

66 + 627.9  
СЧ7  
ДЖ. С. СЛЕТТЕРИ

# ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА, ЭНЕРГИИ И МАССЫ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Перевод с английского  
В. Л. КОЛПАЩИКОВА и Т. С. КОРТНЕВОЙ  
под ред. А. Г. ШАШКОВА

1978



МОСКВА · «ЭНЕРГИЯ» · 1978

ББК 31.31

С 47

УДК 621.1.016.4.536.2

Слэттери Дж. С.

С 47 Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах: Пер с англ. Коллащикова В. Л. и Кортневой Т. С.—М.: Энергия, 1978.—448 с., ил.

В пер.: З р.

В книге изложены современные представления о явлениях теплопередачи и массообмена в сложных многокомпонентных и многофазных системах при наличии фазовых и химических превращений, а также в сжатой форме даны решения всех наиболее интересных задач феноменологической теории переноса импульса тепла и массы в сплошных средах.

Книга представляет интерес для научных работников, специализирующихся в области механики, теплофизики и химической технологии, а также может служить справочником.

С 30302-258  
051(01)-78 11-78

ББК 31.31  
6П2.2



10007  
smie

СЛЕТТЕРИ ДЖОН С.

ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА, ЭНЕРГИИ И МАССЫ  
В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Пер с англ. Коллащикова Виктора Леонидовича,  
Кортневой Татьяны Семеновны  
Редактор издательства Н. М. Пеунова  
Переплет художника В. Ф. Горелова  
Технический редактор Т. А. Маслова  
Корректор А. Д. Халанская  
ИБ № 161

Сдано в набор 02.11.77 Подписано к печати 24.07.78 Формат 70×100<sup>1/16</sup>  
Бумага типографская № 2 Гарн. шрифта литературная Печать высокая  
Усл. печ. л. 36,4 Уч.-изд. л. 37,32 Тираж 5000 экз. Зак. 361 Цена 3 р.

Издательство «Энергия», 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10  
Московская типография № 10 Союзполиграфпрома при Государственном  
комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 113114, Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

© Издательство «Энергия», 1978 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга Слэттери «Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах», предлагаемая в русском переводе, посвящена феноменологической теории переноса импульса, энергии и массы на общей философской основе.

От других монографий на аналогичную тему книга отличается тем, что основные положения описания явлений переноса изложены в ней на основе современного представления о термомеханике и явлениях переноса в сплошных средах, и тем, что она обобщает и рассматривает в единой связи феноменологические теории переноса импульса, энергии и массы: гидромеханику, термодинамику и массообмен. Особенностью монографии Слэттери является также и то, что в ней уделяется большое внимание явлениям переноса в дисперсных средах, в пористых телах при наличии фазовых и химических превращений.

В частности, в монографию включен ряд работ, в том числе оригинальных работ автора, по явлениям переноса в многокомпонентных и многофазных системах. В этой связи монография представляет большой интерес для изучения химико-технологических процессов.

Изложение материала доступно широкому кругу читателей, приступающих к изучению математической теории процессов переноса. Автору монографии удалось ясно и четко научить читателя формулировать математические модели реальных физических процессов с помощью абстрактного языка математики. Предлагаемая монография задумана автором как учебник для студентов технических специальностей. Однако она может служить и в качестве справочника — в ней представлен значительный сводный материал и критический обзор последних работ по явлениям переноса.

Материал изложен традиционным способом. В гл. 1 представлена кинематика. Исходным положением в ней является система определяющих уравнений, которые впервые были предложены Трудсделлом. В частности, при выводе уравнения переноса используется обобщенная теорема переноса, которая была впервые выведена Трудсделлом и Тупином для самого общего случая.

Глава 2 посвящена выводу уравнения движения. В отличие от традиционного вывода уравнения Коши приводится вывод уравнения движения для случая, когда сплошная среда является ориентированной.

С использованием определяющих уравнений выводятся и обсуждаются уравнения движения для сложных жидкостей. В качестве примера рассмотрена и жидкость Нолла.

Глава 3 отведена решению отдельных частных задач движения жидкости в трубах и каналах. Определяются поля скоростей в некоторых технических устройствах. В этой же главе сформулирована теория пограничного слоя при обтекании тел сложной конфигурации, приво-

ится аналитическое решение, а также расчетные формулы, полученные из приближенного решения.

Глава 4 охватывает круг вопросов, связанных с описанием турбулентных течений в каналах и трубах, а также обтеканием тел турбулентным потоком жидкости. В этой же главе подробно изложены оригинальные работы автора по течению жидкости в пористых средах. Используя метод Труслелла, автор выводит новое уравнение движения жидкости в пористых средах, из которого как частный случай следует закон фильтрации Дарси. Представляет большой интерес метод осреднения, который был специально разработан для описания гидродинамики в пористых средах. Этот метод дает возможность более детально изучить явления переноса в капиллярнопористых и дисперсных средах.

Важным является также изучение движения двухфазных и многофазных жидкостей. Для характеристики таких многофазных систем автор выводит ряд уравнений переноса импульса и энергии на основе методов осреднения.

Этот раздел книги представляет наибольший интерес как с точки зрения дальнейшего развития гидродинамики многофазных систем, так и для многочисленных практических приложений, особенно для химической технологии.

В гл. 5 сформулированы основные положения классической и обратимой термодинамики. Эти соотношения используются для вывода уравнений переноса энергии, при этом отметим, что автор, используя метод Труслелла, получает уравнение переноса в общем виде, из которого как частный случай следует общизвестное уравнение переноса энергии.

Глава 6 посвящена применению уравнения переноса энергии для решения ряда конкретных задач. В этой же главе обсуждается теория теплового пограничного слоя. Изучаются некоторые вопросы обтекания твердых тел потоком газа при наличии фазовых превращений.

В гл. 7 речь идет о турбулентном теплообмене. Интересным является то обстоятельство, что теория турбулентного обмена рассматривается автором с позиций методики описания переноса скалярной субстанции в дискретных средах.

Используя методы, разработанные для гидродинамики пористых сред, автор применил их для описания турбулентного обмена энергии. Рассматриваются интегральные уравнения переноса, причем наиболее интересным из них является интегральное уравнение переноса энергии в многофазных системах.

Глава 8 посвящена массообмену в многокомпонентных системах. В отличие от традиционного изложения теории массообмена автор описывает и анализирует явления переноса массы непосредственно в многокомпонентных сложных системах. Им получена система дифференциальных уравнений переноса, которая отображает всевозможные случаи массообмена при наличии фазовых и химических превращений. Особый интерес представляет процесс диффузии в многокомпонентных системах, их описание во взаимосвязи с переносом тепла и количества движения.

В гл. 9 даются приложения теории массообмена для решения конкретных процессов. При этом изучаются процессы диффузии при наличии свободной и вынужденной конвекций, процессы испарения и конденсации.

Глава 10 посвящена турбулентному массообмену. Глава построена методически и принципиально так же, как и главы, посвященные тур-

булентному теплообмену. Эти исследования, в частности интегральные уравнения массопереноса, также представляют большой интерес.

Методическим преимуществом монографии является наличие свободных таблиц, в которых приводятся основные дифференциальные и интегральные уравнения переноса импульса, энергии и массы. При этом рассматриваются различные формы их написания. Эти таблицы весьма полезны для студентов. Как уже было упомянуто выше, отличительной особенностью монографии является использование методов нелинейной термомеханики сплошных сред. Вполне естественно, что для этого необходимо было достаточно широко использовать тензорный анализ, а также нелинейную алгебру. Поэтому в приложении дается современное изложение тензорного анализа и ряд вспомогательных математических операций, которые используются в нелинейной механике. В приложении также выводится общая теорема переноса для любой тензорной величины и ряд других вспомогательных аналитических соотношений.

При переводе книги были сделаны некоторые сокращения: исключены упражнения для самостоятельного решения.

В заключение следует отметить, что книга оригинальна, методически она написана удачно и представляет большой интерес для изучения явлений тепломассопереноса в сложных многокомпонентных и многофазных системах. Можно надеяться, что книга Дж. Слэттери в русском переводе будет весьма полезной широкому кругу читателей среди механиков, теплофизиков и специалистов, занимающихся вопросами химической технологии.

Член-кор. АН БССР А. Г. Шашков

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга предназначается в качестве обобщающего введения к четырем дисциплинам, которые обычно излагаются в отдельных курсах на разной основе: гидромеханики, термодинамики, теплообмена и массообмена.

Поскольку предмет изложения имеет такой широкий диапазон тем, каждая из которых могла бы составить отдельную монографию, целесообразно выбрать для изложения форму обзора.

Однако в мои намерения не входит написать обо всем понемногу потому, что в результате учебник не позволит учащемуся проникнуть в глубь некоторых понятий. Мне кажется, что в результате изучения этих дисциплин читатель должен постигнуть следующее: понять общую философскую основу всех четырех областей знания и научиться математически формулировать реальные физические задачи. По этой причине я посвятил большую часть учебника изложению общих основ этих дисциплин и разработке последовательного подхода к решению предельных и приближенных задач. При изложении мне пришлось опустить некоторые вопросы. Изложение вообще не рассматривается, поскольку мне кажется, что краткого изложения, вписывающегося в остальной текст, недостаточно. Явления на границе раздела, такие как поверхностное натяжение, только упоминаются. Хотя они представляют для меня особый интерес и я мог бы найти веские доводы для обоснования их важности, мне кажется, эту тему не следует включать в курсы для студентов.

Мало внимания уделяется в книге и кинетической теории, ибо существуют две модели для реальных веществ: дискретная модель, используемая в статистической механике, и модель континуума, принятая в механике сплошных сред. В дискретной модели вещество рассматривается состоящим из отдельных частиц, а масса является разрывной функцией координат. В модели континуума вещество считается непрерывно распределенным в пространстве, а масса — непрерывная функция координат, по крайней мере в однофазной системе. Не возникает сомнений в том, что дискретная модель, состоящая из молекул, атомов, электронов и т. д., дает более реалистическую и подробную картину реальных материалов. Кроме того, с точки зрения статистической механики можно определить средние величины, которые точно удовлетворяют законам сохранения, используемым в континуальной модели. Однако модель континуума обладает очевидным преимуществом, состоящим в возможности упрощенного описания процессов. С помощью модели континуума статистическая механика неравновесных процессов позволила получить большое количество информации о поведении реальных материалов, в частности разреженных газов. Для меня было соблазнительным обобщить некоторые из этих результатов, но в конце концов

я отказался от этого, поскольку трудно сделать что-нибудь лучшее, чем работа Берда, Стюарта и Лайтфута [2].

У читателя может создаться запутанное представление о механике сплошных сред. Он стремится узнать, как можно больше из области гидромеханики, термодинамики и т. д., но это желание сильно ослабевает, когда он узнает, что прежде всего ему придется познакомиться с элементами тензорного анализа. Тензорный анализ является математическим языком, позволяющим легко овладеть этим предметом. Однако большинство студентов старших курсов технических специальностей имеют только некоторое представление о векторном анализе. Такое положение, вероятно, скоро изменится. В нашем Северо-Западном университете все студенты технических специальностей должны прослушать в течение половины семестра вводный курс в линейную алгебру, частным приложением которой является тензорный анализ. По этой причине я добавил приложение, в котором освещаются именно эти вопросы, представляющие интерес как для новичков, так и студентов старших курсов.

Приложение А предназначается для студентов трех различных категорий. Новички часто стремятся прокакать по верхам и сразу перейти к практическим задачам, изложенными в гл. 3, 4, 6, 7, 9 и 10. Они должны постигнуть необходимость глубокого изучения теоретических основ. Я полагаю, что студенту не обязательно читать все приложение подряд. Вполне достаточно, чтобы он прочитал разделы, отмеченные двойной звездочкой. Более того, им даже не стоит читать эти разделы до того, как они познакомятся с гл. 1. Более целесообразно возвращаться к приложению А по мере введения новых понятий в первых главах. Однако, если читать только разделы приложения А, отмеченные двойной звездочкой, будут упущены два основных момента. Во-первых, невозможно понять вывод теоремы переноса, изложенной в § 1.3.2, поскольку в приложении Б дается другой вывод. Во-вторых, невозможно вывести необходимые дифференциальные уравнения баланса в криволинейных координатах. Но это не главный недостаток, так как все необходимые дифференциальные уравнения приведены в тексте в виде таблиц как для сферических, так и для цилиндрических координат.

Для студентов старших курсов, стремящихся понять точный вывод теоремы переноса, могут возникнуть затруднения при чтении книги. Я бы рекомендовал этим студентам прочитать все разделы приложения А.

Наконец, разделы приложения, отмеченные одной звездочкой, предназначены для читателя, уже хорошо знакомого с научно-исследовательской работой в этих областях. Эти разделы позволяют выразить скалярные, векторные и тензорные уравнения в любой криволинейной системе координат. Они также позволяют читателю понять те работы, в которых используются векторные и тензорные компоненты в произвольной криволинейной системе координат.

Студенты начальных курсов, вероятно, захотят познакомиться только с основными положениями гл. 1 и 2 прежде, чем углубиться в гл. 3. В этом случае я настоятельно рекомендую изучить § 1.1.1, 1.3.1—1.3.3, 2.1.1, 2.2.1—2.2.3, 2.3.3, 2.4.1 и 2.5.1. По мере возникновения вопросов студенты могут познакомиться и с другими параграфами. Хотя книга построена так, что теория предшествует применению, мне кажется, не обязательно придерживаться такого порядка.

Как уже указывалось в начале предисловия, я надеюсь, что мне удалось изложить общую философскую основу гидромеханики, термо-

динамики, теплообмена и массообмена. Мне также хотелось бы, чтобы читатель научился формулировать реальные физические задачи с помощью математики. В мои намерения не входило написать книгу типа справочника по дифференциальным уравнениям в частных производных. Я больше стремился к тому, чтобы у читателя появилось желание углубить свои математические знания. Хотя я все же надеяюсь, что книга может быть использована и в качестве справочника. Я написал ее прежде всего как учебник для вуза или для самостоятельного изучения. Я не стремился ссыльаться на все оригинальные источники, а предпочитал цитировать работы, в которых наиболее полно и подробно излагаются рассматриваемые вопросы. Я старался давать ссылку везде, где обсуждение не включало оригинального изложения либо не содержало тривиального объяснения, имеющегося во всех учебниках.

Мне (а, может быть, и вам) всегда было любопытно узнать, как людям удается написать книгу. С 1965 г. я читаю лекции по этому предмету студентам старших курсов химико-технологического факультета. В 1966 г. я начал записывать лекции, а также собирать некоторые другие материалы, которые можно использовать для справок или для более глубокого изучения предмета. С 1967 г. до настоящего времени фотокопии этих заметок продаются студентам и используются в дополнение к моим лекциям. Критические замечания студентов и внимательное знакомство с этими записями профессора Берда были для меня неоценимыми и помогли мне пересмотреть, переписать и перестроить материал и внести ясность в некоторые разделы книги.

Джон С. Слэттери

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### КИНЕМАТИКА

В этой главе приводятся некоторые детали, необходимые при описании движений и деформаций реальных материалов как сплошных сред. Глава эта важна не только для введения определений, но и для изложения точки зрения, принятой при рассмотрении тех или иных задач. Например, в тексте несколько раз будут использоваться различные формы теоремы переноса при получении дифференциальных уравнений и интегральных балансов из наших основных постулатов.

Для начинающего самым трудным, вероятно, будет правильно проводить различие между континуальной моделью для реальных материалов и корпускулярной, или молекулярной моделью. Совершенно очевидно, что наиболее точная картина реальных материалов требует представления их с помощью атомов и молекул. При этом масса распределена в пространстве прерывно, она связана с протонами, нейtronами, электронами и т. д., которые разделены относительно большими промежутками. В континуальной же модели масса в пространстве распределена непрерывно, за исключением поверхностей разрыва, представляющих собой границы раздела фаз или ударные волны.

Континуальная модель менее реалистична, чем корпускулярная, зато она гораздо проще. Для многих целей не требуется точности корпускулярной модели. В наших ощущениях масса представляется распределенной непрерывно: вода, которую мы пьем, и воздух, которым мы дышим. Точно так же при исследовании дорожного движения на автостраде важны скорости автомобилей и расстояния между ними, а не количество цилиндров в автомобильных двигателях или внешний вид водителей.

Мы не хотим сказать, что корпускулярная модель вообще не имеет значения, ведь при рассмотрении континуальной модели теряется информация. Только методами статистической механики можно получить полное описание поведения материала. Подробнее об этом будет сказано в следующей главе.

Читая эту главу, важно не забывать, что реальные материалы в действительности состоят из атомов и молекул, вернее, помнить, что понятия атомов и молекул не используются в континуальной модели. Говоря о материальных частицах, мы не имеем в виду молекулы. Материальная частица — элементарное понятие (элементарное в том смысле, что оно не определяется), позволяющее дать удобное название материалу в конкретном месте в исходной конфигурации.

Самая большая опасность спутать корпускулярную и континуальную модели заключается в используемых понятиях. В рамках континуального представления можно встретить утверждение типа: «Область достаточно велика, чтобы содержать большое количество молекул ...», но

достаточно мала, чтобы представлять собой точку в пространстве ..., или же достаточно мала для того, чтобы быть использованной в качестве элемента интегрирования». В подобных утверждениях мало смысла. Молекулы в механике сплошных сред не определяются, и по определению масса непрерывно распределена в пространстве.

Занятенному читателю можно порекомендовать введение в обзорную работу Труслелла и Тупина по основам механики сплошных сред [1]. Они не только дают убедительное обоснование предмета, но раскрывают также его перспективы.

## 1.1. ДВИЖЕНИЕ

*1.1.1. Тело, движение и материальные координаты.* Тело — это система, любой элемент которой называется частицей, или материальной частицей. Существует взаимно однозначное непрерывное отображение этой системы на область пространства  $E$ , изучаемую в элементарной геометрии, которое называется конфигурацией тела:

$$z = X(\zeta); \quad (1.1.1-1)$$

$$\zeta = X^{-1}(z). \quad (1.1.1-2)$$

Точка  $z = X(\zeta)$  пространства  $E$  называется местом, занимаемым частицей  $\zeta$ , а  $\zeta = X^{-1}(z)$  — частицей, местом которой в пространстве  $E$  является  $z$ .

Совершенно эквивалентно конфигурацию тела можно описывать посредством радиус-вектора  $z$  точки  $z$  относительно начала координат 0 (A.1.2):

$$z = \chi(\zeta); \quad (1.1.1-3)$$

$$\zeta = \chi^{-1}(z). \quad (1.1.1-4)$$

Здесь  $\chi^{-1}$  обозначает обратное отображение  $\chi$ . Относительно заданного начала координата 0  $z = \chi(\zeta)$  можно назвать местом, занимаемым частицей  $\zeta$ , а  $\zeta = \chi^{-1}(z)$  — частицей, которая занимает место  $z$ .

В дальнейшем будем отмечать точки в пространстве  $E$  радиус-векторами положения относительно заданного начала координат 0.

Движение тела — это однопараметрическое семейство конфигураций; действительный параметр  $t$  — время. Запишем:

$$z = \chi(\zeta, t); \quad (1.1.1-5)$$

$$\zeta = \chi^{-1}(z, t). \quad (1.1.1-6)$$

Само тело  $B$  никак нельзя смешивать ни с одной из его пространственных конфигураций, хотя для наблюдения и изучения оно доступно только в этих конфигурациях. Часто удобно учитывать это, используя положения в некоторых частных конфигурациях для определения частиц тела. Эта исходная конфигурация может быть, а может и не быть частичкой тела в процессе движения. Место частицы в конфигурации  $\chi$  обозначим через

$$z_\chi = \chi(\zeta). \quad (1.1.1-7)$$

Частица в точке  $z_\chi$  конфигурации  $\chi$  может быть представлена в виде

$$\zeta = \chi^{-1}(z_\chi). \quad (1.1.1-8)$$

Если  $\chi$  — движение тела, то

$$\mathbf{z} = \chi(\zeta, t) = \chi_{\star}(\mathbf{z}_{\star}, t) \equiv \chi(\kappa^{-1}(\mathbf{z}_{\star}), t). \quad (1.1.1-9)$$

Это выражение определяет семейство деформаций по сравнению с исходной конфигурацией. Индекс  $\star$  указывает на то, что форма  $\chi_{\star}$  зависит от выбора конфигурации  $\star$ .

Радиус-вектор  $\mathbf{z}_{\star}$  относительно начала координат можно записать в прямоугольных координатах:

$$\mathbf{z}_{\star} = z_{\star i} \mathbf{e}_i. \quad (1.1.1-10)$$

Координаты  $z_{\star i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) называются материальными координатами материальной частицы  $\zeta$ . Они определяют положение этой материальной частицы  $\zeta$  относительно начала координат, когда тело находится в начальной конфигурации  $\star$ . Уравнение (1.1.1-9) можно представить в этих материальных координатах:

$$\mathbf{z} = \chi_{\star}(\mathbf{z}_{\star}, t) = \chi_{\star}(z_{\star 1}, z_{\star 2}, z_{\star 3}, t). \quad (1.1.1-11)$$

Пусть  $A$  — любая величина, скалярная или тензорная. Рассмотрим производную по времени от  $A$  при движении частицы:

$$\dot{A} = \frac{d_{(m)} A}{dt} \equiv \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{z_{\star}} \equiv \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{z_{\star 1}, z_{\star 2}, z_{\star 3}}. \quad (1.1.1-12)$$

Например, вектор скорости  $\mathbf{v}$  представляет собой изменение во времени координаты материальной частицы

$$\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{z} \equiv \frac{d_{(m)} \mathbf{z}}{dt} \equiv \left[ \frac{\partial \chi_{\star}(\mathbf{z}_{\star}, t)}{\partial t} \right]_{z_{\star}} \equiv \left[ \frac{\partial \chi_{\star}(z_{\star 1}, z_{\star 2}, z_{\star 3}, t)}{\partial t} \right]_{z_{\star 1}, z_{\star 2}, z_{\star 3}}. \quad (1.1.1-13)$$

Операцию  $d_{(m)}/dt$  можно назвать материальной или субстанциальной производной [2].

В последующих главах мы встретимся с несколькими операциями с производными. Стюарт и Лайтфут [2] приводят ряд примеров для иллюстрации различий между ними.

Частная производная по времени  $\partial c / \partial t$ . Допустим, что мы находимся в лодке, стоящей на якоре на некотором расстоянии от берега. Если наблюдать за концентрацией рыбы вокруг лодки в зависимости от времени, то увидим, что она меняется в данном месте пространства как

$$\frac{\partial c}{\partial t} \equiv \left( \frac{\partial c}{\partial t} \right)_z \equiv \left( \frac{\partial c}{\partial t} \right)_{z_1, z_2, z_3}.$$

Материальная производная  $d_{(m)} c / dt$ . Предположим, что якорь подняли и лодка начала двигаться по течению реки. Теперь мы увидим, как меняется концентрация рыбы в зависимости от времени при движении по течению воды (материала):

$$\frac{d_{(m)} c}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla c \cdot \mathbf{v}. \quad (1.1.1-14)$$

Полная производная  $dc/dt$ . Теперь заведем мотор и будем двигаться то по течению, то против течения, а иногда от одного берега

к другому. Концентрация рыбы измеряется теперь как функция времени по произвольной траектории в воде:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla c \cdot \mathbf{v}_{(b)}, \quad (1.1.1-15)$$

где  $\mathbf{v}_{(b)}$  — скорость лодки.

1.1.2. *Траектории.* Кривая в пространстве, вдоль которой движется материальная частица  $\zeta$ , называется траекторией материальной частицы  $\zeta$ . Траекторию можно определить по движению материала, как описано в § 1.1.1:

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{z}_*, t), \quad (1.1.2-1)$$

где  $\mathbf{z}_*$  указывает положение материальной частицы  $\zeta$  в начальной конфигурации  $\mathbf{x}$ ; время  $t$  — параметр движения вдоль траектории, соответствующий любому заданному положению  $\mathbf{z}_*$ .

Траектории удобно определять по распределению скорости, так как скорость — производная по времени от координат. Параметрические уравнения траектории частицы являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{v} \quad (1.1.2-2)$$

или

$$dz_i/dt = v_i; \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.2-3)$$

Необходимые граничные условия можно получить, выбрав в качестве исходной конфигурацию, которую принимает материал в какой-то момент  $t_0$ .

Пусть, например, компонентами в прямоугольных координатах будут:

$$v_1 = \frac{z_1}{1+t}; \quad v_2 = \frac{z_2}{1+2t}; \quad v_3 = 0, \quad (1.1.2-4)$$

а начальной конфигурацией является конфигурация материала в момент  $t=0$ .

Для уравнений (1.1.2-4) уравнение (1.1.2-3) разделяется:

$$\int_{z_{*1}}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1} = \int_0^t \frac{dt}{1+t}; \quad (1.1.2-5)$$

$$\int_{z_{*2}}^{z_2} \frac{dz_2}{z_2} = \int_0^t \frac{dt}{1+2t}; \quad (1.1.2-6)$$

$$z_3 = z_{*3}. \quad (1.1.2-7)$$

Из (1.1.2-5) и (1.1.2-6) имеем:

$$z_1 = z_{*1}(1+t); \quad (1.1.2-8)$$

$$z_2 = z_{*2}(1+2t)^{1/2}. \quad (1.1.2-9)$$

Уравнения (1.1.2-7) — (1.1.2-9) являются параметрическими уравнениями для траектории такой частицы, которая в момент времени  $t=0$  занимает положение в прямоугольных координатах ( $z_{*1}, z_{*2}, z_{*3}$ ).

Исключив параметр времени, получим траектории частицы в плоскости  $z_3 = z_{33}$ :

$$\frac{z_2}{z_{22}} = \left(2 \frac{z_1}{z_{11}} - 1\right)^{1/2}. \quad (1.1.2-10)$$

Уравнение (1.1.2-10) представлено на рис. 1.1.4-2 для нескольких начальных положений ( $z_{11}, z_{22}$ ).

**1.1.3. Линии тока.** Линии тока образуют такое семейство кривых, к которым поле скоростей повсюду касательно в момент времени  $t$ . Параметрические уравнения для линий тока — решения дифференциальных уравнений:

$$d\mathbf{z}/d\alpha = \mathbf{v} \quad (1.1.3-1)$$

или

$$dz_i/d\alpha = v_i; \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.3-2)$$

Иначе говоря, линии тока являются решениями системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\alpha} \wedge \mathbf{v} = 0 \quad (1.1.3-3)$$

или

$$e_{ijk} \frac{dz_j}{d\alpha} v_k = 0; \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.3-4)$$

В этих уравнениях  $\alpha$  — произвольный параметр, измеряемый вдоль кривых;  $t = \text{const}$ .

В качестве примера определим линии тока, соответствующие распределению скорости, рассмотренному в § 1.1.2:

$$v_1 = \frac{z_1}{1+t}; \quad v_2 = \frac{z_2}{1+2t}; \quad v_3 = 0.$$

Из уравнений (1.1.3-2) и (1.1.2-4) имеем:

$$\int_{z_{1(0)}}^{z_1} \frac{dz_1}{z_1} = \frac{1}{1+t} \int_0^\alpha d\alpha; \quad (1.1.3-5)$$

$$\int_{z_{2(0)}}^{z_2} \frac{dz_2}{z_2} = \frac{1}{1+2t} \int_0^\alpha d\alpha \quad (1.1.3-6)$$

и

$$z_3 = z_{3(0)}. \quad (1.1.3-7)$$

Уравнения (1.1.3-5) и (1.1.3-6) дают:

$$z_1 = z_{1(0)} \exp \frac{\alpha}{1+t} \quad (1.1.3-8)$$

и

$$z_2 = z_{2(0)} \exp \frac{\alpha}{1+2t}. \quad (1.1.3-9)$$

Уравнения (1.1.3-7), (1.1.3-8) и (1.1.3-9) называются параметрическими уравнениями линии тока для времени  $t$ , проходящей через точку, для которой прямоугольными координатами будут  $z_{1(0)}, z_{2(0)}, z_{3(0)}$ .

Исключив параметр  $a$  из (1.1.3-8) и (1.1.3-9), получим:

$$z_2 = z_{2(0)} \left( \frac{z_1}{z_{1(0)}} \right)^{(1+t)/(1+2t)}. \quad (1.1.3-10)$$

Линии тока для  $t=0$  и  $t \rightarrow \infty$  изображены соответственно на рис. 1.1.4-3, а и б для нескольких различных точек  $[z_{1(0)}, z_{2(0)}]$ .

Иногда экспериментаторы помещают твердые частицы на границу раздела фаз газ — жидкость и делают фотографию, на которой движение частиц не совсем прекратилось (см. рис. 3.5.1-1). Следы, оставленные частицами, пропорциональны скорости жидкости на поверхности (поскольку используются частицы очень небольшого размера). В случае стационарного течения такую фотографию можно использовать для построения траекторий частиц. Для нестационарного течения она описывает семейство линий тока, к которым векторное поле скоростей всюду касательно.



Рис. 1.1.4.1.

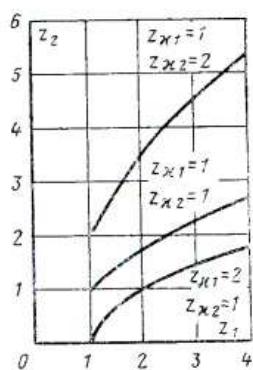


Рис. 1.1.4.2.

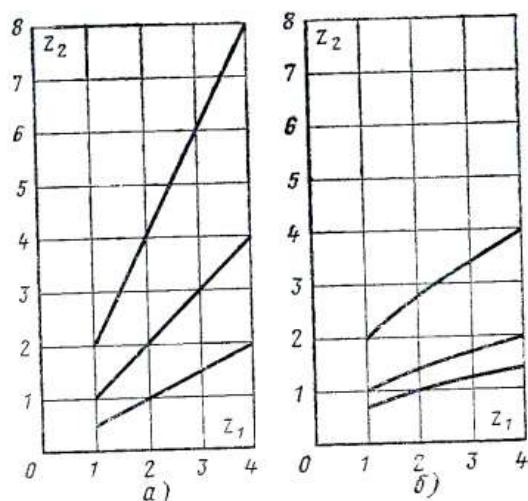


Рис. 1.1.4.3.

а — линии тока [уравнение (1.1.3-10)] для  $t=0$ ;  
б — линии тока [уравнение (1.1.3-10)] для  $t \rightarrow \infty$ .

Рис. 1.1.4.1. Окрашенные струи [уравнение (1.1.4-6)] для  $t=10$  и две соответствующие траектории.

Рис. 1.1.4.2. Траектории [уравнение (1.1.2-10)].

В двумерном течении линии тока имеют особое значение. Это кривые, вдоль которых функция тока (см. § 1.3.6 и 1.3.7) постоянна.

**1.1.4. Окрашенные струи.** Окрашенные струи для точки  $z_{(0)}$  в момент времени  $t$  показывают положение в этот момент тех материальных частиц, которые для  $t \leq t$  находились в точке  $z_{(0)}$ .

Экспериментально эти струи можно наблюдать, непрерывно вдувая в жидкость дым, краску или мелкие частицы в точке  $z_{(0)}$  и фотографируя полученную картину в последовательные моменты времени. При этом на каждой фотографии видна окрашенная струя, соответствующая положению  $z_{(0)}$  в момент фотографирования.

В § 1.1.1 было показано, что движение  $\chi$  описывает положение  $z$  в момент  $t$  материальной частицы, которая в начальной конфигурации занимала положение  $z_{\star}$ :

$$z = \chi(z_{\star}, t). \quad (1.1.4-1)$$

При построении окрашенной струи внимание сконцентрировано на тех материальных частицах, которые при  $t \leq t$  находились в точке  $\mathbf{z}_{(0)}$ :

$$\mathbf{z}_* = \chi^{-1}(\mathbf{z}_{(0)}, \tau). \quad (1.1.4-2)$$

Исключив  $\mathbf{z}_*$  из (1.1.4-1) и (1.1.4-2), получим параметрические уравнения для окрашенных струй, проходящих через точку  $\mathbf{z}_{(0)}$ :

$$\mathbf{z} = \chi(\chi^{-1}(\mathbf{z}_{(0)}, \tau), t). \quad (1.1.4-3)$$

Время  $t \leq t$  является параметром вдоль струи.

В качестве примера возьмем окрашенную струю при распределении скорости, рассмотренном в § 1.1.2 и 1.1.3:

$$v_1 = \frac{z_1}{1+t}; \quad v_2 = \frac{z_2}{1+2t}; \quad v_3 = 0. \quad (1.1.4-4)$$

Для траекторий, описанных в § 1.1.2, частицы, которые в любой момент  $t \leq t$  занимали положение  $\mathbf{z}_{(0)}$ , описываются уравнениями:

$$z_{*1} = \frac{z_{1(0)}}{1+\tau}; \quad z_{*2} = \frac{z_{2(0)}}{(1+2\tau)^{1/2}}; \quad z_{*3} = z_{3(0)}. \quad (1.1.4-5)$$

Для тех же траекторий из § 1.1.2 параметрическими уравнениями окрашенных струй, проходящих в момент  $t$  через  $\mathbf{z}_0$ , являются:

$$z_1 = z_{1(0)} \left( \frac{1+t}{1+\tau} \right); \quad z_2 = z_{2(0)} \left( \frac{1+2t}{1+2\tau} \right)^{1/2}; \quad z_3 = z_{3(0)}. \quad (1.1.4-6)$$

Такая струя вместе с некоторыми траекториями частиц, ее составляющих, показана на рис. 1.1.4-1.

Для сравнения на рис. 1.1.4-2 приведено несколько других траекторий для того же распределения скорости, описанных уравнением (1.1.2-10). На рис. 1.1.4-3, а и б показано несколько линий тока соответственно для времени  $t=0$  и  $t \rightarrow \infty$ , как описывается уравнением (1.1.3-10).

## 1.2. СИСТЕМА ОТСЧЕТА

**1.2.1. Изменение системы отсчета [1, 5].** Расстояние и временные интервалы являются двумя основными измеряемыми величинами в кинематике. Положение в пространстве (например, положение, в котором материал достигает определенной скорости) можно определить только относительно заданной системы отсчета или наблюдателя. Системой отсчета могут быть стены лаборатории, неподвижные звезды или стенки космического корабля, двигающегося по произвольной траектории, т. е. группа объектов, взаимное расстояние между которыми остается неизменным в течение всего периода наблюдения. Время какого-то события можно определить только по отношению к какому-либо другому событию, например к моменту включения секундомера или замыкания электрической цепи. Такая точка начала отсчета входит в определение системы отсчета. Труслелл и Нолл [5] утверждают, что «система отсчета может быть описана как возможный способ связи физической реальности с трехмерным евклидовым точечным пространством и действительной осью времени».

Рассмотрим совокупность всех пар  $\{zt\}$ , где  $\mathbf{z}$  — положение в евклидовом точечном пространстве,  $t$  — время. Назовем совокупность всех

таких пар пространством — временем. Изменение системы отсчета является взаимно однозначным отображением пространства — времени таким образом, что расстояния, временные интервалы и временная последовательность протекания событий остаются неизменными.

Пусть  $\mathbf{z}$  и  $t$  обозначают положение и время в старой системе отсчета,  $\mathbf{z}^*$  и  $t^*$  — соответственно положение и время в новой системе отсчета. Наиболее общее изменение системы отсчета имеет вид:

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \{ \mathbf{z} - \mathbf{z}_0 \}; \quad (1.2.1-1)$$

$$t^* = t - a. \quad (1.2.1-2)$$

Фиксированная точка  $\mathbf{z}_0$  отображается в  $\mathbf{c}(t)$ . Если взять  $\mathbf{z}_0 = 0$ , то  $\mathbf{c}(t)$  будет вектором положения прежнего начала отсчета в новой системе отсчета. Зависящий от времени ортогональный тензор второго ранга  $\mathbf{Q}(t)$  представляет собой вращение и, возможно, отражение. Отражение позволяет наблюдателю в новой системе отсчета смотреть на старую систему с помощью зеркала, иначе говоря, позволяет двум наблюдателям расположиться друг против друга, причем один будет оперировать в правосторонней системе координат, а другой — в левосторонней. Величина  $a$  — действительное число.

Любая величина не зависит от системы отсчета, если она остается неизменной или инвариантной при всех изменениях системы отсчета. Независимый от системы отсчета скаляр  $b$  не меняет своего значения

$$b^* = b. \quad (1.2.1-3)$$

Независимый от системы отсчета пространственный вектор остается линейным элементом того же направления при изменении системы отсчета в том смысле, что если  $\mathbf{v} = \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2$ , то

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{z}^*_1 - \mathbf{z}^*_2.$$

Из уравнения (1.2.1-1) имеем:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{Q} \cdot \{ \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 \} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.2.1-4)$$

Независимый от системы отсчета тензор второго ранга является тензором, который преобразует независимые от системы отсчета пространственные векторы в независимые от системы отсчета пространственные векторы. Если  $\mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w}$ , то  $\mathbf{v}^* = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{w}^*$ .

Это значит, что  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{w}$  или

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (1.2.1-5)$$

Важно проводить строгое различие между системой отсчета и системой координат. Определяя систему отсчета как группу объектов, взаимное расстояние между которыми остается неизменным в течение всего периода наблюдения, мы имеем в виду, что не все объекты лежат в одной плоскости. Следовательно, можно заметить, что эта совокупность объектов заменяется тремя взаимно перпендикулярными единичными векторами  $\mathbf{a}_{(1)}$ ,  $\mathbf{a}_{(2)}$ ,  $\mathbf{a}_{(3)}$ . Для локализации точек в пространстве по отношению к этим трем векторам и их пересечениям можно использовать любую систему координат. Удобно ограничиться такими системами, оси которых имеют инвариантное по времени направление относительно  $(\mathbf{a}_{(1)}, \mathbf{a}_{(2)}, \mathbf{a}_{(3)})$ . Пусть  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$  — система координат; соответствующей системой отсчета будет  $(\mathbf{a}_{(1)}, \mathbf{a}_{(2)}, \mathbf{a}_{(3)})$ , аналогично пусть  $\mathbf{z}'_1, \mathbf{z}'_2, \mathbf{z}'_3$  — система координат в другой системе отсчета  $(\mathbf{a}'_{(1)}, \mathbf{a}'_{(2)}, \mathbf{a}'_{(3)})$ . Будем

говорить, что эти две системы координат одинаковы, если ориентация  $z_i$ -осей координат относительно векторов  $\mathbf{a}_{(j)}$  одинакова с ориентацией осей координат  $z'_i$  относительно векторов  $\mathbf{a}'_{(j)}$ . Обычно удобно использовать одинаковые системы координат при рассмотрении двух различных систем отсчета, что будет сделано в следующем параграфе.

Важность изменения системы отсчета станет ясна из § 2.3.1, где вводится принцип независимости материала от системы отсчета. Этот принцип будет неоднократно использован при обсуждении поведения материала и при построении эмпирических соотношений.

**1.2.2. Эквивалентные движения [4, 5].** В § 1.1.1 движение материала относительно некоторой системы отсчета описывается в виде

$$\mathbf{z} = \chi(\mathbf{z}_*, t). \quad (1.2.2-1)$$

Теперь понятно, что вид этого соотношения зависит от выбора начальной конфигурации  $\mathbf{z}_*$ . По аналогии с § 1.2.1 такое же движение относительно некоторой новой системы отсчета описывается с помощью

$$\mathbf{z}^* = \chi^*(\mathbf{z}_*, t^*) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot [\chi(\mathbf{z}_*, t) - \mathbf{z}_0]. \quad (1.2.2-2)$$

Будем говорить, что любые два движения  $\chi$  и  $\chi^*$ , связанные между собой уравнением вида (1.2.2-2), являются эквивалентными движениями.

Запишем уравнение (1.2.2-2) в сокращенной форме:

$$\mathbf{z}^* = \mathbf{c} + \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0). \quad (1.2.2-3)$$

Материальная производная этого уравнения дает:

$$\dot{\mathbf{z}}^* = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{z}} \quad (1.2.2-4)$$

или

$$\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0). \quad (1.2.2-5)$$

С учетом уравнения (1.2.2-3) можно записать:

$$\mathbf{z} - \mathbf{z}_0 = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0) = \mathbf{Q}^T (\mathbf{z}^* - \mathbf{c}), \quad (1.2.2-6)$$

что позволяет представить уравнение (1.2.2-5) в виде

$$\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{c}} + (\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot (\mathbf{z}^* - \mathbf{c}) = \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{A} \cdot (\mathbf{z}^* - \mathbf{c}), \quad (1.2.2-7)$$

где

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (1.2.2-8)$$

Назовем тензор второго ранга  $\mathbf{A}$  тензором угловой скорости в системе отсчета с индексом \* относительно системы отсчета без этого индекса [4].

Так как  $\mathbf{Q}$  — ортогональный тензор, то

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}. \quad (1.2.2-9)$$

Взяв материальную производную от этого уравнения, получим:

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T = -\mathbf{Q} \cdot (\dot{\mathbf{Q}})^T = -\mathbf{A}^T. \quad (1.2.2-10)$$

Таким образом, очевидно, что тензор угловой скорости кососимметричен.

Вектор угловой скорости  $\omega$  не обозначенной звездочкой системы отсчета по отношению к обозначенной звездочкой системе определяется в виде

$$\omega \equiv 0,5 \varepsilon : A. \quad (1.2.2-11)$$

Тензор третьего ранга  $\varepsilon$  и обозначение « $:$ » вводится в приложении А. Рассмотрим следующий пространственный вектор в прямоугольной системе координат:

$$\begin{aligned} \omega \wedge (z^* - c) &= \varepsilon : [(z^* - c) \omega] = \varepsilon : \left[ (z^* - c) \left( \frac{1}{2} \varepsilon : A \right) \right] = \\ &= e_{ijk} (z^*{}_k - c_k) \left( \frac{1}{2} e_{jmn} A_{nm} \right) e_i = 0,5 (z^*{}_k - c_k) (A_{ik} - A_{ki}) e_i = \\ &= (z^*{}_k - c_k) A_{ik} e_i = A \cdot (z^* - c). \end{aligned} \quad (1.2.2-12)$$

Следовательно, можно записать уравнение (1.2.2-7) через угловую скорость не обозначенной звездочкой системы отсчета по отношению к обозначенной звездочкой системе отсчета [1]:

$$\dot{\bar{z}}^* = \dot{c} + \omega \wedge [Q \cdot (z - z_0)] + Q \dot{z}. \quad (1.2.2-13)$$

### 1.3. МАССА

*1.3.1. Сохранение массы.* Изучение механики основано на нескольких постуатах. Первый из них — закон сохранения массы.

Масса тела не зависит от времени.

Физический смысл этого постулата заключается в том, что масса участка тела при любом числе перемещений, вращений и деформаций не изменяется в зависимости от времени. Если  $\rho$  — массовая плотность тела, то масса  $M$  тела может быть представлена в виде

$$M = \int_{V(m)} \rho dV, \quad (1.3.1-1)$$

где  $V(m)$  означает, что интегрирование производится по всей области пространства, занимаемой телом в его текущей конфигурации; в общем случае  $V(m)$ , т. е. предел интегрирования, является функцией времени. Закон сохранения массы означает, что

$$\dot{M} = \frac{d}{dt} \int_{V(m)} \rho dV = 0. \quad (1.3.1-2)$$

Теперь перейдем к определению, которое выражает сохранение массы в каждой точке материала. Для этого необходимо поменять местами операции дифференцирования и интегрирования в уравнении (1.3.1-2). Однако пределы этого интеграла характеризуют границы тела в его текущей конфигурации и обычно являются функцией времени. В следующем параграфе эта задача будет рассмотрена подробнее.

*1.3.2. Теорема переноса* (см. также приложение Б). Рассмотрим операцию

$$\frac{d}{dt} \int_{V(m)} \Psi dV.$$

Здесь  $\Psi$  является скалярной, векторной или тензорной функцией времени и координат.  $V_{(m)}$  опять означает, что интегрирование ведется по всей области пространства, занимаемой телом в его текущей конфигурации. В общем случае можно ожидать, что  $V_{(m)}$ , или предел интегрирования, является функцией времени.

Рассмотрим это интегрирование по объему в исходной конфигурации  $\mathbf{x}$ . Теперь предел интегрирования больше не будет функцией времени и может быть выражен через материальные координаты ограничивающей поверхности. Это означает, что в рассмотренной выше операции мы можем поменять местами дифференцирование и интегрирование. Пусть  $(z_1, z_2, z_3)$  обозначают текущие координаты материальной точки в прямоугольной системе координат, а  $(z_{\mathbf{x}1}, z_{\mathbf{x}2}, z_{\mathbf{x}3})$  — материальные координаты. Используя результаты § A.1.13, можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \Psi dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_{(m)} \times} \Psi J dV = \int_{V_{(m)} \times} \left( \frac{d_{(m)} \Psi}{dt} + \frac{\Psi}{J} \frac{d_{(m)} J}{dt} \right) J dV = \\ &= \int_{V_{(m)}} \left( \frac{d_{(m)} \Psi}{dt} + \frac{\Psi}{J} \frac{d_{(m)} J}{dt} \right) dV, \end{aligned} \quad (1.3.2-1)$$

где

$$J = \sqrt{\left( \det \frac{\partial z_i}{\partial z_{\mathbf{x}j}} \right)^2}. \quad (1.3.2-2)$$

Величину  $J$  можно считать объемом в текущей конфигурации, отнесенным к единице объема в начальной конфигурации. Обычно она является функцией как времени, так и координат. Здесь  $V_{(m)} \times$  означает, что интегрирование ведется по всей области пространства, занимаемой телом в его начальной конфигурации  $\mathbf{x}$ .

Назовем:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial z_i}{\partial z_{\mathbf{x}j}} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.3.2-3)$$

градиентом деформации. Примем:

$$\mathbf{J} = \frac{d_{(m)} J}{dt} = J \operatorname{tr}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}). \quad (1.3.2-4)$$

Легко показать, что

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial z_m}{\partial z_n} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n. \quad (1.3.2-5)$$

Используя определение скорости из § 1.1.1, получаем:

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial z_{\mathbf{x}j}} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \frac{\partial v_i}{\partial z_r} \frac{\partial z_r}{\partial z_{\mathbf{x}j}} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (1.3.2-6)$$

Следовательно,

$$\operatorname{tr}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}) = \frac{\partial z_{\mathbf{x}j}}{\partial z_i} \frac{\partial v_i}{\partial z_r} \frac{\partial z_r}{\partial z_{\mathbf{x}j}} = \frac{\partial v_i}{\partial z_i} = \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (1.3.2-7)$$

и

$$\frac{1}{J} \frac{d_{(m)} J}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (1.3.2-8)$$

С помощью (1.3.2-8) уравнение (1.3.2-1) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \Psi dV = \int_{V_{(m)}} \left( \frac{d_{(m)}\Psi}{dt} + \Psi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV. \quad (1.3.2-9)$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \Psi dV = \int_{V_{(m)}} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \operatorname{div} (\Psi \mathbf{v}) \right] dV, \quad (1.3.2-10)$$

или, используя преобразование Грина (см. § A.11.2), можно записать:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \Psi dV = \int_{V_{(m)}} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dV + \int_{S_{(m)}} \Psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.3.2-11)$$

Величина  $S_{(m)}$  обозначает замкнутую поверхность, ограничивающую объем  $V_{(m)}$ ; в общем случае она, как и  $V_{(m)}$ , является функцией времени. Уравнения (1.3.2-9) — (1.3.2-11) представляют собой три формы теоремы переноса [1].

В дальнейшем нам представится случай обсудить производную по времени от какой-то величины в системе, которая не обязательно является материальным телом. Например, возьмем за такую систему воздух в детском воздушном шарике и найдем производную по времени от объема, соответствующего воздуху в процессе надувания шарика. Поскольку материал (воздух) непрерывно поступает в шарик, мы не считаем систему материальных частиц функцией времени. С другой стороны, ничто не мешает определить конкретную совокупность фиктивных частиц системы, связанную с нашей системой. Единственным ограничением, которое необходимо наложить на эту воображаемую совокупность частиц, является равенство нормальной компоненты скорости любой частицы системы на ее границе нормальной компоненте скорости границы системы. Уравнения (1.3.2-8) и (1.3.2-11) остаются справедливыми, если заменить производные по времени от материальных частиц  $d_{(m)} / dt$  на производные по времени от частиц фиктивной системы  $d_{(s)} / dt$ , а вектор скорости материальной частицы  $\mathbf{v}$  на вектор скорости частицы фиктивной системы  $\mathbf{v}_{(s)}$ . Это означает, что

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \Psi dV = \int_{V_{(s)}} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dV + \int_{S_{(s)}} \Psi \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.3.2-12)$$

Здесь  $V_{(s)}$  — область пространства, занимаемая системой в данный момент;  $S_{(s)}$  — замкнутая поверхность, ограничивающая систему. Будем называть (1.3.2-12) обобщенной теоремой переноса [1].

*1.3.3. Уравнение неразрывности.* Возвращаясь к закону сохранения массы (1.3.1)

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \rho dV = 0 \quad (1.3.3-1)$$

и применив теорему переноса в форме (1.3.2-9), получим:

$$\int_{V_{(m)}} \left( \frac{d_{(m)}\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (1.3.3-2)$$

Это утверждение справедливо для любого тела или для любой части тела (так как часть тела — тоже тело). Поэтому само подынтегральное выражение должно быть равно нулю:

$$\frac{d(\rho v)}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0. \quad (1.3.3-3)$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (1.3.3-4)$$

Выражения (1.3.3-3) и (1.3.3-4) представляют собой две формы уравнения неразрывности. Они выражают закон сохранения массы в каждой точке непрерывного материала.

В табл. 2.5.1-1 приведено уравнение неразрывности в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат.

Если плотность частицы жидкости не изменяется во времени, то уравнение (1.3.3-3) сводится к

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (1.3.3-5)$$

Такое движение называется изохорическим. Если же в рассматриваемом течении плотность не зависит ни от времени, ни от координат, то жидкость будет называться несжимаемой. Несжимаемость жидкости является достаточным, хотя и не необходимым условием изохоричности движения.

**1.3.4. Теорема переноса для области, содержащей сингулярную поверхность [1].** Рассмотрим границу раздела фаз как сингулярную поверхность, т. е. поверхность, являющуюся разрывной относительно одной или более величин, например плотности и скорости. Поверхность раздела фаз в общем случае не является материальной; обычно перенос массы осуществляется через поверхность раздела. По мере того, как тает кубик льда, испаряется вода или сублимируется двуокись углерода, граница раздела фаз перемещается в материале.

Попробуем обобщить теорему переноса, полученную в § 1.3.2, для области материала, по которой движется граница раздела фаз. Вместо «границы раздела фаз» мы говорим, что область материала разделена поверхностью, которая разрывна (сингулярна) относительно величины  $\Phi$  и, возможно, относительно скорости  $v$ . Предположим, что поверхность разрыва может перемещаться в материале с любой скоростью  $u_{(t)}$  [1]. Под скоростью перемещения мы понимаем нормальную компоненту скорости точки на поверхности.

Типичная область материала, содержащая сингулярную поверхность  $S_{\text{синг}}$ , изображена на рис. 1.3.4-1. Величины  $\Phi$  и  $v$  предполагаются непрерывно дифференцируемыми в областях  $V^+$  и  $V^-$ . Так как в общем случае сингулярная поверхность  $S_{\text{синг}}$  не является материальной, области и поверхности  $V^+$ ,  $V^-$ ,  $S^+$ ,  $S^-$  также не являются материальными. Определим поле

$$u^+ = \begin{cases} v & \text{на } S^+; \\ u_{(t)} \xi & \text{на } S_{\text{синг}}; \end{cases} \quad (1.3.4-1)$$

$$u^- = \begin{cases} v & \text{на } S^-; \\ u_{(t)} \xi & \text{на } S_{\text{синг}}. \end{cases} \quad (1.3.4-2)$$

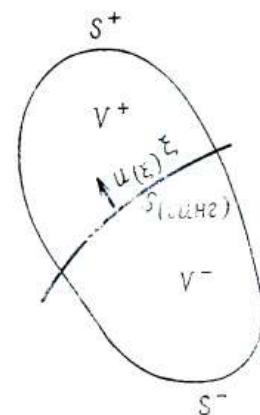


Рис. 1.3.4-1. Область, содержащая сингулярную поверхность  $S_{\text{синг}}$ .

Обращаясь к рис. 1.3.4-1, мы видим, что  $\xi$  — единичный вектор, перпендикулярный поверхности  $S_{(\text{синг})}$ , направленный из области  $V^-$  в область  $V^+$ .

Можно написать:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(m)} \Phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V^+} \Phi dV + \frac{d}{dt} \int_{V^-} \Phi dV. \quad (1.3.4-3)$$

К каждому члену в правой части уравнения (1.3.4-3) можно применить обобщенную теорему переноса из § 1.3.2

$$\frac{d}{dt} \int_{V^+} \Phi dV = \int_{V^+} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{S^+} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_{(\text{синг})}} \Phi^+ u_{(\xi)} dS; \quad (1.3.4-4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V^-} \Phi dV = \int_{V^-} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{S^-} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{(\text{синг})}} \Phi^- u_{(\xi)} dS. \quad (1.3.4-5)$$

Здесь  $\Phi^+$ ,  $\Phi^-$  означают предел функции  $\Phi$ , когда любая точка  $\mathbf{z}$  приближается к точке  $\mathbf{z}_0$  на поверхности  $S_{(\text{синг})}$ , оставаясь соответственно в областях  $V^+$  и  $V^-$ .

Подставляя эти выражения в (1.3.4-3), получаем:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(m)} \Phi dV = \int_{V(m)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{S(m)} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_{(\text{синг})}} [\Phi] u_{(\xi)} dS, \quad (1.3.4-6)$$

где квадратные скобки обозначают скачок величины при пересечении границы раздела:

$$[\Phi] \equiv \Phi^+ - \Phi^-. \quad (1.3.4-7)$$

Назовем уравнение (1.3.4-6) теоремой переноса для областей, содержащих сингулярные поверхности.

*1.3.5. Уравнение баланса массы с учетом скачка массы на границе раздела фаз.* Представим границу раздела фаз в виде сингулярной поверхности, а не как трехмерную область некоторой толщины. Пренебрежем всеми граничными эффектами, присущими поведению материала в пределах этой граничной области, как, например, поверхностным натяжением. Рассмотрение различных моделей для граничной области, а также изучение поведения в этой области приведено в работе [7].

Граница раздела фаз в общем случае не является материальной. Рассмотрим движение массы через границу раздела фаз при таянии кубика льда. При этом скорость перемещения поверхности раздела определяется скоростью теплопереноса в систему. Иногда скорость перемещения границы раздела фаз может определяться скоростью химической реакции. В общем случае скорость перемещения задается при постановке задачи или является одной из неизвестных, которую нужно определить.

В § 1.3.3 указывалось, что уравнение неразрывности выражает требование сохранения массы в каждой точке сплошной среды. Попробуем проанализировать выводы из первого закона механики применительно к границе раздела фаз, представленной сингулярной поверхностью.

Рассматриваемое тело, содержащее границу раздела фаз, представлено на рис. 1.3.4-1. Согласно первому закону механики

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \rho dV = 0. \quad (1.3.5-1)$$

Согласно теореме переноса для областей, содержащих сингулярную поверхность, уравнение (1.3.5-1) можно переписать в виде

$$\int_{V^+ + V^-} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S+S^-} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_{(\text{синг})}} [\rho] \mathbf{u}_{(\xi)} dS = 0. \quad (1.3.5-2)$$

Уравнение неразрывности (§ 1.3.3) применимо для всей области в пределах каждой фазы. Проинтегрируем его по области  $V^+$  и используем преобразование Грина из § A.11.2

$$\left. \begin{aligned} & \int_{V^+} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right\} dV = 0; \\ & \int_{V^+} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S^+} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S_{(\text{синг})}} \rho \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{\xi} dS = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.5-3)$$

Аналогично для области  $V^-$ :

$$\int_{V^-} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S^-} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{(\text{синг})}} \rho \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{\xi} dS = 0. \quad (1.3.5-4)$$

Вычитая (1.3.5-3) и (1.3.5-4) из (1.3.5-2), находим:

$$\int_{S_{(\text{синг})}} [\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{\xi} - \rho \mathbf{u}_{(\xi)}] dS = 0. \quad (1.3.5-5)$$

Это условие должно выполняться для любой части тела, содержащего границу раздела фаз, независимо от размеров тела. Значит, само подынтегральное выражение должно быть равно нулю:

$$[\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{\xi} - \mathbf{u}_{(\xi)})] = 0. \quad (1.3.5-6)$$

Это выражение известно как уравнение баланса массы с учетом скачка массы на границе раздела фаз, представленной сингулярной поверхностью, когда всеми эффектами на границе пренебрегают.

*1.3.6. Функции тока для двумерных движений.* Под двумерным мы понимаем такое движение, поле скорости которого в некоторой системе координат имеет только две ненулевые компоненты.

Ограничимся рассмотрением несжимаемых жидкостей, когда уравнение неразрывности из § 1.3.3 сводится к

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.3.6-1)$$

Рассмотрим движение, для которого в сферических координатах будем иметь:

$$v_r = v_r(r, \theta); v_\theta = v_\theta(r, \theta); v_\phi = 0. \quad (1.3.6-2)$$

В соответствии с табл. 2.5.1-1 уравнение (1.3.6-1) принимает вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0. \quad (1.3.6-3)$$

Умножив (1.3.6-3) на  $r^2 \sin \theta$ , запишем:

$$\frac{\partial}{\partial r} (-v_r r^2 \sin \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta r \sin \theta). \quad (1.3.6-4)$$

Сравнивая (1.3.6-4) с

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r}, \quad (1.3.6-5)$$

видим, что функцию тока  $\psi$  можно определить так, что

$$v_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (1.3.6-6)$$

и

$$v_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.3.6-7)$$

Преимущество такой функции тока  $\psi$  состоит в том, что в этом случае уравнение неразрывности тождественно удовлетворяется для заданного течения, описываемого уравнениями (1.3.6-2).

Выражения для компонент скорости с помощью функции тока представлены для нескольких случаев в табл. 2.5.2-1.

*1.3.7. Еще раз о функциях тока для двумерных движений.* Опять ограничимся рассмотрением несжимаемых жидкостей, когда уравнение неразрывности сводится к

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = v^i_{,i} = 0. \quad (1.3.7-1)$$

Иной формой для дивергенции вектора является выражение

$$v^i_{,i} = \frac{1}{Vg} \frac{\partial}{\partial x^i} (\bar{g} v^i). \quad (1.3.7-2)$$

Если для рассматриваемого двумерного движения

$$v^3 = 0, \quad (1.3.7-3)$$

то, исходя из (1.3.7-2) и (1.3.7-3), можно записать уравнение неразрывности в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (-\bar{g} v^1) = \frac{\partial}{\partial x^2} (\bar{g} v^2). \quad (1.3.7-4)$$

Оно является необходимым и достаточным условием для существования такой функции тока  $\psi$ , чтобы

$$\left. \begin{aligned} \bar{g} v^1 &= -\partial \psi / \partial x^2; \\ \bar{g} v^2 &= \partial \psi / \partial x^1. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.7-5)$$

Роль функции тока в задаче о двумерном течении заключается в том, что она дает возможность тождественно удовлетворить уравнению неразрывности. При решении краевой задачи число переменных можно свести к одному.

Более подробное рассмотрение этого вопроса, а также обобщение понятия функции тока для сжимаемых течений содержится в книге Труслелла и Тупина [1].

## 1.4. ДЕФОРМАЦИЯ

**1.4.1. Скорость деформации тензорного поля [1].** Теперь наша задача — охарактеризовать скорость деформации материала.

Рассмотрим две пересекающиеся материальные кривые, изображенные на рис. 1.4.1-1. Эти кривые материальны в том смысле, что их можно считать принадлежащими материальным частицам. Для экспериментатора они могут быть двумя пересекающимися окрашенными линиями, проведенными через тело.

В точке пересечения этих кривых скорость деформации материала описывается мгновенными скоростями, с которыми изменяются длины этих кривых, и скоростью изменения угла между ними. Имея это в виду, будем считать, что кривые на рис. 1.4.1-1 представляют материал, деформируемый каким-то образом..

Пусть  $s_{(1)}$  — длина дуги, измеряемая вдоль кривой 1 в данной конфигурации; то же самое относится к кривой 2. Пусть  $s_{(1)}$  и  $s_{(2)}$  — длины дуг, измеряемые соответственно вдоль кривых 1 и 2 в начальной конфигурации. Какую-то информацию о скорости деформации тела можно получить, проанализировав выражение

$$\begin{aligned} \frac{d(m)}{dt} \left( \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(2)}} ds_{(1)} ds_{(2)} \right) &= \frac{d(m)}{dt} \left( \frac{d\mathbf{p}}{dS_{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dS_{(2)}} dS_{(1)} dS_{(2)} \right) = \\ &= \frac{d\mathbf{v}}{dS_{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dS_{(2)}} dS_{(1)} dS_{(2)} + \frac{d\mathbf{p}}{dS_{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dS_{(2)}} dS_{(1)} dS_{(2)} = \\ &= \frac{d\mathbf{v}}{ds_{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(2)}} ds_{(1)} ds_{(2)} + \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{ds_{(2)}} ds_{(1)} ds_{(2)}. \end{aligned} \quad (1.4.1-1)$$

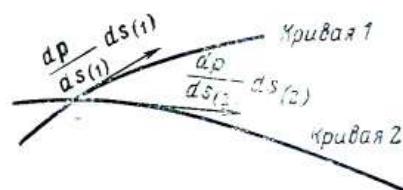


Рис. 1.4.1-1. Пересечение материальных кривых.

Это выражение можно несколько упростить, записав его с помощью компонент. Имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_{(1)}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial s_{(1)}} = \frac{\partial v_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial s_{(1)}} \mathbf{e}_i, \quad (1.4.1-2)$$

с помощью которого можно выразить:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s_{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(2)}} = \frac{\partial v_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial s_{(1)}} \frac{dz_j}{ds_{(2)}}. \quad (1.4.1-3)$$

Это позволяет представить уравнение (1.4.1-1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d(m)}{dt} \left( \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(2)}} ds_{(1)} ds_{(2)} \right) &= \left( \frac{\partial v_i}{\partial z_i} + \frac{\partial v_j}{\partial z_j} \right) \frac{dz_i}{ds_{(1)}} \frac{dz_j}{ds_{(2)}} ds_{(1)} ds_{(2)} = \\ &= 2D_{ij} \frac{dz_i}{ds_{(1)}} \frac{dz_j}{ds_{(2)}} ds_{(1)} ds_{(2)}, \end{aligned} \quad (1.4.1-4)$$

где

$$D_{ij} = 0,5 (\partial v_i / \partial z_j + \partial v_j / \partial z_i). \quad (1.4.1-5)$$

Уравнение (1.4.1-4) можно представить иначе, записав

$$\frac{d(m)}{dt} \left( \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(2)}} ds_{(1)} ds_{(2)} \right) = 2 \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(2)}} \cdot \left( \mathbf{D} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(1)}} \right) ds_{(1)} ds_{(2)}, \quad (1.4.1-6)$$

где

$$\mathbf{D} \equiv 0,5 [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] = D_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (1.4.1-7)$$

Величина  $\mathbf{D}$  называется тензором скорости деформации и служит для измерения мгновенных скоростей изменения длины и значения угла для элементов материала деформируемого тела. Длина дуги является таким параметром, для которого [11]

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{dz_i}{ds} \frac{dz_i}{ds} = 1. \quad (1.4.1-8)$$

Для случая, когда кривая 1 на рис. 1.4.1-1 совпадает с кривой 2, получим из уравнений (1.4.1-4) и (1.4.1-8)

$$\frac{d_{(m)}}{dt} \left[ \frac{d\mathbf{p}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds} (ds)^2 \right] = \frac{d_{(m)}}{dt} (ds)^2 = 2D_{ii} \frac{dz_i}{ds} \frac{dz_i}{ds} (ds)^2. \quad (1.4.1-9)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d_{(m)}}{dt} (\log ds) = D_{ii} \frac{dz_i}{ds} \frac{dz_i}{ds}, \quad (1.4.1-10)$$

где производная в левой части известна как скорость растяжения в направлении  $d\mathbf{p}/ds$ . Если предположить, что  $d\mathbf{p}/ds$  в какой-то точке является касательной к координатной кривой, то для растяжения в направлении  $z_1$  получим:

$$\frac{d_{(m)}}{dt} (\log ds_{(1)}) = D_{11}. \quad (1.4.1-11)$$

Это придает физический смысл диагональным элементам тензора скорости деформации в прямоугольной системе координат.

Вернемся теперь к уравнению (1.4.1-4) и обозначим через  $\beta_{12}$  угол между касательными к двум материальным кривым в точке их пересечения. С учетом (1.4.1-8) получим:

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds_{(1)}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(2)}} = \cos \beta_{12}. \quad (1.4.1-12)$$

Следовательно, (1.4.1-4) можно записать в виде уравнения

$$-\sin \beta_{12} \dot{\beta}_{12} ds_{(1)} ds_{(2)} + \cos \beta_{12} ds_{(1)} \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(2)}} + \cos \beta_{12} \frac{d\mathbf{p}}{ds_{(1)}} ds_{(2)} = \\ = 2D_{ii} \frac{dz_i}{ds_{(1)}} \frac{dz_i}{ds_{(2)}} ds_{(1)} ds_{(2)}, \quad (1.4.1-13)$$

которое можно привести к виду:

$$-\sin \beta_{12} \dot{\beta}_{12} = 2D_{ii} \frac{dz_i}{ds_{(1)}} \frac{dz_i}{ds_{(2)}} - \cos \beta_{12} \left[ \frac{d_{(m)} (\log ds_{(1)})}{dt} + \frac{d_{(m)} (\log ds_{(2)})}{dt} \right]. \quad (1.4.1-14)$$

Скорость уменьшения угла  $\beta_{12}$  называется скоростью сдвига в направлениях  $d\mathbf{p}/ds_{(1)}$ ,  $d\mathbf{p}/ds_{(2)}$ . Если кривые 1 и 2 на рис. 1.4.1-1 ортогональны, получим:

$$-\dot{\beta}_{12} = -\frac{d_{(m)} \beta_{12}}{dt} = 2D_{ii} \frac{dz_i}{ds_{(1)}} \frac{dz_i}{ds_{(2)}}. \quad (1.4.1-15)$$

Если  $d\mathbf{p}/ds_{(1)}$  и  $d\mathbf{p}/ds_{(2)}$  касательны к координатным кривым  $z_1$  и  $z_2$ , то из (1.4.1-15) будем иметь:

$$-\dot{\beta}_{12} = 2D_{21}. \quad (1.4.1-16)$$

Итак, из уравнений (1.4.1-11) и (1.4.1-16) видно, что компоненты тензора скорости деформации в прямоугольной системе координат можно считать равными скоростями растяжения и в два раза меньшими скоростей сдвига в направлениях координат:

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} \dot{\log ds_{(1)}} - 0,5\dot{\beta}_{21} - 2\dot{\beta}_{31} \\ . & \dot{\log ds_{(2)}} - 0,5\dot{\beta}_{32} \\ . & . & \dot{\log ds_{(3)}} \end{bmatrix}. \quad (1.4.1-17)$$

**1.4.2. Относительные вращения и завихренность.** В отличие от § 1.4.1 рассмотрим в деформируемом теле одну материальную кривую как функцию времени. Пусть  $s$  — длина дуги, измеренная вдоль этой кривой в данной конфигурации, а  $S$  — длина дуги, измеренная в начальной конфигурации. Посмотрим, как в некоторой точке этой кривой изменяется во времени угол между касательной к этой кривой и некоторым фиксированным направлением  $\mathbf{a}$  (примем  $\mathbf{a}$  за единицу измерения). Пусть  $\varphi$  обозначает угол между  $\mathbf{a}$  и вектором касательной  $d\mathbf{p}/ds$ .

Отметим, что

$$\frac{d(m)}{dt} \left( \frac{d\mathbf{p}}{ds} \cdot \mathbf{a} ds \right) = \frac{d_m}{dt} (\cos \varphi ds) = -\dot{\varphi} \sin \varphi ds + \cos \varphi \dot{ds}. \quad (1.4.2-1)$$

Здесь учитывается, что  $d\mathbf{p}/ds$  — единичный вектор (см. § 1.4.1). Можно также написать:

$$\frac{d(m)}{dt} \left( \frac{d\mathbf{p}}{ds} \cdot \mathbf{a} ds \right) = \frac{d(m)}{dt} \left( \frac{d\mathbf{p}}{dS} \cdot \mathbf{a} dS \right) = \frac{dv}{dS} \cdot \mathbf{a} dS = \frac{dv}{ds} \cdot \mathbf{a} ds. \quad (1.4.2-2)$$

Запишем это выражение для компонент:

$$\frac{dv}{ds} \cdot \mathbf{a} ds = \frac{\partial v_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{ds} a_i ds. \quad (1.4.2-3)$$

Из уравнений (1.4.2-1) — (1.4.2-3) следует, что

$$-\dot{\varphi} \sin \varphi ds + \cos \varphi \dot{ds} = \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{ds} a_j ds. \quad (1.4.2-4)$$

Предположим, что в какой-то точке  $d\mathbf{p}/ds$  и  $\mathbf{a}$  — касательные к координатным кривым  $z_i$  и  $z_j$  соответственно. Следовательно, уравнение (1.4.2-4) сводится к

$$-\dot{\varphi}_{ij} = \partial v_j / \partial z_i. \quad (1.4.2-5)$$

Здесь  $-\dot{\varphi}_{ij}$  обозначает скорость, с которой материальный элемент материала поворачивается вдоль оси  $z_i$  в направлении  $z_j$ .

Определим тензор завихренности второго ранга  $\mathbf{W}$  в виде

$$\mathbf{W} \equiv 0,5 [\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T]. \quad (1.4.2-6)$$

Для компонент в прямоугольной системе координат имеем:

$$W_{ij} = 0,5 \left( \frac{\partial v_i}{\partial z_j} - \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \right). \quad (1.4.2-7)$$

Для правосторонней прямоугольной системы координат величина

$$-W_{21} = 0,5 \left( \frac{\partial v_2}{\partial z_1} - \frac{\partial v_1}{\partial z_2} \right) \quad (1.4.2-8)$$

является полусуммой скорости правостороннего вращения элементов в направлениях координат  $z_1$  и  $z_2$  вокруг оси с направлением  $z_3$ .

Аксиальное векторное поле (см. § A.7.3)

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{W} = e_{ijk} W_{kj} \mathbf{e}_i = 0.5 \left( e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial z_j} - e_{ijk} \frac{\partial v_i}{\partial z_k} \right) \mathbf{e}_i = \\ = e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial z_j} \mathbf{e}_i = \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad (1.4.2-9)$$

называется пространственным векторным полем завихренности.

Применительно к рассматриваемой физической картине компонент тензора завихренности второго ранга  $\mathbf{W}$  мы можем считать направление вектора завихренности локальной осью вращения. Отсюда непосредственно следует первая теорема Коши: компонента пространственного векторного поля завихренности в любом направлении равна сумме скоростей правостороннего вращения относительно направления элементов в любых двух направлениях, перпендикулярных ему и друг другу.

Движение, в котором пространственное векторное поле завихренности стремится к нулю, называется безвихревым. Движение, в котором пространственное векторное поле завихренности не равно нулю, называется вихревым.

Необходимым и достаточным условием безвихревого движения является возможность представить скорость с помощью скалярного потенциала  $P$  [8]

$$\mathbf{v} = -\nabla P. \quad (1.4.2-10)$$

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ОСНОВЫ ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА

Ниже излагаются основные методы изучения механики жидкостей. Начнем с введения понятия силы. Заметим, что в отличие от определения материальной частицы, приведенного в гл. 1, сила не является элементарным понятием, которое используется нами для введения второго и третьего принципов: первого и второго законов Эйлера. Для вывода уравнений, выражающих для каждой точки материала локальные балансы импульса и момента импульса, вводится тензор напряжений. Два уравнения баланса для локальных величин (первый и второй законы Коши) вместе с уравнением неразрывности, введенным в гл. 1, и составляют основы механики жидкостей.

Отметим в общих чертах, как учитывается реальное поведение материала при решении любых практических задач. Именно на этом этапе статистическая механика, использующая молекулярный подход к реальным веществам, может служить для дополнения понятий механики сплошных сред. В механике сплошных сред существует ряд принципов, которым должны удовлетворять основные уравнения для тензора напряжений (принципы детерминизма, локального действия, независимости материала от системы отсчета и т. д.). Однако из первых принципов невозможно вывести точное соотношение между напряжением и деформацией. Если оперировать строго в рамках механики сплошных сред, такое соотношение можно вывести только, приняв некоторое допущение относительно его вида. Наиболее интересные результаты при описании поведения материала можно, вероятно, получить следующим образом: выводы, основанные на простых молекулярных моделях, можно обоб-

щить, используя утверждение о поведении материала, постулированное в механике сплошных сред. В работе [1] очень хорошо изложен в сжатой форме молекулярный подход к описанию поведения материалов.

Хотя в этой главе непосредственным объектом исследования является перенос импульса, практически все результаты будут использованы для анализа переноса энергии и массы. Совершенно очевидно, что самой лучшей основой для изучения переноса энергии и массы является четкое понимание механики жидкостей.

## 2.1. СИЛА

**2.1.1. Сила** [2, 3, 4]. Каждому телу  $B$  соответствует определенная система тел  $\overset{\circ}{B}$ , так чтобы масса этих двух тел являлась массой Вселенной. Назовем  $\overset{\circ}{B}$  внешней, или окружающей, средой для тела  $B$ .

Система сил является векторной функцией  $\mathbf{f}(B, C)$  каждой пары тел. Величина  $\mathbf{f}(B, C)$  называется силой, с которой тело  $B$  действует на тело  $C$ . Система сил определяется следующими двумя свойствами или аксиомами.

1. Для определенного тела  $B$  сила  $\mathbf{f}(C, \overset{\circ}{B})$  является аддитивной функцией, определенной для всех тел  $C$ , составляющих тело  $B$ .

2. Наоборот, для определенного тела  $B$  сила  $\mathbf{f}(B, C)$  является аддитивной функцией, определенной для всех тел  $C$  тела  $\overset{\circ}{B}$ .

Иными словами, части тела, на которые действуют силы из различных частей окружающей среды, не зависят друг от друга. Мы будем рассматривать три вида сил.

1. Внешние силы возникают, по крайней мере отчасти, вне тела и действуют на материальные частицы, из которых состоит тело. Примером такой силы является сила тяжести или электростатическая сила между двумя заряженными телами. Пусть  $P$  обозначает часть тела  $B$ , как показано на рис. 2.1.1-1. Если  $\mathbf{f}_e$  является внешней силой на единицу массы, с которой окружающая среда  $\overset{\circ}{B}$  действует на тело  $B$ , то мы можем записать суммарную внешнюю силу, действующую на  $P$ , проинтегрировав по объему  $P$ :  $\int_{V_P} \rho \mathbf{f}_e dV$ . В общем случае

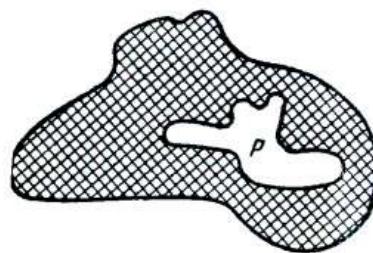


Рис. 2.1.1-1. Тело  $B$  с его частью  $P$ .

внешняя сила на единицу массы является функцией координат, т. е.  $\mathbf{f}_e$  следует считать пространственным векторным полем.

2. Взаимные силы возникают внутри тела и действуют на пары материальных частиц. Незначительное ньютоновское притяжение между любыми двумя частями одного тела является взаимной силой. Представим себе тело, в котором распределены электростатические заряды. Электростатическую силу между одной областью тела, имеющей положительный заряд, и другим элементом этого тела, заряженным отрицательно, можно назвать взаимной силой.

Пусть  $\mathbf{f}_m$  является взаимной силой на единицу массы, с которой  $B - P$  ( $B - P$  определяется таким образом, что  $B = (B - P) \cup P$  и  $(B - P) \cap P = 0$ ) действует на  $P$ ; общая взаимная сила, приложенная к  $P$ ,

выражается интегралом по объему  $P: \int_V \rho f_m dV$ . Можно ожидать, что взаим-

ная сила на единицу массы обычно является функцией координат в об-  
ласти, занятой материалом;  $f_m$  следует считать пространственным век-  
торным полем (отметим, что сумма взаимных сил между частями  $P$   
равна нулю [3]).

3. Контактные силы не зависят от координат. Кон-  
тактную силу можно представить как силу, действующую на поверх-  
ности, ограничивающей часть материала, и эквивалентную силе, с ко-  
торой одна часть материала действует на другую, без учета взаимной  
силы. Когда мы печатаем на машинке, на клавиши действует именно  
контактная сила. Если размять в руках кусок пластилина, в процессе  
деформации каждая его часть действует на любую другую, и это дей-  
ствие и будет контактной силой на общей границе. Пусть  $t = t(z, P)$   
представляет собой силу на единицу площади, с которой  $B - P$  дейст-  
вует на границу  $P$  в точке  $z$ . Эта сила на единицу площади обычно  
называется напряжением. Суммарная сила, с которой  $B - P$  дейст-  
вует на  $P$ , можно записать в виде интеграла  $\int_S_P t dS$  по ограничиваю-

щей поверхности  $P$ . Характер контактной силы определяется из прин-  
ципа напряжений.

Принцип напряжений. Существует векторная функция  $t(z, n)$ ,  
определенная для всех точек  $z$  тела  $B$  и для всех единичных век-  
торов  $n$ , так что напряжение, с которым  $B - P$  действует на любую  
часть  $P$  тела  $B$ , можно задать в виде

$$t(z, P) = t(z, n), \quad (2.1.1-1)$$

где  $n$  — единичный вектор нормали к поверхности, ограничивающей  
тело  $P$ . Пространственный вектор  $t = t(z, n)$  называется вектором на-  
пряжений в точке  $z$ , действующим на ориентированный элемент по-  
верхности с нормалью  $n$ , направленной внутрь материала, который дей-  
ствует на этот элемент поверхности с напряжением  $t$ .

В любых конкретных задачах силы, действующие на тело, счита-  
ются заданными заранее для всех наблюдателей. Все наблюдатели  
заранее принимают одну и ту же систему сил в рассматриваемой за-  
даче. Задавая эти силы, мы формулируем конкретную динамическую  
задачу. Следовательно, все силы считаются независимыми от наблю-  
дателя или от системы отсчета [5] (см. § 1.2.1)

$$f_e^* = Q f_e; \quad f_m^* = Q f_m \quad (2.1.1-2)$$

и

$$t^* = Q \cdot t. \quad (2.1.1-3)$$

## 2.2. ЗАКОНЫ ЭЙЛЕРА

2.2.1. Законы Эйлера. Вторым и третьим постулатами, используе-  
мыми в рассмотрении, являются два закона Эйлера [2—4].

Первый закон Эйлера. Скорость изменения импульса тела  
относительно неподвижных звезд равна сумме сил, действующих на  
тело<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Трудыделл и Тупин [3] подчеркивают, что «законы Ньютона не являются ни  
чтожко сформулированными, ни достаточно общими, чтобы служить основой для меха-  
ники сплошных сред».

Обозначим объем и замкнутую ограничивающую поверхность тела или любой части тела соответственно через  $V_{(m)}$  и  $S_{(m)}$ . Исходя из § 2.1.1, в неподвижной относительно неподвижных звезд системе координат первый закон Эйлера можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \rho v dV = \int_{S_{(m)}} t dS + \int_{V_{(m)}} \rho f dV, \quad (2.2.1-1)$$

где  $f$  является полем внешних и взаимных сил на единицу массы:

$$f = f_e + f_m. \quad (2.2.1-2)$$

За редкими исключениями, влиянием взаимных сил по сравнению с влиянием внешних сил можно всегда пренебречь. В последующем изложении мы исключим взаимные силы из рассмотрения и будем называть  $f$  полем внешних сил на единицу массы. При выводе уравнения (2.2.1-1) все пространственные векторные поля выражаются в неподвижной относительно неподвижных звезд системе координат (см. § 1.2.1). В метеорологии и океанографии важно различать системы отсчета, фиксированные относительно Земли, и системы отсчета, неподвижные относительно неподвижных звезд. Но для большинства лабораторных экспериментов и промышленных процессов это различие несущественно.

Второй закон Эйлера. Скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижных звезд равна сумме моментов всех сил, действующих на тело.

В неподвижной относительно неподвижных звезд системе отсчета второй закон Эйлера записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \rho (p \wedge v) dV = \int_{S_{(m)}} p \wedge t dS + \int_{V_{(m)}} \rho (p \wedge f) dV. \quad (2.2.1-3)$$

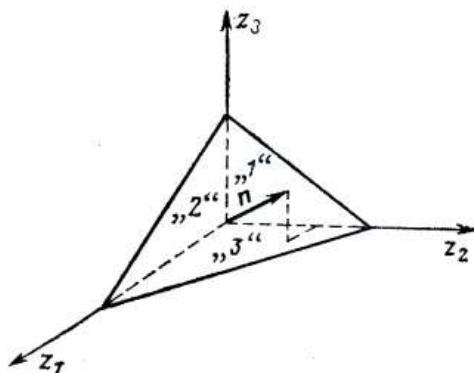


Рис. 2.2.2-1. Тело в форме тетраэдра.

При такой записи второго закона Эйлера мы ограничиваемся так называемым неполярным случаем<sup>1</sup>, т. е. здесь считается, что все действующие на тело моменты вращения являются результатом сил, действующих на тело [3, 6, 8]. Например, можно создать локальный источник момента импульса с помощью вращающегося электрического поля [9, 10]. В таком случае может оказаться необходимым учитывать поток момента импульса на границе тела; этого следовало бы ожидать при наличии градиента момента импульса для отдельных молекул на границе тела. Такого рода явления еще недостаточно изучены, но, вероятнее всего, они, за редкими исключениями, пренебрежимо малы и не будут нами учитываться.

<sup>1</sup> Молекулы называются неполярными, когда их дипольный момент равен нулю. В этой работе термин «неполярный» используется в совершенно ином смысле: он означает, что все моменты вращения, действующие на материал, являются результатом сил.

2.2.2. Тензор напряжений. Проследим, как меняется функция  $\mathbf{t}(\mathbf{z})$ ,

и) при изменении  $\mathbf{n}$  и фиксированном  $\mathbf{z}$ .

В некоторой точке тела выделим участок в форме тетраэдра, изображенного на рис. 2.2.2-1. Три его плоскости взаимно перпендикулярны и совпадают с плоскостями прямоугольных координат, пересекающиеся в точке  $\mathbf{z}$ . Четвертая сторона имеет нормаль  $\mathbf{n}$ , направленную поверху. Пусть высота тетраэдра равна  $h$ , а площадь наклонной поверхности —  $A$ . С помощью векторного базиса в прямоугольной системе координат можно записать  $\mathbf{n}=n_i\mathbf{e}_i$ . Поскольку косинусы углов между плоскостями прямоугольных координат и наклонной плоскостью соответственно равны  $n_1, n_2, n_3$ , площади сторон тетраэдра, лежащих в плоскостях координат, будут соответственно равны  $n_1A, n_2A, n_3A$ .

Используя первый закон Эйлера (2.2.1-1) для материала тетраэдра в момент  $t$ , получаем:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(m)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{S(m)} \mathbf{t} dS + \int_{V(m)} \rho \mathbf{f} dV. \quad (2.2.2-1)$$

Применив теорему переноса

$$\frac{d}{dt} \int_{V(m)} \rho \widehat{\Psi} dV = \int_{V(m)} \rho \frac{d_{(m)}\widehat{\Psi}}{dt} dV \quad (2.2.2-1a)$$

к левой части уравнения и рассчитав интеграл по поверхности из теоремы о среднем, получим:

$$\int_{V(m)} \left( \rho \frac{d_{(m)}\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{f} \right) dV = A \left( \mathbf{t}^* + \frac{A_1}{A} \mathbf{t}^*_1 + \frac{A_2}{A} \mathbf{t}^*_2 + \frac{A_3}{A} \mathbf{t}^*_3 \right), \quad (2.2.2-2)$$

где  $\mathbf{t}^*$  обозначает напряжение, с которым окружающая среда действует на наклонную поверхность;  $\mathbf{t}^*_i$  — контактное напряжение, с которым окружающая среда действует на поверхность с единичной нормалью  $\mathbf{e}_i$ , направленной внутрь. Используя в левой части уравнения теорему о среднем, получаем:

$$\left( \rho \frac{d_{(m)}\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{f} \right)^* \frac{hA}{3} = A(\mathbf{t}^* + n_1\mathbf{t}^*_1 + n_2\mathbf{t}^*_2 + n_3\mathbf{t}^*_3). \quad (2.2.2-3)$$

Разделив все члены в уравнении (2.2.2-3) на  $A$ , рассмотрим ряд геометрически подобных тетраэдров; в пределе при  $h \rightarrow 0$  получим:

$$\mathbf{t} = -(\mathbf{t}_1\mathbf{n}_1 + \mathbf{t}_2\mathbf{n}_2 + \mathbf{t}_3\mathbf{n}_3), \quad (2.2.2-4)$$

где все векторы напряжений рассчитаны для точки  $\mathbf{z}$ . По определению  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  и  $\mathbf{t}_3$  не зависят от  $\mathbf{n}$ .

При условии, что  $T_{km}$  является  $k$ -й компонентой вектора напряжений, действующего на положительную сторону плоскости  $z_m = \text{const}$ , согласно лемме Коши

$$\mathbf{t}(\mathbf{z}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{z}, -\mathbf{n})$$

запишем:

$$-\mathbf{t}_1 = T_{11}\mathbf{e}_1; \quad -\mathbf{t}_2 = T_{12}\mathbf{e}_2; \quad -\mathbf{t}_3 = T_{13}\mathbf{e}_3. \quad (2.2.2-5)$$

Поэтому уравнение (2.2.2-4) можно переписать в виде

$$\mathbf{t} = n_j T_{ij} \mathbf{e}_i. \quad (2.2.2-6)$$

**Матрица**  $[T_{ij}]$  определяет тензор второго ранга  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (2.2.2-7)$$

с помощью которого уравнение (2.2.2-6) можно переписать в виде

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.2.2-8)$$

При использовании уравнения (2.2.2-8) следует иметь в виду, что  $\mathbf{n}$  является нормалью, направленной внутрь материала, который действует с силой  $\mathbf{t}(z, n)$  на единицу площади поверхности в точке  $z$ .

**2.2.3. Первый закон движения Коши.** Опять ограничимся телом, в котором все величины непрерывны и могут дифференцироваться любое число раз. Это позволяет исключить ударные волны и поверхности раздела фаз (по крайней мере, если поверхность раздела фаз снова представлена сингулярной поверхностью; см. § 1.3.5). Используя модифицированную теорему переноса с учетом закона сохранения массы [уравнение (2.2.2-1а)], можно записать первый закон Эйлера (§ 2.2.1) в виде

$$\int_{V(m)} \rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} dV = \int_{S(m)} \mathbf{t} d\mathbf{S} + \int_{V(m)} \rho \mathbf{f} dV. \quad (2.2.3-1)$$

Если вектор напряжений представить через тензор напряжений (см. § 2.2.2), то, используя преобразование Грина (§ A.1.2), первый член в правой части уравнения (2.2.3-1) можно представить в виде

$$\int_{S(m)} \mathbf{t} d\mathbf{S} = \int_{S(m)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \int_{V(m)} \operatorname{div} \mathbf{T} dV. \quad (2.2.3-2)$$

Подставив (2.2.3-2) в (2.2.3-1), получим:

$$\int_{V(m)} \left( \rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} - \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \mathbf{f} \right) dV = 0. \quad (2.2.3-3)$$

Следует иметь в виду, что (2.2.3-1) записано для произвольной части  $P$  тела. Уравнение (2.2.3-3) остается справедливым для любой величины  $P$  (очень большой или произвольно малой). Это означает, что само подынтегральное выражение должно быть тождественно равно нулю:

$$\rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}. \quad (2.2.3-4)$$

Это уравнение имеет несколько названий: первый закон Коши, дифференциальное уравнение баланса импульса или уравнение движения для напряжений. Оно является уравнением баланса импульса, которое должно выполняться для каждой точки тела.

**2.2.4. Второй закон движения Коши.** Опять ограничимся телом, в котором все величины являются гладкими функциями координат и времени (см. § 2.2.3).

Используя теорему переноса и дифференциальное уравнение неразрывности, можно записать второй закон Эйлера в виде

$$\int_{V(m)} \rho \frac{d_{(m)}}{dt} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{v}) dV = \int_{S(m)} \mathbf{p} \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{S} + \int_{V(m)} \rho (\mathbf{p} \wedge \mathbf{f}) dV, \quad (2.2.4-1)$$

где вектор напряжений выражается, как описано в § 2.2.2, через тензор напряжений. Рассмотрим это выражение отдельно.

В левой части уравнения имеем:

$$\frac{d_{(m)}}{dt} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{v}) = \frac{d_{(m)} \mathbf{p}}{dt} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{p} \wedge \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt}. \quad (2.2.4-2)$$

Но так как по определению (§ 1.1.1)

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d_{(m)} \mathbf{p}}{dt}, \quad (2.2.4-3)$$

то получаем:

$$\frac{d_{(m)}}{dt} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{p} \wedge \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt}. \quad (2.2.4-4)$$

Применив к первому члену в правой части (2.2.4-1) преобразование Грина (§ A.11.2), получим:

$$\int_{S_{(m)}} \mathbf{p} \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{V_{(m)}} \frac{\partial}{\partial z_m} (e_{ijk} z_j T_{km}) dV \mathbf{e}_i. \quad (2.2.4-5)$$

Теперь найдем:

$$\frac{\partial}{\partial z_m} (e_{ijk} z_j T_{km}) = e_{ijk} \frac{\partial z_i}{\partial z_m} T_{km} + e_{ijk} z_j \frac{\partial T_{km}}{\partial z_m}. \quad (2.2.4-6)$$

Но

$$\frac{\partial z_i}{\partial z_m} = \delta_{im}. \quad (2.2.4-7)$$

Уравнения (2.2.4-6) и (2.2.4-7) позволяют заключить, что

$$\frac{\partial}{\partial z_m} (e_{ijk} z_j T_{km}) \mathbf{e}_i = e_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_i + \mathbf{z} \wedge (\operatorname{div} \mathbf{T}). \quad (2.2.4-8)$$

С учетом первого закона Коши (§ 2.2.3) из (2.2.4-1) следует:

$$\int_{V_{(m)}} e_{ijk} T_{kj} \mathbf{e}_i dV = 0. \quad (2.2.4-9)$$

Но уравнение (2.2.4-1) было записано для произвольной части тела, следовательно,

$$e_{ijk} T_{kj} \cdot \mathbf{e}_i = 0. \quad (2.2.4-10)$$

Поскольку элементы базиса в **прямоугольной системе координат** линейно независимы, мы имеем:

$$e_{ijk} T_{kj} = 0. \quad (2.2.4-11)$$

Тогда можно также записать:

$$e_{imn} e_{ijk} T_{kj} = 0; T_{nm} - T_{mn} = 0. \quad (2.2.4-12)$$

Уравнение (2.2.4-12) выражает второй закон движения Коши.

Необходимым и достаточным условием сохранения момента импульса в теле является симметричность тензора напряжений

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (2.2.4-13)$$

В дальнейшем второй закон Эйлера удовлетворяется автоматически, поскольку компоненты тензора напряжений считаются симметричными.

Следует иметь в виду, что вывод о симметричности тензора напряжений основан на законе Эйлера для неполярного случая, т. е. когда все моменты вращения, действующие на тело, являются результатом действующих на тело сил (см. § 2.2.1).

### 2.3. ПОВЕДЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*2.3.1. Поведение материалов.* Закон сохранения массы, а также первый и второй законы Эйлера получены для всех материалов. Однако наш опыт говорит о том, что в одинаковых условиях воздух и сталь реагируют на действие сил совершенно по-разному. Все это и следует отразить в теоретических рассуждениях.

Чтобы подтвердить это интуитивное предположение, рассмотрим математическую модель, разрабатываемую во всем предыдущем изложении,  $\rho = \text{const.}$ , т. е. вещества несжимаемо. Предположим также наличие заданного поля внешних сил  $\mathbf{f}$ ; например, в физических задачах обычно задается существенно однородное гравитационное поле.

В качестве неизвестных в некоторой произвольной системе координат берем три компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$  и шесть компонент тензора напряжений  $\mathbf{T}$  (как показано в § 2.2.4, тензор напряжений здесь симметричен).

В качестве уравнений используем дифференциальное уравнение неразрывности (1.3.3-4) и три компоненты первого закона Коши (2.2.3-4), т. е. имеем четыре уравнения для девяти неизвестных. Интуиция подсказывает нам необходимость дополнительной информации. Определить эту недостающую информацию можно так: если характер внешней силы считается известным, то еще ничего не сказано о характере силы, с которой одна часть тела действует на другую, смежную с ней. В § 2.2.1 указывалось, что мы будем пренебрегать взаимными силами. Таким образом, остается только контактная сила. Необходимо определить, как контактные силы в теле зависят от движения и деформации тела. Точнее, необходимо определить, как тензор напряжений  $\mathbf{T}$  меняется при движении и деформации тела.

Прежде чем устанавливать зависимость между тензором напряжений и движением, посмотрим, не может ли наш повседневный опыт наблюдения за материалами при деформациях и движении подсказать нам некоторые закономерности этого поведения. Например, очевидно, что поведение материала в будущем не влияет на поле тензора напряжений в настоящем. Отсюда вытекает принцип детерминизма [2]:

напряжение в теле определяется всем предыдущим движением, в котором участвовало тело.

Весь наш опыт также говорит о том, что движение в одной части тела не обязательно оказывает влияние на напряжение в другой части тела. Например, взяв кусок пластилина, мы можем изменить его форму с одного конца, оставив другую его часть без изменения. С несколько иной точки зрения физический смысл контактной силы заключается в том, что условия в непосредственной близости от рассматриваемой точки определяют эту силу. Эту формулировку можно назвать принципом локального действия [2, 4]:

при определении напряжения в материальной точке  $\zeta$  движением материала вне произвольно малого участка вокруг этой точки можно пренебречь.

Рассмотрим эксперимент, в котором к одному концу пружины подвешены гири, а другой ее конец закреплен на потолке лаборатории. Эксперимент проводят два оператора. Один стоит на полу лаборатории рядом с пружиной, другой находится в противоположном конце комнаты на вращающемся с постоянной угловой скоростью столике. Системой отсчета для первого наблюдателя являются стены лаборатории, для другого — ось вращения столика и ряд цветных линий на нем; этому наблюдателю пружина и гири представляются вращающимися по кругу. Однако мы ожидаем, что оба наблюдателя придут к одному и тому же выводу относительно поведения пружины под напряжением. Вернувшись к § 1.2.1 и 1.2.3, можно обобщить наши интуитивные заключения, введя принцип независимости материала от системы отсчета<sup>1</sup> [4]:

определяющие уравнения (т. е. уравнения, описывающие поведение материала, например, уравнения для тензора напряжений в зависимости от движения материала) должны быть инвариантными при изменениях системы отсчета. Если основное уравнение описывает процесс, в котором тензор напряжений и движение задаются в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(z_x, t) \text{ и } z = \chi_z(z_x, t), \quad (2.3.1-1)$$

то оно должно также описывать любой эквивалентный процесс в другой системе отсчета. В частности, определяющее уравнение должно удовлетворяться для процесса, в котором тензор напряжений и движение задаются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^* &= \mathbf{T}^*(z_x, t^*) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{T}(z_x, t) \cdot \mathbf{Q}^T(t); \\ z^* &= \chi_z^*(z_x, t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \chi_z(z_x, t) \end{aligned} \quad (2.3.1-2)$$

и

$$t^* = t - a.$$

Можно указать также другие формулировки, во многом аналогичные приведенной выше [3, 4]. Теперь эти принципы могут быть использованы для построения конкретных определяющих уравнений для тензора напряжений. Одно из уравнений такого типа обсуждается в следующем параграфе.

**2.3.2. Простое определяющее уравнение для тензора напряжений.** Выше рассматривались три принципа, которым должно удовлетворять каждое определяющее уравнение для напряжения. Теперь попробуем построить определяющее уравнение, согласующееся с этими принципами.

Принципу детерминизма можно удовлетворить, потребовав, чтобы напряжение зависело от состояния движения материала в настоящий момент. Как принцип детерминизма, так и принцип локального действия удовлетворяются, если предположить, что напряжение в точке является функцией скорости и градиента скорости в этой точке:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}(\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}). \quad (2.3.2-1)$$

Понятно, что напряжение может также зависеть от переменных локального термодинамического состояния; поскольку эта зависимость пока не учитывается, она не приводится в явном виде.

<sup>1</sup> Эта работа не является исторически «первой», а выбрана из-за ее четкости. Весь идея независимости материала от системы отсчета была высказана авторами еще до Нолла [13]. Например, весьма интересны рассуждения [14] Олдройда. Трусселл и Нолл проследили развитие этого понятия, начиная с XVII в.

Любой тензор второго ранга можно записать в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров. Например, градиент скорости можно выразить как сумму тензора скорости деформации  $\mathbf{D}$  (§ 1.4.1) и тензора завихренности ( $\mathbf{W}$ ):

$$\nabla \mathbf{v} = 0,5[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + 0,5[\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T] = \mathbf{D} + \mathbf{W}. \quad (2.3.2-2)$$

Это позволяет переписать уравнение (2.3.2-1) в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}(\mathbf{v}, \mathbf{D} + \mathbf{W}). \quad (2.3.2-3)$$

Принцип независимости материала от системы отсчета, рассмотренный в § 2.1.3, требует, чтобы

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{H}(\mathbf{v}^*, \mathbf{D}^* + \mathbf{W}^*). \quad (2.3.2-4)$$

Из уравнений (1.2.2-4) и (2.3.2-3) следует, что функция  $\mathbf{H}$  должна удовлетворять уравнению

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{v}, \mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{H}(\dot{\mathbf{c}}^* + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T). \quad (2.3.2-5)$$

Введем какое-нибудь изменение системы отсчета, чтобы

$$\dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{W} \quad (2.3.2-6)$$

и

$$\dot{\mathbf{c}}^* = -\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.3.2-7)$$

При таком изменении системы отсчета из уравнений (2.3.2-4) и (2.3.2-5) получим:

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{H}(\mathbf{0}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{0}) = \mathbf{G}(\mathbf{D}^*). \quad (2.3.2-8)$$

Используя принцип независимости материала от системы отсчета, находим из уравнения (2.3.2-8):

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{D}). \quad (2.3.2-9)$$

Уравнение (2.3.2-5) требует, чтобы функция  $\mathbf{G}$  удовлетворяла:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{D}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T). \quad (2.3.2-10)$$

Попробуем дать физическую интерпретацию использования принципа независимости материала от системы отсчета в предыдущих параграфах. Начнем с наблюдателя в точке  $\mathbf{z}$  в произвольной системе отсчета, который предполагает, что тензор напряжений зависит от скорости, тензора скорости деформации и тензора завихренности [уравнение (2.3.2-3)]. Уравнение (1.2.2-3) и уравнения (2.3.2-6) и (2.3.2-7) записаны для другого наблюдателя в точке  $\mathbf{z}^*$  иной системы отсчета. Наблюдатель в  $\mathbf{z}^*$  вращается и перемещается поступательно вместе с материалом таким образом, что для него скорость  $\mathbf{v}$  и тензор завихренности  $\mathbf{W}$  материала равны нулю. Он не видит зависимости тензора напряжений  $\mathbf{T}$  от  $\mathbf{W}$ ; он видит, что  $\mathbf{T}$  зависит только от  $\mathbf{D}$  [уравнение (2.3.2-8)]. Но ведь принцип независимости материала от системы отсчета требует, чтобы выводы всех наблюдателей относительно поведения материалов были одинаковыми. Следовательно, можно заключить, что уравнение (2.3.2-3) сводится к уравнению (2.3.2-9).

Наиболее общей формой уравнения (2.3.2-9) при ограничении (2.3.2-10) является [4]:

$$\mathbf{T} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{D} + \alpha_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}, \quad (2.3.2-11)$$

где

$$\alpha_k = \alpha_k(I_D, II_D, III_D). \quad (2.3.2-12)$$

Здесь  $I_D, II_D, III_D$  — три основные инварианта тензора скорости деформации, которые являются коэффициентами в уравнении для основных значений  $\mathbf{D}$ :

$$0 = \det(m\mathbf{I} + \mathbf{D}) = m^3 + I_D m^2 + II_D m + III_D. \quad (2.3.2-13)$$

В качестве упражнения покажите, что

$$I_D \equiv \text{tr } \mathbf{D} = \text{div } \mathbf{v}; \quad (2.3.2-14)$$

$$II_D = 0,5 [(I_D)^2 - \bar{II}_D]; \quad (2.3.2-15)$$

$$\bar{II}_D \equiv \text{tr } \mathbf{D}^2 = \text{tr } (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}); \quad (2.3.2-16)$$

$$III_D \equiv \det \mathbf{D}. \quad (2.3.2-17)$$

Уравнение (2.3.2-11) впервые было получено Рейнером [15] и Прагером [16] для функций  $\mathbf{G}(\mathbf{D})$  в виде тензорных степенных рядов [4].

Отметим, что это определяющее уравнение для тензора напряжений автоматически удовлетворяет второму закону Коши, поскольку тензор скорости деформации симметричен.

Из (2.3.2-11) непосредственно следует, что наиболее общим линейным соотношением между тензором напряжений и тензором скорости деформации, которое согласуется с принципом независимости материала от системы отсчета, является

$$\mathbf{T} = (\alpha + \lambda \text{div } \mathbf{v}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}. \quad (2.3.2-18)$$

Если принять  $\alpha = -P$ , где  $P$  — термодинамическое давление (см. § 5.1.2), то получим частный случай уравнения (2.3.2-18):

$$\mathbf{T} = (-P + \lambda \text{div } \mathbf{v}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}. \quad (2.3.2-19)$$

Это уравнение называется ньютоновской моделью поведения жидкости или законом вязкости Ньютона. Коэффициент  $\mu$  известен как коэффициент сдвиговой вязкости;  $\alpha = \lambda + (2/3)\mu$  является коэффициентом объемной вязкости. Позднее мы воспользуемся дифференциальным неравенством энтропии, чтобы показать, что  $\mu \geq 0$ ;  $\lambda \geq -(2/3)\mu$  [4]. Часто утверждают, что соотношение Стокса  $\alpha = \lambda + (2/3)\mu = 0$  доказано для одноатомных газов с низкой плотностью. Действительно, это соотношение косвенно содержится в теории [17]. Опубликованы два обзора литературы, посвященной уравнению (2.3.2-14) [17, 18], авторы которых делают вывод, что почти все экспериментальные измерения на сегодняшний день показывают, что величина  $\lambda$  положительна и для многих жидкостей по значению на порядок больше, чем  $\mu$ .

Другой частный случай уравнения (2.3.2-18) соответствует неожидаемой жидкости:

$$\mathbf{T} = -P \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}. \quad (2.3.2-20)$$

Это уравнение называется ньютоновской моделью несжимаемой жидкости или ньютоновским законом вязкости для несжимаемой жидкости. Уравнение (2.3.2-20) иногда характеризуют как частный случай уравнения (2.3.2-19); это неверно, так как для несжимаемой жидкости  $P=0$ . Величина  $p$  известна как среднее давление. Из (2.3.2-20) мы видим, что ее можно определить в виде

$$p = -\frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{T}. \quad (2.3.2-21)$$

При анализе определяющих уравнений для тензора напряжений обычно используют тензор дополнительных напряжений:

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} + p\mathbf{I}. \quad (2.3.2-22)$$

Таким образом, строго говоря, термодинамическая величина выделяется из группы явлений, возникающих в результате деформации. Для несжимаемых жидкостей тензор дополнительных напряжений определяется в виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} + p\mathbf{I}, \quad (2.3.2-23)$$

где  $p$  можно считать любым скалярным полем [3]. Обычно для несжимаемых жидкостей  $p$  определяется как среднее давление [уравнение (2.3.2-21)]. Именно это определение будет использоваться в дальнейшем.

Известно, что ньютоновская модель (2.3.2-18) применима для описания поведения многих газов и жидкостей с низкой молекулярной массой, однако еще не установлено, что для любой жидкости необходимо, чтобы в уравнении (2.3.2-11)  $\kappa_2=0$  или величина  $\kappa_1$  зависела от  $\Pi_D$ . С другой стороны, ряд эмпирических соотношений, основанных на предельных случаях уравнения (2.3.2-11), представляют некоторый практический интерес. Несколько таких соотношений рассматриваются в следующем параграфе.

*2.3.3. Два класса эмпирических моделей.* В настоящее время нельзя утверждать, что любая жидкость, для которой ньютоновская модель неприменима, может быть описана уравнением (2.3.2-11). Но очень небольшое число экспериментальных работ по несжимаемым жидкостям показывает, что эмпирические модели, основанные на уравнении (2.3.2-11), могут найти применение в том смысле, что они описывают некоторые аспекты поведения реальных жидкостей. Наиболее общим классом эмпирических моделей для несжимаемых жидкостей, основанных на уравнении (2.3.2-11), является следующий:

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} + p\mathbf{I} = 2\eta(\gamma)\mathbf{D}, \quad (2.3.3-1)$$

где

$$\gamma = \sqrt{2\Pi_D} = \sqrt{2 \operatorname{tr} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})} = \sqrt{2 \operatorname{tr} \mathbf{D}^2}. \quad (2.3.3-2)$$

Назовем  $\mathbf{S}$  тензором дополнительных напряжений; по аналогии с уравнением (2.3.2-20)  $\eta(\gamma)$  обычно называется функцией кажущейся вязкости. Из дифференциального неравенства энтропии можно показать, что

$$\eta(\gamma) \geq 0. \quad (2.3.3-3)$$

На основании экспериментальных наблюдений мы отвергаем возможность  $\eta(\gamma)=0$  даже в пределе  $\gamma \rightarrow 0$ .

Потребуем, чтобы

$$\eta(\gamma) > 0. \quad (2.3.3-4)$$

Спределим:

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} II_S} = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(S \cdot S)} = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} S^2}. \quad (2.3.3-5)$$

Из уравнения (2.3.3-1) получим:

$$\tau = \tau(\gamma) = \eta(\gamma) \gamma. \quad (2.3.3-6)$$

Предположим, что  $\eta(\gamma)$  является дифференцируемой функцией:

$$\left. \frac{d\tau}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\tau(\gamma) - \tau(0)}{\gamma} \Rightarrow \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\tau(\gamma)}{\gamma} = \eta(0). \quad (2.3.3-7)$$

Уравнения (2.3.3-4) и (2.3.3-7) требуют, чтобы

$$\left. \frac{d\tau}{d\gamma} \right|_{\gamma=0} > 0. \quad (2.3.3-8)$$

Если производная  $d\tau/d\gamma$  непрерывна, то она должна быть положительной в окрестности  $\gamma=0$ , где  $\tau(\gamma)$  будет строго возрастающей функцией  $\gamma$  и поэтому можно определить  $\gamma$  как

$$\gamma = \lambda(\tau). \quad (2.3.3-9)$$

Уравнение (2.3.3-9) вытекает из (2.3.3-1) для  $\gamma$ , достаточно близких к нулю. Возможно, что  $\tau(\gamma)$  перестает увеличиваться при  $\gamma$  выше некоторого значения. Однако это не подтверждается экспериментально. Из уравнений (2.3.3-6) и (2.3.3-9) следует, что

$$\frac{\gamma}{\tau} = \frac{1}{\eta(\gamma)} = \frac{\lambda(\tau)}{\tau} = \frac{1}{\eta(\lambda(\tau))}. \quad (2.3.3-10)$$

Поэтому уравнение (2.3.3-1) можно переписать в виде

$$2D = \varphi(\tau) S, \quad (2.3.3-11)$$

где

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\eta(\lambda(\tau))}. \quad (2.3.3-12)$$

Одной из наиболее удобных двухпараметрических обобщенных ньютоновских моделей является модель Оствальда—Вейля или степенная модель [19]

$$\eta(\gamma) = m\gamma^{n-1} \quad (2.3.3-13)$$

или

$$\varphi(\tau) = m^{-(1/n)} \tau^{(1-n)/n}. \quad (2.3.3-14)$$

Здесь  $m$  и  $n$  — параметры, определяемые эмпирически. При  $n=1$  и  $m=\mu$  степенная модель сводится к ньютоновской модели для несжимаемой жидкости (2.3.2-20). Поскольку эта модель относительно проста, она широко используется в теоретических расчетах. Ее недостатком является то, что она не сводится к ньютоновскому поведению ни в пределе  $\gamma \rightarrow \infty$  ( $\tau \rightarrow \infty$ ), ни в пределе  $\gamma \rightarrow 0$  ( $\tau \rightarrow 0$ ), тогда, как известно, что реальные жидкости ведут себя именно так. Для большинства полимеров и полимерных растворов  $n < 1$ . При этом допущении уравнение (2.3.3-13) дает бесконечную вязкость в предельном случае нулевой скорости деформации и нулевую вязкость при бесконечной скорости деформации.

Модель Эллиса [19, 20] является возможной комбинацией ньютоновской и степенной моделей

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\eta_0} \left[ 1 + \left( \frac{\tau}{\tau_{0.5}} \right)^{\alpha-1} \right], \quad (2.3.3-15)$$

где  $\eta_0$ ,  $\tau_{0.5}$  и  $\alpha$  — параметры, определяемые из эксперимента. Эта модель включает степенную модель как предельный частный случай:

$$\frac{1}{\eta_0} \rightarrow 0; \frac{1}{\eta_0 \left( \frac{\tau}{\frac{1}{2}} \right)^{\alpha-1}} \rightarrow m^{-1/n}; \alpha \rightarrow 1/n.$$

Обычно для полимеров и их растворов  $1 \leq a \leq 3$  [20], поэтому это уравнение точно определяет нижний предел вязкости  $\eta$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Уравнение (2.3.3-15) считается одной из самых удачных трехпараметрических моделей.

Хермес и Фредриксон [21] предложили модифицированную модель Эллиса:

$$\eta(\gamma) = \frac{m\eta_0}{m_0 + \eta_0 \gamma^{1-n}}, \quad (2.3.3-16)$$

где  $m$ ,  $\eta_0$ ,  $n$  — параметры, определяемые из эксперимента. Если предположить, что  $n < 1$ , то это уравнение дает нижний предел вязкости при  $\gamma \rightarrow 0$ . Уравнение (2.3.3-16) во многих случаях удобнее, чем модель Эллиса, так как тензор напряжений задается как явная функция тензора скорости деформации.

Модель Сиско [20, 22] представляет собой еще одну комбинацию ньютоновской и степенной моделей:

$$\eta(\gamma) = \eta_0 \left[ 1 - \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{\alpha-1} \right] \text{ для } \gamma < \gamma_0, \quad (2.3.3-17)$$

где  $\eta_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\alpha$  — параметры, значения которых зависят от рода исследуемого вещества. Это уравнение точно определяет нижний предел вязкости  $\eta_0$  при  $\gamma \rightarrow 0$ , но не может быть использовано для  $\gamma > \gamma_0$ , так как обычно  $1 \leq a \leq 3$  [20].

Бингамовская модель [19] интересна в историческом плане, однако в настоящее время ее практическое применение ограничено. Она описывает материал, который ведет себя как жесткое твердое тело, пока напряжение не превысит некоторое критическое значение

$$\text{для } \tau > \tau_0 \quad \eta(\gamma) = \eta_0 + \frac{\tau_0}{\gamma}; \quad (2.3.3-18)$$

$$\text{для } \tau < \tau_0 \quad D = 0. \quad (2.3.3-19)$$

Эта модель содержит два параметра:  $\eta_0$  и  $\tau_0$ . Первоначально она была предложена для описания поведения красителей. Представление о критическом напряжении  $\tau_0$ , при котором жесткое твердое тело становится жидкостью, основано на неверных данных в пределе  $\tau \rightarrow 0$ . Хотя более поздние работы не смогли подтвердить, что любые материалы, действительно, являются бингамовскими пластиками, это понятие постоянно встречается в старых работах.

Кроме вышеупомянутых, существует еще много других моделей вида (2.3.3-1) и (2.3.3-11) [1, 19, 20]. Они часто публикуются в упрощенной форме для частных случаев, и чтобы использовать такую мо-

дель для других условий, необходимо сначала выразить ее в виде (2.3.3-1) или (2.3.3-11).

Главным недостатком этих моделей является то, что в настоящее время неизвестны их ограничения. Мы знаем только, что они могут служить надежными способами обработки данных по напряжению сдвига в таких вискозиметрических течениях [24], как, например, стационарное течение в трубе, стационарное тангенциальное течение между концентрическими цилиндрами, стационарное течение между конусом и пластиной. Именно для таких условий эти модели были первоначально разработаны экспериментаторами. Известно также, что они не могут дать правильное описание нормальных напряжений [24] в вискозиметрических течениях. Из следующего параграфа станет ясно, что перспективы применения этих моделей для более общих случаев не очень обнадеживающие. Поэтому нужно быть осторожным при использовании этих моделей в задачах, не касающихся вискозиметрических течений, хотя ценность этих моделей несомненна для анализа обтекания шара стационарным ползучим потоком [25, 26].

**2.3.4. Простая нолловская жидкость.** Многие промышленные процессы используют вязкоупругие жидкости, начиная от полимеров и полимерных растворов и кончая пищевыми продуктами (термин «вязкоупругий» используется здесь в том смысле, что эти материалы не подчиняются ни классическим линейным соотношениям, ни закону вязкости Ньютона, ни закону упругости Гука). Жидкости, характеризующиеся конечным временем релаксации, и жидкости, в которых при вискозиметрических течениях имеются нормальные напряжения [19], образуют подкласс вязкоупругих материалов. Термин «вязкоупругий» широко используется в литературе по материалам этого подкласса. Поведение этих жидкостей обычно гораздо сложнее описанного в § 2.3.2 и 2.3.3. Иногда для описания главных аспектов поведения материала в конкретном эксперименте применимы простые модели, рассмотренные в § 2.3.3. Однако эти модели часто непригодны [4, 13, 24, 27]. Нолл [13] предложил определяющее уравнение для тензора напряжений, которое, очевидно, может быть использовано для описания основных аспектов поведения вязкоупругих жидкостей, исследуемых экспериментально.

Прежде чем дать точное определение простой нолловской жидкости, сделаем небольшое вступление. Пусть  $\xi$  является положением, занимаемым в момент  $t-s$  ( $0 \leq s < \infty$ ) материальной частицей, которая в момент времени  $t$  занимает положение  $\mathbf{x}$ :

$$\xi = \chi_{(t)}(\mathbf{x}, t-s). \quad (2.3.4-1)$$

Величина  $\chi_{(t)}$  называется функцией относительной деформации. Уравнение (2.3.4-1) описывает движение, которое имеет место в материале во все времена  $t-s$  до момента  $t$ . Пространственный градиент относительной деформации называется градиентом относительной деформации

$$\mathbf{F}_{(t)}(t-s) \equiv \nabla \chi_{(t)}(\mathbf{x}, t-s). \quad (2.3.4-2)$$

Правый относительный тензор деформации Коши — Грина определяется как

$$\mathbf{C}_{(t)}(t-s) \equiv \mathbf{F}_{(t)}^T(t-s) \cdot \mathbf{F}_{(t)}(t-s). \quad (2.3.4-3)$$

Нолл [4, 13, 27] определяет простую несжимаемую жидкость как жидкость, для которой дополнительное напряжение  $\mathbf{S}$

в положении  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t$  определяется предыдущим поведением относительного правого тензора деформации Коши — Грина для материала в какой-то небольшой области вблизи  $\mathbf{x}$  в момент  $t$ :

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0}{s_0} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \mathcal{H}^*(\mathbf{C}_{(t)}(t - s_0 \sigma)). \quad (2.3.4-4)$$

При этом используется определение простого материала, предложенное Труслеллом [4, 28].

Величина  $\mathcal{H}^*$  является размерно-инвариантным тензорным функционалом (под тензорным функционалом мы понимаем оператор, который преобразует тензорные функции в тензоры). Постоянные  $\mu_0$  и  $s_0$  являются соответственно характерной вязкостью и характерным временем, или естественным временным интервалом для жидкости. Подобно любым характерным величинам, используемым при введении безразмерных переменных,  $\mu_0$  и  $s_0$  выбираются произвольно. Преимущества и недостатки конкретных определений для  $\mu_0$  и  $s_0$  рассмотрены в работе [29].

Очевидно, что уравнение (2.3.4-4) удовлетворяет принципам детерминизма и локального действия (см. § 2.3.1). Менее очевидно, но справедливо то, что это уравнение также удовлетворяет принципу независимости материала от системы отсчета [5].

Поскольку форма функционала  $\mathcal{H}^*$  не задана, то ясно, что простая

нолловская жидкость включает самые различные типы жидкостей. Именно поэтому многие ученые в настоящее время считают, что эта модель простой жидкости в состоянии объяснить все проявления поведения материала, наблюдаемые в эксперименте. Модель простой нолловской жидкости следует рассматривать как целый класс определяющих уравнений или как целый класс поведений материала.

Однако сама эта общность модели является также ее недостатком. Показано, что динамически возможны только два класса течений для каждой простой жидкости [4, 13, 24, 27, 30—33]. Большинство течений, представляющих практический интерес, нельзя изучать, не определив заранее конкретный вид функционала  $\mathcal{H}^*$ .

Однако это не означает, что простая нолловская жидкость не представляет практического интереса. Это действительно очень простая модель поведения жидкости в том смысле, что она использует только два размерных параметра:  $\mu_0$  и  $s_0$ . Эта простота размерностей вместе с возможностью описания поведения материалов в большом диапазоне делают простую нолловскую жидкость идеальной для обобщения экспериментальных данных. Единственным ограничением для соотношений, полученных на основе этой модели, является то, что, поскольку поведение материала в форме функционала  $\mathcal{H}^*$  задается не полностью,

соотношения для обобщения экспериментальных данных можно составлять каждый раз только для одной жидкости. Несмотря на такое серьезное ограничение, у этой модели есть также и положительная сторона. Совсем не обязательно иметь все данные, необходимые для описания поведения неоднородного материала.

Более подробно методы обобщения экспериментальных данных для вязкоупругих жидкостей описаны в [29, 34].

Как и следовало ожидать, возможны другие описания сложного поведения, наблюдаемого в реальных жидкостях. Из них наибольший интерес представляет, пожалуй, «обобщенная вязкоупругая жидкость» Олдройда [35].

Желающим подробнее ознакомиться с поведением реальных материалов и их описанием можно посоветовать несколько превосходных работ [4, 5, 24, 36–38].

*2.3.5. Поверхностное натяжение.* В нашем изложении используется широко известный способ представления границы раздела фаз посредством сингулярной поверхности (см. § 1.3.5). Как и все остальное в механике сплошных сред, такое представление следует рассматривать лишь как модель реальной системы. Наше представление о границе раздела фаз ни в коем случае не является полным, однако существует хорошее экспериментальное доказательство, подтверждающее предположение, что плотность может быть непрерывной функцией координат вблизи границы раздела [39]. Возможно, что все интенсивные переменные, которыми мы оперируем, включая скорость, при более тщательном рассмотрении следует считать непрерывными функциями координат при переходе из одной фазы в другую.

Конечно, это является недостатком. Рассмотрим границу раздела фаз между двумя newtonовскими жидкостями. По причинам, которые скоро станут ясными, можно быть уверенным в том, что тензор напряжений нельзя представить в пограничной области с помощью newtonовской модели. Поэтому можно потребовать, чтобы определяющее уравнение для тензора напряжений зависело от температуры, плотности и градиента плотности. Для одной области температуры и плотности определяющее уравнение сводится к newtonовской модели, соответствующей одной из фаз, а для другой области температуры и давления — к newtonовской модели, соответствующей другой фазе. Для промежуточной области температуры и плотности тензор напряжений зависит от градиента плотности. Определяющие уравнения такого типа предложены в [4], но они очень сложны для применения при решении динамических задач. Для правильного их использования у нас недостаточно информации о термодинамическом поведении материалов в пограничной области. Этим объясняется популярность сингулярно-поверхностной модели для границы раздела фаз. И все же мы не можем игнорировать экспериментальные факты, характеризующие поведение материала вблизи границы. Попробуем учесть эти факты в рамках сингулярно-поверхностной модели, введя источники импульса, массы и т. д. в сингулярной поверхности. Наиболее известный пример представляет перенос импульса

$$[\rho v(v \cdot \xi - u_{(\xi)}) - T \cdot \xi] = 2H \sigma \xi = (\kappa_1 + \kappa_2) \sigma \xi. \quad (2.3.5-1)$$

Здесь  $\sigma$  — поверхностное натяжение;  $H$  — средняя кривизна поверхности [40];  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — главные кривизны поверхности [40]. При этом предполагалось, что поверхностное натяжение не зависит от положения на границе раздела фаз [11]. Экспериментально это соответствует тому, что любые поверхностно-активные вещества, например моющие средства, равномерно распределяются по поверхности раздела фаз. Правую часть уравнения (2.3.5-1) можно рассматривать как скорость приращения импульса на единицу площади сингулярной поверхности. Предложены также и другие определяющие уравнения для этого по-

верхностного источника импульса, которые должны зависеть от скорости деформации поверхности раздела фаз [11], но их применимость пока еще не подтверждена экспериментально. Подробнее о поведении материалов вблизи границы см. в работе [11].

## 2.4. НЬЮТОНОВСКАЯ ЖИДКОСТЬ

*2.4.1. Первый закон Коши для ньютоновской жидкости.* В § 2.3.1—2.3.4 указывалось, что, кроме дифференциального уравнения неразрывности и двух законов Коши, необходимы дополнительные данные. Там также рассматривалось несколько определяющих уравнений для тензора напряжений, например ньютоновская модель (2.3.2-9), часто называемая простой ньютоновской жидкостью.

Дивергенция тензора напряжений для ньютоновской жидкости записывается в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \operatorname{div} [-P\mathbf{I} + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}]. \quad (2.4.1-1)$$

Предположим,  $\lambda$  и  $\mu$  не зависят от координат. Тогда уравнение (2.4.1-1) преобразуется к виду:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = -\nabla P + \lambda \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}) + 2\mu \operatorname{div} \mathbf{D}; \quad (2.4.1-2)$$

поскольку

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0,5 \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v}) + 0,5 \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}), \quad (2.4.1-3)$$

получим:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = -\nabla P + (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v}). \quad (2.4.1-4)$$

С помощью уравнения (2.4.1-4) — первый закон Коши — уравнение (2.2.3-4) можно преобразовать для ньютоновской жидкости:

$$\rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f}. \quad (2.4.1-5)$$

Поведение несжимаемой ньютоновской жидкости при напряжении деформации описывается уравнением (2.3.2-20). Первый закон Коши для этого случая имеет вид:

$$\rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v}) + \rho \mathbf{f}. \quad (2.4.1-6)$$

Это уравнение часто называется уравнением Навье—Стокса.

## 2.5. ВЫВОДЫ

*2.5.1. Сводка основных уравнений.* Если вы внимательно изучили параграфы приложения, отмеченные звездочкой, то, конечно, сумеете вывести любое нужное уравнение в любой системе координат. Однако очевидно, что нет смысла тратить время и энергию на вывод основных уравнений для каждой новой задачи. Поэтому кажется целесообразным представить в виде табл. 2.5.1-1—2.5.1-10 некоторые наиболее удобительные соотношения в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат [1].

Таблица 2.5.1-1

**Дифференциальное уравнение неразрывности (1.3.3-4)**  
в трех системах координат

Прямоугольные координаты ( $z_1, z_2, z_3$ ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z_1} (\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial z_2} (\rho v_2) + \frac{\partial}{\partial z_3} (\rho v_3) = 0 \quad (\text{A})$$

Цилиндрические координаты ( $r, \theta, z$ ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (\text{B})$$

Сферические координаты ( $r, \theta, \varphi$ ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v_\varphi) = 0 \quad (\text{B})$$

Таблица 2.5.1-2

**Первый закон Коши в прямоугольных координатах**

$z_1$ -компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial z_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z_3} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z_1} + \frac{\partial S_{11}}{\partial z_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial z_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial z_3} + \rho f_1 \quad (\text{A})$$

$z_2$ -компоненты:

$$\left( \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial z_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial z_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z_3} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z_2} + \frac{\partial S_{21}}{\partial z_1} + \frac{\partial S_{22}}{\partial z_2} + \frac{\partial S_{23}}{\partial z_3} + \rho f_2 \quad (\text{B})$$

$z_3$ -компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial z_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial z_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z_3} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z_3} + \frac{\partial S_{31}}{\partial z_1} + \frac{\partial S_{32}}{\partial z_2} + \frac{\partial S_{33}}{\partial z_3} + \rho f_3 \quad (\text{B})$$

Таблица 2.5.1-3

**Уравнение первого закона Коши (2.4.1-6) в прямоугольных координатах для ньютоновской жидкости при постоянных  $\rho$  и  $\mu$  (уравнение Навье—Стокса)**

$z_1$ -компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial z_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z_3} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z_1} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_3^2} \right) + \rho f_1 \quad (\text{A})$$

$z_2$ -компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial z_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial z_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z_3} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z_2} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z_3^2} \right) + \rho f_2 \quad (\text{B})$$

$z_3$ -компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial z_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial z_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z_3} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z_3} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial z_3^2} \right) + \rho f_3 \quad (\text{B})$$

## Первый закон Коши в цилиндрических координатах

*r*-компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (S_{r\theta}) - \frac{S_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \rho f_r \quad (\text{A})$$

*θ*-компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{\theta z}}{\partial z} + \rho f_\theta \quad (\text{B})$$

*z*-компонента:

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (\text{B})$$

Уравнение первого закона Коши (2.4.1-6) в цилиндрических координатах для ньютоновской жидкости при постоянных  $\rho$  и  $\mu$  (уравнение Навье—Стокса)*r*-компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right\} + \rho f_r \quad (\text{A})$$

*θ*-компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right\} + \rho f_\theta \quad (\text{B})$$

*z*-компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right\} + \rho f_z \quad (\text{B})$$

Таблица 2.5.1-6

## Первый закон Коши в сферических координатах

 $r$ -компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) = \\ = - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (S_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{S_{\theta\theta} + S_{\varphi\varphi}}{r} + \rho f_r \quad (\text{A})$$

 $\theta$ -компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) = \\ = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{\theta r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (S_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} S_{\varphi\varphi} + \rho f_\theta \quad (\text{Б})$$

 $\varphi$ -компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta \right) = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{\varphi r}) + \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (S_{\varphi\theta} \sin^2 \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \rho f_\varphi \quad (\text{В})$$

Таблица 2.5.1-7

Уравнение первого закона Коши (2.4.1-6) в сферических координатах для ньютоновской жидкости при постоянных  $\rho$  и  $\mu$  (уравнение Навье—Стокса) $r$ -компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \\ + \mu \left( \mathcal{H} v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \operatorname{ctg} \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \rho f_r \quad (\text{А})$$

 $\theta$ -компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \\ + \mu \left( \mathcal{H} v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \rho f_\theta \quad (\text{Б})$$

 $\varphi$ -компоненты:

$$\rho \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi}{r} \operatorname{ctg} \theta \right) = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \\ + \mu \left( \mathcal{H} v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) + \rho f_\varphi, \quad (\text{В})$$

где

$$\mathcal{H} \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

Таблица 2.5.1-8

## Компоненты тензора скорости деформации в прямоугольных координатах

$$D_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial z_1} \quad (\text{А})$$

$$D_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial z_2} \quad (\text{Б})$$

$$D_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial z_3} \quad (\text{В})$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z_2} + \frac{\partial v_2}{\partial z_1} \right) \quad (\text{Г})$$

$$D_{13} = D_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z_3} + \frac{\partial v_3}{\partial z_1} \right) \quad (\text{Д})$$

$$D_{23} = D_{32} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial z_3} + \frac{\partial v_3}{\partial z_2} \right) \quad (\text{Е})$$

Таблица 2.5.1-9

## Компоненты тензора скорости деформации в цилиндрических координатах

$$D_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (\text{А}) \quad D_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \quad (\text{Б}) \quad D_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{В})$$

$$D_{r\theta} = D_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{Г})$$

$$D_{rz} = D_{zr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (\text{Д}) \quad D_{\theta z} = D_{z\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \quad (\text{Е})$$

Таблица 2.5.1-10

## Компоненты тензора скорости деформации в сферических координатах

$$D_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (\text{А})$$

$$D_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \quad (\text{Б})$$

$$D_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \quad (\text{В})$$

$$D_{r\theta} = D_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (\text{Г})$$

$$D_{r\varphi} = D_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) \right] \quad (\text{Д})$$

$$D_{\theta\varphi} = D_{\varphi\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \quad (\text{Е})$$

Обычно более удобно оперировать с уравнением первого закона Коши (2.2.3-4), выраженным с помощью тензора дополнительных напряжений  $S$  (см. § 2.3-2):

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \operatorname{div} S + \rho \mathbf{f}. \quad (2.5.1-1)$$

Компоненты этого уравнения приведены в табл. 2.5.1-2, 2.5.1-4 и 2.5.1-6.

Обычно единственной учитываемой внешней силой является постоянное гравитационное поле, которое можно представить как

$$\mathbf{f} = -\nabla \varphi. \quad (2.5.1-2)$$

С помощью (2.5.1-2) уравнение (2.5.1-1) для несжимаемой жидкости можно представить в виде

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \right] = -\nabla \mathcal{P} + \operatorname{div} S, \quad (2.5.1-3)$$

где  $\mathcal{P}$  — модифицированное давление:

$$\mathcal{P} = p + \rho \varphi. \quad (2.5.1-4)$$

Компоненты уравнения (2.5.1-3) можно найти из табл. 2.5.1-2, 2.5.1-4 и 2.5.1-6, исключив компоненты  $\mathbf{f}$  и заменив  $P$  на  $\mathcal{P}$ .

Почти во всех параграфах книги мы оперируем только с физическими компонентами пространственных векторных полей и полей тензоров второго ранга в криволинейных системах координат. Поэтому для физических компонент в цилиндрических и сферических координатах используются несколько более простые обозначения, чем приведенные в приложении.

Физические компоненты пространственных векторных полей в цилиндрических координатах обозначаются через  $v_r, v_\theta, v_z$ , а не через  $v_{<1>}, v_{<2>}, v_{<3>}$ ; физические компоненты тензорных полей второго ранга обозначаются символами  $D_{rr}, D_{r\theta}, D_{\theta z}$  и т. д. То же самое относится и к сферическим координатам.

Вследствие этого изменения в обозначениях в дальнейшем не применяется суммирование по физическим компонентам пространственных векторных полей и тензоров второго ранга. Величина  $D_{rr}$  является единственной физической компонентой поля тензора второго ранга  $D$ . В дальнейшем ни в коем случае нельзя путать эту величину с суммой трех компонент прямоугольной системы координат. При обсуждении физических компонент в других криволинейных системах координат используются обозначения из приложения.

**2.5.2. Уравнение Навье—Стокса для двумерного течения.** В § 1.3.6 и 1.3.7 компоненты скорости для двумерного движения несжимаемой жидкости были представлены с помощью функции тока  $\varphi$ . Таким образом, уравнение неразрывности автоматически удовлетворяется. Сейчас мы рассмотрим результат введения функции тока в уравнение движения для несжимаемой ньютоновской жидкости, когда внешняя сила может быть представлена с помощью потенциала.

Когда внешняя сила выражается в виде градиента скалярного потенциала, в уравнение Навье—Стокса из § 2.4.1 можно ввести модифицированное давление из § 2.5.1. Тогда получим:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P} + \mu \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v}). \quad (2.5.2-1)$$

Таблица 2.5.2-1

## Функция тока

Система координат	Принятая форма распределения скорости	Компоненты скорости	Отличная от нуля компонента уравнения (2.5.2-2)	Оператор
Прямоугольная декартова	$v_3 = 0$ $v_1 = v_1(z_1, z_2)$ $v_2 = v_2(z_1, z_2)$	$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial z_2}$ $v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial z_1}$	$\frac{\partial}{\partial t} (E^2 \psi) - \frac{\partial (\psi, E^2 \psi)}{\partial (z_1, z_2)} = \nu E^4 \psi$	$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}$ $E^4 \psi = E^2 (E^2 \psi) = \left( \frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \right.$ $\left. + 2 \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} \right) \psi$
Цилиндрическая	$v_z = 0$ $v_r = v_r(r, \theta)$ $v_\theta = v_\theta(r, \theta)$	$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ $v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$	$\frac{\partial}{\partial t} (E^2 \psi) - \frac{1}{r} \frac{\partial (\psi, E^2 \psi)}{\partial (r, \theta)} = \nu E^4 \psi$	$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$
Цилиндрическая	$v_\theta = 0$ $v_r = v_r(r, z)$ $v_z = v_z(r, z)$	$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$ $v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$	$\frac{\partial}{\partial t} (E^2 \psi) - \frac{1}{r} \frac{\partial (\psi, E^2 \psi)}{\partial (r, z)} -$ $- \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} E^2 \psi = \nu E^4 \psi$	$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
Сферическая	$v_\varphi = 0$ $v_r = v_r(r, \theta)$ $v_\theta = v_\theta(r, \theta)$	$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ $v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$	$\frac{\partial}{\partial t} (E^2 \psi) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (\psi, E^2 \psi)}{\partial (r, \theta)} +$ $+ \frac{2 E^2 \psi}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin \theta \right) =$ $= \nu E^4 \psi$	$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$

Примечание. Эта таблица взята из книги Берда, Стоура и Лайфбула и книги Годстедна. Годстеден предлагает те же соотношения для осесимметричных потоков с отличий от них компонентой скорости вокруг оси.  
Якобиан вычисляется так:

$$\frac{\partial (f, g)}{\partial (x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Если взять операцию  $\text{rot}$  в этом уравнении, модифицированное давление  $\mathcal{P}$  исчезает, и мы будем иметь:

$$\frac{\partial (\text{rot } \mathbf{v})}{\partial t} + \text{rot}([\nabla \mathbf{v}] \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \operatorname{div}(\nabla [\text{rot } \mathbf{v}]). \quad (2.5.2-2)$$

Здесь  $\nu$  — кинематическая вязкость,

$$\nu = \mu/\rho. \quad (2.5.2-3)$$

В любой системе координат, для которой вектор скорости имеет только две компоненты, отличные от нуля, уравнение (2.5.2-2) содержит только одну отличную от нуля компоненту, которая выражается с помощью функции тока и приведена в табл. 2.5.2-1 для нескольких случаев.

К уравнениям табл. 2.5.2-1 можно подходить по-другому, т. е. считать, что для любого двумерного течения уравнение (2.5.2-1) будет иметь только две компоненты, отличные от нуля. Из этих уравнений можно исключить модифицированное давление, считая, что

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}^e}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}^e}{\partial x^j \partial x^i}. \quad (2.5.2-4)$$

Компоненты скорости в полученном дифференциальном уравнении можно представить с помощью функции тока.

### ГЛАВА ТРЕТЬЯ

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА

Приступим к подробному описанию движения среды конкретной геометрии. Пусть вас не смущает, если некоторые примеры покажутся вам сначала слишком элементарными: ведь на простых упражнениях приобретаются необходимые навыки.

Ввиду тривиальности решения поставленных задач иногда возникает сомнение в целесообразности такого метода изучения механики жидкостей. Однако такие сомнения, конечно, следует считать преувеличением; справедливым может быть только замечание о том, что интересные задачи могут решаться лишь численными методами или имеют только приближенные решения.

В этом, конечно, есть доля правды. Нам кажется, что лучшим способом усвоения этого материала является исследование задач, которые поддаются аналитическому решению. Понятия и методы можно усвоить в совершенстве самостоятельно, где угодно и когда угодно. И все же эти задачи требуют специальной подготовки при использовании численных методов в более сложных ситуациях. Представляется нецелесообразным приступать к решению очень сложных задач, если самые простые еще не усвоены, и следующим шагом на пути усвоения предлагаемого материала являются аналитические решения для предельных случаев, которые могут служить критерием правильности полученных решений.

Теперь остановимся на замечании о том, что наиболее интересные задачи решаются только приближенно. Все приближения можно разделить по крайней мере на четыре класса.

1. Иногда чрезвычайно трудно решить задачу, представляющую первостепенный интерес. Этую трудность можно преодолеть, заменив

задачу другой, имеющей более простое решение и сохраняющей при этом характерные особенности исходной задачи. Примером такой задачи является течение в трубе в случае, когда входная и выходная области не представляют практического интереса; тогда реальную физическую задачу можно заменить идеализированной, в которой эффектами на входе и выходе пренебрегают, и решать задачу о течении в трубе бесконечной длины.

2. Иногда решение поставленной физической задачи остается очень трудным даже после такой идеализации; здесь можно порекомендовать решение предельного случая, когда пренебрегают некоторыми членами в дифференциальном уравнении. В этой книге обращается особое внимание на идеализацию такого рода. Эти аппроксимации применимы, например, при описании ползучего течения, потенциального течения и в теории пограничного слоя.

3. Во многих случаях не требуется детального решения дифференциальных уравнений баланса, так как основной интерес представляют только некоторые среднеинтегральные величины. Метод среднеинтегрального баланса довольно подробно описан в гл. 4.

4. Наконец, встает вопрос о математических приближениях. Именно эти приближения используются прежде всего в численных решениях. Математическое приближение применяется несколько раз, пока, наконец, не будет получено искомое решение дифференциального уравнения. На вычислительной машине можно получить решение с необходимым приближением, уменьшая размер шагов. В этой книге не решаются задачи численного анализа.

Резюмируя, можно сказать, что в начале этой главы рассматриваются задачи, для которых можно получить аналитическое решение исходного дифференциального уравнения. Затем обсуждаются три предельных случая, каждый из которых мог бы послужить темой для отдельной книги: ползучее течение, потенциальное течение и теория пограничного слоя.

### 3.1. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

*3.1.1 Общий подход к решению задач механики жидкостей.* В гл. 1 и 2 разработан критерий, позволяющий предсказать поведение данной жидкости в определенных условиях. В этой главе мы попытаемся применить этот критерий для решения задач.

Прежде всего необходимо определить тип задачи, которую нам предстоит решать. Это, прежде всего, означает необходимость выбора определенной модели для представления поведения жидкости при напряжении деформации. Возьмем, например, несжимаемую ньютоновскую жидкость. Для полной формулировки задачи необходимо указать геометрию среды, в которой движется материал, и силы, вызывающие движение. Можно, например, исследовать течение этой несжимаемой жидкости в горизонтальной трубе в однородном гравитационном поле, когда задано давление, определяемое с помощью двух манометров, установленных в разных точках по оси трубы. В дальнейшем внешней силой будет считаться постоянное гравитационное поле, если не указан другой источник. Задание напряжения в двух точках на стенке трубы представляет собой один из видов граничных условий.

Под граничным условием обычно понимается задание одной из переменных задачи или ее ограничение тем или иным способом в ка-

кой-то геометрической точке, обычно на одной из ограничивающих поверхности. В граничное условие может, например, входить, как указано выше, гензор напряжения или вектор скорости. Существует несколько общизвестных типов граничных условий, которые необходимо выбрать при решении незнакомых задач.

1. Тангенциальные компоненты скорости всегда считаются непрерывными на поверхности раздела. Это очень полезное допущение даже для случая поверхности раздела жидкость — твердое тело, когда жидкость не «смачивает» поверхность. При течении ртути в стеклянной трубке скольжение на стенке отсутствует. Интересный анализ условий на поверхности раздела жидкость — твердое тело дан в работе [1].

Непрерывность тангенциальных компонент скорости на границе раздела фаз также подтверждается визуальными наблюдениями локального равновесия, устанавливающегося на этой границе. Для устойчивого равновесия в § 3.5.3 указывается, что тангенциальные компоненты скорости являются непрерывными при переходе через границу раздела.

2. Уравнение баланса для скачка массы из § 1.3.5 удовлетворяется на любой границе раздела. Его можно использовать для нормальных компонент скорости в каждой фазе на поверхности раздела.

3. Уравнение баланса для скачка импульса

$$[\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi} - u_{(\xi)}) - \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\xi}] = 0 \quad (3.1.1-1)$$

должно удовлетворяться на каждой поверхности раздела. Обычно при получении решения распределения скорости и фазовых распределений в жидкости напряжением твердых ограничивающих стенок пренебрегают. В таких случаях используются исключительно уравнения баланса для скачка импульса.

4. Компоненты тензора напряжений конечны во всех точках жидкости, что является частным случаем теоремы о конечных тензорах второго ранга [2].

5. Компоненты скорости во всех точках жидкости считаются конечными.

Четко сформулировав задачу, приступим к математическому решению системы из нескольких уравнений в частных производных в форме, совместимой с граничными условиями. Это не легко даже для относительно простой задачи несжимаемой ньютоновской жидкости, поскольку не существует общего решения уравнения Навье—Стокса (2.4.1-6), совместимого с уравнением неразрывности (1.3.3-3). Следует примирииться с мыслью о том, что в настоящее время не все задачи механики жидкостей поддаются решению, даже с помощью высокоскоростных электронных счетных машин. Решение имеют только относительно легкие задачи, а более трудные аппроксимируются упрощенными решениями, которые довольно легко получить. В нескольких следующих параграфах мы рассмотрим примеры относительно простых задач.

Работая над этой главой, необходимо иметь в виду следующее. Мы никак не претендуем на получение единственного решения. Будет доказано несколько теорем о единственности решения [3, 4], однако общий случай не рассматривается. Здесь принимается подход, которого придерживаются многие исследователи, и мы ищем только «какое-то» решение. Во многих случаях эксперимент показывает, что полученное решение является единственным, однако это не всегда так.

## 3.2. ЗАМКНУТЫЕ РЕШЕНИЯ

**3.2.1. Течение несжимаемой ньютоновской жидкости в трубе.** В качестве первого примера задачи, для которой возможно точное решение, рассмотрим стационарное течение несжимаемой ньютоновской жидкости в горизонтальной трубе радиусом  $R$ . Рассматривается участок трубы на большом расстоянии от входа и выхода так, что возмущениями, вызываемыми входными эффектами, можно пренебречь, что эквивалентно трубе бесконечной длины. В цилиндрической системе координат, ось которой совпадает с осью трубы, на стенке трубы установлены два манометра для измерения компоненты силы  $-T_{rr}$ , действующей на единицу площади поверхности стенки со стороны жидкости

$$\text{при } z=0, r=R, \theta=0 \quad -T_{rr}=P_0; \quad (3.2.1-1)$$

$$\text{при } z=L, r=R, \theta=0 \quad -T_{rr}=P_L. \quad (3.2.1-2)$$

В качестве дополнения к граничным условиям укажем, что вектор скорости на стенке трубы (рис. 3.2.1-1) должен быть равен нулю при  $r=R$ :

$$v=0. \quad (3.2.1-3)$$

Как указывалось в § 3.1.1, нельзя приступать к рассмотрению задачи, начиная с получения общего решения уравнения Навье—Стокса (2.4.1-6). Нельзя также искать определенных условий, при которых это общее решение будет удовлетворять заданным условиям. Вместо этого следует интуитивно определить, в какой форме ищется решение задачи. Очень важно помнить, что мы ищем какое-то решение, удовлетворяющее уравнению Навье—Стокса, уравнению неразрывности и заданным граничным условиям, а не стремимся получить единственное решение.

В этих интуитивных поисках может быть полезным следующий метод. Например, течение, изображенное на рис. 3.2.1-1, имеет осевое направление, и если скорость у стенки трубы равна нулю, в центре она имеет максимальное значение. Поэтому можно допустить:

$$v_r=v_\theta=0; \quad (3.2.1-4)$$

$$v_z=v_z(r, z) \quad (3.2.1-5)$$

и искать решение уравнения Навье—Стокса и уравнения неразрывности, которое будет удовлетворять граничным условиям (3.2.1-1) — (3.2.1-3).

Учитывая несжимаемость жидкости, потребуем, чтобы уравнение неразрывности (Б) из табл. 2.5.1-1 удовлетворяло условию:

$$\partial v_z / \partial z = 0 \text{ или } v_z = v_z(r). \quad (3.2.1-6)$$

Из уравнения (2.3.2-20) для несжимаемой ньютоновской жидкости, физических соображений относительно компонент тензора скорости деформации для цилиндрических координат (табл. 2.5.1-9), а также из уравнений (3.2.1-4) и (3.2.1-6), мы знаем, что единственными, отлич-

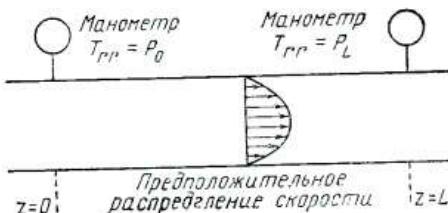


Рис. 3.2.1-1. Течение в трубе.

ными от нуля компонентами тензора дополнительных напряжений являются  $S_{rz} = S_{zz}$ :

$$S_{rz} = \mu \frac{dv_z}{dr}. \quad (3.2.1-7)$$

Из табл. 2.5.1-4 найдем три компоненты первого закона Коши для однородного гравитационного поля; тогда получим уравнение (2.5.1-3) в виде

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r}; \quad (3.2.1-8)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}; \quad (3.2.1-9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r S_{rz}), \quad (3.2.1-10)$$

где  $\mathcal{P}$  — модифицированное давление,

$$\mathcal{P} = p + \rho \varphi, \quad (3.2.1-11)$$

а  $\varphi$  — гравитационный потенциал. Поскольку величина  $\varphi$  может быть взятой произвольно с точностью до постоянной, тогда

$$\text{при } r=R, \theta=0, \varphi=0. \quad (3.2.1-12)$$

Уравнения (3.2.1-8) и (3.2.1-9) означают, что  $\mathcal{P}$  зависит только от  $z$ . Однако член в правой части (3.2.1-10) является только функцией  $r$ , тогда как член слева зависит только от  $z$ . Это может иметь место только, если

$$d\mathcal{P}/dz = A = \text{const.} \quad (3.2.1-13)$$

Проинтегрировав это уравнение при граничных условиях (3.2.1-1) и (3.2.1-2) с учетом того, что согласно уравнениям (3.2.1-4) и (3.2.1-6)  $S_{rr}=0$ , получим:

$$-A = -\frac{d\mathcal{P}}{dz} = -\frac{P_0 - P_L}{L}. \quad (3.2.1-14)$$

Исключив  $d\mathcal{P}/dz$  из (3.2.1-10) — (3.2.1-14), проинтегрируем:

$$-\frac{P_0 - P_L}{L} \int_0^r r dr = \int_0^{rS_{rz}} d(rS_{rz}) = -\frac{(P_0 - P_L)}{L} \frac{r}{2} = S_{rz}. \quad (3.2.1-15)$$

При этом сделано только одно допущение о том, что при  $r=0$   $S_{rz}$  имеет конечное значение, что представляет собой граничное условие четвертого типа из § 3.1.1. Заменив в уравнении (3.2.1-15) величину  $S_{rz}$  ее значениями из (3.2.1-7), проинтегрируем (3.2.1-15) при граничных условиях (3.2.1-3):

$$\frac{(P_0 - P_L)}{2\mu L} \int_R^r r dr = \int_0^z dv_z = v_z = \frac{(P_0 - P_L)}{4\mu L} R^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (3.2.1-16)$$

Можно заметить, что это уравнение подтверждает интуитивное предположение о параболическом распределении скорости (рис. 3.2.1-1). Это означает, что исходное допущение, сделанное в (3.2.1-4) и (3.2.1-5), оправдано и что решение задачи в выбранной форме существует.

Скорость жидкости достигает максимума в центре трубы, где

$$v_{z \text{ макс}} = \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4\mu L}. \quad (3.2.1-17)$$

Объемный расход  $Q$  равен:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta = 2\pi R^2 \frac{(P_0 - P_L) R^2}{4\mu L} \int_0^1 (1 - x^2) x dx = \\ &= \frac{\pi (P_0 - P_L) R^4}{8\mu L}. \end{aligned} \quad (3.2.1-18)$$

Уравнение (3.2.1-18) часто называется законом Пуазейля. Оно впервые было предложено в 1841 г. Луи Пуазейлем в работе по экспериментальной физиологии. Ученый представил его в виде эмпирического соотношения для обобщения экспериментальных данных по течению воды в стеклянных капиллярных трубках [5].

Заметим, что согласно (3.2.1-4)  $S_{rr} = 0$ , следовательно,

$$-T_{rr} = p - S_{rr} = p. \quad (3.2.1-19)$$

Это означает, что манометр показывает действительное давление в трубе, по крайней мере в условиях ламинарного течения, если он установлен на большом расстоянии от входа и выхода.

**3.2.2. Течение несжимаемой вязкоупругой жидкости в трубе.** Вернемся к задаче § 3.2.1 о несжимаемой вязкоупругой жидкости, поведение которой можно довольно просто описать методом, используемым в § 2.3.3. Концевыми эффектами пренебрегаем, а труба считается наклонной к горизонтали, как показано на рис. 3.2.1-2.

Сначала будем искать распределение скорости в виде

$$v_r = v_\theta = 0; v_z = v_z(r). \quad (3.2.2-1)$$

При этом, как указывалось в предыдущем параграфе, уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически.

Из уравнения (3.2.2-1) и табл. 2.5.1-9 мы видим, что в цилиндрических координатах тензор скорости деформации  $\mathbf{D}$  имеет только одну компоненту, отличную от нуля:

$$D_{rz} = \frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr}. \quad (3.2.2-2)$$

Из § 2.3.3 известно, что

$$\mathbf{S} = 2\eta(\gamma)\mathbf{D}, \quad (3.2.2-3)$$

что означает возможность существования только одной, отличной от нуля компоненты  $S_{rz}$  тензора дополнительных напряжений  $\mathbf{S}$ . Из табл. 2.5.1-4 видно, что три компоненты первого закона Коши для одно-

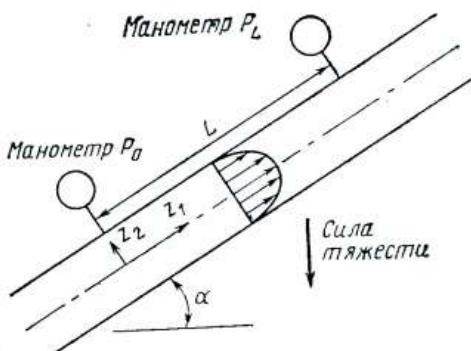


Рис. 3.2.1-2. Течение в наклонной трубе.

родного гравитационного поля сводится к одному и тому же виду, как указано в § 3.2.1. Это значит, что  $\mathcal{P}$  зависит только от  $z$ :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dz} = A = \text{const} \quad (3.2.2-4)$$

и

$$S_{rz} = \frac{Ar}{2}. \quad (3.2.2-5)$$

Как уже указывалось, величина  $\varphi$  произвольна с точностью до постоянной. Тогда

$$\text{при } r=R, \theta=0, z=0 \quad \varphi=0. \quad (3.2.2-6)$$

Из рис. 3.2.1-2 видно, что для указанной прямоугольной системы координат

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = f_1 = -g \cos \alpha \quad (3.2.2-7)$$

и

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial z_3} = f_3 = -g \sin \alpha. \quad (3.2.2-8)$$

Потенциальную энергию можно определить с помощью этих данных, используя линейное интегрирование

$$\varphi = \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_R^{z_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \Big|_{z_3=0} dz_1 + \int_0^{z_3} \frac{\partial \varphi}{\partial z_3} dz_3 = -(R - z_1) g \cos \alpha + z_3 g \sin \alpha. \quad (3.2.2-9)$$

Для цилиндрических координат она имеет вид:

$$\varphi = -(R - r \cos \theta) g \cos \alpha + z g \sin \alpha. \quad (3.2.2-10)$$

Теперь, проинтегрировав (3.2.2-4), можно определить  $A$ . Поскольку  $S_{rr}=0$ , граничное условие из § 3.2.1 сводится к

$$p = P_0 \text{ при } z=0, r=R, \theta=0 \quad (3.2.2-11)$$

и

$$p = P_L \text{ при } z=L, r=R, \theta=0. \quad (3.2.2-12)$$

Уравнение (3.2.2-10) позволяет переписать эти граничные условия для модифицированного давления:

$$\text{при } z=0, r=R, \theta=0 \quad \mathcal{P} = P_0; \quad (3.2.2-13)$$

$$\text{при } z=L, r=R, \theta=0 \quad \mathcal{P} = P_L + \rho g L \sin \alpha. \quad (3.2.2-14)$$

Проинтегрировав (3.2.2-4) с помощью (3.2.2-13) и (3.2.2-14), получим:

$$-A = \frac{P_0 - P_L - \rho g L \sin \alpha}{L}. \quad (3.2.2-15)$$

Сравните это уравнение с результатом § 3.2.1.

Из § 2.3.3 имеем:

$$2D = \varphi(\tau) S. \quad (3.2.2-16)$$

Из рассматриваемых условий вытекает:

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} S^2} = |S_{rz}|. \quad (3.2.2-17)$$

С помощью (3.2.2-2), (3.2.2-5) и (3.2.2-17) можно записать единственную, отличную от нуля компоненту уравнения (3.2.2-16) в виде

$$\frac{dv_z}{dr} = \varphi \left( \frac{|A|r}{2} \right) \frac{Ar}{2}. \quad (3.2.2-18)$$

Проинтегрировав полученное уравнение при граничных условиях для скорости на стенки трубы, найдем распределение скорости

$$v_z = \int_r^R \varphi \left( \frac{|A|r}{2} \right) \left[ -\frac{Ar}{2} \right] dr. \quad (3.2.2-19)$$

Если потребовать, чтобы направление течения  $z$  было положительным (рис. 3.2.1-2), очевидно, что величина  $-A$  в (3.2.2-15) тоже будет положительной. Тогда можно записать:

$$v_z = \int_r^R \varphi \left( \frac{-Ar}{2} \right) \left[ \frac{-Ar}{2} \right] dr. \quad (3.2.2-20)$$

Уравнения (3.2.2-4), (3.2.2-15) и (3.2.2-20) удовлетворяют уравнению неразрывности, первому закону Коши и определяющему уравнению для тензора напряжений, а также граничным условиям для вектора скорости и тензора напряжений. Следовательно, мы нашли решение задачи, совместимое с начальным допущением о распределении скорости.

Градиент давления и объемный расход легко измерить экспериментально:

$$Q = 2\pi \int_0^R v_z r dr. \quad (3.2.2-21)$$

Очень удобно определить функцию  $\varphi(\tau)$  из (3.2.2-16) или функцию кажущейся вязкости  $\eta(\gamma)$  в определяющем уравнении (3.2.2-3) непосредственно из этих измерений. Как показано в § 2.3.3, из (3.2.2-3) и (3.2.2-16) можно получить:

$$\tau = \eta(\gamma)\gamma \quad (3.2.2-22)$$

и

$$\gamma = \varphi(\tau)\tau. \quad (3.2.2-23)$$

Уравнения (3.2.2-5) и (3.2.2-15) означают, что результаты измерения давления можно обработать с помощью  $\tau$ , рассчитанного для стенки трубы:

$$\tau_R = \tau|_{r=R} = -S_{rz}|_{r=R} = -AR/2. \quad (3.2.2-24)$$

Задача решена, если можно измерить  $\gamma$  на стенке трубы. Интегрируя по частям, выразим (3.2.2-21) в виде

$$Q = -\pi \int_0^R \frac{dv_z}{dr} r^2 dr. \quad (3.2.2-25)$$

Сделаем замену переменной

$$\tau = \frac{r}{R} \tau_R \quad (3.2.2-26)$$

в уравнении (3.2.2-25); тогда можно записать:

$$Q = -\pi \left( \frac{R}{\tau_R} \right)^3 \int_0^{\tau_R} \frac{dv_z}{dr} \tau^2 d\tau. \quad (3.2.2-27)$$

Это уравнение можно в свою очередь проинтегрировать по  $\tau_R$ . Тогда получим:

$$\frac{d(Q\tau_R^3)}{d\tau_R} = -\pi R^3 \tau_R^2 \frac{dv_z}{dr} \Big|_{r=R} \quad (3.2.2-28)$$

или

$$\gamma_R \equiv \gamma|_{r=R} = -\frac{dv_z}{dr} \Big|_{r=R} = -\frac{4Q}{\pi R^3} \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{d \ln Q}{d \ln \tau_R} \right). \quad (3.2.2-29)$$

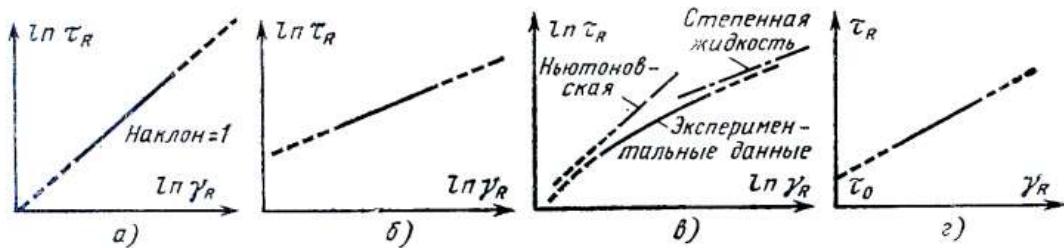


Рис. 3.2.2-1. Несжимаемая ньютоновская жидкость (а); степенная жидкость (б); жидкость Эллиса; модифицированная жидкость Эллиса (в); бингамовский пластик (г).

В § 3.2.1 мы определили, что для ньютоновской жидкости

$$\gamma_R = 4Q/\pi R^3. \quad (3.2.2-30)$$

Это означает, что величину в скобках в правой части (3.2.2-29) можно считать поправкой на вязкоупругое поведение жидкости.

С помощью (3.2.2-15), (3.2.2-24) и (3.2.2-29) можно построить график зависимости  $\tau_R$  от  $\gamma_R$  по экспериментальным данным для перепада давлений в зависимости от объемного расхода жидкости. Тогда определим функцию  $\eta(\gamma)$  или  $\varphi(\tau)$ , сравнив график зависимости  $\tau_R$  от  $\gamma_R$  с уравнением (3.2.2-22) или (3.2.2-23).

Как видно из рис. 3.2.2-1,а, если логарифмический график экспериментальных данных представляет собой прямую с наклоном, равным единице, то жидкость соответствует модели несжимаемой ньютоновской жидкости. График для экспериментальных данных, представленных на рис. 3.2.2-1,б, имеет вид прямой с наклоном, не равным единице. Такое поведение соответствует степенной модели. Широко известный случай показан на рис. 3.2.2-1,в. Здесь экспериментальные данные асимптотически стремятся к ньютоновскому поведению при больших  $\gamma_R$ . Представляет интерес попытаться согласовать эти данные с модифицированной моделью Эллиса или моделью Сиско. В работе [8] предложен интересный метод использования трехпараметрической модели Эллиса для обработки экспериментальных данных. Как оказалось, линейная зависимость  $\tau_R$  от  $\gamma_R$  соответствует экспериментальным данным только

в очень ограниченном диапазоне. Один из таких случаев изображен на рис. 3.2.2-1,г. Модель бингамовского пластика весьма удобна для описания этих экспериментальных данных, хотя надо быть очень осторожным при экстраполяции результатов для больших или меньших значений. Проведенный анализ можно обобщить на описание поведения материала, каким является простая нолловская жидкость из § 2.3.4. Можно порекомендовать прекрасную работу Колмена, Марковица и Нолла [9], в которой подробно описывается нолловская модель, а также приводится большое количество задач, в которых эта модель может использоваться для описания поведения материала.

**3.2.3. Тангенциальное течение несжимаемой модельной жидкости Эллиса в кольцевом канале.** Рассмотрим течение несжимаемой жидкости Эллиса между двумя концентрическими цилиндрами (рис. 3.2.3-1). Внешний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью, внутренний цилиндр неподвижен. Концевыми эффектами, как и в предыдущем случае, пренебрегаем. Поток считается бесконечным, хотя цилиндры имеют конечную длину.

Такая геометрия используется в вискозиметрах очень распространенного типа. Вискозиметр — это прибор для исследования напряжения деформации жидкостей или для измерения сдвиговой вязкости ньютоновских жидкостей. Измеряются две величины: угловая скорость внешнего цилиндра и осевая компонента вращающего момента (момента силы), с которой жидкость действует на цилиндр. При этом вращающий момент считается заданным, а искомой величиной является соответствующая угловая скорость внешнего цилиндра.

Сначала попытаемся удовлетворить задачу граничным условиям. Поскольку внешний цилиндр неподвижен, запишем для цилиндрических координат:

$$\text{при } r = \kappa R \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3.2.3-1)$$

Момент силы, с которой жидкость действует на цилиндр, можно представить в виде

$$\mathbf{I} = \int_0^{2\pi} \int_0^L \mathbf{p} \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \kappa R dz d\theta \text{ при } r = \kappa R, \quad (3.2.3-2)$$

где  $\mathbf{p}$  — радиус-вектор относительно какой-то точки на оси цилиндров.

Интеграл компоненты векторного поля в криволинейных координатах сам не является компонентой вектора, тогда как интеграл от компоненты векторного поля в прямоугольных координатах является компонентой вектора. Для данной задачи большая часть расчетов вполне естественно проводится в цилиндрических координатах. В прямоугольных координатах аксиальную компоненту или компоненту  $z_3$  момента вращения, действующего на внутренний цилиндр со стороны жидкости, можно представить как

$$\bar{I}_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^L \bar{a}_3 \kappa R dz d\theta \text{ при } r = \kappa R; \quad (3.2.3-3)$$

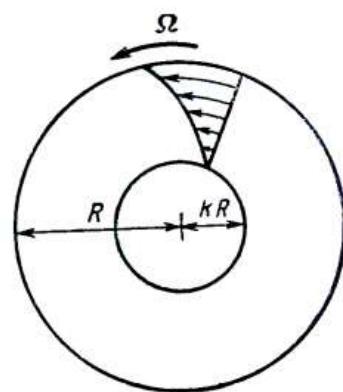


Рис. 3.2.3-1. Тангенциальное кольцевое течение.

при этом

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{p} \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}). \quad (3.2.3-4)$$

Для обозначения величин в прямоугольных координатах используем верхнюю черту. Соотношение между  $\bar{a}_z$  и компонентами  $\mathbf{a}$  в цилиндрических координатах имеет простой вид:

$$\bar{a}_z = a_z. \quad (3.2.3-5)$$

Запишем:

$$a_z \equiv a_{<3>} = e_{ijk} p_{<j>} T_{<kn>} n_{<m>}. \quad (3.2.3-6)$$

Поскольку в цилиндрических координатах физической компонентой  $n$ , отличной от нуля, будет:

$$n_r \equiv n_{<1>} = 1, \quad (3.2.3-7)$$

а физические компоненты радиус-вектора выражаются в цилиндрических координатах в виде

$$p_{<1>} = r, \quad p_{<2>} = 0, \quad p_{<3>} = z, \quad (3.2.3-8)$$

уравнение (3.2.3-6) сводится к

$$a_z = e_{112} p_{<1>} T_{<21>} n_{<1>} = r T_{\theta r} = r S_{\theta r}. \quad (3.2.3-9)$$

Уравнения (3.2.3-5) и (3.2.3-9) позволяют представить (3.2.3-3) в виде

$$\text{при } r = \kappa R \quad \bar{l}_z = \int_0^{2\pi} \int_0^L S_{\theta r} (\kappa R)^2 dz d\theta. \quad (3.2.3-10)$$

Теперь сделаем допущение относительно формы искомого решения. На рис. 3.2.3-1 представлен воображаемый профиль скорости. Для цилиндрических координат это соответствует

$$v_r = v_z = 0 \quad (3.2.3-11)$$

и

$$v_\theta = v_\theta(r, \theta). \quad (3.2.3-12)$$

Следует помнить, что эти допущения основаны на физической сущности задачи, и невозможно гарантировать существование такого вида решения, а также утверждать, что если такое решение существует, то оно будет единственным.

Уравнение неразрывности (Б) из табл. 2.5.1-1 означает, что для несжимаемой жидкости при распределении скорости, соответствующем (3.2.3-11) и (3.2.3-12),

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \text{ или } v_\theta = v_\theta(r). \quad (3.2.3-13)$$

Из табл. 2.5.1-9 и уравнений (3.2.3-11) и (3.2.3-13) очевидно, что единственной, отличной от нуля компонентой тензора скорости деформации будет:

$$D_{r\theta} = \frac{1}{2} r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right). \quad (3.2.3-14)$$

Для модели Эллиса (§ 2.3.3) имеем:

$$2D = \frac{1}{\eta_0} \left[ 1 + \left( \frac{\tau}{\tau_1} \right)^{\alpha-1} \right] S. \quad (3.2.3-15)$$

Это значит, что единственной, отличной от нуля компонентой тензора дополнительных напряжений будет:

$$S_{r\theta} = S_{r\theta}(r). \quad (3.2.3-16)$$

В соответствии с этим компоненты первого закона Коши из табл. 2.5.1-4 принимают вид:

$$\frac{\rho(v_\theta)^2}{r} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r}; \quad (3.2.3-17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 S_{r\theta}); \quad (3.2.3-18)$$

$$0 = \partial \mathcal{P} / \partial \sigma. \quad (3.2.3-19)$$

При этом предполагается, что внешнюю силу на единицу массы можно выразить с помощью потенциала; здесь вводится модифицированное давление из § 2.5.1.

Уравнения (3.2.3-18) и (3.2.3-19) должны удовлетворять условию

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(r, \theta) \Leftarrow \theta f(r) + g(r). \quad (3.2.3-20)$$

Хотя это условие не входит в граничные условия, совершенно ясно, что все величины должны быть периодическими функциями  $\theta$ . В частности,

$$\mathcal{P}(r, \theta) = \mathcal{P}(r, \theta + 2\pi). \quad (3.2.3-21)$$

Отсюда следует:

$$\partial \mathcal{P} / \partial \theta = f(r) = 0, \quad (3.2.3-22)$$

а уравнение (3.2.3-18) сводится к

$$\frac{d}{dr} (r^2 S_{r\theta}) = 0. \quad (3.2.3-23)$$

С учетом (3.2.3-16) уравнение (3.2.3-10) можно упростить:

$$\text{при } r = \kappa R \quad \bar{I}_3 = 2\pi L (\kappa R)^2 S_{r\theta}, \quad (3.2.3-24)$$

которое является граничным условием для  $S_{r\theta}$  и может использоваться для интегрирования (3.2.3-23):

$$\int_{\kappa^2 R^2 S_0}^{r^2 S_{r\theta}} d(r^2 S_{r\theta}) = 0; \quad (3.2.3-25)$$

$$S_{r\theta} = \frac{\kappa^2 R^2}{r^2} S_0,$$

где

$$S_0 \equiv \frac{\bar{I}_3}{2\pi L \kappa^2 R^2}. \quad (3.2.3-26)$$

Поскольку  $S_{r\theta}$  — единственная, отличная от нуля компонента тензора дополнительных напряжений, то

$$\tau \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{S}^2} = |S_{r\theta}| = S_{r\theta}. \quad (3.2.3-27)$$

При этом на основании (3.2.3-15) можно утверждать, что **так же**, как и  $S_{r_0}$ , величина  $D_{r_0}$  положительна. Из (3.2.3-14), (3.2.3-15), (3.2.3-25) и (3.2.3-27) получим:

$$r \frac{d}{dr} \left( \frac{v_0}{r} \right) = \frac{1}{\eta_0} \frac{\kappa^2 R^2}{r^2} S_0 + \frac{\tau_{1/2}}{\eta_0} \left( \frac{\kappa^2 R^2 S_0}{r^2 \tau_{1/2}} \right)^\alpha. \quad (3.2.3-28)$$

Используя граничное условие (3.2.3-1), пронтегрируем это уравнение:

$$\frac{v_0}{r} = \frac{S_0}{2\eta_0} \left[ 1 - \left( \frac{\kappa R}{r} \right)^2 \right] + \frac{\tau_{1/2}}{2\alpha\eta_0} \left( \frac{S_0}{\tau_{1/2}} \right)^\alpha \left[ 1 - \left( \frac{\kappa R}{r} \right)^{2\alpha} \right]. \quad (3.2.3-29)$$

Из (3.2.3-26) и (3.2.3-29) найдем величину угловой скорости внешнего цилиндра:

$$\Omega = \frac{\bar{l}_3 (1 - \kappa^2)}{4\pi L \kappa^2 R^2 \eta_0} + \frac{\tau_{1/2}}{2\alpha\eta_0} \left( \frac{\bar{l}_3}{2\pi L \kappa^2 R^2 \tau_{1/2}} \right)^\alpha (1 - \kappa^{2\alpha}). \quad (3.2.3-30)$$

Используя метод, аналогичный изложенному в § 3.2.2, можно произвести анализ тангенциального кольцевого течения вязкоупругой жидкости типа описанного в § 2.3.3, не задавая формы функционала для  $\eta(\gamma)$  или  $\varphi(\tau)$  [10, 11]. Таким образом, задача тангенциального кольцевого течения вязкоупругой простой нолловской жидкости решается без особых дополнительных трудностей. В работе [9] дается интересный анализ этой задачи и связанных с ней вопросов.

Обзор задач, которые решаются с помощью модели Эллиса, опубликован в работе [12].

**3.2.4. Стенка, внезапно приведенная в движение** [13]. Бесконечная неподвижная масса сжимаемой ньютоновской жидкости ограничена с одной стороны плоскостью  $z_1 z_3$ . Сила тяжести имеет отрицательное направление  $z_2$ . Визуально эта масса жидкости представляется в виде глубокого бассейна с горизонтальной поверхностью раздела, соприкасающейся с атмосферой. Можно аппроксимировать эти экспериментальные условия так:  $z_2$  стремится к бесконечности, а давление не зависит от  $z_1$  и  $z_3$ . В момент  $t=0$  стена внезапно приводится в движение с постоянной скоростью  $V$  в положительном направлении  $z_1$ . Требуется найти распределение скорости в жидкости в зависимости от времени.

Граничные условия для скорости и давления:

$$\text{при всех } t \text{ для } z_2 \rightarrow \infty \frac{\partial p}{\partial z_1} = \frac{\partial p}{\partial z_3} = 0. \quad (3.2.4-1)$$

$$\text{при всех } z_2 \text{ для } t=0 \quad v=0. \quad (3.2.4-2)$$

$$\text{при всех } t > 0 \text{ для } z_2=0 \quad v_1=V, v_2=v_3=0. \quad (3.2.4-3)$$

Некоторые авторы считают необходимым ввести дополнительное граничное условие нулевой скорости для всех значений времени при  $z_2 \rightarrow \infty$  [6, 13]. Мы же не будем считать, что скорость обязательно должна быть равна нулю на бесконечности для  $t > 0$ ; необходимо только, чтобы она была конечной для  $z_2 \rightarrow \infty$  [14].

Целесообразно предположить распределение скорости в виде

$$v_1=v_1(z_2, t); \quad v_2=v_3=0. \quad (3.2.4-4)$$

При этом компоненты уравнения Навье — Стокса (2.5.1-4) в прямоугольных координатах, содержащие давление, принимают вид (см. табл. 2.5.1-3):

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z_1} = -\rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_2^2}, \quad (3.2.4-5)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z_2} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z_1} = 0. \quad (3.2.4-6)$$

Исходя из (3.2.4-6) левая часть уравнения (3.2.4-5) является функцией  $t$  и  $z_1$ . Правая же часть этого уравнения может быть функцией  $t$  и  $z_2$ . Это означает, что обе части уравнения являются только функцией времени:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z_1} = A(t). \quad (3.2.4-7)$$

Это уравнение удовлетворяет граничному условию (3.2.4-1) только, если

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z_1} = A(t) = 0, \quad (3.2.4-8)$$

и наша задача сводится к отысканию решения для

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_2^2}, \quad (3.2.4-9)$$

которое должно удовлетворять условию:  
для всех  $z_2$  при  $t=0$   $v_1=0$  (3.2.4-10)

и для  $t>0$  при  $z_2=0$   $v_1=V$ . (3.2.4-11)

Иногда такое дифференциальное уравнение в частных производных можно решить, преобразовав его в обыкновенное дифференциальное уравнение. Например, мы ищем решение в виде

$$\frac{v_1}{V} = g(\eta), \quad (3.2.4-12)$$

где

$$\eta = a(z_2)^b t^c. \quad (3.2.4-13)$$

Нетрудно заключить, что если  $b=1$  и  $c=1/2$ , уравнение (3.2.4-9) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. В частности, если взять

$$\eta = \frac{z_2}{\sqrt{4\mu t/\rho}}, \quad (3.2.4-14)$$

то получим (3.2.4-9) в виде

$$g'' + 2\eta g' = 0, \quad (3.2.4-15)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по  $\eta$ . При такой замене переменной граничное условие (3.2.4-10) принимает вид: (3.2.4-16)

при  $\eta \rightarrow \infty$   $g \rightarrow 0$ .

Граничное условие преобразуется к виду (3.2.4-17)

при  $\eta=0$   $g=1$ .

Уравнение (3.2.4-15) является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяемыми переменными по  $g'$ . Проинтегрировав его, получим:

$$g' = C_1 e^{-\eta^2}, \quad (3.2.4-18)$$

где  $C_1$  — постоянная интегрирования. Полученное уравнение можно в свою очередь проинтегрировать, используя граничное условие (3.2.4-17)

$$g - 1 = C_1 \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta. \quad (3.2.4-19)$$

Наконец, из уравнения (3.2.4-16) найдем  $C_1$ :

$$-\frac{1}{C_1} = \int_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (3.2.4-20)$$

В конце концов получим:

$$\frac{v_1}{V} = g = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \quad (3.2.4-21)$$

или

$$\frac{v_1}{V} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\frac{4}{3} \mu t / \rho}}\right), \quad (3.2.4-22)$$

где функция ошибок

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (3.2.4-23)$$

Это решение представлено на рис. 3.2.4-1.

**3.2.5. Вращающийся круговой цилиндр.** Правильный круговой цилиндр, изображенный на рис. 3.2.5-1, частично заполнен несжимаемой ньютоновской жидкостью и вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Требуется определить форму поверхности раздела газ — жидкость.

При рассмотрении пренебрегаем вязкими эффектами в газовой фазе и считаем, что равномерное давление в газовой фазе равно  $p_0$ . В дальнейшем пренебрегаем также поверхностным натяжением (см. § 2.3.5).

Большинство читателей сразу решат, что жидкость в цилиндре будет вращаться как твердое тело, следовательно, распределение скорости в жидкости в цилиндрических координатах будет иметь вид:

$$\frac{v_\theta}{r} = \Omega; \quad v_r = v_z = 0. \quad (3.2.5-1)$$

Для такого распределения скорости уравнение неразрывности тождественно удовлетворяется, и тензор скорости деформации равен нулю (поскольку жидкость вращается как твердое тело).

Следовательно, тензор дополнительных напряжений  $S$  также равен нулю, а три компоненты первого закона Коши сводятся к

$$\frac{\partial \sigma^r}{\partial r} = \rho r \Omega^2; \quad (3.2.5-2)$$

$$\frac{\partial \sigma^\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma^z}{\partial z} = 0. \quad (3.2.5-3)$$

Поскольку перенос массы через поверхность раздела отсутствует, нормальная компонента скорости жидкости у поверхности раздела должна быть равна скорости перемещения поверхности раздела (см. § 1.3.4):

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi} = u_{(\xi)} . \quad (3.2.5-4)$$

Это гарантирует, что уравнение баланса для скачка массы тождественно удовлетворяется на поверхности раздела (см. § 1.3.5), а уравнение баланса для скачка импульса (3.1.1-1) сводится к

$$[\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\xi}] = 0. \quad (3.2.5-5)$$

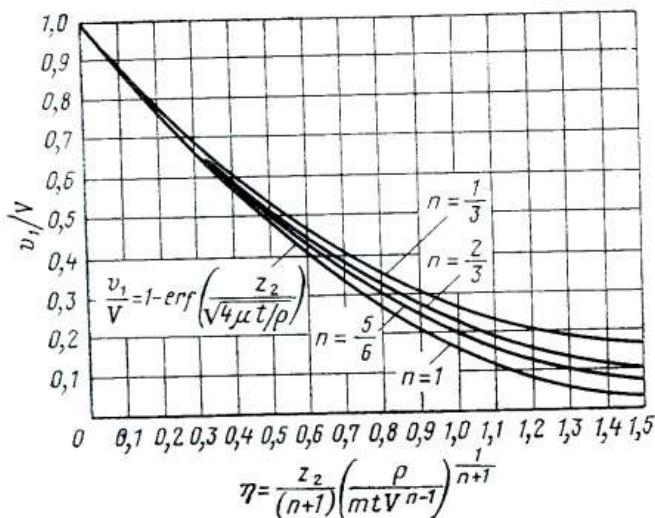


Рис. 3.2.4-1. Распределение скорости (безразмерное) при течении вблизи стенки, внезапно приведенной в движение.  
Кривые построены для степенной жидкости с параметрами  $m$  и  $n$ . Для  $n=1$  (ニュートンовская жидкость)  $\eta = z_2 / \sqrt{4\mu t / \rho}$  [6].

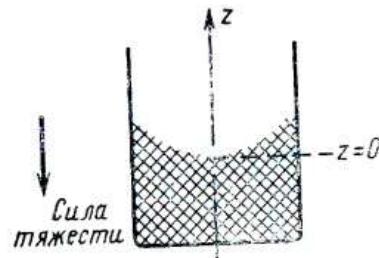


Рис. 3.2.5-1. Вращающийся полый цилиндр.

Нетрудно показать, исходя из (3.2.5-1), что компонента  $\theta$  уравнения (3.2.5-5) тождественно удовлетворяется и что компоненты  $r$  и  $z$  должны удовлетворять единственному условию на границе раздела

$$p = p_0. \quad (3.2.5-6)$$

Выберем систему координат таким образом, чтобы поверхность раздела фаз проходила через начало координат ( $r=0, z=0$ ). Определим также потенциал внешней силы, так чтобы

$$\phi = gz, \quad (3.2.5-7)$$

что с учетом уравнения (3.2.5-3) позволяет утверждать, что при  $r=0$   $P=p_0$ . (3.2.5-8)

Теперь, проинтегрировав (3.2.5-2) с граничным условием (3.2.5-8), определим давление в любой точке жидкости в виде

$$p + \rho g z - p_0 = \rho \frac{\Omega^2}{2} r^2. \quad (3.2.5-9)$$

Уравнение (3.2.5-6) на поверхности раздела должно удовлетворяться. Переходя из (3.2.5-9) поверхность раздела является параболической

$$z = \left( \frac{\Omega^2}{2g} \right) r^2. \quad (3.2.5-10)$$

В нашем анализе мы пренебрегаем поверхностным натяжением, а также считаем, что материал стенки цилиндра хорошо смачивается жидкостью. Уравнение (3.2.5-10) означает, что угол контакта между газожидкостной поверхностью раздела и твердой стенкой, измеряемый со стороны жидкой фазы, равен нулю. Задачи, где учитывается поверхностное натяжение, а угол смачивания не равен нулю, рассматриваются в [22].

### 3.3. ПОЛЗУЧЕЕ ТЕЧЕНИЕ

*3.3.1. Определение ползучего течения.* В предыдущем параграфе рассматривались примеры задач, имеющих точное решение. Однако большинство задач совсем иного рода. Сделав соответствующие начальные допущения, мы должны оперировать с дифференциальными уравнениями в частных производных, которые зачастую очень трудно решить. Прежде чем приступить к численному решению, целесообразно рассмотреть предельные случаи.

Рассмотрим уравнение Навье — Стокса (2.4.1-6), являющееся выражением первого закона Коши для соответствующей несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью. Определим следующие безразмерные переменные:

$$\left. \begin{aligned} v^* &\equiv \frac{v}{v_0}; & z^*_i &\equiv \frac{z_i}{L_0}; \\ \mathcal{P}^* &\equiv \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}; & t^* &\equiv \frac{t}{t_0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.3.1-1)$$

где  $v_0$  — характерная скорость;  $L_0$  — характерная длина;  $\mathcal{P}_0$  — модифицированное характерное давление;  $t_0$  — характерное время. Характерными величинами для этой задачи являются параметры, входящие в одно из определяющих уравнений или в граничные условия задачи. Как следует из § 2.5.1, внешнюю силу на единицу массы можно представить потенциалом. Тогда, используя приведенные безразмерные переменные, уравнение (2.4.1-6) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + (\nabla v^*) \cdot v^* = - \frac{1}{N_{Ru}} \nabla \mathcal{P}^* + \frac{1}{N_{Re}} \operatorname{div}(\nabla v^*). \quad (3.3.1-2)$$

Здесь  $N_{St}$ ,  $N_{Ru}$  и  $N_{Re}$  — соответственно число Струхала, число Руарка и число Рейнольдса:

$$N_{St} \equiv \frac{t_0 v_0}{L_0}; \quad N_{Ru} \equiv \rho \frac{v_0^2}{\mathcal{J}_0}; \quad N_{Re} \equiv \frac{L_0 v_0 \rho}{\mu}. \quad (3.3.1-3)$$

Один из предельных случаев получается, если принять  $N_{Re}$  стремящимся к нулю. Для данной геометрии и данной жидкости такое допущение требует  $V \rightarrow 0$ ; отсюда название «ползучее течение». Если при  $N_{Re} \rightarrow 0$ ,  $N_{St}$  и  $N_{Ru}$  принимают произвольные значения, следует ожидать, что конвективные члены инерции  $(\nabla v^*) \cdot v^*$  будут пренебре-

жимо малы по сравнению с вязкими членами  $1/N_{Re} \operatorname{div}(\nabla v^*)$ . Это означает, что в пределе  $N_{Re} \rightarrow 0$  уравнение Навье — Стокса сводится к

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} = - \frac{1}{N_{Ru}} \nabla \mathcal{P}^* + \frac{1}{N_{Re}} \operatorname{div}(\nabla v^*). \quad (3.3.1-4)$$

Число Струхала обычно считается неравным единице только для периодического течения. Для непериодического движения  $t_0 = L/V$ ; в пределе  $N_{Re} \rightarrow 0$  уравнение (3.3.1-2) принимает вид:

$$0 = - \frac{1}{N_{Ru}} \nabla \mathcal{P}^* + \frac{1}{N_{Re}} \operatorname{div}(\nabla v^*) \quad (3.3.1-5)$$

или

$$0 = - \nabla \mathcal{P} + \mu \operatorname{div}(\nabla v). \quad (3.3.1-6)$$

Важно понять, что в нашем рассуждении использовался чисто интуитивный аргумент. Не существует математической теоремы, согласно которой очень малая величина в дифференциальном уравнении в частных производных оказывает большое влияние на решение этого дифференциального уравнения. Парадокс Стокса [24] относится к случаю, когда в уравнении (3.3.1-2) члены инерции пренебрежимо малы по сравнению с вязкими членами при  $N_{Re} \rightarrow 0$ .

**Парадокс Стокса.** При обтекании бесконечного кругового цилиндра несжимаемой ньютоновской жидкостью ползучее течение невозможно.

Ниже мы рассмотрим еще один пример произвольно малой величины в уравнении Навье — Стокса, имеющей конечный эффект. Мы не хотим навязывать в качестве универсального принципа утверждение о том, что незначительные величины могут вызвать значительный эффект. Каждый экспериментальный факт зависит от бесчисленного множества незначительных явлений, и если бы все они учитывались, конечный результат был бы абсолютно непредсказуем. Поскольку многие экспериментальные факты можно предсказать теоретически, трудности, связанные с пренебрежением малых величин, должны быть ограничены определенным типом дифференциальных уравнений в частных производных. Более подробно этот вопрос рассматривается в [24].

**3.3.2. Течение несжимаемой степенной жидкости в вискозиметре типа конус-пластина.** Несжимаемая степенная жидкость постоянно деформируется между вращающейся пластиной и неподвижным конусом, как показано на рис. 3.3.2-1. Концевые эффекты пренебрежимо малы. Это эквивалентно допущению о пластине и конусе бесконечной протяженности, хотя позднее станет ясно, что, по крайней мере, одно различие существует.

Эта геометрия используется также в вискозиметре другого типа, в котором измеряются две величины: угловая скорость пластины и аксиальная составляющая момента силы, с которой жидкость действует на конус. Угловая скорость пластины  $\Omega$  считается заданной, и требуется определить аксиальную компоненту момента вращения (момент силы), действующего на конус со стороны жидкости.

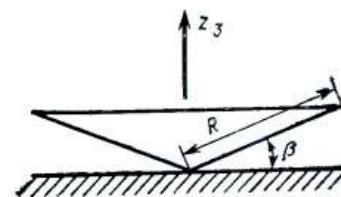


Рис. 3.3.2-1. Вискозиметр типа конус—пластина.

В сферических координатах граничными условиями будут:

$$\text{при } \theta = \frac{\pi}{2} - \beta \quad v = 0; \quad (3.3.2-1)$$

$$\text{при } \theta = \frac{\pi}{2} \quad v_r = v_\theta = 0, \quad v_\varphi = \Omega r \sin \theta. \quad (3.3.2-2)$$

Из соображений симметрии распределение скорости будет иметь вид:

$$v_r = v_\theta = 0; \quad (3.3.2-3)$$

$$v_\varphi = v_\varphi(r, \theta). \quad (3.3.2-4)$$

Далее можно предположить, что угловая скорость жидкости в за- зоре зависит только от  $\theta$ :

$$\frac{v_\varphi}{r \sin \theta} = \omega = \omega(\theta). \quad (3.3.2-5)$$

Уравнение неразрывности (Б) из табл. 2.5.1-1 тождественно удовлетворяется уравнениями (3.3.2-3) и (3.3.2-5).

Из табл. 2.5.1-10 видно, что единственными, отличными от нуля компонентами тензора скорости деформации будут:

$$D_{\theta\varphi} = D_{\varphi\theta} = \frac{1}{2} \sin \theta \frac{d\omega}{d\theta}. \quad (3.3.2-6)$$

Из § 2.3.3 известно, что

$$S = 2m\gamma^{n-1}\mathbf{D}, \quad (3.3.2-7)$$

где

$$\gamma = \sqrt{2 \operatorname{tr} \mathbf{D}^2} = \sin \theta \left| \frac{d\omega}{d\theta} \right|. \quad (3.3.2-8)$$

Следовательно, единственной, отличной от нуля компонентой тензора дополнительных напряжений будет:

$$S_{\theta\varphi} = S_{\varphi\theta} = m \left( \sin \theta \frac{d\omega}{d\theta} \right)^n. \quad (3.3.2-9)$$

При записи этого уравнения учитывалось, что  $d\omega/d\theta$  в таких условиях будет положительным.

Из табл. 2.5.1-6 найдем три компоненты первого закона Коши, выраженные с помощью модифицированного давления  $\mathcal{P}$  из § 2.5.1:

$$\rho \frac{(v_\varphi)^2}{r} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r}; \quad (3.3.2-10)$$

$$\rho (v_\varphi)^2 \operatorname{ctg} \theta = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}; \quad (3.3.2-11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (S_{\theta\varphi} \sin^2 \theta). \quad (3.3.2-12)$$

Из (3.3.2-12) следует, что

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(r, \theta, \varphi) = \varphi f(\theta) + g(r, \theta). \quad (3.3.2-13)$$

Однако мы потребуем, чтобы  $\mathcal{P}$  было периодической функцией  $\varphi$  с периодом  $2\pi$

$$\mathcal{P}(r, \theta, \varphi) = \mathcal{P}(r, \theta, \varphi + 2\pi), \quad (3.3.2-14)$$

откуда

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi} = f(\theta) = 0. \quad (3.3.2-15)$$

Поэтому

$$S_{\theta\varphi} = \frac{A}{\sin^2 \theta}, \quad (3.3.2-16)$$

где  $A$  — постоянная интегрирования. Это выражение может использоваться совместно с определяющим уравнением тензора дополнительных напряжений для нахождения распределения скорости методом, описанным в § 3.2.1—3.2.3. Нам остается только проверить совместимость уравнений (3.3.2-10) и (3.3.2-11). Потребуем, чтобы удовлетворялось равенство:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \theta \partial r}. \quad (3.3.2-17)$$

Однако это требование не удовлетворяется.

Что отсюда следует? Сделанные в уравнениях (3.3.2-3) и (3.3.2-5) допущения вызвали противоречие. Следовательно, стационарное решение уравнения неразрывности и первого закона Коши для несжимаемой степенной жидкости (или в данном случае для любой другой модельной жидкости, описанной в § 2.3.3) в таком виде не существует. Отсюда можно предположить, что зависимость, принятая для уравнения (3.3.2-5), является неверной. Ее правильность безрезультатно проверялась. Это, вероятно, означает, что решение будет иметь три отличных от нуля компоненты вектора скорости и задача, таким образом, становится очень сложной.

Здесь мы можем вернуться к допущениям, сделанным в уравнениях (3.3.2-3) и (3.3.2-5), и попытаться решить полученную задачу (ее решение даже для ньютоновской жидкости в литературе неизвестно) или же взять предельные случаи. Давайте выберем последнее и рассмотрим предельный случай ползучего течения, описанный в § 3.3.1.

Уравнение первого закона Коши можно записать с помощью модифицированного давления для несжимаемой степенной жидкости в виде

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P} + \operatorname{div}(2m\gamma^{n-1}\mathbf{D}). \quad (3.3.2-18)$$

Используем безразмерные переменные из уравнения (3.3.1-1)

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\nabla \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{v}^* = -\frac{1}{N_{Ru}} \nabla \mathcal{P}^* + \frac{1}{N_{RePM}} \operatorname{div}(2\gamma^{*n-1}\mathbf{D}^*), \quad (3.3.2-19)$$

где

$$\gamma^* = \frac{L_0}{v_0} \gamma; \quad \mathbf{D}^* = \frac{L_0}{v_0} \mathbf{D}; \quad N_{RePM} \equiv \frac{L_0^n v_0^{2-n} \rho}{m}. \quad (3.3.2-20)$$

По аналогии с § 3.3.1 предельный случай ползучего течения соответствует  $N_{RePM} \rightarrow 0$ . В этом пределе оказывается, что в уравнении первого закона Коши членами инерции по сравнению с вязкими эффектами можно пренебречь. Тогда получим уравнение (3.3.2-19) в виде

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{N_{Ru}} \nabla \mathcal{P}^* + \frac{1}{N_{RePM}} \operatorname{div}(2\gamma^{*n-1}\mathbf{D}) \quad (3.3.2-21)$$

или

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \mathcal{P} + \operatorname{div}(2m\gamma^{n-1}\mathbf{D}). \quad (3.3.2-22)$$

Уравнения (3.3.2-10) и (3.3.2-11) для предельного случая ползучего течения имеют вид:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{J}^0}{\partial r}; \quad (3.3.2-23)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{J}^0}{\partial \theta}. \quad (3.3.2-24)$$

При этом удовлетворяется условие (3.3.2-17).

Нам осталось определить характерную длину и скорость из (3.3.2-20), что представляет собой довольно необычную задачу ввиду того, что при пренебрежении концевыми эффектами расстояние и скорость не входят в граничные условия (3.3.2-1) и (3.3.2-2). Если действительно требуется рассмотреть течение между бесконечным конусом и бесконечной пластиной (математически задача решается в пренебрежении концевыми эффектами), нам ничего не остается, кроме как определить  $V=L\Omega$  и  $L$  таким образом, чтобы  $N_{RePM}=1$ . Следовательно, поскольку решить задачу для случая  $N_{RePM} \rightarrow 0$  невозможно, решения задачи о ползучем течении между бесконечным конусом и бесконечной пластиной не существует.

Выходом из создавшегося положения является решение задачи для конечной геометрии, изображенной на рис. 3.3.2-1 в пренебрежении концевыми эффектами, вместо задачи для бесконечного конуса и бесконечной пластины. Для этого возьмем:

$$v_0 \equiv R\Omega; \quad L_0 \equiv R; \quad N_{RePM} \equiv \frac{R^2\Omega^{2-n}\rho}{m}. \quad (3.3.2-25)$$

При достаточно большом значении  $m$  получаются небольшие значения  $N_{RePM}$  даже при больших  $\Omega$  и  $0 < n \leq 1$  (что встречается чаще). Для более общего случая вязкоупругого поведения, как, например, простая нолловская жидкость, необходимо дополнительное требование  $\beta \rightarrow 0$  для получения решения, совместимого с (3.3.2-17) [9].

Теперь найдем распределение скорости для предельного случая ползучего течения. Компоненту дополнительного напряжения  $S_{\theta\varphi}$  можно исключить из уравнений (3.3.2-9) — (3.3.2-16). Тогда получим:

$$\frac{A}{\sin^2 \theta} = m \left( \sin \theta \frac{d\omega}{d\theta} \right)^n. \quad (3.3.2-26)$$

Это уравнение можно преобразовать в виде

$$\frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{A}{m \sin^2 \theta} \right)^{1/n} = \frac{d\omega}{d\theta} \quad (3.3.2-27)$$

и проинтегрировать, удовлетворяя граничному условию (3.3.2-2):

$$\left( \frac{A}{m} \right)^{1/n} \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{d\theta}{(\sin \theta)^{(n+2)/n}} = \omega - \Omega. \quad (3.3.2-28)$$

Используя граничное условие (3.3.2-1), получаем:

$$\left(\frac{A}{m}\right)^{1/n} \int_{\pi/2-\beta}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\sin \theta)^{(n+2)/n}} = \Omega. \quad (3.3.2-29)$$

Из этих уравнений, взятых вместе, следует, что

$$\frac{\Omega - \omega}{\Omega} = \frac{\int_{\pi/2-\beta}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\sin \theta)^{(n+2)/n}}}{\int_{\pi/2-\beta}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\sin \theta)^{(n+2)/n}}}. \quad (3.3.2-30)$$

Эти интегралы аналитически рассчитать невозможно, однако для численного решения они не представляют трудностей.

Нашей исходной задачей было рассчитать компоненту момента силы  $\mathbf{I}$ , действующей на неподвижный конус:

$$\text{при } \theta = \frac{\pi}{2} - \beta: \mathbf{I} = \iint_0^{2\pi R} \mathbf{p} \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) dr d\varphi. \quad (3.3.2-31)$$

В прямоугольных координатах аксиальную компоненту или  $z_3$ -компоненту  $\mathbf{I}$  можно представить в виде

$$\text{при } \theta = \frac{\pi}{2} - \beta \quad I_z = \iint_0^{2\pi R} \bar{a}_z r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) dr d\varphi, \quad (3.3.2-32)$$

откуда

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{p} \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}). \quad (3.3.2-33)$$

Для обозначения величин в прямоугольных координатах будем использовать верхнюю черту. Соотношением между  $\bar{a}_z$  и компонентами  $\mathbf{a}$  в сферических координатах будет:

$$\bar{a}_z = a_r \cos \theta - a_\theta \sin \theta. \quad (3.3.2-34)$$

Из уравнения (A.9.1-4) получим:

$$a_r \equiv a_{<1>} = e_{ijk} p_{<j>} T_{<km>} n_{<m>}. \quad (3.3.2-35)$$

Поскольку в сферических координатах единственной физической компонентой  $\mathbf{n}$ , отличной от нуля, будет:

$$n_\theta \equiv n_{<2>} = 1, \quad (3.3.2-36)$$

а также поскольку физические компоненты радиус-вектора равны:

$$p_{<1>} = r, \quad p_{<2>} = p_{<3>} = 0, \quad (3.3.2-37)$$

уравнение (3.3.2-35) можно свести к

$$a_r = e_{ijk} r T_{<k2>} = 0. \quad (3.3.2-38)$$

Аналогично

$$a_\theta \equiv a_{<2>} = e_{ijk} p_{<j>} T_{<km>} n_{<m>} = e_{z13} r T_{<32>} = -r T_{\psi\theta} = -r S_{\psi\theta}. \quad (3.3.2-39)$$

Уравнения (3.3.2-34), (3.3.2-38) и (3.3.2-39) позволяют представить (3.3.2-32) в виде

$$\text{при } \theta = \frac{\pi}{2} - \beta \quad \bar{l}_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^R S_{\phi\theta} r^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) dr d\varphi. \quad (3.3.2-40)$$

Из (3.3.2.16) получим:

$$\bar{l}_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^R Ar^2 dr d\varphi = \frac{2\pi AR^3}{3}, \quad (3.3.2-41)$$

где  $A$  дается уравнением (3.3.2-29).

Задачу о ползучем течении между вращающимся конусом и пластиной для случая вязкоупругой жидкости (§ 3.2.3) можно решить методом, аналогичным изложенному в § 2.3.2, не задаваясь определенной формой функционала для  $\eta(\gamma)$  или  $\varphi(\tau)$  [25]. Для такой геометрии анализ течения простой нолловской жидкости (§ 2.3.4) едва ли представит большие трудности. В этом отношении можно порекомендовать интересную работу [9].

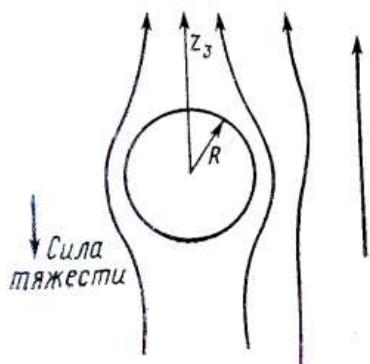


Рис. 3.3.3-1. Обтекание шара.

**3.3.3. Обтекание шара.** Рассмотрим шар, падающий с постоянной скоростью  $v_\infty$  вдоль оси цилиндра, заполненного несжимаемой ньютоновской жидкостью. Требуется рассчитать силу, с которой жидкость действует на шар.

Для упрощения задачи пренебрегаем эффектами на ограничивающих поверхностях сосуда и будем считать, что шар движется в направлении силы тяжести в жидкости бесконечной протяженности.

Задача является нестационарной, поскольку положение шара меняется в зависимости от времени. Однако эту задачу можно свести к стационарной, если рассматривать движение шара в системе координат, начало которых находится в центре шара. На рис. 3.3.3-1 можно увидеть, что граничными условиями для нашей задачи будут:

$$\text{при } r=R \quad v=0 \quad (3.3.3-1)$$

и

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad v \rightarrow v_\infty e_z. \quad (3.3.3-2)$$

Представляется целесообразным принять распределение скорости в сферических координатах в виде

$$v_r = v_r(r, \theta); \quad v_\theta = v_\theta(r, \theta); \quad v_\varphi = 0. \quad (3.3.3-3)$$

В § 1.3.6 и 1.3.7 мы показали, что для такого двумерного движения уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно, если ввести функцию тока  $\psi$ . Из табл. 2.5.2-1 найдем, что компоненты скорости можно представить с помощью этой функции тока в виде

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3.3.3-4)$$

Для стационарного движения, которое можно считать ползучим течением, уравнение Навье — Стокса можно значительно упростить, если записать его с помощью функции тока (см. табл. 2.5.2-1):

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right]^2 \psi = 0. \quad (3.3.3-5)$$

Соответствующими граничными условиями из (3.3.3-1) будут:

$$\text{при } r=R \quad \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (3.3.3-6)$$

и

$$\text{при } r=R \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (3.3.3-7)$$

Необходимо найти граничные условия, налагаемые уравнением (3.3.3-2) на величину  $\psi$ .

Из (3.3.3-4) имеем:

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \rightarrow v_\infty \cos \theta. \quad (3.3.3-8)$$

Функция тока  $\psi$  произвольна до постоянной и поэтому можно потребовать, чтобы

$$\text{при } r \rightarrow \infty \text{ для } \theta=0, \psi \rightarrow 0. \quad (3.3.3-9)$$

Отсюда

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad \int_0^\phi d\psi = \int_0^\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta = r^2 v_\infty \int_0^\theta \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (3.3.3-10)$$

или

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad \psi \rightarrow \frac{1}{2} r^2 v_\infty \sin^2 \theta. \quad (3.3.3-11)$$

Границное условие (3.3.3-11) предполагает функцию тока в виде

$$\psi = f(r) \sin^2 \theta. \quad (3.3.3-12)$$

При таком преобразовании переменной получим (3.3.3-5) в виде

$$\frac{d^4 f}{dr^4} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{8}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{8f}{r^4} = 0. \quad (3.3.3-13)$$

Границными условиями, соответствующими (3.3.3-6), (3.3.3-7) и (3.3.3-11), будут:

$$\text{при } r=R \quad f = 0; \quad (3.3.3-14)$$

$$\text{при } r=R \quad \frac{df}{dr} = 0 \quad (3.3.3-15)$$

и

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad f \rightarrow \frac{1}{2} r^2 v_\infty. \quad (3.3.3-16)$$

Дифференциальное уравнение четвертого порядка (3.3.3-13) является линейным и однородным. Решение можно получить в виде

$$f(r) = ar^n, \quad (3.3.3-17)$$

откуда следует:

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4. \quad (3.3.3-18)$$

Из граничных условий (3.3.3-14) – (3.3.3-16) получим:

$$A = \frac{1}{4} v_\infty R^2; \quad B = -\frac{3}{4} v_\infty R; \quad C = \frac{1}{2} v_\infty; \quad D = 0. \quad (3.3.3-19)$$

Из (3.3.3-4), (3.3.3-12) и (3.3.3-19) следует, что компоненты скорости в жидкости будут:

$$\frac{v_r}{v_\infty} = \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \quad (3.3.3-20)$$

и

$$\frac{v_\theta}{v_\infty} = - \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{R}{r} - \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta. \quad (3.3.3-21)$$

Теперь найдем распределение давления в жидкости. Удобнее всего оперировать с помощью модифицированного давления:

$$\mathcal{P} = p + \rho \varphi, \quad (3.3.3-22)$$

где

$$\varphi = gz_3 = gr \cos \theta. \quad (3.3.3-23)$$

Для полного определения давления в жидкости (давление в несжимаемой жидкости определяется движением только с точностью до постоянной) требуется:

$$\text{при } r \rightarrow \infty \text{ для } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \mathcal{P} = p_0. \quad (3.3.3-24)$$

С помощью компонент  $r$  и  $\theta$  из уравнения Навье – Стокса (см. табл. 2.5.1-7), а также из уравнений (3.3.3-20) и (3.3.3-21) получим:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} = 3\mu v_\infty R \frac{\cos \theta}{r^3} \quad (3.3.3-25)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} = \frac{3}{2} \mu v_\infty R \frac{\sin \theta}{r^2}. \quad (3.3.3-26)$$

Отсюда линейным интегрированием найдем распределение давления

$$\mathcal{P} - p_0 = \int_{p_0}^{\mathcal{P}} d\mathcal{P} = \int_{\infty}^r \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} d\theta \quad (3.3.3-27)$$

для

$$p = p_0 - \rho g r \cos \theta - \frac{3}{2} \mu v_\infty R \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (3.3.3-28)$$

Компоненту  $z_3$  силы, с которой жидкость действует на шар, можно представить в виде

$$f_{(s)3} = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (T_{rr} \cos \theta - T_{\theta r} \sin \theta) \Big|_{r=R} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3.3.3-29)$$

С учетом (3.3.3-20) получим:

$$\text{при } r=R \quad S_{rr}=0. \quad (3.3.3-30)$$

Тогда (3.3.3-29) сводится к

$$f_{(s)z} = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-p \cos \theta - T_\theta \sin \theta)|_{r=R} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (3.3.3-31)$$

После соответствующего интегрирования найдем:

$$f_{(s)z} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 6\pi \mu R v_\infty. \quad (3.3.3-32)$$

Первый член справа учитывает архимедову силу, с которой жидкость действует на шар, второй член в правой части является результатом движения жидкости. Уравнение (3.3.3-32) является классическим выражением закона Стокса.

Очень часто сила, с которой жидкость действует на погруженное тело, выражается не в виде внешнего и гидростатического давлений, а с помощью коэффициента сопротивления (см. § 4.4.7). При обтекании шара

$$c_D = \frac{f_{(s)z} - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \pi R^2} \quad (3.3.3-33)$$

закон Стокса можно записать с помощью этого коэффициента сопротивления в виде

$$c_D = \frac{\frac{6\pi \mu R v_\infty}{2}}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 \pi R^2} = \frac{24}{N_{Re}}, \quad (3.3.3-34)$$

где

$$N_{Re} = \frac{2\rho v_\infty R}{\mu}. \quad (3.3.3-35)$$

При выводе уравнения (3.3.3-34) мы ограничились предельным случаем  $N_{Re} \rightarrow 0$ , так как в уравнении движения силами инерции по сравнению с вязкими силами пренебрегали. Из сравнения с экспериментальными данными [13] очевидно, что для  $N_{Re} < 0,5$  закон Стокса является очень хорошим приближением к действительности.

Для шара, падающего с постоянной скоростью под действием силы тяжести, простое уравнение баланса силы (см. § 4.4.5) показывает, что сила, с которой жидкость действует на шар, должна быть равна по значению и противоположна по направлению силе тяжести шара:

$$f_{(s)z} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{(s)} g, \quad (3.3.3-36)$$

где  $\rho_{(s)}$  — плотность шара. Отсюда получим в явном виде выражение для коэффициента сопротивления

$$c_D = \frac{8}{3} \frac{Rg}{v_\infty^2} \frac{\rho_{(s)} - \rho}{\rho}. \quad (3.3.3-37)$$

Когда применим закон Стокса, уравнения (3.3.3-34) и (3.3.3-37) связывают свойства шара со свойствами жидкости. Если плотность жидкости больше плотности шара, уравнения (3.3.3-34) и (3.3.3-37) все еще остаются применимыми; это означает только, что скорость должна быть отрицательной и шар поднимается, а не падает.

В § 4.4.20 описывается обтекание шара несжимаемой модельной жидкостью Эллиса для случая ползучего течения.

### 3.4. НЕВЯЗКИЕ ТЕЧЕНИЯ

*3.4.1. Потенциальное течение.* Переидем к рассмотрению несжимаемой ньютоновской жидкости.

В § 3.3.1 обсуждался предельный случай ползучего течения, когда  $\lambda_{\text{re}} \rightarrow 0$ . Теперь мы возьмем предельный случай  $N_{\text{Re}} \rightarrow \infty$ . Используя уравнение Навье—Стокса (3.3.1-2), в безразмерном виде получаем:

$$\frac{1}{N_{\text{St}}} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\nabla \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{v}^* = - \frac{1}{N_{\text{Ru}}} \nabla \mathcal{P}^* + \frac{1}{N_{\text{Re}}} \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v}^*). \quad (3.4.1-1)$$

Поскольку число Рейнольдса  $N_{\text{Re}}$  стремится к бесконечности, оказывается, что в этом уравнении вязкостью  $1/N_{\text{Re}} \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v})$  можно пренебречь по сравнению с конвективными членами  $(\nabla \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{v}^*$ . Так как число Рейнольдса очень велико, оказывается, что уравнение Навье—Стокса сводится к

$$\frac{1}{N_{\text{St}}} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\nabla \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{v}^* = - \frac{1}{N_{\text{Ru}}} \nabla \mathcal{P}^* \quad (3.4.1-2)$$

или

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = - \nabla \mathcal{P}. \quad (3.4.1-3)$$

Теперь попытаемся исследовать решения уравнения (3.4.1-3), совместимые с уравнением неразрывности.

Распределение скорости будет иметь вид:

$$\mathbf{v} = - \nabla \Phi; \quad (3.4.1-4)$$

поскольку при этом уравнение Навье—Стокса

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = - \nabla \mathcal{P} + \mu \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v}) \quad (3.4.1-5)$$

сводится к (3.4.1-3) для всех значений числа Рейнольдса:

$$\operatorname{div}(\nabla \mathbf{v}) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial z_j \partial z_i} \mathbf{e}_i = - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z_j \partial z_i \partial z_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial z_i \partial z_i} \mathbf{e}_i = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) = 0. \quad (3.4.1-6)$$

С учетом уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости уравнение для потенциала  $\Phi$  является уравнением Лапласа

$$\operatorname{div}(\nabla \Phi) = 0. \quad (3.4.1-7)$$

Таблица 3.4.1-1

Уравнение Лапласа  $\operatorname{div} \nabla \Phi = 0$  для трех систем координат

Прямоугольные координаты:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_3^2} = 0 \quad (A)$$

Цилиндрические координаты:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (B)$$

Сферические координаты:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (B)$$

Уравнение Лапласа приведено в табл. 3.4.1-1 для прямоугольных, цилиндрических и сферических координат. Этому уравнению посвящено много математической литературы, например [35, 36].

Следовательно, уравнение (3.4.1-3) используется только для нахождения распределения модифицированного давления.

Когда распределение скорости задается уравнением вида (3.4.1-4), то скорость  $\mathbf{v}$  можно представить потенциалом  $\Phi$  и такое течение называется потенциальным.

Для потенциального течения легко показать, что вектор завихренности равен нулю. В § 1.4.2 указывалось, что течение, в котором вектор завихренности всюду стремится к нулю, называется безвихревым течением. Этот термин соответствует физической сущности такого течения, в котором отсутствует локальное вихревое течение.

Итак, несжимаемые потенциальные течения (или несжимаемые безвихревые течения) образуют класс течений, для которых вязкость в уравнении Навье — Стокса пренебрежимо мала по сравнению с конвекцией. Это ни в коем случае не означает, что только течение этого вида обладает таким свойством. Интерес к ним объясняется исключительно их математической простотой.

Следует также отметить, что члены вязкости в уравнении первого закона Коши для несжимаемой жидкости, описываемой уравнением (2.3.2-11) или (2.3.3-1), не равны нулю автоматически [37].

Из § 3.4.3 может возникнуть вопрос, имеют ли какое-нибудь значение течения, в которых вязкими эффектами по сравнению с эффектами инерции пренебрегают. Их истинное значение станет ясным в связи с теорией пограничного слоя (§ 3.5.1 и далее).

**3.4.2. Уравнение Бернулли.** В этом параграфе мы рассмотрим сжимаемую жидкость; при этом будем пренебречь членами вязкости в уравнении первого закона Коши. Сначала рассмотрим, например, сжимаемую ньютоновскую жидкость, считая, что в пределе  $N_{Re} \rightarrow \infty$  и  $L V \rho / \lambda \rightarrow \infty$  членами вязкости можно пренебречь по сравнению с конвективно-инерционными (см. определяющее уравнение сжимаемой ньютоновской жидкости в § 2.3.2). В результате уравнение первого закона Коши сводится к

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{f}. \quad (3.4.2-1)$$

Допустим, что внешнюю силу на единицу массы можно представить потенциалом

$$\mathbf{f} = -\nabla \varphi. \quad (3.4.2-2)$$

Легко показать, что

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \nabla (0.5 v^2) - (\nabla v) \cdot \mathbf{v}, \quad (3.4.2-3)$$

где  $\mathbf{w}$  — вектор завихренности (см. § 1.4.2):

$$\mathbf{w} \equiv \text{rot } \mathbf{v}. \quad (3.4.2-4)$$

Из уравнений (3.4.2-2) и (3.4.2-3) можно записать (3.4.2-1) в виде [38]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla (0.5 v^2) - \nabla \varphi = -\nabla \chi, \quad (3.4.2-5)$$

где

$$\chi \equiv \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi. \quad (3.4.2-6)$$

Обратите внимание, что при выводе (3.4.2-5) считалось, что плотность зависит только от давления.

Пусть  $s$  — параметр вдоль произвольной кривой в пространстве. В любой точке на этой кривой  $d\mathbf{p}/ds$  есть единичный вектор, касательный к этой кривой. Рассмотрим компоненту уравнения (3.4.2-5) в направлении  $d\mathbf{p}/ds$ :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds} - (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \frac{d\mathbf{p}}{ds} = - \frac{d\mathbf{p}}{ds} \cdot \nabla \chi. \quad (3.4.2-7)$$

Поскольку

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} \cdot \nabla \int_{s_0}^s \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right) ds = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds}, \quad (3.4.2-8)$$

уравнение (3.4.2-7) можно выразить в виде [39]:

$$-(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds} = - \frac{d\mathbf{p}}{ds} \cdot \nabla X, \quad (3.4.2-9)$$

где

$$X \equiv \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \int_{s_0}^s \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right) ds. \quad (3.4.2-10)$$

Если в любой момент времени в любой точке поля течения  $d\mathbf{p}/ds$  является вектором, касательным к линии тока, то

$$-(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds} = 0 = - \frac{d\mathbf{p}}{ds} \cdot \nabla X. \quad (3.4.2-11)$$

Следует учесть, что семейство поверхностей  $X=\text{const}$  включает линии тока.

Если принять, что в любой момент времени в любой точке пространства  $d\mathbf{p}/ds$  есть вектор, касательный к вихревой линии, то уравнение (3.4.2-11) остается справедливым и мы можем сделать вывод, что семейство поверхностей  $X=\text{const}$  включает вихревые линии (т. е. вихревые линии для времени  $t$  из этого семейства кривых, к которому вихревое поле касательно везде в момент времени  $t$ ). Дифференциальные уравнения для вихревых линий являются решениями дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{p}}{da} = \mathbf{w}, \quad (3.4.2-12)$$

где  $a$  — произвольный параметр, измеряемый вдоль кривых, а время  $t$  постоянно. О линиях тока — см. § 1.1.3.

Если мы рассматриваем безвихревое течение ( $\mathbf{w}=0$ ), а  $d\mathbf{p}/ds$  — вектор, касательный к любой кривой в поле течения, уравнение (3.4.2-11) остается справедливым. Следовательно, для безвихревого течения  $X=\text{const}$  во всем поле течения.

Еще более интересный результат для безвихревого течения можно получить, исходя непосредственно из (3.4.2-5). Поскольку  $\mathbf{v}=-\nabla\Phi$ , мы можем записать:

$$\nabla \left( \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.4.2-13)$$

откуда

$$\Psi = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = F(t). \quad (3.4.2-14)$$

Функция  $F(t)$  не имеет физического смысла, поэтому можно определить:

$$\tilde{\Phi} = \Phi + \int_0^t F(t) dt \quad (3.4.2-15)$$

так, чтобы

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} = 0. \quad (3.4.2-16)$$

Величина  $\tilde{\Phi}$  имеет важное физическое значение и выражается в виде

$$\nabla \tilde{\Phi} = \nabla \Phi = -\mathbf{v}. \quad (3.4.2-17)$$

Поэтому обычно для безвихревого течения

$$\Psi = \text{const.} \quad (3.4.2-18)$$

Следовательно, уравнение

$$X = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \int_{s_0}^s \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{ds} \right) ds = \text{const} \quad (3.4.2-19)$$

является уравнением Бернулли, справедливым вдоль линий тока и вихревых линий в любом течении, для которого в уравнении первого закона Коши вязкими эффектами можно пренебречь. Для безвихревого течения, для которого в первом законе Коши вязкими эффектами можно пренебречь, уравнение (3.4.2-19) справедливо вдоль любой токовой линии и, что более важно, уравнение Бернулли для потенциального течения справедливо во всем поле течения:

$$\Psi = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \text{const.} \quad (3.4.2-20)$$

**3.4.3. Парадокс Даламбера.** Рассмотрим бесконечное стационарное потенциальное течение несжимаемой ньютоновской жидкости, в которую погружено тело. Жидкость в бесконечности считается неподвижной, а тело движется с постоянной скоростью  $\mathbf{U}$ .

Как указывалось в § 3.4.1, под потенциальным течением мы понимаем такое течение, для которого вектор скорости можно представить скалярным потенциалом  $\Phi$

$$\mathbf{v} = -\nabla \Phi. \quad (3.4.3-1)$$

Для несжимаемой жидкости скалярный потенциал  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\operatorname{div}(\nabla \Phi) = 0. \quad (3.4.3-2)$$

Пусть  $r$  — радиальная сферическая координата, измеряемая от центра массы тела, а  $S_B$  — замкнутая поверхность, ограничивающая тело. Для рассматриваемой задачи граничными условиями будут:

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad \nabla \Phi = 0 \quad (3.4.3-3)$$

и

$$\text{на поверхности } S_B \quad \nabla \Phi = \mathbf{U}. \quad (3.4.3-4)$$

Величина  $\mathbf{n}$  является вектором внешней единичной нормали по отношению к  $S_B$ . В каждой точке поверхности  $S_B$  определим также два единичных взаимно ортогональных вектора:  $\mathbf{t}_{(A)}$  и  $\mathbf{t}_{(B)}$ , касательных к поверхности. Используя эти определения, запишем выражение (3.4.3-4) в общем виде:

$$\text{на поверхности } S_B \quad \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} \quad (3.4.3-5)$$

задается и

$$\text{на поверхности } S_B \quad \nabla \Phi \cdot \mathbf{t}_{(A)} \text{ и } \nabla \Phi \cdot \mathbf{t}_{(B)} \quad (3.4.3-6)$$

также задаются.

С учетом того, что [36]

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad r \Phi, \quad r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}, \quad r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}, \quad r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z_3} \quad (3.4.3-7)$$

ограничены по абсолютной величине, уравнение (3.4.3-2) имеет единственное решение при граничных условиях (3.4.3-3) и (3.4.3-5).

Следовательно, две тангенциальные компоненты скорости (3.4.3-6) не используются. По своему физическому смыслу это соответствует скольжению на ограничивающих поверхностях. Очевидно, что при этом нарушаются граничные условия из § 3.1.1, и следует задуматься над физическим смыслом потенциального течения.

Скольжение на ограничивающих поверхностях предполагает обтекание твердой поверхности без всякого сопротивления. Рассмотрим силу  $f$ , с которой потенциальное течение жидкости действует на обтекаемое тело. Опять ограничимся жидкостью, бесконечной во всех направлениях. Силу  $f$  можно представить в виде

$$f = \int_{S_B} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.4.3-8)$$

Следовательно, мы можем применить преобразование Грина (см. § A.11.2), однако в бесконечных областях его следует использовать с осторожностью. Пусть  $\Sigma_r$  — сферическая поверхность радиусом  $r$  с центром, совпадающим с центром массы тела, полностью ограничивающая тело;  $V_r$  — область жидкости, ограниченная поверхностями  $\Sigma_r$  и  $S_B$ . Используя преобразование Грина, получаем:

$$f_r = \int_{S_B} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{V_r} \operatorname{div} \mathbf{T} dV + \int_{\Sigma_r} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.4.3-9)$$

Во втором интеграле в правой части (3.4.3-9) нормаль  $\mathbf{n}$  направлена наружу по отношению к замкнутой поверхности  $\Sigma_r$ . В интеграле слева нормаль  $\mathbf{n}$  направлена наружу по отношению к замкнутой поверхности  $S_B$ ; однако для того, чтобы использовать преобразование Грина, нам необходима единичная нормаль, направленная наружу по отношению к замкнутой поверхности  $V_r$ . Это учитывается знаками интегралов.

Рассмотрим в отдельности два члена в правой части (3.4.3-9). Из уравнения неразрывности можно записать:

$$\rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} = \frac{d_{(m)}(\rho \mathbf{v})}{dt} + \rho \mathbf{v} (\operatorname{div} \mathbf{v}) = \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}). \quad (3.4.3-10)$$

Отсюда первый закон Коши можно представить в виде

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}. \quad (3.4.3-11)$$

Поскольку мы рассматриваем стационарное течение, первый член в правой части принимает вид:

$$-\int_{V_r} \operatorname{div} \mathbf{T} dV = -\int_{V_r} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dV + \int_{V_r} \rho \mathbf{f} dV. \quad (3.4.3-12)$$

В результате преобразования Грина с граничными условиями (3.4.3-4) первый член в правой части (3.4.3-12) будет иметь вид:

$$-\int_{V_r} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dV = -\int_{\Sigma_r} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \rho \mathbf{U} \cdot \int_{S_B} \mathbf{n} dS = -\int_{\Sigma_r} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.4.3-13)$$

Если внешнюю силу на единицу массы представить потенциалом (см. § 2.5.1), то для второго члена в правой части (3.4.3-12) также можно использовать преобразование Грина

$$\begin{aligned} \int_{V_r} \rho \mathbf{f} dV &= -\int_{V_r} \nabla(\rho \varphi) dV = -\int_{\Sigma_r} \rho \varphi \mathbf{n} dS + \int_{S_B} \rho \varphi \mathbf{n} dS = -\int_{\Sigma_r} \rho \varphi \mathbf{n} dS + \\ &+ \int_{V_B} \nabla(\rho \varphi) dV = -\int_{\Sigma_r} \rho \varphi \mathbf{n} dS - \int_{V_B} \rho \mathbf{f} dV, \end{aligned} \quad (3.4.3-14)$$

где  $V_B$  обозначает область, занятую погруженным телом.

Из уравнения Бернуlli для стационарного течения несжимаемой Ньютоновской жидкости получим:

$$P = -\rho \varphi - 0,5 \rho v^2 + P_{(0)} + \rho \varphi_{(0)} + 0,5 \rho U^2. \quad (3.4.3-15)$$

Здесь для  $P_{(0)}$  и  $\varphi_{(0)}$  принято одно и то же начало отсчета на поверхности тела. Поэтому второй член в правой части (3.4.3-9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_r} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Sigma_r} (\rho \varphi + 0,5 \rho v^2) \mathbf{n} dS - (P_{(0)} + \rho \varphi_{(0)} + 0,5 \rho U^2) \int_{\Sigma_r} \mathbf{n} dS + \\ &+ \int_{\Sigma_r} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma_r} (\rho \varphi + 0,5 \rho v^2) \mathbf{n} dS + \mu \int_{\Sigma_r} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (3.4.3-16)$$

Используя (3.4.3-12), (3.4.3-13), (3.4.3-14) и (3.4.3-16), находим из уравнения (3.4.3-9):

$$\mathbf{f}_r = -\int_{\Sigma_r} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Sigma_r} 0,5 \rho v^2 \mathbf{n} dS + \mu \int_{\Sigma_r} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \cdot \mathbf{n} dS - \int_{V_B} \rho \mathbf{f} dV. \quad (3.4.3-17)$$

Теперь можно перейти к рассмотрению предельного случая  $r \rightarrow \infty$ . Из уравнений (3.4.3-3) и (3.4.3-7) следует:

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad \mathbf{v} = 0 + O(1/r^2), \quad \nabla \mathbf{v} = 0 + O(1/r^3), \quad (3.4.3-18)$$

где  $O(1/r^2)$  означает «член порядка  $1/r^2$ » или «члены, стремящиеся к нулю пропорционально  $1/r^2$ ». Из уравнений (3.4.3-18) получим:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} O(1/r^4) dS = 0; \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} 0,5 \rho v^2 \mathbf{n} dS &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} O(1/r^4) dS = 0; \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \cdot \mathbf{n} dS &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_r} O(1/r^3) dS = 0. \end{aligned} \quad (3.4.3-19)$$

Из уравнений (3.4.3-17) и (3.4.3-19) следует, что

$$\mathbf{f} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{f}_r = - \int_{V_B} \rho \mathbf{f} dV. \quad (3.4.3-20)$$

Многие предпочитают оперировать суммарной силой, действующей на погруженное тело, а не с силой, с которой жидкость действует на тело; поэтому появляется дополнительный член, учитывающий внешнюю силу, которая в данном случае является силой тяжести. Пусть  $\rho_{(s)}$  — плотность твердого тела, а  $\rho_{(f)}$  — плотность жидкости. Суммарная сила, действующая на погруженное тело в стационарном потенциальном течении несжимаемой ньютоновской жидкости, из уравнения (3.4.3-20) будет:

$$\int_{V_B} \rho_{(s)} \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\rho_{(s)} - \rho_{(f)}) \mathbf{f} dV. \quad (3.4.3-21)$$

Физический смысл этого уравнения состоит в том, что суммарная сила, действующая на погруженное тело в потенциальном течении, равна силе, действующей на неподвижное тело, т. е. архимедовой силе. Иными словами, для того чтобы тело двигалось в жидкости, не требуется никакой силы, что, естественно, противоречит повседневному опыту и всем известным экспериментальным измерениям.

Тот факт, что силой, действующей на погруженное тело в потенциальном течении, является архимедова сила, известен под названием парадокса Даламбера, впервые обнаруженного Жаном Даламбером (1717—1783) [5].

Как уже указывалось, распределение скорости, которое можно представить потенциалом, не может удовлетворять граничным условиям для тангенциальных компонент скорости на поверхности погруженного тела. Такое распределение скорости не может также использоваться для нахождения силы, действующей на погруженное тело со стороны жидкости в процессе относительного движения. Естественно задать вопрос, почему же мы потратили столько времени на предмет, не имеющий практического значения.

Оказывается, что он практическое значение все-таки имеет. В § 3.5.1 будет показано, что с помощью потенциального течения можно найти хорошее приближение для реальных жидкостей на некотором расстоянии от погруженного тела. По этой причине в двух следующих параграфах мы рассмотрим частные случаи потенциальных течений.

**3.4.4. Потенциальное течение при обтекании шара.** Рассмотрим стационарное потенциальное течение вокруг неподвижного шара, когда жидкость на очень большом расстоянии от шара движется с равномерной скоростью в положительном направлении

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad v \rightarrow V\mathbf{e}_3. \quad (3.4.4-1)$$

Начало сферической и прямоугольной систем координат совпадает с центром шара. Требуется определить потенциал скорости  $\Phi$  для этого течения и соответствующее распределение скорости

$$v = -\nabla\Phi. \quad (3.4.4-2)$$

Границное условие (3.4.4-1) можно считать ограничением для потенциала скорости:

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad \Phi \rightarrow -Vz_3 = -Vr \cos \theta. \quad (3.4.4-3)$$

В § 3.4.3 указывалось, что только нормальная компонента скорости на поверхности шара может удовлетворить потенциальному течению. Если  $a$  — радиус шара, то

$$\text{при } r = a \quad v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad (3.4.4-4)$$

где использованы физические компоненты градиента скаляра.

Поскольку шар есть тело вращения, а граничное условие (3.4.4-3) является осесимметричным, найдем распределение скорости в виде

$$v_r = v_r(r, \theta); \quad v_\theta = v_\theta(r, \theta); \quad v_\varphi = 0, \quad (3.4.4-5)$$

откуда следует, что мы ищем потенциал, независимый от сферической координаты  $\varphi$ :

$$\Phi = \Phi(r, \theta). \quad (3.4.4-6)$$

Уравнение Лапласа для сферических координат возьмем из табл. 3.4.1-1:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (3.4.4-7)$$

Требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (3.4.4-3) и (3.4.4-4).

Используя метод разделения переменных, легко показать, что уравнение (3.4.4-7) имеет решение вида [18]:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \{ r^n [A_n P_n(\cos \theta) + B_n Q_n(\cos \theta)] + r^{-n-1} [C_n P_n(\cos \theta) + D_n Q_n(\cos \theta)] \}, \quad (3.4.4-8)$$

где  $P_n(x)$  — функция Лежандра первого рода;  $Q_n(x)$  — функция Лежандра второго рода, а  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  и  $D_n$  — постоянные. Поскольку

$$\text{при } \cos \theta \rightarrow \pm 1 \quad Q_n(\cos \theta) \rightarrow \infty, \quad (3.4.4-9)$$

возьмем:

$$B_n = D_n = 0 \text{ для } n \geq 0. \quad (3.4.4-10)$$

Учитывая, что

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad (3.4.4-11)$$

уравнение (3.4.4-8) можно свести к виду

$$\Phi = -V_r P_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} C_n P_n(\cos \theta) \quad (3.4.4-12)$$

для того, чтобы удовлетворить (3.4.4-3). С помощью граничного условия (3.4.4-4) найдем из (3.4.4-12):

$$\text{при } r=a \quad VP_1(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a^{-n-2} C_n P_n(\cos \theta) = 0. \quad (3.4.4-13)$$

Функции Лежандра первого рода ортогональны на интервале  $-1 \leq x \leq 1$  [40]

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n; \quad (3.4.4-14)$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (3.4.4-15)$$

Эти соотношения ортогональности позволяют заключить из (3.4.4-13), что

$$C_1 = -\frac{Va^3}{2}; \quad C_0 = 0; \quad C_n = 0 \text{ для } n \geq 2. \quad (3.4.4-16)$$

Следовательно, выражением для потенциала скорости будет:

$$\Phi = -V \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta. \quad (3.4.4-17)$$

Пусть соответствующими компонентами скорости являются:

$$v_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = V \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta; \quad (3.4.4-18)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -V \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta; \quad (3.4.4-19)$$

$$v_\varphi = 0. \quad (3.4.4-20)$$

Это согласуется с нашим начальным допущением о существовании как минимум одного решения для этой задачи в виде (3.4.4-6). В работе [38] показано, что это решение однозначно.

Для уяснения вышеизложенного рассчитаем функцию тока для этого решения. Из табл. 2.5.2-1:

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad (3.4.4-21)$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3.4.4-22)$$

Проведя линейное интегрирование уравнений (3.4.4-18) и (3.4.4-19), найдем функцию тока

$$\psi = \int_0^\varphi d\psi = \int_R^r \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]_{\theta=0} dr + \int_0^\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta = \frac{Va^3}{2} \left( \frac{r^2}{a^2} - \frac{a}{r} \right) \sin^2 \theta. \quad (3.4.4-23)$$

Поскольку функция тока является произвольной постоянной, при интегрировании использовалось условие

$$\text{при } r=R, \theta=0 \quad \psi=0. \quad (3.4.4-24)$$

Различные линии тока для различных значений  $2\psi/Va^2$  показаны на рис. 3.4.4-1.

**3.4.5. Двумерное потенциальное течение внутри угла.** Рассмотрим двумерное течение, линии тока которого изображены на рис. 3.4.5-1. Жидкость приближается к плоскости  $z_2=0$  в направлении, противоположном  $z_2$ , в углу она делает поворот и удаляется в направлении  $z_1$ . Из определения двумерного течения следует, что

$$v_1=v_1(z_1, z_2); v_2=v_2(z_1, z_2); v_3=0. \quad (3.4.5-1)$$

Найдем потенциал скорости и распределение скорости для соответствующего потенциального течения.

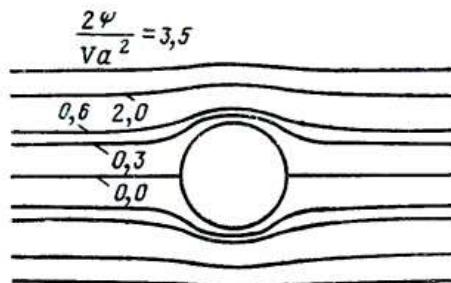


Рис. 3.4.4-1. Линии тока для потенциального течения при обтекании шара.

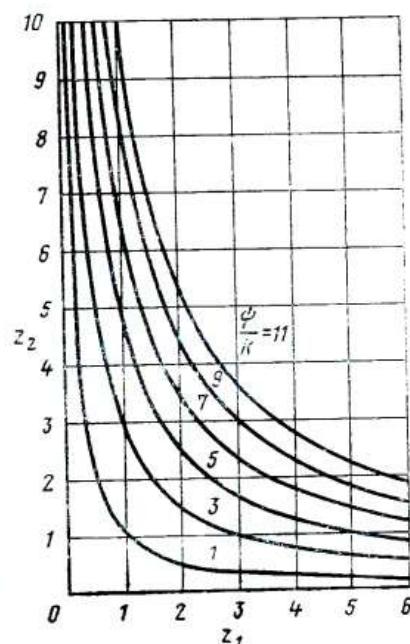


Рис. 3.4.5-1. Линии тока для двумерного потенциального течения вблизи угла.

Прежде чем приступить к описанию движения жидкости во всей этой полубесконечной области, ограничимся рассмотрением области в непосредственной близости от угла, где потенциал скорости  $\Phi$  можно разложить в ряд Тейлора вблизи начала координат:

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi(z_1, z_2) &= \Phi(0, 0) + z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}(0, 0) + z_2 \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}(0, 0) + \\ &+ \frac{1}{2} (z_1)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2}(0, 0) + z_1 z_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_2}(0, 0) + \frac{1}{2} (z_2)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_2^2}(0, 0) + \dots \end{aligned} \quad (3.4.5-2)$$

В качестве граничных условий потребуем, чтобы

$$v_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} = 0 \quad \text{при } z_1 = 0 \quad (3.4.5-3)$$

и

$$v_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z_2} = 0 \quad \text{при } z_2 = 0. \quad (3.4.5-4)$$

Эти граничные условия означают, что в уравнении (3.4.5-2)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_1}(0, 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}(0, 0) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_2}(0, 0) = 0. \quad (3.4.5-5)$$

Уравнение Лапласа должно быть повсюду справедливым и, в частности, в начале координат

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_2^2}(0, 0) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2}(0, 0) = k = \text{const}. \quad (3.4.5-6)$$

Поскольку потенциал скорости определяется с точностью до произвольной постоянной, найдем:

$$\Phi(0, 0) = 0. \quad (3.4.5-7)$$

Уравнения (3.4.5-5) — (3.4.5-7) позволяют представить (3.4.5-2) в виде

$$\Phi = \frac{k}{2}[(z_2)^2 - (z_1)^2] + \dots \quad (3.4.5-8)$$

Соответствующими компонентами скорости будут:

$$v_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} = kz_1 + \dots \quad (3.4.5-9)$$

и

$$v_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z_2} = -kz_2 + \dots \quad (3.4.5-10)$$

Чтобы отчетливо представить себе полученные результаты, полезно рассчитать функцию тока и построить линии тока. Из табл. 2.5.2-1 получим:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial z_2} \text{ и } v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial z_1}. \quad (3.4.5-11)$$

Уравнения (3.4.5-9) — (3.4.5-11) позволяют с помощью линейного интегрирования определить функцию тока:

$$\psi = \int_0^{z_1} d\psi = \int_0^{z_1} \frac{\partial \psi}{\partial z_1} dz_1 + \int_0^{z_2} \frac{\partial \psi}{\partial z_2} dz_2 = kz_1 z_2 + \dots \quad (3.4.5-12)$$

Так как функция тока определяется с точностью до произвольной постоянной, при интегрировании полагаем:

$$\text{при } z_1 = z_2 = 0 \quad \psi = 0. \quad (3.4.5-13)$$

Линии тока, соответствующие разным значениям  $\psi/k$ , показаны на рис. 3.4.5-1.

Важно понять, что первые члены потенциала скорости (3.4.5-8) не в состоянии описать действительное поведение течения на больших расстояниях от его начала. Из уравнений (3.4.5-9) и (3.4.5-10) очевидно, что значение скорости пропорционально расстоянию от начала течения

$$|v| = k |z| \quad (3.4.5-14)$$

и, следовательно, поле течения не ограничено сверху. Это подтверждает предположение, сделанное ранее при разложении потенциала скорости в ряд Тейлора о том, что полученные уравнения описывают потенциальное течение в окрестности угла.

Наш метод решения (разложение  $\Phi$  в ряд Тейлора вблизи начала координат) подразумевает, что первые два члена уравнения (3.4.5-8) не могут дать единственного решения потенциального течения для этой геометрии.

Чтобы уяснить этот вопрос, рассмотрим выражение [35]

$$\Phi = -Be^{(z_1)^2-(z_2)^2} \cos(2z_1 z_2). \quad (3.4.5-15)$$

Это еще одно решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям (3.4.5-3) и (3.4.5-4).

Преимуществом полученного решения для потенциального течения в окрестности угла является так же то, что оно описывает течение вблизи критической точки на плоскости  $z_2=0$ , линии тока для которых показаны на рис. 3.4.5-2. Жидкость, приближающаяся к плоскости  $z_2$  в на-

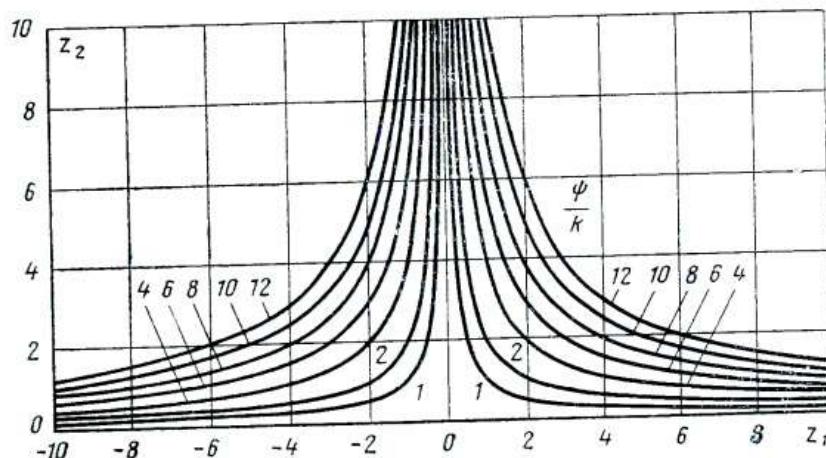


Рис. 3.4.5-2. Линии тока для потенциального течения вблизи критической точки.

правлении, противоположном положительному направлению  $z_2$ , отклоняется плоскостью  $z_2=0$ , а затем движется в положительном и отрицательном направлениях  $z_1$ . Это течение имеет плоскость симметрии при  $z_1=0$ , вдоль которой компонента скорости  $z_1$  равна нулю. Поскольку в начале координат скорость равна нулю, эта точка называется критической точкой. В окрестности этой точки функция тока также задается уравнением (3.4.5-12); соответствующие линии тока изображены на рис. 3.4.5-2 для различных значений  $\phi/k$ . В § 3.5.5 мы еще раз сделаем анализ двумерного течения в критической точке с учетом вязкостных эффектов.

### 3.5. ТЕОРИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

**3.5.1. Теория пограничного слоя для двумерного обтекания плоской пластины.** В § 3.3.1 уравнение Навье — Стокса (для несжимаемой ньютоновской жидкости при условии, что вектор внешней силы на единицу массы можно представить в виде потенциала) представлено в безразмерном виде

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\nabla \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{v}^* = - \frac{1}{N_{Re}} \nabla P^* + \frac{1}{N_{Re}} \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v}^*). \quad (3.5.1-1)$$

В этом параграфе указывалось, что для достаточно малых чисел Рейнольдса  $N_{Re}$  конвективными инерционными членами  $(\nabla \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{v}^*$  по сравнению с членами вязкости можно пренебречь. Это интуитивное утверждение, вероятно, справедливо для трехмерных течений, как, например, в вискозиметре типа конус — пластина, рассмотренном в § 3.3.2; однако подчеркивалось, что для двумерного течения оно не применимо. Поле скорости по определению двумерно, если существует некоторая прямоугольная система координат, в которой

$$v_1 = v_1(z_1, z_2), \quad v_2 = v_2(z_1, z_2), \quad v_3 = 0.$$

В § 3.4.1 предполагалось, что для достаточно больших чисел Рейнольдса членами вязкости по сравнению с конвективными членами инерции можно пренебречь. Проанализировав одно из таких решений (потенциальное течение), в § 3.4.3 мы нашли, что это решение не удовлетворяет заданным граничным условиям для тангенциальных компонент вектора скорости. Далее мы установили, что решение для потен-

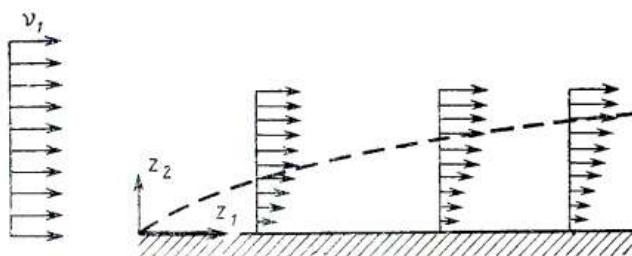


Рис. 3.5.1-1. Характер распределения скорости при обтекании плоской пластины.

циального течения показывает, что несжимаемая жидкость не будет действовать на погруженное в нее тело (кроме выталкивающей силы), что явно не согласуется с нашим повседневным опытом, и значит, пренебрегая в § 3.4.1 вязкостными эффектами по сравнению с конвективными инерционными, мы сделали ошибку.

Совсем не удивительно, что предположение о том, что в дифференциальном уравнении можно пренебречь одним членом по сравнению с другим, является иногда неверным, ибо это не имеет под собой математического основания. Целесообразно пренебречь одним членом по сравнению с другим в решении дифференциального уравнения; однако если это делается в дифференциальном уравнении, используемом для получения этого решения, дело обстоит совершенно иначе.

Учитывая изложенное выше, еще раз проанализируем задачу о течениях при больших числах Рейнольдса. Это поможет нам подготовиться к экспериментальным наблюдениям. Ограничимся обтеканием тонкой пластины. Понятия, разработанные для этого частного случая, легко обобщить на другие виды течения.

На рис. 3.5.1-1 в сильно измененном масштабе показано распределение скорости в непосредственной близости от пластины. Если рассматривать это течение как функцию числа Рейнольдса, можно увидеть, что толщина этой области замедленной скорости уменьшается с возрастанием числа Рейнольдса.

Из этих немногих доказательств ясно, что вне весьма тонкой области вблизи тела течение является по существу потенциальным. Это относится к случаю относительно тонких обтекаемых тел, как, например,

крыло. Чаще этот тонкий пограничный слой, где вязкостные эффекты весьма существенны, может оказаться «отделенным» от тела [13], и на некотором расстоянии от него могут возникать вихри. В этом случае течение на некотором расстоянии от тела является явно вращательным, а это означает, что вне пограничного слоя на образующей поверхности цилиндра оно не будет потенциальным [13].

Наверное, лучше сказать, что вне пограничного слоя вязкостными эффектами можно пренебречь. Потенциальное течение представляет собой один из частных случаев невязкого течения при заданных граничных условиях для скорости, но оно не дает однозначного решения.

Из рассмотренного выше, по-видимому, ясно, что в уравнении движения при очень больших числах Рейнольдса вязкостные эффекты так же важны, как и инерционные, по крайней мере в пограничном слое, поэтому довод, приведенный в § 3.4.1, к этой области не применим, так как он означает, что вязкостные эффекты пренебрежимо малы по сравнению с инерционными; очевидно, что этот подход возможен для течения вне пограничного слоя. Если приближение, аналогичное сделанному в § 3.4.1, используется в пограничном слое, то, чтобы предотвратить исчезновение вязкостных членов, используемые безразмерные переменные следует переопределить. Поскольку толщина пограничного слоя уменьшается с увеличением числа Рейнольдса, при обтекании тонкой пластины ее целесообразно увеличить, введя

$$z_2^{**} = (N_{Re})^a z_2^* \quad (3.5.1-2)$$

и сохранив прежние значения двух других безразмерных координат.

При определении в § 1.1.1 вектора скорости как материальной производной радиус-вектора из уравнения (3.5.1-2) вытекает довольно удачное определение безразмерной компоненты скорости  $z_2$

$$v_2^{**} = (N_{Re})^a v_2^*. \quad (3.5.1-3)$$

И наоборот, если мы потребуем, чтобы каждый член в уравнении неразрывности имел одинаковое значение

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial z_1^*} + (N_{Re})^a \frac{\partial v_2^*}{\partial z_2^{**}} + \frac{\partial v_3^*}{\partial z_3^*} = 0, \quad (3.5.1-4)$$

мы опять придем к уравнению (3.5.1-3).

Предположим, что рассматриваемая пластина имеет бесконечную ширину, так что течение можно считать двумерным:

$$v_1^* = v_1^*(z_1^*, z_2^{**}, t^*); \quad v_2^{**} = v_2^{**}(z_1^*, z_2^{**}, t^*); \quad v_3^* = 0. \quad (3.5.1-5)$$

При этих условиях компонентами безразмерного уравнения Навье—Стокса из § 3.3.1 будут:

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial z_1^*} + v_2^{**} \frac{\partial v_1^*}{\partial z_2^{**}} = \frac{1}{N_{Ru}} \frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial z_1} + \frac{1}{N_{Re}} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial^2 z_1^*} + (N_{Re})^{2a-1} \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial^2 z_2^{**}}; \quad (3.5.1-6)$$

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial v_2^{**}}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_2^{**}}{\partial z_1} + v_2^{**} \frac{\partial v_2^{**}}{\partial z_2^{**}} = - \frac{(N_{Re})^{2a}}{N_{Ru}} \frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial z_2^{**}} + \frac{1}{N_{Re}} \frac{\partial^2 v_2^{**}}{\partial^2 z_1^*} + (N_{Re})^{2a-1} \frac{\partial^2 v_2^{**}}{\partial^2 z_2^{**}} \quad (3.5.1-7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}^*}{\partial z_3^*} = 0. \quad (3.5.1-8)$$

Если при возрастании числа Рейнольдса до очень больших значений любые вязкостные члены должны быть одинакового порядка с инерционными, необходимо взять

$$a=0.5. \quad (3.5.1-9)$$

В пределе, когда число Рейнольдса стремится к бесконечности, уравнение (3.5.1-6) сводится к виду

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \cdot \frac{\partial v_1^*}{\partial z_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial z_2^*} = - \frac{1}{N_{Re}} \frac{\partial \mathcal{I}^*}{\partial z_1^*} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial z_2^*}, \quad (3.5.1-10)$$

а уравнение (3.5.1-7) принимает вид:

$$\frac{\partial \mathcal{I}^*}{\partial z_2^*} = 0. \quad (3.5.1-11)$$

Из уравнений (3.5.1-8) и (3.5.1-11) следует, что

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^*(z_1^*). \quad (3.5.1-12)$$

Итак, в плоском течении вдоль тонкой пластины уравнение неразрывности и уравнение движения соответственно сводятся к виду

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial z_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial z_2^*} = 0 \quad (3.5.1-13)$$

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \cdot \frac{\partial v_1^*}{\partial z_1^*} + v_2^* \frac{\partial v_1^*}{\partial z_2^*} = - \frac{1}{N_{Re}} \frac{\partial \mathcal{I}^*}{\partial z_1^*} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial z_2^*}. \quad (3.5.1-14)$$

Мы имеем два уравнения для трех неизвестных:  $v_1^*$ ,  $v_2^*$  и  $\mathcal{P}^*$ . К счастью, у нас еще есть некоторая не использованная ранее информация.

На кромке пограничного слоя, т. е. при  $z_2^* = \sqrt{N_{Re}} z_2^* \rightarrow \infty$ , находится кромка невязкого течения. Вопрос о том, где стыкуется решение пограничного слоя с решением для невязкого течения, был предметом обширной дискуссии [42]. Один из возможных вариантов — это считать край невязкого течения на самой поверхности, при этом учитывается вытеснение внешнего течения пограничным слоем. Часто этим незначительным эффектом пренебрегают и считают, что кромка пограничного слоя находится на стенке тела [13]; мы тоже примем этот подход. Если  $\tilde{v}_1^*$  — безразмерная  $z_1$ -компоненты скорости на плоской пластине, найденная из решения для невязкого течения, потребуем, чтобы

$$v_1^* \rightarrow \tilde{v}_1^* \text{ при } z_2^* \rightarrow \infty. \quad (3.5.1-15)$$

Не будем пытаться подобрать компоненты  $z_2$  скорости для вязкого и невязкого течений при  $z_2^* \rightarrow \infty$ . Для невязкого течения необходимо, чтобы  $\tilde{v}_2^* = 0$ , так как нормальная компонента скорости на пластине должна стремиться к нулю; однако очевидно, что  $v_2^*$  не может быть равна нулю на внешней кромке пограничного слоя. В § 3.5.2 мы нашли,

что существуют граничные условия, достаточные для анализа течения в пограничном слое, которые не требуют дополнительной информации относительно величины  $v_2^{**}$  при  $z_2^{**} \rightarrow \infty$ .

С учетом уравнения (3.5.1-12) сделаем вывод, что в уравнении (3.5.1-14)

$$-\frac{1}{N_{Ru}} \frac{d\tilde{v}^*}{dz_1^*} = -\frac{1}{N_{Ru}} \frac{d\tilde{v}^*}{dz_1^*} = \frac{1}{N_{St}} \frac{\partial \tilde{v}_1^*}{\partial t^*} + \tilde{v}_1^* \frac{\partial \tilde{v}_1^*}{\partial z_1^*}. \quad (3.5.1-16)$$

Мы можем записать это уравнение в виде

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial v_1^*}{\partial t^*} + v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial z_1^*} + v_2^{**} \frac{\partial v_1^*}{\partial z_2^{**}} = \frac{1}{N_{St}} \frac{\partial \tilde{v}_1^*}{\partial t^*} + \tilde{v}_1^* \frac{\partial \tilde{v}_1^*}{\partial z_1^*} + \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial^2 z_2^{**}}. \quad (3.5.1-17)$$

Поскольку  $\tilde{v}_1^*$  предполагалась известной аргоги, уравнения (3.5.1-13) и (3.5.1-17) решаются совместно для двух неизвестных:  $v_1^*$  и  $v_2^{**}$ . Эти уравнения обычно называются уравнениями пограничного слоя при двумерном обтекании плоской пластины.

Теория пограничного слоя является хорошо разработанной областью механики жидкостей. Желающим более подробно изучить этот предмет можно порекомендовать работы Шлихтинга [13] и Каплуна [42]. В последней рассматриваются приближения более высокого порядка.

В следующем параграфе мы доведем до решения разработанные здесь положения для случая обтекания плоской пластины.

*3.5.2. Еще раз о пограничном слое при двумерном обтекании плоской пластины.* Здесь мы рассмотрим частный случай, к которому применима теория, изложенная в предыдущем параграфе: установившееся двумерное течение несжимаемой ньютоновской жидкости вдоль плоской пластины с нулевым углом атаки.

Предположим, что поле скорости вне пограничного слоя можно представить с помощью потенциала, как показано на рис. 3.5.1-1. Вытеснением потенциального течения пограничным слоем и тонкой пластиной пренебрегаем. Следовательно, поле скорости вне пограничного слоя является постоянным по значению и направлению, совпадающему с положительным направлением  $z_1$ .

Из § 3.5.1 следует, что уравнения, из решения которых находится распределение скорости в пограничном слое, имеют вид:

$$\frac{\partial v_1^*}{\partial z_1^*} + \frac{\partial v_2^{**}}{\partial z_2^{**}} = 0 \quad (3.5.2-1)$$

и

$$v_1^* \frac{\partial v_1^*}{\partial z_1^*} + v_2^{**} \frac{\partial v_1^*}{\partial z_2^{**}} = \frac{\partial^2 v_1^*}{\partial^2 z_2^{**}}. \quad (3.5.2-2)$$

Соответствующими граничными условиями являются:

$$v_1^* = v_2^{**} = 0 \text{ при } z_2^{**} = 0 \quad (3.5.2-3)$$

и

$$v_1^* \rightarrow 1 \text{ при } z_2^{**} \rightarrow \infty. \quad (3.5.2-4)$$

Здесь

$$v^*_1 \equiv \frac{v_1}{\tilde{v}_1}; \quad v_2^{**} \equiv \sqrt{N_{Re}} \frac{v_2}{\tilde{v}_1}, \quad z_1^{**} \equiv \frac{z_1}{L}; \quad z_2^{**} \equiv \sqrt{N_{Pe}} \frac{z_2}{L}, \quad (3.5.2-5)$$

где  $L$  — длина пластины, а

$$N_{Re} \equiv \frac{\tilde{v}_1 L \rho}{\mu}. \quad (3.5.2-6)$$

Позднее мы заметим, что величина  $L$  выпадает из решения, что согласуется с нашим интуитивным предположением о том, что полученное решение должно быть справедливо для полубесконечной плоской пластины.

Уравнение неразрывности (3.5.2-1) тождественно удовлетворяется, если выразить компоненты скорости через функцию тока, как предложено в § 1.3.6 и 1.3.7. Обратившись к табл. 2.5.2-1, введем безразмерную функцию тока  $\psi$ , потребовав:

$$v^*_1 \equiv \frac{\partial \psi}{\partial z_2^{**}} \quad (3.5.2-7)$$

и

$$v_2^{**} = - \frac{\partial \psi}{\partial z_1^{**}}. \quad (3.5.2-8)$$

Введя функцию тока в уравнение (3.5.2-2), получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_2^{**}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_1^{**} \partial z_2^{**}} - \frac{\partial \psi}{\partial z_1^{**}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 z_2^{**}} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial^3 z_2^{**}}. \quad (3.5.2-9)$$

Теперь необходимо решить дифференциальное уравнение в частных производных (3.5.2-9) для  $\psi$ . Иногда в подобных случаях с его помощью можно сделать замену независимых и зависимых переменных для того, чтобы преобразовать дифференциальное уравнение в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение. Например, если мы при этом постулируем:

$$\psi = \sqrt{z_1^{**}} f(\eta), \quad (3.5.2-10)$$

где

$$\eta \equiv \frac{z_2^{**}}{\sqrt{z_1^{**}}}, \quad (3.5.2-11)$$

то уравнение (3.5.2-9) преобразуется к виду

$$ff'' + 2f''' = 0. \quad (3.5.2-12)$$

Штрихами обозначено дифференцирование по  $\eta$ . Границные условия (3.5.2-3) и (3.5.2-4) можно представить в виде

$$f = f' \text{ при } \eta = 0 \quad (3.5.2-13)$$

и

$$f' \rightarrow 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (3.5.2-14)$$

Заметим, что в результате такой замены переменных  $L$  выпадает из решения. Как предполагалось ранее, этого следовало ожидать, так как рассматриваемая геометрия не имеет своей собственной характерной длины.

Итак, математическая задача полностью решена, так как уравнение (3.5.2-12) является обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка, разрешимым для граничных условий (3.5.2-13) и (3.5.2-14). Следует отметить еще, что мы ничего не говорили о  $v^{**}_2$  при  $z^{**}_2 \rightarrow \infty$ ;  $v^{**}_2$  не равна нулю по мере приближения к кромке пограничного слоя [13] и определяется другими условиями, налагаемыми на течение.

Уравнение (3.5.2-12) значительно проще уравнения (3.5.2-9), но оно все-таки нелинейно. Общее решение в замкнутом виде невозможно. Впервые задача была решена Блазиусом [50], хотя одно из наиболее точных решений приведено в работе [51]. Подробное сравнение этого решения с имеющимися экспериментальными данными проведено Шлихтингом [13]; здесь достаточно указать на их отличное совпадение.

*3.5.3. Теория пограничного слоя для двумерного обтекания искривленной стенки.* В § 3.5.1 мы рассматривали двумерное обтекание плоской стенки. Установлено, что когда число Рейнольдса стремится к бесконечности, уравнение движения может быть значительно упрощено для тонкого слоя жидкости (пограничный слой) вблизи пластины. При этом некоторыми (хотя и не всеми) вязкостными членами пренебрегалось.

В этом параграфе мы рассмотрим пограничный слой несжимаемой newtonovskoy жидкости. При двумерном обтекании искривленной стенки представляется очевидным, что в достаточно тонком пограничном слое жидкость ведет себя одинаково как в случае плоской, так и искривленной стенки. Теперь наша задача показать, в каком смысле это интуитивное предположение справедливо.

Часть этой стенки изображена на рис. 3.5.3-1. В прямоугольной системе координат уравнением для этой поверхности будет:

$$z_2 = f(z_1). \quad (3.5.3-1)$$

Для более наглядного сравнения обтекания изогнутой и плоской стенки рассмотрим эту задачу в ортогональной криволинейной системе координат, для которой

$x \equiv x^1$  — по определению длина дуги, измеряемая вдоль стенки в плоскости постоянной  $z$ ;

$y \equiv x^2$  — по определению длина дуги, измеряемая вдоль прямых, перпендикулярных стенке;

$z \equiv x^3 \equiv z_3$  — координата, перпендикулярная плоскости течения.

Под двумерным течением мы понимаем в данном случае такое течение, когда

$$\left. \begin{aligned} v_x &\equiv v_{(1)} = v_x(x, y, t); \\ v_y &\equiv v_{(2)} = v_y(x, y, t); \\ v_z &\equiv v_{(3)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.3-2)$$

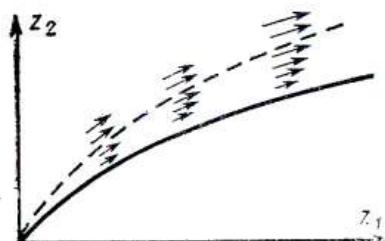


Рис. 3.5.3-1. Двумерное обтекание искривленной стенки.

При этих ограничениях можно переписать уравнение неразрывности и три компоненты уравнения движения соответственно в виде [1]

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + (1 + \kappa y) \frac{\partial v_y}{\partial y} + \kappa v_y = 0; \quad (3.5.3-3)$$

$$(1 + \kappa y) \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + (1 + \kappa y) v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \kappa v_x v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{1}{1 + \kappa y} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{v_y}{(1 + \kappa y)^2} \frac{\partial \kappa}{\partial x} + \frac{2\kappa}{1 + \kappa y} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{y}{(1 + \kappa y)^2} \frac{d\kappa}{dx} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\kappa^2}{1 + \kappa y} v_x + \kappa \frac{\partial v_x}{\partial y} + (1 + \kappa y) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right]; \quad (3.5.3-4)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{v_x}{1 + \kappa y} \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\kappa}{1 + \kappa y} v_x^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{1}{(1 + \kappa y)^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{y}{(1 + \kappa y)^3} \frac{d\kappa}{dx} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\kappa}{1 + \kappa y} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{2\kappa}{(1 + \kappa y)^2} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa y)^2} v_y - \frac{v_x}{(1 + \kappa y)^3} \frac{d\kappa}{dx} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right] \quad (3.5.3-5)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial z} = 0, \quad (3.5.3-6)$$

где

$$\kappa = \frac{-f''}{[1 + (f')^2]^{\frac{3}{2}}} = \kappa(x). \quad (3.5.3-7)$$

Здесь штрихами обозначено дифференцирование по  $z_1$ .

Кроме безразмерной скорости, безразмерного модифицированного давления и безразмерного времени из § 3.3.1 введем:

$$x^* \equiv \frac{x}{L}; \quad y^* \equiv \frac{y}{L}; \quad \kappa^* \equiv \kappa L. \quad (3.5.3-8)$$

Если рассуждения § 3.5.1 обобщить на эту геометрию, то наши результаты можно представить с помощью

$$y^{**} \equiv (N_{Re})^a y^*; \quad v_y^{**} \equiv (N_{Re})^a v_y^*. \quad (3.5.3-9)$$

Если все члены вязкости в уравнении движения — одинаковые по порядку величины с инерционными членами при очень больших числах  $N_{Re}$ , то мы снова вынуждены задать  $a=0,5$ . В этом случае уравнения (3.5.3-3) — (3.5.3-5) сводятся к виду

$$\frac{\partial v_x^{**}}{\partial x^*} + (1 + \kappa^{**} y^{**}) \frac{\partial v_y^{**}}{\partial y^{**}} + \kappa^{**} v_y^{**} = 0; \quad (3.5.3-10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_{St}} (1 + \kappa^{**} y^{**}) \frac{\partial v_x^{**}}{\partial t^*} + v_x^{**} \frac{\partial v_x^{**}}{\partial x^*} + (1 + \kappa^{**} y^{**}) v_y^{**} \frac{\partial v_x^{**}}{\partial y^{**}} + \kappa^{**} v_x^{**} v_y^{**} = \\ & = -\frac{1}{N_{Ru}} \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial x^*} - \frac{\kappa^{** 2}}{1 + \kappa^{** 2} y^{**}} v_x^{**} + \kappa^{**} \frac{\partial v_x^{**}}{\partial y^{**}} + (1 + \kappa^{**} y^{**}) \frac{\partial^2 v_x^{**}}{\partial y^{** 2}} \end{aligned} \quad (3.5.3-11)$$

и

$$\frac{x^{**}}{1 + x^{**}y^{**}} v_x^{*2} = \frac{1}{N_{Ru}} \frac{\partial \mathcal{P}^*}{\partial y^{**}}, \quad (3.5.3-12)$$

где

$$x^{**} \equiv \kappa^* N_{Re}^{-0.5}. \quad (3.5.3-13)$$

Для неподвижной стенки  $x^{**} \rightarrow 0$  в пределе, когда число Рейнольдса стремится к бесконечности. При этих условиях уравнения (3.5.3-10) — (3.5.3-12) упрощаются:

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^{**}}{\partial y^{**}} = 0; \quad (3.5.3-14)$$

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^{**} \frac{\partial v_x^*}{\partial y^{**}} = - \frac{1}{N_{Ru}} \frac{\partial \mathcal{P}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{**2}} \quad (3.5.3-15)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{P}^*}{\partial y^{**}} = 0. \quad (3.5.3-16)$$

Из уравнений (3.5.3-6) и (3.5.3-16) следует, что

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^*(x^*). \quad (3.5.3-17)$$

Можно показать, что  $-x=2H$ , где  $H$  — средняя кривизна поверхности. Величину  $-x$  можно также называть нормальной кривизной поверхности в направлении  $x$ ; она является единственной, отличной от нуля главной кривизной поверхности [52].

Из § 3.5.1 известно:

$$v_x^* \rightarrow \tilde{v}_x^* \text{ при } y^{**} \rightarrow \infty, \quad (3.5.3-18)$$

где  $\tilde{v}_x^*$  — безразмерная  $x$ -компоненты скорости на искривленной стенке из решения для невязкого течения. С учетом уравнения (3.5.3-17) можно ввести:

$$-\frac{1}{N_{Ru}} \frac{\partial \mathcal{P}^*}{\partial x^*} = -\frac{1}{N_{Ru}} \frac{d \tilde{v}_x^*}{dx^*} = v_x^* \frac{d \tilde{v}_x^*}{dx^*} \quad (3.5.3-19)$$

и записать уравнение (3.5.3-15) в виде

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^{**} \frac{\partial v_x^*}{\partial y^{**}} = v_x^* \frac{d \tilde{v}_x^*}{dx^*} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{**2}}. \quad (3.5.3-20)$$

Поскольку  $v_x^*$  заведомо известно, для двух неизвестных  $v_x^*$  и  $v_y^{**}$  необходимо совместно решить уравнения (3.5.3-14) и (3.5.3-20). Эти уравнения обычно называются уравнениями пограничного слоя для двумерного обтекания искривленной стенки. Можно предположить, что по своему виду они одинаковы с уравнениями пограничного слоя, полученными в § 3.5.1 для двумерного обтекания плоской пластины.

**3.5.4. Автомодельные решения [13].** В § 3.5.1 и 3.5.3 мы нашли, что одни и те же дифференциальные уравнения (3.5.3-14) и (3.5.3-20) определяют течение в двумерном пограничном слое как на плоской, так и на искривленной стенке. Несмотря на то что уравнение (3.5.3-20) представляет собой упрощение уравнений Навье — Стокса, оно все же является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производ-

водных. Наша цель — определить условия, при которых решение этих уравнений сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Остановимся на стационарных течениях.

В § 1.3.6 и 1.3.7 показано, что уравнение (3.5.3-14) может тождественно удовлетворяться, если компоненты скорости выразить через функцию тока. С помощью табл. 2.5.2-1 введем безразмерную функцию тока, потребовав чтобы

$$v_x^* = \partial\psi/\partial y^{**} \quad (3.5.4-1)$$

и

$$v_y^* = -\partial\psi/\partial x^*. \quad (3.5.4-2)$$

Эти выражения позволяют записать уравнение (3.5.3-20) для установившегося течения в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial y^{**}} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^* \partial y^{**}} - \frac{\partial\psi}{\partial x^*} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^{**2}} = \tilde{v}_x^* \frac{d\tilde{v}_x^*}{dx^*} + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^{**3}}. \quad (3.5.4-3)$$

Поскольку предполагается, что величина  $\tilde{v}_x^*$  заведомо известна, нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных (3.5.4-3) необходимо решить относительно  $\psi$ . В дальнейшем мы найдем, что существует несколько классов задач, для которых это уравнение можно представить в виде обыкновенного дифференциального уравнения.

Наш метод основан на введении новых независимых и зависимых переменных:

$$\eta \equiv y^{**}/g(x^*) \quad (3.5.4-4)$$

и

$$f(\eta) \equiv \psi/h(x^*). \quad (3.5.4-5)$$

Функции  $g$  и  $h$  определяются из необходимости представления уравнения (3.5.4-3) в виде обыкновенного дифференциального уравнения для  $f$  в зависимости от  $\eta$ . Уравнение (3.5.4-3) в этих переменных принимает вид:

$$f''' + g \frac{dh}{dx^*} ff'' - \left( g \frac{dh}{dx^*} - h \frac{dg}{dx^*} \right) (f')^2 + \frac{g^3}{h} \tilde{v}_x^* \frac{d\tilde{v}_x^*}{dx^*} = 0, \quad (3.5.4-6)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по  $\eta$ . Это уравнение предполагает, что  $h$  определяется из соотношения

$$g \frac{dh}{dx^*} - h \frac{dg}{dx^*} = \frac{g^3}{h} \tilde{v}_x^* \frac{d\tilde{v}_x^*}{dx^*}. \quad (3.5.4-7)$$

Это выражение легко преобразовать к виду:

$$\frac{d}{dx^*} \left( \frac{h^2}{g^2} \right) = \frac{d\tilde{v}_x^*}{dx^*}, \quad (3.5.4-8)$$

откуда

$$h \equiv g \tilde{v}_x^*. \quad (3.5.4-9)$$

Отсюда уравнение (3.5.4-6) можно представить как

$$f''' + \alpha f'' + \beta [1 - (f')^2] = 0, \quad (3.5.4-10)$$

где

$$\alpha \equiv g \frac{d}{dx^*} (g \tilde{v}_x^*) \quad (3.5.4-11)$$

$$\beta \equiv g^2 \frac{d\tilde{v}_x^*}{dx^*}. \quad (3.5.4-12)$$

Для того чтобы  $f$  была функцией  $x^*$  при ее независимости от  $\eta$ , необходимо потребовать, чтобы  $\alpha$  и  $\beta$  не зависели от  $x^*$ . Эти два требования определяют функции  $g$  и  $\tilde{v}_x^*$ . При нахождении функции  $\tilde{v}_x^*$  указывается та геометрия, для которой уравнение (3.5.4-3) заменой переменных по уравнениям (3.5.4-4) и (3.5.4-5) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Случай 1:  $2\alpha - \beta \neq 0$ . Из уравнений (3.5.4-11) и (3.5.4-12) имеем:

$$2\alpha - \beta = \frac{d}{dx^*} (g^2 \tilde{v}_x^*) \quad (3.5.4-13)$$

$$\alpha - \beta = g \tilde{v}_x^* \frac{dg}{dx^*}. \quad (3.5.4-14)$$

Это последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{\alpha - \beta}{\tilde{v}_x^*} \frac{d\tilde{v}_x^*}{dx^*} = g \frac{d\tilde{v}_x^*}{dx^*} \frac{dg}{dx^*} = \frac{\beta}{g} \frac{dg}{dx^*}, \quad (3.5.4-15)$$

и, проинтегрировав его, получим:

$$\tilde{v}_x^{*\alpha-\beta} = K g^\beta, \quad (3.5.4-16)$$

где  $K$  — постоянная интегрирования. Можно также проинтегрировать и уравнение (3.5.4-13):

$$(2\alpha - \beta) x^* = g^2 \tilde{v}_x^* + C. \quad (3.5.4-17)$$

Здесь  $C$  — постоянная интегрирования. Исключив  $g$  из (3.5.4-16) и (3.5.4-17), получим:

$$(2\alpha - \beta) x^* = \frac{(\tilde{v}_x^*)^{(2\alpha-\beta)/\beta}}{K^{2/\beta}} + C. \quad (3.5.4-18)$$

Если предположить, что  $2\alpha - \beta \neq 0$ , уравнение (3.5.4-18) можно разрешить относительно  $\tilde{v}_x^*$ :

$$\tilde{v}_x^* = K^{2/(2\alpha-\beta)} [(2\alpha - \beta) x^* - C]^{3/(2\alpha-\beta)}. \quad (3.5.4-19)$$

Соответствующее выражение для  $g$  получим, исключив  $\tilde{v}_x^*$  из (3.5.4-16) — (3.5.4-19)

$$g = K^{-[1/(2\alpha-\beta)]} [(2\alpha - \beta) x^* - C]^{(\alpha-\beta)/(2\alpha-\beta)}. \quad (3.5.4-20)$$

Случай 1а:  $\alpha \neq 0$ ,  $2\alpha - \beta \neq 0$ . Из уравнения (3.5.4-19) ясно, что конечный результат не зависит от любого общего множителя  $\alpha$  и  $\beta$ , поскольку любой общий множитель можно включить в  $g$ . Следовательно, можно предположить, что  $\alpha \neq 0$ , и взять  $\alpha = 1$  без потери общности. В результате уравнения (3.5.4-19) и (3.5.4-20) принимают вид:

$$\tilde{v}_x^* = K^{2/(2-\beta)} [(2 - \beta) x^* - C]^{3/(2-\beta)} \quad (3.5.4-21)$$

$$g = K^{-[1/(2-\beta)]} [(2 - \beta) x^* - C]^{(1-\beta)/(2-\beta)}. \quad (3.5.4-22)$$

Если

$$m = \frac{\beta}{2-\beta}, \quad (3.5.4-23)$$

то уравнение (3.5.4-21) и (3.5.4-22) принимают более простой вид:

$$\tilde{v}_x^* = K^{1+m} \left[ \left( \frac{2}{1+m} \right) x^* - C \right]^m \quad (3.5.4-24)$$

и

$$g = K^{1-(1+m)/2} \left[ \left( \frac{2}{1+m} \right) x^* - C \right]^{(1-m)/2}. \quad (3.5.4-25)$$

При  $C=0$  уравнение (3.5.4-24) описывает распределение скорости потенциального течения на стенке вблизи переднего края клина, внутренний угол которого равен [13]:

$$\pi\beta = \frac{2\pi m}{1+m}. \quad (3.5.4-26)$$

Для  $\beta=m=1$  мы имеем двумерное течение вблизи критической точки, которое обсуждается далее в § 3.5.5. При  $\beta=m=0$  имеет место обтекание плоской пластины с нулевым углом атаки. Все имеющиеся решения для обтекания клина приведены в работе [13].

Случай 16:  $a=0$ ,  $2a-\beta \neq 0$ . Когда  $a=0$ , уравнения (3.5.4-19) и (3.5.4-20) принимают вид:

$$\tilde{v}_x^* = K^{-(2/\beta)} (-\beta x^* - C)^{-1} \quad (3.5.4-27)$$

и

$$g = K^{1/\beta} (-\beta x^* - C). \quad (3.5.4-28)$$

Удобно взять  $\beta=\pm 1$  в зависимости от знака  $d\tilde{v}_x^*/dx^*$  в уравнении (3.5.4-12).

Когда  $C=0$ , уравнение (3.5.4-27) может описывать течение в конфузоре или диффузоре с плоскими стенками. Для конфузора величина  $\tilde{v}_x^*$  отрицательна, а  $d\tilde{v}_x^*/dx^*$  положительна; из уравнений (3.5.4-12) и (3.5.4-27) необходимо, чтобы  $\beta=+1$ . Для диффузора величина  $\tilde{v}_x^*$  положительна, а  $d\tilde{v}_x^*/dx^*$  отрицательна;  $\beta=-1$ . Течение в конфузоре рассматривается в § 3.5.6.

Уравнения Навье — Стокса в замкнутом виде решены для двумерного течения в конфузоре и диффузоре с плоскими стенками. Гольдштейн [1] и Шлихтинг [13] провели интересный анализ полученных решений.

Случай 2:  $2a-\beta=0$ . Когда  $2a-\beta=0$ , из уравнения (3.5.4-13) следует, что

$$\tilde{v}_x^* = K/g^2, \quad (3.5.4-29)$$

где  $K$  — постоянная интегрирования. Следовательно, уравнение (3.5.4-13) сводится к виду:

$$-a = \frac{K}{g} \frac{dg}{dx^*}, \quad (3.5.4-30)$$

после интегрирования которого получим:

$$g = \exp \left( -\frac{a}{K} x^* + C \right). \quad (3.5.4-31)$$

Здесь  $C$  обозначает другую постоянную интегрирования. С помощью уравнения (3.5.4-31) выражение (3.5.4-29) можно представить в виде

$$\tilde{v}_x^* = \frac{K}{\exp(-[2\alpha/K]x^* + 2C)}. \quad (3.5.4-32)$$

*3.5.5. Двумерное течение вблизи критической точки.* В § 3.5.4 мы рассмотрели класс задач двумерных течений, для которых решения уравнений пограничного слоя находятся методом подобия. Двумерное течение вблизи критической точки на плоскости  $z_2=0$  представляет частный случай из этого класса (линии тока потенциального течения для него показаны на рис. 3.4.5-2). Течение приближается к плоскости  $z_2$  по направлению, противоположному положительному направлению  $z_2$ , отклоняется плоскостью  $z_2=0$ , а затем движется в положительном и отрицательном направлениях  $z_1$ . Это течение имеет плоскость симметрии  $z_1=0$ , на которой компонента скорости  $z_1$  равна нулю.

В этом параграфе мы будем искать решение уравнения Навье — Стокса в замкнутом виде для двумерного течения вблизи критической точки на небольшом расстоянии от его начала. Мы найдем, что это решение идентично решению, полученному при использовании уравнений пограничного слоя для двумерного случая, рассматриваемого в § 3.5.4.

Затем мы будем искать распределение скорости, удовлетворяющее уравнению Навье — Стокса в замкнутом виде:

$$\rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} = -\nabla \mathcal{P} + \mu \operatorname{div}(\nabla \mathbf{v}), \quad (3.5.5-1)$$

а также уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.5.5-2)$$

Потребуем (см. рис. 3.4.5-2), чтобы на достаточном расстоянии от плоскости  $z_2=0$  это решение давало те же компоненты скорости  $z_1$ , которые мы нашли для соответствующего двумерного потенциального течения:

$$v_1 \rightarrow kz_1 + \dots \text{при } z_2 \rightarrow \infty. \quad (3.5.5-3)$$

Распределение скорости также должно удовлетворять условию отсутствия скольжения

$$\mathbf{v} = 0 \text{ при } z_2 = 0. \quad (3.5.5-4)$$

Для соответствующего течения в пограничном слое граничные условия аналогичны.

Поскольку мы рассматриваем двумерное течение, будем иметь только две отличные от нуля компоненты скорости:

$$v_1 = v_1(z_1, z_2); v_2 = v_2(z_1, z_2); v_3 = 0. \quad (3.5.5-5)$$

Введением функции тока уравнение (3.5.5-2) удовлетворяется автоматически. Из табл. 2.5.2-1 имеем:

$$v_1 = \partial \psi / \partial z_2 \quad (3.5.5-6)$$

и

$$v_2 = -\partial \psi / \partial z_1. \quad (3.5.5-7)$$

Единственную, отличную от нуля компоненту ротора из уравнения (3.5.5-1) можно выразить через эту функцию тока (см. табл. 2.5.2-1)

$$-\frac{\partial(\psi, E^2\psi)}{\partial(z_1, z_2)} = vE^i\psi. \quad (3.5.5-8)$$

Границные условия (3.5.5-3) и (3.5.5-4) принимают вид:

$$\partial\psi/\partial z_2 \rightarrow kz_1 + \dots \text{ при } z_2 \rightarrow \infty \quad (3.5.5-9)$$

и

$$\frac{\partial\psi}{\partial z_1} = \frac{\partial\psi}{\partial z_2} = 0 \text{ при } z_2 = 0. \quad (3.5.5-10)$$

Из уравнения (3.5.5-9) следует, что решение ищется в виде

$$\psi = z_1 f(z_2). \quad (3.5.5-11)$$

При таком допущении уравнение (3.5.5-8) сводится к

$$-ff''' + f'f'' = vf^{IV}, \quad (3.5.5-12)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по  $z_2$ . В результате интегрирования получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz_2} [(f')^2 - ff'' - vf'''] &= 0; \\ (f')^2 - ff'' - vf''' &= C. \end{aligned} \quad (3.5.5-13)$$

Здесь  $C$  — постоянная интегрирования.

Уравнение (3.5.5-13) можно упростить заменой переменных. Пусть

$$\varphi = f/A \quad (3.5.5-14)$$

и

$$\eta \equiv az_2, \quad (3.5.5-15)$$

где  $A$  и  $a$  — постоянные. Уравнение (3.5.5-13) принимает вид:

$$a^2 A^2 [(\varphi')^2 - \varphi\varphi''] - vAa^3\varphi''' = C. \quad (3.5.5-16)$$

Штрихами здесь обозначено дифференцирование по  $\eta$ .

Определим  $A$  и  $a$  так, что

$$a^2 A^2 = C \quad (3.5.5-17)$$

и

$$vAa^3 = C. \quad (3.5.5-18)$$

В результате имеем:

$$A \equiv C^{1/4} v^{1/2}; \quad (3.5.5-19)$$

$$a \equiv C^{1/4} v^{-1/2}, \quad (3.5.5-20)$$

а уравнение (3.5.5-16) принимает вид:

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' - (\varphi')^2 + 1 = 0. \quad (3.5.5-21)$$

Решение последнего уравнения необходимо найти при граничных условиях (3.5.5-9) и (3.5.5-10), которые теперь можно представить в виде

$$\varphi' \rightarrow \frac{k}{C^{1/2}} = 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty \quad (3.5.5-22)$$

$$\varphi = \varphi' = 0 \text{ при } \eta = 0. \quad (3.5.5-23)$$

При выводе уравнения (3.5.5-22) было удобно определить постоянные интегрирования в уравнении (3.5.5-13) как

$$C = k^2. \quad (3.5.5-24)$$

Хейменц [53] и Хоуарт [54] решили эту задачу численно. Решение Хоуарта показано на рис. 3.5.5-1.

В § 3.5.4 установлено, что решение уравнений пограничного слоя для двумерного течения вблизи критической точки, недалеко от его начала, также определяется уравнением (3.5.5-21) (в случае 1а  $\alpha = \beta = 1$ ) с граничными условиями (3.5.5-23) и (3.5.5-24). Это означает, что решение уравнений пограничного слоя для этого частного случая течения

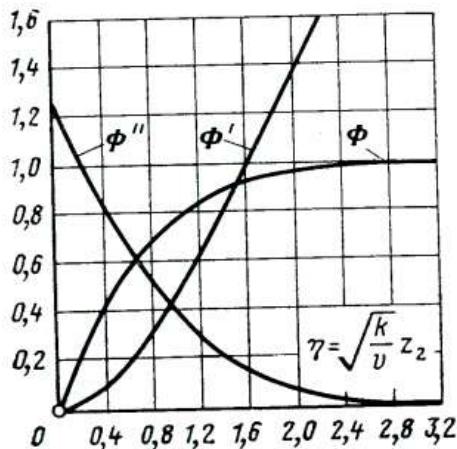


Рис. 3.5.5-1. Распределение скорости для двумерного течения вблизи критической точки на небольшом расстоянии от начала течения [13].

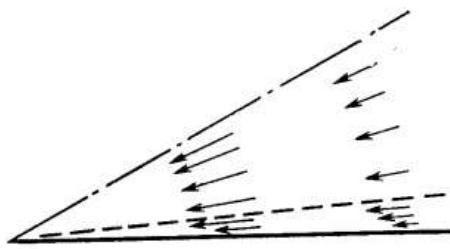


Рис. 3.5.6-1. Пристенное течение в конфузоре.

также представляет собой решение полного уравнения Навье — Стокса.

**3.5.6. Течение в конфузоре.** Рассмотрим устойчивое течение несжимаемой ньютоновской жидкости в конфузоре. Конфузор представляет собой две плоские стенки, ориентированные таким образом, что они образуют поверхности с постоянным углом  $\theta$  в цилиндрических координатах; жидкость движется в отрицательном направлении  $r$ . Мы четко представляем себе, что наше рассмотрение относится к реальному каналу конечной длины. По этой причине пределы  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$  не рассматриваются. Конечные эффекты не учитываются.

Из анализа известно, что

$$v_r^* = -1/r^*, \quad v_\theta^* = v_z^* = 0. \quad (3.5.6-1)$$

В этом параграфе мы будем решать задачу для соответствующего течения в пограничном слое, показанного на рис. 3.5.6-1. Мы взяли этот частный случай течения потому, что он представляет собой редкую возможность найти аналитическое решение уравнений пограничного слоя. Используя обозначения § 3.5.3, с помощью уравнения (3.5.6-1) для

потенциального течения можно определить условие, которому должен удовлетворять соответствующий пограничный слой на бесконечности:

$$\tilde{v}_x^* \rightarrow -1/x^* \text{ при } y^{**} \rightarrow \infty. \quad (3.5.6-2)$$

В § 3.5.4 (случай 1б) указывалось, что течение пограничного слоя в конфузоре представляет собой случай, для которого уравнения пограничного слоя можно упростить с помощью метода подобия. Выразив безразмерные компоненты скорости через функцию тока  $\psi$

$$v_x^* = \partial\psi/\partial y^{**}; \quad (3.5.6-3)$$

$$v_y^* = -\partial\psi/\partial x^*, \quad (3.5.6-4)$$

найдем, что

$$\psi = h(x^*) f(\eta) = g v_x^* f(\eta) = K^{-1} f(\eta), \quad (3.5.6-5)$$

где  $f=f(\eta)$  — решение уравнения

$$f''' - (f')^2 + 1 = 0. \quad (3.5.6-6)$$

В этом выражении штрихами обозначено дифференцирование по  $\eta$ . Сравнивая уравнение (3.5.6-2) с соответствующим выражением для  $\tilde{v}_x^*$  из § 3.5.4, находим, что постоянная  $K$  в уравнении (3.5.6-5) должна быть либо  $+1$ , либо  $-1$ . Определим переменную  $\eta$ :

$$\eta \equiv \frac{y^{**}}{g} = -\frac{y^{**}}{K x^*} = \frac{y^{**}}{x^*}, \quad (3.5.6-7)$$

где

$$K \equiv -1. \quad (3.5.6-8)$$

Кроме уравнения (3.5.6-2) граничными условиями, удовлетворяющими этому течению пограничного слоя, будут:

$$v_x^* = v_y^* = 0 \text{ при } y^{**} = 0. \quad (3.5.6-9)$$

Из уравнений (3.5.6-3), (3.5.6-4), (3.5.6-5), (3.5.6-7) и (3.5.6-8) находим:

$$v_x^* = -f'/x^* \quad (3.5.6-10)$$

$$v_y^* = -f'\eta/x^*. \quad (3.5.6-11)$$

Следовательно, граничные условия (3.5.6-2) и (3.5.6-9) необходимо представить в виде

$$f' \rightarrow 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty \quad (3.5.6-12)$$

и

$$f' = 0 \text{ при } \eta = 0. \quad (3.5.6-13)$$

Умножив уравнение (3.5.6-6) на  $2f''$ , можно проинтегрировать его еще раз

$$\left. \begin{aligned} 2f''f''' + 2f''[1 - (f')^2] &= 0; \\ \frac{d}{d\eta} [(f'')^2 - 2/3(1 - f')^2(f' + 2)] &= 0; \\ (f'')^2 - 2/3(1 - f')^2(f' + 2) &= a. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.6-14)$$

Здесь  $a$  — постоянная интегрирования. Если нас прежде всего интересует распределение скорости, последнее уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разделяемое относительно  $f'$ , с двумя граничными условиями (3.5.6-12) и (3.5.6-13). Эта задача, сформулированная в таком виде, математически корректна и не представляет особых трудностей при получении численного решения для  $f'$ .

Однако можно найти также и аналитическое выражение для  $f'$ . Из рассуждений по поводу граничных условий в § 3.5.1 и 3.5.3 следует, что

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial y^{**}} = - \frac{f''}{x^{*2}} \rightarrow 0 \text{ при } y^{**} \rightarrow \infty \quad (3.5.6-15)$$

или

$$f'' \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (3.5.6-16)$$

Из уравнений (3.5.6-12) и (3.5.6-16) следует, что

$$a=0, \quad (3.5.6-17)$$

это позволяет нам записать уравнения (3.5.6-14) в виде

$$\frac{f''}{V^2(1-f') \sqrt{\frac{1}{3}f' + \frac{2}{3}}} = 1; \sqrt{2} \frac{d}{d\eta} \left( \operatorname{th}^{-1} \sqrt{\frac{1}{3}f' + \frac{2}{3}} \right) = 1. \quad (3.5.6-18)$$

Это последнее можно проинтегрировать, используя граничные условия (3.5.6-13):

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \int_{f'=0}^{f'} d \left( \operatorname{th}^{-1} \sqrt{\frac{1}{3}f' + \frac{2}{3}} \right) &= \int_0^\eta d\eta; \\ \sqrt{2} \left( \operatorname{th}^{-1} \sqrt{\frac{1}{3}f' + \frac{2}{3}} - \operatorname{th}^{-1} \sqrt{2/3} \right) &= \eta. \end{aligned} \quad (3.5.6-19)$$

Это уравнение удовлетворяет граничному условию (3.5.6-12), что и требовалось доказать.

Повторяем, уравнение (3.5.6-16) не следует рассматривать как граничное условие для этой задачи. Как и предполагалось, это условие будет полезным при нахождении аналитического решения уравнений (3.5.6-14).

Уравнение (3.5.6-19) можно разрешить относительно  $f'$ :

$$v_x^* = f' = 3 \operatorname{th}^2(\eta/\sqrt{2/3}) - 1,146. \quad (3.5.6-20)$$

При получении этого выражения учитывалось, что  $\operatorname{th}^{-1} \sqrt{2/3} = 1,146$ . Уравнение (3.5.6-20) представлено на рис. 3.5.6-2.

*3.5.7. Теория пограничного слоя при обтекании тела вращения.* В § 3.5.1 и 3.5.3 рассматривалось двумерное оптекание плоской пластины и искривленной стенки. Установлено, что в обоих случаях пограничный слой можно описать одной и той же системой уравнений.

Рассмотрим пограничный слой ньютоновской жидкости при обтекании тела вращения. В некотором смысле можно предполагать, что по-

введение жидкости в достаточно тонком пограничном слое на теле вращения аналогично случаю обтекания плоской стенки. Попытаемся определить, насколько это интуитивное предположение справедливо.

На рис. 3.5.7-1 показано сечение по оси симметрии тела. Уравнением осесимметричной поверхности в цилиндрических координатах будет:

$$r=f(z). \quad (3.5.7-1)$$

Для лучшего сравнения обтекания тела вращения с обтеканием плоской пластины рассмотрим эту задачу в ортогональной криволинейной системе координат, где

$x \equiv x^3$  — длина дуги, измеряемая вдоль стенки (в направлении течения) в плоскости с постоянным углом  $\theta$ ;

$y \equiv x^1$  — длина дуги, измеренная вдоль прямых линий, перпендикулярных стенке;

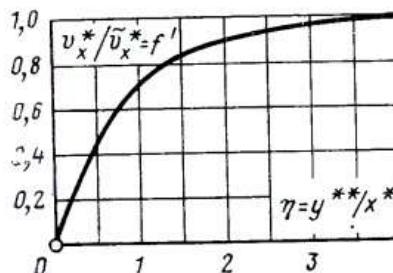


Рис. 3.5.6-2. Распределение скорости в пограничном слое воздуха в конфузоре [13].

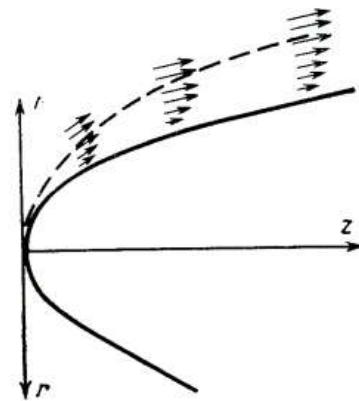


Рис. 3.5.7-1. Обтекание тела вращения.

$\theta \equiv x^2$  — азимутальная цилиндрическая координата, измеряемая вокруг оси тела.

Форма стенки предполагает, что

$$v_x \equiv v_{<3>} = v_x(x, y, t); v_y \equiv v_{<1>} = v_y(x, y, t); v_\theta \equiv v_{<2>} = 0. \quad (3.5.7-2)$$

При этих ограничениях уравнение неразрывности и три компоненты уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{1}{1+xy} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{1+xy} \frac{\partial}{\partial y} [(1+xy) v_y] + \frac{f'}{g} v_x + \frac{1}{g} v_y = 0; \quad (3.5.7-3)$$

$$(1+xy) \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + (1+xy) v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \kappa v_x v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{1}{1+xy} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{v_y}{(1+xy)^2} \frac{d\zeta}{dx} + \frac{2x}{1+xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{y}{(1+xy)^2} \frac{dx}{dx} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \right. \\ \left. - \frac{x^2}{1+xy} v_x + \kappa \frac{\partial v_x}{\partial y} + (1+xy) \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - f' \frac{(1+xy)}{g^2} v_y + \frac{x f'}{g} [1 + (f')^2]^{0.5} v_y + \frac{f'}{g} \times \right. \\ \left. \times [1 + (f')^2]^{0.5} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1+xy}{g} \frac{\partial v_x}{\partial y} \right\}; \quad (3.5.7-4)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{v_x}{1+xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{x}{1+xy} v^2_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial y} + \\
& + \frac{\mu}{\rho} \left\{ \frac{1}{(1+xy)^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{y}{(1+xy)^3} \frac{dv}{dx} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{x}{1+xy} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \right. \\
& - \frac{2x}{(1+xy)^2} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{x^2}{(1+xy)^2} v_y - \frac{v_x}{(1+xy)^3} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} - \frac{v_y}{g^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \\
& \left. + \frac{f'}{(1+xy)g} [1+(f')^2]^{0.5} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - xv_x \right) \right\}; \quad (3.5.7-5)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta} = 0, \quad (3.5.7-6)$$

где

$$\kappa \equiv \frac{-f''}{[1+(f')^2]^{3/2}} = \kappa(x) \quad (3.5.7-7)$$

и

$$g \equiv f[1+(f')^2]^{3/2} + y. \quad (3.5.7-8)$$

Штрихами обозначено дифференцирование по цилиндрической координате  $z$ , измеряемой вдоль оси вращения.

Кроме безразмерной скорости, безразмерного модифицированного давления и безразмерного времени из § 3.3.1, введем величины:

$$x^* \equiv \frac{x}{L}; \quad y^* \equiv \frac{y}{L}; \quad f^* \equiv \frac{f}{L}; \quad \kappa^* \equiv \kappa L. \quad (3.5.7-9)$$

Используя рассуждения § 3.5.1 для этой геометрии, мы можем представить полученный результат через

$$y^{**} \equiv (N_{Re})^a y^* \text{ и } v_y^{**} \equiv (N_{Re})^a v_y^*. \quad (3.5.7-10)$$

Для того чтобы некоторые члены вязкости в уравнении движения имели тот же порядок, что и инерционные, когда число Рейнольдса  $N_{Re}$  стремится к бесконечности, необходимо опять принять  $a=1/2$ . Тогда для чисел Рейнольдса, стремящихся к бесконечности, уравнения (3.5.3-3) — (3.5.3-5) сводятся к виду

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1+\kappa^{**}y^{**}} \frac{\partial v_x^{**}}{\partial x^*} + \frac{1}{1+\kappa^{**}y^{**}} \frac{\partial}{\partial y^{**}} [(1+\kappa^{**}y^{**}) v_y^{**}] + \\
& + \frac{f^{**'}}{f^*[1+(f')^2]^{1/2}} v_x^{**} = 0; \quad (3.5.7-11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N_{St}} (1+\kappa^{**}y^{**}) \frac{\partial v_x^{**}}{\partial t^*} + v_x^{**} \frac{\partial v_x^{**}}{\partial x^*} + (1+\kappa^{**}y^{**}) v_y^{**} \frac{\partial v_x^{**}}{\partial y^{**}} + \\
& + \kappa^{**} v_x^{**} v_y^{**} = - \frac{1}{N_{Ru}} \frac{\partial \mathcal{J}^{**}}{\partial x^*} - \frac{\kappa^{**2}}{1+\kappa^{**}y^{**}} v_x^{**} + \kappa^{**} \frac{\partial v_x^{**}}{\partial y^{**}} + \\
& + (1+\kappa^{**}y^{**}) \frac{\partial^2 v_x^{**}}{\partial y^{**2}}; \quad (3.5.7-12)
\end{aligned}$$

$$\frac{\kappa^{**}}{1+\kappa^{**}y^{**}} v_x^{**2} = \frac{1}{N_{Ru}} \frac{\partial \mathcal{J}^{**}}{\partial y^{**}}, \quad (3.5.7-13)$$

где

$$\kappa^{**} \equiv \kappa^* N_{Re}^{-1/2}. \quad (3.5.7-14)$$

Штрихами в уравнении (3.5.7-11) обозначено дифференцирование по  $z^*$ .

Для конфигурации с неподвижными стенками  $\kappa^{**} \rightarrow 0$  в пределе, когда число Рейнольдса стремится к бесконечности. При этих условиях уравнения (3.5.7-11) — (3.5.7-13) упрощаются:

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^{**}} + \frac{f''}{f^* |1 + (f'')^2|^{1/2}} v_x^* = 0; \quad (3.5.7-15)$$

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^{**}} = - \frac{1}{N_{Re}} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{**2}} \quad (3.5.7-16)$$

и

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial y^{**}} = 0. \quad (3.5.7-17)$$

Поскольку

$$dz^*/dx^* = [1 + (f'')^2]^{-1/2}, \quad (3.5.7-18)$$

уравнение (3.5.7-15) можно записать в виде

$$\frac{\partial(f^* v_x^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(f^* v_y^*)}{\partial y^{**}} = 0. \quad (3.5.7-19)$$

Из уравнений (3.5.7-6) и (3.5.7-17) следует, что

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^*(x^*). \quad (3.5.7-20)$$

Величину  $\kappa$  можно назвать нормальной кривизной поверхности в направлении  $x$ ; кроме того, она является главной кривизной поверхности [52].

Как предполагалось в § 3.5.1,

$$v_x^* \rightarrow \tilde{v}_x^* \text{ при } y^{**} \rightarrow \infty, \quad (3.5.7-21)$$

где  $\tilde{v}_x^*$  — безразмерная компонента скорости на искривленной стенке из решения невязкого течения.

Из уравнения (3.5.7-20) сделаем вывод, что

$$-\frac{1}{N_{Re}} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} = -\frac{1}{N_{Re}} \frac{d \tilde{\varphi}^*}{\partial x^*} = \tilde{v}_x^* \frac{d \tilde{v}_x^*}{\partial x^*}, \quad (3.5.7-22)$$

и можем записать уравнение (3.5.7-16) в виде

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^{**}} = \tilde{v}_x^* \frac{d \tilde{v}_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{**2}}. \quad (3.5.7-23)$$

Поскольку ранее предполагалось, что  $\tilde{v}_x^*$  известна заранее, необходимо решить уравнения (3.5.7-19) и (3.5.7-23) совместно для двух неизвестных  $v_x^*$  и  $v_y^*$ . Эти уравнения можно определить как уравнения пограничного слоя для обтекания тела вращения.

Манглер предложил замену переменных. Введем:

$$\bar{x} \equiv \int_0^{x^*} f'^2 dx'; \quad (3.5.7-24)$$

$$\bar{y}^* \equiv f^* y^{**}; \quad (3.5.7-25)$$

$$\bar{t}^* \equiv f'^2 t^* \quad (3.5.7-26)$$

$$\bar{v}_y^{**} = \frac{1}{f^*} v_y^{**} + \frac{f^{*'}}{f^{*2}[1+(f^{*'})^2]^{1/2}} y^{**} v_x^*. \quad (3.5.7-27)$$

При таких переменных уравнения (3.5.7-19) и (3.5.7-23) примут вид:

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \bar{v}_y^{**}}{\partial y^{**}} = 0 \quad (3.5.7-28)$$

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial v_x^*}{\partial t^*} + v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \bar{v}_y^{**} \frac{\partial v_x^*}{\partial y^{**}} = \tilde{v}_x^* \frac{d \tilde{v}_x^*}{dx^*} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{**2}}. \quad (3.5.7-29)$$

Эти уравнения имеют такой же вид, как и уравнения пограничного слоя в § 3.5.1 и 3.5.3. Их можно назвать уравнениями пограничного слоя Манглера для обтекания тела вращения. Наше предположение подтвердилось: математические задачи для обтекания тел вращения и двумерного обтекания искривленной стенки имеют одинаковую форму.

#### ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНОГО УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕНОСА ИМПУЛЬСА

Во введении к гл. 3 упоминалось, что не всегда удается получить решение каждой задачи непосредственно из решения дифференциального уравнения неразрывности и первого закона Коши. Иногда это невозможно из-за сложности этих задач. В некоторых случаях такое решение является настолько трудоемким, что конечный результат не соответствует затраченным усилиям.

В большинстве задач механики жидкостей наибольший интерес представляют интегральные величины, например средняя скорость, расход жидкости, сила, действующая на поверхности. Поэтому в этой книге отводится целая глава для обсуждения методов решения задач, в которых независимые переменные являются интегральными или средне-интегральными величинами.

Начнем с рассмотрения турбулентности, используя усредненные по времени переменные. Затем проанализируем ряд задач, которые обычно решаются с помощью усредненных по площади переменных. Для неупорядоченных структур, связанных с течением в пористых средах, используются локально усредненные переменные. В конце главы приводятся относительно известные уравнения интегральных балансов для произвольных систем.

Эта глава представляет особый интерес с точки зрения переноса энергии и массы. Разработанные здесь понятия почти без изменения используются в гл. 7 и 10 при изучении переноса энергии и массы.

#### 4.1. УСРЕДНЕНИЕ ПО ВРЕМЕНИ

**4.1.1. Турбулентность.** Под турбулентным движением мы понимаем такое движение, которое беспорядочно изменяется во времени по крайней мере в части поля течения, так что можно выделить

различные среднестатистические величины. Точнее говоря, необходимо предположить, что движение изменялось хаотически во времени во всех возможных системах отсчета. Конечно, нельзя утверждать, что неэластичное твердое тело участвует в турбулентном движении только потому, что оно подвергается случайным вращениям и перемещениям. Любое движение жидкости, не являющееся турбулентным, называется ламинарным. При анализе турбулентности необходимо проводить четкое различие между сложным ламинарным и истинно-турбулентным течениями. Ламинарное течение может иметь очень сложную зависимость от времени и координат, но только турбулентное течение имеет случайные вариации во времени.

Рассматривая жидкость в рамках молекулярно-кинетических представлений, можно ожидать, что молекулы совершают весьма беспорядочное движение. Силы трения имеют тенденцию рассеивать малые колебания, создавая таким образом более упорядоченное движение. При небольших числах Рейнольдса вязкие эффекты будут доминировать над инерционными и течение обычно бывает ламинарным. С другой стороны, при больших числах Рейнольдса инерционные эффекты преобладают по сравнению с вязкими в первом законе Коши, начинается флюктуация и движение становится беспорядочным, даже если внешние граничные условия не зависят от времени.

Турбулентные течения представляют большой практический интерес по сравнению с ламинарными. Во всяком промышленном процессе, связанном с течением жидкостей по трубам, такие течения будут почти всегда турбулентными. Может возникнуть вопрос, почему турбулентность не рассматривалась до сих пор, несмотря на ее большое значение. Причиной этого является отсутствие точных решений для турбулентных течений. Самыми результативными (с практической точки зрения) являются методы усреднения, изложенные в гл. 4, 7 и 9.

При изучении литературы полезно иметь в виду несколько наиболее употребительных определений. Турбулентность, которая возникает из-за наличия неподвижных стенок, в дальнейшем постоянно оказывающих на нее влияние, называется пристеночной турбулентностью. Она имеет место, например, при течении в трубе. В отсутствие стенок мы говорим о свободной турбулентности. Такая турбулентность иногда возникает при движении самолета даже в совершенно чистом небе.

Турбулентность, имеющая количественно одинаковую структуру во всем поле течения, называется однородной. Если ее характеристики не зависят от направления, то в таком случае мы говорим об изотропной турбулентности (термин «изотропный» используется очень часто: изотропные функции [1], изотропные материалы [2], не говоря уже об изотропной пористой среде (см. § 4.3.1)). Может быть, целесообразнее использовать для турбулентности термин «ориентированная» и «неориентированная». При наличии градиента средней скорости мы говорим о неизотропной, или анизотропной, турбулентности. Очевидно, что пристеночная турбулентность почти всегда анизотропна.

Метод исследования турбулентности, изложенный в следующих параграфах, известен очень давно. В настоящее время общепризнано, что метод сам по себе не дает точного представления о явлении и его можно рекомендовать только в качестве вводного, так как он дает самые хорошие результаты с точки зрения инженерной практики. Более подробно задачи турбулентности рассматриваются в работах [3—7].

**4.1.2. Усреднение по времени.** Рассмотрим течение в трубе с постоянным объемным расходом. Хотя число Рейнольдса может быть больше 5000, т. е. течение будет турбулентным, показания манометра, установленного на стенке трубы, не зависят от времени. Если распределение скорости измеряется с помощью трубы Пито, можно увидеть, что единственной компонентой скорости, отличной от нуля, является продольная скорость, которая не зависит от времени. Представляется противоречивым, что, судя по значению числа Рейнольдса, течение является турбулентным, а скорость и давление не зависят от времени.

Однако противоречия здесь нет. Как манометр, так и трубка Пито не реагируют на высокочастотные изменения во времени. Они показывают только средние по времени давление и скорость.

Поскольку наши обычные приборы измеряют средние по времени значения, при решении практических задач, вероятно, можно оперировать исключительно усредненными по времени переменными. Пусть  $\bar{B}$  — любой скаляр, вектор или тензор. Его средним по времени значением будет:

$$\bar{B}(t) \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} B(t') dt'. \quad (4.1.2-1)$$

Здесь  $\Delta t$  — конечный промежуток времени, значение которого велико по сравнению с периодом или масштабом случайных флюктуаций этой переменной и мало по сравнению с периодом или масштабом любого медленного изменения в поле течения, которое мы не связываем с турбулентностью. Флюктуации, которые не учитываются в турбулентных течениях, выбираются довольно произвольно, и этот выбор практически не представляет трудностей. В этом отношении может оказаться полезным рис. 4.1.2-1, так как он представляет произвольные изменения среднего значения компоненты скорости, хотя само среднее значение не зависит от времени.

Если при анализе турбулентных течений используются средние по времени распределения скорости, давления, плотности и т. д., представляется целесообразным начать с усреднения уравнения движения и первого закона Коши. Сначала проведем усреднение по времени уравнения неразрывности:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t'} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dt' = 0. \quad (4.1.2-2)$$

Первый член слева можно проинтегрировать непосредственно, пре-

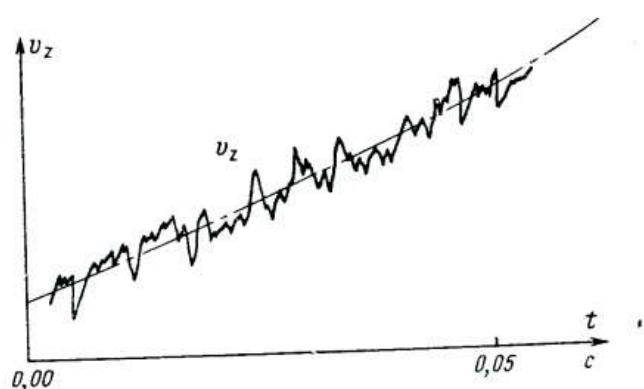


Рис. 4.1.2-1. Произвольное изменение компоненты скорости от ее среднего значения, измеренного термоанемометром.

образовав его с помощью правила Лейбница для дифференцирования интеграла

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho}{\partial t'} dt' = \frac{1}{\Delta t} (\rho|_{t+\Delta t} - \rho|_t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \rho dt' = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}. \quad (4.1.2-3)$$

Операция дивергенции во втором члене в левой части (4.1.2-2) перестановочна с операцией усреднения по времени. В результате уравнение (4.1.2-2) принимает вид:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) = 0. \quad (4.1.2-4)$$

Это соотношение называется средним по времени уравнением неразрывности. Для несжимаемой жидкости это выражение значительно упрощается:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (4.1.2-5)$$

Для уравнения (4.1.2-4) важно пояснить, что в общем случае среднее по времени от произведения не равно произведению средних по времени, т. е.

$$\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \neq \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}. \quad (4.1.2-6)$$

Этот момент будет много раз фигурировать при рассмотрении операций усреднения.

Теперь запишем усредненный по времени первый закон Коши:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t'} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla P - \operatorname{div} \mathbf{S} - \rho \mathbf{f} \right] dt' = 0. \quad (4.1.2-7)$$

Аналогично переходу от уравнения (4.1.2-2) к (4.1.2-4) запишем для (4.1.2-7):

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}) = -\nabla \bar{P} + \operatorname{div}(\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{S}^{(t)}) + \bar{\rho} \bar{\mathbf{f}}. \quad (4.1.2-8)$$

Здесь  $\mathbf{S}^{(t)}$  — тензор дополнительных турбулентных напряжений, или тензор напряжения Рейнольдса:

$$\mathbf{S}^{(t)} \equiv \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}. \quad (4.1.2-9)$$

Он вводится для выражения конвективных членов инерции в уравнении (4.1.2-8) в виде дивергенции от произведения средних, а не дивергенции среднего от произведения. Для несжимаемой жидкости уравнения (4.1.2-8) и (4.1.2-9) упрощаются:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = -\nabla \bar{P} + \operatorname{div}(\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}}^{(t)}) + \rho \bar{\mathbf{f}} \quad (4.1.2-10)$$

и

$$\mathbf{S}^{(t)} = \rho (\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}). \quad (4.1.2-11)$$

При выводе уравнений (4.1.2-8) и (4.1.2-9) гравитация считалась внешней силой, независимой от времени.

В последующих параграфах для упрощения мы ограничимся несжимаемыми жидкостями. Следовательно, мы будем решать уравнения (4.1.2-5) и (4.1.2-10) при соответствующих граничных условиях и для

данного описания поведения материалов. Совершенно очевидно, что недостаточно сказать, что мы имеем несжимаемую ньютоновскую жидкость. Мы теряем какое-то количество информации при усреднении во времени первого закона Коши, и тензор напряжений Рейнольдса  $S^{(t)}$  требует эмпирических соотношений.

4.1.3. Усреднение по времени усредненной по времени переменной. В настоящем параграфе требуется определить среднее по времени от усредненной по времени переменной:

$$\bar{\bar{B}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{B} dt', \quad (4.1.3-1)$$

которая является средней по времени от этой переменной. Следует иметь в виду, что  $B$  может быть любой скалярной, векторной или тензорной функцией времени (и обычно также и координат), т. е.  $B=B(t)$ . Это представляется возможным, поскольку усреднение проводится по очень большому приращению времени  $\Delta t$ . Попытаемся определить, насколько это определение верно.

Для начала рассмотрим несколько более простую задачу. Задав некоторую функцию  $f(x)$ , найдем величину

$$B \equiv \frac{1}{R_1 R_2} \int_0^{R_2} \int_0^{R_1} f(x+X) dX dx, \quad (4.1.3-2)$$

где постоянные  $R_1$  и  $R_2$  известны. Разложив  $f(x+X)$  в ряд Тейлора, запишем уравнение (4.1.3-2) в виде

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{R_2 R_1} \int_0^{R_2} \int_0^{R_1} \left( f(x) + X \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{1}{2} X^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + \dots \right) \times \\ &\quad \times dX dx = \frac{1}{R_2} \int_0^{R_2} f(x) dx + \frac{1}{2} \frac{R_1}{R_2} \int_0^{R_2} \frac{\partial f}{\partial x}(x) dx + \dots \\ &+ \dots = \frac{1}{R_2} \int_0^{R_2} f(x) dx + \frac{1}{2} \frac{R_1}{R_2} [f(R_2) - f(0)] + \dots \end{aligned} \quad (4.1.3-3)$$

Очевидно, что при  $R_1/R_2 \rightarrow 0$

$$\frac{1}{R_1 R_2} \int_0^{R_2} \int_0^{R_1} f(x+X) dX dx \rightarrow \frac{1}{R_2} \int_0^{R_2} f(x) dx. \quad (4.1.3-4)$$

Отсюда видно, что среднее по времени от усредненной по времени переменной можно представить так:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{B}} &= \frac{1}{(\Delta t)^2} \int_t^{t+\Delta t} \int_T^{T+\Delta t} B(T') dT' dT = \frac{1}{(\Delta t)^2} \int_t^{t+\Delta t} \int_0^{\Delta t} B(T+\tau) d\tau dT = \\ &= \frac{1}{(\Delta t)^2} \int_t^{t+\Delta t} \int_0^{\Delta t} \left[ B(T) + \tau \frac{\partial B}{\partial T} + \frac{1}{2} \tau^2 \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} + \dots \right] \times \\ &\quad \times d\tau dT = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left[ B(T) + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial B}{\partial T} + \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^2 B}{\partial T^2} + \dots \right] dT. \end{aligned} \quad (4.1.3-5)$$

Целесообразно ввести безразмерную переменную

$$T^* \equiv \frac{\tau}{t_0}, \quad (4.1.3-6)$$

где  $t_0$  — характерный период времени любых медленных изменений поля течения, которое мы не связываем с турбулентностью. Представив (4.1.3-5) с помощью безразмерного времени, получим:

$$\bar{B} = \frac{t_0}{\Delta t} \int_{T^*}^{T^* + \Delta t/t_0} \left[ B(T^*) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{t_0} \frac{\partial B}{\partial T^*} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left( \frac{\Delta t}{t_0} \right)^2 \frac{\partial^2 B}{\partial T^{*2}} + \dots \right] dT^*. \quad (4.1.3-7)$$

Что подтверждает наше утверждение:

$$\text{при } \frac{\Delta t}{t_0} \rightarrow 0 \quad \bar{B} \rightarrow \bar{B}. \quad (4.1.3-8)$$

**4.1.4. Эмпирические соотношения для тензора напряжений Рейнольдса  $S^{(t)}$ .** В этом параграфе с помощью двух примеров будет показано, как можно сформулировать эмпирические соотношения для тензора напряжений Рейнольдса  $S^{(t)}$ . В своем анализе будем исходить из трех положений:

1. Если ограничиться такими изменениями системы отсчета, при которых

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}, \quad (4.1.4-1)$$

то на основании § 4.1.3 можно заключить, что  $S^{(t)}$  не зависит от системы отсчета:

$$S^{(t)*} \equiv \rho (\bar{\mathbf{v}}^* \cdot \bar{\mathbf{v}}^* - \bar{\mathbf{v}}^* \bar{\mathbf{v}}^*) = \rho \overline{(\bar{\mathbf{v}}^* - \mathbf{v}^*) (\mathbf{v}^* - \bar{\mathbf{v}}^*)} = \\ = \rho \mathbf{Q} \cdot \overline{(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot S^{(t)} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (4.1.4-2)$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  может быть зависимым от времени ортогональным тензором второго ранга. При этом используется тот факт, что разность скоростей не зависит от системы отсчета.

2. Предполагается, что принцип независимости материала от системы отсчета, введенной в § 2.3.1, применим в любых эмпирических соотношениях для  $S^{(t)}$ , пока изменения рассматриваемой системы удовлетворяют уравнению (4.1.4-1).

3. Теорема Бэкингема — Пая накладывает дальнейшие ограничения на форму любого выражения для  $S^{(t)}$ .

**Пример 1. Теория длины смешения Прандтля.** Попытаемся получить эмпирическое соотношение для  $S^{(t)}$ , соответствующее пристеночной турбулентности.

Прежде чем приступить к решению такого рода задачи целесообразно с помощью анализа экспериментальных данных установить качественный характер описываемого явления. Например, большинство данных для пристеночной турбулентности относится к течению в трубах.

Хотя направление флюктуаций скорости в центре трубы почти произвольно, значение флюктуаций скорости в непосредственной окрестности стенки трубы в направлении оси больше, чем в радиальном направлении. Все флюктуации скорости на самой стенке в пределе стремятся к нулю. Этот изменяющийся характер флюктуаций скорости предполагает возможность выделения трех режимов пристеночной турбулентности. Из рис. 4.1.4-1 можно видеть, что у стенки существует тонкий слой, где вязкие напряжения играют гораздо более существенную роль, чем напряжения Рейнольдса; назовем

эту область ламинарным подслоем. За этим ламинарным подслоем находится промежуточная область, в которой вязкие напряжения имеют тот же порядок, что и напряжения Рейнольдса. Эта область называется буферной зоной. Тurbулентное течение за буферной зоной является полностью развитым, и напряжения Рейнольдса преобладают здесь над вязкими напряжениями.

Остановимся теперь на полностью развитом течении. Было бы очень удобным считать тензор напряжений Рейнольдса в некотором смысле аналогичным тензору дополнительных напряжений  $S$ . Тогда эмпирические соотношения для  $S^{(t)}$  можно искать аналогично § 2.3.2, где получены определяющие уравнения для  $S$ . Положим, что напряжение Рейнольдса является функцией плотности жидкости  $\rho$ , тогда расстояние от стени  $l$  и  $\bar{v}$ :

$$S^{(t)} = S^{(t)}(\rho, l, \bar{v}). \quad (4.1.4-3)$$

Мы специально не включаем вязкость в число независимых переменных, так как рассматривается полностью развитый режим турбулентности. Аналогично § 2.3.2 делаем вывод, что если удовлетворить принципу независимости материала от системы отсчета, самой общей формой уравнения (4.1.4-3) будет:

$$S^{(t)} = \eta_0 I + \eta_1 \bar{D} + \eta_2 \bar{D}^2, \quad (4.1.4-4)$$

где

$$\eta_k = \eta_k(\rho, l, \operatorname{div} \bar{v}, \operatorname{tr} \bar{D}^2, \det \bar{D}). \quad (4.1.4-5)$$

Так как

$$S^{(t)} \rightarrow 0 \text{ при } \bar{v} \rightarrow 0, \quad (4.1.4-6)$$

то

$$\eta_0 = 0. \quad (4.1.4-7)$$

Для несжимаемой жидкости наиболее общим линейным соотношением, совместным с уравнениями (4.1.4-4), (4.1.4-5) и (4.1.4-7), будет:

$$S^{(t)} = 2\mu^{(t)} \bar{D}. \quad (4.1.4-8)$$

Здесь  $\mu^{(t)}$  — постоянный скаляр, имеющий размерность вязкости, часто называемый коэффициентом вихревой вязкости. Он был впервые предложен Буссинеском [8]. Однако такое соотношение не имеет смысла, так как требует выполнения равенства:

$$\operatorname{tr} S^{(t)} = 2\mu^{(t)} \operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad (4.1.4-9)$$

Левая часть этого соотношения может равняться нулю только при полном отсутствии турбулентности [5].

Рассмотрим частный случай уравнений (4.1.4-4) и (4.1.4-5), для которого

$$\eta_2 = 0 \quad (4.1.4-10)$$

и

$$\eta_1 = \eta_1(\rho, l, \operatorname{tr} \bar{D}^2). \quad (4.1.4-11)$$

С помощью теоремы Бэкингема — Пая [9] находим:

$$\frac{\eta_1}{\rho l^2 \sqrt{2 \operatorname{tr} \bar{D}^2}} = 2\eta_1^*, \quad (4.1.4-12)$$

где  $\eta_1^*$  — безразмерная постоянная. С учетом (4.1.4-7), (4.1.4-10) и (4.1.4-12) уравнение (4.1.4-4) принимает вид:

$$S^{(t)} = 2\eta_1^* \rho l^2 \sqrt{2 \operatorname{tr} \bar{D}^2} \bar{D}. \quad (4.1.4-13)$$

Это выражение может рассматриваться как тензорная форма теории длины смешения Прандтля [5, 10, 11].

Следует подчеркнуть, что теория длины смешения Прандтля не применима в одинаковой мере для ламинарного подслоя и для буферной зоны. С самого начала предполагалось, что мы будем иметь дело с полностью развитым турбулентным течением в представлении тензора напряжений Рейнольдса. В следующем параграфе будет показано, что при этом получается очень хорошее представление о распределении средней по времени скорости в пределах полностью развитого турбулентного течения в трубе.

Существует некоторая аналогия между этим результатом и теорией переноса завихренности Тейлора [5, 12, 13]. Теория подобия Кармана [11] имеет совсем иной характер. Она относится к частному виду двумерного течения и, конечно, предполагает зависимость тензора напряжений Рейнольдса от вторых производных. Его решение,

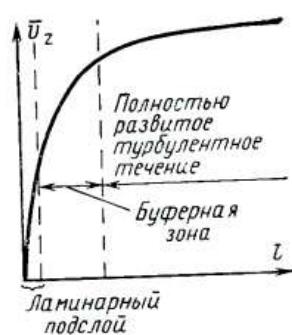


Рис. 4.1.4-1. Усредненная во времени скорость в зависимости от расстояния от стени.

полученное в тензорном представлении в работе [14], показало, что такой подход не может быть универсальным. Если мы попытаемся получить выражение Кармана для напряжений Рейнольдса методом, описанным выше, тогда вместо уравнения (4.1.4-3) мы должны начать с выражения

$$\mathbf{S}^{(t)} = \mathbf{S}^{(t)}(\rho, l, \bar{\mathbf{D}}, \Psi), \quad (4.1.4-14)$$

где

$$\Psi = \nabla \mathbf{K} + (\nabla \mathbf{K})^T, \quad (4.1.4-15)$$

а  $\mathbf{K}$  — вектор завихренности (см. § 1.4.2). Так как тензорное выражение решения Кармана [14] не соответствует принципу независимости материала от системы отсчета, величина  $\Psi$ , вероятно, не является независимой переменной в уравнении (4.1.4-14), так как эта величина не является тензором, независимым от системы отсчета (см., например, [1]).

*Пример 2. Выражение Дейсслера для области вблизи стенки.* Если мы будем рассматривать область турбулентного течения несжимаемой ньютоновской жидкости в непосредственной окрестности ограничивающей стенки, т. е. в ламинарном подслое и буферной зоне, целесообразно сделать допущение:

$$\mathbf{S}^{(t)} = \mathbf{S}^{(t)}(\rho, \mu, l, \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_{(s)}, \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}}). \quad (4.1.4-16)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{v}}_{(s)}$  — скорость ограничивающей стенки. Получить это выражение в самом общем виде, совместимом с принципом независимости материала от системы отсчета и теоремой Бэкингема — Пая, очень трудно [15, 16]. Поэтому будем искать уравнение (4.1.4-16) в частном выражении, удовлетворяющем принципу независимости материала от системы отсчета:

$$\mathbf{S}^{(t)} = \kappa(\rho, \mu, l |\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_{(s)}|) \bar{\mathbf{D}}. \quad (4.1.4-17)$$

Используя теорему Бэкингема — Пая, получаем:

$$\mathbf{S}^{(t)} = 2\eta^* \rho l |\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_{(s)}| \bar{\mathbf{D}}. \quad (4.1.4-18)$$

Здесь

$$\eta^* = \hat{\eta}^*(N) \quad (4.1.4-19)$$

$$N = \frac{\rho l |\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_{(s)}|}{\mu}. \quad (4.1.4-20)$$

На основании эмпирических наблюдений Дейсслер [17] предположил, что

$$\mathbf{S}^{(t)} = 2n^2 \rho l |\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_{(s)}| [1 - \exp(-n^2 N)] \bar{\mathbf{D}}. \quad (4.1.4-21)$$

В следующем параграфе мы увидим, что это выражение сыграет большую роль при нахождении распределения средней по времени скорости внутри ламинарного подслоя и буферной зоны для турбулентного течения в трубе.

*4.1.5. Турбулентное течение в трубе.* Рассмотрим распределение средней по времени скорости для турбулентного течения несжимаемой ньютоновской жидкости в длинной наклонной трубе радиусом  $R$ , изображенной на рис. 3.2.1-2. Остановимся на той части течения, в которой поток можно считать полностью развитым. Распределение скорости в ламинарном подслое и в буферной зоне проанализируем позже. Так как мы вначале рассматриваем полностью развитое течение, можно использовать теорию длины смещения Прандтля для тензора напряжений Рейнольдса (см. § 4.1.4, пример 1). Предположим, что распределение средней по времени скорости имеет вид:

$$\bar{v}_z = \bar{v}_z(r); \quad \bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0. \quad (4.1.5-1)$$

Это означает, что тензор вязкого напряжения и тензор напряжений Рейнольдса имеют только одну компоненту, отличную от нуля:

$$\bar{S}_{rz} + S_{rz}^{(t)} = \left[ \mu + \eta^* \rho (R - r)^2 \left| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right| \right] \frac{d\bar{v}_z}{dr}. \quad (4.1.5-2)$$

Среднее по времени уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости тождественно удовлетворяется по уравнению (4.1.5-1). Уравнение среднего по времени первого закона Коши, записанное в компонентах, сводится к выражениям

$$\frac{\partial \mathcal{I}^o}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{I}^o}{\partial \theta} = 0 \quad (4.1.5-3)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{I}^o}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r (\bar{S}_{rz} + S_{rz}^{(t)})]. \quad (4.1.5-4)$$

По аналогии с § 3.2.1 можно заключить, что

$$-\frac{\partial \mathcal{I}^o}{\partial z} = (P_0 - P_L - \rho g L \sin \alpha) / L \quad (4.1.5-5)$$

и

$$\bar{S}_{rz} + S_{rz}^{(t)} = -S_0 \frac{r}{R}, \quad (4.1.5-6)$$

где

$$S_0 = \frac{(P_0 - P_L - \rho g L \sin \alpha) R}{2L}. \quad (4.1.5-7)$$

Если

$$\left| \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right| = -\frac{d\bar{v}_z}{dr}, \quad (4.1.5-8)$$

то уравнения (4.1.5-2) и (4.1.5-6) можно объединить:

$$\left[ \mu - \eta_*^* \rho (R - r)^2 \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right] \frac{d\bar{v}_z}{dr} = -\frac{S_0 r}{R}. \quad (4.1.5-9)$$

Это выражение можно переписать, используя расстояние от стенки трубы

$$s = R - r, \quad (4.1.5-10)$$

следующим образом:

$$\left( \mu + \eta_*^* \rho s^2 \frac{d\bar{v}_z}{ds} \right) \frac{d\bar{v}_z}{ds} = S_0 \left( 1 - \frac{s}{R} \right). \quad (4.1.5-11)$$

Записанное с помощью безразмерной скорости

$$v^* \equiv \frac{\bar{v}_z}{v_0} \quad (4.1.5-12)$$

и безразмерного расстояния от стенки трубы

$$s^{**} \equiv \frac{s}{R} N_{(t)} \quad (4.1.5-13)$$

уравнение (4.1.5-11) принимает несколько более простой вид:

$$\frac{dv^*}{ds^{**}} + \eta_*^* s^{**2} \left( \frac{dv^*}{ds^{**}} \right)^2 = 1 - \frac{s^{**}}{N_{(t)}}. \quad (4.1.5-14)$$

Здесь мы использовали обозначения

$$v_0 \equiv \sqrt{S_0/\rho} \quad (4.1.5-15)$$

и

$$N_{(t)} \equiv \frac{\rho v_0 R}{\mu}. \quad (4.1.5-16)$$

Так как здесь рассматривается турбулентное течение, ограничимся пределом  $N_{(t)} \rightarrow \infty$ . В этом случае уравнение (4.1.5-14) сводится к выражению

$$dv^*/ds^{**} + \eta^* s^{**2} (dv^*/ds^{**})^2 = 1 \text{ при } N_{(t)} \rightarrow \infty. \quad (4.1.5-17)$$

Используя новую переменную  $s^{**}$  в уравнении (4.1.5-13), а затем положив  $N_{(t)} \rightarrow \infty$ , мы ограничились предельным случаем, соответствующим теории пограничного слоя и описанным в § 3.5.1. Можно ожидать, что при  $N_{(t)} \rightarrow \infty$  любые результаты, выраженные через  $s^{**}$ , относятся к области вблизи стенки. В частности, можно предположить, что уравнение (4.1.5-17) применимо к пристеночной области вне ламинарного подслоя и буферной зоны. Совершенно не удивительно, если результаты, выведенные из уравнения (4.1.5-17), будут не применимы к области вблизи оси трубы.

Мы начали с того, что ограничились рассмотрением полностью развитого участка. Вспомним, что в § 4.1.4 предполагалось, что в полностью развитом течении эффектом вязких напряжений можно пренебречь по сравнению с эффектом напряжения Рейнольдса. Следовательно, можно предположить:

$$\eta^* s^{**2} \frac{dv^*}{ds^{**}} \gg 1; \quad (4.1.5-18)$$

кроме того, на участке полностью развитого течения уравнение (4.1.5-17) сводится к виду:

$$\eta^* s^{**2} \left( \frac{dv^*}{ds^{**}} \right)^2 = 1. \quad (4.1.5-19)$$

Вернемся на некоторое время к неравенству (4.1.5-18).

Пронтегрировав последнее соотношение, получим:

$$\text{для } s^{**} \geq s^{**}_1 \quad v^* - v^*_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta^*}} \ln \frac{s^{**}}{s^{**}_1}, \quad (4.1.5-20)$$

где  $s^{**}_1$  можно считать внешней кромкой буферной зоны; а  $v^*$  — безразмерной скоростью в этом месте.

В результате сравнения экспериментальных данных (рис. 4.1.5-1) Дейслер рекомендует следующие значения  $\sqrt{\eta^*} = 0,36$ ;  $s^{**}_1 = 26$  и  $v^*_1 = 12,85$ . При таких величинах уравнение (4.1.5-20) принимает вид:

$$\text{для } s^{**} \geq 26 \quad v^* = \frac{1}{0,36} \ln s^{**} + 3,8. \quad (4.1.5-21)$$

Следовательно,

$$\text{для } s^{**} \geq 26 \quad \eta^* s^{**2} dv^*/ds^{**} \geq 9,4. \quad (4.1.5-22)$$

Таким образом, неравенство (4.1.5-18) является обоснованным.

Следует отметить, что на рис. 4.1.5-1 в центре трубы  $dv^*/ds^* \neq 0$ , что противоречит нашей интуиции. Однако интуиция не обманывает

нас. Ведь при выводе уравнения (4.1.5-17), а следовательно, и уравнения (4.1.5-21) мы ограничивались областью вблизи стенки (вне ламинарного подслоя и буферной зоны). Поэтому нельзя ожидать, что эти результаты будут справедливы и в области вблизи оси трубы.

Попытаемся теперь описать распределение скорости в ламинарном подслое и в буферной зоне. Эмпирическое выражение Дейсслера [17] для тензора напряжений Рейнольдса в этой области обсуждалось в § 4.1.4 (пример 1). Если опять начать с предположения, что усредненное по времени распределение скорости имеет вид уравнения (4.1.5-1),

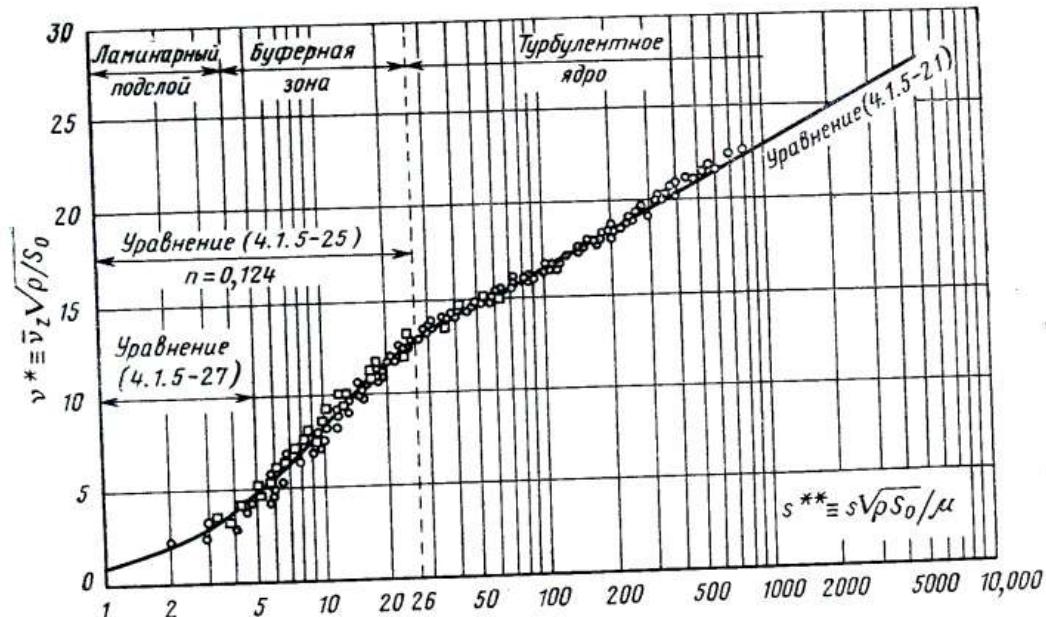


Рис. 4.1.5-1. Распределение скорости при турбулентном изотермическом течении в трубе [17]. Экспериментальные данные обозначены кружочками [18] и квадратиками [19].

то тензоры вязких напряжений и напряжений Рейнольдса имеют только одну компоненту, отличную от нуля:

$$\bar{S}_{rz} + S_{rz}^{(t)} = \left( \mu + n^2 \rho \bar{v}_z (R - r) \left\{ 1 - \exp \left( \frac{-n^2 \rho \bar{v}_z |R - r|}{\mu} \right) \right\} \right) \frac{dv_z}{dr}. \quad (4.1.5-23)$$

С учетом уравнения (4.1.5-6) будем иметь:

$$\{1 + n^2 v^* s^{**} [1 - \exp(-n^2 v^* s^{**})]\} \frac{dv^*}{ds^{**}} = 1 - \frac{s^{**}}{N_{(t)}}, \quad (4.1.5-24)$$

где для удобства используются безразмерные переменные из (4.1.5-12) и (4.1.5-13). Так как нас интересуют турбулентные течения, ограничимся пределом  $N_{(t)} \rightarrow \infty$ :

$$\{1 + n^2 v^* s^{**} [1 - \exp(-n^2 v^* s^{**})]\} dv^*/ds^{**} = 1. \quad (4.1.5-25)$$

Для этого выражения также применимы замечания по уравнению (4.1.5-17). В пределе  $N_{(t)} \rightarrow \infty$  можно ожидать, что любой результат, выраженный через переменную  $s^{**}$ , будет справедлив в области вблизи стенки. Для данного случая это не является очень серьезным ограничением.

чением, так как наша цель — использование уравнения (4.1.5-25) только для ламинарного подслоя и буферной зоны.

Дейслер [17] численно проинтегрировал уравнение (4.1.5-25). Его результат для  $n=0,124$  показан на рис. 4.1.5-1. При таком значении  $n$  уравнение (4.1.5-25) является очень хорошим распределением скорости как в ламинарном подслое, так и в буферной зоне.

Если нас в первую очередь интересует ламинарный подслой, то необходимо прежде всего исследовать предел уравнения (4.1.5-25) при приближении к стенке:

$$\frac{dv^*}{ds^{**}} = 1 \quad \text{при } s^{**} \rightarrow 0. \quad (4.1.5-26)$$

Интегрируя последнее соотношение, увидим, что распределение скорости в ламинарном подслое должно иметь вид:

$$v^* = s^{**}. \quad (4.1.5-27)$$

Из рис. 4.1.5-1 видно, что это соотношение является очень хорошим выражением для  $s^{**} \leq 5$ . Ламинарный подслой при течении в очень длинной трубе является областью, в которой уравнение (4.1.5-27) описывает распределение усредненной во времени скорости.

## 4.2. УСРЕДНЕНИЕ ПО ПЛОЩАДИ

**4.2.1. Усреднение по площади.** Большая часть инженерных задач не требует, чтобы распределение скорости было задано полностью. Обычно мы имеем дело с оценкой некоторых общих аспектов задачи, например объемного расхода жидкости или силы, действующей на стенку.

Когда зависимости распределения скорости от направлений, перпендикулярных общему направлению течения, не представляют особого интереса, целесообразно проводить усреднение уравнения движения по площади поперечного сечения, перпендикулярного течению. Это приводит к значительному упрощению задачи. Поэтому такое усреднение особенно полезно, когда решение задачи требует значительных затрат времени и средств. В каждом конкретном случае необходимо четко представлять себе требования поставленной задачи. Если точность решения должна быть не более 1%, то уравнение движения необходимо решать полностью. Если же допустима погрешность 20—25%, то можно использовать метод интегрального усреднения, например, по площади.

При использовании любого из методов интегрального усреднения теряется некоторая информация и поэтому необходимо использовать эмпирические соотношения или приближение. Мы установили, что усреднение по времени требует применения эмпирических соотношений для тензора напряжений Рейнольдса  $S^{(t)}$ . В случае усреднения по площади эмпирические соотношения выводятся двумя способами.

Как показано в § 4.2.2, в задачах первого типа мы прежде всего имеем дело с переменной, усредненной по площади, например объемным расходом. Обычно приближение делается относительно силы на единицу площади поверхности или напряжения на ограничивающей стенке.

Задачи другого, более сложного типа часто называются приближенной теорией пограничного слоя. В этой теории распределение скорости имеет вид зависимости от длины дуги  $x$ , т. е.  $\delta(x)$ . Эта функция

часто называется приближенной толщиной пограничного слоя. Приближенная теория пограничного слоя рассматривается в § 4.2.3.

**4.2.2. Течение жидкости в круглой трубе из состояния покоя.** Эта задача предназначена для иллюстрации использования усредненных по площади переменных.

В § 3.2.4 (см. также рис. 3.2.1-2) в общих чертах описывается точное решение для течения жидкости из состояния покоя. Там предполагалось, что мы имеем дело с несжимаемой ньютоновской жидкостью. Что произойдет, если рассматривать ту же задачу для несжимаемой степенной жидкости? Мы сталкиваемся с утомительной процедурой решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных. Это, конечно, задача возможная, но экономические затраты и время, потраченное на ее решение, просто не оправданы.

Можно предложить другой подход, в основу которого положено допущение, что нашей основной задачей является определение объемного расхода  $Q$  для течения в трубе в зависимости от времени. Иными словами, требуется определить усредненную по площади аксиальную компоненту скорости как функцию времени. Известно, что такая ситуация требует численного счета, в данном случае — относительно простого численного интегрирования.

Что касается точности решения, можно снова начать с рассмотрения несжимаемой ньютоновской жидкости, для того чтобы сравнить полученные результаты с известным точным решением.

Предположив существование только одной, отличной от нуля компоненты скорости

$$v_r = v_\theta = 0; \quad v_z = v_z(t, r), \quad (4.2.2-1)$$

найдем, что первый закон Коши для несжимаемой ньютоновской жидкости дает:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -A + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rz}), \quad (4.2.2-2)$$

где

$$-A \equiv \frac{P_0 - P_L}{L} - \rho g \sin \alpha. \quad (4.2.2-3)$$

Уравнение (4.2.2-2) и соответствующее определяющее уравнение для  $S_{rz}$  решались совместно при граничных условиях

$$v_z = 0 \text{ при } t = 0 \quad (4.2.2-4)$$

и

$$v_z = 0 \text{ при } r = R. \quad (4.2.2-5)$$

Но если нас в первую очередь интересует усредненная по площади скорость

$$\bar{v}_z \equiv \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta, \quad (4.2.2-6)$$

то мы можем рассмотреть уравнение (4.2.2-2), усредненное по площади поперечного сечения трубы, перпендикулярного течению:

$$\rho \frac{d\bar{v}_z}{dt} = -A + \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rz}) dr d\theta = -A + \frac{2}{R} S_{rz} \Big|_{r=R}. \quad (4.2.2-7)$$

Здесь возникает определенная трудность. Напряжение сдвига на стенке трубы заранее неизвестно. При усреднении теряется часть информации (см. § 4.1.2). Чтобы определить напряжение сдвига на стенке, необходимо либо эмпирическое соотношение, либо приближение. Проще всего предположить, что соотношение между напряжением сдвига на стенке и средней скоростью в трубе соответствует найденному в § 3.2.1 для течения Пуазейля:

$$S_{rz} \Big|_{r=R} = -\frac{4\mu}{R} \bar{v}_z. \quad (4.2.2-8)$$

Используя это приближение, мы находим, что уравнение (4.2.2-7) дает обыкновенное дифференциальное уравнение для усредненной по сечению трубы скорости:

$$\rho \frac{d\bar{v}_z}{dt} = -A - \frac{8\mu}{R^2} \bar{v}_z. \quad (4.2.2-9)$$

Это уравнение легко проинтегрировать при граничном условии (4.2.2-4) в виде

$$\bar{v}_z = 0 \text{ при } t=0. \quad (4.2.2-10)$$

Тогда находим:

$$\frac{8\mu Q}{\pi R^4 \{-A\}} = 1 - \exp(-8t^*). \quad (4.2.2-11)$$

На рис. 4.2.2-1 приводится сравнение этого результата с точным решением. Погрешность при использовании (4.2.2-11) составляет меньше 20% для  $t^* > 0,05$ . Для многих случаев эта погрешность очень невелика, если учесть простоту вычислений.

**4.2.3. Приближенная теория пограничного слоя для двумерного обтекания искривленной стенки [11].** Теория пограничного слоя, рассмотренная в § 3.5.1—3.5.7, разработана при условии  $N_{Re} \rightarrow \infty$ . Уравнение движения пограничного слоя решается легче, чем уравнение Навье—Стокса, но решение некоторых задач с дифференциальным уравнением в частных производных требует огромных усилий и много времени. Для практических целей нужны менее подробные приближенные решения.

Отличные результаты, полученные в § 4.2.2, наводят на мысль о возмож-

можности проинтегрировать уравнение пограничного слоя по всему поперечному сечению, перпендикулярному течению. Попытаемся сделать это, но в отличие от предыдущего параграфа мы не будем оперировать со средними по площади переменными. Мы будем использовать вместо этого совершенно иной подход и оценим некоторые рассматриваемые интегралы с помощью приближенного распределения скорости. Полученные результаты могут показаться удивительно точными по сравнению с точными решениями уравнения пограничного слоя, если учесть значительное сокращение процедуры решения.



Рис. 4.2.2-1. Сравнение анализа усреднения по площади с точным решением для течения в круглой трубе из состояния покоя.

Рассмотрим установившееся двумерное обтекание искривленной стенки несжимаемой ньютоновской жидкостью. В § 3.5.3 установлено, что при этих условиях уравнения неразрывности и движения сводятся к

$$\frac{\partial v^*_x}{\partial x^*} + \frac{\partial v^{**}_y}{\partial y^{**}} = 0 \quad (4.2.3-1)$$

и

$$v^*_y \frac{\partial v^*_x}{\partial x^*} + v^{**}_y \frac{\partial v^*_x}{\partial y^{**}} = \tilde{v}^*_x \frac{\partial \tilde{v}^*_x}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 v^*_x}{\partial y^{**2}}, \quad (4.2.3-2)$$

где

$$y^{**} \equiv (N_{Re})^{1/2} y^*, \quad v^{**}_y \equiv (N_{Re})^{1/2} v^*_y, \quad (4.2.3-3)$$

а  $\tilde{v}^*_x$  — безразмерное распределение скорости на искривленной стенке, полученное из решения для невязкого течения. Ищем решение для пограничного слоя при двумерном обтекании искривленной стенки из уравнений (4.2.3-1) и (4.2.3-2) при условиях:

$$v^*_x = v^{**}_y = 0 \text{ при } y^{**} = 0 \quad (4.2.3-4)$$

и

$$v^*_x \rightarrow \tilde{v}^*_x \text{ при } y^{**} \rightarrow \infty. \quad (4.2.3-5)$$

Сначала проинтегрируем уравнение (4.2.3-2) по всему пограничному слою:

$$\int_0^\infty \left( v^*_x \frac{\partial v^*_x}{\partial x^*} + v^{**}_y \frac{\partial v^*_x}{\partial y^{**}} - \tilde{v}^*_x \frac{d \tilde{v}^*_x}{dx^*} - \frac{\partial^2 v^*_x}{\partial y^{**2}} \right) dy^{**} = 0. \quad (4.2.3-6)$$

Здесь необходимы некоторые преобразования.

Проинтегрировав уравнение (4.2.3-1), получим:

$$\int_0^{y^{**}} \left( \frac{\partial v^*_x}{\partial x^*} + \frac{\partial v^{**}_y}{\partial y^{**}} \right) dy^{**} = 0 \quad (4.2.3-7)$$

или

$$v^{**}_y = - \int_0^{y^{**}} \frac{\partial v^*_x}{\partial x^*} dy^{**}. \quad (4.2.3-8)$$

Проинтегрировав это уравнение по частям, запишем второй член в левой части соотношения (4.2.3-6) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v^{**}_y \frac{\partial v^*_x}{\partial y^{**}} dy^{**} &= - \int_0^\infty \frac{\partial v^*_x}{\partial y^{**}} \left( \int_0^{y^{**}} \frac{\partial v^*_x}{\partial x^*} dy^{**} \right) dy^{**} = \\ &= - \tilde{v}^*_x \int_0^\infty \frac{\partial v^*_x}{\partial x^*} dy^{**} + \int_0^\infty v^*_x \frac{\partial v^*_x}{\partial x^*} dy^{**}. \end{aligned} \quad (4.2.3-9)$$

Четвертый член уравнения (4.2.3-6) можно проинтегрировать непосредственно

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 v^*_x}{\partial y^{**2}} dy^{**} = - \frac{\partial v^*_x}{\partial y^{**}} \Big|_{y^{**}=0}, \quad (4.2.3-10)$$

поскольку необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial y^{**}} \rightarrow 0 \quad \text{при } y^{**} \rightarrow \infty. \quad (4.2.3-11)$$

Уравнения (4.2.3-9) и (4.2.3-10) позволяют переписать (4.2.3-6) в виде

$$\frac{d}{dx^*} \int_0^\infty v_x^* (\tilde{v}_x^* - v_x^*) dy^{**} + \frac{d\tilde{v}_x^*}{dx^*} \int_0^\infty (\tilde{v}_x^* - v_x^*) dy^{**} = \frac{\partial v_x^*}{\partial y^{**}} \Big|_{y^{**}=0}. \quad (4.2.3-12)$$

Теперь можно представить это уравнение, используя приближенное распределение скорости:

$$\frac{v_x^*}{\tilde{v}_x^*} = h(x^*, \eta), \quad (4.2.3-13)$$

где

$$\eta = \frac{y^{**}}{\delta^{**}(x^*)} = \frac{y}{\delta(x)}. \quad (4.2.3-14)$$

Функция  $\delta(x)$  не имеет точно определенного физического смысла, хотя обычно примерно трактуется как приближенная толщина пограничного слоя. Имея это в виду, потребуем, чтобы функция  $h(x^*, \eta)$  удовлетворяла условию:

$$h=1 \text{ для } \eta \geq 1. \quad (4.2.3-15)$$

Это дает возможность определить в уравнении (4.2.3-12)

$$\int_0^\infty v_x^* (\tilde{v}_x^* - v_x^*) dy^{**} = (\tilde{v}_x^*)^2 \delta^{**} \alpha_1; \quad (4.2.3-16)$$

$$\int_0^\infty (\tilde{v}_x^* - v_x^*) dy^{**} = \tilde{v}_x^* \delta^{**} \alpha_2 \quad (4.2.3-17)$$

и

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial y^{**}} \Big|_{y^{**}=0} = \frac{\tilde{v}_x^*}{\delta^{**}} \beta_1 \quad (4.2.3-18)$$

при условии, что

$$\alpha_1 \equiv \int_0^1 h(1-h) d\eta; \quad (4.2.3-19)$$

$$\alpha_2 \equiv \int_0^1 (1-h) d\eta \quad (4.2.3-20)$$

и

$$\beta_1 \equiv \left. \frac{\partial h}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}. \quad (4.2.3-21)$$

Уравнения (4.2.3-16) — (4.2.3-18) позволяют нам записать (4.2.3-12) в виде

$$\tilde{v}_x^* \delta^{**} \alpha_1 \frac{d}{dx^*} (\delta^{**} \alpha_1) + \left( 2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) (\delta^{**} \alpha_1)^2 \frac{d\tilde{v}_x^*}{dx^*} = \alpha_1 \beta_1. \quad (4.2.3-22)$$

Пусть частное приближенное распределение скорости имеет вид:

$$\frac{v^*_x}{\tilde{v}^*_x} = h(x^*, \eta) = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4. \quad (4.2.3-23)$$

Определим пять значений функции  $x^*$  в этом распределении скорости так, чтобы (4.2.3-23) удовлетворяло уравнениям (4.2.3-4), (4.2.3-5) и (4.2.3-11), а также условиям

$$\tilde{v}^* \frac{d\tilde{v}^*_x}{dx^*} + \frac{\partial^2 v^*_x}{\partial y^{**2}} = 0 \quad \text{при } \eta^{**} = 0 \quad (4.2.3-24)$$

и

$$\frac{\partial^2 v^*_x}{\partial y^{**2}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta^{**} \rightarrow 1. \quad (4.2.3-25)$$

В результате находим:

$$h = 1 - (1 - \eta)^3 (1 + \eta) + \frac{\Lambda}{6} \eta (1 - \eta)^3. \quad (4.2.3-26)$$

Мы ввели здесь определение:

$$\Lambda \equiv \delta^{**2} \frac{d\tilde{v}^*_x}{dx^*} = \frac{\rho}{\mu} \delta^2 \frac{d\tilde{v}_x}{dx}. \quad (4.2.3-27)$$

Отсюда мы можем получить выражения для  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\beta_1$  в уравнениях (4.2.3-19)–(4.2.3-21) в явном виде

$$\alpha_1 = \frac{1}{63} \left( \frac{37}{5} - \frac{\Lambda}{15} - \frac{\Lambda^2}{144} \right); \quad (4.2.3-28)$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120} \quad (4.2.3-29)$$

и

$$\beta_1 = 2 + \frac{\Lambda}{6}. \quad (4.2.3-30)$$

Теперь удобно записать уравнение (4.2.3-22) в более компактном виде:

$$\frac{dZ}{dx^*} = \frac{F(\Lambda)}{\tilde{v}^*_x}. \quad (4.2.3-31)$$

Здесь

$$Z = (\delta^{**} \alpha_1)^2 \quad (4.2.3-32)$$

и

$$\begin{aligned} F(\Lambda) &\equiv 2\alpha_1 [\beta_1 - (2\alpha_1 + \alpha_2)\Lambda] = 2 \left( \frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right) \times \\ &\times \left[ 2 - \frac{116}{315}\Lambda + \left( \frac{2}{945} + \frac{1}{120} \right) \Lambda^2 + \frac{2}{9072} \Lambda^3 \right]. \end{aligned} \quad (4.2.3-33)$$

Решая уравнение (4.2.3-31) совместно с уравнением

$$Z \frac{d\tilde{v}^*_x}{dx} = (\alpha_1)^2 \Lambda, \quad (4.2.3-34)$$

определим  $Z$  и  $\Lambda$  как функции безразмерной длины дуги  $x^*$ .

Можно сформулировать необходимые этапы расчета следующим образом:

1. Задается безразмерное распределение скорости на искривленной стенке из решения для невязкого течения:  $\tilde{v}^* = \tilde{v}^*(x^*)$ .

2. Уравнения (4.2.3-31) и (4.2.3-34) решаются совместно для  $Z$  и  $\Lambda$  как функций безразмерной длины дуги  $x^*$ . Границным условием при интегрировании будет:

$$Z=0 \text{ при } x=0 \quad (4.2.3-35)$$

или

$$Z=\Lambda=0 \text{ при } x^*=0. \quad (4.2.3-36)$$

3. Точка, в которой пограничный слой отделяется от стенки, определяется как предел между прямым и обратным течением в непосредственной окрестности стенки [11]:

в точке отрыва:  $\frac{\partial v^*_x}{\partial y^{**}} \Big|_{y^{**}=0} = 0. \quad (4.2.3-37)$

Из уравнений (4.2.3-18) и (4.2.3-30) ясно, что в точке отрыва:

$$\Lambda=-12. \quad (4.2.3-38)$$

4. Приближенное значение толщины пограничного слоя  $\delta$  как функция  $x$  следует из уравнения (4.2.3-27).

5. Наконец, приближенное распределение скорости находится из уравнения (4.2.3-26).

У Шлихтинга [11] есть очень хорошее сравнение результатов, полученных с использованием приближенной теории пограничного слоя и точной теории пограничного слоя, рассмотренной в § 3.5.3. Для многих целей приближенная теория пограничного слоя весьма приемлема. Интересно также отметить, что результаты относительно нечувствительны к форме приближенного распределения скорости в виде уравнения (4.2.3-23) [11].

### 4.3. ЛОКАЛЬНОЕ УСРЕДНЕНИЕ ПО ОБЪЕМУ

**4.3.1. Течение в пористой среде.** Движение газов и жидкостей через пористую среду часто встречается во многих технологических процессах. Дистилляционные и абсорбционные колонки обычно заполняются шариками или содержат насадку иной геометрии. Химический реактор может быть заполнен пористыми шариками, пропитанными катализатором. В большинстве химических процессов применяются фильтры. Перемещение воды и нефти через пористые слои породы важны в водоснабжении и нефтедобыче.

В 1856 г. Дарси [22] провел первое серьезное исследование этой проблемы. Как обобщение экспериментальных данных для воды, движущейся при объемном расходе  $Q$  через плотный слой цилиндрической формы вдоль оси цилиндра с поперечным сечением  $A$  и длиной  $L$ , под действием разности давления  $\Delta P$ , он предложил соотношение [23]:

$$\frac{\Delta P}{L} = b \frac{Q}{A}. \quad (4.3.1-1)$$

Позднее было замечено, что величина  $b$  пропорциональна коэффициенту вязкости для несжимаемой ньютоновской жидкости

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{\mu}{k} \frac{Q}{A}. \quad (4.3.1-2)$$

Это соотношение обычно называется законом Дарси, а коэффициент  $k$  проницаемостью слоя.

Однако существуют по крайней мере три основных вопроса, на которые уравнение (4.3.1-2) не дает ответа.

1. Как решать задачу для другой геометрии или других граничных условий?

Стандартный ответ: дифференциальное уравнение, аналогичное (4.3.1-2), описывает течение в каждой точке пористой среды [23]

$$\nabla P + \frac{\mu}{k} \mathbf{w} = 0. \quad (4.3.1-3)$$

Основная трудность, связанная с этим уравнением, заключается в том, что среднее давление  $P$  и средняя скорость  $\mathbf{w}$  не могут быть представлены через распределение локального давления и распределение локальной скорости в порах.

2. Что можно сказать об ориентированном (обычно говорят «анизотропном») пористом теле?

Под ориентированной пористой структурой подразумевается структура, имеющая направление или совокупность направлений, внутренне связанных с геометрией пор. Например, в естественной слоистой породе часто имеет место градиент диаметра частиц в направлении силы тяжести или в направлении, которое первоначально было направлением силы тяжести. Неориентированная пористая структура (часто называемая изотропной) не имеет такого направления, внутренне связанного с ним.

Обычно говорят, что уравнение (4.3.1-3) описывает течение в неориентированной пористой среде. Для ориентированной пористой среды вместо скалярной проницаемости  $k$  используется тензор проницаемости второго ранга  $\mathbf{K}$ :

$$\nabla P + \mu \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{w} = 0. \quad (4.3.1-4)$$

Обычно говорят, что тензор  $\mathbf{K}$  является симметричной и обратимой величиной, но обоснование этих свойств часто оставляет место для сомнений.

3. Как должно описываться движение вязкоупругой жидкости через пористую среду?

Попытаемся ответить на эти вопросы в следующих параграфах.

Мы постараемся вывести соотношения типа (4.3.1-3) и (4.3.1-4). Поскольку  $\mathbf{w}$  и  $P$  принимаются как локальные средние скорость и давление, необходимо связать с каждой точкой пористой среды локально усредненное по объему дифференциальное уравнение неразрывности и первого закона Коши. Во всем нашем обсуждении пористая структура считается жесткой и неподвижной.

4.3.2. *Локальное усреднение по объему.* Наша первоначальная цель — связать с каждой точкой пористой среды локально усредненное по объему дифференциальное уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.3.2-1)$$

Под словами «каждая точка пористой среды» подразумеваются твердая и жидкая фазы, а также область на границе раздела фаз твердое тело — жидкость.

Сначала выберем некоторую точку в пористой среде, изображенной на рис. 4.3.2-1. Совершенно безразлично, локализована ли эта точка в твердой или жидкой фазе, или на границе раздела фаз, — все равно вывод остается неизменным. Давайте свяжем с этой точкой замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ . Минимальный размер  $S$  обсуждается в § 4.3.6. Можно считать, что эта точка лежит внутри  $S$ , но это совершенно несущественно.

Обозначим через  $V_{(f)}$  поры, содержащие жидкость внутри  $S$ ; объем и форма  $V_{(f)}$  обычно будут изменяться от точки к точке пористой среды. Замкнутая ограничивающая поверхность  $S_{(f)}$  для  $V_{(f)}$  является суммой  $S_e$  и  $S_w$ :  $S_e$  соответствует  $S$ , а  $S_w$  — стенкам поры. Можно считать  $S_e$  входными и выходными поверхностями объема  $V_{(f)}$ . Запишем уравнение баланса массы для жидкости, содержащейся внутри этой замкнутой поверхности  $S$ . Для этого удобнее всего проинтегрировать дифференциальное уравнение неразрывности (4.3.2-1) по области  $V_{(f)}$ , занятой жидкостью внутри  $S$ :

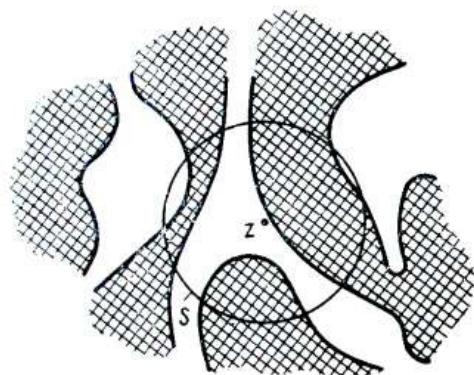


Рис. 4.3.2-1. Поверхность усреднения  $S$ , связанная с каждой точкой  $z$  в пористой среде.

$$\int_{V_{(f)}} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0. \quad (4.3.2-2)$$

Можно сразу поменять местами операции интегрирования по объему и дифференцирования по времени в первом члене левой части (4.3.2-2):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{(f)}} \rho dV + \int_{V_{(f)}} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = 0 \quad (4.3.2-3)$$

или

$$\frac{\bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_{V_{(f)}} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = 0. \quad (4.3.2-4)$$

Если  $B$  — произвольный скаляр, вектор или тензор второго ранга, связанный с жидкостью, то

$$\bar{B} \equiv \frac{1}{V} \int_{V_{(f)}} B dV, \quad (4.3.2-5)$$

т. е.  $\bar{B}$  есть локальное среднее значение по объему  $V$  величины  $B$ , связанной с жидкостью. Локальная объемно-усредненная плотность,веденная в уравнении (4.3.2-4), есть частный случай использования этого определения.

Было бы прекрасно, если бы интегрирование по объему можно было поменять местами с операцией дивергенции во втором члене (4.3.2-4). Но пределы интегрирования по объему зависят от геометрии поры, ограниченной поверхностью  $S$ , и должны зависеть от положения  $z$ . В следующем параграфе этот вопрос обсуждается более подробно.

**4.3.3. Теорема о локальном среднем по объему от градиента.** Пусть  $B$  — скаляр, вектор или тензор второго ранга, связанный с жидкостью. Если

$$\bar{B} \equiv \frac{1}{V} \int_{V(f)} \nabla B \, dV, \quad (4.3.3-1)$$

то представляет интерес выяснить, в каком случае можно менять местами операцию усреднения по объему и операцию градиента, чтобы получить:

$$\nabla \bar{B} \equiv \nabla \left( \frac{1}{V} \int_{V(f)} B \, dV \right). \quad (4.3.3-2)$$

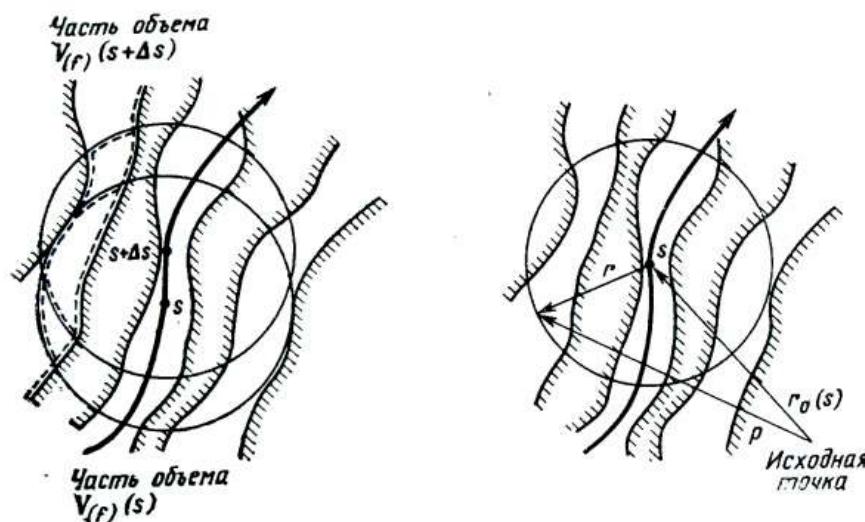


Рис. 4.3.3-1. Произвольная кривая через пористую среду, где  $s$  — параметр, измеряемый вдоль этой кривой.

Рис. 4.3.3-2. Вектор  $r_0(s)$  обозначает положение точки  $s$  вдоль кривой;  $r$  — положение на поверхности  $S_f$  относительно точки  $s$ .

Давайте свяжем поверхность усреднения  $S$  из § 4.3.2 с каждой точкой пористой среды. Сделаем это простым перемещением без вращения. Например, если поверхность  $S$  — элементарный шар, центр которого совпадает с точкой, рассматриваемой первоначально, то каждой точке в пористой среде будет соответствовать элементарная сфера. Если значение  $S$  невелико по сравнению со средним диаметром поры, то эта поверхность может заключать в себе только твердое тело или только жидкость во многих точках; в противном случае многие поры могут пересекать  $S$ , причем пересечения служат входом или выходом для жидкости, ограниченной поверхностью  $S$ .

Рассмотрим произвольную кривую, проходящую через пористую среду, как показано на рис. 4.3.3-1. Пусть  $s$  — параметр, являющийся длиной дуги, измеряемой вдоль этой кривой. Можно считать каждую точку вдоль этой кривой системой, обозначенной через  $V(f)$ , состоящей из пор, заполненных жидкостью, которая ограничена поверхностью  $S$ . Можно представить  $V(f)$  как функцию параметра вдоль этой кривой.

Если в обобщенной теореме переноса из § 1.3.2 вместо времени использовать параметр  $s$ , то

$$\frac{d}{ds} \int_{V_{(f)}} B dV = \int_{V_{(f)}} \frac{\partial B}{\partial s} dV + \int_{S_{(f)}} B \frac{d\mathbf{p}}{ds} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.3.3-3)$$

Здесь  $\mathbf{p}$  — поле радиус-вектора.

Ограничимся в дальнейшем такими значениями  $B$ , которые являются явными функциями только положения (и времени):

$$\partial B / \partial s = 0. \quad (4.3.3-4)$$

Под  $\partial B / \partial s$  мы подразумеваем производную по  $s$ , полагая положение и время заданными. Фиктивные частицы системы движутся в зависимости от  $s$  по касательной к неподвижным стенкам поры по поверхности  $S_w$ :

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на поверхности } S_w. \quad (4.3.3-5)$$

Пусть  $\mathbf{r}_0(s)$  — радиус-вектор, определяющий положение точки  $s$  на произвольной кривой, а  $\mathbf{r}(s)$  — радиус-вектор, определяющий положение точки на поверхности  $S_{(f)}$  относительно этой точки  $s$  (которая находится в центре шара для случая, показанного на рис. 4.3.3-1 и 4.3.3-2). При условии, что  $S$  перемещается без вращения вдоль этой произвольной кривой, которая связана с каждой точкой в пористой среде. На поверхности  $S_e$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} + \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}_0}{ds}. \quad (4.3.3-6)$$

Уравнения (4.3.3-4) — (4.3.3-6) позволяют переписать (4.3.3-3) в виде

$$\frac{d}{ds} \int_{V_{(f)}} B dV = \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \cdot \nabla \int_{V_{(f)}} B dV = \int_{S_e} B \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.3.3-7)$$

или, поскольку  $d\mathbf{r}_0/ds$  не зависит от положения на поверхности  $S_e$ ,

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \cdot \nabla \int_{V_{(f)}} B dV = \left( \int_{S_e} B \mathbf{n} dS \right) \cdot \frac{d\mathbf{r}_0}{ds}. \quad (4.3.3-8)$$

Так как кривая, проходящая через пористую среду, была выбрана произвольно, то

$$\nabla \int_{V_{(f)}} B dV = \int_{S_e} B \mathbf{n} dS. \quad (4.3.3-9)$$

Используя преобразование Грина, перепишем уравнение (4.3.3-1):

$$\frac{1}{V} \int_{V_{(f)}} \nabla B dV = \frac{1}{V} \int_{S_e + S_w} B \mathbf{n} dS. \quad (4.3.3-10)$$

С учетом (4.3.3-9) найдем:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} B &= \frac{1}{V} \int_{V_{(f)}} \nabla B dV = \nabla \left( \frac{1}{V} \int_{V_{(f)}} B dV \right) + \frac{1}{V} \int_{S_w} B \mathbf{n} dS = \\ &= \bar{\nabla} B + \frac{1}{V} \int_{S_w} B \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (4.3.3-11)$$

Полученный результат будем называть теоремой о среднем по объему от градиента.

Частным случаем уравнения (4.3.3-11) является

$$\overline{\operatorname{div} \mathbf{B}} = \frac{1}{V} \int_{V(f)} \operatorname{div} \mathbf{B} dV = \operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} + \frac{1}{V} \int_{S_w} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.3.3-12)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  можно считать векторным полем или полем тензора второго ранга. Уравнение (4.3.3-12) можно назвать теоремой о среднем по объему от дивергенции.

**4.3.4. Локально усредненное по объему уравнение неразрывности.** В § 4.3.2 установлено, что локально усредненное по объему уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_{V(f)} \operatorname{div} (\bar{\rho} \mathbf{v}) dV = 0. \quad (4.3.4-1)$$

Используя теорему § 4.3.3, можно записать его так:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) = 0. \quad (4.3.4-2)$$

При получении этого результата учитывалось, что скорость движения жидкости равна нулю на стенах поры  $S_w$ . Конечно, неудобно, что здесь имеет место локальное среднее по объему  $\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}$ , а не произведение локальных средних по объему  $\rho \mathbf{v}$ .

Для частного случая несжимаемой жидкости результат более простой:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (4.3.4-3)$$

Именно поэтому с несжимаемой жидкостью легче оперировать при рассмотрении течений через пористые среды.

**4.3.5. Локальное усреднение по объему первого закона Коши.** Можно начать, как в § 4.3.2, где мы сначала рассматривали локально усредненное по объему уравнение неразрывности. Выберем некоторую точку  $\mathbf{z}$  в пористой среде и проинтегрируем первый закон Коши по объему  $V(f)$  области пространства, занятой жидкостью и ограниченной поверхностью  $S$ , связанной с  $\mathbf{z}$ :

$$\frac{1}{V} \int_{V(f)} \left[ \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \mathbf{f} \right] dV = 0. \quad (4.3.5-1)$$

Поменяем местами операции интегрирования по объему и дифференцирования по времени в первом члене левой части уравнения

$$\frac{1}{V} \int_{V(f)} \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV = \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}}{\partial t}. \quad (4.3.5-2)$$

Далее, используя теорему § 4.3.3, представим второй и третий члены уравнения (4.3.5-1) как

$$\frac{1}{V} \int_{V(f)} \operatorname{div} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dV = \operatorname{div} (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}) \quad (4.3.5-3)$$

и

$$\frac{1}{V} \int_{V(f)} \operatorname{div} \mathbf{T} dV = \operatorname{div} \bar{\mathbf{T}} + \frac{1}{V} \int_{S_w} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.3.5-4)$$

При получении уравнения (4.3.5-3) учитывалось, что вектор скорости должен быть равен нулю на границе раздела фаз твердое тело — жидкость  $S_w$ . С учетом уравнений (4.3.5-2) — (4.3.5-4) соотношение (4.3.5-1) принимает вид:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\rho} \bar{v} \bar{v}) = \operatorname{div} \bar{T} + \bar{\rho} \bar{f} + \frac{1}{V} \int_{S_w} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.3.5-5)$$

В дальнейшем мы ограничимся несжимаемой жидкостью и предположим, что всеми инерционными эффектами можно пренебречь в локальном усреднении по объему первого закона Коши. Удобно предположить, что внешнюю силу на единицу массы  $\mathbf{f}$  можно представить через скалярный потенциал  $\varphi$ :

$$\mathbf{f} = -\nabla \varphi. \quad (4.3.5-6)$$

При этих ограничениях уравнение (4.3.5-5) упрощается:

$$\operatorname{div}(\bar{T} - \bar{\rho} \bar{\varphi} \mathbf{I}) + \frac{1}{V} \int_{S_w} (\mathbf{T} - \bar{\rho} \bar{\varphi} \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (4.3.5-7)$$

или

$$\nabla(\bar{\mathcal{P}} - \bar{p}_0) - \operatorname{div} \bar{S} + g = 0. \quad (4.3.5-8)$$

Здесь  $\bar{\mathcal{P}}$  — модифицированное давление:

$$\bar{\mathcal{P}} = p + \bar{\rho} \bar{\varphi}, \quad (4.3.5-9)$$

а  $\bar{S}$  — тензор избыточного напряжения. Постоянное исходное или окружающее давление  $p_0$  вводится здесь для того, чтобы можно было определить:

$$g = -\frac{1}{V} \int_{S_w} [\mathbf{T} + (p_0 - \bar{\rho} \bar{\varphi}) \mathbf{I}] \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.3.5-10)$$

как силу на единицу объема, с которой жидкость действует на стенки поры, заключенной внутри  $S$ , исключая гидростатические силы, а также все другие, возникающие за счет давления окружающей среды. Эта сила  $g$  связана только с движением жидкости.

Для несжимаемой ньютоновской жидкости

$$\bar{S} = \mu [\nabla \bar{v} + (\nabla \bar{v})^T]. \quad (4.3.5-11)$$

Преобразование Грина из § 4.3.3, а также то, что скорость жидкости на стенках поры равна нулю, позволяют утверждать, что

$$\bar{\nabla} \bar{v} = \frac{1}{V} \int_{V(f)} \nabla \bar{v} dV = \frac{1}{V} \int_{S_e + S_w} \bar{v} \mathbf{n} dS = \bar{\nabla} \bar{v}. \quad (4.3.5-12)$$

Точно такие же аргументы можно использовать, чтобы показать, что

$$(\nabla \bar{v})^T = (\nabla \bar{v})^T. \quad (4.3.5-13)$$

Следовательно,

$$\bar{S} = \mu [\bar{\nabla} \bar{v} + (\bar{\nabla} \bar{v})^T] \quad (4.3.5-14)$$

и

$$\operatorname{div} \bar{S} = \mu \operatorname{div}(\bar{\nabla} \bar{v}). \quad (4.3.5-15)$$

Итак, если пренебречь всеми инерционными эффектами и предположить, что внешнюю силу на единицу массы можно представить градиентом скалярного потенциала, локально усредненное по объему уравнение первого закона Коши для несжимаемой ньютоновской жидкости можно записать в виде

$$\nabla(\overline{\mathcal{P}} - p_0) - \mu \operatorname{div}(\nabla \bar{v}) + g = 0. \quad (4.3.5-16)$$

В следующем параграфе мы будем рассматривать эмпирические соотношения для  $g$ .

**4.3.6. Эмпирические соотношения для  $g$ .** В этом параграфе, используя три примера, покажем, как с помощью экспериментальных данных можно получить соотношения для величины  $g$ , введенной в § 4.3.5. Будем исходить из четырех положений:

1. Сила на единицу объема  $g$  не зависит от системы отсчета:

$$\begin{aligned} g^* &= -\frac{1}{V} \int_{S_w} [\mathbf{T}^* + (p_0 - \rho \varphi) \mathbf{I}] \cdot \mathbf{n}^* dS = \\ &= -\frac{1}{V} \int_{S_w} \mathbf{Q} \cdot [\mathbf{T} + (p_0 - \rho \varphi) \mathbf{I}] \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{Q} \cdot g. \end{aligned} \quad (4.3.6-1)$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  может зависеть от времени и быть ортогональным тензором второго ранга.

2. Предполагается, что принцип независимости материала от системы отсчета, введенный в § 2.3.1, применим к любому эмпирическому соотношению, полученному для  $g$ .

3. Теорема Бэкингема — Пая налагает дальнейшие ограничения на вид любого выражения для  $g$ .

4. Поверхность усреднения  $S$  достаточно велика, чтобы можно было предположить, что  $g$  не является явной функцией положения в пористой структуре; она вполне может быть неявной функцией положения в результате зависимости ее от других величин.

**Пример 1. Течение ньютоновской жидкости через неориентированную среду.** Предположим, что  $g$  — функция разности локальной средней скорости жидкости  $\bar{v}$  и локальной средней скорости твердого тела  $\bar{u}$ :

$$g = \hat{g}(\bar{v} - \bar{u}). \quad (4.3.6-2)$$

В этом выражении подразумевается также функциональная зависимость от нескольких скаляров, таких как пористость, характерная длина пористой среды и вязкость жидкости. Пусть

$$\bar{u} \equiv \frac{1}{V} \int_{V - V_{(f)}} \bar{v} dV. \quad (4.3.6-3)$$

С учетом принципа независимости материала от системы отсчета функциональная зависимость между этими величинами должна быть одной и той же в любой системе отсчета. Это означает, что

$$g^* = \mathbf{Q} \cdot g = \mathbf{Q} \cdot \hat{g}(\bar{v} - \bar{u}) = \hat{g}[\mathbf{Q} \cdot (\bar{v} - \bar{u})], \quad (4.3.6-4)$$

где  $g$  — изотропная функция [1];

$$\hat{g}(\bar{v} - \bar{u}) = \mathbf{Q}^T \cdot \hat{g}[\mathbf{Q} \cdot (\bar{v} - \bar{u})]. \quad (4.3.6-5)$$

Согласно теореме представления для изотропной векторной функции от одного векторного аргумента [1] можно записать:

$$g = \hat{g}(\bar{v} - \bar{u}) = R[\bar{v} - \bar{u}]. \quad (4.3.6-6)$$

При этом подразумевается, что коэффициент сопротивления  $R$  есть функция локальной усредненной скорости жидкости относительно локальной усредненной скорости твердого тела  $|\bar{v} - \bar{u}|$ ; кроме того, он является функцией вязкости жидкости  $\mu$ , а также характерной длины  $l_0$  пористой среды

$$R = R(|\bar{v} - \bar{u}|, \mu, l_0). \quad (4.3.6-7)$$

При этом плотность жидкости не учитывается, поскольку она не входит в локально усредненное по объему уравнение первого закона Коши (4.3.5-8), а также в локально усредненное по объему уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости (4.3.4-6). Согласно теореме Бэкингема — Пая [9] уравнение (4.3.6-7) можно записать, используя постоянную безразмерную проницаемость  $k^*$ :

$$R = \frac{\mu}{l_0^2 k^*}. \quad (4.3.6-8)$$

Итак, уравнения (4.3.6-6) и (4.3.6-8) можно использовать для описания силы на единицу объема, с которой действует несжимаемая newtonовская жидкость на неориентированную пористую структуру, исключая гидростатическую силу и силы, связанные с давлением окружающей среды.

*Пример 2. Течение вязкоупругой жидкости через неориентированную среду.* По вторым рассуждения примера 1 для несжимаемой вязкоупругой жидкости. Для того чтобы использовать результаты для широкого круга задач, предположим, что поведение этой вязкоупругой жидкости можно описать моделью простой нолловской жидкости, рассматриваемой в § 2.3.4.

Результат (4.3.6-6), полученный в примере 1, применим также и здесь. Необходимо дополнительно уточнить, что коэффициент сопротивления  $R$  есть функция характерной вязкости  $\mu_0$  и характерного времени  $s_0$  жидкости, а также  $|\bar{v} - \bar{u}|$  и характерной длины  $l_0$ :

$$R = R(|\bar{v} - \bar{u}|, \mu_0, s_0, l_0). \quad (4.3.6-9)$$

Теорема Бэкингема — Пая [9] позволяет заключить, что

$$R = \frac{\mu_0}{l_0^2 k^*}, \quad (4.3.6-10)$$

где  $k^*$  есть функция локального числа Вайссенберга:

$$k^* = k^*(N_{Wi}); \quad (4.3.6-11)$$

$$N_{Wi} \equiv \frac{s_0 |\bar{v} - \bar{u}|}{l_0}. \quad (4.3.6-12)$$

Предваряя результат § 4.3.10, мы можем постулировать следующее соотношение как альтернативу уравнению (4.3.6-9):

$$R = R(|\nabla(\bar{J}^* - p_0)|, \mu_0, s_0, l_0). \quad (4.3.6-13)$$

Согласно теореме Бэкингема — Пая [9]

$$R = \frac{\mu_0}{l_0^2 k^*}, \quad (4.3.6-14)$$

где

$$k^* = k^* \left( \frac{|\nabla(\bar{J}^* - p_0)| l_0 s_0}{\mu_0} \right). \quad (4.3.6-15)$$

Итак, уравнения (4.3.6-6) и (4.3.6-10) описывают силу на единицу объема, с которой несжимаемая вязкоупругая жидкость действует на неориентированную пористую структуру, пока поведение жидкости представляется простой нолловской жидкостью. Безразмерная проницаемость  $k^*$  должна рассматриваться как функция числа Вайссенберга  $N_{Wi}$ . Как указывалось в § 2.3.4 (см. также [28, 29]), эмпирическое соотношение

этого типа можно получить только для одной жидкости, поскольку функционал  $\sum_{i=0}^{\infty}$

в модели простой жидкости полностью не определяется. Но если нас интересует только одна жидкость, то совсем нет необходимости иметь конкретное значение для характерной вязкости  $\mu_0$  и характерного времени  $s_0$ . Значит, пока речь идет об этом эмпириче-

ском соотношении, можно избежать обширного (и, наверное, довольно неопределенного) исследования поведения материала в вискозиметрических приборах.

Экспериментальные данные [25] (см. также § 4.3.11) показывают, что для ограниченного диапазона  $|\nabla(\bar{P}-p_0)|$  соотношение типа (4.3.6-14) должно иметь вид:

$$1/R = m(l_0)^{n+1} |\nabla(\bar{P}-p_0)|^{n-1}. \quad (4.3.6-16)$$

Для того чтобы учесть ньютоновское поведение при очень низких значениях  $\nabla(\bar{P}-p_0)$ , будем иметь:

$$1/R = \alpha(l_0)^2 [1 + (\beta l_0 |\nabla(\bar{P}-p_0)|)^{1-n}]^{-1}. \quad (4.3.6-17)$$

Уравнения (4.3.6-16) и (4.3.6-17) аналогичны моделям степенной жидкости и жидкости Эллиса из § 2.3.3. Однако не следует ожидать, что, например, между параметрами уравнения (4.3.6-17) и параметрами модели Эллиса обязательно должна существовать какая-либо связь. Эмпирические уравнения (4.3.6-16) и (4.3.6-17) могут использоваться при обобщении данных для течения простых нонньютоновских жидкостей в пористых средах.

*Пример 3. Течение ньютоновской жидкости в ориентированной среде.* Не следует ожидать, что уравнение (4.3.6-6) применимо к течению несжимаемой ньютоновской жидкости через пористую структуру, в которой диаметр частицы  $l$  есть функция координат. Для такой структуры необходимо модифицировать уравнение (4.3.6-2) с учетом зависимости от дополнительных векторных и, возможно, тензорных величин. Например, можно постулировать зависимость  $g$  от локального градиента диаметра частицы, а также от  $\bar{v}-\bar{u}$ :

$$g = \hat{g}(\bar{v}-\bar{u}, \nabla l). \quad (4.3.6-18)$$

На какое-то время пренебрежем зависимостью  $g$  от  $\mu$  и  $l$ . Принцип независимости материала от системы отсчета требует, чтобы величина  $\hat{g}$  также была изотропной функцией:

$$\hat{g}(\bar{v}-\bar{u}, \nabla l) = \mathbf{Q}^T \cdot \hat{g}[\mathbf{Q} \cdot (\bar{v}-\bar{u}), \mathbf{Q} \cdot \nabla l]. \quad (4.3.6-19)$$

Согласно теоремам представления Спенсера и Ривлина [30] и Смита [16] наиболее общее полиномиальное представление изотропной векторной функции от двух векторов имеет вид:

$$g = \varphi_{(1)}(\bar{v}-\bar{u}) + \varphi_{(2)}\nabla l. \quad (4.3.6-20)$$

Здесь  $\varphi_{(1)}$  и  $\varphi_{(2)}$  — скалярные многочлены от

$$|\bar{v}-\bar{u}|, |\nabla l| \text{ и } [(\bar{v}-\bar{u}) \cdot \nabla l]^1;$$

$$\text{для } i=1, 2 \quad \varphi_{(i)} = \varphi_{(i)}[|\bar{v}-\bar{u}|, |\nabla l|, (\bar{v}-\bar{u}) \cdot \nabla l, \mu, l]. \quad (4.3.6-21)$$

Используя теорему Бэкингема — Пая [9], получаем:

$$\varphi_{(1)} = \frac{\mu}{l^2 k^*_{(2)}}; \quad (4.3.6-22)$$

$$\varphi_{(2)} = \frac{\mu |\bar{v}-\bar{u}|}{l^2 k^*_{(2)}}, \quad (4.3.6-23)$$

где

$$\text{для } i=1, 2 \quad k^*_{(i)} = k^*_{(i)} \left( |\nabla l|, \frac{|\bar{v}-\bar{u}|}{|\bar{v}-\bar{u}|} \cdot \nabla l \right). \quad (4.3.6-24)$$

Как и следовало ожидать, при  $|\bar{v}-\bar{u}|=0$   $\varphi_{(2)}=0$ , так как при этом условии  $g=0$ .

<sup>1</sup> При использовании теоремы Спенсера и Ривлина мы отождествляем вектор  $b$ , содержащий ковариантные компоненты  $b_i$ , с антисимметричным тензором, который имеет контравариантные компоненты  $e^{ijk} b_i$ . Эта теорема требует, чтобы дополнительный член в уравнении (4.3.6-20) был пропорционален векторному произведению  $[(\bar{v}-\bar{u}) \wedge \nabla l]$ . Эта величина не соответствует требованию изотропности  $g$  [1] и, следовательно, опускается.

Итак, уравнения (4.3.6-20) и (4.3.6-22) — (4.3.6-24) можно использовать для выражения силы на единицу объема, с которой несжимаемая ньютоновская жидкость действует на ориентированную структуру, так что ориентация структуры полностью описывается локальным градиентом диаметра частицы. Полученное выражение для  $\mathbf{g}$  несколько сложнее соотношения для неориентированной структуры (пример 1).

**4.3.7. Обобщение результатов для несжимаемой ньютоновской жидкости.** В § 4.3.4 установлено, что локально усредненное по объему уравнение неразрывности требует, чтобы

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (4.3.7-1)$$

В § 4.3.5 и 4.3.6 показано, что если инерционными эффектами можно пренебречь, а внешнюю силу на единицу массы представить как градиент скалярного потенциала, локально усредненное по объему уравнение первого закона Коши для течения несжимаемой ньютоновской жидкости в неориентированной пористой среде имеет вид:

$$\nabla(\overline{\mathcal{P}} - p_0) - \mu \operatorname{div}(\nabla \bar{\mathbf{v}}) + \frac{\mu}{l^2 k^*_0} \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (4.3.7-2)$$

Здесь  $p_0$  — отсчетное или внешнее давление;  $l_0$  — характерная длина пористой среды;  $k^*_0$  — безразмерная постоянная. При записи (4.3.7-2) учитывалось, что в системе отсчета, соответствующей уравнению (4.3.5-16), скорость пористой среды считается равной нулю. Интересно, что Бринкман [31] предложил подобное соотношение без вывода.

В § 4.3.6 мы рассматривали течение несжимаемой ньютоновской жидкости через такую пористую среду, в которой ориентация градиента «локального диаметра поры»  $l$  играет важную роль. В § 4.3.5 и 4.3.6 приводится локально усредненное по объему уравнение первого закона Коши для таких условий, когда инерционными эффектами можно пренебречь, а внешнюю силу на единицу массы представить через скалярный потенциал:

$$\nabla(\overline{\mathcal{P}} - p_0) - \mu \operatorname{div}(\nabla \bar{\mathbf{v}}) + \frac{\mu}{l^2 k^*_{(1)}} \bar{\mathbf{v}} + \frac{\mu |\bar{\mathbf{v}}|}{l^2 k^*_{(2)}} \nabla l = 0, \quad (4.3.7-3)$$

где

$$\text{для } i = 1, 2 \quad k^*_{(i)} = k^*_{(i)} \left( |\nabla l|, \frac{\bar{\mathbf{v}}}{|\bar{\mathbf{v}}|} \cdot \nabla l \right). \quad (4.3.7-4)$$

При выводе уравнений (4.3.7-3) и (4.3.7-4) учитывалось, что в рассматриваемой системе отсчета пористая структура неподвижна.

За исключением второго члена слева, уравнение (4.3.7-2) имеет вид закона Дарси для неориентированной пористой структуры. Уравнение (4.3.7-2) можно записать в виде [32]:

$$\nabla(\overline{\mathcal{P}} - p_0) - \mu \operatorname{div}(\nabla \bar{\mathbf{v}}) + \frac{\mu}{l^2} \mathbf{R}^* \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (4.3.7-5)$$

где

$$\mathbf{R}^* = \frac{1}{k^*_{(1)}} \mathbf{I} + \frac{|\bar{\mathbf{v}}|}{k^*_{(2)} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla l)} \nabla l \nabla l. \quad (4.3.7-6)$$

Опять мы видим, что, за исключением второго слагаемого, уравнение (4.3.7-5) аналогично закону Дарси (4.3.1-4) для течения через ориентированную пористую структуру.

Прежде чем перейти к использованию этих уравнений для анализа течений в пористых средах, остановимся на выяснении, как можно использовать локально усредненные по объему переменные для расчета некоторых средних как по площади, так и по объему величин, представляющих практический интерес.

**4.3.8. Средние значения усредненных по объему переменных.** Один из наиболее широко используемых типов плотного слоя представляет собой цилиндрическую трубу, заполненную мелкими частицами (песок, стеклянные шарики, гранулы катализатора и др.). Проанализируем течение через такой слой и найдем распределение локально усредненной по объему скорости. С практической точки зрения самый большой интерес представляет для нас скорость, усредненная по поперечному сечению трубы. Можно предположить, что средняя по поперечному сечению скорость равна среднему по поперечному сечению локально усредненному по объему распределению скорости, поскольку поры в пористой структуре достаточно малы по сравнению с диаметром трубы.

Чтобы подтвердить справедливость этого интуитивного предположения, в этом параграфе мы будем искать значение средних по объему и по площади локально усредненных по объему переменных.

В § 4.1.3 показано, что средняя по площади усредненная по объему переменная может иметь вид:

$$\frac{1}{A} \int_A \bar{f} dA = \frac{1}{AV} \int_A \int_{V(f)} f dV dA. \quad (4.3.8-1)$$

При этом  $\bar{f} = \bar{f}(x, y, z)$ . Полезно иметь несколько более подробные выражения для интеграла в правой части соотношения (4.3.8-1). Поэтому запишем:

$$\frac{1}{A} \int_A \bar{f} dA = \frac{1}{A} \int_A \int_{V(f)} \left[ \frac{1}{V} \int_{V(f)} \int_{V(f)} f(x+X, y+Y, z+Z) dX dY dZ \right] dx dy. \quad (4.3.8-2)$$

Мы не определяем предел интегрирования по объему и площади, поскольку его выбор не важен для нашего доказательства. Так же, как в § 4.1.3, разложим подынтегральное выражение в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x+X, y+Y, z+Z) &= f(x, y, z) + X \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + \\ &+ Y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + Z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) + \dots \end{aligned} \quad (4.3.8-3)$$

Введем для удобства безразмерные переменные

$$X^{**} \equiv \frac{X}{l_0}; \quad Y^{**} \equiv \frac{Y}{l_0}; \quad Z^{**} \equiv \frac{Z}{l_0} \quad (4.3.8-4)$$

и

$$x^* \equiv \frac{x}{L_0}; \quad y^* \equiv \frac{y}{L_0}; \quad z^* \equiv \frac{z}{L_0}, \quad (4.3.8-5)$$

где  $l_0$  — характерная величина пористой структуры, например средний диаметр поры;  $L_0$  — величина, характерная для общей геометрии, на-

пример диаметр трубы. Используя эти безразмерные переменные и уравнение (4.3.8-3), получаем (4.3.8-2) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \int_A \bar{f} dA = & \frac{1}{A^*} \iint_{A^*} \left[ \frac{1}{V^{**}} \iiint_{V_{(f)}^{**}} \left( f + \frac{l_0}{L_0} X^{**} \frac{\partial f}{\partial x^*} + \frac{l_0}{L_0} Y^{**} \frac{\partial f}{\partial y^*} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{l_0}{L_0} Z^{**} \frac{\partial f}{\partial z^*} + \dots \right) dX^{**} dY^{**} dZ^{**} \right] dx^* dy^* = \frac{1}{A} \int_A \bar{f} dA + \\ & + \frac{l_0}{L_0} \left\{ \frac{1}{A^*} \iint_{A^*} \left[ \frac{1}{V^{**}} \iiint_{V_{(f)}^{**}} \left( X^{**} \frac{\partial f}{\partial x^*} + Y^{**} \frac{\partial f}{\partial y^*} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + Z^{**} \frac{\partial f}{\partial z^*} \right) dX^{**} dY^{**} dZ^{**} \right] dx^* dy^* \right\} + \left( \frac{l_0}{L_0} \right)^2 ( \dots ) + \dots \quad (4.3.8-6) \end{aligned}$$

Естественно, что

$$\text{при } \frac{l_0}{L_0} \rightarrow 0 \quad \frac{1}{A} \int_A \bar{f} dA \rightarrow \frac{1}{A} \int_A f dA. \quad (4.3.8-7)$$

Используя такое же рассуждение для средних по объему локально усредненных по объему переменных, находим, что

$$\text{при } \frac{l_0}{L_0} \rightarrow 0 \quad \frac{1}{V} \int_V \bar{f} dV \rightarrow \frac{1}{V} \int_V f dV. \quad (4.3.8-8)$$

Этот вывод был предложен Уайтекером [32].

#### 4.3.9. Течение в трубе с насадкой.

Несжимаемая ньютоновская жидкость течет через неориентированную проницаемую структуру постоянной пористости

$$\Phi = \frac{V_{(f)}}{V}, \quad (4.3.9-1)$$

заключенную в цилиндрическую трубу радиусом  $R$ . Требуется определить локально усредненное по объему распределение скорости для жидкости, а также соответствующую объемную скорость течения через трубу.

Пример на рис. 4.3.9-1 соответствует условиям:

$$\text{при } r=r_0, \theta=0, z=0 \quad \bar{p}=\Psi P_0 \quad (4.3.9-2)$$

и

$$\text{при } r=r_0, \theta=0, z=L \quad \bar{p}=\Psi P_L \quad (4.3.9-3)$$

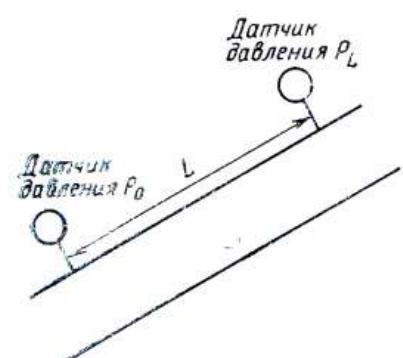


Рис. 4.3.9-1. Течение в трубе с насадкой.

При этом предполагается, что экспериментальные измерения соответствуют:

$$\langle p \rangle \equiv \frac{1}{V_{(f)}} \int_{V_{(f)}} p dV = \frac{\bar{p}}{\Phi}. \quad (4.3.9-4)$$

Из-за конечных размеров поверхности усреднения  $S$  локально усредненная по объему скорость  $\bar{v}$  не будет равна нулю на стенке трубы

бы. Но по мере продвижения внутрь стенки значение  $\bar{v}$  уменьшается, поскольку меньшая часть поверхности усреднения пересекает пористую структуру, содержащую жидкость. На некотором расстоянии  $\epsilon$  внутри непроницаемой стенки, которое будет зависеть от выбора поверхности усреднения  $S$ ,  $\bar{v}$  стремится к нулю:

$$\text{при } r = r_0 + \epsilon, \bar{v} = 0. \quad (4.3.9-5)$$

Решение вида

$$\bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0; \quad \bar{v}_z = \bar{v}_z(r) \quad (4.3.9-6)$$

удовлетворяет локально усредненному по объему уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости (4.3.4-3). Три компоненты уравнения (4.3.7-2) имеют вид:

$$\frac{\partial (\bar{J} - p_0)}{\partial r} = \frac{\partial (\bar{J} - p_0)}{\partial \theta} = 0 \quad (4.3.9-7)$$

и

$$\frac{\partial (\bar{J} - p_0)}{\partial z} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right) - \frac{\mu}{l^2_0 k^*_0} \bar{v}_z. \quad (4.3.9-8)$$

Эти уравнения означают, что

$$C = \frac{d(\bar{J} - p_0)}{dz} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\bar{v}_z}{dr} \right) - \frac{\mu}{l^2_0 k^*_0} \bar{v}_z = \text{const.} \quad (4.3.9-9)$$

Проинтегрировав уравнение (4.3.9-9) с граничными условиями (4.3.9-2) и (4.3.9-3), найдем:

$$C = -\frac{1}{L} \{ \Psi(P_0 - P_L) + \rho [\bar{\varphi}(r_0, 0, 0) - \bar{\varphi}(r_0, 0, L)] \}, \quad (4.3.9-10)$$

где  $\varphi = \varphi(r, \theta, z)$ . Если в соотношение (4.3.9-9) ввести

$$u \equiv \bar{v}_z + \frac{C l^2_0 k^*_0}{\mu} \quad (4.3.9-11)$$

и

$$r^* = \frac{r}{r_0 + \epsilon}, \quad (4.3.9-12)$$

оно запишется в форме уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 u}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{du}{dr^*} - N^2 u = 0. \quad (4.3.9-13)$$

Здесь

$$N \equiv \frac{r_0 + \epsilon}{l_0 \sqrt{k^*_0}}. \quad (4.3.9-14)$$

Граничным условием для (4.3.9-13) является то, что  $u$  остается конечным при  $r^* = 0$ , а также

$$u = \frac{C l^2_0 k^*_0}{\mu} \quad \text{при } r^* = 1. \quad (4.3.9-15)$$

Искомым решением будет:

$$u = \frac{C l^2_0 k^*_0}{\mu} \frac{I_0(Nr^*)}{I_0(N)} \quad (4.3.9-16)$$

или

$$\bar{v}_z = -\frac{C l^2 \cdot k^* \cdot v_0}{\mu} \left[ 1 - \frac{I_0(Nr^*)}{I_0(N)} \right]. \quad (4.3.9-17)$$

Под  $I_0$  мы понимаем модифицированную функцию Бесселя первого рода нулевого порядка [33].

Объемную скорость течения в трубе с насадкой можно рассчитать из уравнения (4.3.9-17):

$$Q = 2\pi(r_0 + \epsilon)^2 \int_0^1 \bar{v}_z r^* dr^* = \frac{-\pi(r_0 + \epsilon)^2 l^2 \cdot k^* \cdot C}{\mu} \left( 1 - \frac{1}{I_0(N)} \right). \quad (4.3.9-18)$$

Для достаточно больших значений  $N$  уравнение (4.3.9-17) утверждает, что скорость  $\bar{v}_z$  существенно постоянна по площади поперечного сечения кроме непосредственной окрестности стенки, где она стремится к нулю. Уравнение (4.3.9-18) показывает, что когда  $N \rightarrow \infty$ , объемная скорость течения через трубу есть произведение скорости на оси трубы на площадь поперечного сечения.

Рассчитаем значение пристеночного эффекта на конкретном примере. Рассмотрим трубу диаметром 2 см с насадкой из сферических частиц диаметром 2 мм (пористость  $\Psi=0,3$ ). Сравнивая уравнение (4.3.7-12) с обобщенным выражением закона Дарси (4.3.1-3), находим:

$$l^2 \cdot k^* \approx k, \quad (4.3.9-19)$$

где  $k$  — проницаемость плотного слоя. Из уравнения Блейка — Козени [14] получим:  $k=1.5 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>. Если взять величину  $\epsilon$  равной  $3l_0$ , будем иметь:

$$N \approx 400. \quad (4.3.9-20)$$

В этом случае в уравнениях (4.3.9-17) и (4.3.9-18) величина пристеночного эффекта незначительна.

**4.3.10. Пренебрежение дивергенцией локально усредненного по объему избыточного напряжения.** Изучение течения в трубе с насадкой в § 4.3.9 предполагает, что во многих случаях влиянием дивергенции локально усредненного по объему избыточного напряжения в уравнении движения для пористой среды (4.3.5-8) можно пренебречь. В этом параграфе будет обоснована возможность пренебрежения этим членом для течения несжимаемой ньютоновской и несжимаемой вязкоупругой жидкостей в неориентированной пористой среде.

Действуя аналогично, это рассуждение можно обобщить на ориентированные среды.

Уравнение (4.3.7-2) описывает течение несжимаемой ньютоновской жидкости через неориентированную пористую структуру. В безразмерных переменных оно имеет вид:

$$\frac{P_0 l^2 \cdot k^* \cdot v_0}{L_0 \mu \cdot v_0} \nabla (\overline{\mathcal{P}} - p_0)^* - \frac{l^2 \cdot k^*}{L^2} \operatorname{div} (\nabla \bar{v}^*) + \bar{v}^* = 0. \quad (4.3.10-1)$$

Здесь  $P_0$  — характерное давление;  $v_0$  — характерная скорость;  $L_0$  — длина, характерная для геометрии в целом. Если, как мы предполагали в § 4.3.9,  $l^2 \cdot k_0$  есть величина того же порядка, что и проницаемость  $k$  в уравнении закона Дарси (4.3.1-3), то соотношение  $l^2 \cdot k^* \cdot v_0 / L^2$  должно быть очень небольшим по значению для обычных задач в пористой сре-

де. Следовательно, вторым членом в левой части уравнения (4.3.10-1) по сравнению с третьим членом можно пренебречь. Тогда получим:

$$\nabla(\overline{\mathcal{P}} - p_0) + \frac{\mu_0}{l^2_0 k^*} \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (4.3.10-2)$$

Однако, следует иметь в виду, что это интуитивное предположение не должно выполняться во всех случаях обязательно. Ведь не существует теоремы, которая утверждала бы, что в дифференциальном уравнении членом, умноженным на малый параметр, можно пренебречь.

Такое же рассуждение применимо также к вязкоупругой жидкости, описываемой моделью простой нолловской жидкости из § 2.3.4. Для течения через неориентированную пористую структуру из уравнений (4.3.5-8), (4.3.6-6) и (4.3.6-10) имеем:

$$\nabla(\overline{\mathcal{P}} - p_0) - \operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\mu_0}{l^2_0 k^*} \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (4.3.10-3)$$

где  $k^*$  есть функция числа Вайссенберга  $N_{Wi}$ :

$$N_{Wi} \equiv \frac{s_0 |\bar{\mathbf{v}}|}{l_0}. \quad (4.3.10-4)$$

Так же как и раньше, введем безразмерные переменные, определив дополнительно:

$$\bar{\mathbf{S}}^* \equiv \frac{s_0 \bar{\mathbf{S}}}{\mu_0}. \quad (4.3.10-5)$$

Это позволяет записать уравнение (4.3.10-3) в безразмерном виде

$$\frac{P_0 l^2_0 k^*}{L_0 \mu_0 v_0} \nabla(\overline{\mathcal{P}} - p_0)^* - \frac{l^2_0 k^*}{s_0 L_0 v_0} \operatorname{div} \bar{\mathbf{S}}^* + \bar{\mathbf{v}}^* = 0. \quad (4.3.10-6)$$

Чтобы получить оценку параметра, на который умножается второе слагаемое уравнения (4.3.10-6), рассмотрим пример, используя некоторые типичные значения для различных характерных величин, соответствующих течению в нефтеносной породе:  $l^2_0 k^* \approx 2,5 \cdot 10^{-9}$  см<sup>2</sup>;  $s_0 = 10^{-2}$  с;  $v_0 = 3,5 \cdot 10^{-4}$  см/с;

$$\frac{l^2_0 k^*}{s_0 L_0 v_0} \approx \frac{7 \cdot 10^{-4}}{L_0}. \quad (4.3.10-7)$$

Характерное время  $10^{-2}$  с, по-видимому, приемлемо для некоторых вязкоупругих жидкостей [34, 35]. Если учесть, что  $L_0$  — длина, характерная для геометрии в целом, то вторым членом в уравнении (4.3.10-6) по сравнению с третьим можно пренебречь:

$$\nabla(\overline{\mathcal{P}} - p_0) + \frac{\mu_0}{l^2_0 k^*} \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (4.3.10-8)$$

Пренебрегая дивергенцией локально усредненного по объему избыточного давления при получении уравнений (4.3.10-2) и (4.3.10-8), мы соответственно уменьшили порядок дифференциального уравнения. Это наиболее очевидно из сравнения уравнения (4.3.10-1) с (4.3.10-2) для несжимаемой ньютоновской жидкости. При таком уменьшении порядка уравнения теряется возможность удовлетворить граничным условиям для тангенциальных компонент локально усредненного по объему вектора скорости. Такая ситуация аналогична задаче из § 3.4.3 для по-

тенициального течения. Поскольку нас не интересует распределение скорости в непосредственной близости от непроницаемой границы пористой среды, предложенное здесь приближение целиком удовлетворительно.

Как пример задачи, которая может представить затруднение, если пренебречь дивергенцией локально усредненного по объему избыточного давления, рассмотрим течение в трубе с пористыми стенками. Описание локально усредненного по объему распределения скорости в непосредственной близости от границ пористой среды будет, по-видимому, существенным при определении соответствующих граничных условий для течения жидкости в трубе. Поскольку тангенциальные компоненты скорости на стенке не обязательно стремятся к нулю, можно ожидать, что экспериментальные данные явно обнаружат скольжение на стенке.

Итак, поскольку инерционными эффектами можно пренебречь, а вектор внешних сил представить через скалярный потенциал, почти всегда можно записать локально усредненное по объему уравнение первого закона Коши в виде

$$\Delta(\overline{\mathcal{P}} - p_0) + g = 0, \quad (4.3.10)$$

где сила на единицу объема  $g$ , с которой жидкость действует на пористую структуру, должна определяться из эмпирического соотношения (§ 4.3.6).

Каким образом можно связать эти результаты с уравнением баланса силы, которое использовалось в литературе до настоящего времени? Для течения несжимаемой ньютоновской жидкости через неориентированную пористую структуру уравнение (4.3.10-9) принимает вид (4.3.10-2). Сравнение уравнения (4.3.10-2) с (4.3.1-3) показывает, что полученный результат является обобщенным законом Дарси, причем смысл используемых переменных совершенно ясен. Для течения несжимаемой ньютоновской жидкости через ориентированную пористую структуру типа рассматриваемой в § 4.3.6, уравнение (4.3.10-9) принимает вид:

$$\nabla(\overline{\mathcal{P}} - p_0) + \frac{\mu}{l^2} \mathbf{R}^* \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (4.3.10-10)$$

где

$$\mathbf{R}^* = \frac{1}{k^*_{(1)}} \mathbf{I} + \frac{|\bar{\mathbf{v}}|}{k^*_{(2)} (\mathbf{v} \cdot \nabla l)} \nabla l \nabla l \quad (4.3.10-11)$$

и

$$k^*_{(i)} = k^*_{(i)} \left( |\nabla l|, \frac{\bar{\mathbf{v}}}{|\bar{\mathbf{v}}|} \cdot \nabla l \right) \text{ для } i = 1, 2. \quad (4.3.10-12)$$

Сравнение с уравнением (4.3.1-4) обнаруживает, что формула (4.3.10-11) является выражением для  $l^2 \mathbf{K}^{-1}$ . Поэтому  $\mathbf{K}^{-1}$  должно быть симметричным, хотя не вполне очевидно, что оно всегда должно быть обратимым, т. е. для данного  $\mathbf{K}^{-1}$  всегда существует  $\mathbf{K}$ .

**4.3.11. Течение вязкоупругой жидкости в трубе.** В качестве примера использования уравнения (4.3.10-9) рассмотрим течение вязкоупругой жидкости в трубе, как показано на рис. 4.3.9-1. Предположим, что пористая структура не ориентирована и что поведение жидкости может быть описано моделью простой нолловской жидкости (§ 2.3.4). Чтобы быть точным, предположим, что  $g$ , т. е. сила на единицу объема, с которой жидкость действует на пористую среду, описывается уравнениями (4.3.6-6) и (4.3.6-17).

Границными условиями будут:

$$\bar{p} = \Psi P_0 \text{ при } r=r_0, \theta=0, z=0; \quad (4.3.11-1)$$

$$\bar{p} = \Psi P_L \text{ при } r=r_0, \theta=0, z=L \quad (4.3.11-2)$$

и

$$\bar{v}_r = 0 \text{ при } r=r_0 + \epsilon. \quad (4.3.11-3)$$

Локально усредненное по объему уравнение неразрывности (4.3.4-3), а также граничное условие (4.3.11-3) удовлетворяются распределением скорости в виде

$$\bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0; \quad \bar{v}_z = \bar{v}_z(r). \quad (4.3.11-4)$$

При этих предположениях с учетом уравнения (4.3.6-6) найдем, что три компоненты локально усредненного по объему уравнения первого закона Коши имеют вид:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial (\bar{J}^e - p_0)}{\partial z} + \bar{v}_z = 0 \quad (4.3.11-5)$$

и

$$\frac{\partial (\bar{J}^e - p_0)}{\partial r} = \frac{\partial (\bar{J}^e - p_0)}{\partial \theta} = 0. \quad (4.3.11-6)$$

С помощью (4.3.6-17) выражение (4.3.11-5) можно переписать:

$$\bar{v}_z = - \frac{d (\bar{J}^e - p_0)}{dz} \alpha l_0^2 \left\{ 1 + \left[ - \beta l_0 \frac{d (\bar{J}^e - p_0)}{dz} \right]^{1-1} \right\}. \quad (4.3.11-7)$$

Из этого уравнения следует:

$$\frac{d (\bar{J}^e - p_0)}{dz} = C = \text{const.} \quad (4.3.11-8)$$

Интегрируя при граничных условиях (4.3.11-1) и (4.3.11-2), получаем:

$$C = - \frac{1}{L} \{ \Psi (P_0 - P_L) + \rho [\bar{\varphi}(r_0, 0, 0) - \bar{\varphi}(r_0, 0, L)] \}, \quad (4.3.11-9)$$

где локально усредненный по объему скалярный потенциал силы равен  $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(r, \theta, z)$ .

Если коэффициент сопротивления описывается уравнением (4.3.6-16), то для той же задачи имеем:

$$\bar{v}_z = m l_0^{n+1} \left[ - \frac{d (\bar{J}^e - p_0)}{dz} \right]^n. \quad (4.3.11-10)$$

Здесь также применимы уравнения (4.3.11-8) и (4.3.11-9).

Используя метод, предложенный в работе [36], мы привели уравнение (4.3.11-7) в соответствие с данными Кристофера [37] для 1,25%-ного водного раствора карбоксиметилцеллюлозы, фильтрующегося через слой длиной 1,76 см. Из рис. 4.3.11-1 видно очень хорошее соответствие с экспериментальными данными. Этот рисунок показывает также, что уравнение (4.3.11-10) весьма удовлетворительно согласуется с данными [38, 39] для 18,5%-ного раствора карбовакса (полиэтиленгликоль, средняя молекулярная масса 20,000). Таким образом подтверждается потенциальная применимость уравнений (4.3.6-16) и (4.3.6-17).

Целесообразно подчеркнуть, что функция уравнений (4.3.11-7) и (4.3.11-10) состоит не в обобщении и экстраполяции данных для определенной жидкости в определенной пористой структуре. Их ценность заключается прежде всего в том, что они позволяют рассчитать на основе данных для одиночного плотного слоя поведение жидкости этого типа для большого класса пористых материалов аналогичной геометрии с различным средним диаметром пор  $l_0$ . Под пористыми средами и аналогичной геометрией мы понимаем пористые структуры,

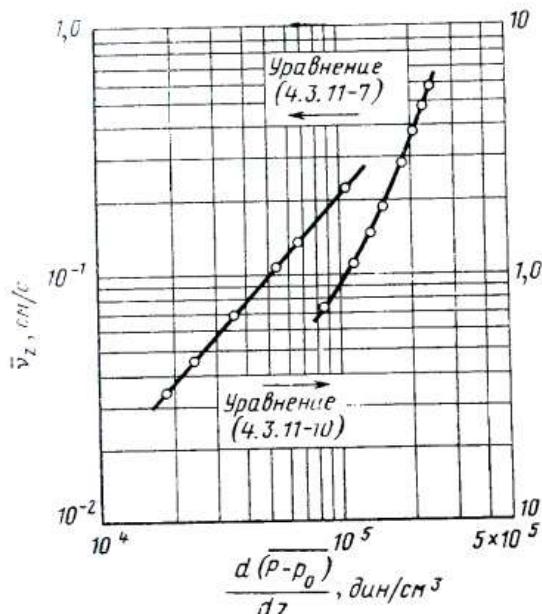


Рис. 4.3.11-1. Сравнение уравнения (4.3.11-7) с данными для 1,25%-ного водного раствора карбоксиметилцеллюлозы [37].  $al_0^2 = 7,14 \cdot 10^{-7} \text{ см}/\text{с}$ ;  $\beta l_0 = 5,49 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{дин}$ ;  $\gamma = 3,5$ . Сравнение уравнений (4.3.11-10) с данными для 18,5%-ного водного раствора карбоксакса полиэтиленгликоль, средняя молекулярная масса 20,000 [38] ( $ml_0^{n+1} = 8,90 \cdot 10^{-6}$ ;  $n = 1,07$ ). Взято из работы [25].

образованные приблизительно одинаковым образом. Например, можно надеяться рассчитать поведение 1%-ного водного раствора карбоксиметилцеллюлозы в большинстве известняковых формаций на основе данных об одном типе известняка. Практическое значение такой экстраполяции показано в работе [40].

#### 4.4. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ БАЛАНСОВ

**4.4.1. Метод интегральных балансов.** Под интегральными уравнениями баланса мы понимаем уравнения, которые описывают накопление любой величины, выраженное с помощью притока и оттока этой величины. Отсюда следует, что система, для которой составляется уравнение баланса, не обязательно является совокупностью материальных частиц. Примером такой системы служит жидкость в баке или топливо в реактивном самолете, движущегося по произвольной кривой в пространстве. В этих двух случаях система не является материальной, так как жидкость может входить или выходить из бака, а топливо непрерывно расходуется в реактивном двигателе.

Метод интегрального баланса часто используется для решений, в которых систему рассматривают как единое целое, а отдельными элементами движения жидкости в этой системе пренебрегают. Например, чтобы связать тягу реактивного двигателя со средней скоростью вы-

хлопных газов, нет необходимости проводить подробное исследование распыления жидкого топлива.

Этот процесс распыления может иметь значение для последующего процесса горения и, таким образом, непосредственно влиять на производительность двигателя. Но если средняя скорость выхлопа ракеты известна, то у нас достаточно данных для оценки тяги двигателя.

Метод интегральных балансов является одним из методов, наиболее широко используемых в технике, поскольку он позволяет оперировать алгебраическими или относительно простыми дифференциальными уравнениями. Их значения нельзя переоценивать, так как эта простота может ввести в заблуждение в том отношении, что мы часто вынуждены делать ряд аппроксимаций, основанных на интуитивных выводах или сложных экспериментальных данных. Труднее определить, можно ли какой-либо анализ использовать для обобщения экспериментальных данных с заданной погрешностью. Часто говорят, что «хороший инженер» разрабатывает средства для интуитивных выводов. Это, несомненно, справедливо для инженера, с успехом применяющего метод интегральных балансов.

Многие излагаемые здесь идеи относительно метода интегральных балансов высказаны в работе [41].

**4.4.2. Интегральное уравнение баланса массы.** Ключом к составлению уравнения интегральных балансов является обобщенная теорема переноса, обсуждаемая в § 1.3.2 для произвольной системы:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \Psi dV = \int_{V(s)} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dV + \int_{S(s)} \Psi (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (4.4.2-1)$$

Следовательно, эта система имеет объем  $V(s)$  и ограничена замкнутой поверхностью  $S(s)$ ;  $\mathbf{v}_{(s)}$  — скорость замкнутой ограничивающей поверхности, которая может быть функцией положения на поверхности;  $\Psi$  — произвольная величина. В нашем изложении ее единица измерения — единица какой-либо величины на единицу объема.

Сначала запишем уравнение баланса массы для произвольной системы; надо составить уравнение, описывающее скорость изменения массы произвольной системы. Для этого в уравнении (4.4.2-1) возьмем  $\Psi = \rho$  и запишем:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho dV = \int_{V(s)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{S(s)} \rho (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (4.4.2-2)$$

Это уравнение, будучи справедливым, не представляет ценности само по себе, поскольку мы, в общем-то, не имеем представления о зависимости  $\partial \rho / \partial t$  от положения в системе. Мы могли бы определить  $\rho$  в зависимости от координат и времени, решив уравнения неразрывности и первого закона Коши, но при использовании метода интегральных балансов часто лучше избегать этого. Однако, если попытаться сформулировать уравнение баланса массы для большой системы, представляется целесообразным установить смысл уравнения неразрывности, выраждающего понятие сохранения массы в каждой точке вещества.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение неразрывности по нашей системе:

$$\int_{V(s)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{V(s)} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = 0. \quad (4.4.2-3)$$

Используя преобразование Грина для второго интеграла слева, получаем:

$$\oint_{V_{(s)}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{S_{(s)}} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (4.4.2-4)$$

что позволяет нам записать уравнение (4.4.2-2) в более удобной форме

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho dV = \int_{S_{(s)}} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS. \quad (4.4.2-5)$$

Смысл этого уравнения состоит в том, что скорость изменения массы системы равна результирующей скорости, с которой масса поступает в систему. Обратите внимание, как естественно входит сюда скорость жидкости относительно границы системы ( $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}$ ). Поскольку  $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)})$  не равно нулю только на входе и выходе из  $S_{(s)}$  ( $S_{(\text{вх.вых})}$ ), можно записать (4.4.2-5) в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho dV = \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS. \quad (4.4.2-6)$$

Это выражение является интегральным уравнением баланса массы для однофазной системы.

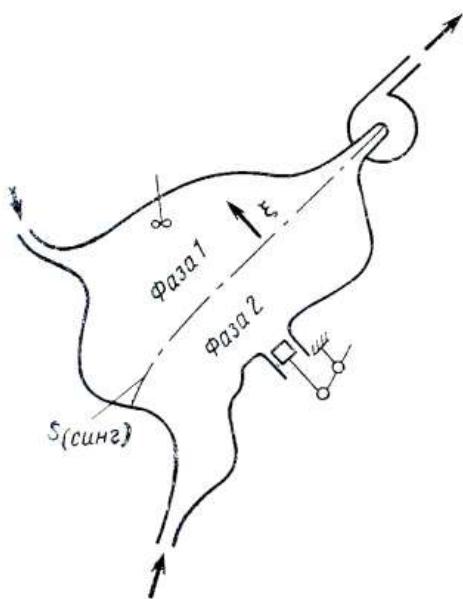


Рис. 4.4.2-1. Двухфазная система.

система состоит только из двух фаз. Каждая фаза в свою очередь может считаться системой, к которой применимо уравнение (4.4.2-6). В соответствии с рис. 4.4.2-1 обозначим область, занятую фазой  $i$  в системе, через  $V_{(i)}$ ; тогда область, занятую всей системой, можно обозначить через  $V_{(s)} = V_{(s1)} + V_{(s2)}$ ; обозначим через  $V_{(s)}$  и  $S_{(\text{вх.вых})}$  входные и выходные поверхности. Некоторые из этих поверхностей могут совпадать с частью входной и выходной поверхностей  $S_{(\text{вх.вых})}$  для системы в целом; другие будут сингулярными поверхностями (границы раздела фаз)  $S_{(\text{синг})}$ , на которых встречаются две фазы, так как нам необходимы

Важно понять, что уравнение (4.4.2-6) применимо только к однофазной системе. Однако на практике мы чаще всего имеем дело с многофазными системами. Например, если мы говорим о массе ракеты, для которой ускорение является функцией времени, наиболее естественным будет выбрать систему, состоящую из ракеты и всего ее содержимого. Эта система будет состоять из миллионов отдельных фаз—газовых, жидких и твердых. Выведем для такой системы уравнение, аналогичное (4.4.2-6).

Для простоты будем считать, что наша произвольная

мо учесть возможность межфазного переноса массы. Сложив выражения, полученные из уравнения (4.4.2-6) для каждой фазы, будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{(s1)}} \rho dV + \frac{d}{dt} \int_{V_{(s2)}} \rho dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{S_{(\text{синг})}} [\rho (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)})] dS. \quad (4.4.2-7)$$

Здесь использованы обозначения § 1.3.3. Если для любого значения  $\Psi$  в какой-то точке на поверхности  $S_{(\text{синг})}$ ,  $\Psi_{(i)}$  соответствует предельному значению  $\Psi$  по мере приближения к этой точке из центра фазы  $i$ , то

$$\text{при } S_{(\text{синг})} [\Psi] = \Psi_{(1)} - \Psi_{(2)}. \quad (4.4.2-8)$$

Единичную нормаль к поверхности  $S_{(\text{синг})}$ , направленную из фазы 2 в фазу 1, обозначим через  $\xi$ ;  $u_\xi$  — скорость смещения  $S_{(\text{синг})}$  [42]. Этот вывод для двухфазных систем легко распространяется на системы, состоящие из любого числа фаз. Уравнение (4.4.2-7) является обобщенным интегральным уравнением баланса массы для многофазной системы.

Обычно мы склонны к использованию уравнения баланса для скачка массы из § 1.3.5. В этом случае уравнение (4.4.2-7) сводится к (4.4.2-6). Интегральное уравнение баланса массы (4.4.2-6) в одинаковой мере применимо к однофазным и многофазным системам, поскольку уравнение баланса для скачка массы справедливо для всех поверхностей раздела фаз, участвующих в процессе.

**4.4.3. Интегральное уравнение баланса массы для турбулентных течений.** Некоторые из самых важных и интересных приложений метода интегральных балансов связаны с системами, которые могут принимать участие в турбулентных движениях.

Например, необходимо определить перепад давления между насосными станциями трубопровода. Трубопровод природного газа очень удобно анализировать в качестве выбранной системы. Сначала определим ограничения, налагаемые на эту систему интегральными уравнениями баланса массы. Для этого необходимо остановиться на скорости изменения массы системы. Прежде всего надо выяснить вид задачи: стационарная или нестационарная. Поскольку течение газа является турбулентным, то решение по определению должно быть нестационарным. Однако, когда смотритель трубопровода говорит об объемном расходе в круговом поперечном сечении трубопровода, он не учитывает никаких случайных отклонений, вызванных турбулентностью. У него нет другого выбора, так как приборы, по которым он судит об объемном расходе, показывают только усредненные во времени значения. Непосредственное применение интегрального уравнения баланса массы, выведенного в § 4.4.2, невозможно, поскольку оно связывает мгновенное значение массы системы с мгновенными расходами на входе и выходе.

Однако можно получить интегральное уравнение баланса массы в виде, более удобном для применения в турбулентных системах. Огра-

личимся однофазной или многофазной системой, в которой отсутствует поверхность раздела фаз. Использовав усредненное дифференциальное уравнение неразрывности, полученное в § 4.1.2,

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} + \operatorname{div}(\bar{\rho}\mathbf{v}) = 0 \quad (4.4.3-1)$$

и повторив выкладки § 4.4.2, найдем:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \bar{\rho} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} (\bar{\rho}\mathbf{v} - \bar{\rho}\mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{S_{(\text{синг})}} [\bar{\rho}\mathbf{v} \cdot \xi - \bar{\rho}u_{(\xi)}] dS. \quad (4.4.3-2)$$

Уравнение баланса для скачка массы (1.3.4-6), усредненное во времени, можно упростить:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \bar{\rho} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} (\bar{\rho}\mathbf{v} - \bar{\rho}\mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS. \quad (4.4.3-3)$$

Это уравнение показывает, что скорость изменения усредненной во времени массы системы равна результирующей скорости, с которой масса вводится в систему и выходит из нее. Уравнение (4.4.3-3) является интегральным уравнением баланса массы для турбулентного течения однофазной среды или многофазной системы при отсутствии границы раздела.

Нельзя рекомендовать это уравнение для анализа системы, содержащей границу раздела фаз, так как ее положение обычно является случайной функцией времени. Даже после того, как принято какое-то определение для средней по времени поверхности раздела фаз, станет ясным, что его нельзя использовать для усредненного уравнения баланса для скачка массы из § 1.3.4. Для турбулентности характерны эффекты на поверхности раздела, имеющие большое значение.

Для однофазной или многофазной системы при наличии одной или нескольких поверхностей раздела жидкость — жидкость можно рекомендовать метод усреднения интегрального уравнения баланса массы из § 4.4.2:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS \quad (4.4.3-4)$$

или

$$\overline{\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho dV} = \overline{\int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS}. \quad (4.4.3-5)$$

Тогда найдем:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho dV} &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left( \frac{d}{dt'} \int_{V(s)} \rho dV \right) dt' = \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{V(s)} \rho dV \Big|_{t+\Delta t} - \int_{V(s)} \rho dV \Big|_t \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_{V(s)} \rho dV dt' \right) = \frac{d}{dt} \overline{\int_{V(s)} \rho dV}. \end{aligned} \quad (4.4.3-6)$$

Уравнение (4.4.3-5) показывает, что скорость изменения усредненной во времени массы системы равна сумме среднемассовых расходов на входе в систему минус среднемассовый расход на выходе из нее.

Как уже говорилось в § 4.1.1, для усреднения во времени выбран интервал  $\Delta t$ , значение которого велико относительно временной характеристики исследуемого процесса в целом. Следовательно, если ограничиться однофазной или многофазной системой при отсутствии поверхности раздела фаз, то для любой величины  $\Psi$  будем иметь:

$$\overline{\int_{V(s)} \Psi dV} = \int_{\bar{V}(s)} \bar{\Psi} dV; \quad (4.4.3-7)$$

$$\overline{\int_{S_{(вх, вых)}} \Psi dS} = \int_{\bar{S}_{(вх, вых)}} \bar{\Psi} dS; \quad (4.4.3-8)$$

$$\overline{\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}} = \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.4.3-9)$$

При таких условиях уравнение (4.4.3-5) сводится к уравнению (4.4.3-3).

**4.4.4. Пример интегрального уравнения баланса массы.** Резервуар водопроводной станции, обеспечивающий район водой, поступающей по трубопроводу из нескольких скважин, наполняется с объемной скоростью  $q_1$ . Объемный расход, необходимый для нормального обеспечения района в течение суток, можно приближенно представить в виде

$$q_2 = A + B \cos \frac{\pi t}{12}. \quad (4.4.4-1)$$

(В этом представлении время измеряется в часах, а момент  $t=0$  обозначает не полночь, а пик потребления). Для учета возможной поломки насосов необходимо, чтобы в резервуаре всегда содержалось не меньше трехдневного запаса воды. Требуется определить  $q_1$  и минимальный размер резервуара.

Будем считать воду в резервуаре рассматриваемой системой. Поскольку одна из ограничивающих поверхностей системы представляет собой поверхность раздела вода — воздух, а какая-то часть системы может быть турбулентным течением вблизи входа и выхода, воспользуемся более общим интегральным уравнением баланса массы (4.4.3-5). При этом, вероятно, может использоваться также и уравнение (4.4.3-3), поскольку поверхность раздела вода — воздух не возмущается турбулентностью. Обозначив объем системы через  $V$  и считая воду несжимаемой жидкостью, из интегрального уравнения баланса массы получим:

$$\frac{dV}{dt} = q_1 - q_2. \quad (4.4.4-2)$$

При записи этого уравнения учитывалось, что

$$q_1 = \overline{\int_{S_{(вх)}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS} \quad (4.4.4-3)$$

и

$$-q_2 = \overline{\int_{S_{(вых)}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS}. \quad (4.4.4-4)$$

Исключив  $q_2$  с помощью уравнения (4.4.4-1), проинтегрируем (4.4.4-2). Тогда будем иметь:

$$V = V(t) = V(0) + (q_1 - A)t - \frac{12B}{\pi} \sin \frac{\pi t}{12}. \quad (4.4.4-5)$$

Здесь  $V(0)$  — объем воды в резервуаре в момент  $t=0$ .

Поскольку мы потребовали, чтобы

$$V(0)=V(24), \quad (4.4.4-6)$$

из уравнения (4.4.4-5) ясно, что

$$q_1=A. \quad (4.4.4-7)$$

Из условий

$$\frac{dV}{dt} = -B \cos \frac{\pi t}{12} = 0 \quad (4.4.4-8)$$

и

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{\pi B}{12} \sin \frac{\pi t}{12} \quad (4.4.4-9)$$

найдем, что значение  $V$  минимально при  $t=6$  и максимально при  $t=18$ . Поскольку известно, что резервуар всегда должен содержать как минимум трехдневный запас воды, из уравнения (4.4.4-5) будем иметь:

$$72A = V(0) - \frac{12B}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \quad (4.4.4-10)$$

или

$$V(0) = 72(A) + \frac{12B}{\pi}. \quad (4.4.4-11)$$

Следовательно, минимальный размер резервуара должен быть равен максимальному количеству воды, содержащемуся в нем в течение суток:

$$V_{\max} = V(0) - \frac{12B}{\pi} \sin \frac{3\pi}{2} = 72A + \frac{24B}{\pi}. \quad (4.4.4-12)$$

**4.4.5. Интегральное уравнение баланса импульса.** Попытаемся сформулировать интегральное уравнение баланса импульса, описывающее скорость изменения импульса для произвольной системы.

Воспользуемся тем же методом, который мы применяли для получения интегрального уравнения баланса массы. С помощью обобщенной теоремы переноса, где  $\Psi=\rho v$  — импульс на единицу объема, получим:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho v dV = \int_{V_{(s)}} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dV + \int_{V_{(s)}} \rho v (v_{(s)} \cdot n) dS. \quad (4.4.5-1)$$

При этом смысл первого интеграла в правой части уравнения в таком виде неясен. Не поможет нам и то, что первый закон Коши должен удовлетворяться для каждой точки системы.

Уравнение первого закона Коши с помощью дифференциального уравнения неразрывности можно записать в виде

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v v) = \operatorname{div} T + \rho f. \quad (4.4.5-2)$$

Проинтегрировав это уравнение по объему, получим:

$$\int_{V(s)} \left[ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho vv) - \operatorname{div} T - \rho f \right] dV = 0. \quad (4.4.5-3)$$

Первый интеграл в левой части уравнения и является искомым интегралом уравнения (4.4.5-1). Смысл четвертого интеграла совершен-но ясен. Второй и третий интегралы станут понятными после применения преобразования Грина:

$$\int_{V(s)} \operatorname{div}(\rho vv) dV = \int_{S(s)} \rho v(v \cdot n) dS; \quad (4.4.5-4)$$

$$\int_{V(s)} \operatorname{div} T dV = \int_{S(s)} T \cdot n dS. \quad (4.4.5-5)$$

Уравнения (4.4.5-3), (4.4.5-4) и (4.4.5-5) позволяют записать (4.4.5-1) в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho v dV = \int_{S(s)} \rho v(v - v_{(s)}) \cdot (-n) dS - \int_{S(s)} T \cdot (-n) dS + \int_{V(s)} \rho f dV. \quad (4.4.5-6)$$

Первый член в правой части этого уравнения представляет собой результирующую скорость, с которой импульс поступает в систему с любым веществом, пересекающим ее границу. Второй член является силой, с которой материал системы действует на ее границы. Эта сила суммарная, тогда как обычно мы говорим о силе, действующей помимо атмосферного давления. Для того чтобы учесть атмосферное давление  $p_0$ , лучше всего воспользоваться еще раз первым законом Коши, имея в виду, что

$$\operatorname{div} T = \operatorname{div}(T + p_0 I). \quad (4.4.5-7)$$

Следовательно, вместо уравнения (4.4.5-6) мы можем записать:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho v dV &= \int_{S(s)} \rho v(v - v_{(s)}) \cdot (-n) dS - \\ &- \int_{S(s)} (T + p_0 I) \cdot (-n) dS + \int_{V(s)} \rho f dV. \end{aligned} \quad (4.4.5-8)$$

Если считать, что  $(v - v_{(s)}) \cdot n$  не равно нулю только на входной и выходной поверхностях  $S_{(\text{вх.вых})}$ , уравнение (4.4.5-8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho v dV &= \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho v(v - v_{(s)}) \cdot (-n) dS - \\ &- \int_{S_{(\text{вх.вых})}} (T + p_0 I) \cdot (-n) dS - \mathfrak{F} + \int_{V(s)} \rho f dV, \end{aligned} \quad (4.4.5-9)$$

где

$$\mathfrak{F} \equiv \int_{S(s) - S_{(\text{вх.вых})}} (T + p_0 I) \cdot (-n) dS. \quad (4.4.5-10)$$

По своему физическому смыслу  $\mathfrak{F}$  представляет собой силу, с которой система действует на непроницаемую ограничивающую поверхность помимо силы давления окружающей атмосферы  $p_0$ . Уравнение (4.4.5-9) является общим интегральным уравнением импульса для однородной системы.

Обычно интегральное уравнение баланса импульса применяется в системе, в которой вязкими силами на входной и выходной поверхностях  $S_{(вх, вых)}$  пренебрегают. Этого можно достичь, если взять входные и выходные поверхности в поперечном сечении, перпендикулярном потоку в длинной прямой трубе, и приближенно считать течение в этой трубе пуазейлевским (§ 3.2.1). При решении большинства задач мы вынуждены прибегать к этому из-за недостатка информации. При таких условиях уравнение (4.4.5-9) принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho \mathbf{v} dV = \int_{S_{(вх, вых)}} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \int_{S_{(вх, вых)}} (P - p_0) \mathbf{n} dS - \mathfrak{F} + \int_{V_{(s)}} \rho \mathbf{f} dV. \quad (4.4.5-11)$$

Такой вид интегрального уравнения баланса импульса используется чаще, чем уравнение (4.4.5-9).

При рассмотрении жидкости в случае, когда  $\mathbf{f}$  можно представить потенциалом  $\varphi$ , т. е.

$$\mathbf{f} = -\nabla \varphi, \quad (4.4.5-12)$$

удобнее переписать уравнение (4.4.5-11) в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho \mathbf{v} dV = \int_{S_{(вх, вых)}} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \int_{S_{(вх, вых)}} (\mathcal{P} - p_0) \mathbf{n} dS - \mathfrak{G}, \quad (4.4.5-13)$$

где

$$\mathfrak{G} \equiv \int_{S_s - S_{(вх, вых)}} [\mathbf{T} + (p_0 - \rho \varphi) \mathbf{I}] \cdot (-\mathbf{n}) dS. \quad (4.4.5-14)$$

Под  $\mathfrak{G}$  мы понимаем силу, действующую на непроницаемый участок ограничивающей поверхности со стороны жидкости, помимо давления окружающей атмосферы  $p_0$  и гидростатического давления.

Уравнения (4.4.5-11) и (4.4.5-13) в таком виде применимы только к однородным системам. В § 4.4.2 указывалось, что в своей практике мы чаще встречаемся с многофазными системами. Используя метод и обозначения § 4.4.2 без каких-либо дополнительных допущений, найдем общее интегральное уравнение баланса импульса, соответствующее многофазной системе:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho \mathbf{v} dV = \int_{S_{(вх, вых)}} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \int_{S_{(вх, вых)}} (\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \mathfrak{F} + \int_{V_{(s)}} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_{(смл)}} [\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) - \mathbf{T} \cdot \xi] dS. \quad (4.4.5-15)$$

Для многофазной системы, состоящей из несжимаемых веществ, таким уравнением будет:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \mathbf{v} dV &= \int_{S_{(вх, вых)}} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ &- \int_{S_{(вх, вых)}} [\mathbf{T} + (p_0 - \rho \varphi) \mathbf{I}] \cdot (-\mathbf{n}) dS - \mathfrak{G} + \\ &+ \int_{S_{(синг)}} [\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) - (\mathbf{T} - \rho \varphi \mathbf{I}) \cdot \xi] dS. \end{aligned} \quad (4.4.5-16)$$

Если применить уравнение баланса для скачка импульса (3.1.1-1) и пренебречь вязкими силами на входной и выходной поверхностях, уравнение (4.4.5-15) сводится к уравнению (4.4.5-11) для однофазной системы, а (4.4.5-16) упрощается:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \mathbf{v} dV &= \int_{S_{(вх, вых)}} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ &- \int_{S_{(вх, вых)}} (\mathcal{P} - p_0) \mathbf{n} dS - \mathfrak{G} + \int_{S_{(синг)}} [\rho] \varphi \xi dS. \end{aligned} \quad (4.4.5-17)$$

Интегральное уравнение баланса импульса применяется в задачах трех типов: когда силой  $\mathfrak{G}$  можно пренебречь; когда она является искомой величиной и когда эта сила известна из полученных ранее экспериментальных данных. В последнем случае используется эмпирическое соотношение для обобщения данных по  $\mathfrak{G}$ . В § 4.4.7 мы рассмотрим виды этих эмпирических соотношений.

*4.4.6. Интегральное уравнение баланса импульса для турбулентных течений.* Как указывалось в § 4.4.3, метод интегральных балансов наиболее эффективен для систем, включающих турбулентные течения. Это относится и к интегральному уравнению баланса импульса. Найдем интегральное уравнение баланса импульса для турбулентного течения. По причинам, указанным в § 4.4.3, ограничимся однофазной или многофазной системами, в которых не имеется поверхностей раздела фаз жидкость — жидкость. Используя усредненное по времени уравнение первого закона Коши из § 4.1.3

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}) = -\nabla \bar{P} + \operatorname{div} (\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{S}^{(t)}) + \bar{\mathbf{f}}, \quad (4.4.6-1)$$

с помощью выкладок § 4.4.5 находим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} dV &= \int_{S_{(вх, вых)}} (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ &- \int_{S_{(вх, вых)}} (\bar{P} - p_0) \mathbf{n} dS - \mathfrak{F} + \int_{V(s)} \bar{\mathbf{f}} dV + \\ &+ \int_{S_{(синг)}} [\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} \cdot \xi - \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} u_{(\xi)} - \bar{T} \cdot \xi] dS, \end{aligned} \quad (4.4.6-2)$$

где

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} &\equiv \int_{S_{(s)} - S_{(\text{вх, вых})}} (\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n}) dS = \\ &= \int_{S_{(s)} - S_{(\text{вх, вых})}} (\bar{\mathbf{T}} + p_0 \mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n}) dS.\end{aligned}\quad (4.4.6-3)$$

Следует упомянуть, что для данного случая  $S_{(s)} - S_{(\text{вх, вых})}$  и  $S_{\text{синг}}$  должны состоять из поверхности раздела жидкость — твердое тело и твердое тело — твердое тело, на которых турбулентные пульсации тождественно равны нулю. Используя усредненное по времени уравнение баланса для скачка импульса (3.1.1-1), получаем уравнение (4.4.6-2) в упрощенном виде:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \bar{\rho} \mathbf{v} dV &= \int_{S_{(\text{вх, вых})}} (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ &- \int_{S_{(\text{вх, вых})}} (\bar{P} - p_0) \mathbf{n} dS - \mathfrak{F} + \int_{V_{(s)}} \bar{\rho} \mathbf{f} dV.\end{aligned}\quad (4.4.6-4)$$

Это интегральное уравнение баланса импульса можно рекомендовать для турбулентных однофазных или многофазных систем, в которых отсутствуют поверхности раздела жидкость — жидкость. Следует отметить, что при его выводе мы пренебрегали всеми вязкими или турбулентными силами, действующими на входе и выходе системы.

Аналогично, для однофазной и многофазной систем, не содержащих поверхность раздела жидкость — жидкость и состоящих из несжимаемых материалов, находим:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \bar{\rho} \mathbf{v} dV &= \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \bar{\rho} (\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ &- \int_{S_{(\text{вх, вых})}} (\bar{P} - p_0) \mathbf{n} dS - \mathfrak{G} + \int_{S_{(\text{синг})}} [\rho] \varphi \xi dS.\end{aligned}\quad (4.4.6-5)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} &\equiv \int_{S_{(s)} - S_{(\text{вх, вых})}} [\mathbf{T} + (p_0 - \rho \varphi) \mathbf{I}] \cdot (-\mathbf{n}) dS = \\ &= \int_{S_{(s)} - S_{(\text{вх, вых})}} [\bar{\mathbf{T}} + (p_0 - \rho \varphi) \mathbf{I}] \cdot (-\mathbf{n}) dS.\end{aligned}\quad (4.4.6-6)$$

Для однофазной и многофазной систем, содержащих одну или более поверхностей раздела жидкость — жидкость, можно рекомендовать усреднение интегральных уравнений баланса импульса из § 4.4.5:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \overline{\int_{V_{(s)}} \rho \mathbf{v} dV} &= \overline{\int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS} - \\ &- \overline{\int_{S_{(\text{вх, вых})}} (P - p_0) \mathbf{n} dS} - \bar{\mathfrak{F}} + \overline{\int_{V_{(s)}} \rho \mathbf{f} dV}.\end{aligned}\quad (4.4.6-7)$$

Для несжимаемых материалов

$$\frac{d}{dt} \overline{\int_{V(s)} \rho \mathbf{v} dV} = \overline{\int_{S_{(вх, вых)}} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS} - \overline{\int_{S_{(вх, вых)}} (\mathcal{P} - p_0) \mathbf{n} dS} - \overline{\mathfrak{G}}. \quad (4.4.6-8)$$

В полученных уравнениях

$$\overline{\mathfrak{F}} \equiv \overline{\int_{S_{(s)} - S_{(вх, вых)}} (\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n}) dS}; \quad (4.4.6-9)$$

$$\overline{\mathfrak{G}} \equiv \overline{\int_{S_{(s)} - S_{(вх, вых)}} [\mathbf{T} + (p_0 - \rho \varphi) \mathbf{I}] \cdot (-\mathbf{n}) dS}. \quad (4.4.6-10)$$

При выводе уравнений (4.4.6-7) и (4.4.6-8) мы также пренебрегали усредненными во времени силами вязкости на входе и выходе системы.

Ограничивааясь однофазными системами или многофазными, но не содержащими поверхность раздела жидкость — жидкость, и пренебрегая всеми турбулентными силами на входе и выходе, можно использовать уравнения (4.4.3-4), (4.4.3-8) и (4.4.3-9), чтобы показать, что уравнения (4.4.6-7) — (4.4.6-10) сводятся соответственно к (4.4.6-4), (4.4.6-5), (4.4.6-3) и (4.4.6-6).

**4.4.7. Эмпирические соотношения для  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{G}$ .** В этом параграфе мы рассмотрим два примера, иллюстрирующие, как можно сформулировать эмпирические соотношения для  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{G}$  (или, в турбулентных течениях, для  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{G}$ ), рассмотренные в § 4.4.5.

При обсуждении будем исходить из трех положений.

1. Силы  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{G}$  не зависят от системы отсчета. Например:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}^* &= \int_{S_{(s)} - S_{(вх, вых)}} [\mathbf{T}^* + (p_0 - \rho \varphi) \mathbf{I}] \cdot (-\mathbf{n}^*) dS = \\ &= \int_{S_{(s)} - S_{(вх, вых)}} \mathbf{Q} \cdot [\mathbf{T} + (p_0 - \rho \varphi) \mathbf{I}] \cdot (-\mathbf{n}) dS = \mathbf{Q} \cdot \mathfrak{G}, \end{aligned} \quad (4.4.7-1)$$

где  $\mathbf{Q}$  может быть ортогональным тензором второго ранга, зависящим от времени.

2. Принцип независимости материала от системы отсчета, введенный в § 2.3.1, справедлив для эмпирической зависимости для  $\mathfrak{F}$  или  $\mathfrak{G}$ .

3. Теорема Бэкингема — Пая накладывает ограничения на вид любого выражения для  $\mathfrak{F}$  или  $\mathfrak{G}$ .

**Пример 1. Обтекание шара.** В качестве примера рассмотрим шар радиусом  $a$ , движущийся относительно большого объема несжимаемой ньютоновской жидкости. В системе отсчета, зафиксированной относительно земли, мы можем наблюдать, что шар движется прямолинейно, без всякого вращения, с постоянной скоростью  $\mathbf{v}_\infty$  и что на очень большом расстоянии от шара жидкость движется равномерно со скоростью  $\mathbf{v}_\infty$ . Можно утверждать, что  $\mathfrak{G}$  должна быть функцией плотности жидкости  $\rho$ , ее вязкости  $\mu$ , радиуса шара  $a$  и разности скоростей  $\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0$ :

$$\mathfrak{G} = h(\rho, \mu, a, \mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0). \quad (4.4.7-2)$$

В качестве независимой переменной для этого выражения мы выбрали  $v_\infty - v_0$ , а не  $v_0$  и  $v_\infty$  в отдельности потому, что скорость зависит от системы отсчета, тогда как разность скоростей не зависит от нее.

Допустим на некоторое время, что  $\mathfrak{G}$  зависит от  $\rho$ ,  $\mu$  и  $a$ , и сосредоточим свое внимание на разности  $v_\infty - v_0$ :

$$\mathfrak{G} = \hat{h} (v_\infty - v_0). \quad (4.4.7-3)$$

В соответствии с принципом независимости материала от системы отсчета функциональная зависимость между этими переменными будет одинаковой для любой системы отсчета. Отсюда следует, что

$$\mathfrak{G}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathfrak{G} = \mathbf{Q} \cdot \hat{h} (v_\infty - v_0) = \hat{h} [\mathbf{Q} \cdot (v_\infty - v_0)] \quad (4.4.7-4)$$

или  $\hat{h}$  является изотропной функцией [1], т. е.

$$\hat{h} (v_\infty - v_0) = \mathbf{Q}^T \cdot \hat{h} [\mathbf{Q} \cdot (v_\infty - v_0)]. \quad (4.4.7-5)$$

С помощью теоремы представления изотропной векторной функции от одного вектора [1] можно записать:

$$\mathfrak{G} = \hat{h} (v_\infty - v_0) = \mathcal{G} \frac{v_\infty - v_0}{|v_\infty - v_0|}, \quad (4.4.7-6)$$

где подразумевается, что  $\mathcal{G} = |\mathfrak{G}|$  есть функция величины невозмущенной жидкости относительно шара,  $|v_\infty - v_0|$ , а также функция  $\rho$ ,  $\mu$  и  $a$ :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\rho, \mu, a, |v_\infty - v_0|). \quad (4.4.7-7)$$

Обычно  $\mathcal{G}$  выражается с помощью коэффициента сопротивления или трения  $c$ . Коэффициент сопротивления или трения используется во многих работах и почти всегда определяется как отношение  $\mathcal{G}$  к площади  $A$ , характерной для  $S_{(s)} - S_{(вх.вых.)}$ , и к кинетической энергии на единицу объема, характерной для течения. Общее выражение:

$$c \equiv \frac{\mathcal{G}}{0,5 \rho u^2 A}. \quad (4.4.7-8)$$

При этом  $A = \pi a^2$  и  $u = |v_\infty - v_0|$ , так что для шара:

$$c = \frac{\mathcal{G}}{(0,5 \rho |v_\infty - v_0|^2) \pi a^2}. \quad (4.4.7-9)$$

Следовательно, коэффициент сопротивления для шара является безразмерной функцией

$$c = c(\rho, \mu, a, |v_\infty - v_0|). \quad (4.4.7-10)$$

С помощью теоремы Бэкингема — Пая [9] мы нашли, что  $c$  есть функция числа Рейнольдса

$$c = \widehat{c}(N_{Re}), \quad (4.4.7-11)$$

где

$$N_{Re} \equiv \frac{a |v_\infty - v_0| \rho}{\mu}. \quad (4.4.7-12)$$

Следовательно, для данного случая имеем:

$$\mathcal{G} = c \left( \frac{1}{2} \rho |v_\infty - v_0|^2 \right) \pi a^2 \frac{|v_\infty - v_0|}{|v_\infty - v_0|}, \quad (4.4.7-13)$$

где коэффициент сопротивления  $c$  определяется из эмпирического соотношения, обобщающего экспериментальные данные в виде уравнения (4.4.7-11) [11].

Если требуется получить эмпирическое соотношение для  $\mathfrak{F}$ , то необходимо учесть также зависимость  $\mathfrak{F}$  от вектора внешней силы  $\mathbf{f}$ . Из-за этого дополнительного усложнения

нения в определяющем уравнении для  $\mathfrak{G}$  эти соотношения редко встречаются в литературе.

**Пример 2. Двумерное обтекание цилиндра.** Бесконечно длинный цилиндр, образованный прямой линией, движущейся параллельно неподвижной прямой и пересекающей неподвижную замкнутую кривую, движется относительно большого объема несжимаемой ньютоновской жидкости. В системе отсчета, неподвижной относительно земли, цилиндр движется прямолинейно без всякого вращения с постоянной скоростью  $v_0$ , а жидкость на очень большом расстоянии от тела равномерно движется со скоростью  $v_\infty$ . Векторы  $v_0$  и  $v_\infty$  перпендикулярны оси цилиндра, поэтому течение жидкости можно считать плоскопараллельным. Для описания ориентации цилиндра достаточно одного единичного вектора  $\alpha$ . Так же, как при рассмотрении предыдущего примера, будем считать, что  $\mathfrak{G}$  — функция  $\rho$ ,  $\mu$ , длины  $L$ , характерной для поперечного сечения цилиндра,  $|v_\infty - v_0|$  и  $\alpha$ :

$$\mathfrak{G} = h(\rho, \mu, L, |v_\infty - v_0|, \alpha). \quad (4.4.7-14)$$

Сосредоточим свое внимание на независимых переменных  $|v_\infty - v_0|$  и  $\alpha$ :

$$\mathfrak{G} = \hat{h}(v_\infty - v_0, \alpha). \quad (4.4.7-15)$$

В соответствии с принципом независимости материала от системы отсчета величина  $\hat{h}$  является изотропной векторной функцией двух векторов:

$$\hat{h}(v_\infty - v_0, \alpha) = Q^T \cdot \hat{h}(Q \cdot |v_\infty - v_0|, Q \cdot \alpha). \quad (4.4.7-16)$$

Величина  $Q$  также является ортогональным тензором второго ранга. Из теорем Спенсера и Ривлина [30] (а также Смита [16]) известно, что изотропную векторную функцию многочлена для двух векторов в самом общем виде можно представить соотношением:

$$\mathfrak{G} = \hat{h}(v_\infty - v_0, \alpha) = \varphi_{(1)} \frac{v_\infty - v_0}{|v_\infty - v_0|} + \varphi_{(2)} \alpha, \quad (4.4.7-17)$$

где  $\varphi_{(1)}$  и  $\varphi_{(2)}$  — скалярные многочлены в  $|v_\infty - v_0|$  и  $(v_\infty - v_0, \alpha)$ , а также  $\rho$ ,  $\mu$  и  $L$ . Используя теорему Спенсера и Ривлина, мы определяли вектор  $b$ , имеющий компоненты  $b_i$ , как кососимметричный тензор, имеющий ковариантные компоненты  $\epsilon^{ijk} b_i$ . Согласно этой теореме уравнение (4.4.7-17) должно содержать дополнительный член, пропорциональный векторному произведению  $(v_\infty - v_0) \wedge \alpha$ . Этот член не отвечает требованию изотропности  $\hat{h}$  [1] и, следовательно, выпадает. Для того чтобы в пределе  $(v_\infty - v_0) = 0$  и  $\mathfrak{G} = 0$ , необходимо, чтобы  $\varphi_2 = 0$ .

Уравнение (4.4.7-17) в представленном здесь виде редко встречается в литературе. Чаще выражается в виде линейной комбинации направления относительного движения  $(v_\infty - v_0) / (|v_\infty - v_0|)$  и направления, перпендикулярного относительному движению  $\lambda$ :

$$\mathfrak{G} = D \left( \frac{v_\infty - v_0}{|v_\infty - v_0|} \right) + L \lambda. \quad (4.4.7-18)$$

Величина  $D$  — компонента сопротивления  $\mathfrak{G}$ ,  $L$  — подъемная сила.

В настоящее время принято выражать  $D$  и  $L$  с помощью коэффициентов сопротивления и подъемной силы, определяемых уравнением (4.4.7-8):

$$c_D \equiv \frac{D}{0.5 \rho |v_\infty - v_0|^2 A_D}; \quad (4.4.7-19)$$

$$c_L \equiv \frac{L}{0.5 \rho |v_\infty - v_0|^2 A_L}. \quad (4.4.7-20)$$

Характерные поверхности для сопротивления и подъемной силы необязательно будут одинаковыми. Величина  $A_D$  обычно выбирается для площади тела, проектируемой на плоскость, перпендикулярную направлению течения. Для профиля крыла  $A_L$  берется в виде произведения хорды на длину крыла.

Наконец, из теоремы Бэкингема — Пая [9] получим, что безразмерная сила сопротивления и подъемная сила есть функции числа Рейнольдса:

$$c_D = c_L (N_{Re(1)}, N_{Re(2)}) \quad (4.4.7-21)$$

$$c_L = c_L N_{Re(1)}, N_{Re(2)}. \quad (4.4.7-22)$$

Здесь

$$N_{Re(1)} \equiv \frac{L |v_\infty - v_0| \rho}{\mu}; \quad (4.4.7-23)$$

$$N_{Re(2)} \equiv \frac{L [(v_\infty - v_0) \cdot a] \rho}{\mu}. \quad (4.4.7-24)$$

В результате получим:

$$\Phi = c_D A_D (0.5 \rho |v_\infty - v_0|^2) \frac{|v_\infty - v_0|}{v_\infty - v_0} + c_L A_L \left( \frac{1}{2} \rho |v_\infty - v_0|^2 \right) \lambda, \quad (4.4.7-25)$$

где  $c_D$  и  $c_L$  определяются из эмпирических соотношений для обобщения экспериментальных данных. Эти эмпирические соотношения могут иметь вид уравнений (4.4.7-21) и (4.4.7-22) или принимать другие эквивалентные формы [11].

**4.4.8. Пример интегрального уравнения баланса импульса.** Рассмотрим ракетный двигатель на жидком топливе, работающий в стационарном режиме на неподвижном испытательном стенде. Реакция окисления топлива происходит в камере сгорания при высоком давлении. Образующиеся газы выходят из сопла при среднем давлении  $\bar{P}_e$ , близком к атмосферному  $P_0$ , со средней скоростью  $v_e$ . Требуется определить тягу ракетного двигателя, если массовый расход окислителя и топлива в двигателе равен  $q$ .



Рис. 4.4.8-1. Статическое испытание ракетного двигателя.

На рис. 4.4.8-1, является автономным ракетным двигателем. Выхлопные газы выходят из двигателя, попадают в поперечное сечение, где скорость равна  $v_e$ . В выходном сечении скорость газа считается постоянной по величине и направлению. Под тягой двигателя мы понимаем силу  $\Phi$ , с которой двигатель действует на стенд помимо массы самого двигателя и бака с горючим и, конечно, помимо силы атмосферного давления. Необходимо рассчитать составляющую  $\Phi_x$  в прямоугольных координатах.

Поскольку часть системы представляет собой турбулентное течение, мы будем использовать усредненное во времени интегральное уравнение баланса импульса для любой многофазной системы. Так как  $S_{(s)} - S_{(вх.вых)}$  состоит только из поверхностей раздела жидкость — твердое тело и твердое тело — твердое тело, то

$$\Phi_x = \bar{\Phi}_x \quad (4.4.8-1)$$

Следует учесть, что влиянием турбулентного напряжения Рейнольдса на выходе пренебрегаем, и поэтому компонента  $x$  в уравнении (4.4.6-7) сводится к уравнению

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_x &= - \overline{\int_{S_{(\text{вых})}} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS} - \overline{\int_{S_{(\text{вых})}} (P - p_0) n_x dS} = \\ &= - \bar{v}_e \int_{S_{(\text{вых})}} \bar{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS - (\bar{P}_e - p_0) S_{(\text{вых})} = - \bar{v}_e q - (\bar{P}_e - p_0) S_{(\text{вых})},\end{aligned}\quad (4.4.8-2)$$

где

$$q \equiv \overline{\int_{S_{(\text{вых})}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS} = \int_{S_{(\text{вых})}} \bar{\rho} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS.\quad (4.4.8-3)$$

Часто в уравнении (4.4.8-2) вторым членом в правой части можно пренебречь по сравнению с первым, тогда будем иметь:

$$\mathfrak{F}_x = - v_e q.\quad (4.4.8-4)$$

**4.4.9. Баланс механической энергии для несжимаемых материалов.** В § 3.4.2 получено уравнение Бернулли, связывающее относительную разность давления между двумя точками в жидкости с разностью кинетической и потенциальной энергий. Однако уравнение Бернулли может применяться только в случае, когда в соотношении Коши вязкими членами можно пренебречь. Попытаемся вывести уравнение, содержащее некоторую информацию о кинетической энергии произвольной системы без всяких допущений относительно вязких эффектов.

Используем тот же метод, который мы применяли при выводе интегральных уравнений баланса массы и импульса. С помощью обобщенной теоремы переноса из § 1.3.2, где кинетическая энергия на единицу объема равна  $\Psi = \frac{1}{2} \rho v^2$ , получим:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} 0,5 \rho v^2 dV = \int_{V(s)} \frac{\partial}{\partial t} (0,5 \rho v^2) dV + \int_{S(s)} 0,5 \rho v^2 (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) dS.\quad (4.4.9-1)$$

Однако в любой данной задаче значение первого интеграла в правой части уравнения становится ясным не сразу. Здесь возникают такие же трудности, как в § 4.4.2 и 4.4.5.

Возьмем скалярное произведение от уравнения первого закона Коши с вектором скорости:

$$\mathbf{v} \cdot \left( \rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} - \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \mathbf{f} \right) = 0\quad (4.4.9-2)$$

и преобразуем первый член в левой части к виду

$$\begin{aligned}\rho \mathbf{v} \cdot \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} &= \rho \frac{d_{(m)}}{dt} (0,5 v^2) = \frac{d_{(m)}}{dt} (0,5 \rho v^2) - 0,5 v^2 \frac{d_{(m)} \rho}{dt} = \\ &= \frac{d_{(m)}}{dt} (0,5 \rho v^2) + 0,5 \rho v^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} (0,5 \rho v^2) + \operatorname{div} (0,5 \rho v^2 \mathbf{v}).\end{aligned}\quad (4.4.9-3)$$

Используя преобразование Грина, с помощью полученного уравнения найдем выражение для интеграла по  $V_{(s)}$  из уравнения (4.4.9-2) в виде

$$\int_{V_{(s)}} \frac{\partial}{\partial t} (0.5\rho v^2) dV = - \int_{S_{(s)}} 0.5\rho v^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{V_{(s)}} (\mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) dV. \quad (4.4.9-4)$$

Это выражение позволяет исключить первый член в правой части уравнения (4.4.9-1). Но сначала преобразуем два последних интеграла в правой части уравнения (4.4.9-4).

Второй интеграл в правой части уравнения (4.4.9-4) в таком виде не имеет прямого физического смысла; поэтому применим к нему преобразование Грина. Для прямоугольных координат будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{V_{(s)}} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} dV &= \int_{V_{(s)}} v_i \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_j} dV = \int_{V_{(s)}} \left[ \frac{\partial}{\partial z_j} (v_i T_{ij}) - T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial z_j} \right] dV = \\ &= \int_{S_{(s)}} v_i T_{ij} n_j dS - \int_{V_{(s)}} \operatorname{tr}(\mathbf{T}^T \cdot \nabla \mathbf{v}) dV = \int_{S_{(s)}} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{V_{(s)}} \operatorname{tr}(\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV. \end{aligned} \quad (4.4.9-5)$$

Следует отметить, что при выводе этого выражения мы использовали симметричность тензоров напряжения. Далее целесообразно положить:

$$\begin{aligned} \int_{V_{(s)}} \operatorname{tr}(\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV &= \int_{V_{(s)}} \operatorname{tr}([-P \mathbf{I} + \mathbf{S}] \cdot \nabla \mathbf{v}) dV = \\ &= - \int_{V_{(s)}} P \operatorname{div} \mathbf{v} dV + \int_{V_{(s)}} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV. \end{aligned} \quad (4.4.9-6)$$

Отсюда выражение (4.4.9-5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_{V_{(s)}} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} dV &= \int_{S_{(s)}} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{V_{(s)}} P \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \\ &\quad - \int_{V_{(s)}} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV. \end{aligned} \quad (4.4.9-7)$$

Для многих задач третий член справа в уравнении (4.4.9-4) не изменяется. Это выражение получается в несколько более привычном виде, если внешнюю силу выразить с помощью потенциальной энергии на единицу массы  $\varphi$ :

$$\mathbf{f} = -\nabla \varphi. \quad (4.4.9-8)$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} \int_{V_{(s)}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV &= - \int_{V_{(s)}} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi dV = - \int_{V_{(s)}} \operatorname{div}(\rho \varphi \mathbf{v}) dV + \\ &+ \int_{V_{(s)}} \varphi \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = - \int_{S_{(s)}} \rho \varphi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{V_{(s)}} \varphi \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV. \end{aligned} \quad (4.4.9-9)$$

Из уравнения неразрывности получим:

$$\int_{V(s)} \varphi \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = - \int_{V(s)} \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (4.4.9-10)$$

Ограничимся потенциалом внешней силы, независимой от времени в фиксированном положении. Для большинства условий, включая случай, где единственной внешней силой является сила тяжести, это допущение вполне удовлетворительно. Сейчас можно использовать обобщенную теорему переноса:

$$\begin{aligned} \int_{V(s)} \varphi \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV &= - \int_{V(s)} \frac{\partial(\rho \varphi)}{\partial t} dV = \\ &= - \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \varphi dV + \int_{S(s)} \rho \varphi (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (4.4.9-11)$$

Из уравнений (4.4.9-9) и (4.4.9-11) получим:

$$\int_{V(s)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV = - \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \varphi dV - \int_{S(s)} \rho \varphi (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.4.9-12)$$

Используя уравнения (4.4.9-4), (4.4.9-7) и (4.4.9-12), представим уравнение (4.4.9-1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho (0.5v^2 + \varphi) dV &= \int_{S(s)} \rho (0.5v^2 + \varphi) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ &+ \int_{V(s)} P \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \int_{S(s)} \mathbf{v} \cdot [\mathbf{T} \cdot (-\mathbf{n})] dS - \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (4.4.9-13)$$

где

$$\mathcal{E} \equiv \int_{V(s)} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV. \quad (4.4.9-14)$$

Третий член в правой части уравнения (4.4.9-13) является скоростью, с которой окружающая среда производит работу над системой. Интуитивно мы понимаем, что работа давления  $p_0$  окружающей среды отсутствует. Исходя из анализа § 4.4.5, мы можем записать уравнение (4.4.9-13) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho (0.5v^2 + \varphi) dV &= \int_{S_{\text{вх.вых}}} \rho (0.5v^2 + \varphi) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ &+ \int_{V(s)} (P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \int_{S(s)} \mathbf{v} \cdot [\mathbf{T} \cdot (-\mathbf{n})] dS - \mathcal{E} \end{aligned} \quad (4.4.9-15)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho (0.5v^2 + \varphi) dV &= \int_{S_{\text{вх.вых}}} \rho \left( 0.5v^2 + \varphi + \frac{P - p_0}{\rho} \right) \times \\ &\times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{V(s)} (P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \\ &- \mathcal{W} - \mathcal{E} + \int_{S_{\text{вх.вых}}} [-(P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS, \end{aligned} \quad (4.4.9-16)$$

где

$$\mathcal{W} = \int_{S_{(s)} - S_{\text{вх, вых}}} \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n})] dS. \quad (4.4.9-17)$$

Величина  $\mathcal{W}$  является работой, которая совершается над системой окружающей средой на движущихся непроницаемых поверхностях, кроме работы давления  $p_0$  окружающей атмосферы на этих поверхностях. Уравнение (4.4.9-16) можно считать общим уравнением баланса механической энергии.

К сожалению, смысл второго интеграла в правой части этого уравнения во многих случаях ясен не сразу, что представляет значительную трудность. Мы вернемся к этому вопросу в § 7.4.6.

Рассмотрим частный случай несжимаемой жидкости. Используя уравнение неразрывности, находим:

$$\int_{V_{(s)}} (P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} dV = 0. \quad (4.4.9-18)$$

Тогда уравнение (4.4.9-16) сводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho (0.5v^2 + \varphi) dV &= \int_{S_{\text{вх, вых}}} \rho \left( 0.5v^2 + \varphi + \frac{P - p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \times \\ &\times (-\mathbf{n}) dS - \mathcal{W} - \mathcal{E} + \int_{S_{\text{вх, вых}}} [-(p - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS. \end{aligned} \quad (4.4.9-19)$$

Следует отметить, что при этом учитывалось, что используемое давление не является больше термодинамическим давлением  $P$  (см. § 2.3.2). Это уравнение называется общим уравнением баланса механической энергии для несжимаемых веществ.

Левая часть уравнения (4.4.9-19) является скоростью изменения кинетической и потенциальной энергии системы, часто называемой механической энергией. Правая часть этого уравнения

$$\int_{S_{\text{вх, вых}}} \rho (0.5v^2 + \varphi) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS$$

является результирующей скоростью поступления в систему кинетической и потенциальной энергий вместе с любым веществом, пересекающим границу системы. Под выражением

$$\begin{aligned} &\int_{S_{\text{вх, вых}}} \rho \left( \frac{P - p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{S_{\text{вх, вых}}} - \\ &- (p - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_{\text{вх, вых}}} (p - p_0) (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \end{aligned}$$

мы понимаем результирующую скорость, с которой силы давления (кроме отсчетного или давления окружающей среды  $p_0$ ) производят работу над системой на входе и выходе. Величина  $\mathcal{W}$  по определению является работой, совершающей над системой со стороны окружающей среды на непроницаемых границах системы, помимо работы давления  $p_0$  [см. уравнение (4.4.9-17)]. Скорость диссипации механической энергии под действием вязких сил, определяемую по уравнению (4.4.9-14),

обозначим через  $\mathcal{E}$ . Из дальнейшего рассмотрения баланса энергии в § 5.3.2 станет ясным, что  $\mathcal{E}$  можно считать также скоростью производства внутренней энергии под действием вязких сил. Последний член в правой части

$$\int_{S_{(вх, вых)}} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dS$$

является скоростью, с которой над системой совершается работа вязких или на входе и выходе.

Обычно система, к которой применяется уравнение баланса механической энергии, выбирается таким образом, что работой вязких сил на входе и выходе системы можно пренебречь. Поэтому уравнение (4.4.9-19) запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho (0,5v^2 + \varphi) dV = \int_{S_{(вх, вых)}} \rho [0,5v^2 + \varphi + \left. \frac{(p - p_0)}{\rho} \right] (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \mathcal{W} - \mathcal{E} - \int_{S_{(вх, вых)}} (p - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (4.4.9-20)$$

Это уравнение является строгим, если входная поверхность перпендикулярна движению в очень длинной прямой трубе, течение в которой является ламинарным.

Уравнение (4.4.9-20) применимо только к однофазным системам. Однако на практике мы сталкиваемся большей частью с многофазными системами. Используя этот метод и принимая обозначения из § 4.4.2, а также пренебрегая на входе и выходе работой вязких сил, находим уравнение баланса механической энергии для многофазной системы, состоящей из несжимаемых материалов, в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho (0,5v^2 + \varphi) dV &= \int_{S_{(вх, вых)}} \rho [0,5v^2 + \varphi + \\ &\left. \frac{(p - p_0)}{\rho} \right] (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \mathcal{W} - \mathcal{E} - \int_{S_{(вх, вых)}} (p - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) dS + \\ &+ \int_{S_{(синг)}} [\rho (1/2v^2 + \varphi) (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) - \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot \xi]] dS. \quad (4.4.9-21) \end{aligned}$$

При отсутствии переноса массы через внутреннюю поверхность раздела фаз, если применимы уравнения баланса для скачка массы и импульса из § 1.3.5 и 3.1.1, это уравнение сводится к (4.4.9-20). Поэтому мы будем оперировать главным образом уравнением (4.4.9-20).

Все основные задачи можно разделить на три группы, в которых могут использоваться интегральные уравнения баланса механической энергии: когда величиной  $\mathcal{E}$  можно пренебречь; когда она является искомой величиной; когда эта величина известна из экспериментальных данных. В последнем случае используется эмпирическое соотношение для  $\mathcal{E}$ . В § 4.4.11 мы рассмотрим возможные формы этих эмпирических соотношений.

Подробнее на уравнении баланса механической энергии мы остановимся в § 7.4.6. В табл. 7.4.6-1—7.4.6-3 приводятся многочисленные формы, которые может принимать это уравнение.

**4.4.10. Уравнение баланса механической энергии для турбулентного течения несжимаемых жидкостей.** Для данного случая совершенно справедливы замечания, сделанные в § 4.4.3 при выводе интегрального уравнения баланса массы для турбулентного течения.

Уравнение баланса механической энергии, применимое для турбулентных систем, можно получить с помощью метода, используемого в § 4.4.9. По причинам, указанным в § 4.4.3, ограничимся однофазными и многофазными системами, не имеющими поверхностей раздела жидкость — жидкость. Снова внешнюю силу представим с помощью потенциальной энергии на единицу массы  $\varphi$ :

$$\mathbf{f} = -\nabla\varphi. \quad (4.4.10-1)$$

При этих условиях скалярное произведение усредненного во времени вектора скорости на усредненное во времени уравнение первого закона Коши (см. § 4.1.2)

$$\bar{\mathbf{v}} \left[ \frac{\partial(\rho\bar{\mathbf{v}})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}}) - \operatorname{div}(\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{S}^{(t)}) + \rho\nabla\varphi \right] = 0, \quad (4.4.10-2)$$

можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\rho(0.5\bar{v}^2 + \varphi)] + \operatorname{div}(\rho[0.5\bar{v}^2 + \varphi]\bar{\mathbf{v}}) - \\ & - \operatorname{div}([\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{S}^{(t)} + p_0\mathbf{I}]\bar{\mathbf{v}}) + \operatorname{tr}([\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{S}^{(t)}]\cdot\nabla\bar{\mathbf{v}}) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.10-3)$$

Здесь  $\mathbf{S}^{(t)}$  — тензор напряжений Рейнольдса, который для несжимаемой жидкости принимает вид:

$$\mathbf{S}^{(t)} = \rho(\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}\mathbf{v}). \quad (4.4.10-4)$$

Проинтегрировав уравнение (4.4.10-3) по области, занимаемой системой, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho(0.5\bar{v}^2 + \varphi) dV = \int_{S_{\text{вх.вых}}} \rho [0.5\bar{v}^2 + \varphi + \\ & + \frac{(\bar{p} - p_0)}{\rho}] (\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \int_{S_{\text{вх.вых}}} (\bar{p} - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) dS - \\ & - \mathcal{W} - \mathcal{E}^{(t)} + \int_{S_{\text{синг}}} [\rho(0.5\bar{v}^2 + \varphi)(\bar{\mathbf{v}} \cdot \xi - u_{(\xi)}) - \bar{\mathbf{v}} \cdot (\bar{\mathbf{T}} + p_0\mathbf{I}) \cdot \xi] dS, \end{aligned} \quad (4.4.10-5)$$

где

$$\mathcal{W} \equiv \int_{S_{(s)} - S_{\text{вх.вых}}} \mathbf{v} \cdot [(\bar{\mathbf{T}} + p_0\mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n})] dS = \int_{S_{(s)} - S_{\text{вх.вых}}} \bar{\mathbf{v}} \cdot [(\bar{\mathbf{T}} + p_0\mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n})] dS \quad (4.4.10-6)$$

и

$$\mathcal{E}^{(t)} \equiv \int_{V(s)} \operatorname{tr}[(\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{S}^{(t)}) \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}] dV. \quad (4.4.10-7)$$

При этом мы пренебрегали скоростью, с которой совершается работа вязких и турбулентных сил на входе и выходе системы, а также учитывали, что для этого случая  $S_{(s)} - S_{\text{вх.вых}}$  и  $S_{\text{синг}}$  содержат только

поверхности раздела жидкость — твердое тело и твердое тело — твердое тело, на которых турбулентные пульсации тождественно равны нулю. При отсутствии переноса массы через внутренние поверхности раздела, используя уравнения баланса для скачка массы и импульса

$$[\bar{\rho} \mathbf{v} \cdot \xi - \bar{\rho} u_{(\xi)}] = [\rho \mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}] = 0; \quad (4.4.10-7a)$$

$$[\bar{\rho} \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \xi - \bar{\rho} \mathbf{v} u_{(\xi)} - \mathbf{T} \cdot \xi] = [\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) - \mathbf{T} \cdot \xi] = 0, \quad (4.4.10-7b)$$

мы можем записать уравнение (4.4.10.5) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho (0.5 \bar{v}^2 + \varphi) dV &= \int_{S_{\text{вх, вых}}} \rho [0.5 \bar{v}^2 + \varphi + \\ &+ \frac{(p - p_0)}{\rho}] (\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \int_{S_{\text{вх, вых}}} (\bar{p} - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) dS - \bar{W} - \bar{E}^{(t)}. \end{aligned} \quad (4.4.10-8)$$

Для однофазной или многофазной системы, содержащей одну или более поверхностей раздела жидкость — жидкость, можно, используя усредненное во времени уравнение баланса механической энергии из § 4.4.9, найти:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\int_{V(s)} \rho (0.5 v^2 + \varphi) dV} &= \overline{\int_{S_{\text{вх, вых}}} \rho [0.5 v^2 + \varphi + \frac{(p - p_0)}{\rho}] (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)} \cdot (-\mathbf{n})) dS -} \\ &- \overline{\int_{S_{\text{вх, вых}}} (p - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) dS - \bar{W} - \bar{E} + \int_{S_{\text{синг}}} [\rho (0.5 v^2 + \varphi) (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) -} \\ &- \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot \xi]] dS}, \end{aligned} \quad (4.4.10-9)$$

где

$$\bar{W} \equiv \overline{\int_{S_{(s)} - S_{\text{вх, вых}}} \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n})] dS}; \quad (4.4.10-10)$$

$$\bar{E} \equiv \overline{\int_{V(s)} \text{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV}. \quad (4.4.10-11)$$

При отсутствии переноса массы через внутренние поверхности раздела для случая, когда применимы уравнения баланса для скачка массы и импульса из § 1.3.5, это уравнение сводится к

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\int_{V(s)} \rho (0.5 v^2 + \varphi) dV} &= \overline{\int_{S_{\text{вх, вых}}} \rho [0.5 v^2 + \varphi + \frac{(p - p_0)}{\rho}] (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)} \cdot (-\mathbf{n})) dS -} \\ &- \overline{\int_{S_{\text{вх, вых}}} (p - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) dS - \bar{W} - \bar{E}}. \end{aligned} \quad (4.4.10-12)$$

Ограничившись однофазной системой или многофазной системой, но не содержащей поверхностей раздела жидкость — жидкость, и считая, что скоростью, с которой турбулентные силы совершают работу на входе и выходе системы, можно пренебречь, с помощью уравнений (4.4.3-7) — (4.4.3-9) можно показать, что уравнения (4.4.10-9) — (4.4.10-12) сводятся соответственно к уравнениям (4.4.10-5) — (4.4.10-8).

4.4.11. Эмпирические соотношения для  $\mathcal{E}$ . При получении эмпирических соотношений для  $\mathcal{E}$  (или  $\bar{\mathcal{E}}$  для турбулентных течений) применяется существенно тот же метод, что и в § 4.4.5 при выводе аналогичных соотношений для  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$ . При этом следует учитывать три принципа.

1. Суммарная скорость диссипации механической энергии не зависит от системы отсчета:

$$\mathcal{E}^* \equiv \int_{V(s)} \text{tr}(\mathbf{S}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^*) dV = \int_{V(s)} \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV = \mathcal{E}. \quad (4.4.11-1)$$

2. Принцип независимости материала от системы отсчета, описанный в § 2.3.1, применим к любому эмпирическому соотношению для  $\mathcal{E}$ .

3. Вид любого выражения для  $\mathcal{E}$  должен удовлетворять теореме Бэкингема — Пая [9].

Наиболее часто эмпирические соотношения для  $\mathcal{E}$  применяются в задачах о течениях в трубопроводе, а также в трубах самого различного вида и имеющих различное оборудование (клапаны, колена, зубцы, сопла и т. д.). В качестве иллюстрации общего подхода рассмотрим течение несжимаемой ньютоновской жидкости через клапан специальной конструкции, установленный в гидравлических системах самолета.

Мы уже обсуждали вклад вязкой диссипации в  $\mathcal{E}$  в случае течения в трубах. Теперь рассмотрим дополнительный вклад в величину  $\mathcal{E}$  в результате присутствия клапана. Пусть

$$u \equiv \frac{4G}{\rho \pi D^2}, \quad (4.4.11-2)$$

где  $D$  — внутренний диаметр трубок;  $\rho$  — плотность жидкости, а  $G$  — массовый расход жидкости в трубе. Следует отметить, что  $G$ , а следовательно, и  $u$  являются скалярами, независимыми от системы отсчета, поскольку эти величины отнесены к скорости, измеряемой относительно трубок, являющейся разностью скоростей. Если  $\mu$  — вязкость жидкости, то целесообразно принять, что

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, \mu, D, u). \quad (4.4.11-3)$$

Это выражение автоматически удовлетворяет принципу независимости материала от системы отсчета.

Согласно теореме Бэкингема — Пая [9] представим выражение (4.4.11-3) в виде

$$e = e(N_{\text{Re}}), \quad (4.4.11-4)$$

где  $e$  — коэффициент энергопотерь:

$$e \equiv \frac{\mathcal{E}}{\frac{1}{2} u^2 G}, \quad (4.4.11-5)$$

а  $N_{\text{Re}}$  — число Рейнольдса:

$$N_{\text{Re}} \equiv \frac{D u \rho}{\mu}. \quad (4.4.11-6)$$

Этот метод применим для оборудования трубопроводов любого типа как при ламинарном, так и при турбулентном течениях; для турбулентного течения вместо  $\mathcal{E}$  используется  $\bar{\mathcal{E}}$ . Зависимость коэффициента

энергопотерь на трение для рассматриваемого оборудования от числа Рейнольдса подтверждена экспериментально, по крайней мере для ламинарного течения [43]. Для турбулентного течения величину  $e$  приближенно можно считать постоянной [14, 44].

**4.4.12. Пример уравнения баланса механической энергии для несжимаемых материалов.** В этом параграфе нам хотелось бы не только привести пример использования уравнения баланса механической энергии, но также показать, что иногда одну и ту же задачу можно анализировать по-разному. Поскольку в каждом случае возможны различные приближения, нет ничего удивительного в том, что результаты получаются различными.

Проиллюстрируем это, проведя расчет изменения давления в мгновенно расширяющемся сечении трубопровода для случая несжимаемой жидкости (рис. 4.4.12-1). Иными словами, мы будем искать изменение давления между плоскостью поперечного сечения 0 и 2. Будем считать, что расширение не оказывает существенного влияния на распределение скорости в этих сечениях, хотя разность давлений больше зависит от изменения площади поперечного сечения, чем от трения на стенках трубы. Мы сравним результаты, полученные с помощью метода интегральных балансов для импульса и механической энергии.

**Интегральное уравнение баланса импульса.**

Пусть рассматриваемой системой будет вся жидкость в трубе между поперечными сечениями (0) и (2).

Обозначим через  $\langle \bar{v}_1 \rangle_{(0)}$  среднюю по поверхности компоненту усредненной во времени скорости в поперечном сечении (0):

$$\langle \bar{v}_1 \rangle_{(0)} = \frac{1}{S_{(0)}} \int_{S_{(0)}} \bar{v}_1 dS. \quad (4.4.12-1)$$

Усредненное во времени уравнение баланса массы указывает, что

$$\langle \bar{v}_1 \rangle_{(2)} = \langle \bar{v}_1 \rangle_{(0)} \left( \frac{D_{(0)}}{D_{(2)}} \right)^2, \quad (4.4.12-2)$$

где  $D_{(i)}$  — диаметр трубы в сечении  $i$ .

Для данной системы можно использовать интегральное уравнение баланса импульса в виде (4.4.6-4), откуда для компоненты  $z_1$  будем иметь:

$$\rho \langle (\bar{v}_1)^2 \rangle_{(0)} \frac{\pi D^2_{(0)}}{4} - \rho \langle (\bar{v}_1)^2 \rangle_{(2)} \frac{\pi D^2_{(2)}}{4} + (\langle \bar{p} \rangle_{(0)} - p_0) \frac{\pi D^2_{(0)}}{4} - (\langle \bar{p} \rangle_{(2)} - p_0) \frac{\pi D^2_{(2)}}{4} + (\langle p \rangle_{(1)} - p_0) \left( \frac{\pi D^2_{(2)}}{4} - \frac{\pi D^2_{(0)}}{4} \right) = 0. \quad (4.4.12-3)$$

Для этого уравнения мы пренебрегли влиянием турбулентного напряжения Рейнольдса на входе и выходе, а также вязкими эффектами в величине  $\mathcal{F}$  на ограничивающих поверхностях. Будем считать, что  $\bar{v}_1$

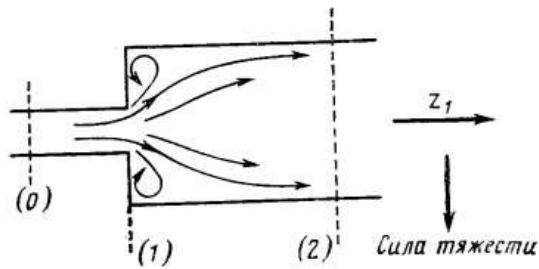


Рис. 4.4.12-1. Течение в трубе в области внезапного расширения.

почти совсем не зависит от положения в поперечном сечении (0) и (2) так, что мы можем записать:

$$\langle \bar{v}_1^2 \rangle_{(0)} = \langle \bar{v}_1 \rangle_{(0)}^2; \quad \langle \bar{v}_1^2 \rangle_{(2)} = \langle \bar{v}_1 \rangle_{(2)}^2. \quad (4.4.12-4)$$

Возьмем:

$$\langle p \rangle_{(1)} = \langle \bar{p} \rangle_{(0)}. \quad (4.4.12-5)$$

С помощью уравнений (4.4.12-2), (4.4.12-4) и (4.4.12-5) соотношение (4.4.12-3) можно преобразовать к виду

$$\frac{\langle \bar{p} \rangle_{(2)} - \langle \bar{p} \rangle_{(0)}}{0.5\rho \langle \bar{v}_1 \rangle_{(2)}^2} = 2 \left[ \left( \frac{D_{(2)}}{D_{(0)}} \right)^2 - 1 \right]. \quad (4.4.12-6)$$

Таким образом, получаем искомый результат.

Уравнение баланса механической энергии. Применив уравнение баланса механической энергии (4.4.10-8) к нашей системе, найдем:

$$0.5\rho \langle \bar{v}_1^3 \rangle_{(0)} \frac{\pi D_{(0)}^2}{4} + (\langle \bar{p} \bar{v}_1 \rangle_{(0)} - p_0 \langle \bar{v}_1 \rangle_{(0)}) \frac{\pi D_{(0)}^2}{4} - 0.5\rho \langle \bar{v}_1^3 \rangle_{(2)} \frac{\pi D_{(2)}^2}{4} - (\langle \bar{p} \bar{v}_1 \rangle_{(2)} - p_0 \langle \bar{v}_1 \rangle_{(2)}) \frac{\pi D_{(2)}^2}{4} = 0. \quad (4.4.12-7)$$

При этом мы пренебрегали всеми турбулентными эффектами на входе и выходе, а также усредненной во времени скоростью диссипации механической энергии  $\mathcal{E}^{(t)}$ . Скорость  $\bar{v}_1$  также будем считать постоянной по сечению на входе и выходе, так что приближенно можно записать:

$$\begin{aligned} \langle \bar{v}_1^3 \rangle_{(0)} &= \langle \bar{v}_1 \rangle_{(0)}^3; \quad \langle \bar{v}_1^3 \rangle_{(2)} = \langle \bar{v}_1 \rangle_{(2)}^3; \quad \langle \bar{p} \bar{v}_1 \rangle_{(0)} = \\ &= \langle \bar{p} \rangle_{(0)} \langle \bar{v}_1 \rangle_{(0)}; \quad \langle \bar{p} \bar{v}_1 \rangle_{(2)} = \langle \bar{p} \rangle_{(2)} \langle \bar{v}_1 \rangle_{(2)}. \end{aligned} \quad (4.4.12-8)$$

С помощью уравнений (4.4.12-2) и (4.4.12-8) выражение (4.4.12-7) можно записать в виде

$$\frac{\langle \bar{p} \rangle_{(2)} - \langle \bar{p} \rangle_{(0)}}{0.5\rho \langle \bar{v}_1 \rangle_{(2)}^2} = \left[ \left( \frac{D_{(2)}}{D_{(0)}} \right)^4 - 1 \right]. \quad (4.4.12-9)$$

Обсуждение результатов. Уайтекер [20] провел интересное сравнение уравнений (4.4.12-6) и (4.4.12-9) с экспериментальными данными. При этом обнаружилось, что интегральное уравнение баланса импульса (4.4.12-6) удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными, а уравнение баланса механической энергии дает систематически завышенные результаты. Если вернуться к уравнению баланса механической энергии и учсть в нем скорость диссипации механической энергии под действием вязких и турбулентных сил, получим:

$$\frac{\langle \bar{p} \rangle_{(2)} - \langle \bar{p} \rangle_{(0)}}{0.5\rho \langle \bar{v}_1 \rangle_{(2)}^2} = \left[ \left( \frac{D_{(2)}}{D_{(0)}} \right)^4 - 1 \right] - \frac{8\mathcal{E}^{(t)}}{\pi D_{(2)}^2 \rho \langle \bar{v}_1 \rangle_{(2)}^3}. \quad (4.4.12-10)$$

Совершенно очевидно, что для изотермического течения  $\mathcal{E} \geq 0$  (см. § 7.4.8), тогда как для  $\mathcal{E}^{(t)}$  это еще требуется доказать. Однако срав-

нение с экспериментальными данными, используемыми Уайтекером, показывает, что по крайней мере для данного случая  $\mathcal{E}^{(t)} \geq 0$ .

Без сравнения с экспериментом может быть неясным, что погрешность в результате пренебрежения  $\mathcal{E}^{(t)}$  в уравнении баланса механической энергии гораздо значительнее погрешности из-за пренебрежения влиянием вязкости на  $\mathcal{F}$  в интегральном уравнении баланса импульса. Можно только сказать, что практический опыт, известный также как «инженерная интуиция», нельзя заменить ничем. Все это ясно показывает, какой осторожности требует применение метода интегральных балансов. Для того чтобы получить искомый результат в нужном виде, необходимы соответствующие аппроксимации, однако по этим аппроксимациям нельзя судить о возможной погрешности конечных результатов. Правильность проведенного анализа может подтвердить только удачное сравнение с экспериментальными данными.

Поскольку уравнение (4.4.12-6) все-таки дает результат, удовлетворительно согласующийся с экспериментальными данными, уравнения (4.4.12-6) и (4.4.12-10) часто используются для расчета коэффициента потерь на трение, описанного в § 4.4.11, для такого течения

$$\bar{e} = \frac{8\mathcal{E}^{(t)}}{\pi D_{(2)}^2 \langle v_i \rangle^3} = \left[ \left( \frac{D_{(2)}}{D_{(0)}} \right)^2 - 1 \right]^2. \quad (4.4.12-11)$$

**4.4.13. Интегральное уравнение баланса момента импульса.** Интегральные уравнения баланса массы и импульса получены на основе уравнения неразрывности и первого закона Коши. Следовательно, интегральное уравнение баланса момента импульса выводится на основе второго закона Коши. Если подходить по-другому, представляется целесообразным получить уравнение, которое бы дало возможность найти крутящий момент на поверхности твердого тела, возникающий на поверхности в результате течения.

Воспользуемся тем же приемом, что и при выводе других интегральных уравнений баланса. Пусть в обобщенной теореме переноса величина

$$\Psi = \mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v} \quad (4.4.13-1)$$

является моментом импульса на единицу объема. Тогда будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v} dV = \int_{V(s)} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}) dV + \int_{S(s)} (\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (4.4.13-2)$$

Здесь  $\mathbf{p}$  — поле радиус-вектора, измеряемое относительно выбранного начала отсчета. Попытаемся найти более удобное выражение для оценки второго члена в правой части уравнений (4.4.13-2).

Мы не можем непосредственно использовать второй закон Коши, поскольку из него следует только, что поле тензора напряжения  $\mathbf{T}$  должно быть симметричным. Так как мы хотим получить интегральное уравнение баланса момента импульса, необходимо взять интеграл по произвольной системе от векторного произведения поля радиус-вектора  $\mathbf{p}$  на второй закон Коши:

$$\int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \left( \rho \frac{d(m)\mathbf{v}}{dt} - \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \mathbf{f} \right) dV = 0. \quad (4.4.13-3)$$

Рассмотрим все члены этого уравнения в отдельности.

Интеграл от первого члена в этом уравнении можно представить в виде

$$\mathbf{p} \wedge \left( \rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} \right) = \mathbf{p} \wedge \left[ \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \right] \quad (4.4.13-4)$$

для компонент в прямоугольной системе координат. Первый член в правой части последнего уравнения принимает вид:

$$\mathbf{p} \wedge \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} = e_{ijk} z_j \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial t} e_i = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}). \quad (4.4.13-5)$$

Второй член справа в уравнении (4.4.13-4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \wedge [\operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v})] &= e_{ijk} z_i \frac{\partial}{\partial z_m} (\rho v_k v_m) \mathbf{e}_i = \\ &= \frac{\partial}{\partial z_m} (e_{ijk} z_j \rho v_k v_m) \mathbf{e}_i - e_{ijk} \delta_{im} \rho v_k v_m \mathbf{e}_i = \\ &= - \frac{\partial}{\partial z_m} (e_{ijk} z_j \rho v_k v_m) \mathbf{e}_i = \operatorname{div}([\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}] \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (4.4.13-6)$$

С помощью уравнений (4.4.13-5) и (4.4.13-6) первый член слева в уравнении (4.4.13-3) принимает вид соотношения

$$\int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \left( \rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} \right) dV = \int_{V(s)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}[(\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}) \mathbf{v}] \right\} dV. \quad (4.4.13-7)$$

Используя преобразование Грина, получаем:

$$\int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \left( \rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} \right) dV = \int_{V(s)} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}) dV + \int_{S(s)} (\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (4.4.13-8)$$

Это выражение в точности соответствует первому члену в правой части уравнения (4.4.13-2).

Удобнее всего преобразовать второй член слева в уравнении (4.4.13-3) в прямоугольных координатах:

$$\begin{aligned} - \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge (\operatorname{div} \mathbf{T}) dV &= - \int_{V(s)} e_{ijk} z_i \frac{\partial T_{km}}{\partial z_m} \mathbf{e}_i dV = \\ &= - \int_{V(s)} \frac{\partial}{\partial z_m} (e_{ijk} z_j T_{km}) \mathbf{e}_i dV + \int_{V(s)} e_{ijk} \delta_{im} T_{km} \mathbf{e}_i dV = \\ &= - \int_{V(s)} \frac{\partial}{\partial z_m} (e_{ijk} z_j T_{km}) \mathbf{e}_i dV = - \int_{V(s)} \operatorname{div}(\mathbf{p} \wedge \mathbf{T}) dV. \end{aligned} \quad (4.4.13-9)$$

В соответствии со вторым законом Коши второй член во второй строке уравнения (4.4.13-9) равен нулю. С помощью преобразования Грина получим:

$$- \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge (\operatorname{div} \mathbf{T}) dV = - \int_{S(s)} e_{ijk} z_j T_{km} \mathbf{n}_m \mathbf{e}_i dS = - \int_{S(s)} \mathbf{p} \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (4.4.13-10)$$

Из уравнений (4.4.13-3), (4.4.13-8) и (4.4.13-10) получим уравнение (4.4.13-2) в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v} dV = \int_{S(s)} (\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) (-\mathbf{n}) dS - \int_{S(s)} \mathbf{p} \wedge [\mathbf{T} \cdot (-\mathbf{n})] dS + \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{f} dV. \quad (4.4.13-11)$$

В этом уравнении первый член справа представляет собой результирующую скорость поступления момента импульса в систему вместе с любым материалом, пересекающим ограничивающую поверхность. Второй член — крутящий момент или момент силы, с которой материал системы действует на ее границы. Этот крутящий момент является суммарным, хотя в большинстве случаев мы говорим о крутящем моменте сверх атмосферного давления  $p_0$ . Используя прием, который мы применяли в § 4.4.5 для учета  $p_0$ , и пренебрегая вязкими эффектами на **входе и выходе** системы, можем окончательно записать [47]:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} (\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \mathbf{p} \wedge [(\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \times \times (-\mathbf{n})] dS - \Sigma + \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{f} dV, \quad (4.4.13-12)$$

где  $\Sigma \equiv \int_{S(s) - S_{(\text{вх, вых})}} \mathbf{p} \wedge [(\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n})] dS]. \quad (4.4.13-13)$

По своему физическому смыслу  $\Sigma$  обозначает крутящий момент силы, действующей на непроницаемый участок границы системы помимо давления окружающей среды  $p_0$ . Уравнение (4.4.13-12) является общим интегральным уравнением баланса момента импульса для однофазной системы.

Обычно интегральное уравнение баланса момента импульса применяется в системах, где моментом вращения в результате вязких сил можно пренебречь. Для этого в качестве входной или выходной поверхности выбирают сечения, перпендикулярные течению в длинной прямой трубе, считая, что течение в этой трубе приближенно соответствует пузейлевскому (см. § 3.2.1). Для большинства задач это делается из-за недостатка информации. При таких условиях уравнение (4.4.13-12) сводится к виду:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} (\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) (-\mathbf{n}) dS - \int_{S_{(\text{вх, вых})}} (P - p_0) (\mathbf{p} \wedge \mathbf{n}) dS - \Sigma + \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{f} dV. \quad (4.4.13-14)$$

Интегральное уравнение баланса момента импульса в виде (4.4.13-14) применяется чаще, чем уравнение (4.4.13-12).

Уравнения (4.4.13-12) и (4.4.13-14) применимы только для однофазных систем. Как указывалось в § 4.4.2, на практике нам чаще приходится сталкиваться с многофазными системами. Используя метод и

обозначения § 4.4.2, находим без всяких дополнительных допущений, что общим интегральным уравнением баланса момента импульса для многофазных систем будет:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v} dV = \int_{S_{\text{вх, вых}}} (\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \int_{S_{\text{вх, вых}}} \mathbf{p} \wedge [(\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \times \\ \times (-\mathbf{n})] dS - \Sigma + \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_{\text{синг}}} \mathbf{p} \wedge [\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) - \mathbf{T} \cdot \xi] dS. \quad (4.4.13-15)$$

Для случаев, когда можно использовать уравнение баланса для скачка импульса (3.1.1-1) и пренебречь вязкими эффектами на входе и выходе, уравнение (4.4.13-15) сводится к эквивалентному выражению (4.4.13-14) для однофазной системы.

Интегральное уравнение баланса момента импульса применимо в задачах трех типов: 1) когда моментом вращения  $\Sigma$  можно пренебречь; 2) когда он является искомой величиной; 3) когда он известен из экспериментальных данных. Поскольку интегральное уравнение баланса момента импульса редко встречается в литературе или, вернее, из-за ограниченного круга задач, где оно может использоваться, имеется небольшое количество эмпирических соотношений для  $\Sigma$ . Поэтому мы не будем рассматривать в отдельном параграфе эмпирические соотношения для этой величины. При необходимости читателю можно рекомендовать § 4.4.7, где рассматриваются соотношения для  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$ .

**4.4.14. Интегральное уравнение момента импульса для турбулентных течений.** Чаще всего интегральное уравнение баланса момента импульса применяется в турбулентных системах.

При построении интегрального уравнения баланса момента импульса для турбулентных течений возможны два подхода. При использовании первого по причинам, указанным в § 4.4.3, ограничимся однофазными или многофазными системами, не содержащими поверхностей раздела жидкость — жидкость. Будем исходить из усредненного во времени уравнения первого закона Коши:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}) = -\nabla \bar{P} + \operatorname{div} (\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{S}_{\text{ре}}) + \bar{\rho} \bar{\mathbf{f}}. \quad (4.4.14-1)$$

Используя метод § 4.4.13, находим:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \bar{\rho} \mathbf{v} dV = \int_{S_{\text{вх, вых}}} \mathbf{p} \wedge (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} - \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ - \int_{S_{\text{вх, вых}}} (\bar{P} - p_0) (\mathbf{p} \wedge \mathbf{n}) dS - \Sigma + \int_{V(s)} \mathbf{p} \wedge \bar{\rho} \bar{\mathbf{f}} dV + \\ + \int_{S_{\text{синг}}} \mathbf{p} \wedge [\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} \cdot \xi - \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} u_{(\xi)} - \bar{\mathbf{T}} \cdot \xi] dS, \quad (4.4.14-2)$$

где

$$\Sigma = \int_{S_{(s)} - S_{\text{вх, вых}}} \mathbf{p} \wedge [(\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n})] dS = \int_{S_{(s)} - S_{\text{вх, вых}}} \mathbf{p} \wedge (\bar{\mathbf{T}} + p_0 \mathbf{I}) \times \\ \times (-\mathbf{n})] dS. \quad (4.4.14-3)$$

Если при этом учесть, что поверхности  $S_{(s)} - S_{(\text{вх.вых})}$  и  $S_{(\text{синг})}$  содержат только поверхности раздела фаз жидкость — твердое тело или твердое тело — твердое тело, на которых турбулентные пульсации тождественно равны нулю, то с помощью усредненного во времени уравнения баланса для скачка импульса выражение (4.4.14-2) можно упростить:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \mathbf{p} \wedge \bar{\rho} \mathbf{v} dV = \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \mathbf{p} \wedge (\bar{\rho} \mathbf{v} \mathbf{v} - \bar{\rho} \mathbf{v} \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ - \int_{S_{(\text{вх.вых})}} (\bar{P} - p_0) (\mathbf{p} \wedge \mathbf{n}) dS - \Sigma + \int_{V_{(s)}} \mathbf{p} \wedge \bar{\rho} \mathbf{f} dV. \quad (4.4.14-4)$$

Это уравнение можно рекомендовать в качестве интегрального уравнения баланса момента импульса для турбулентных однофазных или многофазных систем, не содержащих поверхности раздела жидкость — жидкость. Следует отметить, что при выводе этого уравнения турбулентными или вязкими силами на входе и выходе системы пренебрегалось.

Для однофазной или многофазной системы, содержащей одну или более поверхностей раздела жидкость — жидкость, можно рекомендовать усредненное во времени интегральное уравнение баланса импульса из § 4.4.13

$$\frac{d}{dt} \overline{\int_{V_{(s)}} \mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v} dV} = \overline{\int_{S_{(\text{вх.вых})}} (\mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS} - \\ - \overline{\int_{S_{(\text{вх.вых})}} (P - p_0) (\mathbf{p} \wedge \mathbf{n}) dS} - \Sigma + \overline{\int_{V_{(s)}} \mathbf{p} \wedge \rho \mathbf{f} dV}, \quad (4.4.14-5)$$

где

$$\Sigma \equiv \overline{\int_{S_{(s)} - S_{(\text{вх.вых})}} \mathbf{p} \wedge (\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n}) dS}. \quad (4.4.14-6)$$

При получении (4.4.14-5) мы снова учитывали, что уравнение баланса для скачка импульса (3.1.1-1) применимо для данного случая, а также пренебрегали усредненными во времени вязкими силами на входе и выходе системы.

Для однофазных систем или многофазных течений, не содержащих поверхностей раздела жидкость — жидкость, а также для случая, когда можно пренебречь всеми турбулентными эффектами на входе и выходе системы, с помощью уравнений (4.4.3-7) — (4.4.3-9) можно показать, что уравнения (4.4.14-5) и (4.4.14-6) соответственно сводятся к (4.4.14-3) и (4.4.14-4).

**4.4.15. Пример использования интегрального уравнения момента импульса**<sup>1</sup>. Возьмем игрушку в виде колеса, вокруг которого проходит трубка, заполненная черным порохом. Если зажечь порох, газы, образующиеся при его сгорании, быстро выходят из отверстия на одном конце трубы, и колесо начинает вращаться вокруг своей оси. Найдем угловые

<sup>1</sup> Эта задача решается в работе [48], однако авторы получили неправильный ответ.

вую скорость  $\Omega$  вращения колеса как функцию времени, начиная с момента воспламенения пороха.

Для упрощения будем считать массу колеса  $M$  сосредоточенной на расстоянии  $R$  от оси вращения. Скорость газовой струи относительно какой-либо точки на вращающемся колесе на расстоянии радиуса  $R$  обозначим через  $V_e$ , скорость газовой струи через  $G$ , начальную массу пороха через  $M_0$ . Будем считать, что она также сконцентрирована на расстоянии радиуса  $R$ .

Легче всего провести анализ этой задачи для системы в цилиндрических координатах, ось которых совпадает с осью колеса. В качестве рассматриваемой системы возьмем колесо и порох. Для упрощения турбулентными эффектами пренебрежем и рассмотрим следствия уравнения (4.4.13-14) для аксиальной компоненты  $z$  момента вращения:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} e_{ijk} p_{<j>} \rho v_{<k>} dV = \int_{S_{(вых)}} e_{ijk} p_{<j>} \rho v_{<k>} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + \int_{V(s)} e_{ijk} p_{<j>} f_{<k>} dV. \quad (4.4.15-1)$$

При этом мы пренебрегаем всеми моментами вращения в результате трения колеса об его ось. Из-за недостатка информации будем считать, что давление выхлопных газов на выходе системы практически равно давлению окружающей атмосферы  $p_0$ . Используем цилиндрическую систему координат:

$$z_1 = x^1 \cos x^2 = r \cos \theta; \quad z_2 = x^1 \sin x^2 = r \sin \theta; \quad z_3 = x^3 = z.$$

В цилиндрических координатах только две компоненты поля радиус-вектора будут отличными от нуля:

$$p_{<1>} = r; \quad p_{<2>} = 0; \quad p_{<3>} = z. \quad (4.4.15-2)$$

Следовательно, без каких-либо дополнительных допущений уравнение (4.4.15-1) можно упростить:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_s} p_{<1>} \rho v_{<2>} dV = \int_{S_{(вых)}} p_{<1>} \rho v_{<2>} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{V(s)} p_{<1>} f_{<2>} dV \quad (4.4.15-3)$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} r \rho v_\theta dV = \int_{S_{(вых)}} r \rho v_\theta (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS. \quad (4.4.15-4)$$

При переходе от уравнения (4.4.15-4) к (4.4.15-5) учитывалось, что колесо вращается в горизонтальной плоскости:

$$f_{<2>} = f_\theta = 0. \quad (4.4.15-5)$$

Считая рассматриваемую систему твердым телом, масса которого сконцентрирована на расстоянии радиуса, и учитывая, что

$$\text{при } S_{(вых)} r v_\theta = R(R\Omega - V_e), \quad (4.4.15-6)$$

можно уравнение (4.4.15-4) еще больше упростить

$$\frac{d}{dt} \left( R^2 \Omega \int_{V(s)} \rho dV \right) = -R(R\Omega - V_e)G. \quad (4.4.15-7)$$

Тогда, проинтегрировав интегральное уравнение баланса массы

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho dV = \int_{S(\text{вых})} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS = -G, \quad (4.4.15-8)$$

найдем:

$$\int_{V(s)} \rho dV = M + M_0 - Gt. \quad (4.4.15-9)$$

Подставив это выражение в уравнение (4.4.15-7), получим дифференциальное уравнение для  $\Omega$  как функции времени

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{V_e G}{R(M + M_0 - Gt)}. \quad (4.4.15-10)$$

Проинтегрировав это уравнение, легко найдем искомый результат:

$$\Omega = \frac{V_e}{R} \ln \frac{M + M_0}{M + M_0 - Gt}. \quad (4.4.15-11)$$

**4.4.16. Два предельных принципа.** В § 4.4.11 описан метод получения эмпирических соотношений для скорости диссипации механической энергии  $\mathcal{E}$  под действием вязких сил. В нескольких последующих параграфах будет описан метод расчета нижнего и верхнего пределов  $\mathcal{E}$  для простого поведения материалов.

Предельные принципы, описанные в § 4.4.17 и 4.4.18, разработаны в литературе исходя из двух различных точек зрения. Джонсон [49, 50] использовал вариационное исчисление<sup>1</sup>. Для очень частного случая Сани [53] показал, каким образом следует подходить к этим предельным принципам с точки зрения функционального пространства. В этом параграфе будут описаны более ранние результаты [54, 55] и будет получено уравнение для несжимаемых жидкостей, поведение которых можно описать эмпирическими моделями, описанными в § 2.3.3. В дальнейшем следует пренебречь членами инерции в уравнении первого закона Коши и представить внешнюю силу в виде градиента скалярной величины потенциальной энергии на единицу массы

$$\mathbf{f} = -\nabla \Phi. \quad (4.4.16-1)$$

При таких условиях уравнение первого закона Коши можно записать в виде

$$\operatorname{div}(\mathbf{T} - \rho \mathbf{f}) = 0. \quad (4.4.16-2)$$

Получив предельные уравнения для скорости и напряжения в § 4.4.17 и 4.4.18, мы покажем в § 4.4.19 характер поведения жидкости, с которым эти предельные принципы связывают скорость диссипации энергии в системе. Применение этих двух принципов проиллюстрировано в § 4.4.20 для задачи, которую очень трудно решить другими методами.

<sup>1</sup> Принцип предела скорости был ранее предложен Павловским [51] и Бирдом [52].

**4.4.17. Принцип предела скорости.** Пространство  $\mathcal{L}$  всех тензоров второго ранга является девятиверным (см. § A.5.1 и A.5.2). Симметричные тензоры второго ранга образуют шестимерное подпространство  $\mathcal{L}$  или в  $\mathcal{I}$ . Пусть  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{A})$  — скалярная функция тензора второго ранга  $\mathbf{A}$  в  $\mathcal{L}$  или в  $\mathcal{I}$ . Пусть  $A_{ij}$  — компоненты  $\mathbf{A}$  в прямоугольных координатах. Тогда  $\epsilon(\mathbf{A})$  также можно считать действительной функцией девяти действительных переменных  $A_{ij}$ , если  $\mathbf{A}$  принадлежит подпространству  $\mathcal{L}$ , или функцией шести действительных  $A_{ij}$  ( $i \leq j$ ), если  $\mathbf{A}$  принадлежит подпространству  $\mathcal{I}$ .

Если  $\mathbf{A}$  принадлежит  $\mathcal{L}$ , градиент  $\epsilon$  определяется из соотношения

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial \epsilon}{\partial A_{ij}} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \frac{\partial \epsilon}{\partial \bar{A}_{ij}} \bar{\mathbf{g}}_i \bar{\mathbf{g}}_j = \frac{\partial \epsilon}{\partial \bar{A}_{<ij>}} \bar{\mathbf{g}}_{<i>} \bar{\mathbf{g}}_{<j>}. \quad (4.4.17-1)$$

Здесь  $\bar{A}_{ij}$  и  $\bar{A}_{<ij>}$  — соответственно ковариантная и физическая компоненты  $\mathbf{A}$  относительно какой-то криволинейной системы координат. Если  $\mathbf{A}$  принадлежит  $\mathcal{I}$ , то область определения  $\epsilon$  следует распространить на  $\mathcal{L}$ , взяв  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{A}) = \epsilon[0.5(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)]$ . Мы берем производные от  $\tilde{\epsilon}$  для девяти компонент  $\mathbf{A}$  по уравнению (4.4.17-1), а затем снова ограничиваем  $\mathbf{A}$  подпространством  $\mathcal{I}$ . Если  $\mathbf{A}$  принадлежит подпространству  $\mathcal{I}$  и  $\epsilon(\mathbf{A}) = A_{12}$ , то

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial A_{12}} = \frac{\partial \epsilon}{\partial A_{21}} = 1/2$$

и

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{A}} = 0.5 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1).$$

Ограничимся рассмотрением ползучих течений несжимаемых жидкостей, описанных в § 4.4.16, и, кроме того, потребуем, чтобы определяющее уравнение для дополнительных напряжений можно было представить в виде скалярной функции  $E$  от тензора скорости деформации:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{D}}. \quad (4.4.17-2)$$

В § 2.3.3 рассматривался класс эмпирических моделей для несжимаемых жидкостей в виде

$$\mathbf{S} = 2\eta(D^2) \mathbf{E}, \quad (4.4.17-3)$$

где величина  $D$  вводится по соотношению

$$D \equiv \sqrt{\operatorname{tr} \mathbf{E}^2}. \quad (4.4.17-4)$$

Для моделей такого класса имеет место соотношение:

$$E = E(D) = \int_0^{D^2} \eta(D^2) dD^2. \quad (4.4.17-5)$$

Чтобы подтвердить, что уравнение (4.4.17-3) совместимо с (4.4.17-2), продифференцируем уравнение (4.4.17-5):

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{D}} = 2\eta(D^2) \mathbf{E}. \quad (4.4.17-6)$$

Теперь рассмотрим течение, для которого величина  $\mathbf{v}$  является действительным распределением скорости, т. е. удовлетворяет уравне-

нию движения, уравнению неразрывности и всем заданным граничным условиям. Пусть теперь  $\mathbf{v}^*$  представляет собой некоторое приближенное распределение скорости, которое мы характеризуем позже. Разложим  $E(D)$  в усеченный ряд Тейлора, остаточным членом которого будет:

$$E(D^*) - E(D) = \frac{\partial E}{\partial D_{ij}} \Big|_D (D^*_{ij} - D_{ij}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial D_{ij} \partial D_{mn}} \Big|_D (D^*_{ij} - D_{ij}) \times \\ \times (D^*_{mn} - D_{mn}). \quad (4.4.17-7)$$

Для простоты будем рассматривать систему в прямоугольных координатах, для которых компоненты  $D_{ij}$  будут представлены через  $\mathbf{D}$ . Здесь  $\bar{D}$  — соответствующая величина между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{D}^*$ . Считая  $E$  функцией  $\mathbf{D}$ , находим:

$$\frac{\partial E}{\partial D_{ij}} = \frac{1}{D} \frac{dE}{dD} D_{ij} \quad (4.4.17-8)$$

и

$$\frac{\partial^2 E}{\partial D_{ij} \partial D_{mn}} = \left( \frac{1}{D^2} \frac{d^2 E}{dD^2} - \frac{1}{D^3} \frac{dE}{dD} \right) D_{mn} D_{ij} + \frac{1}{D} \frac{dE}{dD} \delta_{im} \delta_{jn}. \quad (4.4.17-9)$$

Учитывая уравнения (4.4.17-8) и (4.4.17-9), можно представить выражение (4.4.17-7) в виде

$$E(D^*) - E(D) = \frac{1}{D} \frac{dE}{dD} \Big|_D D_{ij} (D^*_{ij} - D_{ij}) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\bar{D}^2} \frac{d^2 E}{dD^2} \Big|_{\bar{D}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\bar{D}^3} \frac{dE}{dD} \Big|_{\bar{D}} \right) [\bar{D}_{ij} (D^*_{ij} - D_{ij})]^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{D}} \frac{dE}{dD} \Big|_{\bar{D}} (D^*_{ij} - D_{ij}) (D^*_{ij} - D_{ij}). \quad (4.4.17-10)$$

В соответствии с неравенством Шварца [56] будем иметь:

$$[\bar{D}_{ij} (D^*_{ij} - D_{ij})]^2 \leq \bar{D}_{mn} \bar{D}_{mn} [(D^*_{ij} - D_{ij}) (D^*_{ij} - D_{ij})] = \\ = \bar{D}^2 (D^*_{ij} - D_{ij}) (D^*_{ij} - D_{ij}). \quad (4.4.17-11)$$

Возьмем для данного случая

$$\frac{1}{\bar{D}} \frac{dE}{dD} \Big|_{\bar{D}} \geq 0. \quad (4.4.17-12)$$

Тогда, используя неравенство (4.4.17-11), находим:

$$E(D^*) - E(D) \geq \frac{1}{D} \frac{dE}{dD} \Big|_D D_{ij} (D^*_{ij} - D_{ij}) + \\ + \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{D}^2} \frac{d^2 E}{dD^2} \Big|_{\bar{D}} [\bar{D}_{ij} (D^*_{ij} - D_{ij})]^2. \quad (4.4.17-13)$$

Продифференцировав выражение (4.4.17-5), получим уравнение

$$\frac{1}{D} \frac{dE}{dD} = 2\eta, \quad (4.4.17-14)$$

которое подтверждает неравенство (4.4.17-12); в § 2.3.3 указывалось, что все имеющиеся экспериментальные данные говорят о том, что все

личина  $\eta$  должна быть положительной. Кроме того, на основании уравнения (4.4.17-14) можно утверждать:

$$S = \sqrt{\operatorname{tr} \mathbf{S}^2} = \frac{1}{D} \frac{dE}{dD} \sqrt{\operatorname{tr} \mathbf{D}^2} = \frac{dE}{dD}. \quad (4.4.17-15)$$

Учитывая, что в § 2.3.3 было доказано неравенство

$$\frac{dS}{dD} = \frac{d^2 E}{dD^2} \geq 0, \quad (4.4.17-16)$$

мы можем записать неравенство (4.4.17-13) в конечном виде

$$E(D^*) - E(D) \geq \frac{1}{D} \frac{dE}{dD} \Big|_D D_{ii} (D^*_{ii} - D_{ii}). \quad (4.4.17-17)$$

Используя уравнения (4.4.17-3) и (4.4.17-14), можно представить полученное выражение в другой, более удобной форме:

$$E(D^*) - E(D) \geq \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot [\mathbf{D}^* - \mathbf{D}]). \quad (4.4.17-18)$$

Наша основная цель — найти интеграл неравенства (4.4.17-18) по произвольной системе:

$$\int_{V(s)} [E(D^*) - E(D) - \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}^*) + \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D})] dV \geq 0. \quad (4.4.17-19)$$

Запишем для третьего члена слева

$$\begin{aligned} & \int_{V(s)} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}) dV = \int_{V(s)} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV = \int_{V(s)} \operatorname{tr}([\mathbf{T} - \rho \varphi \mathbf{I}] \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} dV = \\ &= \int_{V(s)} \{\operatorname{div}([\mathbf{T} - \rho \varphi \mathbf{I}] \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \operatorname{div}(\mathbf{T} - \rho \varphi \mathbf{I})\} dV = \int_{V(s)} \operatorname{div}([\mathbf{T} - \rho \varphi \mathbf{I}] \cdot \mathbf{v}) dV = \\ &= \int_{S(s)} \mathbf{v} \cdot ([\mathbf{T} - \rho \varphi \mathbf{I}] \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (4.4.17-20)$$

В первой строчке уравнения (4.4.17-20) использовалось свойство симметрии тензора дополнительных напряжений; вторая строчка получена с помощью уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости; в третьей мы проводили интегрирование по частям; для четвертой строчки этого уравнения использовалось уравнение первого закона Коши для ползучего течения; последняя строчка получена с помощью преобразования Грина. Пусть теперь  $\mathbf{v}^*$  будет приближенным распределением скорости, удовлетворяющим уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости, а также любому граничному условию для скорости в явном виде. Тогда получим:

$$\int_{V(s)} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}^*) dV = \int_{S(s)} \mathbf{v}^* \cdot ([\mathbf{T} - \rho \varphi \mathbf{I}] \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (4.4.17-21)$$

Из уравнений (4.4.17-9) — (4.4.17-21) следует, что

$$\int_{V(s)} E(D^*) dV - \int_{S(s) - S_v} (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}) \cdot ([\mathbf{T} - \rho \varphi \mathbf{I}] \cdot \mathbf{n}) dS \geq \int_{V(s)} E(D) dV. \quad (4.4.17-22)$$

Здесь  $S_v$  является частью замкнутой ограничивающей поверхности системы, для которой распределение скорости задано в явном виде;

$S_{(s)}$  —  $S_v$  — часть замкнутой ограничивающей поверхности, для которой скорость не задана в явном виде. Неравенство (4.4.17-22) можно назвать принципом предела скорости. В § 4.4.19 объясняется физический смысл этого принципа.

4.4.18. Предельный принцип для напряжения. Рассуждения этого параграфа аналогичны § 4.4.17.

Опять ограничимся ползучим течением несжимаемой жидкости. Кроме того, потребуем, чтобы определяющее уравнение для дополнительных напряжений имело вид:

$$D = \partial E_c / \partial S. \quad (4.4.18-1)$$

Производные получаются так же, как в § 4.4.17.

В § 2.3.3 приведены простые определяющие уравнения, представленные в общем виде как

$$2D = \varphi(S^2) S. \quad (4.4.18-2)$$

Для удобства определим:

$$S \equiv \sqrt{\operatorname{tr} S^2}. \quad (4.4.18-3)$$

Для этого класса определяющих уравнений имеем:

$$E_c = E_c(S) = \int_0^{S^2} 1/4\varphi(S^2) dS^2, \quad (4.4.18-4)$$

что легко подтверждается, если мы продифференцируем это выражение:

$$\frac{\partial E_c}{\partial S} = 0,5\varphi(S^2) S. \quad (4.4.18-5)$$

Как указывалось в § 2.3.3, экспериментальными данными для этого случая доказано соотношение:

$$\varphi(S^2) \geq 0 \quad (4.4.18-6)$$

и

$$\frac{dD}{dS} \geq 0. \quad (4.4.18-7)$$

Поэтому, в точности следуя методу, использованному при выводе уравнения (4.4.17-18), находим:

$$E_c(S^*) - E_c(S) \geq \operatorname{tr}(D \cdot [S^* - S]). \quad (4.4.18-8)$$

При этом  $S^*$  — приближенное распределение напряжения, на ограничениях которого мы кратко остановимся несколько позже.

Прежде всего нам необходимо найти объемный интеграл в уравнении (4.4.18-8) по области, занимаемой произвольной системой:

$$\int_{V(s)} [E_c(S^*) - E_c(S) - \operatorname{tr}(D \cdot S^*) + \operatorname{tr}(\Gamma \cdot S)] dV \geq 0. \quad (4.4.18-9)$$

Пусть  $\mathbf{T}^*$  — приближенное распределение напряжения, удовлетворяющее первому закону Коши для ползучего течения:

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}^* - \rho\varphi\mathbf{I}) = 0, \quad (4.4.18-10)$$

которое не обязательно удовлетворяет всем заданным граничным условиям для тензора напряжений. Теперь определим приближенно тензор городинстельных напряжений  $\mathbf{S}^*$  в виде

$$\mathbf{S}^* \equiv \mathbf{T}^* - \frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{T}^*) \mathbf{I}, \quad (4.4.18-11)$$

что соответствует среднему давлению  $p^*$  (см. § 2.3.2).

На основании уравнения (4.4.18-10) найдем соотношение, аналогичное (4.4.17-20):

$$\int_{V(s)} \operatorname{tr} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^*) dV = \int_{S(s)} \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{T}^* - p\varphi \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}] dS. \quad (4.4.18-12)$$

Используя это выражение вместе с уравнением (4.4.17-20), представим неравенство (4.4.18-9) в виде

$$\int_{V(s)} E_c(S^*) dV - \int_{S(s)} \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n}] dS \geq \int_{V(s)} E_c(S) dV. \quad (4.4.18-13)$$

Из уравнений (4.4.18-2) и (4.4.18-4) известно:

$$\frac{dE_c}{dS} = \frac{\varphi S}{2} = D. \quad (4.4.18-14)$$

Аналогично на основании (4.4.17-3) и (4.4.17-5) будем иметь:

$$\frac{dE}{dD} = 2\eta D = S. \quad (4.4.18-15)$$

С помощью этих выражений найдем:

$$\int_0^S \frac{dE_c}{dS} dS + \int_0^D \frac{dE}{dD} dD = \int_0^S D dS + \int_0^D S dD = \int_0^{SD} d(SD) \quad (4.4.18-16)$$

или

$$E_c + E = SD = 2\eta D^2 = \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}). \quad (4.4.18-17)$$

Интегрируя это выражение по области, занимаемой произвольной системой, с помощью уравнения (4.4.17-20) получаем:

$$\begin{aligned} \int_{V(s)} E_c(S) dV &= - \int_{V(s)} E(D) dV + \int_{V(s)} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}) dV = \\ &= - \int_{V(s)} E(D) dV + \int_{S(s)} \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{T} - p\varphi \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}] dS. \end{aligned} \quad (4.4.18-18)$$

С помощью этого уравнения из (4.4.18-13) найдем искомое соотношение

$$\int_{V(s)} E(D) dV \geq - \int_{V(s)} E_c(S^*) dV + \int_{S(s)} \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{T}^* - p\varphi \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}] dS. \quad (4.4.18-19)$$

Мы будем называть это выражение предельным принципом для напряжения.

Следует учесть, что в соответствии с предельными принципами для скорости и напряжения верхний и нижний пределы для этой величины имеют вид

$$\int_{V(s)} E(D) dV.$$

В следующем параграфе мы рассмотрим физический смысл этого интеграла.

**4.4.19. Физический смысл предельных принципов для скорости и напряжения.** Если для заданной постоянной величины

$$t^p E(D) = E(tD) \quad (4.4.19-1)$$

независимо от значения  $t$ , то  $E$  будет однородной функцией степени  $p$ . Согласно теореме Эйлера для однородных функций [57]

$$pE = D \frac{dE}{dD}. \quad (4.4.19-2)$$

Искомый результат получим из уравнений (4.4.17-2) и (4.4.17-8):

$$E = \frac{1}{p} D_{ij} \frac{\partial E}{\partial D_{ij}} = \frac{1}{p} D_{ij} S_{ij} = \frac{1}{p} \operatorname{tr}(S \cdot \nabla v). \quad (4.4.19-3)$$

Функция  $E$  пропорциональна скорости диссипации энергии в единице объема жидкости.

Практическое значение этого выражения состоит в том, что оно является однородной функцией для некоторых простых модельных жидкостей, например ньютоновской жидкости ( $p=2$ ) и степенной жидкости ( $p=n+1$ ). Однако не все простые модельные жидкости, описанные в § 2.3.3, соответствуют однородной функции  $E$ . Для жидкости Эллиса должен применяться иной подход, чтобы связать ее со скоростью диссипации энергии в системе.

Если  $E$  — однородная функция степени  $p$ , то в соответствии с предельными принципами для скорости и напряжения, описанными в § 4.4.17 и 4.4.18, будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{V(s)} E(D^*) dV - \int_{S(s)} (v^* - v) \cdot [(T - \rho \varphi I) \cdot n] dS &\geq \\ \geq \frac{1}{p} \int_{V(s)} \operatorname{tr}(S \cdot \nabla v) dV; \end{aligned} \quad (4.4.19-4)$$

$$\frac{1}{p} \int_{V(s)} \operatorname{tr}(S \cdot \nabla v) dV \geq - \int_{V(s)} E_c(S^*) dV + \int_{S(s)} v \cdot [(T^* - \rho \varphi I) \cdot n] dS. \quad (4.4.19-5)$$

Для этого ограниченного класса жидкостей предельные принципы могут использоваться для нахождения предельной скорости диссипации энергии системы.

Основой применения предельных принципов является интегральное уравнение баланса механической энергии, поскольку из всех рассмотренных интегральных уравнений баланса только это содержит скорость диссипации энергии, что станет яснее из следующего параграфа.

**4.4.20. Предельные значения коэффициента лобового сопротивления при обтекании шара** [58, 61]. Рассмотрим обтекание неподвижного шара радиусом  $R$  несжимаемой жидкостью Эллиса, движущейся с не-большой скоростью. На большом расстоянии от шара скорость жидкости равномерна и равна  $v_\infty$ . Требуется определить коэффициент лобового сопротивления для этого шара.

Если вернуться к § 3.3.3, можно вспомнить, что в нем рассматривалась почти такая же задача, только описание поведения жидкости было иным. Это и представляет основное различие. Анализируя

в § 3.3.3 ньютоновскую жидкость, мы формулировали задачу как линейную. Теперь же на основании первого закона Коши мы подходим к нелинейному дифференциальному уравнению для функции тока. Это дифференциальное уравнение не имеет аналитического решения. Численное решение этой задачи на ЭВМ также весьма затруднительно, поэтому мы будем искать приближенное решение или попробуем разработать метод определения коэффициента лобового сопротивления.

Существует соотношение между скоростью диссипации энергии в бесконечной жидкости и компонентой силы, действующей на какое-либо тело, погруженное в жидкость, в направлении течения:

$$\mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{G} = \mathcal{E} \equiv \int_{V_{(\text{жидк})}} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV. \quad (4.4.20-1)$$

Используя это соотношение, мы сразу увидим возможность определить предельное значение коэффициента лобового сопротивления для шара, движущегося с небольшой скоростью в жидкости Эллиса.

Целесообразно рассмотреть принципы ограничения в отдельности.

Предельный принцип для скорости. Прежде всего определим, что же мы хотим найти. Известно, что с помощью предельных принципов можно получить верхнее и нижнее предельные значения скорости диссипации энергии в жидкости.

Из соотношения (4.4.20-1)

$$\mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{G} = \int_{V_{(s)}} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV, \quad (4.4.20-1a)$$

где  $\mathbf{G}$  — сила, с которой жидкость действует на шар, исключая архимедову силу. В § 4.4.7 (пример 1) мы нашли коэффициент лобового сопротивления для шара. Для данного случая этот коэффициент можно представить в виде

$$c = \frac{\mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{G}}{0,5 \rho v_\infty^3 \pi R^2}. \quad (4.4.20-2)$$

Это соотношение показывает, что искомая величина — коэффициент сопротивления — прямо пропорциональна скорости диссипации энергии в жидкости.

Использовать принцип предельной скорости можно только с помощью приближенного распределения скорости  $v^*$ , удовлетворяющего уравнению неразрывности, а также граничным условиям для скорости. Используя метод анализа ньютоновской жидкости из § 3.3.3, допустим, что это приближенное распределение скорости имеет в сферических координатах только две компоненты, отличные от нуля:  $v_r^*$  и  $v_\theta^*$ . Тогда можно считать, что уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости тождественно удовлетворяется, если представить эти две компоненты скорости с помощью функции тока:

$$v_r^* = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} \quad v_\theta^* = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial r}. \quad (4.4.20-3)$$

В § 3.3.3 получены граничные условия, которым должна удовлетворять эта приближенная функция тока:

$$-\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при } r=R; \quad (4.4.20-4)$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r=R \quad (4.4.20-5)$$

$$\psi^* \rightarrow \frac{1}{2} r^2 v_\infty \sin^2 \theta \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (4.4.20-6)$$

Этим трем условиям удовлетворяет простая функция

$$\psi^* \equiv 0,5 v_\infty r^2 \sin^2 \theta \left[ 1 - \left( \frac{R}{r} \right)^a \right]^2, \quad (4.4.20-7)$$

где  $a$  — параметр, который мы пока еще не определили.

Найдем для этой пробной функции тока:

$$\tilde{D}^{**} = 6a^2 x^{2(a+1)} \{(1-x^a)^2 \cos^2 \theta + 1/12 [a-1-(2a-1)x^a]^2 \sin^2 \theta\}. \quad (4.4.20-8)$$

При этом целесообразно ввести новые независимые переменные:

$$D \equiv RD/v_\infty; \quad x \equiv R/r. \quad (4.4.20-9)$$

К сожалению, для модели Эллиса невозможно получить в явном виде выражение для  $S$  с помощью  $D$ . Поэтому определим величину  $S^{**}$  через  $D^*$  по соотношению

$$\tilde{D}^{**} = 0,25 [1 + (N_1 \tilde{S}^{**})^{a-1}]^2 \tilde{S}^{**2}. \quad (4.4.20-10)$$

При этом

$$\tilde{S} \equiv \frac{RS}{\eta_0 v_\infty}; \quad N_1 = \frac{\eta_0 v_\infty}{\sqrt{2} R \tau_{1/2}}. \quad (4.4.20-11)$$

Поэтому мы можем записать:

$$E(D^*) = \frac{1}{4\eta_0} \left[ 1 + \frac{2\alpha}{\alpha+1} \left( \frac{S^{**}}{\sqrt{2}\tau_{1/2}} \right)^{a-1} \right] S^{**2}, \quad (4.4.20-12)$$

где  $\tilde{S}^{**}$  определяется из уравнения (4.4.20-10).

Поскольку скорость задается на всей ограничивающей поверхности жидкой системы, принцип предельной скорости из § 4.4.17 можно записать с помощью уравнения (4.4.20-12) в виде

$$\frac{4}{Rv_\infty^2 \eta_0} \int_{V(s)} E dV \leq \frac{1}{R^3} \int_{V(s)} \left[ 1 + \frac{2\alpha}{\alpha+1} (N_1 \tilde{S}^{**})^{a-1} \right] \tilde{S}^{**2} dV. \quad (4.4.20-13)$$

Известно, что

$$E \geq 0,25 \operatorname{tr}(S \cdot \nabla v). \quad (4.4.20-14)$$

Используя это выражение совместно с уравнениями (4.4.20-1) и (4.4.20-2), из соотношения (4.4.20-13) получаем:

$$c N_2 \leq 4 \int_0^\pi \int_0^1 \left[ 1 + \frac{2\alpha}{\alpha+1} (N_1 \tilde{S}^{**})^{a-1} \right] \tilde{S}^{**2} x^{-1} \sin \theta dx d\theta. \quad (4.4.20-15)$$

Здесь

$$N_2 = \frac{2Rv_\infty^2}{\eta_0}. \quad (4.4.20-16)$$

Оба интеграла в правой части неравенства (4.4.20-15) можно найти с помощью правила Симпсона для двумерной задачи. В каждой

точке для каждого значения  $a$  величина  $\tilde{S}^{**}$  рассчитана по уравнениям (4.4.20-8) и (4.4.20-10) методом итераций Ньютона — Рафсона. Оптимальное значение  $a$ , соответствующее минимальному верхнему значению, следующему из неравенства (4.4.20-15), определяется с помощью метода Фибоначчи [62]. Результаты расчетов представлены на рис. 4.4.20-1.

*Пределный принцип для напряжения.* Чтобы использовать предельный принцип для напряжения, необходимо, чтобы приближенное распределение напряжения  $\mathbf{T}^*$  удовлетворяло первому закону Коши для ползучего течения. Для этого можно положить:

$$S_{r\theta}^* = -B \left( \frac{\eta_0 v_\infty}{R} \right) x^4 \sin \theta; \quad (4.4.20-17)$$

$$S_{\theta\theta}^* = S_{\varphi\varphi}^* = -0.5 S_{rr}^* = -B \left( \frac{\eta_0 v_\infty}{R} \right) (x^2 - x^4) \cos \theta; \quad (4.4.20-18)$$

$$p^* + \rho \varphi \equiv p_0 - B \frac{\eta_0 v_\infty}{R} x^2 \cos \theta, \quad (4.4.20-19)$$

где  $B$  — параметр, который мы еще не определили.

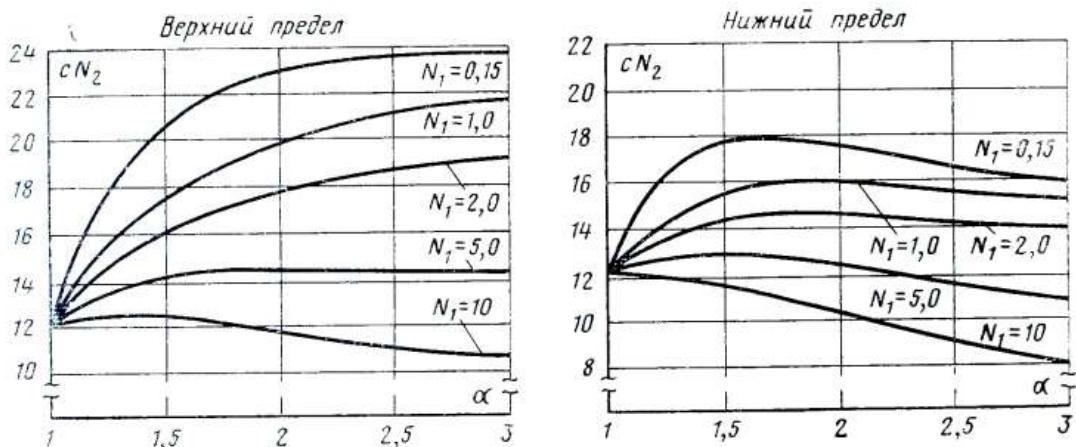


Рис. 4.4.20-1. Верхний и нижние пределы  $cN_2$  в зависимости от  $\alpha$  и  $N_1$ .

Известно соотношение:

$$E_c(S^*) = \frac{1}{4\eta_0} \left[ 1 + \frac{2}{\alpha+1} \left( \frac{S^*}{V^{2\tau_{1/2}}} \right)^{\alpha-1} \right] S^{*2}. \quad (4.4.20-20)$$

С помощью уравнений (4.4.20-17) — (4.4.20-19) можно рассчитать:

$$\tilde{S}^{*2} = 2B^2 x^4 [x^4 \sin^2 \theta + 3(1 - x^2)^2 \cos^2 \theta]; \quad (4.4.20-21)$$

$$\int_{S(s)} \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{T}^* - \rho \varphi \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}] dS = 4\pi \eta_0 R v_\infty^2 B. \quad (4.4.20-22)$$

Теперь на основании уравнений (4.4.20-20) и (4.4.20-22) запишем принцип предельных напряжений из § 4.4.18 в виде

$$\frac{4}{R v_\infty^2 \eta_0} \int_{V_{(s)}} E dV \geq 16\pi B - \frac{1}{R^3} \int_{V_{(s)}} \left[ 1 + \frac{2}{\alpha+1} (N_1 \tilde{S}^*)^{\alpha-1} \right] \tilde{S}^{*2} dV. \quad (4.4.20-23)$$

Первый интеграл в правой части этого неравенства найдем в виде

$$\frac{1}{R^3} \int_V \tilde{S}^{*2} dV = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \tilde{S}^{*2} x^{-4} \sin \theta dx d\theta = \frac{16}{3} \pi B^2. \quad (4.4.20-24)$$

Используя неравенство

$$\frac{\alpha+1}{\alpha} E \leq \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}), \quad (4.4.20-25)$$

а также уравнения (4.4.20-1), (4.4.20-2) и (4.4.20-24), из неравенства (4.4.20-23) находим:

$$cN_2 \geq \frac{16B(\alpha+1)}{\alpha} - \frac{16}{3} \frac{(\alpha+1)}{\alpha} B^2 - \\ - \frac{4B^{\alpha+1}}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 N_1^{\alpha-1} \left( \frac{\tilde{S}^*}{B} \right)^{\alpha+1} x^{-4} \sin \theta dx d\theta. \quad (4.4.20-26)$$

В этом неравенстве значение интеграла получено с помощью правила Симпсона для двух измерений. Погрешность составляет здесь 1%. Параметр  $B$  в уравнениях (4.4.20-17)–(4.4.20-19) мы определили, потребовав, чтобы верхний предел неравенства (4.4.20-26) был максимальным. На рис. 4.4.20-1 представлены результаты этих расчетов.

*Сравнение с экспериментом.* Кроме погрешности эксперимента существует еще пять других источников расхождения между значениями, рассчитанными этим методом, и экспериментальными данными для коэффициента сопротивления.

1. Модель Эллиса является приближенным соотношением для действительного напряжения деформации для потока в трубе (см. § 3.2.2) или в вискозиметре.

2. Можно теоретически объяснить, почему несмотря на то, что модель Эллиса хорошо описывает соотношение для скорости напряжения деформации при течении в трубе, эта модель непригодна для описания обтекания шара [60].

3. При обосновании предельных принципов с самого начала было принято, что в уравнении первого закона Коши эффектами итерации по сравнению с вязкими силами можно пренебречь. Критерием правильности расчетов для ползучего течения может быть только эксперимент. В настоящее время можно с уверенностью сказать, что данный анализ применим для случая [61]

$$N_2 < 0.1. \quad (4.4.20-27)$$

4. Из неравенств (4.4.20-14) и (4.4.20-25) следует, что при  $(\alpha-1) \rightarrow \infty$  верхний и нижний пределы для  $cN_2$  должны отличаться от экспериментальных, хотя для  $E$  они могут быть очень близкими. Самые лучшие результаты получены для значений  $\alpha$ , близких к единице.

5. И, наконец, полученные таким способом верхние и нижние предельные значения будут отличаться от экспериментальных тем значительно, чем  $v^*$  и  $T^*$  менее соответствуют действительным распределениям скорости и напряжения.

В работе [61] проведено подробное сравнение имеющихся экспериментальных данных со средними значениями верхнего и нижнего пре-

делов для с. рассчитанными этим методом. Достаточно сказать, что средняя погрешность расчетов для 24 экспериментов, проведенных в работе [64], составляет 16%. Для 19 экспериментов работы [65] она равняется 10,2%. С учетом указанных трудностей такая погрешность представляется вполне удовлетворительной.

## ГЛАВА ПЯТАЯ

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ

В этой главе рассматриваются основы теории переноса энергии, составляющие часть термодинамики. В данном случае мы не рассматриваем термодинамику в гиббсовском смысле, так как она оперирует с материалами в состоянии равновесия. Здесь же мы обязательно будем иметь дело с неравновесными процессами переноса импульса и энергии (не следует смешивать термины стационарное состояние и равновесие). Обычно при изучении термодинамики встречаются следующие трудности.

1. Калорическое уравнение состояния (иногда называемое основным уравнением) не является фундаментальным постулатом в том самом смысле, какими являются первый и второй законы Эйлера. Это скорее определение поведения материала такого же характера, как ньютоновский закон вязкости.

2. Вторую трудность представляет физический смысл удельной энтропии. Представляется наиболее целесообразным вначале рассматривать энтропию как параметр, входящий в калорическое уравнение состояния, и только позднее накладывать на нее ограничения в виде неравенства энтропии. В § 8.5.1, где определяется точный смысл термина равновесия, мы узнаем, что энтропия изолированного тела достигает максимума при приближении к равновесию.

3. В представленной здесь неравновесной термодинамике существуют два вида неравенства энтропии (или второго закона термодинамики). Первый — дифференциальное неравенство, которое представляет собой не что иное, как ограничение, налагаемое на определяющие уравнения для поведения материалов. Второй — интегральное неравенство, которое будет выведено в § 7.4.7. Неравенство энтропии в таком виде более знакомо большинству читателей, поскольку только оно используется в учебниках по термодинамике.

Кроме понятий, изложенных в гл. 1 и 2, основу термодинамики и переноса энергии составляют еще два постулата: уравнение баланса энергии и неравенство энтропии. Целью данной главы является вывод следствий из этих двух постулатов, дополненных двумя уравнениями, описывающими поведение материалов: тепловым уравнением состояния и законом Фурье.

## 5.1. ТЕРМОДИНАМИКА

5.1.1. *Классическая термостатика*<sup>1</sup>. При введении и выводе классических принципов термостатики обычно используют методы Гиббса [1], в которых дифференциальное уравнение (часто называемое урав-

<sup>1</sup> § 5.1.1 и 5.1.2 написаны в соавторстве с профессором Г. М. Брауном, Отделение химической технологии, Северо-Западный университет, Эванстон, Иллинойс, США.

нением Гиббса)

$$dU = T^* dS - P^* dV + \sum_{A=1}^N \mu_{(A)}^* dm_{(A)}, \quad (5.1.1-1)$$

его интегральная форма (иногда называемая уравнением Эйлера)

$$U = T^* S - P^* V + \sum_{A=1}^N \mu_{(A)}^* m_{(A)} \quad (5.1.1-2)$$

и уравнение Гиббса—Дюгема [которое выводится из (5.1.1-1) и (5.1.1-2)]

$$S dT^* - V dP^* + \sum_{A=1}^N m_{(A)} d\mu_{(A)}^* = 0 \quad (5.1.1-3)$$

применяются к статическим однофазным системам, в которых все интенсивные или локальные свойства однородны. Такая система будет впоследствии называться однородной. Термин «однородный» также часто употребляется для описания системы, локальные свойства которой повсюду одинаковы. Мы используем термин термодинамически однородный [2] в § 5.1.2 в другом смысле. Здесь  $U$ ,  $T^*$ ,  $S$ ,  $P^*$  и  $V$  — внутренняя энергия, температура, энтропия, термодинамическое давление и объем системы;  $m_{(A)}$  — масса вещества  $A$  в системе;  $\mu_{(A)}^*$  — химический потенциал вещества  $A$ . В такой интерпретации эти уравнения точны только для однофазных систем, на которые не влияют объемные силы (например, силы тяжести), явления на поверхности раздела фаз или другие эффекты, которые могут вызвать неоднородность. Описать статическую однородную систему можно по-другому, постулировав основное соотношение (см., например, [3])

$$U = U(S, V, m_{(1)}, m_{(2)}, \dots, m_{(N)}) \quad (5.1.1-4)$$

и определив температуру, термодинамическое давление и химический потенциал соответственно в виде

$$T^* \equiv \frac{\partial U}{\partial S}; \quad P^* \equiv -\frac{\partial U}{\partial V}; \quad \mu_{(A)}^* \equiv \frac{\partial U}{\partial m_{(A)}}. \quad (5.1.1-5)$$

Уравнения (5.1.1-1), (5.1.1-2) и (5.1.1-3) можно легко получить из уравнений (5.1.1-4) и (5.1.1-5).

Необходимо подчеркнуть, что все переменные в уравнениях (5.1.1-1)–(5.1.1-5) относятся к свойствам статических однородных систем. Величины  $T^*$ ,  $P^*$  и  $\mu_{(A)}^*$  применительно к какой-либо системе не имеют смысла, если эта система нестатична и неоднородна.

Во многих случаях удобнее использовать удельные (на моль, единицу массы или объема) величины. Величину, отнесенную к единице массы, будем обозначать символом со знаком  $\Delta$  над ним; знак  $\nabla$  над массой, символом означает, что величина отнесена к единице объема. Подставим в уравнения (5.1.1-2) и (5.1.1-3) значения

$$\hat{U} \equiv \frac{U}{m}; \quad \hat{S} \equiv \frac{S}{m}; \quad \omega_{(A)} \equiv \frac{m_{(A)}}{m}. \quad (5.1.1-6)$$

Разделив на (5.1.1-2)  $m$  (заметим, что  $\sum_{A=1}^N \omega_{(A)} = 1$ ), получим:

$$\begin{aligned}\hat{U} &= T^* \hat{S} - P^* \hat{V} + \sum_{A=1}^N \mu_{(A)}^* \omega_{(A)} = T^* \hat{S} - \\ &- P^* \hat{V} + \sum_{A=1}^{N-1} (\mu_{(A)}^* - \mu_{(N)}^*) \omega_{(A)} + \mu_{(N)}^*;\end{aligned}\quad (5.1.1-7)$$

$$\hat{S} dT^* - \hat{V} dP^* + \sum_{A=1}^N \omega_{(A)} d\mu_{(A)}^* = 0. \quad (5.1.1-8)$$

Подставив (5.1.1-6) в уравнение (5.1.1-1), будем иметь:

$$\begin{aligned}m d\hat{U} + \hat{U} dm &= m T^* d\hat{S} - m P^* d\hat{V} + m \sum_{A=1}^N \mu_{(A)}^* d\omega_{(A)} + \\ &+ \left( T^* \hat{S} - P^* \hat{V} + \sum_{A=1}^N \mu_{(A)}^* \omega_{(A)} \right) dm.\end{aligned}\quad (5.1.1-9)$$

Исключив  $\hat{U}$  с помощью уравнения (5.1.1-7) и разделив обе части на  $m$ , получим:

$$\begin{aligned}d\hat{U} &= T^* d\hat{S} - P^* d\hat{V} + \sum_{A=1}^N \mu_{(A)}^* d\omega_{(A)} = \\ &= T^* d\hat{S} - P^* d\hat{V} + \sum_{A=1}^{N-1} (\mu_{(A)}^* - \mu_{(N)}^*) d\omega_{(A)}.\end{aligned}\quad (5.1.1-10)$$

Поскольку уравнения (5.1.1-7), (5.1.1-8) и (5.1.1-10) выводятся из уравнений (5.1.1-1), (5.1.1-2) и (5.1.1-3), они должны иметь те же самые ограничения (статическая однородная система при отсутствии гравитационного и других полей). На практике эти уравнения часто успешно применяются без соответствующих доказательств для неравновесной системы. В следующем параграфе будет показана возможность этого.

*5.1.2. Термодинамика.* В § 5.1.1 было показано, что классическая термостатика рассматривает статические системы, локальные свойства которых повсюду однородны.

Будучи инженерами, мы должны оперировать системами, которые можно считать однородными или квазистатическими, только имея богатое воображение. Для описания таких процессов мы успешно используем термостатику. Нас интересуют изменения давления и температуры внутри материала; для их измерения не обязательно ждать, пока система не станет однородной. Мы также не будем избегать анализа быстрого расширения газа, протекающего через клапан, хотя это также заведомо неквазистатический процесс. На практике мы будем применять понятия поля, успешно используемые в уравнениях баланса массы и импульса (гл. 2—4) для анализа энтропии в динамических системах, т. е. в уравнениях термодинамики. Используя континуальную модель для представления реальных материалов, мы вводим поле скрости  $v$  и поле массовой плотности  $\rho$ , с помощью которых можно определить

делить локальную скорость и массовую плотность вещества. При изучении термодинамики в дальнейшем вводятся поля температуры и термодинамического давления; таким образом, мы можем присвоить каждой точке начальную температуру и термодинамическое давление. Но мы, вероятно, забегаем вперед. Вначале введем две основные величины — внутреннюю энергию и энтропию.

В рамках корпускулярной модели реальных веществ электроны, нейтроны и протоны обладают собственной кинетической энергией наряду с кинетической энергией макроскопической системы, небольшой частью которой они являются. Большое количество энергии накапливается в материале под воздействием всех внутренних сил, действующих на отдельные частицы. В континуальном описании мы должны обязательно учитывать всю эту энергию, называемую внутренней энергией вещества. При континуальной модели вещества в каждой точке существует определенное количество внутренней энергии на единицу массы  $\bar{U}$ . Скалярное поле  $\bar{U}$  лежит в основе нашего изучения переноса энергии и термодинамики.

Пусть  $\rho_A$  обозначает массу вещества  $A$  в единице объема. Для  $N$ -компонентной системы целесообразно считать внутреннюю энергию на единицу массы  $\bar{U}$  функцией  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$  и положения внутри вещества (заданного множеством материальных координат). Но достаточно ли этого? Нагревая кастрюлю воды на плите, можно отчетливо чувствовать рукой изменение температуры воды. Внутренняя энергия воды, конечно, увеличивалась в результате притока энергии в виде тепла. Однако если мы будем измерять плотность воды, то обнаружим лишь незначительные изменения. Это позволяет предположить, что для описания функциональной зависимости величины  $\bar{U}$  необходимо, чтобы она зависела не только от массовой плотности и положения в материале. По этой причине в нашем континуальном описании мы вводим еще одно скалярное поле  $\bar{S}$ , называемое энтропией на единицу массы. Свойства энтропии вытекают из неравенства энтропии, постулированного в § 5.5.1, а также из определения равновесия, данного в § 8.5.1. Физическая размерность  $\bar{S}$  не определяется, а отношение  $\bar{U}/\bar{S}$  имеет размерность температуры.

Вероятно, будет полезным обосновать введение энтропии с другой точки зрения. Давайте рассмотрим нагревание воды на плите в рамках корпускулярной модели. Мы увидим, что по мере нагревания воды нейтроны, протоны и электроны в результате своего усиливающегося движения получают все больше энергии. Когда вода достаточно нагрелась, молекулы находятся в таком бурном движении по отношению друг к другу, что стремятся разъединиться и вода испаряется. По мере нагревания воды в корпускулярной картине возникает все больший и больший беспорядок до тех пор, пока в конце концов жидкую фазу не перейдет в газообразную.

В континуальном описании мы можем рассматривать  $\bar{S}$  как локальную меру неупорядоченности вещества.

Любые переменные, кроме  $\bar{S}$ , от которых заведомо зависит  $\bar{U}$  (такие, как  $\rho_1, \dots, \rho_N$  и величины, описывающие деформацию вещества по сравнению с некоторой исходной конфигурацией), будем называть переменными подсостояний. Основным допущением термодинамики является [2] следующее: переменные подсостояний  $\rho_1, \dots, \rho_N$  и т. д. плюс единственный размерно независимый скалярный параметр  $\bar{S}$  являются достаточными для определения  $\bar{U}$  материальной

частицы  $\xi$  независимо от времени, координат движения и напряжения, т. е.

$$\hat{U} = \hat{U}(\hat{S}, \rho_{(1)}, \rho_{(2)}, \dots, \rho_{(N)} \dots \xi). \quad (5.1.2-1)$$

Это основное допущение на самом деле относится к поведению вещества — его термодинамическому поведению. По этой причине мы можем назвать калорическое уравнение состояния или основное уравнение (5.1.2-1) определяющим уравнением для внутренней энергии.

Вполне понятно, что уравнение (5.1.2-1) не всегда справедливо: оно оказывается неприменимым для материалов, обладающих памятью, подверженных очень быстрым или очень медленным деформациям, и конечно, для веществ, находящихся в состоянии равновесия [45].

Когда  $\xi$  не входит в уравнение (5.1.2-1), материал называется термодинамически однородным [2]. Два следующих эквивалентных уравнения представляют собой частные случаи уравнения (5.1.2-1) для термодинамически однородного материала:

$$\check{U} = \check{U}(\check{S}, \rho_{(1)}, \rho_{(2)}, \dots, \rho_{(N)}); \quad (5.1.2-2)$$

$$\hat{U} = \hat{U}(\hat{S}, \hat{V}, \omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \dots, \omega_{(N-1)}). \quad (5.1.2-3)$$

Введем объем на единицу массы

$$\hat{V} \equiv \frac{1}{\rho} \equiv \frac{1}{\sum_{A=1}^N \rho_{(A)}} \quad (5.1.2-4)$$

и массовую концентрацию вещества типа

$$\omega_{(A)} \equiv \frac{\rho_{(A)}}{\rho}. \quad (5.1.2-5)$$

Все рассматриваемые вещества будем считать термодинамически однородными, т. е. для их описания применимы уравнения (5.1.2-2) или (5.1.2-3).

Кроме того, сделаем еще одно допущение о регулярности: все вышеупомянутые функции дифференцируемы необходимое число раз и обратимы, так что могут представить любую переменную как функцию других [2]. Введем температуру, термодинамическое давление и химический потенциал вещества  $A$  соответственно по формулам:

$$T \equiv \left( \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{S}} \right)_{\hat{V}, \omega_{(A)}} = \left( \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{S}} \right)_{\rho_{(A)}}; \quad (5.1.2-6)$$

$$P \equiv - \left( \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}} \right)_{\hat{S}, \omega_{(A)}}; \quad (5.1.2-7)$$

$$\mu_{(A)} \equiv \left( \frac{\partial \hat{U}}{\partial \rho_{(A)}} \right)_{\hat{S}, \rho_{(B)} (B \neq A)}. \quad (5.1.2-8)$$

Заметим, что  $\mu_{(A)}$  может быть химическим потенциалом, отнесенными либо к единице массы, либо к одному молю.

Очевидно, что вместо  $T$ ,  $P$  и  $\mu_{(A)}$  в соответствии с § 5.1.1 используются  $T^*$ ,  $P^*$  и  $\mu^*_{(A)}$ .

Хотя термостатика и термодинамика использует параллельные понятия в различных масштабах, не следует ожидать, что результаты в термодинамике можно объяснить по аналогии с результатами термостатики, так же как результаты механики жидкости нельзя трактовать с точки зрения механики точечных масс [2]. Принимая во внимание уравнения (5.1.2-6)–(5.1.2-8), дифференциалы в уравнениях (5.1.2-2) и (5.1.2-3) можно представить в виде

$$d\tilde{U} = T d\tilde{S} + \sum_{A=1}^N \mu_{(A)} d\varphi_{(A)}; \quad (5.1.2-9)$$

$$d\hat{U} = T d\hat{S} - P d\hat{V} + \sum_{A=1}^{N-1} \left( \frac{\partial \hat{U}}{\partial \omega_{(A)}} \right)_{\tilde{S}, \hat{V}, \omega_B (B \neq A, N)} d\omega_{(A)}. \quad (5.1.2-10)$$

Уравнение (5.1.2-9) можно записать с помощью переменных, отнесенных к единице массы:

$$d \frac{\hat{U}}{\hat{V}} = T d \frac{\tilde{S}}{\hat{V}} + \sum_{A=1}^N \mu_{(A)} d \frac{\omega_{(A)}}{\hat{V}}. \quad (5.1.2-11)$$

После преобразования получим:

$$d\hat{U} = T d\hat{S} - \left( -\hat{U} + T\hat{S} + \sum_{A=1}^N \mu_{(A)} \omega_{(A)} \right) \frac{d\hat{V}}{\hat{V}} + \sum_{A=1}^{N-1} (\mu_{(A)} - \mu_{(N)}) d\omega_{(A)}. \quad (5.1.2-12)$$

Сравнивая коэффициенты в уравнениях (5.1.2-10) и (5.1.2-12), мы можем обобщить уравнение Эйлера (5.1.1-7)

$$\hat{U} = T\hat{S} - P\hat{V} + \sum_{A=1}^N \mu_{(A)} \omega_{(A)}, \quad (5.1.2-13)$$

а также получим:

$$\left( \frac{\partial \hat{U}}{\partial \omega_{(A)}} \right)_{\tilde{S}, \hat{V}, \omega_B (B \neq A, N)} = \mu_{(A)} - \mu_{(N)}. \quad (5.1.2-14)$$

Используя уравнения (5.1.2-10) и (5.1.2-14), можно обобщить уравнения Гиббса (5.1.1-10):

$$d\hat{U} = T d\hat{S} - P d\hat{V} + \sum_{A=1}^{N-1} (\mu_{(A)} - \mu_{(N)}) d\omega_{(A)}. \quad (5.1.2-15)$$

Уравнение Гиббса — Дюгема (5.1.1-8), если вычесть уравнение (5.1.2-15) из дифференциала уравнений (5.1.2-13):

$$\tilde{S} dT - \hat{V} dP + \sum_{A=1}^N \omega_{(A)} d\mu_{(A)} = 0. \quad (5.1.2-16)$$

Заметим, что уравнения (5.1.2-13), (5.1.2-15) и (5.1.2-16) применимы в каждой точке вещества, которая описывается калорическим уравнением состояния (5.1.2-2) или (5.1.2-3). Не обязательно, чтобы

все локальные свойства были одинаковыми во всех точках вещества или чтобы вещество находилось в равновесии.

Теперь должно быть ясно, как можно с этой точки зрения вывести все соотношения, обычно встречающиеся в учебниках термодинамики. Термодинамика в общих чертах прекрасно изложена в работе Труследла и Тушина [2]. Для описания переноса энергии используем уравнение (5.1.2-3) в упрощенном виде

$$\bar{U} = \bar{U}(\bar{S}, \varrho). \quad (5.1.2-17)$$

Оно применимо к однокомпонентным материалам (или к материалам, состав которых не зависит от координат), термодинамическое поведение которых не меняется от точки к точке, т. е. является термодинамически однородным. Мы полагаем также, что деформация вещества не имеет существенного значения при определении внутренней энергии вещества. Это является, вероятно, хорошим приближением для газов и многих жидкостей, но неприменимо для упругих твердых тел, таких как резина или сталь. По этой причине оно несправедливо для высоковязкоупругих жидкостей, таких как полимерные расплавы и некоторые полимерные растворы.

## 5.2. ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ

5.2.1. *Перенос энергии.* Скорость переноса энергии обычно полностью соответствует силе. Вернемся на некоторое время к § 2.1.1.

Каждому телу  $B$  соответствует определенное тело (или система тел)  $\dot{B}$ , так что их общая масса равна массе Вселенной.

Назовем  $\dot{B}$  внешней или окружающей средой для тела  $B$ . Совокупность плотностей потоков переноса энергии является скалярной функцией  $Q(B, C)$  пары тел. Величина  $Q(B, C)$  называется плотностью потока энергии от тела  $C$  к телу  $B$ . Совокупность плотностей потоков энергии ограничена следующими двумя свойствами, или аксиомами:

1. Для заданного тела  $B Q(C, \dot{B})$  является аддитивной функцией, определенной на части  $C$  тела  $B$ .

2. Наоборот, для заданного тела  $B Q(B, C)$  является аддитивной функцией, определенной на части  $C$  тела  $B$ .

Это говорит о том, что части тела получают энергию независимо друг от друга из различных участков окружающей среды.

Существуют три типа передачи энергии, с которыми мы можем столкнуться.

1. *Внешний перенос энергии.* Энергия передается из окружающей среды к различным материальным частицам, из которых состоит тело. Примером этого является передача солнечной радиации в газообразную атмосферу Земли. Другой пример представляет индукционный нагрев, в процессе которого энергия передается полярным молекулам, составляющим тело, посредством переменного магнитного поля. Пусть  $P$  — часть тела  $B$ , как это было показано на рис. 2.1.1-1. Если  $Q_e$  — плотность потока внешней энергии на единицу массы окружающей среды  $\dot{B}$  к телу  $B$ , то общую плотность потока внешней энергии  $P$  можно записать в виде интеграла по объему  $P: \int_{V_P} \varrho Q_e dV$ .

2. *Взаимный перенос энергии.* Этот тип переноса энергии осуществляется между парой материальных частиц, являющихся

частью одного и того же тела. Примером этого может служить излучение внутри потока горячего газа. Если  $Q_m$  — скорость взаимного переноса энергии на единицу массы от объема  $B-P$  к объему  $P$ , общая плотность взаимного потока энергии к объему  $P$  можно представить в виде интеграла по объему  $P$ :  $\int_{V_P} \rho Q_m dV$ . Здесь считается, что сумма

взаимных потоков энергии между любыми двумя частями  $P$  должна быть равна нулю, что можно доказать по аналогии с взаимными силами [2].

3. Контактный перенос энергии. Этот вид передачи энергии не задается как функция координат, а может быть представлен как перенос энергии через поверхность, ограничивающую материал, что эквивалентно потоку энергии от одной части материала к другой, за исключением взаимных потоков энергии. Например, когда мы прижимаем руку к горячей металлической поверхности, происходит контактный перенос энергии, в результате которого можно обжечься. Пусть  $h(z, P)$  — скорость переноса энергии на единицу площади от  $B-P$  к границе  $P$  в точке  $z$ . Эту скорость переноса энергии на единицу площади можно назвать контактным потоком энергии. Общую скорость контактного переноса энергии от объема  $B-P$  к объему  $P$  можно записать в виде интеграла по поверхности, ограничивающей  $P$ :

$$\int_{S_P} h(z, P) dS.$$

Принцип плотности потока энергии определяет характер контактного потока энергии.

Прицип плотности потока энергии. Существует скалярная функция  $h(z, n)$ , определенная во всех точках  $z$  тела  $B$  и для всех единичных векторов  $n$  так, что скорость контактного переноса энергии на единицу площади к любой части объема  $P$  тела  $B$  можно представить в виде

$$h(z, P) = h(z, n), \quad (5.2.1-1)$$

где  $n$  — единичная внешняя нормаль к замкнутой поверхности, ограничивающей  $P$ . Скаляр  $h=h(z, n)$  называется контактным потоком энергии в точке  $z$  через ориентированный элемент поверхности с нормалью  $n$ , направленной внутрь материала, от которого контактный поток энергии к элементу поверхности равен  $h$ .

В любой частной задаче мы считаем плотности потоков энергии к телу заданными априори для всех наблюдателей; все наблюдатели должны принять без доказательства один и тот же набор скоростей переноса энергии в данной задаче. Задавая эту скорость, мы формулируем частную динамическую задачу. Следовательно, считается, что скорость переноса энергии не зависит от наблюдателя или от системы отсчета (см. § 1.2.1)

$$Q_e^* = Q_e; \quad Q_m^* = Q_m; \quad (5.2.1-2)$$

$$h^* = h. \quad (5.2.1-3)$$

### 5.3. БАЛАНС ЭНЕРГИИ

*5.3.1. Баланс энергии.* В § 1.3.1 и 2.2.1 мы ввели три постулата механики: закон сохранения массы, первый и второй законы Эйлера. Теперь можно сформулировать четвертый постулат — баланс энергии.

Скорость изменения во времени внутренней и кинетической энергии тела относительно неподвижных звезд равна сумме удельной работы, совершающей над телом контактными силами, сил, действующих на тело, и плотности потока энергии к телу.

Обозначим объем и замкнутую поверхность, ограничивающую тело или любую его часть, соответственно через  $V_m$  и  $S_m$ . В системе отсчета, неподвижной относительно неподвижных звезд, из уравнения баланса энергии следует:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho (\hat{U} + 0,5v^2) dV = \int_{S_m} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{V_m} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) dV + \\ + \int_{S_m} h dS + \int_{V_m} \rho Q dV. \quad (5.3.1-1)$$

Первый член в правой части описывает удельную работу, совершающую над телом контактными силами, действующими на ограничивающую поверхность со стороны окружающей среды. Второе слагаемое — удельная работа, совершаемая над телом внешними и взаимными силами. Третий член представляет собой скорость контактного переноса энергии из окружающей среды к телу через ограничивающую поверхность. Четвертое слагаемое соответствует скоростям внешнего и взаимного переносов энергии к телу;  $Q$  — скалярное поле, которое представляет собой сумму плотностей внешнего и взаимного потоков энергии на единицу массы.

*5.3.2. Дифференциальное уравнение баланса энергии.* Ограничимся телом, в котором все характеристики выражаются гладкими функциями координат и времени (см. § 2.2.3).

Баланс энергии, постулированный в предыдущем параграфе, можно использовать для вывода дифференциального уравнения, выражающего баланс энергии в каждой точке внутри материала. Вывод этот аналогичен методу, использованному для получения уравнения первого закона Коши из первого закона Эйлера в § 2.2.3. Теорема переноса из § 1.3.2 и уравнение неразрывности из § 1.3.3 позволяют записать левую часть этого уравнения в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \rho (\hat{U} + 0,5v^2) dV = \int_{V_m} \rho \frac{d(\rho)}{dt} (\hat{U} + 0,5v^2) dV. \quad (5.3.2-1)$$

Первый член в правой части уравнения (5.3.1-1) можно представить с помощью объемного интеграла, используя преобразование Грина (см. § A.11.2):

$$\int_{S_m} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{V_m} \operatorname{div} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) dV. \quad (5.3.2-2)$$

Записывая это выражение, мы использовали свойство симметрии тензора напряжений.

Третий член в правой части уравнения (5.3.1-1) можно переписать в виде интеграла по объему, если использовать преобразование Грина. Контактный перенос энергии можно представить с помощью вектора плотности потока энергии:

$$h = h(z, n) = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}. \quad (5.3.2-3)$$

Тогда можно записать:

$$\int_{S(m)} h dS = - \int_{S(m)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{V(m)} \operatorname{div} \mathbf{q} dV. \quad (5.3.2-4)$$

Используя (5.3.2-1), (5.3.2-2) и (5.3.2-4), можно привести уравнение (5.3.1-1) к виду

$$\int_{V_m} \left[ \rho \frac{d_{(m)}}{dt} (\bar{U} + 0,5v^2) - \operatorname{div}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) + \operatorname{div} \mathbf{q} - \rho Q \right] dV = 0. \quad (5.3.2-5)$$

Так как размеры тела выбраны произвольно, можно заключить, что подынтегральное выражение должно быть тождественно равно нулю в каждой точке материала:

$$\rho \frac{d_{(m)}}{dt} (\bar{U} + \frac{1}{2} v^2) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) + \rho Q. \quad (5.3.2-6)$$

Это дифференциальное уравнение выражает требование локального баланса энергии в каждой точке. Оно представляет собой одну из форм дифференциального уравнения баланса энергии.

Уравнение (5.3.2-6) можно значительно упростить, если использовать первый закон Коши. Из скалярного произведения вектора скорости в уравнении первого закона Коши

$$\mathbf{v} \left( \rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} - \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \mathbf{f} \right) = 0 \quad (5.3.2-7)$$

получим:

$$\rho \frac{d_{(m)}}{dt} (0,5v^2) = \operatorname{div}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \operatorname{tr}(\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}). \quad (5.3.2-8)$$

Вычитая последнее уравнение из (5.3.2-6), будем иметь еще один вид дифференциального уравнения баланса энергии

$$\rho \frac{d_{(m)} \bar{U}}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{tr}(\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q. \quad (5.3.2-9)$$

Второй член в правой части обычно записывается через термодинамические давление  $P$  (см. § 5.1.2) и тензор дополнительных напряжений  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} + P\mathbf{I}. \quad (5.3.2-10)$$

Тогда получим:

$$\rho \frac{d_{(m)} \bar{U}}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} - P \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q. \quad (5.3.2-11)$$

Для несжимаемой жидкости тензор дополнительных напряжений определяется как

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} + p\mathbf{I}, \quad (5.3.2-12)$$

где давление  $p$  можно считать любым подходящим скаляром [2]. Для несжимаемой жидкости уравнение (5.3.2-9) имеет вид:

$$\rho \frac{d_{(m)}\bar{U}}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q. \quad (5.3.2-13)$$

Для любого случая  $\operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v})$  имеет смысл объемного источника внутренней энергии (скорость производства внутренней энергии в единице объема) вследствие действия вязких сил.

Мы чаще сталкиваемся с изменениями температуры тела, нежели с изменениями плотности внутренней энергии. Поэтому будем решать дифференциальное уравнение для температурного поля. Известно, что (см. § 5.1.2) для однокомпонентного материала

$$\begin{aligned} d\bar{U} &= T d\bar{S} - P d\bar{V} = T \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial T} \right)_{\bar{V}} dT + \left[ T \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{V}} \right) - P \right] d\bar{V} = \\ &= \hat{c}_V dT + \left[ T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\bar{V}} - P \right] d\bar{V}. \end{aligned} \quad (5.3.2-14)$$

Здесь  $\hat{c}_V$  — теплоемкость вещества на единицу массы при постоянном удельном объеме,

$$\hat{c}_V = T \left( \frac{\partial \bar{S}}{\partial T} \right)_{\bar{V}}. \quad (5.3.2-15)$$

Рассуждая так же, как при выводе уравнения (5.3.2-14), получаем:

$$\rho \frac{d_{(m)}\bar{U}}{dt} = \rho \hat{c}_V \frac{d_{(m)}T}{dt} + \left[ T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\bar{V}} - P \right] \rho \frac{d_{(m)}\bar{V}}{dt}. \quad (5.3.2-16)$$

Из уравнения неразрывности следует:

$$\rho \frac{d_{(m)}\bar{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{d_{(m)}\rho}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (5.3.2-17)$$

Используя уравнения (5.3.2-16) и (5.3.2-17), получаем из (5.3.2-11)

$$\rho \hat{c}_V \frac{d_{(m)}T}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\bar{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q. \quad (5.3.2-18)$$

Ниже приведено несколько наиболее употребительных видов дифференциального уравнения баланса энергии (см. табл. 5.6.1-1).

## 5.4. ПОВЕДЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

**5.4.1. Еще раз о поведении материалов.** В § 2.3.1 показано, что повседневный опыт предполагает три принципа, которые мы в дальнейшем используем при построении определяющих уравнений для тензора напряжений. Основные элементы этих принципов также применимы для вектора потока энергии. Будущие события не влияют на поток энергии в настоящем. Отсюда следует принцип детерминизма:

Вектор плотности потока энергии определяется предыдущим температурным поведением тела и предшествующим его движением.

Следует заметить, что распределение температуры и движения в одной части тела не обязательно будут влиять на вектор плотности

потока энергии в другой части тела. Это можно сформулировать как **принцип локального действия**:

распределением температуры и движением вне произвольно малой окрестности материальной частицы  $\xi$  можно пренебречь при определении вектора плотности потока энергии в этой материальной частице.

Поскольку плотность потока энергии не зависит от системы отсчета, получим **принцип независимости материала от системы отсчета**:

определяющие уравнения должны быть инвариантны относительно изменения системы отсчета. Если определяющее уравнение удовлетворяется для процесса, в котором вектор плотности потока энергии, тензор напряжений и движение задаются в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{z}_k, t); \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{z}_k, t); \quad \mathbf{z} = \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{z}}(z_k, t), \quad (5.4.1-1)$$

то оно должно также удовлетворяться для любого эквивалентного процесса в другой системе отсчета. В частности, определяющее уравнение должно удовлетворяться для процесса, в котором вектор плотности потока энергии, тензор напряжений и движение задаются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^* &= \mathbf{q}^*(\mathbf{z}_k, t^*) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{z}_k, t); & \mathbf{T}^* &= \mathbf{T}^*(\mathbf{z}_k, t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{z}_k, t) \cdot \mathbf{Q}(t)^T; \\ \mathbf{z}^* &= \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{z}}^*(z_k, t^*) = \mathbf{c}^*(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}_k, t); & t^* &= t - a. \end{aligned} \quad (5.4.1-2)$$

В следующем параграфе мы проиллюстрируем использование этих принципов при построении определяющего уравнения для вектора плотности потока энергии.

**5.4.2. Закон Фурье.** Построим простое определяющее уравнение для вектора плотности потока энергии, которое удовлетворяет трем принципам из § 5.4.1.

Можно удовлетворить принципу детерминизма, потребовав, чтобы вектор плотности потока энергии зависел только от распределения температуры в материале в настоящее время. Как принцип детерминизма, так и принцип локального действия удовлетворяются, если допустить, что напряжение в точке есть функция температуры и температурного градиента в этой точке

$$\mathbf{q} = \mathbf{h}(T, \nabla T). \quad (5.4.2-1)$$

Принцип независимости материала от системы отсчета требует, чтобы (мы требуем, чтобы температурное поле было скалярным и независимым от системы отсчета)

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{h}(T, (\nabla T)^*). \quad (5.4.2-2)$$

Из уравнения (5.4.2-1) находим, что функция  $\mathbf{h}$  должна быть изотропной векторной функцией [7]  $T$  и  $\nabla T$ :

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}(T, \nabla T) = \mathbf{h}(T, \mathbf{Q} \cdot \nabla T). \quad (5.4.2-3)$$

Из уравнения (5.4.2-3) следует [7]:

$$\mathbf{q} = \mathbf{h}(T, \nabla T) = \tilde{k}(T, |\nabla T|) \nabla T. \quad (5.4.2-4)$$

Закон Фурье является частным случаем уравнения (5.4.2-4)

$$\mathbf{q} = -k(T) \nabla T. \quad (5.4.2-5)$$

Скаляр  $k = k(T)$  называется коэффициентом теплопроводности.

Иногда возникают сомнения в справедливости закона Фурье для материалов в сильно неизотермичных температурных полях [8, 9], вызванные аналогией с переносом импульса, для которого имеются убедительные доказательства нелинейности, связанной с гидродинамикой и деформацией вязкоупругих жидкостей. Очень мало известно о природе и значении нелинейного переноса энергии. Только за последние несколько лет в этой области были сделаны определенные предположения (см. великолепный обзор Труслелла и Нолла [7]). В работах [10, 11] рассматриваются задачи для многокомпонентных систем.

Последняя экспериментальная работа [12, 13] для твердого тела не показала четких отклонений от закона Фурье для градиентов порядка 300°C/см для двух видов высокотемпературного цемента. Чепмен и Кауллинг [14] указывают, что отклонения от закона Фурье для разреженных газов при давлениях выше 10<sup>-6</sup> кгс/см<sup>2</sup> пренебрежимо малы. Еще один расчет на основании кинетической теории [13] подтверждает, что уравнение (5.4.2-5) является линеаризацией, однако предполагается, что для разреженных газов члены более высокого порядка при градиентах менее 10<sup>6</sup> °C/см не существенны.

При дальнейшем обсуждении переноса энергии будем считать, что закон Фурье (5.4.2-5) точно описывает поведение материала.

## 5.5. НЕРАВЕНСТВО ЭНТРОПИИ

*5.5.1. Неравенство энтропии.* Дифференциальное уравнение баланса энергии из § 5.3.2

$$\rho \frac{d_{(m)}\widehat{U}}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} - P \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q \quad (5.5.1-1)$$

можно использовать для получения дифференциального уравнения, которое описывает распределение энтропии внутри вещества. Определяющее уравнение для внутренней энергии, используемое нами,

$$\widehat{U} = \widehat{U}(\widehat{S}, \widehat{V}) \quad (5.5.1-2)$$

подразумевает, что (см. § 5.1.2)

$$\rho \frac{d_{(m)}\widehat{U}}{dt} = T \rho \frac{d_{(m)}\widehat{S}}{dt} - P \rho \frac{d_{(m)}\widehat{V}}{dt} = T \rho \frac{d_{(m)}\widehat{S}}{dt} - P \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (5.5.1-3)$$

Тогда уравнение (5.5.1-1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{d_{(m)}\widehat{S}}{dt} &= -\frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \frac{\rho Q}{T} = \\ &= -\operatorname{div}\left(\frac{1}{T} \mathbf{q}\right) - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho \frac{Q}{T}. \end{aligned} \quad (5.5.1-4)$$

Рассмотрим следствие из этого уравнения для тела, которое не содержит поверхностей разрыва. Если  $V_{(m)}$  — объем тела, а  $S_{(m)}$  — замкнутая ограничивающая поверхность, можно, проинтегрировав уравнение (5.5.1-4) по объему  $V_{(m)}$ , получить:

$$\int_{V_{(m)}} \left[ \rho \frac{d_{(m)}\widehat{S}}{dt} + \operatorname{div}\left(\frac{1}{T} \mathbf{q}\right) + \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \frac{\rho Q}{T} \right] dV = 0. \quad (5.5.1-5)$$

Теорема переноса и уравнение нераэрывности позволяют записать первый член в виде

$$\int_{V_{(m)}} \rho \frac{d_{(m)} \widehat{S}}{dt} dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \rho \widehat{S} dV. \quad (5.5.1-6)$$

Используя обобщенное преобразование Грина для второго члена, получаем:

$$\int_{V_{(m)}} \operatorname{div} \left( \frac{1}{T} \mathbf{q} \right) dV = \int_{S_{(m)}} \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (5.5.1-7)$$

Уравнения (5.5.1-6) и (5.5.1-7) позволяют переписать (5.5.1-5) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \rho \widehat{S} dV &= - \int_{S_{(m)}} \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \\ &+ \int_{V_{(m)}} \left[ -\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \frac{\rho Q}{T} \right] dV. \end{aligned} \quad (5.5.1-8)$$

Это уравнение записано в виде баланса энтропии для сплошного тела. Величина  $(1/T)\mathbf{q}$  есть вектор плотности потока энтропии (удельная скорость контактного переноса энтропии на единицу площади), а

$$-\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \frac{\rho Q}{T}$$

локальная скорость возникновения энтропии в единице объема.

Из уравнения (5.5.1-8) следует, что скорость изменения энтропии во времени для сплошного тела равна сумме плотности потока энтропии к телу через ограничивающую поверхность посредством контактного переноса энергии и скорости возникновения энтропии в каждой точке тела за счет тепловой диссипации, вязкой диссипации и за счет внешнего и взаимного потоков энергии. Следует отметить, что уравнение (5.5.1-8) выводится только для сплошного тела и неприменимо для тел, содержащих поверхности разрыва (например, поверхности раздела фаз).

Рассмотрим экспериментальные данные относительно знаков второго и третьего членов в правой части уравнения (5.5.1-4). Повседневный опыт указывает на то, что контактные потоки энергии всегда имеют направление, противоположное направлению температурного градиента. Следовательно,

$$-\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T \geq 0. \quad (5.5.1-9)$$

Если разогнуть канцелярскую скрепку и перекручивать ее концы, пока она не сломается, то можно заметить значительное повышение температуры в области деформации. В соответствии с уравнением (5.3.2-18) для каждой точки в области деформации левая часть этого уравнения положительна. Так как внешний перенос энергии отсутствует, а плотность металла постоянна, можно заключить:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) \geq 0. \quad (5.5.1-10)$$

В смазанных подшипниках передних колес автомобиля (мощность передается на заднюю ось) можно обнаружить значительный нагрев

после езды с большой скоростью. Применяя уравнение баланса энергии в каждой точке смазочного материала, получим неравенство (5.5.1-10). В каждой точке деформирующегося металла канцелярской скрепки и в каждой точке смазки подшипников механическая энергия превращается во внутреннюю энергию. Как показывает повседневный опыт, неравенство (5.5.1-10) удовлетворяется.

Из этого экспериментального факта следует пятый основной постулат, справедливый для всех тел, — неравенство энтропии:

скорость возникновения энтропии в теле, исключая энтропию вследствие внешнего и взаимного переноса энергии, должна быть больше или равна нулю. Согласно уравнению (5.5.1-5) из неравенства энтропии следует:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(m)} \rho \widehat{S} dV + \int_{S(m)} \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{V(m)} \rho \frac{Q}{T} dV \geq 0. \quad (5.5.1-11)$$

Неравенство энтропии или одно из его следствий обычно называется вторым законом термодинамики, хотя содержание второго закона часто подменяется ссылками на вечные двигатели [18].

Несмотря на то что определяющее уравнение для удельной внутренней энергии, являющейся функцией энтропии (5.5.1-9), используется для обоснования выражения (5.5.1-11), неравенство энтропии принимается в качестве фундаментального постулата, как и закон сохранения массы. Следовательно, оно должно удовлетворяться для всех тел, состоящих из одного вещества, независимо от того, какие определяющие уравнения используются для описания их поведения.

*5.5.2. Дифференциальное неравенство энтропии.* Снова ограничимся телом, для которого все характеристики являются гладкими функциями координат и времени (см. § 2.2.3).

Из неравенства энтропии, а также из уравнения (5.5.1-4) следует, что в каждой точке тела

$$\rho \frac{d_{(m)} \widehat{S}}{dt} + \operatorname{div} \left( \frac{1}{T} \mathbf{q} \right) - \frac{\rho Q}{T} = -\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) \geq 0. \quad (5.5.2-1)$$

Это выражение называется дифференциальным неравенством энтропии.

Роль дифференциального неравенства энтропии можно сравнить с ролью второго закона Коши, который накладывает ограничения на тензор напряжений: он должен быть симметричным. Неравенство энтропии налагает ограничение как на вектор потока энергии  $\mathbf{q}$ , так и на тензор напряжений. Заметим, что неравенства (5.5.1-9) и (5.5.1-10) не обязательно вытекают из (5.5.2-1). Сначала нужно установить, что  $\mathbf{q} \cdot \nabla T$  не является функцией тензора скорости деформации  $D$  (или  $\mathbf{F}$ ) и что  $\operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot D)$  не является функцией  $\nabla T$  [7]. В последних работах по термодинамике некоторые авторы были против таких априорных утверждений [4].

## 5.6. ВЫВОДЫ

*5.6.1. Сводка используемых уравнений.* В табл. 5.6.1-1 представлены семь эквивалентных форм дифференциального уравнения баланса энергии из § 5.3.2. Часто одна из форм предпочтительнее для данной задачи.

Таблица 5.6.1-1

## Различные формы дифференциального уравнения баланса энергии [19]

$$\rho \frac{d(m)}{dt} (\widehat{U} + 0.5 v^2 + \varphi) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \rho Q \quad (\text{A})^*$$

$$\rho \frac{d(m)}{dt} (\widehat{U} + 0.5 v^2) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) + \rho Q \quad (\text{Б})$$

$$\rho \frac{d(m) \widehat{U}}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} - P \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q \quad (\text{В})$$

$$\rho \frac{d(m) \widehat{H}}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{d(m) P}{dt} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q \quad (\Gamma)$$

$$\rho c_V \frac{d(m) T}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q \quad (\Delta)$$

$$\rho c_p \frac{d(m) T}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \left( \frac{\partial \ln \widehat{V}}{\partial \ln T} \right)_P \frac{d(m) P}{dt} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q \quad (\text{Е})$$

$$\rho \frac{d(m) \widehat{S}}{dt} = -\operatorname{div} \left( \frac{1}{T} \mathbf{q} \right) - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \frac{1}{T} \rho Q \quad (\text{Ж})$$

\* Предполагается, что  $\partial \varphi / \partial t = 0$ .

Таблица 5.6.1-2

## Дифференциальные уравнения баланса энергии (5.6.1-2) в нескольких системах координат

Прямоугольные координаты:

$$\begin{aligned} \rho \widehat{c}_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T}{\partial z_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial z_2} + v_3 \frac{\partial T}{\partial z_3} \right) &= - \left( \frac{\partial q_1}{\partial z_1} + \frac{\partial q_2}{\partial z_2} + \frac{\partial q_3}{\partial z_3} \right) - \\ &- T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial v_1}{\partial z_1} + \frac{\partial v_2}{\partial z_2} + \frac{\partial v_3}{\partial z_3} \right) + S_{11} \frac{\partial v_1}{\partial z_1} + S_{22} \frac{\partial v_2}{\partial z_2} + S_{33} \frac{\partial v_3}{\partial z_3} + \\ &+ S_{12} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z_2} + \frac{\partial v_2}{\partial z_1} \right) + S_{13} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z_3} + \frac{\partial v_3}{\partial z_1} \right) + S_{23} \left( \frac{\partial v_2}{\partial z_3} + \frac{\partial v_3}{\partial z_2} \right) + \rho Q \end{aligned} \quad (\text{А})$$

Цилиндрические координаты:

$$\begin{aligned} \rho \widehat{c}_v \left( \frac{\partial T}{\partial r} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] - \\ &- T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + S_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + S_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \\ &+ S_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + S_{r\theta} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + S_{rz} \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \\ &+ S_{\theta z} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] + \rho Q \end{aligned} \quad (\text{Б})$$

Сферические координаты:

$$\begin{aligned} \rho \widehat{c}_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) &= \\ &= - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right) \hat{v} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] + S_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + S_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \\
& + S_{\varphi\varphi} \left( \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) + S_{r\theta} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \\
& + S_{r\varphi} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right) + S_{\theta\varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} v_\varphi \right) + \rho Q \quad (\text{B})
\end{aligned}$$

Таблица 5.6.1-3

Дифференциальное уравнение баланса энергии для ньютоновских жидкостей при постоянных  $\rho$ ,  $\mu$  и  $k$  [см. (уравнение 5.6.1-3)]

Прямоугольные координаты:

$$\begin{aligned}
\rho \hat{c} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T}{\partial z_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial z_2} + v_3 \frac{\partial T}{\partial z_3} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z_3^2} \right) + \\
+ 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial z_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial z_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_3}{\partial z_3} \right)^2 \right] + \mu \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial z_2} + \frac{\partial v_2}{\partial z_1} \right)^2 + \right. \\
\left. + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z_3} + \frac{\partial v_3}{\partial z_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial z_3} + \frac{\partial v_3}{\partial z_2} \right)^2 \right] + \rho Q \quad (\text{A})
\end{aligned}$$

Цилиндрические координаты:

$$\begin{aligned}
\rho \hat{c} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \right. \\
\left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + 2\mu \left\{ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right]^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} + \\
+ \mu \left\{ \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) \right]^2 \right\} + \rho Q \quad (\text{Б})
\end{aligned}$$

Сферические координаты:

$$\begin{aligned}
\rho \hat{c} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \\
= k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] + \\
+ 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right)^2 \right] + \\
+ \mu \left\{ \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) \right]^2 + \right. \\
\left. + \left[ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right]^2 \right\} + \rho Q \quad (\text{В})
\end{aligned}$$

Таблица 5.6.1-4

**Компоненты вектора плотности потока энергии в соответствии с законом Фурье (5.4.2-5)**

Прямоугольные декартово координаты:	Цилиндрические координаты:	Сферические координаты:
$q_1 = -k \frac{\partial T}{\partial z_1}$	$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$	$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$
$q_2 = -k \frac{\partial T}{\partial z_2}$	$q_\theta = -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$	$q_\theta = -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$
$q_3 = -k \frac{\partial T}{\partial z_3}$	$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$	$q_\varphi = -k \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$

Единственной внешней силой, которая учитывается, является однодное гравитационное поле, которое можно представить как (см. § 2.5.1)

$$\mathbf{f} = -\nabla \Phi. \quad (5.6.1-1)$$

Далее мы будем называть  $\Phi$  потенциальной энергией на единицу массы.

Уравнение (Д) из табл. 5.6.1-1 можно переписать в виде

$$\widehat{\rho c_v} \frac{d_{(m)}T}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\widehat{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}) + \rho Q. \quad (5.6.1-2)$$

Это уравнение записано в прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах в табл. 5.6.1-2. Не представляет трудности использовать эти уравнения как руководство для записи соответствующих выражений шести других форм дифференциального уравнения баланса энергии, приведенных в табл. 5.6.1-1.

Может также оказаться полезным запись закона Фурье в прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах, представленная в табл. 5.6.1-4.

Для несжимаемой ньютоновской жидкости с постоянной вязкостью и постоянной теплопроводностью уравнения (Е) и (Д) из табл. 5.6.1-1 сводятся к

$$\widehat{\rho c} \frac{d_{(m)}T}{dt} = k \operatorname{div} \nabla T + 2\mu \operatorname{tr} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) + \rho Q. \quad (5.6.1-3)$$

Определим теплоемкость для несжимаемых жидкостей

$$\widehat{c} = \widehat{c}_v = T \left( \frac{\partial \widehat{S}}{\partial T} \right)_{\widehat{V}} = \widehat{c}_p = T \left( \frac{\partial \widehat{S}}{\partial T} \right)_p. \quad (5.6.1-4)$$

В прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах компоненты этого уравнения приведены в табл. 5.6.1-3. Читатель может использовать их как руководство для записи соответствующих выражений различных форм дифференциального уравнения баланса энергии, приведенных в табл. 5.6.1-1.

В § 2.5.1 мы обсудили обозначения, которые можно использовать для векторных и тензорных компонент в цилиндрической и сферической системах координат. Эти значения применимы и для данного случая.

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

# ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БАЛАНСА ДЛЯ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ

В этой главе мы прежде всего остановимся на постановке и решении задач пограничного слоя при использовании дифференциальных уравнений баланса энергии. При усвоении материала этой главы целесообразно вспомнить первый закон Коши, рассматриваемый в гл. 3.

Необходимо подчеркнуть одну деталь. Из этой главы можно заметить, что ни одна задача не требует непосредственного выполнения дифференциального неравенства энтропии. Это неравенство тождественно удовлетворяется при наложении на определяющие уравнения для тензора напряжений и вектора плотности потока энергии некоторых ограничений. Например, для ньютоновской жидкости, подчиняющейся закону Фурье,

$$k \geq 0, \mu \geq 0 \text{ и } \lambda \geq -\frac{2}{3}\mu.$$

Мы видим здесь полную аналогию с задачами гл. 3, где тождественно удовлетворялось уравнение первого закона Коши.

### 6.1. ОБЩИЙ ПОДХОД

*6.1.1. Общий подход к решению задач при использовании уравнения баланса энергии.* Рассматриваемые здесь задачи значительно сложнее задач гл. 3, где нам необходимо было одновременно решать уравнения неразрывности и первого закона Коши для каких-то определяющих уравнений тензора напряжений. Здесь мы рассматриваем задачи, требующие одновременного решения уравнений неразрывности, первого закона Коши и дифференциального баланса энергии для определенных основных уравнений как для тензора напряжений, так и для вектора плотности потока энергии.

Как указывалось в § 3.1.1, прежде всего следует установить вид рассматриваемой задачи. В частности, это означает необходимость выбора определяющих уравнений для тензора напряжений и вектора плотности потока энергии. Если для тензора напряжений в этой главе используются различные представления, то для вектора плотности потока применяется только закон Фурье. Другие представления, кроме закона Фурье, почти не имеют экспериментальных подтверждений (см. § 5.4.2).

Для завершения определения вида конкретной задачи необходимо описать геометрию материала или геометрию, в которой перемещается материал, а также силы, вызывающие его движение и все виды переноса энергии к нему. Так же, как в гл. 3, постановка каждой задачи требует определенных граничных условий. Кроме указанных в § 3.1.1, существует несколько типов граничных условий, которые следут выбирать для незнакомых физических задач.

1. Температура на поверхности раздела изменяется непрерывно. Мы принимаем это допущение, считая, что на фазовой границе устанавливается локальное равновесие. В § 8.5.3 будет найдено, что температура изменяется непрерывно при переходе через поверхность раздела фаз.

2. Уравнение баланса для скачка энергии

$$[\rho(\hat{U} + 0.5v^2)(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi} - u_{(\xi)}) + \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\xi})] = 0. \quad (6.1.1-1)$$

### 3. Температура и потоки энергии являются конечными во всех точках вещества.

Здесь, как и в § 3.1.1, целесообразно начать с обсуждения конкретной гидромеханики. Мы не собираемся решать каждую сформулированную задачу, а также находить множество решений, требующих больших материальных затрат с точки зрения машинного времени. Иногда удобно аппроксимировать реальную задачу, с трудом поддающуюся решению, более простой, имеющей аналитическое решение. Иногда это единственное, что необходимо сделать. В крайней случае это пригодится нам для проверки результатов численного счета.

Рассматриваемые в этой главе задачи имеют точные решения. Таким образом, понятия и принципы можно ввести очень быстро. Кроме того, сравнительно простые задачи можно хорошо усвоить и не прибегая к численному счету.

Так же как при обсуждении решения первого закона Коши, мы не утверждаем, что найденные решения являются единственными, хотя имеется несколько теорем существования и единственности для уравнения Лапласа [1]. Нам необходимо найти какое-то решение. Иногда экспериментальные данные покажут, что искомое решение является единственным, но это не всегда может быть очевидным.

## 6.2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

*6.2.1. Теплопроводность в твердом теле.* Одним из наиболее простых классов задач, включающих перенос энергии, является теплопроводность в неподвижном твердом теле. Поскольку в этом случае вектор скорости тождественно равен нулю, уравнение диффузационного баланса энергии сводится к выражению

$$\rho \hat{c} \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \nabla T) + \rho Q. \quad (6.2.1-1)$$

При записи этого уравнения предполагалось, что для твердого тела нет необходимости проводить различия между теплоемкостями при постоянных удельном объеме и термодинамическом давлении:

$$\hat{c} = \hat{c}_v = \hat{c}_p. \quad (6.2.1-2)$$

Часто нам не нужно знать распределение напряжений в нагретом твердом теле и, поскольку распределение скорости известно, не обязательно рассматривать первый закон Коши и уравнение неразрывности.

Очень часто встречается случай, когда коэффициент теплопроводности в твердом теле не зависит от температуры и, следовательно, от координат. Для стационарного распределения температуры при отсутствии внешнего и взаимного переноса энергии ( $Q=0$ ) дифференциальное уравнение баланса энергии сводится к уравнению Лапласа:

$$\operatorname{div}(\nabla T) = 0. \quad (6.2.1-3)$$

Это выражение очень удобно, так как уравнение Лапласа хорошо изучено в литературе [1].

Следует иметь в виду, что уравнение Лапласа уже использовалось при обсуждении несжимаемого потенциального течения (ニュтонаовских жидкостей). Математические задачи, связанные с такими течениями, имеют в этой главе иной физический смысл. Например, граничное усло-

вие, в котором задана скорость потенциального течения, соответствует условию, в котором задается вектор плотности потока энергии.

Многие решения уравнений (6.6.1-1) приводятся в монографии [2].

**6.2.2. Охлаждение полубесконечной плиты. Постоянная температура поверхности** [3]. Рассмотрим процесс закалки, в котором нагретое металлическое тело при постоянной температуре  $T_0$  быстро погружается в закалочную ванну, средняя температура которой автоматически регулируется системой охлаждения. Тело остается в ванне, пока его максимальная температура не снизится до определенного значения. Кроме того, чтобы достигнуть максимальной скорости процесса при данном оборудовании, необходимо извлечь тело из охлаждаемой ванны как можно быстрее; следовательно, требуется найти распределение температуры в теле в зависимости от времени.

Нашей задачей является нахождение распределения температуры как в металле, так и в окружающем закалочном масле. Энергия не может передаваться от твердого тела к маслу при отсутствии в масле вблизи твердой поверхности температурного градиента. Граничным условием на ограничивающей поверхности металла является непрерывное изменение температуры при переходе через поверхность раздела фаз, а также выполнение уравнения баланса для скачка энергии. Для упрощения будем считать, что температура поверхности металла равна средней температуре закалочного масла, а распределением температуры в масле будем пренебречь.

Для максимального упрощения задачи заменим также наше конечное тело полубесконечным твердым телом, которое занимает пространство  $z_2 \geq 0$ . Начальными и граничными условиями будут:

$$\text{при } t=0 \text{ для всех } z_2 > 0 \quad T=T_0; \quad (6.2.2-1)$$

$$\text{при } z_2=0 \text{ для всех } t > 0 \quad T=T_1. \quad (6.2.2-2)$$

Некоторые авторы считают необходимым ввести дополнительное граничное условие, согласно которому при  $z_2 \rightarrow \infty$  температура равна  $T_0$  для всех значений времени [3, 4]. Мы же будем считать, что в бесконечности при  $t > 0$  температура не обязательно должна быть равна  $T_0$ : необходимо только потребовать, чтобы при  $z_2 \rightarrow \infty$  она была конечной.

Кроме того, будем считать коэффициент теплопроводности постоянной величиной. Поскольку внешний или взаимный перенос энергии отсутствует, то уравнение (6.2.1-1) принимает вид:

$$\rho \hat{c} \frac{\partial T}{\partial t} = k \operatorname{div}(\nabla T). \quad (6.2.2-3)$$

Принимаем:

$$T=T(t, z_2). \quad (6.2.2-4)$$

В соответствии с уравнением (A) табл. 5.6.1-3 соотношение (6.2.2-3) сводится к

$$\rho \hat{c} \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (6.2.2-5)$$

для которого решение имеется при граничных условиях (6.2.2-1) и (6.2.2-2).

Поиски решения можно несколько упростить, если ввести безразмерную температуру

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}. \quad (6.2.2-6)$$

Уравнение (6.2.2-5) принимает вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad (6.2.2-7)$$

где

$$\alpha = \frac{k}{\rho c}. \quad (6.2.2-8)$$

Условия (6.2.2-1) и (6.2.2-2) можно свести к следующим:

$$\text{при } t=0 \text{ для всех } z_2 > 0 \quad \theta = 0 \quad (6.2.2-9)$$

$$\text{и при } z_2 = 0 \text{ для всех } t > 0 \quad \theta = 1. \quad (6.2.2-10)$$

Эта задача в точности совпадает с анализом течения жидкости, ограниченной стенкой, которая неожиданно приводится в движение (§ 3.2.4). Следовательно, получаем искомое решение:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z_2}{\sqrt{4\alpha t}} \right). \quad (6.2.2-11)$$

Поскольку  $\operatorname{erf}(2) = 0,995$ , температура плиты остается существенно постоянной вне области толщины  $\delta_t$ :

$$\delta_t = 4\sqrt{\alpha t}. \quad (6.2.2-12)$$

Следовательно, уравнение (6.2.2-11) можно использовать в качестве приближенного распределения температуры для плиты большей толщины по сравнению с  $\delta_t$ .

**6.2.3. Охлаждение полубесконечной плиты.** Охлаждение по закону Ньютона [2]. Чтобы решить реальную задачу закалки металла, рассматриваемую в § 6.2.2, необходимо найти температурное распределение как в металле, так и в масле. На границе раздела фаз металл — масло потребуем, чтобы температура была непрерывной, а также, чтобы выполнялось уравнение баланса энергии для скачка. Для простоты мы положили, что температура поверхности металла равна средней температуре масла, а температурное распределение в масле не учитывали.

Несколько лучшее распределение можно получить, используя закон охлаждения Ньютона, который на основании эмпирических наблюдений можно сформулировать так:

поток энергии через поверхность раздела фаз примерно пропорционален разности температур между поверхностью и окружающей средой.

Запишем его в виде уравнения

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h(T_{\text{пов}} - T_{\text{окр.ср}}), \quad (6.2.3-1)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к границе раздела фаз, направленная в окружающую среду. Коэффициент  $h$  называется коэффициентом теплообмена. Экспериментально обнаружено, что  $h$  не является постоянной величиной, хотя часто при построении математической модели реальной задачи он считается постоянным. В § 7.4.4 понятия коэффициента теплообмена используются в другом смысле.

Будем искать распределение температуры в полубесконечной плите, описанной в § 6.2.2. В постановку задачи внесем только одно изменение. Вместо равенства температуры поверхности раздела фаз средней тем-

пературе масла допустим, что перенос энергии через поверхность разделя фаз описывается законом охлаждения Ньютона при постоянном коэффициенте теплопереноса  $h$ :

$$\text{при } z_2 = 0 \text{ для всех } t > 0 \quad k \frac{\partial T}{\partial z_2} = h(T - T_1). \quad (6.2.3-2)$$

Сделав замену переменной

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}, \quad (6.2.3-3)$$

получим уравнение (6.3.2-5) в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_2^2}. \quad (6.2.3-4)$$

Перепишем начальное (6.2.2-1) и граничное (6.2.3-2) условия:  
при  $t=0 \theta=1$  для всех  $z_2>0$ ; (6.2.3-5)

$$\text{при } z_2 = 0 \frac{\partial \theta}{\partial z_2} = \frac{h}{k} \theta \text{ для всех } t > 0. \quad (6.2.3-6)$$

Определим функцию

$$A = A(t, z_2) \equiv \theta - \frac{k}{h} \frac{\partial \theta}{\partial z_2}. \quad (6.2.3-7)$$

Используя эту функцию, запишем уравнения (6.3.3-4) – (6.3.3-6):

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial z_2^2}. \quad (6.2.3-8)$$

При  $t=0 A=1$  для всех  $z_2>0$  (6.2.3-9)

и при  $z_2=0 A=0$  для всех  $t>0$ . (6.2.3-10)

С помощью метода, описанного в § 3.2.4, найдем:

$$A = \operatorname{erf}\left(\frac{z_2}{\sqrt{4\alpha t}}\right). \quad (6.2.3-11)$$

Объединив уравнения (6.3.3-7) и (6.3.3-11), получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для  $\theta$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial z_2} - \frac{h}{k} \theta = -\frac{h}{k} \operatorname{erf}\left(\frac{z_2}{\sqrt{4\alpha t}}\right). \quad (6.2.3-12)$$

Потребуем, чтобы  $\theta$  была конечной при  $z_2 \rightarrow \infty$ . Решением (6.3.3-12), удовлетворяющим этому условию, будет:

$$\theta = -\frac{h}{k} \exp\left(-\frac{h z_2}{k}\right) \int_{-\infty}^{z_2} \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \exp\left(-\frac{h \xi}{k}\right) d\xi. \quad (6.2.3-13)$$

Замена переменной

$$\eta \equiv \xi - z_2 \quad (6.2.3-14)$$

позволяет представить это решение в виде

$$\theta = \frac{2h}{V\pi k} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{h\eta}{k}\right) \left[ \int_0^{(z_2+\eta)/\sqrt{4\alpha t}} \exp(-u^2) du \right] d\eta. \quad (6.2.3-15)$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\theta = \operatorname{erf} \left( \frac{z_2}{\sqrt{4at}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi at}} \int_0^{\infty} \exp \left( -\frac{h\eta}{k} - \frac{|z_2 + \eta|^2}{4at} \right) d\eta \quad (6.2.3-16)$$

или

$$\theta = \operatorname{erf} \left( \frac{z_2}{\sqrt{4at}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi at}} \exp \left( \frac{hz_2}{k} + \frac{h^2 at}{k^2} \right) \int_0^{\infty} \exp \left( -\frac{|z_2 + \eta + 2hat/k|^2}{4at} \right) d\eta; \quad (6.2.3-17)$$

эти выражения можно упростить, введя величину  $u$ :

$$u \equiv \frac{z_2 + \eta + 2hat/k}{\sqrt{4at}}. \quad (6.2.3-18)$$

Тогда получим:

$$\theta = \operatorname{erf} \left( \frac{z_2}{\sqrt{4at}} \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left( \frac{hz_2}{k} + \frac{h^2 at}{k^2} \right) \int_{\frac{z_2 + 2hat/k}{\sqrt{4at}}}^{\infty} \exp(-u^2) du \quad (6.2.3-19)$$

или

$$\theta = \operatorname{erf} \left( \frac{z_2}{\sqrt{4at}} \right) + \exp \left( \frac{hz_2}{k} + \frac{h^2 at}{k^2} \right) \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z_2}{\sqrt{4at}} + \frac{h}{k} \sqrt{at} \right) \right]. \quad (6.2.3-20)$$

Уравнение (6.2.3-20) представлено на рис. 6.2.3-1.

Величина  $\theta$  на поверхности равна:

$$\theta = \exp \frac{h^2 at}{k^2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{h}{k} \sqrt{at} \right) \right]. \quad (6.2.3-21)$$

Это выражение можно представить в виде степенного ряда [2]:

$$\theta = \frac{k}{h \sqrt{\pi at}} \left( 1 - \frac{k^2}{2h^2 at} + \frac{3k^4}{4h^4 a^2 t} - \dots \right). \quad (6.2.3-22)$$

Следовательно, для больших значений времени температуру поверхности можно аппроксимировать выражением

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \frac{k}{h \sqrt{\pi at}}. \quad (6.2.3-23)$$

При этом погрешность составляет менее  $\frac{2h^3 (\pi a^3 t^3)^{1/2}}{k^3}$ .

**6.2.4. Охлаждение тонкой плоской пластины.** Постоянная температура поверхности [2]. Заменим полубесконечную плиту из § 6.2.2 неподвижной бесконечной тонкой пластиной, занимающей все пространство между  $z_2 = -a$  и  $z_2 = +a$ . Потребуем, чтобы начальная температура слоя была равна:

$$\text{при } t=0 \quad T=T_0 \text{ для } -a < z_2 < a, \quad (6.2.4-1)$$

а при погружении нагретого листа в закалочную ванну температура его принимает значение:

$$\text{при } z_2 = \pm a \quad T=T_1 \text{ для } t>0. \quad (6.2.4-2)$$

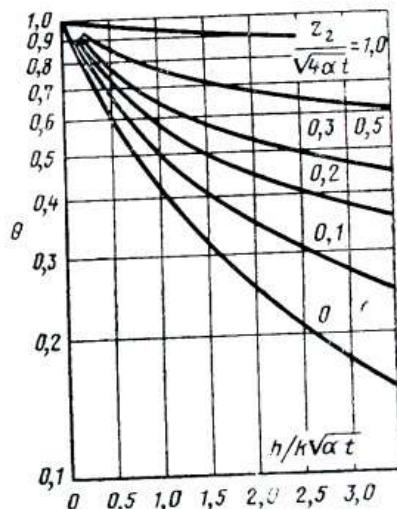


Рис. 6.2.3-1. Охлаждение полубесконечной плиты по уравнению (6.2.3-20).

Будем считать коэффициент теплопроводности постоянным.

Предположим, что

$$T=T(t, z_2). \quad (6.2.4-3)$$

Нахождение решения несколько упрощается, если ввести соответствующие безразмерные переменные. Пусть

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}; \quad (6.2.4-4)$$

$$\tau = \frac{tk}{\rho c a^2}; \quad (6.2.4-5)$$

$$\xi = \frac{z_2}{a}. \quad (6.2.4-6)$$

Дифференциальное уравнение баланса энергии (6.2.1-1) при этом будет:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \quad (6.2.4-7)$$

с граничными условиями:

$$\text{при } \tau=0 \quad \theta=1 \text{ для } -1 < \xi < 1; \quad (6.2.4-8)$$

$$\text{при } \xi=\pm 1 \quad \theta=0 \text{ для } \tau>0. \quad (6.2.4-9)$$

Решение уравнения (6.2.4-7) будем искать в виде

$$\theta = \mathcal{T}(\tau) X(\xi). \quad (6.2.4-10)$$

Следовательно,

$$\frac{\mathcal{T}'}{\mathcal{T}} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad (6.2.4-11)$$

где  $\lambda^2$  — постоянная.

Решением для

$$\mathcal{T}' + \lambda^2 \mathcal{T} = 0 \quad (6.2.4-12)$$

будет:

$$\mathcal{T} = A e^{-\lambda^2 \tau}, \quad (6.2.4-13)$$

$$\text{а для } X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (6.2.4-14)$$

решение имеет вид:

$$X = B \sin \lambda \xi + C \cos \lambda \xi. \quad (6.2.4-15)$$

Из граничных условий (6.2.4-9) следует, что

$$\lambda = \frac{(2n+1)\pi}{2}; \quad n=0, 1, 2 \dots \quad (6.2.4-16)$$

и

$$B = 0. \quad (6.2.4-17)$$

Линейная комбинация всех решений уравнения (6.2.4-7), записанных в виде (6.2.4-10), (6.2.4-13) и (6.2.4-15) — (6.2.4-17), дает:

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \tau}{4}\right) \cos \frac{(2n+1)\pi \xi}{2}. \quad (6.2.4-18)$$

Границочное условие (6.2.4-8) требует:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos \frac{(2n+1)\pi\xi}{2}. \quad (6.2.4-19)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{(2m+1)\pi\xi}{2}\right) d\xi &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{(2m+1)\pi\xi}{2}\right) \times \\ &\times \cos\left(\frac{(2n+1)\pi\xi}{2}\right) d\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ D_m, & \text{если } m = n \end{cases} \end{aligned} \quad (6.2.4-20)$$

или

$$D_n = \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi}. \quad (6.2.4-21)$$

Окончательный результат для температуры имеет вид [2]:

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \exp\left(\frac{-(2n+1)^2\pi^2\tau}{4}\right) \cos \frac{(2n+1)\pi\xi}{2} \quad (6.2.4-22)$$

или

$$\frac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} \exp\left(\frac{-(2n+1)^2\pi^2kt}{4\rho c a^2}\right) \cos \frac{(2n+1)\pi z_2}{2a}. \quad (6.2.4-23)$$

Это решение представлено на рис. 6.2.4-1.

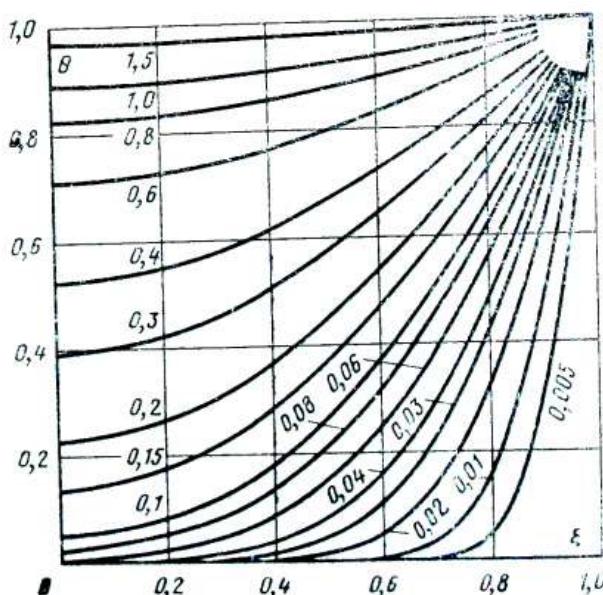


Рис. 6.2.4-1. Охлаждение плоской тонкой пластины по уравнению (6.2.4-22) [2].

### 6.3. БОЛЕЕ ПОЛНЫЕ РЕШЕНИЯ

*6.3.1. Теплопроводность, конвекция и вязкая диссипация в жидкостях.* В последующих параграфах будем рассматривать два типа задач: для течений несжимаемых жидкостей и изохорических течений.

Для обоих случаев дифференциальное уравнение баланса в форме (1) табл. 5.6.1-1 сводится к виду:

$$\rho \hat{c}_V \frac{d_{(m)} T}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q. \quad (6.3.1-1)$$

При этом считалось, что закон Фурье применим, поскольку другие варианты не имеют экспериментальных подтверждений (см. § 5.4.2). Мы не будем учитывать внешний и взаимный переносы энергии ( $Q=0$ ), а также зависимость коэффициента теплопроводности от температуры.

При этих условиях выражение (6.3.1-1) упрощается:

$$\rho \hat{c}_V \frac{d_{(m)} T}{dt} = k \operatorname{div}(\nabla T) + \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}). \quad (6.3.1-2)$$

В последующих параграфах мы чаще всего будем решать уравнение (6.3.1-2), используя уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (6.3.1-3)$$

первый закон Коши

$$\rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} \quad (6.3.1-4)$$

и соответствующие определяющие уравнения для тензора напряжений.

Мы ограничиваемся рассмотрением несжимаемых жидкостей или изохорическими течениями не только из-за того, что использование дифференциального уравнения баланса энергии приводит к значительному упрощению. Когда плотность не зависит от температуры, уравнение (E) из табл. 5.6.1-1 тоже сводится к (6.3.1-1)\*. Кроме того, все известные решения уравнения первого закона Коши соответствуют изохорическим течениям.

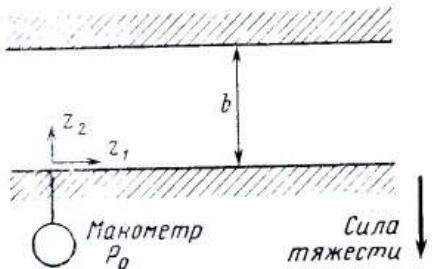


Рис. 6.3.2-1. Течение Куэтта.

друг от друга. Нижняя пластина неподвижна и имеет постоянную температуру  $T_0$ :

$$\text{при } z_2=0 \quad \mathbf{v}=0; \quad T=T_0. \quad (6.3.2-1)$$

Верхняя пластина движется с постоянной скоростью  $V$  в направлении  $z_1$  и имеет одинаковую всюду температуру  $T_1$ :

$$\text{при } z_2=b \quad v_1=V; \quad v_2=v_3=0; \quad T=T_1. \quad (6.3.2-2)$$

\* Это упрощение не относится к жидкостям, плотность которых почти не зависит от давления, но зависит от температуры.

Манометр, установленный на нижней пластине, дает показания  $P_0$ :  
 при  $z_2=z_1=z_3=0 - T_{22}=P_0$ . (6.3.2-3)

Найдем распределение скорости и температуры в жидкости.

Из-за недостатка информации предположим, что пластины имеют очень большую длину и что концевыми эффектами можно пренебречь. Будем также считать все физические свойства (кроме плотности) постоянными.

Из граничных условий (6.3.2-1) и (6.3.2-2) следует, что

$$v_1=v_1(z_2); v_2=v_3=0. \quad (6.3.2-4)$$

Этот вид распределения скорости удовлетворяет условию изохоричности движения:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}=0. \quad (6.3.2-5)$$

С учетом (6.3.2-4) и (6.3.2-5) получим из уравнения неразрывности:

$$\frac{d(m)\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial z_1} v_1 = 0 \quad (6.3.2-6)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial z_1} = 0. \quad (6.3.2-7)$$

Это означает, что плотность может быть функцией  $z_2$  и  $z_3$ :

$$\rho=\rho(z_2, z_3). \quad (6.3.2-8)$$

Компоненты уравнения первого закона Коши при этом упрощаются:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z_1} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial^2 z_2}; \quad (6.3.2-9)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z_2} - \rho g \quad (6.3.2-10)$$

и

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z_3}. \quad (6.3.2-11)$$

Из уравнений (6.3.2-10) и (6.3.2-11) следует, что

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z_3 \partial z_2} = -\frac{\partial \rho}{\partial z_3} g = 0. \quad (6.3.2-12)$$

Это означает, что плотность не является функцией  $z_3$ , тогда уравнение (6.3.2-8) сводится к соотношению

$$\rho=\rho(z_2). \quad (6.3.2-13)$$

Из соотношений (6.3.2-10) и (6.3.2-11) имеем:

$$P = -g \int_0^{z_2} \rho dz_2 + h(z_1). \quad (6.3.2-14)$$

Уравнение (6.3.2-9) дает:

$$\frac{\partial P}{\partial z_1} = \frac{dh}{dz_1} = \mu \frac{d^2 v_1}{d^2 z_2} = A = \text{const}, \quad (6.3.2-15)$$

где для второй производной принимается

$$\frac{d^2}{d^2 z} \equiv \frac{d^2}{dz^2}$$

или

$$P = -g \int_0^{z_2} \rho dz_2 + Az_1 + B. \quad (6.3.2-16)$$

С помощью (6.3.2-3) и (6.3.2-4) покажем, что

$$B = P_0 \quad (6.3.2-17)$$

Определим теперь постоянную  $A$ .

Проинтегрировав уравнение (6.3.2-15), получим:

$$v_1 = \frac{A}{2\mu} (z_2)^2 + C_1 z_2 + C_2. \quad (6.3.2-18)$$

Из граничных условий для скорости (6.3.2-1) и (6.3.2-2) следует, что

$$C_1 = \frac{V}{b} - \frac{A}{2\mu} b \quad (6.3.2-19)$$

и

$$C_2 = 0. \quad (6.3.2-20)$$

Принимая во внимание граничные условия для температуры (6.3.2-1) и (6.3.2-2), можно искать распределение температуры в виде

$$T = T(z_2). \quad (6.3.2-21)$$

Предположим, что сжимаемая жидкость такова, что давление можно представить как функцию плотности и температуры:

$$P = P(\rho, T). \quad (6.3.2-22)$$

Тогда из уравнений (6.3.2-13), (6.3.2-21) и (6.3.2-22) вытекает требование, чтобы в (6.3.2-16)

$$A = 0. \quad (6.3.2-23)$$

В этом случае дифференциальное уравнение баланса энергии сводится к виду (А) табл. 5.6.1-2

$$0 = k \frac{d^2 T}{d^2 z_2} + \mu \left( \frac{d v_1}{d z_2} \right)^2 \quad (6.3.2-24)$$

или в соответствии с уравнениями (6.3.2-18)–(6.3.2-20) и (6.3.2-23)

$$\frac{d^2 T}{d^2 z_2} = -\frac{\mu}{k} \left( \frac{V}{b} \right)^2, \quad (6.3.2-25)$$

которое можно записать в безразмерном виде:

$$\frac{d^2 \theta}{d^2 z_2^*} = -N_{Br}, \quad (6.3.2-26)$$

где

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}; \quad z^* = \frac{z_2}{b}. \quad (6.3.2-27)$$

Здесь вводится число Бринкмана

$$N_{\text{Br}} \equiv \frac{\mu V^2}{k(T_1 - T_0)}. \quad (6.3.2-28)$$

Из соотношений (6.3.2-1) и (6.3.2-2) получим граничные условия, которым должно удовлетворять решение уравнения (6.3.2-26):

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \text{ при } z^* = 0; \\ \theta &= 1 \text{ при } z^* = 1. \end{aligned} \quad (6.3.2-29)$$

Проинтегрировав (6.3.2-26), найдем:

$$\theta = -\frac{N_{\text{Br}}}{2} [z_2^{*2} - z^*] + z^*; \quad (6.3.2-30)$$

при этом удовлетворяется условие (6.3.2-29).

Следовательно, распределения скорости, давления и температуры в жидкости имеют вид:

$$\frac{v_1}{V} = \frac{z_2}{b}; \quad (6.3.2-31)$$

$$P = -g \int_0^{z_2} \rho dz_2 + P_0 \quad (6.3.2-32)$$

и

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{N_{\text{Br}}}{2} \left[ \frac{z_2}{b} - \left( \frac{z_2}{b} \right)^2 \right] + \frac{z_2}{b}. \quad (6.3.2-33)$$

Из сравнения (6.3.2-26) с (6.3.2-24) станет ясно, что число Бринкмана характеризует скорость диссипации энергии в жидкости под действием вязких сил. Если же диссициацией энергии пренебречь, получим линейное распределение температуры:

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \rightarrow \frac{z_2}{b} \quad \text{при } N_{\text{Br}} \rightarrow 0. \quad (6.3.2-34)$$

В следующем параграфе рассматривается аналогичная задача, где не только плотность, но и другие физические свойства могут также зависеть от температуры.

*6.3.3. Течение Куэтта сжимаемой ньютоновской жидкости при переменной вязкости и теплопроводности.* Повторим анализ § 6.3.2 для ламинарного течения сжимаемой ньютоновской жидкости между двумя плоскими пластинами, показанными на рис. 6.3.2-1. Новый анализ будет отличаться от § 6.3.2 только тем, что обе пластины имеют постоянную температуру  $T_0$  и что коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят от температуры. На некоторое время пренебрежем функциональной зависимостью  $\mu$  от  $k$ . Требуется найти распределения давления, скорости и температуры в жидкости.

Границными условиями будут:

$$v=0; T=T_0 \text{ при } z_2=0; \quad (6.3.3-1)$$

$$v_1=V; v_2=v_3=0; T=T_0 \text{ при } z_2=b; \quad (6.3.3-2)$$

$$-T_{22}=P_0 \text{ при } z_2=z_1=z_3=0. \quad (6.3.3-3)$$

Опять предположим, что движение жидкости изохорично:

$$v_1=v_1(z_2); v_2=v_3=0. \quad (6.3.3-4)$$

Используя соображения § 6.3.2, получаем:

$$\rho=\rho(z_2, z_3). \quad (6.3.3-5)$$

Три компоненты первого закона Коши принимают здесь несколько иной вид:

$$0=-\frac{\partial P}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\mu \frac{\partial v_1}{\partial z_2}\right); \quad (6.3.3-6)$$

$$0=-\frac{\partial P}{\partial z_2}-\rho g; \quad (6.3.3-7)$$

$$0=-\frac{\partial P}{\partial z_3}. \quad (6.3.3-8)$$

Как и ранее, из уравнений (6.3.3-7) и (6.3.3-8) получим:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z_3 \partial z_2}=-\frac{\partial \rho}{\partial z_3} g=0, \quad (6.3.3-9)$$

откуда

$$\rho=\rho(z_2). \quad (6.3.3-10)$$

Аналогично § 6.3.2 полагаем, что

$$T=T(z_2). \quad (6.3.3-11)$$

Так как вязкость зависит только от температуры, мы можем с помощью (6.3.3-11) переписать второй член в правой части уравнения (6.3.3-6), используя только обычную производную:

$$0=-\frac{\partial P}{\partial z_1}+\frac{d}{dz_2}\left(\mu \frac{dv_1}{dz_2}\right). \quad (6.3.3-12)$$

Соотношения (6.3.3-7) и (6.3.3-12) показывают, что распределение термодинамического давления имеет вид:

$$P=-g \int_0^{z_2} \rho dz_2+h(z_1). \quad (6.3.3-13)$$

Из уравнений (6.3.3-12) и (6.3.3-13) мы видим, что

$$\frac{\partial P}{\partial z_1}=\frac{dh}{dz_1}=\frac{d}{dz_2}\left(\mu \frac{dv_1}{dz_2}\right)=A=\text{const.} \quad (6.3.3-14)$$

Следовательно, распределение давления имеет вид:

$$P = -g \int_0^{z_2} \rho dz_2 + Az_1 + P_0, \quad (6.3.3-15)$$

что удовлетворяет граничному условию (6.3.3-3). Если предположить, что термодинамическое давление зависит только от плотности и температуры:

$$P = P(\rho, T), \quad (6.3.3-16)$$

то из уравнений (6.3.3-10) и (6.3.3-11) можно заключить:

$$A = 0. \quad (6.3.3-17)$$

Теперь из соотношения (6.3.3-14) можно видеть, что уравнение

$$\frac{d}{dz_2} \left( \mu \frac{dv_1}{dz_2} \right) = 0 \quad (6.3.3-18)$$

можно решить совместно с дифференциальным уравнением баланса энергии

$$\frac{d}{dz_2} \left( k \frac{dT}{dz_2} \right) + \mu \left( \frac{dv_1}{dz_2} \right)^2 = 0 \quad (6.3.3-19)$$

для распределений скорости и температуры. Введем теперь безразмерные переменные:

$$\varphi \equiv \frac{v_1}{V}; \quad \theta \equiv \frac{T - T_0}{T_0}; \quad \xi \equiv \frac{z_2}{b}, \quad (6.3.3-20)$$

с помощью которых уравнения (6.3.3-18) и (6.3.3-19) примут вид:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\mu_0}{\mu} C_1; \quad (6.3.3-21)$$

$$\frac{\mu_0}{\mu} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{k}{k_0} \frac{d\theta}{d\xi} \right) + N_{Br} \left( \frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 = 0. \quad (6.3.3-22)$$

Здесь  $\mu_0$  и  $k_0$  — соответственно характерные вязкость и теплопроводность; число Бринкмана равно:

$$N_{Br} \equiv \frac{\mu_0 V^2}{T_0 k_0}. \quad (6.3.3-23)$$

Соответствующие граничные условия таковы:

$$\theta = \varphi = 0 \text{ при } \xi = 0; \quad (6.3.3-24)$$

$$\theta = 0, \varphi = 1 \text{ при } \xi = 1. \quad (6.3.3-25)$$

Уравнения (6.3.3-21) и (6.3.3-22) позволяют разложить функции  $\mu_0/\mu$  и  $k/k_0$  в ряд Тейлора по безразмерной температуре  $\theta$ :

$$k/k_0 = 1 + \alpha_1 \theta + \alpha_2 \theta^2 + \dots; \quad (6.3.3-26)$$

$$\mu_0/\mu = 1 + \beta_1 \theta + \beta_2 \theta^2 + \dots \quad (6.3.3-27)$$

В этих разложениях  $\mu_0$  и  $k_0$  считаются вязкостью и теплопроводностью жидкости при  $T = T_0$ . Предполагается, что параметры  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3 \dots$ ) известны из экспериментальных данных.

Из уравнений (6.3.3-26) и (6.3.3-27) очевидно, что соотношения (6.3.3-21) и (6.3.3-22) существенно нелинейны. Это оставляет очень мало шансов на получение аналитического решения. Конечно, эту задачу можно было бы решить численно, но даже при этом было бы удобнее иметь аналитическое решение для предельного случая, которое можно было бы использовать для проверки численного счета.

Каждый раз, встречаясь с необходимостью решить нелинейное уравнение или систему нелинейных уравнений, явно не поддающиеся решению, следует узнать, может ли представлять интерес анализ какого-либо предельного случая. Здесь, например, было бы интересно задать вопрос об эффектах вязкой диссипации в пределе очень малых чисел Бринкмана  $N_{Br}$ . Имея решение задачи, мы бы увидели, что  $\theta$ ,  $\varphi$  и постоянную интегрирования  $C_1$  в уравнении (6.3.3-21) можно разложить в ряд Тейлора по функциям числа Бринкмана:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 N_{Br} + \theta_2 N_{Br}^2 + \dots; \quad (6.3.3-28)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 N_{Br} + \varphi_2 N_{Br}^2 + \dots; \quad (6.3.3-29)$$

$$C_1 = C_{10} + C_{11} N_{Br} + C_{12} N_{Br}^2 + \dots \quad (6.3.3-30)$$

Величины  $\theta_0$ ,  $\varphi_0$  и  $C_{10}$  соответствуют значениям  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $C_1$  при нулевых возмущениях ( $N_{Br}=0$ );  $\theta_1$ ,  $\varphi_1$  и  $C_{11}$  являются соответственно первыми возмущениями (относительно  $N_{Br}=0$ ).

Подставив (6.3.3-27) — (6.3.3-29) в (6.3.3-21), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{d\xi} + N_{Br} \frac{d\varphi_1}{d\xi} + \dots &= [1 + \beta_1(\theta_0 + \theta_1 N_{Br} + \dots) + \\ &+ \beta_2(\theta_0 + \theta_1 N_{Br} + \dots)^2 + \dots] (C_{10} + C_{11} N_{Br} + \dots) \end{aligned} \quad (6.3.3-31)$$

или

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\varphi_0}{d\xi} - C_{10}(1 + \beta_1 \theta_0 + \beta_2 \theta_0^2 + \dots) \right] + \\ + N_{Br} \left[ \frac{d\varphi_1}{d\xi} - C_{10}(\beta_1 \theta_1 + 2\beta_2 \theta_0 \theta_1 + \dots) - C_{11}(1 + \beta_1 \theta_0 + \beta_2 \theta_0^2 + \dots) \right] + \dots = 0. \end{aligned} \quad (6.3.3-32)$$

Так как  $N^0_{Br}$ ,  $N^1_{Br}$ ,  $N^2_{Br}$  ... линейно независимы, их коэффициенты в уравнении (6.3.3-32) должны быть тождественно равны нулю. Для первых двух коэффициентов в уравнении (6.3.3-32) имеем:

$$\frac{d\varphi_0}{d\xi} - C_{10}(1 + \beta_1 \theta_0 + \beta_2 \theta_0^2 + \dots) = 0 \quad (6.3.3-33)$$

и

$$\frac{d\varphi_1}{d\xi} - C_{10}(\beta_1 \theta_1 + 2\beta_2 \theta_0 \theta_1 + \dots) - C_{11}(1 + \beta_1 \theta_0 + \beta_2 \theta_0^2 + \dots) = 0. \quad (6.3.3-34)$$

Аналогично уравнению (6.3.3-22) найдем, что коэффициент при  $N^0_{Br}$  равен:

$$(1 + \beta_1 \theta_0 + \beta_2 \theta_0^2 + \dots) \frac{d}{d\xi} \left[ (1 + \alpha_1 \theta_0 + \alpha_2 \theta_0^2 + \dots) \frac{d\theta_0}{d\xi} \right] = 0. \quad (6.3.3-35)$$

Коэффициенты при  $N^0_{Br}$  в уравнениях (6.3.3-24) и (6.3.3-25) показывают, что

$$\theta_0 = 0 \text{ при } \xi = 0 \quad (6.3.3-36)$$

и

$$\theta_0 = 0 \text{ при } \xi = 1. \quad (6.3.3-37)$$

Очевидно, что уравнения (6.3.3-35) и (6.3.3-37) удовлетворяют условию

$$\theta_0 = 0 \quad (6.3.3-38)$$

Следовательно, (6.3.3-33) можно упростить:

$$\frac{d\varphi_0}{d\xi} - C_{10} = 0. \quad (6.3.3-39)$$

С учетом коэффициентов при  $N_{Br}^0$  в выражениях (6.3.3-24) и (6.3.3-25):

$$\varphi_0 = 0 \text{ при } \xi = 0; \quad (6.3.3-40)$$

$$\varphi_0 = 1 \text{ при } \xi = 1. \quad (6.3.3-41)$$

Проинтегрировав (6.3.3-39) при граничных условиях (6.3.3-40) и (6.3.3-41), найдем:

$$\varphi_0 = \xi \quad (6.3.3-42)$$

и

$$C_{10} = 1. \quad (6.3.3-43)$$

Коэффициент при  $N_{Br}$  в уравнении (6.3.3-22) имеет вид:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} + 1 = 0. \quad (6.3.3-44)$$

Границные условия для этого уравнения находятся из коэффициентов при  $N_{Br}$  в уравнениях (6.3.3-24) и (6.3.3-25):

$$\theta_1 = 0 \text{ при } \xi = 0; \quad (6.3.3-45)$$

$$\theta_1 = 0 \text{ при } \xi = 1. \quad (6.3.3-46)$$

Решение уравнения (6.3.3-44), удовлетворяющее условиям (6.3.3-45) и (6.3.3-46), будет:

$$\theta_1 = 0,5(\xi - \xi^2). \quad (6.3.3-47)$$

Из уравнений (6.3.3-34), (6.3.3-38), (6.3.3-43) и (6.3.3-47) получим для коэффициента при  $N_{Br}$  в (6.3.3-21):

$$d\varphi_1/d\xi - 0,5\beta_1(\xi - \xi^2) - C_{11} = 0. \quad (6.3.3-48)$$

Границные условия для этого уравнения определяются из коэффициентов при  $N_{Br}$  в уравнениях (6.3.3-24) и (6.3.3-25):

$$\varphi_1 = 0 \text{ при } \xi = 0; \quad (6.3.3-49)$$

$$\varphi_1 = 0 \text{ при } \xi = 1. \quad (6.3.3-50)$$

Уравнения (6.3.3-48) — (6.3.3-50) удовлетворяются соотношениями:

$$\varphi_1 = -\beta_1 \frac{1}{12}(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3) \quad (6.3.3-51)$$

и

$$C_{11} = -\beta_1/12. \quad (6.3.3-52)$$

Для коэффициента при  $N_{Br}^2$  в уравнении (6.3.3-22), имеем:

$$\frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} + \alpha_1 \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\xi + \frac{3}{2}\xi^2 \right) + \frac{\beta_1}{2} \left( -\frac{1}{3} + \xi - \xi^2 \right) = 0. \quad (6.3.3-53)$$

Границными условиями, которым должны удовлетворять решения этого уравнения, будут:

$$\theta_2=0 \text{ при } \xi=0; \quad (6.3.3-54)$$

$$\theta_2=0 \text{ при } \xi=1. \quad (6.3.3-55)$$

Уравнения (6.3.3-53)–(6.3.3-55) удовлетворяются соотношением

$$\theta_2 = -\alpha \frac{\xi^1}{8} (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) - \beta_1 \frac{1}{24} (\xi - 2\xi^2 + 2\xi^3 - \xi^4). \quad (6.3.3-56)$$

Следовательно, уравнения (6.3.3-28), (6.3.3-29), (6.3.3-38), (6.3.3-42), (6.3.3-47), (6.3.3-51) и (6.3.3-56) описывают безразмерные профили температуры и скорости в виде

$$\frac{v_1}{V} = \varphi = \xi - N_{Br} \beta_1 \frac{1}{12} (\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3) + \dots \quad (6.3.3-57)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{T - T_0}{T_0} = \theta = N_{Br} 1/2 (\xi - \xi^2) - N_{Br}^2 \alpha_1 \frac{1}{8} (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) - \\ - N_{Br}^2 \beta_1 \frac{1}{24} (\xi - 2\xi^2 + 2\xi^3 - \xi^4) + \dots \end{aligned} \quad (6.3.3-58)$$

Данный анализ является примером того, как можно получить решение одного или более нелинейных дифференциальных уравнений методом возмущений. В качестве параметра возмущения мы взяли число Бринкмана  $N_{Br}$ . Следовательно, уравнения (6.3.3-57) и (6.3.3-58) описывают распределения скорости и температуры для достаточно малых значений параметра возмущения. Однако такие решения, полученные методом возмущений, имеют два недостатка:

1. Во-первых, нет твердой гарантии сходимости полученного ряда.
2. Даже при сходимости рядов мы не имеем надежной оценки погрешности в результате усечения рядов. В лучшем случае можно только сказать, что эта погрешность меньше величины последнего оставшегося члена ряда.

Полученное решение найдено методом, изложенным в [3], для несжимаемой ньютоновской жидкости. Другие способы решения этой задачи приводятся в [6–9].

Аналогичный подход применяется в работе [6], где рассматривается вязкий нагрев в вискозиметре типа конус — пластина для несжимаемой ньютоновской жидкости. Такое сравнение с экспериментальными данными особенно полезно, так как оно показывает важность учета вязкого нагрева для такой геометрии.

## 6.4. ОТСУТСТВИЕ ДИССИПАЦИИ

**6.4.1. Случай без учета вязкой диссипации.** Как уже указывалось ранее, решение многих задач в общем виде довольно затруднительно. Численный анализ также связан с существенными трудностями программирования, не говоря уже о значительных затратах машинного времени. Высокая стоимость машинного времени в некоторых случаях легко оправдывается, но прежде чем приступить к численному решению, обычно целесообразно проанализировать соответствующий предельный случай. Вполне может быть, что этот анализ и будет решением задачи. В худшем случае его можно использовать для проверки численного решения.

Предельные случаи легче всего описывать в безразмерном виде с помощью уравнения неразрывности, первого закона Коши и дифференциального уравнения баланса энергии. Рассмотрим конкретный случай сжимаемой ньютоновской жидкости с переменными вязкостью, теплопроводностью и теплоемкостью. Введем следующие безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} \rho^* &\equiv \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \mathbf{v}^* \equiv \frac{\mathbf{v}}{v_0}; \quad P^* \equiv \frac{P}{P_0}; \quad T^* \equiv \frac{T}{T_0}; \\ t^* &\equiv \frac{t}{t_0}; \quad \mathbf{D}^* \equiv \frac{L_0}{v_0} \mathbf{D}; \quad \mathbf{S}^* \equiv \frac{L_0}{\mu_0 v_0} \mathbf{S}; \quad z^*_i \equiv \frac{z_i}{L_0}; \quad \mu^* \equiv \frac{\mu}{\mu_0}; \\ \lambda^* &\equiv \frac{\lambda}{\mu_0}; \quad k^* \equiv \frac{k}{k_0}; \quad \widehat{c}_V^* = \frac{\widehat{c}_V}{\widehat{c}_0}; \quad f^* \equiv \frac{f}{f_0}, \end{aligned} \quad (6.4.1-1)$$

где величины с индексом 0 являются отсчетными (характерными) для получения безразмерных переменных. Например,  $v_0$  — характерная скорость, а  $f_0$  — ускорение свободного падения. Характерные величины выбираются произвольно для каждой конкретной задачи с целью максимального упрощения уравнения и граничных условий.

В этих безразмерных переменных уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \operatorname{div}(\rho^* \mathbf{v}^*) = 0. \quad (6.4.1-2)$$

Для сжимаемой ньютоновской жидкости уравнением первого закона Коши будет:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_{St}} \rho^* \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \rho^* (\nabla \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{v}^* &= - \frac{1}{N_{Ru}} \nabla P^* + \\ + \frac{1}{N_{Re}} \operatorname{div}(2\mu^* \mathbf{D}^* + \lambda^* [\operatorname{div} \mathbf{v}^*] \mathbf{I}) &+ \frac{1}{N_{Fr}} \rho^* f^*. \end{aligned} \quad (6.4.1-3)$$

Аналогично для дифференциального уравнения баланса энергии в виде (Д) табл. 5.6.1-1 без учета внешнего и взаимного переносов энергии имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_{St}} \rho^* \widehat{c}_V^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* \widehat{c}_V^* (\nabla T^*) \cdot \mathbf{v}^* &= \frac{1}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{div}(k^* \nabla T^*) - \\ - \frac{N_{Br}}{N_{Ru} N_{Pr}} T^* \left( \frac{\partial P^*}{\partial T^*} \right)_{\widehat{V}^*} \operatorname{div} \mathbf{v}^* &+ \frac{N_{Br}}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{tr}(\mathbf{S}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^*). \end{aligned} \quad (6.4.1-4)$$

В этих уравнениях числа Струхalia, Руарка, Рейнольдса, Фруда, Прандтля и Бринкмана соответственно равны:

$$\begin{aligned} N_{St} &\equiv \frac{t_0 v_0}{L_0}; \quad N_{Ru} \equiv \frac{\rho_0 v_0^2}{P_0}; \quad N_{Re} \equiv \frac{\rho_0 v_0 L_0}{\mu_0}; \\ N_{Fr} &\equiv \frac{v_0^2}{f_0 L_0}; \quad N_{Pr} \equiv \frac{\widehat{c}_0 \mu_0}{k_0}; \quad N_{Br} \equiv \frac{\mu_0 v_0^2}{k_0 T_0}. \end{aligned} \quad (6.4.1-5)$$

Произведение чисел Прандтля и Рейнольдса часто называется числом Пекле. Отношение чисел Бринкмана к числу Прандтля известно как число Эккерта.

Предположив, что для достаточно малых значений  $N_{\text{Br}}/N_{\text{Pr}}N_{\text{Re}}$  в уравнении (6.4.1-4) эффектами вязкой диссипации по сравнению с конвекцией можно пренебречь, получим его в виде

$$\frac{1}{N_{\text{St}}} \rho^* c_v^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* c_v^* (\nabla T^*) \cdot \mathbf{v}^* = \frac{1}{N_{\text{Pr}} N_{\text{Re}}} \operatorname{div} (k^* \nabla T^*) - \frac{N_{\text{Br}}}{N_{\text{Ru}} N_{\text{Pr}}} T^* \left( \frac{\partial P^*}{\partial T^*} \right) \operatorname{div} \mathbf{v}^*. \quad (6.4.1-6)$$

Важно помнить, что это предположение интуитивное, и следовательно, нельзя гарантировать, что оно всегда будет выполняться. Имея некоторый опыт решения задач о ползучих течениях (см. § 3.3.1—3.3.3), а также течениях в пограничном слое (см. § 3.5.1—3.5.7), мы сможем преодолеть возникающие трудности.

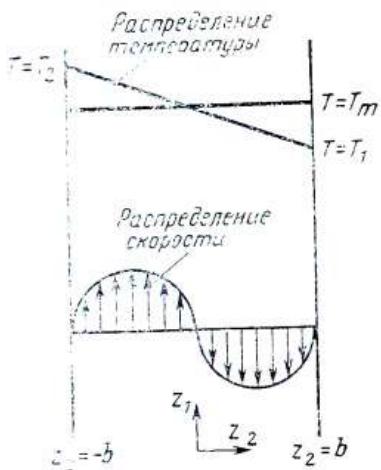


Рис. 6.4.2-1. Естественная конвекция между нагретыми вертикальными пластинами.

сматриваемый материал является сжимаемой ньютоновской жидкостью. Для упрощения коэффициенты вязкости и теплопроводности будем считать постоянными. Можно считать, что плотность жидкости зависит только от температуры. Ускорение свободного падения не изменяется.

Заданы два граничных условия для скорости:

$$\mathbf{v}=0 \text{ при } z_2=\pm b \quad (6.4.2-1)$$

и два граничных условия для температуры:

$$T=T_1 \text{ при } z_2=b; \quad (6.4.2-2)$$

$$T=T_2 \text{ при } z_2=-b. \quad (6.4.2-3)$$

Если этот очень длинный канал, образованный двумя пластинами, закрыт с обоих концов, то в канале не будет ни опускного, ни подъемного результирующего течения. Следовательно, должно удовлетворяться еще одно условие:

$$\int_{-b}^b v_1 dz_2 = 0 \text{ для всех } z_1. \quad (6.4.2-4)$$

Граничные условия для распределения скорости и температуры, схематически представленные на рис. 6.4.2-1, предполагают существование

вание только одной компоненты скорости  $v_1$ , отличной от нуля, которая, так же как и  $T$ , зависит только от  $z_2$ :

$$v_2 = v_3 = 0; \quad v_1 = v_1(z_2); \quad T = T(z_2). \quad (6.4.2-5)$$

Такое распределение скорости соответствует условию изохоричности движения:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (6.4.2-6)$$

Следовательно, из уравнения неразрывности:

$$\frac{d(m)\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \cdot \mathbf{v} = \frac{d\rho}{dT} \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + (\nabla T) \cdot \mathbf{v} \right] = 0, \quad (6.4.2-7)$$

которому тождественно удовлетворяют принятые распределения скорости и температуры.

Три компоненты первого закона Коши для ньютоновской жидкости сводятся к

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z_1} + \mu \frac{d^2 v_1}{d^2 z_2} - \rho g \quad (6.4.2-8)$$

и

$$\frac{\partial P}{\partial z_2} = \frac{\partial P}{\partial z_3} = 0. \quad (6.4.2-9)$$

Дифференциальное уравнение баланса энергии в виде (Д) табл. 5.6.1-1 имеет вид:

$$0 = k \frac{d^2 T}{d^2 z_2} + \mu \left( \frac{dv_1}{dz_2} \right)^2. \quad (6.4.2-10)$$

Внешний и взаимный переносы энергии не учитываются.

Наша задача формулируется более четко, если аналогично § 6.4.1 ввести безразмерные переменные:

$$\frac{\partial P^*}{\partial z^*_2} = \frac{\partial P^*}{\partial z^*_3} = 0; \quad (6.4.2-11)$$

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*_1} + \frac{1}{N_{Re}} \frac{d^2 v^*_1}{d^2 z^*_2} - \frac{1}{N_{Fr}} \rho^*; \quad (6.4.2-12)$$

$$0 = \frac{d^2 T^*}{d^2 z^*_2} + N_{Br} \left( \frac{dv^*_1}{dz^*_2} \right)^2, \quad (6.4.2-13)$$

которые определяются:

$$T^* \equiv \frac{T}{T_0}; \quad v^* z \equiv \frac{v_z}{v_0}; \quad P^* \equiv \frac{P}{\rho_0 v_0^2}; \quad z^* i \equiv \frac{z_i}{b}; \quad \rho^* \equiv \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (6.4.2-14)$$

Введем также безразмерные комплексы:

$$N_{Re} \equiv \frac{\rho_0 v_0 b}{\mu}; \quad N_{Fr} \equiv \frac{v_0^2}{bg}, \quad N_{Br} \equiv \frac{\mu v_0^2}{k T_0}. \quad (6.4.2-15)$$

Мы еще пока не определили  $T_0$ ,  $v_0$  и  $\rho_0$ . Особые трудности представляют определение величины  $v_0$ , так как скорость не входит в граничные условия. Можно задать  $v_0$  любым способом, поэтому выберем ее так, чтобы  $N_{Re}=1$ :

$$v_0 = \frac{\mu}{\rho_0 b}. \quad (6.4.2-16)$$

Мы пока не будем рассматривать  $T_0$  и  $\rho_0$ .

С учетом (6.4.2-16) имеем:

$$N_{\text{Br}} = \frac{\mu^3}{kT_0 \rho^2 b^2}. \quad (6.4.2-17)$$

Для достаточно малых значений  $N_{\text{Br}}$  вязкой диссипацией в уравнении баланса энергии можно пренебречь. Теперь мы вернемся к величине  $N_{\text{Br}}$  только в конце анализа. Следовательно, уравнение (6.4.2-13) будет иметь вид:

$$\frac{d^2 T^*}{d^2 z^*_2} = 0. \quad (6.4.2-18)$$

Проинтегрировав это уравнение, будем иметь при граничных условиях (6.4.2-2) и (6.4.2-3):

$$T^* = \frac{T_1 - T_2}{2T_0} z^*_2 + \frac{T_1 + T_2}{2T_0}, \quad (6.4.2-19)$$

где

$$T_0 \equiv \Delta T \equiv T_2 - T_1. \quad (6.4.2-20)$$

Запишем соотношение (6.4.2-19) в более простом виде:

$$\theta \equiv \frac{T - T_m}{\Delta T} = T^* - \frac{T_1 + T_2}{2T_0} = -\frac{z^*_2}{2}, \quad (6.4.2-21)$$

где

$$T_m \equiv \frac{T_1 + T_2}{2}. \quad (6.4.2-22)$$

Теперь будем решать уравнение (6.4.2-12) для распределения скорости. С учетом (6.4.2-11) имеем:

$$\frac{dP^*}{dz^*_1} = \frac{d^2 v^*_1}{d^2 z^*_2} - \frac{1}{N_{\text{Fr}}} \rho^* = \text{const}. \quad (6.4.2-23)$$

Определим теперь зависимость  $\rho^*$  от температуры. Разложим  $\rho$  в ряд Тейлора вблизи  $T = T_m$ :

$$\rho = \rho|_{T=T_m} + \left( \frac{d\rho}{dT} \right)_{T=T_m} (T - T_m) + \dots \quad (6.4.2-24)$$

Известно, что

$$\frac{d\rho}{dT} = \frac{d}{dT} \left( \frac{1}{V} \right) = -\frac{1}{V^2} \frac{dV}{dT} = -\rho \beta, \quad (6.4.2-25)$$

где величина

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \quad (6.4.2-26)$$

называется коэффициентом объемного расширения. Поэтому введем

$$\rho_0 \equiv \rho|_{T=T_m}; \quad \beta_0 \equiv \beta|_{T=T_m} \quad (6.4.2-27)$$

и преобразуем (6.4.2-24) к виду:

$$\rho^* = 1 - (\beta_0 \Delta T) \theta + \dots \quad (6.4.2-28)$$

При достаточно малых значениях  $\beta_0 \Delta T$  уравнение (6.4.2-23) будет иметь вид:

$$\frac{d^2 v^*_1}{d^2 z^*_2} - \frac{d P^*}{d z^*_1} - \frac{1}{N_{Fr}} + \frac{\beta_0 \Delta T}{N_{Fr}} \theta = 0, \quad (6.4.2-29)$$

а уравнение (6.4.2-21) принимает вид:

$$\frac{d^2 v^*_1}{d^2 z^*_2} - \frac{d P^*}{d z^*_1} - \frac{1}{N_{Fr}} - \frac{\beta_0 \Delta T}{2 N_{Fr}} z^*_2 = 0. \quad (6.4.2-30)$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать с учетом двух граничных условий (6.4.2-1):

$$v^*_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{d P^*}{d z^*_1} + \frac{1}{N_{Fr}} \right) (z^*_2 - 1) + \frac{\beta_0 \Delta T}{12 N_{Fr}} (z^*_2 - z^*_2). \quad (6.4.2-31)$$

Неизвестную постоянную  $d P^* / d z^*_1$  можно определить из уравнения (6.4.2-4):

$$\frac{d P^*}{d z^*_2} = - \frac{1}{N_{Fr}}. \quad (6.4.2-32)$$

Окончательно получим:

$$v^*_1 = \frac{\beta_0 \Delta T}{12 N_{Fr}} (z^*_2 - z^*_2) \quad (6.4.2-33)$$

или [3]

$$v_1 = \frac{\rho_0 \beta_0 g b^2 \Delta T}{12 \mu} (z^*_2 - z^*_2). \quad (6.4.2-34)$$

Это решение справедливо только для малых значений  $\beta_0 \Delta T$ , так как в уравнении (6.4.2-28) мы ограничились только двумя первыми членами. Для большинства жидкостей [11]  $\beta_0 \approx 10^{-3} \text{ С}^{-1}$ . Это означает, что точность результата не изменится при  $\Delta T$  до  $10^2 \text{ С}$ .

С учетом соотношений (6.4.2-13) и (6.4.2-17) станет понятно, что уравнение (6.4.2-34) также применимо только для малых значений:

$$N_{Br} \equiv \frac{\mu^3}{k \Delta T \rho^2 b^2}. \quad (6.4.2-35)$$

Удовлетворить это условие не представляет особых трудностей, так как для воды, например,  $\mu^3/k \approx 10^{-10}$  (в системе СГС).

## 6.5. ОТСУТСТВИЕ КОНВЕКЦИИ

**6.5.1. Случай, когда конвекцией можно пренебречь (ползучее течение).** Ограничимся несжимаемыми жидкостями, исключив таким образом возможность естественной конвекции (см. § 6.4.2).

В § 3.3.1 мы ввели понятие ползучего течения, которое имеет место в пределе  $N_{Re} \rightarrow 0$ . В уравнении первого закона Коши для ползучего течения конвективными членами инерции по сравнению с вязкими пренебрегают.

Рассмотрим пример конкретного материала. Таким образом число Прандтля  $N_{Pr}$  можно считать постоянным. С учетом безразмерного уравнения баланса энергии из § 6.4.1

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_{St}} \rho^* \hat{c}^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* \hat{c}^* (\nabla T^*) \cdot \mathbf{v}^* &= \frac{1}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{div} (k^* \nabla T^*) + \\ &+ \frac{N_{Br}}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{tr} (S^* \cdot \nabla \mathbf{v}^*) \end{aligned} \quad (6.5.1-1)$$

получим, что в пределе, когда  $N_{Re} \rightarrow 0$ , при фиксированном числе Прандтля можно пренебречь конвекцией (второе слагаемое в правой части) по сравнению с теплопроводностью (первое слагаемое в правой части). Для этого предельного случая уравнение баланса энергии принимает вид:

$$\frac{1}{N_{St}} \rho^* \hat{c}^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{1}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{div}(k^* \nabla T^*) + \frac{N_{Br}}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{tr}(\mathbf{S}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^*). \quad (6.5.1-2)$$

Пренебрегая конвекцией по сравнению с теплопроводностью, обычно пренебрегают вязкой диссипацией. Для предельного случая  $N_{Re} \rightarrow 0$ ,  $N_{Br}/N_{Re} \rightarrow 0$  при постоянном значении числа Прандтля можно сказать, что уравнение баланса энергии сводится к выражению

$$\frac{1}{N_{St}} \rho^* \hat{c}^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{1}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{div}(k^* \nabla T^*). \quad (6.5.1-3)$$

Интересно отметить, что для этого предельного случая уравнение баланса энергии имеет такой же вид, как для описания теплопроводности твердых тел. Следовательно, решения, полученные для теплопроводности твердых тел, можно в пределе использовать для жидкостей.

Очень важно учесть, что наш анализ обладает некоторой долей искусственности. С самого начала мы утверждали, что будем рассматривать только несжимаемые жидкости. Это эквивалентно исключению зависимости плотности от температуры. Однако во всех реальных жидкостях плотность в некоторой степени зависит от температуры. Пренебрежение в § 6.4.2 влиянием температуры на плотность соответствует предельному случаю  $\beta_0 \Delta T \rightarrow 0$ .

Продолжим анализ задачи вида рассмотренной в § 6.4.2. Вынужденная конвекция отсутствует. Движение в жидкости возникает в результате температурной зависимости плотности жидкости. Поскольку вынужденная конвекция отсутствует, характерная скорость в задаче выбирается при  $N_{Re}=1$ . При таких условиях нельзя больше пренебречь конвекцией по сравнению с теплопроводностью.

Остается только одна возможность. Пренебрегая вынужденной конвекцией, считая плотность функцией температуры и выбирая скорость при  $N_{Re}=1$ , мы можем рассмотреть предельный случай, когда  $N_{Pr} \rightarrow 0$  и  $N_{Br}/N_{Pr} \rightarrow 0$ . Это соответствует экспериментальному исследованию ряда жидкостей при все меньших и меньших числах Прандтля. При таких условиях безразмерное уравнение баланса энергии § 6.4.1 имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_{St}} \rho^* \hat{c}^* v \frac{\partial T^*}{\partial t^*} &= \frac{1}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{div}(k^* \nabla T^*) - \\ &- \frac{N_{Br}}{N_{Ru} N_{Pr}} T^* \left( \frac{\partial P^*}{\partial T^*} \right)_{V^*} \operatorname{div} \mathbf{v}^*. \end{aligned} \quad (6.5.1-4)$$

Этот анализ мог бы представлять какое-то практическое значение, если бы числа Прандтля для жидких металлов были достаточно малы ( $N_{Pr} \approx 0,01$ ). К сожалению, даже при таких условиях уравнение баланса энергии будет гораздо сложнее уравнения (6.5.1-3), если только течение не является изохоричным .

## 6.6. ОТСУТСТВИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

6.6.1. Случай, когда теплопроводность не учитывается. В § 6.5.1 мы рассматривали предельный случай  $N_{Re} \rightarrow 0$  при определенном значении  $N_{Pr}$  (т. е. для конкретного материала). Переидем теперь к другому предельному случаю  $N_{Re} \rightarrow \infty$  при определенном значении  $N_{Pr}$ .

Запишем в безразмерном виде уравнение баланса энергии (см.

§ 6.4.1):

$$\frac{1}{N_{St}} \rho^* \hat{c}_V^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* \hat{c}_V^* (\nabla T^*) \cdot \mathbf{v}^* = \frac{1}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{div} (k^* \nabla T) - \\ - \frac{N_{Br}}{N_{Ru} N_{Pr}} T^* \left( \frac{\partial P^*}{\partial T^*} \right) \hat{v}^* \operatorname{div} \mathbf{v}^* + \frac{N_{Br}}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{tr} (\mathbf{S}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^*). \quad (6.6.1-1)$$

В этом случае теплопроводностью в правой части (6.6.1-1) можно пренебречь по сравнению с конвекцией (второй член в левой части). В результате можно упростить уравнение баланса энергии:

$$\frac{1}{N_{St}} \rho^* \hat{c}_V^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* \hat{c}_V^* (\nabla T^*) \cdot \mathbf{v}^* = \\ = - \frac{N_{Br}}{N_{Ru} N_{Pr}} T^* \left( \frac{\partial P^*}{\partial T^*} \right) \hat{v}^* \operatorname{div} \mathbf{v}^* + \frac{N_{Br}}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{tr} (\mathbf{S}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^*). \quad (6.6.1-2)$$

Анализ с пренебрежением теплопроводностью по сравнению с конвекцией аналогичен анализу потенциального течения в § 3.4.1, где мы также пренебрегали вязкостью по сравнению с конвективными инерционными членами в уравнении первого закона Коши. В § 3.4.3 было установлено, что этот предельный случай не охватывает многие существенные аспекты реального поведения жидкости, по крайней мере вблизи ограничивающих поверхностей. И это совсем не удивительно, так как мы опустили все вторые производные, соответствующие вязким эффектам, что привело к снижению порядка дифференциальных уравнений для распределения скорости.

Этот случай весьма напоминает вывод уравнения (6.6.1-2), где мы полностью пренебрегали теплопроводностью по сравнению с конвекцией. В дифференциальном уравнении баланса энергии опущены все вторые производные температуры, что привело к снижению порядка дифференциального уравнения. С учетом материала, изложенного в § 3.4.1—3.4.5, можно предположить, что уравнение (6.6.1-2) не дает описания реального распределения температуры в жидкости вблизи ограничивающих поверхностей.

По аналогии с потенциальным течением можно ожидать, что это уравнение применимо для описания распределения температуры в жидкости вне непосредственной окрестности ограничивающих поверхностей. Уравнение (6.6.1-2) еще очень мало используется в литературе, и при изучении звуковых (см. следующий параграф) и ударных волн (поверхности разрыва относительно нормальных компонент скорости) обычно пренебрегают как вязкими эффектами, так и теплопроводностью. Эти вопросы интересно освещаются в работе [12].

6.6.2. Скорость распространения звуковых волн [12]. Определим скорость звука как скорость распространения волн сжатия в результате возмущений малой амплитуды в сжимаемой жидкости.

Если  $a$  — безразмерная амплитуда возмущения, то нам необходимо определить скорость распространения волн сжатия в пределе  $a \rightarrow 0$ .

Предположим, что при  $a=0$  температура, давление и плотность во всей жидкости постоянны:

$$\text{при } a=0 \quad T=T_0; \quad P=P_0; \quad \rho=\rho_0; \quad \mathbf{v}=0. \quad (6.6.2-1)$$

В своем анализе мы будем исходить из уравнения неразрывности, первого закона Коши и дифференциального уравнения баланса энергии. Представим их в безразмерных переменных:

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \operatorname{div}(\rho^* \mathbf{v}^*) = 0; \quad (6.6.2-2)$$

$$\frac{1}{N_{St}} \rho^* \cdot \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \rho^* \nabla \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}^* = - \frac{1}{N_{Ru}} \nabla P^* + \frac{1}{N_{Re}} \mathbf{S}^* + \frac{1}{N_{Fr}} \rho^* \mathbf{f}^*; \quad (6.6.2-3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_{St}} \rho^* \widehat{c}_P^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \rho^* \widehat{c}_P^* \nabla T^* \cdot \mathbf{v}^* = - \frac{1}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{div} \nabla T^* + \\ & + \frac{N_{Br}}{N_{St} N_{Ru} N_{Pr}} \left( \frac{\partial \ln \widehat{V}^*}{\partial \ln T^*} \right)_{P^*} \frac{\partial P^*}{\partial t^*} + \frac{N_{Br}}{N_{Ru} N_{Pr}} \left( \frac{\partial \ln \widehat{V}^*}{\partial \ln T^*} \right)_{P^*} \nabla P^* \cdot \mathbf{v}^* + \\ & + \frac{N_{Br}}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{tr}(\mathbf{S}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^*). \end{aligned} \quad (6.6.2-4)$$

Если выбранная характерная длина представляет собой всю систему в целом, а характерная скорость является скоростью звука, то целесообразно ограничиться пределом  $N_{Re} \rightarrow \infty$ ,  $N_{Fr} \rightarrow \infty$  и  $N_{Br}/N_{Re} \rightarrow 0$ . В этом пределе безразмерная система уравнений (6.6.2-2)–(6.6.2-4) будет иметь вид:

$$\frac{d_{(m)} \rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (6.6.2-5)$$

$$\rho \frac{d_{(m)} \mathbf{v}}{dt} = - \nabla P; \quad (6.6.2-6)$$

$$\rho \widehat{c}_P \frac{d_{(m)} T}{dt} = \left( \frac{\partial \ln \widehat{V}}{\partial \ln T} \right)_P \frac{d_{(m)} P}{dt}. \quad (6.6.2-7)$$

Мы будем искать решение этих уравнений при  $a \rightarrow 0$ . Поэтому по аналогии с § 6.3.3 можно использовать теорию возмущений.

Начнем с разложения  $T$ ,  $P$ ,  $\rho$  и  $\mathbf{v}$  в ряд Тейлора:

$$T = T_0 + aT_1 + a^2 T_2 + \dots; \quad (6.6.2-8)$$

$$P = P_0 + aP_1 + a^2 P_2 + \dots; \quad (6.6.2-9)$$

$$\rho = \rho_0 + a\rho_1 + a^2 \rho_2 + \dots; \quad (6.6.2-10)$$

$$\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + a^2 \mathbf{v}_2 + \dots \quad (6.6.2-11)$$

Подставляя эти ряды в уравнение (6.6.2-7) и учитывая только коэффициент при  $a$ , находим:

$$\rho_0 \widehat{c}_{P_0} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \left( \frac{\partial \ln \widehat{V}}{\partial \ln T} \right)_{P_0} \frac{\partial P_1}{\partial t}, \quad (6.6.2-12)$$

где

$$\left( \frac{\partial \ln \widehat{V}}{\partial \ln T} \right)_{P_0} = \left( \frac{\partial \ln \widehat{V}}{\partial \ln T} \right)_P \Bigg|_{\substack{T=T_0 \\ P=P_0}} \quad (6.6.2-13)$$

и

$$\hat{c}_{P_0} \equiv \hat{c}_P \Big|_{\substack{T=T_0 \\ P=P_0}} \quad (6.6.2-14)$$

Известно также, что

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (6.6.2-15)$$

откуда в первом приближении теории возмущений следует:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} \left[ 1 - \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho_0} \frac{\partial T_1 / \partial t}{\partial P_1 / \partial t} \right] = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t}. \quad (6.6.2-16)$$

Объединим уравнения (6.6.2-12) и (6.6.2-16):

$$\frac{\partial P_1 / \partial t}{\partial \rho_1 / \partial t} = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T_0} \frac{\rho_0 \hat{c}_{P_0}}{\rho_0 \hat{c}_{P_0} - (\partial P / \partial T)_{\rho_0} (\partial \ln \hat{V} / \partial \ln T)_{P_0}}. \quad (6.6.2-17)$$

Поскольку

$$\rho \hat{c}_P - \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \left( \frac{\partial \ln \hat{V}}{\partial \ln T} \right)_P = \rho \hat{c}_V, \quad (6.6.2-18)$$

мы можем преобразовать уравнение (6.6.2-17) таким образом:

$$\frac{\partial P_1 / \partial t}{\partial \rho_1 / \partial t} = \gamma_0 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T_0} = (v_s)^2. \quad (6.6.2-19)$$

Здесь вводятся следующие величины:

$$\gamma_0 \equiv \frac{\hat{c}_{P_0}}{\hat{c}_{V_0}} \quad (6.6.2-20)$$

и

$$v_s \equiv \sqrt{\gamma_0 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T_0}}. \quad (6.6.2-21)$$

В первом приближении теории возмущений уравнение неразрывности (6.6.2-5) дает:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0. \quad (6.6.2-22)$$

С помощью (6.6.2-19) можно записать это уравнение в виде

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \rho_0 (v_s)^2 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0. \quad (6.6.2-23)$$

Дифференцируя его по времени, получаем:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \rho_0 (v_s)^2 \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = 0. \quad (6.6.2-24)$$

Второй член в этом уравнении соответствует первому приближению теории возмущений уравнения первого закона Коши (6.6.2-6):

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla P_1, \quad (6.6.2-25)$$

Уравнения (6.6.2-24) и (6.6.2-25) означают, что в первом приближении давление является решением волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - (v_s)^2 \operatorname{div} \nabla P_1 = 0. \quad (6.6.2-26)$$

Можно упростить нашу задачу, если ограничиться одномерной волной сжатия в прямоугольной системе координат:

$$P_1 = P_1(t, z_1). \quad (6.6.2-27)$$

Для этого случая уравнение (6.6.2-26) будет:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - (v_s)^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1^2} = 0. \quad (6.6.2-28)$$

Если произвести замену переменных:

$$\xi = z_1 - v_s t \quad (6.6.2-29)$$

и

$$\eta = z_1 + v_s t, \quad (6.6.2-30)$$

то уравнение (6.6.2-28) примет более простой вид:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (6.6.2-31)$$

которое можно непосредственно проинтегрировать. Тогда получим:

$$P_1 = F(\xi) + G(\eta), \quad (6.6.2-32)$$

где  $F(\xi)$  и  $G(\eta)$  — произвольные функции.

Физический смысл этого выражения станет яснее, если положить  $G(\eta) = 0$ . При этом

$$P = P_0 + a P_1 = P_0 + a F(\xi). \quad (6.6.2-33)$$

Дифференцируя это уравнение по времени при постоянном  $P$ , получаем:

$$0 = \left[ \left( \frac{\partial z_1}{\partial t} \right)_P - v_s \right] \frac{\partial F}{\partial \xi}. \quad (6.6.2-34)$$

Так как  $F(\xi)$  — произвольная функция, мы должны заключить, что скорость звука:

$$\left( \frac{\partial z_1}{\partial t} \right)_P = v_s = \sqrt{\gamma_0 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T_0}}. \quad (6.6.2-35)$$

Функция  $F(\xi)$  описывает волну сжатия, распространяющуюся в положительном направлении  $z_1$ ; скорость распространения поверхности постоянного давления равна  $v_s$ . Но это, конечно, является нашим определением скорости звука.

Часто мы работаем с идеальными газами, для которых

$$\left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T_0} = \frac{P_0}{\rho_0} \quad (6.6.2-36)$$

и для идеального газа:

$$v_s = \sqrt{\gamma_0 \frac{P_0}{\rho_0}}. \quad (6.6.2-37)$$

Приведенные здесь простые рассуждения основаны на определении скорости звука, которое не является однозначным применительно к совершенно произвольному движению жидкости. В работе [12] применяется более удовлетворительный подход, основанный на понятии звуковых волн как поверхностей разрыва относительно градиента давления.

## 6.7. ТЕОРИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

*6.7.1. Теория теплового пограничного слоя для двумерного обтекания плоской пластины.* В § 6.6.1 исследовалась возможность пренебрежения всеми кондуктивными членами в дифференциальном уравнении баланса энергии в пределе  $N_{Re} \rightarrow \infty$  при определенном числе  $N_{Pr}$  (т. е. для конкретного материала). При этом предполагалось, что исключение всех членов теплопроводности не согласуется с действительным описанием температурного распределения вблизи ограничивающих поверхностей.

Эта задача аналогична потенциальному течению, рассмотренному в § 3.4.1—3.4.5, для которого использовалась теория пограничного слоя, описанная в § 3.5.1. В этой теории утверждается, что некоторыми эффектами вязкости можно пренебречь при  $N_{Re} \rightarrow \infty$ , что привело бы к значительному упрощению первого закона Коши.

В этом параграфе мы попытаемся обобщить понятие пограничного слоя для баланса энергии. К сожалению, нам не хватает прямых экспериментальных данных (как, например, распределения температуры в непосредственной окрестности плоской пластины), которое бы можно было использовать в наших расчетах. Поэтому мы будем опираться только на теорию пограничного слоя и рассуждать по аналогии с § 3.5.1—3.5.7.

Сначала подробно остановимся на течениях того же типа, которые мы использовали при изучении теории пограничного слоя в § 3.5.1, т. е. рассмотрим двумерное обтекание плоской пластины. Обратимся к рис. 6.7.1-1. Температура жидкости вблизи пластины равна  $T_\infty$  при  $z_1=0$  для всех  $z_2$ . Пока не будем рассматривать внешнее течение и тепловое граничное условие на пластине.

Для удобства будем оперировать следующими безразмерными переменными:

$$v^*_i \equiv \frac{v_i}{\bar{v}_1}; \quad z^*_i \equiv \frac{z_i}{L}; \quad T^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \text{ для } i = 1, 2. \quad (6.7.1-1)$$

Здесь  $\bar{v}_1$  — характерная величина  $z_1$ -компоненты скорости двумерного течения невязкой жидкости на кромке пограничного слоя;  $L$  — длина пластины;  $T_0$  — характерная величина температурного распределения на пластине. Для этого двумерного течения целесообразно предположить, что

$$T^* = T^*(z^*_1, z^*_2). \quad (6.7.1-2)$$

Для упрощения ограничимся несжимаемой ньютоновской жидкостью с постоянными коэффициентами вязкости и теплопроводности.

Распределение скорости для этого течения полностью идентично рассмотренному в § 3.5.1, так как в обоих случаях и плотность и вязкость не зависят от температуры. Следовательно, будем искать только распределение температуры.

Если очень точно измерить температуру в жидкости, то можно обнаружить, что температура во всей жидкости равна  $T_\infty$ , за исключением слоя вблизи пластины очень небольшой толщины, где она очень быстро меняется таким образом, что удовлетворяет любому условию для температуры на пластине. Как показано на рис. 6.7.1-2, для изотермической пластины толщина этой области неравномерной температуры должна увеличиваться в направлении течения (с ростом  $z_1$ ). Можно также ожидать, что для любой заданной величины  $z_1$  толщина этой области уменьшается при увеличении скорости течения вдоль пластины.

Аналогично с § 6.6.1 при большой скорости течения мы можем пренебречь теплопроводностью по сравнению с конвекцией; тогда для этого случая температура должна быть везде равна  $T_\infty$ .

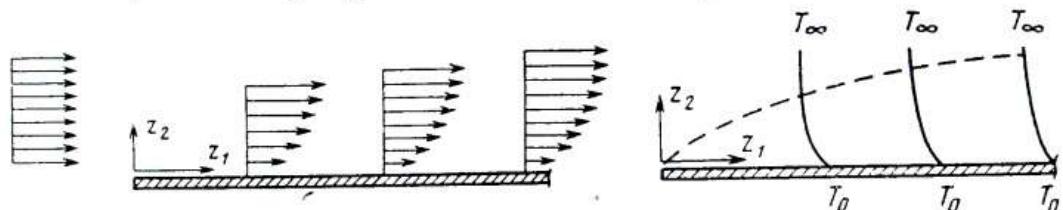


Рис. 6.7.1-1. Обтекание плоской пластины.

Рис. 6.7.1-2. Распределение температуры в жидкости при обтекании изотермической плоской пластины.

При таких условиях теплопроводность имеет такое же значение в уравнении баланса энергии при очень больших числах  $N_{Re}$  (по крайней мере в пограничном слое), как и конвекция. Рассуждения § 6.6.1 не применимы в этой области, так как там утверждается, что теплопроводность пренебрежимо мала по сравнению с конвекцией. Очевидно, следует несколько видоизменить анализ распределения температуры вне пограничного слоя. Чтобы использовать для пограничного слоя приближение, аналогичное § 6.6.1, нужно переопределить безразмерные переменные для учета теплопроводности. Если, как указывалось выше, толщина теплового пограничного слоя уменьшается с увеличением числа Рейнольдса, то толщину пограничного слоя можно увеличить, если ввести, как в § 3.5.1, величину

$$z^{**}_2 \equiv (N_{Re})^{1/2} z^*_2, \quad (6.7.1-3)$$

где

$$N_{Re} \equiv \frac{\tilde{v}_1 L \rho}{\mu}. \quad (6.7.1-4)$$

Как указывалось в § 3.5.1, в соответствии с уравнением неразрывности необходимо ввести дополнительную компоненту скорости:

$$v^{**}_2 \equiv (N_{Re})^{1/2} v^*_2. \quad (6.7.1-5)$$

С учетом уравнения (6.7.1-2) безразмерное дифференциальное уравнение баланса энергии из § 6.4.1 сводится для такого течения к виду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_{St}} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial T^*}{\partial z^*_1} v^*_1 + \frac{\partial f^*}{\partial z^*_2} v^*_2 &= \frac{1}{N_{Pr} N_{Re}} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial^2 z^*_1} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial^2 z^*_2} \right) + \\ &+ \frac{N_{Br}}{N_{Pr} N_{Re}} \left( \frac{\partial v^*_1}{\partial^2 z^*_2} + \frac{\partial^2 v^*_2}{\partial z^*_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.7.1-6)$$

Записав его с помощью  $z_2^{**}$  и  $v_2^{**}$ , получим:

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial T^*}{\partial z_1^{**}} v_1^* + \frac{\partial T^*}{\partial z_2^{**}} v_2^{**} = \frac{1}{N_{Pr}} \left( \frac{1}{N_{Re}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial^2 z_1^{**}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial^2 z_2^{**}} \right) + \\ + \frac{N_{Br}}{N_{Pr}} \left( \frac{\partial v_1^*}{\partial z_2^{**}} + \frac{1}{N_{Re}} \frac{\partial v_2^{**}}{\partial z_1^{**}} \right)^2. \quad (6.7.1-7)$$

Здесь

$$N_{Pr} \equiv \frac{c\mu}{k}; \quad N_{Br} \equiv \frac{\mu \tilde{v}_1^2}{k(T_0 - T_\infty)}. \quad (6.7.1-8)$$

Из уравнения (6.7.1-7) следует, что при  $N_{Re} \rightarrow \infty$  безразмерное дифференциальное уравнение баланса энергии упрощается:

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial T^*}{\partial z_1^{**}} v_1^* + \frac{\partial T^*}{\partial z_2^{**}} v_2^{**} = \frac{1}{N_{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial^2 z_2^{**}} + \frac{N_{Br}}{N_{Pr}} \left( \frac{\partial v_1^*}{\partial z_2^{**}} \right)^2. \quad (6.7.1-9)$$

Так как распределение скорости можно считать известным (см. § 3.5.1), выражение (6.7.1-9) является дифференциальным уравнением для нахождения безразмерного распределения температуры.

На кромке пограничного слоя, т. е. при  $z_2^{**} \equiv \sqrt{N_{Re}} z_2 \rightarrow \infty$ , мы должны иметь дело с невязким течением нетеплопроводной жидкости. Вопрос о том, где же решение для пограничного слоя переходит в решение для невязкой нетеплопроводной жидкости, обсуждался в литературе [4]. Можно, например, взять кромку пограничного слоя на поверхности, где происходит вытеснение внешнего течения пограничным слоем. Чаще этим незначительным эффектом пренебрегают и берут кромку пограничного слоя на стенке [4]. Мы будем использовать последний подход. Пусть  $\tilde{v}_1^*$  и  $T^*$  являются соответственно безразмерной  $z_1$ -компонентой скорости и безразмерной температурой на плоской пластине, что соответствует пренебрежению в первом законе Коши и в дифференциальном уравнении баланса энергии эффектами вязкости и теплопроводности. В качестве граничного условия для (6.7.1-9) потребуем:

$$T^* \rightarrow \tilde{T}^*, \text{ при } z_2^{**} \rightarrow \infty, \quad (6.7.1-10)$$

где  $\tilde{T}^*$  является решением уравнения

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial z_1^{**}} \tilde{v}_1^* = 0. \quad (6.7.1-11)$$

**6.7.2. Еще раз о тепловом пограничном слое при двумерном обтекании плоской пластины.** Здесь мы рассмотрим конкретный случай, к которому применима теория, изложенная в предыдущем параграфе: обтекание пластины установившимся потоком несжимаемой жидкости при нулевом наклоне пластины. Температура пластины поддерживается равной  $T_0$ ; температура жидкости имеет постоянную величину  $T_\infty$  на плоскости  $z_1=0$  (рис. 6.7.1-1). Для упрощения будем считать, что коэффициенты вязкости и теплопроводности не зависят от температуры.

Так же как в § 6.7.1, пусть  $z_1$ -компоненты скорости  $\tilde{v}_1$  является характерной скоростью, длина пластины  $L$  — характерной длиной, а разность температур  $T_0 - T_\infty$  — характерной температурой. Определим с по-

мощью этих характерных величин компоненты безразмерной скорости, координаты и температуры:

$$\text{для } i=1, 2 \quad v^*_i \equiv \frac{v_i}{\tilde{v}_1}; \quad z^*_i \equiv \frac{z_i}{L}; \quad T^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}. \quad (6.7.2-1)$$

Распределение скорости для этого течения не отличается от распределения, полученного в § 3.5.2, поскольку вязкость и плотность считаются независимыми от температуры. Теперь найдем:

$$v^*_{,1} \equiv \frac{v_{,1}}{\tilde{v}_1} = f'; \quad v^*_{,2} \equiv \sqrt{N_{Re}} \frac{v_{,2}}{\tilde{v}_1} = \frac{1}{2\sqrt{z^*_{,1}}} (\eta f' - f), \quad (6.7.2-2)$$

где  $f = f(\eta)$  и

$$\eta \equiv \frac{z^*_{,2}}{\sqrt{z^*_{,1}}} = \frac{\sqrt{N_{Re}} z^*_{,2}}{\sqrt{z^*_{,1}}}. \quad (6.7.2-3)$$

Штрих обозначает дифференцирование по  $\eta$ . Функция  $f$  является решением уравнения

$$ff'' + 2f''' = 0, \quad (6.7.2-4)$$

которое удовлетворяет граничным условиям:

$$f = f' = 0 \text{ при } \eta = 0 \quad (6.7.2-5)$$

и

$$f \rightarrow 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (6.7.2-6)$$

Число Рейнольдса определяется как

$$N_{Re} \equiv \frac{\tilde{v}_1 L \rho}{\mu}. \quad (6.7.2-7)$$

Мы знаем, что для невязкого нетеплопроводного течения на внешней кромке пограничного слоя

$$\tilde{T}^* = 0 \text{ при } z^*_{,1} = 0. \quad (6.7.2-8)$$

Так как

$$\tilde{v}^*_{,1} = 1; \quad \tilde{v}^*_{,2} = \tilde{v}^*_{,3} = 0, \quad (6.7.2-9)$$

то дифференциальное уравнение баланса энергии для этого течения упрощается:

$$\frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial z^*_{,1}} \tilde{v}^*_{,1} = \frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial z^*_{,2}} = 0. \quad (6.7.2-10)$$

Из (6.7.2-8) и (6.7.2-10) следует, что для всех  $z_1$

$$\tilde{T}^* = 0. \quad (6.7.2-11)$$

В соответствии с § 6.7.1 дифференциальное уравнение баланса энергии для пограничного слоя будет:

$$\frac{\partial T^*}{\partial z^*_{,1}} v^*_{,1} + \frac{\partial T^*}{\partial z^*_{,2}} v^*_{,2} = \frac{1}{N_{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial^2 z^*_{,2}} + \frac{N_{Br}}{N_{Pr}} \left( \frac{\partial v^*_{,1}}{\partial z^*_{,2}} \right)^2. \quad (6.7.2-12)$$

Здесь

$$N_{Pr} \equiv \frac{c_p}{k}; \quad N_{Br} \equiv \frac{\mu (\tilde{v}_1)^2}{k (T_0 - T_\infty)}. \quad (6.7.2-13)$$

Уравнение (6.7.2-12) можно считать дифференциальным уравнением для нахождения распределения температуры в пограничном слое, а распределение скорости в пограничном слое уже известно из § 3.5.2. Границными условиями для (6.7.2-12) будут:

$$T^* = 1 \text{ при } z_2^{**} = 0 \quad (6.7.2-14)$$

и

$$T^* \rightarrow 0 \text{ при } z_2^{**} \rightarrow \infty. \quad (6.7.2-15)$$

По аналогии с § 3.5.2, где проводился анализ распределения скорости в пограничном слое, мы можем найти решение уравнения (6.7.2-12), объединив две независимых переменных так, чтобы преобразовать его в обыкновенное дифференциальное уравнение. В частности, если искать решение в виде

$$T^* = T^*(\eta), \quad (6.7.2-16)$$

то с помощью (6.7.2-2) можно свести уравнение (6.7.2-12) к виду:

$$T'''' + 0,5N_{Pr}fT'' = -N_{Br}(f'')^2. \quad (6.7.2-17)$$

Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$T^* = 1 \text{ при } \eta = 0 \quad (6.7.2-18)$$

и

$$T^* \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (6.7.2-19)$$

Здесь штрих снова означает дифференцирование по  $\eta$ .

Решение уравнения (6.7.2-17) удобно искать в виде линейной комбинации двух более простых задач [4]:

$$T^* = A\Theta_1 + \Theta_2. \quad (6.7.2-20)$$

Величину  $\Theta_1$  можно считать безразмерным распределением температуры, соответствующим течению в пограничном слое на изотермической пластине, когда вязкой диссипацией [неоднородностью в правой части уравнения (6.7.2-17)] пренебрегаем:

$$\Theta''_1 + 0,5N_{Pr}f\Theta'_1 = 0; \quad (6.7.2-21)$$

$$\Theta_1 = 1 \text{ при } \eta = 0; \quad (6.7.2-22)$$

$$\Theta_1 \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (6.7.2-23)$$

Безразмерное температурное распределение  $\Theta_2$  соответствует течению в пограничном слое вдоль адиабатической (изолированной) плоской пластины:

$$\Theta''_2 + 0,5N_{Pr}f\Theta'_2 = -N_{Br}(f'')^2; \quad (6.7.2-24)$$

$$\Theta'_2 = 0 \text{ при } \eta = 0; \quad (6.7.2-25)$$

$$\Theta_2 \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (6.7.2-26)$$

Коэффициент  $A$  в соотношении (6.7.2-20) необходим для того, чтобы удовлетворить граничным условиям (6.7.2-18). Теперь будем искать решения для  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  в отдельности.

*Изотермическая стенка при отсутствии вязкой диссипации.* Так как из уравнения (6.7.2-4) известно, что

$$f = -\frac{2f'''}{f''}, \quad (6.7.2-27)$$

то уравнение (6.7.2-21) можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\eta} \ln \theta'_1 = N_{Pr} \frac{d}{d\eta} \ln f''; \quad (6.7.2-28)$$

проинтегрировав его, найдем:

$$\theta'_1 = C_1 (f'')^{N_{Pr}}. \quad (6.7.2-29)$$

Коэффициент  $C_1$  является пока неизвестной постоянной интегрирования. Проинтегрировав (6.7.2-29) еще раз и удовлетворив граничным условиям (6.7.2-22), (6.7.2-23), получим:

$$\theta_1 = \frac{\int_{\infty}^{\eta} (f'')^{N_{Pr}} d\eta}{\int_{0}^{\infty} (f'')^{N_{Pr}} d\eta}. \quad (6.7.2-30)$$

В частном случае, когда  $N_{Pr}=1$ , уравнение (6.7.2-30) принимает вид:

$$\theta_1 = 1 - f' \text{ при } N_{Pr}=1. \quad (6.7.2-31)$$

*Адиабатическая стенка.* Снова воспользуемся уравнением (6.7.2-27) для преобразования (6.7.2-24) к виду:

$$\frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{(f'')^{N_{Pr}}} \theta'_{12} \right] = -N_{Br} (f'')^{2-N_{Pr}}. \quad (6.7.2-32)$$

После однократного интегрирования с помощью (6.7.2-25) получим:

$$\frac{1}{(f'')^{N_{Pr}}} \theta'_{12} = -N_{Br} \int_0^{\eta} (f'')^{2-N_{Pr}} d\tau. \quad (6.7.2-33)$$

проинтегрировав это соотношение еще раз и удовлетворив граничным условиям, будем иметь:

$$\theta_{12} = N_{Br} \int_{\eta}^{\infty} (f'')^{N_{Pr}} \left[ \int_0^{\xi} (f'')^{2-N_{Pr}} d\tau \right] d\xi. \quad (6.7.2-34)$$

В частном случае при  $N_{Pr}=1$  уравнение (6.7.2-34) можно записать в виде

$$\theta_{12} = 0,5 N_{Br} [1 - (f')^2] \text{ при } N_{Pr}=1. \quad (6.7.2-35)$$

*Выходы.* Для того чтобы уравнение (6.7.2-20) удовлетворяло граничному условию (6.7.2-18), необходимо, чтобы

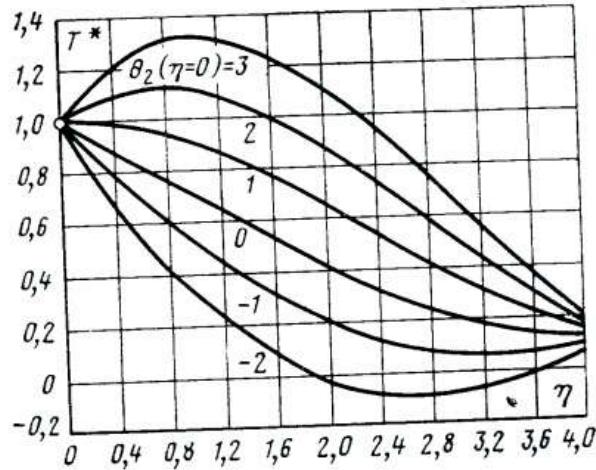
$$A = 1 - \theta_{12} (\eta=0). \quad (6.7.2-36)$$

Следовательно, окончательный результат для безразмерного распределения температуры в пограничном слое имеет вид:

$$T^* = [1 - \Theta_2(\eta=0)] \Theta_1 + \Theta_2, \quad (6.7.2-37)$$

где  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$  задаются соответственно уравнениями (6.7.2-30) и (6.7.2-34). Соотношение (6.7.2-37) представлено на рис. 6.7.2-1 для случая  $N_{Pr}=0,7$  (воздух), имеющего важное практическое значение.

Рис. 6.7.2-1. Распределение температуры в ламинарном пограничном слое на плоской пластине при нулевом угле атаки параллельного течения по уравнению (6.7.2-37) для воздуха ( $N_{Pr}=0,7$ ). Стенка имеет постоянную температуру  $T_0$ , а температура жидкости равна  $T_\infty$ . Кривая  $\Theta(\eta=0)=1$  соответствует адиабатической стенке. Если  $(T_0-T_\infty)>0$ , то при  $\Theta_2(\eta=0)<1$  стенка будет охлаждаться, а при  $\Theta_2(\eta=0)>1$  — нагреваться [4].



Заметим, что уравнение (6.7.2-37) не зависит от характерной длины  $L$ . Это согласуется с нашими интуитивными представлениями о том, что это решение должно быть справедливым для полубесконечной плоской пластины.

Очевидно, что  $z_2$ -компоненты вектора плотности потока энергии для плоской пластины равна:

$$b_2|_{z_1=0} = -k \frac{\partial T}{\partial z_2}|_{z_1=0} = \frac{-k(T_0-T_\infty)}{L \sqrt{N_{Re}}} [1 - \Theta_2(\eta=0)] \Theta'_1|_{\eta=0}. \quad (6.7.2-38)$$

Шлихтинг [4] показал, что для широкого диапазона чисел Прандтля величина  $b_2|_{z_1=0}$  положительна. Можно заключить, что если  $(T_0-T_\infty)>0$ , то пластина охлаждается при

$$\Theta_2(\eta=0) < 1. \quad (6.7.2-39)$$

Шлихтинг [4] показал также, что выражение

$$\Theta_2(\eta=0) = \frac{N_{Br}}{2 \sqrt{N_{Pr}}} \quad (6.7.2-40)$$

является очень хорошим приближением. Из уравнения (6.7.2-40) следует, что при

$$\frac{N_{Br}}{2 \sqrt{N_{Pr}}} < 1 \quad (6.7.2-41)$$

стенка будет охлаждаться. Для охлаждения стенки недостаточно, чтобы  $(T_0-T_\infty)>0$ ; для этого необходимо также, чтобы величина вязкой диссипации была небольшой. Для потока воздуха при  $\tilde{v}=200$  м/с;

$N_{Pr}=0.7$ ;  $\mu=21 \cdot 10^{-6}$  кг/(м·с);  $k=28 \cdot 10^{-3}$  кг/(м·с<sup>3</sup>·К) уравнение (6.7.2-41) показывает, что стенка будет охлаждаться при

$$T_0 - T_\infty > 18^\circ\text{C}. \quad (6.7.2-42)$$

*6.7.3. Теория теплового пограничного слоя для двумерного обтекания искривленной стенки.* В § 6.7.1 рассматривается распределение температуры в жидкости при двумерном обтекании плоской пластины. В пределе при  $N_{Re} \rightarrow \infty$  установлено, что для жидкости в тонком пограничном слое вблизи плоской пластины дифференциальное уравнение баланса энергии можно значительно упростить. Это упрощение заключается в пренебрежении некоторыми (но не всеми) эффектами теплопроводности по сравнению с конвекцией.

В этом параграфе мы будем рассматривать тепловой пограничный слой несжимаемой ньютоновской жидкости при двумерном обтекании искривленной стенки. Для упрощения коэффициенты вязкости и теплопроводности будем считать независимыми от температуры. Можно предполагать, что распределение температуры будет примерно одинаковым как для искривленной, так и для плоской пластины в достаточно тонком пограничном слое, и мы попытаемся определить, насколько это интуитивное предположение является верным.

Здесь используется подход, совершенно аналогичный рассуждениям § 3.5.3, где мы определили вид уравнения Навье — Стокса и уравнения неразрывности для двумерного обтекания искривленной стенки.

На рис. 3.5.3-1 изображен участок типичной искривленной стенки. В прямоугольной системе координат уравнение этой поверхности будет:

$$z_2 = f(z_1). \quad (6.7.3-1)$$

Для лучшего сравнения между обтеканием искривленной и плоской пластины рассмотрим эту задачу в ортогональной криволинейной системе координат, где  $x \equiv x^1$  является длиной дуги, измеряемой вдоль стенки в плоскости постоянной  $z$ ;  $y \equiv x^2$  — длина дуги, измеряемая вдоль прямой линии, перпендикулярной стенке;  $z \equiv x^3 \equiv z_3$  является координатой, перпендикулярной плоскости течения.

В двумерном течении имеем:

$$\begin{aligned} v_x &\equiv v_{<1>} = v_x(x, y, t); \quad v_y \equiv v_{<2>} = v_y(x, y, t); \\ v_z &\equiv v_{<3>} = 0; \quad T = T(x, y, t). \end{aligned} \quad (6.7.3-2)$$

При этих ограничениях дифференциальное уравнение баланса энергии можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \rho \widehat{c} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{v_x}{1+xy} + \frac{\partial T}{\partial y} v_y \right) &= k \left\{ \frac{1}{1+xy} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{1+xy} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{1+xy} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1+xy) \frac{\partial T}{\partial y} \right] \right\} + 2\mu \left[ \frac{1}{(1+xy)^2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \kappa v_y \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{1+xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\kappa v_x}{1+xy} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (6.7.3-3)$$

где

$$\kappa \equiv -\frac{f''}{[1+(f')^2]^{3/2}} =: \kappa(x). \quad (6.7.3-4)$$

Штрихами здесь обозначено дифференцирование по  $z_1$ . Величину —  $\kappa$  можно считать удвоенной средней кривизной [15], нормальной кривизной [15] поверхности в направлении  $x$  или единственной главной кривизной поверхности, отличной от нуля.

Кроме безразмерной скорости, безразмерной температуры и безразмерного времени, используемых в § 6.4.7-1, введем:

$$x^* \equiv \frac{x}{L}; \quad y^* \equiv \frac{y}{L}; \quad \kappa^* \equiv \kappa L. \quad (6.7.3-5)$$

При использовании рассуждений § 6.7.1 для этой геометрии лучше всего представить полученные результаты с помощью

$$y^{**} \equiv \sqrt{N_{Re}} y^*; \quad v_y^{**} \equiv \sqrt{N_{Re}} v_y^*. \quad (6.7.3-6)$$

Когда число Рейнольдса стремится к бесконечности, уравнение (6.7.3-3) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_{St}} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \frac{v_x^*}{1 + \kappa^{**} y^{**}} + \frac{\partial T^*}{\partial y^{**}} v_y^{**} = \\ & = \frac{1}{N_{Pr}} \frac{1}{1 + \kappa^{**} y^{**}} \frac{\partial}{\partial y^{**}} \left[ (1 + \kappa^{**} y^{**}) \frac{\partial T^*}{\partial y^{**}} \right] + \\ & + \frac{N_{Br}}{N_{Pr}} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^{**}} - \frac{\kappa^{**} v_x^*}{1 + \kappa^{**} y^{**}} \right)^2, \end{aligned} \quad (6.7.3-7)$$

где

$$\kappa^{**} \equiv N_{Re}^{-1/2} \kappa^*. \quad (6.7.3-8)$$

Для постоянной конфигурации стенки  $\kappa^{**} \rightarrow 0$  в предельном случае  $N_{Re} \rightarrow \infty$ .

При таких условиях уравнение (6.7.3-7) упрощается:

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial T^*}{\partial x^*} v_x^* + \frac{\partial T^*}{\partial y^{**}} v_y^{**} = \frac{1}{N_{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial^2 y^{**}} + \frac{N_{Br}}{N_{Pr}} \left( \frac{\partial v_y^*}{\partial y^{**}} \right)^2. \quad (6.7.3-9)$$

Как и предполагалось в § 6.7.1,

$$T^* \rightarrow \tilde{T}^* \text{ при } y^{**} \rightarrow \infty, \quad (6.7.3-10)$$

где  $\tilde{T}^*$  — распределение безразмерной температуры на искривленной стенке при обтекании ее потоком невязкой нетеплопроводной жидкости:

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \tilde{T}^*}{\partial x^*} \tilde{v}_x^* = 0. \quad (6.7.3-11)$$

Здесь  $\tilde{v}_x^*$  — безразмерная  $x$ -компоненты скорости на искривленной стенке для соответствующего невязкого течения.

Поскольку  $v_x^*$  и  $v_y^{**}$  заданы заранее, то уравнение (6.7.3-9) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для нахождения безразмерного распределения температуры в тепловом пограничном слое. Таким образом, выше интуитивное предположение о том, что дифференциальное уравнение баланса энергии для двумерного обтекания искривленной стенки совершенно аналогично по форме соответствующему уравнению для плоской стенки из § 6.7.1, оказывается справедливым.

#### 6.7.4. Распределение температуры в жидкости при обтекании клина.

В качестве иллюстрации предыдущего параграфа рассмотрим двумерное обтекание клина потоком несжимаемой ньютоновской жидкости, изображенное на рис. 6.7.4-1. Температура стенки клина  $T_0$  поддерживается постоянной; температура газового потока при  $x=0$  равна  $T_\infty$ ; требуется найти температурное распределение в газе в непосредственной окрестности поверхности клина, а также определить локальную скорость переноса энергии от клина к потоку газа. Для упрощения будем считать коэффициенты вязкости и теплопроводности независимыми от температуры; вязкой диссипацией в потоке газа пренебрегаем.

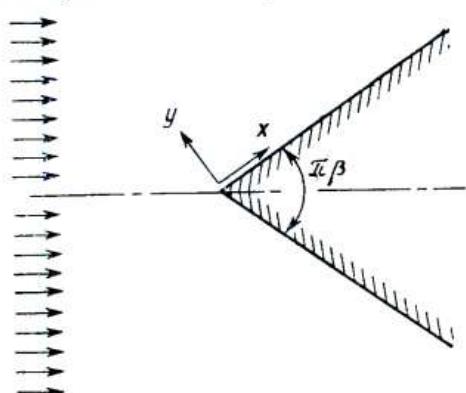


Рис. 6.7.4-1. Обтекание клина.

В невязком потенциальном течении жидкости вне пограничного слоя  $x$ -компоненты скорости  $\tilde{v}_x$  на стенке и в непосредственной окрестности вершины равна:

$$\tilde{v}_x = ux^n, \quad (6.7.4-1)$$

а угол при вершине клина равен:

$$\pi\beta = \frac{2\pi m}{1+m}. \quad (6.7.4-2)$$

Пусть так же, как в § 6.7.3, длина клина  $L$  будет его характерной длиной,  $uL^m$  — характерной скоростью, а разность  $(T_0 - T_\infty)$  — характерной температурой. Тогда безразмерные компоненты скорости, безразмерная температура и безразмерные координаты примут вид:

$$v_x^* \equiv \frac{v_x}{uL^m}; \quad v_y^{**} \equiv \sqrt{N_{Re}} \frac{v_y}{uL^m}; \quad (6.7.4-3)$$

$$T^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}; \quad x^* \equiv \frac{x}{L}; \quad y^{**} \equiv \sqrt{N_{Re}} \frac{y}{L},$$

где

$$N_{Re} \equiv \frac{uL^{1+m}\rho}{\mu}. \quad (6.7.4-4)$$

Мы намеренно задали неопределенной характерную длину  $L$ , так как в конечный результат она не входит.

В § 6.7.3 мы нашли, что дифференциальное уравнение баланса энергии для пограничного слоя в безразмерном виде можно записать так:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} v_x^* + \frac{\partial T^*}{\partial y^{**}} v_y^{**} = \frac{1}{N_{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial^2 y^{**}} + \frac{N_{Br}}{N_{Pr}} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^{**}} \right)^2. \quad (6.7.4-5)$$

Для этой задачи

$$N_{Pr} \equiv \frac{\hat{c}_\mu}{k}; \quad N_{Br} \equiv \frac{\mu u^2 L^{2m}}{k(T_0 - T_\infty)}. \quad (6.7.4-6)$$

При постановке задачи мы пренебрегли вязкими эффектами, т. е. ограничились пределом  $N_{Br}/N_{Pr} \rightarrow 0$ , при котором целесообразно аппроксимировать уравнение (6.7.4-5) в виде

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} v^*_{,x} + \frac{\partial T^*}{\partial y^{**}} v^{**}_{,y} := -\frac{1}{N_{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial^2 y^{**}}. \quad (6.7.4-7)$$

Распределение скорости для пограничного слоя рассматривалось в § 3.5.4 (случай 1а). С учетом безразмерных переменных (6.7.4-3) перепишем (6.7.4-1):

$$\tilde{v}^*_{,x} = x^{*m}. \quad (6.7.4-8)$$

Это означает, что, так же как в § 3.5.4, мы вынуждены внести пока неизвестную постоянную

$$K \equiv \left(\frac{1+m}{2}\right)^{m/(1+m)}. \quad (6.7.4-9)$$

Сразу же получим:

$$v^*_{,x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y^{**}} = x^{*m} \frac{df}{d\eta} \quad (6.7.4-10)$$

и

$$\begin{aligned} v^{**}_{,y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x^*} = -\left(\frac{1+m}{2}\right)^{1/2} x^{*(m-1)/2} f - \\ &- \left(\frac{2}{1+m}\right)^{1/2} \frac{m-1}{2} x^{*(m-1)/2} \eta \frac{df}{d\eta}. \end{aligned} \quad (6.7.4-11)$$

Здесь  $f$  — функция величины

$$\eta \equiv \frac{y^{**}}{g} = \frac{y^{**}}{[2/(1+m)]^{1/2} x^{*(1-m)/2}} \quad (6.7.4-12)$$

является решением уравнения

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{2m}{1+m} \left[ 1 - \left( \frac{df}{d\eta} \right)^2 \right] = 0 \quad (6.7.4-13)$$

при граничных условиях:

$$f = \frac{df}{d\eta} = 0 \text{ при } \eta = 0 \quad (6.7.4-14)$$

и

$$\frac{df}{d\eta} \rightarrow 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (6.7.4-15)$$

Предположим, что мы уже имеем решение этой задачи. Если представить решение в виде

$$T^* = \Theta(\eta), \quad (6.7.4-16)$$

то уравнение (6.7.4-7) принимает вид:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + N_{Pr} f \frac{d\Theta}{d\eta} = 0. \quad (6.7.4-17)$$

Соответствующими граничными условиями будут:

$$\Theta = 1 \text{ при } \eta = 0 \quad (6.7.4-18)$$

и

$$\Theta \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (6.7.4-19)$$

Проинтегрировав (6.7.4-17) при граничных условиях (6.7.4-18) и (6.7.4-19), легко найдем:

$$\theta = \frac{\int_{\eta}^{\infty} \exp \left( -N_{Pr} \int_0^{\xi} f d\tau \right) d\xi}{\int_0^{\infty} \exp \left( -N_{Pr} \int_0^{\xi} f d\tau \right) d\xi}. \quad (6.7.4-20)$$

Компонента  $y$  вектора плотности потока энергии  $q$ , подсчитанная на стенке клина, равна:

$$q_y|_{y=0} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{k(T_0 - T_\infty)}{L} N_{Re}^{1/2} \left(\frac{1+m}{2}\right)^{1/2} x^{*(m-1)/2} \theta' \Big|_{\eta=0} = \\ = \frac{k(T_0 - T_\infty)}{L} N_{Re}^{1/2} \left(\frac{1+m}{2}\right)^{1/2} x^{*(m-1)/2} \left[ \int_0^{\infty} \exp \left( -N_{Pr} \int_0^{\xi} f d\tau \right) d\xi \right]^{-1} \quad (6.7.4-21)$$

или

$$\frac{N_{Nu} x^*}{(x^{*m+1} N_{Re})^{1/2}} = \left(\frac{1+m}{2}\right)^{1/2} \left[ \int_0^{\infty} \exp \left( -N_{Pr} \int_0^{\xi} f d\tau \right) d\xi \right]^{-1}, \quad (6.7.4-22)$$

где число Нуссельта равно:

$$N_{Nu} \equiv \frac{q_y|_{y=0} L}{k(T_0 - T_\infty)}. \quad (6.7.4-23)$$

Уравнение (6.7.4-22) представлено на рис. 6.7.4-2.

Следует отметить, что характерная длина  $L$  не входит в уравнения (6.7.4-20) и (6.7.4-22) ( $\eta$  не зависит от  $L$ ). Полученные резуль-

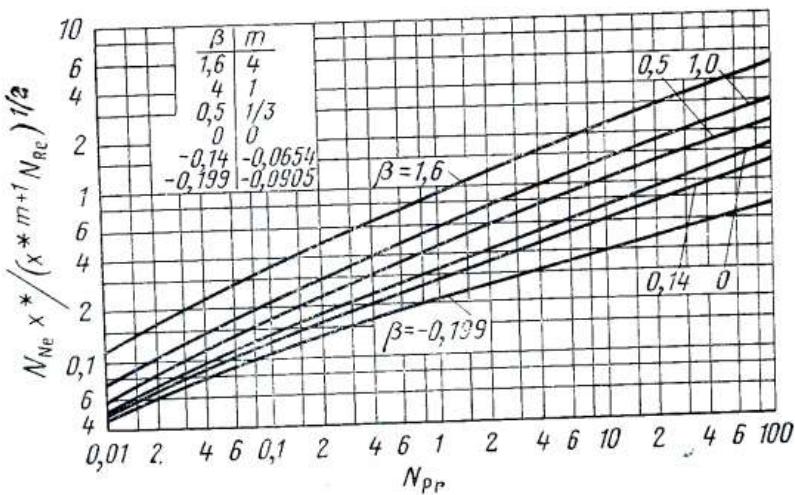


Рис. 6.7.4-2. Число Нуссельта в зависимости от числа Прандтля при обтекании изотермического клина [4].

таты неприменимы к полубесконечному клину, так как уравнение (6.7.4-1) справедливо только в окрестности вершины.

6.7.5. Теория теплового пограничного слоя при обтекании тела вращения. В § 6.7.1 и 6.7.3 мы рассмотрели распределение температуры в жидкости при двумерном обтекании плоской пластины и искрив-

ленной стенки. Установлено, что тепловой пограничный слой описывается в обоих случаях одной и той же системой уравнений.

Ниже мы будем исследовать тепловой пограничный слой несжимаемой ньютоновской жидкости вблизи тела вращения. Коэффициенты вязкости и теплопроводности будем снова считать независимыми от температуры. В некотором смысле мы можем ожидать, что температурное распределение в достаточно тонком пограничном слое вблизи тела вращения имеет тот же вид, что и на плоской пластине.

Мы будем рассуждать так же, как в § 5.3.7, где определяли вид уравнений Навье—Стокса и неразрывности для обтекания тела вращения. Участок типичного тела вращения показан на рис. 3.5.7-1. В цилиндрической системе координат уравнение осесимметричной поверхности имеет вид:

$$r = f(z). \quad (6.7.5-1)$$

Для более удобного сравнения обтекания тела вращения и пластины будем рассматривать эту задачу в ортогональной криволинейной системе координат, где  $x \equiv x^3$  является длиной дуги, измеренной вдоль стенки (в направлении течения) в плоскости постоянной  $\theta$ ;  $y \equiv x$  — длина дуги, измеренная вдоль прямых линий, перпендикулярных стенке, а  $\theta \equiv x^2$  — азимутальная цилиндрическая координата, измеренная вокруг оси тела.

Для стенки рассматриваемой формы будем иметь:

$$\begin{aligned} v_x &\equiv v_{<3>} = v_x(x, y, t); \quad v_y &\equiv v_{<1>} = v_y(x, y, t); \\ v_\theta &\equiv v_{<2>} = 0; \quad T = T(x, y, t). \end{aligned} \quad (6.7.5-2)$$

При таких ограничениях дифференциальное уравнение баланса энергии можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{v_x}{1+xy} + \frac{\partial T}{\partial y} v_y \right) &= k \left\{ \frac{1}{1+xy} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{1+xy} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{1+xy} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1+xy) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{f'}{g(1+xy)} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial T}{\partial y} \left\} + \right. \\ &+ 2\mu \left\{ \frac{1}{(1+xy)^2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \kappa v_y \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{v_y}{g} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{2} \left[ (1+xy) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_x}{1+xy} \right) + \frac{1}{1+xy} \frac{\partial v_y}{\partial x} \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (6.7.5-3)$$

где

$$\kappa \equiv \frac{-f''}{[1+(f')^2]^{3/2}} = \kappa(x) \quad (6.7.5-4)$$

и

$$g \equiv f [1 + (f')^2]^{1/2} + y. \quad (6.7.5-5)$$

Штрихами обозначено дифференцирование по цилиндрической координате  $z$ , измеренной вдоль оси вращения. Величину  $\kappa$  можно рассматривать как нормальную кривизну поверхности в направлении  $x$ ; она также является одной из главных величин кривизны поверхности [15].

Кроме безразмерных скорости, температуры и времени, используемых в § 6.4.1, введем:

$$x^* \equiv \frac{x}{L}; \quad y^* \equiv \frac{y}{L}; \quad f^* \equiv \frac{f}{L}; \quad \kappa^* \equiv \kappa L. \quad (6.7.5-6)$$

Если обобщить рассуждения § 6.7.1 на эту геометрию то полученные результаты лучше всего представить с помощью

$$y^{**} \equiv \sqrt{N_{\text{Re}}} y^*; \quad v_y^{**} \equiv \sqrt{N_{\text{Re}}} v_y^*. \quad (6.7.5-7)$$

Когда число Рейнольдса стремится к бесконечности, уравнение (6.7.5-3) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N_{\text{St}}} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \frac{v_x^*}{1 + \kappa^{**} y^{**}} + \frac{\partial T^*}{\partial y^{**}} v_y^{**} = \\ & = \frac{1}{N_{\text{Pr}}} \left\{ \frac{1}{1 + \kappa^{**} y^{**}} \frac{\partial}{\partial y^{**}} \left[ (1 + \kappa^{**} y^{**}) \frac{\partial T^*}{\partial y^{**}} \right] \right\} + \\ & + \frac{N_{\text{Br}}}{N_{\text{Pr}}} \left[ (1 + \kappa^{**} y^{**}) \frac{\partial}{\partial y^{**}} \left( \frac{v_x^*}{1 + \kappa^{**} y^{**}} \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (6.7.5-8)$$

также

$$\kappa^{**} \equiv N_{\text{Re}}^{-1/2} \kappa^*. \quad (6.7.5-9)$$

Для стенки неизменной формы при  $\kappa^{**} \rightarrow 0$  и числе Рейнольдса, стремящемся к бесконечности, уравнение (6.7.5-8) упрощается:

$$\frac{1}{N_{\text{St}}} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial T^*}{\partial x^*} v_x^* + \frac{\partial T^*}{\partial y^{**}} v_y^{**} = \frac{1}{N_{\text{Pr}}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{**2}} + \frac{N_{\text{Br}}}{N_{\text{Pr}}} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial y^{**}} \right)^2. \quad (6.7.5-10)$$

Полученное соотношение показывает, что дифференциальное уравнение баланса энергии для теплового пограничного слоя имеет один и тот же вид для обтекания пластины, искривленной стенки и осесимметричного тела вращения. Но если дифференциальное уравнение баланса энергии необходимо решать совместно с уравнениями неразрывности и Навье — Стокса в форме, соответствующей данному пограничному слою, то из § 3.5.7 следует, что уравнение неразрывности для пограничного слоя вблизи тела вращения несколько отличается от уравнения для пластины. Иными словами, общая краевая задача, описывающая совместный перенос импульса и энергии в пограничном слое вблизи тела вращения, отличается от аналогичной задачи для плоской пластины.

В § 3.5.7 мы рассматривали преобразование Манглера [4], с помощью которого уравнения пограничного слоя для тела вращения можно привести к виду уравнений для плоской пластины.

Манглер предлагает ввести следующие переменные:

$$\bar{x}^* \equiv \int_0^{x^*} f^{*2} dx^*; \quad (6.7.5-11)$$

$$\bar{y}^{**} \equiv f^* y^{**}; \quad (6.7.5-12)$$

$$\bar{t}^{**} \equiv f^{*2} t^*; \quad (6.7.5-13)$$

$$\bar{v}_y^{**} \equiv \frac{1}{f^*} v_y^{**} + \frac{f''}{f^{*2} [1 + (f')^2]^{1/2}} y^{**} v_x^*. \quad (6.7.5-14)$$

В этих переменных уравнение (6.7.5-10) принимает вид:

$$\frac{1}{N_{\text{St}}} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial T^*}{\partial \bar{x}^*} v_x^* + \frac{\partial T^*}{\partial \bar{y}^{**}} \bar{v}_y^{**} = \frac{1}{N_{\text{Pr}}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \bar{y}^{**2}} + \frac{N_{\text{Br}}}{N_{\text{Pr}}} \left( \frac{\partial v_x^*}{\partial \bar{y}^{**}} \right)^2. \quad (6.7.5-15)$$

Именно в таком смысле и подтверждаются наши первоначальные интуитивные предположения. Математические задачи, описывающие течение пограничного слоя вблизи тела вращения и на плоской пластине, имеют один и тот же вид.

*6.7.6. Перенос энергии на входе в обогреваемый участок трубы.* Рассмотрим течение несжимаемой ньютоновской жидкости с постоянными коэффициентами вязкости и теплопроводности в трубе радиусом  $R$ . Для  $z < 0$  стенка трубы изолирована. Для  $z < 0$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R. \quad (6.7.6-1)$$

Для  $z > 0$  температура стенки  $T_1$  поддерживается постоянной:

$$T = T_1 \text{ при } r = R. \quad (6.7.6-2)$$

На большом расстоянии от входа в обогреваемый участок жидкость имеет постоянную температуру  $T_0$ . Для  $r \leq R$

$$T \rightarrow T_0 \text{ при } z \rightarrow -\infty. \quad (6.7.6-3)$$

Требуется определить скорость переноса энергии к жидкости на обогреваемом участке трубы.

Сначала рассмотрим течение на входе в этот обогреваемый участок. Так как вязкость и плотность жидкости по условию не зависят от температуры и являются постоянными, в соответствии с § 3.2.1 распределение скорости будет:

$$v_r = v_\theta = 0; v_z = v_{z(\max)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (6.7.6-4)$$

где  $v_{z(\max)}$  —  $z$  — компонента скорости в центре трубы.

Из известного распределения скорости и граничных условий для температуры следует, что распределение температуры в обогреваемом участке трубы осесимметрично, т. е.

$$T = T(r, z). \quad (6.7.6-5)$$

Для этого случая дифференциальным уравнением баланса энергии из табл. 5.6.1-3 будет:

$$\rho c v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \quad (6.7.6-6)$$

или

$$(1 - r^{*2}) \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{N_{Pe}} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right] + \frac{4 N_{Br}}{N_{Pe}} r^{*2}. \quad (6.7.6-7)$$

Здесь безразмерные температура  $T^*$ , радиальная координата  $r^*$  и аксиальная координата  $z^*$  определяются соответственно как

$$T^* \equiv \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}; \quad r^* \equiv \frac{r}{R}; \quad z^* \equiv \frac{z}{R}. \quad (6.7.6-8)$$

Числа Пекле и Бринкмана будут равны:

$$N_{Pe} \equiv \frac{\widehat{c} R v_{z(\max)} \rho}{k}; \quad N_{Br} \equiv \frac{\mu (v_{z(\max)})^2}{k (T_1 - T_0)}, \quad (6.7.6-9)$$

При постановке задачи мы сначала ограничились входом в обогреваемый участок трубы. Теперь рассмотрим тепловой пограничный слой, образующийся вдоль стенки трубы при определенной величине числа Прандтля (т. е.  $N_{Pe} \rightarrow \infty$ ), когда число Рейнольдса стремится к бесконечности. Это и есть тот тепловой пограничный слой, который мы рассматривали в начале этого параграфа.

Мы будем рассматривать пограничный слой аналогично предыдущему параграфу, где решалась задача внешнего обтекания, но с одним важным отличием. В том случае распределение скорости получалось в результате применения первого закона Коши в приближении пограничного слоя. Здесь же распределение скорости во всей жидкости известно заранее. Кроме того, необходимо иначе определить координату, используемую для описания пограничного слоя.

Поскольку сначала мы рассматриваем тепловой пограничный слой вдоль стенки трубы, введем:

$$s^* \equiv 1 - r^*, \quad (6.7.6-10)$$

т. е. безразмерное расстояние, измеренное от стенки. Запишем уравнение (6.7.6-7) с помощью этой величины:

$$(2s^* - s^{*2}) \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{N_{Pe}} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial s^{*2}} - \frac{1}{1-s^*} \frac{\partial T^*}{\partial s^*} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right) + \frac{4N_{Br}}{N_{Pe}} (1-s^*)^2. \quad (6.7.6-11)$$

Мы рассматриваем очень тонкий пограничный слой, толщина которого, вероятно, будет уменьшаться, когда  $N_{Pe} \rightarrow \infty$  при определенной величине  $z^*$  для заданного числа Прандтля. Исходя из § 3.5.1 и 6.7.1, определим новую координату в виде

$$\tilde{s}^{**} \equiv (N_{Pe})^a s^* \quad (6.7.6-12)$$

или

$$s^{**} \equiv (N_{Pe})^a s^*. \quad (6.7.6-13)$$

Несколько удобнее оперировать с  $s^{**}$ , так как при этом число Прандтля не входит в конечный результат. Представив уравнение (6.7.6-11) с помощью  $s^{**}$ , получим:

$$(2s^{**} - N_{Pe}^{-a} s^{**2}) \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = N_{Pe}^{3a-1} \frac{\partial^2 T^*}{\partial s^{*2}} - \frac{N_{Pe}^{2a-1}}{1-N_{Pe}^{-a} s^{**}} \frac{\partial T^*}{\partial s^{**}} + \\ + N_{Pe}^{a-1} \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + 4N_{Br} N_{Pe}^{a-1} (1 - N_{Pe}^{-a} s^{**})^2. \quad (6.7.6-14)$$

Для того чтобы при  $N_{Pe} \rightarrow \infty$  сохранились некоторые эффекты теплопроводности, положим:

$$a=1/3. \quad (6.7.6-15)$$

Дифференциальное уравнение баланса энергии, соответствующее тепловому пограничному слою для этой задачи, имеет вид:

$$2s^{**} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial s^{*2}} \text{ при } N_{Pe} \rightarrow \infty. \quad (6.7.6-16)$$

Из соотношения (6.7.6-15) видно, что для теплового пограничного слоя при новой координате зависимость от числа Рейнольдса уже не будет соответствовать ( $a=1/2$ ) представленной в § 6.7.1. Основное

различие состоит в том, что в § 6.7.1—6.7.5 мы находили распределение скорости с помощью анализа пограничного слоя. В этой же задаче имеется точное решение для распределения скорости по всему течению как внутри, так и вне пограничного слоя.

Поскольку мы полностью пренебрегаем аксиальной теплопроводностью и вязкой диссипацией, граничные условия (6.7.6-3) можно переписать в виде

$$\text{при } z=0 \quad T=T_0 \text{ для всех } r < R. \quad (6.7.6-17)$$

Если  $\tilde{T}$  представляет собой температуру на кромке теплового пограничного слоя, где можно полностью пренебречь теплопроводностью и вязкой диссипацией, дифференциальное уравнение баланса энергии сводится к соотношению

$$v_z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} = 0. \quad (6.7.6-18)$$

Делаем вывод:

$$\text{при } s^{**} \rightarrow \infty \quad T^* \rightarrow \tilde{T}^* = 0 \text{ для всех } z^* > 0. \quad (6.7.6-19)$$

Представив (6.7.6-2) в виде

$$\text{при } s^{**} = 0 \quad T^* = 1 \text{ для всех } z^* > 0, \quad (6.7.6-20)$$

получим из него совместно с (6.7.6-19) граничные условия, которым должно удовлетворять решение уравнения (6.7.6-16).

Сделав замену переменной

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{9}{2} z^*}, \quad (6.7.6-21)$$

представим (6.7.6-16) в виде обыкновенного дифференциального уравнения:

$$-3\eta^2 \frac{dT^*}{d\eta} = \frac{d^2T^*}{d\eta^2}. \quad (6.7.6-22)$$

Тогда граничные условия (6.7.6-19) и (6.7.6-20) соответственно примут вид:

$$T^* \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty \quad (6.7.6-23)$$

и

$$T^* = 1 \text{ при } \eta = 0. \quad (6.7.6-24)$$

Легко находим решение, совместимое с уравнениями (6.7.6-22) — (6.7.6-24):

$$T^* = \frac{\int_{\eta}^{\infty} \exp(-\eta^3) d\eta}{\int_{0}^{\infty} \exp(-\eta^3) d\eta}. \quad (6.7.6-25)$$

Используя Г-функцию, получаем:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx. \quad (6.7.6-26)$$

Перепишем решение (6.7.6-25) в более удобной форме:

$$T^* = \frac{1}{\Gamma(4/3)} \int_{-\eta}^{\infty} \exp(-\eta^3) d\eta. \quad (6.7.6-27)$$

Так как

$$\begin{aligned} -q_r &= k \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{k(T_1 - T_0)}{R} N_{Pe}^{1/3} \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{9}{2} z^*}} \frac{dT^*}{d\eta} = \\ &= \frac{k(T_1 - T_0)}{R} N_{Pe}^{1/3} \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{9}{2} z^*}} \frac{1}{\Gamma(4/3)} \exp(-\eta^3), \end{aligned} \quad (6.7.6-28)$$

мы можем легко подсчитать средний поток энергии от стенки к жидкости на обогреваемом участке трубы длиной  $L$ :

$$(-q_r|_{r=R})_{cp} \equiv \frac{R}{L} \int_0^{L/R} -q_r|_{r=R} dz^* = \left(\frac{9}{2}\right)^{2/3} \frac{k(T_1 - T_0)}{R} N_{Pe}^{1/3} \frac{1}{\Gamma(1/3)} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/3}. \quad (6.7.6-29)$$

Используя число Нуссельта

$$N_{Nu} \equiv 2 \frac{(-q_r|_{r=R})_{cp} R}{(T_1 - T_0) k}, \quad (6.7.6-30)$$

мы можем записать этот результат в более удобной форме:

$$N_{Nu} = \left(\frac{9}{2}\right)^{2/3} \frac{2}{\Gamma(1/3)} N_{Pe}^{1/3} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/3}. \quad (6.7.6-31)$$

Можно предположить, что при резком изменении граничных условий (6.7.6-1) и (6.7.6-2) на небольшом участке вблизи  $z=0$  и  $r=R$  эффект аксиальной теплопроводности должен быть значителен; это предположение подтверждается численным решением Ньюмена [15] для такой области. Как и следовало ожидать, он обнаружил, что область, где теплопроводностью вдоль оси пренебречь нельзя, уменьшается при увеличении числа Пекле.

## 6.8. ТЕЧЕНИЕ НА БОЛЬШОМ РАССТОЯНИИ ОТ ВХОДА В ТРУБУ

*6.8.1. Еще раз о переносе энергии на обогреваемом участке трубы.*  
Вернемся к задаче § 6.7.6. Рассмотрим течение несжимаемой ньютоновской жидкости с постоянными коэффициентами вязкости и теплопроводности в трубе радиусом  $R$ . При  $z < 0$  стенка трубы изолирована:

$$\text{при } r=R \quad \text{для } z < 0 \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (6.8.1-1)$$

При  $z > 0$  температура стенки поддерживается постоянной

$$\text{при } z=R \text{ для } z > 0 \quad T = T_1. \quad (6.8.1-2)$$

На большом расстоянии от входа в обогреваемый участок жидкость всюду имеет температуру  $T_0$ :

$$\text{при } z \rightarrow \infty \text{ для } r \leq R \quad T \rightarrow T_0 \quad (6.8.1-3)$$

В § 6.7.6 мы рассматривали распределение температуры и скорость переноса энергии к жидкости вблизи от входа в обогреваемый участок трубы для очень больших чисел Пекле. Теперь рассмотрим распределение температуры в жидкости несколько дальше от входа, но также при очень больших числах Пекле. Снова примем осесимметричное распределение температуры:

$$T = T(r, z). \quad (6.8.1-4)$$

Используя распределение скорости из § 3.2.1, приходим к выводу, что безразмерное дифференциальное уравнение баланса энергии имеет тот же вид, что и в § 6.7.6:

$$(1 - r^{*2}) \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{N_{Pe}} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right] + \frac{4N_{Br}}{N_{Pe}} r^{*2}, \quad (6.8.1-5)$$

где

$$T^* \equiv \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}; \quad r^* \equiv \frac{r}{R}; \quad z^* \equiv \frac{z}{R}. \quad (6.8.1-6)$$

Можно ожидать, что на достаточно большом расстоянии эффективы кривизны стенки трубы становятся существенными, хотя теплопроводностью вдоль оси все еще можно пренебречь. Поскольку теперь мы имеем дело с относительно большими значениями  $z^*$ , необходимо ввести уменьшенную безразмерную осевую координату

$$z^{**} \equiv \frac{z^*}{(N_{Pe})^b}. \quad (6.8.1-7)$$

При этом уравнение (6.8.1-5) запишется в виде

$$(1 - r^{*2}) \frac{\partial T^*}{\partial z^{**}} = \frac{(N_{Pe})^{b-1}}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + (N_{Pe})^{-1-b} \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{**2}} + 4N_{Br} N_{Pe}^{b-1} r^{*2}. \quad (6.8.1-8)$$

Для того чтобы при  $N_{Pe} \rightarrow \infty$  эффекты конвекции и радиальной теплопроводности были одного порядка, положим:

$$b \equiv 1. \quad (6.8.1-9)$$

При этом уравнение (6.8.1-8) принимает вид:

$$(1 - r^{*2}) \frac{\partial T^*}{\partial z^{**}} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + (N_{Pe})^{-2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{**2}} + 4N_{Br} r^{*2}. \quad (6.8.1-10)$$

При  $N_{Pe} \rightarrow \infty$  можно пренебречь продольной теплопроводностью по сравнению с поперечной, и тогда уравнение (6.8.1-10) упрощается:

$$(1 - r^{*2}) \frac{\partial T^*}{\partial z^{**}} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + 4N_{Br} r^{*2}. \quad (6.8.1-11)$$

Таким образом, для предельного случая, когда  $N_{Pe} \rightarrow \infty$ , соотношение (6.8.1-11) является дифференциальным уравнением, решение которого дает распределение температуры в жидкости для области течения, расположенной на довольно большом расстоянии от входа. Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$\text{при } r^* = 1 \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \quad \text{для } z^{**} < 0; \quad (6.8.1-12)$$

$$\text{при } r^* = 1 \quad T^* = 1 \quad \text{для } z^* > 0; \quad (6.8.1-13)$$

$$\text{при } z^{**} \rightarrow -\infty \quad T^* \rightarrow 0 \quad \text{для } r^* \leq 1. \quad (6.8.1-14)$$

Для достаточно малых величин числа Бринкмана можно пренебречь вязкой диссипацией и записать уравнение (6.8.1-11) в виде

$$(1 - r^{*2}) \frac{\partial T^*}{\partial z^{**}} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right). \quad (6.8.1-15)$$

Поскольку мы пренебрегаем и аксиальной теплопроводностью и вязкой диссипацией, из граничных условий (6.8.1-12) и (6.8.1-14) следует:

$$\text{при } z^{**}=0 \quad T^*=0 \text{ для } r^*<1. \quad (6.8.1-16)$$

Формулы (6.8.1-13) и (6.8.1-16) являются граничными условиями, которым должно удовлетворять решение (6.8.1-15). Этот частный случай, известный как задача Гретца, широко освещается в литературе. В работе [17] получено самое точное из всех известных решений. Прекрасный обзор литературы по этому вопросу опубликован Ньюменом [15].

*6.8.2. Еще раз о переносе энергии на обогреваемом участке трубы.*  
Теперь вместо температуры стенки, как в § 6.8.1, зададим постоянный поток энергии.

Опять будем рассматривать течение несжимаемой ньютоновской жидкости с постоянными коэффициентами вязкости и теплопроводности в трубе радиусом  $R$ . При  $z<0$  стенка трубы изолирована:

$$\text{при } r=R \quad \frac{\partial T}{\partial r}=0 \quad \text{для } z<0, \quad (6.8.2-1)$$

а при  $z>0$  радиальная компонента вектора плотности энергии постоянна, т. е.

$$\text{при } r=R \quad k \frac{\partial T}{\partial r}=q \quad \text{для } z>0. \quad (6.8.2-2)$$

На большом расстоянии от входа в обогреваемый участок трубы температура всюду равна  $T_0$ :

$$\text{при } z \rightarrow -\infty \quad T \rightarrow T_0 \quad \text{для } r \leq R. \quad (6.8.2-3)$$

Остановимся на распределении температуры в жидкости на большом расстоянии от входа в обогреваемый участок. Так же как в § 6.8.1, ограничимся случаем  $N_{Pe} \rightarrow \infty$ .

Следуя рассуждениям § 6.8.1, находим, что при  $N_{Pe} \rightarrow \infty$  дифференциальное уравнение баланса энергии на некотором расстоянии от входа в трубу имеет вид:

$$(1 - r^{*2}) \frac{\partial T^*}{\partial z^{**}} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + 4N_{Br} r^{*2}, \quad (6.8.2-4)$$

где

$$T^* \equiv \frac{T - T_0}{qR/k}; \quad r^* \equiv \frac{r}{R}; \quad z^{**} \equiv \frac{z}{RN_{Pe}} \quad (6.8.2-5)$$

и

$$N_{Pe} \equiv \frac{\hat{c} R v_z (\max) p}{k}; \quad N_{Br} \equiv \frac{\mu (v_z (\max))^2}{qR}. \quad (6.8.2-6)$$

Уравнение (6.8.2-4) нужно решать при граничных условиях:

$$\text{при } r^* = 1 \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \quad \text{для } z^{**} < 0; \quad (6.8.2-7)$$

$$\text{при } r^* = 1 \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 1 \quad \text{для } z^{**} > 0 \quad (6.8.2-8)$$

$$\text{при } z^{**} \rightarrow -\infty \quad T^* \rightarrow 0 \quad \text{для } r^* \leq 1. \quad (6.8.2-9)$$

Для очень малых значений числа Бринкмана эффектами вязкой диссипации в уравнении (6.8.2-4) можно пренебречь:

$$(1 - r^{*2}) \frac{\partial T^*}{\partial z^{**}} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right). \quad (6.8.2-10)$$

Поскольку аксиальной теплопроводностью и вязкой диссипацией мы пренебрегли из граничного условия (6.8.2-7) и (6.8.2-9), получим:

$$\text{при } z^{**} = 0 \quad T^* = 0 \quad \text{для } r^* < 1. \quad (6.8.2-11)$$

Уравнение (6.8.2-10) решается при граничных условиях (6.8.2-8) и (6.8.2-11). Решение приводится в [18].

Если мы будем рассматривать распределение температуры на очень большом расстоянии от входа в обогреваемый участок, можно использовать более простой подход. Следует ожидать, что на достаточно большом расстоянии от входа температура жидкости будет линейной функцией координаты вдоль оси:

$$T^* = z^{**} \Theta_1(r^*) + \Theta_2(r^*). \quad (6.8.2-12)$$

При этом уравнение (6.8.2-10) принимает вид:

$$(1 - r^{*2}) \Theta_1 = \frac{z^{**}}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left( r^* \frac{d\Theta_1}{dr^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left( r^* \frac{d\Theta_2}{dr^*} \right). \quad (6.8.2-13)$$

Но если  $\Theta_2$  зависит только от  $r^*$ , необходимо потребовать:

$$\frac{d}{dr^*} \left( r^* \frac{d\Theta_1}{dr^*} \right) = 0 \quad (6.8.2-14)$$

или

$$\Theta_1 = C_1 \ln r^* + C_2. \quad (6.8.2-15)$$

Поскольку при  $r^* = 0$  величина  $T^*$  должна быть конечной, то, положив  $C_1 = 0$ , найдем:

$$\Theta_1 = C_2 = \text{const}, \quad (6.8.2-16)$$

а уравнение (6.8.2-13) будет иметь вид:

$$\frac{1}{r^*} \frac{d}{dr^*} \left( r^* \frac{d\Theta_2}{dr^*} \right) = C_2 (1 - r^{*2}). \quad (6.8.2-17)$$

К сожалению, решение вида (6.8.2-12) и (6.8.2-16) несовместимо с граничными условиями (6.8.2-8) и (6.8.2-11). Одной из причин этой несовместимости может быть задание  $T^*$  в виде (6.8.2-12). Другим объяснением может быть то, что граничное условие (6.8.2-11), возможно, не соответствует распределению температуры на большом расстоянии от входа в обогреваемый участок. Рассмотрим последний вариант.

Чтобы найти замену граничному условию (6.8.2-11), следует отметить, что энергия потока, поступающая с жидкостью в сечение  $z^{**}=0$ , должна выходить из нее или через сечение  $z^{**}$ , или через стенки трубы:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \rho c (T - T_b) v_z r dr d\theta - 2\pi R z q = 0. \quad (6.8.2-18)$$

Используя распределение скорости из § 3.2.1, запишем уравнение (6.8.2-18) в безразмерных переменных:

$$\int_0^1 T^* (1 - r^{*2}) r^* dr^* - z^{**} = 0. \quad (6.8.2-19)$$

С учетом (6.8.2-12) и (6.8.2-16) получим для (6.8.2-19):

$$C_2 = 4 \quad (6.8.2-20)$$

и

$$\int_0^1 \Theta_2 (1 - r^{*2}) r^* dr^* = 0. \quad (6.8.2-21)$$

Это выражение вместе с условием

$$\frac{d\Theta_2}{dr^*} = 1 \quad \text{при } r^* = 1 \quad (6.8.2-22)$$

является тем граничным условием, которому должно удовлетворять решение (6.8.2-17).

Теперь, проинтегрировав уравнение (6.8.2-17), найдем:

$$\int_0^{r^*} \left( \frac{d\Theta_2}{dr^*} \right) dr^* = 4 \int_0^{r^*} (r^* - r^{*3}) dr^*; \quad \frac{d\Theta_2}{dr^*} = 2r^* - r^{*3}. \quad (6.8.2-23)$$

Отметим, что граничные условия (6.8.2-22) удовлетворяются автоматически.

Интегрируя вторично, получаем:

$$\Theta_2 = r^{*2} - \frac{r^{*4}}{4} + C_3. \quad (6.8.2-24)$$

С учетом (6.8.2-21) примем:

$$C_3 = -7/24. \quad (6.8.2-25)$$

Следовательно, уравнения (6.8.2-12), (6.8.2-16), (6.8.2-24) и (6.8.2-25) показывают, что распределение температуры на большом расстоянии от входа в обогреваемый участок приблизительно равно [19]:

$$T^* = 4z^{**} + r^{*2} - 0,25r^{*4} - 7/24. \quad (6.8.2-26)$$

Представляет интерес получить выражение для числа Нуссельта:

$$N_{Nu} \equiv \frac{2qR}{(T|_{r=R} - T_b) k} = \frac{2}{T^*|_{r^*=1} - T^*|_{r^=0}}, \quad (6.8.2-27)$$

где  $T_b$  — объемная температура, т. е. температура, которую имела бы жидкость, если бы мы могли перекрыть в данной точке трубу, а вытекшую жидкость собрать в сосуд и тщательно перемешать (эта температура часто называется средней температурой течения):

$$T^*_b = \frac{T_b - T_0}{qR/k} = \frac{\int_0^1 T^*(1 - \xi^2) \xi d\xi}{\int_0^1 (1 - \xi^2) \xi d\xi} = 4z^{**}. \quad (6.8.2-28)$$

Поскольку

$$T^*|_{r^*=1} = 4z^{**} + 11/24, \quad (6.8.2-29)$$

то можно заключить, что

$$N_{Nu} = 48/11. \quad (6.8.2-30)$$

Сравнивая этот результат с решением [18], можно заметить, что уравнение (6.8.2-30) является точным в пределе при  $z^{**} \rightarrow \infty$ . Более того, решение [18] показывает, что при  $z^{**} = 0,085$  число  $N_{Nu}$  с точностью до 5% совпадает с его значением 48/11 для установившегося участка. Такая высокая точность несколько неожиданна, если учесть, что мы заменили граничное условие (6.8.2-11) менее точным соотношением (6.8.2-18).

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНОГО УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ

## 7.1. УСРЕДНЕНИЕ ПО ВРЕМЕНИ

**7.1.1. Турбулентный перенос энергии.** Турбулентный перенос энергии означает, что по крайней мере одно из веществ, принимающих участие в процессе переноса энергии, представляет собой турбулентное течение. Все сказанное в § 4.1.1-4.1.5 справедливо для этой главы. Дополнительное усложнение возникает из-за температурного распределения, которое, так же как и распределения скорости и давления, изменяется во времени случайно в любых системах отсчета.

В нескольких последующих параграфах мы рассмотрим усреднение во времени дифференциального уравнения баланса энергии и его решение.

**7.1.2. Усредненное по времени дифференциальное уравнение баланса энергии.** Так же, как в § 4.1.2, для упрощения ограничимся несжимаемыми жидкостями. Будем считать, что внешний и взаимный переносы энергии отсутствуют, поэтому отношение числа Бринкмана к числу Пекле имеет небольшое значение, так что для вязкой диссиpации им можно пренебречь (см. § 6.4.1), а удельная массовая теплопроводность постоянна. При этих условиях уравнение (Д) табл. 5.6.1-1 сводится к виду:

$$\rho \widehat{c} \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(T\mathbf{v}) \right] + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \quad (7.1.2-1)$$

Используя определение § 4.1.2, возьмем среднее по времени от этого уравнения:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left[ \rho \hat{c} \frac{\partial T}{\partial t'} + \operatorname{div} (\rho \hat{c} T \mathbf{v} + \mathbf{q}) \right] dt' = 0. \quad (7.1.2-2)$$

Операция усреднения по времени коммутирует с дифференцированием в частных производных по времени (см. § 4.1.2) и операцией дивергенции:

$$\rho \hat{c} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \hat{c} \bar{T} \mathbf{v} + \bar{\mathbf{q}}) = 0. \quad (7.1.2-3)$$

Чаще этот результат записывается иначе:

$$\rho \hat{c} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \nabla \bar{T} \cdot \mathbf{v} \right) = -\operatorname{div} (\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^{(t)}). \quad (7.1.2-4)$$

В этом соотношении мы ввели вектор турбулентного потока энергии  $\mathbf{q}^{(t)}$ , т. е.

$$\mathbf{q}^{(t)} \equiv \rho \hat{c} (\bar{T} \mathbf{v} - \bar{T} \mathbf{v}). \quad (7.1.2-5)$$

Если вектор потока энергии представить с помощью закона Фурье, то уравнение (7.1.2-4) примет вид:

$$\rho \hat{c} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \Delta \bar{T} \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = \operatorname{div} (k \nabla \bar{T} - \mathbf{q}^{(t)}). \quad (7.1.2-6)$$

Наша задача оказалась весьма схожей с задачей § 4.1.2. Аналогично § 4.1.2, где было необходимо использование эмпирических соотношений для тензора напряжений Рейнольдса  $\mathbf{S}^{(t)}$ , мы должны рассмотреть эмпирические представления для вектора турбулентного потока энергии  $\mathbf{q}^{(t)}$ .

**7.1.3. Эмпирические соотношения для вектора турбулентного потока энергии  $\mathbf{q}^{(t)}$ .** Для иллюстрации возможностей построения эмпирических соотношений для вектора турбулентного потока энергии рассмотрим три примера. В основу нашего анализа положим три следующих представления:

1. Для изменений системы отсчета, определяемых по соотношению

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}, \quad (7.1.3-1)$$

можно использовать результат § 4.1.3, чтобы показать, что вектор  $\mathbf{q}^{(t)}$  не зависит от системы отсчета, т. е.

$$\mathbf{q}^{(t)*} \equiv \rho \hat{c} (\bar{T}^* \mathbf{v}^* - \bar{T}^* \bar{\mathbf{v}}^*) = \rho \hat{c} [\bar{T}^* (\mathbf{v}^* - \bar{\mathbf{v}}^*)] = \rho \hat{c} \bar{\mathbf{Q}} [\bar{T} (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})] = \bar{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{q}^{(t)}. \quad (7.1.3-2)$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  — зависимый от времени ортогональный тензор второго ранга. При получении этого соотношения использовалось свойство независимости разности скоростей от системы отсчета.

2. Будем считать, что принцип независимости материала от системы отсчета, описанный в § 2.3.1, применим к любым эмпирическим соотношениям для  $\mathbf{q}^{(t)}$ , пока изменения рассматриваемой системы отсчета удовлетворяют уравнению (7.1.3-1).

3. Для дальнейшего ограничения вида любого выражения  $\mathbf{q}^{(t)}$  будем использовать теорему Бэкингема—Пая.

**Пример 1. Теория длины смещения Прандтля.** Попытаемся получить эмпирическое соотношение для полностью развитого режима турбулентности у стенки.

Руководствуясь методом, с помощью которого мы строили эмпирические соотношения для тензора напряжений Рейнольдса в § 4.1.3, предполагаем, что вектор турбулентного потока энергии является функцией плотности жидкости, ее удельной массовой теплоемкости, расстояния  $l$  от стенки,  $\bar{D}$  и  $\nabla T$ :

$$\mathbf{q}^{(t)} = \mathbf{q}^{(t)}(\rho, \hat{c}, l, \bar{D}, \nabla T). \quad (7.1.3-3)$$

Мы специально не включаем в число независимых переменных теплопроводность и вязкость, так как рассматриваем полностью развитый режим турбулентности. Наиболее общее выражение этой формулы, удовлетворяющее принципу независимости материала от системы отсчета, довольно громоздко. Достаточно сказать, что в литературе обычно рассматривается частный случай

$$\mathbf{q}^{(t)} = -\kappa \nabla T, \quad (7.1.3-4)$$

где

$$\kappa = \kappa(\rho, \hat{c}, l \sqrt{2 \operatorname{tr} \bar{D}^2}). \quad (7.1.3-5)$$

В соответствии с теоремой Бэкингема — Пая [1] необходимо, чтобы уравнение (7.1.3-5) имело вид:

$$\kappa = \kappa^* \rho \hat{c} l^2 \sqrt{2 \operatorname{tr} \bar{D}^2}. \quad (7.1.3-6)$$

Тогда уравнение (7.1.3-4) переходит в соотношение (7.1.3-7)

$$\mathbf{q}^{(t)} = -\kappa^* \rho \hat{c} l^2 \sqrt{2 \operatorname{tr} \bar{D}^2} \nabla T. \quad (7.1.3-7)$$

Здесь  $\kappa^*$  — безразмерная постоянная. Уравнение (7.1.3-7) можно рассматривать как тензорную форму теории длины смещения Прандтля [1].

Необходимо подчеркнуть, что теория Прандтля неприменима для ламинарного подслоя или буферной зоны, так как с самого начала мы ограничились построением вектора турбулентного потока энергии в полностью развитом режиме течения.

**Пример 2. Выражение Дайслера для пристеночной области.** Рассмотрим турбулентное течение несжимаемой ньютоновской жидкости вблизи стенки: ламинарный подслой и буферную зону. Если вернуться к § 4.1.4 (пример 2), то с полным основанием мы можем записать выражение:

$$\mathbf{q}^{(t)} = \mathbf{q}^{(t)}(\rho, \hat{c}, \mu, l, \bar{v} - \mathbf{v}_{(s)}, \nabla T). \quad (7.1.3-8)$$

Следует учитывать, что  $\mathbf{v}_{(s)}$  обозначает скорость движения ограничивающей стенки.

Выделим из этого соотношения зависимость  $\mathbf{q}^{(t)}$  от двух векторов:

$$\mathbf{q}^{(t)} = \hat{\mathbf{q}}^{(t)}(\bar{v} - \mathbf{v}_{(s)}, \nabla T). \quad (7.1.3-9)$$

Согласно принципу независимости материала от системы отсчета функциональная зависимость этих переменных должна быть одинаковой в любой системе отсчета, т. е.

$$\mathbf{q}^{(t)*} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}^{(t)} = \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{q}}^{(t)}(\bar{v} - \mathbf{v}_{(s)}, \nabla T) = \hat{\mathbf{q}}^{(t)}(\mathbf{Q} \cdot [\bar{v} - \mathbf{v}_{(s)}], \mathbf{Q} \cdot \nabla T) \quad (7.1.3-10)$$

или, если  $\hat{\mathbf{q}}^{(t)}$  является изотропной функцией [3],

$$\hat{\mathbf{q}}^{(t)}(\bar{v} - \mathbf{v}_{(s)}, \nabla T) = \mathbf{Q}^T \cdot \hat{\mathbf{q}}^{(t)}(\mathbf{Q} \cdot [\bar{v} - \mathbf{v}_{(s)}], \mathbf{Q} \cdot \nabla T). \quad (7.1.3-11)$$

Согласно представлениям теорем Спенсера и Ривлина [4], а также Смита [5] наиболее общая полиномиальная изотропная векторная функция двух векторов имеет вид:

$$\mathbf{q}^{(t)} = \kappa_{(1)} \nabla T + \kappa_{(2)} (\bar{v} - \mathbf{v}_{(s)}). \quad (7.1.3-12)$$

Здесь  $\kappa_{(1)}$  и  $\kappa_{(2)}$  — скалярные многочлены общего вида:

$$\text{для } i = 1, 2 \quad \kappa_{(i)} = \kappa_{(i)}(\rho, \hat{c}, \mu, l, |\nabla T|, |\bar{v} - \mathbf{v}_{(s)}|, |\bar{v} - \mathbf{v}_{(s)}| \cdot \nabla T). \quad (7.1.3-13)$$

Используя теорему Спенсера и Ривлина, мы отождествляем вектор  $\mathbf{b}$ , содержащий ковариантные компоненты  $b_i$ , с кососимметричным тензором, который имеет контравариантные компоненты  $\varepsilon^{ijk}$ .

В соответствии с этой теоремой дополнительный член в уравнении (7.1.3-12) должен быть пропорциональным произведению  $(\bar{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \Delta \nabla T$ . Присутствие этой величины не согласуется с требованием изотропности  $\mathbf{q}^{(t)}$  [3], поэтому она опускается.

Используя теорему Бэкингема — Пая [1], получаем:

$$\frac{\mathbf{x}_{(1)}}{\rho \hat{c} l |\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_{(s)}|} = \mathbf{x}^*_{(1)} \quad (7.1.3-14)$$

$$\frac{\mathbf{x}_2}{\rho \hat{c} l |\nabla \bar{T}|} = \mathbf{x}^*_{(2)}. \quad (7.1.3-15)$$

Здесь

$$\text{для } i = 1, 2 \quad \mathbf{x}^*_{(i)} = \mathbf{x}^*_{(i)} \left( N, \frac{\hat{c} |\nabla \bar{T}| l}{|\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_{(s)}|^2}, \frac{[\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_{(s)}] \cdot \nabla \bar{T}}{|\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_{(s)}| |\nabla \bar{T}|} \right) \quad (7.1.3-16)$$

$$N \equiv \frac{\rho l |\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_{(s)}|}{\mu}. \quad (7.1.3-17)$$

На основании эмпирических наблюдений Дейсслер предложил формулу:

$$\mathbf{q}^{(t)} = -n^2 \rho \hat{c} l |\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_{(s)}| [1 - \exp(-n^2 N)] \nabla \bar{T}. \quad (7.1.3-18)$$

Входящая в это выражение величина  $n$  в точности соответствует величине, входящей в уравнение (4.1.4-21) и рассчитанной в § 4.1.5.

Пример 3. Вихревая теплопроводность при свободной турбулентности. На большом расстоянии от стенки в области свободной турбулентности вместо уравнения (7.1.3-3) можно записать выражение

$$\mathbf{q}^{(t)} = \mathbf{q}^{(t)}(\rho, \hat{c}, l, \nabla \bar{T}). \quad (7.1.3-19)$$

По аналогии с § 5.4.2 мы можем утверждать, что в соответствии с принципом независимости материала от системы отсчета величина  $\mathbf{q}^{(t)}$  должна быть равна:

$$\mathbf{q}^{(t)} = -\kappa (\rho, \hat{c}, l, |\nabla \bar{T}|) \nabla \bar{T}. \quad (7.1.3-20)$$

Однако согласно теореме Бэкингема — Пая [1] величина  $\kappa$  при используемых допущениях должна быть постоянным скаляром:

$$\mathbf{q}^{(t)} = -\kappa \nabla \bar{T}. \quad (7.1.3-21)$$

Этот скаляр  $\kappa$  обычно называется вихревой проводимостью.

Заметим, что теоретическое возражение против применения вихревой вязкости из § 4.1.4 для данного случая неприменимо.

7.1.4 Турбулентный перенос энергии в подогреваемом участке трубы. В трубе радиусом  $R$  течет несжимаемая ньютоновская жидкость, имеющая постоянную вязкость и теплопроводность. При  $z < 0$  стенка трубы изолирована:

$$\text{при } r=R \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = 0. \quad (7.1.4-1)$$

Но для  $z > 0$  радиальная компонента вектора плотности потока энергии постоянна:

$$\text{при } r=R \quad k \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} = q. \quad (7.1.4-2)$$

На очень большом расстоянии от входа в нагреваемый участок жидкость ( $z \rightarrow \infty$ ) имеет постоянную температуру  $T_0$ :

$$\text{для } r \leq R \quad T \rightarrow T_0. \quad (7.1.4-3)$$

На некоторое время сосредоточим свое внимание на распределении температуры в ламинарном подслое и буферной зоне.

В § 4.1.5 рассматривалось распределение скорости в турбулентном течении в трубе. Там мы определили, что существует единственная компонента вектора скорости, отличная от нуля:

$$\bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0; \quad \bar{v}_z = \bar{v}_z(r) \quad (7.1.4-4)$$

В частности, мы нашли, что в пределе

$$N_{(t)} = \frac{\rho v_0 R}{\mu} = \frac{V \rho S_0 R}{\mu} \rightarrow \infty \quad (7.1.4-5)$$

распределение скорости в ламинарном подслое и буферной зоне может быть получено интегрированием выражения

$$\{1 + n^2 v^* s^{**} [1 - \exp(-n^2 v^* s^{**})]\} \frac{dv^*}{ds^{**}} = 1 \quad (7.1.4-6)$$

при граничном условии  $v^* = 0$  при  $r = R$ . (7.1.4-7)

Здесь

$$v^* = \frac{\bar{v}_z}{v_0} = \sqrt{\frac{\rho}{S_0}} \bar{v}_z \quad (7.1.4-8)$$

и

$$s^{**} = \frac{s}{R} N_{(t)}. \quad (7.1.4-9)$$

Результат интегрирования для  $n=0,124$  представлен ниже (см. рис. 4.1.5-1). Так как здесь рассматривается несжимаемая жидкость с постоянной вязкостью, то распределение температуры не оказывает влияния на распределение скорости. Уравнения (7.1.4-4) и (7.1.4-6) здесь также применимы.

Допустим теперь, что среднее по времени распределение температуры в ламинарном подслое и буферной зоне имеет вид:

$$\bar{T} = \bar{T}(r, z). \quad (7.1.4-10)$$

Как указывалось в § 7.1.3 (пример 2), выражение Дейсслера для турбулентного потока энергии можно рекомендовать для области вблизи стенки. Следовательно, среднее по времени дифференциальное уравнение баланса энергии для этой области принимает вид:

$$\begin{aligned} N_{(t)}^{-1} v^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} &= \frac{1}{1 - N_{(t)}^{-1} s^{**}} \frac{\partial}{\partial s^{**}} \left( (1 - N_{(t)}^{-1} s^{**}) \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \frac{1}{N_{Pr}} + n^2 s^{**} v^* [1 - \exp(-n^2 s^{**} v^*)] \right\} \frac{\partial T^*}{\partial s^{**}} \right) + \\ &+ \frac{1}{N_{(t)}^2} \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \left\{ \frac{1}{N_{Pr}} + n^2 s^{**} v^* [1 - \exp(-n^2 s^{**} v^*)] \right\} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right), \end{aligned} \quad (7.1.4-11)$$

где

$$T^* \equiv \frac{\bar{T} - T_0}{qR/k}; \quad z^* \equiv \frac{z}{R}. \quad (7.1.4-12)$$

Поскольку мы рассматриваем турбулентное течение, то с полным основанием можно ограничиться в уравнении (7.1.4-5) пределом, при котором уравнение (7.1.4-11) переходит в соотношение

$$\frac{\partial}{\partial s^{**}} \left( \left\{ \frac{1}{N_{Pr}} + n^2 s^{**} v^* [1 - \exp(-n^2 s^{**} v^*)] \right\} \frac{\partial T^*}{\partial s^{**}} \right) = 0. \quad (7.1.4-13)$$

Важно представлять себе, что при этом мы ограничиваемся ламинарным подслоем и буферной зоной на некотором расстоянии от входа в нагреваемый участок. В § 4.1.5 было доказано, что любое выражение с помощью  $s^{**}$  должно быть справедливым только для области вблизи стенки в пределе при  $N_{(t)} \rightarrow \infty$ . Однако это не столь важно, так как мы пытаемся использовать уравнение (7.1.4-13) только в ламинарном подслое и буферной зоне. Важнее понять, что в пределе при  $N_{(t)} \rightarrow \infty$  уравнение (7.1.4-11) переходит в (7.1.4-13), если использовать новую переменную

$$z^{**} \equiv \frac{z^*}{N^b(t)} \quad (7.1.4-14)$$

для любой величины  $b > 0$ . Аналогия наших рассуждений в § 6.8.1 и 6.8.2 очевидна. Поэтому можно считать, что уравнение (7.1.4-13) при-

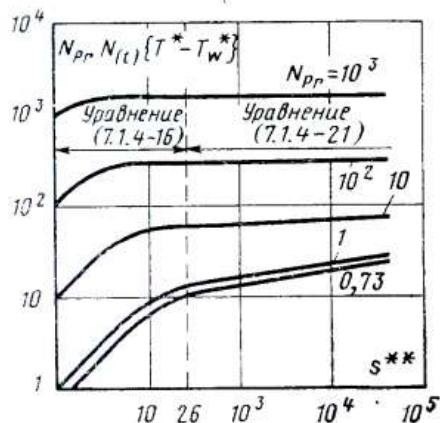


Рис. 7.1.4-1. Теоретическое распределение температуры для турбулентного переноса энергии при течении в круглых трубах;  $N_{Pr} = 0,73$  соответствует течению воздуха [6]; поскольку все кривые имеют положительный наклон для всех значений  $s^{**}$ , они соответствуют заостренному профилю температуры в центре трубы. Эта погрешность существенна только для небольших значений  $N_{Pr}$ .

менимо для описания экспериментальных данных только на некотором расстоянии по течению от входа.

В пределах нагреваемого участка трубы это уравнение необходимо проинтегрировать при условии (7.1.4-2), которое сейчас принимает вид:

$$\frac{\partial T^*}{\partial s^{**}} = -\frac{1}{N_{(t)}} \text{ при } s^{**} = 0. \quad (7.1.4-15)$$

В результате получим:

$$\left\{ \frac{1}{N_{Pr}} - n^2 s^{**} v^* [1 - \exp(-n^2 s^{**} v^*)] \right\} \frac{\partial T^*}{\partial s^{**}} = -\frac{1}{N_{Pr} N_{(t)}}. \quad (7.1.4-16)$$

Последующее интегрирование можно осуществить, используя условие соответствия с полностью развитым турбулентным потоком на кромке буферной зоны, или провести это интегрирование для температур на стенке трубы, как показано на рис. 7.1.4-1.

Изложенное станет более ясным, если мы рассмотрим частный случай:

$$N_{Pr} = 1; \{1 + n^2 s^{**} v^* [1 - \exp(-n^2 s^{**} v^*)]\} \frac{\partial T^*}{\partial s^{**}} = -\frac{1}{N_{(t)}}. \quad (7.1.4-17)$$

Сравнивая это соотношение с уравнением (7.1.4-16), находим:

$$\frac{dT^*}{dv^*} = -\frac{1}{N_{(t)}}. \quad (7.1.4-18)$$

Это выражение легко проинтегрировать при граничном условии (7.1.4-7), а также при условии

$$T^* = T_w^* \text{ при } s^{**} = 0. \quad (7.1.4-19)$$

В результате получим, что для ламинарного подслоя и буферной зоны имеет место соотношение

$$T^* - T_w^* = -\frac{1}{N_{(t)}} v^*. \quad (7.1.4-20)$$

Поэтому можно утверждать, что для  $N_{Pr}=1$  распределения скорости и температуры в пристеночной области подобны.

Если продолжить анализ, то получим следующее выражение для распределения температуры в полностью развитом течении вблизи стенки (за пределами ламинарного подслоя и буферной зоны) и не-стенки (за пределами ламинарного подслоя и буферной зоны) и несколько ниже по течению от входа в нагреваемый участок:

$$T^* - T_w^* = T_{w_1}^* - T_w^* - \frac{1}{N_{Pr} N_{(t)}} \frac{1}{V \eta_1} \ln \left( \frac{s^{**}}{s_{w_1}^{**}} \right). \quad (7.1.4-21)$$

Этот результат показан на рис. 7.1.4-1.

В наших рассуждениях есть по крайней мере один неприятный аспект: аксиальная зависимость  $T^*$  не расшифрована, и поэтому мы не пытались удовлетворить ее граничным условиям (7.1.4-1) и (7.1.4-3). Дело в том, что при граничном условии (7.1.4-2)  $T_w^*$  является функцией положения вдоль оси. С учетом § 6.8.2 можно сделать вывод, что на большом расстоянии по течению от входа в нагреваемый участок трубы будем иметь:

$$T_w^* = A z^*. \quad (7.1.4-22)$$

Это противоречит граничным условиям (7.1.4-1) и (7.1.4-3), а также их логическим эквивалентам

$$T^* = 0 \text{ при } z^* = 0. \quad (7.1.4-23)$$

Но, снова руководствуясь § 6.8.2 можно потребовать:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \rho c (\bar{T} - T_o) \bar{v}_z r dr d\theta - 2\pi R z q = 0. \quad (7.1.4-24)$$

Это уравнение можно использовать для оценки постоянной  $A$  в уравнении (7.1.4-22). Единственная трудность состоит в том, что нельзя быть уверенным, что уравнения (4.1.5-21) (для  $v^*$ ) и (7.1.4-21) в области вблизи центра трубы дают хорошие результаты, так как при их выводе предполагалось, что они могут использоваться только вблизи стенки (хотя и за пределами буферной зоны).

## 7.2. УСРЕДНЕНИЕ ПО ПЛОЩАДИ

**7.2.1. Усреднение по площади при переносе энергии.** Понятие усреднения по площади, введенное в § 4.2.1—4.2.3, обобщается в этом параграфе для переноса энергии. Суть этого подхода состоит в усреднении дифференциального уравнения баланса энергии по поперечному сечению, перпендикулярному общему направлению переноса энергии.

Как и ранее, здесь указано два способа, при которых используется эмпирическое усреднение по площади уравнения баланса энергии. Когда мы прежде всего заинтересованы в зависимости от времени или координат усредненной по площади переменной, обычно требуется сделать несколько утверждений относительно потока энергии на связующей границе раздела фаз с использованием, например, закона охлаждения Ньютона. Этот класс задач проиллюстрирован в § 7.2.2. Приближенная теория теплового пограничного слоя, введенная в § 7.2.3, известна более широко. В этих задачах приближенное распределение температуры в пограничном слое записывается в виде зависимости  $\delta_T(x)$  от длины дуги  $x$ . Усредненное по площади уравнение баланса энергии для пограничного слоя дает обыкновенное дифференциальное уравнение для  $\delta_T$ .

Так как рассматриваемый материал близок к изложенному в § 4.2.1—4.2.3, читателю можно порекомендовать вернуться к этим параграфам.

**7.2.2. Прямоугольное охлаждающее ребро** прямоугольной формы [8]. Решим задачу, в которой вначале рассматривается усредненная по площади переменная.

Рис. 7.2.2-1. Прямоугольное охлаждающее ребро прямоугольного профиля.

Определим эффективность охлаждающего ребра, изображенного на рис. 7.2.2-1. Предположим, что температура стеки, на которой установлено ребро, известна:

$$T = T_w \text{ при } z_1 = 0. \quad (7.2.2-1)$$

Пренебрегаем потерями энергии на конце ребра:

$$\frac{\partial T}{\partial z_1} = 0 \quad \text{при } z_1 = L. \quad (7.2.2-2)$$

Требуется определить распределение температуры в ребре. Можно предположить, что температура является функцией всех трех координат:

$$T = T(z_1, z_2, z_3). \quad (7.2.2-3)$$

Дифференциальное уравнение баланса энергии, которое нужно решить, принимает вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z_3^2} = 0. \quad (7.2.2-4)$$

По-видимому, при таких условиях нет необходимости знать подробное распределение температуры в ребре. Достаточно определить зависимость средней температуры

$$\bar{T} = \frac{1}{2BW} \int_{-B}^{BW} \int_0^W T dz_2 dz_3 \quad (7.2.2-5)$$

от  $z_1$ . При таком определении усреднение по площади находится из уравнения (7.2.2-4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z_1^2} + \frac{1}{2BW} \int_{-B}^B \left( \frac{\partial T}{\partial z_2} \Big|_{z_2=W} - \frac{\partial T}{\partial z_2} \Big|_{z_2=0} \right) dz_3 + \\ + \frac{1}{2BW} \int_0^W \left( \frac{\partial T}{\partial z_3} \Big|_{z_3=-B} - \frac{\partial T}{\partial z_3} \Big|_{z_3=B} \right) dz_2 = 0. \end{aligned} \quad (7.2.2-6)$$

Будем использовать закон охлаждения Ньютона для поверхности в виде

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h(\bar{T} - T_a), \quad (7.2.2-7)$$

где  $T_a$  — температура окружающей среды. Следовательно,

$$k \frac{\partial T}{\partial z_2} = h(\bar{T} - T_a) \text{ при } z_2 = 0; \quad (7.2.2-8)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial z_2} = h(\bar{T} - T_a) \text{ при } z_2 = W; \quad (7.2.2-9)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z_3} = h(\bar{T} - T_a) \text{ при } z_3 = -B \quad (7.2.2-10)$$

и

$$-k \frac{\partial T}{\partial z_3} = h(\bar{T} - T_a) \text{ при } z_3 = B. \quad (7.2.2-11)$$

С учетом этих соотношений уравнение (7.2.2-6) сводится к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z_1^2} = \frac{h}{k} \left( \frac{2}{W} + \frac{1}{B} \right) (\bar{T} - T_a). \quad (7.2.2-12)$$

Теперь целесообразно ввести безразмерные переменные

$$\bar{T}^* \equiv \frac{\bar{T} - T_a}{T_w - T_a} \quad (7.2.2-13)$$

и

$$z^* \equiv \frac{z_1}{L}. \quad (7.2.2-14)$$

Это позволяет нам записать уравнение (7.2.2-12) в упрощенном виде:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}^*}{\partial z_1^2} = N^2 \bar{T}^*, \quad (7.2.2-15)$$

где

$$N^2 \equiv \frac{hL^2}{k} \left( \frac{2}{W} + \frac{1}{B} \right). \quad (7.2.2-16)$$

Из уравнений (7.2.2-1) и (7.2.2-2) очевидно, что соответствующими граничными условиями будут:

$$T^* = 1 \text{ при } z^* = 0; \quad (7.2.2-17)$$

$$\frac{d\bar{T}^*}{dz^*} = 0 \text{ при } z^* = 1. \quad (7.2.2-18)$$

Легко найти, что решением уравнения (7.2.2-15) при граничных условиях (7.2.2-18) и (7.2.2-17) будет:

$$\bar{T}^* = \frac{\operatorname{ch}(N[1-z^*])}{\operatorname{ch} N}. \quad (7.2.2-19)$$

Коэффициент полезного действия ребра [8] определяется в виде:

$$\eta \equiv \frac{\text{тепло, которое действительно рассеивается поверхностью ребра}}{\text{тепло, которое могло бы рассеиваться (без изменения } h\text{), если бы температура поверхности поддерживалась равной } T_w}. \quad (7.2.2-20)$$

Из уравнения (7.2.2-19) легко получим:

$$\eta = \frac{\int_0^W \int_0^L h(\bar{T} - T_a) dz_1 dz_2 + \int_{-B}^B \int_0^L h(\bar{T} - T_a) dz_1 dz_3}{\int_0^W \int_0^L h(T_w - T_a) dz_1 dz_2 + \int_{-B}^B \int_0^L h(T_w - T_a) dz_1 dz_3} = \int_0^L \bar{T}^* dz^* = \frac{\operatorname{th}(N)}{N}. \quad (7.2.2-21)$$

Более подробно задачи о ребрах рассматриваются в работах [8, 9].

*7.2.3 Приближенная теория теплового пограничного слоя для двумерного обтекания искривленной стенки.* Теория теплового пограничного слоя разработана в § 6.7.1—6.7.6 для предельного случая при  $N_{Re} \rightarrow \infty$ . Уравнение баланса энергии для пограничного слоя решить значительно проще, чем полное уравнение баланса энергии. Однако не всегда можно решить дифференциальное уравнение в частных производных. Приближенная теория теплового пограничного слоя позволяет избежать этого затруднения.

Ограничимся рассмотрением двумерного стационарного обтекания искривленной стенки потоком несжимаемой ньютоновской жидкости. Все свойства материала считаются независимыми от температуры, поэтому можно использовать распределения скорости, полученные в § 4.2.1—4.2.3.

В § 6.7.3 мы определили, что при данных условиях дифференциальное уравнение баланса энергии имеет вид:

$$v_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v_y^{**} \nu \frac{\partial T^*}{\partial y^{**}} = \frac{1}{N_{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial^2 y^{**}}, \quad (7.2.3-1)$$

где

$$y^{**} \equiv (N_{Re})^{1/2} y^*, \quad v_y^{**} \nu \equiv (N_{Re})^{1/2} v_y^*. \quad (7.2.3-2)$$

Для пограничного слоя на искривленной стенке будем искать решение уравнения (7.2.3-1) при граничных условиях:

$$T^* = T_w^* \text{ при } y^{**} = 0; \quad (7.2.3-3)$$

$$T^* \rightarrow \tilde{T}^* \text{ при } y^{**} \rightarrow \infty. \quad (7.2.3-4)$$

Через  $\tilde{T}^*$  мы обозначили безразмерное распределение температуры на искривленной стенке для соответствующего течения невязкой нетеплопроводной жидкости:

$$d\tilde{T}^*/dx^* = 0. \quad (7.2.3-5)$$

Сначала проинтегрируем уравнение (7.2.3-1) по всему тепловому пограничному слою:

$$\int_0^{\infty} \left( v_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v_{y^*}^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} - \frac{1}{N_{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^* \partial x^*} \right) dy^* = 0. \quad (7.2.3-6)$$

При этом целесообразны некоторые преобразования.

В § 4.2.3 мы нашли, что из дифференциального уравнения неразрывности следует соотношение

$$v_{y^*}^* = - \int_0^{y^*} \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} dy^*. \quad (7.2.3-7)$$

Интегрируя по частям, а также используя (7.2.3-7), запишем второй член левой части уравнения (7.2.3-6) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} v_{y^*}^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} dy^* &= - \int_0^{\infty} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \left( \int_0^{y^*} \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} dy^* \right) dy^* = \\ &= - \tilde{T}^* \int_0^{\infty} \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} dy^* + \int_0^{\infty} T^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} dy^*. \end{aligned} \quad (7.2.3-8)$$

Непосредственно интегрируя третий член в левой части (7.2.3-6), находим:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^* \partial x^*} dy^* = - \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0}. \quad (7.2.3-9)$$

При этом необходимо потребовать, чтобы

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \rightarrow 0 \text{ при } y^* \rightarrow \infty. \quad (7.2.3-10)$$

Используя уравнения (7.2.3-8) и (7.2.3-9), перепишем уравнение (7.2.3-6) следующим образом:

$$\frac{d}{dx^*} \int_0^{\infty} v_x^* (T^* - \tilde{T}^*) dy^* = - \frac{1}{N_{Pr}} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=0}. \quad (7.2.3-11)$$

В § 4.2.3 мы ввели приближенное распределение скорости

$$v_x^*/\tilde{v}_x^* = h(x^*, \eta), \quad (7.2.3-12)$$

где

$$\eta \equiv \frac{y^*}{\delta^{**}(x^*)} = \frac{y}{\delta(x)}. \quad (7.2.3-13)$$

По аналогии введем приближенное распределение температуры

$$\frac{T^* - \tilde{T}^*}{T_w^* - \tilde{T}^*} = g(\eta_T), \quad (7.2.3-14)$$

где по определению

$$\eta_T \equiv \frac{y^*}{\delta^{**}_T(x^*)} = \frac{y}{\delta_T(x)}. \quad (7.2.3-15)$$

Так же как  $\delta(x)$ , функция  $\delta_T(x)$  не имеет определенного физического смысла, хотя примерно можно считать, что она является приближенной толщиной теплового пограничного слоя. Следовательно, функция  $g(\eta_T)$  должна удовлетворять условию

$$g=0 \text{ для } \eta_T \geq 1. \quad (7.2.3-16)$$

Эти приближенные распределения температуры и скорости позволяют рассчитать в уравнении (7.2.3-11):

$$\int_0^{\infty} v_x^*(T^* - \tilde{T}^*) dy^{**} = \tilde{v}_x^*(T_w^* - \tilde{T}^*) \delta_T^{**} \gamma_1 \quad (7.2.3-17)$$

и

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^{**}} \Big|_{y^{**}=0} = \frac{T_w^* - \tilde{T}^*}{\delta_T^{**}} \gamma_2. \quad (7.2.3-18)$$

Если определить

$$\Delta \equiv \frac{\delta_T^{**}}{\delta^{**}} = \frac{\delta_T}{\delta}, \quad (7.2.3-19)$$

то станет ясным, что

$$\text{для } \Delta < 1 \quad \gamma_1 \equiv \int_0^1 h(x^*, \eta) g(\eta_T) d\eta_T; \quad (7.2.3-20)$$

$$\text{для } \Delta > 1 \quad \gamma_1 \equiv \frac{1}{\Delta} \int_0^1 [h(x^*, \eta) - 1] g(\eta_T) d\eta_T + \int_0^1 g(\eta_T) d\eta_T \quad (7.2.3-21)$$

$$\gamma_2 \equiv \frac{\partial T^*}{\partial \eta_T} \Big|_{\eta_T=0}. \quad (7.2.3-22)$$

С помощью уравнений (7.2.3-17) и (7.2.3-18) можно уравнение (7.2.3-11) представить в виде

$$\frac{d}{dx^*} [\tilde{v}_x^*(T_w^* - \tilde{T}^*) \delta_T^{**} \gamma_1] = - \frac{T_w^* - \tilde{T}^*}{N_{Pr} \delta_T^{**}} \gamma_2. \quad (7.2.3-23)$$

По аналогии с § 4.2.3 используем частное приближенное распределение температуры

$$\frac{T^* - \tilde{T}^*}{T_w^* - \tilde{T}^*} = g(\eta_T) = a + b\eta_T + c\eta_T^2 + d\eta_T^3 + e\eta_T^4. \quad (7.2.3-24)$$

Найдем пять параметров, потребовав, чтобы уравнение (7.2.3-24) удовлетворяло условиям (7.2.3-3), (7.2.3-4) и (7.2.3-10), а также

$$\text{при } y^{**} = 0 \quad \frac{\partial^2 T^*}{\partial^2 y^{**}} = 0 \quad (7.2.3-25)$$

и

$$\text{при } y^{**} \rightarrow \infty \quad \frac{\partial^2 T^*}{\partial^2 y^{**}} \rightarrow 0. \quad (7.2.3-26)$$

В результате найдем:

$$\frac{T^* - \tilde{T}^*}{T_w^* - \tilde{T}^*} = g(\eta_T) = 1 - 2\eta_T + 2\eta_T^3 - \eta_T^4, \quad (7.2.3-27)$$

что позволяет получить точные выражения для  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в уравнениях (7.2.3-20) — (7.2.3-22):

$$\begin{aligned} \text{для } \Delta < 1 \quad \gamma_1 = & \frac{2}{15} \Delta - \frac{3}{140} \Delta^3 + \frac{1}{180} \Delta^4 + \\ & + \frac{\Lambda}{6} \left( \frac{1}{15} \Delta - \frac{1}{14} \Delta^2 + \frac{9}{280} \Delta^3 - \frac{1}{180} \Delta^4 \right); \end{aligned} \quad (7.2.3-28)$$

$$\begin{aligned} \text{для } \Delta > 1 \quad \gamma_1 = & \frac{3}{10} - \frac{3}{10\Delta} + \frac{2}{15\Delta^2} - \frac{3}{140\Delta^4} + \frac{1}{180\Delta^6} + \\ & + \frac{\Lambda}{6} \left( \frac{1}{20\Delta} - \frac{1}{30\Delta^2} + \frac{1}{140\Delta^4} - \frac{1}{504\Delta^6} \right) \end{aligned} \quad (7.2.3-29)$$

и

$$\gamma_2 = -2. \quad (7.2.3-30)$$

Величина  $\Lambda$  была найдена в § 4.2.3:

$$\Lambda = \delta^{**2} \frac{d\tilde{v}_x^*}{dx}. \quad (7.2.3-31)$$

Иногда более удобно записать уравнение (7.2.3-23) в виде

$$\frac{d}{dx^4} [\tilde{v}_x^* (T_w^* - \tilde{T}^*) \delta_{\tau}^* \gamma_1]^2 = -\frac{4}{N_{Pr}} \tilde{v}_x^* (T_w^* - \tilde{T}^*)^2 \gamma_1. \quad (7.2.3-32)$$

Это выражение необходимо рассматривать как дифференциальное уравнение для  $\delta_{\tau}^*$ , совместимое с условием

$$\text{при } x^* = 0 \quad \delta_{\tau}^* = 0, \quad (7.2.3-33)$$

так как распределение температуры на стенке считается известным. Интегрируя уравнение (7.2.3-32), необходимо уточнить, является ли значение  $\Delta$  большим или меньшим единицы. При обтекании изотермической плоской пластины в отсутствие вязкой диссипации распределение скорости и температуры при  $N_{Pr}=1$  одинаковы по своему виду. Это означает, что для обтекания изотермической плоской пластины  $\Delta=1$  при  $N_{Pr}=1$ . Отметим, что из уравнений (7.2.3-28) и (7.2.3-29) следует, что  $\Delta \neq 1$ , для обтекания искривленной стенки  $\Delta \neq 0$ .

Два случая заслуживают особого рассмотрения. Для обтекания изотермической искривленной стенки уравнение (7.2.3-32) сводится к виду:

$$\frac{d}{dx^*} (\tilde{v}_x^* \delta_{\tau}^* \gamma_1)^2 = -\frac{4}{N_{Pr}} \tilde{v}_x^* \gamma_1. \quad (7.2.3-34)$$

Для обтекания изотермической плоской пластины уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dx^*} (\delta_{\tau}^* \gamma_1)^2 = \frac{4\gamma_1}{N_{Pr}}. \quad (7.2.3-35)$$

Интегрируя уравнение (7.2.3-35), Шлихтинг [10] определил, что погрешность при определении числа Нуссельта составляет всего 3% по сравнению с соответствующим результатом, полученным из точной теории пограничного слоя.

### 7.3. ЛОКАЛЬНОЕ УСРЕДНЕНИЕ ПО ОБЪЕМУ

*7.3.1. Перенос энергии в пористой среде.* Очень часто в своей практике мы имеем дело с экзотермическими химическими реакциями в слое пористых частиц, пропитанных катализатором. Иногда природный газ обнаруживается в скальных породах низкой проницаемости, и для увеличения его производства проводятся подземные ядерные взрывы. На западе США и в Канаде имеются значительные залежи песчаника или полужидких битумов; было предложено использовать направленное подземное горение для термического разложения этих битумов и возможных продуктов на месте. Все эти процессы имеют одно общее качество, и для их анализа необходимо понять перенос энергии в пористых средах.

Вероятно, самым общим подходом к исследованию процесса переноса энергии в пористых средах является рассмотрение пористого твердого тела и любых содержащихся в нем газов или жидкостей в качестве сплошной среды, для которой затем используется обыкновенное дифференциальное уравнение энергии вида рассмотренного в § 5.3.2 [11]. При этом не делается попытка проводить различие между переносом энергии в жидкости и в твердом теле<sup>1</sup>.

Более того, используемые скорость и температура не определяются с помощью действительных распределений скорости и температуры в твердой и жидкой фазах.

Успех наших рассуждений при изучении переноса импульса в § 4.3.1—4.3.11 наводит на мысль использовать тот же подход и при изучении переноса энергии. Поэтому мы начнем с локального усреднения по объему дифференциального уравнения баланса энергии. Для простоты ограничимся рассмотрением течения одной несжимаемой жидкости в неподвижной жесткой пористой среде.

*7.3.2. Локально усредненное по объему дифференциальное уравнение баланса энергии.* В § 4.3.2, 4.3.4 и 4.3.5 мы использовали локально усредненные по объему уравнение неразрывности и первый закон Коши. Точнее, это были локально усредненные по объему уравнения неразрывности и первого закона Коши для течения жидкости в пористой среде, потому что тогда следствия закона сохранения массы и первого закона Эйлера для твердого тела не имели для нас большого значения. Теперь учет переноса энергии как в твердом теле, так и в жидкости очень важен. Сначала получим локально усредненное по объему дифференциальное уравнение баланса энергии для каждой фазы.

Жидкость будем считать несжимаемой, вязкой диссипацией в дифференциальном уравнении баланса энергии пренебрегаем (в принципе, необходимо обосновать, что  $N_{Br}/N_{Pr}N_{Re} \rightarrow 0$ ; см. § 6.4.1) и исключаем возможность взаимной и внешней передачи энергии (излучение). При этих условиях локально усредненное по объему дифференциальное уравнение баланса энергии в форме уравнения (Д) табл. 5.6.1-1 дает для жидкости:

$$\frac{1}{V} \int_{V_{(f)}} \left( \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} \operatorname{div}(T\mathbf{v}) + \operatorname{div} \mathbf{q} \right) dV = 0. \quad (7.3.2-1)$$

<sup>1</sup> Исключение составляет работа [8] по испарительному пористому охлаждению, в которой проводится различие между переносом тепла в твердом теле и в жидкости; однако температура и скорость не определяются как средние действительных распределений скорости и температуры в твердой и жидкой фазах.

Переставим операции объемного интегрирования и дифференцирования в о времени:

$$\frac{1}{V} \int_{V(f)} \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} \frac{\partial T}{\partial t} dV = \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} \frac{\partial \bar{T}^{(f)}}{\partial t}. \quad (7.3.2-2)$$

Здесь удельная теплоемкость  $\hat{c}_{(f)}$  считается постоянной. Если  $B$  — скаляр, вектор или тензорное поле второго ранга, то его локальное среднее по объему для жидкости определяется так:

$$\bar{B}^{(f)} = \frac{1}{V} \int_{V(f)} B dV. \quad (7.3.2-3)$$

С помощью теоремы § 4.3.3 представим второй и третий члены в левой части уравнения (7.3.2-1) в виде

$$\frac{1}{V} \int_{V(f)} \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} \operatorname{div}(T\mathbf{v}) dV = \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} \operatorname{div}(\bar{T}\mathbf{v})^{(f)} \quad (7.3.2-4)$$

$$\frac{1}{V} \int_{V(f)} \operatorname{div} \mathbf{q} dV = \operatorname{div} \bar{\mathbf{q}}^{(f)} + \frac{1}{V} \int_{S_w} \mathbf{q}_{(f)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (7.3.2-5)$$

Величина  $\mathbf{n}$  определяется как единичная нормаль к поверхности  $S_w$ , направленная из жидкой фазы в твердую. При выводе уравнения (7.3.2-4) учитывалось, что вектор скорости на поверхности раздела  $S_w$  жидкой и твердой фаз должен быть равен нулю. Предположим, что закон Фурье описывает тепловое поведение как жидкости, так и твердого вещества. Теплопроводность обеих фаз будем считать постоянной. Используя теорему из § 4.3.3, находим:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}^{(f)} &= \frac{1}{V} \int_{V(f)} \mathbf{q}_{(f)} dV = - \frac{k_{(f)}}{V} \int_{V(f)} \nabla T_{(f)} dV = \\ &= - k_{(f)} \nabla \bar{T}^{(f)} - \frac{k_{(f)}}{V} \int_{S_w} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (7.3.2-6)$$

С учетом (7.3.2-2) и (7.3.2-4)–(7.3.2-6) уравнение (7.3.2-1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} \frac{\partial \bar{T}^{(f)}}{\partial t} + \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} \operatorname{div}(\bar{T}\mathbf{v})^{(f)} - k_{(f)} \operatorname{div}(\nabla \bar{T}^{(f)}) - \\ - k_{(f)} \operatorname{div} \left( \frac{1}{V} \int_{S_w} T \mathbf{n} dS \right) + \frac{1}{V} \int_{S_w} \mathbf{q}_{(f)} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \end{aligned} \quad (7.3.2-7)$$

Используя эти же рассуждения, получаем локально усредненное по объему дифференциальное уравнение баланса энергии для неподвижной твердой фазы:

$$\rho_{(s)} \hat{c}_{(s)} \frac{\partial \bar{T}^{(s)}}{\partial t} - k_{(s)} \operatorname{div}(\nabla \bar{T}^{(s)}) + k_{(s)} \operatorname{div} \left( \frac{1}{V} \int_{S_w} T \mathbf{n} dS \right) - \frac{1}{V} \int_{S_w} \mathbf{q}_{(s)} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (7.3.2-8)$$

Если сравнить это соотношение с уравнением (7.3.2-7), можно заметить, что последние два члена в них имеют разные знаки. Это различие возникло в результате определения нормали  $\mathbf{n}$ , имеющей направление от жидкой фазы к твердой.

Мы не будем учитывать любые незначительные перепады температур между твердой и жидкими фазами и поэтому предположим<sup>1</sup>:

$$\frac{1}{\Psi} \bar{T}^{(f)} = \frac{1}{1 - \Psi} \bar{T}^{(s)} = \langle T \rangle^{(m)}, \quad (7.3.2-9)$$

где локальная средняя по объему температура для обеих фаз определяется в виде

$$\langle T \rangle^{(m)} = \frac{1}{V} \int_V T dV. \quad (7.3.2-10)$$

Через  $\Psi$  обозначим пористость:

$$\Psi = \frac{V_{(f)}}{V}. \quad (7.3.2-11)$$

Сумма уравнений (7.3.2-7) и (7.3.2-8) требует выполнения соотношения:

$$[\Psi \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} + (1 - \Psi) \rho_{(s)} \hat{c}_{(s)}] \frac{\partial \langle T \rangle^{(m)}}{\partial t} + \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} \operatorname{div} (\Psi \langle T \rangle^{(m)} \bar{\mathbf{v}}^{(f)}) = \\ = k_{(f)} \operatorname{div} [\nabla (\Psi \langle T \rangle^{(m)})] + k_{(s)} \operatorname{div} \{ \nabla [(1 - \Psi) \langle T \rangle^{(m)}] \} + \operatorname{div} \mathbf{h}, \quad (7.3.2-12)$$

где

$$\mathbf{h} = \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} (\bar{T}^{(f)} \bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{T} \bar{\mathbf{v}}^{(f)}) + (k_{(f)} - k_{(s)}) \frac{1}{V} \int_{S_w} T \mathbf{n} dS. \quad (7.3.2-13)$$

При выводе уравнения (7.3.2-12) мы удовлетворили условию баланса для скачка энергии на границе раздела фаз  $S_w$ .

Первый член справа в уравнении (7.3.2-13) учитывает неравенство локального среднего произведения по объему произведению двух локальных средних по объему. Для достаточно малого объема усреднения этим членом можно пренебречь, так как температура, вероятно, не сильно зависит от координаты. Второй член справа в уравнении (7.3.2-13) можно назвать тепловой извилостью, которая учитывает изгибы и повороты проходов для жидкости. Такое объяснение этого члена используется потому, что эта величина должна быть тождественно равна нулю, если поверхность  $S_w$  была прямым круговым цилиндром, для которого  $T$  должна зависеть только от положения на оси. Поскольку второй член в правой части уравнения (7.3.2-13) имеет большее значение, чем первый, мы будем называть его вектором тепловой извилости  $\mathbf{h}$ .

Локально усредненное по объему дифференциальное уравнение баланса (7.3.2-12) значительно упрощается, если величина  $\Psi$  не зависит от координаты:

$$[\Psi \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} + (1 - \Psi) \rho_{(s)} \hat{c}_{(s)}] \frac{\partial \langle T \rangle^{(m)}}{\partial t} + \\ + \Psi \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} \operatorname{div} (\langle T \rangle^{(m)} \bar{\mathbf{v}}^{(f)}) = - \operatorname{div} \mathbf{q}^{(e)}. \quad (7.3.2-14)$$

<sup>1</sup> В работе [8] при анализе испарительного пористого охлаждения сделано аналогичное предположение.

## Вектор

$$\mathbf{q}^{(e)} = -[\Psi k_{(f)} + (1 - \Psi) k_{(s)}] \nabla \langle T \rangle^{(m)} + \mathbf{h} \quad (7.3.2-15)$$

будем называть вектором «эффективного» потока энергии. После этих упрощений в следующих параграфах мы будем рассматривать структуру однородной пористости.

**7.3.3 Эмпирические соотношения для  $\mathbf{h}$ .** В этом параграфе приводятся три примера использования экспериментальных данных для построения соотношений для величины  $\mathbf{h}$ , введенной в § 7.3.2, исходя из следующего:

1. Вектор тепловой извилистики  $\mathbf{h}$  не зависит от системы отсчета:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^* &\equiv \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} (\bar{T}^{*(f)} \bar{\mathbf{v}}^{*(f)} - \bar{T}^* \bar{\mathbf{v}}^{*(f)}) + (k_{(f)} - k_{(s)}) \frac{1}{V} \int_{S_w} T^* \mathbf{n}^* dS = \\ &= \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} [\overline{T^* (\bar{\mathbf{v}}^{*(f)} - \mathbf{v}^*)}]^{(f)} + (k_{(f)} - k_{(s)}) \frac{1}{V} \int_{S_w} T^* \mathbf{n}^* dS = \\ &= \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} [\overline{T \mathbf{Q} \cdot (\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \mathbf{v})}]^{(f)} + (k_{(f)} - k_{(s)}) \frac{1}{V} \int_{S_w} T \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (7.3.3-1)$$

Вторая строка этого уравнения означает, что локальное среднее по объему от локального среднего по объему является локальным средним по объему; в третьей строке уравнения использовано свойство независимости температуры и разности скоростей от системы отсчета. Здесь  $\mathbf{Q}$  может быть зависящим от времени ортогональным тензором второго ранга.

2. Полагаем, что введенный в § 2.3.1 принцип независимости материала от системы отсчета справедлив для любых эмпирических соотношений для  $\mathbf{h}$ .

3. Теорема Бэкингема—Пая накладывает дальнейшее ограничение на форму любого выражения для  $\mathbf{h}$ .

4. Поверхность усреднения  $S$  настолько велика, что  $\mathbf{h}$  можно не считать явной функцией положения в пористой структуре, хотя она вполне может быть неявной функцией координат в результате зависимости от других переменных.

*Пример 1. Неориентированное пористое твердое вещество, заполненное неподвижной жидкостью.* Понятие «неподвижная» жидкость означает, что в ней отсутствует общее движение, т. е.

$$\mathbf{v}^{(f)} = 0. \quad (7.3.3-2)$$

Это означает, что первым членом справа в уравнении (7.3.2-13) можно пренебречь. Тогда запишем:

$$\mathbf{h} = (k_{(f)} - k_{(s)}) \frac{1}{V} \int_{S_w} T \mathbf{n} dS. \quad (7.3.3-3)$$

Для геометрически подобной неориентированной пористой среды  $\mathbf{h}$  может быть функцией локального «диаметра» частицы  $l_0$ , теплопроводностей  $k_{(f)}$  и  $k_{(s)}$ , пористости  $\Psi$ , а также некой меры локального распределения температуры типа  $\nabla \langle T \rangle^{(m)}$ :

$$\mathbf{h} = \mathbf{h} (l_0, k_{(f)}, k_{(s)}, \Psi, \nabla \langle T \rangle^{(m)}). \quad (7.3.3-4)$$

На некоторое время сосредоточим свое внимание на зависимости  $\mathbf{h}$  от  $\nabla \langle T \rangle^{(m)}$ :

$$\mathbf{h} = \widehat{\mathbf{h}} (\nabla \langle T \rangle^{(m)}). \quad (7.3.3-5)$$

Согласно принципу независимости материала от системы отсчета функциональная зависимость между этими двумя переменными должна быть одинаковой для любой системы отсчета. Следовательно,

$$\mathbf{h}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{Q} \cdot \widehat{\mathbf{h}} (\nabla \langle T \rangle^{(m)}) = \widehat{\mathbf{h}} (\mathbf{Q} \cdot \nabla \langle T \rangle^{(m)}), \quad (7.3.3-6)$$

т. е.  $\widehat{\mathbf{h}}$  является изотропной функцией [12]:

$$\widehat{\mathbf{h}} (\nabla \langle T \rangle^{(m)}) = \mathbf{Q}^T \cdot \widehat{\mathbf{h}} (\mathbf{Q} \cdot \nabla \langle T \rangle^{(m)}). \quad (7.3.3-7)$$

Используя теорему представления для изотропной векторной функции одного вектора [13], можно записать:

$$\mathbf{h} = \widehat{\mathbf{h}} (\nabla \langle T \rangle^{(m)}) = H \nabla \langle T \rangle^{(m)}, \quad (7.3.3-8)$$

где

$$H = \widehat{H} (|\nabla \langle T \rangle^{(m)}|). \quad (7.3.3-9)$$

Сравнение уравнений (7.3.3-8) и (7.3.3-9) с уравнением (7.3.3-4) показывает, что

$$H = H (l_0, k_{(f)}, k_{(s)}, \Psi, |\nabla \langle T \rangle^{(m)}|). \quad (7.3.3-10)$$

С помощью теоремы Бэкингема — Пая получим:

$$H = k_{(s)} K^*. \quad (7.3.3-11)$$

Здесь

$$K^* = K^* \left( \frac{k_{(f)}}{k_{(s)}}, \Psi \right). \quad (7.3.3-12)$$

Подводя итог, можно отметить, что уравнения (7.3.3-8), (7.3.3-11) и (7.3.3-12) представляют собой возможную простейшую форму эмпирических соотношений для вектора тепловой извилистики в неориентированной пористой среде.

*Пример 2. Неориентированный твердый пористый материал, заполненный текущей жидкостью.* Для геометрически подобной неориентированной пористой среды, через которую течет жидкость, величина  $\mathbf{h}$  может быть функцией локального диаметра частицы  $l_0$ , теплопроводностей  $k_{(f)}$  и  $k_{(s)}$ , пористости  $\Psi$ , плотности жидкости  $\rho_{(f)}$ , удельной массовой теплоемкости  $c_{(f)}$ , локально усредненной по объему скорости жидкости относительно к локально усредненной по объему скорости твердого тела  $\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}$ , а также некоторой меры локального распределения температуры  $\nabla \langle T \rangle^{(m)}$ :

$$\mathbf{h} = \mathbf{h} (l_0, k_{(f)}, k_{(s)}, \Psi, \rho_{(f)}, c_{(f)}, \bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}, \nabla \langle T \rangle^{(m)}). \quad (7.3.3-13)$$

Сначала исследуем зависимость  $\mathbf{h}$  от двух векторов:

$$\mathbf{h} = \widehat{\mathbf{h}} (\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}, \nabla \langle T \rangle^{(m)}). \quad (7.3.3-14)$$

Согласно принципу независимости материала от системы отсчета функциональная зависимость этих переменных должна быть одинаковой для любой системы отсчета. Следовательно,

$$\mathbf{h}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{Q} \cdot \widehat{\mathbf{h}} (\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}, \nabla \langle T \rangle^{(m)}) = \widehat{\mathbf{h}} (\mathbf{Q} \cdot [\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}], \mathbf{Q} \cdot \nabla \langle T \rangle^{(m)}), \quad (7.3.3-15)$$

т. е.  $\widehat{\mathbf{h}}$  является изотропной функцией [12]:

$$\widehat{\mathbf{h}} (\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}, \nabla \langle T \rangle^{(m)}) = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{h} \cdot (\mathbf{Q} [\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}], \mathbf{Q} \cdot \nabla \langle T \rangle^{(m)}). \quad (7.3.3-16)$$

Согласно теоремам представления Спенсера — Ривлина [4], а также Смита [5] наиболее общая изотропная полиномиальная векторная функция двух векторов имеет вид:

$$\mathbf{h} = H_{(1)} \nabla \langle T \rangle^{(m)} + H_{(2)} (\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}). \quad (7.3.3-17)$$

Здесь  $H_{(1)}$  и  $H_{(2)}$  являются скалярными многочленами от  $|\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}|$ ,  $|\nabla \langle T \rangle^{(m)}|$  и  $(\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}) \cdot \nabla \langle T \rangle^{(m)}$ , а также других скалярных переменных, указанных в уравнении (7.3.3-13): для

$$i = 1, 2 \quad H_{(i)} = H_{(i)} (|\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}|, |\nabla \langle T \rangle^{(m)}|, [\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}] \cdot \nabla \langle T \rangle^{(m)}, l_0, k_{(f)}, k_{(s)}, \Psi, \rho_{(f)}, c_{(f)}). \quad (7.3.3-18)$$

Следует отметить, что, используя теорему Спенсера — Ривлина, мы отождествляем вектор  $\mathbf{b}$ , имеющий ковариантные компоненты  $b_i$ , с кососимметричным тензором, имеющим контравариантные компоненты  $\epsilon^{ijk} b_i$ . Эта теорема требует наличия добавочного члена в (7.3.3-17), пропорционального векторному произведению  $(\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}) \Delta \nabla \langle T \rangle^{(m)}$ . Эта величина не удовлетворяет требованию изотропности извилистости  $\mathbf{h}$  [12] и, следовательно, опускается.

С помощью теоремы Бэкингема — Пая [1] получим:

$$H_{(1)} = k_{(s)} H^*_{(1)} \quad (7.3.3-19)$$

и

$$H_{(2)} = \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} l_0 |\nabla \langle T \rangle^{(m)}| H^*_{(2)}. \quad (7.3.3-20)$$

Здесь

$$\text{для } i = 1, 2 \quad H^*_{(i)} = H^*_{(i)} \left( \frac{k_{(f)}}{k_{(s)}}, N_{Pe}, \frac{[\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}] \cdot \nabla \langle T \rangle^{(m)}}{|\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}| |\nabla \langle T \rangle^{(m)}|}, \Psi \right); \quad (7.3.3-21)$$

$$N_{Pe} \equiv \frac{\rho_f \hat{c}_{(f)} |\bar{\mathbf{v}}^{(f)} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}| l_0}{k_{(s)}}. \quad (7.3.3-22)$$

Можно ожидать, что для  $|\nabla \langle T \rangle^{(m)}| = 0$   $H_{(2)} = 0$ , причем в этом пределе  $\mathbf{h} = 0$ .

Уравнения (7.3.3-17) и (7.3.3-19) — (7.3.3-21) представляют собой наиболее простую форму эмпирического соотношения для вектора тепловой извилистости  $\mathbf{h}$  для течения жидкости в неориентированной пористой среде.

*Пример 3. Ориентированный пористый твердый материал, заполненный неподвижной жидкостью.* Не следует ожидать, что уравнения (7.3.3-8), (7.3.3-11) и (7.3.3-12) дают вектор тепловой извилистости для пористых структур, в которых диаметр частицы  $l$  является функцией координат. Для такой структуры уравнение (7.3.3-4) необходимо модифицировать, чтобы учсть зависимость от дополнительных векторных или тензорных величин. Например, можно постулировать зависимость  $\mathbf{h}$  от локального градиента диаметра частицы, а также от  $\nabla \langle T \rangle^{(m)}$ :

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(l, k_{(f)}, k_{(s)}, \Psi, \nabla \langle T \rangle^{(m)}, \nabla l). \quad (7.3.3-23)$$

По аналогии с примером 2 с помощью принципа независимости материала от системы отсчета и теоремы Бэкингема — Пая можно заключить:

$$\mathbf{h} = K_{(1)} \nabla \langle T \rangle^{(m)} + K_{(2)} \nabla l, \quad (7.3.3-24)$$

где

$$K_{(1)} = k_{(s)} K^*_{(1)}; \quad (7.3.3-25)$$

$$K_{(2)} = k_{(s)} |\nabla \langle T \rangle^{(m)}| K^*_{(2)} \quad (7.3.3-26)$$

и

$$\text{для } i = 1, 2 \quad K^*_{(i)} = K^*_{(i)} \left( \frac{k_{(f)}}{k_{(s)}}, \frac{\nabla l \nabla \langle T \rangle^{(m)}}{|\nabla l| |\nabla \langle T \rangle^{(m)}|}, |\nabla l|, \Psi \right). \quad (7.3.3-27)$$

Уравнения (7.3.3-24) — (7.3.3-27) представляют собой наиболее простую форму эмпирических соотношений для вектора тепловой извилистости  $\mathbf{h}$  в пористой среде, ориентация которой может быть описана локальным градиентом диаметра частицы.

**7.3.4. Обобщение результатов для неориентированной структуры равномерной пористости.** В § 7.3.2 мы нашли, что когда пористость не зависит от координаты в пористой среде, локально усредненное по объему дифференциальное уравнение баланса энергии требует выполнения соотношения

$$[\Psi \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} + (1 - \Psi) \rho_{(s)} \hat{c}_{(s)}] \frac{\partial \langle T \rangle^{(m)}}{\partial t} + \Psi \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} \operatorname{div} (\langle T \rangle^{(m)} \bar{\mathbf{v}}^{(f)}) = - \operatorname{div} \mathbf{q}^{(e)}, \quad (7.3.4-1)$$

где величину

$$\mathbf{q}^{(e)} \equiv - [\Psi k_{(f)} + (1 - \Psi) k_{(s)}] \nabla \langle T \rangle^{(m)} + \mathbf{h} \quad (7.3.4-2)$$

будем называть вектором эффективной плотности потока энергии. При выводе этого уравнения мы пренебрегали всеми эффектами, связанными с вязкой диссипацией и излучением.

В § 7.3.3 предполагалось, что для пористой среды, заполненной неподвижной жидкостью, вектор извилистости  $\mathbf{h}$  может быть описан уравнениями (7.3.3-8) и (7.3.3-11). Следовательно, мы можем записать уравнение (7.3.4-2) с помощью «эффективной» теплопроводности  $k^{(e)}$ :

$$\mathbf{q}^{(e)} = -k^{(e)} \nabla \langle T \rangle^{(m)}. \quad (7.3.4-3)$$

Здесь

$$k^{(e)} \equiv \Psi k_{(f)} + (1 - \Psi) k_{(s)} - k_{(s)} K^* \quad (7.3.4-4)$$

и

$$K^* = K^* \left( \frac{k_{(f)}}{k_{(s)}}, \Psi \right). \quad (7.3.4-5)$$

Экспериментальные исследования [13—19] неподвижной жидкости подтверждают общий вид этого уравнения для эффективной теплопроводности  $k^{(e)}$ .

В § 7.3.3 мы предположим, что при течении через пористую структуру вектор тепловой извилистости  $\mathbf{h}$  может быть представлен уравнениями (7.3.3-17), (7.3.3-19) и (7.3.3-20). Тогда запишем для вектора эффективной плотности потока энергии:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(e)} = & -[\Psi k_{(f)} + (1 - \Psi) k_{(s)} - k_{(s)} K^*] \nabla \langle T \rangle^{(m)} + \\ & + \rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} l_0 |\nabla \langle T \rangle^{(m)}| K^* \bar{\mathbf{v}}^{(f)}, \end{aligned} \quad (7.3.4-6)$$

где

$$\text{для } i = 1, 2 \quad K^*_{(i)} = K^*_{(i)} \left( \frac{k_{(f)}}{k_{(s)}}, N_{\text{Pe}}, \frac{\bar{\mathbf{v}}^{(f)} \cdot \nabla \langle T \rangle^{(m)}}{|\bar{\mathbf{v}}^{(f)}| |\nabla \langle T \rangle^{(m)}|}, \Psi \right) \quad (7.3.4-7)$$

и

$$N_{\text{Pe}} \equiv \frac{\rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} |\bar{\mathbf{v}}^{(f)}| l_0}{k_{(f)}}. \quad (7.3.4-8)$$

При выводе этого выражения предполагалось, что пористая среда неподвижна. Иногда вектор эффективной плотности потока энергии целесообразно представить с помощью тензора эффективной теплопроводности  $\mathbf{K}^{(e)}$ :

$$\mathbf{q}^{(e)} = -\mathbf{K}^{(e)} \cdot \nabla \langle T \rangle^{(m)}. \quad (7.3.4-9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} = & [\Psi k_{(f)} + (1 - \Psi) k_{(s)} - k_{(s)} K^*] \mathbf{I} + \\ & + \frac{\rho_{(f)} \hat{c}_{(f)} l_0 |\nabla \langle T \rangle^{(m)}| K^*}{\bar{\mathbf{v}}^{(f)} \cdot \nabla \langle T \rangle^{(m)}} \bar{\mathbf{v}}^{(f)} \bar{\mathbf{v}}^{(f)}. \end{aligned} \quad (7.3.4-10)$$

Результаты экспериментального исследования [20—23] можно представить через компоненты этого тензора.

Для простоты в дальнейшем примем:

$$\text{для } i = 1, 2 \quad K^*_{(i)} = K^*_{(i)} \left( \frac{k_{(f)}}{k_{(s)}}, \Psi \right) \quad (7.3.4-11)$$

и запишем уравнение (7.3.4-6) в виде

$$\mathbf{q}^{(e)} = -\alpha \nabla \langle T \rangle^{(m)} + \beta |\nabla \langle T \rangle^{(m)}| \bar{\mathbf{v}}^{(f)}, \quad (7.3.4-12)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  для любого частного случая не зависят от координат.

**7.3.5. Испарительное пористое охлаждение.** Под пористым испарением мы понимаем одновременное течение и перенос энергии в пористой структуре. Пористое испарение используется иногда для уменьшения скорости переноса тепла или снижения количества изоляционного материала в самых разных практических приложениях. Продемонстрируем это на следующем примере.

Предполагается [11], что скорость испарения сжиженного кислорода в небольших контейнерах можно уменьшить посредством пористого испарения. Жидкость можно хранить в сферическом контейнере с оболочкой из пористого изоляционного материала, как показано на рис. 7.3.5-1. Между контейнером и изоляцией имеется небольшой зазор, а отверстие в контейнере закрывается пробкой. Мы можем наблюдать испарение кислорода, который выходит из сферической колбы, поступает в зазор между колбой и изоляцией, а затем вытекает из пористой структуры. Допустим, что в качестве критерия для этой конструкции мы приняли, что скорость переноса энергии к колбе с кислородом не превышает  $Q$ . Кислород поступает в изоляцию в точке  $r = \kappa R$  при температуре, примерно равной температуре кипения; температура кислорода, выходящего из изоляции в точке  $r = R$ , равна  $T_1$ . Внутренний радиус  $\kappa R$  изолирующей оболочки ограничен диаметром колбы с кислородом. Требуется определить наружный радиус  $R$ , т. е. необходимую толщину изоляции.

Для расчета представляется целесообразным использовать сферическую систему координат:

$$\bar{v}_r^{(f)} = \bar{v}_r^{(f)}(r); \quad \bar{v}_\theta^{(f)} = \bar{v}_\varphi^{(f)} = 0 \quad (7.3.5-1)$$

и

$$\langle T \rangle^{(m)} = \langle T \rangle^{(m)}(r). \quad (7.3.5-2)$$

Градиент давления в пористой изоляции должен быть совершенно незначительным, чтобы кислород можно было считать несжимаемой жидкостью. При таких условиях локально усредненное уравнение неразрывности в виде (4.3.4-3) должно удовлетворять соотношению

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \bar{v}_r^{(f)}) = 0 \quad (7.3.5-3)$$

или

$$\bar{v}_r^{(f)} = \frac{C}{4\pi\lambda_{(x)} \rho_{(x)} r^2}. \quad (7.3.5-4)$$

Здесь  $\lambda_{(x)}$  и  $\rho_{(x)}$  — соответственно теплота испарения и плотность кислорода, взятые при температуре колбы  $T_x$ .

В дальнейшем будем предполагать, что для всей системы имеет место соотношение

$$\left| \frac{d \langle T \rangle^{(m)}}{dr} \right| = \frac{d \langle T \rangle^{(m)}}{dr}. \quad (7.3.5-5)$$

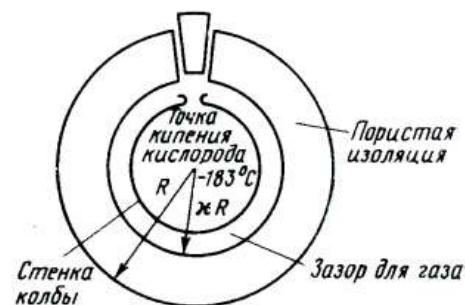


Рис. 7.3.5-1. Уменьшение скорости испарения при испарительном пористом охлаждении.

Принимая во внимание (7.3.5-1), (7.3.5-2), (7.3.5-5) и (7.3.4-12), потребуем, чтобы

$$q_r^{(e)} = -\alpha \frac{d \langle T \rangle^{(m)}}{dr} + \beta \frac{d \langle T \rangle^{(m)}}{dr} \bar{v}_r^{(f)} \quad (7.3.5-6)$$

и

$$q_{\theta}^{(e)} = q_{\varphi}^{(e)} = 0. \quad (7.3.5-7)$$

Как указывалось в § 7.3.4, для упрощения будем считать, что как  $\alpha$ , так и  $\beta$  не зависят от координат пористой изоляции.

Локально усредненное по объему дифференциальное уравнение энергии в виде (7.3.2-14) сводится при этих условиях к виду

$$\Psi \rho_{(j)} \hat{c}_{(j)} \bar{v}_r^{(f)} \frac{d \langle T \rangle^{(m)}}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 q_r^{(e)}). \quad (7.3.5-8)$$

Вследствие уравнений (7.3.5-4) и (7.3.5-6) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left[ \frac{\Psi \hat{c}_{(f)} \mathcal{Q}}{4\pi \lambda_{(k)}} \langle T \rangle^{(m)} - r^2 \left( \alpha \frac{d \langle T \rangle^{(m)}}{dr} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \beta \frac{d \langle T \rangle^{(m)}}{dr} \frac{\mathcal{Q}}{4\pi \lambda_{(k)} \rho_{(k)} r^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.3.5-9)$$

Для упрощения представим это уравнение в безразмерных переменных

$$\frac{d}{d\xi} \left[ \Theta - (\xi^2 - B) \frac{d\Theta}{d\xi} \right] = 0, \quad (7.3.5-10)$$

где

$$\Theta \equiv \frac{\langle T \rangle^{(m)} - T_1}{T_2 - T_1}; \quad (7.3.5-11)$$

$$\xi \equiv r/R_0; \quad (7.3.5-12)$$

$$R_0 \equiv \frac{\Psi \hat{c}_{(f)} \mathcal{Q}}{4\pi \alpha \lambda_{(k)}}; \quad (7.3.5-13)$$

$$B \equiv \frac{\beta \mathcal{Q}}{4\pi \alpha \lambda_{(k)} \rho_{(k)} R_0^2}. \quad (7.3.5-14)$$

Соответствующими граничными условиями для температуры газовой фазы, окружающей сферическую изоляцию, будут:

$$\text{при } \xi = \xi_k \equiv \frac{R - \epsilon}{R_0} \quad \Theta = 1 \quad (7.3.5-15)$$

и

$$\text{при } \xi = \xi_1 \equiv \frac{R + \epsilon}{R_0} \quad \Theta = 0. \quad (7.3.5-16)$$

Здесь  $\epsilon$  — диаметр поверхности усреднения  $S$ .

Интегрируя один раз, получаем:

$$\Theta - (\xi^2 - B) \frac{d\Theta}{d\xi} = C_1, \quad (7.3.5-17)$$

где  $C$  — постоянная. Интегрируя еще раз с учетом граничных условий (7.3.5-15) и (7.3.5-16), получаем:

$$\theta = \frac{f(\xi) - f(\xi_1)}{f(\xi_k) - f(\xi_1)}. \quad (7.3.5-18)$$

Здесь мы ввели:

$$\text{для } B \neq 0 \quad f(\xi) = \left| \frac{\sqrt{B} - \xi}{\sqrt{B} + \xi} \right|^{1/(2\sqrt{B})} \quad (7.3.5-19)$$

и

$$\text{для } B = 0 \quad f(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{\xi}\right). \quad (7.3.5-20)$$

Скорость переноса тепла в колбу с кислородом определяется по соотношению

$$\begin{aligned} Q &= -4\pi(\kappa R - \epsilon)^2 q_r^{(e)} \Big|_{r=\kappa R-\epsilon} = 4\pi a R_0 (T_s - T_1) (\xi_s^2 - B) \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_s} = \\ &= 4\pi a R_0 (T_s - T_1) \frac{f(\xi_s)}{f(\xi_1) - f(\xi_s)}. \end{aligned} \quad (7.3.5-21)$$

Удобнее представить эту величину в виде

$$Q^* = \frac{f(\xi_s)}{f(\xi_1) - f(\xi_s)}, \quad (7.3.5-22)$$

где мы ввели величину  $Q^*$  по соотношению

$$Q^* = \frac{Q}{4\pi a R_0 (T_s - T_1)}. \quad (7.3.5-23)$$

Уравнение (7.3.5-22) можно в свою очередь разрешить относительно неизвестной  $\xi_1$ :

$$\text{для } B \neq 0 \quad \xi_1 = \sqrt{B} \frac{1-A}{1+A} \quad (7.3.5-24)$$

и

$$\text{для } B = 0 \quad \xi_1 = \left( \frac{1}{\xi_k} + \ln \frac{Q^*}{1+Q^*} \right)^{-1}, \quad (7.3.5-25)$$

где

$$A = \left( \frac{Q^*}{1+Q^*} \right)^{-2} \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \xi_s}. \quad (7.3.5-26)$$

Для сравнения рассмотрим случай отсутствия пористого испарения. Потребуем, чтобы внутренний радиус изоляции  $\kappa R$  был постоянным; внешний же радиус изоляции  $R_{(wt)}$  может меняться для компенсации отсутствия пористого испарения. Уравнение (7.3.5-9) сводится к виду:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d \langle T \rangle^{(m)}}{dr} \right) = 0. \quad (7.3.5-27)$$

Оно решается при граничных условиях

$$\text{при } r = \kappa R - \epsilon \quad \langle T \rangle^{(m)} = T_s; \quad (7.3.5-28)$$

$$\text{при } r = R_{(wt)} + \epsilon \quad \langle T \rangle^{(m)} = T_1. \quad (7.3.5-29)$$

В результате получаем:

$$\Theta = \frac{1 - \xi_1(\omega t)/\xi_x}{1 - \xi_1(\omega t)/\xi_x}. \quad (7.3.5-30)$$

Это позволяет рассчитать безразмерную скорость переноса энергии в колбу с кислородом:

$$\mathcal{Q}^* = \frac{\xi_x \xi_1(\omega t)}{\xi_1(\omega t) - \xi_x}. \quad (7.3.5-31)$$

Здесь мы ввели величину

$$\xi_1(\omega t) = \frac{R_{(\omega t)} + \varepsilon}{R_0}, \quad (7.3.5-32)$$

Уравнение (7.3.5-31) дает нам соотношение для

$$\xi_1(\omega t) = \frac{\xi_x \mathcal{Q}^*}{\mathcal{Q}^* - \xi_x}, \quad (7.3.5-33)$$

которое можно сравнить с уравнениями (7.3.5-24) и (7.3.5-25).

Лучше всего влияние пористого испарения оценить для частного случая:

$$\mathcal{Q} = 65 \text{ кВт}; \pi R = 15 \text{ см}; T_x = -205^\circ\text{C}; T_1 = -1^\circ\text{C};$$

$$\alpha = 0,001 \text{ кал}/(\text{см} \cdot \text{с} \cdot {}^\circ\text{C}); \beta = 0; \hat{c}_{(f)} = 0,22 \text{ кал}/(\text{г} \cdot {}^\circ\text{C}); \lambda_{(x)} = 91,7 \text{ кал}/\text{г}; \\ \Psi = 0,7; \varepsilon = 0.$$

Из уравнений (7.3.5-25) и (7.3.5-33) находим толщину изоляции. При наличии пористого испарения:  $R - \pi R = 5 \text{ см}$ .

При отсутствии пористого испарения:  $R_{(\omega t)} - \pi R = 22,5 \text{ см}$ . Очевидно, что пористое испарение имеет практическое значение.

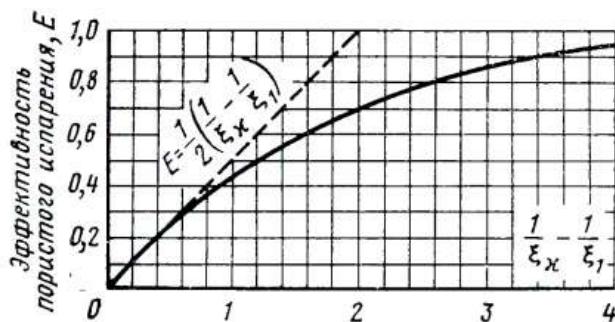


Рис. 7.3.5-2. Влияние испарительного пористого охлаждения при  $B=0$  [11].

Чтобы оценить в дальнейшем этот эффект, посмотрим, что произойдет, если закрыть внешнюю сторону изоляции (например, закрасить краской) для предотвращения пористого испарения. По аналогии с уравнением (7.3.5-31) мы видим, что при отсутствии пористого испарения безразмерная скорость переноса энергии в колбу равна:

$$\mathcal{Q}^*_{(\omega t)} = \frac{\xi_x \xi_1}{\xi_1 - \xi_x}. \quad (7.3.5-34)$$

Здесь мы ввели величину

$$\mathcal{Q}^*_{(\omega t)} \equiv \frac{q_{(\omega t)}}{4\pi\alpha R_0 (T_1 - T_x)}. \quad (7.3.5-35)$$

Если эффективность пористого испарения  $E$  определяется по соотношению

$$E = \frac{Q_{(wt)} - Q}{Q_{(wt)}}, \quad (7.3.5-36)$$

то из уравнений (7.3.5-22) и (7.3.5-34) находим величину

$$E = 1 - \left( \frac{1}{\xi_k} - \frac{1}{\xi_1} \right) \frac{f(\xi_k)}{f(\xi_1) - f(\xi_k)}. \quad (7.3.5-37)$$

Это уравнение максимально упрощается при  $B = 0$ :

$$E = 1 - \frac{1/\xi_k - 1/\xi_1}{\exp(1/\xi_k - 1/\xi_1) - 1}. \quad (7.3.5-38)$$

Уравнение (7.3.5-38) показано на рис. 7.3.5-2.

## 7.4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА

**7.4.1 Еще раз об интегральных уравнениях баланса.** В обычном курсе по инженерной термодинамике внимание студентов-выпускников не заостряется на определении распределений скорости, температуры и концентрации в материале. Студентов больше интересуют скорости переноса тепла и затраты энергии, а также возможность проведения данного процесса. В качестве инструмента студенты используют интегральные уравнения баланса массы и энергии, баланса механической энергии, а также интегральное неравенство энтропии. Сейчас мы попытаемся показать, как интегральное уравнение баланса энергии и интегральное неравенство энтропии можно связать с предыдущим материалом. В то же время будет показано, как можно получить два дополнительных предельных уравнения баланса механической энергии.

Материал нескольких следующих параграфов тесно связан с § 4.4.1–4.4.15, поэтому можно порекомендовать читателю еще раз просмотреть их или по крайней мере перечитать § 4.4.1, посвященный значению интегральных уравнений баланса в технике.

Как уже указывалось в § 4.4.1, под интегральным балансом мы понимаем уравнение, описывающее накопление любой величины, выраженную с помощью притока и оттока этой величины. Сущность метода заключается в том, что система, для которой записывается уравнение баланса, не обязательно является совокупностью материальных частиц. Эта система может быть жидкостью на стенке теплообменника на борту космической капсулы, движущейся вдоль некоторой произвольной траектории в пространстве. Система в этом примере не является совокупностью материальных частиц, так как жидкость постоянно входит и выходит из теплообменника.

В последующих параграфах предположим, что система имеет объем  $V_{(s)}$  и ограничена замкнутой поверхностью  $S_{(s)}$ . Обозначим скорость этой поверхности  $v_{(s)}$ , в общем случае эта скорость может быть функцией положения на поверхности. В качестве входной и выходной поверхностей системы возьмем ту часть поверхности  $S_{(s)}$ , через которую осуществляется перенос массы. Обозначим совокупность входов и выходов через  $S_{(вх, вых)}$ .

Многие понятия, связанные с методом интегральных балансов, сформулированы в работе [24].

**7.4.2. Интегральное уравнение баланса энергии.** Попытаемся вывести уравнение баланса энергии, описывающее скорость изменения энергии для произвольной системы.

Используем тот же подход, что и при выводе интегральных уравнений баланса массы и импульса в § 4.4.2 и 4.4.5. Введем для обобщенной теоремы переноса из § 1.3.2 внутреннюю и кинетическую энергию в единице объема:

$$\Psi = \rho (\hat{U} + 0,5 v^2). \quad (7.4.2-1)$$

Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) dV &= \int \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] dV + \\ &+ \int_{S_{(s)}} \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (7.4.2-2)$$

Для каждой задачи смысл первого интеграла в правой части этого уравнения очевиден не сразу. С таким затруднением мы уже сталкивались в § 4.4.2, 4.4.5 и 4.4.9.

С помощью уравнения неразрывности дифференциальное уравнение баланса энергии в виде (В) табл. 5.6.1-1 можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} \right] = \\ = - \operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) + \rho Q. \end{aligned} \quad (7.4.2-3)$$

Интегрируя это уравнение по объему рассматриваемой произвольной системы, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{V_{(s)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] + \operatorname{div} \left[ \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} \right] + \right. \\ \left. + \operatorname{div} \mathbf{q} - \operatorname{div} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) - \rho Q \right\} dV = 0. \end{aligned} \quad (7.4.2-4)$$

Первый член слева является неизвестным интегралом уравнения (7.4.2-2). Физический смысл второго, третьего и четвертого членов станет ясен, если мы используем преобразование Грина:

$$\begin{aligned} \int_{V_{(s)}} \left\{ \operatorname{div} \left( \rho \left[ \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right] \mathbf{v} \right) + \operatorname{div} \mathbf{q} - \operatorname{div} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \right\} dV = \\ = \int_{S_{(s)}} \left[ \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n}) \right] dS. \end{aligned} \quad (7.4.2-5)$$

Уравнения (7.4.2-4) и (7.4.2-5) позволяют представить уравнение (7.4.2-2) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) dV &= \int_{S_{(s)}} \rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ &+ @ - \int_{S_{(s)}} \mathbf{v} \cdot [\mathbf{T} \cdot (-\mathbf{n})] dS + \int_{V_{(s)}} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + Q) dV. \end{aligned} \quad (7.4.2-6)$$

Первый член справа в правой части этого уравнения является результатирующей скоростью переноса внутренней и кинетической энергии в систему вместе с материалом, пересекающим границу системы. Через  $\mathcal{Q}$  мы обозначаем скорость переноса энергии (контактного) в систему через ограничивающие поверхности системы:

$$\mathcal{Q} \equiv \int_{S(s)} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS. \quad (7.4.2-7)$$

Последний член в уравнении (7.4.2-6) является скоростью совершения работы над системой со стороны внешних сил, обычно силы тяжести, и скоростью передачи внешней энергии в систему, обычно в виде излучения.

Третий член в правой части уравнения (7.4.2-6) есть скорость, с которой система совершает работу на ограничивающих поверхностях, или,ными словами, скорость, с которой совершается работа системой на ее границах. Эта величина является суммарной работой, совершаемой контактными силами на границе, тогда как обычно мы используем понятие работы без учета работы постоянного давления окружающей среды  $p_0$ . Чтобы учесть эффект давления  $p_0$ , отметим прежде всего:

$$\int_{S(s)} \mathbf{v} \cdot [\mathbf{T} \cdot (-\mathbf{n})] dS = \int_{S(s)} \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n})] dS + \int_{S(s)} p_0 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (7.4.2-8)$$

Поскольку  $p_0$  не зависит от времени, для выражения второго члена в правой части (7.4.2-8) можно использовать обобщенную теорему переноса:

$$\begin{aligned} \int_{S(s)} p_0 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{V(s)} \frac{\partial p_0}{\partial t} dV + \int_{S(s)} p_0 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{V(s)} p_0 dV - \int_{S(s)} p_0 (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (7.4.2-9)$$

С помощью уравнений (7.4.2-8) и (7.4.2-9) заменим (7.4.2-6) выражением

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right) dV &= \int_{S(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ &+ \mathcal{Q} - \int_{S(s)} \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n})] dS + \int_{V(s)} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + Q) dV \end{aligned} \quad (7.4.2-10)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right) dV &= \int_{S_{\text{ах. макс}}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ &+ \mathcal{Q} - \mathcal{W} + \int_{V(s)} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + Q) dV + \int_{S_{\text{вх. вых}}} [-(P - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{v} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS. \end{aligned} \quad (7.4.2-11)$$

Величина  $\mathcal{W}$ , введенная в § 4.4.9,

$$\mathcal{W} \equiv \int_{S(s) - S_{\text{вх. вых}}} \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot (-\mathbf{n})] dS \quad (7.4.2-12)$$

## Общие формы интегральных уравнений баланса энергии для однофазной системы

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх., вых.})}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \times \\ \times (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} - \mathcal{W} + \int_{V(s)} \rho Q dV + \int_{S_{(\text{вх., вых.})}} [-(P - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS \quad (\lambda)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх., вых.})}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) (-\mathbf{n}) dS + \\ + \mathcal{Q} - \mathcal{W} + \int_{V(s)} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + Q) dV + \int_{S_{(\text{вх., вых.})}} [-(P - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS \quad (\beta)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{S} dV = \int_{S_{(\text{вх., вых.})}} \rho \bar{S} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{S(s)} \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + \int_{V(s)} \left[ -\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \frac{1}{T} \rho Q \right] dV \quad (\beta)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх., вых.})}} \rho \left( \bar{U} + \frac{p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} + \\ + \int_{V(s)} -[(P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q] dV \quad (\Gamma)$$

Для несжимаемой жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{U} dV = \int_{S_{(\text{вх., вых.})}} \rho \bar{U} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} + \int_{V(s)} [\operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q] dV \quad (\Delta)$$

Для изотермической системы:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{S} dV = \int_{S_{(\text{вх., вых.})}} \rho \bar{S} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \frac{\mathcal{Q}}{T} + \\ + \frac{1}{T} \int_{V(s)} [\operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q] dV \quad (\varepsilon)$$

Для изоэнтропической системы:

$$\mathcal{Q} + \int_{V(s)} [\operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q] dV = 0 \quad (\kappa)$$

Для изобарической системы:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{H} dV = \int_{S_{(\text{вх., вых.})}} \rho \bar{H} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} + \\ + \int_{V(s)} [\operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q] dV \quad (3)$$

является работой, совершающей системой над окружающей средой на непроницаемых границах системы. Будем называть уравнение (7.4.2-11) интегральным уравнением баланса энергии в общем виде.

Это только один вид интегрального уравнения баланса энергии для однофазных систем. Если бы мы в своем расчете исходили из несколько иного выражения для дифференциального уравнения баланса энергии из табл. 5.6.1-1, конечный результат был бы иным. Различные формы интегрального уравнения баланса энергии для однофазных систем приводятся в табл. 7.4.2-1.

Как уже упоминалось в § 4.4.2, мы чаще имеем дело с многофазными системами. Используя метод и обозначения § 4.4.2, без каких-либо дополнительных допущений находим по аналогии с уравнением (7.4.2-11) для многофазных систем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = & \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + \mathcal{Q} - \mathcal{W} + \int_{V_{(s)}} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + Q) dV + & \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0)(\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS + \\ + \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) + \mathbf{q} \cdot \xi - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \xi) \right] dS. \end{aligned} \quad (7.4.2-13)$$

Если предположить, что для уравнения баланса энергии применимо условие скачка (6.1.1-1), то получим результат, эквивалентный уравнению (7.4.2-11) для однофазной системы.

Если с самого начала мы будем исходить из другой формы дифференциального уравнения баланса энергии из табл. 5.6.1-1, то получим несколько иной вид интегрального уравнения баланса энергии для многофазной системы, различные варианты которого приводятся в табл. 7.4.2-2.

Обычно в ходе анализа физических условий с помощью интегрального уравнения баланса энергии делается ряд допущений:

1. Перенос массы через границу раздела фаз отсутствует.
2. Применимы уравнения баланса скачка массы, импульса и энергии из § 1.3.5, а также уравнения (3.1.1-1) и (6.3.2-1).
3. Взаимный или внешний перенос энергии отсутствует.
4. Вход и выход зафиксированы в пространстве.
5. Работой вязких сил, описываемой тензором дополнительных напряжений, можно пренебречь на входе и выходе.

При допущениях (7.4.2-5) уравнение (7.4.2-13) сводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = & \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \\ + \mathcal{Q} - \mathcal{W} + \int_{V_{(s)}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV. \end{aligned} \quad (7.4.2-14)$$

В табл. 7.4.2-3 приводятся другие возможные варианты этого уравнения.

Задачи, в которых используется интегральное уравнение баланса энергии, можно разделить на три категории: 1) когда скоростью переноса энергии  $\mathcal{Q}$  можно пренебречь; 2) когда она может быть искомой

Общие формы интегральных уравнений баланса энергии для многофазной системы

---

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + \mathcal{Q} + \mathcal{W} + \int_{V(s)} \rho Q dV + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS + \\ + \int_{S_{(\text{синг})}} [\rho \varphi (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)})] dS \quad (\text{A})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} - \mathcal{W} + \\ + \int_{V(s)} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + Q) dV + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS \quad (\text{Б})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{S} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \bar{S} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{S_{(s)}} \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + \int_{V(s)} \left[ -\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \nabla T + \frac{1}{T} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \frac{1}{T} \rho Q \right] dV + \\ + \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \rho \bar{S} (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) + \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \xi \right] dS \quad (\text{В})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{V_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \bar{U} + \frac{p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} + \\ + \int_{V(s)} [-(P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q] dV + \\ + \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \rho \left( \bar{U} + \frac{p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) + \mathbf{q} \cdot \xi \right] dS \quad (\text{Г})$$

Для несжимаемой жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{U} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \bar{U} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} + \int_{V(s)} [\operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q] dV + \\ + \int_{S_{(\text{синг})}} [\rho \bar{U} (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) + \mathbf{q} \cdot \xi] dS \quad (\text{Д})$$

Для изотермической системы:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{S} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \bar{S} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \frac{1}{T} \mathbf{q} + \\ + \frac{1}{T} \int_{V(s)} [\operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q] dV + \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \rho \bar{S} (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) + \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \xi \right] dS \quad (\text{Е})$$

Для изоэнтропической системы:

$$\mathcal{Q} + \int_{V(s)} [\operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + pQ] dV + \int_{S(\text{синг})} [\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\xi}] dS = 0 \quad (\text{Ж})$$

Для изобарической системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} p \hat{H} dV &= \int_{S(\text{вх, вых})} p \hat{H} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} + \int_{V(s)} [\operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + pQ] dV + \\ &+ \int_{S(\text{синг})} [p \hat{H} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi} - u_{(t)}) + \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\xi}] dS \end{aligned} \quad (3)$$

Таблица 7.4.2-3

**Частные формы интегральных уравнений баланса энергии для многофазной системы**

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} p \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{p_0}{p} \right) dV = \int_{S(\text{вх, вых})} p \left( \hat{H} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} + \mathcal{W} \quad (\text{A})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} p \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{p} \right) dV &= \int_{S(\text{вх, вых})} p \left( \hat{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \\ &+ \mathcal{Q} - \mathcal{W} + \int_{V(s)} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dV \end{aligned} \quad (\text{Б})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} p \hat{S} dV &= \int_{S(\text{вх, вых})} p \hat{S} (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S(s)} \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ &+ \int_{V(s)} \left[ -\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) \right] dV \end{aligned} \quad (\text{В})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} p \left( \hat{U} + \frac{p_0}{p} \right) dV &= \int_{S(\text{вх, вых})} p \left( \hat{U} + \frac{p_0}{p} \right) (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + q + \\ &+ \int_{V(s)} [-(P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v})] dV \end{aligned} \quad (\text{Г})$$

Для несжимаемой жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} p \hat{U} dV = \int_{S(\text{вх, вых})} p \hat{U} (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} + \int_{V(s)} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV \quad (\text{Д})$$

Для изотермической системы:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} p \hat{S} dV = \int_{S(\text{вх, вых})} p \hat{S} (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \frac{1}{T} \mathcal{Q} + \frac{1}{T} \int_{V(s)} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV \quad (\text{Е})$$

Для изэнтропической системы:

$$\mathcal{Q} + \int_{V(s)} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV = 0 \quad (Ж)$$

Для изобарической системы:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \hat{H} dV = \int_{S_{(вх, вых)}} \rho \hat{H} (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} + \int_{V(s)} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV \quad (3)$$

величиной и, наконец, 3) когда она может быть известна из экспериментальных данных. В последнем случае для  $\mathcal{Q}$  можно использовать эмпирические соотношения. В § 7.4.4 мы будем рассматривать форму, которую могут принять эти эмпирические соотношения.

**7.4.3. Интегральные уравнения баланса энергии для турбулентных течений.** В § 4.4.3 указывалось, что одними из важных применений интегральных уравнений баланса являются системы, участвующие в турбулентном течении. Выводы § 4.4.3 применимы и для данного случая.

Можно использовать один из методов, изложенных в § 4.4.3, 4.4.6 и 4.4.10, для вывода интегрального уравнения баланса энергии, исходя из одного из вариантов дифференциального уравнения баланса энергии, усредненных по времени, найденных в § 7.1.1.

Вследствие относительной сложности некоторых усредненных по времени форм дифференциального уравнения баланса энергии, приведенных в табл. 5.6.1-1, удобнее использовать различные усредненные по времени формы дифференциального уравнения баланса энергии из табл. 7.4.2-1—7.4.2-3. Усредненные по времени уравнения (Б) из табл. 7.4.2-1 и 7.4.2-2 дают для однофазной и многофазной систем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right) dV} &= \overline{\int_{S_{(вх, вых)}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS} + \\ &+ \bar{\mathcal{Q}} - \bar{W} + \overline{\int_{V(s)} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + Q) dV} + \overline{\int_{S_{(вх, вых)}} [-(P - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS}. \end{aligned} \quad (7.4.3-1)$$

Из уравнения (Б) табл. 7.4.2-3 очевидно, что соотношение (7.4.3-1) сводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{\int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right) dV} &= \overline{\int_{S_{(вх, вых)}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS} + \\ &+ \bar{\mathcal{Q}} - \bar{W} + \overline{\int_{V(s)} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) dV} \end{aligned} \quad (7.4.3-2)$$

при следующих ограничениях: а) взаимный и внешний переносы энергии отсутствуют; б) вход и выход в систему фиксированы в пространстве; в) работой вязких сил, описываемых тензором дополнительных напряжений, на входе и выходе в систему можно пренебречь.

Можно получить несколько более простой результат, если ограничиться однофазными или многофазными системами, не содержащими поверхности раздела жидкость — жидкость. При таких условиях с помощью уравнений (4.4.3-7)–(4.4.3-9) соотношения (7.4.3-1) и (7.4.3-2) сводятся к виду:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \overline{\rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right)} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \overline{\rho \left( \hat{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n})} dS + \\ + @ - \mathcal{W} + \int_{V(s)} \overline{\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + Q)} dV + \\ + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [- (\bar{P} - p_0) (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) + \overline{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})}] dS \quad (7.4.3-3)$$

и

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \overline{\rho \left( \hat{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right)} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \overline{\rho \left( \hat{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})} dS + \\ + @ - \mathcal{W} + \int_{V(s)} \overline{\rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{f})} dV. \quad (7.4.3-4)$$

Другие формы интегрального уравнения баланса энергии для систем, полностью или частично участвующих в турбулентном движении, можно найти аналогичным образом путем усреднения по времени других уравнений, приведенных в табл. 7.4.2-1—7.4.2-3.

**7.4.4. Эмпирические соотношения для  $\mathcal{Q}$ .** С помощью двух примеров здесь будет показано, как можно построить эмпирические соотношения для  $\mathcal{Q}$  ( $\mathcal{Q}$  при турбулентном течении), введенных в § 7.4.2. При этом используются три основные идеи:

1. Суммарная скорость контактного переноса энергии в систему не зависит от системы отсчета:

$$\mathcal{Q}^* = \int_{S(s)} \mathbf{q}^* \cdot (-\mathbf{n}^*) dS = \int_{S(s)} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS = \mathcal{Q}. \quad (7.4.4-1)$$

2. Полагаем, что введенный в § 2.3.1 принцип зависимости материала от системы отсчета справедлив для любого эмпирического соотношения для  $\mathcal{Q}$ .

3. Любое выражение для  $\mathcal{Q}$  должно удовлетворять теореме Бэкингема — Пая [1].

*Пример 1. Вынужденная конвекция при двумерном обтекании цилиндра.* Бесконечно длинное цилиндрическое тело, поверхность которого образована прямой, движущейся параллельно фиксированной линии и пересекающей фиксированную замкнутую кривую, погружено в несжимаемую ньютоновскую жидкость с большой массой. Температура твердого тела равна  $T_0$ , жидкость вне непосредственной окрестности тела имеет одинаковую температуру  $T_\infty$ . В системе отсчета, неподвижной по отношению к Земле, цилиндрическое тело движется прямолинейно и безвращательно с постоянной скоростью  $v_0$ ; на очень большом расстоянии от тела жидкость имеет постоянную скорость  $\mathbf{v}_\infty$ . Векторы  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_\infty$  перпендикулярны оси цилиндра, поэтому течение жидкости

можно считать плоскопараллельным. Для описания ориентации цилиндра относительно  $\mathbf{v}_\infty$  и  $\mathbf{v}_0$  достаточно одного вектора  $\mathbf{a}$ .

Можно утверждать, что величина  $\mathcal{Q}$  является функцией плотности жидкости  $\rho$ , ее вязкости  $\mu$ , удельной теплоемкости  $\hat{c}$ , теплопроводности  $k$ , длины  $L$ , характерной для поперечного сечения цилиндра,  $\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{a}$  и  $\Delta T \equiv T_\infty - T_0$ :

$$\mathcal{Q} = f(\rho, \mu, \hat{c}, k, L, \mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0, \mathbf{a}, \Delta T). \quad (7.4.4-2)$$

Рассмотрим независимые переменные  $\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{a}$ :

$$\mathcal{Q} = \tilde{f}(\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0, \mathbf{a}). \quad (7.4.4-3)$$

Исходя из принципа независимости материала от системы отсчета, можно сказать, что  $f$  — изотропная скалярная функция двух векторов:

$$\tilde{f}(\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0, \mathbf{a}) = \tilde{f}(\mathbf{Q} \cdot [\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0], \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}). \quad (7.4.4-4)$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  — ортогональный тензор второго ранга, который частично описывает изменение системы отсчета. Согласно теореме представления Коши [12] наиболее общая изотропная скалярная функция двух векторов имеет вид:

$$\tilde{f}(\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0, \mathbf{a}) = \tilde{F}(|\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0|, [\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0] \cdot \mathbf{a}). \quad (7.4.4-5)$$

Поэтому уравнение (7.4.4-2) можно представить в виде

$$\mathcal{Q} = F(\rho, \mu, \hat{c}, k, L, |\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0|, [\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0] \cdot \mathbf{a}, \Delta T). \quad (7.4.4-6)$$

Однако в соответствии с теоремой Бэкингема—Пая [1] необходимо, чтобы последнее выражение имело вид:

$$N_{Nu} = N_{Nu} \left( N_{Re}, N_{Pr}, N_{Br}, \frac{\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0}{|\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0|} \cdot \mathbf{a} \right). \quad (7.4.4-7)$$

где числа Нуссельта, Рейнольдса, Прандтля и Бринкмана определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} N_{Nu} &\equiv \frac{\mathcal{Q}}{kL\Delta T}; \quad N_{Re} \equiv \frac{L\rho |\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0|}{\mu}; \\ N_{Pr} &\equiv \frac{\hat{c}\mu}{k}; \quad N_{Br} \equiv \frac{\mu |\mathbf{v}_\infty - \mathbf{v}_0|^2}{k\Delta T}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4.4-8)$$

В литературе коэффициент теплообмена  $h$  определяется соотношением

$$h \equiv \frac{\mathcal{Q}}{A\Delta T}, \quad (7.4.4-9)$$

где  $A$  пропорционально  $L^2$  и обозначает поверхность для контактного переноса энергии. Число Нуссельта в свою очередь выражается с помощью коэффициента теплообмена

$$N_{Nu} = \frac{hL}{k}. \quad (7.4.4-10)$$

Теперь рассчитаем скорость контактного переноса энергии в систему:

$$\mathcal{Q} = hA\Delta T, \quad (7.4.4-11)$$

определеняя коэффициент теплообмена  $h$  из эмпирического соотношения вида (7.4.4-7).

Большинство эмпирических соотношений для числа Нуссельта не имеет общего вида (7.4.4-7). Обычно число Бринкмана весьма незначительно по величине, если пренебречь вязкой диссипацией. Кроме того, чаще рассматривается простая ориентация тела или системы тел, например пучок труб, относительно потока жидкости. При этом условии уравнение (7.4.4-7) принимает более простой вид [11, 26]:

$$N_{Nu} = N_{Nu}(N_{Re}, N_{Fr}). \quad (7.4.4-12)$$

*Пример 2. Свободная конвекция для случая шара, погруженного в жидкость.* Рассмотрим шар радиусом  $a$ , имеющий температуру  $T_0$ , погруженный в ньютоновскую жидкость большой массы. Вне непосредственной окрестности шара температура жидкости везде имеет значение  $T_\infty$ . Какое-либо относительное движение шара и жидкости отсутствует, хотя в результате естественной конвекции возникает циркуляция.

Кроме того, величина  $\mathcal{Q}$  является функцией радиуса  $a$ , вязкости жидкости  $\mu$ , ее удельной теплоемкости  $\hat{c}$ , локального значения ускорения силы тяжести  $g$ ; необходимо также учесть зависимость температуры от плотности жидкости, так как эта зависимость является первой причиной естественной конвекции. Это можно сделать, допустив, что величина  $\mathcal{Q}$  также должна зависеть от плотности жидкости  $\rho$  и от коэффициента объемного расширения  $\beta$ :

$$\beta \equiv -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p. \quad (7.4.4-13)$$

Эта зависимость рассчитана при некоторой характерной температуре эксперимента. Эта характерная температура обычно выбирается равной «температуре пленки»  $T_f = (T_0 - T_\infty)/2$ . Итак, мы постулируем соотношение

$$\mathcal{Q} = f(\mu, \hat{c}, a, \Delta T, \rho, \beta). \quad (7.4.4-14)$$

Это соотношение автоматически удовлетворяет принципу независимости материала от системы отсчета.

В соответствии с теоремой Бэкингема—Пая необходимо, чтобы уравнение (7.4.4-14) имело более общий вид:

$$N_{Nu} = N_{Nu}(\beta\Delta T, N_{Fr}, N_{Pr}, N_{Br}), \quad (7.4.4-15)$$

где числа Нуссельта и Фруда определяются по соотношениям:

$$N_{Nu} \equiv \frac{\mathcal{Q}}{ka\Delta T}; \quad N_{Fr} \equiv \frac{\mu^2}{\rho^2 a^3 g}. \quad (7.4.4-16)$$

Числа Прандтля и Бринкмана имеют выражения (7.4.4-8). Приведенное определение числа Фруда согласуется с более общим соотношением  $N_{Fr} = v^2/ga$ , если характерная скорость определяется в виде  $N_{Re} = \rho av/\mu = 1$ .

Как уже упоминалось в примере 1, в литературе обычно определяют коэффициент теплообмена по уравнению (7.4.4-9) или соотношению

$$h = \frac{G}{4\pi a^2 \Delta T}. \quad (7.4.4-17)$$

Следовательно, скорость контактного переноса энергии к шару определяется соотношением

$$\mathcal{Q} = h 4\pi a^2 \Delta T, \quad (7.4.4-18)$$

где  $h$  находится из эмпирического соотношения вида (7.4.4-15).

Число Бринкмана в большинстве случаев настолько мало, что вязкой диссипацией можно пренебречь, и тогда уравнение (7.4.4-15) сводится к виду:

$$N_{Nu} = N_{Nu}(\beta \Delta T, N_{Fr}, N_{Pr}). \quad (7.4.4-19)$$

В работе [27] установлено, что соотношение вида

$$N_{Nu} = \frac{ha}{k} = 2 + 0,60 \left( \frac{\beta \Delta T}{N_{Fr}} \right)^{1/4} N_{Pr}^{1/3} \quad (7.4.4-20)$$

согласуется с экспериментальными данными для  $(\beta \Delta T / N_{Fr})^{1/4} N_{Pr}^{1/3} < 200$ .

**7.4.5. Пример интегрального уравнения баланса энергии.** Изолированный вакуумированный резервуар связан патрубком, имеющим клапан, с трубопроводом, содержащим идеальный двухатомный газ при постоянном давлении  $P_0$  и постоянной температуре  $T_0$ . Полагаем, что удельная изобарная теплоемкость равна:

$$\hat{c}_p = \frac{7}{2} \frac{R}{M}, \quad (7.4.5-1)$$

где  $R$  — газовая постоянная, а  $M$  — молекулярная масса газа. Объем газа резервуара  $\mathcal{V}$  известен.

Внезапно клапан между резервуаром и трубопроводом открывается и газ поступает в резервуар. Требуется определить количество и температуру газа в резервуаре при давлении  $P_{(конеч.)}$ .

Газ в резервуаре будем считать рассматриваемой системой. Эта система имеет только один вход, а выход отсутствует. Границы системы неподвижны в пространстве.

Для упрощения будем пренебречь эффектами турбулентности. Из интегрального уравнения баланса массы имеем:

$$\frac{dM}{dt} = - \int_{S_{(вх)}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (7.4.5-2)$$

Здесь  $M$  обозначает массу газа в резервуаре, равную

$$M = \int_{V_{(s)}} \rho dV, \quad (7.4.5-3)$$

которая является функцией времени. Входную поверхность обозначим через  $S_{(вх)}$ .

Если пренебречь изменениями кинетической и потенциальной энергии, а также если сделать допущение из § 7.4.2, то в соответствии с интегральным уравнением баланса энергии в форме (A) из табл. 7.4.2-3 необходимо, чтобы

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = - \int_{S_{(вх)}} \rho \hat{H} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (7.4.5-4)$$

Символом  $\mathcal{U}$  мы обозначили внутреннюю энергию системы:

$$\mathcal{U} \equiv \int_{V(s)} \rho \bar{U} dV. \quad (7.4.5-5)$$

Величина удельной энталпии очень близка к постоянной относительно положения на входе, поэтому мы можем объединить уравнения (7.4.5-4) и (7.4.5-2), получив при этом

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = - \hat{H}_{вх} \int_{S_{(вх)}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \hat{H}_{(вх)} \frac{d\mathcal{M}}{dt}. \quad (7.4.5-6)$$

Кроме того, удельная энталпия поступающего газа является почти постоянной функцией времени. При этом предположении уравнение (7.4.5-6) можно проинтегрировать, получив для любого момента времени

$$\mathcal{U}_{(конеч)} = \hat{H}_{вх} \mathcal{M}_{(конеч)}. \quad (7.4.5-7)$$

Если газ в резервуаре хорошо перемешивается, то

$$\hat{V}_{(конеч)} = \hat{H}_{(вх)}. \quad (7.4.5-8)$$

Тогда легко заметить:

$$\hat{c}_p \equiv T \left( \frac{\partial \hat{S}}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial T} \right)_p + P \left( \frac{\partial \hat{V}}{\partial T} \right)_p. \quad (7.4.5-9)$$

Для идеального газа

$$\bar{U} = \bar{U}(T) \quad (7.4.5-10)$$

и

$$P \hat{V} = \frac{RT}{M}. \quad (7.4.5-11)$$

Следовательно, уравнение (7.4.5-9) можно преобразовать к виду

$$\frac{d\bar{U}}{dT} = \hat{c}_p - \frac{R}{M}. \quad (7.4.5-12)$$

Проинтегрируем с учетом (7.4.5-1), (7.4.5-12):

$$\bar{U}_{(конеч)} - \bar{U}_{(вх)} = \frac{5}{2} \frac{R}{M} (T_{конеч} - T_{вх}). \quad (7.4.5-13)$$

С помощью уравнений (7.4.5-8), (7.4.5-11) и (7.4.5-13) получим:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\text{(конечн)}} - \hat{U}_{\text{(вх)}} &= \hat{H}_{\text{(вх)}} - \hat{U}_{\text{(вх)}} = P_{\text{(вх)}} \hat{V}_{\text{(вх)}} = \frac{R}{M} T_{\text{(вх)}} = \\ &= \frac{5}{2} \frac{R}{M} (T_{\text{(конечн)}} - T_{\text{(вх)}})\end{aligned}\quad (7.4.5-14)$$

или

$$T_{\text{(конечн)}} = \frac{7}{5} T_{\text{(вх)}} = \frac{7}{5} T_0. \quad (7.4.5-15)$$

Отсюда следует, что в конце процесса масса газа равна:

$$M_{\text{конечн}} = \frac{5}{7} \frac{M}{R} \frac{P_{\text{(конечн)}}}{T_0} \mathcal{V}. \quad (7.4.5-16)$$

*7.4.6. Еще раз об уравнении баланса механической энергии.*  
В § 4.4.9 мы вывели уравнение баланса механической энергии для однодофазных систем в самом общем виде:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) dV &= \int_{S_{\text{(вх, вых)}}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{P - p_0}{\rho} \right) \times \\ &\times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{V(s)} (P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \mathcal{W} - \mathcal{E} + \\ &+ \int_{S_{\text{(вх, вых)}}} [-(P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS.\end{aligned}\quad (7.4.6-1)$$

В таком виде оно не является самой удобной формой уравнения баланса механической энергии в том смысле, что второй интеграл в правой части в большинстве случаев нелегко определить. В § 4.4.9 мы обошли эту трудность, ограничиваясь только несжимаемой жидкостью, для которой

$$\int_{V(s)} (P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} dV = 0. \quad (7.4.6-2)$$

В этом параграфе мы попытаемся показать, что имеются другие полезные формы уравнения баланса механической энергии, которые не ограничены несжимаемыми жидкостями. Проиллюстрируем это на примере изотермической жидкости.

Преобразуем второй интеграл в правой части (7.4.6-1) для изотермической жидкости, т. е. для жидкости, в которой температура не зависит от времени и координат. Используя преобразование Грина, находим:

$$\begin{aligned}\int_{V(s)} (P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} dV &= \int_{V(s)} \operatorname{div} [(P - p_0) \mathbf{v}] dV - \int_{V(s)} \mathbf{v} \cdot \nabla P dV = \\ &= - \int_{S(s)} (P - p_0) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{S(s)} (P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{V(s)} \mathbf{v} \cdot \nabla P dV.\end{aligned}\quad (7.4.6-3)$$

Поскольку

$$\nabla P = \rho \nabla \bar{G}, \quad (7.4.6-4)$$

то мы можем использовать другую модификацию преобразования Грина, а также дифференциальное уравнение неразрывности. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \int_{V(s)} \mathbf{v} \cdot \nabla P dV &= \int_{V(s)} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \widehat{G} dV = \int_{V(s)} [\operatorname{div}(\rho \widehat{G} \mathbf{v}) - \\ &- \widehat{G} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})] dV = \int_{S(s)} \rho \widehat{G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V(s)} \widehat{G} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \\ &= \int_{S(s)} \rho \widehat{G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V(s)} \frac{\partial (\rho \widehat{G})}{\partial t} dV - \int_{V(s)} \rho \frac{\partial \widehat{G}}{\partial t} dV. \end{aligned} \quad (7.4.6-5)$$

С учетом

$$\rho \frac{\partial \widehat{G}}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial (P - p_0)}{\partial t} \quad (7.4.6-6)$$

мы можем использовать обобщенную теорему переноса и представить уравнение (7.4.6-5) в виде

$$\begin{aligned} \int_{V(s)} \mathbf{v} \cdot \nabla P dV &= \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \widehat{A} + \frac{p_0}{\rho} \right) dV - \int_{S_{\text{вх.вых}}} \rho \widehat{G} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) (-\mathbf{n}) dS + \\ &+ \int_{S(s)} (P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (7.4.6-7)$$

Подставив это соотношение в (7.4.6-3), будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{V(s)} (P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} dV &= - \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \widehat{A} + \frac{p_0}{\rho} \right) dV + \\ &+ \int_{S_{\text{вх.вых}}} \rho \left( \widehat{A} + \frac{p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (7.4.6-8)$$

Это выражение позволяет представить уравнение (7.4.6-1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \widehat{A} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varphi + \frac{p_0}{\rho} \right) dV &= \int_{S_{\text{вх.вых}}} \rho \left( \widehat{G} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot \\ &\cdot (-\mathbf{n}) dS - \mathcal{U} - \mathcal{E} + \int_{S_{\text{вх.вых}}} [-(P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS, \end{aligned} \quad (7.4.6-9)$$

что является уравнением баланса механической энергии для однофазных систем, состоящих из изотермических жидкостей в общем виде.

Можно вывести и другие формы уравнения баланса механической энергии, которые представлены в табл. 7.4.6-1.

Эти соотношения можно обобщить для многофазных систем методом, изложенным в § 4.4.9. Результаты этого обобщения сведены в табл. 7.4.6-2.

Чаще всего интегральные уравнения механической энергии применяются в системах, для которых имеют место следующие ограничения:

- 1) отсутствует перенос массы через внутренние границы раздела фаз;  
 2) применимы уравнения баланса скачка массы и момента из § 1.3.5;  
 3) входные и выходные поверхности фиксированы в пространстве;  
 4) работой вязких сил, описываемых тензором дополнительных напряжений на входе и выходе, можно пренебречь.

Интегральные уравнения баланса механической энергии в форме, применяемой при этих ограничениях, приводятся в табл. 7.4.6-3.

Рассуждения этого параграфа можно обобщить на случай турбулентного течения методом, изложенным в § 4.4.10 без каких-либо дополнительных замечаний.

Здесь применимы замечания относительно  $\mathcal{E}$ , сделанные в заключении § 4.4.9. Очень часто полезны эмпирические соотношения для  $\mathcal{E}$ . Методика их получения изложена в § 4.4.11.

Наконец, выражаю признательность проф. Р. Б. Берду за обсуждение уравнения баланса механической энергии [24], так как его идеи с небольшими изменениями полностью вошли в этот параграф.

**7.4.7. Интегральное неравенство энтропии.** Неравенство энтропии является единственным постулатом, для которого мы еще не получили интегрального соотношения.

В § 5.5.2 получены две формы дифференциального неравенства энтропии:

$$\frac{\partial(\rho\hat{S})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\hat{S}\mathbf{v}) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{T}\mathbf{q}\right) - \rho\frac{Q}{T} \geq 0 \quad (7.4.7-1)$$

и

$$-\frac{1}{T^2}\mathbf{q}\cdot\nabla T + \frac{1}{T}\operatorname{tr}(\mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v}) \geq 0. \quad (7.4.7-2)$$

Последнее можно проинтегрировать по области, занимаемой произвольной системой. Тогда немедленно получаем:

$$\int_{V(s)} \left[ -\frac{1}{T^2}\mathbf{q}\cdot\nabla T + \frac{1}{T}\operatorname{tr}(\mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v}) \right] dV \geq 0. \quad (7.4.7-3)$$

Это одна из форм интегрального неравенства энтропии, применимая как для однофазных, так и для многофазных систем.

Неравенство энтропии в несколько более удобном виде можно получить, проинтегрировав уравнение (7.4.7-1) по произвольной системе:

$$\int_{V(s)} \left[ \frac{\partial(\rho\hat{S})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\hat{S}\cdot\mathbf{v}) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{T}\mathbf{q}\right) - \rho\frac{Q}{T} \right] dV \geq 0. \quad (7.4.7-4)$$

Используя обобщенную теорему переноса для первого члена в левой части, получаем:

$$\int_{V(s)} \frac{\partial(\rho\hat{S})}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho\hat{S} dV - \int_{S(s)} \rho\hat{S}\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (7.4.7-5)$$

Таблица 7.4.6-1

**Интегральные уравнения баланса механической энергии для однофазных систем в общем виде**

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{P - p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + \int_{V(s)} (P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \mathcal{U} - \mathcal{E} + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS \quad (\text{A})^1$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{P - p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{V(s)} (P - p_0) \times \\ \times \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \mathcal{U} - \mathcal{E} + \int_{V(s)} \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS \quad (\text{Б})$$

Для несжимаемой жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{P - p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ - \mathcal{U} - \mathcal{E} + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS \quad (\text{B})^2$$

Для изотермической жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \hat{A} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \hat{G} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ - \mathcal{U} - \mathcal{E} + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS \quad (\Gamma)^2$$

Для изоэнтропической жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \hat{O} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{p_0}{\rho} \right) dV + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \hat{H} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ - \mathcal{U} - \mathcal{E} + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS \quad (\Delta)^2$$

Для изобарной жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ - \mathcal{U} - \mathcal{E} + \int_{S_{(s)} - S_{(\text{вх, вых})}} (P - p_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (\text{E})^1$$

<sup>1</sup> Полагаем, что  $\partial \varphi / \partial t = 0$ .

<sup>2</sup> Для систем, состав которых не зависит от времени и координат.

**Общий вид интегральных уравнений баланса механической энергии  
для многофазных систем<sup>1</sup>**

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{P - p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + \int_{V_{(s)}} (P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \mathcal{W} - \mathcal{E} + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS + \\ + \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot \xi \right] dS \quad (\text{A})^2$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{P - p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + \int_{V_{(s)}} (P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \mathcal{W} - \mathcal{E} + \int_{V_{(s)}} \mathbf{v} \cdot \rho f dV + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \\ + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS + \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \frac{1}{2} \rho v^2 (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot \xi \right] dS \quad (\text{Б})$$

Для несжимаемой жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{P - p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ - \mathcal{W} - \mathcal{E} + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(p - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS + \\ + \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} + p_0 \mathbf{I}) \cdot \xi \right] dS \quad (\text{Б})^2$$

Для изотермической системы:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho \left( \tilde{A} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{P_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \tilde{G} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ - \mathcal{W} - \mathcal{E} + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS + \\ + \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \rho \left( \tilde{A} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \xi) \right] dS \quad (\Gamma)^2$$

Для изоэнтропической системы:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho \left( \tilde{D} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{P_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \tilde{H} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ - \mathcal{W} - \mathcal{E} + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS + \\ + \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \rho \left( \tilde{D} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \xi) \right] dS \quad (\Delta)^2$$

Для изобарной системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) dV = & \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS - \\ & - \mathcal{U} - \mathcal{E} + \int_{S_{(s)} - S_{(\text{вх.вых})}} (P - p_0) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dS + \\ & + \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \xi) \right] dS \end{aligned} \quad (\text{E})^2$$

<sup>1</sup> Здесь  $u_{(\xi)}$  — скорость перемещения границы раздела фаз [25]; обозначение в квадратных скобках определяется уравнением (7.4.4-7) см § 1.3.4;  $S_{(\text{синг})}$  — границы раздела фаз в области, ограниченной поверхностью  $S_{(s)}$ , не совпадающей с  $S_{(s)}$ .

<sup>2</sup> Полагаем, что  $\partial \varphi / \partial t = 0$ .

<sup>3</sup> Только для систем, состав которых не зависит от времени и координат.

Таблица 7.4.6-3

**Интегральные уравнения баланса механической энергии для многофазных систем, на которые накладываются ограничения<sup>1</sup>**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) dV = & \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{P - p_0}{\rho} \right) (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \\ & + \int_{V(s)} (P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} v dV - \mathcal{U} - \mathcal{E} \end{aligned} \quad (\text{A})^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \frac{1}{2} \rho v^2 dV = & \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{P - p_0}{\rho} \right) (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \\ & + \int_{V(s)} (P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} v dV - \mathcal{U} - \mathcal{E} + \int_{V(s)} \mathbf{v} \cdot \varphi \mathbf{i} dV \end{aligned} \quad (\text{Б})$$

Для несжимаемых жидкостей:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) dV = \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{P - p_0}{\rho} \right) (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - \mathcal{U} - \mathcal{E} \quad (\text{В})^2$$

Для изотермических систем:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \lambda + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho \left( \hat{G} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - \mathcal{U} - \mathcal{E} \quad (\Gamma)$$

Для изоэнтропических систем:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( D + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho \left( \hat{H} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - \mathcal{U} - \mathcal{E} \quad (\Delta)^3$$

Для изобарных систем:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) dV = \int_{S_{\text{вх, вых}}} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (-v \cdot n) dS - \mathcal{W} - \mathcal{E} + \\ + \int_{S_{(s)} - S_{\text{вх, вых}}} (P - p_0) v \cdot n dS \quad (E)^2$$

<sup>1</sup> Эти формы применимы при ограничениях, указанных в § 1.4.6.

<sup>2</sup> Полагаем  $d\varphi/dt = 0$ .

<sup>3</sup> Только для систем, состав которых не зависит от времени и координат.

С помощью преобразования Грина преобразуем второе и третье слагаемые уравнения (7.4.7-4) к виду:

$$\int_{V(s)} \left[ \operatorname{div}(\rho \hat{S} v) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{T} q\right) \right] dV = \int_{S(s)} \left[ \rho \hat{S} v + \frac{1}{T} q \right] \cdot n dS. \quad (7.4.7-6)$$

Запишем уравнение (7.4.7-4) с помощью (7.4.7-5) и (7.4.7-6):

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \hat{S} dV \geq \int_{S_{\text{вх, вых}}} \rho \hat{S} (v - v_{(s)}) \cdot (-n) dS + \\ + \int_{S(s)} \frac{1}{T} q \cdot (-n) dS + \int_{V(s)} \frac{\rho Q}{T} dV. \quad (7.4.7-7)$$

Этот результат означает, что скорость изменения энтропии произвольной системы больше или равна скорости, с которой энтропия поступает в систему вместе с любыми течениями массы через границы системы, общей скорости переноса энтропии в систему в результате контактного переноса энергии и общей скорости роста энтропии в системе в результате взаимного и внешнего переноса энергии в систему. Назовем уравнение (7.4.7-7) интегральным неравенством энтропии для однофазных систем.

Для многофазных систем можно использовать метод, изложенный в § 4.4.2; при этом получаем:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \hat{S} dV \geq \int_{S_{\text{вх, вых}}} \rho \hat{S} (v - v_{(s)}) \cdot (-n) dS + \int_{S(s)} \frac{1}{T} q \cdot (-n) dS + \int_{V(s)} \frac{\rho Q}{R} dV + \\ + \int_{S_{\text{синг}}} \left[ \rho \hat{S} (v \cdot \xi - u_{(\xi)}) + \frac{1}{T} q \cdot \xi \right] dS. \quad (7.4.7-8)$$

Это соотношение представляет собой еще один вид неравенства энтропии для многофазных систем. Обычно, когда применяется неравенство для скачка энтропии в виде

$$\left[ \rho \hat{S} (v \cdot \xi - u_{(\xi)}) + \frac{1}{T} q \cdot \xi \right] \geq 0, \quad (7.4.7-9)$$

уравнение (7.4.7-8) сводится к (7.4.7-7). Иными словами, уравнение (7.4.7-7) применимо как для однофазной, так и для многофазной систем, поскольку неравенство энтропии для скачка справедливо для всех поверхностей раздела фаз.

**7.4.8. Интегральное неравенство энтропии для турбулентных течений.** Для этого случая наши рассуждения аналогичны используемым при выводе других интегральных уравнений баланса для турбулентных течений (см., например, § 4.4.3).

Можно было бы повторить анализ из § 7.4.7, используя усреднение по времени дифференциальных неравенств энтропии, выведенных в § 5.5.2.

Проще будет провести усреднение по времени интегрального неравенства энтропии § 7.4.7 для любой однофазной или многофазной системы:

$$\frac{d}{dt} \overline{\int_{V(s)} \rho \hat{S} dV} \geq \overline{\int_{S_{(вх, вых)}} \rho \hat{S} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS} + \\ + \overline{\int_{S(s)} \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS} + \overline{\int_{V(s)} \rho \frac{Q}{T} dV}. \quad (7.4.8-1)$$

Это выражение является неравенством энтропии для турбулентных течений. При выводе этого соотношения мы полагали только, что неравенство энтропии для скачка (7.4.7-9) применимо для всех поверхностей раздела фаз системы.

Несколько более простой результат можно получить для однофазной или многофазной системы, если не учитывать поверхности раздела фаз. При этих условиях с помощью уравнений (4.4.3-7)–(4.4.3-9) можно показать, что уравнение (7.4.8-1) сводится к виду:

$$\frac{d}{dt} \overline{\int_{V(s)} \rho \hat{S} dV} \geq \overline{\int_{S_{(вх, вых)}} (\rho \hat{S} \mathbf{v} - \rho \hat{S} \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS} + \overline{\int_{S(s)} \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) dS} + \\ + \overline{\int_{V(s)} \frac{\rho Q}{T} dV}. \quad (7.4.8-2)$$

**7.4.9. Пример интегрального неравенства энтропии.** В монографии [28] говорится, что «невозможно построить двигатель, работающий между двумя источниками тепла, каждый из которых имеет постоянную фиксированную температуру, чтобы к. п. д. этого двигателя превышал к. п. д. обратимого двигателя, работающего между этими же источниками». Докажем это утверждение как следствие интегрального неравенства энтропии».

Вначале заметим, что для обратимой системы (прибор, двигатель и т. д.) неравенство энтропии сводится к равенству.

Предположим, двигатель работает в стационарном режиме и не содержит турбулентных течений. Утверждение автора [28] можно отнести к двигателю, у которого отсутствуют вход и выход

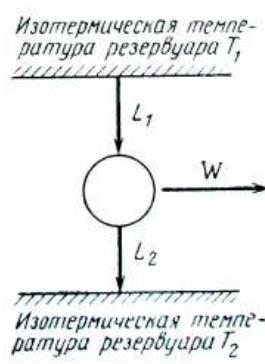


Рис. 7.4.9-1. Тепловая машина.

для течения. Обратимся к рис. 7.4.9-1. Отсюда мы можем заключить, что

$$T_1 > T_2 \quad (7.4.9-1)$$

и, следовательно, к. п. д. двигателя можно определить как  $\mathcal{W}/\mathcal{Q}_1$ .

Для необратимого двигателя в соответствии с интегральным уравнением баланса энергии в форме (Б) табл. 7.4.2-3 необходимо, чтобы удовлетворялось соотношение

$$\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2 - \mathcal{W} = 0. \quad (7.4.9-2)$$

Кроме того, интегральное неравенство энтропии § 7.4.7 означает, что

$$\frac{\mathcal{Q}_1}{T_1} - \frac{\mathcal{Q}_2}{T_2} \leq 0. \quad (7.4.9-3)$$

Отсюда

$$\frac{\mathcal{W}}{q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (7.4.9-4)$$

Используя рассуждение для обратимого двигателя, получаем:

$$\frac{\mathcal{W}_{(об)}}{\mathcal{Q}_{1(об)}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (7.4.9-5)$$

Уравнения (7.4.9-4) и (7.4.9-5) дают нам искомый результат:

$$\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{Q}_1} \leq \frac{\mathcal{W}_{(об)}}{\mathcal{Q}_{1(об)}}. \quad (7.4.9-6)$$

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### ОСНОВЫ МАССОПЕРЕНОСА

Теперь вполне уместно повторить пройденный материал. Представьте себе тело, состоящее из одного вещества, как частный случай многокомпонентной системы. Ниже мы еще раз сформулируем основные положения, приведенные в гл. 1, 2 и 5. На этот раз применительно к многокомпонентным телам. К счастью, все, что мы говорили об однокомпонентных системах, применимо с незначительными видоизменениями к многокомпонентным системам.

После описания в общих чертах структуры, которая используется при обсуждении многокомпонентных материалов, мы перейдем к определению понятий равновесия и устойчивого равновесия. Эти понятия обсуждаются на основе положений неравновесной термодинамики (см. § 5.1.2). Изложенный материал выходит за рамки термостатики Гиббса. Это сделано сознательно с целью связать наши представления непосредственно с экспериментальными данными. Все приведенные результаты, включая критерий устойчивого равновесия, согласуются с нашими знаниями, полученными из опыта, а также с критериями устойчивости, выведенными в рамках термостатики Гиббса.

#### 8.1. ОБЩИЙ ПОДХОД

8.1.1. *Общий подход при рассмотрении многокомпонентных материалов.* До сих пор мы касались в основном однокомпонентных или однородных материалов. Дальше мы будем иметь дело с веществом,

состоящим из  $N$  составляющих или компонент, которые вступают в произвольное число гомогенных и гетерогенных химических реакций. Нас интересует не только распределение скорости и температуры в таком материале, мы хотим также проследить изменение состава в зависимости от времени и положения. Нас может интересовать, например, скорость распространения в материале одной компоненты, образовавшейся вследствие катализитической реакции на соседней поверхности, или мы захотим определить скорость испарения капельки жидкости в окружающий поток газа.

Прежде всего мы должны выбрать континуальную модель для  $N$ -компонентного вещества. Уже говорилось, что нам может понадобиться проследить за каждой компонентой в отдельности, когда  $N$ -компонентная смесь подвергается какой-то обработке, связанной, например, с деформацией, течениями или химическими реакциями. Это означает, что мы рассматриваем каждую компоненту как сплошную среду с полем массы переменной плотности. Следовательно, моделью для  $N$ -компонентной смеси является суперпозиция таких сплошных сред.

Одна особенность этой модели может вначале вызвать недоразумение. В любой точке пространства, занятого смесью, существуют  $N$  материальных частиц (для сплошной среды, представляющей собой отдельную компоненту). Недоразумение может, вероятно, возникнуть из-за неверного отождествления материальной частицы в сплошной среде вида  $A$  с молекулой вида  $A$ . С другой стороны, эта суперпозиция  $N$ -компонентных сред согласуется с нашей обычной практикой отождествления состава с каждой точкой в многокомпонентной смеси.

*8.1.2. Тело, движение и материальная координата компоненты.* Понятия, введенные в § 1.1.1 для однокомпонентного вещества, можно легко обобщить на отдельную компоненту в  $N$ -компонентной смеси.

Тело вида  $A$  представляет собой систему, элементы которой называются частицами вида  $A$  или материальными частицами вида  $A$ . Непрерывное тождественное отображение этой системы на область трехмерного евклидова пространства существует и называется конфигурацией тела компоненты  $A$ :

$$\mathbf{z} = \chi_{(A)}(\boldsymbol{\zeta}_{(A)}) \quad (8.1.2-1)$$

или

$$\boldsymbol{\zeta}_{(A)} = \chi_{(A)}^{-1}(\mathbf{z}). \quad (8.1.2-2)$$

Здесь  $\chi_{(A)}^{-1}$  — обратное отображение  $\chi_{(A)}$ . Точка  $\mathbf{z} = \chi_{(A)}(\boldsymbol{\zeta}_{(A)})$  указывает положение, занимаемое частицей  $\boldsymbol{\zeta}_{(A)}$ , а  $\boldsymbol{\zeta}_{(A)} = \chi_{(A)}^{-1}(\mathbf{z})$  называется частицей вида  $A$ , положение которой  $\mathbf{z}$ .

В данный момент мы не будем непосредственно касаться тела, состоящего из  $N$  компонент. Имеется суперпозиция этих  $N$ -компонентных тел, которые образуют модель  $N$ -компонентной смеси.

Движение тела вида  $A$  — однопараметрическое семейство конфигураций; действительный параметр  $t$  — время. Запишем:

$$\mathbf{z} = \chi_{(A)}(\boldsymbol{\zeta}_{(A)}, t) \quad (8.1.2-3)$$

и

$$\boldsymbol{\zeta}_{(A)} = \chi_{(A)}^{-1}(\mathbf{z}, t). \quad (8.1.2-4)$$

Хотя мы не должны смешивать тела вида  $A$  с любыми их пространственными конфигурациями, необходимо признать, что наблюдать и изучать их можно только в этих конфигурациях. Часто удобно использовать положения в некоторой определенной конфигурации как способ выделения частиц вида  $A$ , образующих тело. Эта исходная конфигурация может быть, но не обязательно конфигурацией, действительно занятой телом во время его движения. Положение частицы вида  $A$  в исходной конфигурации  $\boldsymbol{\kappa}_{(A)}$  обозначим:

$$\mathbf{z}_{\star(A)}^1 = \boldsymbol{\kappa}_{(A)}(\xi_{(A)}). \quad (8.1.2-5)$$

Частицу в точке  $\mathbf{z}_{\star(A)}$  в конфигурации  $\boldsymbol{\kappa}_{(A)}$  можно выразить как

$$\boldsymbol{\zeta}_{(A)} = \boldsymbol{\kappa}_{(A)}^{-1}(\mathbf{z}_{\star(A)}). \quad (8.1.2-6)$$

Если  $\chi_{(A)}$  — движение тела вида  $A$ , то

$$\mathbf{z} = \chi_{(A)}(\boldsymbol{\zeta}_{(A)}, t) = \chi_{(A)}[\boldsymbol{\kappa}_{(A)}^{-1}(\mathbf{z}_{\star(A)}), t] = \chi_{\star(A)}(\mathbf{z}_{\star(A)}, t) \quad (8.1.2-7)$$

представляет собой семейство деформаций в относительной конфигурации компонента  $A$ . Индекс  $\times$  показывает, что член  $\chi_{\star(A)}(\mathbf{z}_{\star(A)}, t)$  зависит от выбора относительной конфигурации  $\boldsymbol{\kappa}_{(A)}$ .

Координаты  $\mathbf{z}_{\star(A)i}$  определяют положение  $\mathbf{z}_{\star(A)}$  в произвольной системе координат, неподвижной относительно исходной конфигурации  $\boldsymbol{\kappa}_{(A)}$ ; эти координаты называются материальными координатами вида  $A$ .

Пусть  $B$  — любая величина, скалярная или тензорная. Будем говорить о производной по времени от  $B$ , связанной с движением частицы вида  $A$ . Определим:

$$\frac{d_{(A)} B}{dt} \equiv \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\mathbf{z}_{\star(A)}} \equiv \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\mathbf{z}_{\star(A)1}, \mathbf{z}_{\star(A)2}, \mathbf{z}_{\star(A)3}}. \quad (8.1.2-8)$$

Например, вектор скорости движения вещества  $A$   $\mathbf{v}_{(A)}$  представляет собой скорость изменения во времени положения материальной частицы вещества  $A$ :

$$\mathbf{v}_{(A)} \equiv \frac{d_{(A)} \mathbf{z}}{dt} = \left[ \frac{\partial \chi_{\star(A)}(\mathbf{z}_{\star(A)}, t)}{\partial t} \right]_{\mathbf{z}_{\star(A)}}. \quad (8.1.2-9)$$

## 8.2. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА МАССЫ

**8.2.1. Уравнение баланса массы для отдельных компонент.** Для обсуждения движения различных компонент в многокомпонентной смеси необходим шестой постулат — баланс массы для отдельных компонент.

Скорость изменения во времени массы каждого вещества  $A$  ( $A=1, 2, \dots, N$ ) в многокомпонентной смеси равна скорости возникновения массы вещества  $A$  в гомогенной химической реакции.

Пусть  $V_{(A)}$  — объем вещества  $A$  (группа частиц  $A$ ),  $\rho_{(A)}$  — массовая плотность вида  $A$  и  $r_{(A)}$  — скорость образования вещества  $A$  в единице

объема химическими реакциями. Этот шестой постулат математически формулируется в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V(A)} \rho_{(A)} dV = \int_{V(A)} r_{(A)} dV. \quad (8.2.1-1)$$

Понятно, что пределы этих объемных материалов в пространственных координатах являются функциями времени.

Теперь предположим, что все величины являются непрерывными и дифференцируемыми необходимое число раз.

Теорему переноса из § 1.3.2 можно модифицировать для группы частиц вещества  $A$ . Используя эту теорему в левой части уравнения (8.2.1-1), получаем:

$$\int_{V(A)} \left( \frac{d_{(A)} \rho_{(A)}}{dt} + \rho_{(A)} \operatorname{div} \mathbf{v}_{(A)} \right) dV = \int_{V(A)} r_{(A)} dV \quad (8.2.1-2)$$

или

$$\int_{V(A)} \left( \frac{d_{(A)} \rho_{(A)}}{dt} + \rho_{(A)} \operatorname{div} \mathbf{v}_{(A)} - r_{(A)} \right) dV = 0. \quad (8.2.1-3)$$

Поскольку эта теорема используется для произвольного объема вещества  $A$ , в каждой точке системы имеем:

$$\frac{d_{(A)} \rho_{(A)}}{dt} + \rho_{(A)} \operatorname{div} \mathbf{v}_{(A)} = r_{(A)}. \quad (8.2.1-4)$$

Уравнение (8.2.1-4) обычно называется уравнением неразрывности для вещества  $A$ . Чаще это уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)}) = r_{(A)}. \quad (8.2.1-5)$$

Иногда удобнее оперировать с помощью молярной плотности  $c_{(A)} \equiv \rho_{(A)}/M_{(A)}$ , где  $M_{(A)}$  — молекулярная масса вещества  $A$ . В этом случае уравнение (8.2.1-5) можно переписать в виде

$$\frac{\partial c_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} (c_{(A)} \mathbf{v}_{(A)}) = \frac{r_{(A)}}{M_{(A)}}. \quad (8.2.1-6)$$

Необходимо подчеркнуть, что  $r_{(A)}$  — скорость образования вещества  $A$  в единице объема при гомогенной химической реакции. Эта величина совершенно не связана с гетерогенными химическими реакциями. Поскольку на границе раздела происходят гетерогенные химические реакции, их следует учесть в граничных условиях. Однако наиболее часто гетерогенные химические реакции рассматриваются в связи с пористыми телами, где реакция происходит на поверхности раздела фаз (газ — твердое тело) во всей пористой структуре. Когда для описания массопереноса в пористом теле используется осредненное по объему уравнение неразрывности вещества  $A$ , скорость ее образования вследствие гетерогенных реакций описывается выражением для источника. Подробности изложены в § 10.3.1. Этот вопрос будет рассматриваться также в § 9.1.1.

Во всех последующих рассуждениях мы будем считать, что заданы определяющие уравнения или экспериментальная зависимость для  $r_{(A)}$  как функции состава, температуры, давления и т. д. Вывод этих определяющих уравнений для  $r_{(A)}$  не приводится, так как он содержится в различных работах по кинетике.

8.2.2. *Концентрация, скорость и потоки массы.* Одним из наиболее сложных аспектов проблем массопереноса является то, что для обозначения одних и тех же понятий используется различная терминология.

При обсуждении концентрации вещества  $A$  в многокомпонентной смеси можно говорить о массовой плотности  $\rho_{(A)}$ , молярной плотности  $\sigma_{(A)}$ , массовой концентрации  $\omega_{(A)}$  или о мольной концентрации  $x_{(A)}$ . Соотношения между этими величинами приведены в табл. 8.2.2-1 и 8.2.2-2.

Исследователи не ограничиваются рассмотрением скорости вещества  $A$   $v_{(A)}$ , а часто вводят скорость вещества  $A$  относительно среднемассовой скорости

$$u_{(A)} \equiv v_{(A)} - v, \quad (8.2.2-1)$$

где среднемассовая скорость  $v$  равна:

$$v \equiv \sum_{A=1}^N \omega_{(A)} v_{(A)}. \quad (8.2.2-2)$$

В табл. 8.2.2-3 и 8.2.2-4 показано, что можно также оперировать со скоростью движения вещества  $A$  относительно среднемолярной скорости

$$u^*_{(A)} \equiv v_{(A)} - v^*. \quad (8.2.2-3)$$

Определим среднемолярную скорость  $v^*$  как

$$v^* \equiv \sum_{A=1}^N x_{(A)} v_{(A)}. \quad (8.2.2-4)$$

В § 8.2.1 получено уравнение сохранения массы вещества  $A$  в виде

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_{(A)} v_{(A)}) = r_{(A)}. \quad (8.2.2-5)$$

Величина

$$n_{(A)} \equiv \rho_{(A)} v_{(A)} \quad (8.2.2-6)$$

обычно называется плотностью потока массы вещества  $A$  относительно неподвижной системы отсчета (неподвижных звезд или стен лаборатории). Можно также изучать изменения концентрации и скорости, используя понятие молярного потока вещества  $A$  относительно неподвижной системы отсчета или массового и молярного потоков относительно среднемассовых или среднемолярных скоростей. Соотношения между этими величинами приведены в табл. 8.2.2-4.

Аналогично дифференциальному уравнению баланса массы, выраженному через  $n_{(A)}$ , получим:

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} n_{(A)} = r_{(A)}; \quad (8.2.2-7)$$

Таблица 8.2.2-1

Обозначения для концентраций<sup>1</sup>

$\rho = \sum_{A=1}^N \rho_{(A)}$	— массовая плотность смеси раствора
$\omega_{(A)} = \rho_{(A)}/\rho$	— массовая концентрация вещества $A$
$c_{(A)} = \rho_{(A)}/M_{(A)}$	— молярная плотность вещества $A$
$c = \sum_{A=1}^N c_{(A)}$	— молярная плотность смеси
$x_{(A)} = c_{(A)}/c$	— молярная концентрация вещества $A$
$M = \rho/c = \sum_{A=1}^N x_{(A)} M_{(A)}$	— среднемолярная молекулярная масса смеси
$\frac{1}{M} = \frac{c}{\rho} = \sum_{A=1}^N \omega_{(A)}/M_{(A)}$	

<sup>1</sup> В соответствии с табл. 1.6, 1-1 из [1].

Таблица 8.2.2-2

## Соотношения между массовыми и молярными концентрациями

$$x_{(A)} = \frac{\omega_{(A)}/M_{(A)}}{\sum_{B=1}^N \omega_{(B)}/M_{(B)}}$$

Для бинарной системы:

$$dx_{(A)} = \frac{d\omega_{(A)}}{M_{(A)}M_{(B)} \left( \frac{\omega_{(A)}}{M_{(A)}} + \frac{\omega_{(B)}}{M_{(B)}} \right)^2} = \\ = \left( \frac{\rho}{c} \right)^2 \frac{d\omega_{(A)}}{M_{(A)}M_{(B)}}$$

$$\omega_{(B)} = \frac{x_{(A)}M_{(A)}}{\sum_{B=1}^N x_B M_{(B)}}$$

Для бинарной системы:

$$d\omega_{(A)} = \frac{M_{(A)}M_{(B)}dx_{(A)}}{(x_{(A)}M_{(A)} + x_{(B)}M_{(B)})^2} = \\ = \left( \frac{c}{\rho} \right)^2 M_{(A)}M_{(B)}dx_{(A)}$$

Таблица 8.2.2-3  
Различные скорости и соотношения между ними<sup>1</sup>

$v_{(A)}$  — скорость вещества  $A$  относительно неподвижной системы отсчета

$$v \equiv \sum_{A=1}^N \omega_{(A)} v_{(A)}$$

— среднемассовая скорость

$$v^* \equiv \sum_{A=1}^N x_{(A)} v_{(A)}$$

— среднемолярная скорость

$$u_{(A)} \equiv v_{(A)} - v$$

— скорость вещества  $A$  относительно  $v$

$\mathbf{u}^*(A) \equiv \mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v}^*$  — скорость движения вещества  $A$  относительно  $\mathbf{v}^*$

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}^* = \sum_{A=1}^N \omega_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v}^*)$$

$$\mathbf{v}^* - \mathbf{v} = \sum_{A=1}^N x_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v})$$

<sup>1</sup>В соответствии с табл. 1.6.1-2 из работы [1].

Таблица 8.2.2-4

Массовые и молярные потоки<sup>1</sup>

Величина	Относительно неподвижной системы отсчета	относительно $\mathbf{v}$	Относительно $\mathbf{v}^*$
Скорость вещества $A$	$\mathbf{v}_{(A)}$	$\mathbf{u}_{(A)} = \mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v}$	$\mathbf{u}^*_{(A)} = \mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v}^*$
Массовый поток вещества $A$	$n_{(A)} = \rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)}$	$\mathbf{j}_{(A)} = \rho_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v})$	$\mathbf{j}^*_{(A)} = \rho_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v}^*)$
Молярный поток вещества $A$	$N_{(A)} = c_{(A)} \mathbf{v}_{(A)}$	$\mathbf{J}_{(A)} = c_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v})$	$\mathbf{J}^*_{(A)} = c_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v}^*)$
Сумма массовых потоков	$\sum_{A=1}^N n_{(A)} = \rho \mathbf{v}$	$\sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} = 0$	$\sum_{A=1}^N \mathbf{j}^*_{(A)} = \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)$
Сумма молярных потоков	$\sum_{A=1}^N N_{(A)} = c \mathbf{v}^*$	$\sum_{A=1}^N \mathbf{J}_{(A)} = c (\mathbf{v}^* - \mathbf{v})$	$\sum_{A=1}^N \mathbf{J}^*_{(A)} = 0$
Потоки, выраженные через $n_{(A)}$ ( $A=1, 2, \dots, N$ )	$N_{(A)} = \frac{n_{(A)}}{M_{(A)}}$	$\mathbf{j}_{(A)} = n_{(A)} - \omega_{(A)} \sum_{B=1}^N n_{(B)}$	$j^*_{(A)} = n_{(A)} - M_{(A)} x_{(A)} \sum_{B=1}^N \frac{n_{(B)}}{M_{(B)}}$
Потоки, выраженные через $N_{(A)}$ ( $A=1, 2, \dots, N$ )	$n_{(A)} = M_{(A)} N_{(A)}$	$\mathbf{J}_{(A)} = N_{(A)} - \frac{\omega_{(A)}}{M_{(A)}} \sum_{B=1}^N M_{(B)} N_{(B)}$	$J^*_{(A)} = N_{(A)} - x_{(A)} \sum_{B=1}^N N_{(B)}$
Потоки, выраженные через $\mathbf{j}_{(A)}$ и $\mathbf{v}$	$n_{(A)} = j_{(A)} + \rho_{(A)} \mathbf{v}$	$\mathbf{J}_{(A)} = j_{(A)} / M_{(A)}$	$j^*_{(A)} = j_{(A)} - \omega_{(A)} M \sum_{B=1}^N j_{(B)} / M_{(B)}$
Потоки, выраженные через $\mathbf{j}^*_{(A)}$ и $\mathbf{v}^*$	$N_{(A)} = J^*_{(A)} + c_{(A)} \mathbf{v}^*$	$\mathbf{J}_{(A)} = J^*_{(A)} - \frac{x_{(A)}}{M} \sum_{B=1}^N M_B J^*_{(B)}$	Для бинарных систем: $j^*_{(A)} = (M/M_{(B)}) j_{(A)}$ $J^*_{(A)} = M_{(A)} J^*_{(A)}$

Для бинарных систем:  
 $J_{(A)} = (M_B/M) J^*_{(A)}$

<sup>1</sup>В соответствии с табл. 1.6.1-3 из [1].

мы можем переписать это уравнение, используя все другие векторы массовых и молярных потоков. Например, массовый поток вещества  $A$  относительно среднемассовой скорости определяется как

$$\mathbf{j}_{(A)} \equiv \rho_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v}). \quad (8.2.2-8)$$

Уравнение (8.2.2-5) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{(A)} \mathbf{v}) + \operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)} = r_{(A)}. \quad (8.2.2-9)$$

Из общего уравнения неразрывности найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{(A)} \mathbf{v}) &= \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \nabla \rho_{(A)} \cdot \mathbf{v} + \rho_{(A)} (\operatorname{div} \mathbf{v}) = \\ &= \frac{d(\mathbf{v}) \rho_{(A)}}{dt} - \omega_{(A)} \frac{d(\mathbf{v})}{dt} = \rho \frac{d(\mathbf{v}) \omega_{(A)}}{dt}. \end{aligned} \quad (8.2.2-10)$$

Если  $B$  — любая величина, скалярная или тензорная, можно использовать обозначение

$$\frac{d(\mathbf{v}) B}{dt} \equiv \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla B \cdot \mathbf{v} \quad (8.2.2-11)$$

для производной по времени, связанной с воображаемой частицей, которая движется с локальной среднемассовой скоростью многокомпонентной смеси. Из уравнений (8.2.2-9) и (8.2.2-10) получаем:

$$\rho \frac{d(\mathbf{v}) \omega_{(A)}}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)} = r_{(A)}. \quad (8.2.2-12)$$

Некоторые другие возможные формы дифференциального уравнения неразрывности вещества  $A$  представлены в табл. 8.2.2-5.

Чтобы помочь читателю в постановке задач, уравнение (8.2.2-7) представлено в табл. 8.2.2-6 для трех систем координат.

Таблица 8.2.2-5

**Формы уравнения неразрывности для компоненты  $A$**

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{n}_{(A)} = r_{(A)} \quad (A)$$

$$\frac{\partial c_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{N}_{(A)} = \frac{r_{(A)}}{M_{(A)}} \quad (B)$$

$$\rho \frac{\partial(\mathbf{v}) \omega_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)} = r_{(A)} \quad (B)^1$$

$$\rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \left( \frac{c_{(A)}}{\rho} \right) + \operatorname{div} \mathbf{J}_{(A)} = \frac{r_{(A)}}{M_{(A)}} \quad (G)^1$$

$$c \frac{d(\mathbf{v}^*)}{dt} \left( \frac{\rho_{(A)}}{c} \right) + \operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)}^* = r_{(A)} - M_{(A)} x_{(A)} \sum_{B=1}^N \frac{r_{(B)}}{M_{(B)}} \quad (D)^2$$

$$c \frac{d(\mathbf{v}^*) x_{(A)}}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{J}_{(A)}^* = \frac{r_{(A)}}{M_{(A)}} - x_{(A)} \sum_{B=1}^N \frac{r_{(B)}}{M_{(B)}} \quad (E)^2$$

$${}^1 \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \Psi \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \nabla \Psi \cdot \mathbf{v}.$$

$${}^2 \frac{d(\mathbf{v}^*)}{dt} \Psi \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \nabla \Psi \cdot \mathbf{v}^*.$$

**Уравнение неразрывности для вещества A в различных системах координат  
[уравнение (A) из табл. 8.2.2-5]**

Прямоугольные координаты:

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \frac{\partial n_{(A)1}}{\partial z_1} + \frac{\partial n_{(A)2}}{\partial z_2} + \frac{\partial n_{(A)3}}{\partial z_3} = r_{(A)} \quad (\text{A})$$

Цилиндрические координаты:

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn_{(A)r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial n_{(A)\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial n_{(A)z}}{\partial z} = r_{(A)} \quad (\text{B})$$

Сферические координаты:

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 n_{(A)r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (n_{(A)\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial n_{(A)\varphi}}{\partial \varphi} = r_{(A)} \quad (\text{B})$$

### 8.3. ПОСТУЛАТЫ

**8.3.1. Предыдущие постулаты.** При рассмотрении переноса импульса и энергии в однокомпонентных системах (гл. 1—7), мы основывались на пяти постуатах: закон сохранения массы (§ 1.3), первый и второй законы Эйлера (§ 2.2.1), баланс энергии (§ 5.3.1), неравенство энтропии (§ 5.5.1).

Мы будем использовать эти постулаты для многокомпонентных систем, сделав, конечно, некоторые изменения. Мы еще не определили, что понимается под материальной частицей многокомпонентной смеси или многокомпонентным телом. Прежде чем говорить о многокомпонентном теле, мы представили себе суперпозицию материальных тел, каждое из которых соответствует определенной компоненте из  $N$  имеющихся компонент. Очевидно, что определение многокомпонентного тела, как набор  $N$  соответствующих тел, не имеет физического смысла, т. е. каждая из  $N$  компонент может двигаться и деформироваться по отношению к другим  $N-1$  компонентам.

Можно действовать таким образом. Определим среднемассовую материальную частицу многокомпонентной смеси как искусственную частицу, которая движется со среднемассовой скоростью смеси (см. табл. 8.2.2-3). Тогда многокомпонентное тело определяется как совокупность, элементами которой являются среднемассовые материальные частицы.

Поверхность раздела фаз в многокомпонентной смеси можно рассматривать как сингулярную поверхность тела, состоящего из вещества  $A$ . Поскольку поверхность разрыва относительно  $\rho_{(A)}$  или  $v_{(A)}$  означает поверхность разрыва относительно  $\rho$  или  $v$ , можно в дальнейшем отождествить поверхность раздела фаз с сингулярной поверхностью в многокомпонентном теле.

В следующих параграфах обозначение  $d_{(v)}/dt$  употребляется для производной по времени относительно среднемассовой материальной частицы. Под  $V_{(v)}$  мы подразумеваем объем или область пространства, занятые совокупностью среднемассовых материальных частиц;  $S_{(v)}$  обозначает замкнутую ограничивающую поверхность в этой области.

**8.3.2. Сохранение массы.** Суть нашего первого постулата о сохранении массы такова:

масса многокомпонентной системы не зависит от времени.

Определим массу многокомпонентной системы как

$$M = \int_{V(v)} \rho dV, \quad (8.3.2-1)$$

где

$$\rho = \sum_{A=1}^N \rho_{(A)}. \quad (8.3.2-2)$$

Утверждение, что масса сохраняется, означает:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(v)} \rho dV = 0 \quad (8.3.2-3)$$

Ограничимся рассмотрением многокомпонентной системы, в которой все величины являются непрерывными и дифференцируемыми необходимое число раз, т. е. ударные волны и поверхности раздела фаз исключаются (см. § 2.3.1). Используя теорему переноса в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V(v)} \Phi dV = \int_{V(v)} \left( \frac{d(v)\Phi}{dt} + \Phi \operatorname{div} v \right) dV, \quad (8.3.2-3a)$$

можно переписать уравнение (8.3.2-3) в виде

$$\int_{V(v)} \left( \frac{d(v)\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v \right) dV = 0. \quad (8.3.2-4)$$

Поскольку это уравнение справедливо для произвольной многокомпонентной системы, можно заключить, что

$$\frac{d(v)\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0. \quad (8.3.2-5)$$

Это уравнение можно считать общим уравнением неразрывности для многокомпонентной смеси. Не удивительно, что оно имеет тот же вид, что и уравнение неразрывности для однокомпонентной системы, полученное в § 1.3.3.

Из уравнения (8.3.2-5) следует:

$$\sum_{A=1}^N r_{(A)} = 0. \quad (8.3.2-6)$$

Две общие формы уравнения неразрывности, используемые чаще всего, представлены в табл. 8.3.2-1.

Таблица 8.3.2-1

**Формы общего уравнения неразрывности**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho v) = 0 \quad (A)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} (cv^*) = \sum_{A=1}^N \frac{r_A}{M_{(A)}} \quad (B)$$

8.3.3. *Первый закон Эйлера.* Можно сформулировать второй постулат (первый закон Эйлера) по-другому:

скорость изменения во времени импульса многокомпонентной системы относительных неподвижных звезд равна сумме сил, действующих на систему.

Будем использовать понятия, введенные в § 2.1.1. Следует отметить, что на каждую компоненту могут действовать различные внешние силы. Рассмотрим, например, разбавленный раствор хлористого натрия в воде, на который действует электрическое поле. Хлористый натрий будет почти полностью ионизирован, и, следовательно, необходимо рассматривать три отдельные компоненты: ионы натрия, ионы хлора и воду. Сила электрического поля, действующая на ионы натрия, будет равна по значению, но противоположна по направлению силе, с которой это поле действует на ионы хлора. Электрическое поле непосредственно на воду не действует.

Из этих соображений первый закон Эйлера математически можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V(v)} \rho v dV = \int_{S(v)} t dS + \int_{V(v)} \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} f_{(A)} dV. \quad (8.3.3-1)$$

Здесь  $f_A$  означает внешнюю силу, действующую на единицу массы вещества  $A$ .

Будем снова рассматривать многокомпонентное тело, все величины которого непрерывны и дифференцируемы необходимое число раз. Если ввести тензор напряжений  $T$  обычным способом, то, используя теорему переноса в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V(v)} \rho \Phi dV = \int_{V(v)} \rho \frac{d(v)}{dt} \Phi dV, \quad (8.3.3-1a)$$

получаем:

$$\rho \frac{d(v)}{dt} = \operatorname{div} T + \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} f_{(A)}. \quad (8.3.3-2)$$

Это уравнение известно как *первый закон Коши для многокомпонентной смеси*.

Если определить среднемассовую внешнюю силу на единицу массы в виде

$$f = \frac{1}{\rho} \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} f_{(A)}, \quad (8.3.3-3)$$

уравнение (8.3.3-2) примет тот же вид, что и уравнение Коши для однокомпонентного вещества:

$$\rho \frac{d(v)}{dt} = \operatorname{div} T + \rho f. \quad (8.3.3-4)$$

8.3.4. *Второй закон Эйлера.* Можно сформулировать третий постулат — *второй закон Эйлера* таким образом:

скорость изменения со временем момента импульса многокомпонентной системы относительно неподвижных звезд равна сумме моментов всех сил, действующих на систему.

Математически это выражается так:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(v)} \rho (\mathbf{p} \wedge \mathbf{v}) dV = \int_{S(v)} \mathbf{p} \wedge \mathbf{t} dS + \int_{V(v)} \rho (\mathbf{p} \wedge \mathbf{f}) dV. \quad (8.3.4-1)$$

Заметим, что здесь введена среднемассовая внешняя сила на единицу массы  $\mathbf{f}$ , определенная в § 8.3.3.

Ограничимся снова многокомпонентной системой, все величины которой непрерывны и дифференцируемы необходимое число раз. Если ввести тензор напряжений  $\mathbf{T}$ , то, используя теорему переноса (8.3.3-1а) и первый закон Коши для многокомпонентной смеси, получаем:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (8.3.4-2)$$

Это соотношение является математическим выражением второго закона Коши для многокомпонентной смеси.

Необходимым и достаточным условием для баланса импульса в многокомпонентной системе является условие симметричности тензора напряжений.

**8.3.5. Баланс энергии.** Перепишем наш четвертый постулат — баланс энергии:

скорость изменения по времени внутренней и кинетической энергий многокомпонентной системы относительно неподвижных зезд равна скорости, с которой силы, действующие на систему, производят над ней работу плюс скорость переноса энергии к телу.

Запишем символическое выражение этого постулата:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(v)} \rho \left( D + \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} v_{(A)}^2 \right) dV &= \int_{S(v)} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) dS + \\ &+ \int_{V(v)} \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)}) dV + \int_{S(v)} h dS + \int_{V(v)} \rho Q dV. \end{aligned} \quad (8.3.5-1)$$

Вполне вероятно, что скорость переноса **внешней** и внутренней энергий может сильно отличаться для различных компонент; в этом случае мы считаем, что  $Q$  означает среднемассовую скорость переноса внешней и внутренней энергий на единицу массы, которая соответствует каждой из  $N$  компонент.

Ограничимся многокомпонентной системой, все величины которой являются непрерывными функциями и дифференцируемыми необходимое число раз. Если ввести вектор потока энергии, то с помощью теоремы переноса

$$\frac{d}{dt} \int_{V(v)} \rho \Phi dV = \int_{V(v)} \rho \frac{d(\mathbf{v}) \Phi}{dt} dV$$

и уравнений первого закона Коши мы можем получить две важные формулировки общего дифференциального уравнения

баланса энергии для многокомпонентной системы:

$$\rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \left( \hat{U} + \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u_{(A)}^2 + \frac{1}{2} v^2 \right) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)}) + \rho Q; \quad (8.3.5-2)$$

$$\rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \hat{U} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{tr} (\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} (\mathbf{u}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)}) + \rho Q - \rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u_{(A)}^2. \quad (8.3.5-3)$$

Введенная здесь величина  $\mathbf{u}_{(A)}$  означает скорость вещества  $A$  относительно среднемассовой скорости  $\mathbf{v}$  (см. табл. 8.2.2-3).

В большинстве случаев мы можем пренебречь последним членом в правой части уравнения (8.3.5-3) по сравнению с его левой частью.

Введем новую величину — внутреннюю энергию  $\hat{U}^*$  [2, 3]:

$$\hat{U}^* \equiv \hat{U} + \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u_{(A)}^2 \quad (8.3.5-4)$$

и запишем общее уравнение баланса энергии в виде

$$\rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \hat{U}^* = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{tr} (\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} (\mathbf{u}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)}) + \rho Q. \quad (8.3.5-5)$$

К сожалению, такое упрощение невозможно при использовании основного определяющего уравнения для термодинамически однородного материала в виде (5.1.2-2) или (5.1.2-3). При этом необходимо иметь в виду, что в своем основном определяющем уравнении (5.1.2-1) для  $\hat{U}$  мы считали, что эта величина не зависит в явном виде от движения материала. Уравнение (8.3.5-4) требует, чтобы  $\hat{U}^*$  была явной функцией движения вещества, выраженной последним членом в правой части.

Обычно нас больше интересует распределение температуры в веществе, чем внутренней энергии. Из уравнения (5.1.2-15) получим:

$$\begin{aligned} d\hat{U} &= T d\hat{S} - P d\hat{V} + \sum_{A=1}^{N-1} (\mu_{(A)} - \mu_{(N)}) d\omega_{(A)} = T \left( \frac{\partial \hat{S}}{\partial T} \right)_{\hat{V}, \omega_{(B)}} dT + \\ &+ \left[ T \left( \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{V}} \right)_{T, \omega_{(B)}} - P \right] d\hat{V} + \sum_{A=1}^{N-1} \left[ T \left( \frac{\partial \hat{S}}{\partial \omega_{(A)}} \right)_{T \hat{V}, \omega_{(B)} (B \neq A, N)} + \mu_{(A)} - \mu_{(N)} \right] \times \\ &\times d\omega_{(A)} = \hat{c}_v dT + \left[ T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\hat{V}, \omega_{(B)}} - P \right] dV + \\ &+ \sum_{A=1}^{N-1} \left\{ - T \left[ \frac{\partial (\mu_{(A)} - \mu_{(N)})}{\partial T} \right]_{\hat{V}, \omega_{(B)}} + \mu_{(A)} - \mu_{(N)} \right\} d\omega_{(A)} = \\ &= \hat{c}_v dT + \left[ T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\hat{V}, \omega_{(B)}} - P \right] d\hat{V} + \sum_{A=1}^N \left[ \mu_{(A)} - T \left( \frac{\partial \mu_{(A)}}{\partial T} \right)_{\hat{V}, \omega_{(B)}} \right] d\omega_{(A)}. \end{aligned} \quad (8.3.5-6)$$

Здесь мы ввели теплоемкость на единицу массы при постоянном удельном объеме

$$\hat{c}_v \equiv T \left( \frac{\partial \hat{S}}{\partial T} \right)_{\hat{V}, \omega(B)} \quad (8.3.5-7)$$

и использовали соотношение Максвелла:

$$\left( \frac{\partial \hat{S}}{\partial \omega(A)} \right)_{T, \hat{V}, \omega(B), (B \neq A, N)} = \left[ \frac{\partial (\mu_{(A)} - \mu_{(N)})}{\partial T} \right]_{\hat{V}, \omega(B)}. \quad (8.3.5-8)$$

Из общего уравнения неразрывности следует:

$$\rho \frac{d(v) \hat{V}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{d(v)^p}{dt} = \operatorname{div} v \quad (8.3.5-9)$$

и уравнение неразрывности для вещества  $A$  (см. табл. 8.2.2-5) дает:

$$\rho \frac{d(v) \omega_{(A)}}{dt} = - \operatorname{div} j_{(A)} + r_{(A)}. \quad (8.3.5-10)$$

Уравнения (8.3.5-6), (8.3.5-9) и (8.3.5-10) позволяют переписать уравнение (8.3.5-3) в виде

$$\begin{aligned} \rho \hat{c}_v \frac{d(v)^T}{dt} &= - \operatorname{div} q + \operatorname{tr}(S \cdot \nabla v) + \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} u_{(A)} \cdot f_{(A)} + \rho Q - \\ &- T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\hat{V}, \omega(B)} \operatorname{div} v + \sum_{A=1}^N \left[ \mu_{(A)} - T \left( \frac{\partial \mu_{(A)}}{\partial T} \right)_{\hat{V}, \omega(B)} \right] (\operatorname{div} j_{(A)} - r_{(A)}) - \\ &- \rho \frac{d(v)}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u_{(A)}^2. \end{aligned} \quad (8.3.5-11)$$

Различные формы общего дифференциального уравнения баланса энергии приведены в табл. 8.3.5-1.

*8.3.6. Неравенство энтропии.* Пятый постулат — неравенство энтропии, можно сформулировать так:

скорость возникновения энтропии в многокомпонентной системе в результате переноса внешней и внутренней энергий должна быть больше или равна нулю.

Для того чтобы сформулировать этот постулат более четко, используя подход, разработанный в § 5.5.1, представим уравнение баланса энергии через уравнение баланса энтропии для сплошной среды.

Из уравнения Гиббса (5.1.2-15), уравнения неразрывности для вещества  $A$ , уравнения (В) табл. 8.2.2-5 и общего уравнения неразрывности (§ 8.3.2) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{T} \frac{d(v)^D}{dt} &= \rho \frac{d(v) \hat{S}}{dt} + \frac{P}{T\rho} \frac{d(v)\rho}{dt} + \sum_{A=1}^N \frac{\mu_{(A)}\rho}{T} \frac{d(v) \omega_{(A)}}{dt} = \\ &= \rho \frac{d(v) \hat{S}}{dt} - \frac{P}{T} \operatorname{div} v + \sum_{A=1}^N \frac{\mu_{(A)}}{T} (r_{(A)} - \operatorname{div} j_{(A)}). \end{aligned} \quad (8.3.6-1)$$

## Разные формы наиболее общих дифференциальных уравнений баланса

$$\rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \rho Q + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} - \rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u_{(A)}^2 \quad (\text{A})^*$$

$$\rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) + \sum_{A=1}^N \mathbf{n}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \rho Q - \rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u_{(A)}^2 \quad (\text{Б})$$

$$\rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \widehat{U} = -\operatorname{div} \mathbf{q} - P \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} - \rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u_{(A)}^2 \quad (\text{В})$$

$$\rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \widehat{H} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{d(\mathbf{v})}{dt} P + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} - \rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u_{(A)}^2 \quad (\text{Г})$$

$$\rho \widehat{c}_v \frac{d(\mathbf{v})}{dt}^T = -\operatorname{div} \mathbf{q} - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\widehat{V}, \omega(B)} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \sum_{A=1}^N \left[ \mu_{(A)} - T \left( \frac{\partial \mu_{(A)}}{\partial T} \right)_{\widehat{V}, \omega(B)} \right] (\operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)} - r_{(A)}) - \rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u_{(A)}^2 \quad (\text{Д})$$

$$\rho \widehat{c}_v \frac{d(\mathbf{v})}{dt}^T = -\operatorname{div} \mathbf{q} - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\widehat{V}, \omega(B)} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \sum_{A=1}^N \left\{ \bar{U}_{(A)} + \left[ P - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\widehat{V}, \omega(B)} \right] \bar{V}_{(A)} \right\} (\operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)} - r_{(A)}) - \rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u_{(A)}^2 \quad (\text{Е})$$

$$\rho \widehat{c}_p \frac{d(\mathbf{v})}{dt}^T = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \left( \frac{\partial \ln \widehat{V}}{\partial \ln T} \right)_{P, \omega(B)} \frac{d(\mathbf{v})}{dt} P + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \sum_{A=1}^N \left[ \mu_{(A)} - T \left( \frac{\partial \mu_{(A)}}{\partial T} \right)_{P, \omega(B)} \right] (\operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)} - r_{(A)}) - \rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u_{(A)}^2 \quad (\text{Ж})$$

$$\widehat{\rho c_p} \frac{d(\mathbf{v})^T}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \left( \frac{\partial \ln \bar{V}}{\partial \ln T} \right)_{P, \omega(B)} \frac{d(\mathbf{v})^P}{dt} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \\ + \sum_{A=1}^N \bar{H}_{(A)} (\operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)} - r_{(A)}) - \rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u^2_{(A)} \quad (3)$$

$$\rho \frac{d(\mathbf{v})^{\bar{S}}}{dt} = -\operatorname{div} \left( \frac{1}{T} \left[ \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \left( \mu_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)} \right) \mathbf{j}_{(A)} \right] \right) - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \\ + \rho \frac{Q}{T} - \frac{1}{T} \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \left[ T \nabla \left( \frac{\mu_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)}}{T} \right) - \mathbf{f}_{(A)} + \frac{d(\mathbf{v}) \mathbf{u}_{(A)}}{dt} \right] - \\ - \sum_{A=1}^N \frac{1}{T} \left( \mu_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)} \right) r_{(A)} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} \bar{H}_{(A)} \right) + \operatorname{div} \left( \sum_{A=1}^N \bar{H}_{(A)} \mathbf{n}_{(A)} \right) = -\operatorname{div} \left( \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \bar{H}_{(A)} \mathbf{j}_{(A)} \right) + \frac{d(\mathbf{v})^P}{dt} + \\ + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho Q + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} - \rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u^2_{(A)}. \quad (K)$$

\* Большинство авторов (например, [3]) пренебрегают членом  $\rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} u^2_{(A)}$  в правой части этих уравнений, что рассматривается в этом параграфе в связи с уравнением (8.3.5-3).

Полагаем, что  $f \equiv \sum_{A=1}^N \omega_{(A)} \mathbf{f}_{(A)} = -\nabla \varphi$ , где  $\varphi$  — неявная функция времени.

Дифференциальное уравнение баланса энергии (В) табл. 8.3.5-1 можно записать в виде

$$\frac{\rho}{T} \frac{d(\mathbf{v})^D}{dt} = -\frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{1}{T} \operatorname{tr} (\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \frac{1}{T} \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \rho Q - \\ - \sum_{A=1}^N \frac{\mathbf{j}_{(A)}}{T} \frac{d(\mathbf{v}) \mathbf{u}_{(A)}}{dt} - \sum_{A=1}^N \frac{u^2_{(A)} \rho}{2T} \frac{d(\mathbf{v}) \omega_{(A)}}{dt} = -\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \nabla T + \\ + \frac{1}{T} \operatorname{tr} (\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \frac{1}{T} \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \frac{\rho Q}{T} - \sum_{A=1}^N \frac{\mathbf{j}_{(A)}}{T} \cdot \frac{d(\mathbf{v}) \mathbf{u}_{(A)}}{dt} - \\ - \sum_{A=1}^N \frac{u^2_{(A)}}{2T} (r_{(A)} - \operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)}). \quad (8.3.6-2)$$

При этом мы опять можем воспользоваться уравнением (В) табл. 8.2.2-5. Исключив величину  $d_{(v)} \hat{S}/dt$  из уравнений (8.3.6-1) и (8.3.6-2), получим:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d_{(v)} \hat{S}}{dt} = & -\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \frac{1}{T} \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \\ & + \frac{\rho Q}{T} - \sum_{A=1}^N \frac{\mathbf{j}_{(A)}}{T} \cdot \frac{d_{(v)} \mathbf{u}_{(A)}}{dt} - \sum_{A=1}^N \frac{1}{T} \left( \mu_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)} \right) (\mathbf{r}_{(A)} - \operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)}) = \\ = & -\operatorname{div} \left( \frac{1}{T} \left[ \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \left( \mu_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)} \right) \mathbf{j}_{(A)} \right] \right) - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \\ & + \frac{1}{T} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \frac{\rho Q}{T} - \frac{1}{T} \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \left[ T \nabla \left( \frac{\mu_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)}}{T} \right) - \mathbf{f}_{(A)} + \right. \\ & \left. + \frac{d_{(v)} \mathbf{u}_{(A)}}{dt} \right] - \sum_{A=1}^N \frac{1}{T} \left( \mu_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)} \right) \mathbf{r}_{(A)}. \end{aligned} \quad (8.3.6-3)$$

Теперь проинтегрируем этот результат для сплошного тела и, используя теорему переноса (8.3.2-3а), получим уравнение баланса энтропии для произвольной сплошной среды:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(v)} \rho \hat{S} dV = & - \int_{S(v)} \frac{1}{T} \left[ \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \left( \mu_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)} \right) \mathbf{j}_{(A)} \right] \cdot \mathbf{n} dS + \\ & + \int_{V(v)} \left\{ -\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \frac{\rho Q}{T} - \frac{1}{T} \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \left[ T \nabla \left( \frac{\mu_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)}}{T} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \mathbf{f}_{(A)} + \frac{d_{(v)} \mathbf{u}_{(A)}}{dt} \right] - \sum_{A=1}^N \frac{1}{T} \left( \mu_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)} \right) \mathbf{r}_{(A)} \right\} dV. \end{aligned} \quad (8.3.6-4)$$

Из этого уравнения следует, что энтропию можно представить для любого тела в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(v)} \rho \hat{S} dV + \int_{S(v)} \frac{1}{T} \left[ \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \left( \mu_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)} \right) \mathbf{j}_{(A)} \right] \mathbf{n} dS - \\ - \int_{V(v)} \frac{\rho Q}{T} dV \geq 0. \end{aligned} \quad (8.3.6-5)$$

Второй член в левой части этого неравенства выражает результирующую скорость переноса энтропии из тела в окружающую среду через поверхность, ограничивающую многокомпонентную систему. Третий член в левой части показывает поступление энтропии в тело в результате передачи внешней энергии.

Определяющее уравнение (5.1.2-3) для удельной внутренней энергии как функции энтропии использовалось для обоснования неравенства (8.3.6-5). Однако неравенство энтропии в виде (8.3.6-5) формулируется как исходный постулат наподобие закона сохранения массы. Оно должно удовлетворяться для всех многокомпонентных тел независимо от определяющих уравнений, используемых для описания их поведения.

С учетом уравнения (8.3.6-3) неравенство (8.3.6-5) означает, что суммарное дифференциальное неравенство энтропии справедливо в каждой точке многокомпонентной среды:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d(\mathbf{v})}{dt} + \operatorname{div} \left( \frac{1}{T} \left[ \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \left( \mu_{(A)} + \frac{1}{2} u_{(A)}^2 \right) \mathbf{j}_{(A)} \right] \right) - \rho \frac{Q}{T} = \\ = -\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \frac{1}{T} \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \left[ T \nabla \left( \frac{\mu_{(A)} + \frac{1}{2} u_{(A)}^2}{T} \right) \right] - \\ - \mathbf{f}_{(A)} + \frac{d(\mathbf{v})}{dt} \left[ \sum_{A=1}^N \frac{1}{T} \left( \mu_{(A)} + \frac{1}{2} u_{(A)}^2 \right) r_{(A)} \right] \geq 0. \quad (8.3.6-6) \end{aligned}$$

Соотношение (8.3.6-5) представляет собой частный случай неравенства энтропии, сформулированного Боузном [4]. Выражение (8.3.6-6) соответствует по виду общему дифференциальному неравенству энтропии для многокомпонентных тел, полученному де Гроотом и Мазуром [3]. Пренебрегая членами, содержащими кинетическую энергию диффузии ( $0,5u_{(A)}^2$ ), можно свести неравенство (8.3.6-6) к виду, предложенному в работе [3]. Существуют многие другие формулировки неравенства энтропии [6, 2, 7], и работы в этой области ведутся в настоящее время весьма интенсивно.

## 8.4. ПОВЕДЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

**8.4.1. Поведение многокомпонентных материалов.** Рассмотрим многокомпонентное тело, состоящее из  $N$  веществ. Для упрощения все величины считаются непрерывными и дифференцируемыми необходимое число раз. Будем также считать, что для рассматриваемого материала существуют определяющие уравнения для  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{q}$  в виде, аналогичном уравнениям из § 2.3.2 и 5.4.2.

Имеем:

$N+14$  скалярных уравнений, описывающих реакцию тела на различные возмущения;

$N$  уравнений баланса массы для отдельных составляющих (см. § 8.2.1);

уравнение первого закона Коши (§ 8.3.3);

общее дифференциальное соотношение баланса энергии;

определяющее уравнение для  $\mathbf{T}$ ;

определяющее уравнение для  $\mathbf{q}$ ;

уравнение теплового состояния, которое описывает величину  $\mathcal{U}$  с помощью  $T$  и  $\rho_{(A)}$  ( $A=1, \dots, N$ ) (см. § 5.1.2).

К сожалению, в эти уравнения входят  $4N+11$  неизвестных  $\rho_{(A)}$  ( $A=1, \dots, N$ ),  $\mathbf{j}_{(A)}$  ( $A=1, \dots, N-1$ ),  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $T$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathbf{q}$ .

В этом анализе определяющие уравнения для локальных скоростей реакций, внешних сил и переноса внешних потоков энергии задаются заранее. Очевидно, что имеющейся информации недостаточно.

Обычно считается, что определяющие уравнения для  $j_{(A)}$  ( $A=1, \dots, N-1$ ) описывают контактный перенос массы аналогично определяющим уравнениям для  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{T}$ , описывающим контактный перенос энергии и контактные силы. Мы используем здесь именно этот подход, который можно рекомендовать читателю для решения некоторых практических задач массопереноса. Другой метод решения этой задачи будет описан в § 8.6.1.

*8.4.2. Еще раз о поведении многокомпонентных материалов.* В § 2.3.1 и 5.4.1 указывалось, что наш повседневный опыт подсказывает существование трех принципов, которые оказываются полезными при построении определяющих уравнений для тензора напряжений и вектора плотности потока энергии.

Эти принципы легко обобщить для тензора напряжений и вектора плотности потока энергии для многокомпонентных материалов. Основные элементы этих принципов также должны соответствовать представлениям для  $j_{(A)}$  ( $A=1, \dots, N-1$ ) в том смысле, что такие определяющие уравнения описывают только один аспект поведения многокомпонентных материалов.

События, которые произойдут в будущем, не должны оказывать влияния на значения  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $j_{(A)}$  ( $A=1, \dots, N-1$ ) в настоящем, т. е. можно сформулировать принцип детерминизма:

тензор напряжений, вектор плотности потока энергии и вектор плотности потока массы относительно среднемассовой скорости вещества  $A$  многокомпонентного тела определяются предшествующими движениями всех составляющих  $B$  ( $B=1, \dots, N$ ), в которых участвует многокомпонентное тело, а также предшествующими температурными изменениями многокомпонентного тела.

Следует указать, что распределение температуры и движения отдельных составляющих в какой-то части многокомпонентного тела необязательно влиять на  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $j_{(A)}$  ( $A=1, \dots, N-1$ ) в другой части тела. Это — принцип локального действия:

распределение температуры и движение составляющих за пределами произвольно малой окрестности среднемассовой частицы материала можно не учитывать при определении тензора напряжений и вектора плотности потока энергии для этой среднемассовой частицы. Распределением температуры и движением отдельных компонент за пределами произвольно малой окрестности частицы вещества  $A$  можно пренебречь при определении массового потока вещества  $A$  относительно среднемассовой скорости для этой материальной частицы.

Сформулируем принцип независимости материала от системы отсчета для многокомпонентных сред:

определяющие уравнения должны быть инвариантны к изменениям системы отсчета. Если определяющее уравнение удовлетворяется для процесса, в котором тензор напряжений, вектор плотности потока энергии, вектор плотности потока массы относительно среднемассовой скорости для всех составляющих  $A$  и движение для каждой компоненты  $A$  даются уравнениями:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{z}_*, t); \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{z}_*, t); \quad j_{(A)} = j_{(A)}(\mathbf{z}_*, t); \quad \mathbf{z} = \chi_{*(A)}(\mathbf{z}_{*(A)}, t), \quad (8.4.2-1)$$

то это определяющее уравнение также должно удовлетворяться для любого эквивалентного процесса в другой системе отсчета, в частности

для процесса, в котором тензор напряжений, плотность потока энергии, плотность потока массы относительно среднемассовой скорости всех составляющих  $A$  и движение каждого вещества  $A$  выражаются в виде

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{T}^* = \mathbf{T}^*(\mathbf{z}_*, t^*) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{z}_*, t) \cdot \mathbf{Q}(t)^T; \\ \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*(\mathbf{z}_*, t^*) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{z}_*, t); \\ \mathbf{j}_{(A)}^* = \mathbf{j}_{(A)}^*(\mathbf{z}_*, t^*) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{j}_{(A)}(\mathbf{z}_*, t); \\ \mathbf{z}^* = \mathbf{z}_{*(A)}^*(\mathbf{z}_{*(A)}, t^*) = \mathbf{c}^*(t) + \mathbf{Q}(t) \chi_{*(A)}(\mathbf{z}_{*(A)}, t); \\ t^* = t - a. \end{array} \right\} \quad (8.4.2-2)$$

Здесь  $\mathbf{z}_*$  — положение, занятое среднемассовой материальной частицей в исходной конфигурации  $\chi$ .

В следующих параграфах эти принципы будут использоваться при построении определяющих уравнений для  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{j}_{(A)}$ .

**8.4.3. Определяющие уравнения для тензора напряжений.** Вернемся к анализу однокомпонентных систем. В определяющих уравнениях, описанных в § 2.3.2 и 2.3.3, величина  $S$  выражается как функция  $D$ . Уравнение Фурье (§ 5.4.2) представляет  $\mathbf{q}$  как функцию  $\nabla T$ . Эти ее величины в виде произведений входят в выражение (5.5.2-1) для скорости роста энтропии в единице объема многокомпонентного тела без учета притока энтропии из окружающей среды. Известны следующие выражения для потоков и сродства:

Поток	Соответствующее сродство
$\mathbf{s}$	$D$
$\mathbf{s} = \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \left( \bar{\bar{H}}_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)} \right) \mathbf{j}_{(A)}$ $\mathbf{j}_{(A)}$	$\nabla \ln T$
$\mathbf{d}_{(A)} = \frac{p_{(A)}}{cRT} \sum_{\substack{B=1 \\ B \neq A}}^N \left( \frac{\partial \mu_{(A)}}{\partial \omega_{(B)}} \right)_{T, P, \omega_C} \times$ $\times \nabla \omega_{(B)} + \left( \bar{\bar{V}}_{(A)} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla P -$ $- \left( \mathbf{f}_{(A)} - \sum_{B=1}^N \omega_{(B)} \mathbf{f}_{(B)} \right) + \nabla \left( \frac{1}{2} u^2_{(A)} \right) + \frac{d(\mathbf{v}) \mathbf{u}_{(A)}}{dt}$ $\mu_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)}$	$r_{(A)}$

Согласно линейной теории необратимых процессов [9], которая последние 20 лет привлекает к себе большое внимание, каждый поток является однородной функцией сродства, причем субстанции, выраженные величинами, тензорный порядок которых различается на целое нечетное число, не могут взаимодействовать в неориентированных средах<sup>1</sup>. Коэффициенты, входящие в эти линейные определяющие урав-

<sup>1</sup> Неориентированной или изотропной средой называется такой материал, на поведение которого не оказывают влияния ортогональные преобразования (вращения или отражения) какой-то исходной конфигурации материала [10]. Ее можно определить также как вещество, не имеющее естественного направления в своей исходной конфигурации.

нения, обладают также свойством симметрии. Эта теория не имеет четкого обоснования [2, 11, 12], и мы к ней прибегать не будем.

Хотя в общем случае следует ожидать, что тензор напряжений для многокомпонентной системы будет функцией движений всех составляющих материала, а также распределения температуры, этот вопрос интенсивно исследуется в современной литературе [4, 7] и нами опущен. Хотя для сравнения у нас совсем нет или очень мало экспериментальных данных, для решения практических инженерных задач можно рекомендовать определяющие уравнения для  $T$ , описанные в § 2.3.2—2.3.4, учитывая, что все параметры должны быть функциями переменных локального термодинамического состояния  $T, \rho_1, \dots, \rho_N$ .

**8.4.4. Определяющие уравнения для вектора плотности потока энергии.** Согласно кинетической теории [8], а также с учетом рассуждения § 8.4.3 плотность потока тепловой энергии  $\epsilon$

$$\epsilon = \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \left( \bar{\bar}{H}_{(A)} + \frac{1}{2} u^2_{(A)} \right) \mathbf{j}_{(A)} \quad (8.4.4-1)$$

должна быть функцией переменных локального термодинамического состояния  $\nabla \ln T$  и  $\mathbf{d}_{(B)}$  ( $B = 1, \dots, N$ ):

$$\epsilon = \epsilon(T, P, \omega_{(1)}, \dots, \omega_{(N-1)}, \nabla \ln T, \mathbf{d}_{(1)}, \dots, \mathbf{d}_{(N)}), \quad (8.4.4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{(A)} = & \frac{\rho_{(A)}}{cRT} \left[ \sum_{\substack{B=1 \\ B \neq A}}^N \left( \frac{\partial \mu_{(A)}}{\partial \omega_{(B)}} \right) \right. \\ & \left. \nabla \omega_{(B)} + \left( \bar{\bar}{V}_{(A)} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla P - \right. \\ & \left. - \left( \mathbf{f}_{(A)} - \sum_{B=1}^N \omega_B \mathbf{f}_{(B)} \right) + \nabla \left( \frac{1}{2} u^2_{(A)} \right) + \frac{d(v) u_{(A)}}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (8.4.4-3)$$

Мы не располагаем экспериментальными данными, подтверждающими предположение, что  $\epsilon$  является функцией тензора скорости деформации  $\mathbf{D}$  или скорости образования отдельных компонент в химической реакции  $\mathbf{r}_{(A)}$  ( $A = 1, \dots, N-1$ ).

Уравнение (8.4.4-2) автоматически удовлетворяет принципам детерминизма и локального действия (§ 8.4.2). Если мы будем искать более общую векторную функцию — многочлен в виде, который удовлетворял бы принципу независимости материала от системы отсчета, то с помощью теорем представления Спенсера и Ривлина [13] и Смита [14] найдем:

$$\epsilon = \alpha \nabla \ln T + \sum_{A=1}^N \alpha_{(A)} \mathbf{d}_{(A)}. \quad (8.4.4-4)$$

При этом учитывается, что все коэффициенты  $\alpha$  и  $\alpha_{(A)}$  ( $A = 1, \dots, N$ ) являются функциями переменных локального термодинамического состояния, а также всех скалярных произведений, содержащих  $\nabla \ln T$  и  $\mathbf{d}_{(B)}$  ( $B = 1, \dots, N$ ), включая величины этих векторов.

На основании кинетической теории получается выражение для  $\epsilon$ , являющееся частным случаем уравнения (8.4.4-4):

$$\epsilon = -\lambda \nabla T - cRT \sum_{A=1}^N \frac{D_{(A)}^T}{\rho_{(A)}} \mathbf{d}_{(A)}. \quad (8.4.4-5)$$

Здесь коэффициенты  $\lambda$  и  $D_{(A)}^T$  ( $A=1, \dots, N$ ) являются функциями только переменных термодинамического состояния, поэтому уравнение (8.4.4-3) можно аппроксимировать выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{(A)} = & \frac{\rho_{(A)}}{cRT} \left[ \sum_{\substack{B=1 \\ B \neq A}}^N \left( \frac{\partial \mu_{(A)}}{\partial \omega_{(B)}} \right)_{T, P, \omega_{(C)} (C \neq A, B)} \nabla \omega_{(B)} + \right. \\ & \left. + \left( \bar{V}_{(A)} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla P - \mathbf{f}_{(A)} + \sum_{B=1}^N \omega_{(B)} \mathbf{f}_{(B)} \right]. \end{aligned} \quad (8.4.4-6)$$

Линейная зависимость величины  $\varepsilon$  от градиентов концентрации и давления через  $\mathbf{d}_{(A)}$  обычно называется эффектом Дюфо. В большинстве случаев он имеет небольшое значение [8] и в последующем мы будем им часто пренебрегать. Для этих условий уравнение (8.4.4-5) принимает вид:

$$\varepsilon = -k \nabla T. \quad (8.4.4-7)$$

Скаляр  $k=k(T, \rho_{(1)}, \dots, \rho_{(N)})$  называется теплопроводностью.

*8.4.5. Определяющие уравнения для вектора плотности потока массы.* Согласно кинетической теории [8], а также, как указывалось в § 8.4.3, поток массы вещества  $A$  относительно среднемассовой скорости должен быть функцией переменных локального термодинамического состояния  $\nabla \ln T$  и  $\mathbf{d}_{(B)}$  ( $B=1, \dots, N$ ):

$$\mathbf{j}_{(A)} = \mathbf{j}_{(A)} (T, P, \omega_{(1)}, \dots, \omega_{(N-1)}, \nabla \ln T, \mathbf{d}_{(1)}, \dots, \mathbf{d}_{(N)}). \quad (8.4.5-1)$$

Это соотношение автоматически удовлетворяет принципам детерминизма и локального действия (§ 8.4.2). Если мы будем искать более общую векторную функцию — многочлен в таком виде, чтобы она удовлетворяла также принципу независимости материала от системы отсчета, то с помощью теоремы представления Спенсера и Ривлина найдем:

$$\mathbf{j}_{(A)} = \alpha_{(A)0} \nabla \ln T + \sum_{B=1}^N \alpha_{(AB)} \mathbf{d}_{(B)}. \quad (8.4.5-2)$$

При этом следует учесть, что все коэффициенты  $\alpha_{(AC)}$  ( $C=0, 1, \dots, N$ ) являются функциями переменных локального термодинамического состояния, а также всех скалярных произведений, содержащих  $\nabla \ln T$  и  $\mathbf{d}_{(B)}$  ( $B=1, \dots, N$ ), включая абсолютные значения этих векторов.

На основании кинетической теории получаем выражение

$$\mathbf{j}_{(A)} = -D_{(A)}^T \nabla \ln T + \frac{c^2}{\rho} \sum_{B=1}^N M_{(A)} M_{(B)} D_{(AB)} \mathbf{d}_{(B)}, \quad (8.4.5-3)$$

являющееся частным случаем уравнения (8.4.5-2), в котором коэффициенты термодиффузии  $D_{(A)}^T$  и коэффициенты диффузии для многокомпонентной среды  $D_{(AB)}$  являются функциями только переменных локального термодинамического равновесия и  $\mathbf{d}_{(A)}$ .

также можно аппроксимировать уравнением (8.4.4-6). Последнее означает, что

$$\sum_{A=1}^N d_{(A)} = 0. \quad (8.4.5-4)$$

Возникающая вследствие этого неопределенность коэффициентов  $D_{(AB)}$  устраняется, если потребовать:

$$D_{(AA)} = 0 \quad (A = 1, \dots, N). \quad (8.4.5-5)$$

Поскольку

$$\sum_{A=1}^N j_{(A)} = 0, \quad (8.4.5-6)$$

то необходимо записать:

$$\sum_{A=1}^N D_{(A)}^T = 0 \quad (8.4.5-7)$$

и

$$\sum_{A=1}^N (M_{(A)} M_{(B)} D_{(AB)} - M_{(A)} M_{(C)} D_{(AC)}) = 0. \quad (8.4.5-8)$$

При  $N > 2$  значения  $D_{(AB)}$  и  $D_{(BA)}$  обычно не равны.

Поскольку самым интересным является определяющее уравнение для  $j_{(A)}$  в виде (8.4.5-3), в этом параграфе мы подробно остановимся именно на нем.

Обычно уравнение (8.4.5-3) можно записать для четырех различных процессов:

$$j_{(A)} = j_{(A)}^{(\omega)} + j_{(A)}^{(P)} + j_{(A)}^{(f)} + j_{(A)}^{(T)}, \quad (8.4.5-9)$$

где

$$j_{(A)}^{(\omega)} \equiv \frac{c}{RT} \sum_{B=1}^N M_{(A)} M_{(B)} D_{(AB)} \left[ \Phi_{(B)} \sum_{\substack{C=1 \\ C \neq B}}^N \left( \frac{\partial \mu_B}{\partial \omega_{(C)}} \right)_{T, P, \omega_{(D)} (D \neq B, C)} \nabla \Phi_{(C)} \right]; \quad (8.4.5-10)$$

$$j_{(A)}^{(P)} \equiv \frac{c}{RT} \sum_{B=1}^N M_{(A)} M_{(B)} D_{(AB)} \left[ \Phi_{(B)} \left( \bar{\bar{V}}_{(B)} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla P \right]; \quad (8.4.5-11)$$

$$j_{(A)}^{(f)} \equiv - \frac{c}{RT} \sum_{B=1}^N M_{(A)} M_{(B)} D_{(AB)} \left[ \Phi_{(B)} \left( f_{(B)} - \sum_{C=1}^N \Phi_{(C)} f_{(C)} \right) \right] \quad (8.4.5-12)$$

и

$$j_{(A)}^{(T)} \equiv - D_{(A)}^T \nabla \ln T. \quad (8.4.5-13)$$

Величина  $j_{(A)}^{(\omega)}$  называется обычной диффузией. Она представляет собой поток массы, вызванный градиентом концентрации различных веществ, входящих в состав смеси. Символом  $j_{(A)}^{(P)}$  мы обозначаем бародиффузию. Физический смысл ее состоит в том, что в результате градиента давления в смеси может возникнуть движение

вещества  $A$  относительно смеси. Хотя для большинства условий величина этого эффекта незначительна, большие градиенты давления могут возникать при центрифугировании. Этот эффект может использоваться для разделения многокомпонентных смесей [1, 15]. Величина  $\mathbf{j}_{(A)}^{(f)}$  — вынужденная диффузия. Она имеет первостепенное значение в ионных системах, где внешняя сила, действующая на ионы, выражается произведением ионного заряда на локальную напряженность электрического поля. Это означает, что различные виды ионов могут подвергаться воздействию различных сил.

Когда единственной внешней силой является сила тяжести, все силы  $\mathbf{f}_{(A)} (A=1, \dots, N)$  равны, а  $\mathbf{j}_{(A)}^{(f)}$  тождественно равны нулю. Величина  $\mathbf{j}_{(A)}^{(T)}$  называется эффектом Соре, или термодиффузией. Для большинства случаев этот эффект незначителен. Однако можно сконструировать установку, в которой создаются большие градиенты температуры, и использовать этот эффект для разделения смесей [16—18].

В работе [8] сделана попытка получить обратное преобразование уравнения (8.4.5-3). Она удалась, когда вместо коэффициентов  $D_{(AB)}$  использовалось их первое приближение, т. е. когда в вариационном представлении интегральных уравнений, определяющих первую итерацию Чепмена—Энскога [8], использовалась пробная функция, содержащая единственный полином Сонина:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{(A)} = & \sum_{B=1}^N \frac{x_{(A)}x_{(B)}}{\mathcal{D}_{(AB)}} (\mathbf{v}_{(B)} - \mathbf{v}_{(A)}) + \sum_{B=1}^N \frac{x_{(A)}x_{(B)}}{\mathcal{D}_{(AB)}} \times \\ & \times \left( \frac{D_{(B)}^T}{\rho_{(B)}} - \frac{D_{(A)}^T}{\rho_{(A)}} \right) \nabla \ln T = \sum_{B=1}^N \frac{1}{c\mathcal{D}_{(AB)}} (x_{(A)}\mathbf{N}_{(B)} - x_{(B)}\mathbf{N}_{(A)}) + \\ & + \sum_{B=1}^N \frac{x_{(A)}x_{(B)}}{\mathcal{D}_{(AB)}} \left( \frac{D_{(B)}^D}{\rho_{(B)}} - \frac{D_{(A)}^D}{\rho_{(A)}} \right) \nabla \ln T, \end{aligned} \quad (8.4.5-14)$$

где  $\mathcal{D}_{(AB)}$  — коэффициенты бинарной диффузии;  $\mathcal{D}_{(AB)} \equiv D_{(AB)}$ , когда (8.4.5-3) записано для смеси двух веществ. Для уравнения (8.4.5-14) величина  $\mathcal{D}_{(AB)}$  фактически является ее первым приближением. Назовем эти уравнения обобщенными уравнениями Стефана—Максвелла. Они часто используются для анализа обычной диффузии в многокомпонентных газовых смесях. Преимуществом этих уравнений является то, что в них величина  $\mathcal{D}_{(AB)}$  почти не зависит от состава газовых смесей при низкой плотности [1].

*8.4.6. Определяющие уравнения для вектора плотности потока массы в бинарных растворах.* Для смесей, состоящих из двух веществ, уравнение (8.4.5-3) принимает вид:

$$\mathbf{j}_{(A)} = \frac{c^2}{\rho} M_{(A)} M_{(B)} \mathcal{D}_{(AB)} \mathbf{d}_{(B)} - D_{(A)}^T \nabla \ln T. \quad (8.4.6-1)$$

Здесь введено специальное обозначение  $\mathcal{D}_{(AB)}$  для коэффициента бинарной диффузии. Уравнение (8.4.6-1) получено с помощью (8.4.5-4), при этом учитывались свойства симметрии коэффициента бинарной диффузии. Используя уравнение (8.4.5-4) и (K) из табл. 8.2.2-4, представим (8.4.6-1) в виде

$$\mathbf{j}_{(A)} = -\mathbf{j}_{(B)} = -\frac{c^2}{\rho} M_{(A)} M_{(B)} \mathcal{D}_{(AB)} \mathbf{d}_{(A)} - D_{(A)}^T \nabla \ln T. \quad (8.4.6-2)$$

С помощью (8.4.4-6) это уравнение можно получить в более удобной форме:

$$\mathbf{j}_{(A)} = -\left(\frac{c}{RT}\right) M_{(A)} M_{(B)} \mathcal{D}_{(AB)} \omega_{(A)} \left[ \left( \frac{\partial \mu_{(A)}}{\partial \omega_{(B)}} \right)_{T, P} \nabla \omega_{(B)} + \left( \bar{V}_{(A)} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla P - \omega_{(B)} (\mathbf{f}_{(A)} - \mathbf{f}_{(B)}) \right] - D_{(A)}^T \nabla \ln T. \quad (8.4.6-3)$$

Его можно также записать в виде

$$\mathbf{j}_{(A)} = -c M_{(A)} M_{(B)} \mathcal{D}_{(AB)} \left[ \left( \frac{\partial \ln a_{(A)}}{\partial \ln \omega_{(A)}} \right)_{T, P} \nabla \omega_{(A)} + \frac{\omega_{(A)}}{RT} \left( \bar{V}_{(A)} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla P - \frac{\omega_{(A)} \omega_{(B)}}{RT} (\mathbf{f}_{(A)} - \mathbf{f}_{(B)}) \right] - D_{(A)}^T \nabla \ln T, \quad (8.4.6-4)$$

где  $a_{(A)}$  — относительная активность (отнесенная к массе вещества), определяемая соотношением

$$a_{(A)} \equiv \exp \left( \frac{\mu_{(A)} - \mu^0_{(A)}}{RT} \right). \quad (8.4.6-5)$$

Величина  $\mu^0_{(A)}$  обозначает химический потенциал для чистого вещества  $A$  при той же самой температуре и давлении.

Очень часто вместо уравнения (8.4.6-4) используется (8.4.6-3) в виде

$$\mathbf{j}_{(A)} = -\left(\frac{c^2}{\rho}\right) M_{(A)} M_{(B)} \mathcal{D}_{(AB)} \left[ \left( \frac{\partial \ln a_{(A)}^{(m)}}{\partial \ln x_{(A)}} \right)_{T, P} \nabla x_{(A)} + \frac{M_{(A)} x_{(A)}}{RT} \left( \bar{V}_{(A)}^{(m)} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla P - \frac{M_{(A)} x_{(A)} \omega_{(B)}}{RT} (\mathbf{f}_{(A)} - \mathbf{f}_{(B)}) \right] - D_{(A)}^T \nabla \ln T, \quad (8.4.6-6)$$

где  $a_{(A)}^{(m)}$  — относительная активность (отнесенная к числу молей):

$$a_{(A)}^{(m)} \equiv \exp \frac{\mu_{(A)}^{(m)} - \mu_{(A)}^{(m) 0}}{RT}. \quad (8.4.6-7)$$

Величина  $\mu_{(A)}^{(m) 0}$  — средний молярный химический потенциал для чистого вещества  $A$  при той же температуре и давлении: Применение  $a_{(A)}^{(m)}$  имеет преимущество, заключающееся в том, что для идеальных растворов

$$\left( \frac{\partial \ln a_{(A)}^{(m)}}{\partial \ln x_{(A)}} \right)_{T, P} = 1. \quad (8.4.6-8)$$

Обычная диффузия представляет собой один из самых распространенных предельных случаев уравнения (8.4.6-6):

$$\mathbf{j}_{(A)} = -\frac{c^2}{\rho} M_{(A)} M_{(B)} \mathcal{D}_{(AB)} \left( \frac{\partial \ln a_{(A)}^{(m)}}{\partial \ln x_{(A)}} \right)_{T, P} \nabla x_{(A)}. \quad (8.4.6-9)$$

С учетом выражений (8.4.6-8) это уравнение для идеального раствора сводится к виду:

$$\mathbf{j}_{(A)} = -\left(\frac{c^2}{\rho}\right) M_{(A)} M_{(B)} \mathcal{D}_{(AB)} \nabla x_{(A)}. \quad (8.4.6-10)$$

Таблица 8.4.6-1

Эквивалентные формы первого закона Фика для бинарных смесей<sup>1</sup>

$$\mathbf{n}_{(A)} = \omega_{(A)} (\mathbf{n}_{(A)} + \mathbf{n}_{(B)}) - \rho \mathcal{D}^0_{(AB)} \nabla \omega_{(A)} \quad (\text{А})$$

$$\mathbf{j}_{(A)} = -\rho \mathcal{D}^0_{(AB)} \nabla \omega_{(A)} \quad (\text{Б})$$

$$\mathbf{j}_{(A)} = -\left(\frac{c^2}{\rho}\right) M_{(A)} M_{(B)} \mathcal{D}^0_{(AB)} \nabla x_{(A)} \quad (\text{В})$$

$$\mathbf{N}_{(A)} = x_{(A)} (\mathbf{N}_{(A)} + \mathbf{N}_{(B)}) - c \mathcal{D}^0_{(AB)} \nabla x_{(A)} \quad (\Gamma)$$

$$\mathbf{j}^*_{(A)} = -c \mathcal{D}^0_{(AB)} \nabla x_{(A)} \quad (\Delta)$$

$$\mathbf{j}^*_{(A)} = -\left(\frac{\rho^2}{c M_{(A)} M_{(B)}}\right) \mathcal{D}^0_{(AB)} \nabla \omega_{(A)} \quad (\text{Е})$$

<sup>1</sup> Здесь  $\mathcal{D}^0_{(AB)} \equiv (\partial \ln a_{(A)}^{(m)} / \partial \ln x_{(A)}) T, P \mathcal{D}_{(AB)}$ .

Таблица 8.4.6-2

Некоторые основные фо́рмы уравнения неразрывности для вещества A, удовлетворяющие первому закону Фика для бинарной диффузии<sup>1</sup>

$$\rho \left( \frac{\partial \omega_{(A)}}{\partial t} + \nabla \omega_{(A)} \cdot \mathbf{v} \right) = \operatorname{div} (\rho \mathcal{D}^0_{(AB)} \nabla \omega_{(A)}) + r_{(A)} \quad (\text{А})$$

$$c \left( \frac{\partial x_{(A)}}{\partial t} + \nabla x_{(A)} \cdot \mathbf{v}^* \right) = \operatorname{div} (c \mathcal{D}^0_{(AB)} \nabla x_{(A)}) + x_{(B)} \frac{r_{(A)}}{M_{(A)}} - x_{(A)} \frac{r_{(B)}}{M_{(B)}} \quad (\text{Б})$$

Для постоянных  $\rho$  и  $\mathcal{D}^0_{(AB)}$ :

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \Delta \rho_{(A)} \cdot \mathbf{v} = \mathcal{D}^0_{(AB)} \operatorname{div} \nabla \rho_{(A)} + r_{(A)} \quad (\text{В})$$

Для постоянных  $c$  и  $\mathcal{D}^0_{(AB)}$ :

$$\frac{\partial c_{(A)}}{\partial t} + \nabla c_{(A)} \cdot \mathbf{v}^* = \mathcal{D}^0_{(AB)} \operatorname{div} \nabla c_{(A)} + x_{(B)} \frac{r_{(A)}}{M_{(A)}} - x_{(A)} \frac{r_{(B)}}{M_{(B)}} \quad (\Gamma)$$

Для постоянных  $\mathcal{D}^0_{(AB)}, \rho, \mathbf{v} = 0$  при отсутствии химических реакций или для постоянных  $c, \mathcal{D}^0_{(AB)}, \mathbf{v}^* = 0$  при отсутствии химических реакций (второй закон диффузии Фика):

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} = \mathcal{D}^0_{(AB)} \operatorname{div} \nabla \rho_{(A)} \quad (\Delta)$$

<sup>1</sup> Здесь  $\mathcal{D}^0_{(AB)} \equiv (\partial \ln a_{(A)}^{(m)} / \partial \ln x_{(A)}) T, P \mathcal{D}_{(AB)}$ .

Для неидеальных смесей уравнение (8.4.6-9) обычно записывается в виде

$$\mathbf{j}_{(A)} = - \left( \frac{c^2}{\rho} \right) M_{(A)} M_{(B)} \mathcal{D}_{(AB)}^0 \nabla x_{(A)}, \quad (8.4.6-11)$$

где

$$\mathcal{D}_{(AB)}^0 \equiv \left( \frac{\partial \ln a_{(A)}^{(m)}}{\partial \ln x_{(A)}} \right)_{T, P} \mathcal{D}_{(AB)}. \quad (8.4.6-12)$$

Формула (8.4.6-11) обычно называется первым законом Фика бинарной диффузии. В табл. 8.4.6-1 представлены различные эквивалентные формы первого закона Фика.

Поскольку большая часть последующего материала основана на первом законе Фика, в табл. 8.4.6-2 приводятся некоторые основные формы уравнения неразрывности для вещества  $A$  (см. табл. 8.2.2-5), удовлетворяющие этому закону. Для постоянных  $\rho$  и  $\mathcal{D}_{(AB)}$  в табл. 8.4.6-3 дается уравнение неразрывности для вещества  $A$  в трех основных системах координат.

Таблица 8.4.6-3

**Уравнение неразрывности для вещества  $A$  при постоянных  $\rho$  и  $\mathcal{D}_{(AB)}$**   
[(уравнение (B) табл. 8.4.6-2)]

Прямоугольные координаты:

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial z_1} v_1 + \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial z_2} v_2 + \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial z_3} v_3 = \mathcal{D}_{(AB)} \left( \frac{\partial^2 \rho_{(A)}}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 \rho_{(A)}}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 \rho_{(A)}}{\partial z_3^2} \right) + r_{(A)} \quad (A)$$

Цилиндрические координаты:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial r} v_r + \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial \theta} \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial z} v_z = \\ & = \mathcal{D}_{(AB)} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \rho_{(A)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \rho_{(A)}}{\partial z^2} \right) \right] + r_{(A)} \end{aligned} \quad (B)$$

Сферические координаты:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial r} v_r + \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial \theta} \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial \varphi} \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} = \\ & = \mathcal{D}_{(AB)} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \rho_{(A)}}{\partial \varphi^2} \right] + r_{(A)} \end{aligned} \quad (B)$$

**8.4.7. Определяющие уравнения для вектора плотности потока массы. Предельные случаи для идеальных растворов.** Простота соотношений, полученных в § 8.4.6, может служить объяснением большого внимания, которое уделяется в литературе переносу массы в бинарных растворах. Вероятно, существуют какие-то предельные случаи, в которых уравнение (8.4.6-6) можно обобщить для идеальных растворов многокомпонентных смесей в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{(A)} = & - c \mathcal{D}_{(Am)} \left\{ \nabla x_{(A)} + \frac{M_{(A)} x_{(A)}}{RT} \left[ \left( \bar{V}_{(A)} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla P - \mathbf{f}_{(A)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{B=1}^N w_{(B)} \mathbf{f}_{(B)} \right] \right\} + x_{(A)} \sum_{B=1}^N \mathbf{N}_{(B)} - c \sum_{B=1}^N x_{(A)} x_{(B)} \times \\ & \times \left( \frac{D_{(A)}^T}{\rho_{(A)}} - \frac{D_{(B)}^T}{\rho_{(B)}} \right) \nabla \ln T. \end{aligned} \quad (8.4.7-1)$$

Здесь  $\mathcal{D}_{(Am)}$  — коэффициент диффузии для вещества  $A$  в много-компонентной смеси. В этом параграфе мы попытаемся найти условия, для которых это определяющее уравнение применимо, а также получить выражения для  $\mathcal{D}_{(Am)}$  с помощью соответствующих коэффициентов бинарной диффузии. Обобщенное уравнение Стефана — Максвелла для идеальных растворов имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla x_{(A)} + \frac{x_{(A)} M_{(A)}}{RT} \left[ \left( \bar{\bar{V}}_{(A)} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla P - f_{(A)} + \sum_{B=1}^N \omega_{(B)} f_{(B)} \right] = \\ = \sum_{B=1}^N \frac{1}{c \mathcal{D}_{(AB)}} (x_{(A)} N_{(B)} - x_{(B)} N_{(A)}) + \\ + \sum_{B=1}^N \frac{x_{(A)} x_{(B)}}{\mathcal{D}_{(AB)}} \left( \frac{D_{(B)}^T}{\rho_{(B)}} - \frac{D_{(A)}^T}{\rho_{(A)}} \right) \Delta \ln T. \end{aligned} \quad (8.4.7-2)$$

Следовательно, мы можем преобразовать (8.4.7-1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla x_{(A)} + \frac{M_{(A)} x_{(A)}}{RT} \left[ \left( \bar{\bar{V}}_{(A)} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla P - f_{(A)} + \sum_{B=1}^N \omega_{(B)} f_{(B)} \right] = \\ = \frac{1}{c \mathcal{D}_{(Am)}} \left( -N_{(A)} + x_{(A)} \sum_{B=1}^N N_{(B)} \right) - \\ - \frac{1}{\mathcal{D}_{(Am)}} \sum_{B=1}^N x_{(A)} x_{(B)} \left( \frac{D_{(A)}^T}{\rho_{(A)}} - \frac{D_{(B)}^T}{\rho_{(B)}} \right) \nabla \ln T. \end{aligned} \quad (8.4.7-3)$$

Из уравнений (8.4.7-2) и (8.4.7-3) следует:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c \mathcal{D}_{(Am)}} \left( N_{(A)} - x_{(A)} \sum_{B=1}^N N_{(B)} \right) + \frac{1}{\mathcal{D}_{(Am)}} \sum_{B=1}^N x_{(A)} x_{(B)} \times \\ \times \left( \frac{D_{(A)}^T}{\rho_{(A)}} - \frac{D_{(B)}^T}{\rho_{(B)}} \right) \nabla \ln T = \sum_{B=1}^N \frac{1}{c \mathcal{D}_{(AB)}} (x_A N_{(A)} - x_{(B)} N_{(B)}) + \\ + \sum_{B=1}^N \frac{x_{(A)} x_{(B)}}{\mathcal{D}_{(AB)}} \left( \frac{D_{(A)}^T}{\rho_{(A)}} - \frac{D_{(B)}^T}{\rho_{(B)}} \right) \nabla \ln T. \end{aligned} \quad (8.4.7-4)$$

Рассмотрим теперь некоторые предельные случаи. Для незначительных количеств примесей, 2, 3, ...,  $N$  в практически чистом веществе 1 уравнение (8.4.7-4) упрощается:

$$\frac{N_{(A)} + (1/M_{(A)}) D_{(A)}^T \nabla \ln T}{c \mathcal{D}_{(Am)}} = \frac{N_{(A)} + (1/M_{(A)}) D_{(A)}^T \nabla \ln T}{c \mathcal{D}_{(A1)}}. \quad (8.4.7-5)$$

Иными словами, уравнение (8.4.7-1) описывает вектор плотности потока массы для вещества  $A$  в практически чистом компоненте 1, когда

$$\mathcal{D}_{(Am)} = \mathcal{D}_{(A1)}. \quad (8.4.7-6)$$

Это выражение широко применяется в случае обычной диффузии [1].

Для идеальных растворов с одинаковыми коэффициентами бинарной диффузии в соответствии с уравнением (8.4.7-4) будем иметь:

$$\mathcal{D}_{(Am)} = \mathcal{D}_{(AB)}. \quad (8.4.7-7)$$

Это хорошо известное выражение для обычной диффузии [1].

Для идеальных растворов, в которых вещества 2, 3, ..., N движутся с одинаковой скоростью (или неподвижны) и в которых термодиффузией можно пренебречь, уравнение (8.4.7-4) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{x_{(1)} v_{(1)} - x_{(1)} \sum_{B=1}^N x_{(B)} v_{(B)}}{\mathcal{D}_{(1m)}} &= \sum_{B=1}^N \frac{x_{(1)} x_{(B)}}{\mathcal{D}_{(1B)}} (v_{(1)} - v_{(B)}); \\ \frac{x_{(1)} (1 - x_{(1)}) v_{(1)} - x_{(1)} v_{(2)} \sum_{B=2}^N x_{(B)}}{\mathcal{D}_{(1m)}} &= (v_{(1)} - v_{(2)}) \sum_{B=2}^N \frac{x_{(1)} x_{(B)}}{\mathcal{D}_{(1B)}}; \\ \frac{(1 - x_{(1)}) v_{(1)} - v_{(2)} \sum_{B=2}^N x_{(B)}}{\mathcal{D}_{(1m)}} &= (v_{(1)} - v_{(2)}) \sum_{B=2}^N \frac{x_{(B)}}{\mathcal{D}_{(1B)}}; \\ \frac{(1 - x_{(1)}) (v_{(1)} - v_{(2)})}{\mathcal{D}_{(1m)}} &= (v_{(1)} - v_{(2)}) \sum_{B=2}^N \frac{x_{(B)}}{\mathcal{D}_{(1B)}}; \\ \frac{1 - x_{(1)}}{\mathcal{D}_{(1m)}} &= \sum_{B=2}^N \frac{x_{(B)}}{\mathcal{D}_{(1B)}}. \end{aligned} \quad (8.4.7-8)$$

Очевидно, что уравнение (8.4.7-1) применимо также, если

$$\mathcal{D}_{(1m)} = \frac{1 - x_{(1)}}{\sum_{B=2}^N x_{(B)} / \mathcal{D}_{(1B)}}. \quad (8.4.7-9)$$

Это уравнение представляет собой обобщение выражения для бинарной диффузии, полученного в работе [21].

Первый из трех перечисленных предельных случаев, в которых уравнения (8.4.7-1) и (8.4.7-6) используются для описания диффузии незначительных примесей в практически чистом веществе 1, несомненно является самым важным. Эта ситуация рассматривается в большинстве опубликованных работ по многокомпонентным растворам, и мы неоднократно будем прибегать к нему в дальнейшем.

Для достаточно разбавленных растворов  $c$  и  $\rho$  могут быть близки к постоянным, а

$$v = v^*. \quad (8.4.7-10)$$

Для этого предельного случая уравнение (8.4.7-1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{(A)} = & -\rho \mathcal{D}_{(Am)} \left\{ \nabla \omega_{(A)} + \frac{M_{(A)} \omega_{(A)}}{RT} \left[ \left( \bar{\bar{V}}_{..(A)} - \frac{1}{\rho} \right) \nabla P - \mathbf{f}_{(A)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{B=1}^N \omega_{(B)} \mathbf{f}_{(B)} \right] \right\} + \omega_{(A)} \sum_{B=1}^N \mathbf{n}_{(B)} - \rho \sum_{B=1}^N \omega_{(B)} x_{(B)} \times \\ & + \left( \frac{D_{(A)}^T}{\rho_{(A)}} - \frac{D_{(B)}^T}{\rho_{(B)}} \right) \nabla \ln T. \end{aligned} \quad (8.4.7-11)$$

## 8.5. ЛОКАЛЬНО УСТОЙЧИВОЕ РАВНОВЕСИЕ

**8.5.1. Устойчивое равновесие.** Рассмотрим многокомпонентную смесь, экспериментально получаемую в несколько этапов. Пусть эта смесь находится на нашем лабораторном столе в небольшой мешалке. Спустя некоторое время после того, как мы прекратили встряхивать жидкость или подогревать ее с помощью бунзеновской горелки, увидим, что система вернулась к первоначальным условиям. В последующих рассуждениях будем исходить из этого случая, когда относительно изолированное тело всегда возвращается в первоначальное состояние после незначительных возмущений любого вида.

Определим, что тело находится в равновесии, если неравенство энтропии (называемое иногда вторым законом термодинамики) пре-вращается в равенство. Мы называем равновесие локально устойчивым, если после какого-либо возмущения, характеризую-щегося параметром  $\epsilon$ , неравенство энтропии остается равенством в приближении членов самого низшего порядка в выражении по  $\epsilon$ . В рассмотренном примере можно выбрать такую величину  $\epsilon$ , которая будет соответствовать начальной скорости возмущения на границе. Тело, находящееся в локальном равновесии после незначительного воз-мущения, обязательно возвращается к нему.

Существует также метастабильное равновесие. Такое со-стояние устойчиво относительно малых возмущений и удовлетворяет определению локально устойчивого равновесия. Однако оно неустой-чиво к большим возмущениям. Неравенство энтропии не остается рав-енством в выражении по  $\epsilon$ , когда учитываются члены более высокого по-рядка.

Некоторые многокомпонентные смеси находятся в равновесии в смысле нашего определения, но являются неустойчивыми к возму-щению в распределении концентрации. К классу таких возмущений можно отнести смесь водорода, кислорода и водяного пара при ком-натной температуре и атмосферном давлении. При отсутствии каких-либо потенциальных химических реакций (в описанном случае — от-сутствие катализатора или искры) система оказывается устойчивой ко всем возмущениям в других переменных, кроме очень больших. Такую систему называют замороженной.

Тело может находиться в равновесии, устойчивом к очень большим возмущениям. Такую устойчивость называют глобальной.

В следующих параграфах мы найдем необходимые и достаточные условия для достижения локально устойчивого равновесия в много-фазной многокомпонентной системе, в которой происходит ряд по-следовательных химических реакций, полностью ограниченной непо-движными непроницаемыми аднабатическими стенками. На каждую

компоненту тела действуют различные внешние силы. Мы несколько ограничим анализ, потребовав, чтобы каждая из этих внешних сил могла быть представлена потенциалом.

**8.5.2. Изолированное тело вблизи состояния равновесия.** Если в изолированную систему, находящуюся сначала в равновесии, внести возмущение, можно увидеть, что все интенсивные переменные (температура, массовая концентрация, термодинамическое давление, скорость каждого вещества и т. д.) могут быть произвольными функциями времени и координат в этом теле и подчиняются только законам механики. Величина возмущения характеризуется параметром возмущения  $\epsilon$ . Попытаемся определить условия равновесного состояния, при которых тело можно считать локально устойчивым или, иными словами, неравенство энтропии останется равенством в приближении членов самого низкого порядка по  $\epsilon$ . Чтобы определить эти условия, сначала рассмотрим в отдельности все ограничения, налагаемые на тело законом сохранения массы, первым законом Эйлера, уравнением баланса энергии и неравенством энтропии.

**Закон сохранения массы.** Из уравнения баланса массы для отдельных компонент, сформулированного в § 8.2.1, известно, что скорость изменения массы вещества  $A$  в системе равна скорости образования компоненты в каждой из  $K$  химических реакций:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_{(A)} dV = \int_V \sum_{j=1}^K r_{(A,j)} dV. \quad (8.5.2-1)$$

Здесь  $r_{(A,j)}$  — скорость образования  $A$  в химической реакции  $j$  на единицу объема. Введем координату  $\Psi_{(j)}$ ,  $j$ -й реакции, приняв для всех  $A, B = 1, 2, \dots, N$ :

$$\frac{\partial \Psi_{(j)}}{\partial t} \equiv \frac{r_{(A,j)}}{M_{(A)} v_{(A,j)}} = \frac{r_{(B,j)}}{M_{(B)} v_{(B,j)}}. \quad (8.5.2-2)$$

Правая часть этого уравнения представляет собой нормированную скорость образования вещества  $A$  в молях при  $j$ -й химической реакции;  $M_{(A)}$  — молекулярная масса вещества  $A$ , а  $v_{(A,j)}$  — стехиометрический коэффициент для  $A$  в химической реакции  $j$ . Этот стехиометрический коэффициент считается положительным числом для веществ, используемых в химической реакции.

Используя в левой части (8.5.2-1) теорему переноса для области, содержащей сингулярную поверхность или поверхность раздела фаз, находим:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} - \sum_{j=1}^K r_{(A,j)} \right) dV - \int_{S_{\text{синг}}} [\rho_{(A)}] u_{(\xi)} dS = 0 \quad (8.5.2-3)$$

или с учетом уравнения (8.5.2-2)

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_{(A)} - \sum_{j=1}^K M_{(A)} v_{(A,j)} \Psi_{(j)} \right) dV - \int_{S_{\text{синг}}} [\rho_{(A)}] u_{(\xi)} dS = 0. \quad (8.5.2-4)$$

При выводе уравнений (8.5.2-3) и (8.5.2-4) мы учитывали, что скорости всех веществ должны быть равны нулю на неподвижной непроницаемой стенке, полностью ограничивающей тело.

Уравнение сохранения массы для всех компонент удовлетворяется, если потребовать, чтобы в химической реакции масса не увеличивалась. Это значит, что для всех  $j=1, 2, \dots, K$

$$\sum_{A=1}^N r_{(A, j)} = \frac{\partial \psi_{(j)}}{\partial t} \sum_{A=1}^N M_{(A)} v_{(A, j)} = 0. \quad (8.5.2-5)$$

Если

$$\frac{\partial \psi_{(j)}}{\partial t} \neq 0, \quad (8.5.2-6)$$

следовательно,

$$\sum_{A=1}^N M_{(A)} v_{(A, j)} = 0. \quad (8.5.2-7)$$

*Первый закон Эйлера.* Под изолированным телом мы понимаем такие условия, когда сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю. Поэтому из уравнения Эйлера, приведенного в § 8.3.3, следует, что скорость изменения импульса тела должна быть равна нулю:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left( \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)} \right) dV = 0. \quad (8.5.2-8)$$

Используя теорему переноса (8.3.2-3а), получаем:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)} \right) dV - \int_{S_{(\text{снр})}} \left[ \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)} \right] u_{(t)} dS = 0. \quad (8.5.2-9)$$

При этом учитывалось, что среднемассовая скорость  $\mathbf{v}$  на неподвижной непроницаемой стенке, ограничивающей тело, должна быть равна нулю.

*Уравнения баланса энергии.* Для изолированного тела из уравнения баланса энергии из § 8.3.5 следует, что

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( U + \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} v_{(A)}^2 \right) dV = \int_V \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)}) dV. \quad (8.5.2-10)$$

Работа контактных сил отсутствует, поскольку граница тела неподвижна в пространстве. Она также является адиабатической в смысле отсутствия контактного переноса энергии в окружающую атмосферу, а также передачи энергии из окружающей среды излучением. Возможностью передачи взаимной энергии будем пренебречь. Изменения внутренней и кинетической энергии тела происходят только в результате работы внешних сил, совершающей над телом.

Если допустить, что внешнюю силу для каждого вещества можно представить в виде градиента потенциала

$$\mathbf{f}_{(A)} = -\nabla \varphi_{(A)} \quad (8.5.2-11)$$

и что этот потенциал не зависит от времени в определенной точке пространства, то интеграл в правой части уравнения (8.5.2-10) можно

переписать в виде

$$\rho_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)}) = -\operatorname{div}(\rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)} \varphi_{(A)}) + \varphi_{(A)} \operatorname{div}(\rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)}) = \\ = -\operatorname{div}(\rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)} \varphi_{(A)}) + \varphi_{(A)} \left[ \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)}) \right] - \frac{\partial (\rho_{(A)} \varphi_{(A)})}{\partial t}. \quad (8.5.2-12)$$

Из уравнения (8.5.2-2), а также дифференциального уравнения баланса массы вещества  $A$  имеем:

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)}) = \sum_{j=1}^N r_{(A,j)} = \sum_{j=1}^K \frac{\partial}{\partial t} (M_{(A)} \mathbf{v}_{(A,j)} \psi_{(j)}), \quad (8.5.2-13)$$

откуда уравнение (8.5.2-12) можно представить в виде

$$\rho_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)}) = -\operatorname{div}(\rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)} \varphi_{(A)}) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j=1}^K \varphi_{(A)} M_{(A)} \mathbf{v}_{(A,j)} \psi_{(j)} - \rho_{(A)} \varphi_{(A)} \right). \quad (8.5.2-14)$$

Используя преобразование Грина и уравнение баланса для скачка массы

$$[\rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)} \cdot \xi - u_{(\xi)}] = 0, \quad (8.5.2-14a)$$

перепишем первый объемный интеграл в правой части этого уравнения:

$$-\int_V \operatorname{div}(\rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)} \varphi_{(A)}) dV = \int_{S_{(\text{синг})}} \varphi_{(A)} [\rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)} \cdot \xi] dS = \\ = \int_{S_{(\text{синг})}} \varphi_{(A)} [\rho_{(A)}] u_{(\xi)} dS. \quad (8.5.2-15)$$

При этом учитывалось, что скорость вещества  $A$  на ограничивающей поверхности системы тождественно равна нулю.

Можно переписать также левую часть уравнения (8.5.2-10), используя подызовав теорему переноса для области, содержащей сингулярную поверхность; правую часть этого уравнения преобразуем с помощью уравнений (8.5.2-14) и (8.5.2-15). В результате получим:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \hat{U} + \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} v_{(A)}^2 \right) \right] dV - \\ - \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \rho \left( \hat{U} + \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} \omega_{(A)} v_{(A)}^2 \right) \right] u_{(\xi)} dS = \int_{S_{(\text{синг})}} \sum_{A=1}^N \varphi_{(A)} [\rho_{(A)}] u_{(\xi)} dS + \\ + \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{A=1}^N \sum_{j=1}^N (\varphi_{(A)} M_{(A)} \mathbf{v}_{(A,j)} \psi_{(j)} - \rho_{(A)} \varphi_{(A)}) \right] dV. \quad (8.5.2-16)$$

Используя теорему переноса, мы учитывали, что границы тела непроницаемы и неподвижны в пространстве.

Если ввести суммарную энергию на единицу объема

$$\hat{E} = \rho \left[ \hat{U} + \sum_{A=1}^N \left( \frac{1}{2} \omega_{(A)} v_{(A)}^2 + \omega_{(A)} \varphi_{(A)} \right) \right], \quad (8.5.2-17)$$

уравнение (8.5.2-16) принимает вид:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \check{E} - \sum_{A=1}^N \sum_{j=1}^K \varphi_{(A)} M_{(A)} v_{(A, j)} \psi_{(j)} \right) dV - \int_{S_{(\text{синг})}} [\check{E}] u_{(\xi)} dS. \quad (8.5.2-18)$$

*Неравенство энтропии.* Для рассматриваемого изолированного тела из неравенства энтропии § 8.3.6 следует, что скорость изменения энтропии тела может быть больше или равна нулю:

$$\frac{d}{dt} \int_V \check{S} dV \geq 0. \quad (8.5.2-19)$$

Используя теорему переноса для области, содержащей сингулярную поверхность, запишем:

$$\int_V \frac{\partial \check{S}}{\partial t} dV - \int_{S_{(\text{синг})}} [\check{S}] u_{(\xi)} dS \geq 0. \quad (8.5.2-20)$$

При этом также учитывалось, что скорость на ограничивающих поверхностях будет равна нулю.

Как указывалось ранее, если неравенство энтропии в момент  $t=t_e$  становится равенством, наступает равновесие. Для изолированного тела уравнение (8.5.2-19) принимает вид:

$$t=t_e; \quad \frac{d}{dt} \int_V \check{S} dV = 0. \quad (8.5.2-21)$$

Это уравнение совместно с (8.5.2-19) является дополнительным условием, которое должно удовлетворяться для рассматриваемого изолированного тела в равновесии:

$$t=t_e; \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_V \check{S} dV = \lim_{t \rightarrow t_e} \frac{1}{t_e - t} \left( \frac{d}{dt} \int_V \check{S} dV \Big|_{t_e} - \right. \\ \left. - \frac{d}{dt} \int_V \check{S} dV \Big|_t \right) \leq 0. \quad (8.5.2-22)$$

*8.5.3. Следствия уравнения (8.5.2-21).* Если рассматриваемое многокомпонентное изолированное тело достигнет равновесия в момент  $t=t_e$ , уравнение (8.5.2-21) должно удовлетворяться в пределах ограничений, накладываемых на тело законом сохранения массы, первым законом Эйлера и уравнением баланса энергии, т. е. уравнениями

(8.5.2-4), (8.5.2-9) и (8.5.2-18). Эти ограничения можно представить с помощью множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_V \tilde{S} dV &= \int_V \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} dV - \int_{S_{(\text{синг})}} [\tilde{S}] u_{(\xi)} dS + \\
 &+ \sum_{A=1}^K \lambda_{(A)} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_{(A)} - \sum_{j=1}^K M_{(A)} v_{(A, j)} \psi_{(j)} \right) dV - \\
 &- \sum_{A=1}^N \lambda_{(A)} \int_{S_{(\text{синг})}} [\rho_{(A)}] u_{(\xi)} dS + \lambda_m \cdot \int_V \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} dV - \\
 &- \lambda_m \cdot \int_{S_{(\text{синг})}} [\rho v] u_{(\xi)} dS + \lambda_e \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \tilde{E} - \sum_{A=1}^N \sum_{j=1}^K \varphi_{(A)} M_{(A)} \times \right. \\
 &\quad \times v_{(A, j)} \psi_j \Big) dV - \lambda_e \int_{S_{(\text{синг})}} [\tilde{E}] u_{(\xi)} dS. \tag{8.5.3-1}
 \end{aligned}$$

Здесь  $\lambda_A$  ( $A = 1, 2, \dots, N$ ) и  $\lambda_e$  — постоянные, или множители Лагранжа:  $\lambda_m$  — постоянный пространственный вектор, компонентами которого являются множители Лагранжа. Из уравнения (5.1.2-9) имеем:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \sum_{A=1}^N \frac{\rho_{(A)}}{T} \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t}, \tag{8.5.3-2}$$

а из уравнения (8.5.2-17):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} v_{(A)} \cdot \frac{\partial v_{(A)}}{\partial t} + \sum_{A=1}^N \frac{1}{2} v_{(A)}^2 \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \\
 + \sum_{A=1}^N \varphi_{(A)} \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t}. \tag{8.5.3-3}
 \end{aligned}$$

При этом потенциалы  $\varphi_{(A)}$  ( $A = 1, 2, \dots, N$ ) считались независимыми от времени. После преобразования уравнения (8.5.3-1) с помощью (8.5.3-2) и (8.5.3-3) получим:

$$\begin{aligned}
 \int_V \left[ \left( \frac{1}{T} + \lambda_e \right) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \sum_{A=1}^N \left( -\frac{\rho_{(A)}}{T} + \lambda_{(A)} + \lambda_{(m)} \cdot v_{(A)} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \lambda_e \frac{1}{2} v_{(A)}^2 + \lambda_e \varphi_{(A)} \right) \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} (\lambda_e v_{(A)} + \lambda_{(m)}) \times \right. \\
 \times \frac{\partial v_{(A)}}{\partial t} - \sum_{j=1}^K \sum_{A=1}^N (\lambda_e \varphi_{(A)} M_{(A)} v_{(A, j)} + \lambda_{(A)} M_{(A)} v_{(A, j)}) \times \\
 \times \frac{\partial \psi_{(j)}}{\partial t} \Big] dV - \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \left( \frac{1}{T} + \lambda_e \right) \tilde{U} + \frac{P}{T} + \right. \\
 \left. + \sum_{A=1}^N \left( -\frac{\rho_{(A)}}{T} + \lambda_{(A)} + \lambda_e \frac{1}{2} v_{(A)}^2 + \lambda_e \varphi_{(A)} + \lambda_{(m)} \cdot v_{(A)} \right) \rho_{(A)} \right] u_{(\xi)} dS = 0. \tag{8.5.3-4}
 \end{aligned}$$

Достаточным условием для удовлетворения этого уравнения при равновесии в момент  $t=t_e$  является то, что  $\bar{U}$ ,  $\rho_{(A)}$ ,  $\mathbf{v}_{(A)}$  и  $\Psi_{(j)}$  не зависят от времени и что  $u_{(t)}=0$  для всей поверхности  $S_{(\text{синг})}$ .

Теперь определим условие, которое должно удовлетворяться для локально устойчивого равновесия. Пусть  $\varepsilon$  — параметр возмущения по отношению к равновесию (например, начальное возмущение для граничного условия). Разложим все зависимые переменные в степенной ряд по  $\varepsilon$ , например:

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)} + \dots; \quad \mu_{(A)} = \mu_{(A)}^{(0)} + \varepsilon \mu_{(A)}^{(1)} + \varepsilon^2 \mu_{(A)}^{(2)} + \dots$$

Функции  $T^{(0)}$ ,  $\mu_{(A)}^{(0)}$  и т. д. представляют температуру, химический потенциал и т. д. в момент  $t=t_e$  (состояние равновесия). Для устойчивого равновесия члены нулевого и первого порядка, т. е. соответственно коэффициенты  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$  в левой части уравнения (8.5.3-4), будут равны нулю. Тогда уравнение (8.5.3-4) обязательно удовлетворяется в пределах очень малых возмущений. Необходимым и достаточным условием равенства этих величин нулю является независимость от времени  $\bar{U}$ ,  $\rho_{(A)}$ ,  $\mathbf{v}_{(A)}$  и  $\Psi_{(j)}$  для всей системы в момент  $t=t_e$ , а также условие  $u_{(t)}=0$  для всей поверхности  $S_{(\text{синг})}$ . Для упрощения индекс 0, указывающий нулевое возмущение, опускаем и считаем, что равновесие достигается в момент  $t_e$ :

$$T = -\frac{1}{\lambda_e} = \text{const}; \quad (8.5.3-5)$$

$$\mu_{(A)} + \varphi_{(A)}^- + \frac{1}{2} v_{(A)}^2 - T \lambda_m \cdot \mathbf{v}_{(A)} = T \lambda_{(A)} = \text{const}; \quad (8.5.3-6)$$

$$\mathbf{v}_{(A)} = T \lambda_m = \text{const} \quad (A = 1, 2, \dots, N); \quad (8.5.3-7)$$

$$\sum_{A=1}^N \left( -\frac{1}{T} \varphi_{(A)} M_{(A)} \mathbf{v}_{(A, j)} + \lambda_{(A)} M_{(A)} \mathbf{v}_{(A, j)} \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, K). \quad (8.5.3-8)$$

Для каждой точки на поверхности разрыва, например, вследствие наличия поверхностей раздела фаз [на поверхности  $S_{(\text{синг})}$ ] имеем:

$$\left[ \frac{P}{T} + \sum_{A=1}^N \left( -\frac{\mu_{(A)}}{T} + \lambda_{(A)} - \frac{1}{2T} v_{(A)}^2 - \frac{1}{T} \varphi_{(A)} + \lambda_m \cdot \mathbf{v}_{(A)} \right) \rho_{(A)} \right] = 0. \quad (8.5.3-9)$$

Поскольку границы тела неподвижны, из условия (8.5.3-7) следует, что

$$\mathbf{v}_{(A)} = T \lambda_m = 0 \quad (A = 1, 2, \dots, N) \quad (8.5.3-10)$$

для каждой точки тела. В соответствии с (8.5.3-6), (8.5.3-8) и (8.5.3-10) для каждой точки тела:

$$\mu_{(A)} + \varphi_{(A)} = T \lambda_{(A)} = \text{const} \quad (A = 1, 2, \dots, N) \quad (8.5.3-11)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{A=1}^N & [ -\varphi_{(A)} M_{(A)} \mathbf{v}_{(A, j)} + (\mu_{(A)} + \varphi_{(A)}) M_{(A)} \mathbf{v}_{(A, j)} ] = \\ & = \sum_{A=1}^N \mu_{(A)} M_{(A)} \mathbf{v}_{(A, j)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, K). \end{aligned} \quad (8.5.3-12)$$

Из уравнений (8.5.3-5) и (8.5.3-9)–(8.5.3-11) следует, что при переходе через любую поверхность разрыва давление изменяется непрерывно, т. е. на поверхности  $S_{\text{синг}}$ :

$$[P] = 0. \quad (8.5.3-13)$$

Можно сделать вывод, что для рассматриваемого изолированного тела необходимым и достаточным условием того, чтобы в локально устойчивом равновесии в момент  $t=t_e$  уравнение (8.5.2-21) удовлетворялось, являются условия (8.5.3-5) и (8.5.3-10)–(8.5.3-13), а также условие независимости от времени величин  $\bar{U}$ ,  $\rho_{(A)}$ ,  $\mathbf{v}_{(A)}$  и  $\psi_{(j)}$  в момент  $t=t_e$  и равенство нулю величины  $u_{(\xi)}$  по всей поверхности  $S_{\text{синг}}$ .

Уравнения (8.5.3-5) и (8.5.3-10)–(8.5.3-13) представляют собой ограничения для различных интенсивных переменных системы в локально устойчивом равновесии. В следующем параграфе будут найдены условия, которые должны удовлетворяться для любого калорического уравнения состояния вида (5.1.2-2) или (5.1.2-3) при сохранении локально устойчивого равновесия.

**8.5.4. Следствие неравенства (8.5.2-22).** В состоянии равновесия, наступившего в момент  $t=t_e$ , неравенство (8.5.2-22) должно с точностью до постоянной удовлетворять закону сохранения массы, первому закону Эйлера и уравнению баланса энергии, т. е. уравнениям (8.5.2-4), (8.5.2-9) и (8.5.2-18). Удобнее всего проверить соответствие этим ограничениям, рассчитав вторую производную в левой части уравнения (8.5.2-22) с помощью дифференцирования (8.5.3-1) по времени. Это дифференцирование подробно описано в приложении В.

Согласно неравенству (В-3) приложения В достаточными условиями для того, чтобы удовлетворить неравенство (8.5.2-22) в состоянии равновесия в момент  $t=t_e$ , является независимость  $\bar{U}$ ,  $\rho_{(A)}$ ,  $\mathbf{v}_{(A)}$ ,  $\psi_j$  от времени и равенство нулю величины  $u_{(\xi)}$  по всей поверхности  $S_{\text{синг}}$ .

Теперь посмотрим, какие еще условия необходимы для того, чтобы равновесие было локально устойчивым. Как и при обсуждении следствий уравнения (8.5.2-21), будем считать  $\epsilon$  параметром нарушения равновесия и разложим все зависимые переменные в степенной ряд по  $\epsilon$ . Для устойчивого равновесия неравенство (8.5.2-22) должно удовлетворяться в приближении членов самого низкого порядка по  $\epsilon$ . При этом неравенство (8.5.2-22) обязательно удовлетворяется в пределах очень малых возмущений.

С помощью уравнения (8.5.3-1) неравенство (8.5.2-22) можно записать в более удобной форме — в виде неравенства (В-3) приложения В. Из уравнений (5.1.2-9) и (5.1.2-13), уравнений (8.5.2-17), (8.5.3-5) и (8.5.3-10)–(8.5.3-13), а также условия  $u_{(\xi)} = 0$  на поверхности  $S_{\text{синг}}$  в момент  $t=t_e$  следует, что члены нулевого и первого порядков под знаком интеграла в левой части неравенства (В-3) приложения В тождественно равны нулю. Остановимся на членах самого низкого порядка в выражении по  $\epsilon$ , получающихся в результате интегрирования по объему:

$$\int_V \left[ \frac{\partial^2 \widehat{S}}{\partial t^2} + \sum_{A=1}^N \left( \frac{\mu_{(A)} + \varphi_{(A)}}{T} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \rho_{(A)} - \sum_{j=1}^N M_{(A)} v_{(A, j)} \psi_{(j)} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{T} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \widehat{E} - \sum_{A=1}^N \sum_{j=1}^K \varphi_{(A)} M_{(A)} v_{(A, j)} \psi_{(j)} \right) \right] dV \leq 0. \quad (8.5.4-1)$$

Дифференцируя (8.5.3-2) и (8.5.3-3), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t^2} = & \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial T^{-1}}{\partial \tilde{U}} \right)_{\rho(B)} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} \right)^2 + \sum_{A=1}^N \left( \frac{\partial T^{-1}}{\partial \rho(A)} \right)_{\tilde{U}, \rho(B), (B \neq A)} \times \\ & \times \frac{\partial \rho(A)}{\partial t} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \sum_{A=1}^N \left( \frac{\partial \mu(A) T^{-1}}{\partial \tilde{U}} \right)_{\rho(B)} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} \frac{\partial \rho(A)}{\partial t} - \\ & - \sum_{B=1}^N \sum_{A=1}^N \left( \frac{\partial \mu(A) T^{-1}}{\partial \rho(B)} \right)_{\tilde{U}, \rho(C), (C \neq B)} \frac{\partial \rho(B)}{\partial t} \frac{\partial \rho(A)}{\partial t} - \\ & - \sum_{A=1}^N \frac{\mu(A)}{T} \frac{\partial^2 \rho(A)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8.5.4-2)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} = & \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} + 2v \cdot \sum_{A=1}^N \frac{\partial \rho(A)}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \\ & + \rho v \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{2} v^2 \sum_{A=1}^N \frac{\partial^2 \rho(A)}{\partial t^2} + \sum_{A=1}^N \varphi(A) \frac{\partial^2 \rho(A)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (8.5.4-3)$$

Подставив эти выражения в неравенство (8.5.4-1) с помощью уравнений (8.5.3-10) и (8.5.3-12) будем иметь для  $t=t_e$ :

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \sum_{B=1}^N \sum_{A=1}^N \left( \frac{\partial \mu(A) T^{-1}}{\partial \rho(B)} \right)_{\tilde{U}, \rho(C), (C \neq B)} \frac{\partial \rho(B)}{\partial t} \frac{\partial \rho(A)}{\partial t} + \right. \\ & + \sum_{A=1}^N \left[ - \left( \frac{\partial T^{-1}}{\partial \rho(A)} \right)_{\tilde{U}, \rho(B), (B \neq A)} + \left( \frac{\partial \mu(A) T^{-1}}{\partial \tilde{U}} \right)_{\rho(B)} \right] \frac{\partial \rho(A)}{\partial t} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} - \\ & \left. - \left( \frac{\partial T^{-1}}{\partial \tilde{U}} \right)_{\rho(B)} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho}{T} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right\} dV \geq 0. \end{aligned} \quad (8.5.4-4)$$

Рассмотрим векторное пространство, элементами которого являются упорядоченные совокупности  $N+2$  действительных функций времени и координат. При этом в качестве скаляров поля принимаются действительные функции времени и координат, к которым применимы обычные правила сложения и умножения функций. Это векторное пространство является обобщением векторного пространства  $(N+2)$ -кратных действительных чисел [23]. Пусть  $\mathbf{x}$  — элемент этого векторного пространства:

$$\mathbf{x} = \left( \frac{\partial \rho_{(1)}}{\partial t}, \frac{\partial \rho_{(2)}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \rho_{(N)}}{\partial t}, \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t} \right). \quad (8.5.4-5)$$

Тогда неравенство (8.5.4-4) можно записать в виде

$$\int_V (\mathbf{x}, \mathbf{Sx}) dV \geq 0 \text{ при } t=t_e, \quad (8.5.4-6)$$

где  $(\mathbf{x}, \mathbf{Sx})$  — тензорное произведение векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{Sx}$  этого вектор-

ного пространства;  $S$  — преобразование векторного пространства на себя самое. Если взять  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N+2}$  в качестве базиса для этого векторного пространства

$$\gamma_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \gamma_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad \gamma_{(N+2)} = (0, \dots, 1), \quad (8.5.4-7)$$

элементы матрицы преобразования  $S$  относительно этого базиса [23] будут:

$$S_{AB} = S_{BA} = \left( \frac{\partial \mu_{(A)} T^{-1}}{\partial p_{(B)}} \right)_{U, p_C (C \neq B)} \quad \text{для } A, B = 1, 2, \dots, N; \quad (8.5.4-8)$$

$$S_{N+1, A} = S_{A, N+1} = - \left( \frac{\partial T^{-1}}{\partial p_{(A)}} \right)_{U, p_B (B \neq A)} \quad \text{для } A = 1, 2, \dots, N; \quad (8.5.4-9)$$

$$S_{N+1, N+1} = - \left( \frac{\partial T^{-1}}{\partial U} \right)_{p_B}; \quad (8.5.4-10)$$

$$S_{N+2, A} = S_{A, N+2} = 0 \quad \text{для } A = 1, 2, \dots, N+1; \quad (8.5.4-11)$$

$$S_{N+2, N+2} = \frac{p}{T}. \quad (8.5.4-12)$$

При получении этих выражений использовались формулы, которые легко получить из уравнения (6.1.2-9):

$$\left( \frac{\partial \mu_{(A)} T^{-1}}{\partial p_{(B)}} \right)_{U, p_C (C \neq B)} = - \frac{\partial^2 S}{\partial p_{(B)} \partial p_{(A)}} = \left( \frac{\partial \mu_{(B)} T^{-1}}{\partial p_{(A)}} \right)_{U, p_C (C \neq A)} \quad (8.5.4-13)$$

и

$$- \left( \frac{\partial T^{-1}}{\partial p_{(A)}} \right)_{U, p_B (B \neq A)} = - \frac{\partial^2 S}{\partial p_A \partial U} = \left( \frac{\partial \mu_{(A)} T^{-1}}{\partial U} \right)_{p_B}. \quad (8.5.4-14)$$

Для локально устойчивого равновесия члены нулевого порядка в левой части неравенства (8.5.4-6) тождественно равны нулю, члены первого порядка отсутствуют. Обозначим подынтегральное выражение члена второго порядка как  $(x^{(1)}, S^{(0)}x^{(1)})$ , где  $x^{(1)}$  — возмущение первого порядка в (8.5.4-5). Поскольку величина  $x^{(1)}$  произвольна, величины второго порядка, входящие в неравенство (8.5.4-6), означают, что в каждой точке многокомпонентного многофазного тела при  $t=t_e$

$$(x, Sx) \geq 0, \quad (8.5.4-15)$$

где верхние индексы опускаются. Это значит также, что  $S$  является положительным преобразованием [23]. Кроме того, поскольку матрица  $S$  относительно базиса (8.3.4-7) симметрична,  $S$  — самосопряженная величина. Необходимым и достаточным условием положительного преобразования  $S$  является положительность исходящих главных миноров матрицы  $\|S_{AB}\|$  от  $S$  [23]:

$$S_{11} \geq 0; \quad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \geq 0;$$

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} \geq 0 \dots \det \|S_{AB}\| \geq 0. \quad (8.5.4-16)$$

Кроме того, известно, что диагональные элементы матрицы  $\|S_{AB}\|$  ( $S_{11}, S_{22}, \dots, S_{N+2, N+2}$ ) также положительны, поскольку  $S = B^2$  для самосопряженного преобразования  $B$  [23].

Можно считать, что неравенства (8.5.4-16) являются условиями сохранения локально устойчивого равновесия, которые должны удовлетворяться для любого калорического уравнения вида (5.1.2-3) или (8.5.2-2).

8.5.5. Частные случаи однокомпонентной системы. В качестве примера рассмотрим необходимые и достаточные условия для соблюдения неравенства (8.5.2-22) в случае локально устойчивого равновесия однокомпонентной (не обязательно однофазной) изолированной системы.

Из условия неравенства (8.5.4-16) имеем для данного случая:

$$S_{11} = \left( \frac{\partial \mu T^{-1}}{\partial p} \right)_U = - \left( \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p^2} \right)_U \geq 0; \quad (8.5.5-1)$$

$$\begin{aligned} S_{11} S_{22} - (S_{12})^2 &= \frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial \mu T^{-1}}{\partial p} \right)_U \left( \frac{\partial T}{\partial U} \right)_p - \\ &- \left[ \frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_U \right]^2 = \left( \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p^2} \right)_U \left( \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial U^2} \right)_p - \left( \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial U \partial p} \right)^2 \geq 0; \end{aligned} \quad (8.5.5-2)$$

$$S_{33} = \frac{p}{T} \geq 0. \quad (8.5.5-3)$$

Поскольку элементы диагонали матрицы  $\|S_{ij}\|$  должны быть положительными, необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} S_{22} &= - \left( \frac{\partial T^{-1}}{\partial U} \right)_p = - \left( \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial U^2} \right)_p = - \frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial U} \right)_p = \\ &= \frac{1}{p T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial U} \right)_V = \frac{1}{p T^2 c_V} \geq 0 \end{aligned} \quad (8.5.5-4)$$

или с учетом неравенства (8.5.5-3):

$$\hat{c}_V = \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial T} \right)_V \geq 0. \quad (8.5.5-5)$$

В выражении для базиса (8.5.4-7) поменяем местами  $y_1$  и  $y_2$ . Тогда легко показать, что неравенства (8.5.5-2), (8.5.5-3) и (8.5.5-5) являются необходимым и достаточным условием для выполнения неравенства (8.5.5-2) в случае изолированной однокомпонентной многофазной системы в локально устойчивом равновесии.

Неравенство (8.5.5-2) можно представить в более удобном виде. Из уравнения (5.1.2-9) имеем:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p^2} \right)_U - \frac{(\partial^2 \tilde{S} / \partial \tilde{U} \partial p)^2}{(\partial^2 \tilde{S} / \partial \tilde{U}^2)_p} &= - \left( \frac{\partial \mu T^{-1}}{\partial p} \right)_U + \frac{(\partial T^{-1} / \partial p)_U (\partial \mu T^{-1} / \partial \tilde{U})_p}{(\partial T^{-1} / \partial \tilde{U})_p} = \\ &= - \left( \frac{\partial \mu T^{-1}}{\partial p} \right)_U - \left( \frac{\partial \mu T^{-1}}{\partial \tilde{U}} \right)_p \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial p} \right)_T = - \left( \frac{\partial \mu T^{-1}}{\partial p} \right)_T. \end{aligned} \quad (8.5.5-6)$$

Это выражение, а также уравнение Гиббса—Дюгема (5.1.2-16) позволяют представить неравенство (8.5.5-2) в виде

$$S_{11}S_{22} - (S_{12})^2 = \frac{1}{T^3} \left( \frac{\partial T}{\partial U} \right)_P \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{P^2 T^3} \left( \frac{\partial T}{\partial U} \right)_V \left( \frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T = \\ = - \frac{1}{T^3 P^4 C_V} \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \geqslant 0, \quad (8.5.5-7)$$

которое с учетом (8.5.5-3) и (8.5.5-5) сводится к виду:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \leqslant 0. \quad (8.5.5-8)$$

Выражения (8.5.5-1), (8.5.5-3) и (8.5.5-8) или (8.5.5-3), (8.5.5-5) и (8.5.5-8) являются условиями, которые должны выполняться для любого калорического уравнения состояния вида

$$\hat{U} = \hat{U}(\hat{S}, \rho) \quad (8.5.5-9)$$

для рассматриваемых условий, при которых может поддерживаться локально устойчивое равновесие.

*8.5.6. Связь с классическими уравнениями термостатики.* В своей работе по термостатике [24] Гиббс рассматривал только тела, автоматически находящиеся в состоянии равновесия, поскольку все величины, включая конфигурацию тела, не зависели от времени. Можно сказать, что все тела, рассматриваемые термостатикой, находятся в состоянии покоя или в состоянии равновесия.

В своем определении устойчивого состояния покоя (состояния устойчивого равновесия) Гиббс [24] ограничился теми состояниями покоя, которые могут быть достигнуты телом при постоянном объеме и постоянной внутренней энергии. Особенно четко это представлено в работе [25]. Устойчивое состояние покоя достигается при соответствующей энтропии, значение которой больше, чем для любого другого состояния покоя.

Локально устойчивое равновесие, описанное в предыдущих параграфах, основывается на иной концепции. Определяя устойчивость равновесия, мы сравниваем рассматриваемое состояние с нарушением равновесия в результате небольших возмущений. Очевидно, что локально равновесное состояние выходит за пределы термостатики и в этом смысле ранее не исследовалось.

Интересно отметить, что полученные нами критерии локально устойчивого равновесия в изолированном теле полностью совпадают с критериями Гиббса и других исследователей для устойчивого состояния покоя (состояния устойчивого равновесия), что совершенно неудивительно. Гиббс [24] показал, что в устойчивом состоянии покоя температура во всем изолированном теле должна быть одинаковой [ср. уравнение (8.5.3-5)]. Он также получил уравнение, аналогичное выражению (8.5.3-11) [24]. Соотношения типа (8.5.3-12) установлены ранее Пригожиным и Дефэем [26], Денбиゴм [27] и Хаазе [28]. Неравенства (8.5.5-2) и (8.5.5-5) опубликованы в работе [26], а неравенства (8.5.5-5) и (8.5.5-8) получены Гиббсом [24] и Галленом [29].

Новым является уравнение (8.5.3-13), а также обоснование справедливости уравнений (8.5.3-5), (8.5.3-10)–(8.5.3-12), (8.5.4-16),

(8.5.5-1) — (8.5.5-3), (8.5.5-5) и (8.5.5-8) для всей многофазной системы в локально устойчивом равновесии, хотя этого следовало ожидать, поскольку всеми многофазными эффектами мы пренебрегали.

## 8.6. АНАЛИЗ

### 8.6.1. Другой подход к механике многокомпонентных систем.

В этой главе изложены основы самого распространенного в настоящее время подхода к механике многокомпонентных систем. Было бы несправедливым не сказать о существовании другой системы основных постулатов для многокомпонентных систем, хорошо разработанной в литературе.

В § 8.4.5 обсуждались определяющие уравнения для вектора плотности потока массы  $j_{(A)}$  или  $\mathbf{n}_{(A)}$ . Поскольку  $\rho_{(A)}$  является одной из зависимых переменных, они эквивалентны определяющим уравнениям для скорости движения вещества  $v_{(A)}$ . Исходя из изложенного в гл. 1 и 2 это может показаться довольно странным. При обсуждении изотермического течения однокомпонентной несжимаемой жидкости было установлено, что давление и три компоненты скорости находятся совместным решением уравнения неразрывности и первого закона Коши. Мы записали определяющее уравнение не для вектора скорости, а для тензора дополнительных напряжений. При неизотермическом течении сжимаемой однокомпонентной жидкости задача несколько усложняется, так как плотность, три компоненты скорости, термодинамическое давление и температура определяются из совместного решения уравнения неразрывности, первого закона Коши, дифференциального уравнения баланса энергии и уравнения состояния (см. § 5.1.2), т. е. по существу скорость считается зависимой переменной, определяющейся при соблюдении первого закона Эйлера и закона сохранения массы.

Почему при изложении основ механики для многокомпонентных систем мы выбрали совсем другой подход? Ответ на этот вопрос дается в § 8.4.1. Используемые постулаты, очевидно, являются недостаточными, поскольку мы оказываемся перед необходимостью решать не большое количество уравнений для слишком большого числа переменных. В § 8.4.1 мы решили эту задачу, записав  $N-1$  определяющих уравнений для  $j_{(A)}$ . По-другому эту проблему можно решить, приняв большее число допущений.

В § 8.2.1 рассмотрение начинается с уравнения баланса массы для каждого отдельного вещества, составляющего систему. Вполне естественно постулировать также уравнение баланса импульса, баланса момента импульса, баланса энергии и неравенство энтропии для каждого вещества [2, 4, 7]. Такой метод успешно применялся для обоснования определяющего уравнения вектора плотности потока массы, используемого в § 8.4.5 для обычной диффузии [30].

Этот подход требует гораздо большего количества определяющих уравнений, что составляет его принципиальную трудность. Необходимы определяющие уравнения для каждого «частного» тензора напряжений, входящего в уравнение баланса импульса для отдельных компонент системы и для скорости возникновения импульса на единицу объема, связанного с каждым веществом, составляющим систему, в результате взаимодействия с другими компонентами смеси и т. д. Вплоть до настоящего времени эти величины не поддавались экспериментальному

измерению. Следовательно, если бы определяющие уравнения для этих величин и были сформулированы, то все равно было бы невозможно проверить экспериментально каждое из них в отдельности. Приходится полагаться на измерение суммарного процесса, которое зависит от ряда небольших допущений для смеси.

В заключение можно сказать, что в настоящее время уравнения баланса импульса и энергии, а также неравенство энтропии не записываются в отдельности, кроме как для анализа определяющих уравнений для  $j_A$  [30]. Самым лучшим методом анализа массообменных задач различной степени сложности является подход, описанный в предыдущих параграфах этой главы, так как его достоинства подтверждаются многолетней практикой использования в науке и технике.

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ДЛЯ ПЕРЕНОСА МАССЫ

Эта глава аналогична гл. 3 и 6, так как в ней используется практически один и тот же подход к задаче, хотя приложения различны. Поэтому целесообразнее приступить к усвоению этого материала, изучив задачи указанных двух глав.

При отсутствии вынужденной или естественной конвекции, возникающей в результате градиента плотности в гравитационном поле, конвективными членами в дифференциальном уравнении массопереноса для вещества  $A$  можно пренебречь, что обычно делается без оговорок. Иногда для объяснения приводится следующий качественный довод: поскольку диффузия — очень медленный процесс, то по сравнению с нею естественной конвекцией следует пренебречь. Вероятно, прочитав эту главу, читатель найдет этот аргумент слишком упрощенным. При определенных обстоятельствах свободная конвекция является характерной особенностью задачи. Иногда можно показать, что естественная конвекция тождественно равна нулю. Вообще говоря, свободной конвекцией по сравнению с диффузией можно пренебречь по мере приближения к равновесному состоянию.

## 9.1. ОБЩИЙ ПОДХОД

*9.1.1 Общий подход к решению задач тепломассопереноса.* В принципе задачи, к рассмотрению которых мы приступаем, сложнее рассмотренных в гл. 3 или 6, так как сейчас нам предстоит одновременно анализировать перенос импульса, энергии и массы. В самом общем виде задача такого типа требует совместного решения дифференциального уравнения баланса массы для каждой компоненты, первого закона Коши, уравнения сохранения энергии с определяющими уравнениями для векторов потока массы, тензора напряжений и вектора потока энергии. Не следует заранее бояться трудностей, так как во все частные примеры, которые мы будем рассматривать, такие сложные. Используя упрощения, можно получить достаточно информации о важных инженерных задачах. В рассматриваемых здесь задачах мы обычно будем пренебрегать тепловыми эффектами и считать рассматриваемые течения изотермичными. Такой подход дает определенное

преимущество, так как он позволяет опустить уравнение баланса энергии; тем не менее следует учитывать, что при этом описание переноса становится менее реальным. Если распространение скоростей представляет интерес во всех случаях, распределение давления часто совершенно несущественно. Таким образом, мы сможем обойтись без первого закона Коши.

Как указывалось в § 3.1.1, анализируя физические условия, надо прежде всего определить тип задачи. В частности, это означает необходимость выбрать определяющие уравнения для векторов потока массы, векторов напряжений, векторов плотности потока энергии. Что касается векторов потока массы и плотности потока энергии, современная литература дает нам очень мало сверх тех уравнений, которые описаны в § 8.4.4 и 8.4.5 (или частные случаи, описанные в § 8.4.6 и 8.4.7). Хотя в § 8.4.3 представлено большое количество уравнений для тензора напряжений, все они базируются на одном и том же уравнении, введенном в § 2.3.2—2.3.4. К сожалению, переносом массы в вязкоупругих течениях до настоящего времени почти полностью пренебрегали.

Для полной формулировки частной задачи необходимо указать геометрию вещества или геометрию среды, в которой происходит его движение, гомогенные и гетерогенные химические реакции (см. § 8.2.1), движущие силы и все потоки энергии к телу. Так же, как в гл. 3 и 6, каждая задача требует постановки соответствующих граничных условий. Помимо рассмотренных в § 3.1.1 и 6.1.1, существует несколько других граничных условий общего типа, которые следует выбирать в соответствии с физическими условиями задачи.

1. Будем считать, что поверхность раздела фаз находится в равновесии. Вероятно, более естественным было бы считать химический потенциал всех имеющихся компонент непрерывным при переходе через границу раздела фаз. Это возможно из интуитивного предположения, что на этой поверхности устанавливается локальное равновесие. Для предельного случая устойчивого равновесия в § 8.5.3 указывалось, что химические потенциалы непрерывны при переходе через границу раздела фаз. Использование химического потенциала в описании физических задач, вообще говоря, не рекомендуется из-за недостатка экспериментальных данных о зависимости химического потенциала от концентрации раствора.

2. Уравнение баланса скачка массы (8.5.2-14а) должно удовлетворяться для каждого вещества на каждой фазовой границе.

3. Концентрация и плотность потока массы являются конечными во всех точках материала.

4. Когда на границе раздела фаз задана гетерогенная реакция, уравнение баланса для скачка массы для отдельных компонент смеси обычно не применяется, а вместо него используется эмпирическое соотношение для плотности потока массы на каталитической поверхности:

$$N_{(A)} \cdot n = k''_{(n)} c_{(A)}^{(n)}. \quad (9.1.1-1)$$

При этом считается, что система отсчета, соответствующая этому уравнению, неподвижна относительно каталитической поверхности. Построение эмпирических соотношений для обработки экспериментальных данных по плотности потока массы вещества к каталитической поверхности или от нее рассматривается во многих опубликованных

работах по кинетике, и поэтому они здесь подробно не рассматриваются.

Для данного случая остается в силе рекомендация, данная в § 3.1.1. Иногда постановка задачи не представляет серьезных трудностей, однако аналитическое решение ее невозможно, а численный анализ требует огромных материальных затрат. Поэтому часто целесообразно аппроксимировать сложную реальную задачу другой, решение которой не представляет особых затруднений. В некоторых случаях это является единственным выходом, в других такая аппроксимация используется для проверки численного решения. В этой главе мы будем рассматривать задачи, которые имеют точное решение. Это делается потому, что при таком подходе усвоение большого количества понятий требует минимального времени. Кроме того, по нашему мнению, прежде чем приступать к сложному численному анализу, необходимо в совершенстве научиться решать задачи такого типа.

Так же как и при обсуждении решения уравнения первого закона Коши и баланса энергии, следует отметить, что полученные решения не являются единственными. Но нас прежде всего интересует получение любого решения, хотя иногда экспериментальные данные подтверждают единственность найденного решения, однако в большинстве случаев такая проверка невозможна.

В § 9.2.1—9.3.4 мы рассмотрим задачи естественной конвекции, в которых массовое или молярное распределение скорости зависит только от градиентов концентрации в жидкости. С одной стороны, множество массообменных задач усваивается лучше всего при отсутствии вынужденной конвекции. С другой — необходимо понять, что естественная конвекция при переносе массы сильно отличается от естественной конвекции при переносе энергии. В последнем случае она невозможна без градиента плотности. В отличие от этого естественная конвекция может играть основную роль в переносе массы, даже если рассматривается среда равномерной плотности.

В заключение в § 9.4.1 мы рассмотрим аналогию между переносом массы при вынужденной конвекции и переносом энергии при вынужденной конвекции.

## 9.2. ЗАМКНУТЫЕ РЕШЕНИЯ

**9.2.1. Нестационарное испарение.** Очень длинная вертикальная трубка частично заполнена чистой жидкостью *A*. Остальная часть трубы заполнена чистым газом *B*, отделенным от жидкости непроницаемой перегородкой. Вся система находится при постоянной температуре и давлении; незначительным гидростатическим эффектом пренебрегаем. В момент  $t=0$  перегородка удаляется и жидкость *A* начинает испаряться. Система построена таким образом, что поверхность раздела жидкость — газ остается неподвижной во время испарения. Требуется определить распределение концентрации *A* в газовой фазе в зависимости от времени.

Будем считать, что вещества *A* и *B* составляют идеальную газовую смесь. Поэтому можно утверждать, что молярная плотность *c* постоянна во всей газовой фазе. Кроме того, вещество *B* не распространяется в веществе *A*.

Для максимального упрощения задачи заменим конечную газовую fazu полубесконечным объемом газа, занимающим все пространство,

соответствующее  $z_2 > 0$ . Начальные и граничные условия будут:

$$\text{при } t = 0 \text{ для всех } z_2 > 0 \quad x_{(A)} = 0; \quad (9.2.1-1)$$

$$\text{при } z_2 = 0 \text{ для всех } t > 0 \quad N_{(B)2} = 0; \quad (9.2.1-2)$$

$$\text{при } z_2 = 0 \text{ для всех } t > 0 \quad x_{(A)} = x_{(A) \text{ экв}}, \quad (9.2.1-3)$$

где  $x_{(A) \text{ экв}}$  — молярная концентрация жидкости  $A$  в газовой смеси  $AB$ , находящейся в равновесии с чистой жидкостью  $A$  при данных температуре и давлении.

Для удобства возьмем:

$$v^*_1 = v^*_3 = 0; \quad v^*_2 = v^*_2(t, z_2); \quad x_{(A)} = x_{(A)}(t, z_2). \quad (9.2.1-4)$$

Поскольку  $c$  можно считать постоянной, а также ввиду отсутствия гомогенной химической реакции, из уравнения неразрывности вида (Б) табл. 8.3.2-1, следует, что

$$\partial v^*_2 / \partial z_2 = 0. \quad (9.2.1-5)$$

Отсюда

$$v^*_2 = v^*_2(t). \quad (9.2.1-6)$$

С помощью уравнения (9.2.1-2), определения среднемолярной скорости  $v^*$  и первого закона Фика в виде уравнения (Г) табл. 8.4.6-1 можно показать, что

при  $z_2 = 0$  для  $t > 0$

$$v^* = \frac{1}{c} N_{(A)2} = \frac{x_{(A)}}{c} N_{(A)2} - \mathcal{D}_{(AB)} \frac{\partial x_A}{\partial z_2} = - \frac{\mathcal{D}_{(AB)}}{1 - x_{(A)}} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2}. \quad (9.2.1-7)$$

Из уравнений (9.2.1-3), (9.2.1-6) и (9.2.1-7) получаем для всей газовой фазы для  $t > 0$ :

$$v^*_2 = - \frac{\mathcal{D}_{(AB)}}{1 - x_{(A) \text{ экв}}} \left. \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} \right|_{z_2=0}. \quad (9.2.1-8)$$

Следует отметить, что, несмотря на то что  $(\partial X_{(A)} / \partial z_2)_{z_2=0}$  всюду не зависит от координат, эта величина является функцией времени.

Будем считать, что коэффициент диффузии можно взять постоянным. Тогда с учетом уравнений (9.2.1-4) и (9.2.1-8) мы можем записать уравнение неразрывности для вещества  $A$  в виде, совместимом с первым законом Фика [уравнение (Г) табл. 8.4.6-2]:

$$\frac{\partial x_{(A)}}{\partial t} - \frac{\mathcal{D}_{(AB)}}{1 - x_{(A) \text{ экв}}} \left. \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} \right|_{z_2=0} - \mathcal{D}_{(AB)} \frac{\partial^2 x_{(A)}}{\partial z_2^2} = 0. \quad (9.2.1-9)$$

Будем искать решение этого уравнения для граничных условий (9.2.1-1) и (9.2.1-3):

С этой целью сначала преобразуем выражение (9.2.1-9) в обыкновенное дифференциальное уравнение. Учитывая прежний опыт (см. § 3.2.4), следует ввести новую независимую переменную

$$\eta \equiv z_2 / \sqrt{4 \mathcal{D}_{(AB)} t}. \quad (9.2.1-10)$$

Тогда с ее помощью уравнение (9.2.1-9) представим как

$$\frac{d^2x_{(A)}}{d\eta^2} + (2\eta + \varphi) \frac{dx_{(A)}}{d\eta} = 0, \quad (9.2.1-11)$$

где

$$\varphi = \left. \frac{1}{1 - x_{(A)} \text{экв}} \frac{dx_{(A)}}{d\eta} \right|_{\eta=0}. \quad (9.2.1-12)$$

Границными условиями для уравнения (9.2.1-11) будут:

$$x_{(A)} = x_{(A) \text{ экв}} \text{ при } \eta = 0 \quad (9.2.1-13)$$

и

$$x_{(A)} \rightarrow 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \quad (9.2.1-14)$$

Интегрируя уравнение (9.2.1-11) один раз, находим:

$$\frac{dx_{(A)}}{d\eta} = C_1 \exp \left( - \left[ \eta + \frac{\varphi}{2} \right]^2 \right). \quad (9.2.1-15)$$

Здесь  $C_1$  — неизвестная постоянная. Повторное интегрирование в соответствии с уравнением (9.2.1-13) дает:

$$x_{(A)} - x_{(A) \text{ экв}} = C_1 \int_{\varphi/2}^{\eta + \varphi/2} e^{-x^2} dx. \quad (9.2.1-16)$$

Для выполнения граничного условия (9.2.1-14) необходимо:

$$\begin{aligned} -x_{(A) \text{ экв}} &= C_1 \int_{\varphi/2}^{\infty} e^{-x^2} dx = \\ &= C_1 \left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^{\varphi/2} e^{-x^2} dx \right) = C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.2.1-17)$$

В итоге получим [1]:

$$\frac{x_{(A) \text{ экв}} - x_{(A)}}{x_{(A) \text{ экв}}} = \frac{2/\sqrt{\pi}}{1 - \operatorname{erf}(\varphi/2)} \int_{\varphi/2}^{\eta + \varphi/2} e^{-x^2} dx = \frac{\operatorname{erf}(\eta + \varphi/2) - \operatorname{erf}(\varphi/2)}{1 - \operatorname{erf}(\varphi/2)}. \quad (9.2.1-18)$$

Величина  $\varphi$  определяется по выражениям (9.2.1-12) в (9.2.1-18) как

$$\varphi = \frac{-2x_{(A) \text{ экв}}}{\sqrt{\pi}(1 - x_{(A) \text{ экв}})} \frac{\exp[-(\varphi/2)^2]}{[1 - \operatorname{erf}(\varphi/2)]}. \quad (9.2.1-19)$$

Это уравнение использовано в табл. 9.2.1-1, где величина  $\varphi$  представлена в зависимости от  $x_{(A) \text{ экв}}$ .

Таблица 9.2.1-1

Величина  $\varphi$  в зависимости от  $x_{(A) \text{ экв}}$

$x_{(A) \text{ экв}}$	$-\frac{\varphi}{2}$	$\frac{-\sqrt{\pi}\varphi}{2x_{(A) \text{ экв}}}$
0	0,0000	1,000
0,25	0,1562	1,108
0,5	0,3578	1,268
0,75	0,6618	1,564
1	$\infty$	$\infty$

Сначала определим скорость испарения с поверхности. Используя первый закон Фика в виде уравнения (Г) табл. 8.4.6-1, а также уравнения (9.2.1-2) и (9.2.1-3), рассчитаем скорость испарения:

$$N_{(A)2} \Big|_{z_2=0} = \frac{-c\mathcal{D}_{(AB)}}{1-x_{(A)\text{экв}}} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} \Big|_{z_2=0} = \frac{-c}{1-x_{(A)\text{экв}}} \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{(AB)}}{4t}} \frac{dx_{(A)}}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = \\ = -c\varphi \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{(AB)}}{4t}} = cx_{(A)\text{экв}} \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{(AB)}}{\pi t}} \left( -\frac{V_\pi}{2} \frac{\varphi}{x_{(A)\text{экв}}} \right). \quad (9.2.1-20)$$

Вполне естественно, что в дифференциальном уравнении баланса массы для вещества  $A$  конвекция учитывается. В соответствии с нашим представлением диффузии — довольно медленный процесс и, следовательно,  $v^*_2$  может иметь небольшое значение. Называя размерную величину небольшой, следует быть осторожным, поскольку ее значение зависит от используемой системы единиц. Если произвольно принять  $v^*_2=0$ , то из уравнений (9.2.1-8) и (9.2.1-12) станет ясно, что это эквивалентно допущению  $\varphi=0$  в полученном решении при отсутствии конвекции:

$$\frac{x_{(A)\text{экв}} - x_{(A)}}{x_{(A)\text{экв}}} = \operatorname{erf}(\eta); \quad (9.2.1-21)$$

$$N_{(A)2} \Big|_{z_2=0} = -c\mathcal{D}_{(AB)} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} \Big|_{z_2=0} = -c \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{(AB)}}{4t}} \frac{dx_{(A)}}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = \\ = cx_{(A)\text{экв}} \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{(AB)}}{\pi t}}. \quad (9.2.1-22)$$

Сравнивая полученное уравнение с (9.2.1-20), увидим, что последнее выражение в скобках является поправкой для скорости испарения при наличии конвекции. Из табл. 9.2.1-1 видно, что этой конвективной поправкой можно пренебречь только в случае, когда начальный состав (при  $t=0 x_{(A)}=0$ ) приближается к равновесному  $x_{(A)\text{экв}}$ . Значение конвективной поправки станет понятнее, если указать, что для ацетона при  $25^\circ\text{C}$  и давлении  $1 \text{ кгс}/\text{см}^2$   $x_{\text{экв}}=0,3$ .

В § 9.3.1 и 9.3.2 остановимся подробнее на условиях, когда конвекцией можно пренебречь.

**9.2.2. Нестационарная диффузия при наличии гомогенной реакции первого порядка.** В момент  $t=0$  чистое вещество  $A$  приводится в со-прикосновение с жидкостью  $B$ . Вещество  $A$  диффундирует в жидкую фазу, где вступает в необратимую реакцию первого порядка  $A+B \rightarrow 2C$ . Требуется определить скорость поглощения газа  $A$  жидкой фазой. Для рассматриваемого промежутка времени можно считать, что вещества  $A$  и  $C$  присутствуют в жидком растворе в совершенно незначительных количествах.

Для упрощения анализа будем считать, что поверхность раздела жидкость — газ является плоскостью  $z_2=0$  и что жидкая фаза занимает полупространство  $z_2>0$ . Начальным условием будет:

$$\text{при } t=0 \text{ для всех } z_2>0 \quad x_{(A)}=0. \quad (9.2.2-1)$$

Поскольку жидккая и газовая фазы находятся в равновесии на поверхности раздела фаз, потребуем, чтобы при  $z_2=0$  для всех  $t>0$

$$x_{(A)}=x_{(A)\text{экв}}, \quad (9.2.2-2)$$

где величина  $x_{(A)_{\text{экв}}}$  считается заданной заранее. Если жидкость находится в непроницаемом сосуде, тогда при  $z_2 \rightarrow \infty$  для всех  $t$

$$v^* \rightarrow 0. \quad (9.2.2-3)$$

Поскольку мы рассматриваем разбавленный раствор жидкости, представляется целесообразным считать его идеальным, имеющим постоянную плотность  $\rho$ . Для этого разбавленного раствора введем:

$$c \approx \frac{\rho}{M_{(B)}}. \quad (9.2.2-4)$$

Тогда молярная плотность  $c$  также будет почти постоянной. Можно постулировать:

$$v^*_{(1)} = v^*_{(2)} = 0; v^*_{(2)} = v^*_{(2)}(t, z_2); x_{(A)} = x_{(A)}(t, z_2). \quad (9.2.2-5)$$

Из общего уравнения неразрывности (Б) табл. 8.3.2-1 найдем:

$$\partial v^*_{(2)} / \partial z_2 = 0, \quad (9.2.2-6)$$

откуда

$$v^*_{(2)} = v^*_{(2)}(t). \quad (9.2.2-7)$$

Для выполнения граничного условия (9.2.2-3) потребуем, чтобы повсюду

$$v^*_{(2)} = 0. \quad (9.2.2-8)$$

Теперь должно быть ясно, что мы сформулировали весьма частную задачу, в которой в соответствии с уравнением (9.2.2-8) число молей вещества  $B$  и  $C$ , покидающих жидкость через границу раздела фаз, должно быть в точности равно числу молей вещества  $A$ , покидающих жидкость. Мы ограничились такими физическими условиями, при которых поверхность раздела должна быть неподвижной в плоскости  $z_2 = 0$ , а жидкость ограничена непроницаемой стенкой при  $z_2 \rightarrow \infty$  [уравнение (9.2.2-3)]. В § 9.3.3 будет рассмотрена несколько более реальная задача.

Поскольку рассматривается распределение очень малой концентрации вещества  $A$  в идеальном тройном растворе, для описания вектора плотности потока массы воспользуемся уравнением (8.4.7-1)

$$N_{(A)} = c_{(A)} \mathbf{v}^* - c \mathcal{D}_{(Am)} \nabla x_{(A)}. \quad (9.2.2-9)$$

Задачу можно упростить еще больше, считая  $\mathcal{D}_{(Am)}$  постоянной. С учетом уравнений (9.2.2-5) и (9.2.2-7) — (9.2.2-9) из уравнения неразрывности (Б) табл. 8.2.2-5 для вещества  $A$  получим:

$$\frac{\partial x_{(A)}}{\partial t} = \mathcal{D}_{(Am)} \frac{\partial^2 x_{(A)}}{\partial z_2^2} + \frac{r_{(A)}}{c M_{(A)}}. \quad (9.2.2-10)$$

Поскольку мы имеем дело с необратимой гомогенной реакцией первого порядка, будем считать, что

$$\frac{r_{(A)}}{M_{(A)}} = -k'''_1 c_{(A)}. \quad (9.2.2-11)$$

Следовательно, искомое распределение концентрации для вещества A будет решением

$$\frac{\partial x_{(A)}}{\partial t} = \mathcal{D}_{(Am)} \frac{\partial^2 x_{(A)}}{\partial^2 z_2} - k'''_1 x_{(A)}, \quad (9.2.2-12)$$

удовлетворяющим как уравнению (9.2.2-1), так и (9.2.2-2). Преобразуем уравнение (9.2.2-12) по Лапласу:

$$sg = \mathcal{D}_{(Am)} \frac{\partial^2 g}{\partial^2 z_2} - k'''_1 g. \quad (9.2.2-13)$$

При этом

$$g = g(s, z_2) \equiv \mathcal{L}[x_{(A)}(t, z_2)]. \quad (9.2.2-14)$$

Легко заметить, что одним из решений уравнений (9.2.2-13) является

$$g \equiv A \exp(V\bar{K}z_2) + B \exp(-V\bar{K}z_2), \quad (9.2.2-15)$$

где

$$K \equiv \frac{s + k'''_1}{\mathcal{D}_{(Am)}}, \quad (9.2.2-16)$$

а постоянные A и B пока неизвестны. Поскольку необходимо, чтобы при  $z^*_2 \rightarrow \infty$  g было конечным,

сразу же получаем:

$$A = 0. \quad (9.2.2-18)$$

Для изображения g граничное условие (9.2.2-2) будет:

$$g = \frac{1}{s} x_{(A) \text{ экв}} \text{ при } z_2 = 0. \quad (9.2.2-19)$$

Следовательно,

$$B = \frac{1}{s} x_{(A) \text{ экв}}. \quad (9.2.2-20)$$

В итоге имеем:

$$g = \frac{1}{A} x_{(A) \text{ экв}} \exp(-V\bar{K}z_2). \quad (9.2.2-21)$$

Используя обратное преобразование Лапласа, получаем:

$$x_{(A)} = \mathcal{L}^{-1}[g] = x_{(A) \text{ экв}} \int_0^t \frac{z_2}{2 \sqrt{\pi \mathcal{D}_{(Am)} u^3}} \exp\left(-k'''_1 u - \frac{z_2^2}{4 \mathcal{D}_{(Am)} u}\right) du \quad (9.2.2-22)$$

или

$$\frac{x_{(A)}}{x_{(A) \text{ экв}}} = \frac{2}{V\pi} \int_{z_2/\sqrt{4\mathcal{D}_{(Am)} t}}^{\infty} \exp\left(-\lambda^2 - \frac{k'''_1 z_2^2}{4\mathcal{D}_{(Am)} \lambda^2}\right) d\lambda. \quad (9.2.2-23)$$

Учитывая, что [8]

$$\frac{4}{V\pi} \int_r^{\infty} \exp\left(-\lambda^2 - \frac{a^2}{\lambda^2}\right) d\lambda = e^{za} \operatorname{erfc}\left(r + \frac{a}{r}\right) + e^{-za} \operatorname{erfc}\left(r - \frac{a}{r}\right), \quad (9.2.2-24)$$

можно записать уравнение (9.2.2-23) в более удобной форме [9]:

$$\frac{2x_{(A)}}{x_{(A)} \text{ при } z_2=0} = \exp\left(z_2 \sqrt{\frac{k''''_1}{\mathcal{D}_{(Am)}}}\right) \operatorname{erfc}(\zeta + V k''''_1 t) + \\ + \exp\left(-z_2 \sqrt{\frac{k''''_1}{\mathcal{D}_{(Am)}}}\right) \operatorname{erfc}(\zeta - V k''''_1 t). \quad (9.2.2-25)$$

При этом вводится элементарная функция ошибок:

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{V\pi} \int_x^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda \quad (9.2.2-26)$$

и

$$\zeta = \frac{z_2}{V^{4\mathcal{D}_{(Am)}} t}. \quad (9.2.2-27)$$

Сейчас попытаемся определить скорость поглощения вещества  $A$  жидкой фазой. Это эквивалентно нахождению плотности потока массы вещества  $A$ , проходящего через поверхность раздела жидкость — газ:

$$N_{(A)2}|_{z_2=0} = -c\mathcal{D}_{(Am)} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2}|_{z_2=0} = \\ = cx_{(A) \text{ экв}} \sqrt{k''''_1 \mathcal{D}_{(Am)}} \left[ \operatorname{erf} V k''''_1 t + \frac{\operatorname{erf}(-k''''_1 t)}{V\pi k''''_1 t} \right]. \quad (9.2.2-28)$$

Общее количество вещества  $A$ , поглощенного за время от  $t=0$  до  $t=t_0$ , будет:

$$\int_0^{t_0} N_{(A)2}|_{z_2=0} dt = cx_{(A) \text{ экв}} \sqrt{k''''_1 \mathcal{D}_{(Am)}} \left[ \left(t_0 + \frac{1}{2k''''_1}\right) \operatorname{erf} V k''''_1 t_0 + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{t_0}{\pi k''''_1}} \exp(-k''''_1 t_0) \right]. \quad (9.2.2-29)$$

В пределе будем иметь при  $k''''_1 t_0 \rightarrow \infty$ :

$$\int_0^{t_0} N_{(A)2}|_{z_2=0} dt \rightarrow cx_{(A) \text{ экв}} \sqrt{k''''_1 \mathcal{D}_{(Am)}} \left( t_0 + \frac{1}{2k''''_1} \right). \quad (9.2.2-30)$$

**9.2.3. Нестационарная диффузия при медленной катализитической реакции.** Газообразная смесь веществ  $A$  и  $B$  приводится в соприкосновение с твердой поверхностью, являющейся катализатором для реакции изомеризации  $A \rightarrow B$ . Требуется определить расход вещества  $A$ .

Для максимального упрощения задачи будем считать, что поверхность раздела твердое тело — газ лежит в плоскости  $z_2=0$ , а газ занимает полупространство  $z_2 > 0$ . Начальным условием будет:

$$\text{при } t=0 \quad x_{(A)} = x_{(A)0} \quad \text{для всех } z_2 > 0. \quad (9.2.3-1)$$

На поверхности раздела твердое тело — газ происходит реакция изомеризации. Эту катализитическую реакцию можно считать реакцией первого порядка:

$$\text{при } z_2=0 \quad N_{(A)2} = -N_{(B)2} = -k''_1 c_{(A)} \quad \text{для всех } t > 0. \quad (9.2.3-2)$$

Так как мы рассматриваем смесь идеальных газов при постоянном давлении и температуре, молярную плотность  $c$  также можно считать постоянной.

Поэтому постулируем:

$$v^*_1 = v^*_3 = 0; \quad v^*_2 = v^*_2(t, z_2); \quad x_{(A)} = x_{(A)}(t, z_2). \quad (9.2.3-3)$$

Из общего уравнения неразрывности (Б) табл. 8.3.2-1 следует, что

$$\partial v^*_2 / \partial z_2 = 0, \quad (9.2.3-4)$$

откуда

$$v^*_2 = v^*_2(t). \quad (9.2.3-5)$$

Исходя из уравнения (9.2.3-2) и определения среднемолярной скорости  $v^*$ , можно утверждать, что при  $z_2 = 0$

$$v^*_2 = \frac{1}{c} (N_{(A)} + N_{(B)}) = 0 \text{ для всех } t > 0. \quad (9.2.3-6)$$

Уравнения (9.2.3-5) и (9.2.3-6) позволяют заключить, что во всей газовой фазе

$$v^*_2 = 0 \text{ для } t > 0. \quad (9.2.3-7)$$

Будем считать коэффициент диффузии постоянным. С учетом уравнений (9.2.3-3) и (9.2.3-7) и первого закона Фика (Г) табл. 8.4.6-2 можно записать уравнение неразрывности для вещества  $A$  в виде

$$\frac{\partial x_{(A)}}{\partial t} = D_{(AB)} \frac{\partial^2 x_{(A)}}{\partial z_2^2}. \quad (9.2.3-8)$$

Будем искать решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (9.2.3-1) и (9.2.3-2). Очень удобно воспользоваться граничным условием (9.2.3-7), переписав его в виде

$$\text{при } z_2 = 0 \quad \frac{D_{AB}}{k''_{(A)}} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} = x_A \text{ для всех } t > 0. \quad (9.2.3-9)$$

Введем безразмерные переменные:

$$t^* \equiv \frac{(k''_{(A)})^2}{D_{(AB)}} t; \quad z_2^* \equiv \frac{k''_{(A)} z_2}{D_{(AB)}}, \quad x_{(A)}^{**} \equiv \frac{x_{(A)}}{x_{(A)}|_0}. \quad (9.2.3-10)$$

При этом уравнения (9.2.3-1), (9.2.3-8) и (9.2.3-9) соответственно принимают вид:

$$\frac{\partial x_{(A)}^{**}}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 x_{(A)}^{**}}{\partial z_2^{*2}}, \quad (9.2.3-11)$$

$$\text{при } t^* = 0 \quad x_{(A)}^{**} = 1 \text{ для всех } z_2^* > 0; \quad (9.2.3-12)$$

$$\text{при } z_2^* = 0 \quad \frac{\partial x_{(A)}^{**}}{\partial z_2^{*2}} = x_{(A)}^{**} \text{ для всех } t^* > 0. \quad (9.2.3-13)$$

Теперь совершенно очевидно, что эта задача аналогична случаю, рассмотренному в § 6.2.3. Следовательно, используя полученный результат, можно представить распределение концентрации в виде

$$x_{(A)}^{**} = \operatorname{erf} \left( \frac{z_2^*}{\sqrt{4t^*}} \right) + \exp(z_2^* + t^*) \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z_2^*}{\sqrt{4t^*}} + \sqrt{t^*} \right) \right]. \quad (9.2.3-14)$$

Тогда из уравнений (9.2.3-2) и (9.2.3-14) легко найдем расход вещества  $A$ :

$$-N_{(A)2}|_{z_1=0} = k''_{(A)} c_{(A)}|_{z_1=0} = k''_{(A)} c x_{(A)0} \exp\left(\frac{(k''_{(A)})^2 t}{\mathcal{D}_{(AB)}}\right) \times \\ \times \left[1 - \operatorname{erf}\left(k''_{(A)} \sqrt{\frac{t}{\mathcal{D}_{(AB)}}}\right)\right]. \quad (9.2.3-15)$$

**9.2.4. Термодиффузия в эксперименте с двумя колбами.** На рис. 9.2.4-1 показаны две колбы, соединенные изолированной трубкой. В левой колбе поддерживается постоянная температура  $T_1$ , в правой — постоянная температура  $T_2$ . Диаметр трубки очень мал, чтобы пренебречь тепловой конвекцией. Найдем соотношение между составами в этих колбах в стационарном состоянии.

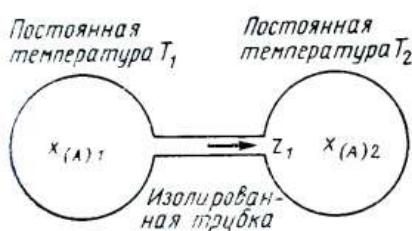


Рис. 9.2.4-1. Градиент молярной концентрации вещества  $A$ , возникающий в стационарном состоянии в результате равновесия тепловой и обычной диффузии.

Поскольку система является замкнутой, стационарной, можно принять:

$$\mathbf{v} = 0; x_{(A)} = x_{(A)}(z_1); T = T(z_1). \quad (9.2.4-1)$$

Из уравнения неразрывности (В) табл. 8.2.2-5 для вещества  $A$  найдем:

$$\partial j_{(A)1}/\partial z_1 = 0. \quad (9.2.4-2)$$

Учитывая замкнутость системы, получаем:

$$j_{(A)1} = 0. \quad (9.2.4-3)$$

С учетом уравнения (8.4.6-8) для идеального раствора при данных условиях в соответствии с уравнением (8.4.6-6) будем иметь:

$$j_{(A)1} = - \left( \frac{c^2}{\rho} \right) M_{(A)} M_{(B)} \mathcal{D}_{(AB)} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_1} - D_{(A)}^T \frac{\partial \ln T}{\partial z_1} = 0 \quad (9.2.4-4)$$

Для газов [14]

$$\frac{\rho D_{(A)}^T}{c^2 M_{(A)} M_{(B)} \mathcal{D}_{(AB)}} = \alpha x_{(A)} x_{(B)}, \quad (9.2.4-5)$$

где коэффициент термодиффузии  $\alpha$  практически не зависит от концентраций.

Из уравнений (9.2.4-4) и (9.2.4-5) следует, что

$$\frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_1} + \alpha x_{(A)} x_{(B)} \frac{\partial \ln T}{\partial z_1} = 0. \quad (9.2.4-6)$$

Проинтегрировав это выражение, легко найдем:

$$\int_{x_{(A)1}}^{x_{(A)2}} \frac{dx_{(A)}}{x_{(A)}(1-x_{(A)})} = -\alpha \int_{T_1}^{T_2} d \ln T; \\ \frac{x_{(A)1}}{x_{(A)2}} \frac{1-x_{(A)2}}{1-x_{(A)1}} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^\alpha. \quad (9.2.4-7)$$

При интегрировании коэффициент  $a$  считался постоянным. В то время как он практически не зависит от концентрации, его температурная зависимость может быть очень сложной. Целесообразно [15] рассчитывать значение  $a$  в уравнении (9.2.4-7) при средней температуре  $T_m$ :

$$T_m \equiv \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (9.2.4-8)$$

Если колбы, изображенные на рис. 9.2.4-1, имеют одинаковый объем, если мы можем пренебречь объемом газа в соединительной трубке и если начальный равномерный состав газа есть  $x_{(A)0}$ , можно утверждать, что

$$x_{(A)1} + x_{(A)2} = 2x_{(A)0}. \quad (9.2.4-9)$$

Уравнения (9.2.4-7) и (9.2.4-9) необходимо решить относительно двух неизвестных  $x_{(A)1}$  и  $x_{(A)2}$ .

**9.2.5. Бародиффузия в скважине природного газа<sup>1</sup>.** Скважина природного газа, имеющая глубину  $L$ , была закрыта некоторое время. Молярная концентрация  $x_{(A)0}$  вещества  $A$  и давление  $P_0$  в верхней части скважины известны. Требуется определить состав и давление на дне скважины.

Для упрощения анализа будем считать газ в скважине бинарной смесью веществ  $A$  и  $B$ , температуру во всей скважине одинаковой, а газовую смесь — подчиняющейся закону идеального газа, т. е. идеальным раствором.

Поскольку система является замкнутой и в ней не происходит никаких изменений с течением времени, можно постулировать:

$$\mathbf{v} = 0; \quad x_{(A)} = x_{(A)}(z_3); \quad P = P(z_3). \quad (9.2.5-1)$$

При этом считается, что сила тяжести действует в направлении  $z_3$ . Из уравнения неразрывности (В) табл. 8.2.2-5 для вещества  $A$  получим:

$$\partial j_{(A)3} / \partial z_3 = 0. \quad (9.2.5-2)$$

Поскольку система является замкнутой, то

$$j_{(A)3} = 0. \quad (9.2.5-3)$$

С учетом уравнений (8.4.6-8) для идеального раствора при данных условиях в соответствии с уравнением (8.4.6-6) будем иметь:

$$j_{(A)3} = - \left( \frac{c^2}{\rho} \right) M_{(A)} M_{(B)} \mathcal{D}_{(AB)} \left[ \frac{dx_{(A)}}{dz_3} + \frac{M_{(A)} x_{(A)}}{RT} \left( \frac{\bar{\bar{V}}_{(A)}^{(m)}}{M_{(A)}} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{dP}{dz_3} \right] = 0 \quad (9.2.5-4)$$

или

$$\frac{dx_{(A)}}{dz_3} = - \frac{M_{(A)} x_{(A)}}{RT} \left( \frac{\bar{\bar{V}}_{(A)}^{(m)}}{M_{(A)}} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{dP}{dz_3}. \quad (9.2.5-5)$$

Используя закон идеального газа, находим:

$$\bar{\bar{V}}_{(A)}^{(m)} = \bar{\bar{V}}_{(B)}^{(m)} = \tilde{V} RT / P. \quad (9.2.5-6)$$

<sup>1</sup> Эта задача сформулирована проф. Дж. М. Брауном. Химико-технологическое отделение Северо-Западного университета, Эванстон, Иллинойс, США.

В соответствии с первым законом Коши необходимо, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial z_3} = \rho g. \quad (9.2.5-7)$$

Уравнения (9.2.5-6) и (9.2.5-7) позволяют представить (9.2.5-5) в виде

$$\frac{dx_{(A)}}{dz_3} = -\frac{g x_{(A)}}{RT} \left( \frac{RT\rho}{R} - M_{(A)} \right). \quad (9.2.5-8)$$

Кроме того, закон идеального газа требует, чтобы

$$\frac{RT\rho}{P} = x_{(A)} M_{(A)} + x_{(B)} M_{(B)}, \quad (9.2.5-9)$$

поэтому, исключив  $\rho$  и  $P$  из (9.2.5-8), получим:

$$\frac{dx_{(A)}}{dz_3} = \frac{g x_{(A)}}{RT} (M_{(A)} - M_{(B)}) (1 - x_{(A)}). \quad (9.2.5-10)$$

Проинтегрировав это выражение

$$\int_{x_{(A)0}}^{x_{(A)}} \frac{dx_{(A)}}{x_{(A)} (1 - x_{(A)})} = \frac{g}{RT} (M_{(A)} - M_{(B)}) \int_0^{z_3} dz_3, \quad (9.2.5-11)$$

легко найдем:

$$\frac{1 - x_{(A)0}}{x_{(A)0}} \frac{x_{(A)}}{1 - x_{(A)}} = \exp \left( \frac{gz_3}{RT} [M_{(A)} - M_{(B)}] \right). \quad (9.2.5-12)$$

Очевидно, что состав на дне скважины при  $z = L$  будет:

$$x_{(A)} = \frac{x_{(A)0} \exp ([gL/RT] [M_{(A)} - M_{(B)}])}{1 - x_{(A)0} + x_{(A)0} \exp ([gL/RT] [M_{(A)} - M_{(B)}])}. \quad (9.2.5-13)$$

Из уравнений (9.2.5-7) и (9.2.5-9) следует, что

$$\frac{dP}{dx_{(A)}} \frac{dx_{(A)}}{dz_3} = \frac{dP}{dz_3} = \rho g = \frac{gP}{RT} (M_{(A)} x_{(A)} + M_{(B)} x_{(B)}). \quad (9.2.5-14)$$

С учетом уравнения (9.2.5-10) полученное соотношение можно представить в виде

$$\frac{dP}{dx_{(A)}} = \frac{[x_{(A)} (M_{(A)} - M_{(B)}) + M_{(B)}] P}{x_{(A)} (1 - x_{(A)}) (M_{(A)} - M_{(B)})}. \quad (9.2.5-15)$$

Проинтегрировав его, найдем:

$$\frac{P}{P_0} = \left( \frac{x_{(A)}}{x_{(A)0}} \right)^{M_{(B)}/(M_{(A)} - M_{(B)})} \left( \frac{1 - x_{(A)0}}{1 - x_{(A)}} \right)^{M_{(A)}/(M_{(A)} - M_{(B)})}, \quad (9.2.5-16)$$

или с учетом соотношения (9.2.5-12)

$$\frac{x_{(A)} P}{x_{(A)0} P_0} = \exp \frac{gz_3 M_{(A)}}{RT}. \quad (9.2.5-17)$$

Давление на дне скважины при  $z=L$  равно:

$$\frac{P}{P_0} = \left\{ 1 - x_{(A)0} + x_{(A)0} \exp\left(\frac{gL}{RT} [M_{(A)} - M_{(B)}]\right) \right\} \times \\ \times \frac{\exp(gLM_{(A)}/RT)}{\exp([gL/RT] [M_{(A)} - M_{(B)}])}. \quad (9.2.5-18)$$

**9.2.6. Вынужденная диффузия в электрохимических системах.** Вынужденной диффузией называется такой процесс, в котором отдельные вещества в растворе подвергаются воздействию внешних сил разной величины. В результате различия этих сил разные вещества получают неодинаковое ускорение и таким образом происходит разделение.

Самым распространенным примером вынужденной диффузии является воздействие электрического поля на раствор солей. При растворении соли, например  $\text{AgNO}_3$ , в воде происходит ее ионизация. Такой раствор можно с полным основанием рассматривать как тройной, а не двойной. Будем считать  $\text{Ag}^+$  и  $\text{NO}_3^-$  отдельными веществами. Необходимость такого рассмотрения становится очевидной при наложении электрического поля. Тогда силы, действующие на  $\text{Ag}^+$  и  $\text{NO}_3^-$ , кроме силы тяжести, будут иметь различное направление.

Для упрощения эффектами баро- и термодиффузии пренебрегаем. Кроме того, ограничимся рассмотрением разбавленных растворов, которые описываются уравнением (8.4.7-1) в упрощенном виде:

$$\mathbf{N}_{(A)} = -c \mathcal{D}_{(Am)} \left[ \nabla x_{(A)} + \frac{M_{(A)} x_{(A)}}{RT} \left( -\mathbf{f}_{(A)} + \sum_{B=1}^N \omega_{(B)} \mathbf{f}_{(B)} \right) \right] + c_{(A)} \mathbf{v} \blacktriangleleft. \quad (9.2.6-1)$$

К этому раствору приложено электрическое поле с электростатическим потенциалом  $\Phi$ . При таких условиях ионы вещества  $A$  находятся под воздействием двух внешних сил — силы тяжести и электрического поля:

$$\mathbf{f}_{(A)} = \mathbf{g} - \frac{\epsilon_{(A)}}{m_{(A)}} \nabla \Phi, \quad (9.2.6-2)$$

где  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести;  $\epsilon_{(A)}$  — ионный заряд, а  $m_{(A)}$  — масса иона. В принципе мы должны удовлетворить уравнению неразрывности для всех веществ, входящих в раствор, совместимому с выражениями (9.2.6-1), граничными условиями и уравнением Пуассона для электростатического потенциала  $\Phi$ . Однако на практике уравнение Пуассона можно не учитывать, считая раствор электронейтральным:

$$\sum_{A=1}^N a_{(A)} c_{(A)} = 0, \quad (9.2.6-3)$$

где  $a_{(A)}$  — валентность или заряд вещества  $A$ . В работе [17] это допущение электронейтральности хорошо обосновано. Следовательно, при нашем подходе к решению задачи для электрохимического раствора при наличии электрического поля уравнение неразрывности, совместимое с выражениями (9.2.6-1) и (9.2.6-3), удовлетворяется.

Простейшим случаем такой задачи является бинарный раствор электролита. Под бинарным электролитом мы понимаем раствор одной соли, содержащий катионы одного вида (+) и анионы одного вида

(—). Пусть  $v_{(+)}$  и  $v_{(-)}$  — число катионов и анионов, образовавшихся в результате диссоциации одной молекулы электролита. Отсюда, определив

$$\kappa \equiv \frac{c_{(+)}}{v_{(+)}} = \frac{c_{(-)}}{v_{(-)}}, \quad (9.2.6-4)$$

можно автоматически удовлетворить условию электронейтральности (9.2.6-3). При отсутствии гомогенных химических реакций можно записать уравнение неразрывности для катиона и аниона в виде

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{N_{(+)}}{v_{(+)}} = 0 \quad (9.2.6-5)$$

и

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{N_{(-)}}{v_{(-)}} = 0. \quad (9.2.6-6)$$

Так как мы рассматриваем разбавленный раствор, в соответствии с уравнением (9.2.6-1) для этих двух ионов будем иметь:

$$\frac{N_{(+)}}{v_{(+)}} = -\mathcal{D}_{(+m)} \left( \nabla \kappa + \frac{\kappa \epsilon_{(+)}}{kT} \nabla \Phi \right) + \kappa v^{\star} \quad (9.2.6-7)$$

и

$$\frac{N_{(-)}}{v_{(-)}} = -\mathcal{D}_{(-m)} \left( \nabla \kappa + \frac{\kappa \epsilon_{(-)}}{kT} \nabla \Phi \right) + \kappa v^{\star}. \quad (9.2.6-8)$$

Здесь  $k = R/\tilde{N}$  — постоянная Больцмана, а  $\tilde{N}$  — число Авогадро. Вычитая (9.2.6-8) из уравнения (9.2.6-7) и преобразуя результат, получаем

$$\begin{aligned} \frac{-\mathcal{D}_{(+m)} \kappa \epsilon_{(+)}}{kT} \nabla \Phi &= \frac{\epsilon_{(+)} \mathcal{D}_{(+m)}}{\epsilon_{(+)} \mathcal{D}_{(+m)} - \epsilon_{(-)} \mathcal{D}_{(-m)}} \left( \frac{N_{(+)}}{v_{(+)}} - \frac{N_{(-)}}{v_{(-)}} \right) + \\ &+ \frac{\epsilon_{(+)} \mathcal{D}_{(+m)} (\mathcal{D}_{(+m)} - \mathcal{D}_{(-m)})}{\epsilon_{(+)} \mathcal{D}_{(+m)} - \epsilon_{(-)} \mathcal{D}_{(-m)}} \nabla \kappa. \end{aligned} \quad (9.2.6-9)$$

Это уравнение позволяет определить электростатический потенциал  $\Phi$  из уравнений (9.2.6-7) и (9.2.6-9). После некоторых преобразований находим:

$$\frac{1}{a_{(+)} \mathcal{D}_{(+m)} - a_{(-)} \mathcal{D}_{(-m)}} \left( \frac{a_{(+)} \mathcal{D}_{(+m)}}{v_{(-)}} N_{(-)} - \frac{a_{(-)} \mathcal{D}_{(-m)}}{v_{(+)}} N_{(+)} \right) = -D \nabla \kappa + \kappa v^{\star}, \quad (9.2.6-10)$$

где

$$D \equiv \frac{\mathcal{D}_{(+m)} \mathcal{D}_{(-m)} (a_{(+)} - a_{(-)})}{a_{(+)} \mathcal{D}_{(+m)} - a_{(-)} \mathcal{D}_{(-m)}}. \quad (9.2.6-11)$$

Взяв дивергенцию уравнения (9.2.6-10) и использовав выражения (9.2.6-5) и (9.2.6-6), в конце концов находим:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \operatorname{div} (\kappa v^{\star}) = D \operatorname{div} \nabla \kappa, \quad (9.2.6-12)$$

Полученные результаты, как и уравнение (8.4.7-1), могут применяться для разбавленных растворов, а также в случаях, описанных в § 8.4.7. Для разбавленных растворов оказывается, что с практическим

постоянно, а уравнение (9.2.6-12) можно еще больше упростить, приведя к виду:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = D \operatorname{div} \nabla \mathbf{x} \quad (9.2.6-13)$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = D \operatorname{div} \nabla \mathbf{x}. \quad (9.2.6-14)$$

Для разбавленного бинарного раствора электролита необходимо решить уравнения (9.2.6-13) или (9.2.6-14), удовлетворяющие общему уравнению неразрывности и соответствующим граничным условиям. Полученное решение для  $\mathbf{x}$  можно связать с искомым распределением концентраций с помощью уравнения (9.2.6-4).

Более подробное описание процессов переноса в растворах электролитов для всевозможных граничных условий приводится в работе Ньюмена [17] и Левича [18].

**9.2.7. Стационарное испарение через многокомпонентную неподвижную пленку.** Рассмотрим систему: чистая жидкость  $A$  испаряется в окружающую атмосферу, представляющую собой смесь идеальных газов  $E$  и  $F$ . Система построена таким образом, что поверхность раздела жидкость — газ при испарении остается неподвижной. Вещества  $E$  и  $F$  нерастворимы в жидкости  $A$ :

$$N_{(E)2} = N_{(F)2} = 0 \text{ при } z_2 = 0. \quad (9.2.7-1)$$

Для данных условий равновесный состав газовой фазы будет  $x_{(A)\text{экв}}$ :

$$x_{(A)} = x_{(A)\text{экв}} \text{ при } z_2 = 0. \quad (9.2.7-2)$$

Состав газовой фазы в верхней части колонки не изменяется:

$$x_{(E)} = x_{(E)(L)}; x_{(F)} = x_{(F)(L)} \text{ при } z_2 = L. \quad (9.2.7-3)$$

Требуется определить скорость испарения  $A$  с поверхности.

Сначала найдем распределение молярной концентрации каждого вещества в газовой фазе. Если рассматриваемая смесь идеальных газов находится при постоянной температуре и давлении (гидростатическими эффектами пренебрегаем), то общая молярная плотность также постоянна, поэтому будем искать решение этой задачи в виде

$$v_2^{\star} = v_2^{\star}(z_2); v_1^{\star} = v_3^{\star} = 0; \quad (9.2.7-4)$$

$$x_{(E)} = x_{(E)}(z_2) \quad (9.2.7-5)$$

и

$$x_{(F)} = x_{(F)}(z_2). \quad (9.2.7-6)$$

Отсюда непосредственно следует вывод, что только  $z_2$ -компоненты  $N_{(A)}$ ,  $N_{(E)}$ ,  $N_{(F)}$  не равны нулю. Из уравнений неразрывности для этих веществ, а также выражения (9.2.7-1) заключаем, что

$$N_{(A)2} = \text{const}; N_{(E)2} = N_{(F)2} = 0. \quad (9.2.7-7)$$

Если пренебречь всеми эффектами термо-, баро- и вынужденной диффузии, найдем, что для идеального газа обобщенное уравнение

Стефана — Максвелла (8.4.5-14) сводится к соотношению

$$\nabla x_{(C)} = \sum_{B=1}^N \frac{1}{c\mathcal{D}_{(CB)}} (x_{(C)} \mathbf{N}_{(B)} - x_{(B)} \mathbf{N}_{(C)}). \quad (9.2.7-8)$$

С учетом уравнений (9.2.7-7) из соотношения (9.2.7-8) получим для веществ  $E$  и  $F$

$$\frac{dx_{(E)}}{dz_2} = \frac{N_{(A)2}}{c\mathcal{D}_{(AE)}} x_{(E)}, \quad (9.2.7-9)$$

и

$$\frac{dx_{(F)}}{dz_2} = \frac{N_{(A)2}}{c\mathcal{D}_{(AF)}} x_{(F)}. \quad (9.2.7-10)$$

Можно проинтегрировать соотношения (9.2.7-9) и (9.2.7-10) с граничными условиями (9.2.7-3). Тогда найдем:

$$x_{(E)}/x_{(E)L} = \exp(-\alpha [1 - z_2/L]) \quad (9.2.7-11)$$

и

$$x_{(F)}/x_{(F)L} = \exp(-\alpha\beta [1 - z_2/L]). \quad (9.2.7-12)$$

Здесь

$$\alpha \equiv N_{(A)2} L / c\mathcal{D}_{(AE)} \quad (9.2.7-13)$$

и

$$\beta \equiv \mathcal{D}_{(AE)} / \mathcal{D}_{(AF)}. \quad (9.2.7-14)$$

Если  $\alpha$  и  $\beta$  известны, молярную концентрацию в газовой фазе можно определить по формулам (9.2.7-11) и (9.2.7-12).

Нашей основной целью является определение  $\alpha$  и  $N_{(A)2}$ . Это можно сделать, удовлетворив уравнения (9.2.7-11) и (9.2.7-12) условию (9.2.7-2):

$$x_{(A) \text{экв}} = 1 - x_{(E)L} \exp(-\alpha) - x_{(F)L} \exp(-\alpha\beta). \quad (9.2.7-15)$$

При заданном  $\beta$  можно окончательно решить уравнение (9.2.7-15) для  $\alpha$ .

Более подробно задачи обычной многокомпонентной диффузии рассмотрены в работах [19—24].

Рис. 9.2.8-1. Конденсация смеси паров.

**9.2.8. Конденсация смеси паров [5].** На рис. 9.2.8-1 показана непрерывная конденсация хлороформа и бензола из идеальной смеси при давлении 1 кгс/см<sup>2</sup>. Требуется связать состав конденсата с общей молярной скоростью конденсации и плотностью потока энергии к пленке конденсата.

Пусть

$$x_{(B)} = x_{(B)}(z_2); \quad x_{(C)} = x_{(C)}(z_2); \quad (9.2.8-1)$$

$$v_1^\star = v_3^\star = 0, \quad v_2^\star = v_2^\star(z_2). \quad (9.2.8-2)$$

Из общего уравнения неразрывности находим:

$$v_* = \text{const.} \quad (9.2.8-3)$$

С учетом соотношений (9.2.8-1) и (9.2.8-2) в соответствии с законом Фика будем иметь:

$$N_{(B)1} = N_{(B)3} = 0; \quad N_{(B)2} = N_{(B)2}(z_2). \quad (9.2.8-4)$$

Из уравнения неразрывности для вещества  $B$  получим:

$$N_{(B)2} = \text{const}. \quad (9.2.8-5)$$

Аналогично будем иметь:

$$N_{(C)1} = N_{(C)3} = 0; \quad N_{(C)2} = N_{(C)2}(z_2). \quad (9.2.8-6)$$

Целесообразно считать отношение концентрации бензола к концентрации хлороформа в конденсате равным отношению скоростей конденсации:

$$\frac{N_{(B)2}}{N_{(C)2}} = \frac{x_{(B) \text{ конд}}}{x_{(C) \text{ конд}}}. \quad (9.2.8-7)$$

Поэтому мы можем переписать  $z_2$ -компоненту из уравнения первого закона Фика в виде

$$\frac{N_{(B)2}}{c\mathcal{D}_{(BC)}} = -\frac{1}{1 - (x_{(B)}/x_{(B) \text{ конд}})} \frac{dx_{(B)}}{dz_2}. \quad (9.2.8-8)$$

Полученное выражение можно в свою очередь проинтегрировать при граничных условиях:

$$x_{(B)} = x_{(B)}^*; \quad x_{(C)} = x_{(C)}^* \text{ при } z_2 = 0 \quad (9.2.8-9)$$

и

$$x_{(B)} = x_{(B)L}; \quad x_{(C)} = x_{(C)L} \text{ при } z_2 = L. \quad (9.2.8-10)$$

В результате получим:

$$\frac{N_{(B)2}L}{c\mathcal{D}_{(BC)}x_{(B) \text{ конд}}} = \ln \left| \frac{x_{(B) \text{ конд}} - x_{(B)L}}{x_{(B) \text{ конд}} - x_{(B)}^*} \right|. \quad (9.2.8-11)$$

Аналогично можно найти:

$$\frac{N_{(C)2}L}{c\mathcal{D}_{(BC)}x_{(C) \text{ конд}}} = \ln \left| \frac{x_{(C) \text{ конд}} - x_{(C)L}}{x_{(C) \text{ конд}} - x_{(C)}^*} \right|. \quad (9.2.8-12)$$

Если нас прежде всего интересует общая молярная скорость конденсации, то из уравнения (9.2.8-7) имеем:

$$v_2^* = \frac{N_{(B)2}}{cx_{(B) \text{ конд}}} = \frac{N_{(C)2}}{cx_{(C) \text{ конд}}} = \quad (9.2.8-13)$$

$$= \frac{\mathcal{D}_{(BC)}}{L} \ln \left| \frac{x_{(B) \text{ конд}} - x_{(B)L}}{x_{(B) \text{ конд}} - x_{(B)}^*} \right| = \frac{\mathcal{D}_{(BC)}}{L} \ln \left| \frac{x_{(C) \text{ конд}} - x_{(C)L}}{x_{(C) \text{ конд}} - x_{(C)}^*} \right|. \quad (9.2.8-14)$$

Дифференциальное соотношение баланса энергии ( $K$ ) из табл. 8.3.5-1 можно для данного случая значительно упростить, если

пренебречь вязкой диссипацией, градиентом давления и кинетической энергией диффузии:

$$\operatorname{div} \left( \sum_{A=1}^N \overline{\overline{H}}_{(A)}^{(m)} \mathbf{N}_{(A)} + \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \overline{\overline{H}}_{(A)}^{(m)} \mathbf{J}_{(A)} \right) = 0. \quad (9.2.8-15)$$

Из § 8.4.4 известно, что поток тепловой энергии можно представить в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \left( \overline{\overline{H}}_{(A)} + \frac{1}{2} u_{(A)}^2 \right) \mathbf{j}_{(A)} = \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \overline{\overline{H}}_{(A)}^{(m)} \mathbf{J}_{(A)} = -k \nabla T, \quad (9.2.8-16)$$

где мы снова пренебрегаем кинетической энергией диффузии.

Исходя из уравнений (9.2.8-1) и (9.2.8-2), можно считать:

$$T = T(z_2). \quad (9.2.8-17)$$

Тогда из соотношений (9.2.8-15) и (9.2.8-16) получаем:

$$\sum_{A=1}^N \overline{\overline{H}}_{(A)}^{(m)} N_{(A)2} - k \frac{dT}{dz_2} = C_1 = \text{const.} \quad (9.2.8-18)$$

Если измерить энталпию для чистых жидкостей при температуре насыщения  $T_0$ , то парциальная молярная энталпия бензола и хлорформа в смеси идеальных газов будет равна:

$$\overline{\overline{H}}_{(B)}^{(m)} = \tilde{c}_{P(B)} (T - T_0) + \tilde{\lambda}_{(B)} \quad (9.2.8-19)$$

и

$$\overline{\overline{H}}_{(C)}^{(m)} = \tilde{c}_{P(C)} (T - T_0) + \tilde{\lambda}_{(C)}. \quad (9.2.8-20)$$

Здесь  $\tilde{c}_{P(A)}$  и  $\tilde{\lambda}_{(A)}$  — молярная изобарная теплоемкость и молярная теплота испарения вещества  $A$ . С помощью этих выражений можно преобразовать уравнение (9.2.8-18) к виду:

$$k \frac{dT}{dz_2} = c v_2 \tilde{c}_{P, \text{ смесь}} (T - T_0) + c v_2 \tilde{\lambda}_{\text{ смесь}} - C_1, \quad (9.2.8-21)$$

где для удобства введем:

$$\tilde{c}_{P, \text{ смесь}} = x_{(B) \text{ конд}} \tilde{c}_{P(B)} + x_{(C) \text{ конд}} \tilde{c}_{P(C)} \quad (9.2.8-22)$$

и

$$\tilde{\lambda}_{\text{ смесь}} = x_{(B) \text{ конд}} \tilde{\lambda}_{(B)} + x_{(C) \text{ конд}} \tilde{\lambda}_{(C)}. \quad (9.2.8-23)$$

Наконец, проинтегрировав уравнение (9.2.8-21) с граничными условиями

$$T - T_0 \text{ при } z_2 = 0 \quad (9.2.8-24)$$

и

$$T - T_L \text{ при } z_2 = L, \quad (9.2.8-25)$$

найдем:

$$\frac{T - T_0}{T_L - T_0} = \frac{1 - \exp(-z_2 A/L)}{1 - \exp(-A)}, \quad (9.2.8-26)$$

где

$$A \equiv \frac{-cv_2 \tilde{\lambda}_{\text{смесь}} L}{k}. \quad (9.2.8-27)$$

Из уравнения (К) табл. 8.3.5-1 следует, что плотность потока тепловой энергии в неподвижной системе координат равна:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{e} + \sum_{A=1}^N \overline{\overline{H}}_{(A)} \mathbf{n}_{(A)} = \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \overline{\overline{H}}_{(A)} \mathbf{j}_{(A)} + \sum_{A=1}^N \overline{\overline{H}}_{(A)} \mathbf{n}_{(A)} = \\ &= \mathbf{q} + \sum_{A=1}^N \rho_{(A)} \overline{\overline{H}}_{(A)} \mathbf{v} = \mathbf{q} + \rho \hat{H} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (9.2.8-28)$$

С помощью определяющего уравнения, предложенного в § 8.4.4, можно привести это выражение к виду:

$$\mathbf{e} = -k \nabla T + \sum_{A=1}^N \overline{\overline{H}}_{(A)}^{(m)} \mathbf{N}_{(A)}. \quad (9.2.8-29)$$

Плотность потока тепловой энергии в пленке конденсата найдем из уравнений (9.2.8-19), (9.2.8-20) и (9.2.8-26) для  $z_2=0$ :

$$-e_2 = k \frac{dT}{dz_2} - cv_2 \tilde{\lambda}_{\text{смесь}} = \frac{Ak(T_L - T_0)}{L[1 - \exp(-A)]} - cv_2 \tilde{\lambda}_{\text{смесь}}. \quad (9.2.8-30)$$

Это выражение потока тепловой энергии в пленке конденсата можно использовать для определения температуры стенки конденсатора.

Одной из самых первых работ по конденсации смеси паров является работа Колбурна и Дрю [26].

### 9.3. ОТСУТСТВИЕ КОНВЕКЦИИ

9.3.1. Условия пренебрежения конвекцией. Рассматривая перенос импульса и энергии в гл. 3 и 6, мы установили, что аналитическое решение широкого круга задач возможно только для предельных случаев. Иногда именно это и требуется для рассматриваемой задачи. В худшем случае проведенный анализ послужит основой для численного расчета.

В § 3.3.1 и 6.4.1 мы рассматривали уравнение первого закона Коши и дифференциальное соотношение баланса энергии в безразмерном виде [общее дифференциальное уравнение баланса энергии содержит дополнительные члены (см. § 8.3.5)], а сейчас мы сосредоточим внимание на дифференциальном уравнении баланса массы отдельно для вещества  $A$ .

Введем безразмерные переменные:

$$\rho^* \equiv \frac{\rho}{\rho_0}; \quad t^* \equiv \frac{t}{t_0}; \quad z^*_i \equiv \frac{z_i}{L_0}; \quad \mathbf{v}^* \equiv \frac{\mathbf{v}}{v_0}; \quad j^*_{(A)} \equiv \frac{J_{(A)}}{\rho_0 D_0}; \quad r^*_{(A)} \equiv \frac{r_{(A)}}{r_{(A)0}}, \quad (9.3.1-1)$$

где величины с индексом 0 являются масштабными (характерными) значениями, имеющими размерность переменных, используемых для безразмеривания. Например,  $v_0$  — характерная скорость движения,  $r_{(A)0}$  — характерная скорость образования массы вещества  $A$  в единице объема в результате гомогенной реакции,  $\mathcal{D}_0$  — характерный коэффициент диффузии. Ранее было показано, что характерные величины выбираются произвольно для любой частной задачи. Лучше всего выбрать такие характеристики, использование которых максимально упрощает уравнения и граничные условия. Подставив эти безразмерные переменные в уравнение неразрывности (В) табл. 8.2.2-5 для вещества  $A$ , получим его в виде

$$\frac{1}{N_{St}} \rho^* \frac{\partial \omega_{(A)}}{\partial t^*} + \rho^* \nabla \omega_{(A)} \cdot \mathbf{v}^* + \frac{-1}{N_{Sc} N_{Re}} \operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)}^* = \frac{N_{Da}}{N_{Sc} N_{Re}} r_{(A)0}^*, \quad (9.3.1-2)$$

где числа Струхала, Шмидта, Рейнольдса и Дамкелера определяются в виде

$$N_{St} = \frac{t_0 v_0}{L_0}; \quad N_{Sc} = \frac{\mu_0}{\rho_0 \mathcal{D}_0}; \quad N_{Re} = \frac{\rho_0 v_0 L_0}{\mu_0}; \quad N_{Da} = \frac{r_{(A)0} L_0^2}{\rho_0 \mathcal{D}_0}. \quad (9.3.1-3)$$

Возвращаясь к § 3.3.1 и 6.5.1, можно сказать, что в пределе  $N_{Re} \rightarrow 0$  при постоянном значении числа Шмидта вторым членом в левой части уравнений (9.2.1-2), описывающим конвекцию, можно пренебречь по сравнению с третьим членом в левой части, описывающим диффузию.

При этом возникает трудность, заключающаяся в том, что когда вынужденная конвекция не учитывается, второй член в левой части уравнения (9.3.1-2) неизбежно стремится к нулю. Обычно  $\mathbf{v}$  (и  $\mathbf{v}^*$ ) не равны нулю хотя бы потому, что различные вещества, составляющие смесь, находятся в движении по отношению друг к другу. Используя анализ размерностей, выберем характерную скорость  $v_0$  движения системы, в которой вынужденная конвекция отсутствует и, следовательно, граничное условие не содержит характерной скорости. Такой подход аналогичен решению задачи об естественной конвекции, описанной в § 6.4.2. В этом анализе предполагалось, что при отсутствии вынужденной конвекции можно определить характерную скорость, положив

$$N_{Sc} N_{Re} = 1. \quad (9.3.1-4)$$

Следовательно, при отсутствии вынужденной конвекции уравнение (9.3.1-2) принимает вид:

$$\frac{1}{N_{St}} \rho^* \frac{\partial \omega_{(A)}}{\partial t^*} + \rho^* \nabla \omega_{(A)} \cdot \mathbf{v}^* + \operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)}^* = N_{Da} r_{(A)0}^*. \quad (9.3.1-5)$$

Может оказаться невозможным пренебречь конвекцией по сравнению с диффузией. Однако из § 9.2.1 известно, что для системы, достаточно близкой к равновесному состоянию, конвекцией можно пренебречь.

Для лучшего понимания естественной конвекции рассмотрим простейший случай несжимаемой ньютонаской жидкости. Первый закон Коши (см. § 3.3.1)

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \nabla \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}^* = - \frac{1}{N_{Ru}} \nabla P^* + \frac{1}{N_{Re}} \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v}^*) \quad (9.3.1-6)$$

должен выполняться для уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^* = 0 \quad (9.3.1-7)$$

и граничных условий в общем виде:

на некоторых поверхностях

$$\mathbf{v}^* = 0; \quad (9.3.1-8)$$

в некоторых точках

$$\mathcal{P}^* - \frac{N_{\text{Ru}}}{N_{\text{Re}}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}) = A, \quad (9.3.1-9)$$

на некоторых поверхностях

$$\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} = B (\omega_{(A)} - \omega_{(A)2})^n; \quad (9.3.1-10)$$

$$\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} = C \nabla \omega_{(A)} \cdot \mathbf{n}. \quad (9.3.1-11)$$

Уравнение (9.3.1-9) указывает, что в некоторых точках нормальная компонента напряжения (показания манометра), за вычетом силы гидростатического давления, имеет постоянное значение. Уравнение (9.3.1-10) есть выражение закона Ньютона для переноса массы при  $n=1$  или катализитической реакции  $n$ -го порядка при  $\omega_{(A)2}=0$ . Уравнение (9.3.1-11) описывает поверхностное испарение. Будем считать  $A$ ,  $B$ ,  $C$  постоянными.

Пусть

$$\Delta \omega_{(A)} \equiv \omega_{(A)1} - \omega_{(A)2} \quad (9.3.1-12)$$

обозначает разность массовых концентраций, характеризующую «расстояние» от равновесного состояния рассматриваемой системы. Анализируя процессы, происходящие в системе при ее приближении к равновесию, мы должны ввести переменную

$$\omega_{(A)}^{**} \equiv \frac{\omega_{(A)} - \omega_{(A)2}}{\Delta \omega_{(A)}}. \quad (9.3.1-13)$$

При такой замене переменных уравнения (9.3.1-6) — (9.3.1-9) не меняются, а уравнения (9.3.1-10) и (9.3.1-11) принимают вид:

на некоторых поверхностях

$$\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} = B (\Delta \omega_{(A)})^n \omega_{(A)}^{**}; \quad (9.3.1-14)$$

$$\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} = C \Delta \omega_{(A)} (\nabla \omega_{(A)}^{**} \cdot \mathbf{n}). \quad (9.3.1-15)$$

В предельном случае  $\Delta \omega_{(A)} \rightarrow 0$  уравнения (9.3.1-6) — (9.3.1-9), (9.3.1-14) и (9.3.1-15) удовлетворяются для неподвижной жидкости:

$$\lim_{\Delta \omega_{(A)} \rightarrow 0} \mathbf{v}^* = 0. \quad (9.3.1-16)$$

Несмотря на то что уравнение (9.3.1-16) получено для несжимаемой ньютоновской жидкости, его обобщение для сжимаемых и вязкоупругих жидкостей не представляет трудностей. Следовательно, можно считать, что уравнение (9.3.1-16) может использоваться для решения всех задач массообмена при естественной конвекции.

Теперь вернемся к уравнению неразрывности для вещества A. Используя  $\omega_{(A)}^{**}$ , представим уравнение (9.3.1-5) с помощью  $\omega_{(A)}^{**}$ , т. е.

$$\frac{1}{N_{St}} \rho^* \frac{\partial \omega_{(A)}^{**}}{\partial t^*} + \rho^* \nabla \omega_{(A)}^{**} \cdot \mathbf{v}^* + \operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)}^{**} = \frac{N_{Da}}{\Delta \omega_{(A)}} r_{(A)}, \quad (9.3.1-17)$$

где

$$\mathbf{j}_{(A)}^{**} \equiv \frac{\mathbf{j}_{(A)}^{**}}{\Delta \omega_{(A)}}. \quad (9.3.1-18)$$

Исходя из соотношения (9.3.1-16), делаем вывод, что в предельном случае  $\Delta \omega_{(A)} \rightarrow 0$  вторым членом в левой части уравнения (9.3.1-17) по сравнению с остальными можно пренебречь. Тогда найдем:

$$\rho \frac{\partial \omega_{(A)}}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)} + r_{(A)}. \quad (9.3.1-19)$$

Можно показать, что если

$$\Delta x_{(A)} \equiv x_{(A)1} - x_{(A)2}, \quad (9.3.1-20)$$

есть степень отклонения системы от равновесного состояния, то по аналогии можно предположить, что

$$\lim_{\Delta x_{(A)} \rightarrow 0} \mathbf{v}^* = \mathbf{v}^{**} = 0 \quad (9.3.1-21)$$

и при  $\Delta x_{(A)} \rightarrow 0$

$$c \frac{\partial x_{(A)}}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)}^{**} + \frac{r_{(A)}}{M_{(A)}} - x_{(A)} \sum_{B=1}^N \frac{r_{(B)}}{M_{(B)}}. \quad (9.3.1-22)$$

Рассмотрим бинарную систему при отсутствии химических реакций, для которой коэффициенты диффузии, а также  $\rho$  или  $c$  являются постоянными. При таких условиях уравнения (9.3.1-19) и (9.3.1-22) сводятся к выражению

$$\frac{\partial c_{(A)}}{\partial t} = D_{(AB)} \operatorname{div} (\nabla c_{(A)}), \quad (9.3.1-23)$$

которое обычно называется вторым законом диффузии Фика, или просто уравнением диффузии.

Случай пренебрежения конвекцией лучше всего можно понять на конкретных примерах, которые мы рассмотрим в последующих параграфах.

*9.3.2. Еще раз о стационарном испарении.* Вернемся к нашему анализу стационарного испарения в § 9.2.1. Рассмотрим только предельный случай  $x_{(A)\text{экв}} \rightarrow 0$ . Именно в этом пределе система приближается к равновесию при  $t \geq 0$ .

По аналогии с § 9.3.1 введем в уравнение (9.2.1-11) зависимую переменную

$$x_{(A)}^{**} \equiv \frac{x_{(A)}}{x_{(A)\text{экв}}}, \quad (9.3.2-1)$$

Тогда находим:

$$\frac{d^2 x_{(A)}^{**}}{dt^2} + (2\eta + x_{(A)\text{экв}} \varphi^{**}) \frac{dx_{(A)}^{**}}{d\eta} = 0, \quad (9.3.2-2)$$

где

$$\varphi^{**} \equiv \frac{1}{1 - x_{(A) \text{экв}}} \left. \frac{dx_{(A)}^{**}}{d\eta} \right|_{\eta=0}. \quad (9.3.2-3)$$

Для предельного случая  $x_{(A) \text{экв}} \rightarrow 0$  уравнение (9.3.2-2) сводится к выражению

$$\frac{d^2 x_{(A)}^{**}}{d\eta^2} + 2\eta \frac{dx_{(A)}^{**}}{d\eta} = 0. \quad (9.3.2-4)$$

Как указывалось в § 9.2.1, соответствующими граничными условиями для этого случая будут:

$$\text{при } \eta = 0 \quad x_{(A)}^{**} = 1; \quad (9.3.2-5)$$

$$\text{при } \eta \rightarrow \infty \quad x_{(A)}^{**} \rightarrow 0. \quad (9.3.2-6)$$

Решением этой задачи является уравнение (9.2.1-21). Некоторые типичные результаты приводятся в табл. 9.2.1-1. Как и следовало ожидать, выражение в скобках в уравнении (9.2.1-20) можно считать поправкой на конвекцию для скорости испарения. В предельном случае  $x_{(A) \text{экв}} \rightarrow 0$  эта величина приближается к единице. Однако для конечных значений  $x_{(A) \text{экв}}$  эта поправка чрезвычайно мала, например при  $x_{(A) \text{экв}} = 1/4$  она составляет менее 11%.

9.3.3. Еще раз о нестационарной диффузии при наличии гомогенной реакции первого порядка. Рассмотрим еще раз задачу, описанную в § 9.2.2. Пусть поверхность раздела жидкость — газ опять находится в плоскости  $z_2 = 0$ . Но вместо условия

$$\text{при } z_2 \rightarrow 0 \text{ для всех } t \quad v^{\star} \rightarrow 0 \quad (9.3.3-1)$$

будем считать вещества  $B$  и  $C$  нелетучими:

$$\text{при } z_2 = 0 \text{ для всех } t \quad N_{(B)2} = N_{(C)2} = 0. \quad (9.3.3-2)$$

Таким образом, сейчас нет необходимости оговаривать, как в § 9.2.2, что число молей компонент  $B$  и  $C$ , выходящих из жидкости через поверхность раздела фаз, должно быть в точности равно числу молей вещества  $A$ , поступающих в жидкость. Конечно, для предельного случая  $z_2 \rightarrow \infty$  величина  $v^{\star}$  не должна быть равна нулю, однако это оправдывается, если учесть, что поверхность раздела фаз задана неподвижной в пространстве во все моменты времени.

Далее аналогично § 9.2.2 будем считать, что единственной отличной от нуля компонентой вектора среднемолярной скорости будет величина

$$v_2^{\star} = v_2^{\star}(t). \quad (9.3.3-3)$$

Используя уравнение (9.3.3-2), определение среднемолярной скорости и соотношение (8.4.7-1), при  $z_2 = 0$ , для всех  $t$  находим:

$$v_2^{\star} = \frac{1}{c} N_{(A)2} = \frac{x_{(A)}}{c} N_{(A)2} - \mathcal{D}_{(Am)} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} = - \frac{\mathcal{D}_{(Am)}}{1 - x_{(A)}} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2}. \quad (9.3.3-4)$$

Исходя из уравнений (9.2.2-2), (9.3.3-3) и (9.3.3-4), можно утверждать, что во всей газовой фазе для всех  $t$

$$v_2^* = \frac{-\mathcal{D}_{(Am)}}{1 - x_{(A) \text{ экв}}} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} \Big|_{z_1=0}. \quad (9.3.3-5)$$

Следует учесть, что величина  $(\partial x_{(A)} / \partial z_2)|_{z_1=0}$ , будучи независимой от координат, является функцией времени.

Теперь в соответствии с уравнением (E) табл. 8.2.2-5 получим:

$$\frac{\partial x_{(A)}}{\partial t} = \frac{\mathcal{D}_{(Am)}}{1 - x_{(A) \text{ экв}}} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} \Big|_{z_1=0} = \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} - \mathcal{D}_{(Am)} \frac{\partial^2 x_{(A)}}{\partial^2 z_2} = -k_{(A)}''' x_{(A)}. \quad (9.3.3-6)$$

Сравнивая это соотношение с аналогичным уравнением (9.2.2-10), можно заметить появление нового члена в правой части полученного уравнения. Найдем решение, удовлетворяющее уравнениям (9.2.2-1) и (9.2.2-2). Для упрощения поисков решения рассмотрим предельный случай  $x_{(A) \text{ экв}} \rightarrow 0$ . В этом пределе рассматриваемая система приближается к равновесию при  $t \geq 0$ .

Введем безразмерные переменные:

$$t^* \equiv k_{(A)}''' t; \quad z_2^* \equiv \frac{z_2}{L_0}; \quad x_{(A)}^{**} \equiv \frac{x_{(A)}}{x_{(A) \text{ экв}}}. \quad (9.3.3-7)$$

Тогда уравнение (9.3.3-6) принимает вид:

$$\frac{\partial x_{(A)}^{**}}{\partial t^*} = \frac{x_{(A) \text{ экв}}}{1 - x_{(A) \text{ экв}}} \frac{\partial x_{(A)}^{**}}{\partial z_2^*} \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial x_{(A)}^{**}}{\partial z_2^*} - \frac{\partial^2 x_{(A)}^{**}}{\partial^2 z_2^*} = -x_{(A)}^{**}, \quad (9.3.3-8)$$

где для упрощения характерная длина определяется в виде

$$L_0 \equiv \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{(Am)}}{k_{(A)}'''}}. \quad (9.3.3-9)$$

При  $x_{(A) \text{ экв}} \rightarrow 0$  уравнение (9.3.3-8) сводится к

$$\frac{\partial x_{(A)}^{**}}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 x_{(A)}^{**}}{\partial^2 z_2^*} - x_{(A)}^{**}. \quad (9.3.3-10)$$

Тогда соответствующими граничными условиями вместо выражений (9.2.2-1) и (9.2.2-2) при  $t^* = 0$  для всех  $z_2^* > 0$  будут:

$$x_{(A)}^{**} = 0, \quad (9.3.3-11)$$

а при  $z_2^* = 0$  для всех  $t^* > 0$ :

$$x_{(A)}^{**} = 1. \quad (9.3.3-12)$$

За исключением новых безразмерных переменных уравнения (9.2.3-10) — (9.2.3-12) в точности соответствуют задаче § 9.2.2. Однако следует помнить, что решение, полученное в § 9.2.2, применимо для рассматриваемых условий только в пределе  $x_{(A) \text{ экв}} \rightarrow 0$ .

*9.3.4. Еще раз о стационарной диффузии при наличии медленной катализитической реакции.* В момент  $t = 0$  газовая смесь, состоящая из

вещества  $A$  и  $A_2$ , приводится в соприкосновение с твердой поверхностью, материал которой является катализатором для реакции димеризации  $2A \rightarrow A_2$ . Найдем расход во времени вещества  $A$ .

Для упрощения анализа будем считать, что поверхность раздела газ — твердое тело находится в плоскости  $z_2=0$ , а газовая фаза занимает полупространство  $z_2>0$ . Начальным условием при  $t=0$  для всех  $z_2>0$  будет:

$$x_{(A)} = x_{(A)0}. \quad (9.3.4-1)$$

На поверхности раздела газ — твердое тело происходит реакция димеризации, которую можно считать каталитической реакцией первого порядка:

$$\text{при } z_2=0 \quad N_{(A)2} = -2N_{(A_2)2} = -k''_{(A)} c_{(A)} \text{ для всех } t>0. \quad (9.3.4-2)$$

Будем считать нашу смесь идеальным газом при постоянной температуре и давлении, так что молярную плотность  $c$  можно также принять постоянной.

Имеем решение в виде

$$v_1^\star = v_2^\star = 0; \quad v_2^\star = v_2^\star(t, z_2); \quad x_{(A)} = x_{(A)}(t, z_2). \quad (9.3.4-3)$$

Из общего уравнения неразрывности (Б) табл. 8.3.2-1 находим:

$$\partial v_2^\star / \partial z_2 = 0, \quad (9.3.4-4)$$

откуда

$$v_2^\star = v_2^\star(t). \quad (9.3.4-5)$$

Из уравнения (9.3.4-2), определения среднемолярной скорости  $v^\star$  и первого закона Фика (Г) табл. 8.4.6-1 получим при  $z_2=0$  для  $t>0$ :

$$v_2^\star = \frac{1}{2c} N_{(A)2} = \frac{x_{(A)}}{4c} N_{(A)2} - \frac{1}{2} \mathcal{D}_{(AA_2)} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} = -\frac{\mathcal{D}_{(AA_2)}}{2-x_{(A)}} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2}. \quad (9.3.4-6)$$

На основании уравнений (9.3.4-5) и (9.3.4-6) можно утверждать, что для всей газовой фазы всюду при  $t>0$ :

$$v_2^\star = \left. \frac{-\mathcal{D}_{(AA_2)}}{2-x_{(A)}} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} \right|_{z_2=0}. \quad (9.3.4-7)$$

Следует отметить, что хотя  $\partial x_{(A)} / \partial z_2 |_{z_2=0}$  и  $x_{(A)} |_{z_2=0}$  не зависят от координат, они являются функцией времени.

Будем считать коэффициент диффузии постоянным. С учетом соотношений (9.3.4-3) и (9.3.4-7) уравнение неразрывности для вещества  $A$ , удовлетворяющее первому закону Фика (Г) табл. 8.4.6-2, имеет вид:

$$\frac{\partial x_{(A)}}{\partial t} = \left. \frac{\mathcal{D}_{(AA_2)}}{2-x_{(A)}} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} \right|_{z_2=0} + \mathcal{D}_{(AA_2)} \frac{\partial^2 x_{(A)}}{\partial^2 z_2}. \quad (9.3.4-8)$$

Будем искать решение этого уравнения при граничных условиях (9.3.4-1) и (9.3.4-2). Для этого перепишем последнее уравнение (9.3.4-6) в виде

$$\text{при } z_2=0$$

$$\frac{2\mathcal{D}_{(AA_2)}}{k''_{(A)}} \frac{\partial x_{(A)}}{\partial z_2} = x_{(A)} (2 - x_{(A)}) \text{ для всех } t>0. \quad (9.3.4-9)$$

Поскольку уравнение (9.3.4-8) нелинейно, мы не можем преобразовать его по Лапласу. Невозможно также и преобразование

$$\eta \equiv \frac{z_2}{\sqrt{4\mathcal{D}_{(AA_2)} t}}. \quad (9.3.4-10)$$

Граничное условие (9.3.4-9) будет функцией  $t$  и  $\eta$ .

Поскольку получить решение в замкнутом виде очень трудно, рассмотрим предельный случай, когда система стремится к равновесному состоянию при всех  $t > 0$ , т. е.  $x_{(A)0} \rightarrow 0$ . В соответствии с § 9.3.1 введем безразмерные переменные:

$$t^* \equiv \frac{(k''_{(A)})^2}{\mathcal{D}_{(AA_2)}} t; \quad z_2^* \equiv \frac{k''_{(A)} z_2}{\mathcal{D}_{(AA_2)}}; \quad x_{(A)}^{**} \equiv \frac{x_{(A)}}{x_{(A)0}}. \quad (9.3.4-11)$$

При этом уравнения (9.3.4-1), (9.3.4-8) и (9.3.4-9) принимают вид:

$$\frac{\partial x_{(A)}^{**}}{\partial t^*} = \frac{x_{(A)0}}{2 - x_{(A)0} x_{(A)}^{**}|_{z_2^*=0}} \frac{\partial x_{(A)}^{**}}{\partial z_2^*} \Big|_{z_2=0} \frac{\partial x_{(A)}^{**}}{\partial z_2^*} + \frac{\partial^2 x_{(A)}^{**}}{\partial^2 z_2^*}; \quad (9.3.4-12)$$

при  $t^* = 0$  для всех  $z_2^* > 0$

$$x_{(A)}^{**} = 1; \quad (9.3.4-13)$$

при  $z_2^* = 0$  для всех  $t^* > 0$

$$2 \frac{\partial x_{(A)}^{**}}{\partial z_2^*} = x_{(A)}^{**} (2 - x_{(A)0} x_{(A)}^{**}). \quad (9.3.4-14)$$

Можно сказать, что при  $x_{(A)0} \rightarrow 0$ , уравнение (9.3.4-12) принимает вид:

$$\frac{\partial x_{(A)}^{**}}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 x_{(A)}^{**}}{\partial^2 z_2^*}. \quad (9.3.4-15)$$

Начальным условием для этого уравнения остается (9.3.4-13), а граничное условие упрощается:

при  $z_2^* = 0$  для всех  $t^* > 0$

$$\frac{\partial x_{(A)}^{**}}{\partial z_2^*} = x_{(A)}^{**}. \quad (9.3.4-16)$$

Таким образом, задача сводится к случаю, рассмотренному в § 6.2.3. Следовательно, используя результат этого параграфа, запишем распределение концентрации:

$$x_{(A)}^{**} = \operatorname{erf} \left( \frac{z_2^*}{\sqrt{4t}} \right) + \exp(z_2^* + t^*) \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{z_2^*}{\sqrt{4t}} + \sqrt{t^*} \right) \right]. \quad (9.3.4-17)$$

Из этого выражения при условии (9.3.4-2) получим расход во времени вещества  $A$ :

$$-N_{(A)2}|_{z_2=0} = k''_{(A)} c x_{(A)0} \exp \left( \frac{(k''_{(A)})^2 t}{\mathcal{D}_{(AA_2)}} \right) \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( k''_{(A)} \sqrt{\frac{t}{\mathcal{D}_{(AA_2)}}} \right) \right]. \quad (9.3.4-18)$$

## 9.4. ВЫНУЖДЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ

**9.4.1. Случай пренебрежения естественной конвекцией по сравнению с вынужденной.** До сих пор мы рассматривали задачи вынужденной конвекции, в которых распределение среднемассовой или среднемолярной скорости зависело только от градиентов концентрации в жидкости. При этом учитывалось, что естественная конвекция при переносе массы существенно отличается от естественной конвекции при переносе энергии. В первом случае естественная конвекция возможна даже при постоянной суммарной плотности массы. Для движения отдельных веществ достаточно потребовать, чтобы распределения среднемассовой и среднемолярной скорости не были равны нулю.

Задачи естественной конвекции имеют некоторые отличия. При переносе энергии можно сказать, что распределение скорости в жидкости с постоянными свойствами не зависит от температуры. Для переноса массы такое утверждение невозможно. В § 9.3.1 мы нашли, что распределение скорости в жидкости с постоянными свойствами практически не зависит от переноса массы, пока система достаточно близка к равновесному состоянию. Для более точного определения соотношения между естественной и вынужденной конвекциями рассмотрим несжимаемую ньютоновскую жидкость аналогично в § 9.3.1. Уравнение неразрывности (9.3.1-7) и уравнение первого закона Коши (9.3.1-6) должны удовлетворяться для граничных условий общего вида:

на некоторых поверхностях

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{V}(\mathbf{z}); \quad (9.4.1-1)$$

в некоторых точках

$$\mathcal{P}^* - \frac{N_{\text{Ru}}}{N_{\text{Re}}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}) = A(\mathbf{z}). \quad (9.4.1-2)$$

Они должны также быть совместимы с уравнениями (9.3.1-14) и (9.3.1-15). Уравнение (9.4.1-1) показывает, что на некоторых поверхностях задается распределение скорости. В соотношении (9.4.1-2) заранее задаются показания датчика давления в некоторых точках системы. Следует помнить, что  $\Delta\omega_{(A)}$  характеризует отклонение системы от равновесия (по отношению к переносу массы). Для предельного случая  $\Delta\omega_{(A)} \rightarrow 0$  распределение скорости в жидкости при отсутствии переноса массы описывается уравнениями (9.3.1-6), (9.3.1-7), (9.3.1-14) и (9.3.1-15), а также уравнениями (9.4.1-1) и (9.4.1-2). В этом случае теплопроводностью при естественной конвекции по сравнению с вынужденной можно пренебречь.

Это рассуждение, сделанное для несжимаемой ньютоновской жидкости, можно без особых затруднений обобщить для сжимаемой или вязкоупругой жидкости. При этом естественной конвекцией по сравнению с вынужденной можно пренебречь для всех массообменных задач.

К сожалению, из-за сложности этих задач в литературе опубликовано очень мало решений, где учитывается теплопроводность как при естественной, так и при вынужденной конвекции. В дальнейшем мы будем пренебрегать теплопроводностью при естественной конвекции по сравнению с вынужденной.

**9.4.2. Подобие переноса энергии и массы.** В § 9.4.1 перечислены три основных различия в вынужденной конвекции при переносе энергии и переносе массы. Однако, если естественной конвекцией по сравнению с вынужденной пренебрегают, многие массообменные задачи математи-

матически формулируются так же, как для переноса энергии. Используя это подобие, можно значительно сократить процесс решения.

Теоретических решений массообменных задач для сжимаемых жидкостей очень мало. Основную трудность при этом представляет решение уравнения первого закона Коши для сжимаемых жидкостей. Некоторые задачи, рассматривающие изохорические движения сжимаемых жидкостей, имеют решение (см. § 6.3.1—6.4.2), а для течений сжимаемых жидкостей при переменном объеме в настоящее время возможны только численные решения. По этой причине в своем анализе вынужденной конвекции мы ограничимся только несжимаемыми жидкостями.

Уравнение неразрывности для вещества  $A$ , входящего в состав несжимаемой бинарной смеси, для которого выполняется первый закон Фика в безразмерных переменных (см. § 9.3.1), имеет вид:

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial \omega_{(A)}}{\partial t^*} + \nabla \omega_{(A)} \cdot \mathbf{v}^* = \frac{1}{N_{Sc} N_{Re}} \operatorname{div} \nabla \omega_{(A)} + \frac{N_{Da}}{N_{Sc} N_{Re}} r^*_{(A)} \cdot (9.4.2-1)$$

Запишем в безразмерном виде дифференциальное соотношение баланса энергии для несжимаемой жидкости с постоянными свойствами (см. § 6.4.1)

$$\frac{1}{N_{St}} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \nabla T^* \cdot \mathbf{v}^* = \frac{1}{N_{Rr} N_{Re}} \operatorname{div} \nabla T^* + \frac{N_{Br}}{N_{Pr} N_{Re}} \operatorname{tr}(\mathbf{S}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^*). (9.4.2-2)$$

Сравнение полученных уравнений показывает, что они одинаковы по своей форме в случае, когда в первом отсутствуют гомогенные химические реакции, а во втором пренебрегают вязкой диссипацией. Кроме того, для многих практических случаев постановка задачи переноса энергии при граничных условиях соответствующей массообменной задачи не представляет трудностей. В ней вместо концентрации задается температура. Для катализитической реакции первого порядка вместо закона Ньютона для массообмена или выражения для потока массы используется закон охлаждения Ньютона. При этом исключения составляют только два случая: катализитические реакции всех порядков, кроме первого, не имеют аналогий с переносом энергии, а также случай непрерывного изменения температуры при переходе через поверхность раздела фаз, тогда как концентрация не изменяется непрерывно. Если исключить эти случаи, для несжимаемых бинарных смесей с постоянными свойствами при отсутствии гомогенных реакций математическая постановка массообменных задач аналогична постановке для переноса энергии при отсутствии вязкой диссипации. Поэтому в дальнейшем мы будем мало останавливаться на этих задачах, ссылаясь иногда на § 6.5.1—6.8.2.

Совсем по-другому обстоит дело при вынужденной конвекции в жидкостях, участвующих в гомогенных реакциях. В следующем параграфе мы рассмотрим класс простых задач при наличии гомогенных реакций первого порядка.

К сожалению, из-за немногочисленности проведенных исследований мы не можем порекомендовать читателю никаких работ по вынужденной конвекции многокомпонентных концентрированных растворов (разбавленные растворы описаны в § 8.4.7).

**9.4.3. Поглощение газа в падающей пленке при наличии химической реакции.** Рассмотрим течение несжимаемой ньютоновской жид-

кости, почти полностью состоящей из вещества  $B$ , по наклонной плоскости. Вещество  $A$  переносится из внешнего потока газа в жидкость, где участвует в необратимой гомогенной реакции первого порядка. Переносом массы из потока газа к пленке для  $z_1 < 0$  пренебрегаем:

$$\text{при } z_2 = \delta \quad n_{(A)} \cdot \xi = 0 \quad \text{для } z_1 < 0, \quad (9.4.3-1)$$

где  $\xi$  — единичная нормаль к поверхности раздела фаз, направленная от жидкости к газу. За пределами непосредственной окрестности жидкой пленки концентрация газа одинакова. Если бы жидкость находилась в равновесии с газовым потоком, ее концентрация была бы  $\rho_{(A) \text{экв}}$ . Для упрощения задачи будем считать, что для  $z_1 > 0$  концентрация жидкости на поверхности раздела фаз равна  $\rho_{(A) \text{экв}}$ , т. е.

$$\text{при } z_2 = \delta \quad \rho_{(A)} = \rho_{(A) \text{экв}} \quad \text{для всех } z_1 > 0. \quad (9.4.3-2)$$

На очень большом расстоянии вверх по течению жидкость состоит только из вещества  $A$ , т. е.

$$\text{при } z_1 \rightarrow -\infty \quad \rho_{(A)} \rightarrow 0 \quad \text{для всех } 0 \leq z_2 \leq \delta. \quad (9.4.3-3)$$

Требуется определить распределение плотности массы в концентрионном пограничном слое вблизи начала участка пленки, где происходит поглощение вещества  $A$ , для массообменного числа Пекле, стремящегося к бесконечности.

С учетом § 9.4.1 ограничим наш анализ предельным случаем

$$\Delta \omega_{(A)} \equiv \frac{\rho_{(A) \text{экв}}}{\rho} \rightarrow 0. \quad (9.4.3-4)$$

В этом случае естественной конвекцией по сравнению с вынужденной можно пренебречь, а распределение скорости имеет вид:

$$v_1 = v_{\max} [2z_2/\delta - (z_2/\delta)^2]. \quad (9.4.3-5)$$

Пусть

$$\rho_{(A)} = \rho_{(A)}(z_1, z_2). \quad (9.4.3-6)$$

Тогда уравнение неразрывности (B) табл. 8.4.6-2 для вещества  $A$  имеет вид:

$$v_1 \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial z_1} = D_{(AB)}^0 \left( \frac{\partial^2 \rho_{(A)}}{\partial^2 z_1} + \frac{\partial^2 \rho_{(A)}}{\partial^2 z_2} \right) - k_1''' \rho_{(A)}. \quad (9.4.3-7)$$

Очевидно, что решение этого уравнения для граничных условий (9.4.3-1) — (9.4.3-3) представляет большие трудности. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением области вблизи начала участка поглощения.

Введем безразмерные переменные

$$\omega_{(A)}^{**} \equiv \frac{\rho_{(A)}}{\rho_{(A) \text{экв}}} ; \quad z^* \equiv \frac{z_1}{\delta} ; \quad s^* \equiv 1 - \frac{z_2}{\delta}. \quad (9.4.3-8)$$

Тогда уравнение (9.4.3-7) принимает вид:

$$(1 - s^{*2}) \frac{\partial \omega_{(A)}^{**}}{\partial z^*_1} = \frac{1}{N_{Sc} N_{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega_{(A)}^{**}}{\partial^2 z^*_1} + \frac{\partial^2 \omega_{(A)}^{**}}{\partial^2 z^*_2} \right) - \frac{N_{Da}}{N_{Sc} N_{Re}} \omega_{(A)}^{**}, \quad (9.4.3-9)$$

где

$$N_{Sc} \equiv \frac{\mu}{\rho D^0_{(AB)}}; \quad N_{Re} \equiv \frac{\delta u_{1, \text{макс}}}{\mu}; \quad N_{Da} \equiv \frac{k_1''' \delta^2}{D^0_{(AB)}}. \quad (9.4.3-10)$$

Так как основной интерес для нас представляет начало участка поглощения, введем новую переменную по формуле

$$s^{**} \equiv (N_{PeM})^{0.5s^*}, \quad (9.4.3-11)$$

где  $N_{PeM}$  — массообменное число Пекле,

$$N_{PeM} \equiv N_{Sc} N_{Re}. \quad (9.4.3-12)$$

Используя эту новую переменную, приведем уравнение (9.4.3-9) к виду

$$\left(1 - \frac{s^{**}}{N_{PeM}}\right) \frac{\partial \omega_{(A)}^{**}}{\partial z^*_1} = \frac{1}{N_{PeM}} \frac{\partial^2 \omega_{(A)}^{**}}{\partial^2 z^*_1} + \frac{\partial^2 \omega_{(A)}^{**}}{\partial^2 s^{**}} - \frac{N_{Da}}{N_{PeM}} \omega_{(A)}^{**}. \quad (9.4.3-13)$$

Для предельного случая  $N_{PeM} \rightarrow \infty$  это выражение можно упростить

$$\frac{\partial \omega_{(A)}^{**}}{\partial z^*_1} = \frac{\partial^2 \omega_{(A)}^{**}}{\partial^2 s^{**}} - \frac{N_{Da}}{N_{PeM}} \omega_{(A)}^{**}. \quad (9.4.3-14)$$

Поскольку в уравнении (9.4.3-14) аксиальная диффузия не учитывается, заменим граничные условия (9.4.3-1) и (9.4.3-3) выражением

$$\omega_{(A)}^{**} = 0 \text{ при } z^*_1 = 0. \quad (9.4.3-15)$$

С помощью наших безразмерных переменных можно представить выражение (9.4.3-2) в виде

$$\omega_{(A)}^{**} = 1 \text{ при } s^{**} = 0. \quad (9.4.3-16)$$

Теперь наша задача сводится к нахождению решения уравнения (9.4.3-14) для граничных условий (9.4.3-15) и (9.4.3-16). Учитывая § 3.2.4, получаем искомое решение:

$$\begin{aligned} \omega_{(A)}^{**} &= \exp\left(-\frac{N_{Da} z^*_1}{N_{PeM}}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{s^{**}}{\sqrt{4z^*_1}}\right)\right] + \\ &+ \frac{N_{Da}}{N_{PeM}} \int_0^{z^*_1} \exp\left(-\frac{N_{Da} z^*_1}{N_{PeM}}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{s^{**}}{\sqrt{4z^*_1}}\right)\right] dz^*_1. \end{aligned} \quad (9.4.3-17)$$

Наконец, интересно определить скорость поглощения вещества  $A$  на единицу ширины пленки длиной  $L$ :

$$\mathcal{W}_{(A)} \equiv \int_0^L -n_{(A)} |_{z_1=\delta} dz_1. \quad (9.4.3-18)$$

Из уравнений (9.4.3-17) получим [5]:

$$\frac{\mathcal{U}'(A)}{\rho_{(A)} \text{экв} v_{1\max}} \sqrt{k_1'''/\mathcal{D}_{(AB)}^*} = (1/2 + u) \operatorname{erf} \sqrt{u} + \sqrt{u/\pi} \exp(-u), \quad (9.4.3-19)$$

где для удобства используется величина

$$u \equiv N_{\text{Da}} L / N_{\text{PeM}} \delta. \quad (9.4.3-20)$$

В соответствии с уравнением (9.4.3-19) для предельного случая отсутствия химических реакций ( $u \rightarrow 0$ ) имеем:

$$\frac{\mathcal{U}'(A)}{\rho_{(A)} \text{экв} \sqrt{\mathcal{D}_{(AB)}^*} v_{1\max} L} = \sqrt{\frac{4}{\pi}}. \quad (9.4.3-21)$$

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНОГО УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕНОСА МАССЫ

В этой главе заканчивается обсуждение метода интегрального усреднения, начатое в гл. 4 и продолженное в гл. 7. Как уже упоминалось во вступлении к гл. 7, представленные здесь понятия усваиваются лучше всего в контексте гл. 4. Именно в ней дается самое полное обоснование некоторых уравнений, а также проводятся основные детали, общие для выводов всех этих уравнений.

#### 10.1. УСРЕДНЕНИЕ ПО ВРЕМЕНИ

**10.1.1. Перенос массы в турбулентных течениях.** Перенос массы называется турбулентным, если хотя бы одна из фаз, участвующих в нем, является турбулентным течением. Основные принципы и терминология излагаются в § 4.1.1—4.1.5. Следующие параграфы связаны с усредненным по времени дифференциальным уравнением неразрывности для вещества  $A$ . Мы будем рассматривать это уравнение так же, как в § 7.1.1—7.1.4, где обсуждается перенос турбулентной энергии.

**10.1.2. Усреднение по времени дифференциального уравнения неразрывности для вещества  $A$ .** Как и в предыдущих главах, где мы рассматривали турбулентность (§ 4.1.1—4.1.5 и 7.1.2—7.1.4), для простоты ограничимся несжимаемыми жидкостями. При таком ограничении уравнение (B) из табл. 8.2.2-5 принимает вид:

$$\rho \left[ \frac{\partial \omega_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\omega_{(A)} \mathbf{v}) \right] + \operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)} - r_{(A)} = 0. \quad (10.1.2-1)$$

Используя определение, приведенное § 4.1.2, проведем усреднение этого уравнения по времени

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left[ \rho \frac{\partial \omega_{(A)}}{\partial t'} + \operatorname{div} (\rho \omega_{(A)} \mathbf{v} + \mathbf{j}_{(A)}) - r_{(A)} \right] dt' = 0. \quad (10.1.2-2)$$

Усреднение по времени коммутирует с дифференцированием в частных производных по времени (см. § 4.1.2) и дивергенцией:

$$\rho \frac{\partial \bar{\omega}_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \bar{\omega}_{(A)} \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{j}}_{(A)}) - \bar{r}_{(A)} = 0. \quad (10.1.2-3)$$

Обычно результат записывается в виде

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\omega}_{(A)}}{\partial t} + \nabla \bar{\omega}_{(A)} \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) + \operatorname{div} (\bar{\mathbf{j}}_{(A)} + \mathbf{j}_{(A)}^{(t)}) = \bar{r}_{(A)}, \quad (10.1.2-4)$$

где вводится вектор потока массы в турбулентных течениях:

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(t)} \equiv \rho (\bar{\omega}_{(A)} \bar{\mathbf{v}} - \bar{\omega}_{(A)} \bar{\mathbf{v}}). \quad (10.1.2-5)$$

Если ограничимся двухкомпонентной диффузией и допустим, что первый закон Фика применим для вектора потока массы, уравнение (10.1.2-4) примет вид:

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\omega}_{(A)}}{\partial t} + \nabla \bar{\omega}_{(A)} \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = \operatorname{div} (\rho \mathcal{D}_{(AB)}^0 \nabla \bar{\omega}_{(A)} - \mathbf{j}_{(A)}^{(t)}) + \bar{r}_{(A)}. \quad (10.1.2-6)$$

Предположим, в частности, что имеет место гомогенная реакция  $n$ -го порядка:

$$r_{(A)} = k_n''' \bar{\rho}_{(A)}^n, \quad (10.1.2-7)$$

так что

$$\bar{r}_{(A)}' = k_n''' \bar{\rho}_{(A)}^n + k_n''' \overline{(\rho_{(A)}^n)} - \bar{\rho}_{(A)}^n. \quad (10.1.2-8)$$

Отметим, что для реакции первого порядка

$$\bar{r}_{(A)} = k_1''' \bar{\rho}_{(A)}. \quad (10.1.2-9)$$

Скорость образования массы вещества  $A$  на единицу объема не является явной функцией изменения концентрации. Наоборот,  $\bar{r}_{(A)}$  зависит в явном виде от изменения концентрации для реакций более высокого порядка.

Поставленная задача для  $\mathbf{j}_{(A)}^{(t)}$  подобна рассматриваемым в § 4.1.2 и 7.1.2. Коль скоро в тех параграфах нам пришлось обратиться к эмпирическим соотношениям для тензора напряжений Рейнольдса  $\mathbf{S}^{(t)}$  и вектора плотности потока турбулентной энергии  $\mathbf{q}^{(t)}$ , мы должны и здесь сформулировать эмпирические представления для вектора турбулентного потока массы  $\mathbf{j}_{(A)}^{(t)}$ .

**10.1.3. Эмпирические соотношения для вектора плотности турбулентного потока массы  $\mathbf{j}_{(A)}^{(t)}$ .** Здесь мы не будем долго останавливаться на эмпирических соотношениях для вектора плотности турбулентного потока массы  $\mathbf{j}_{(A)}^{(t)}$ , так как оно является, по существу, повторением сказанного в § 7.1.3.

Наш подход основан на трех принципах:

1. Для изменения системы отсчета

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \quad (10.1.3-1)$$

можно использовать результат § 4.1.3, откуда найдем, что  $\mathbf{j}_{(A)}^{(t)}$  не зависит от системы отсчета:

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(t)} = \rho (\overline{\omega}_{(A)}^* \mathbf{v}^* - \overline{\omega}_{(A)}^* \bar{\mathbf{v}}^*) = \rho [\overline{\omega}_{(A)}^* (\mathbf{v}^* - \bar{\mathbf{v}}^*)] = \rho \mathbf{Q} \cdot [\overline{\omega}_{(A)} (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})] = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j}_{(A)}^{(t)}. \quad (10.1.3-2)$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  — зависящий от времени ортогональный тензор второго ранга. При выводе уравнения (10.1.3-2) использовался тот факт, что разность скоростей не зависит от системы отсчета.

2. Предположим, что принцип независимости материала от системы отсчета, изложенный в § 2.3.1, применим к любым эмпирическим соотношениям для  $\mathbf{j}_{(A)}^{(t)}$ , пока изменение системы отсчета удовлетворяет уравнению (10.1.3-1);

3. С целью дальнейшего ограничения формы любого выражения для  $\mathbf{j}_{(A)}^{(t)}$  мы будем пользоваться теоремой Бэкингема — Пая.

*Пример 1. Теория длины смешения Прандтля.* В примере 1 из § 7.1.3 предполагается, что для полностью развитого турбулентного течения вблизи стенки мы принимаем допущение, что вектор потока массы в турбулентном течении является функцией плотности жидкости, расстояния  $l$  от стенки,  $\mathbf{D}$  и  $\nabla \bar{\omega}_{(A)}$ :

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(t)} = \mathbf{j}_{(A)}^{(t)} (\rho, l, \mathbf{D}, \nabla \bar{\omega}_{(A)}). \quad (10.1.3-3)$$

Так как мы ограничились только полностью развитым течением, то коэффициент диффузии и вязкость как независимые переменные не учитываются. Следствия принципа независимости материала от системы отсчета и теоремы Бэкингема — Пая приводятся в § 7.1.3.

Частным случаем уравнения (10.1.3-3), совместимым с принципом независимости материала от системы отсчета и теоремы Бэкингема — Пая, является уравнение

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(t)} = -\mathcal{D}^* \rho l^2 \sqrt{2 \operatorname{tr} \mathbf{D}^2 \nabla \bar{\omega}_{(A)}}, \quad (10.1.3-4)$$

где  $\mathcal{D}^*$  — безразмерная постоянная. Уравнение (10.1.3-4) должно рассматриваться как тензорное выражение теории длины смешения Прандтля для переноса массы. Следует отметить, что теория длины смешения Прандтля не может использоваться для ламинарного подслоя или буферной зоны.

*Пример 2. Выражение Дейслера для пристенной области.* Учитывая пример 2 § 7.1.3, мы можем записать для ламинарного подслоя и буферной зоны:

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(t)} = \mathbf{j}_{(A)}^{(t)} (\rho, \mu, l, \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_{(s)} \nabla \bar{\omega}_{(A)}). \quad (10.1.3-5)$$

Следует запомнить, что  $\mathbf{v}_{(s)}$  обозначает скорость ограничивающей стенки. Дейслер [1] предположил на основании эмпирических наблюдений, что

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(t)} = -n^2 \rho l |\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_{(s)}| [1 - \exp(-n^2 N)] \nabla \bar{\omega}_{(A)}, \quad (10.1.3-6)$$

где  $N$  определяется соотношением

$$N \equiv \frac{\rho l |\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_{(s)}|}{\mu}. \quad (10.1.3-7)$$

Здесь  $n$  имеет тот же смысл, что и в уравнении (4.1.4-21).

Эта величина рассчитана в § 4.1.5. Конечно, уравнение (10.1.3-6) удовлетворяет принципу независимости материала от системы отсчета и соответствует теореме Бэкингема — Пая.

*Пример 3. Коэффициент вихревой диффузии для свободной турбулентности.* Обычно считается, что на большом расстоянии от стенки в области свободной турбулентности

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(t)} = -\mathcal{D}_{(AB)}^{(t)} \nabla \bar{\omega}_{(A)}. \quad (10.1.3-8)$$

В нормальных условиях скаляр  $\mathcal{D}_{(AB)}^{(t)}$  не зависит от координат. Это явление известно как *вихревая диффузия*.

В следующем параграфе мы рассмотрим метод измерения  $\mathcal{D}_{(AB)}^{(t)}$ .

10.1.4. Тройная диффузия от точного источника в движущейся струе [2, 3]. Рассмотрим стационарное турбулентное течение простой жидкости  $B$ , имеющее постоянную скорость  $\bar{v}_0$ , на большом расстоянии от стенок или любых ограничивающих поверхностей. В цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ , показанной на рис. 10.1.4-1, жидкость движется в направлении  $z$ . Вещество  $A$  постоянно вводится в струю в начале этой системы координат со скоростью  $W_{(A)}$  (масса в единицу времени).



Рис. 10.1.4-1. Системы координат для описания турбулентной диффузии от точечного источника в потоке, имеющем постоянную скорость.

Так как рассматриваемая область течения находится на очень большом расстоянии от ограничивающих поверхностей, можно предположить, что течение является свободно турбулентным и что вектор плотности турбулентного потока массы можно представить с помощью постоянного коэффициента вихревой диффузии, как описано в § 10.1.3 (пример 3). В соответствии с принятыми допущениями можно предположить существование вектора средней по времени скорости в указанной цилиндрической системе координат:

$$\bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0; \quad \bar{v}_z = \bar{v}_0. \quad (10.1.4-1)$$

Для данной задачи усредненное по времени дифференциальное уравнение неразрывности для вещества  $A$ , выведенное в § 10.1.2, сводится к

$$\bar{v}_0 \left( \frac{\partial \bar{\omega}_{(A)}}{\partial z} \right)_r = (\mathcal{D}_{(AB)}^0 + \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)}) \operatorname{div} \nabla \bar{\omega}_{(A)}. \quad (10.1.4-2)$$

Интуитивно предполагаем  $\mathcal{D}_{(AB)}^0 \ll \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)}$ , что, как мы увидим дальше, подтверждается экспериментом.

Так как жидкость на большом расстоянии от места введения состоит из вещества  $B$ , представляется целесообразным использовать граничное условие, которое в сферической системе координат  $(r, \theta)$ , представленной на рис. 10.1.4-1, имеет вид:

$$\bar{\omega}_{(A)} \rightarrow 0 \text{ при } \tilde{r} \rightarrow \infty. \quad (10.1.4-3)$$

Мы должны также сделать вывод о скорости потока массы вещества  $A$  в точке введения. Очевидно, что для любой постоянной величины  $r$

$$W_{(A)} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{n}_{(A)} \tilde{r} \tilde{r}^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \left[ -\rho_{(A)} \bar{v}_r - \rho (\mathcal{D}_{(AB)}^0 + \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)}) \frac{\partial \bar{\omega}_{(A)}}{\partial r} \right] \times \tilde{r}^2 \sin \theta d\theta. \quad (10.1.4-4)$$

Если на время предположить, что

$$\rho_{(A)} \tilde{r} \rightarrow C_1 = \text{const} \quad \text{при} \quad \tilde{r} \rightarrow 0, \quad (10.1.4-5)$$

то при  $\tilde{r} \rightarrow 0$

$$\int_0^{\pi} \bar{\rho}_{(A)} \bar{v}_r \tilde{r}^2 \sin \theta d\theta = \int_0^{\pi} \bar{\rho}_{(A)} \bar{v}_r \tilde{r}^2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \bar{\rho}_{(A)} \bar{v}_r \tilde{r}^2 \int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0 \quad (10.1.4-6)$$

и при  $\tilde{r} \rightarrow 0$

$$W_{(A)} = -2\pi \int_0^{\pi} \rho (\mathcal{D}_{(AB)}^0 + \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)}) \frac{\partial \bar{\omega}_{(A)}}{\partial \tilde{r}} \tilde{r}^2 \sin \theta d\theta = -2\pi \rho (\mathcal{D}_{(AB)}^0 + \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)}) \frac{\partial \bar{\omega}_{(A)}}{\partial \tilde{r}} \tilde{r}^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = -4\pi \rho (\mathcal{D}_{(AB)}^0 + \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)}) \frac{\partial \bar{\omega}_{(A)}}{\partial \tilde{r}} \tilde{r}^2. \quad (10.1.4-7)$$

При выводе уравнения (10.1.4-7) мы использовали уравнение (10.1.4-5) для обоснования условия:

$$\tilde{r}^2 \frac{\partial \bar{\omega}_{(A)}}{\partial \tilde{r}} = -\frac{C_1}{\rho} \quad \text{при} \quad \tilde{r} \rightarrow 0. \quad (10.1.4-8)$$

Позже мы вернемся к уравнению (10.1.4-5).

Теперь будем искать решение уравнения (10.1.4-2), соответствующее граничным условиям (10.1.4-3) и (10.1.4-7). Это несколько неудобно, так как уравнение (10.1.4-2) формулируется в цилиндрических координатах, а граничные условия (10.1.4-3) и (10.1.4-7) даются для сферических координат. Вильсон [2] предложил искать решение в виде

$$\bar{\omega}_{(A)} = e^{-az} \varphi(\tilde{r}). \quad (10.1.4-9)$$

Используя эту предполагаемую форму решения, можно рассчитать:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\nabla \bar{\omega}_{(A)}) &= 2\varphi \cdot \nabla(e^{-az}) + \varphi \operatorname{div} \nabla(e^{-az}) + e^{-az} \operatorname{div} \nabla \varphi = \\ &= -2ae^{-az} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_r + az\varphi e^{-az} + e^{-az} \operatorname{div} \nabla \varphi \end{aligned} \quad (10.1.4-10)$$

и

$$\left( \frac{\partial \bar{\omega}_{(A)}}{\partial z} \right)_r = -ae^{-az} \varphi + e^{-az} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_r. \quad (10.1.4-11)$$

В результате уравнение (10.1.4-2) принимает вид:

$$\varphi \left( -\frac{az\bar{v}_r}{\mathcal{D}_{(AB)}^0 + \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)}} - az \right) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_r \left( \frac{\bar{v}_r}{\mathcal{D}_{(AB)}^0 + \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)}} + 2a \right) = \operatorname{div} \nabla \varphi. \quad (10.1.4-12)$$

Если ввести

$$a \equiv -\frac{\bar{v}_r}{2(\mathcal{D}_{(AB)}^0 + \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)})}, \quad (10.1.4-13)$$

уравнение (10.1.4-12) сводится к

$$\alpha^2 \varphi = \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{r}^2}. \quad (10.1.4-14)$$

Обычной заменой переменных

$$Y \equiv \tilde{r} \varphi \quad (10.1.4-15)$$

приведем уравнение (10.1.4-14) к виду

$$\alpha^2 Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial \tilde{r}^2}, \quad (10.1.4-16)$$

решением которого будет:

$$Y \equiv \tilde{r} \varphi = A \exp(\alpha \tilde{r}) + B \exp(-\alpha \tilde{r}). \quad (10.1.4-17)$$

Для того чтобы удовлетворить граничному условию (10.1.4-3), необходимо, чтобы

$$B = 0 \quad (10.1.4-18)$$

(следует запомнить, что  $\alpha$  отрицательно).

Из уравнений (10.1.4-9), (10.1.4-15) и (10.1.4-18) находим:

$$\bar{\omega}_{(A)} = \frac{A}{\tilde{r}} \exp[\alpha(\tilde{r} - z)]. \quad (10.1.4-19)$$

Наконец, из граничного условия (10.1.4-7) следует, что при  $\tilde{r} \rightarrow 0$ :

$$W_{(A)} \rightarrow 4\pi \rho (\mathcal{D}_{(AB)}^0 + \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)}) A \quad (10.1.4-20)$$

или

$$A \equiv \frac{W_{(A)}}{4\pi \rho (\mathcal{D}_{(AB)}^0 + \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)})}. \quad (10.1.4-21)$$

В общем распределение концентрации массы вещества  $A$  в свободном турбулентном течении представляется уравнениями (10.1.4-13), (10.1.4-19) и (10.1.4-21). Очевидно, что уравнение (10.1.4-5) справедливо.

Очень полезным для практики является выражение

$$\frac{d \ln(\tilde{r} \bar{\omega}_A)}{d(\tilde{r} - z)} = \alpha = - \frac{\bar{v}_0}{2(\mathcal{D}_{(AB)}^0 + \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)})}. \quad (10.1.4-22)$$

Если левую часть этого выражения можно получить по экспериментальным данным, его можно использовать для расчета  $\mathcal{D}_{(AB)}^0 + \mathcal{D}_{(AB)}^{(t)}$ .

В работе [4] оно используется для углекислого газа, вдуваемого в поток воздуха, где  $\mathcal{D}_{(\text{CO}_2, \text{ воздух})}^{(t)} = 23 \text{ см}^2/\text{с}$ . Эта величина на несколько порядков больше  $\mathcal{D}_{(\text{CO}_2, \text{ воздух})}^0$ . Эта экспериментальная методика описана в работе [5].

## 10.2. УСРЕДНЕНИЕ ПО ПЛОЩАДИ

**10.2.1. Усреднение по поверхности при переносе массы.** Ниже понятие усреднения по поверхности, введенное в § 4.2.1—4.2.3 и 7.2.1—7.2.3 обобщается и на перенос массы. При этом весьма существенно, что иногда целесообразно проводить усреднение уравнения неразрывности по площади поперечного сечения, перпендикулярного общему потоку массы.

Следует учитывать, что при использовании одного из методов интегрального усреднения теряется некоторая информация. Для компенсации этой потери необходимо использовать приближение или применить эмпирическое соотношение. Очевидно, что приближение, использованное в § 10.2.2, несколько отличается от приближений § 4.2.2 и 7.2.2. В связи со специфическим характером усреднения по поверхности нельзя дать конкретных рекомендаций по поводу применения различных типов приближений для любой задачи. Просто, зная о необходимости использовать приближение, можно найти примерные задачи в § 4.2.2 и 10.2.2.

Мы не будем рассматривать приближенную теорию концентрационного пограничного слоя. Как указывалось в § 9.4.2, между переносом массы и переносом энергии имеется большое сходство. При отсутствии гомогенных химических реакций и естественной конвекции уравнение неразрывности для вещества  $A$  в несжимаемой жидкости принимает такую же форму, как и дифференциальное уравнение баланса энергии при отсутствии вязкой диссипации. При этих ограничениях, сделав некоторые необходимые изменения в терминологии, теорему, использованную в § 7.2.3, можно считать приближенной теорией концентрационного пограничного слоя для двумерного обтекания искривленной стенки.

Представляется наиболее целесообразным совместно изучать материал этого параграфа и § 4.2.2 и 7.2.2.

**10.2.2. Продольная дисперсия.** В момент  $t=0$  при  $z>0$  очень длинная трубка заполнена чистым растворителем  $\rho_{(A)}=0$ ; при  $z<0$  растворитель имеет равномерную концентрацию растворенного вещества  $\rho_{(A)}=\rho_{(A)0}$ . При  $t>0$  жидкость перемещается в направлении  $z$  через трубку с постоянной объемной скоростью. Требуется определить концентрацию в трубке как функцию времени и координат.

В этом анализе физические свойства жидкости считаются постоянными. Из этого следует, что распределение скорости не зависит от состава; его особая форма зависит от определяющего уравнения, выбранного для тензора дополнительных напряжений, описанного в § 3.2.1. Для настоящего анализа нет необходимости выбирать какое-то определяющее уравнение или добиваться точности в распределении скорости.

Гомогенная химическая реакция отсутствует. Уравнение неразрывности для вещества  $A$  соответственно требует:

$$\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rn_{(A)r})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial n_{(A)\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial n_{(A)z}}{\partial z} = 0. \quad (10.2.2-1)$$

Ясно, что при использовании уравнения в качестве основы для нашего анализа необходимо решить дифференциальное уравнение в частных производных.

Сначала проведем усреднение концентрации по поверхности

$$\bar{\rho}_{(A)} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho_{(A)} r dr d\theta \quad (10.2.2-2)$$

как функции времени и положения на оси. Следовательно, необходимо провести также усреднение по поверхности уравнения (10.2.2-1)

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{(A)}}{\partial t} + \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[ \frac{\partial (r n_{(A)r})}{\partial r} + \frac{\partial n_{(A)\theta}}{\partial \theta} \right] dr d\theta + \frac{\partial \bar{n}_{(A)z}}{\partial z} = 0. \quad (10.2.2-3)$$

Проинтегрировав второй и третий члены слева, найдем:

$$\frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial (r n_{(A)r})}{\partial r} dr d\theta = 0 \quad (10.2.2-4)$$

и

$$\frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial n_{(A)\theta}}{\partial \theta} dr d\theta = 0. \quad (10.2.2-5)$$

В результате уравнение (10.2.2-3) упрощается:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{(A)}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{n}_{(A)z}}{\partial z} = 0. \quad (10.2.2-6)$$

Второй член в левой части этого уравнения можно представить через концентрацию, используя усредненную по площади компоненту  $z$  первого закона Фика:

$$\bar{n}_{(A)z} = \bar{\rho}_{(A)} \bar{v}_z - \mathcal{D}_{(AB)} \frac{\partial \bar{\rho}_{(A)}}{\partial z}. \quad (10.2.2-7)$$

К сожалению, таким путем нельзя получить дифференциальное уравнение для  $\bar{\rho}_{(A)}$ .

Из уравнения (10.2.2-7) следует, что проще всего записать:

$$\bar{n}_{(A)z} = \bar{\rho}_{(A)} \bar{v}_z - \mathcal{K} \frac{\partial \bar{\rho}_{(A)}}{\partial z}. \quad (10.2.2-8)$$

С целью компенсации того, что усреднение по поверхности от произведения обычно не равно произведению средних по поверхности величин, коэффициент диффузии заменяется эмпирическим коэффициентом дисперсии  $\mathcal{K}$ , который будет считаться постоянной. Учитывая, что

$$\bar{v}_z = \text{const}, \quad (10.2.2-9)$$

можно увидеть, что, используя уравнение (10.2.2-6), можно получить из (10.2.2-8)

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{(A)}}{\partial t} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{\rho}_{(A)}}{\partial z} - \mathcal{K} \frac{\partial^2 \bar{\rho}_{(A)}}{\partial z^2} = 0. \quad (10.2.2-10)$$

Теперь необходимо найти решение этого уравнения при начальных условиях:

$$\text{при } t=0 \quad \bar{\rho}_{(A)}=0 \quad \text{для } z>0 \quad (10.2.2-11)$$

и

$$\text{при } t=0 \quad \bar{\rho}_{(A)}=\rho_{(A)0} \quad \text{для } z<0. \quad (10.2.2-12)$$

Если представить  $\bar{\rho}_{(A)}$  как функцию  $t$  и новой независимости переменной  $\zeta$

$$\zeta=z-\bar{v}_z t, \quad (10.2.2-13)$$

уравнение (10.2.2-10) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}_{(A)}}{\partial t}\right)_\zeta - \kappa \frac{\partial^2 \bar{\rho}_{(A)}}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (10.2.2-14)$$

Учитывая § 9.2.1, представим

$$\bar{\rho}_{(A)}^* \equiv \bar{\rho}_{(A)}/\rho_{(A)0} \quad (10.2.2-15)$$

как функцию независимости переменной  $\eta$ :

$$\eta \equiv \frac{\zeta}{V\sqrt{4\kappa t}}, \quad (10.2.2-16)$$

так как это дает возможность представить уравнение (10.2.2-14) в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \bar{\rho}_{(A)}^*}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\bar{\rho}_{(A)}^*}{d\eta} = 0. \quad (10.2.2-17)$$

Из (10.2.2-11) и (10.2.2-12) получим соответствующие граничные условия:

$$\bar{\rho}_{(A)}^* \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad (10.2.2-18)$$

и

$$\bar{\rho}_{(A)}^* \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow -\infty. \quad (10.2.2-19)$$

Проинтегрировав уравнение (10.2.2-17) один раз, найдем:

$$\frac{d\bar{\rho}_{(A)}^*}{d\eta} = C_1 \exp(-\eta^2). \quad (10.2.2-20)$$

Повторно проинтегрировав уравнение (10.2.2-17) при граничном условии (10.2.2-18), получим:

$$\bar{\rho}_{(A)}^* = -C_1 \int_{\eta}^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta = -\frac{C_1 V \sqrt{\pi}}{2} (1 - \operatorname{erf} \eta). \quad (10.2.2-21)$$

Для того чтобы удовлетворить граничному условию (10.2.2-19), необходимо положить:

$$C_1 = -1/V\sqrt{\pi}. \quad (10.2.2-22)$$

Следовательно, для средней по поверхности относительной концентрации в трубке окончательно получим:

$$\overline{\rho}_{(A)}^* = 0,5(1 - \operatorname{erf} \eta). \quad (10.2.2-23)$$

Одним из результатов этого решения является определение длины  $L$  переходной зоны, на протяжении которой  $\rho_{(A)}$  изменяется от  $0,9 \rho_{(A)0}$  до  $0,1 \rho_{(A)0}$ . Из уравнения (10.2.2-23) найдем:

$$0,8 = 0,5(\operatorname{erf} \eta_{0,1} - \operatorname{erf} \eta_{0,9}) = \operatorname{erf} \eta_{0,1} = \operatorname{erf} \left( \frac{L}{4\sqrt{\mathcal{K}t}} \right). \quad (10.2.2-24)$$

Из таблицы функции ошибок [6] имеем:

$$L = 3,62 \sqrt{\mathcal{K}t}. \quad (10.2.2-25)$$

Тейлор [7] также анализировал продольную дисперсию, происходящую в результате введения концентрированного растворимого вещества в поперечном сечении  $z=0$  в момент  $t=0$ .

Очень интересный теоретический анализ зависимости коэффициента дисперсии  $\mathcal{K}$  от коэффициента диффузии  $\overline{\mathcal{D}}_{(AB)}$  проведен Тейлором [7—9], а позднее более точно Арисом [10], получившим

$$\mathcal{K} = \overline{\mathcal{D}}_{(AB)} + \chi \cdot \frac{\bar{v}^2 z R^2}{\overline{\mathcal{D}}_{(AB)}}. \quad (10.2.2-26)$$

Здесь  $\overline{\mathcal{D}}_{(AB)}$  — усредненный по поверхности коэффициент диффузии, а  $\chi$  — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения трубы, а также от изменений распределения скорости и коэффициента диффузии. Если коэффициент диффузии является постоянным, профиль скорости — параболическим, а поперечное сечение трубы — круговым, то

$$\chi = \frac{1}{48}. \quad (10.2.2-27)$$

### 10.3. ЛОКАЛЬНОЕ УСРЕДНЕНИЕ ПО ОБЪЕМУ

**10.3.1. Перенос массы в пористых средах.** Большой интерес вызывают химические реакции в слоях пористого материала, пропитанного катализатором. В некоторых местах сточные воды откачиваются в отстойник и далее в пористую породу. При этом возникает серьезная опасность загрязнения источников чистой воды для населения. Когда значительная часть речного стока отводится в отдаленные районы (например, посредством акведуков), в область дельты реки может поступать соленая вода, нарушая первоначальное плодородие прибрежных почв. Можно ли накачивать чистую воду в колодцы, пробуренные в дельте для того, чтобы ограничить концентрацию соли в почве? Для анализа переноса массы лучше всего в большинстве случаев (за одним исключением [13]) считать пористый материал вместе с содержащимися в нем газами и жидкостями сплошной средой, к которой применимо обычное дифференциальное уравнение неразрывности, описанное в § 8.2.1. Иными словами, перенос массы в слое пористого катализатора считается полностью аналогичным диффузии гелия

в стекле «Пирекс» [14], либо диффузии трихлорметана в твердом со- полимере этилена и пропилена [15]. Однако между ними существует существенное отличие. В случае слоя пористого катализатора четко обнаруживаются две фазы: диффузия в газовой фазе и химическая реакция на поверхности раздела газ — твердое вещество. В отличие от этого скорость движения гелия в стекле «Пирекс» и скорость диф- фузии трихлорметана в сополимере регулируется межмолекулярными силами. Обычно в задачах для определения скорости и концентрации не используются действительные распределения этих величин в жидкой фазе.

Хорошо усвоив предыдущий материал, мы будем рассматривать перенос массы по аналогии с переносом импульса и энергии [§ 7.3.1—7.3.5], следовательно, мы начнем с выведения локального усреднения по объему дифференциального уравнения неразрывности для вещества  $A$ .

Для упрощения ограничимся течением одной жидкости через стационарную, жесткую, пористую среду.

*10.3.2. Локальное усреднение по объему уравнения неразрывности для вещества A.* Так же, как в § 4.3.2, начнем с выведения локального усреднения по объему уравнения неразрывности. Возьмем какую-то точку  $z$  в пористой среде и проинтегрируем уравнение неразрывности для вещества  $A$  по области пространства  $V_{(f)}$ , занятой жидкостью внутри области  $S$ , связанной с  $z$ :

$$\frac{1}{V} \int_{V_{(f)}} \left( \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{n}_{(A)} - r_{(A)} \right) dV = 0. \quad (10.3.2-1)$$

При этом используется уравнение неразрывности для вещества  $A$  в форме уравнения (А) табл. 8.2.2-5. В левой части уравнения (10.3.2-1) можно поменять местами операции интегрирования по объему и дифференцирования по времени:

$$\frac{1}{V} \int_{V_{(f)}} \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} dV = \bar{\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t}}. \quad (10.3.2-2)$$

Используя во втором члене слева (10.3.2-1) теорему § 4.3.3, получаем:

$$\frac{1}{V} \int_{V_{(f)}} \operatorname{div} \mathbf{n}_{(A)} dV = \operatorname{div} \bar{\mathbf{n}}_{(A)} - r''_{(A)}, \quad (10.3.2-3)$$

где скорость образования вещества  $r''_{(A)}$  в результате каталитической химической реакции на поверхности раздела фаз жидкость — твердое вещество имеет вид:

$$r''_{(A)} \equiv - \frac{1}{V} \int_{S_w} \mathbf{n}_{(A)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (10.3.2-4)$$

Уравнения (10.3.2-3) и (10.3.2-2) позволяют представить уравнение (10.3.2-1) в виде

$$\bar{\frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t}} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{n}}_{(A)} = r''_{(A)} + \bar{r}_{(A)}. \quad (10.3.2-5)$$

Эта форма является одним из самых удобных выражений локально усредненного по объему уравнения неразрывности для вещества  $A$ .

Если же начать с уравнения (Б) табл. 8.2.2-5, используя те же рассуждения, можно получить еще одну удобную форму локально усредненного по объему уравнения неразрывности для компоненты  $A$

$$\frac{\partial \bar{c}_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{N}_{(A)} = \frac{\bar{r}_{(A)''}}{\bar{M}_{(A)}} + \frac{\bar{r}_{(A)}}{\bar{M}_{(A)}}. \quad (10.3.2-6)$$

Этот результат можно получить также, разделив уравнение (10.3.2-5) на молекулярную массу компоненты.

В следующих параграфах обсуждаются определяющие уравнения для локально усредненного по объему вектора потока массы  $\bar{\mathbf{n}}_{(A)}$ .

*10.3.3. Область применимости первого закона Фика.* Пусть  $l_0$  — характерный диаметр поры, а  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега молекулы [16]. Если число Кнудсена равно:

$$N_{Kn} \equiv \frac{l_0}{\lambda} > 10, \quad (10.3.3-1)$$

для описания двухкомпонентной диффузии газа в пористой среде можно использовать первый закон Фика [17]. Это уравнение может применяться также для описания диффузии в многокомпонентных растворах в трех предельных случаях, описанных в § 8.4.7. В современной практике первый закон Фика всегда используется в связи с двухкомпонентной диффузией в жидкостях. В этом параграфе будем рассматривать соответствующие уравнения первого закона Фика при анализе диффузии в жидкости, находящейся в проницаемой структуре.

Предположим, что коэффициент диффузии  $\mathcal{D}_{(AB)}$  является постоянным. Можно провести локальное усреднение по объему первого закона Фика в форме уравнения (А) табл. 8.4.6-1. Тогда найдем:

$$\bar{\mathbf{n}}_{(A)} = \overline{\rho_{(A)} \mathbf{v}} - \mathcal{D}_{(AB)} \rho \overline{\nabla \omega}_{(A)}. \quad (10.3.3-2)$$

Согласно теореме из § 4.3.3

$$\overline{\nabla \omega}_{(A)} = \overline{\nabla \omega}_{(A)} + \frac{1}{\overline{\rho V}} \int_{S_w} \omega_{(A)} \mathbf{n} dS. \quad (10.3.3-3)$$

Отсюда можно записать уравнение (10.3.3-2) в виде

$$\bar{\mathbf{n}}_{(A)} = \overline{\rho_{(A)} \mathbf{v}} - \overline{\rho} \mathcal{D}_{(AB)} \overline{\nabla \omega}_{(A)} - \delta_{(A)}, \quad (10.3.3-4)$$

где

$$\delta_{(A)} = \overline{\rho_{(A)} \mathbf{v}} - \overline{\rho_{(A)} \mathbf{v}} + \mathcal{D}_{(AB)} \overline{\rho \nabla \omega}_{(A)} - \mathcal{D}_{(AB)} \overline{\rho} \overline{\nabla \omega}_{(A)} + \frac{\overline{\rho} \mathcal{D}_{(AB)}}{V} \int_{S_w} \omega_{(A)} \mathbf{n} dS. \quad (10.3.3-5)$$

Первые четыре члена в правой части уравнения (10.3.3-5) учитывают то, что локальное среднее по объему от произведения не равно произведению локальных средних. При достаточно малом объеме усреднения влиянием этих первых четырех членов можно пренебречь, так как маловероятно, что плотность массы компоненты сильно зависит от координат. Пятый член в правой части уравнения (10.3.3-5) можно назвать «извилистостью». Эта величина учитывает изгибы и повороты

каналов, по которым движется жидкость. Эта величина была бы тождественно равна нулю, если бы объем  $S_w$  был правильным круго-вым цилиндром, для которого значение  $\omega_{(A)}$  зависело бы только от положения на оси. Поскольку очевидно, что пятый член в правой части уравнения (10.3.3-5) наиболее важен, мы будем называть  $\delta_{(A)}$  вектором извилистости массовой плотности для вещества  $A$ .

Локальное усреднение по объему уравнения неразрывности для вещества  $A$  в виде (10.3.2-5) можно представить как

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{\rho}_{(A)} \bar{v}) = -\operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)}^{(e)} + \bar{r}_{(A)}'' + \bar{r}_{(A)}, \quad (10.3.3-6)$$

где вектор

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} = -\bar{\rho} \mathcal{D}_{(AB)} \nabla \bar{\omega}_{(A)} - \delta_{(A)} \quad (10.3.3-7)$$

следует считать «эффективной» плотностью потока массы относительно  $v$ .

Подобные результаты можно получить, предположив, что коэффициент диффузии  $\mathcal{D}_{(AB)}$  — постоянная, и проведя локальное усреднение по объему уравнения первого закона Фика в форме уравнения (Г) табл. 8.4.6-1:

$$\bar{\mathbf{N}}_{(A)} = \bar{c}_{(A)} \bar{v}^* - \bar{c} \mathcal{D}_{(AB)} \nabla \bar{x}_{(A)} - \Delta_{(A)}; \quad (10.3.3-8)$$

$$\Delta_{(A)} = \bar{c}_{(A)} \bar{v}^* - \bar{c}_{(A)} \bar{v}^* + \mathcal{D}_{(AB)} \bar{c} \nabla \bar{x}_{(A)} - \mathcal{D}_{(AB)} \bar{c} \nabla \bar{x}_{(A)} + \frac{\bar{c} \mathcal{D}_{(AB)}}{V} \int_{S_w} x_{(A)} \mathbf{n} dS. \quad (10.3.3-9)$$

Пятый член в правой части уравнения (10.3.3-9) может также считаться коэффициентом извилистости, и поэтому в дальнейшем мы будем называть  $\Delta_{(A)}$  вектором извилистости молярной плотности для вещества  $A$ . Тогда локальное усреднение по объему уравнения неразрывности (10.3.2-6) принимает вид:

$$\frac{\partial \bar{c}_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{c}_{(A)} \bar{v}^*) = -\operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)}^{(e)} + \frac{\bar{r}_{(A)}''}{M_{(A)}} + \frac{\bar{r}_{(A)}}{M_{(A)}}, \quad (10.3.3-10)$$

где вектор

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} = -\bar{c} \mathcal{D}_{(AB)} \nabla \bar{x}_{(A)} - \Delta_{(A)} \quad (10.3.3-11)$$

является эффективной молярной плотностью потока по отношению к  $\bar{v}^*$ .

Следует подчеркнуть, что

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} \neq \frac{M_{(A)} M_{(B)}}{M} \mathbf{j}_{(A)}^{(e)}. \quad (10.3.3-12)$$

**10.3.4. Эмпирические соотношения для  $\delta_{(A)}$  и  $\Delta_{(A)}$ .** В этом параграфе приводятся три примера использования экспериментальных данных в соотношениях для  $\delta_{(A)}$  и  $\Delta_{(A)}$ , введенных в § 10.3.3. При этом мы будем исходить из следующего:

1. Векторы извилистости  $\delta_{(A)}$  и  $\Delta_{(A)}$  не зависят от системы координат, например:

$$\begin{aligned} \delta_{(A)}^* &\equiv \overline{\rho_{(A)}^* \mathbf{v}^*} - \overline{\rho_{(A)}^* \mathbf{v}^*} + \mathcal{D}_{(AB)} \overline{\rho^* \nabla \omega_{(A)}} - \mathcal{D}_{(AB)} \overline{\rho^* \nabla \omega_{(A)}} + \\ &+ \frac{\overline{\rho^* \mathcal{D}_{(AB)}}}{V} \int_{S_\omega} \omega_{(A)}^* \mathbf{n}^* dS = \overline{\rho_{(A)}^* (\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^*)} + \mathcal{D}_{(AB)} \overline{\rho^* \nabla \omega_{(A)}} - \\ &- \mathcal{D}_{(AB)} \overline{\rho^* \nabla \omega_{(A)}} + \frac{\overline{\rho^* \mathcal{D}_{(AB)}}}{V} \int_{S_\omega} \omega_{(A)}^* \mathbf{n}^* dS = \overline{\rho_{(A)} \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v})} + \\ &+ \int_{(AB)} \overline{\rho \mathbf{Q} \cdot \nabla \omega_{(A)}} - \mathcal{D}_{(AB)} \overline{\rho \mathbf{Q} \nabla \omega_{(A)}} + \frac{\overline{\rho \mathcal{D}_{(AB)}}}{V} \int_{S_\omega} \omega_{(A)} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{Q} \cdot \delta_{(A)}. \quad (10.3.4-1) \end{aligned}$$

Вторая строка этого уравнения показывает, что локальное среднее по объему от локального среднего есть просто локальная средняя; в третьей строке используется независимость плотности массы вещества  $A$  и разности скоростей от системы отсчета. Здесь  $\mathbf{Q}$  является ортогональным тензором второго ранга, который может зависеть от времени. Таким же образом можно доказать, что вектор извилистости молярной плотности  $\Delta_{(A)}$  не зависит от системы отсчета;

2. Предполагается, что принцип независимости материала от системы отсчета, введенный в § 2.3.1, применим к любой эмпирической зависимости для  $\delta_{(A)}$  и  $\Delta_{(A)}$ ;

3. Теорема Бэкингема — Пая служит для ограничения формы любого выражения для  $\delta_{(A)}$  и  $\Delta_{(A)}$ ;

4. Поверхность усреднения  $\delta_{(A)}$  настолько велика, что  $\delta_{(A)}$  и  $\Delta_{(A)}$  можно не считать явными функциями положения в пористой структуре, хотя они вполне могут быть явными функциями положения, так как они зависят от других переменных.

*Пример 1. Неориентированные твердые пористые материалы без учета конвекции.* В § 9.3.1 мы доказали, что при отсутствии вынужденной конвекции естественной конвекцией можно пренебречь в предельном случае вблизи равновесия. В этом пределе первые четыре члена в правой части уравнения (10.3.3-5) можно опустить:

$$\delta_{(A)} = \frac{\overline{\rho \mathcal{D}_{(AB)}}}{V} \int_{S_\omega} \omega_{(A)} \mathbf{n} dS. \quad (10.3.4-2)$$

Для неориентированной геометрически однородной пористой среды  $\delta_{(A)}$  можно представить как функцию «диаметра частицы»  $l_0$ , коэффициента диффузии  $\mathcal{D}_{(AB)}$  пористости  $\Psi$ , а также некоторых критериев распределения локальной концентрации, например  $\rho_{(A)}$  и  $\overline{\rho \nabla \omega_{(A)}}$ :

$$\delta_{(A)} = \delta_{(A)} (l_0, \mathcal{D}_{(AB)}, \Psi, \overline{\rho_{(A)} \nabla \omega_{(A)}}). \quad (10.3.4-3)$$

Теперь рассмотрим зависимость  $\delta_{(A)}$  от  $\overline{\rho \nabla \omega_{(A)}}$ :

$$\delta_A = \widehat{\delta}_{(A)} (\overline{\rho \nabla \omega_{(A)}}). \quad (10.3.4-4)$$

В соответствии с принципом независимости материала от системы отсчета функциональные зависимости этих двух переменных должны быть одинаковы в каждой системе отсчета. Следовательно,

$$\delta_{(A)}^* \equiv \mathbf{Q} \cdot \delta_{(A)} = \mathbf{Q} \cdot \widehat{\delta} (\overline{\rho \nabla \omega_{(A)}}) = \widehat{\delta}_{(A)} (\mathbf{Q} \cdot \overline{\rho \nabla \omega_{(A)}}) \quad (10.3.4-5)$$

или  $\delta_{(A)}$  является изотропной функцией [18]:

$$\widehat{\delta}_{(A)}(\bar{\rho}\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}) = \mathbf{Q}^T \cdot \widehat{\delta}_{(A)}(\mathbf{Q} \cdot \bar{\rho}\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}). \quad (10.3.4-6)$$

Согласно теореме представления для изотропной векторной функции одного векторного аргумента [18] можно записать:

$$\delta_{(A)} = \widehat{\delta}_{(A)}(\bar{\rho}\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}) = D_{(A)}\bar{\rho}\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}, \quad (10.3.4-7)$$

где

$$D_{(A)} = \widehat{D}_{(A)}(\bar{\rho}|\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}|). \quad (10.3.4-8)$$

Сравнение уравнений (10.3.4-7) и (10.3.4-8) с уравнением (10.3.4-3) показывает, что

$$D_{(A)} = D_{(A)}(l_0, \mathcal{D}_{(AB)}, \Psi, \bar{\rho}_{(A)}, \bar{\rho}|\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}|). \quad (10.3.4-9)$$

Используя теорему Бэкингема — Пая [19], получаем:

$$D_{(A)} = \mathcal{D}_{(AB)} D^*_{(A)}. \quad (10.3.4-10)$$

Здесь

$$D^*_{(A)} = D^*_{(A)} \left( \Psi \frac{l_0 \bar{\rho} |\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}|}{\bar{\rho}_{(A)}} \right). \quad (10.3.4-11)$$

В общем уравнения (10.3.4-7), (10.3.4-10) и (10.3.4-11) представляют собой простейшую форму эмпирических соотношений для вектора извилистости массовой плотности в неориентированной пористой среде  $\delta_{(A)}$ .

*Пример 2. Поток жидкости в неориентированном пористом твердом материале.*

Для неориентированной пористой среды аналогичной геометрии с учетом конвекции можно представить  $\delta_{(A)}$  в виде функции от диаметра частицы  $l_0$ , коэффициента диффузии  $\mathcal{D}_{(AB)}$ , пористости  $\Psi$ , локально усредненной по объему скорости жидкости относительно локально усредненной по объему скорости твердого вещества  $\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}$ , а также от некоторых характеристик распределения массовой плотности, например  $\bar{\rho}_{(A)}$  и  $\bar{\rho}\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}$

$$\delta_{(A)} = \delta_{(A)}(l_0, \mathcal{D}_{(AB)}, \Psi, \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}, \bar{\rho}_{(A)}\bar{\rho}\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}). \quad (10.3.4-12)$$

Начнем с изучения зависимости  $\delta_{(A)}$  от двух векторов

$$\delta_{(A)} = \widehat{\delta}_{(A)}(\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}, \bar{\rho}\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}). \quad (10.3.4-13)$$

Согласно принципу независимости материала от системы отсчета функциональная зависимость этих двух переменных должна быть одинаковой для любой системы отсчета. Следовательно,

$$\delta^*_{(A)} = \mathbf{Q} \cdot \delta_{(A)} = \mathbf{Q} \cdot \widehat{\delta}_{(A)}(\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}, \bar{\rho}\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}) = \widehat{\delta}_{(A)}(\mathbf{Q} \cdot (\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}), \mathbf{Q} \cdot \bar{\rho}\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}) \quad (10.3.4-14)$$

или  $\delta_{(A)}$  является изотропной функцией [18]:

$$\widehat{\delta}_{(A)}(\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}, \bar{\rho}\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}) = \mathbf{Q}^T \cdot \widehat{\delta}_{(A)}(\mathbf{Q} \cdot [\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}], \mathbf{Q} \cdot \bar{\rho}\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}). \quad (10.3.4-15)$$

Следуя рассуждениям § 7.3.3, находим:

$$\delta_{(A)} = D_{(A1)}\bar{\rho}\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)} - D_{(A2)}(\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}), \quad (10.3.4-16)$$

где для  $i = 1, 2$ ,

$$D_{(Ai)} = D_{(Ai)}(|\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}|, \bar{\rho}|\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}|, \bar{\rho}(\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)})\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}, \bar{\rho}_{(A)}, l_0, \mathcal{D}_{(AB)}, \Psi). \quad (10.3.4-17)$$

Используя теорему Бэкингема — Пая [19], находим:

$$D_{(A1)} = \mathcal{D}_{(AB)} D^*_{(A1)} \quad (10.3.4-18)$$

и

$$D_{(A2)} = l_0 \bar{\rho} |\bar{\nabla}\bar{\omega}_{(A)}| D^*_{(A2)}. \quad (10.3.4-19)$$

Здесь для  $i = 1, 2$

$$D^*(A_i) = D^*(A_i) \left( N_{Pe}, \frac{[\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}] \cdot \nabla \bar{\omega}_{(A)}}{|\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}| |\nabla \bar{\omega}_{(A)}|}, \frac{l_0 \bar{\rho} |\nabla \bar{\omega}_{(A)}|}{\bar{\rho}_{(A)}}, \Psi \right) \quad (10.3.4-20)$$

и

$$N_{Pe} \equiv \frac{l_0 |\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}^{(s)}|}{\mathcal{D}_{(AB)}}. \quad (10.3.4-21)$$

Предполагается, что для  $|\nabla \bar{\omega}_{(A)}| = 0$   $D^*(A_2) = 0$ , поэтому в этом пределе  $\delta_{(A)} = 0$ .

Следовательно, можно сказать, что уравнения (10.3.4-16)–(10.3.4-20) представляют собой простейшую форму, которую могут принимать эмпирические соотношения для массовой плотности вектора извилистости  $\delta_{(A)}$ , когда жидкость течет через неориентированную пористую среду.

*Пример 3. Ориентированные твердые пористые материалы без учета конвекции.* Из примера 1 видно, что когда конвекцией можно пренебречь, уравнение (10.3.3-4) принимает вид (10.3.4-2). Однако не следует думать, что уравнения (10.3.4-7), (10.3.4-11) описывают вектор извилистости плотности массы пористой структуры, в которой диаметр частицы  $l$  является функцией координат. Для такой структуры уравнение (10.3.4-3) необходимо изменить с учетом зависимости от дополнительных векторов  $\mathbf{n}$ , возможно, тензорных величин. Например, можно постулировать зависимость  $\delta_{(A)}$  от локального градиента на диаметре частицы, а также от  $\bar{\rho} \nabla \bar{\omega}_{(A)}$ :

$$\delta_{(A)} = \delta_{(A)}(l, \mathcal{D}_{(AB)}, \Psi, \bar{\rho}_{(A)}, \bar{\rho} \nabla \bar{\omega}_{(A)}, \nabla l). \quad (10.3.4-22)$$

Следуя рассуждениям, используемым в примере 2, в соответствии с принципом независимости материала от системы отсчета и теоремы Бэкингема — Пая будем иметь:

$$\delta_{(A)} = E_{(A1)} \bar{\rho} \nabla \bar{\omega}_{(A)} + E_{(A2)} \nabla l, \quad (10.3.4-23)$$

где

$$E_{(A1)} = \mathcal{D}_{(AB)} E^*_{(A1)}; \quad (10.3.4-24)$$

$$E_{(A2)} = \mathcal{D}_{(AB)} \bar{\rho} |\nabla \bar{\omega}_{(A)}| E^*_{(A2)}; \quad (10.3.4-25)$$

и для  $i = 1, 2$ ,

$$E^*_{(Ai)} = E^*_{(Ai)} \left( \frac{\nabla l \cdot \Delta \omega_{(A)}}{|\nabla l| |\nabla \omega_A|}, |\nabla l|, \frac{l_0 |\nabla \bar{\omega}_{(A)}|}{\bar{\rho}_{(A)}}, \Psi \right). \quad (10.3.4-26)$$

Предполагается, что для  $|\nabla \bar{\omega}_{(A)}| = 0$   $E^*_{(A2)} = 0$ , следовательно, в этом пределе  $\delta_{(A)} = 0$ .

Уравнения (10.3.4-23)–(10.3.4-26) представляют собой простейшую форму эмпирических соотношений для массовой плотности вектора извилистости  $\delta_{(A)}$  в ориентированной пористой среде при допущении, что ориентация структуры может быть связана с локальным градиентом диаметра частицы.

**10.3.5. Жидкость или плотный газ в неориентированных пористых структурах с однородной пористостью.** Рассмотрим очень важный случай для жидкости или плотного газа в неориентированной структуре с однородной пористостью.

Из § 10.3.3 известно, что локальное усреднение по объему дифференциального уравнения неразрывности для компоненты  $A$  требует, чтобы

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\rho}_{(A)} \bar{\mathbf{v}}) = -\operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)}^{(e)} + r_{(A)}'' + \bar{r}_{(A)}, \quad (10.3.5-1)$$

где выражение

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} \equiv -\bar{\rho} \mathcal{D}_{(AB)} \nabla \bar{\omega}_{(A)} - \delta_{(A)} \quad (10.3.5-2)$$

должно пониматься как вектор эффективной плотности потока массы относительно усредненной по объему и массе скорости  $\bar{\mathbf{v}}$ . При этом

предполагалось только, что первый закон Фика справедлив. Таким образом, при обсуждении мы ограничивались такими плотными жидкостями и газами, для которых средняя длина пробега молекулы мала по сравнению со средним диаметром поры.

В § 10.3.4 сделано допущение (пример 2), что для неориентированного твердого пористого материала, заполненного потоком жидкости, вектор извилистости массовой плотности  $\delta_{(A)}$  можно представить уравнениями (10.3.4-16) и (10.3.4-18) — (10.3.4-21). Следовательно, вектор эффективной плотности массы можно представить в виде

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} = -\bar{\rho} D_{(AB)} (1 + D_{(A1)}^* \nabla \bar{\omega}_{(A)} + l_0 \bar{\rho} |\nabla \bar{\omega}_{(A)}| D_{(A2)}^* \bar{v}), \quad (10.3.5-3)$$

где для  $i=1, 2$

$$D_{(Ai)}^* = D_{(Ai)} \left( N_{Pe}, \frac{\bar{v} \cdot \nabla \bar{\omega}_{(A)}}{|\bar{v}| |\nabla \bar{\omega}_{(A)}|}, \frac{l_0 \bar{\rho} |\nabla \bar{\omega}_{(A)}|}{\bar{\rho}_{(A)}} \Psi \right) \quad (10.3.5-4)$$

и

$$N_{Pe} = \frac{l_0 |\bar{v}|}{\mathcal{D}_{(AB)}}. \quad (10.3.5-5)$$

При получении этого выражения пористая среда считалась неподвижной.

Иногда более удобно представить вектор эффективной плотности потока массы с помощью тензора эффективного коэффициента диффузии  $\mathbf{D}_{(AB)}^{(e)}$ :

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} = -\bar{\rho} \mathbf{D}_{(AB)}^{(e)} \cdot \nabla \bar{\omega}_{(A)}. \quad (10.3.5-6)$$

Здесь

$$\mathbf{D}_{(AB)}^{(e)} = \mathcal{D}_{(AB)} (1 + D_{(A1)}^*) \mathbf{I} - \frac{l_0 |\nabla \bar{\omega}_{(A)}| D_{(A2)}^*}{\bar{v} \cdot \nabla \bar{\omega}_{(A)}} \bar{v} \cdot \bar{v}. \quad (10.3.5-7)$$

Часто гораздо удобнее оперировать в молярном выражении. Если вернуться к § 10.3.3, локальное усреднение по объему дифференциального уравнения неразрывности можно представить также следующим образом:

$$\frac{\partial c_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{c}_{(A)} \bar{v}) = -\operatorname{div} \mathbf{J}_{(A)}^{(e)} + \frac{r''_{(A)}}{M_{(A)}} + \frac{\bar{r}_{(A)}}{M_{(A)}}, \quad (10.3.5-8)$$

где

$$\mathbf{J}_{(A)}^{(e)} = -\bar{c} \mathcal{D}_{(AB)} \nabla \bar{x}_{(A)} - \Delta_{(A)} \quad (10.3.5-9)$$

должно рассматриваться как эффективная плотность молярного потока вещества  $A$  относительно усредненной по объему молярной концентрации  $\bar{v}$ . Используя для  $\Delta_{(A)}$  анализ § 10.3.4 (пример 2) для неориентированной пористой среды, заполненной текущей жидкостью, по аналогии с уравнениями (10.3.5-3) — (10.3.5-5) находим:

$$\mathbf{J}_{(A)}^{(e)} = -\bar{c} \mathcal{D}_{(AB)} (1 + D_{(A1)}^{(e)*}) \nabla \bar{x}_{(A)} + l_0 \bar{c} |\nabla \bar{x}_{(A)}| D_{(A)}^{(e)*} \bar{v}, \quad (10.3.5-10)$$

для  $i = 1, 2$ :

$$D_{(Ai)}^{*\star} = D_{(Ai)}^{\star\star} \left( N_{Pe}^{\star}, \frac{\bar{v}^{\star} \cdot \nabla \bar{x}_{(A)}}{|\bar{v}^{\star}| |\nabla \bar{x}_{(A)}|}, \frac{l_0 \bar{c} |\nabla \bar{x}_{(A)}|}{\bar{c}_{(A)}}, \Psi \right); \quad (10.3.5-11)$$

$$N_{Pe}^{\star} \equiv \frac{l_0 |\bar{v}^*|}{\mathcal{D}_{(AB)}}. \quad (10.3.5-12)$$

Эти результаты можно, конечно, записать с помощью тензора эффективного коэффициента диффузии  $D_{(AB)}^{\star(e)}$ :

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} = -\bar{c} D_{(AB)}^{\star(e)} \cdot \nabla \bar{x}_{(A)}; \quad (10.3.5-13)$$

$$D_{(AB)}^{\star(e)} \equiv \mathcal{D}_{(AB)} (1 + D_{(Ai)}^{*\star}) \mathbf{I} - \frac{l_0 |\nabla \bar{x}_{(A)}| D_{(A2)}^{*\star}}{\bar{v}^{\star} \cdot \nabla \bar{x}_{(A)}} \bar{v}^{\star} \bar{v}^{\star}. \quad (10.3.5-14)$$

Для упрощения возьмем:

$$\text{для } i = 1, 2 \quad D_{(Ai)}^* = D_{(Ai)}^{*\star} (\Psi) \quad (10.3.5-15)$$

и

$$\text{для } i = 1, 2 \quad D_{(Ai)}^{*\star} = D_{(Ai)}^{\star\star} (\Psi). \quad (10.3.5-16)$$

Это позволяет представить уравнения (10.3.5-3) и (10.3.5-10) в виде

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} = -\bar{\rho} A_{(A)} \nabla \bar{\omega}_{(A)} + B_{(A)} \bar{\rho} |\nabla \bar{\omega}_{(A)}| \bar{v} \quad (10.3.5-17)$$

и

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} = -\bar{c} A_{(A)} \nabla \bar{x}_{(A)} + B_{(A)} \bar{c} |\nabla \bar{x}_{(A)}| \bar{v}^*, \quad (10.3.5-18)$$

где  $A_{(A)}$ ,  $B_{(A)}$ ,  $A_{(A)}^{\star}$  и  $B_{(A)}^{\star}$  для пористой среды не зависят от координат.

*10.3.6. Случай неприменимости закона Фика.* Пусть  $l_0$  — характерный диаметр пор,  $\lambda$  — средняя длина пробега [16], а  $N_{Kn} \equiv \frac{l_0}{\lambda}$  — число Кнудсена. Когда

$$0.1 < N_{Kn} < 10, \quad (10.3.6-1)$$

первый закон Фика не может применяться для описания двухкомпонентной диффузии в пористой среде [17]. Это значит, что следует вернуться к § 10.3.2 и подготовить эмпирические соотношения для  $\bar{n}_{(A)}$  в уравнении (10.3.2-5). Единственной трудностью является то, что  $\bar{n}_{(A)}$  не является вектором, независимым от системы отсчета.

Из этого следует, что уравнение (10.3.2-5) надо переписать, используя вектор эффективной плотности потока массы относительно  $\bar{v}$ :

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{\rho}_{(A)} \bar{v}) = -\operatorname{div} \mathbf{j}_{(A)}^{(e)} + r''_{(A)} + \bar{r}_{(A)}; \quad (10.3.6-2)$$

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} \equiv \bar{\mathbf{j}}_{(A)} + \bar{\rho}_{(A)} \bar{v} + \bar{\rho}_{(A)} \bar{v}. \quad (10.3.6-3)$$

Эмпирические соотношения для  $\delta_{(A)}$  можно получить с помощью анализа, используемого в § 10.3.4 при выводе эмпирических соотношений.

шений для  $\mathbf{j}_{(A)}^{(e)}$ . Например, для неориентированного твердого пористого вещества, заполненного текущей жидкостью (см. § 10.3.4, пример 2), мы можем исходить из допущения, что

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} = -\bar{\rho} \mathcal{D}_{(AB)} D_{(AI)}^* \nabla \bar{\omega}_{(A)} + D_{(A2)}^* \bar{\rho}_{(A)} \bar{\mathbf{v}}, \quad (10.3.6-4)$$

где для  $i = 1, 2$

$$D_{(AI)}^* = D_{(AI)} \left( N_{Pe}, \frac{\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\omega}_{(A)}}{\bar{\mathbf{v}} \|\nabla \bar{\omega}_{(A)}\|}, \frac{l_0 \bar{\rho} \|\nabla \bar{\omega}_{(A)}\|}{\bar{\rho}_{(A)}}, \Psi \right) \quad (10.3.6-5)$$

и

$$N_{Pe} = \frac{l_0 \|\bar{\mathbf{v}}\|}{\mathcal{D}_{(AB)}}. \quad (10.3.6-6)$$

Это также можно представить с помощью тензора эффективного коэффициента диффузии  $D_{AB}^{(e)}$ :

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} = -|\bar{\rho} \mathbf{D}_{(AB)}^{(e)} \cdot \nabla \bar{\omega}_{(A)}|; \quad (10.3.6-7)$$

$$\mathbf{D}_{(AB)}^{(e)} = D_{(AB)} D_{(AI)}^* \mathbf{I} - \frac{D_{(A2)}^* \bar{\rho}_{(A)}}{\bar{\rho} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\omega}_{(A)})} \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}. \quad (10.3.6-8)$$

Если использовать молярные выражения в уравнении (10.3.2-6), можно ввести вектор эффективной плотности молярного потока относительно  $\bar{\mathbf{v}}^\leftrightarrow$ :

$$\frac{\partial \bar{c}_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{c}_{(A)} \bar{\mathbf{v}}^\leftrightarrow) = -\operatorname{div} \mathbf{J}_{(A)}^\leftrightarrow + \frac{r''_{(A)}}{M_{(A)}} + \frac{\bar{r}_{(A)}}{M_{(A)}}; \quad (10.3.6-9)$$

$$\mathbf{J}_{(A)}^\leftrightarrow = \bar{\mathbf{J}}_{(A)}^\leftrightarrow + \bar{c}_{(A)} \bar{\mathbf{v}}^\leftrightarrow - \bar{c}_{(A)} \bar{\mathbf{v}}^\leftrightarrow. \quad (10.3.6-10)$$

По аналогии с примером 2 в § 10.3.4 снова постулируем для неориентированного твердого вещества, заполненного текущей жидкостью:

$$\mathbf{J}_{(A)}^\leftrightarrow = -\bar{c} \mathcal{D}_{(AB)} D_{(AI)}^* \nabla \bar{x}_{(A)} + |D_{(A2)}^* \bar{c}_{(A)}| \bar{\mathbf{v}}^\leftrightarrow. \quad (10.3.6-11)$$

для  $i = 1, 2$

$$D_{(AI)}^* = D_{(AI)}^* \left( N_{Pe}, \frac{\bar{\mathbf{v}}^\leftrightarrow \cdot \nabla \bar{x}_{(A)}}{\|\bar{\mathbf{v}}^\leftrightarrow\| \|\nabla \bar{x}_{(A)}\|}, \frac{l_0 \bar{c} \|\nabla \bar{x}_{(A)}\|}{\bar{c}_{(A)}}, \Psi \right) \quad (10.3.6-12)$$

и

$$N_{Pe} = \frac{l_0 \|\bar{\mathbf{v}}^\leftrightarrow\|}{\mathcal{D}_{(AB)}}. \quad (10.3.6-13)$$

Используя тензор эффективного коэффициента диффузии  $\mathbf{D}_{(AB)}^{(e)}$ , получаем:

$$\mathbf{J}_{(A)}^\leftrightarrow = -\bar{c} \mathbf{D}_{(AB)}^{(e)} \cdot \nabla \bar{x}_{(A)}, \quad (10.3.6-14)$$

где

$$\mathbf{D}_{(AB)}^{(e)} = \mathcal{D}_{(AB)} D_{(AI)}^* \mathbf{I} - \frac{D_{(A2)}^* \bar{c}_{(A)}}{\bar{c} (\bar{\mathbf{v}}^\leftrightarrow \cdot \nabla \bar{x}_{(A)})} \bar{\mathbf{v}}^\leftrightarrow \bar{\mathbf{v}}^\leftrightarrow. \quad (10.3.6-15)$$

В работе [20] бинарная диффузия в пористой среде описывается как задача диффузии трех веществ, где третья компонента — неподвижная пористая структура. Эта модель называется «запыленным» газом. Если используемые в [20] переменные считать локально усредненными по объему, то полученный результат можно рассматривать как частный случай уравнения (10.3.6-11), где

$$D_{(A1)}^{*} = \frac{\Psi}{q} \left[ 1 + \frac{\bar{c}_{(s)}}{c} \left( \frac{M_{(A)} + M_{(B)}}{M_{(B)}} \right)^{1/2} k_1 \right]^{-1} \quad (10.3.6-16)$$

и

$$D_{(A2)}^{*} + 1 = \left[ 1 + \frac{\bar{c}_{(s)}}{c} \left( \frac{M_{(A)} + M_{(B)}}{M_{(B)}} \right)^{1/2} k_2 \right]^{-1}. \quad (10.3.6-17)$$

Здесь  $\bar{c}_{(s)}$  — локально усредненная по объему молярная плотность твердого материала;  $q$ ,  $k_1$  и  $k_2$  — постоянные, характерные для пористой структуры; величины  $k_1$  и  $k_2$  могут до некоторой степени зависеть от свойств газовой смеси.

В заключение следует сделать предупреждение. При  $N_{Kn} < 10$  наше локально усредненное по объему уравнение движения не применимо. Конечная форма уравнения (закон Дарси или его эквивалент, см. § 4.3.5—4.3.7) зависит от определяющего уравнения для тензора напряжений, которое не применимо в случае, когда молекулярные соударения со стенками пористой структуры имеют такое же значение, как и межмолекулярные соударения. Результаты, полученные по значениям градиента давления и рассчитанные по уравнению закона Дарси, почти всегда не применимы.

**10.3.7. Диффузия Кнудсена.** При числах Кнудсена  $N_{Kn} < 0,1$  перенос массы в пористой структуре называется диффузией Кнудсена [17]. Если рассуждать в терминах молярной модели, то при диффузии Кнудсена соударения между молекулами газа и стенками пористой структуры более важны, чем соударения двух или более молекул. Из этого следует, что в континуальном представлении диффузии Кнудсена движение каждой компоненты не должно зависеть от других компонент газовой смеси. Это требование независимости движения различных компонент будет усиливаться при отсутствии  $\bar{r}$  и  $\bar{v}$  в конечной форме уравнения неразрывности для любого вещества  $A$ . Используя рассуждения § 10.3.4 и 10.3.6, можно предложить эмпирическое соотношение для  $\mathbf{j}_{(A)}^{(e)}$ , которое удовлетворяет этим условиям.

Сначала возьмем:

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} = \mathbf{j}_{(A)}^{(e)} (\bar{p}_{(A)}, \nabla \bar{p}_{(A)}, \bar{v} - \bar{v}^{(s)}, l_0, \Psi, R, T, M_{(A)}), \quad (10.3.7-1)$$

где  $R$  — газовая постоянная;  $T$  — температура, а  $M_{(A)}$  — молекулярная масса вещества  $A$ . В соответствии с принципом независимости материала от системы отсчета и теоремой Бэкингема — Пая будем иметь:

$$\mathbf{j}_{(A)}^{(e)} = - \left( \frac{RT}{M_{(A)}} \right)^{1/2} l_0 D_{(A1)}^{*} \nabla \bar{p}_{(A)} + D_{(A2)}^{*} \bar{p}_{(A)} \bar{v}. \quad (10.3.7-2)$$

Здесь для  $i = 1, 2$

$$D_{(Ai)}^{*} = D_{(Ai)}^{*} \left( \frac{l_0 |\nabla \bar{p}_{(A)}|}{\bar{p}_{(A)}}, \left( \frac{RT}{M_{(A)}} \right)^{1/2} \frac{1}{|\bar{v}|}, \Psi \right). \quad (10.3.7-3)$$

Чтобы исключить  $\bar{\mathbf{v}}$  из конечного уравнения неразрывности, возьмем:

$$D^*_{(A2)} = -1 \quad (10.3.7-4)$$

и

$$D^*_{(A1)} = D^*_{(A1)} \left( \frac{l_0 |\nabla \bar{\rho}_{(A)}|}{\bar{\rho}_{(A)}}, \Psi \right). \quad (10.3.7-5)$$

Тогда уравнение неразрывности для вещества  $A$  в форме уравнения (10.3.2-5) будет иметь вид:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{n}}_{(A)} = r''_{(A)} + \bar{r}_{(A)}. \quad (10.3.7-6)$$

Из уравнений (10.3.7-2) и (10.3.7-4) следует:

$$\bar{\mathbf{n}}_{(A)} = -D_{(A)Kn} \nabla \bar{\rho}_{(A)}, \quad (10.3.7-7)$$

где величина

$$D_{(A)Kn} = \left( \frac{RT}{M_{(A)}} \right)^{1/2} l_0 D^*_{(A1)} \quad (10.3.7-8)$$

известна как коэффициент диффузии Кнудсена, которая обычно имеет вид [20—23]:

$$D_{(A)Kn} = \frac{4}{3} \left( \frac{8RT}{\pi M_{(A)}} \right)^{1/2} l_0 K^*. \quad (10.3.7-9)$$

Для пористой среды характерен безразмерный коэффициент  $K^*$ . Уравнения (10.3.7-6) и (10.3.7-7) легко получить в молярном представлении, т. е.

$$\frac{\partial \bar{c}_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{N}}_{(A)} = \frac{r''_{(A)}}{M_{(A)}} + \frac{\bar{r}_{(A)}}{M_{(A)}} \quad (10.3.7-10)$$

и

$$\bar{\mathbf{N}}_{(A)} = -D_{(A)Kn} \nabla \bar{c}_{(A)}. \quad (10.3.7-11)$$

Как уже говорилось в заключение предыдущего параграфа, при  $N_{Kn} < 10$  закон Дарси или его эквивалент неприменимы. Это значит, что градиент давления при диффузии Кнудсена рассчитать с помощью закона Дарси нельзя.

**10.3.8. Локально усредненное по объему уравнение неразрывности.** Мы уже знаем из гл. 9, что общее уравнение неразрывности очень полезно при решении задач переноса массы. В связи с этим рассмотрим локально усредненное уравнение неразрывности.

Можно непосредственно найти локально усредненное по объему общее уравнение неразрывности в двух формах, приведенных в табл. 8.3.2-1. Гораздо легче и совершеннее эквивалентно суммировать уравнения (10.3.2-5) и (10.3.2-6) по всем компонентам, т. е.

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) = 0; \quad (10.3.8-1)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \operatorname{div} (\bar{c} \bar{\mathbf{v}}) = \sum_{A=1}^N \left( \frac{r''_{(A)}}{M_{(A)}} + \frac{\bar{r}_{(A)}}{M_{(A)}} \right). \quad (10.3.8-2)$$

Ниже эти уравнения будут называться локально усредненными по объему общего уравнения неразрывности.

Для несжимаемой жидкости уравнение (10.3.8-1) значительно упрощается, т. е.

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (10.3.8-3)$$

Несжимаемые жидкости образуют один из простейших классов задач переноса массы в пористых средах.

Если предположить, что молярная плотность  $c$  постоянна (идеальный газ при постоянных температурах и давлении), уравнение (10.3.8-2) сводится к

$$c \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = \sum_{A=1}^N \left( \frac{r''_{(A)}}{M_{(A)}} + \frac{\bar{r}_{(A)}}{M_{(A)}} \right). \quad (10.3.8-4)$$

Если  $c$  — постоянная, а число молей, образованных в результате химических реакций, в точности равно числу молей вещества, израсходованного в этих реакциях

$$\sum_{A=1}^N \left( \frac{r''_{(A)}}{M_{(A)}} + \frac{\bar{r}_{(A)}}{M_{(A)}} \right) = 0, \quad (10.3.8-5)$$

то уравнение (10.3.8-2) принимает вид;

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (10.3.8-6)$$

С математической точки зрения этот класс задач переноса массы не сложнее таких же задач для несжимаемых жидкостей.

**10.3.9. Эффективность сферического катализатора.** Каталитическая реакция ( $A \rightarrow B$ ) происходит в реакторе с неподвижным либо псевдоожженным слоем. Предположим, что катализатор равномерно распределен между всеми пористыми сферическими частицами радиусом  $R$ , заполняющими реактор. Рассмотрим одну из таких сферических частиц пористого катализатора.

Можно предположить, что химическая реакция в основном происходит на поверхности катализатора в непосредственной близости от поверхности шарика, а не на поверхности катализатора, расположенного вокруг центра шарика. Это станет очевидным, если рассматривать соизмеримые траектории диффузии. Здесь мы рассмотрим общую эффективность поверхности катализатора в пористой сферической частице. Начнем с определения расхода вещества  $A$  в процессе химической реакции первого порядка в частице:

$$\frac{r''_{(A)}}{M_{(A)}} = -k''_{(A)} c_{(A)}. \quad (10.3.9-1)$$

При этом считаем, что концентрация вещества  $A$  по всей поверхности частицы имеет значение  $c_{(A)0}$ . Здесь  $a$  обозначает эффективную каталитическую поверхность на единицу объема.

Так как мы рассматриваем каталитическую реакцию, то

$$\sum_{C=1}^N \frac{\bar{r}_{(C)}}{M_{(C)}} = 0. \quad (10.3.9-2)$$

Далее можно сказать, что

$$\sum_{C=1}^N \frac{r_{(C)}}{M_{(C)}} = 0, \quad (10.3.9-3)$$

поскольку для получения одного моля  $A$  расходуется один моль  $B$ . В этом случае мы имеем дело с газом, поэтому можно идеализировать задачу так, чтобы общая молярная плотность  $c$  была постоянной. Следовательно, локальное усреднение по объему общего уравнения неразрывности приводит к

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{v}^{\star}} = 0. \quad (10.3.9-4)$$

Целесообразно начать решение этой задачи в сферических координатах с допущения:

$$\overline{\mathbf{v}^{\star}_r} = \overline{\mathbf{v}^{\star}_r}(r); \quad \overline{\mathbf{v}^{\star}_{\theta}} = \overline{\mathbf{v}^{\star}_{\varphi}} = 0 \quad (10.3.9-5)$$

и

$$\overline{c}_{(A)} = \overline{c}_{(A)}(r). \quad (10.3.9-6)$$

С учетом уравнения (10.3.9-5) из (10.3.9-4) имеем:

$$\frac{d}{dr} (r^2 \overline{\mathbf{v}^{\star}_r}) = 0 \quad (10.3.9-7)$$

или

$$\overline{\mathbf{v}^{\star}_r} = 0, \quad (10.3.9-8)$$

так как  $\overline{\mathbf{v}^{\star}_r}$  должно быть конечным в центре сферической частицы.

Предположим, что газ в этой частице пористого катализатора имеет такую высокую плотность, что можно применить первый закон Фика. Для упрощения будем считать, что  $\mathbf{J}_{(A)}^{(e)}$  можно представить уравнением (10.3.5-18). В соответствии с уравнениями (10.3.9-5), (10.3.9-6) и (10.3.9-8) этот вектор имеет только одну, отличную от нуля компоненту:

$$\mathbf{J}_{(A)r}^{(e)} = - A_{(A)} \frac{\partial \overline{c}_{(A)}}{\partial r}; \quad \mathbf{J}_{(A)\theta}^{(e)} = \mathbf{J}_{(A)\varphi}^{(e)} = 0. \quad (10.3.9-9)$$

Учитывая уравнения (10.3.9-1) и (10.3.9-9), можно теперь представить локальное усреднение по объему уравнения неразрывности для вещества  $A$  в виде (10.3.3-10), т. е.

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d \overline{c}_{(A)}}{dr} \right) = - \frac{k''_{(A)} a}{A_{(A)}} \overline{c}_{(A)}. \quad (10.3.9-10)$$

Это дифференциальное уравнение необходимо решать при граничном условии:

$$\text{при } r = R + \epsilon \overline{c}_{(A)0} = c_{(A)0}. \quad (10.3.9-11)$$

Здесь  $\epsilon$  — диаметр поверхности усреднения  $S$ . Обычно принимается  $\epsilon \ll R$ .

В качестве безразмерных переменных удобно ввести

$$c^* \equiv \frac{\overline{c}_{(A)}}{c_{(A)0}}; \quad r^* \equiv \frac{r}{R + \epsilon}, \quad (10.3.9-12)$$

что позволяет записать уравнения (10.3.9-10) и (10.3.9-11) соответственно

$$\frac{1}{r^{*2}} \frac{d}{dr^*} \left( r^{*2} \frac{dc^*}{dr^*} \right) = 9\Lambda^2 c^* \quad (10.3.9-13)$$

и при  $r^* = 1$

$$c^* = 1. \quad (10.3.9-14)$$

Для удобства сравнения наших результатов с данными для частиц другой формы введем [10]:

$$\Lambda = \left( \frac{k_1''' a}{A_{(A)}^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \frac{V_p}{S_p}, \quad (10.3.9-15)$$

где  $V_p$  и  $S_p$  — объем и ограничивающая поверхность частицы катализатора. Для такого сферического катализатора имеем:

$$\Lambda = \left( \frac{k_1''' a}{A_{(A)}^{\frac{1}{2}}} \right)^{1/2} \frac{R + \epsilon}{3}. \quad (10.3.9-16)$$

Произведя замену переменной

$$u \equiv r^* c^*, \quad (10.3.9-17)$$

получим уравнение (10.3.9-13) в виде

$$\frac{d^2 u}{dr^{*2}} = 9\Lambda^2 u, \quad (10.3.9-18)$$

которое можно решать теперь при граничных условиях

$$u = 1 \text{ при } r^* = 1 \quad (10.3.9-19)$$

и

$$u = 0 \text{ при } r^* = 0; \quad (10.3.9-20)$$

тогда находим:

$$c^* \equiv \frac{\bar{c}_{(A)}}{c_{(A)0}} = \frac{1}{\rho^*} \frac{\sinh(3\Lambda r^*)}{\sinh(3\Lambda)}. \quad (10.3.9-21)$$

Получив это распределение концентрации внутри частицы катализатора, можно вычислить молярный расход вещества  $A$  в процессе химической реакции:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{(A)} &\equiv - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi N_{(A)r} \Big|_{r^*=1} (R + \epsilon)^2 \sin \theta d\theta d\varphi = - 4\pi (R + \epsilon)^2 \bar{N}_{(A)r} \Big|_{r^*=1} = \\ &= - 4\pi (R + \epsilon)^2 J_{(A)r}^{(e)} \Big|_{r^*=1} = 4\pi (R + \epsilon) A_{(A)}^{\frac{1}{2}} c_{(A)0} \frac{dc^*}{dr^*} \Big|_{r^*=1} = \\ &= 4\pi (R + \epsilon) A (R^* c_{(A)0}) [1 - 3\Lambda \coth(3\Lambda)]. \end{aligned} \quad (10.3.9-22)$$

В первой строке мы используем интегралы переменных, усредненных по объему (§ 4.3.8). Если бы вся поверхность катализатора омывалась потоком жидкости, молярный расход вещества  $A$  был бы равен:

$$\mathcal{W}_{(A)0} = \frac{4}{3} \pi R^3 a k''_1 c_{(A)0}. \quad (10.3.9-23)$$

Введем коэффициент эффективности  $\eta$  по соотношению

$$\eta = \frac{\mathcal{W}_{(A)}}{\mathcal{W}_{(A)0}}. \quad (10.3.9-24)$$

Из уравнений (10.3.9-22) и (10.3.9-23) видно, что коэффициент эффективности для сферического катализатора равен:

$$\eta = \left( \frac{R + \epsilon}{R} \right)^3 \frac{1}{3\Lambda^2} [3\Lambda \operatorname{cth}(3\Lambda) - 1] \quad (10.3.9-25)$$

или

$$\eta = \frac{1}{3\Lambda^2} [3\Lambda \operatorname{cth}(3\Lambda) - 1], \quad (10.3.9-26)$$

так как обычно предполагается, что

$$\frac{R + \epsilon}{R} = 1. \quad (10.3.9-27)$$

На рис. 10.3.9-1 приводится сравнение уравнения (10.3.9-26) для сферических частиц с аналогичными выражениями для плоской пла-

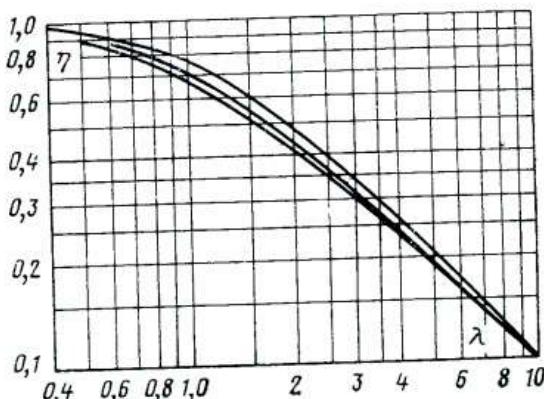


Рис. 10.3.9-1. Коэффициенты эффективности для пористых твердых катализаторов: верхняя кривая — плоская пластина; средняя кривая — цилиндр; нижняя кривая — сферический катализатор [3, 10].

стини и цилиндра. Очень удобным с практической точки зрения является то, что коэффициент эффективности почти не зависит от общей геометрии частиц.

#### 10.4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА

10.4.1. Еще раз об интегральных уравнениях баланса. Два следующих параграфа имеют две цели. Во-первых, обсуждается еще одно интегральное уравнение баланса массы для отдельной компоненты в многокомпонентной смеси. Во-вторых, мы попытаемся обобщить полученные ранее интегральные уравнения баланса для многокомпонентных систем.

Под многокомпонентными мы понимаем системы, в которых концентрация является функцией времени или координат. Если система состоит более чем из одной компоненты, но концентрация

не зависит ни от времени, ни от координат, полученные ранее интегральные уравнения баланса можно использовать без изменений.

Следующие параграфы тесно связаны с § 4.4.1—4.4.15 и 7.4.1—7.4.9. Читателю было бы полезно пересмотреть этот материал или хотя бы только § 4.4.1, в котором рассматривается практическое применение уравнений баланса, а также § 7.4.1, в котором приводятся некоторые используемые обозначения.

Следует обратить особое внимание на одно обстоятельство. Входная и выходная поверхности  $S_{(вх.вых)}$  должны пониматься в самом широком смысле слова и включать в себя:

1) поверхности, не имеющие гидродинамических препятствий, через которые отдельные компоненты переносятся в основном путем конвекции;

2) границы раздела фаз (жидкость — жидкость, жидкость — твердое вещество и т. д.), через которые отдельные компоненты переносятся преимущественно путем диффузии.

*10.4.2. Интегральное уравнение баланса массы для вещества A.* Так же как и в § 4.4.2, уравнение баланса массы выводится для системы, состоящей из одной компоненты; в этом параграфе будет выведен баланс массы для каждого вещества, составляющего многокомпонентную систему.

Используем тот же подход, что и при выводении интегрального уравнения баланса для однокомпонентных систем. Обозначив в обобщенной теореме переноса § 1.3.2 массу вещества A в единице объема через

$$\Psi = \rho_{(A)}, \quad (10.4.2-1)$$

получим:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho_{(A)} dV = \int_{V(s)} \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} dV + \int_{S(s)} \rho_{(A)} (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (10.4.2-2)$$

В общем значение первого интеграла в правой части не очевидно для любой задачи. С подобными трудностями мы уже сталкивались в § 4.4.2, 4.4.5 и 4.4.9. Проинтегрировав дифференциальное уравнение неразрывности для вещества A в форме уравнения (A) табл. 8.2.2-5, можно интегрировать по объему системы; получим:

$$\int_{V(s)} \left( \frac{\partial \rho_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{n}_{(A)} - r_{(A)} \right) dV = 0. \quad (10.4.2-3)$$

Первый интеграл в левой части полностью соответствует интегралу уравнения (10.4.2-2), смысл которого не был ясен. Используя преобразование Грина, получаем второй член в виде

$$\int_{V(s)} \operatorname{div} \mathbf{n}_{(A)} dV = \int_{S(s)} \rho_{(A)} \mathbf{v}_{(A)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (10.4.2-4)$$

Уравнения (10.4.2-3) и (10.4.2-4) позволяют представить уравнение (10.4.2-2) как

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho_{(A)} dV = \int_{S(s)} \rho_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{V(s)} r_{(A)} dV \quad (10.4.2-5)$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho_{(A)} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{V(s)} r_{(A)} dV. \quad (10.4.2-6)$$

Здесь и в следующих параграфах величина  $S_{(\text{вх, вых})}$  понимается в самом широком смысле и включает в себя:

1) поверхности, не создающие гидродинамических преград, через которые вещество  $A$  переносится преимущественно путем конвекции;

2) поверхности раздела фаз (жидкость — жидкость, жидкость — твердое тело и т. д.), через которые вещество  $A$  переносится, в основном, за счет диффузии.

Последние мы будем называть диффузионными поверхностями системы  $S_{(\text{дифф})}$ .

Уравнение (10.4.2-6) представляет собой вид интегрального уравнения баланса массы для вещества  $A$  соответствующей однофазной системы.

Обычно весьма удобно учитывать влияние диффузии; тогда уравнение (10.4.2-6) запишется как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho_{(A)} dV = & \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho_{(A)} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \mathbf{j}_{(A)} \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ & + \int_{(s)} r_{(A)} dV. \end{aligned} \quad (10.4.2-7)$$

Так как почти всегда целесообразно пренебречь диффузией по сравнению с конвекцией на участках  $S_{(\text{вх, вых})}$  свободного течения

$$\int_{S_{(\text{вх, вых})}} \mathbf{j}_{(A)} \cdot (-\mathbf{n}) dS = \int_{S_{(\text{дифф})}} \mathbf{j}_{(A)} \cdot (-\mathbf{n}) dS \equiv \mathcal{G}_{(A)}, \quad (10.4.2-8)$$

уравнение (10.4.2-7) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho_{(A)} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho_{(A)} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{G}_{(A)} + \int_{V(A)} r_{(A)} dV. \quad (10.4.2-9)$$

Смысл уравнения (10.4.2-9) состоит в том, что скорость изменения массы вещества  $A$  в системе равна сумме результирующей скорости, с которой масса вещества вносится в систему конвекции, результирующей скорости, с которой масса вещества  $A$  диффундирует в систему (относительно среднемассовой скорости), и скорости образования массы вещества  $A$  в процессе химических реакций. Заметим, что величина  $\mathcal{G}_{(A)}$  также включает в себя скорость образования вещества  $A$  на катализитических поверхностях внутри системы или на ее границе. Уравнение (10.4.2-9) будет называться интегральным уравнением баланса массы для вещества  $A$ , соответствующим однофазной системе.

Как уже отмечалось в § 4.4.2, обычно на практике чаще всего встречаются многофазные системы. Используя метод и обозначения § 4.4.2 и считая, что диффузией по сравнению с конвекцией можно пренебречь на участках свободного потока, находим, что инте-

интегральное уравнение баланса массы для вещества  $A$  в многофазной системе имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho_{(A)} dV = \int_{S_{\text{вх.вых}}} (\bar{\rho}_{(A)} \mathbf{v} - \bar{\rho}_{(A)} \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{G}_{(A)} + \int_{V(s)} \bar{r}_{(A)} dV + \int_{S_{\text{синг}}} [\bar{\rho}_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} \cdot \xi - u_{(\xi)})] dS. \quad (10.4.2-10)$$

Обычно, когда применяется уравнение баланса для скачка массы, уравнение (10.4.2-10) сводится к (10.4.2-9). Следовательно, интегральное уравнение баланса массы (10.4.2-9) в равной степени применимо как к однофазным, так и к многофазным системам до тех пор, пока уравнение баланса для скачка массы (8.5.2-14а) справедливо для всех рассматриваемых поверхностей раздела фаз.

Существует три общих типа задач, в которых применяется интегральное уравнение баланса для вещества  $A$ : когда скорость диффузии  $\mathcal{G}_{(A)}$  может не учитываться; когда она может быть неизвестной либо известной из полученных ранее экспериментальных данных. В последнем случае используется эмпирическое соотношение для  $\mathcal{G}_{(A)}$ . В § 10.4.4 описывается общий вид этих эмпирических соотношений.

**10.4.3. Применение интегрального уравнения баланса массы для вещества  $A$  в турбулентных течениях.** В § 4.4.3 отмечалось, что одно из наиболее важных и интересных приложений интегральных уравнений баланса — это системы с турбулентными течениями. Однако интегральное уравнение баланса массы, полученное в § 10.4.2, не может использоваться в задаче, где турбулентность имеет большое значение: в этом случае следует оперировать усредненными по времени величинами.

При выводении уравнения баланса массы для систем с турбулентным течением можно идти двумя путями. Первый подход ограничен однофазными или многофазными системами, не содержащими поверхности раздела жидкость — жидкость. Начав с усредненного по времени дифференциального уравнения неразрывности (см. § 10.1.2)

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{(A)}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\mathbf{n}}_{(A)} = \bar{r}_{(A)} \quad (10.4.3-1)$$

и используя рассуждения § 10.4.2, найдем:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \bar{\rho}_{(A)} dV = \int_{S_{\text{вх.вых}}} (\bar{\rho}_{(A)} \mathbf{v} - \bar{\rho}_{(A)} \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{G}_{(A)} + \int_{V(s)} \bar{r}_{(A)} dV + \int_{S_{\text{синг}}} [\bar{\rho}_{(A)} \mathbf{v}_{(A)} \cdot \xi - \bar{\rho}_{(A)} u_{(\xi)}] dS, \quad (10.4.3-2)$$

где

$$\mathcal{G}_{(A)} = \int_{S_{\text{дифф}}} \mathbf{j}_{(A)} \cdot (-\mathbf{n}) dS. \quad (10.4.3-3)$$

Это уравнение можно упростить:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \bar{\rho}_{(A)} dV = \int_{S_{\text{вх.вых}}} (\bar{\rho}_{(A)} \mathbf{v} - \bar{\rho}_{(A)} \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{G}_{(A)} + \int_{V(s)} \bar{r}_{(A)} dV. \quad (10.4.3-4)$$

Отметим, что при выводе уравнений (10.4.3-2) и (10.4.3-4) мы пренебрегаем диффузией  $A$  по сравнению с конвекцией на участках  $S_{(\text{вх. вых})}$  со свободным течением:

$$\int_{S_{(\text{вх. вых})}} \bar{\mathbf{j}}_{(A)} \cdot (-\mathbf{n}) dS = \mathcal{G}_{(A)}. \quad (10.4.3-5)$$

Для однофазных или многофазных систем, содержащих одну или более поверхностей раздела жидкость — жидкость, рекомендуется усреднение по времени интегрального уравнения баланса из § 10.4.2:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho_{(A)} dV = \int_{S_{(\text{вх. вых})}} \rho_{(A)} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{G}_{(A)} + \int_{V_{(s)}} r_{(A)} dV. \quad (10.4.3-6)$$

Тогда находим:

$$\frac{d}{dt} \overline{\int_{V_{(s)}} \rho_{(A)} dV} = \overline{\int_{S_{(\text{вх. вых})}} \rho_{(A)} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS} + \overline{\mathcal{G}_{(A)}} + \overline{\int_{V_{(s)}} r_{(A)} dV}, \quad (10.4.3-7)$$

где

$$\overline{\mathcal{G}_{(A)}} \equiv \overline{\int_{S_{(\text{дифф})}} \mathbf{j}_{(A)} \cdot (-\mathbf{n}) dS}. \quad (10.4.3-8)$$

Для однофазных или многофазных систем, не содержащих поверхности раздела жидкость — жидкость, с помощью уравнений (10.4.3-7) — (10.4.3-9) можно показать, что (10.4.3-7) и (10.4.3-8) сводятся соответственно к (10.4.3-4) и (10.4.3-3).

**10.4.4. Эмпирические соотношения для  $\mathcal{G}_{(A)}$ .** Эмпирические соотношения для  $\mathcal{G}_{(A)}$  (в случае турбулентных течений для  $\bar{\mathcal{G}}_{(A)}$ ) получаются так же, как эмпирические соотношения для  $\mathcal{D}$ , описанные в § 7.4.4. Следует учитывать три основных момента.

1. Скорость диффузии вещества  $A$  с проницаемой или катализитической поверхности системы не зависит от системы отсчета:

$$\mathcal{G}_{(A)}^* \equiv \int_{S_{(\text{дифф})}} \mathbf{j}_{(A)}^* \cdot (-\mathbf{n}^*) dS = \int_{S_{(\text{дифф})}} \mathbf{j}_{(A)} \cdot (-\mathbf{n}) dS = \mathcal{G}_{(A)}. \quad (10.4.4-1)$$

2. Предполагается, что принцип независимости материала от системы отсчета в § 2.3.1 применим для любого эмпирического соотношения, полученного для  $\mathcal{G}_{(A)}$ .

3. Форма любого выражения для  $\mathcal{G}_{(A)}$  должна удовлетворять теореме Бэкингема — Пая [19].

Рассмотрим этот подход на конкретном примере.

**Пример. Вынужденная конвекция при двумерном обтекании цилиндрического тела двухкомпонентной жидкостью.** Бесконечно длинное цилиндрическое тело погружено в большой объем двухкомпонентной ньютоновской жидкости. Предполагается, что поверхность тела находится в равновесии с поверхностью жидкости и что относительная массовая концентрация вещества  $A$  на поверхности постоянна и равна  $\omega_{(A)\infty}$ . За пределами непосредственной окрестности тела относительная массовая концентрация  $A$  имеет почти везде одинаковое значение  $\omega_{(A)\infty}$ . В данной системе отсчета, неподвижной по отношению к земле, цилиндрическое тело перемещается без вращения с постоянной скоростью  $v_b$ ; жидкость на очень большом расстоянии от тела движется с одинаковой

скоростью  $v_\infty$ . Векторы  $v_0$  и  $v_\infty$  перпендикулярны оси цилиндра, так что можно предположить, что течение жидкости плоскопараллельно. Для описания ориентации цилиндра относительно  $v_0$  и  $v_\infty$  достаточно единичного вектора  $\alpha$ .

Разумно предположить, что  $\mathcal{G}_{(A)}$  является функцией от

$$\Delta\omega_{(A)} \equiv \omega_{(A)0} - \omega_{(A)\infty}, \quad (10.4.4-2)$$

характерной плотности жидкости  $\rho$ , характерной вязкости жидкости  $\mu$ , характерного коэффициента диффузии  $\mathcal{D}_{(AB)}$ , характерной длины  $L$  для поперечного сечения цилиндра,  $v_\infty - v_0$  и  $\alpha$ :

$$\mathcal{G}_{(A)} = f(\rho, \mu, \mathcal{D}_{(AB)}, L, v_\infty - v_0, \alpha, \Delta\omega_{(A)}). \quad (10.4.4-3)$$

Следует учесть, что плотность, вязкость и коэффициент диффузии могут зависеть от положения вследствие их функциональной зависимости от концентрации веществ. Называя  $\rho$ ,  $\mu$  и  $\mathcal{D}_{(AB)}$  величинами, «характерными» для жидкости, мы имеем в виду, что их следует оценивать при некотором среднем или типичном составе. Зависимость от

$$\Delta\omega_{(B)} \equiv \omega_{(B)0} - \omega_{(B)\infty} \quad (10.4.4-4)$$

не учитывается, так как

$$\Delta\omega_{(B)} = -\Delta\omega_{(A)}. \quad (10.4.4-5)$$

Здесь можно привести аргументацию § 7.4.4 (пример 1) для того, чтобы показать, что с учетом принципа независимости материала от системы отсчета и теоремы Бэкингема — Пая уравнение (7.4.4-7) должно принять вид<sup>1</sup>:

$$N_{\text{Nu}(A)} = N_{\text{Nu}(A)} \left( N_{\text{Re}}, N_{\text{Sc}}, \Delta\omega_{(A)}, \frac{v_\infty - v_0}{|v_\infty - v_0|} \alpha \right), \quad (10.4.4-6)$$

где числа Нуссельта, Рейнольдса и Шмидта определяются как

$$N_{\text{Nu}} \equiv \frac{\mathcal{G}_{(A)}}{\rho \mathcal{D}_{(AB)} L \Delta\omega_{(A)}}; \quad N_{\text{Re}} \equiv \frac{L \rho |v_\infty - v_0|}{\mu}; \quad N_{\text{Sc}} \equiv \frac{\mu}{\rho \mathcal{D}_{(AB)}}. \quad (10.4.4-7)$$

В соответствии с [3] определим коэффициент переноса массы  $k_{(A)\omega}$  в виде<sup>1</sup>

$$k_{(A)\omega} \equiv \frac{\mathcal{G}_{(A)}}{A \Delta\omega_{(A)}}, \quad (10.4.4-8)$$

уравнение (10.4.4-8) легко переписать в виде:

$$k_{(A)\omega} = \frac{\mathcal{N}_{(A)} - \omega_{(A)0} (\mathcal{N}_{(A)} + \mathcal{N}_{(B)})}{A \Delta\omega_{(A)}}, \quad (10.4.4-8a)$$

где

$$\mathcal{N}_{(A)} \equiv \int_{S_{(\text{дифф})}} \mathbf{n}_{(A)} \cdot (-\mathbf{n}) dS \quad (10.4.4-8b)$$

и  $\omega_{(A)0}$  — относительная массовая концентрация  $A$  на поверхности  $S_{(\text{дифф})}$ , которая считается постоянной.

Коэффициент переноса массы, определенный по уравнению (10.4.4-8), отличается от коэффициента переноса массы, широко используемого в литературе до 1960 г. Традиционное выражение записывается в виде интегрального уравнения баланса массы из § 10.4.2:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(A)} \rho_{(A)} dV = \int_{S_{(\text{вх., вых})}} \rho_{(A)} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{U}_{(A)} + \int_{V(s)} r_{(A)} dV, \quad (10.4.4-8b)$$

где

$$\mathcal{U}_{(A)} \equiv \int_{S_{(\text{дифф})}} \rho_{(A)} (\mathbf{v}_{(A)} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS. \quad (10.4.4-8c)$$

<sup>1</sup> Наше определение коэффициента переноса массы в уравнении (10.4.4-8) соответствует определению Нуссельта. Согласно теореме Бэкингема — Пая  $\mathcal{G}_{(A)}/\rho \mathcal{D}_{(AB)}$  является безразмерным комплексом.

Уравнение (10.4.4-8в) также означает, что диффузией по сравнению с конвекцией можно пренебречь для участков  $S_{(вх.вых)}$  со свободным течением:  $S_{(вх.вых)}=S_{(диф)}$ . Коэффициент переноса массы традиционно определяют так:

$$K_{(A)\rho} \equiv \frac{\mathcal{W}_{(A)}}{A \Delta \rho_{(A)}}.$$

Использование  $\mathcal{W}_{(A)}$  и традиционного коэффициента переноса массы  $K_{(A)\rho}$  дает преимущество, что при этом автоматически учитывается влияние конвекции  $S_{(диф)}$ . Однако более сложная зависимость  $K_{(A)\rho}$  от концентрации и скорости переноса массы по сравнению с  $k_{(A)\omega}$  [3] является недостатком. С нашей точки зрения, этот недостаток сводит на нет возможное упрощение расчетов.

Величина  $A$ , пропорциональная  $L^2$ , обозначает область переноса массы. Число Нуссельта для вещества  $A$  обычно выражается с помощью этого коэффициента переноса массы:

$$N_{Nu(A)} = \frac{k_{(A)\omega} L}{\rho \mathcal{D}_{(AB)}}. \quad (10.4.4-9)$$

Затем вычисляется скорость диффузии вещества  $A$  через проницаемые поверхности системы по соотношению

$$\mathcal{G}_{(A)} = k_{(A)\omega} A \Delta \omega_{(A)}, \quad (10.4.4-10)$$

где коэффициент переноса массы  $k_{(A)\omega}$  рассчитывается из эмпирического соотношения (10.4.4-6).

Большинство эмпирических соотношений для числа Нуссельта не являются такими общими, как в уравнении (10.4.4-6). В основном исследования проводятся для отдельных ориентаций тела (или системы тел, например, группы частиц) по отношению к потоку жидкости. Далее, для достаточно малых скоростей переноса массы естественная конвекция не играет роли, а  $\Delta \omega_{(A)}$  настолько малая величина, что ее влиянием можно пренебречь. При этих условиях уравнение (10.4.4-6) упрощается [3] до

$$N_{Nu(A)} = N_{Nu(A)}(N_{Re}, N_{Sc}). \quad (10.4.4-11)$$

В случае, когда естественной конвекцией можно пренебречь, существует строгая аналогия между переносом массы и энергии (см. § 9.4.2); так как имеется большое количество литературных данных по переносу энергии, часто удобно отождествить уравнение (10.4.4-11) аналогичному выражению для переноса энергии.

Если естественной конвекцией пренебречь нельзя (при больших скоростях переноса массы), то нельзя пренебречь и зависимостью  $N_{Nu(A)}$  от  $\Delta \omega_{(A)}$  в уравнении (10.4.4-6). Из-за недостатка экспериментальных данных рекомендуется ввести простую поправку в эмпирические соотношения типа (10.4.4-11), которые применимы только для небольших скоростей переноса массы. В работе [3] дается прекрасный анализ трех наиболее широко используемых поправок: в теории пленок, в теории проникновения и в теории двумерного течения в пограничном слое на плоской пластине.

**10.4.5. Интегральное уравнение баланса массы для вещества  $A$ . Пример [3].** Сточные воды, содержащие загрязнения  $A$  в концентрации  $\rho_{(A)0}$ , необходимо стечь в реку при постоянном объемном расходе  $Q$ . Вещество  $A$  нестабильно и разлагается со скоростью, пропорциональной его плотности:

$$-r_{(A)} = k_1 \rho_{(A)}. \quad (10.4.5-1)$$

Для уменьшения загрязнения сточные воды должны пройти перед спуском в реку через отстойник с объемом  $V$ . В момент  $t=0$  жидкость поступает в пустой резервуар с идеальной мешалкой. Жидкость остается в нем, пока он не заполнится. Попытаемся вывести выражение для массовой плотности  $A$  в резервуаре и в потоке, вытекающем из него, в зависимости от времени.

Эту задачу следует разбить на две части. Сначала надо определить плотность  $A$  в резервуаре как функцию времени при наполнении. Массовая плотность  $A$  в резервуаре в момент, когда резервуар заполнен, образует граничное условие для второй части задачи нахождения плотности  $A$  в резервуаре и в вытекающем потоке как функции времени.

На рис. 10.4.5-1 схематически изображен процесс наполнения. Пусть рассматриваемой системой будет жидкость в резервуаре. Для этой системы, имеющей один вход

и имеющей выхода, в соответствии с интегральным уравнением баланса массы из § 10.4.2 требуется:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho_A dV = \int_{S_{(ax)}} \rho_{(A)0} \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{n}) dS - k_1 \int_{V(s)} \rho_{(A)} dV \quad (10.4.5-2)$$

или

$$\frac{dM_{(A)}}{dt} = \rho_{(A)0} Q - k_1 M_{(A)}, \quad (10.4.5-3)$$

где  $M_{(A)}$  — масса вещества  $A$  в системе,

$$M_{(A)} \equiv \int_{V(s)} \rho_{(A)} dV. \quad (10.4.5-4)$$

Пронтегрировав уравнение (10.4.5-3), легко найдем  $M_{(A)}$  как функцию времени

$$M_{(A)} = \frac{\rho_{(A)0} Q}{k_1} (1 - \exp(-k_1 t)). \quad (10.4.5-5)$$

Это значит, что, когда резервуар заполнен, при  $t = V/Q$

$$\rho_{(A)} = \rho_{(A)f} \equiv \frac{\rho_{(A)0} Q}{V k_1} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{k_1 V}{Q} \right) \right]. \quad (10.4.5-6)$$

Как только резервуар наполнится, открывается дренажная линия, как показано на рис. 10.4.5-2. Рассматриваемой системой продолжает оставаться жидкость в резер-

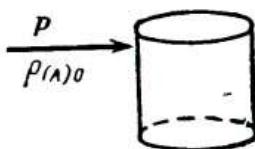


Рис. 10.4.5-1. Бассейн для сточных вод во время на-полнения.

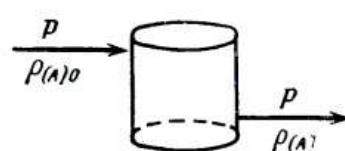


Рис. 10.4.5-2. Бассейн для сточных вод после наполне-ния.

вуаре, но теперь она имеет и вход и выход. Интегральное уравнение баланса для вещества  $A$  требует, чтобы

$$\frac{dM_{(A)}}{dt} = \rho_{(A)0} Q - \frac{M_{(A)}}{V} Q - k_1 M_{(A)}. \quad (10.4.5-7)$$

Пронтегрировав это уравнение с граничным условием (10.4.5-6), найдем:

$$\frac{\rho_{(A)} - \rho_{(A)\infty}}{\rho_{(A)f} - \rho_{(A)\infty}} = \exp \left( - \left[ \frac{Q}{V} + k_1 \right] \left[ t - \frac{V}{Q} \right] \right). \quad (10.4.5-8)$$

Здесь  $\rho_{(A)\infty}$  — стационарная плотность вещества  $A$  в коллекторе сточных вод,

$$\rho_{(A)} \rightarrow \rho_{(A)\infty} \equiv \frac{\rho_{(A)0} Q}{Q + k_1 V} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (10.4.5-9)$$

**10.4.6. Интегральное уравнение баланса массы для всех компонент.** Вывод интегрального уравнения баланса массы для однокомпонентной системы (§ 4.4.2) можно почти полностью применить к многокомпонентной системе. Единственным изменением является использование общего уравнения неразрывности из § 8.3.2 вместо уравнения неразрывности из § 1.3.3.

Имеем формы интегрального уравнения баланса для суммы компонент, соответствующие уравнениям (А) и (Б) табл. 8.3.2-1:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho dV = \int_{S_{(вх.вых)}} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS \quad (10.4.6-1)$$

и

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} c dV = \int_{S_{(вх.вых)}} c (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{V(s)} \sum_{A=1}^N \frac{r_{(A)}}{M_{(A)}} dV. \quad (10.4.6-2)$$

Форма уравнения (10.4.6-1) полностью аналогична интегральному уравнению баланса массы из § 4.4.2, что может привести к ошибке. Не следует забывать о том, что  $S_{(вх.вых)}$  надо понимать в самом широком смысле, учитывая, что эта величина обозначает:

- 1) поверхности, не создающие препятствия течению, через которые отдельные компоненты переносятся главным образом путем конвекции;
- 2) поверхности раздела фаз (жидкость — жидкость, жидкость — твердое вещество и т. д.), через которые отдельные компоненты переносятся преимущественно путем диффузии.

Этот анализ можно обобщить на турбулентные течения, как указано § 4.4.3.

*10.4.7. Интегральное уравнение баланса импульса, механической энергии и момента импульса для суммы компонент.* Интегральные уравнения баланса импульса, механической энергии и момента импульса для суммы компонент имеют такую же форму, как аналогичные уравнения, выведенные для однокомпонентных систем в § 4.4.5—4.4.15. При выборе общих уравнений необходимо только вместо первого закона Коши для однокомпонентных материалов, выведенного в § 2.2.3, использовать первый закон Коши для многокомпонентной смеси, описанный в § 8.3.3. Это значит, что  $\mathbf{v}$  является вектором среднемассовой скорости, а  $\mathbf{f}$  — вектором среднемассовой внешней силы.

Однако в дальнейшем необходимо модифицировать уравнения баланса механической энергии в § 7.4.6. Все данные, приведенные в табл. 7.4.6-1—7.4.6-3, в равной мере применимы как к однокомпонентным, так и к многокомпонентным системам, за исключением уравнения (Г) для изотермических систем и уравнения (Д) для изоэнтропических систем. Можно было бы привести результаты, аналогичные уравнениям (Г) и (Д), но в связи с их сложностью они здесь не приводятся.

Рискуя надеяться частыми повторениями, хочется еще раз предупредить читателя о том, что поверхность  $S_{(вх.вых)}$  следует понимать в самом широком смысле, помня о том, что эта величина содержит поверхности, через которые отдельные компоненты переносятся преимущественно посредством диффузии.

*10.4.8. Интегральное уравнение баланса энергии для суммы компонент.* Вывод интегрального уравнения баланса энергии, приведенный в § 7.4.2 для однокомпонентных систем, можно повторить здесь для многокомпонентных систем, заменив только дифференциальное уравнение баланса энергии § 5.3.2 дифференциальным уравнением баланса энергии для суммы компонент в многокомпонентной смеси из § 8.3.5. Однако представляется целесообразным пренебречь членами, связанными

ными с кинетической энергией отдельных компонент, измеренной относительно среднемассовой скорости материала.

В настоящее время неизвестен случай, когда бы эти члены имели практическое значение.

Тепловое уравнение состояния для многокомпонентного материала в виде (5.1.2-1) не позволяет использовать все результаты табл. 7.4.2-1—7.4.2-3 непосредственно для многокомпонентных систем. Некоторые из этих результатов для многокомпонентных систем настолько сложны, что имеют только второстепенное значение и здесь не приводятся, поэтому было бы полезно еще раз перечислить виды интегрального уравнения баланса энергии для суммы компонент из табл. 10.4.8-1—10.4.8-3, имеющие наибольшее практическое значение.

Еще раз следует подчеркнуть, что поверхность  $S_{(вх.вых)}$  имеет самый широкий смысл (см. § 10.4.1 и 10.4.2).

**10.4.9. Пример интегрального уравнения баланса энергии для суммы компонент.** Вероятно, основной задачей, связанной с применением интегрального уравнения баланса энергии для суммы компонент, является оценка термодинамических свойств при отсутствии прямых экспериментальных данных. В работах [26, 27] сделана успешная попытка решить эту задачу.

В работах по стехиометрии [26] и термодинамике [27, 28] приводится множество примеров с использованием интегрального уравнения баланса энергии для суммы компонент. Здесь мы не стремимся продемонстрировать всю сложность этих задач, а попытаемся изложить свой подход к их решению.

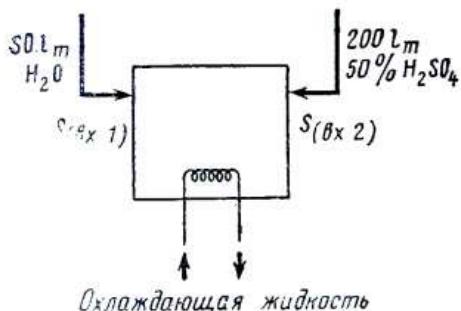


Рис. 10.4.9-1. Нестационарное разбавление раствора серной кислоты водой.

Этот процесс схематически изображен на рис. 10.4.9-1. Если рассматриваемой системой является жидкость в мешалке, то очевидно, что она имеет два входа и ни одного выхода. Зная, что на каждую компоненту действует одна и та же внешняя сила и пренебрегая скоростью рассеяния энергии, получаем интегральное уравнение баланса энергии для суммы компонент в форме уравнения (Д) табл. 10.4.8-3:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \hat{H} dV = \int_{S_{(вх1)} + S_{(вх2)}} \rho \hat{H} (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \mathcal{Q}. \quad (10.4.9-1)$$

Проведя интегрирование по времени, найдем, что в момент  $t = t_f$  при охлаждении растворенной кислоты до  $21^\circ\text{C}$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{(f)} \int_{V(s)} \rho dV &= \hat{H}_{(вх1)} \int_0^{t_f} \int_{S_{(вх1)}} \rho (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS dt + \\ &+ \hat{H}_{(вх2)} \int_0^{t_f} \int_{S_{(вх2)}} \rho (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS dt + \int_0^{t_f} \mathcal{Q} dt. \end{aligned} \quad (10.4.9-2)$$

Большой класс задач, в том числе задачи, описываемые ниже, охватывают процессы, происходящие при постоянном давлении. Эта группа задач не только имеет очевидное практическое значение, но характеризуется также простотой расчетов. Из интегрального уравнения баланса энергии для суммы компонент в изобарической системе в форме (Д) табл. 10.4.8-1—10.4.8-3 видно, что удельная энталпия является важной термодинамической переменной. Необходимо также знать удельную внутреннюю энергию.

Рассчитываем энергию, выделяющуюся в случае, если 25 кг воды и 100 кг водного раствора серной кислоты (содержащего 50%  $\text{H}_2\text{SO}_4$  по массе) смешиваются при  $21^\circ\text{C}$ .

Таблица 10.4.8-1

**Общий вид интегральных уравнений баланса энергии для суммы компонент в однофазной системе\***

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + @ - \mathcal{W} + \int_{V(s)} \left( \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \varphi Q \right) dV + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) + \\ + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS \quad (\text{A})^{**}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + @ - \mathcal{W} + \int_{V(s)} \left( \sum_{A=1}^N \mathbf{n}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \varphi Q \right) dV + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) + \\ + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS \quad (\text{Б})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \bar{U} + \frac{p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + @ + \\ + \int_{V(s)} \left[ -(P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \varphi Q \right] dV \quad (\text{В})$$

Для несжимаемой жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{U} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \bar{U} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + @ + \\ + \int_{V(s)} \left[ \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \varphi Q \right] dV \quad (\Gamma)$$

Для изобарической жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{H} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \bar{H} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + @ + \int_{V(s)} \left[ \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \varphi Q \right] dV \quad (\Delta)$$

\* Эффектами, связанными с кинетической энергией отдельных компонент, измеренной относительно среднемассовой скорости материала, пренебрегаем.

\*\* При этом  $\mathbf{f} = \sum_{A=1}^N \omega_{(A)} \mathbf{f}_{(A)} = -\nabla \varphi$ , где  $\varphi$  не зависит от времени в явном виде.

Таблица 10.4.8-2

**Общий вид интегральных уравнений баланса энергии для суммы компонент в многофазной системе, где применимо уравнение баланса энергии для скачка для всех компонент\***

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + \mathcal{Q} - \mathcal{W} + \int_{V(s)} \left( \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \rho \mathcal{Q} \right) dV + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) + \\ + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS + \int_{S_{(\text{синг})}} [\rho \varphi (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)})] dS \quad (\text{A})^{**}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \\ + \mathcal{Q} - \mathcal{W} + \int_{V(s)} \left( \sum_{A=1}^N \mathbf{n}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \rho \mathcal{Q} \right) dV + \int_{S_{(\text{вх, вых})}} [-(P - p_0) (\mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})] dS, \quad (\text{Б})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \left( \bar{U} + \frac{p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} + \\ + \int_{V(s)} \left[ -(P - p_0) \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \rho \mathcal{Q} \right] dV + \\ + \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \rho \left( \bar{U} + \frac{p_0}{\rho} \right) (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) + \mathbf{q} \cdot \xi \right] dS \quad (\text{В})$$

Для несжимаемой жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{U} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \bar{U} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} + \int_{V(s)} \left[ \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \right. \\ \left. + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \rho \mathcal{Q} \right] dV + \int_{S_{(\text{синг})}} [\rho \bar{U} (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) + \mathbf{q} \cdot \xi] dS \quad (\Gamma)$$

Для изобарической жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{H} dV = \int_{S_{(\text{вх, вых})}} \rho \bar{H} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \mathcal{Q} + \\ + \int_{V(s)} \left[ \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} + \rho \mathcal{Q} \right] dV + \int_{S_{(\text{синг})}} [\rho \bar{H} (\mathbf{v} \cdot \xi - u_{(\xi)}) + \mathbf{q} \cdot \xi] dS \quad (\text{Д})$$

\* Эффекты, связанные с кинетической энергией отдельных компонент, измеренных относительно среднемассовой скорости материала.

\*\* Здесь  $u_{(\xi)}$  — скорость перемещения поверхности раздела фаз [26]; выражение в квадратных скобках определяется уравнением (10.4.4-7) из § 1.3.4;  $S_{(\text{синг})}$  относится к поверхностям раздела фаз в области,

ограниченной поверхностью  $S_{(s)}$ , которые не совпадают с ней. Предполагается, что  $\mathbf{f} \equiv \sum_{A=1}^N \omega_{(A)} \mathbf{f}_{(A)} = -\nabla \varphi$ ,

где  $\varphi$  не является явной функцией времени.

Таблица 10.4.8-3

**Некоторые частные формы интегрального уравнения баланса энергии  
для суммы компонент в многофазной системе**

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right) (-v \cdot n) dS + \\ + Q - \mathcal{W} + \int_{V(s)} \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} dV \quad (\text{A})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho \left( \bar{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) (-v \cdot n) dS + \\ + Q - \mathcal{W} + \int_{V(s)} \sum_{A=1}^N \mathbf{n}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} dV \quad (\text{B})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \left( \bar{U} + \frac{p_0}{\rho} \right) dV = \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho \left( \bar{U} + \frac{p_0}{\rho} \right) (-v \cdot n) dS + Q + \\ + \int_{V(s)} \left[ -(P - p_0) \operatorname{div} v + \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla v) + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} \right] dV \quad (\text{B})$$

Для несжимаемой жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{U} dV = \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho \bar{U} (-v \cdot n) dS + Q + \int_{V(s)} \left[ \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla v) + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} \right] dV \quad (\Gamma)$$

Для изобарической жидкости:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \bar{H} dV = \int_{S_{(\text{вх.вых})}} \rho \bar{H} (-v \cdot n) dS + Q + \int_{V(s)} \left[ \operatorname{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla v) + \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \mathbf{f}_{(A)} \right] dV \quad (\Delta)$$

- Примечания.
1. Отсутствует переход массы через внутренние поверхности раздела фаз.
  2. Применимы уравнения баланса для скачка массы, количества движения и энергии.
  3. Отсутствуют взаимный и внешний переносы энергии.
  4. Входы и выходы, фиксированные в пространстве.
  5. Работой сил внутреннего трения (описываемой тензором дополнительных напряжений) на входе и выходе можно пренебречь.
  6. Эффектами, связанными с кинетической энергией отдельных компонент, измеренной относительно среднемассовой скорости материала, пренебрегаем.
  7. Предполагается, что  $\mathbf{f} \equiv \sum_{A=1}^N \omega_{(A)} \mathbf{f}_{(A)} = -\nabla \varphi$ , где  $\varphi$  не зависит от времени в явном виде.

Интегральное уравнение баланса массы для суммы компонент из § 10.4.6 и интегральное уравнение баланса массы для  $\text{H}_2\text{SO}_4$  из § 10.4.2 можно проинтегрировать по времени. Тогда соответственно находим:

$$\text{при } t=t_f \quad \int_{V(s)} \rho dV = \int_0^{t_f} \int_{S_{(\text{вх1})}} \rho (-v \cdot n) dS dt + \int_0^{t_f} \int_{S_{(\text{вх2})}} \rho (-v \cdot n) dS dt; \quad (10.4.9-3)$$

$$\text{при } t=t_f \quad \omega_{(\text{H}_2\text{SO}_4)} \int_{V(s)} \rho dV = \omega_{(\text{H}_2\text{SO}_4, \text{вх2})} \int_0^{t_f} \int_{S_{(\text{вх2})}} \rho (-v \cdot n) dS dt. \quad (10.4.9-4)$$

Из постановки задачи мы знаем, что

$$\int_0^{t_f} \int_{S_{(bx1)}} \rho (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS dt = 50 \cdot 0,454 \text{ кг} = 25 \text{ кг};$$

$$\int_0^{t_s} \int_{S_{(bx2)}} \rho (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS dt = 200 \cdot 0,454 \text{ кг} = 100 \text{ кг}. \quad (10.4.9-5)$$

Вместе с уравнением (10.4.9-3) это позволяет получить из уравнения (10.4.9-4):

$$\omega_{(\text{H}_2\text{SO}_4,f)} = 0,4. \quad (10.4.9-6)$$

В работе [26] приводится график зависимости энталпии от концентрации для системы серная кислота — вода (относительно чистых компонент воды и  $\text{H}_2\text{SO}_4$  при 0°C и их собственном давлении пара), который можно здесь использовать для вычисления:

$$\hat{H}_{(f)} = 45 \text{ ккал/кг}; \quad \hat{H}_{(bx1)} = 20 \text{ ккал/кг}; \quad \hat{H}_{(bx2)} = 50 \text{ ккал/кг} \quad (10.4.9-7)$$

Подставив данные из уравнений (10.4.9-3), (10.4.9-5) и (10.4.9-7) в уравнение (10.4.9-2), можно определить энергию, переходящую из раствора в охлаждающий

змеевик в процессе растворения:  $-\int_0^{t_f} Q dt = 500 \text{ ккал.}$

**10.4.10. Интегральное неравенство энтропии для суммы компонент.** Это описание соответствует анализу для однокомпонентных систем из § 7.4.7. Необходимо только заменить дифференциальные неравенства энтропии § 8.3.6 на неравенства § 5.5.2, тогда получим:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(s)} \rho \hat{S} dV \geq \int_{S_{(bx, \text{вых})}} \rho \hat{S} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{(s)}) \cdot (-\mathbf{n}) dS +$$

$$+ \int_{S(s)} \frac{1}{T} \left( \mathbf{q} - \sum_{A=1}^N \mu_{(A)} \mathbf{j}_{(A)} \right) \cdot (-\mathbf{n}) dS + \int_{V(s)} \rho \frac{Q}{T} dV \quad (10.4.10-1)$$

$$\text{и}$$

$$\int_{V(s)} \left\{ -\frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \text{tr} (\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \frac{1}{T} \sum_{A=1}^N \mathbf{j}_{(A)} \cdot \left[ T \nabla \left( \frac{\mu_{(A)}}{T} \right) - \mathbf{f}_{(A)} \right] - \sum_{A=1}^N \frac{1}{T} \mu_{(A)} r_{(A)} \right\} dV \geq 0. \quad (10.4.10-2)$$

Как в уравнении (10.4.10-1), так и в уравнении (10.4.10-2) мы пренебрегали членами, описывающими кинетическую энергию диффузии ( $0,5 u_{(A)}^2$ ), поскольку, как указывалось в § 10.4.8, не имеется экспериментальных доказательств практического значения этих членов во всех случаях. Из этих видов уравнений интерес представляет

(10.4.10-1). Часто целесообразно пренебречь  $\sum_{A=1}^N \mu_{(A)} \mathbf{j}_{(A)}$  по сравнению с  $\mathbf{q}$  во втором

члене левой части. В таком случае уравнение (10.4.10-1) принимает такой же вид, как для однокомпонентных систем из § 7.4.7.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Тензорный анализ является языком, с помощью которого механику сплошных сред можно изложить простейшим способом и в самом полном соответствии с физическим смыслом явлений. Поэтому читателям, еще не знакомым с этим предметом, рекомендуется проработать приложение, прежде чем приступить к освоению материала.

Степень овладения тензорным анализом зависит от целей изучающего. Это приложение написано для трех категорий читателей.

Многие студенты старших курсов технических специальностей стремятся как можно быстрее приступить к практическому применению изучаемого предмета. Однако к гл. 1 это относится не полностью: рекомендуется иногда чередовать материал первой главы с этим приложением.

Полностью изучить приложение рекомендуется всем, кто намерен заниматься серьезными исследованиями в любом из подразделов механики сплошных сред. В параграфах, помеченных одной звездочкой, показано, как различные результаты можно представить в криволинейных координатах. Без этих параграфов невозможно получить результаты в криволинейных координатах, представленные в табл. 2.5.1, 2.5.2, 5.6.1 и т. д.; они составляют основу для анализа пограничного слоя на криволинейных поверхностях (§ 3.5.3 и 3.5.7), помогают оперировать с новыми определяющими уравнениями и необычными системами координат.

Тем читателям, кто не уверен, к какой категории отнести себя, можно порекомендовать начать с параграфов, помеченных двумя звездочками. Если интерес к предмету возрастет, легко вернуться и прочитать пропущенные.

#### A.1. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

\*\*A.1.1. *Пространственные векторы.* Мы видим, что реальный мир занимает пространство  $E$ , изучаемое элементарной геометрией. Каждой точке пространства  $E$  соответствует место во Вселенной.

Каждой паре точек  $(a, b)$  пространства  $E$ , взятых в определенном порядке, соответствует направленный линейный отрезок, обозначенный  $\vec{ab}$ . Каждый направленный линейный отрезок  $\vec{ab}$  характеризуется длиной  $|ab|$  и направлением (за исключением нулевого вектора, который имеет нулевую длину и произвольное направление).

Определим с о в о к у п н о с т ь пространственных векторов, составленную из множества направленных линейных отрезков всех ориентаций, с учетом того, что два направленных отрезка, отличающиеся лишь параллельным смещением, представляют один и тот же элемент множества. Определим три операции в этом множестве: сложение, умножение на скаляр (действительное число) и скалярное произведение.

*Сложение.* Сумма  $v+w$  двух пространственных векторов  $v, w$  определяется известным правилом параллелограмма, как показано на рис. A.1.1-1.

*Умножение на скаляр.* Пусть  $a$  — действительное число (скаляр), а  $v$  — пространственный вектор. Определим пространственный вектор  $av$  как вектор, имеющий длину  $|a||v|$ ; направление  $av$  по определению совпадает с направлением  $v$  при  $a > 0$  и противоположно ему при  $a < 0$ .

*Скалярное произведение.* Скалярное произведение  $v \cdot w$  двух пространственных векторов  $v$  и  $w$  является действительным числом, которое получается перемножением длин векторов  $v$  и  $w$  на косинус угла между направлениями  $v$  и  $w$ .

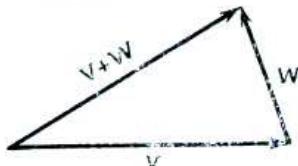


Рис. A.1.1-1. Правило параллелограмма.

Эти три операции удовлетворяют следующим правилам:

$$(A_1) : v + w = w + v;$$

$$(A_2) : u + (v + w) = (u + v) + w;$$

(A<sub>3</sub>) :  $v + 0 = v$ . (Здесь 0 — нулевой пространственный вектор, который считается имеющим нулевую длину и произвольное направление.)

(A<sub>4</sub>) : если задан некоторый пространственный вектор  $v$ , то существует другой пространственный вектор, обозначаемый  $-v$ , такой что

$$v + (-v) = 0;$$

$$(M_1) : \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v;$$

$$(M_2) : 1v = v;$$

$$(M_3) : \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w;$$

$$(M_4) : (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v;$$

$$(I_1) : v \cdot w = w \cdot v;$$

$$(I_2) : u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w;$$

$$(I_3) : \alpha(v \cdot w) = (\alpha v) \cdot w;$$

$$(I_4) : v \cdot v \geq 0; v \cdot v = 0, \text{ если и только если } v = 0.$$

Если для любого множества предметов определено сложение и умножение на скаляр согласно правилам (A<sub>1</sub>)—(A<sub>4</sub>) и (M<sub>1</sub>)—(M<sub>4</sub>), это множество является векторным пространством, а элементы этого множества называются векторами.

Если для любого векторного пространства ввести скалярное произведение, удовлетворяющее правилам (I<sub>1</sub>)—(I<sub>4</sub>), то это векторное пространство будет рассматриваться как пространство скалярных произведений.

Для пространственных векторов принимаем следующие сокращения:

$$v - w \equiv v + (-w); \quad (A.1.1-1)$$

$$v \equiv |v| \equiv \sqrt{v \cdot v}. \quad (A.1.1-2)$$

Неотрицательное число  $v$  (или  $|v|$ ) — величина или длина вектора  $v$ .

*A.1.2. Радиус-векторы.* Положение любой точки  $z$  в пространстве  $E$  относительно некоторой другой точки  $O$  можно определить посредством радиус-вектора  $\vec{Oz}$ . Обычно величину  $z$  называют радиус-вектором точки  $z$  относительно начала отсчета  $O$ .

Множество всех радиус-векторов, определяющих положение точек в пространстве  $E$  относительно начала отсчета  $O$ , тождественно множеству всех пространственных векторов.

В общих рассуждениях редко проводится различие между «точкой  $z$ » или «точкой, для которой  $z$  есть радиус-вектор ее относительно  $O$ ».

*A.1.3. Пространственные векторные поля.* Температура, концентрация и давление являются примерами функций координат, имеющих действительные численные значения. Такие функции называются действительными скалярными полями.

Рассматривая течение воды в трубе или в реке, можно увидеть, что скорость течения является функцией координат. На стенах трубы скорость равна нулю, а в центре — максимальна. Скорость воды в трубе — пример функции координат, значения которой выражаются векторами. Мы будем называть любую функцию, имеющую векторное значение, пространственным векторным полем.

Возьмем еще один пример. Рассмотрим поле радиус-вектора  $p(z)$ . Оно отображает каждую точку  $z$  пространства  $E$  на соответствующий радиус-вектор  $z$ , измеряемый относительно предварительно выбранного начала отсчета  $O$ :

$$z = p(z). \quad (A.1.3-1)$$

Если операции сложения, умножения на скаляр и скалярного произведения векторов определить указанным ниже образом, множество всех пространственных векторных полей становится пространством скалярных произведений.

*Сложение.* Пусть  $v$  и  $w$  — два пространственных векторных поля; определим пространственное векторное поле  $v + w$  таким образом, что для каждой точки  $z$  пространства  $E$

$$(v + w)(z) \equiv v(z) + w(z).$$

Сложение в правой части соответствует определению сложения для пространственных векторов. При этом следует учесть, что  $v + w$ ,  $v$  и  $w$  — функции;  $(v + w)(z)$ ,  $v(z)$  и  $w(z)$  — значения этих функций в точке  $z$ .

**Умножение на скаляр.** Если  $a$  — действительное скалярное поле (функция положения, выражаясь действительным числом [1]), а  $\mathbf{v}$  — векторное поле, определим векторное поле  $a\mathbf{v}$  таким образом, что для любой точки  $z$

$$(a\mathbf{v})(z) \equiv a(z)\mathbf{v}(z).$$

Умножение на скаляр в правой части соответствует определению умножения на скаляр для пространственных векторов.

**Скалярное произведение векторов.** Если  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  — два векторных поля, определим действительное скалярное поле  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$  таким образом, что для любой точки  $z$

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(z) \equiv \mathbf{v}(z) \cdot \mathbf{w}(z).$$

Скалярное произведение в правой части соответствует определению скалярного произведения для пространственных векторов.

В этой книге нам часто придется рассматривать, кроме уже указанных, многие другие поля: поля напряжений, поля потоков энергии, поля потоков массы, поля энталпии и т. д. При формулировке основных понятий мы обычно используем действительные скалярные поля и пространственные векторные поля. То обстоятельство, что мы обычно имеем дело со значениями действительных скалярных полей (средняя температура в резервуаре или средняя концентрация в выходном течении) и значениями пространственных векторных полей (сила, действующая на тело или момент силы на поверхности), проявляется в конечных результатах приложений.

Обычно в литературе скалярные и векторные поля неточно называют скалярами и векторами.

Только из контекста можно понять, говорят ли авторы о функциях (векторных полях) или их значениях (пространственных векторах).

**A.1.4. Базисы.** Пусть  $a_1, a_2, a_3$  — скаляры. Определим совокупность трехмерных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  как линейно независимую, если

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i\mathbf{e}_i = 0. \quad (\text{A.1.4-1})$$

выполняется только, когда все числа  $a_1, a_2, a_3$  равны нулю. Геометрически три вектора линейно независимы, если не все они параллельны одной плоскости.

Базис для векторного пространства  $M$  определяется как совокупность  $\chi$  линейно независимых векторов так, что каждый вектор в пространстве  $M$  является линейной комбинацией элементов  $\chi$ .

Например, говорят, что  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  образуют базис для совокупности всех трехмерных векторов, если  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  линейно независимы, как в (A.1.4-1), и если каждый трехмерный вектор  $\mathbf{v}$  можно записать в виде их линейной комбинации:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^3 v_i\mathbf{e}_i. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1.4-2})$$

Числа  $v_1, v_2, v_3$  именуются компонентами вектора  $\mathbf{v}$  относительно базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

**Размерность** конечномерного векторного пространства  $M$  определяется числом элементов в базисе пространства  $M$ .

Мы принимаем без доказательства, что число элементов в любом базисе конечномерного векторного пространства является таким же, как и в любом другом базисе [1]. Из этого следует, что совокупность  $n$  векторов в любом  $n$ -мерном векторном пространстве  $M$  является базисом тогда и только тогда, когда они линейно независимы, или, альтернативно, тогда и только тогда, когда каждый вектор в  $M$  является линейной комбинацией элементов этой совокупности [1].

Пространство трехмерных векторов является по определению трехмерным. Тогда следует, что пространство трехмерных полей должно быть также трехмерным.

**A.1.5. Базисы для трехмерных векторных полей.** Базис  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3)$  для пространства трехмерных векторных полей является декартовым [2], если базисные поля имеют единичную длину (в каждой точке  $z$  пространства  $E$  соответствующие векторы имеют единичную длину):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}_1(z) \cdot \mathbf{m}_1(z) &= 1; \\ \mathbf{m}_2(z) \cdot \mathbf{m}_2(z) &= 1; \\ \mathbf{m}_3(z) \cdot \mathbf{m}_3(z) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1.5-1})$$

Базис ортогонален, если базисные элементы ортогональны друг другу (в каждой точке  $z$  пространства  $E$  соответствующие трехмерные векторы ортогональны друг другу):

$$\text{для } i \neq j: \mathbf{m}_i(z) \cdot \mathbf{m}_j(z) = 0. \quad (\text{A.1.5-2})$$

Часто в последующем, а также в основной части текста встречаются случаи, где может использоваться ортогональный декартов базис (ортонормальный базис).

Наиболее известен прямоугольный декартов базис. Кроме ортонормальности, базисные поля имеют следующее свойство: для каждого двух точек  $x$  и  $y$  в пространстве  $E$

$$\text{для } i=1, 2, 3 \quad \mathbf{m}_i(x) = \mathbf{m}_i(y). \quad (\text{A.1.5-3})$$

Это означает, что длина и направление базисных полей не зависят от положения в пространстве  $E$ . Мы будем использовать символы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  для такого базиса.

Каждое трехмерное векторное поле  $\mathbf{u}$  можно записать в виде линейной комбинации прямоугольных декартовых базисных полей  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.1.5-4})$$

Величины  $u_1, u_2, u_3$  известны как прямоугольные декартовы компоненты  $\mathbf{u}$ ; обычно они являются функциями положения в пространстве  $E$ .

Частным случаем является поле вектора положения, определяемое в § A.1.3:

$$\mathbf{p} = z_1 \mathbf{e}_1 + z_2 \mathbf{e}_2 + z_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 z_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.1.5-5})$$

Прямоугольные декартовы компоненты ( $z_1, z_2, z_3$ ) поля радиус-вектора  $\mathbf{p}$  называются прямоугольными декартовыми координатами относительно выбранного начала  $O$ . Они естественно являются функциями положения  $z$  в пространстве  $E$ :

$$\text{для } i=1, 2, 3 \quad z_i = z_i(z). \quad (\text{A.1.5-6})$$

По этой причине часто целесообразно рассматривать  $\mathbf{p}$  как функцию прямоугольных декартовых координат:

$$\mathbf{z} = \mathbf{p}(z_1, z_2, z_3). \quad (\text{A.1.5-7})$$

**A.1.6. Базисы для пространственных векторов.** Любой базис ( $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$ ) для пространственных векторных полей можно использовать для образования бесконечного числа базисов для пространства трехмерных векторов. Значения этих функций в любой точке  $z$  в пространстве  $E$ , т. е. пространственные векторы:

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{m}_i(z); \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{A.1.6-1})$$

можно использовать как базис для трехмерных векторов. Базис будет зависеть от выбранной точки  $z$  в том смысле, что величины и направления  $\mathbf{m}_i$  могут меняться в зависимости от положения. [Заметим, что при написании уравнения (A.1.6-1) мы использовали одни и те же обозначения для функций и для их значений].

В частности, интерес представляет любой декартов прямоугольный базис ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) для трехмерных векторных полей. Величина и направление значений этих функций не зависят от положения в пространстве  $E$ . Часто целесообразно использовать значения этих функций, т. е. трехмерные векторы:

$$\text{для } i=1, 2, 3 \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(z), \quad (\text{A.1.6-2})$$

как базис для трехмерных векторов.

Например, радиус-вектор  $\mathbf{z}$  и разность  $\mathbf{a} \equiv \vec{xy}$  через их прямоугольные декартовы компоненты можно представить как:

$$\mathbf{z} = \mathbf{p}(z) = \sum_{i=1}^3 z_i(z) \mathbf{e}_i(z); \quad (\text{A.1.6-3})$$

$$\mathbf{a} \equiv \vec{xy} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i(z). \quad (\text{A.1.6-4})$$

Учитывая (A.1.6-2), мы можем записать эти выражения в виде

$$\mathbf{z} = \mathbf{p}(z) = \sum_{i=1}^3 z_i(z) \mathbf{e}_i; \quad (\text{A.1.6-5})$$

$$\mathbf{a} = \vec{xy} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.1.6-6})$$

**A.1.7. Условие суммирования.** При написании трехмерных векторных полей через их прямоугольные декартовы компоненты заметим, что суммирование проводится по повторяющимся индексам  $i$ :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.1.7-1})$$

Это предполагает, что мы принимаем более простое обозначение: суммирование от 1 до 3 должно выполняться по каждому индексу, который появляется дважды в одном и том же члене. Это правило известно как **условие суммирования**. Из уравнения (A.1.7-1) можно записать:

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.1.7-2})$$

При этом условии можно записать скалярное произведение двух трехмерных векторных полей в виде

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_i \mathbf{e}_i) \cdot (w_j \mathbf{e}_j) = v_i w_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = v_i w_j \delta_{ij} = v_i w_i. \quad (\text{A.1.7-3})$$

При переходе от (A.1.7-3)<sub>1</sub> до (A.1.7-3)<sub>2</sub> использовались правила (I<sub>1</sub>)—(I<sub>3</sub>) для скалярного произведения. В (A.1.7-3) введен символ Кронекера:

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} +1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (\text{A.1.7-4})$$

Подчеркнем, что условие суммирования не определяется для индекса, который не появляется более чем дважды в одном члене. Когда это происходит, существуют несколько возможностей.

1. При записи соотношения вида

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) = (v_i w_i) (q_j n_j) = v_i w_i q_j n_j \quad (\text{A.1.7-5})$$

следует быть осторожным, чтобы не смешивать суммирование в выражении для  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$  с суммированием в  $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})$ . Следует иметь в виду, что соотношение  $v_i w_i q_j n_j$  не только не определено, но и непонятно. Оно может означать:

$$\begin{aligned} v_i w_i q_j n_j &= \sum_{i=1}^3 (v_i w_i q_i n_i) = \sum_{i=1}^3 (v_i w_i) \sum_{i=1}^3 (q_i n_i) = \\ &= \sum_{i=1}^3 (v_i q_i) \sum_{i=1}^3 (w_i n_i) = \sum_{i=1}^3 (v_i n_i) \sum_{i=1}^3 (w_i q_i). \end{aligned}$$

2. Иногда суммирование производится по всем индексам, которые появляются более чем дважды в одном члене. В таком случае применяется знак суммирования в явном виде:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \cancel{V g_{ii}} u^i \mathbf{g}_{<i>}.$$

3. Иногда индекс может появиться дважды или более в одном члене, хотя суммирование не производится. Для пояснения это указывается рядом с уравнением:

$u_{<i>} = u_i / \cancel{V g_{ii}}$  — суммирование по  $i$  не производится.

## A.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

A.2.1. *Определитель.* Определим, что  $e_{ijk}$  и  $e^{ijk}$  имеют только три разных значения:

- 0, когда любые два индекса равны;
- $\pm 1$ , когда  $ijk$  — четная перестановка из 123;
- $-1$ , когда  $ijk$  — нечетная перестановка из 123.

Величины  $e_{ijk}$  и  $e^{ijk}$  называются полностью кососимметричными по индексам  $ijk$ , т. е. при изменении любых двух индексов изменяется знак величины. Некоторое время мы не будем использовать  $e^{ijk}$ , а позднее вернемся к этой величине.

Введем обозначение для определителя  $(a_{ij})$ , который имеет обычную запись  $a_{ij}$ :

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.2.1-1})$$

При разложении определителя  $(a_{ij})$  по строкам можно записать:

$$\det(a_{ij}) = e_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}. \quad (\text{A.2.1-2})$$

Аналогично разложим определитель по столбцам:

$$\det(a_{ij}) = e_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}. \quad (\text{A.2.1-3})$$

Из уравнений (A.2.1-2) и (A.2.1-3) следует, что мы рассматриваем величину  $e_{ijk} a_{im} a_{jn} a_{kp}$ . Эта величина является полностью симметричной по индексам  $mnp$  для повторяющихся индексов мы имеем:

$$e_{ijk} a_{im} a_{jn} a_{kp} = e_{ijk} \epsilon_{jm} \epsilon_{in} \epsilon_{kp} = -e_{ijk} \epsilon_{in} \epsilon_{jm} \epsilon_{kp}. \quad (\text{A.2.1-4})$$

Таким же образом можно показать, что перемена местами двух любых индексов  $mnp$  изменяет знак. С учетом (A.2.1-3) можно записать для разложения по столбцам:

$$e_{ijk} a_{im} a_{jn} a_{pk} = \det(a_{rs}) e_{mnp}. \quad (\text{A.2.1-5})$$

Рассуждая таким же образом, находим для разложения по строкам из (A.2.1-2):

$$e_{ijk} a_{mi} a_{nj} a_{pk} = \det(a_{rs}) e_{mnp}. \quad (\text{A.2.1-6})$$

В качестве примера использования этого обозначения рассмотрим произведение двух определителей:

$$\begin{aligned} \det(a_{rs}) \det(b_{xy}) &= \det(a_{rs}) e_{ijk} b_{i1} b_{j2} b_{k3} = e_{mnp} a_{mi} a_{nj} a_{pk} b_{i1} b_{j2} b_{k3} = \\ &= e_{mnp} (a_{mi} b_{i1}) (a_{nj} b_{j2}) (a_{pk} b_{k3}) = \det(a_{us} b_{sv}). \end{aligned} \quad (\text{A.2.1-7})$$

Введем еще одно понятие — алгебраическое дополнение. Исходя из (A.2.1-5), запишем:

$$e_{rnp} e_{ijk} a_{im} a_{jn} a_{kp} = \det(a_{st}) e_{rnp} \epsilon_{mnp}. \quad (\text{A.2.1-8})$$

В § A.1.7 мы ввели символ Кронекера  $\delta_{rm}$ :

$$\delta_{rm} \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } r = m; \\ 0 & \text{при } r \neq m. \end{cases} \quad (\text{A.2.1-9})$$

Иногда целесообразнее использовать другое эквивалентное выражение

$$\delta_{rm} = 0,5 e_{rnp} \epsilon_{mnp}. \quad (\text{A.2.1-10})$$

Можно преобразовать (A.2.1-8) к виду:

$$(0,5 e_{rnp} e_{ijk} a_{jn} a_{kp}) a_{im} = \det(a_{st}) \delta_{rm} \quad (\text{A.2.1-11})$$

или

$$A_{ri} a_{im} = \det(a_{st}) \delta_{rm}, \quad (\text{A.2.1-12})$$

где

$$A_{ri} = 0,5 e_{rnp} e_{ijk} \epsilon_{jn} a_{kp}. \quad (\text{A.2.1-13})$$

Величина  $A_{ri}$  называется алгебраическим дополнением элемента  $a_{ir}$  в определителе  $(a_{st})$ . Когда определитель разлагается полностью, очевидно, что любой элемент, например  $a_{ir}$ , появляется лишь однажды в каждом из членов разложения; сомножителем при  $a_{ir}$  в этом разложении является  $A_{ri}$ . Определители более подробно рассматриваются в работе [2].

### A.3. ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНАЯ

*A.3.1. Градиент скалярного поля.* Градиент скалярного поля  $\alpha$  есть трехмерное векторное поле, обозначаемое  $\nabla\alpha$ . Градиент описывается точно, если определить его скалярное произведение произвольным трехмерным вектором во всех точках  $z$  в пространстве  $E$ :

$$\nabla\alpha(z) \cdot a \equiv \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha(z + sa) - \alpha(z)}{s}. \quad (\text{A.3.1-1})$$

Трехмерный вектор  $a$  следует понимать как направленный линейный отрезок или разность  $\overset{\rightarrow}{a} = zy$ , где  $y$  произвольная точка в пространстве  $E$ . При записи (A.3.1-1) предполагается известным начало координат  $0$ ;  $a$  понимается как функция радиус-вектора  $z$ , измеряемого относительно этого начала, а не как функция самой точки  $z$ . Уравнение (A.3.1-1) можно переписать в виде, более удобном для практики:

$$\begin{aligned} \nabla\alpha(z) \cdot a &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{ \alpha([z_1 + sa_1] e_1 + [z_2 + sa_2] e_2 + [z_3 + sa_3] e_3) - \\ &- \alpha(z_1 e_1 + [z_2 + sa_2] e_2 + [z_3 + sa_3] e_3) \} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{ \alpha(z_1 e_1 + [z_2 + sa_2] e_2 + \\ &+ [z_3 + sa_3] e_3) - \alpha(z_1 e_1 + z_2 e_2 + [z_3 + sa_3] e_3) \} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{ \alpha(z_1 e_1 + z_2 e_2 + \\ &+ [z_3 + sa_3] e_3) - \alpha(z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3) \} = a_1 \lim_{a_1 s \rightarrow 0} \frac{1}{a_1 s} \{ \alpha([z_1 + sa_1] e_1 + \\ &+ [z_2 + sa_2] e_2 + [z_3 + sa_3] e_3) - \alpha(z_1 e_1 + [z_2 + sa_2] e_2 + [z_3 + sa_3] e_3) \} + \\ &+ a_2 \lim_{a_2 s \rightarrow 0} \frac{1}{a_2 s} \{ \alpha(z_1 e_1 + [z_2 + sa_2] e_2 + [z_3 + sa_3] e_3) - \alpha(z_1 e_1 + z_2 e_2 + \\ &+ [z_3 + sa_3] e_3) \} + a_3 \lim_{a_3 s \rightarrow 0} \frac{1}{a_3 s} \{ \alpha(z_1 e_1 + z_2 e_2 + [z_3 + sa_3] e_3) - \\ &- \alpha(z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3) \} = a_1 \frac{\partial \alpha}{\partial z_1}(z) + a_2 \frac{\partial \alpha}{\partial z_2}(z) + \\ &+ a_3 \frac{\partial \alpha}{\partial z_3}(z) = a_i \frac{\partial \alpha}{\partial z_i}(z). \quad (\text{A.3.1-2}) \end{aligned}$$

При получении этого результата использовалось определение частной производной в виде:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z_2}(z) \equiv \lim_{\Delta z_2 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z_2} \{ \alpha(z_1 e_1 + [z_2 + \Delta z_2] e_2 + z_3 e_3) - \alpha(z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3) \}. \quad (\text{A.3.1-3})$$

Поскольку  $a$  — произвольный пространственный вектор, возьмем  $a = e_i$ :

$$\nabla\alpha \cdot e_i = \frac{\partial \alpha}{\partial z_i}. \quad (\text{A.3.1-4})$$

Наконец, находим:

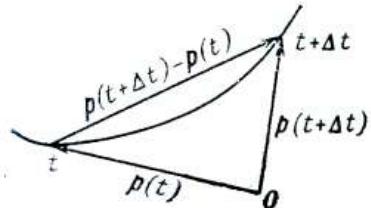
$$\nabla\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial z_i} e_i. \quad (\text{A.3.1-5})$$

#### A.4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

\* A.4.1. *Криволинейные координаты.* Рассмотрим некоторую кривую в пространстве. Пусть  $t$  — параметр, измеряемый вдоль этой кривой, а  $\mathbf{p}$  — векторная функция  $t$  вдоль этой кривой. Определим:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t)}{\Delta t}. \quad (\text{A.4.1-1})$$

Из рис. А.4.1-1 видно, что  $(d\mathbf{p}/dt)(t)$  есть касательный вектор к кривой в точке  $t$ . В § A.1.3 мы ввели поле радиус-вектора  $\mathbf{p}$ , которое в § A.1.5 представлено в прямоугольных декартовых координатах:



$$\mathbf{p} = z_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.4.1-2})$$

Предположим, что каждую величину  $z_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) можно рассматривать как функцию трех параметров  $x^1, x^2, x^3$ , называемых **криволинейными координатами**:

$$z_i = z_i(x^1, x^2, x^3) \text{ для } i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.4.1-3})$$

Рис. А.4.1-1. Кривая в пространстве в криволинейных координатах.

Линии, называемые **криволинейными поверхностями**, определяют поверхности, называемые **криволинейными поверхностями**. Кривая сечения двух любых криволинейных поверхностей определяет криволинейную координатную линию.

Трехмерное векторное поле  $\mathbf{g}_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) определяется как

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial(z_i \mathbf{e}_i)}{\partial x^k} = \frac{\partial z_i}{\partial x^k} \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.4.1-4})$$

В любой точке  $z$  пространственный вектор  $\mathbf{g}_k(z)$  касателен к  $x$ -координате. Следует отметить, что в общем случае величина и направление  $\mathbf{g}_k(z)$  изменяются в зависимости от положения  $z$  в пространстве  $E$ .

Можно ли трехмерные векторные поля  $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$  рассматривать как новый базис для трехмерных векторных полей? Из § A.1.4 следует положительный ответ на этот вопрос, если показать, что каждое пространственное векторное поле можно записать в виде линейной комбинации. Поскольку каждое пространственное векторное поле можно записать в виде линейной комбинации прямоугольных декартовых базисных полей  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , необходимо показать, что все  $\mathbf{e}_i$  можно представить как линейную комбинацию  $\mathbf{g}_k$ . Систему линейных уравнений

$$(\partial z_j / \partial x^k) \mathbf{e}_j = \mathbf{g}_k \quad (\text{A.4.1-5})$$

можно разрешить относительно  $\mathbf{e}_i$ , когда

$$\det \left( \frac{\partial z_j}{\partial x^k} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x^1} & \frac{\partial z_1}{\partial x^2} & \frac{\partial z_1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x^1} & \frac{\partial z_2}{\partial x^2} & \frac{\partial z_2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial z_3}{\partial x^1} & \frac{\partial z_3}{\partial x^2} & \frac{\partial z_3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (\text{A.4.1-6})$$

Когда это условие удовлетворяется вследствие

$$\frac{\partial z_m}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial z_n} = \delta_{mn}, \quad (\text{A.4.1-7})$$

из уравнения (A.4.1-5) можно записать:

$$\frac{\partial \mathbf{x}^k}{\partial z_m} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial x^k} \mathbf{e}_j = \delta_{mj} \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_m = \frac{\partial \mathbf{x}^k}{\partial z_m} \mathbf{g}_k. \quad (\text{A.4.1-8})$$

Таким образом, доказывается, что  $\mathbf{g}_k (k=1, 2, 3)$  можно рассматривать как совокупность базисных полей для пространственных векторных полей.

Некоторую совокупность параметров  $x^1, x^2, x^3$ , которые удовлетворяют условию (A.4.1-6), будем называть натуральным базисом для этой криволинейной системы координат.

Натуральные базисные поля ортогональны, если

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = 0 \text{ при } i \neq j. \quad (\text{A.4.1-9})$$

Когда натуральные базисные поля ортогональны, мы говорим, что они соответствуют ортогональной системе координат. Проверить, является ли система координат ортогональной, можно следующим образом:

$$g_{ij} \equiv \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^j} = \frac{\partial z_m}{\partial x^i} \mathbf{e}_m \cdot \frac{\partial z_n}{\partial x^j} \mathbf{e}_n = \frac{\partial z_m}{\partial x^i} \frac{\partial z_n}{\partial x^j} \delta_{mn} = \frac{\partial z_m}{\partial x^i} \frac{\partial z_m}{\partial x^j}. \quad (\text{A.4.1-10})$$

Обычно на практике удобнее оперировать с ортогональным декартовым (ортонормальным) базисом (см. § A.1.5). Нормируя натуральные базисные поля, из уравнения (A.4.1-9) можно получить ортонормальный базис  $(\mathbf{g}_{<1>}^{}, \mathbf{g}_{<2>}^{}, \mathbf{g}_{<3>}^{})$  (суммирование по  $i$  не производится):

$$\mathbf{g}_{<i>} \equiv \frac{\mathbf{g}_i}{\sqrt{\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i}} = \frac{\mathbf{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}}. \quad (\text{A.4.1-11})$$

Этот базис называется физическим базисом для системы координат. В этом учебнике мы рассматриваем натуральные нормированные базисы только для случая ортогональной системы координат.

Следовательно, любой пространственный вектор  $\mathbf{u}$  можно представить в виде линейной комбинации трех физических базисных векторных полей, связанных с ортогональной системой координат:

$$\mathbf{u} = u_{<i>} \mathbf{g}_{<i>}. \quad (\text{A.4.1-12})$$

Три коэффициента  $(u_{<1>}^{}, u_{<2>}^{}, u_{<3>}^{})$  называются физическими компонентами  $\mathbf{u}$  относительно этой системы координат:

На практике почти всегда рассматриваются ортогональные системы координат и физические компоненты пространственных векторных полей. Пространственные векторы и пространственные векторные поля, имеющие какую-либо физическую характеристику (скорость, сила), рассматриваются с помощью их физических компонент. Поскольку граничные условия для дифференциальных уравнений легче всего сформулировать с помощью физических компонент, самым естественным будет сформулировать особые задачи, которые необходимо решить, используя физические компоненты. Многие авторы учебников для инженеров опирируют исключительно физическими компонентами и никогда не используют ковариантные компоненты из § A.4.3.

\*A.4.2. Дуальный базис. Другой интересной группой пространственных векторных полей, связанных с криволинейной системой координат, являются дуальные векторные поля  $\mathbf{g}^i (i=1, 2, 3)$ , определяемые как градиенты криволинейных координат:

$$\mathbf{g}^i \equiv \nabla x^i. \quad (\text{A.4.2-1})$$

Уместно задать вопрос, могут ли дуальные векторные поля рассматриваться так же, как базис для пространства трехмерных векторных полей. Прежде чем ответить на этот вопрос, исследуем некоторые свойства этих полей.

Дуальные векторные поля подобно другим пространственным векторным полям можно представить в виде линейной комбинации натурального базиса

$$\mathbf{g}^i = g^{ji} \mathbf{g}_j. \quad (\text{A.4.2-2})$$

Можно считать, что коэффициенты  $g^{ji}$  определяются этим уравнением. Рассмотрим скалярное произведение одного из дуальных векторных полей на одно из натуральных базисных полей:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j &= \nabla x^i \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial z_m} \mathbf{e}_m \cdot \frac{\partial z_n}{\partial x^j} \mathbf{e}_n = \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial z_m} \frac{\partial z_n}{\partial x^j} \delta_{mn} = \frac{\partial x^i}{\partial z_m} \frac{\partial z_m}{\partial x^j} = \delta^i_j. \end{aligned} \quad (\text{A.4.2-3})$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — другая форма символа Кронекера (§ A.1.7 и A.2.1); индекс  $i$  используется в верхнем положении только для того, чтобы сохранить привычные для читателя относительные положения  $i$  и  $j$  в предшествующих строках. При этом индексы, связанные с криволинейными координатами, будут сохранять свое относительное положение (верхнее или нижнее) в каждом члене уравнения. Эта симметрия будет сохраняться, если выбрать соответствующие обозначения. Такой способ помогает быстро обнаружить ошибки общего типа.

Из уравнений (A.4.2-2) и § A.4.1 следует другой способ выражения уравнения (A.4.2-3):

$$g^{ki} g_k \cdot g_i = g_{ik} g^{ki} = \delta_{ik}. \quad (\text{A.4.2-4})$$

Вернемся к сомножителям, рассмотренным в § A.2.1. Рассуждение по поводу определителей § A.2.1 остается справедливым независимо от того, используем ли мы верхний или нижний индекс или их линейную комбинацию. Учитывая это, можно считать  $g^{im}$  сомножителем  $g_{mi}$  в  $\det(g_{rs})$ , деленным на  $\det(g_{rs})$ :

$$g^{im} = \frac{1}{2\det(g_{rs})} e^{ijk} e^{mnp} g_{nj} g_{pk}. \quad (\text{A.4.2-5})$$

Заметим, что при написании (A.4.2-5) использовалась величина  $e^{ijk}$ , введенная в § A.2.1, которая раньше нигде не встречалась. Это сделано потому, что мы пытались обосновать здесь понятие симметрии индексов. Заметим также, что суммирование по индексам в криволинейных системах координат производится по повторяющимся верхним и нижним индексам. Об этом подробнее будет сказано ниже.

При получении (A.4.2-5) производилось деление на  $\det(g_{rs})$  и считалось, что величина  $\det(g_{rs})$  не равна нулю. Докажем это. Исходя из определения  $g_{mn}$ , имеем:

$$g_{mn} = g_m \cdot g_n = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^n} = \frac{\partial z_i}{\partial x^m} \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial z_j}{\partial x^n} \mathbf{e}_j = \frac{\partial z_i}{\partial x^m} \frac{\partial z_j}{\partial x^n} \delta_{ij} = \frac{\partial z_i}{\partial x^m} \frac{\partial z_i}{\partial x^n}. \quad (\text{A.4.2-6})$$

Это значит, что

$$\det(g_{mn}) = \det\left(\frac{\partial z_i}{\partial x^m} \frac{\partial z_i}{\partial x^n}\right). \quad (\text{A.4.2-7})$$

Учитывая сказанное о произведении двух определителей в § A.2.1, мы можем записать:

$$\det(g_{mn}) = \left[ \det\left(\frac{\partial z_i}{\partial x^j}\right) \right]^2. \quad (\text{A.4.2-8})$$

Но ограничение, сделанное при определении криволинейной системы координат в § A.4.1, позволяет заключить, что  $\det(g_{mn}) \neq 0$ .

Из (A.4.2-2) и (A.4.2-3) имеем:

$$g^i \cdot g^j = g^{ki} g_k \cdot g^j = g^{ki} \delta_{k j} = g^{ji}. \quad (\text{A.4.2-9})$$

Поскольку скалярное произведение симметрично, то  $g^{ij}$  симметрично по своим индексам.

Докажем теперь, что три дуальных векторных поля  $g^i$  ( $i=1, 2, 3$ ) образуют другой базис для трехмерных векторных полей. Как следует из § A.1.4, необходимо показать только, что каждое пространственное векторное поле можно записать в виде их линейной комбинации. Поскольку уже было показано, что каждое пространственное векторное поле можно записать в виде линейной комбинации натурального базиса, осталось только доказать, что каждое из натуральных базисных полей можно представить как линейную комбинацию дуальных векторных полей. Умножая (A.4.2-2) на  $g_{ik}$ , суммируя по  $i$  и используя (A.4.2-4), получаем:

$$g_{ik} g^i = g^{ii} g_{ik} = \delta_{ik} g_j = g_k. \quad (\text{A.4.2-10})$$

Таким образом, доказательство завершено.

**A.4.3. Ковариантные и контравариантные компоненты трехмерных векторных полей.** Данна криволинейная система координат. Каждое трехмерное векторное поле можно представить в виде линейной комбинации натурального базиса:

$$\mathbf{u} = u^i g_i \quad (\text{A.4.3-1})$$

или линейной комбинации дуального базиса:

$$\mathbf{u} = u_i g^i. \quad (\text{A.4.3-2})$$

Величины  $u^i$  и  $u_i$  соответственно называются контравариантными и ковариантными компонентами трехмерного векторного поля  $\mathbf{u}$ .

Поскольку рассматриваются две группы базисов в каждой криволинейной системе координат, в наших обозначениях будут использоваться верхние, а также нижние индексы. Следует отметить, что, когда условие суммирования применяется для ковариантных и контравариантных компонент, один из повторяющихся индексов будет верхним, а другой — нижним. Это происходит прежде всего из-за произвольного выбора формы записи уравнений (A.4.3-1) и (A.4.3-2); здесь вводится суммирование верхних и нижних индексов.

Такая форма записи имеет одну очень важную особенность. Мы увидим, что любое уравнение, содержащее компоненты, будет до некоторой степени симметричным относительно индексов, не включенных в суммирование. Например, если индекс  $j$  не повторяется и встречается как верхний индекс в одном члене уравнения, во всех членах уравнений он встречается как верхний индекс.

Почему мы не использовали верхние, а также нижние индексы при обсуждении прямоугольных декартовых систем координат? Можно показать, что натуральные и дуальные векторы в ортогональных декартовых системах координат тождественны. Следовательно, различий между ковариантными и контравариантными компонентами векторов в прямоугольных декартовых координатах не существует, и необходимость в верхних и нижних индексах отпадает.

Поскольку для любого пространственного векторного поля  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i = u^i g_{hi} \mathbf{g}^h = u_h \mathbf{g}^h, \quad (\text{A.4.3-3})$$

можно записать:

$$(u^i g_{hi} - u_h) \mathbf{g}^h = 0. \quad (\text{A.4.3-4})$$

Поскольку дуальные базисные векторные поля линейно независимы, из уравнения (A.4.3-4) будем иметь:

$$u^i g_{hi} - u_h = 0. \quad (\text{A.4.3-5})$$

или

$$u_h = g_{hi} u^i. \quad (\text{A.4.3-6})$$

Таким же образом

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i = u_i g^{ji} \mathbf{g}_j = u^j \mathbf{g}_j, \quad (\text{A.4.3-7})$$

так что

$$u^j = g^{ji} u_i. \quad (\text{A.4.3-8})$$

Таким образом, мы нашли, что  $g_{ij}$  и  $g^{ij}$  можно использовать для того, чтобы «поднимать» и «опускать» индексы.

Найдем соотношение между физическими компонентами  $(u_{<1>}^{}, u_{<2>}^{}, u_{<3>}^{})$  пространственного векторного поля  $\mathbf{u}$  и его контравариантными компонентами. Из § A.4.1 уравнения (A.4.3-1) можно записать:

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i = u^1 V \overline{g_{11}} \mathbf{g}_{<1>} + u^2 V \overline{g_{22}} \mathbf{g}_{<2>} + u^3 V \overline{g_{33}} \mathbf{g}_{<3>} = u_{<i>} \mathbf{g}_{<i>}. \quad (\text{A.4.3-9})$$

Следовательно,

$$u_{<i>} = V \overline{g_{ii}} u^i \quad (\text{A.4.3-10})$$

(суммирование по  $i$  не производится).

Подобное соотношение можно получить для физических компонент с помощью ковариантных компонент. Из определения физических базисных полей (§ A.4.1) и соотношения между дуальными базисными полями и натуральными базисными полями (§ A.4.2) имеем (суммирование по  $i$  не производится):

$$g_{<i>} = \frac{1}{V \overline{g_{ii}}} g_{ii} g^i = V \overline{g_{ii}} g^i. \quad (\text{A.4.3-11})$$

При получении этого результата мы использовали ограничения ортогональных систем координат, введенные при обсуждении физических базисных полей. Из уравнения (A.4.3-2) следует:

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i = \frac{u_1}{V \overline{g_{11}}} \mathbf{g}_{<1>} + \frac{u_2}{V \overline{g_{22}}} \mathbf{g}_{<2>} + \frac{u_3}{V \overline{g_{33}}} \mathbf{g}_{<3>} = u_{<i>} \mathbf{g}_{<i>}. \quad (\text{A.4.3-12})$$

Следовательно,

$$u_{<i>} = \frac{u^i}{V \overline{g_{ii}}} \quad (\text{A.4.3-13})$$

(суммирование по  $i$  не производится).

## A.5. ТЕНЗОРЫ ВТОРОГО РАНГА

**\*\* A.5.1. Поля тензоров второго ранга.** Поле тензора второго ранга  $\mathbf{T}$  есть преобразование (отображение, правило), которое присваивает каждому данному пространственному векторному полю  $\mathbf{v}$  другое пространственное векторное поле  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$ . При этом имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{w}; \\ \mathbf{T} \cdot (\alpha \mathbf{v}) &= \alpha (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5.1-1})$$

Под  $\alpha$  мы понимаем действительное скалярное поле (заметьте, что при этом точка используется не в том смысле, как в § A.1.1, где рассматривалось скалярное произведение).

Определим сумму  $\mathbf{T} + \mathbf{S}$  двух полей тензоров второго ранга  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{S}$  как преобразование, которое для каждого трехмерного векторного поля  $\mathbf{v}$  имеет вид

$$(\mathbf{T} + \mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{A.5.1-2})$$

Произведение  $\alpha \mathbf{T}$  поля тензора второго ранга  $\mathbf{T}$  на действительное скалярное поле  $\alpha$  есть такое преобразование, при котором для каждого трехмерного векторного поля  $\mathbf{v}$  имеет место соотношение:

$$(\alpha \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \alpha (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}). \quad (\text{A.5.1-3})$$

Можно легко показать, что преобразование  $\mathbf{T} + \mathbf{S}$  и  $\alpha \mathbf{T}$  подчиняется правилам для поля тензора второго ранга. Если определить поле нулевого тензора второго ранга  $\mathbf{0}$ , требуя, чтобы соотношение

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{A.5.1-4})$$

было выполнено для всех пространственных векторных полей  $\mathbf{v}$ , можно увидеть, что правила  $(A_1)$ — $(A_4)$  и  $(M_1)$ — $(M_4)$  § A.1.1 удовлетворяются и что совокупность всех полей тензоров второго ранга определяет векторное пространство.

Если даны два пространственных векторных поля  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , можно определить поле тензора второго ранга, потребовав, чтобы оно преобразовывало каждое векторное поле  $\mathbf{v}$  в другое векторное поле  $(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{v}$  согласно правилу

$$(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{v} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}). \quad (\text{A.5.1-5})$$

Это тензорное поле  $\mathbf{ab}$  называется тензорным произведением или двойным произведением трехмерных векторных полей  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ <sup>1</sup>.

В этой работе поля тензоров второго ранга обозначаются прописными полужирными буквами, а пространственные векторные поля — строчными полужирными.

**\*\* A.5.2. Компоненты полей тензоров второго ранга.** Если  $\mathbf{T}$  — поле тензора второго ранга, а  $\mathbf{e}_j (j=1, 2, 3)$  образуют прямоугольный декартов базис для пространства трехмерных векторных полей, то можно записать:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_j = T_{ij} \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.5.2-1})$$

Матрица  $[T_{ij}]$  (совокупность компонент) поля тензора второго ранга  $\mathbf{T}$ :

$$[T_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5.2-2})$$

показывает, как базисные поля  $\mathbf{e}_i$  преобразуются с помощью  $\mathbf{T}$ .

Пусть  $\mathbf{v}$  — любое трехмерное векторное поле. С помощью уравнения (A.5.2-1) можно получить выражение для векторного поля  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$  в прямоугольных декартовых компонентах  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot (v_i \mathbf{e}_i) = v_i \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i = v_i T_{ij} \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.5.2-3})$$

В этом случае для **каждой** совокупности базисных полей ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) матрицу  $[T_{ij}]$  можно связать с любым полем тензора второго ранга  $\mathbf{T}$ . Эта связь или соответствие однозначны (т. е. для одной и той же совокупности базисных полей матри-

<sup>1</sup> Некоторые математики предпочитают другое обозначение для тензорного произведения:  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  [1, 3].

цы двух различных полей тензоров второго ранга различны) [1]. Для того чтобы доказать это, заметим, что матрица  $[T_{ij}]$  поля тензора второго ранга  $\mathbf{T}$  полностью определяет  $\mathbf{T}$  [из уравнения (A.5.2-3)  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$  определяется для каждого  $\mathbf{v}$ ].

Имея некоторое поле тензора второго ранга  $\mathbf{T}$ , которое преобразует прямоугольные декартовы базисные поля согласно правилу (A.5.2-1), определим новый тензор второго ранга  $\mathbf{T}^*$ :

$$\mathbf{T}^* = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \quad (\text{A.5.2-4})$$

который является суммой девяти тензорных произведений (см. § A.5.1).

Но

$$\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{e}_j = (T_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_j = T_{ik}\mathbf{e}_i\delta_{kj} = T_{ij}\mathbf{e}_i. \quad (\text{A.5.2-5})$$

Из этого следует, что одна и та же матрица  $[T_{ij}]$  соответствует как  $\mathbf{T}$ , так и  $\mathbf{T}^*$ . Поскольку выше было показано, что при выборе определенной совокупности прямоугольных декартовых базисных полей  $\mathbf{e}_i (i=1, 2, 3)$  существует однозначное соответствие между  $(3 \times 3)$  матрицами и полями тензора второго ранга, заключаем, что

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^* = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \quad (\text{A.5.2-6})$$

Девять коэффициентов  $T_{ij} (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$  называются прямоугольными декартовыми компонентами  $\mathbf{T}$ . Найдем это представление для полей тензоров второго ранга с помощью суммы тензорных произведений базисных полей.

Тензорное поле тензора  $\mathbf{T}$  есть частный пример поля тензора второго ранга. Оно преобразует каждое пространственное векторное поле в самое себя:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_j = I_{ij}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j = \delta_{ij}\mathbf{e}_i. \quad (\text{A.5.2-7})$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кренекера, введенный в § A.1.7. Из (A.5.2-7) имеем:

$$(I_{ij} - \delta_{ij})\mathbf{e}_i = 0. \quad (\text{A.5.2-8})$$

Но поскольку прямоугольные декартовы базисные поля линейно независимы (§ A.1.4), заключаем, что

$$I_{ij} = \delta_{ij}. \quad (\text{A.5.2-9})$$

Прежде чем развивать эти понятия дальше, следует сказать несколько слов об используемых здесь обозначениях. Если записать  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i$ , точка показывает, что  $\mathbf{T}$  действует на величину, стоящую за ним. Эта точка имеет совершенно отличное значение от точки в  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ , где она обозначает скалярное произведение. Это недостаток выбранного обозначения. Но когда уравнение читается в контексте, возможность путаницы ничтожна, т. е. если указано, что  $\mathbf{T}$  является полем тензора второго ранга, а  $\mathbf{e}_i$  — пространственным векторным полем, читатель вряд ли будет рассматривать  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i$  как скалярное произведение двух пространственных векторных полей. Преимущество же этого обозначения состоит в том, что когда  $\mathbf{T}$  записано в виде суммы тензорных произведений, то легко видеть, какая операция должна производиться:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i = (T_{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_i = T_{ik}\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i). \quad (\text{A.5.2-10})$$

Точка в выражении  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i$  напоминает читателю, что когда  $\mathbf{T}$  записывается как сумма тензорных произведений, преобразование выполняется взятием скалярного произведения между вторым пространственным вектором тензорного произведения и пространственным вектором  $\mathbf{e}_i$ , который требуется преобразовать. Обозначение, используемое здесь, более привычно для инженерных и прикладных работ, где значительное внимание обращается на решение задач в конкретных системах координат. Математики используют в своих задачах несколько отличные обозначения, где они либо избегают введения систем координат, либо эти системы не имеют первостепенного значения. Если понять одну любую систему обозначений, разобраться в другой не представляет трудности.

Вернемся к уравнению (A.5.2-6) и рассмотрим вопрос о том, как совокупность девяти тензорных произведений  $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$  образует базис (§ A.1.4) для векторного пространства полей тензоров второго ранга (§ A.5.1). Конечно, каждый элемент совокупности полей тензоров второго ранга выражается как линейная комбинация  $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ . Необходимо показать, что  $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$  линейно независимы. Если

$$\mathbf{A} = A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0, \quad (\text{A.5.2-11})$$

то

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k = (A_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = 0; \quad A_{ij}\mathbf{e}_i\delta_{jk} = 0.$$

поскольку

$$A_{ik}\mathbf{e}_i = 0. \quad (\text{A.5.2-12})$$

Поскольку прямоугольные декартовы базисные поля линейно независимы, то

$$A_{mk} = 0. \quad (\text{A.5.2-13})$$

Заключаем, что девять тензорных произведений в форме  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  линейно независимы и, следовательно, образуют базис для векторного пространства тензора второго ранга. Как побочный результат мы нашли, что векторное пространство тензора второго ранга девятиверно ( $\S$  A.1.4).

В физических приложениях часто целесообразно использовать ортогональную криволинейную систему координат. Если  $\mathbf{g}_{<i>} (i=1, 2, 3)$  — связанные физические базисные поля ( $\S$  A.4.1), то по аналогии с (A.5.2-1) можно записать:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{g}_{<i>} = T_{<j>} \mathbf{g}_{<j>}. \quad (\text{A.5.2-14})$$

Используя те же соображения, что и при выводе (A.5.2-6), можно записать:

$$\mathbf{T} = T_{<ij>} \mathbf{g}_{<j>} \mathbf{g}_{<j>}, \quad (\text{A.5.2-15})$$

где девять коэффициентов  $T_{<ij>} (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$  называются физическими компонентами  $\mathbf{T}$ . Совокупность девяти тензорных произведений  $\mathbf{g}_{<i>} \mathbf{g}_{<j>} (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$  образует другой базис для векторного пространства полей тензоров второго ранга.

**\*\* A. 5. 3. Транспонированное поле тензора второго ранга; симметричные, косо-симметричные и ортогональные тензорные поля.** Пусть  $\mathbf{T}$  — некоторое поле тензора второго ранга. Определим транспонированный тензор  $\mathbf{T}^T$ , как такое поле тензора второго ранга, что для  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — любых трехмерных векторных полей — справедливо следующее соотношение:

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{v}). \quad (\text{A.5.3-1})$$

Для нахождения связи между  $\mathbf{T}^T$  и  $\mathbf{T}$  положим:

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_i; \quad \mathbf{v} = \mathbf{e}_j; \quad \mathbf{T} = T_{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n; \quad \mathbf{T}^T = T_{rs}^T \mathbf{e}_r \mathbf{e}_s, \quad (\text{A.5.3-2})$$

где  $\mathbf{e}_i (i=1, 2, 3)$  представляет собой совокупность прямоугольных декартовых базисных полей. Тогда получим:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{e}_j); \\ & (T_{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (T_{rs}^T \mathbf{e}_r \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_j); \\ & T_{ji} = T_{ij}^T. \end{aligned} \quad (\text{A.5.3-3})$$

Отсюда следует, что если представить  $\mathbf{T}$  в виде (A.5.3-2), то транспонированный тензор выражается как

$$\mathbf{T}^T = T_{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n. \quad (\text{A.5.3-4})$$

Поскольку для любого трехмерного векторного поля  $\mathbf{w}$  справедливо соотношение

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{w} = T_{ij} w_j \mathbf{e}_i = T_{ji}^T w_i \mathbf{e}_i = w_i T_{ji}^T \mathbf{e}_i, \quad (\text{A.5.3-5})$$

то это подсказывает как ввести определение

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{T}^T \equiv \mathbf{T} \cdot \mathbf{w}. \quad (\text{A.5.3-6})$$

Можно полагать, что эта операция проводится следующим образом:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{T}^T = (w_k \mathbf{e}_k) \cdot (T_{ji}^T \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i) = w_i T_{ji}^T \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.5.3-7})$$

Поле тензора второго ранга  $\mathbf{T}$  называется симметричным, если оно тождественно транспонированному

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (\text{A.5.3-8})$$

В прямоугольных декартовых координатах имеем:

$$T_{ij} = T^T_{ij} = T_{ji}. \quad (\text{A.5.3-9})$$

Поле тензора второго ранга  $\mathbf{T}$  называется кососимметричным, если

$$\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T. \quad (\text{A.5.3-10})$$

Связь между прямоугольными декартовыми компонентами этих двух тензорных полей будет выражаться соотношением

$$T_{ij} = -T^T_{ij} = -T_{ji}. \quad (\text{A.5.3-11})$$

Ортогональное тензорное поле или преобразование пространства трехмерных векторных полей есть такое преобразование, которое сохраняет длины и углы. Если  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — любые трехмерные векторные поля, а  $\mathbf{Q}$  — ортогональное тензорное поле, то

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{A.5.3-12})$$

Но это означает, что

$$[\mathbf{Q}^T \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u})] \cdot \mathbf{v} = [(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A.5.3-13})$$

или

$$[(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{A.5.3-14})$$

Поскольку  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — произвольные трехмерные векторные поля, то

$$(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (\text{A.5.3-15})$$

и

$$(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{I}. \quad (\text{A.5.3-16})$$

Можно далее показать, что

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}. \quad (\text{A.5.3-17})$$

Здесь введена запись  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — произвольные поля тензоров второго ранга. Если  $\mathbf{v}$  — любое трехмерное векторное поле, трехмерное векторное поле  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})$  получается применением сначала преобразования  $\mathbf{B}$  к трехмерному векторному полю  $\mathbf{v}$ , а затем применением к результату преобразования  $\mathbf{A}$ . Можно считать, что  $\mathbf{v}$ , а затем применением к результату преобразования  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})$  получилось из  $\mathbf{v}$  вследствие применения преобразования  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}, \quad (\text{A.5.3-18})$$

где

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv (A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot (B_{km} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m) = A_{ij} B_{jm} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_m. \quad (\text{A.5.3-19})$$

Это рассмотрение позволяет по-другому взглянуть на поля тензоров второго ранга. Любое поле тензора второго ранга  $\mathbf{A}$  есть преобразование, которое приписывает любому другому полю тензора второго ранга  $\mathbf{B}$  поле тензора второго ранга  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , определяемое равенством (A.5.3-19). Однако не все преобразования пространства полей тензоров второго ранга на самих себя определяются этим уравнением [4].

Определим транспонирование  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — поля тензора второго ранга. Если  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — два любых трехмерных векторных поля, то

$$[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{v}]. \quad (\text{A.5.3-20})$$

Отсюда следует, что

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T. \quad (\text{A.5.3-21})$$

**A.5.4. Обращение поля тензора второго ранга [1].** Поле тензора второго ранга  $\mathbf{A}$  называется обратимым, когда выполняются следующие условия:

- 1) если  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  — трехмерные векторные поля, для которых  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2$ , то  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ ;

2) если каждому трехмерному векторному полю  $\mathbf{v}$  соответствует по крайней мере одно трехмерное векторное поле  $\mathbf{u}$ , для которого  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}$ .

Если  $\mathbf{A}$  обратимо, то поле тензора второго ранга  $\mathbf{A}^{-1}$ , называемое обратным  $\mathbf{A}$ , определяется следующим образом. Если  $\mathbf{v}_1$  — некоторое трехмерное векторное поле, то по второму свойству можно найти трехмерное векторное поле  $\mathbf{u}_1$ , для которого  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ . Будем говорить, что  $\mathbf{u}_1$  неоднозначно определено, если  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2$ .  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ . Будем говорить, что  $\mathbf{u}_1$  неоднозначно определено, если  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2$ .  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ . Но согласно первому свойству  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ , т. е. пришли к противоречию. Трехмерное векторное поле

торное поле определяется однозначно. Положим по определению, что  $A^{-1} \cdot v_1$  будет равно  $u_1$ .

Чтобы доказать, что  $A^{-1}$  удовлетворяет правилам линейности для поля тензора второго ранга [уравнение (A.5.1-1)], нужно вычислить  $A^{-1} \cdot (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — действительные скалярные поля. Если  $A \cdot u_1 = v_1$  и  $A \cdot u_2 = v_2$ , имеем:

$$A \cdot (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 A \cdot u_1 + \alpha_2 A \cdot u_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2. \quad (\text{A.5.4-1})$$

Это означает, что

$$A^{-1} \cdot (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \alpha_1 A^{-1} \cdot v_1 + \alpha_2 A^{-1} \cdot v_2. \quad (\text{A.5.4-2})$$

Непосредственно из определения следует, что для любого обратимого преобразования  $A$

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I. \quad (\text{A.5.4-3})$$

Если  $A$ ,  $B$  и  $C$  — поля тензоров второго ранга, для которых

$$A \cdot B = C \cdot A = I, \quad (\text{A.5.4-4})$$

то  $A$  обратимо и  $A^{-1} = B = C$ . Действительно, если  $A \cdot u_1 = A \cdot u_2$ , из уравнения (A.5.4-4) имеем:

$$(C \cdot A) \cdot u_1 = (C \cdot A) \cdot u_2; \quad u_1 = u_2. \quad (\text{A.5.4-5})$$

Это подтверждает первое свойство обратимого преобразования. Второе свойство также удовлетворяется. Если  $v$  — любое векторное поле и если  $u = B \cdot v$ , то из уравнения (A.5.4-4) получим:

$$A \cdot u = (A \cdot B) \cdot v = v. \quad (\text{A.5.4-6})$$

Теперь, когда мы доказали, что  $A$  обратимо, из (A.5.4-4) следует:

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = C \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1}; \quad B = C = A^{-1}. \quad (\text{A.5.4-7})$$

Таким образом, мы показали, что (A.5.4-3) справедливо для некоторого поля тензора второго ранга  $A^{-1}$  тогда и только тогда, когда величина  $A$  обратима.

В качестве тривиального примера обратимого поля тензора второго ранга имеем тождественное преобразование, для которого  $I^{-1} = I$ . Ни нулевой тензор,  $0$ , ни тензорное произведение  $ab$  необратимы.

Для любого ортогонального преобразования  $Q$  выполняется равенство

$$Q^{-1} = Q^T. \quad (\text{A.5.4-8})$$

**\*\* A.5.5. След поля тензора второго ранга. Определение.** Пусть  $a$  и  $b$  — трехмерные векторные поля,  $a$  — скалярное поле, а  $S$  и  $T$  — поля тензоров второго ранга. Операция «tr», которая приписывает каждому тензору второго ранга  $T$  число  $\text{tr}(T)$ , называется следом, если она подчиняется следующим правилам:

$$\text{tr}(S+T) = \text{tr}(S) + \text{tr}(T); \quad \text{tr}(aT) = a \text{tr}(T); \quad \text{tr}(ab) = a \cdot b.$$

В прямоугольной системе координат след любого тензора второго ранга  $T = T_{ij} e_i e_j$  можно записать в виде

$$\text{tr}(T) = T_{ii} \text{tr}(e_i e_i) = T_{ii} (e_i \cdot e_i) = T_{ii} \delta_{ii} = T_{ii}. \quad (\text{A.5.5-1})$$

След тензора второго ранга есть сумма диагональных компонент матрицы  $[T_{ij}]$ .

## A.6. ГРАДИЕНТ ВЕКТОРА

**\*\* A.6.1. Градиент векторного поля.** Градиент трехмерного векторного поля  $v$  есть поле тензора второго ранга, обозначаемое  $\nabla v$ . Градиент определяется правилом, по которому он преобразует произвольный трехмерный вектор во всех точках  $z$  в пространстве  $E$ :

$$\nabla v(z) \cdot a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [v(z + sa) - v(z)]. \quad (\text{A.6.1-1})$$

Трехмерный вектор следует понимать как направленный отрезок прямой или расстояние между двумя точками  $\vec{a} = \vec{z}y$ , где  $y$  — произвольная точка в пространстве  $E$ . При написании (A.6.1-1) предполагалось, что начало  $O$  задано и можно рассматривать скорее как функцию радиус-вектора  $z$ , измеренного относительно этого начала, а не как функцию самой точки  $z$ .

По аналогии с обсуждением градиента скалярного поля в § A.3.1 имеем:

$$(\nabla v) \cdot a = \frac{\partial v}{\partial z_j} a_j. \quad (\text{A.6.1-2})$$

Для частного случая  $a = e_j$

$$(\nabla v) \cdot e_j = \frac{\partial v}{\partial z_j} = \frac{\partial v_i}{\partial z_j} e_i. \quad (\text{A.6.1-3})$$

При получении этого результата отмечалось, что величина и направление прямоугольных декартовых базисных полей не зависят от положения. Сравнивая (A.6.1-3) с (A.5.2-1) и (A.5.2-6), заключаем, что<sup>1</sup>

$$\nabla v = \frac{\partial v_i}{\partial z_j} e_i e_j. \quad (\text{A.6.1-4})$$

След градиента трехмерного векторного поля (см. § A.5.5) есть хорошо известная операция

$$\operatorname{tr}(\nabla v) = \frac{\partial v_i}{\partial z_j} \operatorname{tr}(e_i e_j) = \frac{\partial v_i}{\partial z_i}. \quad (\text{A.6.1-5})$$

Более общим подходом является рассмотрение этой операции как дивергенции трехмерного векторного поля  $v$ . Существуют следующие символы для обозначения этой операции:

$$\operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \operatorname{tr}(\nabla v) = \partial v_i / \partial z_i. \quad (\text{A.6.1-6})$$

\* A.6.2. Ковариантное дифференцирование. В § A.6.1 получены компоненты градиента пространственного векторного поля  $v$  в прямоугольной декартовой системе координат. В этом параграфе приведено выражение для смешанных компонент  $\nabla v$  в любой криволинейной системе координат (см. § A.5.2).

В § A.6.1 было показано, что

$$\nabla v \cdot a = \frac{\partial v}{\partial z_i} a_i. \quad (\text{A.6.2-1})$$

В криволинейных координатах можно представить эту операцию в виде

$$\nabla v \cdot a = \frac{\partial v}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial z_i} a_i = \frac{\partial v}{\partial x^i} \bar{a}^i, \quad (\text{A.6.2-2})$$

где  $\bar{a}^i (i=1, 2, 3)$  — контравариантные криволинейные компоненты вектора  $a$  (см. § A.4.3). Рассмотрим величину

$$\frac{\partial v}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (v^i g_i) = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} g_i + v^i \frac{\partial g_i}{\partial x^j}. \quad (\text{A.6.2-3})$$

В отличие от базисных полей  $e_j$  прямоугольных декартовых координат натуральные базисные поля криволинейных координат являются функциями положения. При дифференцировании они не могут рассматриваться как константы:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial p}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} (z_k e_k) = \frac{\partial^2 z_k}{\partial x^j \partial x^i} e_k. \quad (\text{A.6.2-4})$$

<sup>1</sup> К сожалению, хотя это вероятно наиболее распространенное обозначение для символа  $\nabla v$ , некоторые авторы дают другие определения [5, 6]:

$$\nabla v \equiv \frac{\partial v_i}{\partial z_j} e_j e_i.$$

Вместо  $(\nabla v)w$  эти авторы употребляют  $w(\nabla v)$ .

В § A.4.1 мы видели, что

$$\mathbf{e}_k = \frac{\partial x^m}{\partial z_k} \mathbf{g}_m. \quad (\text{A.6.2-5})$$

Вследствие этого можно записать:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 z_k}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial x^m}{\partial z_k} \mathbf{g}_m = \left\{ \begin{matrix} m \\ j \ i \end{matrix} \right\} \mathbf{g}_m, \quad (\text{A.6.2-6})$$

где символ  $\left\{ \begin{matrix} m \\ j \ i \end{matrix} \right\}$  определим в виде

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ j \ i \end{matrix} \right\} \equiv \frac{\partial^2 z_k}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial x^m}{\partial z_k}. \quad (\text{A.6.2-7})$$

Эти символы известны как символы Кристоффеля второго рода.  
Символы Кристоффеля первого рода определяются выражением

$$[ji, p] \equiv g_{pm} \left\{ \begin{matrix} m \\ j \ i \end{matrix} \right\}. \quad (\text{A.6.2-8})$$

Из § A.4.1 имеем:

$$g_{pm} = \frac{\partial z_n}{\partial x^p} \frac{\partial z_n}{\partial x^m}. \quad (\text{A.6.2-9})$$

Тогда выражение (A.6.2-8) можно переписать в виде

$$[ji, p] = \frac{\partial z_n}{\partial x^p} \frac{\partial z_n}{\partial x^m} \frac{\partial^2 z_k}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial x^m}{\partial z_k} = \frac{\partial^2 z_k}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial z_k}{\partial x^p}; \quad (\text{A.6.2-10})$$

уравнение (A.6.2-8) можно также записать в виде

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ j \ i \end{matrix} \right\} = g^{rp} [ji, p]. \quad (\text{A.6.2-11})$$

Хотя для определения символов Кристоффеля второго рода достаточно уравнения (A.6.2-7), оно редко используется на практике. Продифференцировав уравнение (A.6.2-9), получим:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 z_m}{\partial x^k \partial x^i} \frac{\partial z_m}{\partial x^j} + \frac{\partial z_m}{\partial x^i} \frac{\partial^2 z_m}{\partial x^k \partial x^j}. \quad (\text{A.6.2-12})$$

Два подобных выражения можно получить перестановкой индексов  $i$ ,  $j$  и  $k$ :

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 z_m}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial z_m}{\partial x^k} + \frac{\partial z_m}{\partial x^j} \frac{\partial^2 z_m}{\partial x^i \partial x^k}, \quad (\text{A.6.2-13})$$

и

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 z_m}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial z_m}{\partial x^i} + \frac{\partial z_m}{\partial x^k} \frac{\partial^2 z_m}{\partial x^j \partial x^i}. \quad (\text{A.6.2-14})$$

Суммируя (A.6.2-13) и (A.6.2-14) и вычитая (A.6.2-12), получаем:

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2 \frac{\partial^2 z_m}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial z_m}{\partial x^k} = 2 [ij, k]. \quad (\text{A.6.2-15})$$

Из (A.6.2-11) и (A.6.2-15) будем иметь другое выражение для символов Кристоффеля второго рода, которое обычно более удобно для использования на практике, чем (A.6.2-7):

$$\left\{ \begin{matrix} m \\ i \ j \end{matrix} \right\} = g^{mk} [ij, k] = \frac{g^{mk}}{2} \left( \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (\text{A.6.2-16})$$

Вернемся к (A.6.2-3) и запишем его с помощью (A.6.2-6)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} = \frac{\partial v^t}{\partial x^i} \mathbf{g}_i + v^i \left\{ \begin{matrix} m \\ j \ i \end{matrix} \right\} \mathbf{g}_m + \left[ \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} i \\ j \ m \end{matrix} \right\} v^m \right] \mathbf{g}_i = v^i, _i \mathbf{g}_i. \quad (\text{A.6.2-17})$$

Определим символ  $v_{,j}^i$  как

$$v_{,j}^i \equiv \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ j \quad m \end{array} \right\} v^m. \quad (\text{A.6.2-18})$$

Величина  $v_{,j}^i$  называется  $j$ -й ковариантной производной от  $i$ -й контравариантной компоненты векторного поля  $\mathbf{v}$ .

Это позволяет записать (A.6.2-2) в виде

$$(\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = v_{,j}^i a^j g_i, \quad (\text{A.6.2-19})$$

где  $a^j$  представляет собой контравариантные компоненты вектора  $\mathbf{a}$  в рассматриваемой криволинейной системе координат. Если следовать практике представления тензорных полей второго ранга в виде суммы тензорных произведений базисных полей, введенной в § A.5.2, то  $\nabla \mathbf{v}$  можно представить как

$$\nabla \mathbf{v} = v_{,j}^i g_i g^j. \quad (\text{A.6.2-20})$$

Девять величин вида  $v_{,j}^i$  ( $i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$ ) представляют собой смешанные компоненты поля тензора второго ранга  $\nabla \mathbf{v}$ .

В (A.6.2-3) мы выразили  $\mathbf{v}$  как линейную комбинацию натуральных базисных векторов. Как изменится полученное выше выражение, если представить  $\mathbf{v}$  в виде линейной комбинации дуальных базисных векторов? В этом случае имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (v_i g^i) = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} g^i + v_i \frac{\partial g^i}{\partial x^j}. \quad (\text{A.6.2-21})$$

Основная задача — найти выражение для  $\partial g^i / \partial x^j$ .

Из § A.4.2

$$g_i \cdot g^j = \delta_{ij}. \quad (\text{A.6.2-22})$$

Беря производную по  $x^k$  от этого выражения, получим:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x^k} \cdot g^j + g_i \cdot \frac{\partial g^j}{\partial x^k} = 0 \quad (\text{A.6.2-23})$$

или

$$g_i \cdot \frac{\partial g^j}{\partial x^k} = - \frac{\partial g_i}{\partial x^k} \cdot g^j = - \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \quad i \end{array} \right\} g_m \cdot g^j = - \left\{ \begin{array}{c} j \\ k \quad i \end{array} \right\}. \quad (\text{A.6.2-24})$$

Пространственный вектор  $\partial g^j / \partial x^k$  подобно другим элементам векторного пространства пространственных векторов можно записать как линейную комбинацию дуальных базисных векторов

$$\partial g^j / \partial x^k = A^j_{kl} g^l, \quad (\text{A.6.2-25})$$

где коэффициенты  $A^j_{kl}$  необходимо определить. Скалярное произведение этого уравнения с  $g_i$  дает согласно (A.6.2-24):

$$g_i \cdot \partial g^j / \partial x^k = A^j_{ki} = - \left\{ \begin{array}{c} j \\ k \quad i \end{array} \right\}. \quad (\text{A.6.2-26})$$

Это позволяет записать:

$$\partial g^j / \partial x^k = - \left\{ \begin{array}{c} j \\ k \quad i \end{array} \right\} g^i. \quad (\text{A.6.2-27})$$

Возвращаясь к (A.6.2-21), можно записать:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^j} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} g^i - v_i \left\{ \begin{array}{c} i \\ j \quad k \end{array} \right\} g^k = \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \left\{ \begin{array}{c} k \\ j \quad i \end{array} \right\} v_k \right] g^i = v_{,j}^i g^i. \quad (\text{A.6.2-28})$$

где символ  $v_{i,j}$  определяется выражением

$$v_{i,j} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \left\{ \begin{array}{c} k \\ j \quad i \end{array} \right\} v_k. \quad (\text{A.6.2-29})$$

Величина  $v_{i,j}$  называется  $j$ -й ковариантной производной от  $i$ -й ковариантной компоненты векторного поля  $\mathbf{v}$ .

Из (A.6.2-2) и (A.6.2-28) получим:

$$(\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = v_{i,j} a^i g^j, \quad (\text{A.6.2-30})$$

где  $a^i$  выражает контравариантные компоненты пространственного вектора  $\mathbf{a}$  в любой рассматриваемой криволинейной системе координат. Если учесть рассуждения § A.5.2, можно сделать вывод, что

$$\nabla \mathbf{v} = v_{i,j} g^i g^j, \quad (\text{A.6.2-31})$$

где  $v_{i,j}$  — ковариантные компоненты  $\nabla \mathbf{v}$ .

Уравнение (A.6.2-31) можно записать в форме, подобной (A.6.2-20):

$$\nabla \mathbf{v} = v_{i,j} g^{ik} g_{kj} = v_{k,j} g^{ki} g_{ij}. \quad (\text{A.6.2-32})$$

В свою очередь (A.6.2-20) можно записать следующим образом:

$$\nabla \mathbf{v} = (g^{ki} v_k)_{,j} g_{ij} g^j. \quad (\text{A.6.2-33})$$

Тогда

$$(g^{ki} v_k)_{,j} = g^{ki} v_{k,j}. \quad (\text{A.6.2-34})$$

Напомним, что, как было показано, в § A.5.2, девять тензорных произведений вида  $g_{ij} g^j$  являются линейно независимыми. Это означает, что  $g^{ki}$  можно рассматривать как постоянные относительно ковариантного дифференцирования.

## A.7. ТЕНЗОРЫ ТРЕТЬЕГО РАНГА

**A.7.1. Поля тензоров третьего ранга.** Рассмотрение полей тензоров третьего ранга тесно связано с исследованием полей тензоров второго ранга § A.5.1.

После тензора третьего ранга  $\beta$  есть преобразование (отображение, правило), которое ставит в соответствие каждому данному полю пространственного вектора  $\mathbf{v}$  поле тензора второго ранга  $\beta \cdot \mathbf{v}$ . При этом должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \beta \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \beta \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{w}; \\ \beta \cdot (a\mathbf{v}) &= a(\beta \cdot \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (\text{A.7.1-1})$$

Величина  $a$  обозначает действительное скалярное поле. Заметим, что здесь точечная запись используется в другом смысле, чем в § A.1.1, где рассматривалось скалярное произведение. Такая форма записи позволяет пойти по тому же пути, как и при анализе полей тензоров второго ранга.

Определим сумму  $\alpha + \beta$  двух полей тензоров третьего ранга  $\alpha$  и  $\beta$  как такое преобразование, при котором для каждого векторного поля  $\mathbf{v}$  будем иметь:

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{A.7.1-2})$$

Произведение  $a\beta$  поля тензора третьего рода  $\beta$  на скаляр  $a$  есть такое преобразование, при котором для каждого пространственного векторного поля  $\mathbf{v}$

$$(a\beta) \cdot \mathbf{v} = a(\beta \cdot \mathbf{v}). \quad (\text{A.7.1-3})$$

Можно легко показать, что преобразования  $\alpha + \beta$  и  $a\beta$  подчиняются правилам для тензора третьего ранга. Если мы определим нулевой тензор третьего ранга  $\mathbf{0}$  в виде

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$$

для всех пространственных векторных полей  $\mathbf{v}$ , то правила (A.1)—(A.4) и (M.1)—(M.4) § A.1.1 удовлетворяются, и совокупность всех полей тензоров третьего ранга составляет векторное пространство.

Если даны три поля векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , можно определить поле тензоров третьего ранга  $\mathbf{abc}$  так, чтобы выполнялось равенство

$$(\mathbf{abc}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{ab}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{A.7.1-4})$$

для всех векторных полей  $\mathbf{v}$ . Это тензорное поле  $\mathbf{abc}$  называется тензорным произведением полей  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ .

**A.7.2. Компоненты полей тензоров третьего ранга.** Если  $\beta$  — тензор третьего ранга, а поля  $\mathbf{e}_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) образуют прямоугольный декартов базис для пространства трехмерных векторных полей, можно записать:

$$\beta \cdot \mathbf{e}_k = \beta_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.7.2-1})$$

Совокупность 27 коэффициентов  $\beta_{ijk}$  ( $i, j, k=1, 2, 3$ ) будет называться матрицей коэффициентов  $\beta_{ijk}$ , что напоминает терминологию, используемую для тензоров второго ранга. Матрица коэффициентов  $[\beta_{ijk}]$  определяет, как базисные поля  $\mathbf{e}_k$  первого ранга образуются с помощью  $\beta$ . Если  $\mathbf{v}$  — любое пространственное векторное поле, то

$$\beta \cdot \mathbf{v} = \beta (v_k e_k) = v_k \beta \cdot e_k = v_k \beta_{ijk} e_i e_j. \quad (\text{A.7.2-2})$$

Таким образом, для каждой совокупности базисных полей ( $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) можно связать совокупность из 27 коэффициентов с любым полем тензора третьего ранга  $\beta$ . Это взаимооднозначное соответствие. Для той же совокупности базисных полей два различных поля тензоров третьего ранга будут иметь две различные матрицы коэффициентов. Для того чтобы доказать это, обратим внимание, что матрица коэффициентов  $[\beta_{ijk}]$  тензора третьего ранга полностью определяет  $\beta$  из (A.7.2-2);  $\beta \cdot \mathbf{v}$  определяется для каждого  $\mathbf{v}$ .

С помощью аргументов, использованных при обсуждении полей тензоров второго ранга (см. § A.5.2), можно показать, что каждое тензорное поле третьего ранга  $\beta$  записывается в виде суммы 27 тензорных произведений:

$$\beta = \beta_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.7.2-3})$$

Коэффициенты  $\beta_{ijk}$  являются теми же, что и введенные в (A.7.2-1). Они называются прямоугольными декартовыми компонентами  $\beta$ .

Продолжая таким же образом, можно показать, что 27 тензорных произведений  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$  ( $i, j, k=1, 2, 3$ ) являются линейно независимыми. Поскольку каждое тензорное поле третьего ранга можно представить линейной комбинацией  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$ , приходим к выводу, что 27 тензорных произведений  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$  образуют совокупность базисных полей для пространства тензорного поля третьего ранга. Следовательно, векторное пространство поля тензора третьего ранга — 27-мерное.

В физических приложениях часто удобно работать в ортогональной криволинейной координатной системе. Если  $\mathbf{g}_{<k>}$  ( $k=1, 2, 3$ ) — связанные физические базисные поля (§ A.4.1), то можно записать по аналогии с (A.7.2-1):

$$\beta \cdot \mathbf{g}_{<k>} = \beta_{<ijk>} \mathbf{g}_{<i>} \mathbf{g}_{<j>} \mathbf{g}_{<k>}. \quad (\text{A.7.2-4})$$

С помощью тех же аргументов, которые привели к (A.7.2-3), получим:

$$\beta = \beta_{<ijk>} \mathbf{g}_{<i>} \mathbf{g}_{<j>} \mathbf{g}_{<k>}, \quad (\text{A.7.2-5})$$

где 27 коэффициентов  $\beta_{<ijk>}$  ( $i, j, k=1, 2, 3$ ) именуются физическими компонентами  $\beta$ . Совокупность 27 тензорных произведений  $\mathbf{g}_{<i>} \mathbf{g}_{<j>} \mathbf{g}_{<k>}$  ( $i, j, k=1, 2, 3$ ) образует другой базис для векторного пространства полей тензора третьего ранга.

**A.7.3. Иной взгляд на тензоры третьего ранга.** Если  $\beta$  — поле тензора третьего ранга и если  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  — поля пространственных векторов, то  $\beta \cdot \mathbf{u}$  — поле тензора второго ранга, а  $(\beta \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$  — поле пространственного вектора. Для удобства введем обозначение

$$\beta : \mathbf{uv} \equiv (\beta \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}. \quad (\text{A.7.3-1})$$

Например, рассмотрим тензорное произведение прямоугольных декартовых базисных полей  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ . Тогда

$$\beta : \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = (\beta \cdot \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = (\beta_{mni} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_j = \beta_{mji} \mathbf{e}_m. \quad (\text{A.7.3-2})$$

Это наводит на мысль, что можно использовать  $\beta$  для определения преобразования (отображения, правила), которое приписывает каждому тензорному произведению

пространственных векторных полей  $\mathbf{uv}$  такое пространственное векторное поле  $\beta$ :  $\mathbf{uv}$ , при котором выполняются правила:

$$\beta:(\mathbf{ab} + \mathbf{uv}) = \beta:\mathbf{ab} + \beta:\mathbf{uv}; \quad \beta:(\alpha\mathbf{ab}) = \alpha(\beta:\mathbf{ab}). \quad (\text{A.7.3-3})$$

Величина  $\alpha$  обозначает действительное скалярное поле.

Поскольку каждое поле тензора второго ранга  $\mathbf{T}$  можно записать в виде линейной комбинации тензорных произведений (см. § A.5.2), мы будем иметь:

$$\beta:\mathbf{T} = \beta:(T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = T_{ij}\beta:\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = T_{ij}\beta m_{ij}\mathbf{e}_m. \quad (\text{A.7.3-4})$$

Из правил (A.7.3-3) непосредственно следует, что для любых двух полей тензоров второго ранга  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{T}$  и для любого скалярного поля  $\alpha$  будем иметь:

$$\beta:(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \beta:\mathbf{S} + \beta:\mathbf{T}; \quad \beta:(\alpha\mathbf{T}) = \alpha(\beta:\mathbf{T}). \quad (\text{A.7.3-5})$$

Если  $\varepsilon$  — тензор третьего ранга, а  $\mathbf{B}$  — любой кососимметричный тензор второго ранга, то

$$\mathbf{b} \equiv \varepsilon : \beta. \quad (\text{A.7.3-6})$$

Эта величина известна как соответствующий аксиальный вектор. Вектор завихренности вводится как аксиальный вектор, соответствующий тензору завихренности второго ранга из § 1.4.2.

## A.8. ГРАДИЕНТ ТЕНЗОРА

*A.8.1. Градиент поля тензора второго ранга.* Градиент тензорного поля второго ранга  $\mathbf{T}$  есть поле тензора третьего ранга, которое обозначается через  $\nabla\mathbf{T}$ . Градиент определяется заданием того, как он преобразует произвольный пространственный вектор во всех точках  $\mathbf{z}$  в пространстве  $E$ :

$$\nabla\mathbf{T}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{a} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\mathbf{T}(\mathbf{z} + s\mathbf{a}) - \mathbf{T}(\mathbf{z})]. \quad (\text{A.8.1-1})$$

Пространственный вектор  $\mathbf{a}$  нужно интерпретировать как направленный отрезок прямой или расстояние между точками  $\mathbf{a} \equiv \overrightarrow{zy}$ , где  $y$  — произвольная точка в пространстве  $E$ . При написании (A.8.1-1) мы предполагали, что начало координат  $0$  определено и  $\mathbf{T}$  понимается как функция радиус-вектора  $\mathbf{z}$ , измеренного относительно этого начала, а не как функция самой точки  $\mathbf{z}$ .

По аналогии с рассмотренным в § A.3.1 градиентом скалярного поля и градиентом пространственного поля из § A.6.1 имеем:

$$(\nabla\mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} = (\partial\mathbf{T}/\partial z_j) a_i. \quad (\text{A.8.1-2})$$

В частном случае  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_k$ :

$$(\nabla\mathbf{T}) \cdot \mathbf{e}_k = \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial z_k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_k} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.8.1-3})$$

Необходимо отметить, что величины и направления декартовых прямоугольных базисных полей не зависят от положения базиса в пространстве. Из сравнения (A.7.1-3) с (A.7.2-1) и (A.7.2-3) следует, что<sup>1</sup>

$$\nabla\mathbf{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_k} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.8.1-4})$$

Дивергенция тензорного поля второго ранга  $\mathbf{T}$  определяется как

$$\operatorname{div} \mathbf{T} \equiv \nabla \cdot \mathbf{T} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_j} \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.8.1-5})$$

<sup>1</sup> Хотя мы привыкли к этому наиболее обычному обозначению символа  $\nabla\mathbf{T}$ , некоторые авторы приводят другой вариант [6]:

$$\nabla\mathbf{T} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_k} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j.$$

Вместо  $(\nabla\mathbf{T}) \cdot \mathbf{v}$  они используют  $\mathbf{v} \cdot (\nabla\mathbf{T})$ .

\* A.8.2. Еще раз о ковариантном дифференцировании. В § A.8.1 мы выразили компоненты градиента тензорного поля второго ранга относительно прямоугольной декартовой системы координат. Здесь мы выведем выражения для смешанных компонент  $\nabla \mathbf{T}$  относительно любой криволинейной системы координат.

В § A.8.1 показано, что

$$(\nabla \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z_m} a_m. \quad (\text{A.8.2-1})$$

В криволинейных координатах эта операция выражается следующим образом:

$$(\nabla \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial z_m} a_m = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^k} \bar{a}^k; \quad (\text{A.8.2-2})$$

где  $\bar{a}^k$  ( $k=1, 2, 3$ ) — контравариантные криволинейные компоненты радиус-вектора  $\mathbf{a}$ . На основе обсуждения § A.6.2 получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} (T^{ij} g_i g_j) = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} g_i g_j + T^{ij} \frac{\partial g_i}{\partial x^k} g_j + T^{ij} g_i \frac{\partial g_j}{\partial x^k} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} g_i g_j + \\ &+ T^{ij} \left\{ \begin{array}{c} r \\ k \quad i \end{array} \right\} g_r g_j + T^{ij} g_i \left\{ \begin{array}{c} r \\ k \quad j \end{array} \right\} g_r = \left[ \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ k \quad r \end{array} \right\} T^{rj} + \right. \\ &\left. + \left\{ \begin{array}{c} j \\ k \quad r \end{array} \right\} T^{ir} \right] g_i g_j = T_{,k}^{ij} g_i g_j, \end{aligned} \quad (\text{A.8.2-3})$$

$$\text{где символ } T_{,k}^{ij} \text{ записывается как } T_{,k}^{ij} \equiv \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \left\{ \begin{array}{c} i \\ k \quad r \end{array} \right\} T^{rj} + \left\{ \begin{array}{c} j \\ k \quad r \end{array} \right\} T^{ir}. \quad (\text{A.8.2-4})$$

Величина  $T_{,k}^{ij}$  называется  $k$ -й ковариантной производной  $(ij)$ -й контравариантной компоненты тензорного поля второго ранга  $\mathbf{T}$ .

Таким образом (A.8.2-2) можно представить в виде

$$(\nabla \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} = T_{,k}^{ij} \bar{a}^k g_i g_j. \quad (\text{A.8.2-5})$$

Если использовать представление § A.7.2, введенное для выражения тензорного поля третьего ранга через суммы тензорных произведений базисных полей, то можно представить  $\nabla \mathbf{T}$  как

$$\nabla \mathbf{T} = T_{,k}^{ij} g_i g_j g^k. \quad (\text{A.8.2-6})$$

Отсюда следует, что  $T_{,k}^{ij}$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) являются смешанными компонентами  $\nabla \mathbf{T}$ .

## A.9. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И РОТОР

\*\* A.9.1. Векторное произведение и ротор. Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — два пространственных векторных поля. Студентам часто советуют запоминать векторное произведение  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$  относительно совокупности базисных полей в прямоугольных декартовых координатах в форме определителя:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.9.1-1})$$

Относительно физических базисных полей ортогональной криволинейной системы координат векторное произведение имеет аналогичную форму:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} g_{<1>} & g_{<2>} & g_{<3>} \\ a_{<1>} & a_{<2>} & a_{<3>} \\ b_{<1>} & b_{<2>} & b_{<3>} \end{vmatrix} = (a_{<2>} b_{<3>} - a_{<3>} b_{<2>}) \mathbf{g}_{<1>} + (a_{<3>} b_{<1>} - a_{<1>} b_{<3>}) \mathbf{g}_{<2>} + (a_{<1>} b_{<2>} - a_{<2>} b_{<1>}) \mathbf{g}_{<3>}. \quad (\text{A.9.1-2})$$

Направление  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$  находится с помощью известного правила правой руки: когда указательный палец указывает направление  $\mathbf{a}$ , а средний палец — направление  $\mathbf{b}$ , большой палец соответствует направлению  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ .

Подобное мнемоническое правило часто используется для компонент ротора векторного поля  $\mathbf{v}$  относительно совокупности базисных полей в прямоугольных координатах:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_3}{\partial z_2} - \frac{\partial v_2}{\partial z_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial z_3} - \frac{\partial v_3}{\partial z_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial z_1} - \frac{\partial v_1}{\partial z_2} \right) \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.9.1-3})$$

Для удобства введем более компактное обозначение. Вместо (A.9.1-1) и (A.9.1-2) запишем векторное произведение в виде

$$[\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}] = e_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i \quad (\text{A.9.1-4})$$

и

$$[\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}] = e_{ijk} a_{<j>} b_{<k>} \mathbf{g}_{<i>}. \quad (\text{A.9.1-5})$$

Символ  $e_{ijk}$  имеет только три различных значения:

0, когда любые два индекса равны;

+1, когда  $ijk$  — четная перестановка из 123;

-1, когда  $ijk$  — нечетная перестановка из 123. Тогда вместо (A.9.1-3) ротор векторного поля  $\mathbf{v}$  можно представить в виде

$$\text{rot } \mathbf{v} = e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial z_j} \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.9.1-6})$$

Уравнения (A.9.1-4) — (A.9.1-6) следуют из представления определителей, приведенных в § A.2.1.

*A.9.2. Еще раз о векторном произведении и роторе.* В § A.9.1 использовалось формальное определение для векторного произведения любых двух пространственных векторных полей  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ :

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \equiv \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbf{ba}), \quad (\text{A.9.2-1})$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv e_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k. \quad (\text{A.9.2-2})$$

Величина  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  ( $m=1, 2, 3$ ) — любая удобная совокупность базисных полей в прямоугольных координатах.

Для того чтобы найти геометрическую интерпретацию пространственного векторного поля  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ , сосредоточим внимание на некоторой точке  $z$  в пространстве  $E$ . Для краткости используем сокращенную запись  $\mathbf{a}=\mathbf{a}(z)$ ,  $\mathbf{b}=\mathbf{b}(z)$ , где мы ввели некоторую прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с точкой  $z$ . Выберем ось  $z_1$  вдоль  $\mathbf{a}$  и ось  $z_2$ , перпендикулярную  $\mathbf{a}$ , но лежащую в плоскости  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . В этой системе координат имеем:

$$a_i = (a, 0, 0); \quad b_i = (b \cos \theta, b \sin \theta, 0), \quad (\text{A.9.2-3})$$

где  $a$  и  $b$  — соответственно величины векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Компоненты вектора  $\mathbf{c}=(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})=(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(z)$  относительно этой системы координат, следовательно, будут:

$$c_i = (0, 0, ab \sin \theta). \quad (\text{A.9.2-4})$$

Отсюда следует, что вектор  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$  перпендикулярен плоскости векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и его значение равно  $ab \sin \theta$ . Теперь тем не менее остается решить вопрос о его направлении.

Заметим, что

$$c^2 = e_{ijk} c_i a_j b_k \quad (\text{A.9.2-5})$$

— положительный скаляр. Это наводит на мысль определить знак величины

$$e_{ijk} d_i a_j b_k, \quad (\text{A.9.2-6})$$

где  $\mathbf{d}$  — любой пространственный вектор. Для прямоугольной системы координат, которая изображена на рис. А.9.2-1, выполняется соотношение:

$$e_{ijk} d_i a_j b_k = d_3 ab \sin \theta. \quad (\text{A.9.2-7})$$

Величина (А.9.2-6) будет обращаться в нуль только в случае, если  $d_3=0$ , т. е. если один из векторов становится компланарным двум другим. Если непрерывно деформировать триаду  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})$  таким образом, чтобы она никогда не стала компланарной, то можно увидеть, что величина (А.9.2-6) изменяется непрерывно, но всегда остается одного и того же знака. Пусть триада деформируется непрерывно до тех пор, пока  $\mathbf{a}$  не совпадает с положительным направлением оси  $z_1$ ,  $\mathbf{b}$  — с положительным направлением оси  $z_2$ , а  $\mathbf{d}$  — с осью  $z_3$ . Тогда величина (А.9.2-6) должна быть положительной, если  $\mathbf{d}$  совпадает с положительным направлением оси  $z_3$ , и отрицательной, если  $\mathbf{d}$  совпадает с положительным направлением оси  $z_3$ .

Возвращаясь к (А.9.2-5), увидим,

что  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{c} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$  должны иметь такую ориентацию относительно друг друга, как оси координатной системы. В пространственных системах координат базисные поля  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  имеют такую же ориентацию, как указательный, средний и большой пальцы правой руки. Определение  $\varepsilon$  по (А.9.2-2) является требованием того, чтобы прямоугольная декартова система координат была правовинтовой. Следовательно, направление  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$  находится по правилу правой руки, введенному в § А.9.1.

Вообще говоря, удобнее ограничиться правовинтовыми системами координат.

Если тензорное произведение  $\mathbf{ba}$  в (А.9.2-1) заменить градиентом пространственного векторного поля  $\mathbf{v}$ , то получим определение ротора:

$$\text{rot } \mathbf{v} \equiv \nabla \wedge \mathbf{v} \equiv \varepsilon : \nabla \mathbf{v}. \quad (\text{A.9.2-8})$$

Относительно прямоугольной декартовой системы координат имеем:

$$\text{rot } \mathbf{v} = e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial z_j} \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.9.2-9})$$

## A.10. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТЕНЗОРА

**A.10.1. Определитель тензорного поля второго ранга** [7]. Пусть  $\mathbf{g}_i (i=1, 2, 3)$  — совокупность базисных полей для произвольной криволинейной системы координат. В любой точке  $z$  в пространстве  $E$  базисные поля можно рассматривать как три грани параллелепипеда, как показано на рис. А.10.1-1.

Введем величину определителя тензорного поля  $\mathbf{T}$  второго ранга в точке  $z$  как отношение объема параллелепипеда, образованного векторами  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{g}_1(z), \mathbf{T} \cdot \mathbf{g}_2(z), \mathbf{T} \cdot \mathbf{g}_3(z)$ , к объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{g}_1(z), \mathbf{g}_2(z), \mathbf{g}_3(z)$ . Определитель  $\mathbf{T}$  имеет положительный знак, если  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{g}_1(z), \mathbf{T} \cdot \mathbf{g}_3(z)$  и  $\mathbf{g}_1(z), \mathbf{g}_2(z), \mathbf{g}_3(z)$  имеют одну и ту же ориентацию (как указательный, средний и большой пальцы правой или левой руки), и отрицательный, если они имеют противоположную ориентацию.

Таким образом, предполагается, что формальное определение  $\det \mathbf{T}$  скалярного поля имеет вид:

$$\det \mathbf{T} \equiv \frac{[(\mathbf{T} \cdot \mathbf{g}_1) \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{g}_2)] \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{g}_3)}{(\mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3}. \quad (\text{A.10.1-1})$$

Для того чтобы сравнить это определение  $\det \mathbf{T}$  с понятием определителя, введенного в § А.2.1, применим это определение к совокупности базисных полей в прямоугольных координатах:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{T} &= \frac{\{(\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_1) \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_2)\} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3} = \frac{T_{j_1} T_{k_2} T_{l_3} (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_i}{(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3} = \\ &= T_{j_1} T_{k_2} T_{l_3} \frac{\mathbf{e}_{ijk}}{\mathbf{e}_{312}} = e_{ijk} T_{j_1} T_{j_2} T_{k_3} = \det (T_{mn}). \end{aligned} \quad (\text{A.10.1-2})$$

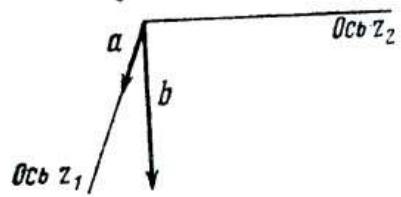


Рис. А.9.2-1. Точка в прямоугольной системе координат.

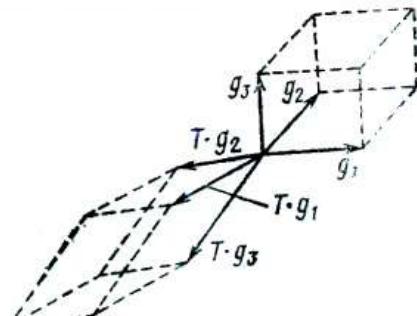


Рис. А.10.1-1. Параллелепипед, построенный на векторах  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$  и  $\mathbf{g}_3$ .

Если  $\mathbf{T}$  выражается посредством своих физических компонент относительно ортогональной криволинейной системы координат, результаты § A.2.1 следуют непосредственно.

Легко показать, что

$$\det(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) = (\det \mathbf{S}) (\det \mathbf{T}); \quad (\text{A.10.1-3})$$

$$\det(\mathbf{T}^{-1}) = \left( \frac{1}{\det \mathbf{T}} \right) \quad (\text{A.10.1-4})$$

и

$$\det(\mathbf{T}^T) = \det \mathbf{T}. \quad (\text{A.10.1-5})$$

## A.11. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

*\* A.11.1. Интегрирование пространственных векторных полей.* Объемный, поверхностный или линейный интеграл есть сложение величин, связанных с различными точками пространства. При интегрировании пространственного векторного поля (пространственная векторная функция положения) мы суммируем пространственные векторы, связанные с различными точками пространства.

Пусть  $\mathbf{v}$  — некоторое пространственное векторное поле, а  $z$  и  $y$  — две точки в пространстве. По правилу параллелограмма, используемому при сложении пространственных векторов (§ A.1.2), можно записать:

$$\mathbf{v}(z) + \mathbf{v}(y) = v_i(z) \mathbf{e}_i + v_i(y) \mathbf{e}_i = [v_i(z) + v_i(y)] \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.11.1-1})$$

Преимущество правила параллелограмма заключается в том, что направление и величина прямоугольных декартовых базисных полей не зависят от положения базиса в пространстве.

Уравнение (A.11.1-1) подсказывает подход к интегрированию пространственного векторного поля. Рассмотрим интегрирование  $\mathbf{v}$  по некоторой области  $R$  ( $R$  — кривая, поверхность или объем):

$$\int_R \mathbf{v} dR = \int_R v_i \mathbf{e}_i dR = \left( \int_R v_i dR \right) \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.11.1-2})$$

Поскольку величина и направление прямоугольных декартовых базисных полей независимы от положения базиса в пространстве, их можно рассматривать как константы интегрирования. Уравнение (A.11.1-2) приводит задачу интегрирования пространственного векторного поля к известной задаче интегрирования трех скалярных полей.

*A.11.2. Преобразование Грина [8].* Попытаемся обобщить преобразование Грина, частным случаем которого является теорема о дивергенции (теорема Гаусса).

Пусть  $\varphi$  — некоторый скаляр, вектор или тензор. Если  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении внешней нормали к замкнутой поверхности  $S_m$ , изображенной на рис. A.11.2-1, то выполняется приближенное соотношение:

$$\begin{aligned} \int_{S_m} \varphi n dS &= [\varphi(z_1 + \Delta z_1, z_2, z_3) - \varphi(z_1, z_2, z_3)] \Delta z_2 \Delta z_3 \mathbf{e}_1 + [\varphi(z_1, z_2 + \Delta z_2, z_3) - \\ &- \varphi(z_1, z_2, z_3)] \Delta z_1 \Delta z_3 \mathbf{e}_2 + [\varphi(z_1, z_2, z_3 + \Delta z_3) - \varphi(z_1, z_2, z_3)] \Delta z_1 \Delta z_2 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{A.11.2-1})$$

Разделив обе части уравнения (A.11.2-1) на  $\Delta V_m = \Delta z_1 \Delta z_2 \Delta z_3$ , найдем, что в пределе левая часть равна:

$$\begin{array}{c} \Delta z_1 \rightarrow 0 \\ \Delta z_2 \rightarrow 0 \\ \Delta z_3 \rightarrow 0 \end{array} : \frac{1}{\Delta V_m} \int_{S_m} \varphi \mathbf{n} dS = \nabla \varphi. \quad (\text{A.11.2-2})$$

Рассмотрим область пространства, которая имеет объем  $V$  и ограничена замкнутой поверхностью  $S$ . Пусть  $\mathbf{n}$  — единичное пространственное векторное поле в направлении внешней нормали к поверхности  $S$ . Тогда из рис. A.11.2-2 следует, что объемный интеграл должен получиться в результате предельного перехода: наглядно видно, что область  $V$  аппроксимируется  $K$  параллелепипедами:

$$\int_V \nabla \varphi dV = \lim_{\max \Delta V_m \rightarrow 0} \sum_{m=1}^K (\nabla \varphi)_m \Delta V_m. \quad (\text{A.11.2-3})$$

Под  $(\nabla \Phi)_m$  понимается величина  $\nabla \Phi$ , вычисленная в некоторой точке  $m$ -го параллелепипеда. Из уравнений (A.11.2-2) и (A.11.2-3) следует, что

$$\int_V \nabla \Phi \, dV = \lim_{\max \Delta V_m \rightarrow 0} \sum_{m=1}^K \int_{S_m} \Phi n \, dS = \int_S \Phi n \, dS. \quad (\text{A.11.2-4})$$

При выводе этого соотношения нетрудно заметить из рис. A.11.2-2, что вклады  $S_m$  и  $S_{m+1}$  компенсируются на их границе. Формула (A.11.2-4) называется преобразованием Грина.

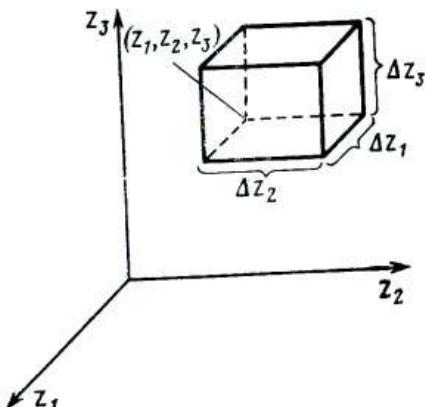


Рис. А.11.2-1. Элемент объема  $\Delta V_m = \Delta z_1 \Delta z_2 \Delta z_3$  внутри замкнутой поверхности  $S_m$ .

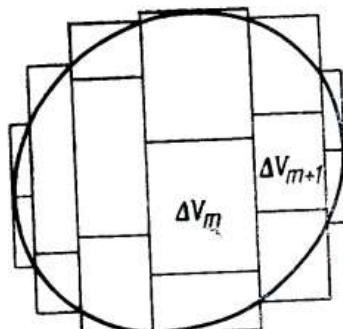


Рис. А.11.2-2. Аппроксимация области  $V$  при помощи  $K$  параллелепипедов.

Если  $\mathbf{v}$  — пространственное векторное поле, то из преобразования Грина следует:

$$\int_V \nabla \mathbf{v} \, dV = \int_S \mathbf{v} n \, dS. \quad (\text{A.11.2-5})$$

Частный случай формулы Грина представляет известная теорема о дивергенции (теорема Гаусса)

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int_S \mathbf{v} \cdot n \, dS. \quad (\text{A.11.2-6})$$

Пусть  $\mathbf{T}$  — любое тензорное поле второго ранга. Преобразование Грина дает:

$$\int_V \nabla \mathbf{T} \, dV = \int_S \mathbf{T} n \, dS. \quad (\text{A.11.2-7})$$

Это выражение представляет собой частный случай следующего соотношения, которое будет неоднократно использоваться нами:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot dV = \int_S \mathbf{T} \cdot n \, dS. \quad (\text{A.11.2-8})$$

Существуют другие подходы к выводу преобразования Грина.

\*\* A.11.3. Замена переменных при интегрировании по объему. Пусть  $x^1, x^2, x^3$  обозначают одну систему координат, а  $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$  — другую, так что имеют место формулы:

$$x^1 = x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3); \quad x^2 = x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3); \quad x^3 = x^3(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3).$$

Из математического анализа известно, что

$$\iiint_{h_{x^1, x^2, x^3}} F(x^1, x^2, x^3) \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3 = \iint_{R_{\bar{x}^1 \bar{x}^2 \bar{x}^3}} \int_{F[x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), \dots]} \left| \det \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right| \, d\bar{x}^1 \, d\bar{x}^2 \, d\bar{x}^3. \quad (\text{A.11.3-1})$$

Если одна система координат является прямоугольной декартовой, то справедливо соотношение:

$$\iiint_{R_{z_1 z_2 z_3}} F(z_1 z_2, z_3) dz_1 dz_2 dz_3 = \iiint_{R_{x^1, x^2, x^3}} F(z_1(x^1, x^2, x^3), \dots) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (\text{A.11.3-2})$$

где  $g \equiv \det(g_{ij})$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### ЕЩЕ РАЗ О ТЕОРЕМЕ ПЕРЕНОСА.

### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ТЕОРЕМЕ ПЕРЕНОСА

Вывод теоремы переноса (§ 1.3.2) может не удовлетворить того читателя, который выбрал для чтения только параграфы с двумя звездочками из приложения А. В последующих параграфах предлагаются альтернативные выводы теоремы переноса.

#### Б.1. ДРУГИЕ ФОРМЫ ТЕОРЕМЫ ПЕРЕНОСА

*Б.1.1. Первое альтернативное доказательство теоремы переноса.* Исходя из (1.3.2-1)

$$\frac{d}{dt} \int_{V(m)} \Psi dV = \int_{V(m)} \left( \frac{d_{(m)} \Psi}{dt} + \frac{\Psi}{J} \frac{d_{(m)} J}{dt} \right) dV. \quad (\text{Б.1.1-1})$$

и полагая

$$\Psi = 1, \quad (\text{Б.1.1-2})$$

получаем:

$$\frac{dV(m)}{dt} = \int_{V(m)} \frac{1}{J} \frac{d_{(m)} J}{dt} dV. \quad (\text{Б.1.1-3})$$

Это выражение дает скорость изменения объема, связанного с материальным телом.

Интуитивно ясно, что скорость, с которой объем тела увеличивается, можно связать с результирующей скоростью, с которой движется поверхность, ограничивающая тело:

$$\frac{dV(m)}{dt} \int_{S(m)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (\text{Б.1.1-4})$$

Применение преобразования Грина (см. § A.11.2) позволяет представить последнее соотношение в виде

$$\frac{dV(m)}{dt} = \int_{V(m)} \operatorname{div} \mathbf{v} dV. \quad (\text{Б.1.1-5})$$

Исключая производную по времени от объема тела из (Б.1.1-3) и (Б.1.1-5), находим:

$$\int_{V(m)} \left( \frac{1}{J} \frac{d_{(m)} J}{dt} - \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (\text{Б.1.1-6})$$

Но это утверждение справедливо для любого тела или любой части тела (поскольку часть тела также является телом). Отсюда следует, что подынтегральное выражение в (Б.1.1-6) должно равняться нулю:

$$\frac{1}{J} \frac{d_{(m)} J}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (\text{Б.1.1-7})$$

Уравнение (Б.1.1-7) есть именно то, которое мы должны были получить из (Б.1.1-1) в форме теоремы переноса (1.3.2-9):

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \Psi dV = \int_{V_{(m)}} \left( \frac{d_{(m)} \Psi}{dt} + \Psi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV. \quad (\text{Б.1.1-8})$$

Отсюда следуют альтернативные выражения теоремы переноса (А.3.2-10) и (1.3.2-11), а также обобщенная теорема переноса (1.3.2-12), как описано в § 1.3.2. Недостатком этого подхода является то, что мы совершили интуитивно мотивированный шаг (Б.1.1-4) в ходе нашего доказательства.

**Б.1.2. Второе альтернативное доказательство теоремы переноса.** Рассмотрим операцию

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \rho \widehat{\Psi} dV,$$

а не

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \Psi dV,$$

которая исследовалась в § 1.3.2.

Как показано в § 1.3.2, если рассматривать интеграл по объему в исходной конфигурации  $\mathbf{x}$ , можно поменять местами операции дифференцирования и интегрирования. Используя результаты § А.11.3, можно утверждать, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \rho \widehat{\Psi} dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_{(m)} \times \mathbf{x}} \rho \widehat{\Psi} J dV = \int_{V_{(m)} \times \mathbf{x}} \left[ \rho \frac{d_{(m)} \widehat{\Psi}}{dt} + \widehat{\Psi} \frac{d_{(m)}(\rho J)}{dt} \right] J dV = \\ &= \int_{V_{(m)}} \left[ \rho \frac{d_{(m)} \widehat{\Psi}}{dt} + \widehat{\Psi} \frac{d_{(m)}(\rho J)}{dt} \right] dV. \end{aligned} \quad (\text{Б.1.2-1})$$

Известно соотношение

$$\rho J = \rho_0, \quad (\text{Б.1.2-2})$$

где  $\rho_0$  — распределение плотности в исходной конфигурации. Поскольку  $\rho_0$  не является функцией времени (основная конфигурация и, следовательно, распределение плотности в основной конфигурации фиксировано во времени), мы имеем:

$$\frac{d_{(m)}(\rho J)}{dt} = \frac{d_{(m)} \rho_0}{dt} = 0. \quad (\text{Б.1.2-3})$$

Это позволяет записать (Б.1.2-1) в форме теоремы переноса:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \rho \widehat{\Psi} dV = \int_{V_{(m)}} \rho \frac{d_{(m)} \widehat{\Psi}}{dt} dV. \quad (\text{Б.1.2-4})$$

Так как из уравнения неразрывности (1.3.3-3) следует:

$$\rho \frac{d_{(m)} \widehat{\Psi}}{dt} = \frac{d_{(m)}(\rho \widehat{\Psi})}{dt} - \widehat{\Psi} \frac{d_{(m)} \rho}{dt} = \frac{d_{(m)}(\rho \widehat{\Psi})}{dt} + \rho \widehat{\Psi} \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial(\rho \widehat{\Psi})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \widehat{\Psi} \mathbf{v}), \quad (\text{Б.1.2-5})$$

то легко представить (Б.1.2-4) в форме, аналогичной уравнениям (1.3.2-9) — (1.3.2-11):

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \rho \widehat{\Psi} dV = \int_{V_{(m)}} \left[ \frac{d_{(m)}(\rho \widehat{\Psi})}{dt} + \rho \widehat{\Psi} \operatorname{div} \mathbf{v} \right] dV; \quad (\text{Б.1.2-6})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \rho \widehat{\Psi} dV = \int_{V_{(m)}} \left[ \frac{\partial (\rho \widehat{\Psi})}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \widehat{\Psi} \mathbf{v}) \right] dV \quad (B.1.2-7)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(m)}} \rho \widehat{\Psi} dV = \int_{V_{(m)}} \frac{\partial (\rho \widehat{\Psi})}{\partial t} dV + \int_{S_{(m)}} \rho \widehat{\Psi} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (B.1.2-8)$$

С помощью аргументов, приведенных в § 1.3.2, можно получить другое выражение обобщенной теоремы переноса:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{(s)}} \rho \widehat{\Psi} dV = \int_{V_{(s)}} \frac{\partial (\rho \widehat{\Psi})}{\partial t} dV + \int_{S_{(s)}} \rho \widehat{\Psi} \mathbf{v}_{(s)} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (B.1.2-9)$$

Преимущество этого вывода теоремы переноса состоит в том, что все было сделано строго, интуитивные аргументы не использовались. Серьезным недостатком, однако, является то обстоятельство, что выражение (B.1.2-4) не имеет формы теоремы переноса, необходимой для вывода уравнения неразрывности в § 1.3.3. Выражения (B.1.2-6)–(B.1.2-8) были получены из (B.1.2-4) только после того, как мы использовали уравнение неразрывности в (B.1.2-5).

## ПРИЛОЖЕНИЕ В ВЫВОД НЕРАВЕНСТВА (8.5.4-1)

Мы хотим показать, что для устойчивого равновесия в некоторый момент  $t=t_e$  под неравенством (8.5.4-1) подразумевается неравенство (8.5.2-22) и (8.5.3-1) из § 8.5.3. Для того чтобы принять во внимание ограничения, наложенные сохранением массы, первым законом Эйлера и балансом энергии, мы вычислим вторую производную в левой части неравенства (8.5.2-22), дифференцируя (8.5.3-1) по времени. Эта операция включает взятие производной от поверхностных интегралов по времени. Приступим к исследованию этой операции.

Рассмотрим интеграл по поверхности от некоторой величины  $B$ . Для материальной производной такого поверхностного интеграла имеем [9]:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{(m)}} B dS = \int_{S_{(m)}} \left( \frac{d_{(m)} B}{dt} + B v_{,\alpha}^{\alpha} + \frac{B}{2a} \frac{\partial a}{\partial t} \right) dS. \quad (B.1)$$

Здесь  $a$  — определитель ковариантного поверхностного метрического тензора [2]; операция  $\partial/dt$  обозначает производную по времени при фиксированных пространственных координатах;  $v^{\alpha}$  ( $\alpha=1, 2$ ) — контравариантные поверхностные компоненты вектора скорости; запятые обозначают поверхностные ковариантные производные [2].

Границы раздела фаз  $S_{(\text{спир})}$  не являются материальными поверхностями, так как мы позволяем массе перемещаться через них. Уравнение (B.1) можно применить к нахождению производной по времени от нематериальной поверхности  $S_{(\text{спир})}$ , если в выводе (B.1) заменить материальные частицы «точками поверхности», каждая из которых локализована в точке пересечения поверхностных координатных кривых (это аналогично выводу обобщенной теоремы переноса Труделлом и Тупиным [10]). Получим:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{(\text{спир})}} B dS = \int_{S_{(\text{спир})}} \left( \frac{dB}{dt} + Bu_{,\alpha}^{\alpha} + \frac{B}{2a} \frac{\partial a}{\partial t} \right) dS, \quad (B.2)$$

где  $u^{\alpha}$  ( $\alpha=1, 2$ ) — поверхностные компоненты скорости точки поверхности. Очевидно, что определение поверхностных координат остается произвольным и поэтому  $u^{\alpha}$  не определяется. Однако это несущественно, так как в наших результатах влияние точек поверхности проявляется только через скорость смещения  $S_{(\text{спир})}$ ,  $u_{\xi}$ , которая не зависит от выбора параметризации [10].

Теперь возьмем производную из (8.5.3-1) и подставим в неравенство (8.5.2-22), чтобы получить для момента времени  $t=t_e$  следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 & \int_V \left[ \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t^2} + \sum_{A=1}^N \lambda_{(A)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \rho_{(A)} - \sum_{j=1}^K M_{(A)} v_{(A, j)} \Psi(j) \right) + \lambda_m \cdot \frac{\partial^2 (\rho v)}{\partial t^2} + \right. \\
 & + \lambda_e \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \tilde{E} - \sum_{A=1}^N \sum_{j=1}^K \varphi_{(A)} M_{(A)} v_{(A, j)} \Psi(j) \right) \left. \right] dV - \int_{S_{(\text{синг})}} \left[ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \frac{d \tilde{S}}{dt} + \right. \\
 & + \sum_{A=1}^N \lambda_{(A)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_{(A)} - \sum_{j=1}^K M_{(A)} v_{(A, j)} \Psi(j) \right) + \sum_{A=1}^N \lambda_{(A)} \frac{d \rho_{(A)}}{dt} + \\
 & + \lambda_m \cdot \frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \lambda_m \frac{d (\rho v)}{dt} + \lambda_e \frac{\partial}{\partial t} \left( \tilde{E} - \sum_{A=1}^N \sum_{j=1}^K \varphi_{(A)} M_{(A)} v_{(A, j)} \Psi(j) \right) + \\
 & \left. + \lambda_e \frac{d \tilde{E}}{dt} \right] u_{(\xi)} dS - \int_{S_{(\text{синг})}} \left( \frac{du_{(\xi)}}{dt} + u_{(\xi)} u_{,\alpha}^\alpha + \frac{u_{(\xi)}}{2a} \frac{\partial a}{\partial t} \right) \times \\
 & \times \left[ \tilde{S} + \sum_{A=1}^N \lambda_{(A)} \rho_{(A)} + \rho \lambda_m \cdot v + \lambda_e \tilde{E} \right] dS \leq 0. \tag{B ?}
 \end{aligned}$$

При вычислении производной в (8.5.3-1) используется уравнение (B.2) и теорема переноса для области, содержащей сингулярную поверхность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### К главе I

1. Truesdell C., Toupin R. A. — In: Handbuch der Physik, ed. by S. Flugge, B.3/1, Springer — Verlag, Berlin, 1960. 226—235.
2. Берд Р. Б., Стюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М., «Химия», 1974.
3. Aris R. Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1962.
4. Truesdell C. The Elements of Continuum Mechanics, Springer — Verlag, New York, 1966.
5. Truesdell C., Noll W. — In: Handbuch der Physik, ed. by S. Flugge, B. 3/3, Springer — Verlag, Berlin, 1965.
6. Kaplan W. Advanced Calculus, Addison — Wesley, Cambridge, Mass., 1952.
7. Slattery J. C. — «Ind. Eng. Chem. Fundamentals», 1967, 6, 108; 1968, 7, 672.
8. Erickson J. L. In: Handbuch der Physik, ed by S. Flugge, B.3/1. Springer — Verlag, Berlin, 1960.
9. Brand L. Vector and Tensor Analysis. N. Y., Wiley, 1947.
10. Yih Chia-Sun. — «La Houille Blanche», 1957, 12, 445.
11. Willmore T. J. An Introduction to Differential Geometry. London, Oxford University Press, 1959.

### К главе 2

1. Берд Р. Б., Стюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М., «Химия», 1974.
2. Truesdell C. Six Lectures on Modern Natural Philosophy. N. Y., Springer — Verlag, 1966.

3. Truesdell C., Toupin R. A. In: Handbuch der Physik, B.3/1. Berlin, Springer — Verlag, 1960.
4. Truesdell C., Noll W. In: Handbuch der Physik, B.3/3. Berlin, Springer — Verlag, 1965.
5. Truesdell C. The Elements of Continuum Mechanics. N. Y., Springer — Verlag, 1966.
6. Curtiss C. F. — «J. Chem. Phys.», 1956, v. 24, p. 225.
7. Livingston P. M., Curtiss C. F. — «J. Chem. Phys.», 1959, v. 31, p. 1643.
8. Dahler J. S., Scriven L. E. — «Nature», 1961, v. 192, p. 36.
9. Lertes P. — «Z. für Physik», 1921, v. 4, p. 315; 1921, v. 6, p. 56; «Physik Z.», 1921, v. 22, p. 621.
10. Grossetti E. — «Nuovo Cimento», 1958, v. 10, p. 193; 1959, v. 13, p. 350.
11. Slattery J. S. — «Ind. Eng. Chem., Fundamentals», 1967, v. 6, p. 108; 1968, v. 7, p. 672.
12. Rouse H., Ince S. History of Hydraulics. Iowa Institute of Hydraulic Research, State University of Iowa, 1957.
13. Noll W. — «Arch. Rational Mech. Analysis», 1958, v. 2, p. 197.
14. Oldroyd J. G. — «Proc. Roy. Soc. (London)», 1950, v. A200, p. 523.
15. Reiner M. — «Amer. J. Math.», 1945, v. 67, p. 350.
16. Prager W. — «J. Appl. Phys.», 1945, v. 16, p. 837.
17. Truesdell C. — «J. Rat. Mech. Analysis», 1952, v. 1, p. 125.
18. Karim S. M., Rosenhead L. — «Rev. Mod. Phys.», 1952, v. 24, p. 108.
19. Рейнер М. Реология. М., «Наука», 1965.
20. Bird R. B. — «Can. J. Chem. Eng.», 1965, v. 43, p. 161.
21. Hermes R. A., Fredrickson A. G. — «A. I. Ch. E. J.», 1967, v. 13, p. 253.
22. Sisko A. W. — «Ind. Eng. Chem.», 1958, v. 50, p. 1789.
23. Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N., Chapman T. W. A. I. Ch. E. Continuing Education Series, 1969, № 4.
24. Coleman B. D., Markovitz H., Noll W. Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids. N. Y., Springer-Verlag, 1966.
25. Hopke S. W., Slattery J. C. — «A. I. Ch. E. J.», 1970, v. 16, p. 224.
26. Hopke S. W., Slattery J. C. — «A. I. Ch. E. J.», 1970, v. 16, p. 217.
27. Coleman B. D., Noll W. — «Ann. N. Y. Acad. Sci.», 1961, v. 89, p. 672.
28. Truesdell C. — «Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 1134.
29. Slattery J. C. — «A. I. Ch. E. J.», 1968, v. 14, p. 516.
30. Coleman B. D., Noll W. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1959, v. 3, p. 289.
31. Coleman B. D. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1962, v. 9, p. 273.
32. Coleman B. D., Noll W. — «Phys. Fluids», 1962, v. 5, p. 840.
33. Slattery J. C. — «Phys. Fluids», 1964, v. 7, p. 1913.
34. Slattery J. C. — «A. I. Ch. E. J.», 1965, v. 11, p. 831.
35. Oldroyd J. G. — «Proc. Roy. Soc. (London)», 1965, v. A283, p. 115.
36. Leigh D. C. Nonlinear Continuum Mechanics. N. Y., McGraw-Hill, 1968.
37. Лодж А. Эластические жидкости. Введение в реологию конечнодеформируемых полимеров. М., «Наука», 1969.
38. Fredrickson A. G. Principles and Applications of Rheology. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1964.
39. Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
40. Мак-Конел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложением к геометрии, механике и физике. М., Физматгиз, 1963.
41. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости. Под ред. С. Гольдштейна. Т. 1, 2. М., Изд-во иностр. лит., 1948.

### К главе 3

1. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости. Под ред. С. Гольдштейна. Т. 1, 2. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
2. Stakgold I. Boundary Value Problems of Mathematical Physics, vol. 1, N. Y., Macmillan, 1967.
3. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой жидкости. М., «Наука», 1970.
4. Finn R., Noll W. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1957, v. 1, p. 97.
5. Rouse H., Ince S. History of Hydraulics. Iowa Inst. of Hydraulic Res., State Univ. of Iowa, 1957.
6. Берд Р., Сьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М., «Химия», 1974.

7. Paton J. B., Squires P. H., Darnell W. H., Cash F. M., Carley J. F. In: *Processing of Thermoplastic Materials*. N. Y., Reinhold, 1959.  
 8. Ashare E., Bird R. B., Lescaboura J. A. — «A. I. Ch. E. J.», 1965, v. 11, p. 910.  
 9. Coleman B. D., Markovitz H., Noll W. *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids*. N. Y., Springer — Verlag, 1966.  
 10. Krieger I. M., Elrod H. — «J. Appl. Phys.», 1953, v. 24, p. 134.  
 11. Pawłowski J. — «Kolloid. Z.», 1953, B. 130, S. 129.  
 12. Matsuhisa S., Bird R. B. — «A. I. Ch. E. J.», 1965, v. 11, p. 588.  
 13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.  
 14. Карслон Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Пер. с англ., М., «Наука», 1964.  
 15. Bird R. B. — «A. I. Ch. E. J.», 1959, v. 5, p. 565.  
 16. Bird R. B. — «Chem. Eng. Progr. Symp. Ser.», 1965, v. 61, № 58, p. 1.  
 17. Szymanski P. — «J. Math. Pures Appl.», 1932, v. 11, № 9, p. 67.  
 18. Irving I., Mallineux N. *Mathematics in Physics and Engineering*. N. Y., Acad. Press, 1959.  
 19. Müller W. — «Z. Angew. Math. Mech.», 1936, B. 16, S. 227.  
 20. Bird R. B., Curtis C. F. — «Chem. Eng. Sci.», 1959, v. 11, p. 108.  
 21. Bird R. B., Curtis C. F., Stewart W. E. — «Chem. Eng. Sci.», 1959, v. 11, p. 114.  
 22. Wasserman M. L., Slattery J. C. — «Proc. Phys. Soc. London», 1964, v. 84, p. 795.  
 23. Whitaker S. *Introduction to Fluid Mechanics*. N. Y., Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1968.  
 24. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.  
 25. Slattery J. C. — «J. Colloid. Sci.», 1961, v. 16, p. 431.  
 26. Slattery J. C. *Non-Newtonian Flow About a Sphere*. Doct. Diss., Dept of Chem. Engng. Univ. of Wisconsin, Madison, 1959.  
 27. Sampson R. A. — «Phil. Trans. Roy. Soc. London», 1891, v. A182, p. 449.  
 28. Taylor T. D., Acrivos A. — «J. Fluid Mech.», 1964, v. 18, p. 466.  
 29. Proudman I., Pearson J. R. — «J. Fluid Mech.», 1957, v. 2, p. 237.  
 30. Taylor T. D., Acrivos A. — «Chem. Eng. Sci.», 1964, v. 19, p. 445.  
 31. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.  
 32. Ericksen J. L. In: *Handbuch der Physik*, B.3/1. Berlin, Springer — Verlag, 1960.  
 33. Kaplan W. *Advanced Calculus*. Cambridge, Mass., Addison-Wesley, 1952.  
 34. Happel J., Brenner H. *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.  
 35. Churchill R. V. *Complex Variables and Applications*. N. Y., McGraw-Hill, 1960.  
 36. Kellogg O. D. *Foundations of Potential Theory*. N. Y., Unger, 1929.  
 37. Slattery J. C. — «Chem. Eng. Sci.», 1962, v. 17, p. 689.  
 38. Милн-Томсон Л. М. *Теоретическая гидродинамика*. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.  
 39. Sabersky R. H., Acosta A. J. *Fluid Flow*. N. Y., Macmillan, 1964.  
 40. Янке Э., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1959.  
 41. Prandtl L., Tietjens O. G. *Applied Hydro- and Aeromechanics*. N. Y., Dover, 1957.  
 42. Kaplun S. — «Z. Angew. Math. Phys.», 1954, v. 5, p. 111.  
 43. Schowalter W. R. — «A. I. Ch. E. J.», 1960, v. 6, p. 24.  
 44. Acrivos A., Shah M. J., Petersen E. E. — «A. I. Ch. E. J.», 1960, v. 6, p. 312.  
 45. Yau J., Chi Tien. — «Can. J. Chem. Eng.», 1963, v. 41, p. 139.  
 46. Gutfinger C., Shinnar R. — «A. I. Ch. E. J.», 1964, v. 10, p. 631.  
 47. White J. L., Metzner A. B. — «A. I. Ch. E. J.», 1965, v. 11, p. 324.  
 48. Acrivos A., Shah M. J., Petersen E. E. — «Chem. Eng. Sci.», 1965, v. 20, p. 101.  
 49. Hermes R. A., Fredrickson A. G. — «A. I. Ch. E. J.», 1967, v. 13, p. 253.  
 50. Blasius H. — «Z. Math. Phys.», 1908, B. 56, S. L. 1.  
 51. Howarth L. — «Proc. Roy. Soc. London», 1938, v. A164, p. 547.  
 52. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложением к геометрии, механике и физике. М., Физматгиз, 1963.  
 53. Hiemenz K. — «Dinglers Polytechnisches J.», 1911, Bd. 326, S. 321.  
 54. Howarth L. — «Aeron. Res. Council Rep. and Memoranda», 1934, p. 1632.

#### К главе 4

1. Truesdell C., Noll W. In: Handbuch der Physik, B.3/3. Berlin, Springer — Verlag, 1965.
2. Truesdell C. The Elements of Continuum Mechanics. N. Y., Springer — Verlag, 1966.
3. Lin C. C., Reid W. H. In: Handbuch der Physik, B.8/2. Berlin, Springer — Verlag, 1963.
4. Corrsin S. In: Handbuch der Physik, B.8/2. Berlin, Springer — Verlag, 1963.
5. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
6. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
7. Townsend A. A. The Structure of Turbulent Shear Flow. Cambridge, London, 1956.
8. Boussinesq J. — «Mem. prés. par div. savants à l'Acad Sci. Paris.», 1877, v. 23, p. 46.
9. Brand L. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1957, v. 1, p. 35.
10. Prandtl L. — «Z. Angew. Math. Mech.», 1925, B. 5, S. 136.
11. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
12. Taylor G. I. — «Proc. Roy. Soc. (London)», 1932, v. A135, p. 685.
13. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости. Под ред. С. Гольдштейна. Т. 1, 2. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
14. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфт Е. Явления переноса. М., «Химия», 1974.
15. Spencer A. J. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1959/60, v. 4, p. 214.
16. Smith G. F. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1965, v. 18, p. 282.
17. Deissler R. G. — «NACA Rept.», 1955, p. 1210.
18. Deissler R. G. — «NACA Techn. Note», 1950, p. 2138.
19. Laufer J. — «NACA Techn. Note», 1953, p. 2954.
20. Whitaker S. Solutions Manual for Introduction to Fluid Mechanics. Englewood Cliffs, N. J., Prentice — Hall, 1968.
21. Bizzell G. D. — «Chem. Eng. Sci.», 1962, v. 17, p. 777; 1965, v. 20, p. 364.
22. Darcy H. P. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris, Dalmont, 1856.
23. Scheidegger A. E. Handbuch der Physik, B.8/2. Berlin, Springer — Verlag, 1963.
24. Slattery J. C. — «A. I. Ch. E. J.», 1967, v. 13, p. 1066.
25. Slattery J. C. — «A. I. Ch. E. J.», 1969, v. 15, p. 866.
26. Slattery J. C. — «A. I. Ch. E. J.», 1968, v. 14, p. 50.
27. Slattery J. C. — «A. I. Ch. E. J.», 1970, v. 16, p. 345.
28. Slattery J. C. — «A. I. Ch. E. J.», 1965, p. 11, p. 831.
29. Slattery J. C. — «A. I. Ch. E. J.», 1968, v. 14, p. 516.
30. Spencer A. J., Rivlin R. S. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1959/60, v. 4, p. 214.
31. Brinkman H. C. — «Appl. Sci. Res.», 1949, v. A1, p. 27.
32. Whitaker S. — «Ind. Eng. Chem.», 1969, v. 61, № 12, p. 14.
33. Irving J., Mullineux N. Mathematics in Physics and Engineering. N. Y., Academic Press, 1959.
34. Shertzer C. R., Metzner A. B. Proc. 4th Int. Congr. Rheol., 1965, pt. 2, p. 603.
35. Ginn R. F., Metzner A. B. Proc. 4th Int. Congr. Rheol., 1965, pt. 2, p. 583.
36. Ashare E., Bird R. B., Lescaboura J. A. — «A. I. Ch. E. J.», 1965, v. 11, p. 910.
37. Christopher R. H. M. S. Thesis, Dept. of Chem. Engng, Univ. of Rochester, Rochester, N. Y., 1965.
38. Sadowski T. J. Doctorial Dissertation, Dept. of Chem. Engng, Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1963.
39. Sadowski T. J. — «Trans. Soc. Rheol.», 1965, v. 9, № 2, p. 251.
40. Savins J. G. — «Ind. Eng. Chem.», 1969, v. 61, № 10, p. 18.
41. Bird R. B. — «Chem. Eng. Sci.», 1957, v. 6, p. 123.
42. Truesdell C., Toupin R. A. In: Handbuch der Physik, B.3/1, Berlin, Springer — Verlag, 1960.
43. Kittredge C. P., Rowley D. S. — «Trans. ASME», 1957, v. 79, p. 1759.
44. Lapple C. E. — «Chem. Eng.», 1949, v. 56, № 5, p. 96.
45. Shames I. H. Mechanics of Fluids. N. Y., McGraw-Hill, 1962.
46. Rouse H., Ince S. History of Hydraulics. Iowa Inst. of Hydraulic Research, State Univ. of Iowa, 1957.
47. Slattery J. C., Gaggioli R. A. — «Chem. Eng. Sci.», 1962, v. 17, p. 893.
48. Sabersky R. H., Acosta A. J. Fluid Flow. N. Y., Macmillan, 1964.
49. Johnson M. W. — «Phys. Fluids», 1960, v. 3, p. 871.
50. Johnson M. W. — «Trans. Soc. Rheol.», 1961, v. 5, p. 9.

51. Pawłowski J. — «Kolloid-Z.», 1954, v. 138, p. 6.  
 52. Bird R. B. — «Phys. Fluids», 1960, v. 3, p. 539.  
 53. Sani R. L. — «A. I. Ch. E. J.», 1963, v. 9, p. 277.  
 54. Hill R. — «J. Mech. Phys. Solids», 1956, v. 5, p. 66.  
 55. Hill R., Power G. — «Quart. J. Mech. Appl. Math.», 1956, v. 9, p. 313.  
 56. Халмощ П. Р. Конечномерные векторные пространства. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1963.  
 57. Kaplan W. Advanced Calculus. Cambridge, Mass., Addison — Wesley, 1952.  
 58. Hopke S. W., Slattery J. C. — «A. I. Ch. E. J.», 1970, v. 16, p. 224.  
 59. Bird R. B. — «Can. J. Chem. Eng.», 1965, v. 8, p. 161.

## К главе 5

1. Гиббс Дж. Термодинамические работы. Пер. с англ. М.—Л., Гостехиздат, 1950.  
 2. Truesdell C., Toupin R. A. In: Handbuch der Physik, B.3/1. Berlin, Springer — Verlag, 1960.  
 3. Gallen H. B. Thermodynamics. N. Y., Wiley, 1963.  
 4. Coleman B. D. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1964, v. 17, p. 1.  
 5. Coleman B. D. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1964, v. 17, p. 230.  
 6. Slattery J. C. — «Ind. Eng. Chem. — Fundamentals», 1967, v. 6, p. 108.  
 7. Truesdell C., Noll W. In: Handbuch der Physik, B.3/3. Berlin, Springer — Verlag, 1965.  
 8. Serrin J. In: Handbuch der Physik, B.8/1. Berlin, Springer — Verlag, 1959.  
 9. Truesdell C. Principles of Continuum Mechanics. Colloquium Lectures in Pure and Applied Science, № 5, Mobil Res. and Devel. Corp., Field Res. Lab., Dallas, Texas, 1960.  
 10. Bowen R. M. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1967, v. 24, p. 370.  
 11. Müller I. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1968, v. 28, p. 1.  
 12. Flumerfelt R. W., Slattery J. C. — «A. I. Ch. E. J.», 1969, v. 15, p. 291.  
 13. Flumerfelt R. W. Doct. Dissertation, Dept. of Chem. Engng, Northwestern Univ., Evanston, 1965.  
 14. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.  
 15. Spencer A. J., Rivlin R. S. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1959/60, v. 4, p. 214.  
 16. Smith G. F. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1965, v. 18, p. 282.  
 17. Truesdell C. The Elements of Continuum Mechanics. N. Y., Springer — Verlag, 1966.  
 18. Keenan J. H. Thermodynamics. N. Y., Wiley, 1941.  
 19. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М., «Химия», 1974.

## К главе 6

1. Kellogg O. D. Foundations of Potential Theory. N. Y., Ungar, 1929.  
 2. Карслон Г., Ереп Д. Теплопроводность твердых тел. Пер. с англ. М., «Наука», 1964.  
 3. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М., «Химия», 1974.  
 4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.  
 5. Bird R. B. — «Chem. Eng. Progr. Symp. Ser.», 1965, v. 61, № 58, p. 1.  
 6. Illingworth C. R. — «Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1950, v. 46, p. 469.  
 7. De Groff H. M. — «J. Aeron. Sci.», 1956, v. 23, p. 395.  
 8. De Groff H. M. — «J. Aeron. Sci.», 1956, v. 23, p. 978.  
 9. Morgan A. J. A. — «J. Aeron. Sci.», 1957, v. 24, p. 315.  
 10. Turian R. M., Bird R. B. — «Chem. Eng. Sci.», 1963, v. 18, p. 689.  
 11. Lange N. A. Handbook of Chemistry. Handbook Publ., Sandusky, Ohio, 1949.  
 12. Serrin J. In: Handbuch der Physik, B. 8/1. Berlin, Springer — Verlag, 1959.  
 13. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Физматгиз, 1954.  
 14. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложением к геометрии, механике и физике. М., Физматгиз, 1963.  
 15. Newman J. Preprint 18646. Lawrence Radiation Lab., Univ. of California, Berkley, Calif., 1969.  
 16. Brown G. M. — «A. I. Ch. E. J.», 1960, v. 6, p. 179.  
 17. Siegel R., Sparrow E. M., Hallman T. M. — «Appl. Sci. Res.», Sect. A, 1958, v. 7, p. 386.  
 18. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости. Под ред. С. Гольдштейна. Т. 1, 2. М., Изд-во иностр. лит., 1948.

## К главе 7

1. Brand L. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1957, v. 1, p. 35.
2. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости. Под ред. С. Гольдштейна. Т. 1, 2. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
3. Truesdell C., Noll W. In: Handbuch der Physik, B.3/3. Berlin, Springer — Verlag, 1965.
4. Spencer A. J., Rivlin R. S. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1959/60, v. 4, p. 214.
5. Smith G. F. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1965, v. 18, p. 282.
6. Deissler R. G. NACA Rept., p. 1210, 1955.
7. Colburn A. P. — «Trans. A. I. Ch. E. J.», 1933, v. 29, p. 174.
8. Якоб М. Вопросы теплопередачи. Т. 2. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
9. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. М.—Л., Госэнергиздат, 1961.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
11. Берд Р. Б., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М., «Химия», 1974.
12. Serrin J. In: Handbuch der Physik, B.8/1, Berlin, Springer — Verlag, 1959.
12. Kunii D., Smith J. M. — «A. I. Ch. E. J.», 1960, v. 6, p. 71.
13. Kunii D., Smith J. M. — «Soc. Petrol. Eng. J.», 1961, p. 37.
14. Mischke R. A., Smith J. M. — «Ind. Eng. Chem., Fundamentals», 1962, v. 1, p. 288.
15. Masamune S., Smith J. M. — «J. Chem. Eng. Data», 1963, v. 8, p. 54.
16. Huang J.-H., Smith J. M. — «J. Chem. Eng. Data», 1963, v. 8, p. 437.
17. Masamune S., Smith J. M. — «Ind. Eng. Chem., Fundamentals», 1963, v. 2, p. 136.
18. Huang J.-H., Smith J. M. — «Ind. Eng. Chem., Fundamentals», 1963, v. 2, p. 189.
19. Kunii D., Smith J. M. — «A. I. Ch. E. J.», 1961, v. 7, p. 29.
20. Willhite G. P., Kunii D., Smith J. M. — «A. I. Sh. E. J.», 1962, v. 8, p. 340.
21. Adivarahan P., Kunii D., Smith J. M. — «Soc. Petrol. Eng. J.», 1962, p. 290.
22. Willhite G. P., Dranoff J. S., Smith J. M. — «Soc. Petrol. Eng. J.», 1963, p. 185.
23. Bird R. B. — «Chem. Eng. Sci.», 1957, v. 6, p. 123.
24. Truesdell C., Toupin R. A. In: Handbuch der Physik, B.3/3, Berlin, Springer — Verlag, 1960.
25. Kays W. M., London A. L. Compact Heat Exchangers. N. Y., McGraw-Hill, 1964.
26. Ranz W. E., Marshall W. R. — «Chem. Eng. Progr.», 1952, v. 48, p. 141, 173.
27. Keenan J. H. Thermodynamics. N. Y., Wiley, 1941.
28. Smith J. M., Van Ness H. V. Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics. N. Y., McGraw-Hill, 1959.

## К главе 8

1. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. Пер. с англ. М., «Химия», 1974.
2. Truesdell C., Toupin R. A. In: Handbuch der Physik, B.3/1. Berlin, Springer — Verlag, 1960.
3. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. Пер. с франц. М., «Мир», 1964.
4. Bowen R. M. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1967, v. 24, p. 370.
5. Meixner J., Reik H. G. In: Handbuch der Physik, B.3/2. Berlin, Springer — Verlag, 1959.
6. Eckart C. — «Phys. Rev.», 1940, v. 58, p. 268, p. 924.
7. Müller I. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1968, v. 28, p. 1.
8. Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
9. Де Гроот С. Термодинамика необратимых процессов. Пер. с франц. М., Гостехиздат, 1956.
10. Truesdell C. The Elements of Continuum Mechanics. N. Y., Springer — Verlag, 1951.
11. Coleman B., Truesdell C. — «J. Chem. Phys.», 1960, v. 3, p. 28.
12. Truesdell C. Six Lectures on Modern Natural Philosophy. N. Y., Springer — Verlag, 1966.
13. Spencer A. J., Rivlin R. S. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1959/60, v. 4, p. 214.

14. Smith G. F. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1965, v. 18, p. 282.
15. Guggenheim E. Thermodynamics. Amsterdam, North-Holland Publ., 1950.
16. Jones R. C., Turry W. H. — «Rev. Mod. Phys.», 1946, v. 18, p. 151.
17. Грю К. Э., Иббс Т. Л. Термическая диффузия в газах. Пер. с англ. М., Гостехиздат, 1956.
18. Jones A. L., Foreman R. W. — «Ind. Eng. Chem.», 1952, v. 44, p. 2249.
19. Jones A. L., Milberger E. C. — «Ind. Eng. Chem.», 1953, v. 45, p. 2689.
20. Bedingfield C. H., Drew T. B. — «Ind. Eng. Chem.», 1950, v. 42, p. 1164.
21. Wilke C. R. — «Chem. Eng. Progr.», 1950, v. 46, p. 95.
22. Lewis G. N., Randall M., Pitzer K. S., Brewer L. Thermodynamics. N. Y., McGraw-Hill, 1961.
23. Халмош П. Р. Конечномерные векторные пространства. Пер. с англ. М., Физматгиз, 1963.
24. Гиббс Дж. Термодинамические работы. Пер. с англ. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
25. Coleman B. D., Noll W. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1960, 4, p. 97.
26. Пригожин И., Дефэй Р. Химическая термодинамика. Пер. с англ. Новосибирск, «Наука», 1966.
27. Денбиг К. Термодинамика стационарных необратимых процессов. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
28. Хаазе Р. Термодинамика необратимых процессов. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
29. Gallen H. B. Thermodynamics. N. Y., Wiley, 1963.
30. Truesdell C. — «J. Chem. Phys.», 1962, v. 37, p. 2236.

## К главе 9

1. Arnold J. H. — «Trans. Am. Inst. Chem. Engrs», 1944, v. 40, p. 361.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Пер. с англ. М., «Наука», 1964.
3. Stevenson W. H. — «A. I. Ch. E. J.», 1968, v. 14, p. 350.
4. Whitaker S. — «Ind. Eng. Chem., Fundamentals», 1967, v. 6, p. 476.
5. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М., Химия, 1974.
6. Wright W. A. — «J. Phys. Chem.», 1933, v. 37, p. 233.
7. Robinson E., Wright W. A., Bennett G. W. — «J. Phys. Chem.», 1932, v. 36, p. 658.
8. Churchill R. V. Operational Mathematics. 2nd ed. N. Y., McGraw-Hill, 1958.
9. Danckwerts P. V. — «Trans. Faraday Soc.», 1950, v. 46, p. 300.
10. Danckwerts P. V. — «Trans. Faraday Soc.», 1951, v. 47, p. 1014.
11. Crank J. The Mathematics of Diffusion. London, Oxford University Press, 1956.
12. Lightfoot E. N. — «A. I. Ch. E. J.», 1964, v. 10, p. 278.
13. Irving J., Mullineux N. Mathematics in Physics and Engineering. N. Y., Academic Press, 1959.
14. Гиришфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
15. Brown H. — «Phys. Rev.», 1940, v. 58, p. 661.
16. Грю К. Э., Иббс Т. Л. Термическая диффузия в газах. Пер. с англ. М., Гостехиздат, 1956.
17. Newmann J. In: Advances in Electrochemistry and Electrical Engineering, v. 5, N. Y., Interscience, 1967.
18. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
19. Cussier E. L., Lightfoot E. N. — «A. I. Ch. E. J.», 1963, v. 9, p. 783.
20. Toor H. L. — «A. I. Ch. E. J.», 1964, v. 10, p. 448.
21. Clusser E. L., Lightfoot E. N. — «A. I. Ch. E. J.», 1963, v. 9, p. 702.
22. Toor H. L. — «A. I. Ch. E. J.», 1964, v. 10, p. 460.
23. Toor H. L., Seshadri C. V., Arnold K. R. — «A. I. Ch. E. J.», 1965, v. 11, p. 746.
24. Arnold K. R., Toor H. L. — «A. I. Ch. E. J.», 1967, v. 13, p. 909.
25. Hsu H. W., Bird R. B. — «A. I. Ch. E. J.», 1960, v. 6, p. 516.
26. Colburn A. P., Drew T. B. — «Trans. Amer. Inst. Chem. Engrs», 1937, v. 33, p. 197.
27. Chu J. C., Getty R. L., Brennecke L. F., Rajendra P. Distillation Equilibrium Data. N. Y., Reinhold, 1950.

## К главе 10

1. Deissler R. G. — NACA Rept. 1210, 1955.
2. Wilson H. A. — «Cambridge Phil. Soc.», 1904, v. 12, p. 406.
3. Берд Р. Б., Стюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М., «Химия», 1974.
4. Towle W. L., Sherwood T. K. — «Ind. Eng. Chem.», 1939, v. 31, p. 457.
5. Sherwood T. K., Pigford R. L. Absorption and Extraction. N. Y., McGraw-Hill, 1952.
6. Dwight H. B. Mathematical Tables. N. Y., Dover, 1961.
7. Taylor G. — «Proc. Roy. Soc. London», 1953, v. A219, p. 186.
8. Taylor G. — «Proc. Roy. Soc. London», 1954, v. A223, p. 446.
9. Taylor G. — «Proc. Roy. Soc. London», 1954, v. A225, p. 473.
10. Aris R. — «Proc. Roy. Soc. London», 1956, v. A235, p. 67.
11. Gill W. N., Sankarasubramanian R. — «Proc. Roy. Soc. London», 1970, v. A316, p. 341.
12. Wehner J. F., Wilhelm R. H. — «Chem. Eng. Sci.», 1956, v. 6, p. 89.
13. Whitaker S. — «A. I. Ch. E. J.», 1967, v. 13, p. 420.
14. McAfee K. B. — «Sci. Amer.», 1958, v. 199, № 1, p. 52.
15. Laurence R. L., Slattery J. C. — «J. Polymer Sci.», 1967, v. 5, № A—1, p. 1327.
16. Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
17. Scott P. S. — «Can. J. Chem. Eng.», 1962, v. 40, p. 173.
18. Truesdell C., Noll W. In: Handbuch der Physik, B.3/3, Berlin, Springer — Verlag, 1965.
19. Brand L. — «Arch. Rat. Mech. Analysis», 1957, v. 1, p. 35.
20. Evans R. B., Watson G. M., Mason E. A. — «J. Chem. Phys.», 1961, v. 35, p. 2076.
21. Pollard W. G., Present R. D. — «Phys. Rev.», 1948, v. 73, p. 762.
22. Carman R. C. Flow of Gases Through Porous Media. N. Y., Academic Press, 1956.
23. Satterfield C. N., Sherwood T. K. The Role of Diffusion in Catalysis. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1963.
24. Irving I., Mullineux N. M. Mathematics in Physics and Engineering. N. Y., Academic Press, 1959.
25. Truesdell C., Toupin R. A. Handbuch der Physik T. B.3/1. Berlin, Springer — Verlag, 1960.
26. Hougen O. A., Watson K. M., Ragatz R. A. Chemical Process Principles. N. Y., Wiley, 1958.
27. Hougen O. A., Watson K. M., Ragatz R. A. Chemical Process Principles pt. 1, 2d ed., pt. 2. N. Y., Wiley, 1959.
28. Smith I. M., Van Ness H. C. Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics. 2nd ed. N. Y., McGraw-Hill, 1959.

## К приложениюм

1. Халмощ П. Р. Конечномерные векторные пространства. М., Физматгиз, 1963.
2. Мак-Конел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложением к геометрии, механике и физике. М., Физматгиз, 1963.
3. Lichtenrowicz A. Elements of Tensor Calculus. N. Y., Wiley, 1962.
4. Hoffman K., Kunze R. Linear Algebra. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1961.
5. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Берд Р., Стюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. М., «Химия», 1974.
7. Coleman B. D., Markovitz H., Holl W. Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluid. N. Y., Springer — Verlag, 1966.
8. Erickson J. L. In: Handbuch der Physik, B.3/1. Berlin, Springer — Verlag, 1960.
9. Aris R. Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics. Englewood Cliffs, N. J., 1962.
10. Truesdell C., Toupin R. A. In: Handbuch der Physik, ed. by S. Flügge, B.3/1. Berlin, Springer — Verlag, 1960.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	3
Предисловие автора . . . . .	6
<b>Глава первая. Кинематика</b> . . . . .	9
1.1. Движение . . . . .	10
1.2. Система отсчета . . . . .	15
1.3. Масса . . . . .	18
1.4. Деформация . . . . .	25
<b>Глава вторая. Основы переноса импульса</b> . . . . .	29
2.1. Сила . . . . .	30
2.2. Законы Эйлера . . . . .	35
2.3. Поведение материалов . . . . .	45
2.4. Ньютоновская жидкость . . . . .	45
2.5. Выводы . . . . .	45
<b>Глава третья. Дифференциальные уравнения баланса переноса импульса</b> . . . . .	52
3.1. Методологические основы . . . . .	53
3.2. Замкнутые решения . . . . .	55
3.3. Ползучее течение . . . . .	68
3.4. Невязкие течения . . . . .	78
3.5. Теория пограничного слоя . . . . .	89
<b>Глава четвертая. Применение метода интегрального усреднения для переноса импульса</b> . . . . .	109
4.1. Усреднение по времени . . . . .	109
4.2. Усреднение по площади . . . . .	120
4.3. Локальное усреднение по объему . . . . .	126
4.4. Метод интегральных балансов . . . . .	144
<b>Глава пятая. Основы теории переноса энергии</b> . . . . .	186
5.1. Термодинамика . . . . .	186
5.2. Перенос энергии . . . . .	192
5.3. Баланс энергии . . . . .	194
5.4. Поведение материалов . . . . .	196
5.5. Неравенство энтропии . . . . .	198
5.6. Выводы . . . . .	200
<b>Глава шестая. Применение дифференциальных уравнений баланса для переноса энергии</b> . . . . .	204
6.1. Общий подход . . . . .	204
6.2. Теплопроводность . . . . .	205
6.3. Более полные решения . . . . .	212
6.4. Отсутствие диссиpации . . . . .	220
6.5. Отсутствие конвекции . . . . .	225
6.6. Отсутствие теплопроводности . . . . .	227
6.7. Теория пограничного слоя . . . . .	231
6.8. Течение на большом расстоянии от входа в трубу . . . . .	248

<b>Глава седьмая. Применение метода интегрального усреднения для переноса энергии</b>	253
7.1. Усреднение по времени	253
7.2. Усреднение по площади	259
7.3. Локальное усреднение по объему	266
7.4. Интегральные уравнения баланса	277
<b>Глава восьмая. Основы массопереноса</b>	298
8.1. Общий подход	298
8.2. Уравнение баланса массы	300
8.3. Постулаты	306
8.4. Поведение материалов	315
8.5. Локально-устойчивое равновесие	327
8.6. Анализ	339
<b>Глава девятая. Дифференциальные уравнения баланса для переноса массы</b>	340
9.1. Общий подход	340
9.2. Замкнутые решения	342
9.3. Отсутствие конвекции	359
9.4. Вынужденная конвекция	367
<b>Глава десятая. Применение метода интегрального усреднения для переноса массы</b>	371
10.1. Усреднение по времени	371
10.2. Усреднение по площади	377
10.3. Локальное усреднение по объему	380
10.4. Интегральные уравнения баланса	395
<b>Приложение А. Тензорный анализ</b>	409
A.1. Пространственные векторы	409
A.2. Определитель	414
A.3. Градиент скаляра	415
A.4. Криволинейные координаты	416
A.5. Тензоры второго ранга	420
A.6. Градиент вектора	424
A.7. Тензоры третьего ранга	428
A.8. Градиент тензора	430
A.9. Векторное произведение и ротор	431
A.10. Определитель тензора	433
A.11. Интегрирование	434
<b>Приложение Б. Еще раз о теореме переноса. Дополнительные сведения о теореме переноса</b>	436
Б.1. Другие формы теоремы переноса	436
<b>Приложение В. Вывод неравенства (8.5.4-1)</b>	438
<b>Список литературы</b>	439