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{x}$$
$$+\int\limits_{\omega}\big(\boldsymbol{y}(t)\cdot\nabla\big)\boldsymbol{w}(t)\cdot\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{x}=\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{z}\,d\boldsymbol{x}$$
$$\forall\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{V}_0^1(\Omega)\text{ для почти всех }t\in(0,T)\tag{5.5}$$

при начальном условии

$$\boldsymbol{y}\big|_{t=0}=\boldsymbol{0}\text{ в }\boldsymbol{V}^0(\Omega)\tag{5.6}$$

имеет решение $\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}_0$. Снабдим систему (5.5) граничным условием

$$\boldsymbol{y}\big|_{(0,T)\times\partial\Omega}=\boldsymbol{0}.\tag{5.7}$$

Используя технику доказательства теоремы 3.3, установим, что задача (5.5)–(5.7) имеет (единственное) решение $\boldsymbol{y}\in\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ (ситуация теперь даже проще, так как система (5.5)–(5.7) линейна). Ясно, что $\boldsymbol{y}\in\mathcal{Y}_0$. Мы проверили все предположения теоремы 2.1.9. Поэтому существует $\boldsymbol{q}\in X_2^*=L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}_0^1(\Omega)\big)$ такое, что

$$\langle\mathcal{L}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{h}\rangle\big|_{y=0}=0\quad\forall\boldsymbol{h}\in\mathcal{Y}_0,\tag{5.8}$$

где функционал Лагранжа для задачи 2.1 определяется формулой

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{q})=\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}|\mathcal{D}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y})|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt+\frac{1}{4}\int\limits_{\Omega}|\boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}(T,\boldsymbol{x})|^2\,d\boldsymbol{x}$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\boldsymbol{n}|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}|^2\,ds\,dt$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}(\dot{\boldsymbol{w}}+\dot{\boldsymbol{y}})\cdot\boldsymbol{q}\,d\boldsymbol{x}\,dt+2\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\mathcal{D}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}):\mathcal{D}(\boldsymbol{q})\,d\boldsymbol{x}\,dt$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\big\{[(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y})\cdot\nabla](\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{v}_\infty\cdot\nabla)(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y})\big\}\cdot\boldsymbol{q}\,d\boldsymbol{x}\,dt$$
$$+N\Big(\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}|\dot{\boldsymbol{w}}+\dot{\boldsymbol{y}}|^2\,ds\,dt+\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}_\infty|^k\,ds\,dt\Big)\tag{5.9}$$

для всех $\boldsymbol{y}\in X_1$. Отметим, что выбор $\lambda_0=1$ в (5.9) обоснован теоремой 2.1.9 и проверенным выше фактом, что $F'(\boldsymbol{0})$ — эпиморфизм. Подставляя (5.9) в (5.8), получим (5.1). Изменяя $\boldsymbol{h}$ в пространстве $\mathcal{E}=\big\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{C}_0^\infty\big((0,T)\times\Omega\big):\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0\big\}\subset\mathcal{Y}_0$, мы получим равенство, понимаемое в смысле обобщенных функций, определенных на соленоидальных векторных

полях:

$$\int_0^T \langle \dot{\boldsymbol{q}} + \Delta \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q} \cdot (\nabla \boldsymbol{w})^T + (\boldsymbol{w} \cdot \nabla)\boldsymbol{q} + (\boldsymbol{v}_\infty \cdot \nabla)\boldsymbol{q} + \Delta \boldsymbol{w}, h\rangle \, dt \quad \forall h \in \mathcal{E}. \tag{5.10}$$

Из включений $\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ и $\boldsymbol{q} \in L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}_0^1(\Omega)\big)$ легко вывести, что $\dot{\boldsymbol{q}} \in L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega))$. Следовательно, $\boldsymbol{q} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$. □

5.2. Формула Грина. Чтобы интерпретировать слабую форму системы оптимальности (5.1) как систему уравнений в частных производных с граничными условиями, нам потребуются формулы Грина для оптимального решения $\boldsymbol{w}$, сопряженной функции $\boldsymbol{q}$ и связанных с ними давлений p и r соответственно.

Отметим, что если $\boldsymbol{q}$ — решение уравнения (5.1) или (5.10), то по лемме Де Рама (см. Темам [1]) существует $\widetilde{r} \in L_2\big(0,T;L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)\big)$ такое, что $\nabla\widetilde{r} \in L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\big)$ и справедливо равенство

$$-\dot{\boldsymbol{q}} - \Delta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \cdot (\nabla \boldsymbol{w})^T - (\boldsymbol{w} \cdot \nabla)\boldsymbol{q} - (\boldsymbol{v}_\infty \cdot \nabla)\boldsymbol{q} + \nabla\widetilde{r} = \Delta \boldsymbol{w} \tag{5.11}$$

в смысле обобщенных функций. Сделав замену переменных $r = \widetilde{r} + p$, где p удовлетворяет (3.27), получим $r \in L_2(0,T;L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega))$, $\nabla r \in L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\big)$,

$$-\dot{\boldsymbol{q}} - \Delta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \cdot (\nabla \boldsymbol{w})^T - (\boldsymbol{w} \cdot \nabla)\boldsymbol{q} - (\boldsymbol{v}_\infty \cdot \nabla)\boldsymbol{q} + \nabla r = \Delta \boldsymbol{w} - \nabla p \tag{5.12}$$

в смысле теории обобщенных функций. Докажем теорему о следах для $\big((\nabla \boldsymbol{q}) + (\nabla \boldsymbol{q})^T\big) \cdot \boldsymbol{n}$ и r так же, как это было сделано в п. 3.3 для $\big((\nabla \boldsymbol{w}) + (\nabla \boldsymbol{w})^T\big) \cdot \boldsymbol{n}$ и p.

Лемма 5.1. *Пусть $\boldsymbol{w}$ — решение задачи* 2.1, $\boldsymbol{q} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T) \cap L_2(0,T;\boldsymbol{V}_0^1(\Omega))$ *решение уравнения* (5.1), $r \in L_2(0,T;L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega))$ *удовлетворяет* (5.12) *и* $\nabla r \in L_2\big(0,T;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)\big)$. *Тогда*

$$\gamma\big[(\nabla \boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{n}\big] \in L_1\big(0,T;\boldsymbol{B}_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big),\ \gamma\big[(\nabla \boldsymbol{q})^T \cdot \boldsymbol{n}\big] \in L_1\big(0,T;\boldsymbol{B}_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big), \tag{5.13}$$

$$\gamma(r\boldsymbol{n}) \in L_1\big(0,T;\boldsymbol{B}_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big), \tag{5.14}$$

и, следовательно,

$$\gamma\big[\big(-rI + (\nabla \boldsymbol{q}) + (\nabla \boldsymbol{q})^T\big) \cdot \boldsymbol{n} \in L_1\big(0,T;\boldsymbol{B}_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big)\big], \quad 1 < \alpha < 2. \tag{5.15}$$

Доказательство. Так же, как и в п. 3.3, введем ограниченную подобласть $\Theta \subset \Omega$ такую, что $\partial\Omega \subset \partial\Theta$. На Θ определим функцию тока E для $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$ такую, что $q_1 = \partial_2 E$ и $q_2 = -\partial_1 E$. Применив оператор rot^* к (5.12), получим

$$\Delta(\dot{E} + \Delta E + \Delta F) = G_1, \tag{5.16}$$

где F — функция тока для $\boldsymbol{w}$, введенная в (3.28) и $G_1 = 2(\partial_1 w_1)(\partial_2 q_1 + \partial_1 q_2) + 2(\partial_2 q_2)(\partial_1 w_2 + \partial_2 w_1) + (w_1 + v_{\infty,1})\Delta q_2 - (w_2 + v_{\infty,2})\Delta q_1$. Отметим, что равенство $\boldsymbol{q}\big|_{S_T} = \boldsymbol{0}$ позволяет выбрать E такое, что $E\big|_{S_T} = 0$. Аналогично доказательству леммы 3.2 находим

$$G_1 \in L_1\big(0,T;W_\alpha^{-1}(\Theta)\big), \quad 1 < \alpha < 2. \tag{5.17}$$

Так как $\boldsymbol{q} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$, в силу предложения 3.2 имеем $E \in \mathcal{H}^{(2)}(Q_T)$. Поэтому из (5.16), (5.17) следует включение $\dot{E} + \Delta E + \Delta F \in L_1(0,T;X_\alpha)$, $1 < \alpha < 2$. В силу предложения 3.3

$$\gamma(\dot{E} + \Delta E + \Delta F) \in L_1\big(0,T;B_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big). \tag{5.18}$$

Из равенства $E\big|_{S_T} = 0$ следует, что $\gamma\dot{E}\big|_{S_T} = 0$. Напомним, что в силу (3.42) $\gamma\Delta F \in L^1\big(0,T;B_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big)$. Поэтому $\gamma\Delta E \in L_1\big((0,T;B_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big)$ $1 < \alpha < 2$ в силу (5.18). Повторяя аргументы из доказательства теоремы 3.4, получим (5.13). Чтобы доказать утверждение о следах для r, мы фактически повторим доказательство теоремы 3.5 для p. Возьмем дивергенцию от обеих частей (5.12): $-\Delta r = G_2 + \Delta p$, где $G_2 = \partial_1 q_2(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1) + \partial_2 q_1(\partial_2 w_1 - \partial_1 w_2) + q_1\Delta w_1 + q_2\Delta w_2$. Аналогично доказательству леммы 3.2 получаем $G_2 \in L_1\big(0,T;W_\alpha^{-1}(\Theta)\big)$, $1 < \alpha < 2$. Последние три соотношения и включения $r \in L_2\big(0,T;L_2(\Theta)\big)$, $\Delta p \in L_1\big(0,T;W_\alpha^{-1}(\Theta)\big)$ приводят к включению $r \in L^1\big(0,T;X_\alpha\big)$. В силу предложения 3.3 имеем $\gamma r \in L_1\big((0,T;B_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big)$ при $1 < \alpha < 2$, т. е. справедливо (5.14). Наконец, (5.15) следует из (5.13) и (5.14). □

Установим формулу Грина.

Лемма 5.2. *Пусть $r \in X_\alpha(\Theta)$, $1 < \alpha < 2$. Тогда обобщенную функцию ∇r можно продолжить до функционала, определенного формулой*

$$\langle \nabla r, \boldsymbol{h}\rangle = \langle r\boldsymbol{n}, \boldsymbol{h}\rangle_{(\partial\Omega)} - \int\limits_\Theta r \operatorname{div} \boldsymbol{h}\, d\boldsymbol{x} \tag{5.19}$$

для любого $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C}^\infty(\overline{\Theta})$, обращающегося в нуль вблизи $(0,T) \times (\partial\Theta \setminus \partial\Omega)$. Здесь $\langle \nabla r, \cdot\rangle$ обозначает определенный выше функционал и $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(\partial\Omega)}$ — двойственность между $\boldsymbol{B}_{\alpha'}^{1/\alpha}(\partial\Omega)$ и $\boldsymbol{B}_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)$.

Доказательство. По лемме 3.4 можно выбрать последовательность $\{r_n\} \in C^\infty(\overline{\Theta})$ такую, что $r_n \to r$ в X_α. Соотношение (5.19) справедливо при $r_n = r$ в силу классической формулы Стокса. Так как правая часть (5.19) при $r = r_n$ сходится при $n \to \infty$ к такому же выражению для r, (5.19) определяет искомый функционал для $r \in X_\alpha(\Theta)$. □

Замечание 5.1. На $C^\infty(\overline{\Theta})$ определение оператора ∇, указанное в лемме 5.2, совпадает с классическим определением.

Лемма 5.3. *Пусть $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ — решение уравнения (2.1). Тогда существует последовательность $\{\boldsymbol{w}^{(k)}\} \subset \mathcal{Y} \cap L_\infty\big(0,T;\boldsymbol{V}^2(\Theta)\big)$ решений уравнения (2.1) такая, что $\boldsymbol{w}^{(k)} \to \boldsymbol{w}$ в $\mathcal{Y}$.*

Доказательство. Пусть $U \subset \Theta$ — ограниченная окрестность $\partial\Omega$ такая, что продолжение $\boldsymbol{u}$ граничного условия $\boldsymbol{b}$, построенное в теореме 3.1, имеет носитель в U и можно выбрать систему координат (x_1, x_2) такую, что $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_2 < d\}$ и $\partial\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$. Рассмотрим последовательность $\{\boldsymbol{u}^{(k)}\}$, определяемую формулой

$$\boldsymbol{u}^{(k)}(t, \boldsymbol{x}) \equiv \int\limits_0^T \int\limits_U k^3 \varphi\big(k(t-s), k(x_1 - y_1), k(x_2 - y_2)\big) \boldsymbol{u}(s, y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2\, ds, \tag{5.20}$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi\, dt\, d\boldsymbol{x} = 1$, $\operatorname{supp}\varphi \in \{(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : -1 < t < 1, -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 0\}$. Очевидно, что $\boldsymbol{u}^{(k)} \in C^\infty\big((0,T) \times \Theta\big)$,

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{(k)}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{5.21}$$

Положим $\boldsymbol{b}^{(k)} = \boldsymbol{u}^{(k)}\big|_{(0,T)\times\partial\Omega}$. Выберем последовательность $\{\boldsymbol{w}_0^{(k)}\} \subset \boldsymbol{V}^2(\Omega)$ такую, что $(\boldsymbol{w}_0^{(k)} \cdot \tau)\big|_{\partial\Omega} = 0$, где τ — касательное к $\partial\Omega$ векторное поле,

$$\boldsymbol{w}_0^{(k)} \to \boldsymbol{w}_0 \text{ в } \boldsymbol{V}^0(\Omega), \tag{5.22}$$

и для каждого $\boldsymbol{w}_0^{(k)}$ выполнено условие согласования

$$(\boldsymbol{w}_0^{(k)} \cdot \boldsymbol{n})\big|_{\partial\Omega} = (\boldsymbol{b}_0^{(k)} \cdot \boldsymbol{n})\big|_{t=0}.$$

Рассмотрим уравнение (2.1) с граничными и начальными условиями

$$\boldsymbol{w}\big|_{(0,T)\times\partial\Omega} = \boldsymbol{b}^{(k)}, \quad \boldsymbol{w}\big|_{t=0} = \boldsymbol{w}_0^{(k)}. \tag{5.23}$$

Пусть $b_n^{(k)}$ и $b_\tau^{(k)}$ — нормальная и тангенциальная компоненты вектора $\boldsymbol{b}^{(k)}$, т. е. $\boldsymbol{b}^{(k)} = b_n^{(k)}\boldsymbol{n} + b_\tau^{(k)}\boldsymbol{\tau}$. Ясно, что $b_n^{(k)}$, $b_\tau^{(k)}$ и $\boldsymbol{w}_0^{(k)}$ удовлетворяют условиям (3.12)–(3.14), (3.18) теоремы 3.3. По теореме 3.3 существует решение $\boldsymbol{w}^{(k)} \in \mathcal{Y}$ задачи (2.1) и (5.23). Покажем, что $\boldsymbol{w}^{(k)} \to \boldsymbol{w}$ в $\mathcal{Y}$. Очевидно, что $(\boldsymbol{w}^{(k)} - \boldsymbol{w})\big|_{(0,T)\times\partial\Omega} = \boldsymbol{b}^{(k)} - \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{0}$ в $H^1\big(0,T; \boldsymbol{L}_2(\partial\Omega)\big) \cap L_2\big(0,T; \boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)\big) \cap \boldsymbol{L}_k\big((0,T) \times \partial\Omega\big)$. Таким образом, мы должны лишь показать, что $\boldsymbol{w}^{(k)} \to \boldsymbol{w}$ в $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$. Перепишем $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}^{(k)}$ в виде

$$\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}^{(k)} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{(k)}) + \boldsymbol{\eta}^{(k)}, \tag{5.24}$$

где $\boldsymbol{\eta}^{(k)}$ удовлетворяет (3.20), (3.21) при $\boldsymbol{\eta}_0^{(k)} = (\boldsymbol{w}_0 - \boldsymbol{w}_0^{(k)}) - (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{(k)})\big|_{t=0}$, а также следующему аналогу (3.19):

$$\langle \dot{\boldsymbol{\eta}}^{(k)}(t), \boldsymbol{z}\rangle + \int\limits_\Omega \nabla\boldsymbol{\eta}^{(k)}(t) : \nabla\boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega (\boldsymbol{\eta}^{(k)}(t) \cdot \nabla)\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x}$$
$$+ \int\limits_\Omega \big((\boldsymbol{w}^{(k)} + \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \nabla\big)\boldsymbol{\eta}^{(k)}(t) \cdot \boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{f}^{(k)}(t), \boldsymbol{z}\rangle$$

при всех $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}^1(\Omega)$, $t \in (0,T)$, где $\boldsymbol{f}^{(k)}$ определяется с помощью следующего аналога (3.22):

$$\langle \boldsymbol{f}^{(k)}(t), \boldsymbol{z}\rangle = -\int\limits_{\Omega} \nabla(\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}^{(k)}(t)) : \nabla \boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x} - \langle (\dot{\boldsymbol{u}}(t) - \dot{\boldsymbol{u}}^{(k)}(t)), \boldsymbol{z}\rangle$$
$$-\int\limits_{\Omega} \big((\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}^{(k)}(t)) \cdot \nabla\big)\boldsymbol{w}(t) \cdot \boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x}$$
$$-\int\limits_{\Omega} \big((\boldsymbol{w}^{(k)}(t) + \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \nabla\big)(\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}^{(k)}(t)) \cdot \boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x}.$$

Оценивая $\boldsymbol{\eta}^{(k)}$ и $\boldsymbol{f}^{(k)}$ как при доказательстве леммы 3.1 и в (3.25), получим

$$\|\boldsymbol{\eta}^{(k)}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)} \leqslant A(\|\boldsymbol{f}^{(k)}\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega))}, \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{(k)}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)}, \|\boldsymbol{\eta}_0^{(k)}\|_{\boldsymbol{V}^0(\Omega)},$$
$$\|\boldsymbol{w}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)}, |\boldsymbol{v}_\infty|),$$
$$\|\boldsymbol{f}^{(k)}\|_{L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega))} C(\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{(k)}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{(k)}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(\Omega)}\|\boldsymbol{w}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)}$$
$$+ \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{(k)}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)}(\|\boldsymbol{w}^{(k)}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)} + |\boldsymbol{v}_\infty|)),$$

где $A(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ — непрерывная, положительная функция в $\mathbb{R}^5$ такая, что $A(\lambda_1,\ldots,\lambda_5) \to 0$ при фиксированных λ_4, λ_5 и $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \to (0,0,0)$. Учитывая (5.21)–(5.22) и ограниченность последовательности $\|\boldsymbol{w}^{(k)}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)}$ (которая следует из теоремы 3.3), получим соотношение

$$\|\boldsymbol{\eta}^{(k)}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{5.25}$$

Из (5.21), (5.25) следует сходимость $\boldsymbol{w}^{(k)} \to \boldsymbol{w}$ в $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$. Наконец, докажем, что $\boldsymbol{w}^{(k)} \in L_\infty(0,T;\boldsymbol{V}^2(\Theta))$. Для этого запишем $\boldsymbol{w}^{(k)}$ в виде

$$\boldsymbol{w}^{(k)} = \boldsymbol{u}^{(k)} + \boldsymbol{\xi}^{(k)}. \tag{5.26}$$

Тогда $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ является решением задачи (3.19)–(3.21) с $\boldsymbol{u}$, замененным на $\boldsymbol{u}^{(k)}$ и $\boldsymbol{f}$, определенным соотношением (3.22), в котором $\boldsymbol{f}$ заменено на $\boldsymbol{f}^{(k)}$ и $\boldsymbol{u}$ заменено на $\boldsymbol{u}^{(k)}$. Заметим, что в силу (5.20) справедливо включение $\boldsymbol{u}^{(k)} \in C^\infty(\overline{\Theta})$. В силу (3.22)

$$\boldsymbol{f}^{(k)} = P\big(\Delta \boldsymbol{u}^{(k)} - \dot{\boldsymbol{u}}^{(k)} + [(\boldsymbol{u}^{(k)} + \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \nabla]\boldsymbol{u}^{(k)}\big), \tag{5.27}$$

где P — ортогональная проекция из $\boldsymbol{L}_2(\Theta)$ на $\boldsymbol{V}_0^0(\Theta)$. Так как $\boldsymbol{u}^{(k)} \in \boldsymbol{C}^\infty(\overline{\Theta})$, имеем $\boldsymbol{f}^{(k)} \in L_\infty\big(0,T;\boldsymbol{V}_0^0(\Theta)\big)$ и $\dot{\boldsymbol{f}}^{(k)} \in L_2\big(0,T;\widehat{\boldsymbol{V}}^{-1}(\Theta)\big)$, где $\widehat{\boldsymbol{V}}^{-1}(\Theta)$ — пополнение пространства $\boldsymbol{V}_0^0(\Theta)$ по норме

$$\|f\|_{-1} = \sup_{\|\varphi\|_{\boldsymbol{V}_0^1(\Theta)}=1} \int\limits_{\Theta} f \cdot \varphi dx,$$

$\boldsymbol{f}^{(k)}\big|_{t=0} \in \boldsymbol{V}_0^0(\Theta)$. Учитывая (5.26) и свойства функции $(\boldsymbol{w}^{(k)} - \boldsymbol{u}^{(k)})\big|_{t=0}$, мы получим, что $\xi^{(k)}\big|_{t=0} \in \boldsymbol{V}^2(\Omega) \cap \boldsymbol{V}_0^1(\Omega)$. В силу утверждения из Темам [1, с. 239–242] $\boldsymbol{\xi}^{(k)} \in L_\infty\big(0,T;\boldsymbol{V}^2(\Theta)\big)$. Поэтому $\boldsymbol{w}^{(k)} \in L_\infty\big(0,T;\boldsymbol{V}^2(\Theta)\big)$. □

Теперь мы можем установить аналогичный результат для решения $\boldsymbol{q}$ сопряженного уравнения (5.12). Рассмотрим краевую задачу

$$-\dot{\boldsymbol{q}}^{(k)} - \Delta \boldsymbol{q}^{(k)} + \boldsymbol{q}^{(k)} \cdot (\nabla \boldsymbol{w}^{(k)})^T - [(\boldsymbol{w}^{(k)} + \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \nabla]\boldsymbol{q}^{(k)}$$
$$+ \nabla \widetilde{r}^{(k)} = \mu \Delta \boldsymbol{w}^{(k)}, \tag{5.28}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{q}^{(k)} = 0, \tag{5.29}$$

$$\boldsymbol{q}^{(k)}\big|_{t=T} = \boldsymbol{q}_0^{(k)} \in \boldsymbol{V}_0^0(\Theta), \quad \boldsymbol{q}^{(k)}\big|_{(0,T)\times\partial\Omega} = \boldsymbol{0}. \tag{5.30}$$

Существование и единственность решения $\boldsymbol{q}^{(k)} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ задачи (5.28)–(5.30) можно установить стандартными методами (см. Ладыженская [1]; Темам [1]).

Лемма 5.4. *Пусть* $\boldsymbol{q} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T) \cap L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}_0^1(\Omega)\big)$ *и* $\widetilde{r} \in L_2\big(0,T;L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)\big)$ *удовлетворяют* (5.11), $\boldsymbol{w}^{(k)}$ *удовлетворяет* (2.1), (5.23) *и* $\boldsymbol{q}^{(k)}$, $\widetilde{r}^k$ *удовлетворяют* (5.28)–(5.30), *где* $\boldsymbol{q}_0^{(k)} \in \boldsymbol{V}_0^1(\Omega)$ *и* $\|\boldsymbol{q}_0^{(k)} - \boldsymbol{q}(T,\cdot)\|_{\boldsymbol{V}_0^0(\Omega)} \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Тогда для любого* k *имеем* $\boldsymbol{q}^{(k)} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T) \cap L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}^2(\Theta)\big)$ *и* $\|\boldsymbol{q}^{(k)} - \boldsymbol{q}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)} \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. В силу леммы 5.3 $\|\boldsymbol{w}^{(k)} - \boldsymbol{w}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)} \to 0$ при $k \to \infty$. Вычитая (5.11) из (5.28) и проводя оценки как в лемме 3.1, получим, что $\|\boldsymbol{q}^{(k)} - \boldsymbol{q}\|_{\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)} \to 0$ при $k \to \infty$. В силу леммы 5.3 $\boldsymbol{w}^{(k)} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T) \cap L_\infty\big(0,T;\boldsymbol{V}^2(\Theta)\big)$. Кроме того, $\boldsymbol{q}^{(k)} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$. Поэтому

$$\boldsymbol{g} \equiv \mu \Delta \boldsymbol{w}^{(k)} - \boldsymbol{q}^{(k)} \cdot (\nabla \boldsymbol{w}^{(k)})^T - [(\boldsymbol{w}^{(k)} + \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \nabla]\boldsymbol{q}^{(k)} \in \boldsymbol{L}^2\big((0,T)\times\Theta\big).$$

Перепишем (5.28) в виде $-\dot{\boldsymbol{q}}^{(k)} - \Delta \boldsymbol{q}^{(k)} + \nabla \widetilde{r}^{(k)} = \boldsymbol{g}$. Применив к последнему уравнению результат о гладкости решений уравнений Стокса (см. Ладыженская [1]), получим $\boldsymbol{q}^{(k)} \in L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}^2(\Theta)\big)$. □

Лемма 5.5. *Пусть* $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ *— решение задачи* (2.1)–(2.3) *и* $\boldsymbol{q} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T) \cap L_2(0,T;\boldsymbol{V}_0^1(\Omega))$ *— решение сопряженного уравнения* (5.11). *Тогда обобщенная функция* $\Delta\boldsymbol{w}$, *определенная на* $\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega) \cap \boldsymbol{V}^0(\Omega)$, *может быть продолжена до функционала, определенного формулой*

$$\int\limits_\Theta \Delta \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{h}\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial\Omega} \big((\nabla \boldsymbol{w}) + (\nabla \boldsymbol{w})^T\big)\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h}\, ds - 2\int\limits_\Theta \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{h})\, d\boldsymbol{x} \tag{5.31}$$

при любом $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C}^\infty(\overline{\Theta})$, *обращающемся в нуль в окрестности* $(0,T) \times (\partial\Theta \setminus \partial\Omega)$. *Кроме того, справедлив пространственно-временной аналог формулы* (5.31)

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Theta \Delta \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{h}\, d\boldsymbol{x}\, dt = \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \big((\nabla \boldsymbol{w}) + (\nabla \boldsymbol{w})^T\big)\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{h}\, ds\, dt$$
$$- 2\int\limits_0^T \int\limits_\Theta \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{h})\, d\boldsymbol{x}\, dt \tag{5.32}$$

для любого $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C}^\infty((0,T)\times\overline{\Theta})$, *обращающегося в нуль в окрестности* $(0,T)\times(\partial\Theta\setminus\partial\Omega)$. *Формулы* (5.31), (5.32) *остаются справедливыми при замене* $\boldsymbol{w}$ *на* $\boldsymbol{q}$.

Доказательство. Для $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^{(k)} \in L_\infty\big(0,T;\boldsymbol{V}^2(\Theta)\big)$ равенство (5.32) является хорошо известной формулой Грина. (Относительно ее доказательства см. (1.5) и последующие формулы.) Подставим в (5.32) решение $\boldsymbol{w}^{(k)}$ задачи (2.1), (5.23), построенное при доказательстве леммы 5.3. В силу этой леммы $\boldsymbol{w}^{(k)} \to \boldsymbol{w}$ в $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$. Поэтому

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Theta \mathcal{D}(\boldsymbol{w}^{(k)}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{h})\,d\boldsymbol{x}\,dt \to \int\limits_0^T\int\limits_\Theta \mathcal{D}(\boldsymbol{w}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{h})\,d\boldsymbol{x}\,dt, \quad k\to\infty.$$

Согласно теореме 3.4 оператор $\boldsymbol{w} \mapsto \gamma\big((\nabla\boldsymbol{w}) + (\nabla\boldsymbol{w})^T\big)\boldsymbol{n}$ непрерывен как оператор из множества $\{\boldsymbol{w}\in\mathcal{Y} : \boldsymbol{w}$ удовлетворяет (2.1)$\}$ в пространство $L_1\big(0,T;\boldsymbol{B}_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big)$, $1<\alpha<2$. Следовательно,

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} \big((\nabla\boldsymbol{w}^{(k)}) + (\nabla\boldsymbol{w}^{(k)})^T\big)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h}\,ds\,dt \to \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} \big((\nabla\boldsymbol{w}) + (\nabla\boldsymbol{w})^T\big)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h}\,ds\,dt$$

при $k\to\infty$. Подставляя $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}^{(k)}$ в (5.32) и переходя к пределу при $k\to\infty$ в правой части, мы получим требуемое продолжение обобщенной функции $\Delta\boldsymbol{w}$, которое определено формулой (5.32). Формула (5.31) доказывается аналогично. Случай обобщенной функции $\Delta\boldsymbol{q}$ исследуется точно так же. □

5.3. Сильная форма системы оптимальности. Запишем систему оптимальности (2.1), (2.3) и (5.1) как систему уравнений с частными производными с граничными условиями на всей границе цилиндра $Q_T = (0,T)\times\Omega$.

Напомним обозначения из § 2:

$$\boldsymbol{V}^0(\Omega) = \{\boldsymbol{v}\in(\boldsymbol{L}^2(\Omega))^2 : \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0\},$$

$$\boldsymbol{V}_0^0(\Omega) = \text{ замыкание } (\boldsymbol{C}_0^\infty(\Omega))^2 \cap \boldsymbol{V}^0(\Omega) \text{ в норме } (\boldsymbol{L}_2(\Omega))^2.$$

Мы будем использовать хорошо известное разложение Вейля (см. Ладыженская [1]; Темам [1]) $(\boldsymbol{L}_2(\Omega))^2 = \boldsymbol{V}_0^0(\Omega)\oplus\big(\nabla H^1(\Omega)\big)$, где $\nabla H^1(\Omega) = \{\nabla g : g\in H^1(\Omega)\}$. Справедливо равенство $\boldsymbol{V}^0(\Omega) = \boldsymbol{V}_0^0(\Omega)\oplus\big(\nabla H_\pi\big)$, где $\nabla H_\pi = \{\nabla g : g\in H^1(\Omega),\ \Delta g = 0\}$. Действительно, так как для каждого $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{V}^0(\Omega)$ согласно разложению Вейля справедливо равенство $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_\sigma + \nabla w_\pi$ с $\boldsymbol{w}_\sigma\in\boldsymbol{V}_0^0(\Omega)$ и $w_\pi\in H^1(\Omega)$, мы получим, взяв дивергенцию от $\boldsymbol{w}$, что $\Delta w_\pi = \operatorname{div}\boldsymbol{w} - \operatorname{div}\boldsymbol{w}_\sigma = 0$. Теперь мы готовы интерпретировать слабую форму системы оптимальности как систему уравнений с частными производными с краевыми условиями на всей границе цилиндра $Q_T = (0,T)\times\Omega$.

Теорема 5.2. *Пусть* $\boldsymbol{w}\in\mathcal{Y}$ — *решение задачи* 2.1 *и* $\boldsymbol{q}\in\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ — *векторное поле, определенное в теореме* 5.1. *Тогда существуют* $p\in L_2\big(0,T;L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)\big)$ *и* $r\in L_2\big(0,T;L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)\big)$ *такие, что четверка* $(\boldsymbol{w},p,\boldsymbol{q},r)$ *удовлетворяет уравнениям в частных производных* (*в смысле теории обобщенных функ-*

ций):

$$\dot{\boldsymbol{w}} - \Delta \boldsymbol{w} + ((\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \nabla)\boldsymbol{w} + \nabla p = \boldsymbol{0} \ \text{ в } (0,T) \times \Omega, \tag{5.33}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0 \ \text{ в } (0,T) \times \Omega, \tag{5.34}$$

$$-\dot{\boldsymbol{q}} - \Delta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \cdot (\nabla \boldsymbol{w})^T - (\boldsymbol{w} \cdot \nabla)\boldsymbol{q} - (\boldsymbol{v}_\infty \cdot \nabla)\boldsymbol{q} + \nabla r = \Delta \boldsymbol{w} - \nabla p, \tag{5.35}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{q} = 0 \ \text{ в } (0,T) \times \Omega, \tag{5.36}$$

начальному условию и условию в момент времени T :

$$\boldsymbol{w}(0,\cdot) = \boldsymbol{w}_0(\cdot) \ \text{ в } \boldsymbol{V}^0(\Omega), \tag{5.37}$$

$$\boldsymbol{q}(T,\cdot) + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_\sigma(T,\cdot) = 0 \ \text{ в } \boldsymbol{V}_0^0(\Omega), \tag{5.38}$$

где $\boldsymbol{w}_\sigma$ *— проекция* $\boldsymbol{w}(T,\cdot)$ *на* $\boldsymbol{V}_0^0(\Omega)$*, а также краевому условию на боковой поверхности цилиндра:*

$$\boldsymbol{q}\big|_{S_T} = \boldsymbol{0}. \tag{5.39}$$

Кроме того,

$$\gamma \ddot{\boldsymbol{w}} \in L_1\big(0,T;\boldsymbol{B}_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big), \tag{5.40}$$

$$\gamma\big[\big((\nabla \boldsymbol{w}) + (\nabla \boldsymbol{w})^T\big) \cdot \boldsymbol{n}\big] \in L_1\big(0,T;\boldsymbol{B}_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big), \tag{5.41}$$

$$\gamma p \in L_1\big(0,T;B_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big), \quad \int\limits_{\partial\Omega} p = 0, \tag{5.42}$$

$$\gamma\big[\big((\nabla \boldsymbol{q}) + (\nabla \boldsymbol{q})^T\big) \cdot \boldsymbol{n}\big] \in L_1\big(0,T;\boldsymbol{B}_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big), \tag{5.43}$$

$$\gamma r \in L_1\big(0,T;B_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big), \quad \int\limits_{\partial\Omega} r\,ds = 0, \tag{5.44}$$

где $1 < \alpha < 2$*, и выполнены следующие граничные условия:*

$$2N\gamma\ddot{\boldsymbol{w}} - \mathcal{A}(\boldsymbol{w}) - \mathcal{T}(\boldsymbol{w},p)\boldsymbol{n} - \mathcal{T}(\boldsymbol{q},r)\boldsymbol{n} = \eta(t)\boldsymbol{n}, \tag{5.45}$$

где

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{w},p) = -pI + 2\mathcal{D}(\boldsymbol{w}), \quad \mathcal{T}(\boldsymbol{q},r) = -rI + 2\mathcal{D}(\boldsymbol{q}), \tag{5.46}$$

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{w}) = \gamma\left(kN|\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty|^{k-2}(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty) + \frac{1}{2}\big((\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \boldsymbol{n}\big)\boldsymbol{w} + \frac{|\boldsymbol{w}|^2}{4}\boldsymbol{n}\right), \tag{5.47}$$

$$\eta(t) = -\int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{A}(\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n}\,ds \Big/ \int\limits_{\partial\Omega} ds. \tag{5.48}$$

При этом выполнены следующие условия согласования:

$$\big[(\gamma\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n}\big]\big|_{t=0} = (\gamma\boldsymbol{w}_0) \cdot \boldsymbol{n}, \tag{5.49}$$

$$(\gamma\dot{\boldsymbol{w}}) \cdot \boldsymbol{\tau}\big|_{t=T} = 0, \quad \left(\frac{1}{2}\gamma w_\pi + 2N\gamma\dot{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{n})\right)\Big|_{t=T} = 0, \tag{5.50}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ *— единичный касательный вектор к* $\partial\Omega$ *и* $w_\pi(t,\cdot)$ *— первоообразная к проекции* $\boldsymbol{w}(t,\cdot)$ *на* ∇H_π*, определенная на* $\partial\Omega$ *с помощью условия*

$$\int\limits_{\partial\Omega} w_\pi(t,\cdot)\,ds = 0. \tag{5.51}$$

Доказательство. Будучи решением задачи 2.1, векторное поле $\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ удовлетворяет (2.1) и (5.37). Как показано в (3.27), в силу леммы Де Рама существует $p \in L_2\big(0,T;L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)\big)$ такое, что выполнено (5.33). Соотношение (5.49) следует из включения $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ и замечания 3.1. В силу (5.12) для сопряженной функции $\boldsymbol{q} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T) \cap L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}_0^1\big)$ существует $r \in L_2\big(0,T;L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)\big)$ такое, что выполнено (5.35). Соотношения (5.34) и (5.36) следуют из включений $\boldsymbol{w} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ и $\boldsymbol{q} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$, а (5.39) — из включения $\boldsymbol{q} \in L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}_0^1(\Omega)\big)$. В силу теоремы 3.5 и леммы 5.1 следы функций p и r лежат в пространстве $L_1\big(0,T;B_\alpha^{-1/\alpha}(\partial\Omega)\big)$ при $1<\alpha<2$. Отметим, что в (5.33) и (5.35) можно добавить константы к p и r так, что

$$\int\limits_{\partial\Omega} p\,ds = 0, \quad \int\limits_{\partial\Omega} r\,ds = 0,$$

где интегралы понимаются как соотношения двойственности $\langle p,1\rangle_{(\partial\Omega)}$ и $\langle r,1\rangle_{(\partial\Omega)}$ соответственно. Эти условия убирают произвол в выборе постоянных слагаемых у p и r и упрощают дальнейшие рассмотрения. Итак, соотношения (5.42) и (5.44) установлены. Соотношения (5.41), (5.43) следуют из теоремы 3.4 и леммы 5.1.

Проверим справедливость (5.45). Взяв $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C}^\infty$ в (5.1) с $\operatorname{div}\boldsymbol{h} = 0$, $\boldsymbol{h}\big|_{t=0} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{h}\big|_{t=T} = \boldsymbol{0}$ и интегрируя по частям, используя (5.32), мы получим

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (-\dot{\boldsymbol{q}} - \Delta\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\cdot(\nabla\boldsymbol{w})^T - [(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\nabla]\boldsymbol{q} - \Delta\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{h}\,d\boldsymbol{x}\,dt \\
&+\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} (2N\dot{\boldsymbol{w}}\cdot\dot{\boldsymbol{h}} + (\mathcal{A}(\boldsymbol{w}) + 2\mathcal{D}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{n} + 2\mathcal{D}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{h})\,ds\,dt = 0,
\end{aligned} \tag{5.52}$$

где $\mathcal{A}(\boldsymbol{w})$ — функция (5.47). Отметим, что интегралы в случае необходимости понимаются как соотношения двойственности. Из уравнений (5.35) и (5.52) следует равенство

$$\begin{aligned}
&-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (\nabla r + \nabla p)\cdot\boldsymbol{h}\,d\boldsymbol{x}\,dt \\
&+\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} (2N\dot{\boldsymbol{w}}\cdot\dot{\boldsymbol{h}} + (\mathcal{A}(\boldsymbol{w}) + 2\mathcal{D}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{n} + 2\mathcal{D}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{h})\,ds\,dt = 0.
\end{aligned} \tag{5.53}$$

В силу леммы 5.2 и уравнения (5.53) имеем

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} (2N\dot{\boldsymbol{w}} \cdot \dot{\boldsymbol{h}} + (\mathcal{A}(\boldsymbol{w}) + \mathcal{T}(p, \boldsymbol{w})\boldsymbol{n} + \mathcal{T}(r, \boldsymbol{q})\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{h})\, ds\, dt = 0, \tag{5.54}$$

где $\mathcal{T}$ — тензор напряжений, определенный в (5.46). Так как $1 < \alpha < 2$, вложение $B^{1/\alpha}_{\alpha'}(\partial\Omega) \hookrightarrow L_\infty(\partial\Omega)$, где $\alpha' = \alpha/(\alpha - 1)$, а, следовательно, и вложение $L_1(\partial\Omega) \hookrightarrow B^{-1/\alpha}_{\alpha}(\partial\Omega)$ непрерывно. Поэтому

$$\gamma\left(2kN|\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty|^{k-2}(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty) + \frac{1}{2}\big((\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \boldsymbol{n}\big)\boldsymbol{w} + \frac{|\boldsymbol{w}|^2}{4}\boldsymbol{n}\right) \in \boldsymbol{L}^1(\partial\Omega)$$
$$\hookrightarrow \boldsymbol{B}^{-1/\alpha,\alpha}(\partial\Omega).$$

Используя теоремы 3.4, 3.5, лемму 5.1 и последнее соотношение, получим

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{w}) + \mathcal{T}(p, \boldsymbol{w})\boldsymbol{n} + \mathcal{T}(r, \boldsymbol{q})\boldsymbol{n} \in L^1\big(0, T; \boldsymbol{B}^{-1/\alpha,\alpha}(\partial\Omega)\big). \tag{5.55}$$

Так как $\boldsymbol{h}$ и $\dot{\boldsymbol{w}}$ соленоидальны (в силу определений пространств $\mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ и $\mathcal{Y}$), имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = 0, \quad \int\limits_{\partial\Omega} \dot{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = 0.$$

Таким образом, из (5.54), (5.55) мы получим (5.40) и равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \big(2N\ddot{\boldsymbol{w}} - \mathcal{A}(\boldsymbol{w}) - \mathcal{T}(p, \boldsymbol{w})\boldsymbol{n} - \mathcal{T}(r, \boldsymbol{q})\boldsymbol{n}\big) \cdot \boldsymbol{h}\, ds\, dt = 0. \tag{5.56}$$

Следовательно, равенство (5.45) следует из (5.55) и (5.56) с функцией $\eta(t)$, определенной соотношением

$$\eta(t) = \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \cdot \big(2N\ddot{\boldsymbol{w}} - \mathcal{A}(\boldsymbol{w}) - \mathcal{T}(p, \boldsymbol{w})\boldsymbol{n} - \mathcal{T}(r, \boldsymbol{q})\boldsymbol{n}\big)\, ds \Big/ \int\limits_{\partial\Omega} ds. \tag{5.57}$$

Заметим, что для каждой $\varphi(t) \in C_0^\infty(0, T)$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \ddot{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{n}\, ds\, \varphi(t)\, dt = \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}\, ds\, \ddot{\varphi}(t)\, dt = 0,$$

поскольку

$$\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = 0$$

для каждой бездивергентной функции $\boldsymbol{w}$. Таким образом, при почти всех $t \in (0,T)$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \ddot{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = 0. \tag{5.58}$$

Учитывая (5.42), мы получим, что для каждой функции $\varphi(t) \in C_0^\infty(0,T)$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \cdot \mathcal{T}(p,\boldsymbol{w})\boldsymbol{n}\, ds\, \varphi(t)\, dt \\
&= \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\boldsymbol{n} \cdot \mu\big((\nabla \boldsymbol{w}) + (\nabla \boldsymbol{w})^T\big)\boldsymbol{n} - p \Big)\, ds\, \varphi(t)\, dt \\
&= \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\boldsymbol{n} \cdot \mu\big((\nabla \boldsymbol{w}) + (\nabla \boldsymbol{w})^T\big)\boldsymbol{n} \Big)\, ds\, \varphi(t)\, dt.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Для каждого $s \in \partial\Omega$ рассмотрим нормаль $\widetilde{\boldsymbol{n}}(s)$ к $\partial\Omega$, направленную внутрь Ω и выходящую из s. Выберем точку $K(\varepsilon,s)$ на $\widetilde{\boldsymbol{n}}(s)$ так, чтобы расстояние между $K(\varepsilon,s)$ и $\partial\Omega$ равнялось ε. Если ε достаточно мало, то множество $\{K(\varepsilon,s) : s \in \partial\Omega\}$ является бесконечно дифференцируемым многообразием, которое мы обозначим через $\partial\Omega_\varepsilon$. Так как $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}^0(\Omega)$, имеем

$$\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}\, ds = 0, \qquad \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{w} \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}_\varepsilon\, ds = 0,$$

где $\widetilde{\boldsymbol{n}}_\varepsilon$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega_\varepsilon$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\boldsymbol{n} \cdot \big((\nabla \boldsymbol{w}) + (\nabla \boldsymbol{w})^T\big)\boldsymbol{n} \Big)\, ds\, \varphi(t)\, dt = 2 \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \partial_n \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}\, ds\, \varphi(t)\, dt \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^T \Big(\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}\, ds - \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{w} \cdot \widetilde{\boldsymbol{n}}_\varepsilon\, ds \Big)\, \varphi(t)\, dt = 0.
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Из (5.59), (5.60) следует равенство

$$\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \cdot \mathcal{T}(p,\boldsymbol{w})\boldsymbol{n}\, ds = 0 \text{ при почти всех } t \in (0,T). \tag{5.61}$$

Точно так же заключаем

$$\int\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{n} \cdot \mathcal{T}(r,\boldsymbol{q})\boldsymbol{n}\, ds = 0 \text{ при почти всех } t \in (0,T). \tag{5.62}$$

Из равенств (5.58) и (5.61), (5.62) вытекает, что функция $\eta(t)$, определенная в (5.57), равна функции, определенной в (5.48).

Выберем $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{C}^\infty(Q_T)$ в (5.1) такую, что $\operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0$ и $\boldsymbol{h}\big|_{t=0} = \boldsymbol{0}$. Интегрируя по частям (это обосновано в лемме 5.5), получим

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Big(-\dot{\boldsymbol{q}} - \Delta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \cdot (\nabla \boldsymbol{w})^T - [(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty)\cdot] \boldsymbol{q} - \Delta \boldsymbol{w} \Big) \cdot \boldsymbol{h} \, d\boldsymbol{x} \, dt$$
$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \Big(-2N \ddot{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{h} + \big(\mathcal{A}(\boldsymbol{w}) + 2\mathcal{D}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{n} + 2\mathcal{D}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{n} \big) \cdot \boldsymbol{h} \Big) \, ds \, dt$$
$$+ \int\limits_\Omega [\boldsymbol{q}(T,\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x})] \cdot \boldsymbol{h}(T,\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\partial\Omega} 2N \dot{\boldsymbol{w}}(T,\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h}(T,\boldsymbol{x}) \, ds = 0. \tag{5.63}$$

Применяя к (5.63) те же рассуждения, с помощью которых из (5.52) было выведено (5.56), а затем используя (5.45), получим равенство

$$\int\limits_\Omega [\boldsymbol{q}(T,\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x})] \cdot \boldsymbol{h}(T,\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\partial\Omega} 2N \dot{\boldsymbol{w}}(T,\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h}(T,\boldsymbol{x}) \, ds = 0. \tag{5.64}$$

Учитывая, что $\boldsymbol{q}(T,\cdot) \in \boldsymbol{V}_0^0(\Omega)$ и $\boldsymbol{w}(T,\cdot) \in \boldsymbol{V}^0(\Omega)$, получим (5.38). Подставляя (5.38) в (5.64) и интегрируя по частям, получим соотношение

$$\int\limits_{\partial\Omega} \Big(\frac{1}{2} w_\pi(T,\boldsymbol{x}) \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h}(T,\boldsymbol{x}) + 2N \dot{\boldsymbol{w}}(T,\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h}(T,\boldsymbol{x}) \Big) \, ds = 0,$$

из которого следуют (5.50), (5.51). □

5.4. Случай задачи 2.2. Выведем систему оптимальности для задачи 2.2.

Теорема 5.3. *Пусть $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_\infty \in \boldsymbol{V}_0^1(\Omega)$ и $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ — решение задачи 2.2. Тогда существуют тройка $(\boldsymbol{q}, r, \lambda) \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T) \times L_2^{\mathrm{loc}}(Q_T) \times \mathbb{R}_+$ и $p \in L_2^{\mathrm{loc}}(Q_T)$ такие, что $(\boldsymbol{q}, r, \lambda) \neq (\boldsymbol{0}, 0, 0)$, и набор $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{q}, p, r, \lambda)$ удовлетворяет соотношениям (5.33)–(5.44) и граничным условиям*

$$2\lambda\gamma \ddot{\boldsymbol{w}} - \widetilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{w}) - \mathcal{T}(\boldsymbol{w}, p)\boldsymbol{n} - \mathcal{T}(\boldsymbol{q}, r)\boldsymbol{n} = \widetilde{\eta}(t)\boldsymbol{n}, \tag{5.65}$$

где $\mathcal{T}(\boldsymbol{w}, p)$ и $\mathcal{T}(\boldsymbol{q}, r)$ определены в (5.46),

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{w}) = \gamma \Big(k\lambda |\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty|^{k-2} (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty) + \frac{1}{2} \big((\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty) \cdot \boldsymbol{n} \big) \boldsymbol{w} + \frac{|\boldsymbol{w}|^2}{4} \boldsymbol{n} \Big), \tag{5.66}$$

$$\widetilde{\eta}(t) = - \int\limits_{\partial\Omega} \widetilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n} \, ds \Big/ \int\limits_{\partial\Omega} ds. \tag{5.67}$$

Кроме того, выполнены следующие условия согласования:

$$(\gamma \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n}\big|_{t=0} = (\gamma \boldsymbol{w}_0) \cdot \boldsymbol{n}, \tag{5.68}$$

$$\lambda\big[(\gamma \dot{\boldsymbol{w}}) \cdot \boldsymbol{\tau}\big]\big|_{t=T} = 0, \quad \left(\frac{1}{2}\gamma w_\pi + 2\lambda\gamma \dot{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{n}\right)\Big|_{t=T} = 0, \tag{5.69}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ *— единичный касательный к* $\partial\Omega$ *вектор, а* $w_\pi(t,\cdot)$ *— первообразная к проекции поля* $\boldsymbol{w}(t,\cdot)$ *на* ∇H_π*, определенная условием* (5.51)*. Наконец, выполнены условия неотрицательности и дополняющей нежесткости*

$$\lambda \geqslant 0, \tag{5.70}$$

$$\lambda\left(\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} (|\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty|^k + |\dot{\boldsymbol{w}}|^2)\, ds\, dt - M\right) = 0. \tag{5.71}$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$ — решение задачи 2.2. Включим задачу 2.2 в рамки теоремы 2.1.9. Положим $X_1 = \mathcal{Y}_0$ и $X_2 = L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)\big)$. Функционал Лагранжа для задачи 2.2 определяется формулой

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{q}) &= \lambda_0\left(\int\limits_0^T \int\limits_\Omega |\mathcal{D}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y})|^2\, d\boldsymbol{x}\, dt + \frac{1}{4}\int\limits_\Omega |\boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(T,\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x}\right.\\
&\left. + \frac{1}{4}\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} |\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}|^2(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\boldsymbol{n}\, ds\, dt\right)\\
&+ \lambda\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} (|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}_\infty|^k + |\dot{\boldsymbol{w}}+\dot{\boldsymbol{y}}|^2 - M)\, ds\, dt\\
&+ \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\dot{\boldsymbol{w}}+\dot{\boldsymbol{y}})\cdot\boldsymbol{q}\, d\boldsymbol{x}\, dt + 2\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \mathcal{D}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}) : \mathcal{D}(\boldsymbol{q})\, d\boldsymbol{x}\, dt\\
&+ \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \big\{[(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y})\cdot\nabla](\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{v}_\infty\cdot\nabla)(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y})\big\}\cdot\boldsymbol{q}\, d\boldsymbol{x}\, dt
\end{aligned} \tag{5.72}$$

при всех $\boldsymbol{y} \in X_1$ и $\boldsymbol{q} \in X_2^* = L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}_0^1(\Omega)\big)$. Отметим, что (5.72) отличается от (5.9) тем, что множитель λ_0, включенный в функционал Лагранжа, может равняться нулю. Определим функционалы

$$f(\boldsymbol{y}) = \mathcal{J}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}), \quad g_1(\boldsymbol{y}) = \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \big|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}_\infty|^k + |\dot{\boldsymbol{w}}+\dot{\boldsymbol{y}}|^2\big)\, ds\, dt - M$$

(см. (2.5), (2.6)). Отображение $F\colon X_1 \to X_2$ определим так же, как при доказательстве теоремы 5.1. Как и в доказательстве теоремы 5.1, легко проверить, что оператор $F'(\mathbf{0})$ является эпиморфизмом и поэтому образ

оператора $F'(\mathbf{0})$ замкнут. Мы проверили все предположения теоремы 2.1.9. Поэтому существуют $\boldsymbol{q} \in X_2^* = L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}_0^1(\Omega)\big)$ и $(\lambda_0,\lambda) \in \mathbb{R}^2$ такие, что $(\boldsymbol{q},\lambda_0,\lambda) \neq 0$,

$$\big\langle \mathcal{L}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{q}),\boldsymbol{h}\big\rangle\big|_{\boldsymbol{y}=0} = 0 \quad \forall \boldsymbol{h} \in \mathcal{Y}_0, \tag{5.73}$$

$$\lambda_0 \geqslant 0, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{5.74}$$

$$\lambda\left(\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \big(|\dot{\boldsymbol{w}}|^2 + |\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty|^k\big)\,ds\,dt - M\right) = 0. \tag{5.75}$$

Как и в теоремах 5.1 и 5.2, из (5.73) выводятся соотношения (5.33), (5.34), (5.36), (5.37), (5.39)–(5.44), а также уравнения

$$-\dot{\boldsymbol{q}} - \Delta\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}\cdot(\nabla\boldsymbol{w})^T - (\boldsymbol{w}\cdot\nabla)\boldsymbol{q} - (\boldsymbol{v}_\infty\cdot\nabla)\boldsymbol{q} + \nabla r = \lambda_0(\Delta\boldsymbol{w} - \nabla p), \tag{5.76}$$

$$\boldsymbol{q}(T,\cdot) + \frac{\lambda_0}{2}\boldsymbol{w}_\sigma(T,\cdot) = 0 \text{ в } \boldsymbol{V}_0^0(\Omega), \tag{5.77}$$

где $\boldsymbol{w}_\sigma(T,\cdot)$ — проекция поля $\boldsymbol{w}(T,\cdot)$ на $\boldsymbol{V}_0^0(\Omega)$. Более того,

$$2\lambda\gamma\ddot{\boldsymbol{w}} - \widetilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{w}) - \mathcal{T}(\boldsymbol{w},p)\boldsymbol{n} - \mathcal{T}(\boldsymbol{q},r)\boldsymbol{n} = \widetilde{\eta}(t)\boldsymbol{n}, \tag{5.78}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{w}) = \gamma\left\{k\lambda|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty|^{k-2}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty) + \lambda_0\left(\frac{1}{2}\big((\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\boldsymbol{n}\big)\boldsymbol{w} + \frac{|\boldsymbol{w}|^2}{4}\boldsymbol{n}\right)\right\},$$

$$\widetilde{\eta}(t) = -\int\limits_{\partial\Omega} \widetilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{n}\,ds \Big/ \int\limits_{\partial\Omega} ds.$$

Кроме того, справедливы условия согласования

$$\begin{gathered}\big[(\gamma\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{n}\big]\big|_{t=0} = (\gamma\boldsymbol{w}_0)\cdot\boldsymbol{n},\\ \left(\frac{1}{2}\lambda_0\gamma w_\pi + 2\lambda\gamma\dot{\boldsymbol{w}}\cdot\boldsymbol{n}\right)\Big|_{t=T} = 0, \quad (\lambda\gamma\dot{\boldsymbol{w}})\cdot\boldsymbol{\tau}\big|_{t=T} = 0,\end{gathered} \tag{5.79}$$

где w_π — первообразная проекции ∇w_σ поля $\boldsymbol{w}$ на ∇H_π, определенная соотношением (5.51). Непосредственно из теоремы 2.1.9 получаем (5.70) и (5.71).

Чтобы закончить доказательство, остается показать, что $\lambda_0 \neq 0$, и, следовательно, можно положить $\lambda_0 = 1$. Допустим, что $\lambda_0 = 0$. Тогда стандартными методами, связанными с использованием энергетического неравенства и леммы Гронуолла, из (5.76), (5.77), (5.36) и (5.39) легко вывести, что $\boldsymbol{q} \equiv \mathbf{0}$. Кроме того, из (5.76) и условия $\int\limits_{\partial\Omega} r\,ds = 0$ следует $r = 0$. Отметим, что $\lambda \neq 0$, так как $(\boldsymbol{q},\lambda_0,\lambda,r) = (\mathbf{0},0,\lambda,0) \neq (\mathbf{0},0,0,0)$. В силу (5.70) $\lambda > 0$. Согласно (5.71) $\boldsymbol{w}$ является также решением следующей модифицированной задачи на минимум.

Найти $\boldsymbol{w} \in \mathcal{Y}$, минимизирующее функционал (2.5) при условиях (2.1), (2.3) и

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} (|\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_\infty|^k + |\dot{\boldsymbol{w}}|^2)\, ds\, dt = M. \tag{5.80}$$

Покажем, что эта задача на минимум удовлетворяет условиям теоремы 2.1.9. Действительно, положим $X_1 = \mathcal{Y}_0$ и $X_2 = L_2\big(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega)\big) \times \mathbb{R}$. Определим отображение f формулой $f(\boldsymbol{y}) = \mathcal{J}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y})$, где $\mathcal{J}$ — функционал (2.5) и определим

$$\widetilde{F}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} (\dot{\boldsymbol{w}} + \dot{\boldsymbol{y}}) - P\Delta(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}) + P\big[\big((\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\nabla\big)(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y})\big] \\ \int_0^T \int_{\partial\Omega} (|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}_\infty|^k + |\dot{\boldsymbol{w}}+\dot{\boldsymbol{y}}|^2)\, ds\, dt - M \end{pmatrix},$$

где $P\colon \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega) \to \boldsymbol{V}^{-1}$ — ортогональная проекция. Тогда оператор $\widetilde{F}'(\boldsymbol{0})\colon X_1 \to X_2$ определяется равенством

$$\langle \widetilde{F}'(\boldsymbol{0}), \boldsymbol{y}\rangle = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{y}} - P\Delta\boldsymbol{y} + P(\boldsymbol{y}\cdot\nabla)\boldsymbol{w} + P\big((\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\nabla\big)\boldsymbol{y} \\ \int_0^T \int_{\partial\Omega} (k|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty|^{k-2}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\boldsymbol{y} + 2\dot{\boldsymbol{w}}\cdot\dot{\boldsymbol{y}})\, ds\, dt \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\widetilde{F}'(\boldsymbol{0})$ — эпиморфизм. Сначала отметим, что этот оператор непрерывен. Кроме того, мы должны показать, что для $\boldsymbol{f} \in L_2(0,T;\boldsymbol{V}^{-1}(\Omega))$ и $\zeta \in \mathbb{R}$ система

$$\begin{aligned} &\langle \dot{\boldsymbol{y}}(t), \boldsymbol{z}\rangle + \int_\Omega \nabla\boldsymbol{y}(t) : \nabla\boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \big((\boldsymbol{w}(t)+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\nabla\big)\boldsymbol{y}(t)\cdot\boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x} \\ &+ \int_\Omega (\boldsymbol{y}(t)\cdot\nabla)\boldsymbol{w}(t)\cdot\boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{z}\, d\boldsymbol{x} \quad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}_0^1(\Omega) \text{ п. в. в } (0,T), \end{aligned} \tag{5.81}$$

$$\boldsymbol{y}\big|_{t=0} = \boldsymbol{0} \text{ в } \boldsymbol{V}^0(\Omega), \tag{5.82}$$

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} (k|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty|^{k-2}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\boldsymbol{y} + 2\dot{\boldsymbol{w}}\cdot\dot{\boldsymbol{y}})\, ds\, dt = \zeta \tag{5.83}$$

имеет решение $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}_0$.

Для этого найдем $\boldsymbol{y} \in \gamma_{S_T}\mathcal{Y}_0$, удовлетворяющее равенству (5.83). Заметим, что $\gamma_{S_T}\mathcal{Y}_0$ — пространство сужений на S_T функций из $\mathcal{Y}_0$, а пространство $\mathcal{Y}_0$ определено ниже формулы (5.1). Достаточно показать, что существует $\boldsymbol{y} \in \gamma_{S_T}\mathcal{Y}_0$, для которого левая часть равенства (5.83) не равна нулю, так как после этого достаточно умножить $\boldsymbol{y}$ на соответствующую

константу. Предположим, что для каждого $\boldsymbol{y} \in \gamma_{S_T}\mathcal{Y}_0$ выполнено равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} (k|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty|^{k-2}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\cdot\boldsymbol{y} + 2(\dot{\boldsymbol{w}}+\dot{\boldsymbol{v}}_\infty)\cdot\dot{\boldsymbol{y}})\,ds\,dt = 0,$$

из которого в силу (5.79) при $\lambda_0 = 0$ следует, что $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty$ удовлетворяет соотношениям

$$-2(\ddot{\boldsymbol{w}}+\ddot{\boldsymbol{v}}_\infty) + k\,|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty|^{k-2}(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty) = 0 \text{ на } (0,T)\times\partial\Omega, \tag{5.84}$$

$$(\dot{\boldsymbol{w}}+\dot{\boldsymbol{v}}_\infty)\big|_{t=T} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{5.85}$$

Ввиду включения $\boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{V}_0^1(\Omega)$ имеем

$$(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty)\big|_{t=0\,,\,x\in\partial\Omega} = \boldsymbol{v}_0\big|_{\partial\Omega} \equiv 0. \tag{5.86}$$

Умножая (5.84) на $(\dot{\boldsymbol{w}}+\dot{\boldsymbol{v}}_\infty)$, получим равенство

$$-\partial_t|(\dot{\boldsymbol{w}}+\dot{\boldsymbol{v}}_\infty)|^2 + \partial_t|\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty|^k = 0 \text{ на } (0,T)\times\partial\Omega,$$

которое вместе с (5.85) приводит к соотношению

$$-|(\dot{\boldsymbol{w}}+\dot{\boldsymbol{v}}_\infty)|^2 + |\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty|^k = |\boldsymbol{w}(T,\cdot)+\boldsymbol{v}_\infty|^k \text{ на } (0,T)\times\partial\Omega.$$

При $t=0$ это уравнение записывается в виде

$$-|(\dot{\boldsymbol{w}}(0,\boldsymbol{x})+\dot{\boldsymbol{v}}_\infty)|^2 = |\boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}_\infty|^k \text{ на } \partial\Omega.$$

Следовательно,

$$|(\dot{\boldsymbol{w}}(0,\boldsymbol{x})+\dot{\boldsymbol{v}}_\infty)|^2 = 0, \quad |\boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}_\infty|^k = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$\boldsymbol{w}(T,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{v}_\infty = \boldsymbol{0} \text{ на } (0,T)\times\partial\Omega. \tag{5.87}$$

Из дифференциального уравнения (5.84) и граничных условий (5.85), (5.87) следует, что $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_\infty = 0$ на $(0,T)\times\partial\Omega$. Это противоречит равенству (5.80). Следовательно, существует $\boldsymbol{z} \in \gamma_{S_T}Y_0$, удовлетворяющее (5.83), где $\boldsymbol{y}$ заменено на $\boldsymbol{z}$.

Дополним систему (5.81), (5.82) граничным условием

$$\boldsymbol{y}\big|_{(0,T)\times\partial\Omega} = \boldsymbol{z}. \tag{5.88}$$

Используя технику доказательства теоремы 3.3, можно показать, что задача (5.81), (5.82) и (5.88) имеет (единственное) решение $\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}^{(1)}(Q_T)$ (ситуация сейчас проще, так как задача (5.81), (5.82) линейна). Подстановка $\boldsymbol{z}$ из (5.88) в (5.83) вместо $\boldsymbol{y}$ приводит к (5.83). Ясно, что $\boldsymbol{y} \in Y_0$. Следовательно, $\widetilde{F}'(\boldsymbol{0})$ является эпиморфизмом. Таким образом, мы проверили все предположения теоремы 2.1.9. По этой теореме каждая тройка $(\widetilde{\boldsymbol{q}}, \widetilde{\lambda}_0, \widetilde{\lambda})$, удовлетворяющая (5.73), где $\mathcal{L}$ из (5.72), удовлетворяет условию $\lambda_0 \neq 0$. В частности, $(\boldsymbol{q}, \lambda_0, \lambda)$ является такой тройкой, откуда $\lambda_0 \neq 0$, что противоречит предположению $\lambda_0 = 0$. Поэтому $\lambda_0 \neq 0$. $\square$

Замечание 5.2. Мы не использовали специальную неизвестную функцию для граничного управления, поэтому условие (2.2) не появилось в системе оптимальности из пп. 5.3–5.5. На самом деле, чтобы удовлетворить (2.2), надо найти $\boldsymbol{w}$ из системы оптимальности, а затем по $\boldsymbol{w}$ определить управление $\boldsymbol{g}$ по формуле $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{w}\big|_{\partial\Omega} + \boldsymbol{v}_\infty\big|_{\partial\Omega}$ для $t \in (0, T)$.

§ 6. Комментарии

В главе изложена работа Фурсиков, Ганзбургер, Хоу [1]. Дадим краткую сводку результатов по задачам оптимального управления системой Навье — Стокса. Математическое исследование задач оптимального управления для эволюционных уравнений Навье — Стокса проведено в Фурсиков [1–6]; Лионс [3]; Абержел, Темам [1]; Сризаран [1–3]; Фатторини, Сризаран [1–5]; Барбу [3, 4]. Случай задач оптимального управления для стационарной системы Навье — Стокса рассмотрен в Ганзбургер, Хоу, Свободни [1–3]. Задача свободной конвекции с управлением температурой на границе изучена в Кувельер [1].

Глава 6

Задача Коши для эллиптического уравнения в условно-корректной постановке

Эта глава посвящена одному из приложений теории оптимального управления распределенными системами. Речь идет об исследовании задачи Коши для эллиптического уравнения второго порядка. Классическим примером Адамара некорректной краевой задачи является как раз задача Коши для оператора Лапласа. Необходимость ее исследования диктуется потребностями приложений, например, в геофизике при интерпретации данных электроразведки поверхностного слоя земной коры. Анализ постановки задачи об интерпретации данных электроразведки приводит к условно-корректной постановке задачи Коши для оператора Лапласа (см. ниже замечание 1.1). Решение задачи Коши в условно-корректной постановке оказывается не единственным, и аналогом теоремы единственности здесь является оценка разности двух произвольных решений задачи Коши в условно-корректной постановке. Эта оценка родственна классической оценке Адамара для аналитических функций, составляющей содержание теоремы о трех кругах. Доказательство этой оценки проводится в § 2–4. Для доказательства оценки необходимо предварительно исследовать общее эллиптическое уравнение второго порядка вместо оператора Лапласа. Указанная оценка устанавливает близость друг к другу всех решений задачи Коши в условно-корректной постановке. Поэтому при приближенном решении этой задачи достаточно уметь строить лишь одно из решений. Построению такого решения, которое называется квазирешением, и исследованию его свойств посвящены § 5–7. Квазирешение является решением некоторой экстремальной задачи, что объясняет важность теории оптимального управления распределенными системами в изучении задачи Коши в условно-корректной постановке. В данной главе доказано существование квазирешения, построена система оптимальности, соответствующая квазирешению, и проведено подробное исследование этой системы оптимальности.

§ 1. Постановка задачи

Задача Коши для эллиптического оператора является классическим примером некорректной по Адамару краевой задачи. В этом параграфе обсуждается условно-корректная постановка этой краевой задачи.

1.1. Условно-корректная формулировка задачи Коши. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, граница которой $\partial\Omega$ состоит из двух непересекающихся замкнутых $(d-1)$-мерных многообразий Γ_1 и Γ_2 класса C^∞ так, что

$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$. Ищется функция $u(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$Au(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u(x)) + \sum_{j=1}^{d} b_j(x)\partial_j u(x) + c(x)u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

где $a_{ij}, b_j, c \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $\partial_j u = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, d$. Предполагается, что матрица $\|a_{ij}\|$ коэффициентов при вторых производных оператора A является симметричной ($a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ для всех i, j), а оператор A — эллиптическим при всех $x \in \overline{\Omega}$:

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \varkappa \sum_{j=1}^{d} \xi_j^2 \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d, \tag{1.1$'$}$$

где $\varkappa > 0$ не зависит от $x \in \overline{\Omega}$.

На части Γ_1 границы области Ω ставится граничное условие

$$\partial_{n_A} u(x') + \beta(x')u(x') = 0, \quad x' \in \Gamma_1, \tag{1.2}$$

где $\beta \in C^\infty(\Gamma_1)$ и $\partial_{n_A} u(x')$ — производная по конормали оператора A:

$$\partial_{n_A} u(x') = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)n_i(x')\partial_j u(x)\big|_{x=x'}, \tag{1.2$'$}$$

где $n(x') = (n_1(x'), \ldots, n_d(x'))$ обозначает векторное поле внешних нормалей к Γ_1. Кроме того, на Γ_1 ставится условие

$$\int\limits_{\Gamma_1} |u(x') - u_0(x')|^2 dS < \varepsilon^2, \tag{1.3}$$

где $u_0 \in L_2(\Gamma_1)$ — заданная функция, $\varepsilon > 0$ — заданное число, которое по смыслу задачи считается достаточно малым. В (1.3) и ниже dS обозначает элемент объема того многообразия, по которому проводится интегрирование. (Все многообразия, рассматриваемые ниже, считаются вложенными в $\mathbb{R}^d$, и поэтому на них определены элементы объема dS.)

На многообразии Γ_2 ставится условие

$$\int\limits_{\Gamma_2} |u(x')|^2 dS \leqslant M^2, \tag{1.4}$$

где $M > 0$ — заданное число.

Наложим дополнительные условия, при которых будет решаться задача (1.1)–(1.4).

Условие 1.1. Область Ω диффеоморфна цилиндру $\Gamma \times [0, T_0]$, где $T_0 > 0$ — число, а $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — замкнутое $(d-1)$-мерное многообразие класса C^∞.

Типичным примером области, удовлетворяющей условию (1.1), является шаровой слой $\{x \in \mathbb{R}^d : r_1 < |x| < r_2\}$.

Пусть $\Gamma' \subset \Omega$ — многообразие, диффеоморфное Γ_1 и разбивающее область Ω на части Ω' и Ω'', причем $\partial\Omega' = \Gamma_1 \cup \Gamma'$, $\partial\Omega'' = \Gamma' \cup \Gamma_2$. На Γ' ставится граничное условие

$$u(x') = 0, \quad x' \in \Gamma'. \tag{1.5}$$

Условие 1.2. Краевая задача (1.1), (1.2), (1.5) имеет в $L_2(\Omega)$ только нулевое решение.

Пусть

$$u(x') = 0, \quad x' \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2. \tag{1.6}$$

Близким к условию 1.2 является следующее условие.

Условие 1.2′. Задача (1.1), (1.6) имеет в $L_2(\Omega)$ только нулевое решение.

Следующее условие, характерное для некорректных краевых задач, постулирует разрешимость задачи (1.1)–(1.4).

Условие 1.3. При заданных $u_0 \in L_2(\Gamma_1)$, $M > 0$, $\varepsilon > 0$ существует функция $u \in H^{1/2}(\Omega)$, удовлетворяющая соотношениям (1.1)–(1.4).

Здесь, как и ранее, $H^s(G)$ — пространство Соболева (см. гл. 1, § 1).

Замечание 1.1. В задаче, связанной с интерпретацией данных электроразведки, Γ_1 — поверхность земли и $u(x)$ — потенциал искусственно созданного в недрах земли (в Ω) электростатического поля. Уравнение (1.1) в этом случае имеет вид $\Delta u = 0$, где Δ — оператор Лапласа, а граничное условие (1.2) записывается в виде $\partial_n u(x') = 0$, где $n(x')$ — поле внешних нормалей к Γ_1. Через $u_0(x)$ обозначена величина потенциала $u(x)$, измеренная на поверхности земли. Измерения дают лишь приближенное значение $u(x)$, что отражено в соотношении (1.3), где ε — точность измерений. Оценка (1.4) величины $u(x)$ известна из физических соображений. Наконец, существование потенциала $u(x)$, т. е. условие 1.3, следует из физической постановки задачи.

В физических вопросах, приводящих к корректным краевым задачам, например, к задаче Дирихле

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad u(x') = u_0(x'),\ x' \in \partial\Omega, \tag{1.7}$$

краевое условие $u_0(x')$ тоже задается посредством измерений и, следовательно, является приближенным. Однако в данной ситуации от этого обстоятельства можно отвлечься при математической постановке задачи, поставив вместо (1.3) краевое условие из (1.7). Это возможно благодаря однозначной разрешимости задачи (1.7) и непрерывной зависимости его решения от граничного условия. Такого упрощения в задаче (1.1)–(1.4) сделать нельзя. Дело в том, что сужение на Γ_1 любой функции $u(x)$, удовлетворяющей соотношениям (1.1), (1.2), (1.4), принадлежит весьма узкому подмножеству пространства $L_2(\Gamma_1)$. Функция $u_0(x)$ задается в результате измерений, а значит с погрешностью, и, следовательно, этому множеству, как правило, не принадлежит. Перейдя от (1.3) к краевому условию из

(1.7), мы переходим от задачи, разрешимой по самой физической постановке, к задаче, которая, как правило, решения не имеет.

По своей постановке задача (1.1)–(1.4) существенно отличается от корректных краевых задач математической физики. Поэтому необходимо уточнить, что значит решить задачу (1.1)–(1.4). Специфика условия (1.3) такова, что существование хотя бы одной функции, удовлетворяющей (1.1)–(1.4), влечет, как правило, существование континуума решений задачи (1.1)–(1.4).

Поэтому постановка вопроса о точном определении искомого решения, естественная для корректных краевых задач, в случае задачи (1.1)–(1.4) не имеет смысла. Однако в силу (1.3) сужение на Γ_1 любой функции, удовлетворяющей (1.1)–(1.4), близко к u_0 по норме $L_2(\Gamma_1)$. Если из этого факта следует близость друг к другу всех функций, удовлетворяющих (1.1)–(1.4) по норме $L_2(\Omega')$, где Ω' — подобласть Ω, то обоснованной является постановка вопроса о приближенном решении задачи (1.1)–(1.4) на Ω'. В этом случае дело сводится к разработке методов построения приближенного решения задачи (1.1)–(1.4).

Таким образом — решить задачу (1.1)–(1.4) означает следующее:

(a) Доказана оценка $\|w\| \leqslant \zeta(\varepsilon)$, где $\zeta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\|\cdot\|$ — норма по Ω либо по некоторому подмножеству из Ω, функция $\zeta(\varepsilon)$ задана явно, $w = u_1 - u_2$, а u_1 и u_2 — произвольные функции, удовлетворяющие (1.1)–(1.4).

(b) Предложен конструктивный способ задания одной из функций, удовлетворяющей (1.1)–(1.4). В силу (a) эта функция будет близка к искомой функции $u(x)$ и, следовательно, будет приближенным решением.

Введем пространство $H^s_A = \{u \in H^s(\Omega) : Au \in L_2(\Omega)\}$, где A — оператор из (1.1), $s \in [0,2]$. Это пространство аналогично пространству (1.1.20), введенному в гл. 1, п. 1.3. Как известно (см. Лионс, Мадженес [2]), на функциях $u \in H^s_A$ определен оператор γ сужения на границу $\partial\Omega$, причем $\gamma u \in H^{s-1/2}(\partial\Omega)$, $\gamma\partial_\alpha u \in H^{s-3/2}(\partial\Omega)$, где ∂_α — дифференцирование вдоль векторного поля α, трансверсального к $\partial\Omega$. Поэтому для функции $u \in H^{1/2}(\Omega)$, удовлетворяющей (1.1), сужения $u\restriction_{\Gamma_i}$ принадлежат $L_2(\Gamma_i)$, $i = 1,2$, Следовательно, интегралы в (1.3), (1.4) определены, а равенство (1.2) понимается в смысле пространства $H^{-1}(\Gamma_1)$.

1.2. Примеры. Приведем примеры краевых задач, удовлетворяющих условиям 1.2 и 1.2$'$.

Пример 1.1. Положим $A = -\Delta$, где Δ — оператор Лапласа, и $\beta(x) \equiv 0$. Тогда выполнены условия 1.2 и 1.2$'$.

Пример 1.2. Положим $b_j \equiv 0$, $c \geqslant 0$ для оператора (1.1) и $\beta(x) \geqslant 0$ для краевого условия (1.2). Тогда выполнены условия 1.2 и 1.2$'$.

Пример 1.3. Пусть коэффициенты b_i, c оператора (1.1) удовлетворяют неравенству $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{d} \partial_j b_j(x) + c(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \Omega$, а для граничного условия (1.2) имеем $(b(x'), n(x')) + 2\beta(x') \geqslant 0$ при всех $x' \in \Gamma_1$. Тогда справедливы условия 1.2 и 1.2$'$.

Так как примеры 1.1, 1.2 являются частными случаями примера 1.3, достаточно доказать справедливость условий 1.2 и 1.2′ лишь для краевой задачи из примера 1.3. Пусть $u(x)$ — решение краевой задачи (1.1), (1.2), (1.5). Умножая (1.1) на $u(x)$, интегрируя по Ω', а затем интегрируя по частям, получим в силу (1.5) равенство

$$\int\limits_{\Omega'}\Big[\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\partial_i u\partial_j u + (c(x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\partial_j b_j(x))u^2\Big]\,dx$$
$$-\int\limits_{\Gamma_1}\Big[(\partial_{n_A}u)u - \frac{1}{2}(b,n)u^2\Big]\,dS = 0.$$

Выражая в интеграле по Γ_1 $\partial_{n_A}u$ из равенства (1.2) и используя (1.1′), получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega'}\Big[\varkappa\sum_{j=1}^{d}(\partial_j u)^2 + (c - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\partial_j b_j)u^2\Big]\,dx + \int\limits_{\Gamma_1}\Big[\beta + \frac{1}{2}(b,n)\Big]u^2\,dS \leqslant 0,$$

из которого следует $u(x) \equiv 0$. Условие 1.2 проверяется аналогично.

В заключение параграфа выпишем ряд формул, необходимых в дальнейшем. Пусть $u \in H_A^0$ и $w \in H^2(\Omega)$. Тогда справедлива формула Грина для оператора (1.1) (см. Лионс, Мадженес [2])

$$\int\limits_{\Omega}\big[Au\cdot w - A^*w\cdot u\big]\,dx = \int\limits_{\partial\Omega}\big[(b,n)uw + u\partial_{\nu_A}w - w\partial_{\nu_A}u\big]dS, \tag{1.8}$$

где A^* — оператор, формально сопряженный к A:

$$A^*w = -\sum_{i,j=1}^{d}\partial_j(a_{ij}\partial_i w) - \sum_{j=1}^{d}\partial_j(b_j w) + cw, \tag{1.9}$$

∂_{n_A} — производная по конормали, определенная в (1.2′), $(b,n) = \sum b_j n_j$. Из (1.8) легко следует формула Грина для задачи (1.1), (1.2), (1.5):

$$\int\limits_{\Omega'}\big[Auw - A^*w\cdot u\big]\,dx = \int\limits_{\Gamma_1}\big[u(\partial_{n_A}w + [(b,n)+\beta]w) - w(\partial_{n_A}u + \beta u)\big]dS$$
$$+\int\limits_{\Gamma'}\big[u\partial_{n_A}w - w\partial_{n_A}u + (b,n)uw\big]dS. \tag{1.10}$$

§ 2. Модельная задача. Формулировка теоремы об основной оценке

В этом параграфе мы рассмотрим простейший вариант задачи Коши (1.1)–(1.4) и на основе этого модельного примера продолжим обсуждение условно-корректных постановок задачи Коши. В конце параграфа сформу-

лирована теорема об оценке близости функций, удовлетворяющих соотношениям (1.1)–(1.4).

2.1. Основная оценка для модельной задачи. В полосе

$$\Pi_T = \{(t,x) : t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\}$$

ищется функция $u(t,x)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$-\partial^2_{tt} u(t,x) - \partial^2_{xx} u(t,x) = 0 \tag{2.1}$$

в классе периодических по x функций

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x). \tag{2.2}$$

Условие (1.2) заменяется условием

$$\partial_t u(t,x)\big|_{t=0} = 0, \tag{2.3}$$

а условия (1.3), (1.4) — неравенствами

$$\int\limits_0^{2\pi} |u(0,x) - u_0(x)|^2 dx \leqslant \varepsilon^2, \quad \int\limits_0^{2\pi} |u(T,x)|^2 dx \leqslant M^2. \tag{2.4}$$

Пусть $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ — функции из $H^{1/2}(\Pi_T)$, удовлетворяющие (2.1)–(2.4). Положим

$$w(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x). \tag{2.5}$$

Наша цель — получить оценку функции $t \to \|w(t,\cdot)\|$. В этом параграфе используется обозначение

$$\|v(\cdot)\|^2 = \int\limits_0^{2\pi} |v(x)|^2 dx.$$

Отметим, что $w(t,x)$ удовлетворяет (2.1)–(2.3), а также следующим аналогам неравенств (2.4):

$$\|w(0,\cdot)\|^2 \leqslant (2\varepsilon)^2, \quad \|w(T,\cdot)\|^2 \leqslant (2M)^2. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1 *При любом $t \in [0,T]$ для любой функции $w(t,x)$, удовлетворяющей соотношениям* (2.1)–(2.3), (2.6) *справедливо неравенство*

$$\|w(t,\cdot)\| \leqslant (2\varepsilon)^{1-t/T} (2M)^{t/T}. \tag{2.7}$$

Если число $\dfrac{t}{T} \ln \dfrac{M}{\varepsilon}$ является целым и $\varepsilon \leqslant M$, то существует функция $w(t,x)$, удовлетворяющая условиям (2.1)–(2.3), (2.6) *и оценке*

$$\|w(t,\cdot)\| \geqslant \varepsilon^{1-t/T} M^{t/T}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Разложим функцию $w(t,x)$ в ряд Фурье

$$w(t,x)=\sum_{\xi=-\infty}^{\infty}\widehat{w}(t,\xi)e^{ix\xi}. \tag{2.9}$$

В силу (2.1), (2.3)

$$\widehat{w}(t,\xi)=\operatorname{ch}(|\xi|t)\widehat{w}(0,\xi). \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$\widehat{w}(t,\xi)=\frac{\operatorname{ch}(|\xi|t)}{\operatorname{ch}(|\xi|T)}\widehat{w}(T,\xi). \tag{2.11}$$

Используя равенство Парсеваля и соотношения (2.10), (2.11) получим

$$\|w(t,\cdot)\|^2=2\pi\sum_{\xi}|w(t,\xi)|^2=2\pi\sum_{\xi}(|w(0,\xi)|^{2(1-t/T)}|w(T,\xi)|^{2t/T}f(t,|\xi|), \tag{2.12}$$

где $f(t,\alpha)=(\operatorname{ch}(t\alpha)/(\operatorname{ch}(T\alpha))^{t/T})^2$. Непосредственными вычислениями легко установить соотношения

$$f(t,0)=1,\quad \lim_{\alpha\to\infty}f(t,\alpha)=2^{2(t-T)/T},\quad \partial_\alpha f(t,\alpha)\leqslant 0,\quad t\in[0,T]\,\forall\alpha>0,$$

из которых вытекают неравенства

$$2^{2(t-T)/T}\leqslant f(t,\alpha)\leqslant 1,\quad \alpha\in\mathbb{R},\quad t\in[0,T]. \tag{2.13}$$

Из (2.12), (2.13) и неравенства Гёльдера следует оценка

$$\begin{aligned}\|w(t,\cdot)\|^2&\leqslant 2\pi\sum_{\xi}|w(0,\xi)|^{2(1-t/T)}|w(T,\xi)|^{2t/T}\\&\leqslant\|w(0,\cdot)\|^{2(1-t/T)}\|w(T,\cdot)\|^{2t/T},\end{aligned}$$

которая вместе с оценкой (2.6) доказывает (2.7). Для целого числа $\xi_0=\dfrac{1}{T}\ln\dfrac{M}{\varepsilon}$ положим

$$\widehat{w}(t,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\operatorname{ch}(|\xi|t), & \xi=\pm\xi_0,\\ 0, & \xi\neq\pm\xi_0.\end{cases} \tag{2.14}$$

Функция $w(t,x)$, определяемая (2.9), (2.14), удовлетворяет соотношению $\|w(0,\cdot)\|^2=(2\varepsilon)^2$. Учитывая определение ξ_0 и неравенство $\varepsilon\leqslant M$, получим

$$|w(T,\pm\xi_0)|=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\frac{(M/\varepsilon)+(\varepsilon/M)}{2}\leqslant\frac{M}{\sqrt{\pi}},$$

откуда следует, что $\|w(T,\cdot)\|^2\leqslant(2M)^2$. Наконец, вследствие (2.14) и определения ξ_0 имеем

$$|w(t,\pm\xi_0)|\geqslant\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}e^{t\xi_0}/2=\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{t/T}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\varepsilon^{1-t/T}M^{t/T},$$

откуда вытекает неравенство (2.8). □

В силу (2.8) показатель степени у ε в оценке (2.7) неулучшаем. Поэтому, как бы мы ни строили приближенное решение задачи (2.1)–(2.5), мы не можем гарантировать его близость к искомому решению $u(t,x)$ при $t=T$. Это вынуждает нас сделать следующее уточнение постановки задачи (2.1)–(2.4). Требуется построить функцию $v \in H^{1/2}(\Pi_T)$, удовлетворяющую соотношениям (2.1)–(2.4), которая в полосе Π_{T_1}, где $T_1 < T$, аппроксимирует искомое решение u.

2.2. Об одном варианте условно-корректной постановки. Изменим постановку задачи (2.1)–(2.4) так, чтобы при $t=T$ разность между искомым и приближенным решениями стремилась к нулю при $\varepsilon \to 0$. Для этого вместо (2.4) положим

$$\|u(0,\cdot)-u_0\|^2 \leqslant \varepsilon^2, \quad \|u(T,\cdot)\|^2_{H^1(0,2\pi)} \leqslant M^2, \tag{2.15}$$

где

$$\|u(T,\cdot)\|^2_{H^1(0,2\pi)} = 2\pi \sum_{\xi} (1+\xi^2)|u(T,\xi)|^2,$$

а $\widehat{u}(T,\xi)$ — коэффициенты Фурье функции $u(T,x)$. Тогда для функции w из (2.5) справедливы неравенства

$$\|w(0,\cdot)\|^2 \leqslant (2\varepsilon)^2, \quad \|w(T,\cdot)\|^2_{H^1(0,2\pi)} \leqslant (2M)^2. \tag{2.16}$$

Лемма 2.1. (a) *Для любой функции $w \in H^{3/2}(\Pi_T)$, $T > 1/2$, удовлетворяющей соотношениям* (2.1)–(2.3), (2.16) *при $\varepsilon \leqslant M$ справедливо неравенство*

$$\|w(T,\cdot)\|^2 \leqslant 8M^2 \left(1 + \left(\frac{1}{2T}\ln\frac{M}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-1}. \tag{2.17}$$

(b) *Если $\dfrac{1}{T}\ln\dfrac{M}{\varepsilon}$ — целое число, то существует функция $w \in H^{3/2}(\Pi_T)$, удовлетворяющая* (2.1)–(2.3), (2.16), *такая, что при $\varepsilon \leqslant M$*

$$\|w(T,\cdot)\|^2 \geqslant \left(\frac{M}{2}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{1}{2T}\ln\frac{M}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-1}. \tag{2.18}$$

Доказательство. (a) Функция $w(t,x)$ допускает разложение (2.9), (2.10). Поэтому при любом $N \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\|w(T,\cdot)\|^2 &\leqslant 2\pi\Bigg(\sum_{|\xi|\leqslant N} e^{2|\xi|T}|w(0,\xi)|^2 + \sum_{|\xi|>N} |w(T,\xi)|^2\Bigg) \\
&\leqslant e^{2NT}\|w(0,\cdot)\|^2 + (1+N^2)^{-1}\|w(T,\cdot)\|^2_{H^1(0,2\pi)} \\
&\leqslant (2\varepsilon)^2 e^{2NT} + (2M)^2(1+N^2)^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Учитывая, что $\varepsilon \leqslant M$, положим $N = \dfrac{1}{2T}\ln\dfrac{M}{\varepsilon}$ в (2.19). В результате находим

$$\|w(T,\cdot)\|^2 \leqslant 4M\varepsilon + (2M)^2\left(1+\left(\frac{1}{2T}\ln\frac{M}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-1}. \tag{2.20}$$

Так как функция $g(\varepsilon) \equiv \varepsilon\left(1+\left(\dfrac{1}{2T}\ln\dfrac{M}{\varepsilon}\right)^2\right)$ при $T > 1/2$ монотонно растет при $\varepsilon \in (0,M)$, имеем $\varepsilon \leqslant M\left(1+\left(\dfrac{1}{2T}\ln\dfrac{M}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-1}$. Из этого неравенства и (2.20) следует (2.17).

(b) Пусть $w(t,x)$ определяется соотношениями (2.9), (2.10). Положим

$$\widehat{w}(0,\xi) = \begin{cases} \varepsilon\sqrt{\dfrac{c}{\pi}}, & \xi = \pm\xi_0,\ c = \left(1+\left(\dfrac{1}{T}\ln\dfrac{M}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-1}, \\ 0 & \xi \neq \pm\xi_0,\ \xi_0 = \dfrac{1}{T}\ln\dfrac{M}{\varepsilon}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Очевидно, что $w(t,x)$ удовлетворяет (2.1)–(2.3) и первому неравенству в (2.16). Вследствие (2.3), (2.10), (2.21) при $\varepsilon \leqslant M$ имеем

$$\|w(T,\cdot)\|^2_{H^1(0,2\pi)} = c(2\varepsilon)^2\left(\frac{M}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2\left(1+\left(\frac{1}{T}\ln\frac{M}{\varepsilon}\right)^2\right) \leqslant (2M)^2,$$

что доказывает второе неравенство в (2.16). Наконец, в силу (2.9), (2.10), (2.21) получаем

$$\begin{aligned} \|w(T,\cdot)\|^2 &= c\cdot(2\varepsilon)^2\left(\frac{M}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2M}\right)^2 \geqslant M^2\left(1+\left(\frac{1}{T}\ln\frac{M}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-1} \\ &= \frac{M^2}{4}\left(\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2T}\ln\frac{M}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-1} \geqslant \left(\frac{M}{2}\right)^2\left(1+\left(\frac{1}{2T}\ln\frac{M}{\varepsilon}\right)^2\right)^{-1}, \end{aligned}$$

что доказывает (2.18). □

Замечание 2.1. Пусть $M = 1$, $T = 1$. Ввиду оценки (2.18) мы не можем гарантировать выполнения неравенства $\|w(T,\cdot)\| < 10^{-r}$, если $\varepsilon \geqslant 10^{-(\lg e)\sqrt{10^{2r}-1}}$. Учитывая, что $\lg e = 0{,}434294\ldots$, и полагая, например, $r = 2$, легко видеть, что погрешность $\|w(0,\cdot)\| = \varepsilon = 10^{-40}$ не гарантирует оценки

$$\|w(T,\cdot)\| < 10^{-2}. \tag{2.22}$$

В прикладных задачах обе нормы обычно вычисляются в одинаковых единицах измерения. Поэтому такая значительная разница между порядком точности вычислений ($\|w(T,\cdot)\|$ и требуемым для этого порядком точности измерений ($\|w(0,\cdot)\|$, как в (2.22), делает постановку (2.1)–(2.3), (2.15) неинтересной для приложений.

Замечание 2.2. Легко видеть, что некоторые оценки нормы разности $w = u_1 - u_2$ можно сразу получить из общей теоремы Тихонова (см. Тихонов [1]; Тихонов, Арсенин [1]; Лаврентьев [2]), как для задачи (2.1)–

(2.4), так и для задачи (2.1)–(2.3), (2.15). Точнее, в силу теоремы Тихонова существует непрерывная функция $\mathbb{R}_+ \ni \lambda \mapsto \omega(\lambda) \geqslant 0$, удовлетворяющая условию $\omega(\lambda) \downarrow 0$ при $\lambda \downarrow 0$ и оценке

$$\|w\| \leqslant \omega(\varepsilon). \tag{2.23}$$

Однако (см. замечание 2.1) оценки (2.23) часто оказывается недостаточно: для приложений необходимо знать вид функции $\omega(\varepsilon)$.

Из теоремы Тихонова нетрудно получить оценку вида (2.23) также для задачи (1.1)–(1.4). Однако для этой задачи мы получим оценку с явно заданной функцией $\omega(\varepsilon)$, причем $\omega(\varepsilon)$ аналогична правой части неравенства (2.7).

2.3. Формулировка основной теоремы об оценке. Пусть функции $u_1, u_2 \in H^{1/2}(\Omega)$ — удовлетворяют (1.1)–(1.4). Очевидно, что функция

$$w(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x) \tag{2.24}$$

удовлетворяет соотношениям (1.1), (1.2) и оценкам

$$\int\limits_{\Gamma_1} |w|^2 dS \leqslant (2\varepsilon)^2, \quad \int\limits_{\Gamma_2} |w|^2 dS \leqslant (2M)^2. \tag{2.25}$$

Сформулируем теорему об оценке функции $w(t,x)$, аналогичной неравенству (2.7). Доказательство приведено в § 3, 4. Пусть функция $\theta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ удовлетворяет условиям

$$0 < c_1 \leqslant |\operatorname{grad}\theta(x)|,\ x \in \Omega, \quad \theta(x)\big|_{\Gamma_1} \equiv 0, \quad \theta(x)\big|_{\Gamma_2} \equiv 1. \tag{2.26}$$

Тогда множество

$$\varkappa_t = \{x \in \Omega : \theta(x) = t\} \tag{2.27}$$

является гладким многообразием, диффеоморфным Γ_1 и Γ_2.

Теорема 2.2. *Существуют константа $c > 0$ и функция $\theta \in C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая* (2.26), *такие, что для любой функции $w \in H^{1/2}(\Omega)$, удовлетворяющей* (1.1), (1.2), (2.25), *имеем*

$$\int\limits_{\varkappa_t} |w|^2 dS \leqslant c\,\|\gamma_1 w\|^{2(1-t)}_{L_2(\Gamma_1)}\,\|\gamma_2 w\|^{2t}_{L_2(\Gamma_2)} \leqslant c(2\varepsilon)^{2(1-t)}(2M)^{2t}, \tag{2.28}$$

где $\varkappa_t$ — многообразие (2.27), *а γ_j — операторы сужения функции с Ω на многообразия Γ_j, $j = 1, 2$.*

§ 3. Замена переменных

Цель настоящего параграфа — с помощью ряда замен переменных записать задачу (1.1)–(1.4) в форме, удобной для доказательства оценки вида (2.28).

3.1. Сведение к краевой задаче на цилиндре. В силу условия 1.1 существует диффеоморфизм F области Ω на цилиндр $\Gamma \times [0, T_0]$, где $T_0 > 0$, а

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое $(d-1)$-мерное многообразие класса C^∞. Будем считать, что при этом диффеоморфизме Γ_1 переходит в $\Gamma \times \{0\}$, а Γ_2 — в $\Gamma \times \{T_0\}$. Очевидно, что краевая задача (1.1)–(1.4) переходит в краевую задачу на $\Gamma \times [0, T_0]$. Опишем полученную краевую задачу. Пусть $\{\mathcal{U}_k\}$ — покрытие многообразия Γ, причем в каждом $\mathcal{U}_k$ введены локальные координаты $x^k = (x_1^k, \ldots, x_{d-1}^k)$. Введем на $\Gamma \times [0, T_0]$ покрытие $\{\mathcal{U}_k \times [0, T_0]\}$ и локальные координаты $x^k = (x_1^k, x_{d-1}^k, x_d)$, где $x_d \in [0, T_0]$ — координата вдоль боковой образующей цилиндра. Пусть $\{\varphi_k\}$ — разбиение единицы на $\Gamma \times [0, T_0]$, соответствующее покрытию $\{\mathcal{U}_k \times [0, T_0]\}$, т. е. $\varphi_k \in C^\infty(\mathcal{U}_k \times [0, T_0])$, $\operatorname{supp} \varphi_k \subset \mathcal{U}_k \times [0, T_0]$, $0 \leqslant \varphi_k \leqslant 1$, $\sum \varphi_k \equiv 1$ на $\Gamma \times [0, T_0]$, а $\psi_k \in C^\infty(\mathcal{U}_k \times [0, T_0])$, причем $\operatorname{supp} \psi_k \subset \mathcal{U}_k \times [0, T_0]$, $\psi_k \varphi_k = \varphi_k$, $0 \leqslant \psi_k \leqslant 1$. Тогда эллиптический дифференциальный оператор второго порядка A, в который переходит оператор (1.1) при диффеоморфизме F, можно записать в виде

$$Au = \sum_k \psi_k A(\varphi_k u) \tag{3.1}$$

и при любом k имеем

$$\psi_k A(\varphi_k u) = \psi_k(x) \Bigg(- \sum_{i,j=1}^d \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j (\varphi_k u(x)) + \sum_{j=1}^d b_j(x) \partial_j (\varphi_k u(x)) + c(x) \varphi_k u(x) \Bigg), \tag{3.2}$$

где $x = x^k = (x_1^k, \ldots, x_{d-1}^k, x_d)$ — локальные координаты в $\mathcal{U}^k \times [0, T_0]$, которые мы обозначим так же, как координаты x из § 1 в Ω, хотя, конечно, они отличаются от координат в Ω, $\partial_j = \partial / \partial x_j$. Точно так же, чтобы не вводить новых обозначений, мы обозначаем коэффициенты оператора (3.2) a_{ij}, b_j, c, как и коэффициенты из (1.1), хотя они и отличаются от коэффициентов в (1.1). Некоторую вольность в обозначениях мы будем допускать и в дальнейшем. Итак, уравнение (1.1) переходит в уравнение

$$Au = 0 \tag{3.3}$$

на цилиндре $\Gamma \times [0, T_0]$, где A — оператор (3.1), (3.2). Как известно, при замене переменных производная по конормали переходит в производную по конормали. Поэтому краевое условие (1.2) переходит в условие

$$(\partial_{n_A} u + \beta u)\big|_{x_d = 0} = 0. \tag{3.4}$$

Условия (1.3), (1.4) при диффеоморфизме F переходят в неравенства

$$\int_\Gamma |u(x', 0) - u_0(x')|^2 J_1 \, dS \leqslant \varepsilon^2, \tag{3.5}$$

$$\int_\Gamma |u(x', T_0)|^2 J_2 \, dS \leqslant M^2, \tag{3.6}$$

где $J_i(x) \geqslant \alpha > 0$, $i = 1, 2$, — положительные гладкие функции (якобианы преобразования).[1]

3.2. Сведение к эллиптическому оператору специального вида. Сделаем еще ряд преобразований для того, чтобы упростить вид (3.2) оператора A. Прежде всего запишем оператор (3.2) в виде

$$\psi_k A(\varphi_k u) = \psi_k(-a_{dd}\partial_{dd}^2(\varphi_k u) - \sum_{j=1}^{d-1} 2a_{dj}\partial_j\partial_d(\varphi_k u)$$
$$- \sum_{i,j=1}^{d-1} \partial_i(a_{ij}\partial_j(\varphi_k u)) + \sum_{j=1}^{d-1}(b_j - \partial_d a_{dj})\partial_j(\varphi_k u)$$
$$+ \left(b_d - \partial_d a_{dd} - \sum_{j=1}^{d-1}\partial_j a_{jd})\partial_d(\varphi_k u) + c\varphi_k u\right). \tag{3.7}$$

Наша ближайшая цель — с помощью замены переменных избавиться от суммы $\sum 2a_{dj}\partial_j\partial_d(\varphi_k u)$ в правой части (3.7). Рассмотрим замену переменных

$$y_d = x_d, \quad y_j = y_j(x_1, \dots, x_d), \quad j = 1, \dots, d-1. \tag{3.8}$$

Используя обозначения $\partial_{y_j} = \partial/\partial_{y_j}$, $\partial_m = \partial/\partial_{x_m}$, подставим выражения ∂_m, ∂_{mj}^2 через ∂_{y_e}, $\partial_{y_e y_k}^2$ в (3.7). После простых преобразований находим

$$\psi_k A(\varphi_k u) = \psi_k\Bigg\{-a_{dd}\partial_{y_d y_d}^2(\varphi_k u) - 2\sum_{j=1}^{d-1}(a_{dd}\frac{\partial y_j}{\partial x_d}$$
$$+ \sum_{m=1}^{d-1}\chi_k a_{dm}\frac{\partial y_j}{\partial x_m})\partial_{y_j y_d}^2(\varphi_k u) + \dots\Bigg\}, \tag{3.9}$$

где

$$\chi_k \in C_0^\infty, \ \operatorname{supp}\chi_k \subset \operatorname{supp}\psi_k, \ 0 \leqslant \chi_k \leqslant 1, \ \chi_k(x) \equiv 1, \ x \in \operatorname{supp}\varphi_k; \tag{3.10}$$

многоточием в (3.9) обозначены члены, содержащие $\varphi_k u$, $\partial_{y_j}(\varphi_k u)$, $j = 1, \dots, d$, $\partial_{y_j y_l}^2(\varphi_k u)$, $j, l = 1, \dots, d-1$.

Из (3.9) следует, что оператор $\psi_k A'(\varphi_k u)$ не будет содержать члены со вторыми производными $\partial_{y_d y_j}^2$, $j = 1, \dots, d-1$, если

$$\frac{\partial y_j(x)}{\partial x_d} + \sum_{m=1}^{d-1}\chi_k\frac{a_{dm}}{a_{dd}}\frac{\partial y_j(x)}{\partial x_m} = 0, \quad j = 1, \dots, d-1. \tag{3.11}$$

Отметим, что $a_{dd}(x) \geqslant \mathrm{const} > 0$ вследствие эллиптичности оператора A. Поэтому коэффициенты в (3.11) — гладкие функции. Будем считать, что

$$y_j(x)\big|_{x_d=0} = x_j, \quad j = 1, \dots, d-1. \tag{3.12}$$

[1] Здесь и везде ниже под гладкими функциями мы подразумеваем бесконечно дифференцируемые.

Лемма 3.1. *Соотношения* (3.11), (3.12) *определяют невырожденную систему координат* (3.8) *на* $\operatorname{supp}\psi_k$. *При этом на* $\operatorname{supp}\psi_k \setminus \operatorname{supp}\chi_k$, *где* χ_k — *функция* (3.10), *справедливы равенства* $y_j = x_j$, $j = 1, \dots, d-1$.

Доказательство. Характеристиками уравнения (3.11) являются решения

$$x'(t) = x'(x^0, t) = (x_1(x^0, t), \dots, x_{d-1}(x^0, t))$$

задачи Коши

$$\frac{d}{dt} x_j(x^0, t) = \frac{a_{dj}(x'(t), t)\chi_k(x'(x^0, t))}{a_{dd}(x'(t), t)}, \quad j = 1, \dots, d-1, \tag{3.13}$$

$$x_j(x^0, 0) = x_j^0, \quad j = 1, \dots, d-1, \tag{3.14}$$

где $x^0 = (x_1^0, \dots, x_{d-1}^0)$ — начальное условие, $t = x_d$. В силу (3.11), (3.14)

$$y_j(x'(x^0, t), t) \equiv x_j^0, \quad j = 1, \dots, d-1, \tag{3.15}$$

откуда

$$y_j(x', t) = x_j^0(x', t), \quad j = 1, \dots, d-1, \tag{3.16}$$

где $x^0(x', t) = (x_1^0(x', t), \dots, x_{d-1}^0(x', t))$ — отображение, обратное преобразованию $x^0 \to x'(x^0, t)$. Это преобразование является диффеоморфизмом $\mathbb{R}^{d-1}$ на $\mathbb{R}^{d-1}$, так как определяется посредством задачи Коши (3.13), (3.14). Поэтому согласно (3.16) отображение $x' \to y' = (y_1(x', t), \dots, y_{d-1}(x', t))$ при любом $t \in [0, T_0]$ является диффеоморфизмом $\mathbb{R}^{d-1}$ на $\mathbb{R}^{d-1}$.

В силу (3.13), (3.14) характеристики $x'(x^0, t)$, которые при некотором t не принадлежат $\operatorname{supp}\chi_k$, определяются тождеством $x'(x^0, t) \equiv x^0 \notin \operatorname{supp}\chi_k$. Из этого тождества и (3.16) следует, что вне $\operatorname{supp}\chi_k$ отображение $x' \to y'$ тождественное. □

В силу леммы 3.1 локальные координаты y, определенные соотношениями (3.8), (3.11), (3.12), имеют ту же область определения, что и локальные координаты x. В этих локальных координатах y у оператора (3.1) отсутствуют члены, содержащие производные $\partial^2_{y_d y_j}$. В силу сказанного выше можно считать, что оператор (3.1) в локальных координатах (которые мы опять будем обозначать через $x = x^k$) имеет вид

$$\psi_k A(\varphi_k u) = \psi_k(x)\Bigg(-a_{dd}(x)\partial^2_{dd}(\varphi_k u) - \sum_{i,j=1}^{d-1} \partial_j(a_{ij}\partial_j(\varphi_k u)) + \sum_{j=1}^{d} b_j \partial_j(\varphi_k u) + c\varphi_k u\Bigg), \tag{3.17}$$

где функции φ_k, ψ_k не зависят от x_d.[2] Очевидно, что оператор (3.1), (3.17) можно записать в виде

$$Au = -\left(\sum_k \varphi_k a_{dd}^{(k)}\right)\partial_{dd}^2 u + \left(\sum_k \varphi_k b_d^{(k)}\right)\partial_d u - \mathfrak{A}u, \tag{3.18}$$

где $a_{dd}^{(k)}$ — коэффициент при ∂_{dd}^2, $b_d^{(k)}$ — коэффициент при ∂_d в системе координат, заданной на $\mathcal{U}_k$, а $\mathfrak{A}$ — оператор вида

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}u = \sum_k \psi_k \mathfrak{A}(\varphi_k u),\\ \psi_k \mathfrak{A}(\varphi_k u) = \psi_k\left(\sum_{i,j=1}^{d-1} \partial_i(a_{ij}\partial_j(\varphi_k u)) - \sum_{j=1}^{d-1} b_j \partial_j(\varphi_k u) - c\varphi_k u\right).\end{gathered} \tag{3.19}$$

В силу эллиптичности A имеем $a_{dd}^k \geqslant \mathrm{const} > 0$. Поэтому $\zeta = \sum\limits_k \varphi_k a_{dd}^{(k)} \geqslant \mathrm{const} > 0$. Поделив уравнение (3.3) на функцию ζ, после простых преобразований получим

$$\frac{Au}{\zeta} = -\partial_{dd}^2 u + \frac{\left(\sum_k \varphi_k b_n^{(k)}\right)}{\zeta}\partial_d u - \frac{\mathfrak{A}u}{\zeta} = 0, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{A}u}{\zeta} = \sum_k \psi_k \Bigg(&\sum_{i,j=1}^{d-1} \partial_i\left(\frac{a_{ij}^{(k)}}{\zeta}\partial_j(\varphi_k u)\right)\\ &-\sum_{j=1}^{d-1}\left\{\frac{b_j^{(k)}}{\zeta} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{d-1} a_{ij}^{(k)}\partial_i\zeta}{\zeta^2}\right\}\partial_j(\varphi_k u) - \frac{c^{(k)}}{\zeta}\varphi_k u\Bigg).\end{aligned} \tag{3.21}$$

3.3. Неотрицательная определенность производной матрицы вторых производных. Сделав соответствующие переобозначения в (3.19)–(3.21), можно считать, что задано уравнение

$$Au = -\partial_{dd}^2 u + b_d \partial_d u - \mathfrak{A}u = 0, \tag{3.22}$$

где

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}u = \sum_k \psi_k \mathfrak{A}(\varphi_k u),\\ \psi_k \mathfrak{A}(\varphi_k u) = \psi_k\left(\sum_{i,j=1}^{d-1} \partial_i(a_{ij}\partial_j(\varphi_k u)) - \sum_{j=1}^{d-1} b_j \partial_j(\varphi_k u) - c\varphi_k u\right).\end{gathered} \tag{3.23}$$

[2] Уточним, что элементы $\mathcal{U}_k \times [0, T_0]$ покрытия $\{\mathcal{U}_k \times [0, T_0]\}$ многообразия $\Gamma \times [0, T_0]$, в которых определены равенства (3.17), те же, что и в 3.1 (см. формулу (3.2)), локальные координаты $x = x^k$ совпадают с локальными координатами y, введенными в 3.2. На разбиение единицы $\{\varphi_k\}$ и функции ψ_k, определенные в начале 3.1, мы накладываем дополнительное условие: в новых локальных координатах φ_k, функции ψ_k не зависят от координаты x_d.

В силу эллиптичности уравнения (3.22) матрица $a(x) = \|a_{ij}(x)\|$ положительно определенная:

$$\sum_{i,j=1}^{d-1} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \gamma \sum_{j=1}^{d-1} \xi_j^2, \quad \gamma > 0. \tag{3.24}$$

В этом пункте мы покажем, что после соответствующей замены переменных можно добиться не только положительной определенности матрицы $a(x)$, но и неотрицательной определенности матрицы $\partial_d a(x)$.

Рассмотрим замену переменных

$$t = t(x_d), \quad t(0) = 0, \quad t(T_0) = 1. \tag{3.25}$$

Переменные x_j, $j = 1, \ldots, d-1$, остаются неизменными. При такой замене имеем $\partial_d = \partial_d t(x_d)\partial_t$, $\partial_{dd}^2 = (\partial_d t(x_d))^2 \partial_{tt}^2 + \partial_{dd}^2 t(x_d)\partial_t$, и уравнение (3.22) переходит в уравнение

$$-\partial_{tt}^2 u - \widetilde{\mathfrak{A}} u = 0, \tag{3.26}$$

где

$$\widetilde{\mathfrak{A}} u = \sum_k \psi_k \widetilde{\mathfrak{A}}(\varphi_k u),$$

$$\psi_k \widetilde{\mathfrak{A}}(\varphi_k u) = \psi_k \Bigg[\sum_{i,j=1}^{d-1} \partial_i \left(\frac{a_{ij}}{(\partial_d t)^2} \partial_j (\varphi_k u) \right) - \sum_{j=1}^{d-1} \frac{b_j}{(\partial_d t)^2} \partial_j (\varphi_k u)$$
$$- \left(\frac{b_d}{(\partial_d t)^2} + \frac{\partial_{dd}^2 t}{(\partial_d t)^2} \right) \partial_t (\varphi_k u) - \frac{c}{(\partial_d t)^2} \varphi_k u \Bigg]. \tag{3.27}$$

Таким образом, матрица $a(x', x_d) = \|a_{ij}(x', x_d)\|$ коэффициентов при вторых производных переходит при преобразовании (3.25) в матрицу

$$\widetilde{a}(x', t) = (\partial_t x_d(t))^2 a(x', x_d(t)), \tag{3.28}$$

где $x_d(t)$ — преобразование, обратное к (3.25). Положительная определенность матрицы (3.28) вытекает из положительной определенности матрицы a при любом невырожденном преобразовании (3.25).

Подберем преобразование $t(x_d)$ так, чтобы матрица $\partial_t \widetilde{a}(x', t)$ была неотрицательно определенной. Имеем

$$\partial_t \widetilde{a}(x', t) = 2\partial_t x_d(t) \partial_{tt}^2 x_d(t) a(x', x_d(t)) + (\partial_t x_d(t))^3 \partial_d a(x', x_d(t)). \tag{3.29}$$

В силу невырожденности $x_d(t)$ имеем $\partial_t x_d(t) > 0$. Поэтому для положительной определенности матрицы $\partial_t \widetilde{a}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$2\partial_{tt}^2 x_d(t) a(x', x_d(t)) + (\partial_t x_d(t))^2 \partial_d a(x', x_d(t)) \geqslant 0, \tag{3.30}$$

при любом $x' \in \mathcal{U}_k$, $x_d \in [0, T_0]$. Отметим, что матрица a зависит от множества $\mathcal{U}_k$ из покрытия многообразия Γ, на котором эта матрица определена.

Следовательно, $a(x) = a^{(k)}(x)$. Положим

$$a_0(x_d) = \min_k \min_{x' \in \mathcal{U}_k,\ |\xi|=1} (a^{(k)}(x', x_d)\xi, \xi),$$
$$a_1(x_d) = \min_k \min_{x' \in \mathcal{U}_k,\ |\xi|=1} (\partial_d a^{(k)}(x', x_d)\xi, \xi) \tag{3.31}$$

и найдем $x_d(t)$ из условий

$$\partial_t x_d(t) > 0,\ \partial^2_{tt} x_d(t) \geqslant 0,\ 2\partial^2_{tt} x_d(t) a_0(x_d(t)) + (\partial_t x_d(t))^2 a_1(x_d(t)) \geqslant 0. \tag{3.32}$$

Положим

$$a_+(x_d(t)) = \max\left\{0, \frac{a_1(x_d(t))}{a_0(x_d(t))}\right\}, \quad a_-(x_d(t)) = a_+(x_d(t)) - \frac{a_1(x_d(t))}{a_0(x_d(t))}.$$

Заменим последнее неравенство в (3.32) уравнением

$$2\partial^2_{tt} x_d + (\partial_t x_d)^2 \frac{a_1(x_d)}{a_0(x_d)} = a_+(x_d)(\partial_t x_d)^2,$$

из которого следует

$$\ln \partial_t x_d(t) - \ln \partial_t x_d(0) = \int_0^t \frac{1}{2} a_-(x_d(t)) \partial_t x_d(t)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{x_d(t)} a_-(s) ds, \tag{3.33}$$

так как $x_d(0) = 0$. Потенцируя (3.33) и переходя к обратным функциям, получим

$$\partial_d t(x_d) = \partial_d t(0) \exp\left(-\int_0^{x_d} a_-(\zeta) d\zeta/2\right),$$

откуда

$$t(x_d) = \int_0^{x_d} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\xi} a_-(\zeta) d\zeta\right) d\xi \Big/ \int_0^{T_0} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\xi} a_-(x)\, dx\right) d\xi \tag{3.34}$$

(здесь константа $\partial_d t(0)$ выбрана так, чтобы $t(T_0) = 1$). Из (3.34) следует, что $\partial_d t(x_d) > 0$ и $\partial^2_{dd} t(x_d) \leqslant 0$. Поэтому

$$\partial_t x_d(t) = 1/(\partial_d t(x_d)) > 0, \quad \partial^2_{tt} x_d(t) = -\partial^2_{dd} t(x_d)(\partial_t x_d(t))^3 \geqslant 0.$$

Следовательно, построенное преобразование $x_d(t)$ (и $t(x_d)$) удовлетворяет условиям (3.32) и (3.25). Из (3.32), (3.31) получаем (3.30). Тем самым доказано, что в координатах (x', t) матрица $\widetilde{a}$ коэффициентов при вторых производных положительно определенная, а ее производная по t — матрица $\partial_t \widetilde{a}$ — неотрицательно определенная.

3.4. Окончательные преобразования. Таким образом, в дальнейшем можно считать, что оператор $\mathfrak{A}$, определенный формулами (3.22), (3.23), задан на цилиндре $\Gamma \times [0, 1]$ (т. е. $T_0 = 1$) и в (3.23) при любом k матрица $a(x', x_d) = \|a_{ij}\|$ положительно определенная, а $\partial_d a(x', x_d)$ — неотрицательно

определенная. Заменой искомой функции u добьемся, чтобы коэффициент b_d при $\partial_d u$ в (3.22) был равен нулю.

Подставим $u = Qv$ в (3.22) и поделим полученное равенство на Q. После простых преобразований получим уравнение

$$-\partial_{dd}^2 v + \left(b_d - 2\frac{\partial_d Q}{Q}\right)\partial_d v - \frac{1}{Q}\mathfrak{A}Qv - \frac{\partial_{dd}^2 Q}{Q}v + b_d\frac{\partial_d Q}{Q}v = 0. \tag{3.35}$$

Положим

$$Q(p, x_d) = Q(p, 0)\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_d} b_d(p, t)\,dt\right\}, \tag{3.36}$$

где p — точка многообразия Γ, $Q(p, 0)$ — положительная функция, которая будет выбрана ниже. В случае, если Q — функция (3.36), коэффициент при $\partial_d v$ в уравнении (3.35) равен нулю, а само уравнение имеет вид

$$-\partial_{dd}^2 v - \mathfrak{A}v + \sum_k \psi_k\left(\sum_{j=1}^{d-1}\widetilde{b}_j\partial_j(\varphi_k v) + \widetilde{c}\varphi_k v\right) = 0, \tag{3.37}$$

где $\widetilde{b}_j$, $\widetilde{c}$ — функции, которые строятся по Q и коэффициентам a_{ij}, b_j, c оператора (3.23). Отметим, что $\mathfrak{A}$ из (3.37) — это в точности оператор (3.23). Поэтому матрица a коэффициентов при вторых производных из (3.37) положительно определенная, а матрица $\partial_d a$ — неотрицательно определенная.

Сделаем окончательные переобозначения координат и коэффициентов исследуемой задачи. Положим $x_d = t$, $\partial_d f = \dot{f}$. Переобозначим коэффициенты уравнения (3.37) так, чтобы оно приняло вид

$$-\ddot{v}(x', t) - \mathfrak{A}v = 0, \tag{3.38}$$

где

$$\mathfrak{A}v = \sum_k \psi_k\mathfrak{A}(\varphi_k v),$$

$$(\psi_k\mathfrak{A}(\varphi_k v))(x^{(k)}) = \psi_k\left(\sum_{i,j=1}^{d-1}\partial_i(a_{ij}^{(k)}\partial_j(\varphi_k v)) - \sum_{j=1}^{d-1}b_j^{(k)}\partial_j(\varphi_k v) - c^{(k)}\varphi_k v\right). \tag{3.39}$$

После замены независимых переменных, проведенной в 3.2, производная по конормали переходит в производную по конормали оператора (3.20), которая пропорциональна производной по t в силу равенства нулю коэффициентов a_{dj}, $1 \leqslant j \leqslant d-1$, в (3.17). Направление векторов у полученного векторного поля не меняется при заменах, проведенных в пп. 3.3, 3.4. После деления на коэффициент при ∂_t это краевое условие запишется в виде

$$(\dot{v} + \beta v)\big|_{t=0} = 0. \tag{3.40}$$

Неравенства (3.5), (3.6) после описанных замен независимых переменных также будут иметь вид (3.5), (3.6), но с другими функциями J_1, J_2. Поло-

жим в (3.36)

$$Q(p,0) = J_1(p)^{-1/2}. \tag{3.41}$$

После замены $u = Qv$ (3.5) примет вид

$$\int\limits_{\Gamma} |v(x',0) - J_1^{1/2} u_0(x')|^2 dS \leqslant \varepsilon^2, \tag{3.42}$$

а из неравенства (3.6) получим

$$\int\limits_{\Gamma} |v(x',1)|^2 dS \leqslant c_0^2 M^2 \tag{3.43}$$

где $c_0 = [\min\limits_{x'\in\Gamma}(QJ_2^{1/2})]^{-1}$ не зависит от ε и M.

Укажем свойства задачи (3.38), (3.40), (3.42), (3.43).

Условие 3.1. При любом k матрица $a^k(x',t) = \|a_{ij}\|$ коэффициентов при вторых производных оператора (3.39) положительно определенная, а матрица $\dot{a}^{(k)}(x',t)$ — неотрицательно определенная при любых $x' \in \mathcal{U}_k$, $t \in [0,1]$.

Так как задача (3.38), (3.40), (3.42), (3.43) получена из задачи (1.1)–(1.4) с помощью невырожденных замен независимых переменных и замены $v = Q^{-1}u$ искомой функции при $0 < q_0 \leqslant Q \leqslant q_1$, из условия 1.2 следует

Условие 3.2. Пусть при $T_0 \in (0,1]$ поставлено условие

$$v(x',t)\big|_{t=T_0} = 0. \tag{3.44}$$

Тогда при любом $T_0 \in (0,1]$ задача (3.38), (3.40), (3.44) имеет в пространстве $L_2(\Gamma \times [0,T_0])$ лишь решение, тождественно равное нулю.

§ 4. Основная оценка

В этом параграфе будет доказана теорема 2.2.

4.1. Формулировка теоремы об оценке в случае цилиндра. В этом параграфе для решения задачи (3.38), (3.40), (3.42), (3.43) будет доказана оценка, аналогичная (2.7). Ниже, для нормы и скалярного произведения в пространстве $L_2(\Gamma)$ используется обозначение

$$\|f\|^2 = \int\limits_{\Gamma} |f(x')|^2 dS, \quad (f,g) = \int\limits_{\Gamma} f(x')g(x')dS.$$

Пусть $v_1, v_2 \in H^{1/2}(\Gamma \times [0,1])$ — произвольные функции, удовлетворяющие соотношениям (3.38), (3.40), (3.42), (3.43). Тогда функция

$$w = v_1 - v_2 \tag{4.1}$$

также удовлетворяет (3.38), (3.40), а вместо (3.42), (3.43) w удовлетворяет неравенствам

$$\|w(\cdot,0)\|^2 \leqslant (2\varepsilon)^2, \quad \|w(\cdot,1)\|^2 \leqslant c_0^2(2M)^2. \tag{4.2}$$

Ниже (см. п. 4.3) будет доказана

Теорема 4.1. *Существует константа $c>0$, зависящая лишь от многообразия Γ и коэффициентов $a_{ij}^{(k)}$, $b_j^{(k)}$, $c^{(k)}$, β уравнений* (3.38), (3.40), *такая, что для любой функции $w \in H^{1/2}(\Gamma\times[0,1])$, удовлетворяющей* (3.38), (3.40), (4.2), *справедливы неравенства*

$$\|w(\cdot,t)\|^2 \leqslant c\,\|w(\cdot,0)\|^{2(1-t)}\,\|w(\cdot,1)\|^{2t} \leqslant c(2\varepsilon)^{2(1-t)}(2M)^{2t}. \tag{4.3}$$

Из теоремы о гладкости решений эллиптических краевых задач следует, что $w \in C^\infty(\Gamma\times(0,1))$. Очевидно, что

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\ln\|w(t)\|^2 = \frac{(\ddot w, w)+\|\dot w\|^2}{\|w\|^2} - \frac{2(\dot w, w)^2}{\|w\|^4} \geqslant \frac{(\ddot w, w)-\|\dot w\|^2}{\|w\|^2}. \tag{4.4}$$

Основная трудность при доказательстве теоремы 4.1 состоит в выводе неравенства

$$\frac{(\ddot w(t), w(t)) - \|\dot w(t)\|^2}{\|w(t)\|^2} \geqslant -\theta, \tag{4.5}$$

где константа θ на зависит от $w(t)$.

Лемма 4.1. *Если для любой функции $w \in H^{1/2}(\Gamma\times[0,1])$, удовлетворяющей* (3.38), (3.40), (4.2), *справедливо неравенство* (4.5), *то w удовлетворяет неравенствам* (4.3).

Доказательство. Из (4.4), (4.5) вытекает выпуклость функции

$$g(t) = \frac{1}{2}\ln\|w(t)\|^2 + \theta t^2 = \ln(\|w(t)\|\,e^{\theta t^2}).$$

Потенцируя неравенство Йенсена для $g(t)$: $g(t) \leqslant (1-t)g(0)+tg(1)$, получим соотношение

$$\|w(t)\|\,e^{\theta t^2} \leqslant \|w(0)\|^{1-t}\,(e^\theta\,\|w(1)\|)^t. \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует (4.3) □

4.2. Вспомогательные предложения. Для доказательства оценки (4.5) нам понадобится несколько лемм.

Лемма 4.2. *Для функции $w \in H^{1/2}(\Gamma\times[0,1])$, удовлетворяющей* (3.38), (3.40), *справедливо равенство*

$$\|\dot w\|^2 = -(\mathfrak{A}(t)w(t), w(t)) + (\mathfrak{A}(0)w(0), w(0)) + \|\beta w(0)\|^2$$
$$+\int_0^t [(\dot{\mathfrak{A}}w, w) + (\dot w, \mathfrak{A}_1 w)]\,d\tau, \tag{4.7}$$

где β — коэффициент из условия (3.40),

$$\mathfrak{A}_1 w = \sum_k \psi_k \mathfrak{A}_1^{(k)}(w), \quad \psi_k \mathfrak{A}_1^{(k)}(w) = \psi_k \left(\sum_{j=1}^{d-1} \widetilde{b}_j^{(k)} \partial_j w + \widetilde{b}_0^{(k)} w \right) \tag{4.8}$$

обозначает дифференциальный оператор первого порядка, коэффициенты которого зависят лишь от многообразия Γ *и оператора* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Отметим, что

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{A}(t)w(t), w(t)) = (\dot{\mathfrak{A}} w, w) + (\mathfrak{A}\dot{w}, w) + (\mathfrak{A} w, \dot{w}). \tag{4.9}$$

Учитывая (3.39), равенство $\varphi_k = \varphi_k \psi_k$ и формулу Лейбница дифференцирования произведения функций, получим

$$\begin{aligned}
(w, \mathfrak{A}\dot{w}) = \sum_k \Bigg[\int\limits_{\mathcal{U}_k} \varphi_k w \Bigg(& \sum_{i,j=1}^{d-1} \partial_i (a_{ij}^{(k)} \partial_j (\psi_k \dot{w})) \\
& - \sum_{j=1}^{d-1} b_j^{(k)} \partial_j (\psi_k \dot{w}) - c^{(k)} \psi_k \dot{w} \Bigg) J_k \, dx \\
& + \int\limits_{\mathcal{U}_k} w \Bigg(\sum_{j=1}^{d-1} \widehat{b}_j^{(k)} \partial_j (\psi_k \dot{w}) + \widehat{b}_0^{(k)} \psi_k \dot{w} \Bigg) J_k \, dx \Bigg],
\end{aligned} \tag{4.10}$$

причем $\widehat{b}_j^{(k)}$ определяются по φ_k и коэффициентам оператора $\mathfrak{A}$ и $\operatorname{supp} \widehat{b}_j^{(k)} \subset \operatorname{supp} \varphi$, $j = 0, 1, \ldots, d-1$. Учитывая, что $J_k > 0$, и интегрируя по частям в правой части равенства (4.10), получим

$$\begin{aligned}
(w, \mathfrak{A}\dot{w}) = (\mathfrak{A} w, \dot{w}) & + \sum_k \Bigg(\int\limits_{\mathcal{U}_k} \Bigg(\sum_{j=1}^{d-1} b_j^{(k)} \partial_j (\varphi_k w) J_k + \partial_j (b_j^{(k)} \varphi_k w J_k) \Bigg) \psi_k \dot{w} \, dx \\
& + \int\limits_{\mathcal{U}_k} \Bigg[2 \sum_{i,j=1}^{d-1} (\partial_i J_k) a_{ij}^{(k)} \partial_j (\varphi_k w) + \sum_{i=1}^{d-1} (\partial_i (a_{ij}^{(k)} \partial_j J_k)) \varphi_k w \Bigg] \psi_k \dot{w} \, dx \\
& - \int\limits_{\mathcal{U}_k} \Bigg(\sum_{j=1}^{d-1} \partial_j (\widehat{b}_j^{(k)} w J_k) \Bigg) \psi_k \dot{w} \, dx \Bigg) \\
= (\mathfrak{A} w, \dot{w}) & + \sum_k \Bigg(\int\limits_{\mathcal{U}_k} \Bigg(\sum_{j=1}^{d-1} \widetilde{b}_j^{(k)} \partial_j w + \widetilde{b}_0^{(k)} w \Bigg) \psi_k \dot{w} J_k \, dx \Bigg),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

где $\mathfrak{A}$ — оператор (3.39). Пусть $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — дифференциальный оператор первого порядка, определяемый вторым членом из правой части последнего равенства (4.11). Из (4.11) следует равенство

$$(\mathfrak{A}\dot{w}, w) = (\dot{w}, \mathfrak{A} w) + (\dot{w}, \mathfrak{A}_1 w), \tag{4.12}$$

где $\mathfrak{A}_1$ — дифференциальный оператор первого порядка, определенный в (4.8). Умножая скалярно обе части равенства (3.38) на $\dot{w}$, находим

$$(\ddot{w}(t), \dot{w}(t)) + (\mathfrak{A}w(t), \dot{w}(t)) = 0. \tag{4.13}$$

Из этого равенства, (4.9) и (4.12) следует, что

$$\frac{d}{dt}\|\dot{w}(t)\|^2 + \frac{d}{dt}(\mathfrak{A}w, w) = (\dot{\mathfrak{A}}w, w) + (\mathfrak{A}_1 w, \dot{w}). \tag{4.14}$$

Интегрируя (4.14) по t и используя (3.40), получим (4.7). □

Лемма 4.3. *Для любой функции $w \in H^{1/2}(\Gamma \times [0,1])$, удовлетворяющей* (3.38), (3.40), *справедливо неравенство*

$$|(\dot{w}(t), \mathfrak{A}_1(t)w(t))| \leqslant c\left(\|w(0)\|^2 + \int\limits_0^t (\|\dot{w}(\tau)\|^2 + \|w(\tau)\|^2_{H^1(\Gamma)})d\tau\right), \tag{4.15}$$

где $\mathfrak{A}_1(t)$ — дифференциальный оператор первого порядка на Γ (см. (4.8)), *а c — константа, не зависящая от w.*

Доказательство. Умножая скалярно обе части равенства (3.38) на $\mathfrak{A}_1(t)w(t)$, получим

$$(\ddot{w}(t), \mathfrak{A}_1(t)w(t)) = -(\mathfrak{A}(t)w(t), \mathfrak{A}_1(t)w(t)). \tag{4.16}$$

Преобразуем левую часть (4.16). Интегрируя по частям по t и используя (3.40), находим

$$\int\limits_0^t (\ddot{w}(\tau), \mathfrak{A}_1 w(\tau))d\tau = (\dot{w}(t), \mathfrak{A}_1(t)w(t)) + (\beta w(0), \mathfrak{A}_1 w(0))$$
$$- \int\limits_0^t ((\dot{w}, \dot{\mathfrak{A}}_1 w) + (\dot{w}, \mathfrak{A}_1 \dot{w}))d\tau. \tag{4.17}$$

Покажем, что

$$|(\mathfrak{A}(t)w(t), \mathfrak{A}_1(t)w(t))| \leqslant c\,\|w(t)\|^2_{H^1(\Gamma)}, \tag{4.18}$$

где c не зависит от $w(t)$. Достаточно оценить совокупность членов оператора $\mathfrak{A}$, содержащих производные второго порядка, и оператора $\mathfrak{A}_1$, содержащих члены первого порядка. На самом деле, достаточно оценить член вида

$$I = \int\limits_{\mathcal{U}_k} \sum_{i,j=1}^{d-1} \partial_j(a_{ij}\partial_i(\varphi_k w))b_l\partial_l w J_k dx,$$

записанный в локальных координатах $x = x^{(k)}$. Имеем

$$I = \int\limits_{\mathcal{U}_k} \varphi_k \sum_{i,j=1}^{d-1} \partial_j(a_{ij}\partial_i w)b_l\partial_l w J_k dx + I_1, \tag{4.19}$$

где I_1 — интеграл от суммы членов, содержащих либо w, либо первые производные $\partial_j w$ и зависящих от w, $\partial_j w$ квадратичным образом. Поэтому I_2 легко оценивается сверху через $c\|w\|^2_{H^1(\Gamma)}$. Интегрируя по частям в интеграле из (4.19), перебросим производные $\partial_j\partial_i$ на $b_l\partial_l w J_k$, а затем производную ∂_l — с ∂^3_{lij} на оставшийся сомножитель подынтегрального выражения. При этом внеинтегральные члены равны нулю, так как $\operatorname{supp}\varphi_k \subset \mathcal{U}_k$. В результате получим равенство

$$\int\limits_{\mathcal{U}_k} \varphi_k \sum_{i,j=1}^{d-1} \partial_j(a_{ij}\partial_i w) b_l \partial_l w J_k dx = -\int\limits_{\mathcal{U}_k} \varphi_k \sum_{i,j=1}^{d-1} \partial_i(a_{ij}\partial_j w) b_l \partial_l w J_k dx + I_2 \tag{4.20}$$

где I_2 — интеграл от суммы членов, содержащих w и первые производные $\partial_j w$ квадратичных по w, $\partial_j w$. В силу симметричности матрицы a_{ij} из (4.20) и (4.19) следует, что $I = I_1 + (1/2)I_2$. Интегралы I_1 и I_2 оцениваются сверху через $c\,\|w(t)\|_{H^1(\Gamma)}$. Покажем, что

$$|(\dot w(t), \mathfrak{A}_1(t)\dot w(t))| \leqslant c\,\|\dot w(t)\|^2. \tag{4.21}$$

Для доказательства (4.21) достаточно оценить член вида:

$$I = \int\limits_{\mathcal{U}_k} \psi_k \dot w b_j \partial_j \dot w J_k dx.$$

Имеем

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{U}_k} \partial_j \dot w^2 b_j \varphi_k J_k dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{U}_k} \dot w^2 \partial_j (b_j \varphi_k J_k)\, dx.$$

Последний интеграл легко оценивается сверху через $c\,\|\dot w\|^2$. Аналогично (4.21) устанавливается оценка

$$|(\beta(0)w(0), \mathfrak{A}_1(0)w(0))| \leqslant c\,\|w(0)\|^2. \tag{4.22}$$

Подставляя (4.16) в (4.17) получим, что

$$(\dot w(t), \mathfrak{A}_1(t)w(t)) = -(\beta(0)w(0), \mathfrak{A}_1(0)w(0)) + \int\limits_0^t [(\dot w, \dot{\mathfrak{A}}_1 w)$$
$$+ (\dot w, \mathfrak{A}_1 \dot w) - (\mathfrak{A} w, \mathfrak{A}_1 w)] d\tau. \tag{4.23}$$

Оценивая правую часть (4.23) с помощью (4.18), (4.21), (4.22), получим (4.15). □

4.3. Доказательство теоремы 4.1. Приступим к доказательству неравенства (4.5). В силу (3.38) имеем $(\ddot w(t), w(t)) = -(\mathfrak{A}(t)w(t), w(t))$. Используя

это соотношение и (4.7), получим

$$\frac{(\ddot{w}(t),w(t))-\|\dot{w}(t)\|^2}{\|w(t)\|^2}$$
$$=\frac{-(\mathfrak{A}(0)w(0),w(0))-\|\beta w(0)\|^2-\int\limits_0^t[(\dot{\mathfrak{A}}w,w)+(\dot{w},\mathfrak{A}_1w)]d\tau}{\|w(t)\|^2}. \tag{4.24}$$

Для оценки снизу правой части (4.24) докажем неравенство

$$-(\dot{\mathfrak{A}}(t)w(t),w(t))\geqslant -c\,\|w(t)\|^2, \tag{4.25}$$

где константа c на зависит от $w(t)$ и t. Из (3.39), интегрируя по частям и дифференцируя произведение функций, находим

$$-(\dot{\mathfrak{A}}(t)w(t),w(t))=\sum_k\int\limits_{\mathcal{U}_k}\sum_{i,j=1}^{d-1}\varphi_k\dot{a}_{ij}^{(k)}\partial_iw\partial_jwJ_kdx^{(k)}$$
$$+\int\limits_{\mathcal{U}_k}w\left(\sum_{j=1}^{d-1}g_j^{(k)}\partial_jw+g_0^{(k)}w\right)dx^{(k)}, \tag{4.26}$$

где $g_j^{(k)}(x^{(k)},t)$ — гладкие функции, имеющие при любом $t\in[0,1]$ компактный носитель в $\mathcal{U}_k$. Оценивая первый интеграл в правой части (4.26) с помощью условия 3.1, а второй интеграл — с помощью (4.21), получим (4.25).

Аналогично (4.25) устанавливается неравенство

$$-(\mathfrak{A}(0)w(0),w(0))-\|\beta w(0)\|^2\geqslant -c\,\|w(0)\|^2. \tag{4.27}$$

Оценивая правую часть (4.24) с помощью (4.27), (4.25), (4.15), получим неравенство

$$\frac{(\ddot{w}(t),w(t))-\|\dot{w}(t)\|^2}{\|w(t)\|^2}$$
$$\geqslant -c\,\frac{\|w(0)\|^2+\int\limits_0^t\|w(\tau)\|^2d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau(\|\dot{w}(\xi)\|^2+\|w(\xi)\|^2_{H^1(\Gamma)})d\xi d\tau}{\|w(t)\|^2}. \tag{4.28}$$

Функция $w(\tau)$, $\tau\in(0,t)$, удовлетворяет уравнению (3.38), краевому условию (3.40) и очевидному условию

$$w(\tau)\big|_{\tau=t}=w(t). \tag{4.29}$$

В силу условия 3.2 ядро краевой задачи (3.38), (3.40), (4.29) равно нулю. Поэтому из общей теории эллиптических краевых задач следует, что для $w(t)$ справедлива оценка

$$\|w\|_{H^s(\Gamma\times(0,t))}\leqslant c_s\,\|w(t)\|_{H^{s-1/2}(\Gamma)},\quad s\geqslant 0, \tag{4.30}$$

где c_s — константа. Из (4.30) следует, что

$$\int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau \leqslant c_0 \|w(t)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqslant cc_0 \|w(t)\|. \tag{4.31}$$

Полагая в (4.30) $s = 1$, а затем $s = 1/2$, получим

$$\int_0^t \int_0^\tau (\|\dot{w}(\xi)\|^2 + \|w(\xi)\|^2_{H^1(\Gamma)}) d\xi d\tau \leqslant \int_0^t c_1 \|w(\tau)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} d\tau$$
$$\leqslant c \|w\|_{H^{1/2}(\Gamma\times[0,t])} \leqslant cc_{1/2} \|w(t)\|. \tag{4.32}$$

Наконец, из теоремы о следах функций и (4.30) при $s = 1/2$ находим

$$\|w(0)\| \leqslant c \|w\|_{H^{1/2}(\Gamma\times(0,t))} \leqslant cc_{1/2} \|w(t)\|. \tag{4.33}$$

Из (4.28), (4.31)–(4.33) следует неравенство (4.5). □

4.4. Доказательство теоремы 2.2. Положим

$$w_1(t) = w(t)Q(t) \tag{4.34}$$

где $Q(t) = Q(\cdot, t)$ — функция, определенная в (3.36), (3.41). Так как $0 < \alpha_0 \leqslant Q(t) \leqslant \alpha_1$, для функции w_1 вследствие (4.3) справедливо неравенство

$$\|w_1(t)\|^2 \leqslant c_1 \|w_1(0)\|^{2(1-t)} \|w_1(t)\|^{2t}. \tag{4.35}$$

Пусть $\mathrm{Cyl} = \Gamma \times (0,1)$ — цилиндр, $\Phi : \Omega \to \mathrm{Cyl}$ — диффеоморфизм, являющийся суперпозицией диффеоморфизмов, использованных в пп. 3.1–3.4. Очевидно, что $\Phi(x)$, $x \in \Omega$, представимо в виде $\Phi(x) = (p(x), \theta(x))$, где $p(x) \in \Gamma$, $\theta(x) \in (0,1)$. Непосредственно из определения Φ следует, что $\theta(x)$ удовлетворяет (2.26), а множество $\varkappa(t)$, определенное в (2.27), при любом $t \in (0,1)$ является многообразием, диффеоморфным Γ. Функция $w_1(p,t)$ при преобразовании Φ переходит в функцию $w_2(x) = w_1(\Phi(x))$, определенную на Ω и удовлетворяющую соотношениям (1.1), (1.2). Кроме того,

$$\|w_1(t)\|^2 = \int_\Gamma |w_1(p,t)|^2 dS = \int_{\varkappa_t} |w_2|^2 J_t^{-1} dS, \tag{4.36}$$

где J_t^{-1} — якобиан невырожденного преобразования. Поэтому $0 < \gamma_0 < J_t^{-1} < \gamma_1$.

Из (4.35), (4.36) следует неравенство

$$\int_{\varkappa_t} |w_2|^2 dS \leqslant c_2 \left(\int_{\Gamma_1} |w_2|^2 dS \right)^{2(1-t)} \left(\int_{\Gamma_2} |w_2|^2 dS \right)^{2t},$$

совпадающее с первым неравенством в (2.28). □

§ 5. Определение квазирешения

В этом параграфе с помощью решения некоторой экстремальной задачи строится одна из функций, удовлетворяющих соотношениям (1.1)–(1.4). Эта функция называется *квазирешением* задачи (1.1)–(1.4).

5.1. Определение квазирешения. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|\gamma_1 u - u_0\|^2_{L_2(\Gamma)} \to \inf \tag{5.1}$$

на классе функций $u \in H^{1/2}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям

$$Au = 0, \tag{5.2}$$

$$\gamma_1(\partial_{n_A} u + \beta u) = 0, \tag{5.3}$$

$$\|\gamma_2 u\|^2_{L_2(\Gamma_2)} \leqslant M^2. \tag{5.4}$$

Соотношения (5.2), (5.3), (5.4) совпадают соответственно с (1.1), (1.2), (1.4). Через γ_j, $j = 1, 2$, обозначен оператор сужения функции $u(x)$, $x \in \Omega$, на Γ_j. Предполагается, что функция $u_0 \in L_2(\Gamma_1)$ из (5.1) задана и совпадает с функцией u_0 из (1.3). При $s \geqslant 0$ положим

$$H^s_A(\Omega) = \{u \in H^s(\Omega) : Au \in L_2(\Omega), \gamma_2(\partial_{n_A} u + \beta u) = 0\}. \tag{5.5}$$

Введем множество

$$\mathfrak{A} = \{u \in H^{1/2}_A : Au = 0,\ \|\gamma_2 u\|^2_{L_2(\Gamma_2)} \leqslant M^2\}. \tag{5.6}$$

Иными словами, $\mathfrak{A}$ — это множество допустимых элементов задачи (5.1)–(5.4), т. е. функций $u \in H^{1/2}(\Omega)$, удовлетворяющих (5.2)–(5.4). Напомним, что *решением* задачи (5.1)–(5.4) называется функция $\widehat{u} \in \mathfrak{A}$ такая, что

$$\|\gamma_1 \widehat{u} - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} = \inf_{u \in \mathfrak{A}} \|\gamma_1 u - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \equiv S_0. \tag{5.7}$$

Теорема 5.1. *Для любой функции $u_0 \in L_2(\Gamma_1)$ существует решение $\widehat{u}$ задачи* (5.1)–(5.4).

Доказательство.[3] Так как $0 \in \mathfrak{A}$, имеем $\mathfrak{A} \neq \varnothing$. Поэтому существует последовательность $u_k \in \mathfrak{A}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\gamma_1 u_n - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} = S_0, \tag{5.8}$$

где S_0 — число из (5.7). Из условия 1.2, общих оценок для решений эллиптических краевых задач (Лионс, Мадженес [2]) и включения $u_n \in \mathfrak{A}$ следует, что

$$\|u_k\|_{H^{1/2}(\Omega)} \leqslant c(\|\gamma_1(\partial_{n_A} u_k + \beta u_k)\|_{H^{-1}(\Gamma_1)} + \|\gamma_2 u_k\|_{L_2(\Gamma_1)}) \leqslant c_1, \tag{5.9}$$

причем c_1 не зависит от k. Следовательно, можно считать, что

$$u_k \to \widehat{u}\ (k \to \infty) \text{ слабо в } H^{1/2}(\Omega). \tag{5.10}$$

[3] Мы даем прямое доказательство существования решения, хотя можно было бы воспользоваться результатами гл. 1, § 2.

Из (5.10) последовательно выводим $A\widehat{u} = 0$, $\gamma_1(\partial_{n_A}\widehat{u} - \beta\widehat{u}) = 0$,

$$\gamma_1 u_k \to \gamma_1\widehat{u} \text{ слабо в } L_2(\Gamma_1), \quad \gamma_1 u_k \to \gamma_2\widehat{u} \text{ слабо в } L_2(\Gamma_2). \tag{5.11}$$

Из (5.8), (5.11) следует, что $\|\gamma_2\widehat{u}\|^2_{L_2(\Gamma_2)} \leqslant M^2$ и $\|\gamma_1\widehat{u} - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} = S_0$, т. е. $\widehat{u}$ — решение задачи (5.1)–(5.4). □

Предложение 5.1. *Если $\widehat{u}$ — решение задачи* (5.1)–(5.4), *то $\widehat{u}$ удовлетворяет соотношениям* (1.1)–(1.4).

Доказательство. Очевидно, что для $\widehat{u}$ справедливы соотношения (1.1), (1.2), (1.4). В силу условия 1.3 существует функция $u \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющая (1.3). Поскольку $\widehat{u}$ — решение задачи (5.1)–(5.4), заключаем, что

$$\|\gamma_1\widehat{u} - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \leqslant \|\gamma_1 u - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \leqslant \varepsilon^2.$$

□

Таким образом, теорема 5.1 дает возможность определять функцию, удовлетворяющую условиям (1.1)–(1.4).

Определение 5.1. Решение $\widehat{u}$ задачи (5.1)–(5.4) называется *квазирешением* задачи (1.1)–(1.4).

5.2. Система оптимальности для квазирешения. Выпишем необходимые условия минимума для задачи (5.1)–(5.4) и тем самым найдем краевую задачу, которой удовлетворяет квазирешение.

Теорема 5.2. *Пусть $u \in H^{1/2}_A(\Omega)$ — решение задачи* (5.1)–(5.4). *Тогда существуют $p \in G^0_{A^*} = \{p \in H^0(\Omega) : A^*p \in L_2(\Omega)\}$ и λ такие, что*

$$Au(x) = 0, \quad A^*p(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{5.12}$$

$$\gamma_1(\partial_{n_A}u + \beta u) = 0, \quad \gamma_1(\partial_{n_A}p + [\beta + (b,n)]p + u) = u_0, \tag{5.13}$$

$$\gamma_2 p = 0, \quad \gamma_2(\partial_{n_A}p + \lambda u) = 0, \tag{5.14}$$

$$\lambda \geqslant 0, \quad \lambda(\|\gamma_2 u\|^2_{L_2(\Gamma_2)} - M^2) = 0, \tag{5.15}$$

где A и A^* операторы (1.1) и (1.9) *соответственно, ∂_{n_A} — дифференцирование по конормали (1.2′), β, u_0 — функции из* (1.2), (1.3), $(b,n) = \sum b_j n_j$, *b_j — коэффициенты из* (1.1), *$n = (n_1, \ldots, n_d)$ — внешняя нормаль к Γ_1.*

Доказательство. Для вывода (5.12)–(5.15) применим принцип Лагранжа (точнее, теорему 2.1.9). Покажем, что задача (5.1)–(5.4) является частным случаем задачи (2.1.50) и поэтому удовлетворяет условиям теоремы 2.1.9.

Положим $X_1 = H^{1/2}_A(\Omega)$, $X_2 = L_2(\Omega)$, $f(u) = \|\gamma_1 u - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)}$, $g_1(u) = \|\gamma_2 u\|^2_{L_2(\Gamma_2)} - M^2$, $Fu = Au$, где A — оператор (1.1). По теореме о непрерывности операторов следа $\gamma_j\colon H^{1/2}_A \to H^0(\Gamma_j)$ (см. Лионс, Мадженес [2]) функционалы $f(u)$, $g_1(u)$ непрерывно дифференцируемы. Непрерывность $F\colon H^{1/2}_A(\Omega) \to L_2(\Omega)$ следует из определения (5.5) пространства $H^{1/2}_A(\Omega)$. Из эллиптической теории (см. Лионс, Мадженес [2]) и условия 1.3 следует

разрешимость в $H^2(\Omega) \subset H_A^{1/2}(\Omega)$ задачи

$$Ah = q, \quad \gamma_1(\partial_{\gamma_A} h + \beta h) = 0, \quad \gamma_2 h = 0 \tag{5.16}$$

при любом $q \in L_2(\Omega)$. Поэтому $\operatorname{Im} F = X_2 = L_2(\Omega)$. Таким образом, к задаче (5.1)–(5.4) можно применить принцип Лагранжа. Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(u,p,\lambda) = \frac{\lambda_0}{2}\int\limits_{\Gamma_1} |u(x') - u_0(x')|^2 dS + \frac{\lambda_1}{2}\int\limits_{\Gamma_2} |u(x')|^2 dS + \int\limits_{\Omega} Au \cdot p\, dx, \tag{5.17}$$

где $p \in L_2(\Omega)$, а соотношение (2.1.51) записывается следующим образом:

$$\int\limits_{\Gamma_1} \lambda_0(u(x') - u_0(x'))h(x')dS + \int\limits_{\Gamma_2} \lambda_1 uhdS + \int\limits_{\Omega} Ahp\, dx = 0 \quad \forall h \in H_A^{1/2}(\Omega), \tag{5.18}$$

где u — решение задачи (5.1)–(5.4). Согласно (2.1.52)

$$\lambda_0 \geqslant 0, \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_1(\|\gamma_2 u\|^2_{L_2(\Gamma_1)} - M^2) = 0. \tag{5.19}$$

Докажем, что $\lambda_0 \neq 0$. Предположим противное, т. е., $\lambda_0 = 0$. В силу условия 1.2′ для любого $q \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $h \in H^2(\Omega)$ краевой задачи $Ah = q$, $\gamma_1 h = 0$, $\gamma_2 h = 0$. Подставляя h в (5.18), получаем

$$\int\limits_{\Omega} qp\, dx = 0 \quad \forall q \in L_2(\Omega),$$

откуда следует $p = 0$. В результате из (5.18) вытекает равенство

$$\lambda_1(\gamma_2 u, \gamma_2 h)_{L_2(\Gamma_2)} = 0 \quad \forall h \in H_A^{1/2}(\Omega). \tag{5.20}$$

Так как отображение γ_2: $H_A^{1/2}(\Omega) \to L_2(\Omega)$ является эпиморфизмом (см. Лионс, Мадженес [2, с. 215, 216]), из (5.20) следует, что либо $\lambda_1 = 0$, либо $\gamma_2 u = 0$. Из второго случая следует первый ввиду (5.19). Однако равенство $\lambda_1 = 0$ противоречит принципу Лагранжа, согласно которому не все множители Лагранжа λ_0, λ_1, p равны нулю. Итак, $\lambda_0 \neq 0$, и можно считать, что $\lambda_0 = 1$. Для упрощения обозначений положим $\lambda_1 = \lambda$. Из (5.18) при $h \in C_0^\infty(\Omega)$ следует, что в смысле теории обобщенных функций справедливо второе равенство в (5.12). Вследствие принципа Лагранжа и (5.12) $p \in G^0_{A^*} = \{p \in H^0(\Omega) : A^*p \in L_2(\Omega)\}$. Поэтому (см. Лионс, Мадженес [2]) для p определены следы $\gamma_j p \in H^{-1/2}(\Gamma_j)$, $\gamma_j \partial_{n_A} p \in H^{-3/2}(\Gamma_j)$, $j = 1, 2$, и справедлива формула Грина

$$\int\limits_{\Omega} (Ahp - hA^*p)\, dx = \int\limits_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} [h\partial_{n_A} p - p\partial_{n_A} h + (b,n)ph]dS. \tag{5.21}$$

Подставляя в (5.21) выражение для $\int Ahp\, dx$, полученное из (5.18) при $h \in H^2(\Omega) \cap H_A^{1/2}(\Omega)$, и учитывая (5.12) и равенство $\gamma_1 \partial_{n_A} h = -\gamma_1 \beta h$, спра-

ведливое для $h \in H_A^{1/2}(\Omega)$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma_1} (\partial_{n_A} p + [\beta + (b,n)]p + (u - u_0))h dS$$
$$+ \int\limits_{\Gamma_2} [(\partial_{n_A} p + (b,n)p + \lambda u)h - p\partial_{n_A} h] dS = 0. \tag{5.22}$$

Для $h \in H^2(\Omega) \cap H_A^{1/2}(\Omega)$, $\gamma_2 h = \gamma_2 \partial_{n_A} h = 0$, из (5.22) получим второе соотношение в (5.13). Первое равенство в (5.13) совпадает с (1.2). Аналогично из (5.22) получаем (5.14). Соотношения (5.15) следуют из (5.19). □

Следствие 5.1. *Пусть* $u \in H_A^{1/2}(\Omega)$, $p \in G_{A^*}^0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *удовлетворяют соотношениям* (5.12)–(5.15) *и* $u_0 \in H^\alpha(\Gamma_1)$, $\alpha \geqslant 0$. *Тогда* $u \in C^\infty(\Omega \cup \Gamma_1)$ *и* $p \in C^\infty(\Omega \cup \Gamma_1) \cap H^{\alpha+3/2}(\Omega)$. *Если* $\lambda > 0$, *то* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Из (5.12) и теорем о гладкости решений эллиптических уравнений второго порядка следует, что $u \in C^\infty(\Omega)$, $p \in C^\infty(\Omega)$. В силу (5.12_1), (5.13_1) функция $u(x)$ бесконечно дифференцируема вплоть до Γ_1: $u \in C^\infty(\Omega \cup \Gamma_1)$. Из этого включения, ($5.12_2$), ($5.13_2$), ($5.14_1$) получаем, что $p \in C^\infty(\Omega \cup \Gamma_2) \cap H^{\alpha+3/2}(\Omega)$. Если $\lambda > 0$, то из включения $p \in C^\infty(\Omega \cup \Gamma_2)$ и соотношений (5.12_1), (5.13_1), (5.14_2) следует $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. □

С помощью следствия 5.1 легко устанавливается единственность решения задачи (5.1)–(5.4).

Предложение 5.2. *Решение* $u \in H_A^{1/2}(\Omega)$ *задачи* (5.1)–(5.4) *единственно.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 ($u_1 \neq u_2$) — решения задачи (5.1)–(5.4). В силу теоремы 5.2 и следствия 5.1 имеем $u_j \in C^\infty(\Omega \cup \Gamma_1)$. Из теоремы Кальдерона о единственности решений задачи Коши (Мизохата [1, с. 261]) следует, что $\gamma_1 u_1 \neq \gamma_1 u_2$. Очевидно, что $(u_1 + u_2)/2 \in \mathfrak{A}$ (см. (5.6)). Ввиду строгой выпуклости квадрата гильбертовской нормы имеем $\|(\gamma_1 u_1 + \gamma_1 u_2)/2 - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} < \dfrac{1}{2}(\|\gamma_1 u_1 - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} + \|\gamma_1 u_2 - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)}) = S_0$, где S_0 определено в (5.7). Но это неравенство противоречит предположению, что u_1 и u_2 — решения задачи (5.1)–(5.4). □

Таким образом, квазирешение задачи (5.1)–(5.4) определяется однозначно.

§ 6. Построение квазирешения

В этом параграфе исследуется система оптимальности, соответствующая квазирешениям. В итоге получен некоторый способ построения квазирешения.

6.1. Вспомогательные предложения. Цель этого параграфа — указать способ построения квазирешения u. Этот способ использует соотношения (5.12)–(5.15). Задача (5.12)–(5.15) является нелинейной, однако, если $\lambda > 0$

известно, то для нахождения (u,p) достаточно решить линейную краевую задачу (5.12)–(5.14). Легко проверить, что эта задача является эллиптической. Поэтому известно много методов ее решения. Таким образом, при решении задачи (5.12)–(5.15) основная сложность состоит в определении λ. В дальнейшем нам понадобятся следующие операторы.

Разрешающий оператор G_1 краевой задачи

$$Au = 0, \quad \gamma_1(\partial_{n_A} u + \beta u) = 0, \quad \gamma_2 u = v, \tag{6.1}$$

т. е. непрерывный оператор $G_1 : H^s(\Gamma_2) \to H_A^{s+1/2}(\Omega)$, сопоставляющий краевому условию v решение u задачи (6.1) ($G_1 v = u$). Существование оператора G_1 вытекает из условия 1.2.

Разрешающий оператор G_2 задачи

$$A^* p = 0, \quad \gamma_2 p = 0, \quad \gamma_1(\partial_{n_A} p + (\beta + (b,n))p) = \psi \tag{6.2}$$

(т. е. $G_2\psi = p$, p, ψ — функции из (6.2)).

Лемма 6.1. *Разрешающий оператор G_2 задачи (6.2) существует и непрерывно действует из $H^s(\Gamma_1)$ в пространство $H_{A^*}^{s+3/2}(\Omega)$, где*

$$H_{A^*}^s(\Omega) = \{p \in H^s(\Omega) : Ap \in L_2(\Omega),\ \gamma_2 p = 0\}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что при любом $\psi \in H^s(\Gamma_1)$, $s \geqslant 0$, существует единственное решение $p \in H^{s+3/2}(\Omega)$ задачи (6.2). Докажем единственность решения. Для этого предположим, что существует отличное от нуля решение $\widehat{p} \in H^{s+3/2}$ задачи (6.2) при $\psi = 0$. Подставляя $w = \widehat{p}$ в формулу Грина (1.10) и учитывая (6.2) при $\psi = 0$, находим

$$\int\limits_\Omega Au\widehat{p}\,dx = \int\limits_{\Gamma_2} u\partial_{n_A}\widehat{p}dS - \int\limits_{\Gamma_1} \widehat{p}(\partial_{n_A} u + \beta u)dS. \tag{6.4}$$

Рассмотрим класс функций $H_{A,0}^{1/2} = \{u \in H_A^{1/2}(\Omega) : \gamma_2 u = 0\} \equiv \{u \in H^{1/2}(\Omega) : Au \in L_2(\Omega), \gamma_1(\partial_{n_A} u + \beta u) = 0, \gamma_2 u = 0\}$. В силу (6.4)

$$\int\limits_\Omega Au\widehat{p}\,dx = 0 \quad \forall u \in H_{A,0}^{1/2}.$$

Поэтому $\dim \operatorname{Coker} A > 0$ для оператора A: $H_{A,0}^{1/2} \to L_2(\Omega)$ Так как $\dim \operatorname{Ker} A = 0$ в силу условия 1.2, имеем $\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A < 0$, что противоречит известному равенству $\operatorname{ind} A = 0$. Таким образом, ядро задачи (6.2) нулевое. Так как индекс задачи (6.2) равен нулю, задача разрешима при любом $\psi \in H^s(\Gamma_1)$. □

6.2. Основная теорема.

Теорема 6.1. *Пусть $u_0 \in H^s(\Gamma_1)$, $s \geqslant 0$. Тогда при любом $\lambda > 0$ существует единственное решение $(u_\lambda, p_\lambda) \in H^{s+1/2}(\Omega) \times H^{s+3/2}(\Omega)$ задачи (5.12)–(5.14). При этом функция $\lambda \mapsto \|\gamma_2 u_\lambda\|^2_{L_2(\Gamma_1)}$ монотонно убывает и $\|\gamma_2 u_\lambda\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \to 0$ при $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. Будем искать решение (u,p) задачи (5.12)–(5.14) в виде

$$u = G_1 v, \quad p = G_2(u_0 - \gamma_1 G_1 v) \tag{6.5}$$

где G_1 и G_2 — разрешающие операторы задач (6.1) и (6.2) соответственно. Подставляя (6.5) в (5.14_2), получим следующее уравнение относительно v:

$$\lambda v - \gamma_2 \partial_{\gamma_A} G_2 \gamma_1 G_1 v = -\gamma_2 \partial \gamma_A G_2 u_0. \tag{6.6}$$

Положим

$$R = \gamma_1 G_1 \colon H^0(\Gamma_2) \to H^0(\Gamma_1). \tag{6.7}$$

Покажем, что оператор R^*, сопряженный к оператору (6.7), определяется по формуле

$$R^* = -\gamma_2 \partial_{n_A} G_2 \colon H^0(\Gamma_1) \to H^0(\Gamma_2). \tag{6.8}$$

Действительно, подставляя функции $u = G_1 v$, $w = G_2 \psi$ в формулу Грина (1.10), учитывая определение операторов G_1, G_2 (см. (6.1), (6.2)) и определение (6.7) оператора R, получим

$$\int\limits_{\Gamma_1} Rv \cdot \psi dS = -\int\limits_{\Gamma_2} v \cdot \gamma_2 \partial_{n_A} G_2 \psi dS. \tag{6.9}$$

Соотношение (6.9) справедливо при любых $v \in H^0(\Gamma_2)$, $\psi \in H^0(\Gamma_1)$, поэтому из него следует (6.8). Таким образом, в силу (6.7), (6.8) соотношение (6.6) можно переписать в виде

$$\lambda v + R^* R v = R^* u_0. \tag{6.10}$$

Оператор $R^*R\colon H^0(\Gamma_2) \to H^0(\Gamma_2)$ — самосопряженный неотрицательный оператор. Из теорем о гладкости решений эллиптических краевых задач (6.1), (6.2) следует полная непрерывность операторов (6.7), (6.8) а, следовательно, и оператора $R^*R\colon H^0(\Gamma_2) \to H^0(\Gamma_2)$.

Наконец, покажем, что $\operatorname{Ker} R^*R = 0$. Пусть $R^*Rv = 0$, т. е. $R^*\psi = 0$, где $\psi = Rv$. Вследствие (6.8), (6.2)

$$-\gamma_2 \partial_{n_A} p = 0, \quad \gamma_2 p = 0, \quad p = G_2 \psi, \text{ т. е. } A^* p = 0. \tag{6.11}$$

В силу (6.2) и теоремы о гладкости решений эллиптических краевых задач имеем $p \in C^\infty(\Omega)$. В силу (6.11) и теоремы Кальдерона (см. Мизохата [1]) $p \equiv 0$. Вследствие (6.2) $\psi = \gamma_1(\partial_{n_A} p + (\beta + (b,n)p)) = 0$. Таким образом, $Rv = \gamma_1 G_1 v = 0$. Как и выше, из этого равенства, (6.1) и теоремы Кальдерона заключаем, что $v \equiv 0$, т. е. $\operatorname{Ker} R^*R = 0$.

По теореме Гильберта — Шмидта в пространстве $H^0(\Gamma_2)$ существует ортонормированный базис $\{e_j\}$ из собственных векторов оператора R^*R:

$$R^* R e_k = \mu_k^2 e_k, \quad \mu_k > 0, \ \mu_k \downarrow 0 \text{ при } k \uparrow \infty. \tag{6.12}$$

Кроме того, известно (Гохберг, Крейн [1, с. 48]), что в $H^0(\Gamma_1)$ существует ортонормированный базис $\{\widehat{e}_j\}$ такой, что для любого $\varphi \in H^0(\Gamma_1)$

$$R^*\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \widehat{\varphi}_k e_k\,, \quad \widehat{\varphi}_k = (\varphi, \widehat{e}_k)_{H^0(\Gamma_1)}\,, \tag{6.13}$$

где μ_k и e_k определены в (6.12). Из (6.10), (6.12), (6.13) получаем

$$v = v_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k \widehat{u}_{0,k}}{\lambda + \mu_k^2} e_k\,, \quad \widehat{u}_{0,k} = (u_0, \widehat{e}_k)_{H^0(\Gamma_1)}\,. \tag{6.14}$$

В силу (6.5), (6.14) при $\lambda > 0$ для каждого $u_0 \in H^0(\Gamma_1)$ существует единственное решение $(u,p) \in H^{1/2}(\Omega) \times H^{3/2}(\Omega)$ задачи (5.12)–(5.14).

Из (6.2), (6.8) и теоремы о гладкости решений эллиптических краевых задач следует, что для любых $u_0 \in H^0(\Gamma_1)$, $v \in H^0(\Gamma_2)$ $R^*u_0 \in C^\infty(\Gamma_2)$, $R^*Rv \in C^\infty(\Gamma_2)$. Поэтому в силу (6.10) $v \in C^\infty(\Gamma_2)$, откуда в силу (6.5) имеем

$$u \in H^\alpha(\Omega) \ \ \forall \alpha > 0; \quad p \in H^{3/2+s}(\Omega), \text{ если } u_0 \in H^s(\Gamma_1),\ s \geqslant 0. \tag{6.15}$$

Из (6.15) следует однозначная разрешимость в $H^{1/2+s}(\Omega) \times H^{3/2+s}(\Omega)$ задачи (5.12)–(5.14), если $\lambda > 0$, $u_0 \in H^s(\Gamma_1)$. В силу (6.14) справедливо равенство

$$\|v_\lambda\|^2_{L_2(\Gamma_1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 |\widehat{u}_{0,k}|^2}{(\lambda + \mu_k^2)^2}\,,$$

из которого сразу вытекают последние утверждения теоремы 6.1. □

6.3. Метод построения квазирешений. Положим

$$g(\lambda) = \|v_\lambda\|^2_{L_2(\Gamma_1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 |\widehat{u}_{0,k}|^2}{(\lambda + \mu_k^2)^2}\,, \ \alpha^2 = \lim_{\lambda \to 0} g(\lambda). \tag{6.16}$$

Так как $g(\lambda)$ — монотонно убывающая функция, предел в (6.16), обозначенный α^2, существует, причем $0 < \alpha^2 \leqslant \infty$. Рассмотрим возможные случаи:

Случай (a). $M^2 < \alpha^2$. Существует единственное решение $\widehat{\lambda}$ уравнения

$$g(\lambda) = M^2, \tag{6.17}$$

и это решение положительно ($\widehat{\lambda} > 0$). Очевидно, что решение задачи (5.12)–(5.15) единственно и определяется формулой $(u,p,\lambda) = (u_{\widehat{\lambda}}, p_{\widehat{\lambda}}, \widehat{\lambda})$, где $\widehat{\lambda} > 0$ — единственный корень уравнения (6.17), а $u_{\widehat{\lambda}}$ и $p_{\widehat{\lambda}}$ определяются формулой (6.5), в которой $v = v_{\widehat{\lambda}}$, тогда как $v_{\widehat{\lambda}}$ задается формулой (6.14) при $\lambda = \widehat{\lambda}$.

Случай (b). $M^2 \geqslant \alpha^2$. Тогда у уравнения (6.17) нет положительных корней и для решения (u,p,λ) задачи (5.12)–(5.15) число λ определяется однозначно, причем $\lambda = 0$. Существование решения задачи (5.12)–(5.15) следует из теоремы 5.1. Поэтому существует также решение v уравнения (6.10) при $\lambda = 0$, откуда $R^*(Rv - u_0) = 0$. Из этого равенства, как и выше

(см. (6.11)), получаем, что

$$u_0 = Rv; \quad \|v\|^2_{L_2(\Gamma_2)} \leqslant M^2. \tag{6.18}$$

Из (6.18) следует существование решения $u \in C^\infty(\Omega)$ задачи

$$Au = 0,\ x \in \Omega, \quad \gamma_1(\partial_{n_A} u + \beta u) = 0,\ \gamma_1 u = u_0, \tag{6.19}$$

так как в силу определения оператора R та же самая функция u является решением краевой задачи $Au = 0$, $x \in \Omega$, $\gamma_1(\partial_{n_A} u + \beta u) = 0$, $\gamma_2 u = v$. В силу теоремы Кальдерона функция u определяется из (6.19) однозначно. Функция p, которая вместе с построенными u и λ удовлетворяет соотношениям (5.12)–(5.15), определяется однозначно, причем $p \equiv 0$. Таким образом, доказана

Теорема 6.2. *При любом $u_0 \in H^s(\Gamma_1)$ существует единственное решение $(u, p, \lambda) \in H^{1/2+s}(\Omega) \times H^{3/2+s}(\Omega) \times R$ задачи* (5.12)–(5.15).

Замечание 6.1. В этом параграфе, помимо доказательства однозначной разрешимости задачи (5.12)–(5.15), т. е. теоремы 6.2, предложен метод построения решения этой задачи. Возможно, этот метод может быть положен в основу численного алгоритма построения квазирешения задачи (1.1)–(1.4). Действительно, пусть начальное условие u_0 задачи (1.1)–(1.4) такое, что $M^2 < \alpha^2$, т. е. u_0 не удовлетворяет (6.18). Очевидно, что это случай общего положения, и в этом случае у уравнения (6.17) имеется решение $\widehat{\lambda} > 0$. При решении задачи (5.12)–(5.15) в этом случае задается произвольное $\lambda > 0$, и при этом λ решается эллиптическая краевая задача (5.12)–(5.14) (к настоящему времени разработано много численных методов решения эллиптических краевых задач), после чего вычисляется интеграл $\|\gamma_2 u\|^2_{L_2(\Gamma_2)}$. Этот интеграл сравнивается с числом M^2, после чего λ уменьшается, если $M^2 - \|\gamma_2 u\|^2_{L_2(\Gamma_2)} > 0$, и увеличивается, $M^2 - \|\gamma_2 u\|^2_{L_2(\Gamma_2)} < 0$. Итерации заканчиваются, когда $M^2 - \|\gamma_2 u\|^2_{L_2(\Gamma_2)} = 0$.

§ 7. Свойства квазиобратного оператора

7.1. Некоторые применения квазиобратного оператора. *Квазиобратным оператором* для задачи (1.1)–(1.4) называется оператор Q, сопоставляющий начальному условию u_0 квазирешение u задачи (1.1)–(1.4), т. е. решение u задачи (5.1)–(5.4):

$$Qu_0 = u, \quad Q\colon H^0(\Gamma_1) \to H^{1/2}(\Omega). \tag{7.1}$$

В этом параграфе исследуются некоторые свойства оператора Q.

Напомним, что задача (1.1)–(1.4) изучалась при условии 1.3, которое, однако, не использовалось при построении квазирешения в § 5, 6. Квазиобратный оператор можно использовать для проверки выполнения условия 1.3. Действительно, справедливо

Предложение 7.1. *Условие* 1.3 *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\|\gamma_1 Qu_0 - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \leqslant \varepsilon^2. \tag{7.2}$$

Доказательство. Если выполнено (7.2), то квазирешение удовлетворяет соотношениям (1.1)–(1.4) и, следовательно, справедливо условие 1.3. Обратное утверждение доказано в предложении 5.2. □

Отметим, что условие 1.3 выполняется, конечно, не при любых u_0, M, ε. Однако, для любых $\varepsilon > 0$ и $u_0 \in H^0(\Gamma_1)$ существует M_0, что для любых $M \geqslant M_0$ тройка u_0, M, ε удовлетворяет условию 1.3. Это утверждение следует из плотности в $H^0(\Gamma_1)$ множества функций $\gamma_1 u$, где $u \in H^{1/2}(\Omega)$ удовлетворяет соотношениям (1.1), (1.2). Последний результат о плотности в случае, когда A — оператор Лапласа и $\beta = 0$ в (1.2), доказан в теореме 3.1.1, однако доказательство проходит и для общей задачи (1.1), (1.2).

С помощью квазиобратного оператора можно уточнить оценку (2.28).

Предложение 7.2. *Пусть выполнено* (7.2) *и число* $\varepsilon_1 > 0$ *определяется формулой* $\varepsilon^2 - \|\gamma_1 Q u_0 - u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} = \varepsilon_1^2$. *Тогда оценка* (2.28) *для* $w = u - Qu_0$, *где* $u \in H^{1/2}(\Omega)$ — *произвольная функция, удовлетворяющая* (1.1)–(1.4), *остается справедливой при замене* 2ε *на* ε_1.

Доказательство. Достаточно доказать неравенство

$$\|\gamma_1 w\|_{L_2(\Gamma_1)} \leqslant \varepsilon_1. \tag{7.3}$$

В $H^0(\Gamma_1)$ рассмотрим множество $\gamma_1\mathfrak{A} = \{\gamma_1 u,\ u \in \mathfrak{A}\}$, где $\mathfrak{A}$ — множество (5.6). Множество $\gamma_1\mathfrak{A}$ выпукло. С помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 5.1, легко устанавливается замкнутость $\gamma_1\mathfrak{A}$ в $H^0(\Gamma_1)$. Из определения оператора Q следует, что в точке $\gamma_1 Q u_0$ достигается минимум в задаче $\inf_{v\in\gamma_1\mathfrak{A}} \|v - u_0\|^2_{H^0(\Gamma_1)}$. Следовательно, $\gamma_1 Q$ — оператор ортогонального проектирования из $H^0(\Gamma_1)\setminus\gamma_1\mathfrak{A}$ на $\gamma_1\mathfrak{A}$. Поэтому $(\gamma_1 w, u_0 - \gamma_1 Q u_0)_{L_2(\Gamma_1)} \leqslant 0$. По теореме косинусов $\|\gamma_1 w\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \leqslant \|u_0 - \gamma_1 u\|^2_{L_2(\Gamma_1)} - \|u_0 - \gamma_1 Q u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \leqslant \varepsilon^2 - \|u_0 - \gamma_1 Q u_0\|^2 = \varepsilon_1^2$. □

7.2. О непрерывности квазиобратного оператора. Остановимся на тех свойства квазиобратного оператора Q, которые полезно иметь в виду при численном построении квазирешения. К таким свойствам прежде всего относятся свойства непрерывности и гладкости $Q(u_0)$. Пусть $B_M = \{v \in H^0(\Gamma_2) : \|v\|_{H^0(\Gamma_2)} < M\}$. Рассмотрим множество RB_M, где R — оператор (6.7).

Предложение 7.3. *Оператор* $\gamma_2 Q(u_0)$ *разрывен при* $u_0 \in RB_M$.

Доказательство. Пусть $u_0 \in RB_M$. Из определения (6.7), (6.1) оператора R следует, что у задачи $Au = 0$, $\gamma_1(\partial_{n_A} u + \beta u) = 0$, $\gamma_1 u = u_0$ существует решение $\widehat{u} \in C^\infty(\Omega)$, причем $\|\gamma_2\widehat{u}\|_{H^0(\Gamma_2)} < M$. Так как тройка $(u, p, \lambda) = (\widehat{u}, 0, 0)$ — решение системы (5.12)–(5.15), имеем $\widehat{u} = Qu_0$. Следовательно,

$$\|\gamma_2 Q u_0\|_{H^0(\Gamma_2)} < M. \tag{7.4}$$

С другой стороны, при любом $\varepsilon > 0$ имеем $\{u \in H^0(\Gamma_1) : \|u - u_0\|_{H^0(\Gamma_1)} < \varepsilon\}\setminus RB_M \neq \varnothing$. Поэтому существует последовательность $v_j \in H^0(\Gamma_1)$, такая,

что

$$v_j \to u_0, \text{ в } H^0(\Gamma_1), \qquad v_j \notin RB_M \quad \forall j. \tag{7.5}$$

Поэтому

$$\|\gamma_2 Q v_j\|_{H^0(\Gamma_2)} = M. \tag{7.6}$$

Из (7.4), (7.5), (7.6) следует доказываемое утверждение. □

В отличие от $\gamma_2 Q$ оператор $\gamma_1 Q$ является непрерывным.

Предложение 7.4. *Справедливо неравенство*

$$\|\gamma_1 Q\varphi_1 - \gamma_1 Q\varphi_2\|_{H^0(\Gamma_1)} \leqslant \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{H^0(\Gamma_1)}. \tag{7.7}$$

Доказательство. Как показано в предложении 7.2, $\gamma_1 Q$ — оператор ортогонального проектирования из $H^0(\Gamma_1)\setminus\gamma_1\mathfrak{A}$ на $\gamma_1\mathfrak{A}$. Поэтому справедлива оценка (7.7) (см. Киндерлерер, Стампаккья [1, с. 17]). □

Через γ_{1+t}, $t \in [0,1]$, обозначим оператор сужения функции $u \in H_A^{1/2}(\Omega)$ на многообразие $\varkappa_t$, т. е. $\gamma_{1+t}\colon H_A^{1/2}(\Omega) \to L_2(\varkappa_t)$, где $\varkappa_t$ определено формулой (2.27).

Теорема 7.1. *При любом $t \in [0,1]$ оператор $\gamma_{1+t}Q\colon H^0(\Gamma_1) \to H^0(\varkappa_t)$ непрерывен, причем справедлива оценка*

$$\|\gamma_{1+t}Q\varphi_1 - \gamma_{1+t}Q\varphi_2\|_{H^0(\varkappa_t)} \leqslant c(2M)^{2t}\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|^{2(1-t)}_{L_2(\Gamma_1)} \tag{7.8}$$

для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in H^0(\Gamma_1)$, где c — константа из оценки (2.28).

Доказательство. Положим $w = Q\varphi_1 - Q\varphi_2$. Очевидно, что w удовлетворяет (1.1), (1.2). Из определения оператора Q следует

$$\|\gamma_2 w\|^2_{H^0(\Gamma_2)} = \|\gamma_2 Q\varphi_1 - \gamma_2 Q\varphi_2\|^2_{H^0(\Gamma_2)} \leqslant (2M)^2. \tag{7.9}$$

Поэтому оценка (7.8) вытекает из (2.28), (7.9) и (7.7). □

Из теоремы 7.1 и оценок решений эллиптических краевых задач следует непрерывность оператора $\chi_{\Omega'}Q$, где $\chi_{\Omega'}$ — оператор сужения на подобласть Ω' области Ω, отделенную от Γ_2. Таким образом, квазиобратный оператор "непрерывен" на тех же подобластях области Ω, на которых гарантируется близость друг к другу любых приближенных решений задачи (1.1)–(1.4) и тем самым близость квазирешения к искомому решению.

7.3. Дифференцируемость по Фреше квазиобратного оператора. Возможность построения устойчивых разностных аппроксимаций гарантируется хорошей устойчивостью квазиобратного оператора $Q(u_0)$. Под *устойчивостью* оператора $\Phi(v)$ в точке v_0 понимается дифференцируемость по Фреше $\Phi(v)$ при $v = v_0$, а *мерой устойчивости* является норма производной Фреше $\|\Phi'(v_0)\|$.

Из полученных выше результатов можно сделать вывод, что оператор $\gamma_2 Q(u_0)$ имеет наихудшие свойства гладкости среди всех операторов вида

$\gamma_{1+t}Q(u_0)$, $t \in [0,1]$. Ниже установлена дифференцируемость $\gamma_2 Q(u_0)$ при $u_0 \notin \overline{RB_M}$ и получена оценка $\|\gamma_2 Q'(u_0)\|$.

Из определения G_1 как разрешающего оператора задачи (6.1) и соотношения (6.5) следует, что $\gamma_2 Q(u_0) = \gamma_2 G_1 v = v$, где v — решение уравнения (6.10). Поэтому

$$\gamma_2 Q(u_0) = (\lambda(u_0) + R^* R)^{-1} R^* u_0, \tag{7.10}$$

где $\lambda = \lambda(u_0)$ — корень уравнения (6.17).

Теорема 7.2. *Оператор $\gamma_2 Q\colon H^0(\Gamma_1) \to H^0(\Gamma_2)$ дифференцируем по Фреше при $u_0 \in H^0(\Gamma_1) \setminus \overline{RB_M}$, и его производная $\gamma_2 Q'(u_0)$ удовлетворяет неравенству*

$$\|\gamma_2 Q'(u_0)\| \leqslant \frac{2\mu_1}{\lambda(u_0)}, \tag{7.11}$$

где μ_1 — первое s число оператора R (см. (6.12)*), а $\lambda(u_0)$ — корень уравнения* (6.17).

Доказательство. Из (6.17), (6.16) следует, что функционал $\lambda(u_0)$ непрерывно дифференцируем по Фреше для тех u_0, для которых $\lambda(u_0) > 0$, т. е. $u_0 \notin \overline{RB_M}$. Вычислим производную от оператора (7.10), положив $u_0 = \varphi$ для удобства обозначений. Продифференцировав равенство $(\lambda(\varphi) + R^* R)^{-1}(\lambda(\varphi) + R^* R) = I$, где I — единичный оператор, после простых преобразований получим

$$\left(\frac{\delta(\lambda(\varphi) + R^* R)^{-1}}{\delta\varphi(\cdot)} h, f(\cdot)\right)_{(1)} = -(\lambda(\varphi) + R^* R)^{-2} h \cdot \left(\frac{\delta\lambda(\varphi)}{\delta\varphi(\cdot)}, f(\cdot)\right)_{(1)}, \tag{7.12}$$

где $\dfrac{\delta}{\delta\varphi(\cdot)}$ — обозначение вариационной производной. В (7.12) и далее в этой главе используются обозначения

$$(f(\cdot), g(\cdot))_{(i)} = \int\limits_{\Gamma_i} f(x') g(x') dS, \qquad \|g\|_{(i)} = \|g\|_{L_2(\Gamma_i)}, \quad i = 1, 2. \tag{7.13}$$

Дифференцируя (7.10) и используя (7.12), получим

$$\left(\frac{\delta\gamma_2 Q(\varphi)}{\delta\varphi(\cdot)}, f(\cdot)\right)_{(1)} = -\left(\frac{\delta\lambda(\varphi)}{\delta\varphi(\cdot)}, f(\cdot)\right)_{(1)} (\lambda(\varphi) + R^* R)^{-2} R^* \varphi$$
$$+ (\lambda(\varphi) + R^* R)^{-1} R^* f. \tag{7.14}$$

Вследствие (6.12) имеем

$$R^* R\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \varphi_k e_k, \quad \varphi_k = (\varphi, e_k)_{(1)}. \tag{7.15}$$

Из (7.14), (6.13), (7.15) и определения $\lambda(u_0)$ как решения уравнения (6.17) следует, что

$$\begin{aligned}
\|\gamma_2 Q'(\varphi)f\|_{(2)}^2 &\leqslant 2\left(\|\lambda'(\varphi)\|_{(1)}^2\,\|f\|_{(1)}^2 \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu_j^2|\widehat{\varphi}_j|^2}{(\lambda(\varphi)+\mu_j^2)^4}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu_j^2|\widehat{f}_j|^2}{(\lambda(\varphi)+\mu_j^2)^2}\right)\\
&\leqslant 2\,\|f\|_{(1)}^2\,\sup\nolimits_j(\lambda(\varphi)+\mu_j^2)^{-2}(\|\lambda'(\varphi)\|_{(1)}^2 M^2+\mu_1^2)\\
&\leqslant \frac{2\,\|f\|_{(1)}^2}{\lambda^2(\varphi)}(\|\lambda'(\varphi)\|_{(1)}^2 M^2+\mu_1^2). \qquad (7.16)
\end{aligned}$$

Оценим $\|\lambda'(\varphi)\|_{(1)}$. Дифференцируя по функциональному аргументу (6.17), (6.16), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\mu_k^2\widehat{\varphi}_k(h,\widehat{e}_k)_{(1)}}{(\lambda(\varphi)+\mu_k^2)^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\mu_k^2\widehat{\varphi}_k^2(\lambda'(\varphi),h)_{(1)}}{(\lambda(\varphi)+\mu_k^2)^3}=0,$$

откуда

$$(\lambda'(\varphi),h)_{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2\widehat{\varphi}_k(h,\widehat{e}_k)_{(1)}}{(\lambda(\varphi)+\mu_k^2)^2}\Bigg/\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2\widehat{\varphi}_k^2}{(\lambda(\varphi)+\mu_k^2)^3}. \qquad (7.17)$$

Из (7.17) и определения $\lambda(\varphi)$ (см. (6.17), (6.16)) получаем неравенство

$$\begin{aligned}
\|\lambda'(\varphi)\|_{(1)}^2 &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^4\widehat{\varphi}_k^2}{(\lambda+\mu_k^2)^4}\Bigg/\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2\widehat{\varphi}_k^2}{(\lambda(\varphi)+\mu_k^2)^3}\right)^2\\
&\leqslant M^2\max_k\frac{\mu_k^2}{(\lambda+\mu_k^2)^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2\widehat{\varphi}_k^2}{(\lambda(\varphi)+\mu_k^2)^3}\right)^{-2}\\
&\leqslant \frac{M^2\mu_1^2}{(\lambda(\varphi)+\mu_1^2)^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2\widehat{\varphi}_k^2}{(\lambda(\varphi)+\mu_k^2)^2(\lambda+\mu_1^2)}\right)^{-2}\leqslant\frac{\mu_1^2}{M^2}. \qquad (7.18)
\end{aligned}$$

Из (7.16), (7.18) вытекает (7.11). □

Из равенства $Q(u_0)=G_1\gamma_2 Q(u_0)$ и (7.11) сразу следует оценка меры устойчивости квазиобратного оператора $Q: H^0(\Gamma_1)\to H^{1/2}(\Omega)$:

$$\|Q'(u_0)\|=\|G_1\gamma_2 Q'(u_0)\|\leqslant\|G_1\|\,\|\gamma_2 Q'(u_0)\|\leqslant 2\,\|G_1\|\mu_1/\lambda(u_0). \qquad (7.19)$$

Таким образом, в силу (7.19) мера устойчивости квазиобратного оператора $Q(u_0)$ обратно пропорциональна $\lambda(u_0)$. Мера устойчивости — это один из основных параметров, определяющих скорость сходимости к квазирешению его конечноразностных аппроксимаций. В силу (7.19) оценку меры устойчивости можно вычислять параллельно с вычислением квазирешения, так как при его вычислении по алгоритму, приведенному в п. 6.3, параллельно вычисляется также $\lambda(u_0)$.

§ 8. Комментарии

Математическую разработку теории некорректных задач одним из первых начал Тихонов [1] (см. Тихонов, Арсенин [1]). К задачам, родственным задаче Коши для оператора Лапласа, приводит проблема аналитического продолжения, изучение которой начато Карлеманом [1]. Задачей Коши для оператора Лапласа в различных постановках занимались Лаврентьев [1, 2]; Мергелян [1]; Лаврентьев, Романов, Шишатский [1]; Иванов [1]. Аналог оценки, доказанной в § 2–4, для решений общих эллиптических уравнений в метрике C получен Ландисом [1]. Понятие квазирешения задачи Коши для оператора Лапласа введено Ивановым [1]. Ряд вопросов, связанных с задачей Коши для оператора Лапласа, исследован в Латтес, Лионс [1]; Романович, Фурсиков [1]. В этой главе представлены результаты работы Фурсикова [7].

Отметим, что изложенная в этой главе условно-корректная постановка, помимо задачи Коши для эллиптических уравнений, может быть с успехом использована при исследовании других задач. Достаточно очевидной является возможность ее применения, например, при исследовании задачи Коши для уравнения теплопроводности и других параболических уравнений в сторону уменьшения времени. Кроме того, условно-корректная постановка была использована при решении проблемы замыкания цепочки моментных уравнений, соответствующих системе Навье — Стокса при больших числах Рейнольдса (см. Фурсиков [8–11]; Фурсиков, Эмануилов [4, 5]).

Глава 7

Точная локальная управляемость течения вязкой несжимаемой жидкости

Эта глава, как и предыдущая, иллюстрирует применение задач оптимального управления распределенными системами. Она посвящена доказательству точной локальной управляемости двумерных уравнений Навье — Стокса, определенных в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, когда управление задано на всей границе $\partial\Omega$ либо на некоторой ее части, а также в случае локального распределенного управления. Точная постановка задач и формулировка основных результатов содержатся в § 1. Мы ограничимся рассмотрением лишь одного характерного частного случая. Пусть $(\widehat{v}(x), \nabla\widehat{p}(x))$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, — стационарное решение двумерной системы Навье — Стокса:

$$-\Delta\widehat{v} + (\widehat{v}, \nabla)\widehat{v} + \nabla\widehat{p} = f(x), \quad \operatorname{div}\widehat{v} = 0.$$

Рассмотрим нестационарную систему Навье — Стокса

$$\partial_t v(t,x) - \Delta v(t,x) + (v, \nabla)v + \nabla p = f(x), \quad \operatorname{div} v = 0, \tag{0.1}$$

снабженную начальным условием

$$v\big|_{t=0} = v_0(x), \tag{0.2}$$

близким к заданному стационарному решению:

$$\|v_0 - \widehat{v}\|_{(W_2^2(\Omega))^2} \leqslant \varepsilon,$$

где ε достаточно мало. Требуется найти граничное управление

$$v(t,x)\big|_{\partial\Omega} = u(t,x), \tag{0.3}$$

такое, что решение $v(t,x)$ краевой задачи (0.1)–(0.3) в заданный момент времени T совпадает с $\widehat{v}$:

$$v(T,x) \equiv \widehat{v}(x). \tag{0.4}$$

Чтобы пояснить этот результат, предположим, что $\widehat{v}\big|_{\partial\Omega} = 0$ и $\widehat{v}$ — неустойчивая особая точка динамической системы, порожденной уравнением (0.1), в фазовом пространстве соленоидальных векторных полей с условием прилипания на границе $\partial\Omega$. Пусть v_0 — начальное условие из малой окрестности $\widehat{v}$, из которого выходит траектория динамической системы, не стремящаяся к $\widehat{v}$ с ростом времени. Можно выбрать граничное управление такое, что траектория, выходящая из v_0, под действием этого управления за конечное время достигнет $\widehat{v}$. Другими словами, с помощью гранично-

го управления можно подавить возникновение турбулентности. Опишем (достаточно грубо) идею решения указанной задачи.[1]

Мы не ищем управление u на границе а, отбросив условие (0.3), решаем задачу (0.1), (0.2), (0.4) без краевых условий на боковой поверхности $(0,T)\times\Omega$. Указанная задача не является корректно поставленной и, вообще говоря, имеет много решений. Чтобы сделать задачу более регулярной, мы заменим ее экстремальной задачей. Требуется минимизировать функционал

$$\mathcal{J}(v) = \int\limits_Q |v(t,x)|^2 \varkappa(t,x)\,dx\,dt \to \inf, \tag{0.5}$$

где v пробегает множество решений задачи (0.1), (0.2), (0.4), а $\varkappa(t,x)$ — некоторая весовая функция.

Для задачи (0.1), (0.2), (0.4), (0.5) выписывается (формально) система оптимальности и решение задачи (0.1), (0.2), (0.4) сводится к решению задачи (0.1), (0.2), (0.4), дополненной соотношениями из указанной системы оптимальности. Эту расширенную задачу удается решить с помощью некоторых оценок карлемановского типа (выбор веса $\varkappa(t,x)$ диктуется карлемановскими оценками).

Итак, в этой главе, как и в гл. 6, исследуется некоторая некорректная краевая задача. Так же, как в гл. 6, при исследовании существования решения этой некорректной краевой задачи используется некоторая экстремальная задача.

§ 1. Постановка задачи и формулировка основного результата

1.1. Случай граничного управления. В ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega\in C^\infty$ рассматривается двумерная система Навье — Стокса

$$\partial_t v(t,x) - \Delta v(t,x) + (v,\nabla)v + \nabla p(t,x) = f(t,x), \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{1.2}$$

где $(t,x)\in Q\equiv(0,T)\times\Omega$, $v(t,x)=(v_1(t,x),v_2(t,x))$ — скорость жидкости, $\nabla p(t,x)$ — градиент давления,

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\quad \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j},\quad (v,\nabla)v = \sum_{j=1}^2 v_j\partial_{x_j}v,$$

Δ — оператор Лапласа, $f=(f_1,f_2)$– плотность внешних сил. Ставится начальное условие

$$v(t,x)\big|_{t=0} = v_0(x), \tag{1.3}$$

где $v_0(x)=(v_{01},v_{02})$ задано.

[1] На самом деле описанная ниже конструкция применяется не к уравнению (0.1), а к некоторой линеаризации этого уравнения.

Предположим, что $\partial\Omega$ состоит из двух непересекающихся многообразий Γ_0 и Γ_1:

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1,\ \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing,\ \Sigma = (0,T) \times \partial\Omega,\ \Sigma_i = (0,T) \times \Gamma_i, \tag{1.4}$$

$i = 0, 1$. На Σ_0 ставятся граничные условия

$$(\operatorname{rot} v)\big|_{\Sigma_0} = 0, \quad (v,n)\big|_{\Sigma_0} = 0, \tag{1.5}$$

где $n = (n_1, n_2)$ — векторное поле внешних нормалей к $\partial\Omega$, $(v,n) = v_1 n_1 + v_2 n_2$, $\operatorname{rot} v = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1$.[2] На части границы Σ_1 ставится условия Дирихле

$$v\big|_{\Sigma_1} = u, \tag{1.6}$$

где u — граничное значение поля v, которое у нас будет играть роль управления.

Для постановки задачи управляемости и формулировки результата введем функциональные пространства. Положим

$$V^k(\Omega) = \{v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \in (H^k(\Omega))^2 : \operatorname{div} v = 0\}, \tag{1.7}$$

$$W^{1,2(k)}(Q) = \{v \in L_2(0,T; H^{k+2}(\Omega)) : \partial_t v \in L_2(0,T; H^k(\Omega)\}, \tag{1.8}$$

$$V^{1,2(k)}(Q) = \{v(t,x) \in (W^{1,2(k)}(Q))^2 : \operatorname{div} v = 0\}, \tag{1.9}$$

где $H^k(\Omega)$ — пространство Соболева. Аналогично (1.8) определяются пространства $W^{1,2(k)}(\Sigma)$, $W^{1,2(k)}(\Sigma_i)$, $i = 0, 1$. Для этого в (1.8) надо Ω заменить на $\partial\Omega$, Γ_i.

Так как ∇p легко определяется из (1.1) по f и v, в дальнейших формулировках, говоря о решениях системы (1.1), вместо пары $(v, \nabla p)$ пишем v.

Поставим задачу точной граничной управляемости. Пусть нам задано решение $\widehat{v} \in V^{1,2(1)}(Q)$ системы (1.1), (1.2) и начальное условие $v_0 \in V^2(\Omega)$, связанные соотношением

$$\|\widehat{v}(0,\cdot) - v_0\|^2_{H^2(\Omega)} < \varepsilon, \tag{1.10}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Предполагается, что для любой связной компоненты $\partial\Omega_j$ границы $\partial\Omega$ справедливы равенства

$$\int\limits_{\partial\Omega_j} (v_0, n)\, d\sigma = 0, \quad \int\limits_{\partial\Omega_j} (\widehat{v}, n)\, d\sigma = 0. \tag{1.11}$$

Кроме того, начальное данное v_0 удовлетворяет условиям согласования

$$\operatorname{rot} v_0\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (v_0, n)\big|_{\Gamma_0} = 0. \tag{1.12}$$

Требуется найти управление $u \in W^{1,2(1/2)}(\Sigma_1)$, заданное на части границы Σ_1, такое, что решение $v \in V^{1,2(1)}(Q)$ задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) удовлетворяет при $t = T$ условию

$$v(t,x)\big|_{t=T} = \widehat{v}(T,x). \tag{1.13}$$

[2] В гл. 5 мы использовали другое обозначение: $\operatorname{rot}^* v = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1$. Это не приведет к недоразумениям, так как в этой главе результаты гл. 5 не используются.

В этой главе будет доказана

Теорема 1.1. *Пусть* $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ *— связное подмножество такое, что* $\Gamma_1 \equiv \partial\Omega\backslash\Gamma_0 \neq \varnothing$ *и* $\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \varnothing$. *Пусть* $\widehat{v} \in H^{1,2(1)}(Q)$ *— заданное решение системы* (1.1), (1.2), $v_0 \in V^2(\Omega)$ *и выполнены условия* (1.11), (1.12), (1.10) *с достаточно малым* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует управление* $u \in W^{1,2(1/2)}(\Sigma_1)$ *такое, что решение задачи* (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) *существует в пространстве* $V^{1,2(1)}(Q)$ *и при* $t = T$ *удовлетворяет условию* (1.13). *Более того,*

$$\|v(t,\cdot) - \widehat{v}(t,\cdot)\|^2_{V^2(\Omega)} \leqslant c\exp(-k/(T-t)), \quad t \to T, \tag{1.14}$$

где $c > 0$ *и* $k > 0$ *— константы.*

Замечание 1.1. Множество $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ может быть пустым, т. е. управление u из (1.6) может быть задано на всей боковой границе Σ.

1.2. Случай распределенного управления. Рассмотрим случай системы Навье — Стокса, которая управляется с помощью распределенного управления, сосредоточенного в некоторой фиксированной подобласти $\omega \subset \Omega$, т. е. случай локального распределенного управления.

Итак, пусть $\Gamma_0 = \partial\Omega$ и, следовательно, $\Sigma_0 = \Sigma$ и $\Gamma_1 = \varnothing$, $\Sigma_1 = \varnothing$. Заменим (1.1) уравнением

$$\partial_t v(t,x) - \Delta v(t,x) + (v,\nabla)v + \nabla p(t,x) = f(t,x) + u(t,x), \tag{1.15}$$

где $u(t,x) = (u_1, u_2)$ — управление, сосредоточенное в подобласти $\omega \subset \Omega$:

$$u(t,x) \equiv \chi_\omega(x)u(t,x),$$

$$\chi_\omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \omega, \\ 0, & x \notin \omega. \end{cases} \tag{1.16}$$

Пусть $\widehat{v}(t,x) \in V^{1,2(1)}(Q)$ — заданное решение системы (1.1), (1.2), а $v_0(x) \in V^2(\Omega)$ — начальное условие, связанное с $\widehat{v}$ соотношением (1.10).

Задача локальной точной управляемости с локальным распределенным управлением состоит в построении управления $u(t,x)$ вида (1.15) такого, чтобы решение краевой задачи (1.15), (1.2), (1.3), (1.5) при $t = T$ удовлетворяло соотношению (1.13). Для $\omega \subset \Omega$ положим $Q^\omega = (0,T) \times \omega$.

Теорема 1.2. *Пусть* $\Gamma_0 = \partial\Omega$ *— связное множество и заданы решение* $\widehat{v}(t,x) \in V^{1,2(1)}(Q)$ *задачи* (1.1), (1.2), (1.5) *и начальное условие* $v_0(x) \in V^2(\Omega)$, *удовлетворяющие* (1.12) *и* (1.10) *с достаточно малым* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует управление* $u(t,x) \in L_2(Q)$, $\operatorname{supp} u \subset Q^\omega$, *такое, что решение* $v(t,x)$ *задачи* (1.15), (1.2), (1.3), (1.5) *существует в пространстве* $V^{1,2(1)}(Q)$ *и удовлетворяет оценке* (1.14), *а, следовательно, равенству* (1.13).

§ 2. Сведение к линейной задаче управляемости

2.1. Задача для функции тока. Рассмотрим задачу точной управляемости с локальным распределенным управлением, заданным в некоторой фиксированной подобласти ω области Ω. Чтобы избавиться от давления,

вместо системы уравнений Навье — Стокса рассмотрим сначала уравнение для функции тока $\psi(t,x)$, которая, как известно, связана с векторным полем скоростей $v(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x))$ соотношениями

$$\partial_{x_1}\psi = -v_2, \quad \partial_{x_2}\psi = v_1. \tag{2.1}$$

Применим к первому уравнению в (1.1) оператор ∂_{x_2}, а ко второму — оператор ∂_{x_1}. Вычтем из второго уравнения первое и подставим (2.1) в полученное уравнение. В результате для функции тока получим уравнение

$$\partial_t(-\Delta\psi(t,x)) + \Delta^2\psi + \partial_{x_2}((\partial_{x_1}\psi)\Delta\psi) - (\partial_{x_1}((\partial_{x_2}\psi)\Delta\psi) = u + g. \tag{2.2}$$

В правой части (2.2) вместо $\operatorname{rot} f$ мы поставили $u(t,x) + g(t,x)$, где $g = \operatorname{rot} f$ и u — управление, так как именно такой вид правой части нам понадобится в дальнейшем.

Первое граничное условие из (1.5) в силу (2.1) запишется в виде

$$(-\Delta\psi)\big|_{\Sigma} = 0, \quad \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega, \tag{2.3}$$

а второе — в виде

$$\partial_\tau\psi\big|_{\Sigma} = 0, \tag{2.4}$$

где $\tau = (\tau_1,\tau_2) = (-n_2, n_1)$ — вектор, касательный к $\partial\Omega$. В силу этого равенства имеем

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = \text{const}\,.$$

Поскольку $\partial\Omega$ связно,[3] и из соотношений (2.1) ψ определяется с точностью до константы, можно считать, что

$$\psi\big|_{\Sigma} = 0. \tag{2.5}$$

Начальное условие (1.3) в силу (2.1) заменяется условием

$$\psi(t,x)\big|_{t=0} = \psi_0(x), \tag{2.6}$$

где ψ_0 определяется из равенств

$$\partial_{x_1}\psi_0 = -v_{02}, \quad \partial_{x_2}\psi_0 = v_{01},$$

и в соответствии с (1.12), (2.5) выполнены условия согласования

$$\psi_0\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta\psi_0|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.7}$$

Как в § 1, предположим, что задано решение $\widehat{\psi}(t,x) \in W^{1,2(2)}(Q)$ уравнения (2.2), где $u(t,x) \equiv 0$ и $g \in L_2(Q)$, причем $\widehat{\psi}(t,x)$ удовлетворяет краевым условиям (2.3), (2.5) и имеет место оценка

$$\|\widehat{\psi}(0,\cdot) - \psi_0(\cdot)\|_{H^3(\Omega)} < \varepsilon, \tag{2.8}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

[3] Связность $\partial\Omega$ используется только при выводе условия (2.5). Поэтому ниже, при изучении задачи управляемости для функции тока ψ, мы не требуем условия связности $\partial\Omega$.

Задача локальной точной управляемости состоит в построении управления $u(t,x) \in L_2(Q)$, $\operatorname{supp} u \subset Q^\omega$, такого, чтобы решение $\psi(t,x)$ краевой задачи (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) удовлетворяло условию

$$\psi(t,x)\big|_{t=T} = \widehat{\psi}(t,x)|_{t=T}. \tag{2.9}$$

Будем искать решение $\psi(t,x)$ в виде

$$\psi(t,x) = w(t,x) + \widehat{\psi}(t,x), \tag{2.10}$$

где w — новая неизвестная функция. Подставляя (2.10) в (2.2)–(2.6), получим уравнение для w:

$$\partial_t(-\Delta w(t,x)) + \Delta^2 w + B(\widehat{\psi} + w, w) + B(w, \widehat{\psi}) = u(t,x), \tag{2.11}$$

где

$$B(\psi,\varphi) = \partial_{x_2}((\partial_{x_1}\psi)\Delta\varphi) - \partial_{x_1}((\partial_{x_2}\psi)\Delta\varphi), \tag{2.12}$$

а также краевое и начальное условия

$$(-\Delta w)\big|_\Sigma = 0, \quad w\big|_\Sigma = 0, \tag{2.13}$$

$$w(t,x)\big|_{t=0} = w_0(x), \tag{2.14}$$

где $w_0(x) = \psi_0(x) - \widehat{\psi}(0,x)$ и (вследствие (2.10), (2.7), (2.8))

$$w_0\big|_{\partial\Omega} = \Delta w_0\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \|w_0\|^2_{H^3(\Omega)} < \varepsilon. \tag{2.15}$$

В § 2–7 будет доказана

Теорема 2.1. *Пусть Γ_0 совпадает с $\partial\Omega$ и заданы функция $\widehat{\psi} \in W^{1,2(2)}(Q)$, удовлетворяющая (2.2) при $u \equiv 0$, (2.3), (2.5), и начальное условие $w_0 \in H^3(\Omega)$, удовлетворяющее (2.15) с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Тогда найдется управление $u \in L_2(Q)$, $\operatorname{supp} u \subset (0,T) \times \omega$, такое, что решение $w \in W^{1,2(2)}(Q)$ задачи (2.11)–(2.14) существует и удовлетворяет условию*

$$w(t,x)\big|_{t=T} = 0. \tag{2.16}$$

2.2. Линейная задача управляемости. Для доказательства теоремы 2.1 мы используем следующую теорему о правом обратном операторе.

Теорема 2.2. *Пусть X, Z — банаховы пространства и отображение*

$$A : X \to Z \tag{2.17}$$

непрерывно дифференцируемо. Предположим, что для $x_0 \in X$, $z_0 \in Z$ справедливо равенство

$$A(x_0) = z_0, \tag{2.18}$$

и производная

$$A'(x_0) : X \to Z \tag{2.19}$$

оператора A в точке x_0 является эпиморфизмом. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ на шаре $B_\varepsilon(z_0) = \{z \in Z : \|z - z_0\|_Z < \varepsilon\}$ определено отображе-

ние $M(z) : B_\varepsilon(z_0) \to X$, удовлетворяющее условиям

$$A(M(z)) = z, \quad z \in B_\varepsilon(z_0), \tag{2.20}$$

$$\|M(z) - x_0\|_X \leqslant k\|A(x_0) - z\|_Z, \quad z \in B_\varepsilon(z_0), \tag{2.21}$$

где $k > 0$ некоторое число.

Теорема 2.2 является простым следствием обобщения теоремы о неявной функции, доказанного в книге Алексеев, Тихомиров, Фомин [1].

В нашем случае пространство X состоит из пар (w, u), оператор $A(x)$ определяется формулой (2.11):

$$A(x) = (-\partial_t \Delta w + \Delta^2 w + B(\widehat{\psi} + w, w) + B(w, \widehat{\psi}) - u, w\big|_{t=0}) \tag{2.22}$$

(условие $w\big|_{t=T} = 0$ и краевые условия для w будут включены в определение пространства X), а множество пар вида (2.22) определит пространство Z. В качестве x_0 и z_0 возьмем нулевые элементы $x_0 = (0, 0)$ и $z_0 = (0, 0)$. Для этих x_0 и z_0 равенство (2.18) очевидно.

Для проверки условия эпиморфности оператора (2.19), которое является наиболее трудно проверяемым условием теоремы 2.2, выпишем уравнение $A'(x_0)x = z$. В нашем случае это уравнение имеет вид

$$Lw - u \equiv \partial_t(-\Delta w) + \Delta^2 w + B(\psi, w) + B(w, \psi) - u = f, \tag{2.23}$$

где $u = \chi_\omega u, \chi_\omega$ — функция (1.16),

$$w\big|_\Sigma = \Delta w\big|_\Sigma = 0, \tag{2.24}$$

$$w\big|_{t=0} = w_0, \quad w\big|_{t=T} = 0. \tag{2.25}$$

Отметим, что при $x_0 = (0, 0)$, $z_0 = (0, 0)$, функция ψ из (2.23) совпадает с $\widehat{\psi}$. Однако мы докажем разрешимость задачи (2.23)–(2.25) для любой функции $\psi \in W^{1,2(1)}(Q)$. Это позволит нам в дальнейшим усилить утверждение теоремы 2.1. (см. ниже замечание 6.2)

Дадим точное определение пространств X и Z, соответствующих задачам (2.11)–(2.14) и (2.23)–(2.25). Положим

$$\eta(t, x) \equiv \eta_\lambda(t, x) = (e^{\frac{4\lambda}{3}\|\beta\|_{C(\overline{\Omega})}} - e^{\lambda\beta(x)})/(T - t), \tag{2.26}$$

где $\lambda > 0$ — параметр (его значение будет зафиксировано ниже в § 3), а $\beta(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$\nabla\beta(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega\backslash\omega', \quad (\nabla\beta(x), n(x)) \leqslant 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{2.27}$$

$$\beta(x) \geqslant \ln 3 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \min_{x\in\overline{\Omega}} \beta(x) > \frac{3}{4} \max_{x\in\overline{\Omega}} \beta(x). \tag{2.27'}$$

Здесь $\omega' \subset\subset \omega \subset\subset \Omega$, т. е. ω' — область, компактно вложенная в Ω, а $n(x)$ обозначает внешнюю нормаль к $\partial\Omega$. Существование функции $\beta \in C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей (2.27), доказано ниже в лемме 7.1 (см. доказательство леммы в конце § 7). Чтобы установить (2.27′), достаточно β увеличить на

достаточно большую константу. Пусть $\varkappa(t,x) > 0$, $(t,x) \in Q$. Положим

$$L_2(Q,\varkappa) = \{u(t,x), (t,x) \in Q : \|u\|^2_{L_2(Q,\varkappa)} \equiv \int\limits_Q \varkappa^2(t,x)u^2(t,x)\,dx\,dt < \infty\}. \tag{2.28}$$

Веса, которые мы будем использовать, строятся по функции (2.26). Одним из таких весов будет функция θe^η, где

$$\theta(t,x) = \chi_\omega(x)(T-t)^{\frac{1}{2}} + (1-\chi_\omega(x)), \tag{2.29}$$

а χ_ω — характеристическая функция множества ω (см. (1.16)). Введем пространство

$$\begin{aligned} Y(Q) \equiv \Big\{ & y(t,x) \in W^{1,2(2)}(Q) : y\big|_\Sigma = \Delta y\big|_\Sigma = 0, \\ & \|y\|^2_{Y(Q)} \equiv \|\partial_t(-\Delta y) + \Delta^2 y\|^2_{L_2(Q,\theta e^\eta)} + \|y\|^2_{W^{1,2(2)}(Q)} \\ & + \int\limits_Q \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant 3} (T-t)^{2|\alpha|-6}|D^\alpha y|^2 \Big) e^{2\eta}dx\,dt \Big\}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

где θ и η — функции (2.29), (2.26). Положим

$$\begin{aligned} & U_\omega(Q) = \{u(t,x) \in L_2(Q) : \operatorname{supp} u \subset Q^\omega, \\ & \|u\|^2_{U_\omega(Q)} \equiv \int\limits_{Q^\omega} (T-t)e^{2\eta}|u|^2 dx\,dt < \infty\}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

где, напомним, $Q^\omega = (0,T) \times \omega$.

Чтобы применить теорему 2.2 для доказательства разрешимости задачи (2.11), (2.13), (2.14), (2.16) определим пространства

$$\begin{aligned} & X = \big\{(y,u) \in Y(Q) \times U_\omega(Q) \ : \\ & \|(y,u)\|^2_X = \|y\|^2_{Y(Q)} + \|u\|^2_{U_\omega(Q)} + \|\partial_t(-\Delta y) + \Delta^2 y - u\|^2_{L_2(Q,e^\eta)} < \infty\big\}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$Z = L_2(Q,e^\eta) \times \widehat{H}^3(\Omega), \tag{2.32$'$}$$

где

$$\widehat{H}^3(\Omega) = \{v(x) \in H^3(\Omega) : v\big|_{\partial\Omega} = \Delta v\big|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{2.32$''$}$$

Предложение 2.1. *Отображение* (2.17) *непрерывно дифференцируемо в любой точке* $x_0 \in X$, *если* X *и* Z *— пространства* (2.32) *и* (2.32$'$) *соответственно, а оператор* $A(x)$ *определяется формулой* (2.22).

Доказательство. Непосредственно из определения (2.30)–(2.32), (2.32$'$) пространств X, Z, следует, что оператор

$$(w,u) \to (\partial_t(-\Delta w) + \Delta^2 w - u, w\big|_{t=0}) : X \to Z$$

непрерывен, а в силу линейности и непрерывности – дифференцируем. Оператор B из (2.22), определенный формулой (2.12), является билинейным.

Поэтому для доказательства предложения 2.1 достаточно установить непрерывность билинейного оператора

$$B : Y(Q) \times Y(Q) \to L_2(Q, e^\eta). \tag{2.33}$$

Учитывая (2.12), (2.29)–(2.31), с помощью простых преобразований получаем оценку

$$\|B(\varphi,\psi)\|^2_{L_2(Q,e^\eta)} \leqslant c \int\limits_Q e^{2\eta}(|\partial_{x_1}\psi|^2|\partial_{x_2}\Delta\varphi|^2 + |\partial_{x_2}\psi|^2|\partial_{x_1}\Delta\varphi|^2)\,dx\,dt$$

$$\leqslant c\|\nabla\psi\|^2_{C(\overline{Q})}\|\nabla\Delta\varphi\|^2_{L_2(Q,e^\eta)} \leqslant c\|\psi\|^2_{Y(Q)}\|\varphi\|^2_{Y(Q)},$$

что доказывает непрерывность оператора (2.33). □

Равенство (2.18) выполняется для отображения (2.22) при $x_0 = (w^0, u^0) = 0$, $z_0 = 0$. Поэтому, чтобы применить теорему 2.2, нам осталось доказать, что образ оператора (2.19) совпадает с Z. Это сводится к доказательству разрешимости задачи (2.23)–(2.25) при любых $(f, w_0) \in Z$. Доказательству разрешимости этой задачи посвящены § 3–5.

§ 3. Вспомогательная экстремальная задача и разрешимость ее системы оптимальности

Приступим к доказательству разрешимости задачи (2.23)–(2.25). Эта задача плохо поставлена, так как имеет недостаточное количество краевых условий на Σ и слишком много краевых условий на временной оси. Поэтому прежде всего мы сведем ее решение к решению некоторой коэрцитивной краевой задачи. Чтобы ее выписать, рассмотрим экстремальную задачу

$$J(w,u) = \frac{1}{2}\int\limits_Q \frac{e^{2\eta}}{(T-t)^6}w^2(t,x)\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q^\omega}(T-t)e^{2\eta}u^2(t,x)\,dx\,dt \to \inf \tag{3.1}$$

при условии, что пара (w, u) удовлетворяет соотношениям (2.23)–(2.25). Система оптимальности задачи (3.1), (2.23)–(2.25) имеет вид

$$L^*p \equiv \partial_t(\Delta p(t,x)) + \Delta^2 p + B_2^*(\psi,p) + B_1^*(p,\psi) = -\frac{e^{2\eta}}{(T-t)^6}w, \tag{3.2}$$

$$p\big|_\Sigma = \Delta p\big|_\Sigma = 0, \tag{3.3}$$

$$\chi_\omega(x)p(t,x) \equiv (T-t)e^{2\eta}u(t,x), \tag{3.4}$$

где $B_1^*(\cdot,\psi)$ и $B_2^*(\psi,\cdot)$ — операторы, формально сопряженные к линейным операторам $B(\cdot,\psi)$ и $B(\psi,\cdot)$ соответственно. Из определения (2.12) оператора $B(\psi,\varphi)$ следует, что

$$B_1^*(h,\psi) = \partial_{x_1}(\Delta\psi\partial_{x_2}h) - \partial_{x_2}(\Delta\psi\partial_{x_1}h), \tag{3.5}$$

$$B_2^*(\psi,h) = \Delta(\partial_{x_1}h\partial_{x_2}\psi - \partial_{x_2}h\partial_{x_1}\psi). \tag{3.6}$$

Вывести (формально) систему (3.2)–(3.4) можно, например, с помощью принципа Лагранжа (см. гл. 2). Так как в дальнейшем нигде не использу-

ется, что (3.2)–(3.4) — это система оптимальности экстремальной задачи (3.1), (2.23)–(2.25), мы не приводим даже формального вывода. Отметим лишь, что вывод этой системы можно найти, например, в Фурсиков [14].

Итак, вместо разрешимости задачи (2.23)–(2.25) мы будем исследовать разрешимость краевой задачи (2.23)–(2.25), (3.2)–(3.4). Прежде всего перейдем от (2.23)–(2.25), (3.2)–(3.4) к краевой задаче, содержащей лишь одну неизвестную функцию $p(t,x)$. Для этого выразим w из (3.2), а u — из (3.4) и подставим полученные выражения в (2.23). В результате для функции $p(t,x)$ получим уравнение

$$-L((T-t)^6 e^{-2\eta} L^* p) - (T-t)^{-1} e^{-2\eta} \chi_w(x) p = f. \tag{3.7}$$

Используя (3.2), перепишем краевые условия (2.25) в виде

$$-(T-t)^6 e^{-2\eta} L^* p\big|_{t=0} = w_0, \quad -(T-t)^6 e^{-2\eta} L^* p\big|_{t=T} = 0. \tag{3.8}$$

Покажем, что краевая задача (3.7), (3.8), (3.3) имеет единственное решение в соответствующих функциональных пространствах. Для этого нам понадобится оценка карлемановского типа, приведенная в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть $\eta = \eta^\lambda$ — функция (2.26), а β — функция, удовлетворяющая условиям (2.27), (2.27′). Пусть p и w удовлетворяют (3.2), (3.3), причем коэффициент ψ из (3.2) принадлежит $W^{1,2(2)}(Q)$. Предположим, что при некотором $\lambda = \lambda_0 > 0$ левая часть неравенства (3.9) (см. ниже) конечна. Тогда существует $\widehat{\lambda} > \lambda_0$ такое, что при $\lambda > \widehat{\lambda}$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} I_\lambda(p) \equiv \int\limits_Q \Bigg(&(T-t)^7 |\partial_t \Delta p|^2 + \sum_{|\alpha| \leqslant 2} (T-t)^{3+2|\alpha|} |D_x^\alpha \Delta p|^2 \\ &+ \sum_{|\alpha| \leqslant 4} (T-t)^{2|\alpha|} |D_x^\alpha p|^2 \Bigg) e^{-2\eta_\lambda} \, dx\, dt \\ &\leqslant c \Bigg(\int\limits_Q (T-t)^{-6} |w|^2 e^{2\eta_\lambda} \, dx\, dt + \int\limits_{Q^w} (T-t)^{-1} |p|^2 e^{-2\eta_\lambda} \, dx\, dt \Bigg), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где c зависит лишь от λ и $\|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)}$, причем можно считать, что зависимость от второго аргумента непрерывна и монотонна.

Доказательство этой теоремы ввиду его громоздкости приведено в конце этой главы (см. § 7).

Для определения обобщенного решения задачи (3.7), (3.8), (3.3) введем пространство

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda = \Bigg\{ p(t,x) : \|p\|^2_{\Phi_\lambda} \equiv I_\lambda(p) &+ \int\limits_{Q^w} (T-t)^{-1} |p|^2 e^{-2\eta_\lambda} \, dx\, dt \\ &+ \int\limits_Q (T-t)^6 e^{-2\eta_\lambda} |L^* p|^2 dx\, dt < \infty, \quad p\big|_\Sigma = \Delta p\big|_\Sigma = 0 \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $I_\lambda(p)$ — функционал (3.9). Отметим, что в силу слагаемого $I_\lambda(p)$ из неравенства $\|p\|_{\Phi_\lambda} < \infty$ заключаем, что следы $p\big|_\Sigma$, $\Delta p\big|_\Sigma$ корректно определены.

Определение 3.1. Пусть

$$f \in L_2(Q, e^{\eta^\lambda}), \quad w_0 \in H^2(\Omega).$$

Обобщенным решением задачи (3.7), (3.8), (3.3) называется элемент $p(t,x)$ пространства Φ_λ такой, что для любого $q \in \Phi_\lambda$ справедливо равенство

$$\int\limits_Q (T-t)^6 e^{-2\eta_\lambda} L^* p \cdot L^* q\, dx\, dt + \int\limits_{Q^w} (T-t)^{-1} e^{-2\eta_\lambda} pq\, dx\, dt$$
$$= -\int\limits_Q fq\, dx\, dt + \int\limits_\Omega w_0(x) \Delta q(0,x)\, dx, \tag{3.11}$$

где L^* — оператор, определенный в (3.2).

Теорема 3.2. *Пусть $w_0 \in H^2(\Omega), f \in L_2(Q, e^{\eta^\lambda})$, где $\lambda > \widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}$ — константа из теоремы 3.1. Тогда существует единственное обобщенное решение p, задачи(3.7), (3.8), (3.3). Функция p удовлетворяет уравнению (3.7), понимаемому в смысле теории обобщенных функций.*

Доказательство. На пространстве Φ_λ рассмотрим билинейную форму

$$a(p,q) = \int\limits_Q (T-t)^6 e^{-2\eta_\lambda} L^* p \cdot L^* q\, dx\, dt + \int\limits_{Q^\omega} (T-t)^{-1} e^{-2\eta_\lambda} pq\, dx\, dt.$$

В силу теоремы 3.1 эта форма непрерывна и коэрцитивна на Φ_λ, т. е. $a(p,q) \geqslant c\|q\|^2_{\Phi_\lambda}$. На пространстве Φ_λ введем скалярное произведение посредством билинейной формы $a(p,q)$. В силу коэрцитивности формы a норма $\sqrt{a(p,p)}$, порожденная этим скалярным произведением, эквивалентна норме (3.10) пространства Φ_λ. Функционал

$$F(q) = -\int\limits_Q fq\, dx\, dt + \int\limits_\Omega w_0(x) \Delta q(0,x)\, dx,$$

непрерывен на Φ_λ. По теореме Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве уравнение (3.11) имеет единственное решение $p \in \Phi_\lambda$. Другими словами, задача (3.7), (3.8), (3.3) имеет единственное обобщенное решение. Полагая $q \in C_0^\infty(Q)$ в (3.11), получаем равенство (3.7), понимаемое в смысле теории обобщенных функций. □

Мы фиксируем λ, выбранное в теореме 3.2, вплоть до конца § 6.

Пусть p — обобщенное решение, построенное в теореме 3.2. По функции p определим функцию w с помощью равенства (3.2). Наша цель — показать, что w является решением линейной задачи управляемости (2.23)–(2.25). В следующем параграфе мы покажем, что w является решением краевой задачи (2.23)–(2.25$_1$).

§ 4. Свойства функции w

В этом параграфе установлена гладкость функции w, определенной с помощью формулы (3.2).

Лемма 4.1. *Пусть $p(t,x)$ — обобщенное решение задачи* (3.7), (3.8), (3.3), *построенное в теореме* 3.2, *функция w определяется по p с помощью* (3.2), *а u — с помощью* (3.4). *Тогда $w \in L_2(Q,(T-t)^{-3}e^{\eta})$, $u \in L_2(Q,(T-t)^{1/2}e^{\eta})$,* $\operatorname{supp} u \subset Q^{\omega}$ *и справедлива оценка*

$$\int\limits_Q (T-t)^{-6}e^{2\eta}w^2(t,x)\,dx\,dt + \int\limits_{Q^{\omega}} (T-t)e^{2\eta}u^2(t,x)\,dx\,dt$$
$$\leqslant c\Bigg(\int\limits_Q e^{2\eta}f^2(t,x)\,dx\,dt + \int\limits_{\Omega}(w_0(x))^2dx\Bigg), \tag{4.1}$$

где c зависит непрерывно и монотонно лишь от $\|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)}$. Кроме того, w, u удовлетворяют уравнению (2.23), *понимаемому в смысле теории обобщенных функций.*

Доказательство. Подставим $p=q$ в (3.11), а затем с помощью (3.2), (3.4) выразим $(L^*p)^2$ через w^2, а p^2 — через u^2. Применяя в правой части полученного равенства неравенство Коши — Буняковского, после простых преобразований приходим к оценке

$$\|(T-t)^{-3}e^{\eta}w\|^2_{L_2(Q)} + \|(T-t)^{\frac{1}{2}}e^{\eta}u\|^2_{L_2(Q_w)}$$
$$\leqslant \varepsilon\Bigg(\|e^{-\eta}p\|^2_{L_2(Q)} + \int\limits_{\Omega}(\Delta p(0,x))^2dx\Bigg) + \frac{c}{\varepsilon}(\|e^{\eta}f\|^2_{L_2(Q)} + \|w_0\|^2_{L_2(\Omega)}). \tag{4.2}$$

Величину

$$\int\limits_{\Omega}(\Delta p(0,x))^2dx$$

можно оценить через левую часть неравенства (3.9). Поэтому, оценивая член с множителем ε в (4.2) с помощью неравенства (3.9) и выбирая ε достаточно малым, получим (4.1). Из (3.2), (3.4) и (3.7) следует (2.23). □

Временно предположим, что

$$\psi \in C^{\infty}(\overline{Q}). \tag{4.3}$$

Наша ближайшая цель – показать, что w принадлежит $W^{1,2(2)}(Q)$ и удовлетворяет, кроме (2.23), соотношениям (2.24), (2.25_1). Для этого нам сначала потребуется исследовать краевую задачу

$$\Delta y(t,x) = z(t,x), \quad y\big|_{\Sigma} = 0, \tag{4.4}$$
$$-\partial_t z + \Delta z + \partial_{x_1}\psi\partial_{x_2}z - \partial_{x_2}\psi\partial_{x_1}z = g, \quad g = f + u - B(w,\psi), \tag{4.5}$$
$$z\big|_{\Sigma} = 0, \quad z\big|_{t=0} = \Delta w_0. \tag{4.6}$$

Лемма 4.2. *Пусть* $f \in L_2(Q, e^\eta), \psi \in C^\infty(\overline{Q}), \psi\big|_\Sigma = 0,$

$$w_0 \in H^3(\Omega), \quad w_0\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta w_0\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.7}$$

а w *и* u *— функции из леммы* 4.1. *Тогда существует единственное решение* $(y, z) \in W^{1,2(1)}(Q) \times W^{1,2(-1)}(Q)$ *задачи* (4.4)–(4.6)

Доказательство. Из условий леммы и определения (2.12) оператора B следует, что $g = f + u - B(w, \psi) \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Поэтому для решения z параболической краевой задачи (4.5), (4.6) справедливо включение $z \in W^{1,2(-1)}(Q)$. Следовательно, решение y эллиптической краевой задачи (4.4) принадлежит $L_2(0, T; H^3(\Omega))$. Дифференцируя (4.4) по t, получаем, что $\partial_t y \in L_2(0, T; H^1(\Omega))$. □

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия леммы* 4.2. *Тогда* w *принадлежит* $W^{1,2(1)}(Q)$ *и удовлетворяет соотношениям* (2.23), (2.24), (2.25_1).

Доказательство. Достаточно показать, что $w \equiv y$, где y — функция, построенная в лемме 4.2. Подставим $z = \Delta y$, $g = f + u - B(w, \psi)$ в (4.5_1), умножим полученное равенство на функцию $q \in W^{1,2,(2)}(Q) \cap \Phi_\lambda$, удовлетворяющую условию $q\big|_{t=T} = 0$, где Φ_λ — пространство (3.10), и проинтегрируем в этом равенстве по частям с учетом (4.4_2), (4.6). В результате получим соотношение

$$\int\limits_Q [y(\partial_t \Delta q + \Delta^2 q + B_2^*(\psi, q)) + B_1^*(q, \psi) w]\, dx\, dt - \int\limits_{Q^\omega} uq\, dx\, dt =$$
$$= \int\limits_Q fq\, dx\, dt - \int\limits_\Omega w_0(x) \Delta q(x)\, dx. \tag{4.8}$$

С другой стороны, выражая в (3.11) $L^* p$ и p через w и u с помощью (3.2), (3.4) и используя (3.2), получим

$$-\int\limits_Q [w(\partial_t \Delta q + \Delta^2 q + B_2^*(\psi, q)) + B_1^*(q, \psi) w]\, dx\, dt + \int\limits_{Q^\omega} uq\, dx\, dt$$
$$= -\int\limits_Q fq\, dx\, dt + \int\limits_\Omega w_0(x) \Delta q(x)\, dx. \tag{4.9}$$

Складывая (4.8) и (4.9), приходим к равенству

$$\int\limits_Q (y - w)(\partial_t \Delta q + \Delta^2 q + B_2^*(\psi, q))\, dx\, dt = 0. \tag{4.10}$$

Из (4.10) и леммы 4.4, доказанной ниже, следует $y \equiv w$. □

Лемма 4.4. *Для любого* $h \in L_2(Q)$ *существует единственное решение* $q \in W^{1,2(2)}(Q)$ *задачи*

$$\partial_t \Delta q + \Delta^2 q + B_2^*(\psi, q) = h, \quad q\big|_\Sigma = \Delta q\big|_\Sigma = 0, \quad q\big|_{t=T} = 0. \tag{4.11}$$

Доказательство. Прежде всего устанавливается однозначная разрешимость задачи

$$\partial_t \Delta q + \Delta^2 q = f, \quad q\big|_\Sigma = \Delta q\big|_\Sigma = 0, \quad q\big|_{t=T} = 0, \tag{4.12}$$

Для этого достаточно представить (4.12) в виде суперпозиции двух задач

$$\Delta q = \varphi, \quad q\big|_\Sigma = 0,$$
$$\partial_t \varphi + \Delta \varphi = f, \quad \varphi\big|_\Sigma = 0, \quad \varphi\big|_{t=T} = \Delta q\big|_{t=T} = 0$$

и воспользоваться классическими результатами об их разрешимости. Отметим, что разрешающий оператор R задачи (4.12), сопоставляющий правой части f решение q (т. е. $Rf = q$), действует непрерывно из $L_2(Q)$ в $W^{1,2(2)}(Q)$. Будем искать решение q задачи (4.11) в виде $q = Rf$. Подставив это выражение в (4.11), получим уравнение в $L_2(Q)$ относительно f:

$$f + B_2^*(\psi, Rf) = h. \tag{4.13}$$

В силу (3.6) оператор $B_2^*(\psi, \cdot) : W^{1,2(2)}(Q) \to W^{1,2(-1)}(Q)$ непрерывен и вследствие компактности вложения $W^{1,2(-1)}(Q) \subset\subset L_2(Q)$ (см. Дубинский [1]; Вишик, Фурсиков [1]) оператор $B_2^* \circ R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ вполне непрерывен. Применяя к (4.13) альтернативу Фредгольма и учитывая, что индекс оператора $I + B_2^* \circ R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ равен нулю, приходим к выводу, что для доказательства однозначной разрешимости задачи (4.11) достаточно доказать единственность ее решения.

Умножая (4.11) с $h = 0$ на q скалярно в $L_2(\Omega)$ и учитывая (3.6), получим после простых преобразований оценку

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |\nabla q(t,x)|^2 dx + \int\limits_\Omega |\Delta q|^2 dx \\
&= \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^{2} ((\partial_{x_j}\partial_{x_1} q)\partial_{x_2}\psi - (\partial_{x_j}\partial_{x_2} q)\partial_{x_1}\psi + \partial_{x_1} q(\partial_{x_j}\partial_{x_2}\psi) \\
&- \partial_{x_2} q(\partial_{x_j}\partial_{x_1}\psi))\partial_{x_j} q)\, dx \\
&\leqslant c\int\Bigg[\Bigg(\sum_{i,j=1}^{2} |\partial_{x_i}\partial_{x_j} q|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} |\nabla q| + |\nabla q|^2\Bigg]\, dx\, dt \\
&\leqslant c\Bigg(\varepsilon\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} |\partial_{x_i}\partial_{x_j} q|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\Omega |\nabla q|^2 dx\Bigg).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Так как $q\big|_\Sigma = 0$, для решения задачи Дирихле для оператора Лапласа справедлива оценка

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int\limits_\Omega |\partial_{x_i}\partial_{x_j} q(x,t)|^2 dx \leqslant c_1 \int\limits_\Omega |\Delta q(x,t)|^2 dx. \tag{4.15}$$

Подставив (4.15) в правую часть (4.14) и выбрав $\varepsilon > 0$ достаточно малым, перенесем член с Δq из правой части полученного неравенства в левую

часть. Проинтегрировав полученное неравенство по t, находим

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla q(t,x)|^2 dx \leqslant c \int\limits_{t}^{T} \int\limits_{\Omega} |\nabla q(\tau,x)|^2 dx\, d\tau. \tag{4.16}$$

Применив к (4.16) лемму Гронуолла, получим $q \equiv 0$. □

Лемма 4.5. *Пусть выполнены условия леммы* 4.2. *Тогда* $w \in W^{1,2(2)}(Q)$.

Доказательство. В силу леммы 4.3 $w \in W^{1,2(1)}(Q)$. Поэтому для g из (4.5) справедливо включение $g \in L_2(Q)$. Следовательно, решения z и y задач (4.5), (4.6) и (4.4) удовлетворяют условиям $z \in W^{1,2(0)}(Q)$ и $y \in W^{1,2(2)}(Q)$. В лемме 4.3 доказано, что $y = w$. Поэтому $w \in W^{1,2(2)}(Q)$. □

Избавимся теперь от условия (4.3).

Теорема 4.1. *Пусть* $f \in L_2(Q, e^{\eta})$, $\psi \in W^{1,2(2)}(Q)$, $q\big|_{\Sigma} = 0$, *а* w_0 *удовлетворяет* (4.7). *Тогда для функций* w, *и из леммы* 4.1 *при любом* $t \in (0,T)$ *справедливы оценки*

$$\|\nabla w(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_0^t \|\Delta w(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} d\tau$$

$$\leqslant c(\|\nabla w_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(Q)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}), \tag{4.17}$$

$$\|w\|^2_{W^{1,2(2)}(Q)} \leqslant c(\|f\|^2_{L_2(Q)} + \|w_0\|^2_{H^3(\Omega)}), \tag{4.18}$$

где c *зависит лишь от* $\|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)}$. *Кроме того* w *принадлежит* $W^{1,2(2)}(Q)$ *и удовлетворяет соотношениям* (2.23), (2.24), (2.25_1).

Доказательство. Докажем сначала оценку (4.17) при $\psi \in C^{\infty}(\overline{Q})$. В этом случае справедливо утверждение леммы 4.3. Умножая равенство (2.23) скалярно в $L_2(Q)$ на w и интегрируя по частям с учетом (2.24), (2.25_1) и (2.12), находим

$$\frac{1}{2}\|\nabla w(t,\cdot)\|^2 + \int\limits_0^t \|\Delta w(\tau,\cdot)\|^2 d\tau$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|\nabla w_0\|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u+f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\nabla w\| d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} B(\psi,w) w\, dx\, d\tau, \tag{4.19}$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(Q)}$. Учитывая (2.12), интегрируя по частям и используя неравенства Коши — Буняковского и Соболева, получим

$$\left|\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} B(\psi,w) w\, dx\, dt\right| = \left|\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} (\partial_{x_1} w \partial_{x_2}\psi - \partial_{x_1}\psi \partial_{x_2} w)\Delta w\, dx\, dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\Delta w\|^2 dt + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (|\partial_{x_1} w \partial_{x_2}\psi|^2 + |\partial_{x_1}\psi\partial_{x_2} w|^2)\, dx\, dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\Delta w\|^2 dt + \int\limits_0^t \|\nabla\psi\|^2_{C(\overline{\Omega})}\|\nabla w\|^2 dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|\Delta w\|^2 dt + c\int\limits_0^t \|\psi(t,\cdot)\|^2_{H^4(\Omega)}\|\nabla w(t,\cdot)\|^2_{L_2(\Omega)} dt. \tag{4.20}$$

Подставляя (4.20) в (4.19), после простых преобразований получим неравенство

$$\|\nabla w(t,\cdot)\|^2 + \int\limits_0^t \|\Delta w(\tau,\cdot)\|^2 d\tau \leqslant \|\nabla w_0\|^2 + c\int\limits_0^t (\|u(\tau,\cdot)\|^2 + \|f(\tau,\cdot)\|^2) d\tau$$

$$+ c_1\int\limits_0^t (1 + \|\psi(\tau,\cdot)\|^2_{H^4(\Omega)})\|\nabla w(\tau,\cdot)\|^2 d\tau. \tag{4.21}$$

Из (4.21) в силу леммы Гронуолла следует (4.17).

Пусть $\psi \in W^{1,2(2)}(Q)$. Рассмотрим последовательность $\psi_k \in C^\infty(\overline{Q})$ такую, что $\psi_k \to \psi$ в $W^{1,2(2)}(Q)$. Обозначим через p_k обобщенное решение с коэффициентом $\psi = \psi_k$ в определении (2.23) оператора L, а через w_k и u_k — функции, построенные по p_k с помощью (3.2), (3.4). Через p, w, u обозначим аналогичные функции, соответствующие коэффициенту ψ. В силу (4.1) для w_k и u_k справедливо неравенство

$$\|(T-t)^{-3}e^\eta w_k\|^2_{L_2(Q)} + \|(T-t)^{\frac{1}{2}}e^\eta u_k\|^2_{L_2(Q^w)} \leqslant c, \tag{4.22}$$

где c не зависит от k. Вследствие неравенства (3.9), записанного для p_k, w_k, и (4.22) имеем

$$\|p_k\|_{\Phi_\lambda} \leqslant c, \tag{4.23}$$

где Φ_λ — пространство (3.10). Перейдя, если потребуется, к подпоследовательности, можно считать, что

$$p_k \rightharpoonup \widehat{p} \text{ слабо в } \Phi_\lambda. \tag{4.24}$$

В силу (4.24) в равенстве (3.11) с $p = p_k$, $\psi = \psi_k$ можно перейти к пределу при $k \to \infty$ и в результате получить равенство (3.11) для $(\widehat{p}, \psi)$. Из единственности обобщенного решения следует, что $\widehat{p} = p$. Таким образом,

$$p_k \rightharpoonup p \text{ в } \Phi_\lambda, \quad w_k \rightharpoonup w \text{ в } L_2(Q, (T-t)^{-3}e^\eta), \tag{4.25}$$
$$u_k \rightharpoonup u \text{ в } L_2(Q^\omega, (T-t)^{1/2}e^\eta).$$

Однако в силу (4.25), (4.17)

$$w_k \rightharpoonup w \text{ в } L_2(0,T;H^2(\Omega)), \quad w\big|_\Sigma \equiv 0. \tag{4.26}$$

Так как $w \in L_2(0,T;H^2(\Omega))$ и $\psi \in W^{1,2(2)}(Q)$, имеем

$$\partial_{x_j} w \in L_2(0,T;H^1(\Omega)), \quad \partial_{x_j}\Delta\psi \in C(0,T;L_2(\Omega)).$$

Поэтому в силу (2.12) $B(w,\psi) \in L_2(0,T;H^{-\delta}(\Omega))$ при любом $\delta > 0$. Следовательно, правая часть g из (4.5) принадлежит $L_2(0,T;H^{-\delta}(\Omega))$ и решение (y,z) задачи (4.4)–(4.6) принадлежит $W^{1,2(2-\delta)}(Q) \times W^{1,2(-\delta)}(Q)$. Повторяя с очевидными модификациями доказательство леммы 4.3, заключаем, что $w = y \in W^{1,2(2-\delta)}(Q)$. Возвращаясь к правой части (4.5), получим $g \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ и, следовательно, $w = y \in W^{1,2(2)}(Q)$. Кроме того, w удовлетворяет (2.23), (2.24), (2.25_1). Приведенные выше рассуждения вместе с оценками решений эллиптической и параболической краевых задач доказывают оценку (4.18). □

§ 5. Разрешимость линейной задачи управляемости и оценки решений

5.1. Разрешимость линейной задачи управляемости. Утверждение о разрешимости линейной задачи управляемости (2.23)–(2.25) является простым следствием теоремы 4.1 и леммы 4.1. Действительно, в силу теоремы 4.1 пара (w,u) удовлетворяет (2.23), (2.24), (2.25_1). Поэтому следует лишь установить справедливость (2.25_2).

Согласно лемме 4.1 $w \in L_2(Q,(T-t)^{-3}e^{\eta})$. Следовательно,

$$\|w(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} e^{k/(T-t)} \in L_2(0,T), \tag{5.1}$$

где $k > 0$. В силу теоремы 4.1 $w \in W^{1,2(2)}(Q) \subset C(\overline{Q})$. Поэтому определено сужение $w\big|_{t=T}$. Предполагая, что (2.25_2) не верно, получим $\|w(T,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} > 0$ и по непрерывности $\|w(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} > 0$ при t близких к T. Однако это противоречит (5.1).

Цель данного параграфа — доказать включение $w \in Y(Q)$, где $Y(Q)$ — пространство (2.30). На протяжении всего параграфа предполагается, что выполнены условия теоремы 4.1, а w и u — функции из леммы 4.1.

5.2. Подготовительные леммы.

Лемма 5.1. *При любых $\varepsilon \in (0,1)$ и $t \in (0,T)$ функция w удовлетворяет неравенствам*

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla w(t,x)|^2 e^{2\eta(t,x)}}{(T-t)^4} dx \leqslant \varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla\Delta w(t,x)|^2 e^{2\eta(t,x)} dx$$
$$+ \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_\Omega \frac{|w|^2}{(T-t)^6} e^{2\eta(t,x)} dx, \tag{5.2}$$

$$\int\limits_\Omega \frac{|\Delta w(t,x)|^2}{(T-t)^2} e^{2\eta(t,x)} dx \leqslant \varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla \Delta w(t,x)|^2 e^{2\eta(t,x)} dx$$
$$+ \frac{c}{\varepsilon^2} \int\limits_\Omega \frac{|w|^2}{(T-t)^6} e^{2\eta(t,x)} dx, \tag{5.3}$$

где c не зависит от ε, t, w.

Доказательство. Интегрируя по частям, в силу (2.26) и неравенства Коши — Буняковского получим

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla w(t,x)|^2}{(T-t)^4} e^{2\eta} dx = -\int\limits_\Omega \frac{w(2(\nabla w, \nabla \eta) + \Delta w)}{(T-t)^4} e^{2\eta} dx$$
$$= -\int\limits_\Omega \frac{(\nabla w^2, \nabla \eta) + w\Delta w}{(T-t)^4} e^{2\eta} dx = \int\limits_\Omega \frac{w^2(2|\nabla \eta|^2 + \Delta \eta) - w\Delta w}{(T-t)^4} e^{2\eta} dx$$
$$\leqslant \int\limits_\Omega \left(\frac{\delta_1 |\Delta w)|^2}{(T-t)^2} + \frac{c|w|^2}{\delta_1 (T-t)^6} \right) e^{2\eta} dx. \tag{5.4}$$

С помощью аналогичных преобразований находим

$$\int\limits_\Omega \frac{|\Delta w(t,x)|^2}{(T-t)^2} e^{2\eta} dx = -\int\limits_\Omega \frac{(\nabla \Delta w, \nabla w) + 2\Delta w(\nabla w, \nabla \eta)}{(T-t)^2} e^{2\eta} dx$$
$$\leqslant \int\limits_\Omega \left(\frac{\delta_2}{2} |\nabla \Delta w|^2 + \frac{|\Delta w|^2}{2(T-t)^2} + \frac{c_1 |\nabla w|^2}{2\delta_2 (T-t)^4} \right) e^{2\eta} dx.$$

Перенесем в левую часть неравенства член с Δw:

$$\int\limits_\Omega \frac{|\Delta w(t,x)|^2}{(T-t)^2} e^{2\eta} dx \leqslant \int\limits_\Omega (\delta_2 |\nabla \Delta w|^2 + \frac{c_1 |\nabla w|^2}{\delta_2 (T-t)^4}) e^{2\eta} dx. \tag{5.5}$$

Подставим (5.4) в правую часть (5.5) и перенесем из левой части полученного неравенства в правую часть член с $|\Delta w|^2$. Получим оценку

$$\int\limits_\Omega \frac{|\Delta w(t,x)|^2}{(T-t)^2} e^{2\eta} dx \leqslant \int\limits_\Omega \left(\frac{\delta_2 |\nabla \Delta w|^2}{(1 - \frac{c_1 \delta_1}{\delta_2})} + \frac{c_1 c |w|^2}{\delta_1 \delta_2 (1 - \frac{c_1 \delta_1}{\delta_2})(T-t)^6} \right) e^{2\eta} dx. \tag{5.6}$$

Полагая $\delta_1 = \dfrac{\delta_2}{2c_1}$ в (5.6) и обозначив $\varepsilon = 2\delta_2$, получим (5.3).

Подставим (5.5) в правую часть (5.4) и перенесем из правой части полученного неравенства в левую часть член с $|\nabla w|^2$:

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla w(t,x)|^2}{(T-t)^4} e^{2\eta} dx \leqslant \int\limits_\Omega \left(\frac{\delta_1 \delta_2}{(1 - \frac{c_1 \delta_1}{\delta_2})} |\nabla \Delta w||^2 + \frac{c|w|^2}{\delta_1 (1 - \frac{c_1 \delta_1}{\delta_2})(T-t)^6} \right) e^{2\eta} dx. \tag{5.7}$$

Положив $\delta_2 = 2\delta_1 c_1$ в (5.7) и обозначив $\varepsilon = 4c_1 \delta_1^2$, получим (5.2). □

Лемма 5.2. *Для функции w справедливы оценки*

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} |D_x^\alpha w(t,x)|^2 e^{2\eta(t,x)} dx \leqslant c \int\limits_{\Omega} e^{2\eta(t,x)} \left(|\Delta w(t,x)|^2 + \frac{|w(t,x)|^2}{(T-t)^4} \right) dx, \tag{5.8}$$

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant 3} |D_x^\alpha w(t,x)|^2 e^{2\eta(t,x)} dx \leqslant c \int\limits_{\Omega} e^{2\eta(t,x)} \left(|\nabla\Delta w(t,x)|^2 + \frac{|w(t,x)|^2}{(T-t)^6} \right) dx, \tag{5.9}$$

где c не зависит от t и w.

Доказательство. Положим $v = e^\eta w$. В силу (2.24)

$$\Delta v = g, \quad v\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5.10}$$

где

$$g = e^\eta (\Delta w + 2(\nabla\eta, \nabla w) + (|\eta|^2 + \Delta\eta) w). \tag{5.11}$$

Вследствие известных оценок решений эллиптических краевых задач, примененных к (5.10), а также (5.11), (2.26) и неравенства (5.4) при $\delta_1 = 1$, умноженного на $(T-t)^2$ получим

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} |D_x^\alpha v(t,x)|^2 dx \leqslant c \int\limits_{\Omega} |g|^2 dx \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega} \left(|\Delta w|^2 + \frac{|w|^2}{(T-t)^4} \right) e^{2\eta} dx. \tag{5.12}$$

В силу формулы Лейбница дифференцирования произведения, (2.26) и (5.4) при $\delta = 1$ имеем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} |D_x^\alpha v(t,x)|^2 dx \geqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} e^{2\eta} |D_x^\alpha w(t,x)|^2 dx \\ &- c \int\limits_{\Omega} e^{2\eta} \left(\frac{|\nabla w|^2}{(T-t)^2} + \frac{|w|^2}{(T-t)^4} \right) dx \\ &\geqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant 2} e^{2\eta} |D_x^\alpha w(t,x)|^2 dx - c_1 \int\limits_{\Omega} e^{2\eta} \left(|\Delta w|^2 + \frac{|w|^2}{(T-t)^4} \right) dx. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Из (5.12), (5.13) следует (5.8). Применяя известную оценку к решению v задачи (5.10), аналогично (5.12) выводим

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant 3} |D_x^\alpha v(t,x)|^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |D_x^\alpha g|^2 dx \\ &\leqslant c_1 \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla\Delta w|^2 + \frac{|w|^2}{(T-t)^6} \right) e^{2\eta} dx. \end{aligned}$$

Аналогично (5.13) находим

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant 3} |D_x^\alpha v(t,x)|^2 dx \geqslant \int\limits_{\Omega} e^{2\eta} \sum_{|\alpha|\leqslant 3} |D_x^\alpha w(t,x)|^2 dx$$
$$- c \int\limits_{\Omega} e^{2\eta} \left(|\nabla \Delta w|^2 + \frac{|w|^2}{(T-t)^6} \right) dx.$$

Из последних двух неравенств следует (5.9). □

5.3. Основная теорема.

Теорема 5.1. *Пусть $f \in L_2(Q, e^\eta)$, где $\eta = \eta^\lambda$ и λ — константа из теоремы 3.2, $\psi \in W^{1,2(2)}(Q), w_0$ удовлетворяет (4.7). Пусть p — обобщенное решение задачи (3.7), (3.8), (3.3), а w и u определяются по p с помощью соотношений (3.2), (3.4). Тогда пара $(w,u) \in X$ является решением задачи (2.23)–(2.25) и справедлива оценка*

$$\|w\|^2_{Y(Q)} + \|u\|^2_{U_\omega(Q)} \leqslant c\Big(\int\limits_{Q} e^{2\eta} |f(t,x)|^2 dx\, dt + \|w_0\|^2_{H^3(\Omega)} \Big), \tag{5.14}$$

где X — пространство (2.32), а c не зависит от w, u, f, w_0.

Доказательство. Умножая (2.23) на $-e^{2\eta}\Delta w$, интегрируя по $Q_\tau = (0,\tau) \times \Omega$, $\tau \in (0,T)$, после простых преобразований получим

$$\int\limits_{Q_\tau} e^{2\eta} \left(\frac{1}{2} \partial_t (\Delta w)^2 + |\nabla \Delta w|^2 + 2\Delta w (\nabla \Delta w, \nabla \eta) \right) dx\, dt$$
$$= - \int\limits_{Q_\tau} (f + u - B(\psi, w) - B(w, \psi)) e^{2\eta} \Delta w\, dx\, dt. \tag{5.15}$$

Равенство (5.15) преобразуется с учетом (2.26) следующим образом:

$$\int\limits_{Q_\tau} e^{2\eta} |\nabla \Delta w|^2 dx\, dt + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} e^{2\eta(\tau,x)} |\Delta w(\tau,x)|^2 dx$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} e^{2\eta(0,x)} |\Delta w_0(x)|^2 dx + \int\limits_{Q_\tau} \left(\frac{c_1 |\Delta w|^2}{(T-t)^2} + \frac{1}{2} |\nabla \Delta w|^2 + \varepsilon (T-t)^2 (|f|^2 \right.$$
$$\left. + |u|^2 + |B(\psi,w)|^2 + |B(w,\psi)|^2) + \frac{c_2 |\Delta w|^2}{\varepsilon (T-t)^2} \right) e^{2\eta} dx\, dt. \tag{5.16}$$

Отбросим второй член из левой части (5.16) и перейдем в полученном неравенстве к пределу при $\tau \to T$. Перенесем член с $|\nabla \Delta w|$ из правой в левую

часть полученного неравенства:

$$\int\limits_Q e^{2\eta}|\nabla\Delta w|^2 dx\,dt \leqslant c\|\Delta w_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_Q \left(\left(c_1 + \frac{c_2}{\varepsilon}\right)\frac{|\Delta w|^2}{(T-t)^2}\right.$$
$$\left. + 2\varepsilon(T-t)^2(|f|^2 + |u|^2 + |B(\psi,w)|^2 + |B(w,\psi)|^2)\right)e^{2\eta}dx\,dt. \tag{5.17}$$

Оценим члены, содержащие оператор B. Учитывая (2.12) и непрерывность вложения $W^{1,2(2)}(Q) \subset C(\overline{Q})$, получим

$$2T^2\varepsilon\int\limits_Q e^{2\eta}|B(\psi,w)|^2 dx\,dt \leqslant 2\varepsilon\|\nabla\psi\|^2_{C(\overline{Q})}T^2\int\limits_Q e^{2\eta}|\nabla\Delta w|^2 dx\,dt$$
$$\leqslant \varepsilon c T^2\|\psi\|^2_{W^{1,2(2)}(Q)}\int\limits_Q e^{2\eta}|\nabla\Delta w|^2 dx\,dt. \tag{5.18}$$

В силу (2.12) и теорем вложения

$$2T^2\varepsilon\int\limits_Q e^{2\eta}|B(w,\psi)|^2 dx\,dt \leqslant 2\varepsilon T^2\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \|e^\eta\nabla w(t,\cdot)\|^2_{C(\overline{\Omega})}|\nabla\Delta\psi(t,x)|^2 dx\,dt$$
$$\leqslant 2\varepsilon T^2\|\nabla\Delta\psi\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\int\limits_Q \sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D_x^\alpha(e^\eta\nabla w(t,x))|^2 dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon T^2 c\|\psi\|^2_{W^{1,2(2)}(Q)}\int\limits_Q e^{2\eta}\Bigg(\sum_{|\alpha|\leqslant 3}|D_x^\alpha w|^2$$
$$+ \frac{1}{(T-t)^2}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D_x^\alpha w|^2 + \frac{1}{(T-t)^4}|\nabla w|^2\Bigg)dx\,dt. \tag{5.19}$$

Применяя к правой части (5.19) неравенство (5.8), умноженное на $(T-t)^{-2}$, и оценки (5.9), (5.3) получим

$$2T^2\varepsilon\int\limits_Q e^{2\eta}|B(w,\psi)|^2 dx\,dt$$
$$\leqslant \varepsilon T^2 c_1\|\psi\|^2_{W^{1,2(1)}(Q)}\int\limits_Q e^{2\eta}\left(|\nabla\Delta w|^2 + \frac{|w|^2}{(T-t)^6}\right)dx\,dt. \tag{5.20}$$

Выберем $\varepsilon \in (0,1)$ столь малым, чтобы коэффициенты в правых частях (5.18), (5.20) удовлетворяли условиям

$$\varepsilon c T^2\|\psi\|^2_{W^{1,2(2)}(Q)} < 1/8, \quad \varepsilon T^2 c_1\|\psi\|^2_{W^{1,2(2)}(Q)} < 1/8. \tag{5.21}$$

Подставляя (5.18), (5.20) в правую часть (5.17) и учитывая (5.21), (5.3), (4.1), получим неравенство

$$\int\limits_Q e^{2\eta}|\nabla\Delta w|^2 dx\,dt \leqslant c\|\Delta w_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_Q e^{2\eta}\Big(\frac{1}{2}|\nabla\Delta w|^2 + |f|^2$$
$$+ (T-t)|u|^2\Big)\,dx\,dt + c\|w_0\|^2_{L_2(\Omega)},$$

из которого в силу (4.1) выводится оценка

$$\int\limits_Q e^{2\eta}|\nabla\Delta w|^2 dx\,dt \leqslant c\Big(\|w_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \int\limits_Q e^{2\eta}|f|^2 dx\,dt\Big). \tag{5.22}$$

Из (5.9), (5.8), умноженного на $(T-t)^{-2}$, (5.2), (5.3), (5.22) и (4.1) следует неравенство

$$\int\limits_Q e^{2\eta}\Big(\sum_{k=0}^{3}(T-t)^{2k-6}\sum_{|\alpha|=k}|D_x^\alpha w|^2\Big)\,dx\,dt$$
$$\leqslant c\Big(\int\limits_Q e^{2\eta}|f|^2 dx\,dt + \|w_0\|^2_{H^2(\Omega)}\Big). \tag{5.23}$$

В силу (5.18), (5.20), (5.22), (4.1) из уравнения (2.23) получаем

$$\int\limits_Q e^{2\eta}(\partial_t(-\Delta w) + \Delta^2 w - u)^2 dx\,dt$$
$$\leqslant c\int\limits_Q e^{2\eta}(|f|^2 + |B(\psi,w)|^2 + |B(w,\psi)|^2)\,dx\,dt$$
$$\leqslant c\Big(\int\limits_Q e^{2\eta}|f|^2 dx\,dt + \|w_0\|^2_{H^2(\Omega)}\Big). \tag{5.24}$$

Из (5.23), (5.24), (4.18), (4.1) следует (5.14). □

§ 6. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2.1. Сведéние задачи (2.11)–(2.14), (2.16) к уравнению $A(x) = z$ из теоремы 2.2 (см. (2.20)) подробно описано ниже формулировки теоремы 2.2. Условие (2.18) тривиально выполняется при $x_0 = (0,0)$, $z_0 = (0,0)$, непрерывная дифференцируемость отображения (2.17) проверена в предложении 2.1, а в теореме 5.1 доказано, что образ отображения (2.19) совпадает с пространством Z. Таким образом, все предположения теоремы 2.2 проверены. Согласно этой теореме существует решение $(w,u) \in X$ задачи (2.11)–(2.14), (2.16), где X — пространство, определенное в (2.30)–(2.32). В силу (2.30), (2.31) $W^{1,2(2)}(Q) \times \{u \in L_2(Q) : \operatorname{supp} u \subset Q^\omega\} \supset X$. □

Замечание 6.1. Поскольку компонента w решения задачи (2.11)–(2.14), (2.16) принадлежит пространству (2.30), для w справедлива оценка

$$\|w(t,\cdot)\|_{H^3(\Omega)} \leqslant c\exp\{-k/(T-t)\}, \quad t \to T. \tag{6.1}$$

Замечание 6.2. Кроме утверждения о разрешимости локальной задачи управляемости, установленной в теореме 2.1, справедливо также утверждение о сходимости итераций к решению задачи управляемости со скоростью, характерной для классического метода Ньютона. Более точно, пусть $(w^1, u^1) \in Y(Q) \times U_\omega(Q)$ — решение линейной задачи (2.23)–(2.25) при $\psi = \widehat{\psi}$ и $f \equiv 0$, построенное в теореме 5.1, а $n+1$-е приближение (w^{n+1}, u^{n+1}) строится по n-му приближению (w^n, u^n) согласно формуле $w^{n+1} = w^n + y^n$, где (y^n, u^{n+1}) — решение линейной задачи управляемости

$$\begin{aligned}
&L(\widehat{\psi} + w^n)y^n \equiv \partial_t(-\Delta y^n) + \Delta^2 y^n + B(\widehat{\psi} + w^n, y^n) + B(y^n, \widehat{\psi} + w^n)\\
&= u^{n+1} - f^n,\\
&y^n\big|_\Sigma = \Delta y^n\big|_\Sigma = 0, \quad y^n\big|_{t=0} = y^n\big|_{t=T} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь $u^{n+1} = \chi_\omega u^{n+1}$ (χ_ω — функция (1.16)), а f^n определяется по формуле

$$f^n = \partial_t(-\Delta w^n) + \Delta^2 w^n + B(\widehat{\psi} + w^n, w^n) + B(w^n, \widehat{\psi} + w^n).$$

Отметим, что решение (y^n, u^{n+1}) должно строиться методом, описанным в § 3–5.

Применяя к указанным итерациям классические оценки абстрактного метода Ньютона (см., например, Бахвалов [1]) и учитывая оценки, полученные в § 5, можно доказать существование константы c, зависящей от $\|\widehat{\psi}\|_{W^{1,2(2)}(Q)}$, такой, что при достаточно малых ε из (2.15) вытекают неравенства

$$\begin{aligned}
&c(\|w - w^1\|_{Y(Q)} + \|u - u^1\|_{U_\omega(Q)}) < 1,\\
&\|w - w^{n+1}\|_{Y(Q)} + \|u - u^{n+1}\|_{U_\omega(Q)} \leqslant c^{-1}(c(\|w - w^1\|_{Y(Q)}\\
&+ \|u - u^1\|_{U_\omega(Q)}))^{2^n},
\end{aligned}$$

где (w, u) — решение нелинейной задачи управляемости (2.11)–(2.14).

Для доказательства теорем 1.1 и 1.2 нам понадобится

Лемма 6.1. *Пусть $\widehat{v} \in V^{1,2(1)}(Q)$, $v_0 \in V^2(\Omega)$ удовлетворяют* (1.11). *Тогда существуют функции $\widehat{\psi} \in W^{1,2(2)}(Q)$ и $\psi_0 \in H^3(\Omega)$, связанные с $\widehat{v}$ и v_0 соотношениями* (2.1). *Если $\widehat{v}$, v_0 удовлетворяют условиям* (1.5), (1.10) *и множество Σ_0 связно, то $\widehat{\psi}$, ψ_0, удовлетворяют условию* (2.8) *и соотношениям*

$$\widehat{\psi}\big|_{\Sigma_0} = \Delta\widehat{\psi}\big|_{\Sigma_0} = 0, \quad \psi_0\big|_{\Gamma_0} = \Delta\psi_0\big|_{\Gamma_0} = 0. \tag{6.2}$$

Утверждение леммы легко выводится из известных результатов (см., например, приложение 1 из Темам [1]).

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $\widehat{\psi} \in W^{1,2(2)}(Q)$ и $\psi_0 \in H^3(\Omega)$ — функции, построенные по $\widehat{v}, v_0$ в лемме 6.1. Тогда они удовлетворяют (2.3), (2.5), (2.7), (2.8) (так как $\Gamma_0 = \partial\Omega$). Из системы (1.1), (1.2) для $\widehat{v}$ было выведено выше уравнение (2.2) для $\widehat{\psi}$ при $u \equiv 0$ и $g = \operatorname{rot} f$. Поэтому для $\widehat{\psi}$ и $w_0 = \widehat{\psi}(0,\cdot) - \psi_0$ выполнены условия теоремы 2.1.

Пусть w — решение задачи (2.11)–(2.14), (2.16), построенное в этой теореме, а ψ определено в (2.10). Очевидно, что ψ является решением задачи (2.2), (2.3), (2.5), (2.6), (2.9). Поэтому $v = (v_1, v_2)$ построенное по ψ в (2.1), является решением задачи (1.15), (1.2), (1.3), (1.5), (1.13). При этом неравенство (1.14) следует из (6.1). □

Доказательство теоремы 1.1. В силу (1.11) можно построить функции тока $\widehat{\psi} \in W^{1,2(2)}(Q)$, $\psi_0 \in H^3(\Omega)$ векторных полей $\widehat{v} \in V^{1,2(1)}(Q), v_0 \in H^2(\Omega)$. Причем вследствие (1.5), (1.12) и связности Γ_0 справедливы соотношения (6.2), а ввиду (1.10) — справедлива оценка (2.8) для $\psi_0, \widehat{\psi}$. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющая условиям $\Omega \subset G$, $\partial G \in C^\infty$, $\Gamma_0 \subset \partial G$, $\Gamma_1 \cap \partial G = \varnothing$ (для построения G надо расширить Ω через часть границы Γ_1, оставив Γ_0 частью границы ∂G). Если $\Theta = (0,T) \times G$ и $S = (0,T) \times \partial G$, то $\Sigma_0 \subset S$. Функции $\psi_0 \in H^3(\Omega)$ и $\widehat{\psi} \in W^{1,2(2)}$ удовлетворяющие (6.2), могут быть продолжены до функций $\psi_{0,1} \in H^3(G)$ и $\widehat{\psi}_1 \in W^{1,2(2)}(\Theta)$ таких, что

$$\psi_{0,1}\big|_{\partial G} = \Delta\psi_{0,1}|_{\partial G} = 0, \quad \widehat{\psi}_1\big|_S = \Delta\widehat{\psi}_1\big|_S = 0,$$

причем в силу (2.8) $\|\psi_{0,1} - \psi_1(0,\cdot)\|_{W^3(G)} < c\varepsilon$, где c не зависит от константы ε из (2.8). Подействуем на $\widehat{\psi}_1$ оператором из левой части равенства (2.2) и полученную в результате функцию обозначим через g_1. Очевидно, что $g_1 \in L_2(\Theta)$ и g_1 является продолжение с G на Θ функции g, которая получается при подстановке в левую часть (2.2) функции $\widehat{\psi}$. Отметим, что функции $\widehat{\psi}_1$ и $w_{0,1} = \psi_{0,1} - \widehat{\psi}(0,\cdot)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1, в которой Ω заменено на G. Выберем $\omega \subset G \backslash \Omega$. Тогда из теоремы 2.1, как указано выше, следует справедливость теоремы 1.2. Решение задачи (1.15), (1.2), (1.3), (1.5), построенное в теореме 1.2, после сужения $v(t,x)$ с Θ на Q будет удовлетворять всем утверждениям теоремы 1.1, а граничное управление u получается из v с помощью операции сужения (1.6). □

§ 7. Карлемановские оценки

7.1. Случай обратного уравнения теплопроводности. Цель этого параграфа — доказать теорему 3.1. Для этого сначала выведем карлемановские оценки для уравнений более простых, чем (3.2). Начнем с обратного параболического уравнения

$$\partial_t z(t,x) + \Delta z(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q, \quad z\big|_\Sigma = 0, \tag{7.1}$$

где $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^\infty, \Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$. Пусть $\gamma(t) \in C^\infty(0,T)$ — функция, удовлетворяющая

условиям

$$0 < \gamma(t) \leqslant 1, \quad \gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in (0, T_0), \\ T - t, & t \in (T - T_0, T), \end{cases} \qquad T_0 = \min\{T/3, 1/2\}. \tag{7.2}$$

Пусть ω — подобласть, компактно вложенная в Ω (т. е. $\omega \subset\subset \Omega$) и ω' — подобласть ω такая, что $\omega' \subset\subset \omega$. В конце этого параграфа будет доказана

Лемма 7.1. *Существует функция $\beta(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, не имеющая критических точек в $\overline{\Omega \setminus \omega'}$ такая, что*

$$(\nabla \beta(x), n(x)) \leqslant 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{7.3}$$

где $n(x)$ — векторное поле внешних нормалей к $\partial\Omega$.

Так как $\beta(x), x \in \overline{\Omega \setminus \omega'}$ не имеет критических точек, получаем

$$\min_{x \in \overline{\Omega \setminus \omega'}} |\nabla \beta(x)| > 0. \tag{7.4}$$

Кроме того, предположим, что

$$\beta(x) \geqslant \ln 3, \quad \min_{x \in \overline{\Omega}} \beta(x) > \frac{3}{4} \max_{x \in \overline{\Omega}} \beta(x). \tag{7.5}$$

Если к функции $\beta(x)$, построенной в лемме 7.1, прибавить достаточно большую константу, то новая функция будет удовлетворять как условиям (7.3), (7.4), так и (7.5). Введем функции

$$\varphi(t, x) = \frac{e^{\lambda \beta(x)}}{\gamma(t)}, \quad \alpha = \alpha_\lambda(t, x) = \frac{e^{\frac{4\lambda}{3} \|\beta\|_{C(\overline{\Omega})}} - e^{\lambda \beta(x)}}{\gamma(t)}, \tag{7.6}$$

где $\beta(x)$ — функция, удовлетворяющая (7.3)–(7.5), γ — функция (7.2), $\lambda > 0$ — параметр.

Теорема 7.1. *Пусть z и f удовлетворяют соотношениям* (7.1) *и $s \geqslant -3$.*[4] *Предположим, что при некотором $\lambda = \lambda_0$ левая часть неравенства* (7.7) (*см. ниже*) *конечна. Тогда при $\lambda > \widehat{\lambda}$, где $\widehat{\lambda} \geqslant \lambda_0$ достаточно велико, справедлива карлемановская оценка*

$$\int\limits_Q \varphi^{2s-1} [(\lambda^{-1} |\partial_t z|^2 + \sum_{i,j=1}^d |\partial^2_{x_i x_j} z|^2) + \lambda \varphi^2 |\nabla z|^2 + \lambda^4 \varphi^4 |z|^2] e^{-2\alpha_\lambda} dx\, dt$$
$$\leqslant c \Bigg(\int\limits_Q \varphi^{2s} |f(t, x)|^2 e^{-2\alpha_\lambda(t,x)} dx\, dt + \int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4 \varphi^{2s+3} |z(t, x)|^2 e^{-2\alpha_\lambda} dx\, dt \Bigg), \tag{7.7}$$

где $Q^{\omega'} = (0, T) \times \omega'$, γ, α^λ — функции (7.2), (7.6), *а константа $c > 0$ не зависит от f, z и $\lambda > \widehat{\lambda}$.*

---

[4] Именно такие s нам понадобятся в дальнейшем. Это условие, конечно, можно ослабить, изменив (7.5_1).

Доказательство. Сделаем в (7.1) замену неизвестной функции

$$z(t,x) = \varphi^{-s}e^{\alpha}w. \tag{7.8}$$

Используя соотношения $\partial_t(\varphi^{-s}e^{\alpha}) = \varphi^{-s}e^{\alpha}(s-\alpha)\partial_t \ln\gamma$, $\nabla(\varphi^{-s}e^{\alpha}) = -\varphi^{-s}e^{\alpha}(\varphi+s)\lambda$, $\Delta\varphi^{-s}e^{\alpha} = \varphi^{-s}e^{\alpha}[\lambda^2((\varphi+s)^2-\varphi)|\nabla\beta|^2 - (\varphi+s)\lambda\Delta\beta]$, которые легко выводятся из (7.6), получим равенства

$$L_1 w + L_2 w = f_\lambda(t,x), \quad (t,x)\in Q; \quad w\big|_{\Sigma} = 0, \tag{7.9}$$

где

$$L_1 w = \Delta w + \lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 w + (s-\alpha)(\partial_t \ln\gamma)w, \tag{7.10}$$

$$L_2 w = \partial_t w - 2\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta,\nabla w), \tag{7.11}$$

$$f_\lambda = \varphi^s e^{-\alpha} f + [\lambda(\varphi+s)\Delta\beta + (\lambda^2\varphi(1-2s) - s^2\lambda^2)|\nabla\beta|^2]w. \tag{7.12}$$

Из (7.8) в силу свойств функции α следуют соотношения

$$w\big|_{t=0} = w\big|_{t=T} = 0. \tag{7.13}$$

Из (7.9) вытекает

$$\|L_1 w\|^2_{L_2(Q)} + \|L_2 w\|^2_{L_2(Q)} + 2(L_1 w, L_2 w)_{L_2(Q)} = \|f_\lambda\|^2_{L_2(Q)}. \tag{7.14}$$

В силу (7.10), (7.11) получаем

$$(L_1 w, L_2 w)_{L_2(Q)} = I_1 + I_2 + I_3, \tag{7.15}$$

где

$$I_1 = \int\limits_Q (\Delta w + \lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 w + (s-\alpha)(\partial_t \ln\gamma)w)\partial_t w\,dx\,dt, \tag{7.16}$$

$$I_2 = -2\int\limits_Q (\lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 + (s-\alpha)(\partial_t \ln\gamma))w\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta,\nabla w)\,dx\,dt, \tag{7.17}$$

$$I_3 = -\int\limits_Q (\Delta w)2\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta,\nabla w)\,dx\,dt. \tag{7.18}$$

Преобразуем интегралы I_1, I_2, I_3. Интегрирование по частям в (7.16) с учетом (7.13), (7.9_2) приводит к равенству

$$I_1 = \int\limits_Q \left[-\frac{1}{2}\partial_t|\nabla w|^2 + \frac{1}{2}(\lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 + (s-\alpha)(\partial_t \ln\gamma))\partial_t w^2\right]dx\,dt$$

$$= -\int\limits_Q (\lambda^2\varphi\partial_t\varphi|\nabla\beta|^2 + \frac{1}{2}\partial_t((s-\alpha)(\partial_t \ln\gamma)))|w|^2\,dx\,dt. \tag{7.19}$$

Интегрируя по частям по x в (7.17) с учетом (7.6) получим

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\int\limits_Q (\lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 + (s-\alpha)(\partial_t \ln\gamma))\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta,\nabla w^2)\,dx\,dt \\
&= \int\limits_Q \{(3\lambda^4\varphi^3 + 2\lambda^3 s\varphi^2)|\nabla\beta|^4 + \lambda^3\varphi^2(\varphi+s)[(\nabla\beta,\nabla|\nabla\beta|^2) \\
&+ |\nabla\beta|^2\Delta\beta] + (\partial_t\ln\gamma)[\lambda^2\varphi(\varphi+s)|\nabla\beta|^2 \\
&+ \lambda^2\varphi(s-\alpha)|\nabla\beta|^2 + \lambda(s-\alpha)(\varphi+s)\Delta\beta]\}|w|^2\,dx\,dt. \qquad (7.20)
\end{aligned}
$$

Наконец, преобразуем с помощью интегрирования по частям член (7.18):

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int\limits_Q (\nabla w, \nabla(2\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta,\nabla w)))\,dx\,dt + I_{31} = \int\limits_Q [(\nabla w,\nabla\beta)^2 2\lambda^2\varphi \\
&+ \left[\partial^2_{x_ix_j}\beta\partial_{x_i}w\partial_{x_j}w + \frac{1}{2}(\nabla\beta,\nabla|\nabla w|^2)\right]2\lambda(\varphi+s)]dx\,dt + I_{31} \\
&= \int\limits_Q \Bigg[(\nabla w,\nabla\beta)^2 2\lambda^2\varphi + [\partial^2_{x_ix_j}\beta\partial_{x_i}w\partial_{x_j}w \\
&- \frac{\Delta\beta}{2}|\nabla w|^2]2\lambda(\varphi+s) - \lambda^2|\nabla\beta|^2|\nabla w|^2\varphi\Bigg]\,dx\,dt + I_{31} + I_{32}, \qquad (7.21)
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
I_{31} &= -\int\limits_\Sigma (\nabla w, n)2\lambda(\varphi+s)(\nabla w,\nabla\beta)\,d\sigma\,dt \\
I_{32} &= \int\limits_\Sigma \lambda(\varphi+s)|\nabla w|^2(\nabla\beta,n)d\sigma\,dt
\end{aligned}
$$

(здесь и ниже предполагается что по повторяющимся индексам проводится суммирование).

Так как $w\big|_\Sigma = 0$, а вектор градиента функции совпадает с направлением ее наискорейшего роста, в любой точке границы $\partial\Omega$ вектор внешней нормали $n = (n_1,\dots,n_d)$ коллинеарен градиенту функции $\nabla w = (\partial_{x_1}w,\dots,\partial_{x_d}w)$. Отсюда следуют равенства $\partial_{x_j}w = \partial_n w n_j$, $j = 1,\dots,d$. Поэтому

$$
I_{31} + I_{32} = -\int\limits_\Sigma (\partial_n w)^2(\partial_n\beta)\lambda(\varphi+s)\,dx\,dt \geqslant 0, \qquad (7.22)
$$

где неравенство следует из определения φ из (7.6), и условий (7.3), (7.5), и $s \geqslant -3$. Отметим, что в силу (7.6), (7.5)

$$
|\partial_t\varphi| \leqslant c\varphi^2,\ |(s-\alpha)(\partial_t\ln\gamma)| \leqslant c\varphi^2,\ |\partial_t((s-\alpha)\partial_t\ln\gamma)| \leqslant c\varphi^3, \qquad (7.23)
$$

где $c > 0$ не зависит от $(t, x) \in \overline{Q}$ и $\lambda > \lambda_0$. Используя эти неравенства и очевидную оценку $\lambda < \varphi$, оценим I_1, I_2, I_3. Из (7.19) получим:

$$I_1 \geqslant -c \int\limits_Q \lambda^3 \varphi^3 |w|^2 dx\, dt. \tag{7.24}$$

Аналогично из (7.20) получаем неравенство

$$I_2 \geqslant \int\limits_Q 3\lambda^4 \varphi^3 |w|^2 dx\, dt - c \int\limits_Q \lambda^3 \varphi^3 |w|^2 dx\, dt, \tag{7.25}$$

а из (7.21), (7.22) вытекает оценка

$$I_3 \geqslant -\int\limits_Q \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 |\nabla w|^2 dx\, dt - c \int\limits_Q \lambda \varphi |\nabla w|^2 dx\, dt. \tag{7.26}$$

При этом константа c в (7.24), (7.25), (7.26) не зависит от $\lambda > \lambda_0$. Используя (7.23), оценим также f_λ из (7.12):

$$\|f_\lambda\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \int\limits_Q (2\varphi^{2s} e^{2\alpha} f^2 + c\lambda^4 \varphi^2 |w|^2)\, dx\, dt, \tag{7.27}$$

где c не зависит от $\lambda > \lambda_0$.

Подставляя (7.15) в (7.14), а затем подставляя в полученное равенство оценки (7.24), (7.27) и учитывая, что $\lambda < \varphi$, находим

$$\|L_1 w\|^2_{L_2(Q)} + \|L_2 w\|^2_{L_2(Q)} + 2 \int\limits_Q (3\lambda^4 \varphi^3 |\nabla \beta|^4 |w|^2 - \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 |\nabla w|^2)\, dx\, dt$$
$$\leqslant \int\limits_Q (2\varphi^{2s} e^{2\alpha} f^2 + c\lambda^3 \varphi^3 |w|^2 + c\lambda \varphi |\nabla w|^2)\, dx\, dt. \tag{7.28}$$

Умножая (7.9) скалярно в $L_2(Q)$ на $\lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 w$ и учитывая(7.10), с помощью интегрирования по частям находим

$$\int\limits_Q f_\lambda \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 w\, dx\, dt = \int\limits_Q (L_2 w) w \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 dx\, dt$$
$$+ \int\limits_Q [\lambda^4 \varphi^3 |\nabla \beta|^4 w^2 + \lambda^2 \varphi (s - \alpha)(\partial_t \ln \gamma) |\nabla \beta|^2 w^2$$
$$- \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 |\nabla w|^2 + \frac{1}{2} \Delta (\lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2) w^2] dx\, dt. \tag{7.29}$$

Выразим члены

$$\int [\lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 |\nabla w|^2 - \lambda^4 \varphi^3 |\nabla \beta|^4 w^2]\, dx\, dt$$

через остальные члены равенства (7.29) и оценим последние, используя (7.23), (7.27):

$$\int\limits_Q [\lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla w|^2 - \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4 w^2]\,dx\,dt$$
$$\leqslant \int\limits_Q \left[\frac{1}{2}f_\lambda^2 + \frac{1}{6}|L_2 w|^2 + (c\lambda^4\varphi^2|\nabla\beta|^4 + c\lambda^2\varphi^3 + \lambda^3\varphi)w^2\right] dx\,dt$$
$$\leqslant \int \left(\frac{1}{6}|L_2 w|^2 + \varphi^{2s}e^{2\alpha}f^2 + \lambda^2\varphi^3 w^2\right) dx\,dt. \tag{7.30}$$

Удвоим обе части неравенства (7.30), сложим с (7.28) и перенесем в левую часть член с $\dfrac{1}{3}|L_2 w|^2$:

$$\|L_1 w\|^2_{L_2(Q)} + \|L_2 w\|^2_{L_2(Q)} + \int\limits_Q 6\lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4 w^2 dx\,dt$$
$$\leqslant c\int\limits_Q (\varphi^{2s}e^{2\alpha}f^2 + \lambda^3\varphi^3 w^2 + \lambda\varphi|\nabla w|^2)\,dx\,dt. \tag{7.31}$$

Умножая (7.9) скалярно в $L_2(Q)$ на $\lambda\varphi w$ и проводя выкладки, аналогичные (7.29) (7.30), получим оценку

$$\int\limits_Q \lambda\varphi|\nabla w|^2 dx\,dt \leqslant \frac{1}{2c}\|L_2 w\|^2_{L_2(Q)} + 3\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}f^2 dx\,dt$$
$$+ c_1\int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|w|^2 dx\,dt, \tag{7.32}$$

где c — константа из (7.31). Подставим (7.32) в правую часть (7.31) и перенесем член $\frac{1}{2}\|L_2 w\|^2$ налево. В результате получим неравенство

$$\|L_1 w\|^2_{L_2(Q)} + \|L_2 w\|^2_{L_2(Q)} + \int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^2|w|^2 dx\,dt$$
$$\leqslant c_2\int\limits_Q (\varphi^{2s}e^{2\alpha}f^2 + \lambda^3\varphi^3 w^2)\,dx\,dt. \tag{7.33}$$

В силу (7.4) справедливо равенство

$$\int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|w|^2 dx\,dt \leqslant c_1\int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2 dx\,dt + \int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^3\varphi^3|w|^2 dx\,dt. \tag{7.34}$$

Подставим (7.34) в правую часть (7.33). Увеличивая в случае необходимости λ, ввиду неравенства $\lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2 > c_2c_1\lambda^3\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2$ получим

$$\|L_1w\|^2_{L_2(Q)} + \|L_2w\|^2_{L_2(Q)} + \int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2dx\,dt$$
$$\leqslant c\Big(\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}f^2\,dx\,dt + \int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^3\varphi^3|w|^2dx\,dt\Big). \tag{7.35}$$

Из (7.35) и (7.4) следует оценка

$$\|L_1w\|^2_{L_2(Q)} + \|L_2w\|^2_{L_2(Q)} + \int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|w|^2dx\,dt$$
$$\leqslant c\Big(\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}f^2\,dx\,dt + \int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|w|^2dx\,dt\Big). \tag{7.36}$$

Оценим правую часть (7.32) с помощью (7.36):

$$\int\limits_Q \lambda\varphi|\nabla w|^2dx\,dt \leqslant c\Big(\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}f^2dx\,dt + \int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|w|^2dx\,dt\Big). \tag{7.37}$$

Умножая (7.10) на $(\sqrt{\varphi})^{-1}$ и оценивая с помощью (7.36), получим

$$\int\limits_Q \varphi^{-1}|\Delta w|^2dx\,dt \leqslant c\int\limits_Q (\varphi^{-1}|L_1w|^2 + (\lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4 + c\varphi^3)|w|)^2dx\,dt$$
$$\leqslant c\Big(\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}f^2\,dx\,dt + \int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|w|^2dx\,dt\Big). \tag{7.38}$$

Аналогично, умножая (7.11) на $(\sqrt{\lambda\varphi})^{-1}$ и оценивая с помощью (7.37), получим

$$\int\limits_Q (\lambda\varphi)^{-1}|\partial_t w|^2dx\,dt \leqslant c\Big(\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}f^2dx\,dt + \int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|w|^2dx\,dt\Big). \tag{7.39}$$

В силу определения (7.6) функции φ справедливы соотношения

$$\Delta(\varphi^{-1/2}w) = \varphi^{-1/2}(\Delta w - \lambda\Big(\nabla\beta,\nabla w) + \Big(\frac{\lambda^2}{4}(\nabla\beta)^2 - \frac{\lambda}{2}\Delta\beta\Big)w\Big),$$
$$(\varphi^{-1/2}w)\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7.40}$$

Применяя к решению $\varphi^{-1/2}w$ эллиптической краевой задачи (7.40) известные оценки, а к правой части полученного неравенства — оценки (7.36)–

(7.38) выведем неравенство

$$\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^d |\partial^2_{x_ix_j}(\varphi^{-\frac{1}{2}}w)|^2 dx\,dt \leqslant c\Big(\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}f^2 dx\,dt + \int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|w|^2 dx\,dt\Big). \tag{7.41}$$

Подставляя в оценки (7.36)–(7.39), (7.41) $w = e^{-\alpha}\varphi^s z$, получим (7.7). □

7.2. Случай уравнения Лапласа. Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа

$$\Delta p(t,x) = z(t,x), \quad (t,x) \in Q, \quad p\big|_\Sigma = 0. \tag{7.42}$$

Теорема 7.2. *Существует $\widehat{\lambda} > 1$ такое, что при любом $\lambda > \widehat{\lambda}$ и $s \geqslant -3$ решение p задачи* (7.42) *удовлетворяет карлемановской оценке*

$$\int\limits_Q (\varphi^{2s-1}\sum_{i,j=1}^d |\partial^2_{x_ix_j}p|^2 + \lambda\varphi^{2s+1}|\nabla p|^2 + \lambda^4\varphi^{2s+3}|p|^2)e^{-2\alpha_\lambda(t,x)}dx\,dt$$
$$\leqslant c\Big(\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha_\lambda}|z(t,x)|^2 dx\,dt + \int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^{2s+3}|p(t,x)|^2 e^{-2\alpha_\lambda}dx\,dt\Big). \tag{7.43}$$

Доказательство. Сделав в (7.42) замену $p = \varphi^{-s}e^{\alpha}w$, получим равенство (7.9), где

$$L_1 w = \Delta w + \lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 w, \quad L_2 w = -2\lambda(\varphi + s)(\nabla\beta, \nabla w) \tag{7.44}$$

и f_λ определена в (7.12). Все члены операторов (7.44) являются также членами соответствующих операторов (7.10), (7.11). Поэтому если для членов из (7.44) провести оценки в точности так же, как в доказательстве теоремы 7.1, то мы получим оценку (7.43). □

7.3. Случай уравнения для функции тока. Рассмотрим в $Q = (0,T) \times \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ задачу (3.2), (3.3):

$$\partial_t\Delta p(t,x) + \Delta^2 p(t,x) = g - B_2^*(\psi,p) - B_1^*(p,\psi), \tag{7.45}$$
$$p\big|_\Sigma = \Delta p\big|_\Sigma = 0, \tag{7.46}$$

где $\psi \in W^{1,2(2)}(Q)$ — заданная функция, а B_2^*, B_1^* определены равенствами (3.5), (3.6). Основным утверждением этого параграфа является

Теорема 7.3. *Существует $\widehat{\lambda} > 0$ такое, что при любом $\lambda > \widehat{\lambda}$ для функций p, f, удовлетворяющих* (7.45), (7.46) *справедлива оценка*

$$J(p) \equiv \int\limits_Q (\varphi^{-7}(|\partial_t \Delta p|^2 + \sum_{i,j=1}^{2} |\partial^2_{x_i x_j} \Delta p|^2) + \varphi^{-5}|\nabla \Delta p|^2$$
$$+ \varphi^{-3}|\Delta p|^2 + \sum_{k=0}^{4} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha_x p|^2 \varphi^{-2k}) e^{-2\alpha\lambda} dx\, dt$$
$$\leqslant c \int\limits_Q \varphi^{-6}|g|^2 e^{-2\alpha\lambda} dx\, dt + \int\limits_{Q^{\omega'}} (1+\lambda^{13})\varphi p^2 e^{-2\alpha\lambda} dx\, dt. \tag{7.47}$$

Доказательство. Положим

$$\Delta p(t,x) = z(t,x), \quad f = g - B_2^*(\psi, p) - B_1^*(p, \psi). \tag{7.48}$$

В силу (7.45), (7.46) функции z и f удовлетворяют (7.1), и согласно теореме 7.1 справедливо неравенство (7.7) с $s = -3$. Так как p и z удовлетворяют (7.48), (7.46), вследствие теоремы 7.2 справедлива оценка (7.43) при $s = -3/2$. Из (7.7) при $s = -3$ и (7.43) при $s = -3/2$ следует неравенство

$$J_0(p) \equiv \int\limits_Q e^{-2\alpha}(\varphi^{-7}(\lambda^{-1}|\partial_t \Delta p|^2 + \sum_{i,j=1}^{2} |\partial^2_{x_i x_j} \Delta p|^2) + \lambda\varphi^{-5}|\nabla \Delta p|^2$$
$$+ \lambda^4 \varphi^{-3}|\Delta p|^2 + \varphi^{-4} \sum_{i,j=1}^{2} |\partial^2_{x_i x_j} \Delta p|^2 + \lambda\varphi^{-2}|\nabla p|^2 + \lambda^4 |p|^2)\, dx\, dt$$
$$\leqslant c\Bigg(\int\limits_Q e^{-2\alpha}(|f|^2\varphi^{-6} + |\Delta p|^2\varphi^{-3})\, dx\, dt$$
$$+ \int\limits_{Q^{\omega'}} e^{-2\alpha}(\lambda^4|p|^2 + \lambda^4\varphi^{-3}|\Delta p|^2) dx\, dt\Bigg). \tag{7.49}$$

Пусть $\rho(x) \in C_0^\infty(\omega)$, $\rho(x) \equiv 1$ при $x \in \omega'$. Тогда

$$\int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^{-3}|\Delta p|^2 e^{-2\alpha} dx\, dt \leqslant \int\limits_{Q^\omega} \rho\lambda^4\varphi^{-3} e^{-2\alpha}|\Delta p|^2 dx\, dt$$
$$= \int\limits_{Q^\omega} \lambda^4 p \Delta(\rho\varphi^{-3}e^{-2\alpha}\Delta p)\, dx\, dt$$
$$\leqslant c \int\limits_{Q^\omega} (\lambda^6\varphi^{-1}|p\Delta p| + \lambda^5|p||\nabla\Delta p|\varphi^{-2} + |p\Delta^2 p|\lambda^4\varphi^{-3}) e^{-2\alpha} dx\, dt$$

$$\leqslant c \int\limits_{Q^\omega} e^{-2\alpha}[\varepsilon(\lambda^4\varphi^{-3}|\Delta p|^2 + \lambda\varphi^{-5}|\nabla\Delta p|^2 + \varphi^{-7}|\Delta^2 p|^2)$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}(\lambda^8 + \lambda^9)\varphi p^2]\, dx\, dt. \tag{7.50}$$

Подставляя (7.50) в правую часть неравенства (7.49), выбирая в полученном неравенстве достаточно малое ε и увеличивая в случае необходимости λ, выводим оценку

$$J_0(p) \leqslant c\Big(\int\limits_Q e^{-2\alpha}\varphi^{-6}|f|^2 dx\, dt + \int\limits_{Q^\omega} e^{-2\alpha}\varphi\lambda^9 p^2 dx\, dt\Big), \tag{7.51}$$

где величина J_0 определена в (7.49).

Для оценки членов последней суммы в левой части неравенства (7.47) запишем тождества

$$\Delta(\varphi^{-3}e^{-\alpha}p) = f_1, \quad (\varphi^{-3}e^{-\alpha}p)\big|_\Sigma = 0, \tag{7.52}$$

где

$$f_1 = \varphi^{-3}e^{-\alpha}\Delta p + 2(\nabla(\varphi^{-3}e^{-\alpha}), \nabla p) + \Delta(\varphi^{-3}e^{-\alpha})p. \tag{7.53}$$

Применяя к решению задачи Дирихле (7.52) соответствующую оценку и учитывая (7.53), получим

$$\int\limits_Q \sum_{|\alpha|=3} |D_x^\alpha(\varphi^{-3}e^{-\alpha}p)|^2 dx\, dt \leqslant c\|f_1\|^2_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \leqslant c\lambda J_o(p). \tag{7.54}$$

Применив к левой части (7.54) правило Лейбница дифференцирования произведения функций и простые оценки, из (7.54) выводим

$$\int\limits_Q e^{-2\alpha}\varphi^{-6} \sum_{|\alpha|=3} |D_x^\alpha p|^2 dx\, dt \leqslant c\lambda^2 J_o(p). \tag{7.55}$$

Точно так же, подставляя в (7.52) φ^{-4} вместо φ^{-3}, а в (7.54) суммируя по $|\alpha| = 4$ вместо $|\alpha| = 3$, получим оценку

$$\int\limits_Q e^{-2\alpha}\varphi^{-8} \sum_{|\alpha|=4} |D^\alpha p_x|^2 dx\, dt \leqslant c\lambda^4 J_o(p). \tag{7.56}$$

Из оценок (7.51), (7.55), (7.56) функционала $J_0(p)$, определенного в (7.49), следует неравенство

$$J(p) \leqslant c\Big(\int\limits_Q e^{-2\alpha}(1+\lambda^4)\varphi^{-6}|f|^2 dx\, dt + \int\limits_{Q^\omega} e^{-2\alpha}(1+\lambda^{13})\varphi p^2 dx\, dt\Big), \tag{7.57}$$

где c зависит от λ.

Оценим член $B_2^* + B_1^*$, входящий в определение f из (7.48). Дифференцируя произведение в (3.5), (3.6) и приводя подобные члены, получим

$$B_1^*(p,\psi) + B_2^*(\psi,p) = (\partial_{x_1}\Delta p)\partial_{x_2}\psi - (\partial_{x_2}\Delta p)\partial_{x_1}\psi$$
$$+ 2((\nabla\partial_{x_1}p)(\nabla\partial_{x_2}\psi) - (\nabla\partial_{x_2}p)(\nabla\partial_{x_1}\psi)). \tag{7.58}$$

В силу теорем вложения

$$\int\limits_Q e^{-2\alpha}\varphi^{-6}(1+\lambda^4)|\nabla\Delta p|^2|\nabla\psi|^2 dx\,dt$$
$$\leqslant c\|\psi\|_{W^{1,2(2)}(Q)}\int\limits_Q e^{-2\alpha}\varphi^{-6}(1+\lambda^4)|\nabla\Delta p|^2 dx\,dt. \tag{7.59}$$

Опять используя теоремы вложения, получим

$$\int\limits_Q e^{-2\alpha}\varphi^{-6}(1+\lambda^4)|\partial^2_{x_ix_j}p|^2|\partial^2_{x_ix_k}\psi|^2 dx\,dt$$
$$\leqslant (1+\lambda^4)\int\limits_0^T \|e^{-\alpha}\varphi^{-3}\partial^2_{x_ix_j}p\|^2_{L_4(\Omega)}\|\partial^2_{x_ix_k}\psi\|^2_{L_4(\Omega)}dt$$
$$\leqslant c(1+\lambda^4)\|\psi\|^2_{L_\infty(0,T;H^3(\Omega))}\int\limits_0^T \|e^{-\alpha}\varphi^{-3}\partial^2_{x_ix_j}p\|_{H^1(\Omega)}\|e^{-\alpha}\varphi^{-3}\partial^2_{x_ix_j}p\|_{L_2(\Omega)}\,dt$$
$$\leqslant c(1+\lambda^4)\|\psi\|^2_{W^{1,2(2)}(Q)}\Bigg(\varepsilon\int\limits_Q e^{-2\alpha}\sum_{k=2}^{3}\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha_x p|^2\varphi^{-2k}dx\,dt$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_Q e^{-2\alpha}\varphi^{-6}|\partial^2_{x_ix_j}p|^2 dx\,dt\Bigg). \tag{7.60}$$

Подставляя в правую часть (7.57) выражение из (7.48) для f и используя (7.58)–(7.60), получим неравенство

$$J(p) \leqslant c\Bigg(\int\limits_Q e^{-2\alpha}(1+\lambda^4)(\varphi^{-6}|g|^2 + \varphi^{-6}|\nabla\Delta p|^2 + c_1\varepsilon\sum_{k=2}^{3}\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha_x p|^2\varphi^{-2k}$$
$$+\frac{c_1}{\varepsilon}\varphi^{-6}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha_x p|^2)dx\,dt + \int\limits_{Q^\omega} e^{-2\alpha}(1+\lambda^{13})\varphi p^2 dx\,dt\Bigg). \tag{7.61}$$

Выберем достаточно малое ε в (7.61) и перенесем члены с множителем ε в левую часть. С учетом определения (7.47) функционала J получим

$$J(p) \leqslant c_2\Bigg(\int\limits_Q e^{-2\alpha}(1+\lambda^4)(\varphi^{-6}|g|^2 + \varphi^{-6}|\nabla\Delta p|^2$$
$$+ \frac{c_1}{\varepsilon}\varphi^{-6}\sum_{|\alpha|=2}|D_x^\alpha p|^2)\,dx\,dt + \int\limits_{Q^\omega} e^{-2\alpha}(1+\lambda^{13})\varphi p^2\,dx\,dt\Bigg). \tag{7.62}$$

Перенесем все члены, содержащие производные p, из правой части в левую часть (7.62). Учитывая (7.47), (7.6) (определение φ) и увеличивая, если потребуется, λ в (7.62), из полученного неравенства выводим (7.47). □

7.4. Окончательный результат. Для задачи (7.45), (7.46) поставим начальное условие при $t_0 \in (0,T)$:

$$p\big|_{t=t_0} = p_0, \tag{7.63}$$

где $p_0 \in H^3(\Omega)$ удовлетворяет условиям согласования

$$p_0\big|_{\partial\Omega} = \Delta p_0\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{7.64}$$

и рассмотрим задачу (7.45), (7.46), (7.63) при $(t,x) \in (0,t_0)\times\Omega$.

Лемма 7.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\psi \in W^{1,2(2)}(Q)$, $g \in L_2(Q)$, $p_0 \in H^3(\Omega)$ удовлетворяет* (7.64). *Тогда задача* (7.45), (7.46), (7.63) *имеет единственное решение $p \in W^{1,2(2)}((0,t_0)\times\Omega)$. При этом справедлива оценка*

$$\|p\|^2_{W^{1,2(2)}((0,t_0)\times\Omega)} \leqslant c(\|p_0\|^2_{H^3(\Omega)} + \|g\|^2_{L_2((0,t_0)\times\Omega)}), \tag{7.65}$$

где константа c не зависит от p_0 и g.

Лемма 7.2 доказывается аналогично лемме 4.4. □

Доказательство теоремы 3.1. Обозначим через $R(p)e^{-2\eta_\lambda}$ подынтегральное выражение в левой части неравенства (3.9):

$$I_\lambda(p) \equiv \int\limits_Q R(p)(t,x)e^{-2\eta_\lambda(t,x)}\,dt\,dx, \tag{7.66}$$

где $I_\lambda(p)$ определено в (3.9). Пусть T_0 — число, заданное в (7.2). При $t \in (0, T-T_0)$ функции $(T-t)$ и η^λ из (2.26) ограничены сверху и снизу положительными константами, зависящими лишь от λ. Поэтому в силу

(3.2), (3.3) и оценки (7.65)

$$I_\lambda(p) \leqslant c_1\Bigg(\int\limits_{T-T_0}^{T}\int\limits_{\Omega} R(p)(t,x)e^{-2\eta_\lambda(t,x)}\,dt\,dx + \|p\|^2_{W^{1,2(2)}((0,T-T_0)\times\Omega)}\Bigg)$$
$$\leqslant c_1\int\limits_{T-T_0}^{T}\int\limits_{\Omega} R(p)(t,x)e^{-2\eta_\lambda(t,x)}\,dt\,dx + c(\|p(T-T_0,\cdot)\|^2_{H^3(\Omega)}$$
$$+\|w\|^2_{L_2((0,T-T_0)\times\Omega)}). \tag{7.67}$$

Обозначив подынтегральное выражение в левой части неравенства (7.47) через $R_1(p)e^{-2\alpha_\lambda}$, запишем

$$J(p) = \int\limits_{Q} R_1(p)(t,x)e^{-2\alpha_\lambda(t,x)}dx\,dt, \tag{7.68}$$

где $J(p)$ определено в (7.47). Из (7.64) и оценок решений задачи Дирихле для оператора Лапласа следует оценка $\|p_0\|^2_{H^3(\Omega)} \leqslant c\|\Delta p_0\|^2_{H^1(\Omega)}$. Из этой оценки, теоремы о следах и определения (7.68) функции R_1 имеем

$$\|p(T-T_0,\cdot)\|^2_{H^3(\Omega)} \leqslant c_1\|\Delta p\|^2_{W^{1,2(0)}((T-T_0-\varepsilon,T-T_0)\times\Omega)}$$
$$\leqslant c_2\int\limits_{0}^{T-T_0}\int\limits_{\Omega} R_1(p)(t,x)e^{-2\alpha_\lambda(t,x)}dx\,dt. \tag{7.69}$$

Из (7.67), (7.69), сравнивая определения (2.26) и (7.6) функций η и α, а также определения (7.66) и (7.68) функций $R(p)$ и $R_1(p)$, получаем

$$I_\lambda(p) \leqslant c(J(p) + \|w\|^2_{L_2((0,T-T_0)\times\Omega)}). \tag{7.70}$$

Применяя к правой части (7.70) оценку (7.47), в которой в силу (7.45), (3.2) g заменено на $-e^{2\eta_\lambda(t,x)}w/(T-t)^6$, получим оценку (3.9). □

Доказательство леммы 7.1. Выберем функцию $\beta_0(x) \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющую условию

$$(\nabla\beta_0(x), n(x)) \leqslant -1, \quad x \in \partial\Omega, \tag{7.71}$$

где $n(x)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Напомним, что функция $\varphi(x) \in C^\infty(M)$, определенная на компактном гладком многообразии M, называется *функцией Морса*, если она имеет лишь конечное множество критических точек, т. е. точек $x_j \in M$ таких, что $\nabla\varphi(x_j) = 0$ ($d\varphi(x_j) = 0$ в инвариантной записи), причем все эти точки не вырождены, т. е. матрица $\left(\dfrac{\partial^2\varphi(x_j)}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\right)$ невырождена (симметричная билинейная форма $d^2\varphi(x_j)$ на касательном пространстве $T_{x_j}M$ не вырождена). Как известно (Дубровин, Новиков, Фоменко [1, с. 488]), функции Морса плотны в $C^2(\Omega)$.

Заключив Ω в квадрат и отождествив соответствующим образом стороны квадрата, получим, что Ω является областью на двумерном торе M^2.

Продолжим $\beta_0(x)$ до функции из $C^2(M^2)$ и применим к полученной функции теорему о плотности функций Морса. В итоге получим, что существует последовательность функций Морса $\beta_j(x)$ таких, что $\|\beta_j - \beta_0\|_{C^2(\overline{\Omega})} \to 0$ при $j \to \infty$. Следовательно, в силу (7.71) можно выбрать функцию Морса $\widehat{\beta}(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, так, что

$$(\nabla\widehat{\beta}(x), n(x)) \leqslant -1/2 \quad \forall\, x \in \partial\Omega. \tag{7.72}$$

Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — невырожденные критические точки функции $\widehat{\beta}(x)$, принадлежащие $\overline{\Omega}$. В силу (7.72) $x_j \notin \partial\Omega$, $j = 1, \ldots, r$.

Выберем попарно непересекающиеся гладкие кривые $l_j(t)$, соединяющие x_j с подобластью $\omega' \subset \Omega$:

$$l_j(\cdot) \cap l_k(\cdot) = \varnothing\ \forall j \neq k, \quad l_j(\cdot) \cap \partial\Omega = \varnothing\ \forall j, \quad l_j(1) = x_j, \quad l_j(0) \in \omega'. \tag{7.73}$$

Предположим, что кривые $l_j(t)$ не имеют самопересечений $l_j(t_1) \neq l_j(t_2)$ при любых $t_1 \neq t_2$. Если $x_j \in \omega'$, то положим $l_j(t) \equiv x_j$. Для каждого l_j построим финитную функцию $\varphi_j(x) \in C^2(\Omega)$ такую, что $l_j \subset \operatorname{supp}\varphi_j$, $\varphi_j\big|_{l_j} \equiv 1$, $\operatorname{supp}\varphi_j \cap \operatorname{supp}\varphi_k = \varnothing$ при всех $j \neq k$, $\operatorname{supp}\varphi_j \cap \partial\Omega = \varnothing$. Кроме того, на множестве $\operatorname{supp}\varphi_j$ построим невырожденное векторное поле $v_j(x)$ так, чтобы кривая $l_j(t)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} l_j(t) = v_j(l_j(t)). \tag{7.74}$$

(Чтобы построить $v_j(x)$, достаточно продолжить векторное поле w_j, касательное к кривой $l_j(\cdot)$, с l_j до невырожденного векторного поля, заданного на $\operatorname{supp}\varphi_j$. Невырожденности векторного поля w_j и выполнения условия $l_j(1) = x_j$, $l_j(0) \subset \omega'$ можно достичь подходящим выбором параметризации кривой $l_j(t)$. Поле $v_j(x)$, соответствующее кривой $l_j(t) \equiv x_j \in \omega'$, считаем тождественно равным нулю.)

Зададим на Ω векторное поле $v(x)$ с помощью соотношения

$$v(x) = \sum_{j=1}^{r} \varphi_j(x) v_j(x). \tag{7.75}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d}{dt} l(t) = v(l(t)), \quad l\big|_{t=0} = x \tag{7.76}$$

и решение этой задачи обозначим через $l(t, x)$. Очевидно, что отображение $x \mapsto l(1, x)$ является диффеоморфизмом Ω, совпадающим с тождественным отображением в окрестности границы $\partial\Omega$. Определим функцию

$$\beta(x) = \widehat{\beta}(l(1, x)) \tag{7.77}$$

и покажем, что эта функция удовлетворяет всем условиям леммы 7.1. Через y_j обозначим точки такие, что $l(1, y_j) = x_j$. В силу (7.73)–(7.76), $y_j \in \omega'$,

$j = 1, \ldots, r$, и соотношений

$$\nabla\beta(x)\big|_{x=y_j} = \nabla\widehat{\beta}(x_j)\frac{\partial l(1,x)}{\partial x}\bigg|_{x=y_j} = 0 \tag{7.78}$$

y_j, $j = 1, \ldots, r$ — критические точки функции $\beta(x)$. Из (7.78) легко вывести, что других критических точек у $\beta(x)$ нет. Так как $y_j \in \omega'$, в $\Omega \setminus \omega'$ функция $\beta(x)$ критических точек не имеет. В окрестности границы $\partial\Omega$ имеем $l(1,x) = x$. Поэтому из (7.77), (7.72) следует (7.3). □

§ 8. Комментарии

Литература по точной управляемости эволюционных уравнений в частных производных довольно обширна (см. обзор литературы в Фурсиков, Эмануилов [12]). Мы ограничимся лишь упоминанием работ Рассел [1]; Фатторини [2]; Сейдман [1]; Эмануилов [5]; Лебо, Роббиано [1] по точной управляемости параболических уравнений и книги Лионс [5] по точной управляемости гиперболических уравнений и перейдем к точной управляемости уравнений, моделирующих течение жидкости, составляющих содержание гл. 7.

Локальная точная управляемость для уравнения Бюргерса доказана в Фурсиков, Эмануилов [7]. Та же задача в случае уравнений Навье — Стокса и $\widehat{y} = 0$ изучена Фурсиковым и Эмануиловым [6] в случае $n = 2$ и Фурсиковым [14] при $n = 3$. Локальная точная управляемость системы Навье — Стокса при $n = 2$ и $n = 3$ в случае $\widehat{y} \neq 0$ и системы Буссинеска доказана Фурсиковым, Эмануиловым [8–10]. Глобальная точная управляемость двумерной системы уравнений Эйлера установлена Короном [1, 2], и глобальная аппроксимативная управляемость двумерных уравнений Навье — Стокса доказана Короном [3].

Глобальная точная управляемость уравнений Навье — Стокса, заданных на двумерном компактном многообразии без границы, установлена Короном и Фурсиковым [1]. Глобальная точная управляемость двумерных и трехмерных уравнений Навье — Стокса и Буссинеска доказана Фурсиковым, Эмануиловым [12]. Глава 7 написана по статье Фурсикова, Эмануилова [10].

Литература

Ф. Абержел, Р. Темам (F. Abergel and R. Temam)

[1] On some control problems in fluid mechanics. *Theoret. Comput. Fluid Dynam.*, **1**, 1990, 303–325.

С. Агмон (S. Agmon)

[1] On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, **15**, 1962, 119–147.

М. С. Агранович, М. И. Вишик

[1] Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. *Успехи мат. наук*, **19**, вып. 3, 1964, 43–161.

Р. Адамс (R. Adams)

[1] *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

Ю. Л. Александров

[1] О существовании решений некоторого класса задач управления системами с распределенными параметрами. *Вестник Моск. ун-та* Сер. 1. Математика, механика, N 5, 1985, 24–28.

В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин

[1] *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979.

В. Барбу (V. Barbu)

[1] *Analysis and Control of Nonlinear Infinite Dimensional Systems*, Academic Press, Boston, 1993.

[2] *Mathematical Methods in Optimization of Differential Systems*, Kluwer, Dordrecht, 1994.

[3] Optimal control of Navier–Stokes equations with periodic inputs. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **31**, 1998, N 1–2, 15–31.

[4] The time optimal control of Navier-Stokes equations. *Systems Control Lett.*, **30**, 1997, 93–100

Н. С. Бахвалов

[1] *Численные методы*, Наука, М., 1973.

А. Бенсуссан (A. Bensoussan)

[1] *Perturbation methods in optimal control*, Gauthier-Villars, Paris, 1988.

О. В. Бесов

[1] Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. *Труды мат. инст. Стеклова*, **60**, 1961, 42–81.

О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский

[1] *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.

А. Г. Бутковский

[1] *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1965.

Ф. П. Васильев

[1] *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1988.

М. И. Вишик

[1] О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков. *Мат. сб.*, **59**, 1962, 289–325.

[2] Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющих дивергентную форму. *Труды моск. мат. общества*, **12**, 1963, 125–184.

М. И. Вишик, А. В. Фурсиков

[1] *Математические задачи статистической гидромеханики*, Наука, М., 1980.

И. И. Ворович, В. И. Юдович

[1] Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости. *Мат. сб.*, **53**, 1961, N 4, 393–428.

Э. Гальярдо (E. Gagliardo)

[1] Свойства некоторых классов функций многих переменных. *Математика*, **5**, 1961, N 4, 87–116

М. Ганзбургер, Л. Хоу, Т. Свободни (M. Gunzburger, L. Hou, and T. Svobodny)

[1] Analysis and finite element approximation of optimal control problems for the stationary Navier — Stokes equations with Dirichlet controls. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, **25**, 1991, N 6, 711–748

[2] Analysis and finite element approximation of optimal control problems for the stationary Navier — Stokes equations with distributed and Neumann controls, *Math. Comp.*, **57**, 1991, 123–151.

[3] Boundary velocity control of incompressible flow with an application to viscous drag reductions. *SIAM J. Control Optim.*, **30**, 1992, N 1, 167–181.

И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов

[1] *Обобщенные функции*, Вып. 1, Физматгиз, М., 1959.

В. И. Гишларкаев

[1] Единственность решения краевых задач для одного уравнения с нерегулярными коэффициентами. *Успехи мат. наук*, **48**, 1993, вып. 5, 169–170.

И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн

[1] *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965.

Ж. И. Диаз, А. В. Фурсиков (J. I. Diaz and A. V. Fursikov)

[1] Approximate controllability of the Stokes system on cylinders by external unidirectional forces. *J. Math. Pures Appl.*, **76**, 1997, N 4, 353–375.

Ю. А. Дубинский

[1] Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях. *Мат. сб.*, **67**, 1965, N 4, 609–642.

А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин

[1] Задачи на экстремум при наличии ограничений. *ЖВМ и МФ*, **5**, 1965, N 3, 395–453.

[2] Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенств. *ЖВМ и МФ*, **8**, 1968, N 4, 725–779.

Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко

[1] *Современная геометрия*, Наука, М., 1979.

Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс (G. Duvaut and J.-L. Lions)

[1] *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980.

А. И. Егоров

[1] *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*, Наука, М., 1978.

В. Жиро, П. А. Равиар (V. Girault and P.-A. Raviart)

[1] *Finite Element Methods for Navier — Stokes Equations. Theory and Algorithms*, Springer, Berlin, 1986.

Дж. Забкзик (J. Zabczyk)

[1] *Mathematical Control Theory: an Introduction.* Birkhäuser, Boston, 1992.

Н. Зор, В. фон Вал (N. Sohr and W. von Wahl)

[1] *Generic solvability of the equations of Navier — Stokes. Hiroshima Math. J.*, **17**, 1987, N 3, 613–625.

В. И. Иваненко, В. С. Мельник

[1] *Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами*, Наукова Думка, Киев, 1988.

В. К. Иванов

[1] О некорректно поставленных задачах. *Мат. сб.*, **63**, 1963, N 2, 211–223.

К. Иосида (K. Yosida)

[1] *Функциональный анализ*, Мир., М., 1967.

К. Иосида, Е. Хьюитт (K. Yosida and E. Hewitt)

[1] Finitely additive measures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72**, 1952, 46–66.

А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров

[1] *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974.

В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская

[1] Явление колланса для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типа. *Записки научн. семинаров ЛОМИ*, **69**, 1977, 77–102.

Т. Карлеман (T. Carleman)

[1] *Les fonctions quasi analytiques*, Paris, 1926.

Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья (D. Kinderlehrer and G. Stampacchia)

[1] *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983.

П. Константин, Ч. Фойаш (P. Constantin and C. Foias)

[1] *Navier — Stokes Equations*, Univ. Chicago Press, Chicago, 1988.

Ж.-М. Корон (J.-M. Coron)

[1] Contrólabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels. *C. R. Acad. Sci.* Paris Sér. I Math., **317**, 1993, N 3, 271–276.

[2] On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids. *J. Math. Pures Appl.*, **75**, 1996, N 2, 155–188.

[3] On the controllability of the 2-D incompressible Navier — Stokes equations with the Navier slip boundary conditions. *ESIAM Control Optim. Calc. Var.*, **1**, 1996, 35–75

Ж.-М. Корон, А. В. Фурсиков (J.-M. Coron and A. V. Fursikov)

[1] Global exact controllability of the 2-D Navier — Stokes equations on a manifold without boundary. *Russian J. Math. Phys.*, **4**, 1996, N 4, 429–448.

К. Кувельер (K. Cuvelier)

[1] Optimal control of a system governed by the Navier — Stokes equations coupled with the heat equation. *New Development in Differential Equations* (*Proc. Second Scheveningen Conf., Scheveningen*, 1975), North–Holland, Amsterdam, 1976, 81–98.

Р. Курант

[1] *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.

М. М. Лаврентьев

[1] О задаче Коши для уравнения Лапласа. *Изв. АН. СССР* Сер. мат., **20**, 1956, 819–842.

[2] *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский

[1] *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, М., 1980.

Ж. Лагранж

[1] *Аналитическая механика*, М.-Л., ГИТТЛ, 1950.

О. А. Ладыженская

[1] *Математическая теория вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970.

О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева

[1] *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.

И. Лазиешка, Р. Триджиани (I. Lasiecka and R. Triggiani)

[1] *Differential and Algebraic Riccati Equations with Application to Boundary/Point Control Problems: Continuous Theory and Approximation Theory.* Lecture Notes Control Inform. Sci. **164**, Springer–Verlag, Berlin, 1991.

[2] *Deterministic Control Theory for Partial Differential Equations*, Vol. 1, Cambridge Univ. Press, Boston, 1998.

Е. М. Ландис

[1] Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений (случай нескольких независмых переменных). *Успехи мат. наук*, **18**, 1963, вып. 1, 3–62.

Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс (R. Lattes and J.-L. Lions)

[1] *Метод квазиобращения и его приложения*, Мир, М., 1970.

Ж. Лебо, Р. Роббиано (G. Lebeau and L. Robbiano)

[1] Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. Partial Differential Equations*, **20**, 1995, N 1–2, 335–356.

Г. А. Левайн (H. A. Levine)

[1] Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **51**, 1973, 371–386.

В. Л. Левин

[1] *Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математической экономике*, Наука, М., 1985.

Х. Ли, Дж. Йонг (X. Li and J. Yong)

[1] *Optimal Control Theory for Unifinite Dimensional Systems*, Birkhäuser, Boston, 1995.

Ж.-Л. Лионс (J.-L. Lions)

[1] *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.

[2] *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972.

[3] *Управление сингулярными распределенными системами*, Наука, М., 1987.

[4] Remarques sur la controlabilité approchée. *Control of Distributed Systems* (*Malaga, Spain*, 1990), Grupo Anal. Mat. Apl. Univ. Malaga, **3**, Univ. Malaga, Malaga, 1990, 77–87.

[5] *Controlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, Vol. 1, Masson, Paris, 1988.

Ж.-Л. Лионс, Е. Зуазуа (J.-L. Lions, E. Zuazua)

[1] A generic uniqueness result for the Stokes system and its control theoretical consequences. *Partial Differential Equations and Application*, **177**, Lecture Notes Pure Appl. Math., Marcel Dekker, New York, 1996, 221–235.

Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес (J.-L. Lions and E. Magenes)

[1] Problèmes aux limites non homogènes. I. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat.*, **14**, 1960, 269–308; II. *Ann. Inst. Fourier*, **11**, 1961, 137–178; III. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat.*, **15**, 1961, 41–103; IV. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat.*, **15**, 1961, 311–326; V. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat.*, **16**, 1962, 1–44; VI. *J. Anal. Math.*, **11**, 1963, 165–188; VII. *Ann. Mat. Pura Appl.*, **63**, 1963, 201–224.

[2] *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.

[3] *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Vol. 2, Dunod, Paris, 1968.

В. Г. Литвинов

[1] *Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике*, Наука, М., 1987.

Л. А. Люстерник

[1] Об условных экстремумах функционалов. *Мат. сб.*, **41**, 1934, вып. 3, 390–401.

Э. Мадженес (E. Magenes)

[1] Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных. *Успехи мат. наук*, **21**, 1966, вып. 2, 169–218.

С. Н. Мергелян

[1] Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа. *Успехи мат. наук*, **11**, 1956, вып. 5, 3–26.

С. Мизохата (S. Mizohata)

[1] *Теория уравнений с частными производными*, Мир, М., 1977.

П. Неиттаанмаки, Д. Тиба (P. Neittaanmäki and D. Tiba)

[1] *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems. Theory, Algorithms, and Applications*, Marcel Dekker, New York, 1994.

У. Ё. Райтум

[1] *Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. Математические вопросы*, Зинатне, Рига, 1989.

Д. Рассел (D. Russell)

[1] Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions. *SIAM Review*, **20**, 1978, 639–739.

П. Х. Ривера, К. Ф. Васконселлос (P. H. Rivera and C. F. Vasconcellos)

[1] Optimal Control for a backward parabolic systems. *SIAM J. Control Optim.*, **25**, 1987, N 5, 1163–1172.

Р. Рокафеллар (R. Rockafellar)

[1] *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.

А. Романович, А. В. Фурсиков

[1] К вопросу разрешимости задачи Коши для оператора Лапласа. *Вестник Моск. ун-та* Сер. 1. Математика, механика, N 3, 1987, 78–80.

Т. Сейдман (T. Seidman)

[1] Two results on exact boundary control of parabolic equations. *Appl. Math. Optim.*, **11**, 1984, N 2, 145–152.

Ж. Серрин (J. Serrin)

[1] Mathematical principles of classical fluid mechanics *Handbuch der Physik*, Vol. 8/1, Springer–Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1959, 125–263.

С. Л. Соболев

[1] *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988.

В. А. Солонников

[1] Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа. *Труды мат. инст. Стеклова*, **70**, 1964, 133–212.

[2] Оценки тензоров Грина для некоторых граничных задач. *Докл. АН СССР*, **130**, 1960, N 5, 988–991.

С. Сризаран (S. Sritharan)

[1] An optimal control problem in exterior hydrodynamics. *Distributed Parameter Control Systems* (*Minneapolis, MN*, 1989), Lecture Notes Pure Appl. Math., **128**, Marcel Dekker, New York, 1991, 385–417.

[2] Dynamic programming of the Navier — Stokes equations. *Systems Control Lett.*, **16**, 1991, N 4, 299–307.

[3] An optimal control problem in exterior hydrodynamics. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* Sect. A, **121**, 1992, N 1–2, 5–32.

Д. Татару (D. Tataru)

[1] Carleman estimates and unique continuation for solutions to boundary value problems. *J. Math. Pures Appl.*, **75**, 1996, N 4, 367–408.

Р. Темам (R. Temam)

[1] *Уравнения Навье — Стокса*, Мир, М., 1981.

В. М. Тихомиров (V. M. Tikhomirov)

[1] *Fundamental principles of the theory of external problems*, Wiley, Chichester, 1986.

А. Н. Тихонов

[1] Об устойчивости обратных задач. *Докл. АН СССР*, **39**, 1943, N 5, 195–198.

А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин

[1] *Методы решений некорректных задач*, Наука, М., 1974.

Х. Трибель (H. Triebel)

[1] *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.

С. В. Успенский

[1] Теоремы вложения для обобщенных классов W_p^r Соболева. *Сиб. мат. журн.*, **3**, 1962, N 3, 418–445.

К. Фабрэ, Ж.-П. Пуэль, Э. Зуазуа (C. Fabre, J.-P. Puel, and E. Zuazua)

[1] Contróllabilité approchée de l'équation de la chaleur semi-linéaire. *C. R. Acad. Sci.* Paris Sér. I Math., **315**, 1992, N 7, 807–812.

[2] Approximate controllability of the semilinear heat equation. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* Sect. A, **125**, 1995, N 1, 31–61.

Г. О. Фатторини (H. O. Fattorini)

[1] Boundary control systems. *SIAM J. Control*, **6**, 1968, 349–385.

[2] Boundary control of temperature distributions in a parallepipedon. *SIAM J. Control*, **13**, 1975, 1–13.

[3] The maximum principle for linear infinite dimensional control systems with state constraints. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **1**, 1995, N 1, 77–101.

[4] Optimal control problems with state constraints for distributed parameter systems: the parabolic case (to appear).

Г. Фатторини, С. Сризаран (H. Fattorini and S. Sritharan)

[1] Existence of optimal controls for viscous flow problems. *Proc. Roy. Soc. London* Ser. A, **439**, 1992, 81–102.

[2] Necessary and sufficient conditions for optimal controls in viscous flow problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* Sect. A, **124**, 1994, N 2, 211–251.

[3] Optimal chattering control for viscous flows. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **25**, 1995, N 8, 763–797.

[4] Optimal control theory for viscous flow problems. *Control and optimal design of distributed parameter systems* (*IMA Volume Math. Appl.*), **70**, Springer–Verlag, New York, 1995, 93–111.

[5] Optimal control problems with state constraints in fluid mechanics and combustion. *Appl. Math. Optim.*, **38**, 1998, N 2, 159–192.

Ч. Фойаш (C. Foias)

[1] Statistical study of Navier — Stokes equations. I. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, **48**, 1972, 219–348.

Х. Фуджита (H. Fujita)

[1] On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* Sect. IA Math., **13**, 1966, 109–124.

А. В. Фурсиков (A. V. Fursikov)

[1] Об одной задаче управления и о результате, касающемся однозначной разрешимости трехмерной системы Навье — Стокса. *Успехи мат. наук*, **35**, 1980, вып. 4, 148.

[2] О некоторых задачах управления и о результатах, касающихся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных систем Навье — Стокса и Эйлера. *Докл. АН СССР*, **252**, 1980, N 5, 1066–1070.

[3] Задачи управления и теоремы, касающиеся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных систем Навье — Стокса и Эйлера. *Мат. сб.*, **115**, 1981, N 2, 281–307.

[4] Свойства решений некоторых задач управления, связанных с системой Навье — Стокса. *Докл. АН СССР*, **262**, 1982, N 1, 44–48.

[5] Свойства решений некоторых экстремальных задач, связанных с системой Навье — Стокса. *Мат. сб.*, **118**, 1982, N 3, 323–349.

[6] Некоторые вопросы теории управления нелинейными системами с распределенными параметрами. *Труды сем. им. Петровского*, N 9, 1983, 167–189.

[7] Задача Коши для эллиптического уравнения второго порядка в условно-корректной постановке. *Труды моск. матем. общества*, **52**, 1989, 137–174.

[8] О проблеме замыкания цепочки моментных уравнений в случае больших чисел Рейнольдса. *Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа*, Изд-во ин-та матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1990, 231–250.

[9] Проблемы замыкания цепочки моментных уравнений, соответствующих трехмерной системе Навье — Стокса в случае больших чисел Рейнольдса. *Докл. АН СССР*, **319**, 1991, N 1, 83–87.

[10] The closure problem for the chain of the Friedman — Keller moment equations in the case of large Reynolds numbers. *The Navier — Stokes equations.* II. *Theory and Numerical Methods* (*Oberwolfach*, 1991), Lecture Notes Math., **1530**, Springer, Berlin, 1991, 226–245.

[11] Моментная теория для уравнений Навье — Стокса со случайной правой частью. *Изв. РАН*, Сер. мат., **56**, 1992, N 6, 1273–1315.

[12] Lagrange principle for problems of optimal control of ill posed or singular distributed systems. *J. Math. Pures Appl.*, **71**, 1992, N 2, 139–195.

[13] Certain problems of optimal control of the Navier — Stokes system with distributed control. *Optimal Control of Viscous Flow.* VI, SIAM, Philadelphia, 1998, 109–150.

[14] Exact boundary zero controllability of three-dimensional Navier — Stokes equations. *J. Dynam. Control Systems*, **1**, 1995, N 3, 325–350.

А. В. Фурсиков, М. Д. Ганзбургер, Л. С. Хоу (A. V. Fursikov, M. D. Gunzburger, and L. S. Hou)

[1] Boundary value problems and optimal boundary control for the Navier–Stokes system: the two-dimensional case. *SIAM J. Control Optim.*, **36**, 1998, N 3, 852–894.

А. В. Фурсиков, О. Ю. Эмануилов (A. V. Fursikov and O. Yu. Emanuilov)

[1] Об ε-управляемости задачи Стокса с распределенным управлением, сосредоточенным на подобласти. *Успехи мат. наук*, **47**, 1992, вып. 1, 217–218.

[2] On approximate controllability of the Stokes system. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **2**, 1993, N 2, 205–232.

[3] Аппроксимативная управляемость системы Стокса. *Вестник Российского ун-та Дружбы Народов* Сер. мат., N 1, 1994, 89–108.

[4] Скорость сходимости приближений для проблемы замыкания цепочки уравнения Фридмана — Келлера в случае больших чисел Рейнольдса. *Мат. сб.*, **185**, 1994, N 2, 115–143.

[5] Скорость сходимости при замыкании цепочки моментных уравнений, соответствующих системе Навье — Стокса со случайной правой частью. *Дифференциальные уравнения*, **30**, 1994, N 4, 699–711.

[6] On exact boundary zero controllability of two-dimensional Navier — Stokes equations. *Acta Appl. Math.*, **37**, 1994, N 1–2, 67–76.

[7] On controllability of certain systems simulating a fluid flows. *Flow Control* (*Minneapolis, MN,* 1992), *IMA Volume Math. Appl.*, **68**, Springer–Verlag, New York, 1995, 149–184.

[8] Local exact controllability of the Navier — Stokes equations. *C. R. Acad. Sci.* Paris Sér. I Math., **323**, 1996, N 3, 275–280.

[9] Local exact boundary controllability of the Boussinesque equations. *SIAM J. Control Optim.*, **36**, 1998, N 2, 391–421.

[10] Точная локальная управляемость двумерных уравнений Навье — Стокса. *Мат. сб.*, **187**, 1996, N 9, 103–138.

[11] *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes Series N 34, Seoul National Univ., Seoul, 1996.

[12] Точная управляемость уравнений Навье —Стокса и Буссинеска. *Успехи мат. наук*, 1999, (в печати).

Ф. Хартман (Ph. Hartman)

[1] *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Мир, М., 1970.

Л. Хермандер (L. Hörmander)

[1] *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, Мир, М., 1965.

[2] *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* Т. 1. *Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986.

Д. Че, О. Ю. Эмануилов, С. М. Ким (D. Chae, O. Yu. Emanuilov, and S. M. Kim)

[1] Exact controllability for semilinear parabolic equations with Neumann boundary conditions. *J. Dynam. Control Syst.*, **2**, N 4, 1996, 449–483.

И. Экланд, Р. Темам (I. Ekeland and R. Temam)

[1] *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979.

О. Ю. Эмануилов

[1] О существовании решения в задачах управления эллиптическими системами. *Вестник Моск. ун-та* Сер. 1, Математика, механика, N 5, 1989, 70–73.

[2] Теоремы существования решения задач управления сингулярными распределенными системами. *Мат. сб.*, **181**, 1990, N 3, 321–333.

[3] О некоторых задачах оптимального управления, связанных с системой Навье — Стокса. *Труды сем. им. Петровского*, **15**, 1991, 108–127.

[4] Оптимальное управление уравнением теплопроводности с обратным течением времени. *Сиб. мат. журн.*, **34**, 1993, N 1, 204–211.

[5] Граничная управляемость параболических уравнений. *Мат. сб.*, **186**, 1995, N 6, 109–132.

М. В. Яшина

[1] О плотности множества единственности некоторых экстремальных задач. *Вестник Моск. ун-та* Сер. 1. Математика, механика, N 6, 1986, 54–56.