С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина

МЕТОД ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2019

УДК 517.9, 517.4
ББК 22.161.1; 22.161.6
С41

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 18-11-00026, не подлежит продаже

Ситник С. М., Шишкина Э. Л. **Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. — 224 с. — ISBN 978-5-9221-1819-4.

В монографии излагаются как известные, так и недавно полученные результаты теории операторов преобразования, представляющей собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегро-дифференцирования, теории обратных задач и задач рассеяния.

Для специалистов в области математики, преподавателей вузов, научных сотрудников, аспирантов, студентов, а также для широкого круга читателей, интересующихся проблемами современной математики.

ISBN 978-5-9221-1819-4

© ФИЗМАТЛИТ, 2019
© С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6

Введение. Исторические сведения 8

Часть I. Общая теория операторов преобразования

Глава 1. **Предварительные сведения и обозначения** 20

§ 1.1. Специальные функции 20

1.1.1. Гамма-функция, бета-функция, пси-функция, символ Похгаммера и биномиальные коэффициенты 20

1.1.2. Функции Бесселя 23

1.1.3. Гипергеометрическая функция Гаусса 24

1.1.4. Функции Лежандра 25

1.1.5. Функция Миттаг-Леффлера 26

1.1.6. Обобщённые функции гипергеометрического типа 27

§ 1.2. Функциональные пространства. 29

1.2.1. Гёльдеровы функции, абсолютно непрерывные функции, класс AC^n 30

1.2.2. Класс L_p и его свойства 32

1.2.3. Пространства C^m_{ev}, L^γ_p и S_{ev}. Весовые обобщённые функции 33

§ 1.3. Основные интегральные преобразования 37

1.3.1. Преобразование Фурье, синус- и косинус-преобразования, преобразование Ханкеля 37

1.3.2. Пространство Киприянова 37

1.3.3. Преобразование Меллина. Теорема Слейтер 38

§ 1.4. Операторы дробного интегро-дифференцирования 44

1.4.1. Дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля и Лиувилля 44

1.4.2. Дробные интегралы и производные Эрдейи–Кобера 46

1.4.3. Дробный интеграл по произвольной функции 47

Глава 2. **Классификация и свойства операторов преобразования** 48

§ 2.1. Операторы преобразования, связанные с операторами Бесселя и второй производной 48

2.1.1. Основные классы дифференциальных уравнений с операторами Бесселя 48

2.1.2. Операторы преобразования Сонина и Пуассона 49

2.1.3. Оператор спуска по параметру для оператора Бесселя 52

§ 2.2. Обобщённый сдвиг и его свойства 54

2.2.1. Операторы обобщённого сдвига, выраженные через степенные ряды, и задача Коши 54

2.2.2. Оператор обобщённого сдвига, связанный с оператором Бесселя 56

2.2.3. Обобщённая свертка 65
2.2.4. Обобщённые сдвиги, связанные с потенциалом 66
§ 2.3. Классификация и свойства различных классов операторов преобразования Бушмана–Эрдейи 70
2.3.1. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи различных классов 70
2.3.2. Интегральные операторы преобразования Бушмана–Эрдейи первого рода и нулевого порядка гладкости 72
2.3.3. Факторизация операторов Бушмана–Эрдейи 80
2.3.4. Унитарность операторов Бушмана–Эрдейи 88
2.3.5. Интегральные операторы преобразования Бушмана–Эрдейи второго рода 92
§ 2.4. Унитарные операторы преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова 95
§ 2.5. Весовое сферическое среднее 99
2.5.1. Интегралы по части сферы 99
2.5.2. Многомерный обобщённый сдвиг, весовое сферическое среднее и итерированное весовое сферическое среднее 104
2.5.3. Весовое сферическое среднее как оператор преобразования 107
§ 2.6. Другие типы операторов преобразований 110

Часть II. Применение метода операторов преобразования к решению уравнений в частных производных

Глава 3. **Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи** 112
§ 3.1. Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи к задачам для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу и лемме Копсона. . . . 112
§ 3.2. Приложения операторов преобразования к установлению формул связи между решениями дифференциальных уравнений 114
§ 3.3. Приложения операторов преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к решению одной пары интегро-дифференциальных уравнений. 115
§ 3.4. Приложения операторов преобразования к установлению эквивалентности норм пространств Киприянова и весовых пространств Соболева 116
Глава 4. **Общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу** 122
§ 4.1. Абстрактное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу 122
4.1.1. Рекуррентные формулы 122
4.1.2. Оператор Пуассона и абстрактное уравнение ЭПД 124
§ 4.2. Гиперболические уравнения с одной пространственной переменной 126
§ 4.3. Уравнение со спектральным параметром 131
§ 4.4. Первая задача Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу 137
4.4.1. Случай $k > n + |\gamma| - 1$ 138
4.4.2. Случай $k \leqslant n + |\gamma| - 1$ 140
4.4.3. Одномерный случай 142
§ 4.5. Вторая задача Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу 145

§ 4.6. B-ультрагиперболическое уравнение и обобщение теоремы Асгейрссона 148
§ 4.7. Итерированное весовое сферическое среднее и его свойства 153
§ 4.8. Применение тождества для итерированного сферического среднего к задаче компьютерной томографии. 159
§ 4.9. О приложениях весовых сферических средних 162
§ 4.10. Явное построение дробных степеней оператора Бесселя 163

Часть III. Методы построения ОП для оператора Бесселя и родственных операторов

Глава 5. **Композиционный метод построения ОП** 169
§ 5.1. B-гиперболические операторы преобразования 170
§ 5.2. B-эллиптические операторы преобразования. 173
§ 5.3. B-параболические операторы преобразования 175
§ 5.4. Операторы сдвига по параметру типа Лаундеса. 176
Глава 6. **Построение ОП для возмущённого уравнения Бесселя с переменным потенциалом**. 179
§ 6.1. Постановка задачи нахождения интегрального представления решений для возмущённого уравнения Бесселя с переменным потенциалом 179
§ 6.2. Решение основного интегрального уравнения для ядра оператора преобразования 181
§ 6.3. Оценки для случая степенного сингулярного в нуле потенциала . . 187

Список литературы 192

Предисловие

В настоящее время теория операторов преобразования представляет собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегро-дифференцирования, теории обратных задач и задач рассеяния, теории оптимального управления и динамических систем.

Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом ее приложений. Особую роль методы операторов преобразования играют в теории дифференциальных уравнений различных типов. С их помощью были доказаны многие фундаментальные результаты для различных классов дифференциальных уравнений.

Авторы этой книги принадлежат к школе известного воронежского математика Ивана Александровича Киприянова (1923–2001), который со своими учениками развил теорию дифференциальных уравнений в частных производных с операторами Бесселя, а также рассмотрел их многочисленные приложения. В данной монографии продолжаются исследования для указанного класса дифференциальных уравнений, при этом за основной подход к исследованиям выбран метод операторов преобразования.

Следует подчеркнуть, что, к сожалению, на русском языке отсутствуют специализированные монографии, посвященные общей теории операторов преобразования и их приложениям к дифференциальным уравнениям. Данный труд в определённой степени заполняет этот пробел.

Изложим структуру и основное содержание монографии. Отметим, что существенная часть результатов, изложенных в монографии, получена авторами, часть из них публикуется впервые.

Текст разделён на три части. В первой части «Общая теория операторов преобразования» рассматриваются определение операторов преобразования, основные исторические сведения, необходимые факты из теории специальных функций, функциональных пространств и интегральных преобразований. Отметим более подробное изложение свойств преобразования Меллина, включая теорему Слейтер, а также обзор основных конструкций дробного интегро-дифференцирования. Далее излагаются результаты о различных классах операторов преобразования: Сонина–Пуассона, Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова. Изложены основные свойства операторов обобщённого сдвига и весовых сферических средних.

Во второй части «Применение метода операторов преобразования к решению уравнений в частных производных» рассматриваются приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к дифференциальным уравнениям с особенностями в коэффициентах, лемме Копсона, задаче Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, установлению формул связи между решениями дифференциальных уравнений, включая задачу А.В. Бицадзе для уравнения Максвелла–Эйнштейна, приложения к решению решению некоторых интегро-дифференциальных уравнений. Здесь же рассмотрен важный вопрос об эквивалентности норм пространств И.А. Киприянова и весовых пространств С.Л. Соболева, а также изучено общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, включая ранее не рассмотренные в литературе случаи особых параметров и начальных условий. Также изложена теория явных представлений для дробных степеней оператора Бесселя, кратко намечены их приложения к некоторым интегро-дифференциальным уравнениям дробного порядка.

В третьей части «Методы построения ОП для оператора Бесселя и родственных операторов» излагается принадлежащий одному из авторов композиционный метод построения операторов преобразования. Этим методом получаются по единой схеме все известные ранее в явном виде операторы преобразования, а также построены многочисленные новые классы операторов преобразования. Рассмотрены приложения композиционного метода к решению некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений. В этой части также изложены результаты для дифференциальных операторов Бесселя, возмущённых потенциалами достаточно общего вида.

В заключение приводится весьма обширный список литературы, содержащий около пятисот ссылок.

Авторы благодарят за тщательное и профессиональное редактирование книги её редактора В.С. Ароловича, который помог авторам избавиться от ряда ошибок и неточных ссылок.

Монография подготовлена и издана при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-11-00026 Д.

Введение. Исторические сведения

Начнём с определения основного инструмента исследований в данной монографии — операторов преобразования (transmutation).

Определение 0.1. Пусть дана пара операторов (A, B). Ненулевой оператор T называется *оператором преобразования* (ОП), если выполняется соотношение

$$T\,A = B\,T. \tag{0.1}$$

Соотношение (0.1) называется иначе *сплетающим свойством*; тогда говорят, что ОП T *сплетает* операторы A и B (intertwining operator). Для превращения (0.1) в строгое определение необходимо задать пространства или множества функций, на которых действуют операторы A, B и, следовательно, T. Обычно в определение ОП закладывают также требования обратимости и непрерывности, которые являются желательными, но не обязательными условиями. В конкретных реализациях операторы A и B чаще всего (но не обязательно!) являются дифференциальными, T — интегральный линейный непрерывный оператор на стандартных пространствах.

Ясно, что понятие ОП является прямым и далеко идущим обобщением понятия подобия матриц из линейной алгебры (см. [44, 259, 283]). Следует отметить, что не существует эффективных методов проверки подобия двух конечных матриц, так как не существует эффективных способов проверки совпадения их жордановых форм, кроме прямого вычисления.

Вместе с тем ОП *не сводятся к подобным (или эквивалентным) операторам*, так как сплетаемые операторы, как правило, являются неограниченными в естественных пространствах, к тому же обратный к ОП не обязан существовать, действовать в том же пространстве или быть ограниченным. Поэтому спектры операторов, сплетаемых ОП, как правило, не совпадают. Кроме того, сами ОП могут быть неограниченными. Операторы в паре, для которой ищется ОП, не обязаны быть только дифференциальными. В теории ОП встречаются задачи для следующих разнообразных типов операторов: интегральных, интегро-дифференциальных, дифференциально-разностных (например, типа Дункла), дифференциальных или интегро-дифференциальных бесконечного порядка (например, в вопросах, связанных с леммой Шура о дополняемости), общих линейных в фиксированных функциональных пространствах, псевдодифференциальных и операторно-дифференциальных (абстрактных дифференциальных).

Для примера кратко изложим модельную схему, иллюстрирующую использование операторов преобразования для получения формул связи между решениями возмущённого и невозмущённого уравнений, для которых доказано сплетающее свойство. Пусть, например, мы изучаем некоторый достаточно сложно устроенный оператор A. При этом нужные свойства уже известны для модельного более простого оператора B. Тогда, если существует ОП (0.1), то часто удается перенести свойства модельного оператора B и на A. Такова в нескольких словах примерная схема типичного использования ОП в конкретных задачах.

В частности, если рассматривается уравнение $Au = f$ с оператором A, то, применяя к нему ОП T со сплетающим свойством (0.1), получаем уравнение с оператором B вида $Bv = g$, где обозначено $v = Tu$, $g = Tf$. Поэтому если второе уравнение с оператором B является более простым и уже известны формулы для его решений, то мы получаем и представления для решений первого уравнения $u = T^{-1}v$. Разумеется, при этом обратный оператор преобразования должен существовать и действовать в рассматриваемых пространствах, а для получения явных представлений решений должно быть получено и явное представление этого обратного оператора. Таково одно из простейших применений техники ОП в теории дифференциальных уравнений — как обыкновенных, так и в частных производных. При этом следует отметить, что при наличии пары линейных ОП они осуществляют одновременно связь и представление решений как для однородных, так и для неоднородных уравнений.

Сделаем одно терминологическое замечание. В западной литературе принят для ОП термин ***transmutation***, восходящий к Ж. Дельсарту. Как отмечает Р. Кэрролл, при этом похожий термин *transformation* закрепляется за классическими интегральными преобразованиями Фурье, Лапласа, Меллина, Ханкеля и другими подобными им. Кроме того, термин *transmutation* имеет в романских языках дополнительный оттенок «волшебного превращения», что довольно образно характеризует действие ОП. Приведём дословную цитату из [316]: «Such operators are often called transformation operators by the Russian school (Levitan, Naimark, Marchenko et al.), but transformation seems too broad a term, and, since some of the machinery seems «magical» at times, we have followed Lions and Delsarte in using the word transmutation [Такие операторы русская математическая школа [1]) (Левитан, Наймарк, Марченко и др.) часто называет операторами преобразования, но преобразование представляется слишком широким термином, и так как используемая техника кажется временами «волшебной», мы следуем Лионсу

[1]) Под русской математической школой здесь следует понимать советскую.

и Дельсарту, используя термин *transmutation*] [2])». Лучше и точнее не скажешь.

В развитии теории операторов преобразования можно выделить три основных периода. В первом начальном периоде становления теории операторов преобразования закладывались базовые идеи и определения, их источником была теория подобия конечных матриц (см. [44, 259, 283]), отдельные результаты по подобию операторов, а также некоторые результаты для простейших дифференциальных уравнений. Считается, что идея операторов преобразования в операторной формулировке была высказана К. Фридрихсом [274]. На самом деле метод операторов преобразования для получения представлений решений дифференциальных уравнений был разработан и впервые применен намного раньше: в XIX в. в работах русского математика А.В. Летникова (см. [290]), кроме того, это было также по существу первым реальным применением дробного интегро-дифференцирования как ОП к задачам дифференциальных уравнений (см. [198, 400]).

Второй период условно продолжался в течение 1940–1980-х гг., его можно назвать классическим. В этот период были получены многочисленные результаты в теории операторов преобразования и их приложениях. Перечислим основные направления и результаты этого периода.

Методы операторов преобразования были с успехом применены в теории обратных задач, они играют основную роль в определении обобщённого преобразования Фурье, нахождении спектральной функции, формулировке и решении знаменитого уравнения Гельфанда–Левитана (З.С. Агранович, В.А. Марченко [3, 150–157], Б.М. Левитан [119–126]); в теории рассеяния через операторы преобразования выписывается не менее знаменитое уравнение Марченко (Б.М. Левитан [119–126], В.А. Марченко [3, 150, 151], Л.Д. Фаддеев [269, 270]); для обоих классов обратных задач операторы преобразования являются основным инструментом, так как перечисленные классические уравнения выписываются для ядер операторов преобразования, а значения ядер на диагонали восстанавливают неизвестные потенциалы в обратной задаче по спектральной функции и теории рассеяния (см. [22, 114, 115, 170, 171, 286]). Для операторов Штурма–Лиувилля были построены ставшие классическими ОП на отрезке (А.Я. Повзнер [179]) и на полуоси (Б.Я. Левин [118]). В спектральной теории были получены известные формулы следов и асимптотика спектральной функции (В.А. Марченко [150, 151], Б.М. Левитан [119–126]); оценки ядер операторов преобразования, отвечающие за устойчивость обратных задач и задач рассеяния (В.А. Марченко [3, 150, 151]); оценки решений Йоста в квантовой теории рассеяния (З.С. Агранович, В.А. Марченко

[2]) Адекватный перевод этой цитаты на русский язык затруднён из-за наличия в английском языке схожих терминов transformation и transmutation, причём в цитате обыгрывается разница между ними, в то время как в русском языке оба понятия передаются одним термином «преобразование»

[3, 150, 151], Б.М. Левитан [119–126], В.В. Сташевская [252, 253], А.С. Сохин [247–250]). В результате применения ОП можно сказать, что теория операторов Штурма–Лиувилля была тривиализирована до уровня простейшего уравнения с тригонометрическими или экспоненциальными решениями. Также была исследована система Дирака и другие матричные системы дифференциальных уравнений (Б.М. Левитан, И.С. Саргсян [124]).

Была развита теория обобщённых аналитических функций, которую можно трактовать как раздел теории операторов преобразования, сплетающих невозмущённые и возмущённые уравнения Коши–Римана (Л. Берс [306, 307], С. Бергман [14], И.Н. Векуа [33, 34], Б.В. Боярский [25], Г.Н. Положий [184–186]) с приложениями в задачах механики, теории упругости и газодинамики. На основе методов операторов преобразований был создан новый раздел гармонического анализа, изучающий различные модификации операторов обобщенного сдвига и обобщённых операторных сверток (Ж. Дельсарт [334–338, 341], Я.И. Житомирский [69], Б.М. Левитан [120, 121]). Была установлена глубокая связь операторов преобразования с теоремами типа Пэли–Винера (В.В. Сташевская [252, 253], Н.И. Ахиезер [6], У. Шебли [322–325], Х. Тримеш [482, 483]). Теория операторов преобразования позволила дать новую классификацию специальных функций и интегральных операторов со специальными функциями в ядрах (Р. Кэрролл [314–316], Т. Коорнвиндер). Нахождение ядер ОП использует существование и явный вид функций Грина или Римана для различных классов дифференциальных уравнений [38, 40, 244].

В теории нелинейных дифференциальных уравнений был разработан метод Лакса, который использует операторы преобразования для доказательства существования решений и построения солитонов (см. [2, 68, 317]), также широкие применения нашли преобразования Дарбу [429]: их можно рассматривать как операторы преобразования, в которых и сплетаемые и сплетающий операторы являются дифференциальными. В квантовой физике при рассмотрении уравнения Шрёдингера и задач теории рассеяния был изучен специальный класс операторов преобразования — волновые операторы. Рассмотрение общих задач рассеяния с точки зрения ОП изложено в [269, 270], а в [83] волновые операторы построены для задач теории рассеяния с потенциалом Штарка.

В самой теории ОП были обнаружены ограничения, связанные с порядком дифференциального оператора. Так, для дифференциальных операторов порядков выше третьего было показано, что классические ОП в форме Вольтерры существуют только для аналитических коэффициентов (В.И. Мацаев [159], Л.А. Сахнович [199–201], М.М. Маламуд [143–147]), а в общем случае ОП имеют более сложную структуру (А.Ф. Леонтьев [132], Ю.Н. Валицкий [29], И.Г. Хачатрян [279, 280], М.М. Маламуд [143–147], А.П. Хромов [285]). Вместе с тем в пространствах аналитических функций была доказана эквивалентность

дифференциальных операторов одного порядка и изучен целый ряд задач (М.К. Фаге [262–268], В.А. Марченко [155–157]). С целью применения к теории ОП была построена теория разрешимости для известного уравнения Бианки (М.К. Фаге [262]).

Отдельной областью применения ОП стала теория дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, особенно с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{du}{dx}. \tag{0.2}$$

На первоначальном этапе исследований уравнений этого класса применялась пара известных ОП Сонина и Пуассона (см. § 2.1). Как ОП эти операторы впервые были введены в работах Жана Дельсарта (Jean Delsarte) [336–338], а затем на основе его идей их изучение продолжилось в работах Дельсарта и Лионса [340–342, 419, 421]. Поэтому мы будем называть такие операторы ОП Сонина–Пуассона–Дельсарта (СПД). Об операторах СПД см. также известную статью Б.М. Левитана [126].

Ж. Дельсартом на базе ОП СПД было введено фундаментальное понятие операторов обобщённого сдвига (ООС, см. § 2.2). Были разработаны многочисленные конструкции обобщённого гармонического анализа, основанные на определениях обобщённого сдвига и вводимых с его помощью групповых структурах. Направление обобщённых почти периодических функций с использованием ОП типа СПД и ООС было заложено в работах Ж. Дельсарта 1938 г. [334–338] и продолжено Дельсартом и Ж.Л. Лионсом в [339, 340, 417–419]. Этот круг вопросов параллельно был исчерпывающе изучен в работах Б.М. Левитана 1938–1940 и особенно 1947–1949 гг., результаты вошли в его классические монографии [120–122]. Также в работах Ж. Дельсарта были впервые построены разложения по обобщённым рядам Тейлора, справедливо названным рядами Тейлора–Дельсарта (см. [119–121, 334, 341]), такие ряды изучаются до сих пор во многих работах: см., например, [380]. Следует отметить, что первоначальным источником и прототипом большинства вариантов обобщённого гармонического анализа были операторы Бесселя и связанные с ними дифференциальные уравнения.

Огромную роль конструкции ОП и ООС сыграли в теории уравнений с частными производными. ОП позволяют преобразовывать более сложные уравнения в более простые, ООС помогают в сингулярных уравнениях переносить особенность из начала в произвольную точку, а также с помощью обобщённой свёртки находить фундаментальные решения.

Здесь следует отметить, что первой фундаментальной работой, с которой начался отсчет изучения вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, является статья М.В. Келдыша [84] (задача Е).

Теория вырождающихся, смешанных, сингулярных и неклассических уравнений различных типов (см. [19, 87, 149, 192, 194, 239–241, 255, 258, 292, 313, 472]) разрабатывалась Ф. Трикоми, Э. Хольмгреном, С. Геллерстедтом, М. Проттером, М. Чибрарио, Г. Фикерой, С.А. Алдашевым, А.А. Андреевым, Ф.Т. Барановским, А.В. Бицадзе, А.А. Вашариным, И.Н. Векуа, М.И. Вишиком, В.Ф. Волкодавовым, В.Н. Врагов ым, В.П. Глушко, Г.В. Джаяни, И.Е. Егоровым, А.Н. Зарубиным, А.М. Ильиным, Т.Ш. Кальменовым, М.В. Капилевичем, А.А. Килбасом, А.И. Кожановым, Л.Д. Кудрявцевым, П.И. Лизоркиным, О.И. Маричевым, Л.Г. Михайловым, С.Г. Михлиным, А.М. Нахушевым, Н.Я. Николаевым, С.М. Никольским, О.А. Олейник, О.С. Парасюком, С.П. Пулькиным, Л.С. Пулькиной, Н.Р. Раджабовым, О.А. Репиным, К.Б. Сабитовым, М.С. Салахитдиновым, А.Л. Скубачевским, М.М. Смирновым, С.В. Руткаускасом, С.А. Терсеновым, В.Е. Фёдоровым, Ф.И. Франклем, Л.И. Чибриковой, А.И. Янушаускасом и многими другими.

Особо отметим один класс уравнений в частных производных с особенностями, типичным представителем которого является B-эллиптическое уравнение с операторами Бесселя по каждой переменной вида

$$\sum_{k=1}^{n} B_{\nu,x_k} u(x_1, \dots, x_n) = f; \tag{0.3}$$

аналогично рассматриваются B-гиперболические и B-параболические уравнения, эта удобная терминология была введена И.А. Киприяновым [87]. Изучение этого класса уравнений было начато в работах Эйлера, Пуассона, Дарбу и Римана, продолжено в работах Л. Берса [306–308] в теории обобщённого осесимметрического потенциала А. Вайнштейна [494–496] (теория GASPT — Generalized Axially Symmetric Potential Theory) и в трудах И.Е. Егорова, Я.И. Житомирского, А.А. Килбаса, Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина, О.И. Маричева, М.И. Матийчука, Л.Г. Михайлова, М.Н. Олевского, С.П. Пулькина, М.М. Смирнова, С.А. Терсенова, Хе Кан Чера, А.И. Янушаускаса и др. Важность уравнений из этих классов определяется также их использованием в приложениях к задачам теории осесимметрического потенциала, уравнениям Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) (см. [41, 63]), преобразованию Радона и томографии (см. [166, 359, 425, 453–455]), газодинамике и акустике (Л. Берс [306–308]), теории струй в гидродинамике (М.И. Гуревич [60]), линеаризованным уравнениям Максвелла–Эйнштейна (А.В. Бицадзе [18]), механике, теории упругости и пластичности (Г.В. Джаяни [64]) и многим другим задачам.

Наиболее полно весь круг вопросов для уравнений с операторами Бесселя был изучен воронежским математиком Иваном Александровичем Киприяновым, а также и его учениками и последователями Л.А. Ивановым, А.В. Рыжковым, В.В. Катраховым, В.П. Архиповым, А.Н. Байдаковым, Б.М. Богачёвым, А.Л. Бродским, Г.А. Виноградовой,

В.А. Зайцевым, Ю.В. Засориным, Г.М. Каганом, А.А. Катраховой, Н.И. Киприяновой, В.И. Кононенко, М.И. Ключанцевым, А.А. Куликовым, А.А. Лариным, М.А. Лейзиным, Л.Н. Ляховым, А.Б. Муравником, И.П. Половинкиным, А.Ю. Сазоновым, С.М. Ситником, В.П. Шацким, Э.Л. Шишкиной, В.Я. Ярославцевой; основные результаты этого направления представлены в [87]. Для описания классов решений соответствующих уравнений И.А. Киприяновым были введены и изучены функциональные пространства (см. [88]), позднее названные его именем (см. монографии Х. Трибеля [257], Л.Д. Кудрявцева и С.М. Никольского [106], в которых пространствам Киприянова посвящены отдельные параграфы). Задачи для операторно-дифференциальных (абстрактных) уравнений вида (0.3), берущие начало в известной монографии (Р. Кэрролла [313]), начали рассматриваться воронежскими математиками в работе А.В. Глушака, В.И. Кононенко, С.Д. Шмулевича [45], а затем последовательно изучались в работах А.В. Глушака [46–57]. В указанных работах А.В. Глушака для абстрактных дифференциальных уравнений рассматривались вопросы решения уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу, Бесселя–Струве, стабилизации решений, операторные косинус-функции, функции Бесселя и Лежандра. Интересные результаты по изучению псевдодифференциальных операторов на основе ОП СПД были получены В.В. Катраховым [89], им также посвящена отдельная глава в [315], где эти результаты изложены в специально переработанном Р. Кэрроллом виде.

Рассматривались также ОП для многочисленных обобщений оператора Бесселя. Важным обобщением операторов Сонина–Пуассона–Дельсарта являются ОП для гипербесселевых функций. Теория таких функций была первоначально заложена в работах Куммера и Делерю. Полное исследование гипербесселевых функций, дифференциальных уравнений для них и соответствующих операторов преобразования было исчерпывающе проведено в работах И. Димовски и его учеников [342–344]. Соответствующие ОП заслуженно получили в литературе названия ОП Сонина–Димовски и Пуассона–Димовски, они также изучались в работах ученицы И. Димовски — В. Киряковой [343, 344, 393–397]. В теории гипербесселевых функций, дифференциальных уравнений и операторов преобразования для них центральную роль играет знаменитое интегральное преобразование Обрешкова, введенное болгарским математиком Николой Обрешковым (см. [342, 393]). Это преобразование, ядро которого выражается в общем случае через G-функцию Мейера, является одновременным обобщением преобразований Лапласа, Меллина, синус- и косинус-преобразований Фурье, Ханкеля, Мейера и других классических интегральных преобразований. Различные формы гипербесселевых функций, дифференциальных уравнений и операторов преобразований для них, а также частные случаи преобразования Обрешкова впоследствии многократно переоткрывались. По мнению авторов, преобразование Обрешкова, наряду с преобразованиями Фурье, Меллина и Лапласа,

относится к небольшому числу фундаментальных, из которых, как из кирпичиков, складываются многие другие преобразования, а также основанные на них конструкции и приложения. Также важную роль в теории дифференциальных уравнений дробного порядка играет интегральное преобразование Станковича (см. [190]), ядро которого выражается через H-функцию Райта–Фокса.

Вместе с тем были построены аналогичные теории и для некоторых других модельных операторов, например таких (см. [294, 295, 314–316]):

$$A = \frac{1}{v(x)}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d}{dx}, \tag{0.4}$$

$$v(x) = \sin^{2\nu+1} x,\ \mathrm{sh}^{2\nu+1} x,\ (e^x - e^{-x})^{2\nu+1}(e^x + e^{-x})^{2\mu+1}. \tag{0.5}$$

Важность операторов A вида (0.4) для теории заключается в том, что по знаменитой формуле Гельфанда они представляют радиальную часть оператора Лапласа на симметрических пространствах (см. [282]). При этом оператор Бесселя получается при выборе в (0.4) $v(x) = x^{2\nu+1}$. Другим модельным оператором, для которого построены ОП, является оператор Эйри $D^2 + x$; рассматривался также его возмущённый вариант, связанный с эффектом Штарка из квантовой механики (см. [83]). Были изучены операторы сдвига по спектральному параметру Векуа–Эрдейи–Лаундеса [422–424].

К третьему, современному периоду развития теории ОП можно отнести работы с 1990-х гг. и до настоящего времени, за этот период были получены и продолжают появляться многие важные исследования: см., например, обзоры [153, 204, 318, 466]. Перечислим некоторые из них.

Продолжено развитие теории обобщённых аналитических функций (А.П. Солдатов [245], С.Б. Климентов [96], В.В. Кравченко [401]). Были найдены приложения операторов преобразования к вложениям функциональных пространств и обобщению операторов Харди (см. [223]), построению различных конструкций обобщённого сдвига и основанным на них обобщённым вариантам гармонического анализа (А.Д. Гаджиев, В.С. Гулиев, С.С. Платонов [176–178], Л.Н. Ляхов, Э.Л. Шишкина [287, 288, 460]). Продолжилось применение ОП и родственных методов в теории обратных задач и теории рассеяния (см. [291, 321, 441]). Для дифференциальных уравнений продолжается развитие метода Дарбу и его модификаций (В.Б. Матвеев [431], А.Б. Шабат), рассмотрены новые классы задач для решений с существенными особенностями на части границы во внутренних или угловых точках (В.В. Катрахов [74–77], И.А. Киприянов [91, 92]), получены точные оценки скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений (В.З. Мешков [160, 161]). Отдельной тематикой стало использование ОП при исследовании различных операторов дробного интегро-дифференцирования (И. Димовски,

В. Кирякова [300, 343, 344, 393–397], Н.А. Вирченко [35, 488, 489]). Было продолжено с использованием методов ОП изучение сингулярных и вырождающихся краевых задач, псевдодифференциальных операторов (В.В. Катрахов [74–77], И.А. Киприянов [91, 92], Л.Н. Ляхов [135, 136], О.А. Репин [194]), операторных уравнений (А.В. Глушак [45–57], В.Е. Фёдоров [271, 272]). Уравнения с оператором Бесселя и связанные с ними вопросы изучают А.В. Глушак [45–57], В.С. Гулиев, Л.Н. Ляхов [135–138], Л.С. Пулькина [193], В.В. Кравченко [402–406] со своими коллегами и учениками, а также А.Б. Муравник (функционально-дифференциальные уравнения [163]), Вал.В. Волчков [490], И.П. Половинкин (теоремы о среднем для уравнений с операторами Бесселя [138]), Э.Л. Шишкина (B-гиперболические потенциалы и обобщённые средние [287, 288, 460]), В.Д. Репников (стабилизация решений) и др.

В последнее время также разработаны эффективные численные методы для применения операторов преобразования при расчётах решений дифференциальных уравнений, их собственных функций и спектральных характеристик (В.В. Кравченко, С.М. Торба [312, 319, 402–411]), эти методы основаны на разработанном В.В. Кравченко методе представления решений уравнений Штурма–Лиувилля и их обобщений с операторами Бесселя или Дирака (метод разложений в ряды по степеням спектрального параметра, или SPPS — Spectral Parameter Power Series). Отдельный класс задач составляют задачи типа Дирихле–Неймана, Неймана–Дирихле, при которых оператор преобразования действует на краевые или начальные условия, сохраняя дифференциальное выражение; такие задачи нашли важные приложения в механике (О.Э. Яремко [8, 293]). Достаточно законченные модификации гармонического анализа для операторов Бесселя построены в работах С.С. Платонова [176–178], для возмущённого оператора типа Бесселя с переменными коэффициентами — в работах Х. Тримеша [484–486]; в последнее время активно создаётся гармонический анализ для дифференциально-разностных операторов типа Дункла (см. [345, 347–349, 450–452, 487]) на основе соответствующих обобщений операторов СПД. Наличие благодаря ОП соответствующих ООС позволяет также определить обобщённую свёртку, новые алгебраические и групповые структуры, рассматривать различные задачи аппроксимации функций. Идеи М.К. Фаге, развитые для уравнения Бианки в связи с построением ОП для дифференциальных уравнений высоких порядков, нашли своё продолжение в исследовании более общих уравнений — в работах В.И. Жегалова, А.Н. Миронова, Е.А. Уткиной [67, 68]. В теории уравнений дробного порядка появились работы, которые можно трактовать как метод ОП для представления решений уравнений дробного порядка через решения уравнений целого порядка (А.В. Псху, Я. Прусс, А.Н. Кочубей). ОП находят применения в теории преобразования Радона и математической томографии (см. [166, 281, 359, 453–455]), а также при разложении функций в различные ряды по специальным функциям (см. [380]). В работах В.А. Марченко [153, 158] продолжилось

применение ОП к квантовой теории. Разные задачи, использующие идеи ОП или родственные методы, также рассматривались, например, в [5, 10, 276, 367, 380, 430, 459].

Возможность принадлежности исходной и преобразованной функций различным пространствам, что принято подчёркивать использованием различных обозначений для переменных, позволяет включить в общую схему ОП все классические интегральные преобразования: Фурье, Лапласа (на самом деле Петцваля), Меллина, Ханкеля, Вейерштрасса, Конторовича–Лебедева, Фока, Обрешкова, Станковича и др. (см. [11, 12, 173]). При вычислении интегралов, необходимых для реализации метода ОП, фундаментальные приложения нашла теорема Слейтер–Маричева, соединившая методы преобразования Меллина с теорией гипергеометрических функций [148, 188]. В общую схему ОП также включаются конечные интегральные преобразования Г.А. Гринберга [59]. Продолжилось исследование функций Грина и Римана, которые используются в методе ОП (см. [149, 244]). Существуют связи ОП с теорией дробных (квадратичных) интегральных преобразований Фурье [438] и Ханкеля. Решение В.А. Чернятиным знаменитой задачи о нахождении необходимых и достаточных условий на потенциалы, дающее обоснование метода Фурье для волнового уравнения с переменным коэффициентом [285], открывает перспективы использования этого метода для оценки ядер в теории ОП.

Коммутирующие операторы любой природы также подходят под определение ОП. Наиболее близко к духу и задачам теории ОП относится изучение операторов, коммутирующих с производными. Сами ОП в этом случае зачастую представляются формальными рядами, псевдодифференциальными операторами или дифференциальными операторами бесконечного порядка. Описание коммутантов напрямую связано с описанием всего семейства ОП для заданной пары по его единственному представителю. В этом классе задач фундаментальные приложения нашла теория операторных свёрток, особенно свёртки Берга–Димовски (см. [309, 342]). Начинают находить приложения в теории ОП и результаты для коммутирующих дифференциальных операторов, восходящие к классическим работам Бёрчнелла и Чонди (J.L. Burchnall, T.W. Chaundy).

Важным разделом теории ОП стал специальный класс — ОП Бушмана–Эрдейи (см. определения в § 2.3). Это класс ОП, который при определённом выборе параметров является одновременным обобщением операторов СПД и сопряжённых к ним, операторов дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, а также интегральных преобразований Мелера–Фока. Интегральные операторы указанного вида с функциями Лежандра в ядрах впервые встретились в работах Э.Т. Копсона по уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу в конце 1950-х гг. [326–328]. Впервые подробное изучение разрешимости и обратимости данных операторов было начато в 1960-х гг. в работах Р. Бушмана [310, 311]

и А. Эрдейи [355–359]. Операторы Бушмана–Эрдейи или их аналоги изучали также Т.П. Хиггинс [373], Та Ли [479, 480], Э.Р. Лав [420, 421], Г.М. Хабибулла, К.Н. Шривастава, Динь Хоанг Ань [66], В.И. Смирнов, Б. Рубин, Н.А. Вирченко, И. Федотова [488], А.А. Килбас, О.В. Скоромник [86, 395] и др. При этом в основном изучались задачи о решении интегральных уравнений с этими операторами, их факторизации и обращения. Эти результаты частично упомянуты в монографии [198], хотя случай выбранных нами пределов интегрирования считается там особым и не рассматривается, за исключением одного набора формул композиции (см. также [223, 466]). Некоторые результаты для особого выбора пределов были добавлены в английское расширенное издание этой монографии [460].

Термин «операторы Бушмана–Эрдейи» как наиболее исторически оправданный был введён С.М. Ситником в [208, 223], впоследствии он использовался и другими авторами. Ранее в [198] встречался предложенный О.И. Маричевым термин «операторы Бушмана». В теории преобразования Радона и математической томографии также используется термин «операторы Чебышёва–Гегенбауэра» [359, 453–455]. Наиболее полное, на наш взгляд, изучение операторов Бушмана–Эрдейи было проведено в работах С.М. Ситника в 1980–1990-е гг. [203, 205, 208, 222, 223] и затем продолжено в [81, 204, 210, 466]. При этом необходимо отметить, что роль операторов Бушмана–Эрдейи как ОП до работ [203, 205, 208, 222, 223] вообще ранее нигде не отмечалась и не рассматривалась.

Из относительно недавних работ, в которых изучались операторы Бушмана–Эрдейи как интегральные операторы, отметим работы Н.А. Вирченко [488, 489], А.А. Килбаса, Б. Рубина, А.В. Глушака и их учеников. Так, в работах А.А. Килбаса и О.В. Скоромник [86, 392] рассматриваются операторы Бушмана–Эрдейи в весовых пространствах Лебега, а также многомерные обобщения в виде интегралов по пирамидальным областям. В монографии [488] вводятся некоторые обобщения стандартных функций Лежандра, а затем рассматриваются сходные с операторами Бушмана–Эрдейи, но не содержащие их как частные случаи, интегральные операторы с введёнными функциями в ядрах на всей положительной полуоси (операторы Бушмана–Эрдейи определены на части положительной полуоси). В работах Б. Рубина среди других результатов описаны множества, определения и образы интегральных операторов Бушмана–Эрдейи (Гегенбауэра–Чебышёва) в некоторых функциональных пространствах [359, 453–455] с приложениями результатов к теории преобразования Радона и томографии. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи используются в недавних работах А.В. Глушака [46, 47].

Важность операторов Бушмана–Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными [198]: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу

в четверти плоскости и установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике (см. лемму Копсона в п. 2.3.2); в теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвига [166, 333, 359, 425, 453–455] действие преобразования Радона при разложении по сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана–Эрдейи по радиальной переменной; при исследовании краевых задач для различных уравнений с существенными особенностями внутри области, при доказательстве вложения пространств Киприянова в весовые пространства Соболева, при установлении связей между операторами преобразования и волновыми операторами теории рассеяния, при обобщении классических интегральных представлений Сонина и Пуассона и операторов преобразования Сонина–Пуассона–Дельсарта.

Изложению теории ОП и их приложениям посвящены существенные части монографий [8, 14, 293, 314–316, 363, 417]; кроме того, различные вопросы ОП рассматриваются также в [198, 366, 367] и во многих других известных монографиях. К сожалению, на русском языке нет книг, полностью посвящённых ОП, таких, как содержательные книги Роберта Кэрролла на английском [313–317]. Но следует безусловно отметить монографию М.К. Фаге и Н.И. Нагнибиды [262]. В этой монографии практически никак не отражены известные к тому времени результаты теории ОП, что полностью компенсируется изложением в основном собственных результатов авторов по одной из самых трудных задач теории ОП — их построению для дифференциальных операторов высоких порядков с переменными коэффициентами. Кроме того, в эту монографию вошли и многие другие вопросы: решение задачи об операторах, коммутирующих с производными в пространствах аналитических функций (включая исправление ошибочных результатов Дельсарта и Лионса), создание законченной теории разрешимости для уравнения Бианки, теория операторно-аналитических функций (первоначально возникшая в работах В.А. Марченко [155–157]), исследование операторов дифференцирования, интегрирования и корней из них в пространствах аналитических функций.

Из приведённого исторического обзора следует, что метод операторов преобразования является эффективным методом в теории дифференциальных уравнений и в смежных разделах математики, ему посвящено большое число работ, и на его основе решаются многочисленные задачи.

Часть I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Глава 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В этой главе приведены необходимые сведения о специальных функциях, пространствах функций и дробном интегро-дифференцировании.

§ 1.1. Специальные функции

Здесь даны краткие определения и пояснения для специальных функций, которые использованы в книге, согласно монографиям и справочникам [11–13, 134, 189, 251, 260, 302, 426, 427, 434].

1.1.1. Гамма-функция, бета-функция, пси-функция, символ Похгаммера и биномиальные коэффициенты. Гамма-функция является обобщением понятия факториала на случай чисел, не являющихся натуральными. Бета-функция в общем случае определяется через гамма-функцию. Пси-функция является логарифмической производной гамма-функции.

Пусть $z \in \mathbb{C}$. *Гамма-функция* $\Gamma(z)$ определялась Эйлером как предел

$$\Gamma(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{N!N^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+N)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

но чаще используется определение в виде интеграла Эйлера второго рода

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty y^{z-1}e^{-y}dy, \qquad \operatorname{Re} z > 0, \tag{1.1}$$

который сходится при всех $z \in \mathbb{C}$, для которых $\operatorname{Re} z > 0$.

Интегрирование по частям выражения (1.1) приводит к рекуррентной формуле

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

Поскольку $\Gamma(1)=1$, то рекуррентная формула (1.2) для положительных целых n приводит к равенству

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1,$$

или

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

которое и позволяет рассматривать гамма-функцию как обобщение понятия факториала. Переписав формулу (1.2) в виде

$$\Gamma(z-1) = \frac{\Gamma(z)}{z-1}, \tag{1.3}$$

мы получим выражение, позволяющее определить гамма-функцию от отрицательных аргументов, для которых определение (1.1) неприемлемо. Формула (1.3) показывает, что $\Gamma(z)$ имеет в точках $z = 0, -1, -2, -3, \ldots$ простые полюсы.

После многократного применения равенства (1.3) получим формулы *понижения и повышения*, которые, соответственно, имеют вид

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\ldots(z+n-1)\Gamma(z), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.4}$$

и

$$\Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z)}{(z-n)(z-n+1)\ldots(z-1)}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.5}$$

Отметим, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!\sqrt{\pi}}{(2n)!}.$$

Имеют место следующие соотношения:
формула дополнения

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(z\pi)}, \tag{1.6}$$

формула удвоения (формула Лежандра)

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \tag{1.7}$$

Бета-функция $B(z,w)$ тесно связана с гамма-функцией. Для двух параметров z и w, удовлетворяющих условиям $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} w > 0$, бета-функция Эйлера определяется интегралом Эйлера первого рода

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt. \tag{1.8}$$

Если $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ и $\operatorname{Re} w \leqslant 0$, то бета-функция определяется формулой

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.9}$$

Пси-функция $\psi(z)$ определяется как логарифмическая производная гамма-функции:

$$\psi(z) = \frac{d\ln\Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Функция $\psi(z)$ имеет простые полюсы в точках $z = 0, -1, -2, \ldots$. Для пси-функции справедливо представление

$$\psi(z) = -\gamma + (z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(z+n)},$$

где

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \ln m\right) = 0{,}5772156649\ldots$$

обозначает постоянную Эйлера–Маскерони [251]. Очевидно, что $\psi(1) = -\gamma$. Отметим справедливость формулы

$$\int_0^1 \frac{t^x - t^y}{1-t}dt = \psi(y+1) - \psi(x+1). \tag{1.10}$$

Символ Похгаммера $(z)_n$ при целых n определяется равенством

$$(z)_n = z(z+1)\ldots(z+n-1), \qquad n = 1, 2, \ldots; \qquad (z)_0 \equiv 1.$$

Справедливы равенства $(z)_n = (-1)^n(1-n-z)_n$, $(1)_n = n!$ и

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}. \tag{1.11}$$

Равенство (1.11) можно использовать для введения символа $(z)_n$ при действительных (комплексных) n.

Биномиальные коэффициенты определяются по формуле

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+1)}.$$

В частности, при целых $\alpha = m$, $m = 1, 2, \ldots$, имеем равенства

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}, \qquad m \geqslant n.$$

В случае произвольных (комплексных) β и α, $\alpha \neq -1, -2, \ldots$, полагают

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}.$$

Для натуральных k справедлива формула

$$(-1)^k\binom{\alpha}{k} = \binom{k-\alpha-1}{k} = \frac{\Gamma(k-\beta)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}. \tag{1.12}$$

1.1.2. Функции Бесселя. *Функции Бесселя*, названные в честь немецкого астронома Фридриха Бесселя, определяются как решения дифференциального уравнения Бесселя

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\alpha^2)y=0,$$

где порядок α — произвольное комплексное число.

Функциями Бесселя первого рода (обозначение $J_\alpha(x)$) являются решения, конечные в точке $x=0$ при целых или неотрицательных α. Можно определить эти функции с помощью разложения в ряд Тейлора около нуля или в более общий степенной ряд при нецелых α:

$$J_\alpha(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}.$$

Если α не является целым числом, то функции $J_\alpha(x)$ и $J_{-\alpha}(x)$ линейно независимы и, следовательно, являются решениями уравнения. Но если α целое, то верно следующее соотношение:

$$J_{-\alpha}(x)=(-1)^\alpha J_\alpha(x).$$

Оно означает, что в этом случае функции линейно зависимы. Тогда вторым решением уравнения станет *функция Неймана*, т. е. решение $N_\alpha(x)$ уравнения Бесселя, бесконечное в точке $x=0$. Эта функция связана с $J_\alpha(x)$ следующим соотношением:

$$N_\alpha(x)=\frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi)-J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)},$$

где в случае целого α берется предел по α, вычисляемый, например, с помощью правила Лопиталя. Функции Неймана также называются функциями Бесселя второго рода. Линейная комбинация функций Бесселя первого и второго родов являет собой полное решение уравнения Бесселя:

$$y(x)=C_1J_\alpha(x)+C_2N_\alpha(x).$$

Часто также используется обозначение $N_\alpha(x)=Y_\alpha(x)$.

Модифицированными функциями Бесселя, *или функциями Бесселя мнимого аргумента* называются функция

$$I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix)$$

и *функция Макдональда*

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin(\pi\nu)}\,[I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)],\qquad \nu\notin\mathbb{Z}.$$

В случае целого $\nu\in\mathbb{Z}$ функция Макдональда вычисляется предельным переходом по индексу с помощью правила Лопиталя.

Функции Ханкеля (Ганкеля), или функции Бесселя третьего рода — это линейные комбинации функций Бесселя первого и второго родов,

которые, следовательно, также суть решения уравнения Бесселя. Они названы в честь немецкого математика Германа Ханкеля:

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z)$$

— функция Ханкеля первого рода;

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z)$$

— функция Ханкеля второго рода. Функции Ханкеля с индексом 0 являются фундаментальными решениями уравнения Гельмгольца. Представление их функциями Бесселя первого рода:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-\nu\pi i} J_\nu(z)}{i\sin(\nu\pi)},$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{\nu\pi i} J_\nu(z)}{-i\sin(\nu\pi)}.$$

Нормированная функция Бесселя (j-функция Бесселя) j_ν определяется формулой (см. [87, с. 10; 126])

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\, J_\nu(x), \tag{1.13}$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода.

Используя формулы 9.1.27 из [251], получим, что $j_{(\nu-1)/2}(t)$ есть собственная функция оператора $B_\nu = \dfrac{1}{t^\nu}\dfrac{d}{dt}t^\nu\dfrac{d}{dt}$:

$$(B_\nu)_t j_{(\nu-1)/2}(\tau t) = -\tau^2 j_{(\nu-1)/2}(\tau t). \tag{1.14}$$

Отметим, что полезные свойства функций Бесселя с приложениями в аналитической теории чисел получены в работах Н.В. Кузнецова [107, 108].

1.1.3. Гипергеометрическая функция Гаусса. *Гипергеометрическая функция Гаусса* определяется внутри круга $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда (см. [251, с. 373, формула (15.3.1)]):

$${}_2F_1(a,b;c;z) = F(a,b,c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{1.15}$$

а при $|z| \geqslant 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда (см. [303, 305]). В формуле (1.15) параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными, причем $c \neq 0, -1, -2, \ldots$, а $(a)_k$ есть символ Похгаммера (1.11).

Гипергеометрический ряд (1.15) сходится только в единичном круге комплексной плоскости, поэтому возникает необходимость построения аналитического продолжения гипергеометрической функции за границу этого круга, на всю комплексную плоскость. Один из способов

аналитического продолжения — использование интегрального представления Эйлера

$$ {}_2F_1(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(b-c)} \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt, $$

$$ 0 < \operatorname{Re} b < \operatorname{Re} c, \qquad |\arg(1-z)| < \pi, $$

в котором правая часть определена при указанных условиях, обеспечивающих сходимость интеграла.

Важным свойством гипергеометрической функции является то, что многие специальные и элементарные функции могут быть получены из нее при определенных значениях параметров и преобразовании независимого аргумента.

Примеры для элементарных функций:

$$ (1+x)^n = {}_2F_1(-n,b,b;-x), \qquad \frac{1}{x}\ln(1+x) = {}_2F_1(1,1,2;-x), $$

$$ e^x = \lim_{n\to\infty} {}_2F_1(1,n,1;\frac{x}{n}), $$

$$ \cos x = \lim_{a,b\to\infty} {}_2F_1\left(a,b,\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4ab}\right), \quad \operatorname{ch} x = \lim_{a,b\to\infty} {}_2F_1\left(a,b,\frac{1}{2};\frac{x^2}{4ab}\right). $$

Функция Бесселя первого рода и гипергеометрическая функция Гаусса связаны формулой

$$ J_\nu(z) = \lim_{a,b\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_2F_1\left(a,b,\nu+1;-\frac{z^2}{4ab}\right)\right]. $$

1.1.4. Функции Лежандра. *Функции Лежандра* $P_\nu^\mu(x), Q_\nu^\mu(x)$ — это обобщения полиномов Лежандра на нецелую степень (см. [11]).

Функции Лежандра $P_\nu^\mu(x), Q_\nu^\mu(x)$ являются решениями общего уравнения Лежандра

$$ (1-x^2)\,y'' - 2xy' + \left(\lambda(\lambda+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right) y = 0, $$

где комплексные числа λ и μ называются соответственно степенью и порядком функций Лежандра. Эти функции могут быть определены для комплексных значений параметров и аргумента:

$$ P_\lambda^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\mu/2} {}_2F_1(-\lambda,\lambda+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}), \quad |1-z| < 2, $$

$$Q_\lambda^\mu(z)=\frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\lambda+\mu+1)}{2^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}\frac{e^{i\mu\pi}(z^2-1)^{\mu/2}}{z^{\lambda+\mu+1}}\times$$

$$\times\ {}_2F_1\left(\frac{\lambda+\mu+1}{2},\frac{\lambda+\mu+2}{2};\lambda+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right),\quad |z|>1,$$

где Γ — гамма-функция и ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса. В книге используются также прямые значения функций $P_\nu^\mu(x), Q_\nu^\mu(x)$ на разрезе $x\in[-1;1]$, которые обозначаются $\mathbb{P}_\nu^\mu(x), \mathbb{Q}_\nu^\mu(x)$.

Функции Лежандра являются частными случаями гипергеометрической функции Гаусса, поэтому для них известны многочисленные разложения в ряды, интегральные представления, формулы продолжения, а также выражения через элементарные функции при специальных значениях параметров.

Многочлены Лежандра являются функциями Лежандра порядка $\mu=0$.

1.1.5. Функция Миттаг-Леффлера. *Функция Миттаг-Леффлера* $E_{\alpha,\beta}(z)$ — это целая функция (в $z\in\mathbb{C}$) порядка $1/\alpha$, определяемая степенным рядом (см. [13, 36, 65, 346, 369, 397, 398, 440])

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)},\qquad z\in\mathbb{C},\ \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(\alpha)>0,\ \ \mathrm{Re}(\beta)>0. \tag{1.16}$$

Функция (1.16) была введена Гёстой Миттаг-Леффлером в 1903 г. для $\alpha=1$ и А. Виманом в 1905 г. в общем случае. Первыми приложениями этих функций у Миттаг-Леффлера и Вимана были приложения в ТФКП (нетривиальные примеры целых функций с нецелыми порядками роста и обобщенные методы суммирования). В СССР эти функции стали в основном известны после опубликования знаменитой монографии М.М. Джрбашяна [65], см. также его более позднюю монографию [346]. Самым известным применением функций Миттаг-Леффлера в теории интегро-дифференциальных уравнений и дробном исчислении является тот факт, что через них в явном виде выражается резольвента дробного интеграла Римана–Лиувилля по знаменитой формуле Хилле–Тамаркина–Джрбашяна (см. [190, 198, 374]). Ввиду многочисленных приложений к решению дифференциальных уравнений дробного порядка эта функция получила название *королевской функции дробного исчисления* [368].

Производная функции Миттаг-Леффлера вычисляется по формуле

$$E'_{\alpha,\beta}(z)=\frac{dE_{\alpha,\beta}(z)}{dz}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+k)z^k}{\Gamma(\beta+\alpha(1+k))}.$$

Отметим, что $E_{1,1}(z)=e^z$.

1.1.6. Обобщённые функции гипергеометрического типа. *Обобщённые функции гипергеометрического типа* рассматриваются в монографиях [39, 148, 350, 361, 381, 388, 473] и ряде других.

Известны многочисленные обобщения гипергеометрических функций, например: q-гипергеометрические функции, теория которых восходит к Э. Гейне, A-гипергеометрические системы Гельфанда–Граева, эллиптические гипергеометрические функции Спиридонова и др.

Следует отметить, что в последнее время функции гипергеометрического типа, такие как функции Миттаг-Леффлера, Райта и Фокса, получили многочисленные приложения в задачах теории вероятностей и математической статистики. В частности, через них выражаются некоторые важные функции распределения и плотности вероятностей.

Функции Райта (см. [11, 36, 393, 397, 398, 440]) были введены Эдвардом Мейтлендом Райтом в 1935 г. Они являются непосредственными обобщениями функций Миттаг-Леффлера и определяются в виде рядов, аналогичных (1.16), но с произвольным конечным числом гамма-функций в числителе и знаменателе дроби для общего члена ряда, см. общий вид этих рядов в [11]. Иногда эти функции используются под другими названиями, например: обобщённая функция Бесселя (см. [440]), обобщённая функция Миттаг-Леффлера (см. [369]), многопараметрическая функция Миттаг-Леффлера (см. [36, 397, 398]), и некоторыми другими. Функции Райта, представленные в образах преобразования Меллина или интегралами Меллина–Барнса, также являются функциями Фокса, и обратно, хотя не при всех значениях параметров такие преобразования очевидны или даже возможны.

Пусть $p, q \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $p^2 + q^2 \neq 0$, $a_i, b_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ ($\alpha_i, \beta_j \neq 0$; $i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, q$). Тогда функция Райта определяется степенным рядом

$$ {}_p\Psi_q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} \Gamma(a_i + \alpha_i k)}{\prod\limits_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{z^k}{k!}, \qquad z \in \mathbb{C}. $$

Например, при представлении резольвенты для дробных степеней оператора Бесселя используется такой вариант функции Райта:

$$ J^{\mu}_{\gamma,\lambda}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(\gamma + m\mu + \lambda + 1)\Gamma(\lambda + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\gamma+2\lambda}. \qquad (1.17) $$

G-функции Мейера (см. [351, 461]). Общее определение G-функции Мейера дается следующим интегралом в комплексной плоскости:

$$ G^{m,n}_{p,q}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \middle| \, z \right) = $$

$$ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - s)} z^s \, ds. $$

Это интеграл так называемого типа Меллина–Барнса. Определение корректно при следующих предположениях: $0 \leqslant m' \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant p$, $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, $a_k - b_j \neq 1, 2, 3, \ldots$ для $k = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, m$, что означает, что никакие полюсы $\Gamma(b_j - s)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, не совпадают ни с какими полюсами $\Gamma(1 - a_k + s)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $z \neq 0$. Кроме того, контур интегрирования после обхода области с полюсами должен продолжаться по прямым вертикально вверх и вниз.

Важным свойством G-функции Мейера является тот факт, что во всех случаях она представима в виде конечной суммы обобщённых гипергеометрических функций. Отметим, что функции Мейера используются, например, в [342, 393] при представлениях преобразования Обрешкова.

В случае другого выбора контура с уходом на бесконечность по горизонтальным прямым получаются новые варианты функций Мейера; подробный анализ этих модификаций, а также их отличий от классического случая см. в недавних работах [384–386]. В этих случаях, в частности, функция Мейера может быть определена, но для нее может не существовать преобразование Меллина, или даже возможно, что преобразование Меллина существует, но сама функция не восстанавливается обратным преобразованием Меллина через интеграл Меллина–Барнса.

Функции Фокса [388]. H-функцию ввел Чарльз Фокс в 1961 г. H-функция также определяется с помощью интеграла Меллина–Барнса:

$$H(x) = H_{p,q}^{m,n}(z) = H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{pmatrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{pmatrix}\right.\right] =$$

$$= H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix} (a_1, A_1) & (a_2, A_2) & \ldots & (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1) & (b_2, B_2) & \ldots & (b_q, B_q) \end{matrix}\right.\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\left(\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j + B_j s)\right)\left(\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1 - a_j - A_j s)\right)}{\left(\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1 - b_j - B_j s)\right)\left(\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j + A_j s)\right)} z^{-s}\, ds.$$

Здесь пустое произведение всегда интерпретируется как единица; $m, n, p, q \in \mathbb{N}_0$, $0 \leqslant n \leqslant p$, $1 \leqslant m \leqslant q$, $A_i, B_j \in \mathbb{R}_+$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$; L — некоторый подходящий контур, отделяющий полюсы

$$\zeta_{j\nu} = -\left(\frac{b_j + \nu}{B_j}\right), \qquad j = 1, \ldots, m; \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

гамма-функции $\Gamma(b_j + sB_j)$ от полюсов

$$\omega_{\lambda k} = \left(\frac{1 - a_\lambda + k}{A_\lambda}\right), \qquad \lambda = 1, \ldots, n; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

гамма-функции $\Gamma(1 - a_\lambda - sA_\lambda)$, так чтобы

$$A_\lambda(b_j + \nu) \neq B_j(a_\lambda - k - 1), j = 1, \ldots, m; \lambda = 1, \ldots, n; \nu, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Кроме того, контур интегрирования после обхода области с полюсами должен продолжаться по прямым вертикально вверх и вниз.

Особым случаем, для которого H-функция Фокса сводится к G-функции Мейера, является набор параметров $A_j = B_k = C$, $C > 0$ для $j = 1, \ldots, p$, $k = 1, \ldots, q$:

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a_1, C) & (a_2, C) & \ldots & (a_p, C)\\ (b_1, C) & (b_2, C) & \ldots & (b_q, C)\end{matrix}\right.\right] = \frac{1}{C} G_{p,q}^{m,n}\left(\begin{matrix}a_1, \ldots, a_p\\ b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\,\middle|\, z^{1/C}\right).$$

В отличие от G-функции Мейера H-функция Фокса в общем случае не представляется в виде конечной суммы обобщённых гипергеометрических функций или G-функций. В том случае, когда она представляется в виде ряда, используется название *функция Райта–Фокса*.

В случае другого выбора контура с уходом на бесконечность по горизонтальным прямым получаются новые варианты функций Фокса; подробный анализ этих модификаций, а также их отличий от классического случая см. в недавних работах [382, 383]. В этих случаях, в частности, функция Фокса может быть определена, но для нее может не существовать преобразование Меллина, или даже возможно, что преобразование Меллина существует, но сама функция не восстанавливается обратным преобразованием Меллина через интеграл Меллина–Барнса.

Самым известным применением функций Фокса в теории дифференциальных уравнений является их использование А.Н. Кочубеем при построения функции Грина для уравнения дробной диффузии [101, 102, 353]. При этом по существу использовалось малоизвестное большинству математиков, но чрезвычайно полезное преобразование Станковича.

Отметим, что используемые при определениях функций Мейера и Фокса интегралы типа Меллина–Барнса были впервые введены, по-видимому, итальянским математиком Сальваторе Пинкерле в 1888 г. (работы Эрнеста Уильяма Барнса были выполнены в 1908–1910 гг., работы Ялмара Меллина — в 1895 и в 1909 гг.).

§ 1.2. Функциональные пространства

Приведём некоторые понятия и утверждения, которые нам потребуются для введения операторов преобразования и изучения их свойств. Эти сведения взяты нами из известного учебника [99], монографии [198], а также из [27, 28].

Как обычно, через $\mathbb{R}$ будем обозначать множество вещественных чисел, а через $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. Рассматриваемые

далее множества и функции мы, не оговаривая это отдельно, считаем измеримыми [1]), а функции почти всюду конечными.

1.2.1. Гёльдеровы функции, абсолютно непрерывные функции, класс AC^n. В этом пункте определим (см. [99, 198]) локальное и глобальное условия Гёльдера, а также классы функций AC и AC^n.

Пусть $\Omega = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, обозначает отрезок вещественной оси.

Определение 1.1. Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет на Ω *условию Гёльдера порядка* λ, если

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant A|x_1 - x_2|^\lambda \tag{1.18}$$

для всех x_1, $x_2 \in \Omega$, где A — постоянная, а λ — показатель Гёльдера.

Через $H^\lambda = H^\lambda(\Omega)$, обозначается класс всех (вообще говоря, комплекснозначных) функций, удовлетворяющих на Ω условию Гёльдера фиксированного порядка λ.

При $\lambda > 1$ класс H^λ содержит только постоянные $f(x) \equiv \mathrm{const}$:

$$|f'(x)| = \left| \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leqslant A \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_1 - x_2|^\lambda}{|x_1 - x_2|} | \leqslant A|x_1 - x_2|^{\lambda - 1} = 0\,.$$

Поэтому класс H^λ интересен лишь в случае $0 < \lambda \leqslant 1$.

Класс $H^1(\Omega)$ называют *липшицевым классом*. Приведем определение более широкого, чем $H^1(\Omega)$, класса $AC(\Omega)$ абсолютно непрерывных функций.

Определение 1.2. Функция $f(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на отрезке Ω, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков $[a_k, b_k] \subset \Omega$, $k = 1, 2, \ldots, n$, такой, что

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Класс всех таких функций обозначается $AC(\Omega)$.

---

[1]) Функция f называется измеримой, если она совпадает почти везде с пределом почти везде сходящейся последовательности кусочно-непрерывных функций.

Соответственно, множество (точек из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется измеримым, если измерима его характеристическая функция.

Известно (см. [99]), что класс $AC(\Omega)$ совпадает с классом первообразных от суммируемых по Лебегу функций, т.е.

$$f(x) \in AC(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = c + \int\limits_a^x \varphi(t)dt, \quad \int\limits_a^b |\varphi(t)|dt < \infty, \quad \varphi(t) = f'(t). \tag{1.19}$$

Поэтому абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду суммируемую производную $f'(x)$ (обратное неверно: из существования почти всюду суммируемой производной еще не вытекает абсолютная непрерывность).

Через $AC^n(\Omega)$, где $n = 1, 2, \ldots$, и Ω — отрезок, обозначим класс функций $f(x)$, непрерывно дифференцируемых на Ω до порядка $n-1$, причем $f^{(n-1)}(x) \in AC(\Omega)$.

Очевидно, что $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$ и класс $AC^n(\Omega)$ состоит из функций, представимых n-кратным интегралом Лебега с переменным верхним пределом от суммируемой функции с заменой постоянной в (1.19) на многочлен порядка $n-1$:

$$f(x) \in AC^n(\Omega) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k + \underbrace{\int\limits_a^x dt \ldots \int\limits_a^x dt \int\limits_a^x}_{n} \varphi(t)dt, \tag{1.20}$$

$$\int\limits_a^b |\varphi(t)|dt < \infty, \ c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \ \varphi(t) = f^{(n)}(t).$$

Пусть теперь Ω — ось или полуось. В этом случае при определении класса $H^\lambda(\Omega)$ дополнительно оговаривается «гёльдеровское» поведение на бесконечности. Именно, говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера в окрестности бесконечно удаленной точки, если

$$\left| f\left(\frac{1}{x_1}\right) - f\left(\frac{1}{x_2}\right) \right| \leqslant A \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|^\lambda \tag{1.21}$$

для всех x_1, x_2, достаточно больших по абсолютной величине.

Пусть Ω — ось или полуось. Через $H^\lambda = H^\lambda(\Omega)$ обозначается класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера (1.18) на любом конечном отрезке в Ω и условию (1.21) в окрестности бесконечно удаленной точки.

Совокупность двух условий (1.18) и (1.21), определяющих класс $H^\lambda(\Omega)$ для бесконечного интервала Ω, равносильна одному условию

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant A \frac{|x_1 - x_2|^\lambda}{(1+|x_1|)^\lambda (1+|x_2|)^\lambda}. \tag{1.22}$$

Условие (1.22) называется *глобальным условием Гёльдера*.

1.2.2. Класс L_p и его свойства. Введём класс суммируемых в p-й степени функций и приведём некоторые неравенства и теоремы, справедливые для функций из этого класса (см. [99, 198]).

Пусть теперь $\Omega = [a, b]$, где $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$.

Через $L_p = L_p(\Omega)$ обозначается множество всех измеримых на Ω функций $f(x)$, вообще говоря, комплекснозначных, для которых выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty, \qquad 1 \leqslant p < \infty.$$

Норма в $L_p(\Omega)$ определяется формулой

$$||f||_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Две функции, различающиеся на множестве меры нуль, не различаются как элементы пространства $L_p(\Omega)$.

Для функций $f \in L_p(\Omega)$ и $g \in L_p(\Omega)$ справедливо *неравенство Минковского*

$$||f + g||_{L_p(\Omega)} \leqslant ||f||_{L_p(\Omega)} + ||g||_{L_p(\Omega)},$$

с учетом которого $L_p(\Omega)$ является нормированным пространством.

Если же $f(x) \in L_p(\Omega)$, $g(x) \in L_{p'}(\Omega)$, где $p' = \dfrac{p}{p-1}$, то выполняется *неравенство Гёльдера*

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leqslant ||f||_{L_p(\Omega)} ||g||_{L_{p'}(\Omega)}, \qquad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Известно, что $L_p(\Omega)$ — полное пространство.

Нам также потребуется теорема, позволяющая менять порядок интегрирования в повторных интегралах.

Теорема 1.1 (Фубини). *Пусть* $\Omega_1 = [a, b]$, $\Omega_2 = [c, d]$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant c < d \leqslant \infty$, *и пусть* $f(x, y)$ *— определённая на* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *измеримая функция. Если сходится* (*абсолютно*) *хотя бы один из интегралов*

$$\int\limits_{\Omega_1} dx \int\limits_{\Omega_2} f(x, y) dy, \qquad \int\limits_{\Omega_2} dy \int\limits_{\Omega_1} f(x, y) dx, \qquad \iint\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx\, dy,$$

то они совпадают.

Имеет место следующий частный случай теоремы Фубини:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_a^x f(x, y) dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_y^b f(x, y) dx \tag{1.23}$$

в предположении, что абсолютно сходится один из этих интегралов. Равенство (1.23) называется *формулой Дирихле*.

Справедливо также обобщенное неравенство Минковского

$$\left(\int\limits_{\Omega_1} dx \left|\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)dy\right|^p\right)^{1/p} \leqslant \int\limits_{\Omega_2} dy \left(\int\limits_{\Omega_1} |f(x,y)|^p dx\right)^{1/p}.$$

1.2.3. Пространства C^m_{ev}, L^γ_p и S_{ev}. Весовые обобщённые функции. Пусть $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$. Рассматриваемые ниже множества и функции мы, не оговаривая это отдельно, считаем измеримыми, а функции — почти всюду конечными. Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство.

Рассмотрим часть пространства $\mathbb{R}^n$ вида

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ x_1 > 0,\ldots,x_n > 0\}$$

и Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i = 0$, $i = 1,\ldots,n$, $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+ = \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}^n_+$, где

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+ = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ x_1 \geqslant 0,\ldots,x_n \geqslant 0\}.$$

Имеем $\Omega_+ \subseteq \mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+ \subseteq \overline{\mathbb{R}}^n_+$. Мы рассмотрим множество $C^m(\Omega_+)$, состоящее из m раз дифференцируемых на on Ω_+ функций. Через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по x_i для любого $i = 1,\ldots,n$ непрерывно продолжаются на $x_i = 0$. Функции $f \in C^m(\overline{\Omega}_+)$ мы будем называть *чётными по переменным* x_i, $i = 1,\ldots,n$, если $\left.\dfrac{\partial^{2k+1} f}{\partial x_i^{2k+1}}\right|_{x=0} = 0$ для всех неотрицательных целых $k \leqslant m$. Класс $C^m_{\mathrm{ev}}(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций из $C^m(\overline{\Omega}_+)$, чётных по каждой из своих переменных x_i, $i = 1,\ldots,n$. Тогда (см. [69; 87, с. 21 и далее])

$$C^\infty_{\mathrm{ev}}(\overline{\Omega}_+) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m_{\mathrm{ev}}(\overline{\Omega}_+).$$

Положим $C^\infty_{\mathrm{ev}}(\overline{\mathbb{R}}_+) = C^\infty_{\mathrm{ev}}$.

Пусть $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\mathrm{ev}}(\overline{\Omega}_+)$ — множество функций $f \in C^\infty_{\mathrm{ev}}(\overline{\Omega}_+)$ с компактным носителем. Будем использовать обозначение $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\mathrm{ev}}(\overline{\Omega}_+) = \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$.

Будем использовать также часть пространства Шварца вида

$$S_{\mathrm{ev}} = S_{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}^n_+) = \left\{ f \in C^\infty_{\mathrm{ev}} : \sup_{x \in \mathbb{R}^n_+} \left|x^\alpha D^\beta f(x)\right| < \infty \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{Z}^n_+ \right\},$$

где $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n$ — целые неотрицательные числа, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $D^\beta = D^{\beta_1}_{x_1} \ldots D^{\beta_n}_{x_n}$, $D_{x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, состоит из положительных фиксированных чисел $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$.

Пространство $L_p^\gamma(\Omega_+)$, $1 \leqslant p < \infty$, состоит из измеримых на $\overline{\Omega}_+$ функций, чётных по каждой из своих переменных x_i, $i = 1, \ldots, n$, таких, что если $f \in L_p^\gamma(\Omega_+)$, то

$$\int\limits_{\Omega_+} |f(x)|^p x^\gamma dx < \infty, \qquad x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Для вещественного числа $p \geqslant 1$ величина $L_p^\gamma(\Omega_+)$ — норма функции $f \in L_p^\gamma(\Omega_+)$ — определяется формулой

$$||f||_{L_p^\gamma(\Omega_+)} = ||f||_{p,\gamma,\Omega_+} = \left(\int\limits_{\Omega_+} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}.$$

Будем использовать обозначения $L_p^\gamma = L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ и

$$||f||_{p,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}. \tag{1.24}$$

Известно, что пространство S_{ev} плотно в L_p^γ (см. [176]).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$ и $\mathrm{mes}_\gamma(\Omega)$ — *весовая мера* множества Ω:

$$\mathrm{mes}_\gamma(\Omega) = \int\limits_{\Omega} x^\gamma dx.$$

Для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на $\mathbb{R}_+^n$, введем обозначение

$$\mu_\gamma(f,t) = \mathrm{mes}_\gamma\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t\} = \int\limits_{\{x:\ |f(x)|>t\}^+} x^\gamma dx,$$

где $\{x : |f(x)| > t\}^+ = \{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t\}$. Функцию $\mu_\gamma = \mu_\gamma(f,t)$ будем называть *весовой функцией распределения* $|f(x)|$.

Поскольку

$$||f||_{p,\gamma}^p = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx \geqslant \int\limits_{\{x:|f(x)|>t\}^+} |f(x)|^p x^\gamma dx \geqslant t^p \mu_\gamma(f,t),$$

то справедливо неравенство

$$\mu_\gamma(f,t) \leqslant \frac{||f||_{p,\gamma}^p}{t^p}. \tag{1.25}$$

Пространство $L^\gamma_\infty(\mathbb{R}^n_+)=L^\gamma_\infty$ определяется как множество измеримых на $\mathbb{R}^n_+$, чётных по каждой из своих переменных функций $f(x)$, для которых конечна норма

$$||f||_{L^\gamma_\infty(\mathbb{R}^n_+)} = ||f||_{\infty,\gamma} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n_+}{}_\gamma |f(x)| = \inf_{a\in\mathbb{R}}\{\mu_\gamma(f,a)=0\}.$$

Теорема 1.2. *Нормы пространств L^γ_p и L^γ_∞ связаны равенством*

$$||f||_{\infty,\gamma} = \lim_{p\to\infty} ||f||_{p,\gamma}, \qquad f\in L^\gamma_\infty. \tag{1.26}$$

Доказательство. Если $||f||_{\infty,\gamma}=0$, то равенство (1.26) очевидно. Пусть $0<||f||_{\infty,\gamma}<\infty$. Введём обозначение $S^\gamma_f = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n_+}{}_\gamma |f(x)| = ||f||_{\infty,\gamma}$. Будем иметь

$$||f||_{p,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^\gamma dx\right)^{1/2} \leqslant (S^\gamma_f)^{1/2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^{p/2} x^\gamma dx\right)^{1/p}.$$

Тогда

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}||f||_{p,\gamma} \leqslant (S^\gamma_f)^{1/2}\overline{\lim_{p\to\infty}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^{p/2} x^\gamma dx\right)^{1/p} =$$

$$= (S^\gamma_f)^{1/2}\left[\overline{\lim_{p\to\infty}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^\gamma dx\right)^{1/p}\right]^{1/2} = (S^\gamma_f)^{1/2}\overline{\lim_{p\to\infty}}||f||^{1/2}_{p,\gamma},$$

откуда получим

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}||f||_{p,\gamma} \leqslant S^\gamma_f. \tag{1.27}$$

Из того, что $S^\gamma_f = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n_+}{}_\gamma |f(x)| = \inf_{a\in\mathbb{R}}\{\mu_\gamma(f,a)=0\}$, следует, что для любого $\varepsilon\in(0,S^\gamma_f]$ найдётся множество $E\subset\mathbb{R}^n_+$ такое, что $\operatorname{mes}_\gamma E<\infty$ и

$$|f(x)| > S^\gamma_f - \varepsilon, \quad \forall x\in E.$$

Получим

$$\left(\int\limits_E (S^\gamma_f-\varepsilon)^p x^\gamma dx\right)^{1/p} < \left(\int\limits_E |f(x)|^p x^\gamma dx\right)^{1/p} \leqslant ||f||_{p,\gamma},$$

откуда

$$(S^\gamma_f-\varepsilon)(\operatorname{mes}_\gamma E)^{1/p} \leqslant ||f||_{p,\gamma}$$

и

$$\varliminf_{p\to\infty} ||f||_{p,\gamma} \geqslant S_f^\gamma - \varepsilon,$$

или, в силу произвольности ε,

$$\varliminf_{p\to\infty} ||f||_{p,\gamma} \geqslant S_f^\gamma\,. \tag{1.28}$$

Из (1.27) и (1.28) следует

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_{p,\gamma} = S_f^\gamma.$$

Доказательство закончено.

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f:\Omega\mathbb{R}$. Если для некоторого p такого, что $1 \leqslant p \leqslant \infty$, выполняется

$$\int\limits_K |f|^p\,dx < +\infty,$$

т. е. $f \in L_p(K)$ для всех компактов $K \subset \Omega$, то f называется *локально p-интегрируемой*. Множество таких функций обозначается $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Через $L^\gamma_{p,\mathrm{loc}}(\Omega_+)$ будем обозначать множество функций u, определенных почти всюду на $\overline{\Omega}_+$ и таких, что $u\varphi \in L_p^\gamma(\Omega_+)$ для всех $\varphi\in\mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$. Пусть $\mathcal{D}'_+(\overline{\Omega}_+)$ — сопряжённое пространство к пространство $\mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$. Каждой функция $u \in L^\gamma_{1,\mathrm{loc}}(\Omega_+)$ сопоставляется *регулярная весовая обобщённая функция* $u \in \mathcal{D}'_+(\overline{\Omega}_+)$ действующая по правилу

$$(u,\varphi)_\gamma = \int\limits_{\Omega_+} u(x)\,\varphi(x)\,x^\gamma\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+).$$

Все остальные обобщённые функции $u\in\mathcal{D}'_+(\overline{\Omega}_+)$ будем называть *сингулярными весовыми обобщёнными функциями*.

Например, сингулярной весовой обобщённой функцией является функция δ_γ (см. [87]):

$$(\delta_\gamma,\varphi)_\gamma = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Для удобства будем также писать

$$(\delta_\gamma,\varphi)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \delta_\gamma(x)\varphi(x)x^\gamma dx = \varphi(0),$$

понимая такую запись как предел соответствующей последовательности.

Обозначим через $SL_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+)$=$SL_p^\gamma$ совокупность всех четных по каждой из своих переменных функций с конечной нормой

$$||f||_{SL_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+)} = ||f||_{SL_p^\gamma} = \sup_{0<t<\infty} t(\mu_\gamma(f,t))^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty.$$

§ 1.3. Основные интегральные преобразования

Основные определения интегральных преобразований и их свойства можно найти в монографиях и справочниках [7, 11–13, 65, 103, 148, 173, 189, 366, 388, 445].

Досадные ошибки при обращении некоторых интегральных преобразований, допущеные в [11–13], исправлены в [108, 109].

1.3.1. Преобразование Фурье, синус- и косинус-преобразования, преобразование Ханкеля. Подробнее о рассматриваемых преобразованиях см. [65, 256].

Преобразование Фурье, синус- и косинус-преобразования имеют соответственно вид

$$(Ff)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \exp(-ity) f(y)\, dy,$$

$$(F_{\mathrm{c}} f)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \cos(ty) f(y)\, dy,$$

$$(F_{\mathrm{s}} f)(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \sin(ty) f(y)\, dy.$$

При введённых нормировках все эти преобразования унитарны в $L_2(0,\infty)$ и совпадают с обратными.

Преобразование Ханкеля имеет вид

$$(H_\nu f)(t) = \frac{1}{t^\nu} \int\limits_0^\infty J_\nu(ty) f(y)\, dy$$

или

$$(H_\nu f)(\xi) = \int\limits_0^\infty j_{(\nu-1)/2}(x\xi)\, f(x) x^\nu\, dx.$$

В связи со свойством $j_\nu(0) = 1$ удобнее использовать преобразовние Ханкеля с функцией $j_{(\nu-1)/2}(x\xi)$ в ядре.

1.3.2. Пространство Киприянова. Функция φ называется *основной функцией*, если она бесконечно дифференцируема, чётна и удовлетворяет оценкам

$$|D^q \varphi(x)| \leqslant \frac{C_{qr}}{(1+x^2)^r}.$$

Здесь $q \geqslant 0$ и $r \geqslant 0$ — произвольные целые числа, C_{qr} — постоянные, не зависящие от x. Ясно, что к основным функциям можно применять оператор Бесселя сколько угодно раз (так как если φ — основная

функция, то и $\dfrac{\varphi'(x)}{x}$ тоже основная функция), причём выполняются оценки

$$|B_\gamma^q \varphi(x)| \leqslant \frac{A_{qr}}{(1+x^2)^r}.$$

при любых целых $r \geqslant 0$ и $q \geqslant 0$. Через S обозначим пространство всех основных функций.

Пусть $L_2\left(\mathbb{R}_+^1\right)$ — гильбертово пространство функций $f(y)$, $y > 0$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_2\left(\mathbb{R}_+^1\right)} = \left(\int\limits_0^\infty |f(y)|^2\, dy\right)^{1/2}, \tag{1.29}$$

а $L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^1\right)$, $\nu \geqslant -\dfrac{1}{2}$ — весовое гильбертово пространство функций $f(y)$, $y > 0$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^1\right)} = \left(\int\limits_0^\infty |f(y)|^2 y^{2\nu+1}\, dy\right)^{1/2}. \tag{1.30}$$

Хорошо известно, что преобразование Ханкеля (Фурье–Бесселя) унитарно в $L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^1\right)$ и справедливо равенство Парсеваля

$$\|H_\nu f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^1\right)} = \|f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^1\right)}. \tag{1.31}$$

Функциональное пространство $H_{\nu,+}^s\left(\mathbb{R}_+^1\right)$ (*пространство Киприянова*), $s \geqslant 0$, $\nu \geqslant -\dfrac{1}{2}$, введённое в [88], определяется как замыкание по норме

$$\|f\|_{H_{\nu,+}^s\left(\mathbb{R}_+^1\right)} = \frac{1}{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)}\|(1+\eta^2)^{s/2} H_\nu f\|_{L_{2,\nu}\left(\mathbb{R}_+^1\right)} \tag{1.32}$$

множества чётных по Киприянову функций $\overset{\circ}{C}{}_+^\infty\left(\overline{\mathbb{R}_+^1}\right)$ (см. [88]). Предположение о чётности здесь существенно, поскольку в противном случае норма (1.32) может быть равной бесконечности. Для пространств Киприянова возможны и другие эквивалентные определения нормы.

Определим *пространство Соболева* $\overset{\circ}{H}{}^s(0,R)$, $s \geqslant 0$, $0 < R < \infty$, как замыкание множества $\overset{\circ}{C}{}^\infty[0,R)$ по норме

$$\|f\|_{\overset{\circ}{H}{}^s(0,R)} = \|D^s f\|_{L_{2,\nu}(0,R)}.$$

1.3.3. Преобразование Меллина. Теорема Слейтер. При вычислении интеграла от произведения гипергеометрических функций будем пользоваться методом из [148, 188], основанном на применении преобразования Меллина. Преобразование Меллина и теорема Слейтер изучены [148, 188, 189].

Преобразованием Меллина функции $f(x)$ называется функция $g(s)$, которая определяется по формуле

$$g(s) = Mf(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx. \tag{1.33}$$

Определим также *свёртку Меллина*

$$(f_1 * f_2)(x) = \int\limits_0^\infty f_1\left(\frac{x}{y}\right) f_2(y)\, \frac{dy}{y}, \tag{1.34}$$

при этом оператор свёртки с ядром K действует в образах преобразования Меллина как умножение на мультипликатор

$$MAf(s) = \int\limits_0^\infty K\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\, \frac{dy}{y} = MK * f(s) = m_A(s) Mf(s), \tag{1.35}$$

$$m_A(s) = MK(s).$$

Для изучения операторов типа свёртки Меллина (1.35) одним из авторов в [208, 223] был предложен удобный алгебраический подход, который не содержит ничего нового, но позволяет быстро получать нужные оценки в удобной форме. Полезные факты будут собраны вместе как

Теорема 1.3. *Пусть оператор свёртки A действует по формуле* (1.35) *в образах преобразования Меллина как умножение на мультипликатор. Тогда справедливы следующие условия ограниченности для прямого и обратного операторов и формулы для их норм.*

а) *Для того чтобы оператор A допускал расширение до ограниченного оператора в $L_2(0,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left| m_A\left(i\xi + \frac{1}{2}\right)\right| = M_2 < \infty; \tag{1.36}$$

при этом $\|A\|_{L_2} = M_2$.

б) *Для того чтобы оператор A допускал расширение до ограниченного оператора в $L_p(0,\infty)$, $p > 1$, при дополнительном условии неотрицательности ядра K необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left| m_A\left(i\xi + \frac{1}{p}\right)\right| = M_p < \infty; \tag{1.37}$$

при этом $\|A\|_{L_p} = M_p$.

в) *Обратный оператор A^{-1} действует также по формуле* (1.35) *с мультипликатором $\dfrac{1}{m_A}$; для того чтобы он допускал расширение*

до ограниченного оператора в $L_2(0,\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}}\left|m_A\left(i\xi+\frac{1}{2}\right)\right|=m_2>0; \tag{1.38}$$

при этом $\|A^{-1}\|_{L_2}=\dfrac{1}{m_2}$.

г) *Пусть операторы* A, A^{-1} *определены и ограничены в* $L_2(0,\infty)$. *Они унитарны тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\left|m_A\left(i\xi+\frac{1}{2}\right)\right|=1 \tag{1.39}$$

для почти всех ξ.

Последняя теорема объединяет результаты многих математиков (Шур, Харди, Литлвуд, Пойа, Кобер, Михлин и Хёрмандер). Неизвестно, можно ли в формулировке п. б) при дополнительных условиях опустить требование неотрицательности ядра. В диапазоне $0<p<1$ в общем случае оценок нет, на что было нам указано В.И. Буренковым на примере операторов Харди. Впоследствии мы увидим, что операторы Харди тесно связаны с ОП Бушмана–Эрдейи. Первым математиком, использовавшим технику преобразования Меллина для оценки норм операторов Римана–Лиувилля в случае чисто мнимых степеней, был, насколько нам известно, Кобер [399]. Поэтому иногда п. б) приведённой теоремы называется леммой Кобера, что не совсем точно, так как он на самом деле доказал формулу для нормы из п. а) в случае знакопеременных функций.

Заметим, что преобразование Меллина является обобщённым преобразованием Фурье на полуоси по мере Хаара $\dfrac{dy}{y}$ [283]. Его роль велика в теории специальных функций: например, гамма-функция является преобразованием Меллина экспоненты. С преобразованием Меллина связан важный прорыв в 1970-х гг., когда в основном усилиями О.И. Маричева была полностью доказана и приспособлена для нужд вычисления интегралов известная теорема Л.Дж. Слейтер, позволяющая для большинства образов преобразований Меллина восстановить оригинал в явном виде по простому алгоритму через гипергеометрические функции [148, 188, 473]. Для строгого обоснования этого результата, который несложно получить формально по общей формуле обращения Меллина–Барнса через вычеты, потребовались достаточно сложные и тщательные выкладки, связанные с обработкой асимптотик гипергеометрических функций вблизи полюсов и на бесконечности, а такие асимптотики весьма разнообразны и разнородны. Эта работа была только начата исследованиями Люси Джоан Слейтер, а в основном проведена до конца Олегом Игоревичем Маричевым; данное обстоятельство часто недооценивается. Теорема Слейтер–Маричева позволила создать универсальный мощный метод вычисления интегралов, который впоследствии позволил решить многие задачи в теории

уравнений с частными производными, а также воплотился в передовые технологии символьного интегрирования пакета MATHEMATICA (О.И. Маричев работает в Wolfram Research).

Приведем теорему Слейтер (см. [148, 188, 473]). Пусть

$$\Gamma\left[\begin{array}{cccc} a_1, & a_2, & \ldots, & a_A \\ b_1, & b_2, & \ldots & b_B \end{array}\right] = \Gamma[(a),(b)] = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\ldots\Gamma(a_A)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\ldots\Gamma(b_B)}, \tag{1.40}$$

пустое произведение заменяется единицей,

$$\begin{gathered} (a)+s = a_1+s, a_2+s, \ldots, a_A+s, \\ (b)'-b_k = b_1-b_k, \ldots, b_{k-1}-b_k, b_{k+1}-b_k, \ldots, b_B-b_k, \end{gathered} \tag{1.41}$$

$$\Sigma_A(z) = \sum_{j=1}^{A} z^{a_j}\Gamma\left[\begin{array}{cc} (a)'-a_j, & (b)+a_j \\ (c)-a_j & (d)+a_j \end{array}\right] \times$$

$$\times\ {}_{B+C}F_{A+D-1}\left(\begin{array}{cc} (b)+a_j, & 1+a_j-(c); \\ 1+a_j-(a)', & (d)+a_j \end{array}\ (-1)^{C-A}z\right), \tag{1.42}$$

$$\Sigma_B(1/z) = \sum_{k=1}^{B} z^{-b_k}\Gamma\left[\begin{array}{cc} (b)'-b_k, & (a)+b_k \\ (d)-b_k & (c)+b_k \end{array}\right] \times$$

$$\times\ {}_{A+D}F_{B+C-1}\left(\begin{array}{cc} (a)+b_k, & 1+a_k-(d); \\ 1+b_k-(b)', & (c)+b_k \end{array}\ \frac{(-1)^{D-B}}{z}\right), \tag{1.43}$$

$$|\arg z| < \pi.$$

Если ряды сходятся, то функции $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ являются функциями гипергеометрического типа, причем переходят друг в друга, если поменять местами A-мерный комплексный вектор $(a) = a_1, a_2, \ldots, a_A$ с аналогичным B-мерным вектором (b), C-мерный вектор (c) с D-мерным (d), а z заменить на $1/z$. Эти функции аналитически зависят от комплексных параметров (a), (b), (c), (d) и переменной z. Если некоторые параметры векторов (a) (или (b)) совпадают между собой или отличаются на целое число, то векторы $(a)'-a_j$ ($(b)'-b_k$) содержат ненулевые или отрицательные целые компоненты и в силу свойства $\Gamma(-n)=\infty$, $n=0,1,2,\ldots$, у функций $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$, вообще говоря, могут возникнуть неопределенности типа $\infty-\infty$. В таких логарифмических случаях под значениями $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ будем понимать соответствующие пределы «регулярных» функций $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$, когда их параметры непрерывно стремятся к рассматриваемым особым значениям.

Следует отметить, что без ограничения $|\arg z| < \pi$ функции $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ в общем случае являются многозначными.

Теорема 1.4 (Слейтер). *Пусть функция $K^*(s)$ имеет вид*

$$K^*(s) = \Gamma \left[\begin{array}{ll} (a)+s & (b)-s \\ (c)+s, & (d)-s \end{array} \right], \tag{1.44}$$

где векторы (a), (b), (c), (d) имеют соответственно A, B, C, D компонент a_j, b_k, c_l, d_m. Тогда если выполняются следующие две группы условий:

$$-\mathrm{Re}\ a_j < \mathrm{Re}\ s < \mathrm{Re}\, b_k,\ j = 1, 2, \ldots, A,\ k = 1, 2, \ldots, B, \tag{1.45}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} A+B > C+D, & \\ A+B = C+D, & \mathrm{Re}\, s(A+D-B-C) < -\mathrm{Re}\, \nu, \\ A = C,\ B = D, & \mathrm{Re}\, \nu < 0, \end{array} \right. \tag{1.46}$$

где

$$\nu = \sum_{j=1}^{A} a_j + \sum_{k=1}^{B} b_k - \sum_{l=1}^{C} c_l - \sum_{m=1}^{D} d_m,$$

то для таких s справедливы равенства

$$K^*(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \int\limits_0^\infty x^{s-1} \Sigma_A(x) dx, & A+D > B+C; \\ \int\limits_0^1 x^{s-1} \Sigma_A(x) dx + & \\ \qquad + \int\limits_1^\infty x^{s-1} \Sigma_B(1/x) dx, & A+D = B+C; \\ \int\limits_0^\infty x^{s-1} \Sigma_B(1/x) dx, & A+D < B+C, \end{array} \right. \tag{1.47}$$

$\Sigma_A(1) = \Sigma_B(1)$, *если* $A+D = B+C$, $\mathrm{Re}\, \nu + C - A + 1 < 0$, $A \geqslant C$.

Следствие. При условиях

$$-\mathrm{Re}\ a_j < \mathrm{Re}\ s < \mathrm{Re}\, b_k,\ j = 1, 2, \ldots, A,\ k = 1, 2, \ldots, B,$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} A+B > C+D, & \\ A+B = C+D, & \mathrm{Re}\, s(A+D-B-C) < -\mathrm{Re}\, \nu, \\ A = C,\ B = D, & \mathrm{Re}\, \nu < 0 \end{array} \right.$$

прообразом функции

$$K^*(s) = \Gamma \left[\begin{array}{ll} (a)+s & (b)-s \\ (c)+s, & (d)-s \end{array} \right]$$

является функция $K(x)$ гипергеометрического типа, равная одному из следующих выражений:

$$K(x) = \begin{cases} \Sigma_A(x), & x > 0, A + D > B + C; \\ \Sigma_A(x), & 0 < x < 1, A + D = B + C; \\ \Sigma_B(1/x), & x > 1, A + D = B + C; \\ \Sigma_B(1/x), & x > 0, A + D < B + C, \end{cases} \tag{1.48}$$

$K(1) = \Sigma_A(1) - \Sigma_B(1)$, если $A + D = B + C$, $\operatorname{Re}\nu + C - A + 1 < 0$, $A \geqslant C$.

Замечание 1. Соответствующая теорема 1 из [473, § 4.8] содержит ряд неточностей:

1) вместо условий

$$\begin{cases} A + B > C + D, \\ A + B = C + D, & \operatorname{Re} s(A + D - B - C) < -\operatorname{Re}\nu, \\ A = C,\ B = D, & \operatorname{Re}\nu < 0, \end{cases}$$

указано лишь условие $A + B \geqslant C + D$;

2) вместо $\operatorname{Re}\nu + C - A + 1 < 0$ приводится условие $\operatorname{Re}\nu < 0$;

3) говорится, что при $A + D = B + C$ функции $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ аналитически продолжают друг друга, а это верно лишь в случае $A + B > C + D$.

Замечание 2. В случае $|A + D - B - C| > 1$, $A + B = C + D$ ограничение на $\operatorname{Re} s$, указанное в (1.46), может быть несколько ослаблено до условия

$$\operatorname{Re} s(A + D - B - C) < \frac{1}{2} - \operatorname{Re}\nu. \tag{1.49}$$

Замечание 3. Если для некоторых параметров выполняется одно или несколько условий $a_j = c_l + n$ (или $a_j = -d_m - n$) [$b_k = d_m + n$ (или $b_k = -c_l - n$)], где $n = 0, 1, 2, \ldots$, и при этом векторы $(a)' - a_j$, $(b)' - b_k$ не содержат целые компоненты, то из группы условий (1.45) можно устранить (или ослабить) условия, относящиеся к этим параметрам. При $a_j = c_l + n$ [$b_k = d_m + n$] соответствующие условия $\operatorname{Re}(s + a_j) > 0$ [$\operatorname{Re}(b_k - s) > 0$] устраняются, а при $(a)' - a_j$, $(b)' - b_k$ они заменяются на ослабленные требования $\operatorname{Re}(s + a_j) > -n - 1$ [$\operatorname{Re}(b_k - s) > -n - 1$]. Если же векторы $(a)' - a_j$, $(b)' - b_k$ содержат целые компоненты, то вопрос об ослаблении ограничений (1.45) требует специальных исследований.

Замечание 4. Ограничения (1.45), (1.46) обеспечивают по крайней мере условную сходимость интегралов (1.47) в 0, ∞ (и 1). Если эти ограничения нарушаются, то интегралы (1.47) как несобственные, вообще говоря, расходятся, однако в отдельных случаях они существуют в смысле главного значения.

§ 1.4. Операторы дробного интегро-дифференцирования

Операторы дробного интегро-дифференцирования изучены в [35, 167–169, 198, 368, 389–391]. Полезные свойства дробных интегралов и их обращений для мер приведены в [387].

Операторы дробного интегро-дифференцирования играют важную роль во многих современных разделах математики. Для теории специальных функций важность дробного интегро-дифференцирования отражена в названии известной статьи [396]: «***Все специальные функции получаются дробным интегро-дифференцированием элементарных функций***» (замечание проф. А.А. Килбаса: кроме функций Фокса!)

1.4.1. Дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля и Лиувилля.

Определение 1.3. Пусть $\varphi(x) \in L_1(a,b)$X. Тогда интегралы

$$(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \qquad x > a, \tag{1.50}$$

и

$$(I^{\alpha}_{b-}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \qquad x < b, \tag{1.51}$$

где $\alpha > 0$, называются соответственно *левосторонним* (1.50) *и правосторонним* (1.51) *дробными интегралами Римана–Лиувилля* порядка α $(0 < \alpha)$.

Для функции $f(x)$, $x \in [a,b]$ каждое из выражений

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{1.52}$$

$$(D^{\alpha}_{b-}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \tag{1.53}$$

где $n = [\alpha] + 1$, $\alpha > 0$, называется *дробной производной Римана–Лиувилля порядка* α, соответственно *левосторонней и правосторонней*.

Определение 1.4. *Операторы Лиувилля* определяются при $\alpha > 0$ по формулам:

$$I^{\alpha}_{0+,x}f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)d\,t, \tag{1.54}$$

$$I^{\alpha}_{-,x}f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)d\,t.$$

Для остальных значений α они определяются при помощи аналитического продолжения.

Для функции $f(x)$, $x \in [a,b]$ каждое из выражений

$$(D^{\alpha}_{0+,x}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{1.55}$$

$$(D^{\alpha}_{-,x}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_x^{\infty} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \tag{1.56}$$

где $n = [\alpha]+1$, $\alpha > 0$, называется *дробной производной Лиувилля порядка* α, соответственно *левосторонней* и *правосторонней*.

Хорошо известно, что обычное дифференцирование $\frac{d}{dx}$ и интегрирование $\int\limits_a^x \ldots dt$ являются взаимно обратными операциями, если дифференцирование применяется слева, т.е. $\frac{d}{dx}\int\limits_a^x \varphi(t)dt = \varphi(x)$. Однако, вообще говоря, $\int\limits_a^x \varphi'(t)dt \neq \varphi(x)$ (так как добавляется постоянная $-\varphi(a)$). Точно так же $\left(\frac{d}{dx}\right)^n I^n_{a+}\varphi = \varphi$, но $I^n_{a+}\varphi^{(n)} \neq \varphi$. А именно, $I^n_{a+}\varphi^{(n)}$ отличается от φ на многочлен порядка $n-1$. Подобным же образом для дробного дифференцирования всегда будет $D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\varphi = \varphi$, но $I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}\varphi$ не всегда совпадает с $\varphi(x)$ (так как появляются функции $(x-a)^{\alpha-k}$, $k = 1,2,\ldots,[\alpha]-1$, играющие роль многочленов для дробного дифференцирования).

Для дальнейших рассуждений нам будет удобно ввести следующий класс функций.

Через $I^{\alpha}_{a+}(L_p)$, $\alpha > 0$, обозначим класс функций $f(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом порядка α от суммируемой функции:

$$f \in I^{\alpha}_{a+}(L_p), \quad \alpha > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = I^{\alpha}_{a+}\varphi, \quad \varphi \in L_p(a,b), \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Описание класса $I^{\alpha}_{a+}(L_1)$ дает следующая теорема.

Теорема 1.5. *Для того чтобы* $f(x) \in I^{\alpha}_{a+}(L_1)$, $\alpha > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_{n-\alpha}(x) = I^{n-\alpha}_{a+}f \in AC^n([a,b]), \tag{1.57}$$

где $n = [\alpha]+1$, и

$$f^{(k)}_{n-\alpha}(a) = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1. \tag{1.58}$$

Отметим, что представимость функции $f(x)$ дробным интегралом порядка α и существование у $f(x)$ дробной производной этого порядка — не одно и то же. Предположение «дробная производная $D^{\alpha}_{a+}f$

существует почти всюду и суммируема» недостаточно для построения удовлетворительной теории, т. е. недостаточно для представимости $f(x)$ в виде дробного интеграла порядка α. Нужно вложить в это предположение более сильный смысл.

Определение 1.5. Пусть $\alpha > 0$. Будем говорить, что функция $f(x) \in L_1(a,b)$ *имеет суммируемую дробную производную* $D^{\alpha}_{a+}f$, если $I^{n-\alpha}_{a+}f \in AC^n([a,b])$, $n = [\alpha] + 1$.

Замечание. Если $D^{\alpha}_{a+}f = \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha}_{a+}f$ существует в обычном смысле, т. е. $I^{n-\alpha}_{a+}f$ дифференцируема до порядка n в каждой точке, то $f(x)$ имеет производную $D^{\alpha}_{a+}f$ в смысле определения 1.5.

Следующая теорема дает условия, при которых дробное интегрирование и дифференцирование являются взаимно обратными операциями.

Теорема 1.6. *Пусть* $\alpha > 0$. *Тогда равенство*

$$D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\varphi = \varphi(x) \tag{1.59}$$

выполняется для любой суммируемой функции $\varphi(x)$, *а равенство*

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f(x) \tag{1.60}$$

— для функции

$$f(x) \in I^{\alpha}_{a+}(L_1). \tag{1.61}$$

Если вместо (1.61) *предположить, что функция* $f(x) \in L_1(a,b)$ *имеет суммируемую производную* $D^{\alpha}_{a+}f$ (*в смысле определения* 1.5), *то* (1.59), *вообще говоря, неверно и заменяется формулой*

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}\, f^{(n-k-1)}_{n-\alpha}(a), \tag{1.62}$$

где $n = [\alpha] + 1$ *и* $f_{n-\alpha}(x) = I^{n-\alpha}_{a+}f$. *В частности, при* $0 < \alpha < 1$

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}. \tag{1.63}$$

1.4.2. Дробные интегралы и производные Эрдейи–Кобера. *Операторы Эрдейи–Кобера* определяются при $\alpha > 0$ по формулам:

$$I^{\alpha}_{0+;\,2,\,y}f = \frac{2}{\Gamma(\alpha)}x^{-2(\alpha+y)}\int_0^x (x^2-t^2)^{\alpha-1}t^{2y+1}f(t)\,dt, \tag{1.64}$$

$$I^{\alpha}_{-;\,2,\,y}f = \frac{2}{\Gamma(\alpha)}x^{2y}\int_x^{\infty} (t^2-x^2)^{\alpha-1}t^{2(1-\alpha-y)-1}f(t)\,dt, \tag{1.65}$$

а при значениях $\alpha > -n$, $n \in \mathbb{N}$ по формулам:

$$I^{\alpha}_{0+;\,2,y} f = x^{-2(\alpha+y)} \left(\frac{d}{dx^2}\right)^n x^{2(\alpha+y+n)} I^{\alpha+n}_{0+;\,2,\,y} f \tag{1.66}$$

$$I^{\alpha}_{-;\,2,y} f = x^{2y} \left(-\frac{d}{dx^2}\right)^n x^{2(\alpha-y)} I^{\alpha+n}_{-;\,2,\,y-n} f. \tag{1.67}$$

Для остальных значений α они определяются при помощи аналитического продолжения, аналогично операторам дробного интегро-дифференцирования Лиувилля.

Отметим, что в классической монографии [198] случаи выбранных нами пределов интегрирования $0, \infty$ не рассматриваются. В последующей английской версии [458] эти особые случаи пределов допускаются, но определения содержат неточности, в частности, приводящие к комплексным величинам под знаком интеграла.

1.4.3. Дробный интеграл по произвольной функции. *Дробный интеграл по произвольной функции* $g(x)$ имеет вид

$$I^{\alpha}_{0+,g} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (g(x) - g(t))^{\alpha-1} g'(t) f(t) dt, \tag{1.68}$$

или

$$I^{\alpha}_{-,g} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^{\infty} (g(t) - g(x))^{\alpha-1} g'(t) f(t) dt;$$

во всех случаях предполагается, что $\operatorname{Re}\alpha > 0$, на оставшиеся значения α формулы также без труда продолжаются [198]. При этом обычные дробные интегралы (1.54) получаются при выборе в (1.68) $g(x) = x$, Эрдейи–Кобера (1.64) — при выборе $g(x) = x^2$, Адамара — при $g(x) = \ln x$.

Связь с ОП проявляется в том, что, как будет видно из (2.8)–(2.9), ОП СПД с точностью до множителей как раз и являются операторами Эрдейи–Кобера, т. е. дробными степенями

$$\left(\frac{d}{dg(x)}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{d}{2xdx}\right)^{-\alpha}, \quad g(x) = x^2.$$

Поэтому основные свойства этих ОП можно получить из теории операторов дробного интегро-дифференцирования, а не изобретать заново, что нередко и делалось. А.М. Джрбашян обратил наше внимание на тот факт, что операторы дробного интегрирования по функции (1.68) являются частными случаями несколько более общих операторов, которые были введены и изучались его отцом М.М. Джрбашяном [198].

Глава 2

КЛАССИФИКАЦИЯ И СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 2.1. Операторы преобразования, связанные с операторами Бесселя и второй производной

2.1.1. Основные классы дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. В книге принята следующая терминология для названий дифференциальных уравнений с операторами Бесселя

$$B_\nu u(x) = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{du}{dx}, \tag{2.1}$$

в основном введённая И.А. Киприяновым [87].

B-эллиптическим называется уравнение с операторами Бесселя вида

$$\sum_{k=1}^{n} B_{\nu,x_k} u(x_1,\dots,x_n) = f(t,x), \tag{2.2}$$

иногда такое уравнение называется уравнением Лапласа–Бесселя.

B-гиперболическим называется уравнение с операторами Бесселя вида

$$B_{\nu,t} u(t,x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} B_{\nu,x_k} u(t,x_1,\dots,x_n) + f(t,x), \tag{2.3}$$

в случае одной пространственной переменной получаем уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу.

B-параболическим называется уравнение с операторами Бесселя вида

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x_1,\dots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} B_{\nu,x_k} u(t,x_1,\dots,x_n) + f(t,x). \tag{2.4}$$

Те же названия сохраняем для неполных уравнений, в которых один или несколько операторов Бесселя сводятся ко вторым производным, а также к уравнениям добавляются спектральные параметры.

2.1.2. Операторы преобразования Сонина и Пуассона. Определим самый известный класс ОП, сплетающих дифференциальный оператор Бесселя со второй производной:

$$T\left(B_\nu\right) f = \left(D^2\right) T f, \quad B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x} D, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \nu \in \mathbb{C}. \tag{2.5}$$

Одним из способов построения ОП является установление соответствий между решениями дифференциальных уравнений. Решениями уравнения вида $B_\nu f = \lambda f$ являются функции Бесселя, а уравнения $D^2 f = \lambda f$ — тригонометрические функции или экспонента. Поэтому прообразами ОП вида (2.5) были формулы Пуассона и Сонина:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) 2^{\nu-1} x^\nu} \int\limits_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{\nu-1/2} \cos t\, dt, \quad \operatorname{Re}\nu > \frac{1}{2}, \tag{2.6}$$

$$J_\nu(x) = \frac{2^{\nu+1} x^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \int\limits_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\nu-1/2} \sin t\, dt, \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

Интеграл (2.6) начал изучать Эйлер в 1769 г. Затем Парсеваль вычислил интеграл при $\nu = 0$ в 1805 г., для целых ν формулу (2.6) получил Плана в 1821 г. Для полуцелых ν ее вывел Пуассон в 1823 г.; его метод применим и для целых ν, но он этого не заметил. Далее этот интеграл встречался в работах Куммера, Лоббато и Дюамеля. Окончательно формулу (2.6), которую мы приписываем Пуассону, установил в общем случае Ломмель в 1868 г., а Сонин вывел формулу (2.7) в 1880 г.

Определение 2.1. *Оператором преобразования Пуассона* называется выражение

$$\mathcal{P}_\nu f = \frac{1}{\Gamma(\nu+1) 2^\nu x^{2\nu}} \int\limits_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{\nu-1/2} f(t)\, dt, \qquad \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}. \tag{2.8}$$

Оператором преобразования Сонина называется выражение

$$\mathcal{S}_\nu f = \frac{2^{\nu+1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\nu-1/2} t^{2\nu+1} f(t)\, dt, \qquad \operatorname{Re}\nu < \frac{1}{2}. \tag{2.9}$$

Операторы (2.8)–(2.9) действуют как ОП по формулам

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \tag{2.10}$$

Их можно доопределить на все значения $\nu \in \mathbb{C}$.

Идею изучения операторов, подобных (2.8)–(2.9), высказывал еще Лиувилль, их реальное использование в контексте теории функций Бесселя начал Н.Я. Сонин. Как ОП эти операторы впервые были введены Ж. Дельсартом, а затем на основе его идей их изучение продолжилось в работах Дельсарта: самостоятельных и совместных

с Ж.Л. Лионсом. Поэтому мы будем называть выражения (2.8)–(2.9) ОП Сонина–Пуассона–Дельсарта (СПД). Об операторах СПД см. также статью Б.М. Левитана [126].

Не будет преувеличением сказать, что операторы СПД (2.8)–(2.9) являются самыми знаменитыми объектами всей теории ОП; их изучению, приложениям и обобщениям посвящены сотни работ.

Сделаем важное для дальнейшего уточнение. С точки зрения приложений к исследуемым в данной работе решениям дифференциальных уравнений в частных производных с особенностями в коэффициентах, указанные операторы СПД обладают рядом недостатков, которые не позволяют применять их во многих важных случаях. К этим недостаткам относится следующие: во-первых, введённые выше операторы СПД являются ОП лишь на множестве чётных функций, что исключает возможность рассмотрения функций с особенностями в нуле; во-вторых, они не сохраняют финитность и быстроубываемость на бесконечности функций; в-третьих, они изменяют гладкость преобразуемых функций. На этот факт впервые обратил внимание Лионс [417].

Таким образом, возникает необходимость введения и изучения других классов ОП для дифференциальных уравнений, содержащих операторы Бесселя.

Полагая $\gamma = 2\nu + 1$ в (2.8), получим, что оператор Пуассона $\mathcal{P}_x^\gamma$, действующий по переменной x, можно переписать в виде

$$\mathcal{P}_x^\gamma G(x) = 2C(\gamma)\frac{1}{x^{\gamma-1}}\int\limits_0^x G(z)(x^2 - z^2)^{\gamma/2-1}\,dz, \qquad \gamma > 0, \tag{2.11}$$

где

$$C(\gamma) = \left(\int\limits_0^\pi \sin^{\gamma-1}\varphi d\varphi\right)^{-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Производя в (2.11) замену переменной $z = x\alpha$, получим

$$\mathcal{P}_x^\gamma G(x) = 2C(\gamma)\int\limits_0^1 G(x\alpha)(1-\alpha^2)^{\gamma/2-1}\,d\alpha, \qquad \gamma > 0. \tag{2.12}$$

Теорема 2.1. *Левый обратный оператор к оператору Пуассона* (2.12) *при* $\gamma > 0$ *для любой суммируемой функции* $H(x)$ *имеет вид*

$$(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1}H(x) = \frac{2\sqrt{\pi}\,x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{\gamma}{2}\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{d}{2xdx}\right)^n\int\limits_0^x H(z)(x^2-z^2)^{n-\gamma/2-1}z^{2-\gamma}dz, \quad n = \left[\frac{\gamma}{2}\right]+1. \tag{2.13}$$

Доказательство. Найдём оператор $(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1}$ такой, что $(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1}H(x)=H(x)$, где $H(x)=\mathcal{P}_x^\gamma G(x)$.

Заменой $z^2=w$, $x^2=\xi$ оператор $\mathcal{P}_x^\gamma$ сводится к дробному интегралу Римана–Лиувилля вида

$$(I_{a+}^\alpha\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,\qquad x>a.$$

Имеем

$$\mathcal{P}_x^\gamma G(x)=\frac{C(\gamma)}{\xi^{(\gamma-1)/2}}\int\limits_0^\xi\frac{G(\sqrt{w}\,)}{\sqrt{w}}(\xi-w)^{\gamma/2-1}\,dz=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)C(\gamma)}{\xi^{(\gamma-1)/2}}\,(I_{0+}^{\gamma/2})_\xi\left(\frac{G(\sqrt{\xi}\,)}{\sqrt{\xi}}\right)=H(\sqrt{\xi}\,).$$

Тогда

$$(I_{0+}^{\gamma/2})_\xi\left(\frac{G(\sqrt{\xi}\,)}{\sqrt{\xi}}\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)C(\gamma)}\,\xi^{(1-\gamma)/2}H(\sqrt{\xi}\,).$$

Используя формулу (1.52), получим

$$G(\sqrt{\xi}\,)=\frac{\sqrt{\xi}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)C(\gamma)}(D_{0+}^{\gamma/2})_\xi\left(\xi^{(1-\gamma)/2}H(\sqrt{\xi}\,)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{\xi}}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)C(\gamma)\,\Gamma\left(n-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^n\int\limits_0^\xi t^{(1-\gamma)/2}H(\sqrt{t}\,)(\xi-t)^{n-\gamma/2-1}dt,$$

$$n=\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1.$$

Возвращаясь к x по формуле $\xi=x^2$ и производя замену $t=z^2$, запишем

$$G(x)=\frac{2\sqrt{\pi}\,x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^n\int\limits_0^x H(z)(x^2-z^2)^{n-\gamma/2-1}z^{2-\gamma}dz.$$

$$n=\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1.$$

Доказательство закончено.

Замечание. При $0 < \gamma < 1$ имеем $n = 1$, так что левый обратный оператор к оператору Пуассона любой суммируемой функции $H(x)$ упрощается и принимает вид

$$(\mathcal{P}_x^\gamma)^{-1} H(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)} \frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{H(z)}{(x^2-z^2)^{\gamma/2}} z^{2-\gamma} dz, \ -\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}. \tag{2.14}$$

2.1.3. Оператор спуска по параметру для оператора Бесселя. В этом пункте рассмотрим оператор преобразования, который сплетает операторы Бесселя с разными индексами.

Теорема 2.2. *При $k - \beta > 2$, $\beta > 0$ оператор преобразования I_β^k такой, что*

$$I_\beta^k(B_\beta f(t)) = B_k I_\beta^k f(t),$$
$$I_\beta^k[1] = 1,$$

имеет вид

$$I_\beta^k f(t) = \frac{2t^{1-k}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)} \int\limits_0^t (t^2-r^2)^{(k-\beta)/2-1} r^\beta f(r) dr. \tag{2.15}$$

Доказательство. Используя форму записи оператора Бесселя вида $(B_\beta)_t = \frac{1}{t^\beta}\frac{d}{dt}t^\beta\frac{d}{dt}$ и интегрируя по частям, получим

$$I(B_\beta f(t)) = \frac{2t^{1-k}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)} \int\limits_0^t (t^2-r^2)^{(k-\beta)/2-1} r^\beta (B_\beta)_r f(r) dr =$$

$$= \frac{2t^{1-k}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)} \int\limits_0^t (t^2-r^2)^{(k-\beta)/2-1} \frac{d}{dr} r^\beta \frac{d}{dr} f(r) dr =$$

$$= \frac{2(k-\beta-2)t^{1-k}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)} \int\limits_0^t (t^2-r^2)^{(k-\beta)/2-2} r^{\beta+1} \frac{d}{dr} f(r) dr =$$

$$= \frac{2(k-\beta-2)t^{1-k}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)} \int\limits_0^t (t^2-r^2)^{(k-\beta)/2-3} [(k-3)r^2 -$$

$$- (\beta+1)t^2] r^\beta f(r) dr. \tag{2.16}$$

С другой стороны,

$$B_k If(t) = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}(B_k)_t\left(t^{1-k}\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{(k-\beta)/2-1} r^\beta f(r)dr\right) =$$

$$= \frac{2\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}\frac{1}{t^k}\frac{d}{dt}t^k\frac{d}{dt}\left(t^{1-k}\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{(k-\beta)/2-1} r^\beta f(r)dr\right) =$$

$$= \frac{2\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{t^k}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{(k-\beta)/2-2}[(k-1)r^2-(\beta+1)t^2]r^\beta f(r)dr =$$

$$= \frac{2(k-\beta-2)\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}\frac{t}{t^k}\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{(k-\beta)/2-3}\times$$

$$\times[(k-3)r^2-(\beta+1)t^2]r^\beta f(r)dr. \quad (2.17)$$

Из (2.16) и (2.17) получаем $I_\beta^k(B_\beta f(t)) = B_k I_\beta^k f(t)$.

Используя бета-функцию Эйлера, покажем, что $I_\beta^k[1] = 1$:

$$I_\beta^k[1] = \frac{2t^{1-k}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{(k-\beta)/2-1} r^\beta dr = \{r = t\rho\} =$$

$$= \frac{2\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}\int\limits_0^1 (1-\rho^2)^{(k-\beta)/2-1}\rho^\beta d\rho =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}\int\limits_0^1 (1-\rho^2)^{(k-\beta)/2-1}(\rho^2)^{(\beta-1)/2}d(\rho^2) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}B\left(\frac{k-\beta}{2},\frac{\beta+1}{2}\right) = 1.$$

Доказательство закончено.

Замечание. Пусть $H = H(x,t)$ — функция переменных $t > 0$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и пусть

$$H(x,0) = f(x).$$

Тогда для оператора сдвига по параметру справедливо равенство

$$(I_\beta^k)_t H(x,t))_{t=0} = f(x).$$

Доказательство. Производя в интеграле (2.15) замену $r = tz$, получим

$$(I_\beta^k H(x,t))_{t=0} =$$

$$= \left(\frac{2t^{1-k}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)} \int\limits_0^t (t^2 - r^2)^{(k-\beta)/2-1} r^\beta H(x,r)dr \right)\Bigg|_{t=0} = \{r = tz\} =$$

$$= \left(\frac{2\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)} \int\limits_0^1 (1 - z^2)^{(k-\beta)/2-1} z^\beta H(x,tz)dz \right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= H(x,0) = f(x),$$

что и требовалось доказать.

§ 2.2. Обобщённый сдвиг и его свойства

Определённой разновидностью операторов преобразования являются операторы обобщённого сдвига. Наличие обобщённого сдвига позволяет обобщать прежние теории, основанные на обычном сдвиге. Так возникли теория обобщённых почти периодических функций, разложения по обобщённым рядам Тейлора, обобщённая свёртка и её приложения.

2.2.1. Операторы обобщённого сдвига, выраженные через степенные ряды, и задача Коши. Рассмотрим путь обобщения оператора сдвига, который был предложен Ж. Дельсартом в [334–337] (см. также [153, 431]).

Если f — функция, определённая на вещественной оси, то оператор сдвига T_x^y, $x, y \in \mathbb{R}$, определяется равенством

$$T_x^y f(x) = f(x+y). \tag{2.18}$$

Пусть теперь $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ряд Тейлора в точке h функции $f(t)$ вещественной переменной t имеет вид

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(h)}{n!}(t-h)^n. \tag{2.19}$$

Подход Ж. Дельсарта заключался в обобщении разложения функции в ряд Тейлора. А именно, он начал с того, что рассмотрел разложение функции f в ряд (2.19) при $t = x + y$, $h = x$:

$$T_x^y f(x) = f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x), \tag{2.20}$$

т. е. разложение оператора сдвига T^y по степеням оператора дифференцирования $\dfrac{d}{dx}$. Для сдвига (2.18), опираясь на (2.20), Дельсарт сопоставлял функцию

$$\varphi_n(y) = \frac{y^n}{n!}$$

дифференциальному оператору

$$L_y = \frac{d}{dy}$$

в некотором специальном смысле. А именно, он исходил из того, что решение $\varphi(y, \lambda)$, $y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, задачи

$$L_y \varphi = \lambda \varphi, \qquad \varphi(0, \lambda) = 1, \qquad \varphi_y(0, \lambda) = 0, \tag{2.21}$$

есть

$$\varphi(y, \lambda) = e^{\lambda y}.$$

Для каждого вещественного y функция $\varphi(y, \lambda) = e^{\lambda y}$ является целой функцией переменной λ, причём

$$\varphi(y, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y) \lambda^n, \ \text{ или } \ e^{\lambda y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \lambda^n, \ \text{ где } \ \varphi_n(y) = \frac{y^n}{n!}. \tag{2.22}$$

Функции $\varphi_n(y) = \dfrac{y^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ удовлетворяют условиям

$$L_y \varphi_0 = 0, \qquad \varphi_0(0) = 1,$$
$$L_y \varphi_n = \varphi_{n-1}, \qquad \varphi_n(0) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

С учетом (2.21) Дельсарт обобщает формулу Тейлора (2.20) следующим образом:

$$T_x^y f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y) (L_x)^n f(x), \tag{2.23}$$

где L_x — некоторый оператор. Операторы T_x^y, определённые равенством (2.23), Дельсарт назвал *операторами обобщённого сдвига* и установил для них ряд свойств.

Очевидно, что поскольку $L_y \varphi_0 = 0$ и $L_y \varphi_n = \varphi_{n-1}$, то, формально применяя L_y к (2.23), получим

$$L_y T_x^y f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_y \varphi_n(y) (L_x)^n f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n-1}(y) (L_x)^n f(x) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y) (L_x)^{n+1} f(x) = L_x T_x^y f(x),$$

т. е. $T_x^y f(x)$ формально удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L_x T_x^y f(x) = L_y T_x^y f(x) \tag{2.24}$$

при начальных условиях

$$T_x^y f(x)|_{y=0} = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial y} T_x^y f(x)\bigg|_{y=0} = 0. \tag{2.25}$$

Кроме того, если $\varphi(y,\lambda)$ — собственная функция оператора L_y, удовлетворяющая (2.21), то

$$T_x^y \varphi(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda). \tag{2.26}$$

Это следует из того, что

$$T_x^y \varphi(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y)(L_x)^n \varphi(x,\lambda) =$$

$$= \varphi(x,\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y)\lambda^n = \varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda).$$

2.2.2. Оператор обобщённого сдвига, связанный с оператором Бесселя. В [334] Дельсарт изучает оператор обобщённого сдвига в том случае, когда L_y — оператор Бесселя вида

$$L_y = (B_\gamma)_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{y}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \gamma > 0. \tag{2.27}$$

Такой обобщённый сдвиг также подробно рассматривается в статье [126].

Получим представление обобщённого сдвига (2.23) для оператора Бесселя. В этом случае при $\lambda = -\xi$ задача (2.21) примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\xi\varphi, \qquad \varphi(0,\xi) = 1, \qquad \varphi_y(0,\xi) = 0, \tag{2.28}$$

и ее единственное решение при $y > 0$ есть (см. [126])

$$\varphi(y,\xi) = j_{(\gamma-1)/2}(\sqrt{\xi}\, y),$$

где функция j_ν определяется формулой (см. [87, с. 10; 126; 334])

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\, J_\nu(x), \tag{2.29}$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода. Для функции $j_{(\gamma-1)/2}(\sqrt{\xi}\, y)$ справедливо разложение

$$j_{(\gamma-1)/2}(\sqrt{\xi}\, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\gamma+1}{2}+n\right)}\, \xi^n \left(\frac{y}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y)\, \lambda^n,$$

где

$$\varphi_n(y) = \frac{1}{n!}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+n\right)}\left(\frac{y}{2}\right)^{2n}.$$

Тогда разложение (2.20) для оператора обобщённого сдвига, связанного с оператором Бесселя, будет иметь вид

$$T_x^y f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}+n\right)}\left(\frac{y}{2}\right)^{2n}(B_\gamma)^n f(x), \tag{2.30}$$

Подставляя теперь оператор (2.27) в (2.24)–(2.25), получим задачу Коши вида

$$(B_\gamma)_x T_x^y f(x) = (B_\gamma)_y T_x^y f(x), \tag{2.31}$$

$$T_x^y f(x)|_{y=0} = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial y}T_x^y f(x)\bigg|_{y=0} = 0. \tag{2.32}$$

Задача (2.31)–(2.32) решается методом Римана. Если $f \in C^2(0,\infty)$, то единственное решение задачи (2.31)–(2.32) даётся формулой (см. [126])

$$T_x^y f(x) = C(\gamma)\int_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi})\sin^{\gamma-1}\varphi d\varphi, \tag{2.33}$$

$$C(\gamma) = \left(\int_0^\pi \sin^{\gamma-1}\varphi d\varphi\right)^{-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Отметим, что поскольку $T_x^y f$ зависит не только от x и y, но ещё и от γ, то наряду с обозначением $T_x^y f$ ниже будем использовать также обозначение ${}^\gamma T_x^y f$. В силу второго условия в (2.32) будем рассматривать обобщённый сдвиг $T_x^y f$ только таких функций f, для которых $\frac{\partial}{\partial y}f(y)\Big|_{y=0} = 0$. Исходя из этого, продолжение рассматриваемых функций на значения $y < 0$ будем осуществлять чётным образом.

Свойства обобщённого сдвига, связанного с оператором Бесселя

Приведём сначала 10 элементарных свойств. Они доказаны в [126], здесь мы даём их без доказательств.

Свойство 1. Линейность и однородность:

$${}^\gamma T_x^y[af(x)+bg(x)] = a\,{}^\gamma T_x^y f(x) + b\,{}^\gamma T^y g(x), \qquad a,b \in \mathbb{R}.$$

Свойство 2. Неотрицательность: ${}^\gamma T_x^y f(x) \geqslant 0$, если $f(x) \geqslant 0$.
Свойство 3. ${}^\gamma T_x^y[1] = 1$.
Свойство 4. ${}^\gamma T_x^0 f(x) = f(x)$.

Свойство 5. Если $f(x) \equiv 0$ для $x \geqslant a$, то ${}^{\gamma}T_x^y f(x) \equiv 0$ для $|x-y| \geqslant a$.

Свойство 6. Если последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ сходится равномерно в каждом конечном интервале к $f(x)$, то последовательность функций от двух переменных ${}^{\gamma}T_x^y f_n(x)$ сходится равномерно в каждой конечной области к функции ${}^{\gamma}T_x^y f(x)$.

Свойство 7. Оператор ${}^{\gamma}T_x^y$ ограничен:

$$|\,{}^{\gamma}T_x^y f(x)| \leqslant {}^{\gamma}T_x^y |f(x)| \leqslant \sup_{x \geqslant 0} |f(x)|.$$

Свойство 8. Коммутативность операторов ${}^{\gamma}T_x^y$:

$${}^{\gamma}T_x^y\, {}^{\gamma}T_x^z f(x) = {}^{\gamma}T_x^z\, {}^{\gamma}T_x^y f(x).$$

Свойство 9. Ассоциативность операторов ${}^{\gamma}T_x^y$:

$${}^{\gamma}T_y^z\, {}^{\gamma}T_x^y f(x) = {}^{\gamma}T_x^z\, {}^{\gamma}T_x^y f(x).$$

Свойство 10. ${}^{\gamma}T_x^y f(x) = {}^{\gamma}T_y^x f(y)$.

Из равенства

$$(B_\gamma)_x j_{(\gamma-1)/2}(x\xi) = -\xi^2 j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)$$

следует, что $j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)$ — собственная функция оператора Бесселя B_γ. Тогда из (2.26) получаем

$${}^{\gamma}T_x^y j_{(\gamma-1)2}(x\xi) = j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)\, j_{(\gamma-1)/2}(y\xi). \tag{2.34}$$

Свойство 11. Для оператора обобщённого сдвига ${}^{\gamma}T_x^y$, связанного с оператором Бесселя B_γ, справедливо представление

$$\begin{aligned} &{}^{\gamma}T_x^y f(x) = \\ &= \frac{2^\gamma C(\gamma)}{(4xy)^{\gamma-1}} \int\limits_{|x-y|}^{x+y} z f(z) \{[z^2-(x-y)^2][(x+y)^2-z^2]\}^{\gamma/2-1} dz. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Доказательство. Преобразуем оператор обобщённого сдвига следующим образом. Сначала произведём замену $\varphi = 2\alpha$, получим

$${}^{\gamma}T_x^y f(x) = 2C(\gamma) \int\limits_0^{\pi/2} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos 2\alpha}\,) \sin^{\gamma-1}(2\alpha) d\alpha =$$

$$= 2^\gamma C(\gamma) \int\limits_0^{\pi/2} f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha \cos^{\gamma-1}\alpha d\alpha =$$

$$= 2^\gamma C(\gamma) \int\limits_0^{\pi/2} f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy(1-2\sin^2\alpha)}\right) \sin^{\gamma-1}\alpha (1-\sin^2\alpha)^{(\gamma-1)/2} d\alpha.$$

Теперь положим $\sin\alpha = t$; тогда при $\alpha = 0$, $t = 0$ и при $\alpha = \pi/2$, $t = 1$ имеем $d\alpha = \dfrac{dt}{(1-t^2)^{1/2}}$ и

$$ {}^{\gamma}T_x^y f(x) = 2^{\gamma}C(\gamma)\int\limits_0^1 f(\sqrt{x^2+y^2-2xy(1-2t^2)}\,)t^{\gamma-1}(1-t^2)^{\gamma/2-1}dt. $$

Вводя переменную z посредством равенства $\sqrt{x^2+y^2-2xy(1-2t^2)} = z$, получим

$$ t = \left(\frac{z^2-(x-y)^2}{4xy}\right)^{1/2}, \qquad dt = \frac{zdz}{(4xy)^{1/2}(z^2-(x-y)^2)^{1/2}}; $$

при $t = 0$: $z = |x-y|$, при $t = 1$: $z = x+y$ и

$$ {}^{\gamma}T_x^y f(x) = \frac{2^{\gamma}C(\gamma)}{(4xy)^{\gamma-1}}\int\limits_{|x-y|}^{x+y} zf(z)[(z^2-(x-y)^2)((x+y)^2-z^2)]^{\gamma/2-1}dz. $$

Доказательство закончено.

Используя представление (2.35), докажем свойство самосопряжённости обобщённого сдвига (в [126] оно доказано другим способом).

Свойство 12. Если $f(x)$ — непрерывная функция, для которой

$$ \int\limits_0^{\infty} |f(x)|x^{\gamma}dx < \infty, $$

и $g(x)$ — непрерывная, ограниченная для всех $x \geqslant 0$ функция, то

$$ \int\limits_0^{\infty} {}^{\gamma}T_x^y f(x)g(y)y^{\gamma}dy = \int\limits_0^{\infty} f(y)\,{}^{\gamma}T_x^y g(x)y^{\gamma}dy. \tag{2.36} $$

Доказательство. Применяя к $\int\limits_0^{\infty} {}^{\gamma}T_x^y f(x)g(y)y^{\gamma}dy$ представление (2.35), получим

$$ \int\limits_0^{\infty} {}^{\gamma}T_x^y f(x)g(y)y^{\gamma}dy = $$

$$ = (4x)^{1-\gamma}2^{\gamma}C(\gamma)\int\limits_0^{\infty} yg(y)dy\int\limits_{|x-y|}^{x+y} zf(z)\{[z^2-(x-y)^2][(x+y)^2-z^2]\}^{\gamma/2-1}dz = $$

$$= (4x)^{1-\gamma}2^{\gamma}C(\gamma)\left(\int\limits_0^x yg(y)dy\int\limits_{x-y}^{x+y} zf(z)\{[z^2-(x-y)^2][(x+y)^2-z^2]\}^{\gamma/2-1}dz+\right.$$

$$\left.+\int\limits_x^{\infty} yg(y)dy\int\limits_{y-x}^{x+y} zf(z)\{[z^2-(x-y)^2][(x+y)^2-z^2]\}^{\gamma/2-1}dz\right).$$

Преобразуем выражение $[z^2-(x-y)^2][(x+y)^2-z^2]$ и поменяем порядок интегрирования, будем иметь

$$\int\limits_0^{\infty} {}^{\gamma}T_x^y f(x)g(y)y^{\gamma}dy =$$

$$= (4x)^{1-\gamma}2^{\gamma}C(\gamma)\left(\int\limits_0^x zf(z)dz\int\limits_{x-z}^{x+z} yg(y)\{[(z+x)^2-y^2][y^2-(z-x)^2]\}^{\gamma/2-1}dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_x^{\infty} zf(z)dz\int\limits_{z-x}^{x+z} yg(y)\{[(z+x)^2-y^2][y^2-(z-x)^2]\}^{\gamma/2-1}dy\right) =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} f(z)\,{}^{\gamma}T_x^z g(y)z^{\gamma}dz.$$

Свойство доказано.

Свойство 13. Обобщённый сдвиг ${}^{\gamma}T_x^y$ можно записать в виде

$${}^{\gamma}T_x^y f(x) =$$

$$= \frac{2^{1-\gamma}}{\Gamma^2\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_{|x-y|}^{x+y} z^{2-\gamma}f(z)dz\int\limits_0^{\infty} j_{(\gamma-1)/2}(\lambda x)j_{(\gamma-1)/2}(\lambda y)j_{(\gamma-1)/2}(\lambda z)\lambda^{\gamma}d\lambda. \tag{2.37}$$

Доказательство. Справедлива формула

$$\frac{\{[z^2-(x-y)^2][(x+y)^2-z^2]\}^{\gamma/2-1}}{(xy)^{\gamma-1}} =$$

$$= z^{1-\gamma}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)}{2\Gamma^3\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^{\infty} j_{(\gamma-1)/2}(\lambda x)j_{(\gamma-1)/2}(\lambda y)j_{(\gamma-1)/2}(\lambda z)\lambda^{\gamma}d\lambda. \tag{2.38}$$

Она следует из формулы (2.12.42.14) в [182, с. 204], имеющей вид

$$\int\limits_0^\infty \lambda^{1-\nu} J_\nu(x\lambda) J_\nu(y\lambda) J_\nu(z\lambda) d\lambda =$$

$$= \frac{2^{1-3\nu}}{\sqrt{\pi}\,(xyz)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \{[z^2 - (x-y)^2][(x+y)^2 - z^2]\}^{\nu - 1/2} =$$

$$= \frac{2^{\nu-1} S^{2\nu-1}}{\sqrt{\pi}\,(xyz)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}, \quad (2.39)$$

где $|x-y| < z < x+y$, $x, y, z > 0$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, S — площадь треугольника, стороны которого равны x, y, z. Используя представление (2.35) и формулу (2.38), получим (2.37), что и требовалось доказать.

Свойство 14. При $x > 0$ формула, представляющая обобщённый сдвиг ${}^\gamma T_x^y$ от степенной функции x^α, имеет вид

$$ {}^\gamma T_x^y x^\alpha = \begin{cases} |x-y|^\alpha \, {}_2F_1\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma}{2}, \gamma; -\frac{4xy}{(x-y)^2}\right), & x \neq y; \\ x^\alpha \dfrac{2^{\alpha+\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)}, & x = y \end{cases} \quad (2.40)$$

или

$$ {}^\gamma T_x^y x^\alpha = \begin{cases} x^\alpha \, {}_2F_1\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha-\gamma}{2}, \frac{\gamma+1}{2}; \frac{y^2}{x^2}\right), & x > y; \\ x^\alpha \dfrac{2^{\alpha+\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)}, & x = y; \\ y^\alpha \, {}_2F_1\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha-\gamma}{2}, \frac{\gamma+1}{2}; \frac{x^2}{y^2}\right), & x < y, \end{cases} \quad (2.41)$$

где ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса (см. (1.15)).

Доказательство. Пусть сначала $x \neq y$. Используя формулу (2.35), найдём обобщённый сдвиг ${}^\gamma T_x^y$ от функции x^α. Имеем

$$
{}^{\gamma}T_x^y x^\alpha = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^1 [(x-y)^2 + 4xyt^2]^{\alpha/2} (1-t^2)^{\gamma/2-1} t^{\gamma-1} dt = \{t^2 = z\} =
$$

$$
= \frac{2^{\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^1 [(x-y)^2 + 4xyz]^{\alpha/2} (1-z)^{\gamma/2-1} z^{\gamma/2-1} dz =
$$

$$
= \frac{2^{\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} |x-y|^\alpha \int\limits_0^1 \left(1 + \frac{4xy}{(x-y)^2} z\right)^{\alpha/2} (1-z)^{\gamma/2-1} z^{\gamma/2-1} dz.
$$

Последний интеграл представляет собой гипергеометрическую функцию Гаусса (1.15) при $z = -\dfrac{4xy}{(x-y)^2}$, $a = -\dfrac{\alpha}{2}$, $b = \dfrac{\gamma}{2}$, $c = 2b = \gamma$ ($c > b > 0$), поэтому

$$
{}^{\gamma}T_x^y x^\alpha = \frac{2^{\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma)} |x-y|^\alpha \, {}_2F_1\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma}{2}, \gamma; -\frac{4xy}{(x-y)^2}\right).
$$

Используя формулу удвоения для гамма-функции (1.7), получим (2.40).

Для доказательства (2.41) раскроем в (2.40) модуль:

$$
{}^{\gamma}T_x^y x^\alpha = \begin{cases} (x-y)^\alpha \, {}_2F_1\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma}{2}, \gamma; -\frac{4xy}{(x-y)^2}\right), & x > y; \\ (y-x)^\alpha \, {}_2F_1\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma}{2}, \gamma; -\frac{4xy}{(x-y)^2}\right), & x < y. \end{cases} \tag{2.42}
$$

В [104] приведена формула вида

$$
{}_2F_1\left(a, b, 2b; \frac{4z}{(1+z)^2}\right) = (1+z)^{2a} \, {}_2F_1\left(a, a-b+\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}; z^2\right),
$$

используя которую, получим (2.41) при $x \neq y$.

При $x = y$ имеем

$$
{}^{\gamma}T_x^y x^\alpha = (2x)^\alpha \frac{2^{\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int\limits_0^1 (1-z)^{\gamma/2-1} z^{(\gamma+\alpha)/2-1} dz =
$$

$$
= (2x)^\alpha \frac{2^{\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)}.
$$

Этим и завершается доказательство.

Свойство 15. При $\gamma = 0$ обобщённый сдвиг ${}^{\gamma}T_x^y$ для чётной финитной функции $f(x)$ принимает вид

$$T_x^y f(x) = \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2},$$

и справедливо равенство

$$\lim_{\gamma\to 0} \int\limits_0^\infty {}^{\gamma}T_x^y f(x) y^\gamma dy = \lim_{\gamma\to 0} \int\limits_0^\infty \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2} y^\gamma dy = \int\limits_0^\infty f(t)dt.$$

Доказательство. Очевидно, что при $\gamma = 0$ оператор Бесселя

$$(B_\gamma)_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{\partial}{\partial x}$$

превращается в оператор двойного дифференцирования $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, поэтому при $\gamma = 0$ задача Коши (2.31)–(2.32) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T_x^y f(x) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} T_x^y f(x), \tag{2.43}$$

$$T_x^y f(x)|_{y=0} = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial y} T_x^y f(x)\bigg|_{y=0} = 0, \tag{2.44}$$

а T_x^y будет иметь вид

$$T_x^y f(x) = \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2}. \tag{2.45}$$

Логично ожидать, что для чётной функции $f(x)$ при $\gamma = 0$ формула

$${}^{\gamma}T_x^y f(x) = C(\gamma) \int\limits_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi}\,) \sin^{\gamma-1}\varphi d\varphi$$

даст (2.45), однако нельзя подставить $\gamma = 0$ в интеграл

$$\int\limits_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi}\,) \sin^{\gamma-1}\varphi d\varphi,$$

так как он будет расходящимся. Поэтому рассмотрим интеграл по y от 0 до ∞ от ${}^{\gamma}T_x^y f(x)$, $\gamma > 0$ с весом y^γ, применим формулу (2.36) и свойство 3, а затем, предполагая, что f финитна и, следовательно, интеграл $\int\limits_0^\infty f(y) y^\gamma dy$ сходится равномерно при $\gamma > 0$, перейдём к пределу при $\gamma \to 0$:

$$\int\limits_0^\infty {}^{\gamma}T_x^y f(x) y^\gamma dy = \int\limits_0^\infty f(y)\, {}^{\gamma}T_x^y[1] y^\gamma dy = \int\limits_0^\infty f(y) y^\gamma dy,$$

$$\lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty {}^\gamma T_x^y f(x) y^\gamma dy = \lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty f(y) y^\gamma dy = \int\limits_0^\infty f(y) dy.$$

С другой стороны, если f — чётная финитная функция, то

$$\lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty \frac{f(x+y)-f(x-y)}{2} y^\gamma dy = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\infty f(x+y)dy - \int\limits_0^\infty f(x-y)dy\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_y^\infty f(t)dt - \int\limits_{-y}^\infty f(t)dt\right) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_y^\infty f(t)dt + \int\limits_{-\infty}^y f(t)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)dt = \int\limits_0^\infty f(t)dt;$$

следовательно, для чётной финитной функции f справедливо равенство

$$\lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty {}^\gamma T_x^y f(x) y^\gamma dy = \lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty \frac{f(x+y)-f(x-y)}{2} y^\gamma dy = \int\limits_0^\infty f(t)dt.$$

Свойство доказано.

Функция $j_{(\gamma-1)/2}$, определённая равенством (2.29), представляет собой ядро преобразования Ханкеля. А именно, для функций $f \in L_1^\gamma$ прямое преобразование Ханкеля (Фурье–Бесселя) имеет вид

$$(H_\gamma f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_0^\infty j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)\, f(x) x^\gamma\, dx.$$

Для $f \in S_{\mathrm{ev}}$ обратное преобразование Ханкеля определено формулой

$$(H_\gamma^{-1}\widehat{f})(x) = f(x) = \frac{2^{1-\gamma}}{\Gamma^2\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)\, \widehat{f}(\xi)\xi^\gamma\, d\xi.$$

Преобразование Ханкеля от обобщённого сдвига ${}^\gamma T_x^y$ получено в [69]. Приведём и обоснуем его для удобства.

Свойство 16. Преобразование Ханкеля от обобщённого сдвига основной функции f имеет вид

$$(H_\gamma\, {}^\gamma T_x^y f(x))(\xi) = j_{(\gamma-1)/2}(y\xi)(H_\gamma f)(\xi). \tag{2.46}$$

Доказательство. Используя свойство самосопряжённости обобщённого сдвига и (2.34), получим

$$(H_\gamma\, {}^\gamma T_x^y f(x))(\xi) = \int\limits_0^\infty j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)\, T_x^y f(x) x^\gamma\, dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty T_x^y j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)\, f(x) x^\gamma\, dx = j_{(\gamma-1)/2}(y) \int\limits_0^\infty j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)\, f(x) x^\gamma\, dx =$$

$$= j_{(\gamma-1)/2}(y\xi)(H_\gamma f)(\xi),$$

что и требовалось доказать.

Справедливо следующее утверждение (см. [87, с. 35]).

Свойство 17. Имеет место равенство

$$ {}^\gamma T_x^y (B_\gamma)_x f(x) = (B_\gamma)_x\, {}^\gamma T_x^y f(x), \tag{2.47}$$

где f — основная функция.

Доказательство. Имеем

$$(H_\gamma\, {}^\gamma T_x^y (B_\gamma)_x f(x))(\xi) = j_{(\gamma-1)/2}(y\xi)(H_\gamma (B_\gamma)_x f(x))(\xi) = \\ = -\xi^2 j_{(\gamma-1)/2}(y\xi)(H_\gamma f)(\xi) \tag{2.48}$$

и

$$(H_\gamma (B_\gamma)_x\, {}^\gamma T_x^y f(x))(\xi) = -\xi^2 (H_\gamma\, {}^\gamma T_x^y f(x))(\xi) = \\ = -\xi^2 j_{(\gamma-1)/2}(y\xi)(H_\gamma f)(\xi). \tag{2.49}$$

Из (2.48) и (2.49) получаем, что преобразования Ханкеля выражений ${}^\gamma T_x^y (B_\gamma)_x f(x)$ и $(B_\gamma)_x\, {}^\gamma T_x^y f(x)$ совпадают; следовательно, справедливо (2.47).

Свойство доказано.

Если в определениях и утверждениях классического гармонического анализа заменить обычный сдвиг обобщённым, то получится *весовой гармонический анализ* (см. [87, 135–142]) из-за наличия степенного веса x^γ в подынтегральных выражения (см., например, формулу (2.36)).

2.2.3. Обобщённая свертка. Обобщённая свёртка, порождённая обобщённым сдвигом ${}^\gamma T_x^y$, имеет вид (см. [87])

$$(f * g)_\gamma(x) = \int\limits_0^\infty f(y)\, {}^\gamma T_x^y g(x) y^\gamma\, dy. \tag{2.50}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.3. *Преобразование Ханкеля, применённое к обобщённой свёртке* (2.50), *имеет вид*

$$H_\gamma[(f*g)_\gamma(x)](\xi) = H_\gamma[f](\xi)H_\gamma[g](\xi). \tag{2.51}$$

Доказательство.

$$H_\gamma[(f*g)_\gamma(x)](\xi) = \int\limits_0^\infty (f*g)_\gamma(x)\, j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)x^\gamma\, dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)x^\gamma\, dx \int\limits_0^\infty f(y)\, {}^\gamma T_x^y g(x)\, y^\gamma\, dy =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(y)y^\gamma\, dy \int\limits_0^\infty {}^\gamma T_x^y g(x)\, j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)x^\gamma\, dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(y)y^\gamma\, dy \int\limits_0^\infty g(x)\ {}^\gamma T_x^y j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)x^\gamma\, dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(y)\, j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)y^\gamma\, dy \int\limits_0^\infty g(x)\, j_{(\gamma-1)/2}(x\xi)x^\gamma\, dx = H_\gamma[f](\xi)H_\gamma[g](\xi).$$

что и требовалось доказать.

2.2.4. Обобщённые сдвиги, связанные с потенциалом. Одна из конструкций обобщённого сдвига рассмотрена в [314, с. 131–154] (см. также [352, 376, 377]). А именно, обобщённые сдвиги строятся как решения уравнений

$$[-D_x^2 + q(x)]u = [-D_y^2 + q(y)]u, \qquad u = u(x,y) \tag{2.52}$$

на интервале $(0,a)$ или на $(0,\infty)$. При этом добавляются начальные условия

$$u(x,0) = f(x), \qquad D_y u(x,0) = hf(x)$$

и подходящие граничные условия: например,

$$D_y u - hu = 0, \quad \text{при} \ \ x = 0,$$

$$D_y u + Pu = 0, \quad \text{при} \ \ x = a.$$

Такие задачи решаются методом собственных функций или методом интегральных уравнений. Пусть $h, v \in L_{\infty,\mathrm{loc}}$. Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x,y) = v(x,y) + \frac{1}{2}\int\limits_0^y \int\limits_{x-y+t}^{x+y-t} h(s,t)u(s,t)dsdt \tag{2.53}$$

для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Если $\triangle(x, y)$ — треугольник с вершинами $(x - y, 0)$, (x, y) и $(x + y, 0)$, то интеграл в (2.53) запишется в виде

$$Hw(x, y) = \frac{1}{2} \int\limits_{\triangle(x,y)} hw(s, t)dsdt. \tag{2.54}$$

Формально решение (2.53) имеет вид

$$u = (I - H)^{-1}v = \sum_{n=0}^{\infty} H^n v, \qquad H^0 = I.$$

Пусть $P_k(f) = \sup\limits_K\{f(x)\}$, где K — компакт и полунорма $P_k(f)$ задаёт топологию на $L_{\infty,\mathrm{loc}}$. На $L_{1,\mathrm{loc}}$ будем использовать полунорму $\int\limits_K |f(x)|dx$.

Пусть E^n — C^∞-функции на $\mathbb{R}$ или на $\mathbb{R}^2$ с топологией пространства Шварца равномерной сходимости $D^\alpha f$ на компактах для $|\alpha| \leqslant n$. После некоторых вычислений получаем для $h, w \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ и $n \geqslant 1$:

$$|H^n w| \leqslant p_\triangle(w)|p_\triangle(h)|^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}; \tag{2.55}$$

$$|H^n w| \leqslant q_\triangle(w)|q_\triangle(h)|^n \frac{y^{2n-2}}{2(2n-2)!}. \tag{2.56}$$

Теперь для $a \geqslant 0$ пусть $\square(a)$ — квадрат с вершинами $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, a)$, $(0, -a)$, т. е. такой, что $\square(a) = \triangle(0, a) \cup \triangle(0, -a)$ и $(x, y) \in \square(a)$ влечёт за собой $\triangle(x, y) \subset \square(a)$. Из (2.55) следует, что

$$p_k(H^n v) \leqslant p_\square(v)[p_\square(h)]^n \frac{a^{2n}}{(2n)!}$$

для $K \subset \square(a) = \square$ и поэтому $\sum H^n v$ сходится равномерно на K. Это даёт сходимость в $L_{\infty,\mathrm{loc}}$; следовательно, $(I - H)^{-1} : L_{\infty,\mathrm{loc}} \to L_{\infty,\mathrm{loc}}$ — чётко определённая и непрерывная функция, поскольку

$$p_k((I - H)^{-1}v) \leqslant p_\square(v) \sum_{n=0}^{\infty} [p_\square(h)]^n \frac{a^{2n}}{(2n)!}.$$

Аналогично легко доказывается, что для $h \in L_{\infty,\mathrm{loc}}$ (соответственно, для $h \in E^n$) $H : L_{\infty,\mathrm{loc}} \to E^0$ (соответственно, $H : E^n \to E^{n+1}$) и $(I - H)^{-1} : E^0 \to E^0$ (соответственно, $(I - H)^{-1} : E^{n+1} \to E^{n+1}$) непрерывны. Интегральное уравнение (2.53), записанное в виде $u = v + Hu$, связано с дифференциальным уравнением, аналогичным (2.52), поскольку формально

$$D - x^2 u - D_y^2 u + hu = D_x^2 v - D_y^2 v, \tag{2.57}$$

и если v — подходящая комбинация $g(x+y)+k(x-y)$ с $h=q(x)+$ $+q(y)$, то мы получим (2.52). Теперь рассмотрим линейное отображение $E_i : L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \to L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ (соответственно, $E_i : E^n(\mathbb{R}) \to E^n(\mathbb{R})$, $i=1,2$); пусть

$$Ef(x,y) = E_1 f(x+y) + E_2 f(x-y) \tag{2.58}$$

— отображение, действующее из $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ в $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ (соответственно, из $E^n(\mathbb{R})$ в $E^n(\mathbb{R}^2)$). Определим тогда обобщённый оператор сдвига

$$T : L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \to L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \quad (\text{соответственно, } \ T : E^n(\mathbb{R}) \to E^n(\mathbb{R}^2))$$

как единственное решение уравнения

$$Tf = Ef + HTf \tag{2.59}$$

для $f \in D(T)$. Поскольку $T=(I-H)^{-1}E$, это имеет смысл. Дадим теперь теперь удобные определения ограниченных операторов. Для непрерывной функции u очевидно $Hu(x,0)=D_yHu(x,0)=0$, и для $Tf \in C^1$ запишем:

$$\begin{aligned} Af(x) &= Tf(x,0) = Ef(x,0), \\ Bf(x) &= D_yTf(x,0) = D_yEf(x,0); \end{aligned} \tag{2.60}$$

таким образом,

$$2E_1 f = Af + \int\limits_0^x Bf dt$$

и

$$2E_2 f = Af - \int\limits_0^x Bf dt.$$

Теорема 2.4. *Пусть* $n \geqslant 2$; $h \in E^{n-1}(\mathbb{R}^2)$ *с* $A : E^n \to E^n$ *и* $B : E^n \to E^{n-1}$ *— непрерывные линейные отображения. Тогда существует единственный непрерывный оператор обобщённого сдвига* $T : E^n(\mathbb{R}) \to E^n(\mathbb{R}^2)$, *удовлетворяющий для* $f \in E^n$ *следующим уравнению и условиям*:

$$\begin{gathered} D_x^2 Tf - D_y^2 Tf + hTf = 0; \\ Tf(x,0) = Af(x); \quad D_yTf(x,0) = Bf(x). \end{gathered} \tag{2.61}$$

Напомним, что свёртка распределения определяется правилом $(S*T,\varphi) = (S \otimes T, \varphi(\xi+\eta))$ для, например, $S \in E'$, $T \in D'$. Здесь $\varphi(\xi+\eta) = T_\xi^\eta \varphi(\xi)$ — обычный сдвиг. Оператор T из теоремы 2.4 также непрерывен из $E(\mathbb{R})$ в $E(\mathbb{R}^2)$, и его сопряжённый $T^* : E'(\mathbb{R}^2) \to E'(\mathbb{R})$ непрерывен в слабой или в сильной топологии. Таким образом, обобщённую свёртку естественно определить формулой

$$\mu * \nu = T * (\mu \otimes \nu) \tag{2.62}$$

для $\mu, \nu \in E'(\mathbb{R})$, и отображения $E' \times E' \to E'$ непрерывны в сильной топологии и в слабой топологии на ограниченных множествах. Если $\mu = f$, $\nu = g$, то мы имеем

$$(f * g, \varphi) = \int f(x)g(y)(T\varphi)(x, y)dx\,dy. \tag{2.63}$$

Заметим, что если T_y^x — вещественный и самосопряжённый, удовлетворяющий равенству $T_x^\xi g(x) = T_\xi^x g(\xi)$, то можно записать

$$\int (T\varphi)(x, y)g(y)dy = \int T_x^y \varphi(x)g(y)dy =$$
$$= \int T_y^x \varphi(y)g(y)dy = \int \varphi(y)T_y^x g(y)dy. \tag{2.64}$$

Таким образом, (2.63) перепишется в виде

$$(f * g, \varphi) = \int\int f(x)T_y^x g(y)\varphi(y)dx\,dy =$$
$$= \int \varphi(y)dy \int T_y^x g(y)f(x)dx, \tag{2.65}$$

что позволяет сопоставить свёртке $f * g$ интеграл $\int T_y^x g(y)f(x)dx$. Отметим, что

$$\int T_y^x g(y)f(x)dx = \int T_x^y g(x)f(x)dx = \int g(x)T_x^y f(x)dx = \int g(x)T_y^x f(y)dx.$$

В [376, 377] исследуется свёртка (2.62), когда она, например, коммутативна или ассоциативна, и установлены важные результаты, некоторые из которых приведены ниже.

Пусть сначала $M(K)$ — банахово пространство с мерой Радона с носителем в K, так что $K' = (E^0)' = \cup M(K)$ как множество и сильная топология на K' — лучшая локально выпуклая топология, индуцирующая топологию нормы на каждом $M(K)$. Для непрерывного $T : E^0(\mathbb{R}) \to E^0(\mathbb{R}^2)$, возникающего при выполнении теоремы 2.4, нетрудно показать, что для $\mu, \nu \in K'$ с носителями в K существует константа c_K такая, что

$$||\mu * \nu|| \leqslant c_K||\nu||\,||\mu||.$$

Пусть теперь $L^1(K) \subset M(K)$ — абсолютно непрерывная мера относительно меры Лебега $d\lambda$ с $L_K^1 = \cup L^1(K)$ как множеством. Для $f \in L_{1,\mathrm{loc}}$ будем писать $f\lambda$ или $fd\lambda$, имея в виду ассоциированную (возможно, неограниченную) меру. Используя перечисленные свойства, покажем, что если $T : E^0(\mathbb{R}) \to E^0(\mathbb{R}^2)$ есть непрерывное отображение с $E_1, E_2 : E^0 \cap L^1 \to E^0$, непрерывными при $E^0 \cap L^1$, имеющее топологию L^1, и E^0 — топология $L_{1,\mathrm{loc}}$, то для $\mu \in K'$ и $\nu \in L_K^1$ обе свёртки $\mu * \nu$ и $\nu * \mu$ принадлежат L_K^1.

§ 2.3. Классификация и свойства различных классов операторов преобразования Бушмана–Эрдейи

Необходимо отметить, что, следуя традиции теории операторов преобразования и соответствующей литературы, мы зачастую используем термин «операторы» там, где более точным был бы термин «дифференциальные выражения». В основных теоремах указаны функциональные пространства, для которых они верны. Для результатов, содержащих явные формулы, если конкретные классы функций не указаны, то считается, что они сформулированы для функций, финитных на положительной полуоси (бесконечно дифференцируемых функциях, отличных от нуля на некотором отрезке $[a, b], a > 0, b < \infty$).

2.3.1. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи различных классов. В этом пункте мы приведём справочную информацию, содержащую определения ОП Бушмана–Эрдейи различных типов. Это класс ОП, который при определённом выборе параметров является одновременным обобщением операторов СПД и сопряжённых к ним, операторов дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, а также интегральных преобразований Мелера–Фока.

Операторами Бушмана–Эрдейи первого рода называются интегральные операторы с функциями Лежандра первого рода в ядрах

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = \int\limits_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\mu/2} P_\nu^\mu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)dt, \tag{2.66}$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = \int\limits_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{-\mu/2} \mathbb{P}_\nu^\mu \left(\frac{t}{x}\right) f(t)dt, \tag{2.67}$$

$$B_{-}^{\nu,\mu} f = \int\limits_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\mu/2} P_\nu^\mu \left(\frac{t}{x}\right) f(t)dt, \tag{2.68}$$

$$E_{-}^{\nu,\mu} f = \int\limits_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\mu/2} \mathbb{P}_\nu^\mu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)dt. \tag{2.69}$$

Здесь $P_\nu^\mu(z)$ — функция Лежандра первого рода [11], $\mathbb{P}_\nu^\mu(z)$ — та же функция на разрезе $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $f(x)$ — локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при $x \to 0$ и при $x \to \infty$. Параметры μ, ν — комплексные числа, $\operatorname{Re}\mu < 1$, можно ограничиться значениями $\operatorname{Re}\nu \geqslant -1/2$.

Операторами Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости называются следующие интегро-дифференциальные операторы:

$$B_{0+}^{\nu,1} f = \frac{d}{dx} \int\limits_0^x P_\nu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \tag{2.70}$$

$$E_{0+}^{\nu,1} f = \int\limits_0^x P_\nu \left(\frac{t}{x}\right) \frac{df(t)}{dt}\, dt, \tag{2.71}$$

$$B_{-}^{\nu,1} f = \int\limits_x^\infty P_\nu \left(\frac{t}{x}\right) \left(-\frac{df(t)}{dt}\right) dt, \tag{2.72}$$

$$E_{-}^{\nu,1} f = \left(-\frac{d}{dx}\right) \int\limits_x^\infty P_\nu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \tag{2.73}$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$ — функция Лежандра.

Операторами Бушмана–Эрдейи второго рода называются интегральные операторы с функциями Лежандра второго рода в ядрах:

$$\begin{aligned} {}_2S^\nu f = \frac{2}{\pi} \Bigg(& -\int\limits_0^x (x^2 - y^2)^{-1/2} Q_\nu^1(\frac{x}{y}) f(y) dy + \\ & + \int\limits_x^\infty (y^2 - x^2)^{-1/2} \mathbb{Q}_\nu^1(\frac{x}{y}) f(y) dy \Bigg), \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned} {}_2P^\nu f = \frac{2}{\pi} \Bigg(& -\int\limits_0^x (x^2 - y^2)^{-1/2} \mathbb{Q}_\nu^1(\frac{y}{x}) f(y) dy - \\ & - \int\limits_x^\infty (y^2 - x^2)^{-1/2} Q_\nu^1(\frac{y}{x}) f(y) dy \Bigg). \end{aligned} \tag{2.75}$$

При $y \to x \pm 0$ интегралы понимаются в смысле главного значения. Отметим без доказательства, что эти операторы определены и являются сплетающими при некоторых условиях на функции $f(x)$ (при этом оператор (2.74) будет типа Сонина, (2.75) — типа Пуассона).

Унитарные операторы преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова определяются по формулам:

$$S_U^\nu f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\ {}_2S^\nu f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\ {}_1S_-{}^\nu f, \tag{2.76}$$

$$P_U^\nu f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\ {}_2P^\nu f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\ {}_1P_-{}^\nu f. \tag{2.77}$$

Для любых значений $\nu \in \mathbb{R}$ они являются линейными комбинациями операторов преобразования Бушмана–Эрдейи первого и второго родов нулевого порядка гладкости. Их можно назвать *операторами Бушмана–Эрдейи третьего рода*. В интегральной форме эти операторы имеют следующий вид:

$$S_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int\limits_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy + \\ + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-1/2} Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\ - \right. \\ \left. - \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-1/2}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\right), \quad (2.78)$$

$$P_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_0^x P_\nu\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d}{dy}\right) f(y)\,dy - \\ - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-1/2}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy\ - \right. \\ \left. - \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-1/2} Q_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy\right). \quad (2.79)$$

2.3.2. Интегральные операторы преобразования Бушмана–Эрдейи первого рода и нулевого порядка гладкости. Теперь перейдём к описанию основных свойств важнейшего класса — операторов преобразования Бушмана–Эрдейи. Это класс ОП, который при определённом выборе параметров является одновременным обобщением операторов СПД и сопряжённых к ним, операторов дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, а также интегральных преобразований Мелера–Фока.

Определение 2.2. *Операторами Бушмана–Эрдейи первого рода* называются интегральные операторы

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = \int\limits_0^x \left(x^2-t^2\right)^{-\mu/2} P_\nu^\mu\left(\frac{x}{t}\right) f(t)dt, \quad (2.80)$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = \int\limits_0^x \left(x^2-t^2\right)^{-\mu/2} \mathbb{P}_\nu^\mu\left(\frac{t}{x}\right) f(t)dt, \quad (2.81)$$

$$B_-^{\nu,\mu} f = \int\limits_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\mu/2} P_\nu^\mu \left(\frac{t}{x}\right) f(t)dt, \tag{2.82}$$

$$E_-^{\nu,\mu} f = \int\limits_x^\infty \left(t^2 - x^2\right)^{-\mu/2} \mathbb{P}_\nu^\mu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)dt. \tag{2.83}$$

Здесь $P_\nu^\mu(z)$ — функция Лежандра первого рода [11], $\mathbb{P}_\nu^\mu(z)$ — та же функция на разрезе $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $f(x)$ — локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при $x \to 0$, $x \to \infty$. Параметры μ, ν — комплексные числа, $\operatorname{Re}\mu < 1$ (можно ограничиться значениями $\operatorname{Re}\nu \geqslant -1/2$).

Интегральные операторы указанного вида с функциями Лежандра в ядрах впервые встретились в работах Э.Т. Копсона по уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу в конце 1950-х гг. А именно, в [326, 327] рассмотрено следующее утверждение.

Лемма 2.1. (Копсона). *Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных с двумя переменными*

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \tag{2.84}$$

(обобщённое уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, или B-гиперболическое уравнение по терминологии Киприянова) *в открытом квадранте плоскости* $x > 0$, $y > 0$ *при положительных параметрах* $\beta > \alpha > 0$ *с краевыми условиями на осях координат* (*характеристиках*)

$$u(x,0) = f(x), u(0,y) = g(y), f(0) = g(0). \tag{2.85}$$

Предполагается, что решение $u(x,y)$ *непрерывно дифференцируемо в замкнутом первом квадранте и имеет непрерывные вторые производные в открытом квадранте, а граничные функции* $f(x), g(y)$ *непрерывно дифференцируемы.*

Тогда если решение поставленной задачи существует, то для него выполняются соотношения:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, y = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, x = 0; \tag{2.86}$$

$$2^\beta \Gamma(\beta + \frac{1}{2}) \int\limits_0^1 f(xt) t^{\alpha+\beta+1} \left(1 - t^2\right)^{(\beta-1)/2} P_{-\alpha}^{1-\beta}(t)\, dt =$$

$$= 2^\alpha \Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \int\limits_0^1 g(xt) t^{\alpha+\beta+1} \left(1 - t^2\right)^{(\alpha-1)/2} P_{-\beta}^{1-\alpha}(t)\, dt. \tag{2.87}$$

Из (2.86), (2.87) следует более простое представление

$$g(y) = \frac{2\Gamma(\beta + \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})\Gamma(\beta - \alpha)} y^{1-2\beta} \int\limits_0^y x^{2\alpha-1} f(x) \left(y^2 - x^2\right)^{\beta-\alpha-1} x\, dx, \quad (2.88)$$

где $P_\nu^\mu(z)$ — функция Лежандра первого рода [11].

Соотношения (2.86) были известны до Копсона, они очевидны. В работе приводится нестрогий вывод (2.87), т. е. получено, что граничные функции (или значения решения на характеристиках) не могут быть произвольными, они связаны операторами Бушмана–Эрдейи (в современной терминологии). Далее утверждается, что если две функции связаны операторами Бушмана–Эрдейи указанных порядков, то на самом деле выполняется (2.88) — т. е. они связаны более простыми операторами Эрдейи–Кобера. В этом основное содержание леммы Копсона.

Но отсюда не следует, что, как иногда отмечается, теперь можно сразу получить обращение соответствующего оператора Бушмана–Эрдейи, хотя бы формально. Для этого произвольную функцию в правой части соответствующего уравнения надо записать также в виде оператора Бушмана–Эрдейи соответствующего порядка, чтобы подогнать под лемму Копсона. Но для этого уже надо уметь оператор Бушмана–Эрдейи обращать — получается порочный круг. Таким образом, неверно приписывать Копсону первый результат по обращению операторов Бушмана–Эрдейи, хотя, насколько нам известно, в его работе эти операторы действительно впервые встречаются в явном виде.

Доказательства в [326, 327] скорее являются нестрогими рассуждениями, намечающими, что и в каком порядке надо делать, хотя всё понятно и, видимо, легко доводится до строгого; этот результат не включён Копсоном в его монографию [329]. Отметим также, что в знаменитой монографии [198] и в других публикациях даётся не вполне точная ссылка на [326], которую мы здесь исправили. Эта первая работа Копсона нашла продолжение в совместной работе с Эрдейи [328]. Там даётся строгий вывод, вводятся подходящие классы функций, чётко показана связь с дробными интегралами и операторами Кобера–Эрдейи.

Перейдём к изложению результатов С.М. Ситника для ОП Бушмана–Эрдейи и их приложений к дифференциальным уравнениям с особенностями в коэффициентах.

Все рассмотрения ниже ведутся на полуоси. Поэтому будем обозначать через L_2 и $L_{2,k}$ соответственно пространство $L_2(0,\infty)$ и весовое пространство $L_{2,k}(0,\infty)$.

Вначале распространим определения (2.80–2.83) на важный не исследованный ранее случай $\mu = 1$.

Определение 2.3. Введём при $\mu = 1$ *операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости* по формулам

$$B_{0+}^{\nu,1} f = {}_1S_{0+}^{\nu} f = \frac{d}{dx} \int\limits_0^x P_\nu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \tag{2.89}$$

$$E_{0+}^{\nu,1} f = {}_1P_{-}^{\nu} f = \int\limits_0^x P_\nu \left(\frac{t}{x}\right) \frac{df(t)}{dt}\, dt, \tag{2.90}$$

$$B_{-}^{\nu,1} f = {}_1S_{-}^{\nu} f = \int\limits_x^\infty P_\nu \left(\frac{t}{x}\right) (-\frac{df(t)}{dt})\, dt, \tag{2.91}$$

$$E_{-}^{\nu,1} f = {}_1P_{0+}^{\nu} f = (-\frac{d}{dx}) \int\limits_x^\infty P_\nu \left(\frac{x}{t}\right) f(t)\, dt, \tag{2.92}$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$ — функция Лежандра.

Разумеется, при очевидных дополнительных условиях на функции в (2.89)–(2.92) можно продифференцировать под знаком интеграла или проинтегрировать по частям.

Теорема 2.5. *Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана–Эрдейи на подходящих функциях через дробные интегралы Римана–Лиувилля и Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости*:

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = I_{0+}^{1-\mu}\ {}_1S_{0+}^{\nu} f,\ B_{-}^{\nu,\mu} f = {}_1P_{-}^{\nu}\ I_{-}^{1-\mu} f, \tag{2.93}$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = {}_1P_{0+}^{\nu}\ I_{0+}^{1-\mu} f,\ E_{-}^{\nu,\mu} f = I_{-}^{1-\mu}\ {}_1S_{-}^{\nu} f. \tag{2.94}$$

Доказательство. Докажем первую формулу, остальные доказываются аналогично. С учётом определений, финитности функции $f(x)$, согласно соглашению в начале главы, и полугруппового свойства дробных интегралов Римана–Лиувилля получаем

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = I_{0+}^{1-\mu}\ {}_1S_{0+}^{\nu} f = I_{0+}^{-\mu} \int\limits_0^t P_\nu \left(\frac{t}{y}\right) f(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int\limits_0^x (x-t)^{-\mu-1} \left(\int\limits_0^t P_\nu \left(\frac{t}{y}\right) f(y)\, dy \right) dt.$$

Теперь переставим пределы интегрирования, что возможно ввиду финитности функции, и для вычисления внутреннего интеграла применим

[189, т. 3, с. 163, формула 7]. Получим нужное интегральное представление для оператора Бушмана–Эрдейи первого рода, теорема доказана.

Эти важные формулы позволяют «разделить» параметры ν и μ. Мы докажем, что операторы (2.89)–(2.92) являются изоморфизмами пространств $L_2(0,\infty)$, если ν не равно какому-либо из некоторых исключительных значений. Поэтому операторы (2.80)–(2.83) по действию в пространствах типа L_2 в определённом смысле подобны операторам дробного интегро-диффенцирования $I^{1-\mu}$, с которыми они совпадают при $\nu = 0$. Ниже операторы Бушмана–Эрдейи будут доопределены при всех значениях μ. Для этого нам понадобится следующее

Определение 2.4. Число $\rho = 1 - \operatorname{Re}\mu$ назовём *порядком гладкости операторов Бушмана–Эрдейи* (2.89)–(2.92).

Таким образом, при $\rho > 0$ (т. е. при $\operatorname{Re}\mu > 1$) операторы Бушмана–Эрдейи являются сглаживающими, а при $\rho < 0$ (т. е. при $\operatorname{Re}\mu < 1$) — уменьшающими гладкость в пространствах типа $L_2(0,\infty)$. Операторы (2.89)–(2.92), для которых $\rho = 0$, являются по данному определению операторами нулевого порядка гладкости. Следует пояснить, что здесь под сглаживающими мы понимаем операторы, представимые в виде $A = D^k B$, где $k > 0$, а оператор B ограничен в $L_2(0,\infty)$. Под уменьшающими гладкость при этом понимаются операторы, которые действуют из некоторого пространства $C^k(0,\infty), k > 0$, в пространство Лебега $L_2(0,\infty)$.

Перечислим основные свойства операторов Бушмана–Эрдейи первого рода (2.80)–(2.83) с функцией Лежандра первого рода в ядре. Приведём эти свойства без доказательств, так как они все следуют из основных свойств функций Лежандра. Области определения операторов будем обозначать $\mathfrak{D}(B_{0+}^{\nu,\mu})$, $\mathfrak{D}(E_{0+}^{\nu,\mu})$ и т. п.

Простейшие свойства функций Лежандра приводят к тождествам, выражающим симметрию по параметрам, соотношения смежности и свойство сдвига по параметрам операторов Бушмана–Эрдейи:

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = B_{0+}^{-\nu-1,\mu} f, \quad E_{0+}^{\nu,\mu} f = E_{0+}^{-\nu-1,\mu} f,$$

$$B_{-}^{\nu,\mu} f = B_{-}^{-\nu-1,\mu} f, \quad E_{-}^{\nu,\mu} f = E_{-}^{-\nu-1,\mu} f, \tag{2.95}$$

$$(2\nu+1)x\, B_{0+}^{\nu,\mu} \frac{1}{x} f = (\nu-\mu+1) B_{0+}^{\nu+1,\mu} f + (\nu+\mu) B_{0+}^{\nu-1,\mu} f,$$

$$(2\nu+1)\frac{1}{x}\, B_{-}^{\nu,\mu} x f = (\nu-\mu+1) B_{-}^{\nu+1,\mu} f + (\nu+\mu) B_{-}^{\nu-1,\mu} f, \tag{2.96}$$

$$B_{0+}^{\nu-1,\mu} f - B_{0+}^{\nu+1,\mu} f = -(2\nu+1) B_{0+}^{0,\mu-1} \frac{1}{x} f,$$

$$B_{-}^{\nu-1,\mu} f - B_{-}^{\nu+1,\mu} f = -(2\nu+1) \frac{1}{x} B_{-}^{\nu,\mu-1} f. \tag{2.97}$$

Из формул разложения L_ν на множители получаются тождества:

$$B_{0+}^{\nu,\,\mu-1}\left(\frac{d}{dx}-\frac{\nu}{x}\right)f=B_{0+}^{\nu-1,\,\mu}f, \tag{2.98}$$

$$B_{0+}^{\nu,\,\mu-1}\left(\frac{d}{dx}+\frac{\nu}{x}\right)f=B_{0+}^{\nu+1,\mu}f, \tag{2.99}$$

справедливые при условиях $\operatorname{Re}\mu<1$, $\operatorname{Re}\nu>-\frac{1}{2}$, где

$$\lim_{y\to 0} f(y)/y^\nu=0,\ \ f\in\mathfrak{D}(B_{0+}^{\nu\pm1,\,\mu}),\ \ \left(\frac{d}{dx}\pm\frac{\nu}{x}\right)f\in\mathfrak{D}(B_{0+}^{\nu,\,\mu-1}).$$

Формулы (2.95) позволяют ограничиться случаем $\operatorname{Re}\nu\geqslant-\frac{1}{2}$. Функции, на которые действуют операторы, должны принадлежать их областям определения. Для оператора $E_{0+}^{\nu,\,\mu}$ справедливы те же формулы, что и для $B_{0+}^{\nu,\,\mu}$.

Теорема 2.6. *Операторы Бушмана–Эрдейи* (2.80)–(2.83) *определены, если* $\operatorname{Re}\mu<1$ *или* $\mu\in\mathbb{N}$ *и дополнительно выполняются следующие условия*:

а) *для оператора* $B_{0+}^{\nu,\,\mu}$

$$\int\limits_0^x \sqrt{y}\,|f(y)\ln y|\,dy\ <\infty,$$

если $\nu=-\frac{1}{2}$, $\mu\neq\frac{1}{2}$, *а во всех остальных случаях*

$$\int\limits_0^x y^{-\operatorname{Re}\nu}\,|f(y)|\,dy\ <\infty;$$

б) *для оператора* $E_{-}^{\nu,\,\mu}$

$$\int\limits_x^\infty y^{-\operatorname{Re}\nu}\,|f(y)|\,dy\ <\infty;$$

в) *для оператора* $B_{-}^{\nu,\,\mu}$

$$\int\limits_x^\infty y^{-1/2-\operatorname{Re}\nu}\,|\ln y\cdot f(y)|\,dy\ <\infty,$$

если $\nu = -\frac{1}{2}$, $\mu \neq \frac{1}{2}$, *а во всех остальных случаях*

$$\int\limits_x^\infty y^{\operatorname{Re}(\nu-\mu)} |f(y)|\, dy \ < \infty.$$

(Для оператора $E_{0+}^{\nu,\mu}$ дополнительные условия не требуются.)

В этой теореме предполагается, что функция $f(x)$ локально суммируема на $(0,\infty)$, x — произвольное положительное число. Доказательство следует из оценок интегралов по модулю и использования известных асимптотик для функций Лежандра в нуле и на бесконечности, (см. [11, 434]).

Важно отметить, что при некоторых специальных значениях параметров ν, μ операторы Бушмана–Эрдейи сводятся к более простым. Так при значениях $\mu = -\nu$ или $\mu = \nu + 2$ они являются операторами Эрдейи–Кобера; при $\nu = 0$ — операторами дробного интегро-дифференцирования $I_{0+}^{1-\mu}$ или $I_{-}^{1-\mu}$; при $\nu = -\frac{1}{2}$, $\mu = 0$ или $\mu = 1$ ядра выражаются через эллиптические интегралы; при $\mu = 0$, $x = 1$, $v = it - \frac{1}{2}$ оператор $B_{-}^{\nu,0}$ лишь на постоянную отличаются от преобразования Мелера–Фока. Таким образом, операторы Бушмана–Эрдейи первого рода являются обобщениями всех указанных классов стандартных интегральных операторов.

Теорема 2.7. *Пусть или* $\operatorname{Re}\mu < 0$, *или* $\mu = m \in \mathbb{N}$, $-m \leqslant \nu \leqslant \leqslant m-1$, $\nu \in \mathbb{Z}$. *Тогда справедливы тождества*

$$\frac{d}{dx} B_{0+}^{\nu,\mu} f = B_{0+}^{\nu,\mu+1} f, \qquad E_{0+}^{\nu,\mu} \frac{df}{dx} = E_{0+}^{\nu,\mu+1} f, \tag{2.100}$$

$$B_{-}^{\nu,\mu}\left(-\frac{df}{dx}\right) = B_{-}^{\nu,\mu+1} f, \quad \left(-\frac{d}{dx}\right) E_{-}^{\nu,\mu} f = E_{-}^{\nu,\mu+1} f, \tag{2.101}$$

если все указанные операторы определены.

Эта теорема позволяет доопределить операторы Бушмана–Эрдейи и на значения $\operatorname{Re}\mu \geqslant 1$, переопределив их для натуральных μ.

Определение 2.5. Пусть дано число σ, $\operatorname{Re}\sigma \geqslant 1$. Обозначим через m наименьшее натуральное число такое, что $\sigma = \mu + m$, $\operatorname{Re}\mu < 1$. Тогда *операторы Бушмана–Эрдейи* доопределим по формулам

$$\begin{aligned}
B_{0+}^{\nu,\sigma} &= B_{0+}^{\nu,\mu+m} = \left(\frac{d}{dx}\right)^m B_{0+}^{\nu,\mu}, \\
E_{0+}^{\nu,\sigma} &= E_{0+}^{\nu,\mu+m} = E_{0+}^{\nu,\mu} \left(\frac{d}{dx}\right)^m, \\
B_{-}^{\nu,\sigma} &= B_{-}^{\nu,\mu+m} = B_{-}^{\nu,\mu} \left(-\frac{d}{dx}\right)^m, \\
E_{-}^{\nu,\sigma} &= E_{-}^{\nu,\mu+m} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^m E_{-}^{\nu,\mu}.
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Отметим, что при натуральных μ операторы Бушмана–Эрдейи определены и по формулам (2.80)–(2.83). Мы переопределяем их для этих значений μ по формуле (2.102). Таким образом, символами $B_{0+}^{\nu,\mu}$, $E_{0+}^{\nu,\mu}$, $B_{-}^{\nu,\mu}$, $E_{-}^{\nu,\mu}$ ниже мы будем обозначать операторы, определяемые по формулам (2.80)–(2.83) при $\operatorname{Re}\mu < 1$ и по формулам (2.102) при $\operatorname{Re}\mu \geqslant 1$.

Будем рассматривать наряду с оператором Бесселя также тесно связанный с ним дифференциальный оператор

$$L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} = \\ = \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}\right)\left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}\right) = \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu+1}{x}\right)\left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu+1}{x}\right), \quad (2.103)$$

который при $\nu \in \mathbb{N}$ является оператором углового момента из квантовой механики. Их взаимосвязь устанавливают легко проверяемые формулы связи, приведем их.

Пусть пара ОП X_ν, Y_ν сплетает L_ν и вторую производную:

$$X_\nu L_\nu = D^2 X_\nu, \qquad Y_\nu D^2 = L_\nu Y_\nu. \quad (2.104)$$

Введём новую пару ОП по формулам

$$S_\nu = X_{\nu-1/2} x^{\nu+1/2}, \qquad P_\nu = x^{-(\nu+1/2)} Y_{\nu-1/2}; \quad (2.105)$$

тогда пара новых ОП S_ν, P_ν сплетает оператор Бесселя и вторую производную:

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, \qquad P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \quad (2.106)$$

Разумеется, по указанным формулам можно перейти и обратно: от ОП для оператора Бесселя к ОП для оператора углового момента. А именно, если дана пара ОП S_ν, P_ν со сплетающим свойством (2.106), то новая пара ОП, определяемых по формулам

$$X_\nu = S_{\nu+1/2} x^{-(\nu+1)}, \qquad Y_\nu = x^{\nu+1} P_{\nu+1/2}, \quad (2.107)$$

удовлетворяет соотношениям (2.104).

Преимуществом ОП, сплетающих вторую производную не с оператором Бесселя, а с оператором углового момента, является тот факт, что при определённых условиях они оказываются ограниченными в одном пространстве, а не в паре разных пространств. Мы сохраним за ОП, действующим по формулам (2.104), названия ОП типа Сонина и Пуассона соответственно.

Перейдём к определению условий, при которых ОП Бушмана–Эрдейи первого рода действительно являются операторами преобразования.

Определим класс $\Phi(B_{0+}^{\nu,\mu})$ как множество функций таких, что:

1) $f(x) \in \mathfrak{D}(B_{0+}^{\nu,\mu}) \bigcap C^2(0,\infty)$,

2) $$\lim_{y\to 0}\left|\frac{\ln y}{\sqrt{y}}f(y)+\sqrt{y}\,\ln y\cdot f'(y)\right|=0,$$

если $\nu=-\dfrac{1}{2}$, $\mu\neq\dfrac{1}{2}$;

$$\lim_{y\to 0}(\nu+1)y^{\nu}f(y)-y^{\nu+1}f'(y)=0,$$

если $\mu=\nu+1$, $\operatorname{Re}\nu\neq-\dfrac{1}{2}$; и, наконец,

$$\lim_{y\to 0}\left(\nu\frac{f(y)}{y^{\nu+1}}+\frac{f'(y)}{y^{\nu}}\right)=0$$

во всех остальных случаях.

Теорема 2.8. *Пусть* $f(x)\in\Phi(B_{0+}^{\nu,\mu})$, $\operatorname{Re}\mu\leqslant 1$. *Тогда оператор* $B_{0+}^{\nu,\mu}$ *является оператором преобразования типа Сонина и удовлетворяет соотношению* (2.104) *на функциях* $f(x)$.

Аналогичный результат справедлив и для других операторов Бушмана–Эрдейи. При этом $E_{-}^{\nu,\mu}$ также является оператором типа Сонина, а $E_{0+}^{\nu,\mu}$ и $B_{-}^{\nu,\mu}$ — операторами типа Пуассона. Доказательство см. в [223], оно основано на общих условиях для ядер сплетающих операторов преобразования и асимптотик функций Лежандра.

Можно рассматривать случай, когда нижний предел в соответствующих интегралах (2.80)–(2.83) равен произвольному числу $a>0$, либо верхний предел в интегралах равен произвольному конечному числу $b>0$. При этом все результаты этого пункта сохраняются, а их формулировки значительно упрощаются. В частности, все операторы Бушмана–Эрдейи в этом случае определены при единственном условии $\operatorname{Re}\mu<1$ в форме (2.80)–(2.83) и являются операторами преобразования на функциях $f(x)$ таких, что $f(a)=f'(a)=0$ (или $f(b)=f'(b)=0$).

Из полученной теоремы следует, что ОП Бушмана–Эрдейи связывают собственные функции операторов Бесселя и второй производной. Таким образом, половина ОП Бушмана–Эрдейи переводит тригонометрические или экспоненциальные функции в приведённые функции Бесселя, а другая половина — обратно. Эти формулы здесь не приводятся, их нетрудно выписать явно. Все они являются обобщениями исходных формул Сонина и Пуассона (2.5)–(2.6) и представляют существенный интерес. Ещё раз отметим, что подобные формулы являются непосредственными следствиями доказанных сплетающих свойств ОП Бушмана–Эрдейи; они могут быть непосредственно проверены при помощи таблиц интегралов от специальных функций.

2.3.3. Факторизация операторов Бушмана–Эрдейи. Перейдём к вопросу о различных факторизациях операторов Бушмана–Эрдейи

через операторы Эрдейи–Кобера и дробные интегралы Римана–Лиувилля (см. определения в п. 1.4.1).

Теорема 2.9. *Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана–Эрдейи через операторы дробного интегро-дифференцирования и Эрдейи–Кобера*:

$$B_{0+}^{\nu,\,\mu} = I_{0+}^{\nu+1-\mu} I_{0+;\,2,\,\nu+1/2}^{-(\nu+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1}, \tag{2.108}$$

$$E_{0+}^{\nu,\,\mu} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} I_{0+;\,2,\,-1/2}^{\nu+1} I_{0+}^{-(\nu+\mu)}, \tag{2.109}$$

$$B_{-}^{\nu,\,\mu} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1} I_{-;\,2,\,\nu+1}^{-(\nu+1)} I_{-}^{\nu-\mu+2}, \tag{2.110}$$

$$E_{-}^{\nu,\,\mu} = I_{-}^{-(\nu+\mu)} I_{-;\,2,\,0}^{\nu+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}. \tag{2.111}$$

Доказательство приведено в [223], оно аналогично опубликованным в [75, 76]. Ещё проще эти формулы доказываются через мультипликаторы Меллина (см. ниже).

Многие основные свойства операторов Бушмана–Эрдейи как интегральных операторов (но не как операторов преобразования!) могут быть выведены из теоремы 2.9. Так, можно получить, что формально обратным к оператору Бушмана–Эрдейи с параметрами $(\nu,\ \mu)$ является тот же оператор с параметрами $(\nu,\ 2-\mu)$. При этом из двух операторов — прямого и обратного — всегда один будет иметь интегральное представление (2.80)–(2.83), а другой определяется формулами (2.102); один будет обязательно иметь положительный порядок гладкости, а другой — отрицательный (кроме операторов нулевого порядка гладкости). Кроме того, теорема 2.9 позволяет доопределить операторы Бушмана–Эрдейи на всю область значений параметров. Такое доопределение согласуется с (2.102). Отметим, что факторизации (2.108)–(2.111) являются новыми по сравнению с факторизациями, приведенными в [198].

Рассмотрим связь между операторами Бушмана–Эрдейи и сплетающими операторами Сонина–Пуассона–Дельсарта (СПД). Мы предпочтём дать новые определения для них, чтобы сохранить однообразие обозначений в этом пункте.

Определение 2.6. Переопределим *операторы преобразования Сонина–Пуассона–Дельсарта* (см. гл. 1) по формулам

$${}_0S_{0+}^{\nu} = B_{0+}^{\nu,\,\nu+2} = I_{0+;\,2,\,\nu+1/2}^{-(\nu+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1}, \tag{2.112}$$

$${}_0P_{0+}^{\nu} = E_{0+}^{\nu,\,-\nu} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} I_{0+;\,2,\,-1/2}^{\nu+1}, \tag{2.113}$$

$$ {}_0P_-^\nu = B_-^{\nu,\,\nu+2} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1} I_{-;\,2,\,\nu+1}^{-(\nu+1)}, \tag{2.114} $$

$$ {}_0S_-^\nu = E_-^{\nu,\,-\nu} = I_{-;\,2,\,0}^{\nu+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}. \tag{2.115} $$

Это определение в сочетании с (1.64), (1.66), (1.67) приводит к следующим интегральным представлениям:

$$ {}_0S_{0+}^\nu f = \begin{cases} \dfrac{2^{\nu+2}}{\Gamma(-\nu-1)} x \int\limits_0^x (x^2-t^2)^{-\nu-2} t^{\nu+1} f(t)\,dt, & \operatorname{Re}\nu < -1, \\ \dfrac{2^{\nu+1}}{\Gamma(-\nu)} \dfrac{d}{dx} \int\limits_0^x (x^2-t^2)^{-\nu-1} t^{\nu+1} f(t)\,dt, & \operatorname{Re}\nu < 0; \end{cases} $$

$$ {}_0P_{0+}^\nu f = \begin{cases} \dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} x^{-\nu} \int\limits_0^x (x^2-t^2)^{\nu} f(t)\,dt, & \operatorname{Re}\nu > -1, \\ \dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+2)} \dfrac{1}{x^{\nu+1}} \dfrac{d}{dx} \int\limits_0^x (x^2-t^2)^{\nu+1} f(t)\,dt, & \operatorname{Re}\nu > -2; \end{cases} $$

$$ {}_0P_-^\nu f = \begin{cases} \dfrac{2^{\nu+2}}{\Gamma(-\nu-1)} x^{\nu+1} \int\limits_x^\infty (t^2-x^2)^{-\nu-2} t f(t)\,dt, & \operatorname{Re}\nu < -1, \\ \dfrac{2^{\nu+1}}{\Gamma(-\nu)} x^{\nu} \left(-\dfrac{d}{dx}\right) \int\limits_x^\infty (t^2-x^2)^{-\nu-1} t f(t)\,dt, & \operatorname{Re}\nu < 0; \end{cases} $$

$$ {}_0S_-^\nu f = \begin{cases} \dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \int\limits_x^\infty (t^2-x^2)^{\nu} t^{-\nu} f(t)\,dt, & \operatorname{Re}\nu > -1, \\ \dfrac{1}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+2)} \left(-\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\right) \int\limits_x^\infty (t^2-x^2)^{\nu+1} t^{-\nu} f(t)\,dt, & \operatorname{Re}\nu > -2. \end{cases} $$

Эти операторы являются сплетающими типа Сонина или Пуассона. Если построить новые ОП для оператора углового момента (см. (2.103)), то получим операторы типа Сонина

$$ X_\nu f = {}_0S_{0+}^{\nu-1/2} x^\nu f = \frac{2^{\nu+3/2}}{\Gamma(-\nu-\frac{1}{2})} x \int\limits_0^x (x^2-t^2)^{-\nu-3/2} t^{2\nu+1} f(t)\,dt, $$

если $\operatorname{Re}\nu < -1/2$, а если $\operatorname{Re}\nu < 1/2$, то

$$ X_\nu f = S_\nu f = \frac{2^{\nu+1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\nu)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x (x^2-t^2)^{-\nu-1/2} t^{2\nu+1} f(t)\,dt. \tag{2.116} $$

Аналогично получим оператор типа Пуассона вида

$$Y_\nu f = P_\nu f = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \frac{1}{x^{2\nu}} \int\limits_0^x (x^2 - t^2)^{\nu - 1/2} f(t)\, dt, \tag{2.117}$$

при условии $\operatorname{Re} \nu > -1/2$.

Отметим, что из теоремы 2.9 выводятся и формулы (2.93)–(3.94).

Перейдём теперь к изучению операторов (2.89)–(2.92). Отметим, что если функция $f(x)$ допускает дифференцирование под знаком интеграла или интегрирование по частям, то операторы (2.89)–(2.92) принимают следующий вид:

$$_1S^\nu_{0+} f = f(x) + \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial x} P_\nu \left(\frac{x}{y}\right) f(y) dy, \tag{2.118}$$

$$_1P^\nu_{0+} f = f(x) - \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial y} P_\nu \left(\frac{y}{x}\right) f(y) dy, \tag{2.119}$$

$$_1P^\nu_{-} f = f(x) + \int\limits_x^\infty \frac{\partial}{\partial y} P_\nu \left(\frac{y}{x}\right) f(y) dy, \tag{2.120}$$

$$_1S^\nu_{-} f = f(x) - \int\limits_x^\infty \frac{\partial}{\partial x} P_\nu \left(\frac{x}{y}\right) f(y) dy. \tag{2.121}$$

При этом дополнительно для справедливости (2.119) и (2.120) соответственно необходимы условия

$$\lim_{x\to 0} P_\nu(0) f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} P_\nu(x) f(x) = 0.$$

Несложными выкладками можно доказать, что при определённых условиях на функции операторы (2.89)–(2.92) являются операторами преобразования. Они сплетают оператор углового момента и вторую производную.

Из теоремы 2.9 вытекают следующие факторизации для операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости.

Следствие. *Справедливы формулы*:

$$_1S^\nu_{0+} = I^{\nu+1}_{0+} I^{-(\nu+1)}_{0+;\,2,\,\nu+1/2} \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1}, \tag{2.122}$$

$$_1P^\nu_{0+} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} I^{\nu+1}_{0+;\,2,\,-1/2} I^{-(\nu+1)}_{0+}, \tag{2.123}$$

$$ {}_1P_-^{\nu} = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu+1} I_{-;\,2,\,\nu+1}^{-(\nu+1)} I_-^{\nu+1}, \tag{2.124} $$

$$ {}_1S_-^{\nu} = I_-^{-(\nu+1)} I_{-;\,2,\,0}^{\nu+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}. \tag{2.125} $$

Рассмотрим более подробно свойства ОП Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, введённых по формулам (2.89). Подобный оператор был построен В.В. Катраховым [75, 76] путём домножения стандартного ОП Сонина на обычный дробный интеграл с целью взаимно компенсировать гладкость этих двух операторов и получить новый, который действовал бы в одном пространстве типа $L_2(0,\infty)$. Как впоследствии оказалось, это можно сделать известными средствами, так как ОП Сонина—это частный случай операторов Эрдейи–Кобера. Известна замечательная теорема Эрдейи, позволяющая выделить стандартный дробный интеграл Римана–Лиувилля из дробного интеграла по любой функции [198]. В результате получается

Теорема 2.10. *Рассмотрим оператор дробного интегро-дифференцирования Эрдейи–Кобера по функции* $g(x) = x^2$

$$ I_{0+;\ x^2}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} 2t \cdot f(t)\, dt $$

при значениях $\operatorname{Re}\alpha > 0$. *Тогда при* $0 < \operatorname{Re}\alpha < \frac{1}{2}$ *на подходящих функциях справедливо представление оператора Эрдейи–Кобера через дробный интеграл Римана–Лиувилля и оператор Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости* (2.89) *при* $0 < \operatorname{Re}\,\alpha < \frac{1}{2}$:

$$ I_{0+,x^2}^{\alpha}(f)(x) = I_{0+}^{\alpha} \left((2x)^{\alpha} f(x) + \int\limits_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x} P_{-\alpha}\left(\frac{x}{t}\right) \right) (2t)^{\alpha} f(t)\, dt \right) = $$

$$ = B_{0+}^{\nu,1}\left((2x)^{\alpha} f\right), \tag{2.126} $$

где I_{0+}^{α} *— обычный дробный интеграл Римана–Лиувилля* (см. п. 1.4.1).

Доказательство. Из теоремы Эрдейи [198, с. 249, теорема 18.1] мы получаем представление вида

$$ (2x)^{\alpha} f(x) + \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x,s) f(s)\, ds. $$

Для ядра $\Phi(x,s)$ справедливо представление [198]

$$\Phi(x,s)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}2s\cdot\int\limits_s^x(x-u)^{-\alpha}(u-s)^{\alpha-1}\frac{(u-1)^{1-\alpha}}{(u^2-s^2)^{1-\alpha}}du=$$

$$=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\cdot 2s\cdot\int\limits_s^x(x-u)^{-\alpha}(u^2-s^2)^{\alpha-1}du.$$

Интеграл вычисляется по [189, т. 1, с. 301, формула 1]. Получаем

$$\Phi(x,s)=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\cdot 2s\cdot(2s)^{\alpha-1}\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\,{}_2F_1(\alpha,1-\alpha;1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{x}{s})=$$

$$=(2s)^{\alpha}{}_2F_1(\alpha,1-\alpha;1;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{x}{s}).\qquad(2.127)$$

Осталось воспользоваться [189, т. 3, с. 129, формула 14].

Операторы нулевого порядка гладкости выделяются тем, что только для них можно доказать оценки в *одном* пространстве типа $L_p(0,\infty)$. При этом, учитывая структуру этих операторов, удобно пользоваться техникой преобразования Меллина и теоремой Слейтер (см. п. 1.3.3).

Теорема 2.11.

1. *Операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости действуют по правилу* (1.35). *Для их мультипликаторов справедливы формулы*:

$$m_{{}_1S^{\nu}_{0+}}(s)=\frac{\Gamma\Big(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1\Big)\Gamma\Big(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{s}{2}\Big)}=$$

$$=\frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\Big(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1\Big)}{\Gamma(1-s)},$$

$$\operatorname{Re}s<\min(2+\operatorname{Re}\nu,1-\operatorname{Re}\nu);\qquad(2.128)$$

$$m_{{}_1P^{\nu}_{0+}}(s)=\frac{\Gamma\Big(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{s}{2}\Big)}{\Gamma\Big(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1\Big)\Gamma\Big(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\Big)},\quad\operatorname{Re}s<1;\qquad(2.129)$$

$$m_{{}_1P^{\nu}_{-}}(s)=\frac{\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\Big)},\qquad(2.130)$$

$$\operatorname{Re}s>\max(\operatorname{Re}\nu,-1-\operatorname{Re}\nu);\qquad(2.131)$$

$$m_{{}_1S_-^\nu}(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}\right)}, \qquad \operatorname{Re} s > 0. \tag{2.132}$$

2. *Кроме того, выполняются следующие соотношения для мультипликаторов*:

$$m_{{}_1P_{0+}^\nu}(s) = 1/m_{{}_1S_{0+}^\nu}(s), \;\; m_{{}_1P_-^\nu}(s) = 1/m_{{}_1S_-^\nu}(s), \tag{2.133}$$

$$m_{{}_1P_-^\nu}(s) = m_{{}_1S_{0+}^\nu}(1-s), \;\; m_{{}_1P_{0+}^\nu}(s) = m_{{}_1S_-^\nu}(1-s). \tag{2.134}$$

3. *Справедливы следующие формулы для норм операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в* L_2:

$$\|{}_1S_{0+}^\nu\| = \|{}_1P_-^\nu\| = 1/\min(1, \sqrt{1-\sin(\pi\nu)}\,), \tag{2.135}$$

$$\|{}_1P_{0+}^\nu\| = \|{}_1S_-^\nu\| = \max(1, \sqrt{1-\sin(\pi\nu)}\,). \tag{2.136}$$

4. *Нормы операторов* (2.89)–(2.92) *периодичны по* ν *с периодом* 2, *т. е.* $\|x^\nu\| = \|x^{\nu+2}\|$, *где* x^ν — *любой из операторов* (2.89)–(2.92).

5. *Нормы операторов* ${}_1S_{0+}^\nu$, ${}_1P_-^\nu$ *неограничены в совокупности по* ν, *каждая из этих норм не меньше* 1. *Если* $\sin(\pi\nu) \leqslant 0$, *то эти нормы равны* 1. *Указанные операторы неограничены в* L_2 *тогда и только тогда, когда* $\sin(\pi\nu) = 1$ (*или* $\nu = 2k + 1/2,\ k \in \mathbb{Z}$).

6. *Нормы операторов* ${}_1P_{0+}^\nu$, ${}_1S_-^\nu$ *ограничены в совокупности по* ν, *каждая из этих норм не больше* $\sqrt{2}$. *Все эти операторы ограничены в* L_2 *при всех* ν. *Если* $\sin\pi\nu \geqslant 0$, *то их* L_2-*норма равна* 1. *Максимальное значение нормы, равное* $\sqrt{2}$, *достигается тогда и только тогда, когда* $\sin\pi\nu = -1$ (*или* $\nu = 2k - 1/2,\ k \in \mathbb{Z}$).

Доказательство. Будем доказывать требуемые утверждения для первого оператора, для остальных доказательства аналогичны.

1. Сначала докажем формулу (1.35) с нужным мультипликатором (2.128). Используя последовательно [148: с. 130, формула (7); с. 129, формула (2); с. 130, формула (4)], получим

$$M\left[B_{0+}^{\nu,1}\right](s) =$$
$$= \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)} \cdot M\left[\int_0^\infty \left\{H\left(\frac{x}{y}-1\right)P_\nu\left(\frac{x}{y}\right)\right\}\{yf(y)\}\,\frac{dy}{y}\right](s-1) =$$
$$= \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)} \cdot M\left[(x^2-1)_+{}^0P_\nu^0(x)\right](s-1) \cdot M\left[f\right](s),$$

где использованы обозначения из [148] для усечённой степенной функции и функции Хевисайда:

$$x_+{}^\alpha = \begin{cases} x^\alpha, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases} \qquad H(x) = x_+{}^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Далее, используя формулы из [148: с. 234, формула 14(1); с. 130, формула (4)], получаем:

$$M\left[(x-1)_+{}^0P_\nu^0(\sqrt{x}\,)\right](s)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-s\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}-s\right)}{\Gamma(1-s)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)},$$

$$M\left[(x^2-1)_+{}^0P_\nu^0(x)\right](s-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{s-1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}-\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s-1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1\right)}$$

при условиях $\operatorname{Re} s<\min(2+\operatorname{Re}\nu,\,1-\operatorname{Re}\nu)$. Отсюда выводим формулу для мультипликатора

$$M\left[B_{0+}^{\nu,1}\right](s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)}\cdot\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1\right).$$

Применяя к $\Gamma\,(2-s)$ формулу Лежандра удвоения аргумента гамма-функции (см. (1.7)), получим

$$M\left[B_{0+}^{\nu,1}\right](s)=\frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma\Big(-\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+1\Big)\Gamma\Big(-\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\Big)}{\Gamma(1-s)}.$$

Ещё одно применение формулы удвоения Лежандра к $\Gamma(1-s)$ приводит к нужной формуле для мультипликатора (2.128).

В [223] показано, что условия справедливости доказанной формулы, приведённые для более общего случая в [148], в данном случае за счёт рассмотрения подходящих факторизаций являются завышенными, их можно несколько расширить. В частности, формула для мультипликатора справедлива при условиях $0<\operatorname{Re} s<1$ для всех значений параметра ν, что проверяется непосредственно.

2. Теперь установим формулу для нормы (2.135). Из найденной формулы для мультипликатора в силу теоремы 1.3 получаем на прямой $\operatorname{Re} s=1/2, s=iu+1/2$

$$|M\left[B_{0+}^{\nu,1}\right](iu+1/2)|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{\Gamma\Big(-i\frac{u}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\Big)\Gamma\Big(-i\frac{u}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{1}{2}-iu\Big)}\right|.$$

Далее будем опускать у мультипликатора указание на порождающий его оператор. Используем формулу для модуля комплексного числа $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$ и тождество для гамма–функции $\overline{\Gamma(z)}=\Gamma(\overline{z})$, вытекающее из её определения в виде интеграла. Последнее равенство справедливо

для класса так называемых вещественно-аналитических функций, к которому относится и гамма-функция. Тогда получим

$$|M\left[B_{0+}^{\nu,1}\right](iu+1/2)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times$$
$$\times\left|\frac{\Gamma\Big(-i\frac{u}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\Big)\Gamma\Big(i\frac{u}{2}-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\Big)\Gamma\Big(-i\frac{u}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\Big)\Gamma\Big(i\frac{u}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{1}{2}-iu\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}+iu\Big)}\right|.$$

Объединим крайние и средние сомножители числителя, затем три образовавшиеся пары гамма-функций преобразуем по известной формуле (см. [11])

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}.$$

В результате будем иметь

$$\left|M\left[B_{0+}^{\nu,1}\right](iu+1/2)\right| = \sqrt{\frac{\cos(\pi iu)}{2\cos\left[\pi\Big(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}+i\frac{u}{2}\Big)\right]\cos\left[\pi\Big(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}-i\frac{u}{2}\Big)\right]}} =$$
$$= \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(\pi u)}{\operatorname{ch}(\pi u)-\sin(\pi\nu)}}.$$

Далее обозначим $t = \operatorname{ch}(\pi u), 1 \leqslant t < \infty$. Отсюда, применяя условие из теоремы 1.3, получаем

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}\left|m\left(iu+\frac{1}{2}\right)\right| = \sup_{1\leqslant t<\infty}\sqrt{\frac{t}{t-\sin(\pi\nu)}}.$$

Поэтому если $\sin(\pi\nu) \geqslant 0$, то супремум достигается при $t = 1$ и справедлива нужная формула для нормы

$$\|B_{0+}^{\nu,1}\|_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\pi\nu)}}.$$

Если же $\sin(\pi\nu) < 0$, то супремум достигается при $t \to \infty$ и справедлива формула

$$\|B_{0+}^{\nu,1}\|_{L_2} = 1.$$

Эта часть теоремы доказана.

Утверждения 3–6 теоремы теперь напрямую следуют из найденной формулы для нормы и условий теоремы 1.3.

Теорема полностью доказана.

2.3.4. Унитарность операторов Бушмана–Эрдейи. Важнейшим свойством операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости является их унитарность при целых ν. Отметим, что при интерпретации L_ν как оператора углового момента в квантовой механике параметр

ν как раз и принимает целые неотрицательные значения. Сформулируем один из основных результатов данной главы.

Теорема 2.12. *Для унитарности в L_2 операторов* (2.89)–(2.92) *необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым. В этом случае пары операторов* $({}_1S^{\nu}_{0+},\ {}_1P^{\nu}_{-})$ *и* $({}_1S^{\nu}_{-},\ {}_1P^{\nu}_{0+})$ *взаимно обратны.*

Доказательство. При $\nu \in \mathbb{Z}$ получим $\sin(\pi\nu) = 0$, тогда модуль соответствующего мультипликатора в формуле (2.128) тождественно равен единице на нужной прямой $\operatorname{Re} s = \dfrac{1}{2}$. Поэтому, согласно п. г) теоремы 1.3, данный оператор является унитарным в $L_2(0,\infty)$, как и его обратный. То, что соответствующие пары операторов являются взаимно обратными, теперь следует из того, что они являются сопряжёнными в $L_2(0,\infty)$. Теорема доказана.

Эта теорема была первоначально сформулирована в [74, 75], доказательство содержало неточности (утверждалась унитарность при всех ν), затем скорректированные в [202, 203, 205, 225]; см. также [208, 223, 466].

Перед формулировкой частного случая как следствия предположим, что операторы (2.89)–(2.92) заданы на таких функциях $f(x)$, что справедливы представления (2.118)–(2.121) (для этого достаточно предположить, что $xf(x) \to 0$ при $x \to 0$). Тогда при $\nu = 1$

$$ {}_1P^1_{0+} f = (I - H_1)f,\ \ {}_1S^1_{-} f = (I - H_2)f, \tag{2.137} $$

где H_1, H_2 — операторы Харди:

$$ H_1 f = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(y)dy,\ \ H_2 f = \int\limits_x^\infty \frac{f(y)}{y}dy, \tag{2.138} $$

I — единичный оператор.

Следствие. *Операторы* (2.137) *являются унитарными взаимно обратными в L_2 операторами. Они сплетают дифференциальные выражения* $\dfrac{d^2}{dx^2}$ *и* $\dfrac{d^2}{dx^2} - \dfrac{2}{x^2}$.

Кроме того, можно показать, что операторы (2.137) являются преобразованиями Кэли от симметричных операторов $\pm 2i(xf(x))$ при соответствующем выборе областей определения.

В унитарном случае операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости образуют пару биортогональных преобразований Ватсона, а их ядра образуют пары несимметричных ядер Фурье (см. [65]) Ограниченность операторов с подобными мультипликаторами изучалась еще Лесли Фоксом.

Отметим важность изучения унитарности для теории интегральных уравнений. В этом случае обратный оператор необходимо искать в виде интеграла с другими, нежели у исходного, пределами интегрирования.

Рассмотрим случай $\nu = i\alpha - \frac{1}{2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, связанный с преобразованием Мелера–Фока.

Теорема 2.13. *Пусть* $\nu = i\alpha - \frac{1}{2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Тогда операторы* (2.89)–(2.92) *ограничены в* L_2 *при всех таких* ν. *Для их норм справедливы формулы*

$$\|{}_1S_{0+}^{i\alpha-1/2}\| = \|{}_1P_{-}^{i\alpha-1/2}\| = 1.$$

Доказательство такое же, как и для вещественного ν.

Далее перечислим некоторые общие свойства операторов, которые действуют по правилу (1.35) как умножение на некоторый мультипликатор в образах преобразования Меллина и одновременно являются сплетающими для второй производной и оператора углового момента.

Теорема 2.14. *Пусть оператор* S_ν *действует по формулам* (1.35) *и* (2.104). *Тогда*:

а) *его мультипликатор удовлетворяет функциональному уравнению*

$$m(s) = m(s-2)\frac{(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)-\nu(\nu+1)}; \tag{2.139}$$

б) *если функция* $p(s)$ *периодична с периодом* 2 (*т.е.* $p(s) = p(s-2)$), *то функция* $p(s)m(s)$ *является мультипликатором нового оператора преобразования* S_2^ν, *опять же сплетающего* L_ν *и вторую производную по правилу* (2.104).

Доказательство. Утверждение б) следует из а). Уравнение (2.139) получается из (2.104) применением преобразования Меллина и использованием формул преобразования простейших операций (см. [148]). Доказательство закончено.

Последняя теорема еще раз показывает, насколько удобно изучение ОП в терминах мультипликаторов преобразования Меллина.

Определим *преобразование Стилтьеса* (см., например, [198]) по формуле

$$(Sf)(x) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}dt.$$

Этот оператор имеет вид (1.35) с мультипликатором $p(s) = \pi/\sin(\pi s)$ и ограничен в L_2. Очевидно, что $p(s) = p(s-2)$. Поэтому из теоремы 2.14 следует, что композиция преобразования Стилтьеса с ограниченными сплетающими операторами (2.89)–(2.92) снова является оператором преобразования того же типа, ограниченным в L_2.

Отметим, что из предыдущего изложения следует

$$\|S\|_{L_r} = |\pi/\sin\frac{\pi}{r}|, \ r > 1.$$

С другой стороны,

$$\|S\|_{L_{2,k}} = |\pi/\sin(\pi k)|, \ k \notin \mathbb{Z}.$$

Аналогично получаются оценки в весовых пространствах $L_{r,k}$, $r > 0$.

Рассмотрим теперь оператор H^ν вида (1.35) с мультипликатором

$$m(s) = \sqrt{\frac{\sin(\pi s) - \sin(\pi\nu)}{\sin(\pi s)}}. \tag{2.140}$$

Из теоремы 2.11 получаем, что на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ величина $m(s)$ по модулю равна единице. Тогда из этой теоремы следует, что

$$\|H^\nu\|_{L_2} = \|{}_1P^\nu_{0+}\|_{L_2} = \|{}_1S^\nu_-\|_{L_2}. \tag{2.141}$$

Поэтому для оператора H^ν справедливо заключение теоремы 2.11. В частности, H^ν ограничен в L_2 при всех ν.

Отметим, что формально этот оператор связан с преобразованием Стилтьеса формулой

$$H^\nu = \left(1 - \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} S\right)^{1/2}. \tag{2.142}$$

Одновременно с H^ν введём оператор $\mathfrak{D}^\nu$ с мультипликатором

$$m_{\mathfrak{D}^\nu}(s) = \sqrt{\frac{\sin(\pi s)}{\sin(\pi s) - \sin(\pi\nu)}}$$

Отсюда получаем, что

$$\|\mathfrak{D}^\nu\|_{L_2} = \|{}_1S^\nu_{0+}\|_{L_2} = \|{}_1P^\nu_-\|_{L_2} \tag{2.143}$$

и, кроме того, оператор $\mathfrak{D}^\nu$ ограничен при $\sin\pi\nu \neq 1$.

Теорема 2.15. *Рассмотрим композиции операторов*

$${}_3S^\nu_{0+} = {}_1S^\nu_{0+} H^\nu, \ {}_3S^\nu_- = \mathfrak{D}^\nu {}_1S^\nu_-, \tag{2.144}$$

$${}_3P^\nu_{0+} = \mathfrak{D}^\nu {}_1P^\nu_{0+}, \ {}_3P^\nu_- = {}_1P^\nu_- H^\nu. \tag{2.145}$$

Тогда операторы ${}_3S^\nu_{0+}$, ${}_3S^\nu_-$ *являются новыми операторами преобразования типа Сонина, а* ${}_3P^\nu_{0+}$, ${}_3P^\nu_-$ *— типа Пуассона. Все эти операторы унитарны в* L_2. *Кроме того, если* $\sin(\pi\nu) \neq 1$, *то композиции* (2.144)–(2.145) *можно вычислять в любом порядке.*

Доказательство этой теоремы очевидно и следует из перехода к мультипликаторам. Аналогичная идея применена в [425] для подправления преобразования Радона до изометрии.

Ниже будет получено явное интегральное представление операторов преобразования, сплетающих L_ν и $\frac{d^2}{dx^2}$, которые *унитарны при всех* $\nu \in \mathbb{R}$.

Изучим вопрос о взаимосвязи разносторонних операторов Бушмана–Эрдейи. Полученные формулы аналогичны тем, которые связывают

лево- и правосторонние дробные интегралы Римана–Лиувилля (см. [198, с. 163–171]). С этой целью введём оператор

$$C^\nu f = f(x) - \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} Sf, \tag{2.146}$$

где S — преобразование Стилтьеса. Приведём без доказательства свойства C^ν:

1) $\|C^\nu\|_{L_2} = \min(1, 1 - \sin(\pi\nu)) \leqslant 1,\ \nu \in \mathbb{R}$;
2) $\|C^\nu\|_{L_2} = 1 + \operatorname{ch}(\pi\alpha),\ \nu = i\alpha - \dfrac{1}{2},\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.16. *При $\nu \in \mathbb{R}$ справедливы тождества для композиций*:

$$C^\nu = {}_1S^\nu_- \ {}_1P^\nu_{0+} = {}_1P^\nu_{0+} \ {}_1S^\nu_-, \tag{2.147}$$

$${}_1S^\nu_- = {}_1S^\nu_{0+} \ C^\nu,\ {}_1P^\nu_{0+} = {}_1P^\nu_- \ C^\nu, \tag{2.148}$$

$${}_1S^\nu_- = C^\nu \ {}_1S^\nu_{0+},\ {}_1P^\nu_{0+} = C^\nu \ {}_1P^\nu_-,\ \sin(\pi\nu) \neq 1. \tag{2.149}$$

2.3.5. Интегральные операторы преобразования Бушмана–Эрдейи второго рода. Теперь определим и изучим операторы Бушмана–Эрдейи второго рода. В этом пункте для краткости некоторые доказательства будут опущены, так как они в основном повторяют доказательства из п. 2.3.4.

Введем новую пару операторов Бушмана–Эрдейи с функциями Лежандра второго рода (см. п. 1.1.4) в ядре.

Определение 2.7. *Операторы Бушмана–Эрдейи ${}_2S^\nu$ и ${}_2P^\nu$ с функциями Лежандра второго рода в ядре* определяются формулами

$${}_2S^\nu f = \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^x (x^2 - y^2)^{-1/2} Q^1_\nu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)dy + \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-1/2} \mathbb{Q}^1_\nu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)dy\right), \tag{2.150}$$

$${}_2P^\nu f = \frac{2}{\pi}\left(-\int_0^x (x^2 - y^2)^{-1/2} \mathbb{Q}^1_\nu\left(\frac{y}{x}\right) f(y)dy - \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-1/2} Q^1_\nu\left(\frac{y}{x}\right) f(y)dy\right). \tag{2.151}$$

При $y \to x \pm 0$ интегралы понимаются в смысле главного значения. Отметим без доказательства, что эти операторы определены и являются сплетающими при некоторых условиях на функции $f(x)$ (при этом оператор (2.150) будет типа Сонина, (2.151) — типа Пуассона).

Теорема 2.17. *Операторы* (2.150), (2.151) *представимы в виде* (1.35) *с мультипликаторами*

$$m_{{}_2S^\nu}(s) = p(s) \ m_{{}_1S^\nu_-}(s), \tag{2.152}$$

$$m_{{}_2P^\nu}(s) = \frac{1}{p(s)}\, m_{{}_1P^\nu_-}(s), \tag{2.153}$$

где мультипликаторы операторов ${}_1S_-{}^\nu$, ${}_1P_-{}^\nu$ *определены формулами* (2.131)–(2.132), *а функция* $p(s)$ (*с периодом* 2) *имеет вид*

$$p(s) = \frac{\sin(\pi\nu) + \cos(\pi s)}{\sin(\pi\nu) - \sin(\pi s)}. \tag{2.154}$$

Вначале докажем лемму.

Лемма 2.1. *Рассмотрим более общий, чем* (2.150), *интегральный оператор при значениях* $\operatorname{Re}\nu < 1$:

$$\begin{aligned} {}_3S^{\nu,\mu} f = \frac{2}{\pi}\Bigg(\int\limits_0^x (x^2+y^2)^{-\mu/2} e^{-\mu\pi i} Q_\nu^\mu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy + \\ + \int\limits_x^\infty (y^2+x^2)^{-\mu/2} \mathbb{Q}_\nu^\mu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\Bigg), \end{aligned} \tag{2.155}$$

где $Q_\nu^\mu(z)$ — *функция Лежандра второго рода*, $\mathbb{Q}_\nu^\mu(z)$ — *значение этой функции на разрезе.*

Тогда на функциях из $C_0^\infty(0,\infty)$ *оператор* (2.155) *определён и действует по формуле*

$$M\,{}_3S^{\nu,\mu}(s) = m(s)\cdot M x^{1-\mu} f(s),$$

$$\begin{aligned} m(s) = 2^{\mu-1}\frac{\cos\pi(\mu-s) - \cos(\pi\nu)}{\sin\pi(\mu-s) - \sin(\pi\nu)}\times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{2.156}$$

Доказательство. Из асимптотики функций Лежандра [11] следует, что оператор (2.155) определён. Записывая его как свёртку Меллина и последовательно применяя [148: с. 31, формула (2.50); с. 283, формула (10); с. 251, формула 40(1); с. 130, формула (5)], получим выражение (2.156) со значением мультипликатора

$$\begin{aligned} \frac{2^{\mu-2}}{\pi^2}\cdot\frac{\sin(\pi(\nu-\mu))}{\sin(\pi\mu)}\times \\ \times\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}-\frac{s}{2}\right)+ \end{aligned}$$

$$+\frac{2^{\mu-1}}{\sin(\pi\mu)}\cdot\frac{\Gamma\Big(\frac{1+\mu+\nu}{2}-\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\mu-\nu}{2}-\frac{s}{2}\Big)}{\Gamma\Big(1-\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\Big)}+$$

$$+\frac{2^{\mu-1}\cos(\pi\mu)}{\sin(\pi\mu)}\cdot\frac{\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{1-\nu-\mu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}+1+\frac{\nu-\mu}{2}\Big)}.$$

В двух последних слагаемых «поднимем» гамма-функции в числитель из знаменателя, переходя от $\Gamma(z)$ к $\Gamma(1-z)$. Получим

$$m(s)=\frac{2^{\mu-1}}{\pi^2\sin(\pi\mu)}A(s)\cdot\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu-s}{2}\right).$$

Выражение $A(s)$ последовательно преобразуем по элементарным тригонометрическим формулам:

$$A(s)=\sin\pi(\nu-\mu)+$$
$$+2\sin\frac{\pi s}{2}\cos\frac{\pi s}{2}-2\cos(\pi\mu)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(s-\nu-\mu)\right)\left(\sin\frac{\pi}{2}(s+\nu-\mu)\right)=$$
$$=\sin(\pi(\nu-\mu))+\sin(\pi s)-\cos(\pi\mu)\cdot[\sin\pi\nu+\sin(\pi(s-\mu))]=$$
$$=\sin(\pi\mu)\cdot[\cos(\pi(s-\mu))-\cos(\pi\nu)].$$

Подставим это выражение в $m(s)$. «Перебрасывая» две последние гамма-функции в знаменатель, получим (2.156). Применение указанных формул из [148] приводит к ограничениям на значения переменной

$$0<\mathrm{Re}\,(\nu+\mu)<\min(1+\mathrm{Re}\,(\nu+\mu),\ \mathrm{Re}\,(\mu-\nu)),\tag{2.157}$$

которые в нашем случае можно ослабить. Лемма доказана.

Перейдём к доказательству теоремы 3.13. Из (2.156) следует, что можно перейти к пределу при $\mu\to1-0$. Отсюда получим (2.152) и (2.154). Аналогичными рассуждениями доказывается (2.153).

Отметим, что в процессе доказательства построено еще одно семейство операторов преобразования типа Сонина (2.155).

Доказательства следующих результатов полностью аналогичны соответствующим утверждениям для операторов Бушмана–Эрдейи первого рода.

Теорема 2.18. *Справедливы формулы для норм*

$$\|{}_2S^\nu\|_{L_2}=\max(1,\sqrt{1+\sin(\pi\nu)}\,),\tag{2.158}$$

$$\|{}_2P^\nu\|_{L_2}=1/\min(1,\sqrt{1+\sin(\pi\nu)}\,).\tag{2.159}$$

Следствие. *Оператор* ${}_2S^\nu$ *ограничен при всех* ν. *Оператор* ${}_2P^\nu$ *непрерывен тогда и только тогда, когда* $\sin\pi\nu \neq -1$.

Теорема 2.19. *Для унитарности в* L_2 *операторов* ${}_2S^\nu$ *и* ${}_2P^\nu$ *необходимо и достаточно, чтобы параметр* ν *был целым числом.*

Теорема 2.20. *Пусть* $\nu = i\beta + 1/2,\ \beta \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\|{}_2S^\nu\|_{L_2} = \sqrt{1+\operatorname{ch}(\pi\beta)}\,,\ \|{}_2P^\nu\|_{L_2} = 1. \tag{2.160}$$

Теорема 2.21. *Справедливы представления*

$${}_2S^0 f = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{y}{x^2-y^2} f(y)\,dy, \tag{2.161}$$

$${}_2S^{-1} f = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{x}{x^2-y^2} f(y)\,dy. \tag{2.162}$$

Таким образом, в этом случае оператор ${}_2S^\nu$ сводится к паре известных преобразований Гильберта на полуоси [198].

§ 2.4. Унитарные операторы преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова

Перейдём к построению операторов преобразования, унитарных при всех ν. Напомним, что такие операторы определяются по формулам (см. (2.76), (2.77)):

$$S_U^\nu f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\ {}_2S^\nu f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\ {}_1S_-{}^\nu f, \tag{2.163}$$

$$P_U^\nu f = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\ {}_2P^\nu f + \cos\frac{\pi\nu}{2}\ {}_1P_-{}^\nu f. \tag{2.164}$$

Для любых значений $\nu \in \mathbb{R}$ они являются линейными комбинациями операторов преобразования Бушмана–Эрдейи первого и второго родов нулевого порядка гладкости. Их можно назвать операторами Бушмана–Эрдейи третьего рода. В интегральной форме эти операторы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} S_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int\limits_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy + \\ + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-1/2} Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\ - \right. \\ \left. - \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-1/2}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right) f(y)\,dy\right), \end{aligned} \tag{2.165}$$

$$P_U^\nu f = \cos\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_0^x P_\nu\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d}{dy}\right)f(y)\,dy-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-1/2}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy-\right.$$

$$\left.-\int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-1/2}Q_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\right). \quad (2.166)$$

Теорема 2.22. *Операторы* (2.163)–(2.164) *или* (2.165)–(2.166) *при всех* ν *являются унитарными, взаимно сопряжёнными и обратными в* L_2. *Они являются сплетающими и действуют по формулам* (2.103). *При этом* S_U^ν *является оператором типа Сонина* (*Сонина–Катрахова*), *а* P_U^ν *— типа Пуассона* (*Пуассона–Катрахова*).

Доказательство. Проверим выполнение равенства (1.39) для одного из мультипликаторов. Аналогично случаю теоремы 2.11 с использованием свёртки Меллина и формул для преобразования Меллина специальных функций получается следующая формула для мультипликатора:

$$M\left[S_U^\nu\right](s) = -\sin\frac{\pi\nu}{2}\cdot\frac{-\cos(\pi s)-\cos(\pi\nu)}{\sin(\pi s)-\sin(\pi\nu)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}+$$

$$+\cos\frac{\pi\nu}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\left(-\sin\frac{\pi\nu}{2}\cdot\frac{-\cos(\pi s)-\cos(\pi\nu)}{\sin(\pi s)-\sin(\pi\nu)}+\cos\frac{\pi\nu}{2}\right)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Полностью вычисления проведены в [223]. Далее рассматриваем согласно теореме 1.3 с учётом выкладок из теоремы 2.11 величину

$$\left|M\left[S_U^\nu\right]\left(iu+\frac{1}{2}\right)\right| = \left|-\sin\frac{\pi\nu}{2}\cdot\frac{-\cos\left[\pi\left(iu+\frac{1}{2}\right)\right]-\cos(\pi\nu)}{\sin\left[\pi\left(iu+\frac{1}{2}\right)\right]-\sin(\pi\nu)}+\cos\frac{\pi\nu}{2}\right|\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\cos(\pi u)-\sin(\pi\nu)}{\cos(\pi u)}} = \left|\frac{\sin\frac{\pi\nu}{2}-\cos\left(\frac{\pi\nu}{2}+\pi iu\right)}{\sin(\pi\nu)-\cos(\pi iu)}\right|\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\cos(\pi u)-\sin(\pi\nu)}{\cos(\pi u)}} = \left|\frac{\sin\frac{\pi\nu}{2}-\cos\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{ch}(\pi u)+i\sin\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{sh}(\pi u)}{\sqrt{\operatorname{ch}(\pi u)[\operatorname{ch}(\pi u)-\sin(\pi\nu)]}}\right|.$$

Вычисляя модуль и заменяя затем тригонометрический и гиперболический синусы на косинусы, получим:

$$\left|M\left[S_U^\nu\right]\left(iu+\frac{1}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{\left[\sin\frac{\pi\nu}{2}-\cos\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{ch}(\pi u)\right]^2+\left[\sin\frac{\pi\nu}{2}\operatorname{sh}(\pi u)\right]^2}{\operatorname{ch}(\pi u)[\operatorname{ch}(\pi u)-\sin(\pi\nu)]}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2(\pi u)-\sin(\pi\nu)\operatorname{ch}(\pi u)}{\operatorname{ch}(\pi u)[\operatorname{ch}(\pi u)-\sin(\pi\nu)]}} = 1.$$

Унитарность этим доказана. Взаимная сопряжённость следует из определений (2.163)–(2.164), если рассматривать операторы как расширения с множества финитных функций. Следовательно, эти унитарные операторы и взаимно обратны. То, что они являются ОП типа Сонина и Пуассона, вытекает из проверки условий для мультипликаторов теоремы 1.3. Теорема доказана.

Этим результатом завершается история построения унитарных ОП типа Сонина и Пуассона. Унитарные операторы преобразования тесно связаны с унитарностью оператора рассеяния в задачах квантовой механики [3, 269, 270, 286].

Интересно рассмотреть частный случай, который вытекает из теоремы 2.22 при $\nu = 1$. Получаем пару очень простых операторов

$$B_{0+}^{1,1}f = f(x) - \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy, \qquad B_{-}^{1,1}f = f(x) - \int_x^\infty \frac{f(y)}{y}\,dy, \tag{2.167}$$

связанных со знаменитыми операторами Харди

$$H_1 f = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy, \qquad H_2 f = \int_x^\infty \frac{f(y)}{y}\,dy. \tag{2.168}$$

По поводу теории неравенств Харди см. [435]. Из наших результатов следует

Теорема 2.23. *Операторы* (2.167) *образуют пару взаимно обратных унитарных в* $L_2(0,\infty)$ *операторов. Они сплетают как ОП* $\dfrac{d^2}{dx^2}$ *и* $\dfrac{d^2}{dx^2} - \dfrac{2}{x^2}$.

Как следует из (2.168), операторы Бушмана–Эрдейи могут рассматриваться как *обобщения операторов Харди*, а неравенства для их норм являются *определёнными обобщениями неравенств Харди*, что позволяет взглянуть на этот класс операторов под новым интересным углом зрения. Кроме того, можно показать, что операторы (2.167) являются преобразованиями Кэли от симметричных операторов $\pm 2i(xf(x))$ при соответствующем выборе областей определения. Их спектром является единичная окружность. В [208, 223] эти вопросы рассмотрены и для пространств со степенным весом.

Результат об унитарности из теоремы 2.23 рассматривался Куфнером, Перссоном и Малиграндой [416], давшими его элементарное доказательство и приложения. Теорема 2.22 позволяет выписать ещё несколько пар унитарных в $L_2(0,\infty)$ операторов очень простого вида, которые являются частными случаями операторов Бушмана–Эрдейи при целых ν ([208, 223]):

$$U_3 f = f + \int_0^x f(y)\,\frac{dy}{y}, \quad U_4 f = f + \frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)\,dy,$$

$$U_5 f = f + 3x\int_0^x f(y)\,\frac{dy}{y^2}, \quad U_6 f = f - \frac{3}{x^2}\int_0^x y f(y)\,dy,$$

$$U_7 f = f + \frac{3}{x^2}\int_x^\infty y f(y)\,dy, \quad U_8 f = f - 3x\int_x^\infty f(y)\frac{dy}{y^2},$$

$$U_9 f = f + \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{15x^2}{y^3} - \frac{3}{y}\right) f(y)\,dy,$$

$$U_{10} f = f + \frac{1}{2}\int_x^\infty \left(\frac{15y^2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) f(y)\,dy.$$

Этот перечень можно продолжить дальше.

ОП в форме, подобной (2.165)–(2.166), но только с ядрами, выражающимися через общую гипергеометрическую функцию Гаусса, были впервые построены в 1980 г. В.В. Катраховым. Поэтому мы предлагаем

названия: *операторы преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова*. Их выражение через функции Лежандра первого и второго родов получено С.М. Ситником; кроме того, их удаётся включить в общую схему построения операторов преобразования композиционным методом, изложенным ниже. При этом основными становятся наиболее простые формулы факторизации вида (2.163)–(2.164). На этом пути построение подобных операторов перестаёт быть специальным искусным приемом и встраивается в общую методику построения многочисленных классов подобных операторов преобразования композиционным методом.

§ 2.5. Весовое сферическое среднее

В этом параграфе рассмотрим весовое сферическое среднее, которое представляет собой ОП, сплетающий оператор Лапласа–Бесселя $(\Delta_\gamma)_x = \sum\limits_{i=1}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i}$ и одномерный оператор Бесселя $(B_{n+|\gamma|-1})_t$.

2.5.1. Интегралы по части сферы. Предварительно приведём утверждения об интегралах по части сферы в пространстве $\mathbb{R}^n_+$.

Рассмотрим часть пространства $\mathbb{R}^n$ вида

$$\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ x_1>0,\dots,x_n>0\}$$

и Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i=0$, $i=1,\dots,n$, $\Omega_+=\Omega\cap\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+=\Omega\cap\overline{\mathbb{R}}^n_+$, где

$$\overline{\mathbb{R}}^n_+=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ x_1\geqslant 0,\dots,x_n\geqslant 0\}.$$

Имеем $\Omega_+\subseteq\mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+\subseteq\overline{\mathbb{R}}^n_+$. Мы рассмотрим множество $C^m(\Omega_+)$, состоящее из m раз дифференцируемых на Ω_+ функций. Через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по x_i для любого $i=1,\dots,n$ непрерывно продолжаются на $x_i=0$. Функции $f\in C^m(\overline{\Omega}_+)$ мы будем называть *чётными по переменным* x_i, $i=1,\dots,n$, если $\left.\dfrac{\partial^{2k+1}f}{\partial x_i^{2k+1}}\right|_{x=0}=0$ для всех неотрицательных целых $k\leqslant m$ (см. [87, с. 21]). Класс $C^m_{\mathrm{ev}}(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций из $C^m(\overline{\Omega}_+)$, чётных по каждой из своих переменных x_i, $i=1,\dots,n$. Тогда

$$C^\infty_{\mathrm{ev}}(\overline{\Omega}_+)=\bigcap_{m=0}^{\infty}C^m_{\mathrm{ev}}(\overline{\Omega}_+).$$

Будем рассматривать мультииндекс $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, состоящий из положительных фиксированных чисел $\gamma_i>0$, $i=1,\dots,n$, и положим $|\gamma|=\gamma_1+\dots+\gamma_n$.

Часть шара $|x| \leqslant r$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, принадлежащую $\mathbb{R}_+^n$, будем обозначать $B_r^+(n)$. Граница $B_r^+(n)$ состоит из части сферы $S_r^+(n)=\{x \in \mathbb{R}_+^n : |x| = r\}$ и из частей координатных гиперплоскостей $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, таких, что $|x^i| \leqslant r$. Для определения весового сферического среднего нам потребуется рассматривать интеграл по $S_r^+(n)$ с весом

$$x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$$

вида

$$\int\limits_{S_r^+(n)} u(x) x^\gamma dS_r,$$

где dS_r — элемент поверхности $S_r^+(n)$. Легко видеть, что справедливы формулы

$$\int\limits_{B_r^+(n)} u(x) x^\gamma dx = r^{n+|\gamma|} \int\limits_{B_1^+(n)} u(rx) x^\gamma dx \tag{2.169}$$

и

$$\int\limits_{S_r^+(n)} u(x) x^\gamma dS_r = r^{n+|\gamma|-1} \int\limits_{S_1^+(n)} u(rx) x^\gamma dS, \tag{2.170}$$

где dS — элемент поверхности $S_1^+(n)$

Для интегрируемой по $B_r^+(n)$ с весом x^γ функции $f(x)$ и для непрерывной при $t \in [0, \infty)$ функции $g(t)$ имеют место формулы (см., например, [138])

$$\int\limits_{B_r^+(n)} g(|x|) f(x)\, x^\gamma\, dx = \int\limits_0^r g(\lambda) \lambda^{n+|\gamma|-1} d\lambda \int\limits_{S_1^+(n)} f(\lambda x) x^\gamma d\omega\,, \tag{2.171}$$

а при $g(x) = 1$ для непрерывной на $B_r^+(n)$ функции $f(z)$

$$\int\limits_{S_1^+(n)} f(rx) x^\gamma dS = r^{1-n-|\gamma|} \frac{d}{dr} \int\limits_{B_r^+(n)} f(z) z^\gamma dz. \tag{2.172}$$

Кроме того, нам нужно знать значение интеграла $\int\limits_{S_1^+(n)} x^\gamma dS$, представляющего площадь взвешенной части сферы $S_1^+(n)$. Для нахождения этого интеграла используем формулу, которая доказывается методом математической индукции (см. [330]):

$$\int\limits_{\substack{y_1+\ldots+y_n \leqslant 1 \\ y_1 \geqslant 0, \ldots, y_n \geqslant 0}} \ldots \int y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n} dy_1 \ldots dy_n = \frac{\Gamma(\alpha_1+1)\ldots\Gamma(\alpha_n+1)}{\Gamma(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+n+1)}, \tag{2.173}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Переходя к новым координатам $y_1 = x_1^2, \ldots, y_n = x_n^2$, перепишем формулу (2.173) в виде

$$\int\limits_{B_1^+(n)} x_1^{2\alpha_1+1} \ldots x_n^{2\alpha_n+1} dx_1 \ldots dx_n = \frac{\Gamma(\alpha_1+1)\ldots\Gamma(\alpha_n+1)}{2^n\Gamma(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+n+1)},$$

или, положив $2\alpha_i + 1 = \gamma_i$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\int\limits_{B_1^+(n)} x_\gamma dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\gamma_n+1}{2}\right)}{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}+1\right)}.$$

Тогда, из (2.169) при $u = 1$ и (2.172) при $f = 1$, используя формулу $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ и положив затем $r = 1$, получим искомый интеграл

$$\int\limits_{S_1^+(n)} x^\gamma dS = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\gamma_n+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}.$$

Полученный интеграл обозначается так:

$$|S_1^+(n)|_\gamma = \int\limits_{S_1^+(n)} x^\gamma dS = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}. \tag{2.174}$$

Интеграл (2.174) можно найти по [135, с. 20, формула 1.2.5], где надо положить $N = n$.

Лемма 2.2. *Для $w \in C^2_{\text{ev}}(\overline{\Omega}^+)$ справедлива формула*

$$\int\limits_{B_R^+(n)} (\Delta_\gamma w(x))\, x^\gamma dx = \int\limits_{S_R^+(n)} \left(\frac{\partial w(x)}{\partial \nu}\right) x^\gamma\, dS\,, \tag{2.175}$$

где ν — внешняя нормаль к части сферы $S_R^+(n)$.

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{B_R^+(n)} (\Delta_\gamma w(x))\, x^\gamma dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{B_1^+(n)} (B_{\gamma_i} w(x))\, x^\gamma dx.$$

Учитывая, что оператор Бесселя в «дивергентной форме» имеет вид

$$B_{\gamma_i} = \frac{1}{x_i^{\gamma_i}} \frac{\partial}{\partial x_i}\, x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

получим

$$\int\limits_{B_R^+(n)} \Delta_\gamma w\, x^\gamma dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{B_R^+(n)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} w(x)\right) \frac{x^\gamma}{x_i^{\gamma_i}} dx =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int\limits_{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n x_j^2 \leqslant R^2} x_1^{\gamma_1} \ldots x_{i-1}^{\gamma_{i-1}} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \ldots x_n^{\gamma_n} dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n \times$$

$$\times \int\limits_0^{\sqrt{R^2 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n x_j^2}} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} w(x) dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int\limits_{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n x_j^2 \leqslant R^2} \left(x_i^{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x_i} w(x)\right)\Bigg|_{x_i = \sqrt{R^2 - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n x_j^2}} \times$$

$$\times\, x_1^{\gamma_1} \ldots x_{i-1}^{\gamma_{i-1}} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \ldots x_n^{\gamma_n} dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int\limits_{S_R^+(n)} \frac{\partial}{\partial x_i} w(x)\, \cos\eta_i\, x^\gamma dS,$$

где

$$\cos\eta_i = \frac{1}{\sqrt{1 + (h'_{x_1})^2 + \ldots + (h'_{x_{i-1}})^2 + (h'_{x_{i+1}})^2 + \ldots + (h'_{x_n})^2}} = \frac{x_i}{R},$$

$$h = x_i = \sqrt{R^2 - x_1^2 - \ldots - x_{i-1}^2 - x_{i+1}^2 - \ldots - x_n^2}\,.$$

Выражение $\sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} w(x)\, \cos\eta_i$ представляет собой производную по направлению внешней нормали к части сферы $S_1^+(n)$ вида $\nu = (\cos\eta_1, \ldots, \cos\eta_n)$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_{S_R^+(n)} \frac{\partial}{\partial x_i} w(x)\, \cos\eta_i\, x^\gamma dS = \int\limits_{S_R^+(n)} \left(\frac{\partial w(x)}{\partial \nu}\right) x^\gamma\, dS,$$

что завершает доказательство.

Лемма 2.3. *Интеграл* $\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS$ *вычисляется по формуле*

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\dfrac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)}\, j_{(n+|\gamma|)/2-1}(r|\xi|). \qquad (2.176)$$

Доказательство. Известно, что функция $\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)$ связана с $e^{-i\langle x,\xi\rangle}$ при помощи оператора преобразования Пуасссона (см. [135, с. 32]):

$$\mathbf{j}_\gamma(r\theta,\xi) = \mathcal{P}_\xi^\gamma\left(e^{-ir\langle\theta,\xi\rangle}\right).$$

Поэтому

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS = \int\limits_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_\xi^\gamma\left(e^{-ir\langle\theta,\xi\rangle}\right)\theta^\gamma\, dS.$$

К последнему интегралу применим формулу

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_\xi^\gamma f(\langle\sigma,\xi\rangle)\sigma^\gamma dS_\sigma =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\dfrac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,2^{n-1}\Gamma\left(\dfrac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}\int\limits_{-1}^{1} f(|\xi|p)(1-p^2)^{(n+|\gamma|-3)/2}\, dp, \qquad (2.177)$$

доказанную в [94]. Получим

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\dfrac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,2^{n-1}\Gamma\left(\dfrac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}\int\limits_{-1}^{1} e^{-irp|\xi|}(1-p^2)^{(n+|\gamma|-3)/2}\, dp.$$

Заменяя p на $-p$, будем иметь

$$\int\limits_{-1}^{1} e^{-irp|\xi|}(1-p^2)^{(n+|\gamma|-3)/2}\, dp = \int\limits_{-1}^{1} e^{irp|\xi|}(1-p^2)^{(n+|\gamma|-3)/2}\, dp.$$

Полученный интеграл находится по формуле вида

$$\int\limits_{-a}^{a} e^{itp}(a^2-p^2)^{\beta-1}\, dp = \frac{\sqrt{\pi}\,(2a)^{\beta-1/2}\Gamma(\beta)}{t^{\beta-1/2}}\, J_{\beta-1/2}(at)$$

(см. [446, формула 2.3.5.3]).

Таким образом,

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathbf{j}_\gamma(r\theta,\xi)\theta^\gamma\, dS =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\dfrac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,2^{n-1}\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|-1}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\,2^{(n+|\gamma|)/2-1}\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|-1}{2}\right)}{(r|\xi|)^{(n+|\gamma|)/2-1}} \times$$

$$\times J_{(n+|\gamma|)/2-1}(r|\xi|) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\dfrac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)}\, j_{(n+|\gamma|)/2-1}(r|\xi|),$$

что и даёт (2.176).

2.5.2. Многомерный обобщённый сдвиг, весовое сферическое среднее и итерированное весовое сферическое среднее. В этом пункте мы рассмотрим оператор обобщённого сдвига, действующий по каждой из переменных в части евклидова пространства многих переменных, который будем называть *многомерным обобщённым сдвигом*, и сферическое среднее, где вместо обычного сдвига применяется обобщённый — весовое сферическое среднее. Применяя последовательно два раза весовое сферическое среднее, получим итерированное весовое сферическое среднее, которое используется на промежуточных этапах решения задачи о восстановлении функции по её весовым сферическим средним.

Оператор Лапласа–Бесселя $(\Delta_\gamma)_x$ имеет вид

$$(\Delta_\gamma)_x = \Delta_\gamma = \sum_{i=1}^{n}(B_{\gamma_i})_{x_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.178}$$

где мультииндекс $\gamma{=}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ состоит из положительных фиксированных чисел $\gamma_i > 0$, $i{=}1,\ldots,n$.

Определение 2.8. В $\mathbb{R}^n_+$ рассматривается *многомерный обобщённый сдвиг*, отвечающий мультииндексу γ вида

$${}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y = {}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}\ldots{}^{\gamma_n}T_{x_n}^{y_n},$$

где каждый из одномерных обобщённых сдвигов определён выражением (см. [130])

$${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i} f(x) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\dfrac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha_i}\,,x_{i+1},\ldots,x_n)\times$$

$$\times\sin^{\gamma_i-1}\alpha_i\, d\alpha_i.$$

Очевидно, что

$$ {}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y f(x)|_{y=0} = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial y_i}\, {}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y f(x)|_{y=0} = 0. \tag{2.179} $$

Пусть

$$ \mathbf{j}_\gamma(x,\xi) = \prod_{i=1}^{n} j_{(\gamma_i-1)/2}(x_i\,\xi_i), \tag{2.180} $$

где j_ν определена формулой (2.29).

В силу свойства (2.34) для одномерного обобщённого сдвига ${}^{\gamma_i}T_x^y$ справедливо аналогичное свойство для многомерного обобщённого сдвига ${}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y$:

$$ {}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y\ \mathbf{j}_\gamma(x,\xi) = \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\,\mathbf{j}_\gamma(y,\xi). \tag{2.181} $$

Для $f \in C^2_{\mathrm{ev}}$ свойство (2.47) одномерного обобщённого сдвига ${}^{\gamma_i}T_x^y$ даёт

$$ {}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y\ (\Delta_\gamma)_x f(x) = (\Delta_\gamma)_x\, {}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y\ f(x). \tag{2.182} $$

Определение 2.9. На основе многомерного обобщённого сдвига ${}^{\gamma}\mathbf{T}^y$ конструируется *весовое сферическое среднее* функции f, которое при $n \geqslant 2$ имеет вид

$$ M_t^\gamma[f(x)] = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_{S^+{}_1(n)} {}^{\gamma}\mathbf{T}_x^{t\theta} f(x)\theta^\gamma dS, \tag{2.183} $$

где $\theta^\gamma = \prod\limits_{i=1}^{n} \theta_i^{\gamma_i}$, $S_1^+(n) = \{\theta{:}|\theta| = 1, \theta \in \mathbb{R}_+^n\}$ — часть сферы в $\mathbb{R}_+^n$,

$$ |S_1^+(n)|_\gamma = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}, \tag{2.184} $$

а при $n = 1$ — вид $M_t^\gamma[f(x)] = {}^{\gamma}\mathbf{T}_x^{t\theta} f(x)$.

Весовые сферические средние без обобщённого сдвига изучались в [93; 163; 164, с. 117]. В [93] были получены их свойства и изучен принцип Гюйгенса для волнового уравнения с многими особенностями. В [163, 164] рассмотрены предельные свойства такого среднего. Весовые сферические средние с обычным сдвигом, в случае когда в качестве веса выступал однородный гармонический полином, введены и рассмотрены в [490, с. 400]. Изучению весовых сферических средних, порождённых обобщённым сдвигом, и их применению к решению задач для сингулярных дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ, среди которых [138–142]. Конструкции многомерного обобщённого сдвига и весового сферического среднего представляют собой операторы преобразования (см. [204, 468]).

Отметим простейшие свойства весового сферического среднего (см. [138]).

Свойство 1. Линейность и однородность:

$$M_t^\gamma[af(x)+bg(x)] = aM_t^\gamma[f(x)] + bM_t^\gamma[g(x)], \qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

Свойство 2. Неотрицательность: если $f(x)\geqslant 0$, то $M_t^\gamma[f(x)]\geqslant 0$.

Свойство 3. $M_t^\gamma[1]=1$.

Свойство 4. В силу (2.179) имеем

$$M_t^\gamma[f(x)]|_{t=0} = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}M_t^\gamma[f(x)]\bigg|_{t=0} = 0. \tag{2.185}$$

Докажем ещё два свойства весового сферического среднего.

Свойство 5. Если $f(x)\in C^2_{\mathrm{ev}}$, то

$$(\triangle_\gamma)_x M_t^\gamma[f(x)] = M_t^\gamma[\triangle_\gamma f(x)].$$

Доказательство. Рассмотрим $(\Delta_\gamma)_x M_t^\gamma[f(x)]$. Принимая во внимание (2.182), запишем

$$(\Delta_\gamma)_x M_t^\gamma[f(x)] = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma}(\Delta_\gamma)_x \int\limits_{S^+{}_1(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{t\theta} f(x)\theta^\gamma dS_\theta =$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma}\int\limits_{S^+{}_1(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{t\theta}[(\Delta_\gamma)_x f(x)]\theta^\gamma dS_\theta = M_t^\gamma[(\Delta_\gamma)_x f(x)].$$

Свойство доказано.

Свойство 6. Пусть $\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)=\prod\limits_{i=1}^n j_{(\gamma_i-1)/2}(x_i\,\xi_i)$, где j_ν определена формулой (2.29). Справедливо равенство

$$M_r^\gamma[\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)] = \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\; j_{(n+|\gamma|)/2-1}(r|\xi|).$$

Доказательство. Учитывая (2.181), (2.176) и (2.184), имеем

$$M_r^\gamma[\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)] = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma}\int\limits_{S^+{}_1(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{t\theta}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\theta^\gamma dS =$$

$$= \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\;\frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma}\int\limits_{S^+{}_1(n)} \mathbf{j}_\gamma(t\theta,\xi)\theta^\gamma dS =$$

$$= \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma}\,\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\dfrac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1}\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)}j_{(n+|\gamma|)/2-1}(r|\xi|) =$$

$$= \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)j_{(n+|\gamma|)/2-1}(r|\xi|).$$

Доказательство закончено.

2.5.3. Весовое сферическое среднее как оператор преобразования. В силу сферической симметрии многомерного оператора $(\Delta_\gamma)_x$ он, под действием на него оператора весового сферического среднего, преобразуется в одномерный оператор Бесселя $(B_{n+|\gamma|-1})_t$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.24. *Весовое сферическое среднее $M_t^\gamma[f(x)]$ для $f \in C^2_{\mathrm{ev}}$ есть оператор преобразования, сплетающий $(\Delta_\gamma)_x$ и $(B_{n+|\gamma|-1})_t$:*

$$(B_{n+|\gamma|-1})_t M_t^\gamma[f(x)] = M_t^\gamma[(\Delta_\gamma)_x f(x)]. \tag{2.186}$$

Доказательство. Сначала заметим, что функция $f \in C^2_{\mathrm{ev}}$ удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{B_t^+(n)} f(x)\, x^\gamma\, dx = \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1}\, d\lambda \int\limits_{S_1^+(n)} f(\lambda\theta)\, \theta^\gamma dS_\theta, \tag{2.187}$$

которое легко получается переходом к сферическим координатам $x = \lambda\theta$, $|\theta| = 1$ в левой части (2.187). Из (2.187) будем иметь

$$|S_1^+(n)|_\gamma \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1} M_\lambda^\gamma[f(x)]d\lambda = \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1} d\lambda \int\limits_{S^+{}_1(n)} ({}^\gamma\mathbf{T}_x^{\lambda y} f)(x)\; y^\gamma dS_y =$$
$$= \int\limits_{B_r^+(n)} ({}^\gamma\mathbf{T}_x^z f)(x) z^\gamma dz.$$

Применяя оператор $(\Delta_\gamma)_x$ к обеим частям последнего равенства, получим

$$|S_1^+(n)|_\gamma \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1} (\Delta_\gamma)_x\, M_\lambda^\gamma[f(x)]d\lambda = \int\limits_{B_t^+(n)} (\Delta_\gamma)_x ({}^\gamma\mathbf{T}_x^z f)(x) z^\gamma dz =$$
$$= \sum_{i=1}^n \int\limits_{B_t^+(n)} (B_{\gamma_i})_{z_i}\, {}^{\gamma_i}T_x^z f(x) z^\gamma dz.$$

В силу (2.31) имеем $(B_{\gamma_i})_{z_i}\, {}^{\gamma_i}T_{x_i}^{z_i} f(x) = (B_{\gamma_i})_{x_i}\, {}^{\gamma_i}T_{x_i}^{z_i} f(x)$ и, следовательно,

$$(\Delta_\gamma)_x (T_x^z f)(x) = (\Delta_\gamma)_z (T_x^z f)(x).$$

Тогда

$$|S_1^+(n)|_\gamma \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1} (\Delta_\gamma)_x\, M_\lambda^\gamma[f(x)]d\lambda = \int\limits_{B_t^+(n)} [(\Delta_\gamma)_z (T_x^z f)(x)]\, z^\gamma dz.$$

Применяя к последнему интегралу формулу (2.175), получим

$$|S_1^+(n)|_\gamma \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1}(\Delta_\gamma)_x\, M_\lambda^\gamma[f(x)]d\lambda =$$

$$= \int\limits_{S_t^+(n)} \frac{\partial({}^\gamma\mathbf{T}_x^z f)(x)}{\partial\nu} z^\gamma\, dS\,, \quad (2.188)$$

где ν — внешняя нормаль к части сферы $S_R^+(n)$. Преобразуем производную по направлению

$$\frac{\partial({}^\gamma\mathbf{T}_x^z f)(x)}{\partial\nu} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial({}^\gamma\mathbf{T}_x^z f)(x)}{\partial z_i}\cdot\frac{z_i}{t}.$$

Имеем:

$$\frac{\partial({}^\gamma\mathbf{T}_x^z f)(x)}{\partial z_i} = {}^{\gamma_1}T_{x_1}^{z_1}\ldots{}^{\gamma_{i-1}}T_{x_{i-1}}^{z_{i-1}}\,{}^{\gamma_{i+1}}T_{x_{i+1}}^{z_{i+1}}\ldots{}^{\gamma_n}T_{x_n}^{z_n}\frac{\partial\,{}^{\gamma_i}T_{x_i}^{z_i}f(x)}{\partial z_i},$$

$$\frac{\partial\,{}^{\gamma_i}T_{x_i}^{z_i}f(x)}{\partial z_i} =$$

$$= C(\gamma_i)\int\limits_0^\pi \frac{\partial}{\partial z_i} f(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2-2x_iz_i\cos\varphi_i+z_i^2}\,,x_{i+1},\ldots,x_n)\times$$

$$\times\sin^{\gamma_i-1}\varphi_i d\varphi_i = C(\gamma_i)\int\limits_0^\pi \frac{z_i - x_i\cos\varphi_i}{\sqrt{x_i^2-2x_iz_i\cos\varphi_i+z_i^2}}\times$$

$$\times f_i'(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2-2x_iz_i\cos\varphi_i+z_i^2}\,,x_{i+1},\ldots,x_n)\sin^{\gamma_i-1}\varphi_i d\varphi_i$$

и

$$\frac{\partial\,{}^{\gamma_i}T_{x_i}^{z_i}f(x)}{\partial x_i} = C(\gamma_i)\int\limits_0^\pi \frac{x_i - z_i\cos\varphi_i}{\sqrt{x_i^2-2x_iz_i\cos\varphi_i+z_i^2}}\times$$

$$\times f_i'(x_1,\ldots,x_{i-1},\sqrt{x_i^2-2x_iz_i\cos\varphi_i+z_i^2}\,,x_{i+1},\ldots,x_n)\sin^{\gamma_i-1}\varphi_i d\varphi_i,$$

где f_i' означает производную функции f по i-му аргументу. Тогда

$$\frac{\partial\,{}^{\gamma_i}T_{x_i}^{z_i}f(x)}{\partial z_i} = \frac{z_i - x_i\cos\varphi_i}{x_i - z_i\cos\varphi_i}\frac{\partial\,{}^{\gamma_i}T_{x_i}^{z_i}f(x)}{\partial x_i} \quad (2.189)$$

и

$$\int\limits_{S^+{}_t(n)} \left(\frac{\partial (T_x^z f)(x)}{\partial \nu}\right) z^\gamma \, dS =$$

$$= \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{S^+{}_t(n)} \frac{z_i - x_i \cos\varphi_i}{x_i - z_i \cos\varphi_i} \frac{\partial^{\gamma_i} T_{x_i}^{z_i} f(x)}{\partial x_i} \cdot z_i \cdot z^\gamma \, dS.$$

Произведём замену $z = ty$, $y \in \mathbb{R}_+^n$; тогда, с учётом (2.189), получим

$$\int\limits_{S_t^+(n)} \left(\frac{\partial (T_x^z f)(x)}{\partial \nu}\right) z^\gamma \, dS =$$

$$= t^{n+|\gamma|-1} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{S_t^+(n)} \frac{ty_i - x_i \cos\varphi_i}{x_i - ty_i \cos\varphi_i} \cdot \frac{\partial^{\gamma_i} T_{x_i}^{ty_i} f(x)}{\partial x_i} \cdot y_i \cdot y^\gamma \, dS =$$

$$= t^{n+|\gamma|-1} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{S_t^+(n)} \left(\frac{\partial^{\gamma_i} T_{x_i}^{ty_i} f(x)}{\partial (ty_i)}\right) \cdot y_i \cdot y^\gamma \, dS =$$

$$= t^{n+|\gamma|-1} \int\limits_{S_t^+(n)} \frac{d^{\gamma_i} T_{x_i}^{ty_i} f(x)}{dt} y^\gamma \, dS = t^{n+|\gamma|-1} \frac{d}{dt} \int\limits_{S_t^+(n)} {}^{\gamma_i} T_{x_i}^{ty_i} f(x) y^\gamma \, dS.$$

Возвращаясь к (2.188), будем иметь

$$|S^+{}_1(n)|_\gamma \int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1} (\Delta_\gamma)_x \, M_\lambda^\gamma [f(x)] d\lambda = t^{n+|\gamma|-1} \frac{d}{dt} \int\limits_{S^+{}_t(n)} {}^{\gamma_i} T_{x_i}^{ty_i} f(x) y^\gamma \, dS,$$

или

$$\int\limits_0^t \lambda^{n+|\gamma|-1} (\Delta_\gamma)_x \, M_\lambda^\gamma [f(x)] d\lambda = t^{n+|\gamma|-1} \frac{d}{dt} \, M_t^\gamma [f(x)].$$

Дифференцируя последнее выражение по t, получим

$$t^{n+|\gamma|-1} (\Delta_\gamma)_x \, M_t^\gamma [f(x)] =$$

$$= t^{n+|\gamma|-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \, M_t^\gamma [f(x)] + (n + |\gamma| - 1) t^{n+|\gamma|-2} \frac{\partial}{\partial t} \, M_t^\gamma [f(x)].$$

Разделив это равенство на $t^{n+|\gamma|-1}$, имеем

$$(\Delta_\gamma)_x \, M_t^\gamma [f(x)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \, M_t^\gamma [f(x)] + \frac{n + |\gamma| - 1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \, M_t^\gamma [f(x)]$$

или

$$(\Delta_\gamma)_x\, M_t^\gamma[f(x)] = (B_{n+|\gamma|-1})_t M_t^\gamma[f(x)].$$

Применением свойства весового сферического среднего 1 завершается доказательство теоремы.

§ 2.6. Другие типы операторов преобразований

Построение ОП тесно связано с описанием коммутантов для дифференциальных операторов в различных пространствах функций. Для решения этого класса задач была создана специальная теория обобщённых операторных свёрток, отличающихся по определению от привычных свёрток для интегральных преобразований. Теория операторных свёрток, самая известная из которых была названа *свёрткой Берга–Димовски*, была в основном развита в работах болгарского математика И. Димовски и его учеников (см. введение).

Другой важный класс обобщений операторов СПД возник при изучении операторов Дункла. Операторы Дункла включаются в общую схему ОП как специальный случай, когда один из сплетаемых операторов является дифференциально-разностным, а второй — по-прежнему дифференциальным. Построению ОП типа Сонина и Пуассона для операторов Дункла в последнее время посвящено много работ (см. введение).

Отметим, что некоторый способ построения ОП со свойствами (2.10) на решениях соответствующих уравнений для частного случая целых ν упоминается в литературе под названием метода Крама–Крейна (см. [150, 151]), но он приводит к длинной последовательности усложняющихся подстановок, а результирующий ОП не может быть выписан в явном виде. В наиболее общем виде эта теория известна как метод преобразований Дарбу [429], к которым и относятся в частном случае подстановки Крама–Крейна. Известно также обобщение одномерных преобразований Дарбу на двумерный случай — преобразование Мутара (см. [429]). На самом деле как подстановки Крама–Крейна, так и преобразования Дарбу и Мутара могут быть включены в общую схему ОП. Они возникают, когда сплетаемые операторы остаются дифференциальными, а ОП для этой пары ищется уже не в интегральном, а в дифференциальном представлении. К таким дифференциальным ОП формально могут быть отнесены и многие известные замены переменных типа преобразования Миуры, которые сплетают нелинейный и линейный операторы, позволяя реализовать дифференциальное выражение полностью или выделить из него линейный множитель.

Вместе с тем были построены аналогичные теории и для некоторых других модельных операторов, например таких [314–316, 294, 295]:

$$A = \frac{1}{v(x)}\frac{d}{dx}v(x)\frac{d}{dx}, \tag{2.190}$$

$$v(x) = \sin^{2\nu+1} x,\ \operatorname{sh}^{2\nu+1} x,\ (e^x - e^{-x})^{2\nu+1}(e^x + e^{-x})^{2\mu+1}.$$

Важность операторов A вида (2.190) для теории заключается в том, что они представляют радиальную часть операторов Лапласа–Бельтрами в двухточечно-однородных пространствах (см. [281, с. 191]) и в симметрическом пространстве ранга 1 (см. [281, с. 350, предложение 5.26]). При этом оператор Бесселя получается при выборе в (2.190) $v(x) = x^{2\nu+1}$. Другим модельным оператором, для которого построены ОП, является оператор Эйри $D^2 + x$; рассматривался также его возмущённый вариант, связанный с эффектом Штарка из квантовой механики [83]. Были изучены операторы сдвига по спектральному параметру Векуа–Эрдейи–Лаундеса (см. [422–424]).

Часть II

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Глава 3

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БУШМАНА–ЭРДЕЙИ

§ 3.1. Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи к задачам для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу и лемме Копсона

Рассмотрим теперь приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи первого рода и нулевого порядка гладкости к обобщениям и уточнению леммы Копсона.

Теорема 3.1. *Рассмотрим задачу Дирихле в четверти плоскости для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу в условиях леммы Копсона* (2.84)–(2.85). *Тогда между данными задачи Дирихле справедливы соотношения, выражающиеся через операторы Бушмана–Эрдейи первого рода и нулевого порядка гладкости:*

$$\frac{c_\beta}{x^\beta} E_{0+}^{-\alpha,1-\beta}(y^{\alpha+\beta+1} f(y)) = \\ = \frac{c_\alpha}{x^\alpha} E_{0+}^{-\beta,1-\alpha}(y^{\alpha+\beta+1} g(y)), c_\beta = 2\Gamma(\beta+1/2), \quad (3.1)$$

$$\frac{c_\beta}{x^\beta} {}_1P_{0+}^{-\alpha} I_{0+}^{\beta}(y^{\alpha+\beta+1} f(y)) = \frac{c_\alpha}{x^\alpha} {}_1P_{0+}^{-\beta} I_{0+}^{\alpha}(y^{\alpha+\beta+1} g(y)). \quad (3.2)$$

Данные формулы являются прямыми следствиями теоремы 2.5. С другой стороны, применяя теперь полученную выше теорему 2.9, в которой операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости были профакторизованы через дробные интегралы Римана–Лиувилля и Эрдейи–Кобера, мы получаем такой результат.

Теорема 3.2. *Между данными задачи Дирихле в условиях леммы Копсона справедливы соотношения, выражающиеся через операторы Эрдейи–Кобера:*

$$x^{\alpha+\beta+1}f(x) = \frac{c_\alpha}{c_\beta} I^{\alpha-\beta}_{0+;2;-1/2}(y^{\alpha+\beta+1}g(y)). \tag{3.3}$$

Последнее соотношение уточняет соответствующий результат из оригинальной работы Копсона, который, по-видимому, содержит неточности в коэффициентах.

Связь между данными на осях, выраженная через операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, позволяет установить дополнительные результаты.

Теорема 3.3. *Рассмотрим пространство с весом $L_{2,x^k}(0,\infty)$, и пусть α, β — целые числа. Тогда для весовых норм данных Дирихле справедливы соотношения*

$$c_\beta \|I^{\beta}_{0+}(y^{\alpha+\beta+1}f(y))\| = c_\alpha \|I^{\alpha}_{0+}(y^{\alpha+\beta+1}g(y))\|. \tag{3.4}$$

Этот результат следует из условия унитарности операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в теореме 2.12. Кроме того, в этом случае можно из той же теоремы выразить данные не через оператор Эрдейи–Кобера, а через обратный оператор Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, получив новое соотношение. Для произвольных нецелых значений параметров из теоремы 2.11 также получается соотношение между весовыми нормами данных Дирихле.

Далее рассмотрим уравнение ЭПД в полупространстве

$$B_{\alpha,\,t}u(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\alpha+1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u + F(t,x),$$

где $t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$. Дадим описание процедуры, позволяющей получать различные постановки начальных условий при $t = 0$ единым методом. Образуем по формулам (2.103) операторы преобразования $X_{\alpha,\,t}$ и $Y_{\alpha,\,t}$. Предположим, что существуют выражения $X_{\alpha,\,t}u = v(t,x),\ X_{\alpha,\,t}F = G(t,x)$. Пусть обычная (несингулярная) задача Коши

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta_x v + G,\ v|_{t=0} = \varphi(x),\ v'_t|_{t=0} = \psi(x) \tag{3.5}$$

корректно разрешима в полупространстве. Тогда получаем следующие начальные условия для уравнения ЭПД:

$$X_\alpha u|_{t=0} = a(x),\ (X_\alpha u)'|_{t=0} = b(x). \tag{3.6}$$

При этом различному выбору операторов преобразования $X_{\alpha,t}$ (операторы Сонина, Бушмана–Эрдейи, Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости первого или второго рода, унитарные операторы третьего рода (2.165), обобщённые операторы Бушмана–Эрдейи) будут соответствовать различные начальные условия. Следуя изложенной методике, в каждом конкретном случае их можно привести к более простым

аналитическим формулам. При этом с использованием интегральных ОП различных типов для каждого конкретного ОП будут получатся некоторые нелокальные начальные условия, в том числе и с возможностью рассмотрения решений с особенностями.

Данная схема обобщается на дифференциальные уравнения с большим числом переменных, по которым могут действовать операторы Бесселя с различными параметрами, а также уравнения других типов. Применение операторов преобразований позволяет сводить сингулярные (или, иначе, вырождающиеся) уравнения с операторами Бесселя по одной или нескольким переменным (уравнения ЭПД, сингулярное уравнение теплопроводности, B-эллиптические уравнения по определению И.А. Киприянова, уравнения обобщённой осесимметрической теории потенциала — теории *GASPT* (*Generalized Axially Symmetric Potential Theory*) — А. Вайнштейна и др.) к несингулярным. При этом априорные оценки для сингулярного случая получаются как следствия соответствующих априорных оценок для регулярных уравнений, если только удалось оценить сами операторы преобразования в нужных функциональных пространствах.

§ 3.2. Приложения операторов преобразования к установлению формул связи между решениями дифференциальных уравнений

Начнём с простого, но важного замечания. Любую из рассмотренных в этой главе пар операторов преобразования, сплетающих операторы Бесселя и вторую производную, можно использовать для установления связей между решениями дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах с операторами Бесселя вида

$$\sum a_k B_{\nu_k, x_k} u(x) = f(x)$$

и невозмущённого уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum a_k \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_k^2} = g(x).$$

При этом если пары взаимно обратных ОП действуют по каждой переменной согласно формулам

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu, \tag{3.7}$$

то решения возмущённого и невозмущённого уравнений связаны соотношениями

$$u(x) = \prod_k S_{\nu_k} v(x), \quad v(x) = \prod_k P_{\nu_k} u(x)$$

(операторы типа Сонина и Пуассона). Тогда результаты об ограниченности, оценках норм, унитарности операторов преобразований приводят автоматически к соответствующим утверждениям для пар решений дифференциальных уравнений. Мы ограничимся этой схемой,

не выписывая соответствующих формул связи и оценок для решений дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах.

Рассмотрим подробно один пример, позволяющий использовать построенные ОП различных классов и их оценки для построения решений одного из нелинейных уравнений. В работе А.В. Бицадзе и В.И. Пашковского [18] указано, что в математической физике многие задачи сводятся к решению нелинейных уравнений Максвелла–Эйнштейна вида

$$\Delta u + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{u}\left(1 - \frac{u^2}{A^2 - u^2}\right)(u_x^2 + u_y^2) = 0, \tag{3.8}$$

$$\Delta u + \frac{1}{x}u_x - \frac{1}{u}(u_x^2 + u_y^2) = 0. \tag{3.9}$$

Используя результаты этой работы и развитую нами технику ОП, получаем следующее приложение рассмотренных классов ОП к нелинейным уравнениям математической физики Максвелла–Эйнштейна.

Теорема 3.4. *Пусть P — произвольный оператор преобразования типа Пуассона, удовлетворяющий сплетающему свойству на гладких функциях*

$$P\ D^2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)P, \tag{3.10}$$

$g(x, y)$ — произвольная гармоническая функция. Тогда функция

$$u_1(x, y) = \frac{A}{\operatorname{ch}(CP_x g(x, y))}$$

является решением нелинейного уравнения (3.8), *а функция*

$$u_2(x, y) = \exp(DP_x g(x, y))$$

является решением нелинейного уравнения (3.9) *(здесь C, D — произвольные постоянные).*

Нами построены различные классы ОП типа Пуассона: Бушмана–Эрдейи первого, второго родов, нулевого порядка гладкости, Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова и т. п. Теперь мы можем использовать их в приведённой теореме для получения представлений решений нелинейных уравнений Максвелла–Эйнштейна через гармонические функции.

§ 3.3. Приложения операторов преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к решению одной пары интегро-дифференциальных уравнений

Рассмотрим приложения унитарных операторов Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к решению соответствующих интегро-дифференциальных уравнений.

Теорема 3.5. *Пусть функции $f(x)$, $g(x) \in L_2(0,\infty)$ и непрерывно дифференцируемы на полуоси. Тогда следующие интегро-дифференциальные уравнения взаимно обратны и решаются по формулам*

$$g(x) = \cos\frac{\pi\nu}{2}\left(-\frac{d}{dx}\right)\int\limits_x^\infty P_\nu\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\times$$
$$\times\left(\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-1/2}Q_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy - \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-1/2}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{x}{y}\right)f(y)\,dy\right)$$

и

$$f(x) = \cos\frac{\pi\nu}{2}\int\limits_0^x P_\nu\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d}{dy}\right)g(y)\,dy - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi\nu}{2}\times$$
$$\times\left(-\int\limits_0^x (x^2-y^2)^{-1/2}\mathbb{Q}_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)g(y)\,dy - \int\limits_x^\infty (y^2-x^2)^{-1/2}Q_\nu^1\left(\frac{y}{x}\right)g(y)\,dy\right).$$

При этом в указанном пространстве нормы решений и правых частей равны.

Это приложение теоремы 2.22 об унитарности ОП Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова. Отметим, что при специальных значениях параметра ν, при которых функции Лежандра выражаются через более простые функции, получается список конкретных интегро-дифференциальных уравнений, для которых получены явные решения с их оценками. Мы не будем приводить здесь этот список.

§ 3.4. Приложения операторов преобразования к установлению эквивалентности норм пространств Киприянова и весовых пространств Соболева

Пространства Киприянова (см. п. 1.3.2), как было показано в его работах и в работах представителей его научной школы, идеально подходят для изучения B-эллиптических уравнений с частными производными (см. [87, 88]). Поэтому свойства этих пространств играют существенную роль при изучении дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах. В данном параграфе доказано, что в одномерном случае нормы в пространствах Киприянова эквивалентны нормам в весовых пространствах Соболева. Этот результат справедлив и для некоторых модельных областей в многомерных пространствах. При этом соответствующие результаты по существу являются переформулировками результатов § 3.3 об условиях ограниченности и унитарности в пространствах Лебега на полуоси операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости. Таким образом, указан-

ные результаты об условиях ограниченности и унитарности в пространствах Лебега на полуоси операторов преобразования Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости имеют важное значение для теории уравнений в частных производных с операторами Бесселя. В этой области для них находятся как стандартные, так и неожиданные приложения. Получаемые результаты относятся также к энергетическим пространствам для соответствующих дифференциальных уравнений.

Определим множество функций $\mathfrak{D}(0,\infty)$. Если $f(x)\in\mathfrak{D}(0,\infty)$, то $f(x)\in C^\infty(0,\infty)$, $f(x)$ финитна на бесконечности. На этом множестве функций введём полунормы

$$\|f\|_{h_2^\alpha} = \|I_-{}^\alpha f\|_{L_2(0,\infty)}, \tag{3.11}$$

$$\|f\|_{\widehat{h}_2^\alpha} = \|x^\alpha(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^\alpha f\|_{L_2(0,\infty)}, \tag{3.12}$$

где $I_-{}^\alpha$ — дробная производная Римана–Лиувилля (см. п. 1.4.1), оператор в (3.12) определяется по формуле

$$\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^\beta = 2^\beta I^{-\beta}_{-;\,2,\,0} x^{-2\beta}, \tag{3.13}$$

в которой $I^{-\beta}_{-;2,\,0}$ — оператор Эрдейи–Кобера, α — произвольное действительное число. При $\beta = n \in \mathbb{N}_0$ выражение (3.13) понимается в обычном смысле, что согласуется с определениями (1.64)–(1.67).

Лемма 3.1. *Пусть* $f(x) \in \mathfrak{D}(0,\infty)$. *Тогда справедливы тождества:*

$$I_-{}^\alpha f = {}_1S_-{}^{\alpha-1} x^\alpha(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^\alpha f, \tag{3.14}$$

$$x^\alpha(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^\alpha f = {}_1P_-{}^{\alpha-1} I_-{}^\alpha f. \tag{3.15}$$

Таким образом, операторы Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости первого рода осуществляют связь между дифференциальными операторами (при $\alpha \in \mathbb{N}$) из определений полунорм (3.11) и (3.12).

Лемма 3.2. *Пусть* $f(x) \in \mathfrak{D}(0,\infty)$. *Тогда справедливы неравенства между полунормами:*

$$\|f\|_{h_2^\alpha} \leqslant \max(1, \sqrt{1+\sin\pi\alpha}\,)\|f\|_{\widehat{h}_2^\alpha}, \tag{3.16}$$

$$\|f\|_{\widehat{h}_2^\alpha} \leqslant \frac{1}{\min(1, \sqrt{1+\sin\pi\alpha}\,)}\|f\|_{h_2^\alpha}, \tag{3.17}$$

где α *— любое действительное число,* $\alpha \neq -\dfrac{1}{2} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Постоянные в неравенствах (3.16), (3.17) не меньше единицы, что будет далее использовано. В случае $\sin\pi\alpha = -1$ или $\alpha = -\frac{1}{2} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, оценка (3.17) не имеет места.

Приведённые леммы — это переформулировки результатов о формулах факторизации и оценках норм для операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости.

Введём на $\mathfrak{D}(0,\infty)$ соболевскую норму

$$\|f\|_{W_2^\alpha} = \|f\|_{L_2(0,\infty)} + \|f\|_{h_2^\alpha}. \tag{3.18}$$

Введём также другую норму

$$\|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha} = \|f\|_{L_2(0,\infty)} + \|f\|_{\widehat{h}_2^\alpha} \tag{3.19}$$

Пространства W_2^α, $\widehat{W}_2^\alpha$ определим как замыкания $\mathfrak{D}(0,\infty)$ по нормам (3.18) и (3.19) соответственно.

Теорема 3.6.

а) *При всех* $\alpha \in \mathbb{R}$ *пространство* $\widehat{W}_2^\alpha$ *непрерывно вложено в* W_2^α, *причём*

$$\|f\|_{W_2^\alpha} \leqslant A_1 \|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha}, \tag{3.20}$$

где $A_1 = \max(1, \sqrt{1+\sin\pi\alpha}\,)$.

б) *Пусть* $\sin\pi\alpha \neq -1$ *или* $\alpha \neq -\frac{1}{2} + 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. *Тогда справедливо обратное вложение* W_2^α *в* $\widehat{W}_2^\alpha$, *причём*

$$\|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha} \leqslant A_2 \|f\|_{W_2^\alpha}, \tag{3.21}$$

где $A_2 = 1/\min(1, \sqrt{1+\sin\pi\alpha}\,)$.

в) *Пусть* $\sin\pi\alpha \neq -1$, *тогда пространства* W_2^α *и* $\widehat{W}_2^\alpha$ *изоморфны, а их нормы эквивалентны.*

г) *Константы в неравенствах вложений* (3.20)–(3.21) *точные.*

Эта теорема фактически является следствием результатов по ограниченности операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в L_2, а именно теоремы 2.11. В свою очередь, из теоремы 2.12 об унитарности этих операторов вытекает результат об эквивалентной нормировке рассматриваемых нами вариантов пространств Соболева.

Теорема 3.7. *Нормы*

$$\|f\|_{W_2^\alpha} = \sum_{j=0}^{s} \|\mathfrak{D}_-{}^j f\|_{L_2}, \tag{3.22}$$

$$\|f\|_{\widehat{W}_2^\alpha} = \sum_{j=0}^{s} \|x^j (-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^j f\|_{L_2} \tag{3.23}$$

задают эквивалентные нормировки в пространстве Соболева при целых $s \in \mathbb{Z}$. Кроме того, каждое слагаемое в (3.22) *тождественно равно соответствующему слагаемому в* (3.23) *с тем же индексом j.*

Как уже было отмечено, И.А. Киприянов ввёл в [87, 88] шкалу пространств, которые оказали существенное влияние на теорию уравнений в частных производных с оператором Бесселя по одной или нескольким переменным. Эти пространства можно определить следующим образом. Рассмотрим подмножество чётных функций на $\mathfrak{D}(0,\infty)$, у которых все производные нечётного порядка равны нулю при $x = 0$. Обозначим это множество $\mathfrak{D}_c(0,\infty)$ и введём на нём норму

$$\|f\|_{\widetilde{W}^s_{2,k}} = \|f\|_{L_{2,k}} + \|B_k^{s/2}\|_{L_{2,k}}, \tag{3.24}$$

где s — чётное натуральное число, $B_k^{s/2}$ — итерация оператора Бесселя. Пространство Киприянова при чётных s определяется как замыкание $\mathfrak{D}_c(0,\infty)$ по норме (3.24). Известно, что эквивалентная (3.24) норма может быть задана по формуле (см. [88])

$$\|f\|_{\widetilde{W}^s_{2,k}} = \|f\|_{L_{2,k}} + \|x^s(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^s f\|_{L_{2,k}}. \tag{3.25}$$

Это позволяет доопределить норму в $\widetilde{W}^s_{2,\,k}$ для всех s. Отметим, что по существу этот подход совпадает с одним из принятых в [88]; другой подход основан на использовании преобразования Фурье–Бесселя. Далее будем считать, что $\widetilde{W}^s_{2,k}$ нормируется по формуле (3.25).

Введем весовую соболевскую норму

$$\|f\|_{W^s_{2,k}} = \|f\|_{L_{2,k}} + \|\mathfrak{D}_-{}^s f\|_{L_{2,k}} \tag{3.26}$$

и пространство $W^s_{2,\,k}$ как замыкание $\mathfrak{D}_c(0,\infty)$ по этой норме.

Теорема 3.8.

а) *Пусть $k \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда пространство $\widetilde{W}^s_{2,\,k}$ непрерывно вложено в $W^s_{2,\,k}$, причём существует постоянная $A_3 > 0$ такая, что*

$$\|f\|_{W^s_{2,k}} \leqslant A_3 \|f\|_{\widetilde{W}^s_{2,k}}. \tag{3.27}$$

б) *Пусть $k + s \neq -2m_1 - 1$, $k - s \neq -2m_2 - 2$, $m_1 \in \mathbb{N}_0$, $m_2 \in \mathbb{N}_0$. Тогда справедливо обратное вложение $W^s_{2,\,k}$ в $\widetilde{W}^s_{2,\,k}$, причём существует постоянная $A_4 > 0$ такая, что*

$$\|f\|_{\widetilde{W}^s_{2,k}} \leqslant A_4 \|f\|_{W^s_{2,k}}. \tag{3.28}$$

в) *Если указанные условия не выполняются, то соответствующие вложения не имеют места.*

Следствие 1. *Пусть выполняются условия: $k \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$; $k + s \neq -2m_1 - 1$, $m_1 \in \mathbb{N}_0$; $k - s \neq -2m_2 - 2$, $m_2 \in \mathbb{N}_0$. Тогда пространства Киприянова можно определить как замыкание $\mathfrak{D}_c(0,\infty)$ по весовой соболевской норме* (3.26).

Следствие 2. *Точные значения постоянных в неравенствах вложения* (3.27)–(3.28) *таковы*:

$$A_3 = \max(1, \|{}_1S_-{}^{s-1}\|_{L_{2,k}}),\ A_4 = \max(1, \|{}_1P_-{}^{s-1}\|_{L_{2,k}}).$$

Очевидно, что теорема 3.8 и следствия из неё вытекают из приведённых выше результатов для операторов Бушмана–Эрдейи. Отметим, что нормы операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости в $L_{2,\,k}$ дают значения точных постоянных в неравенствах вложения (3.27), (3.28). Оценки норм операторов Бушмана–Эрдейи в банаховых пространствах $L_{p,\alpha}$ позволяют рассматривать вложения для соответствующих функциональных пространств.

Неравенство для полунорм, приводящее к вложению (3.27) (s — целое число), получено в [133]. Вложения типа полученных в теореме 3.8 ранее изучались в [130, 131]. В последней работе рассматривался случай $k > -1/2,\ s \in \mathbb{N}$, пространства $W^s_{p,\,k}$. Мы рассматриваем гильбертовы пространства $W^s_{2,\,k}$, k и s — любые действительные числа. Кроме того, в теореме 3.8 уточнены условия отсутствия вложений из [130, 131], которые содержали ошибки (в качестве контрпримеров для некоторых вложений приводилась функция синуса, которая считалась чётной). Отметим, что в теореме 3.8 фактически установлены более точные неравенства между соответствующими полунормами, чем в предшествующих работах [130, 131]. Это стало возможным благодаря применению подробно изученных выше ОП Бушмана–Эрдейи.

Перейдём к рассмотрению правосторонних сплетающих операторов (2.89)–(2.92). Мы покажем, что в общем случае они осуществляют изоморфизм пространства Соболева и Киприянова. Определим пространства H^{2s}, H^{2s}_α и K^{2s}_α как замыкания множества функций $\mathfrak{D}(0,\infty)$ по нормам

$$\|f\|_{H^{2s}} = \|f\|_{L_2} + \|I_-{}^{2s}f\|_{L_2}, \tag{3.29}$$

$$\|f\|_{H^{2s}_\alpha} = \|f\|_{L_{2,\alpha}} + \|I_-{}^{2s}f\|_{L_{2,\alpha}}, \tag{3.30}$$

$$\|f\|_{K^{2s}_\alpha} = \|f\|_{L_{2,\alpha}} + \|B^s_\alpha f\|_{L_{2,\alpha}}, \tag{3.31}$$

s — натуральное число, $\alpha \in \mathbb{R}$. Определим также пару операторов типа (2.104)

$${}_1X_-{}^\alpha = {}_1S_-{}^{\alpha-1/2}x^{\alpha+1/2},\ {}_1Y_-{}^\alpha = x^{-(\alpha+1/2)}{}_1P_-{}^{\alpha-1/2}. \tag{3.32}$$

Теорема 3.9. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$. *Тогда оператор* ${}_1X^2_-$ *действует непрерывно из* H^{2s}_α *в* K^{2s}_α, *причём*

$$\|{}_1X_-{}^\alpha f\|_{H^{2s}_\alpha} \leqslant A_5\|f\|_{K^{2s}_\alpha}, \tag{3.33}$$

где $A_5 = \|{}_1X_-{}^\alpha\|_{H^{2s}_\alpha \to K^{2s}_\alpha} = \|{}_1S_-{}^{\alpha-1/2}\|_{L_2} = \max(1,\ \sqrt{1+\cos\pi\alpha}\,)$.

Пусть $s \in \mathbb{N}, \alpha \neq 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$ *(или* $\cos \pi\alpha \neq -1$*). Тогда оператор* ${}_1Y_-{}^{\alpha}$ *действует непрерывно из в* K_α^{2s} *в* H_α^{2s}*, причём справедливо неравенство*

$$\|{}_1Y_-{}^{\alpha} f\|_{K_\alpha^{2s}} \leqslant A_6 \|f\|_{H_\alpha^{2s}} \tag{3.34}$$

с постоянной

$$A_6 = \|{}_1Y_-{}^{\alpha}\|_{K_\alpha^{2s} \to H_\alpha^{2s}} = \|{}_1P_-{}^{\alpha-1/2}\|_{L_2} = 1/\max(1, \sqrt{1+\cos\pi\alpha}).$$

Все утверждения теоремы вновь следуют из результатов для свойств норм ОП Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости.

Оператор Бесселя является радиальной частью лапласиана в $\mathbb{R}^n$. При такой интерпретации этого оператора в случае нечётномерных пространств будет выполняться условие теоремы 3.9.

Теорема 3.10. *Пусть выполняются условия* $\alpha \neq 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq -n,\ n \in \mathbb{N};\ \alpha + 2s \neq -2m_1 - 1,\ m_1 \in \mathbb{N}_0;\ \alpha - 2s \neq -2m_2 - 2$, $m_2 \in \mathbb{N}_0$. *Тогда операторы* (3.32) *осуществляют топологический изоморфизм пространств Соболева* H^{2s} *и весового пространства Соболева* H_α^{2s}.

Очевидно, что все условия теоремы 3.10 выполняются при полуцелых $\alpha \in \mathbb{R}$. Поэтому справедлива

Теорема 3.11. *Пусть* $s \in \mathbb{N},\ \alpha - \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Z}$. *Тогда операторы* (3.32) *осуществляют топологический изоморфизм пространств Соболева* H^{2s} *и весовых пространств Соболева* H_α^{2s}.

Аналогично можно ввести по формулам типа (3.32) операторы ${}_1X^{\alpha}{}_{0+}$ и ${}_1Y^{\alpha}{}_{0+}$. В качестве приложения приведенных выше результатов можно также рассмотреть действие операторов (3.32) в пространствах с нормами (3.29)–(3.31) при произвольных весах, не согласованных с постоянной α в операторе Бесселя B_α.

Полученные в этом параграфе результаты для одномерного случая очевидным образом переносятся на многомерный случай для области, которая состоит из декартового произведения положительных полуосей или отрезков по каждой переменной. Например, в двумерном случае полученные результаты сразу могут быть применены для оценок норм и доказательству вложений в первом положительном квадранте или лежащем в нем прямоугольнике.

Таким образом, в этом параграфе с помощью ОП Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости дан положительный ответ на вопрос, который давно обсуждался в устном «фольклоре» — *изоморфны ли пространства Киприянова весовым пространствам Соболева?* Приведённые результаты ни в коем случае не умаляют ни существенного значения, ни необходимости использования пространств Киприянова для подходящего круга задач в теории дифференциальных уравнений в частных производных с операторами Бесселя. Полученные результаты также подтверждают полезность и эффективность для теории дифференциальных уравнений специального класса ОП — Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости, по существу введённого В.В. Катраховым в 1980-х гг.

Глава 4

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ

§ 4.1. Абстрактное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу

Абстрактному уравнению Эйлера–Пуассона–Дарбу $Au = (B_k)_t\, u$, $u = u(x, t; k)$, где A — линейный оператор, действующий только по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$, посвящены работы А.В. Глушака [45, 46, 49, 54–56]. Помимо рассмотренного классического подхода, к решению такого уравнения и его обобщениям можно применять метод операторов преобразования.

4.1.1. Рекуррентные формулы. Докажем, что решения абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу удовлетворяют рекуррентным соотношениям, которые позволяют находить решения абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу для произвольного значения $k \neq -1, -3, -5, \ldots$ по известному при некотором k. В случае $k = -1, -3, -5, \ldots$ решение уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу получается другим способом (см. п. 4.4.2).

Абстрактное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу имеет вид

$$Au = (B_k)_t\, u, \qquad u = u(x, t; k), \tag{4.1}$$

где A — линейный оператор, действующий только по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Лемма 4.1. *Пусть* $u^k = u(x, t;\ k)$ — *решение уравнения* (4.1). *Справедливы две рекуррентные формулы*:

$$u^k = t^{1-k} u^{2-k}, \tag{4.2}$$

$$u_t^k = t u^{k+2}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Докажем сначала (4.2). Положим $w = t^{k-1} v$, $v = u^k$. Будем иметь:

$$w_t = (k-1) t^{k-2} v + t^{k-1} v_t = \frac{k-1}{t} w + t^{k-1} v_t,$$

$$w_{tt} = (k-1)(k-2)t^{k-3}v + (k-1)t^{k-2}v_t + (k-1)t^{k-2}v_t + t^{k-1}v_{tt} =$$
$$= \frac{(k-1)(k-2)}{t^2}w + 2(k-1)t^{k-2}v_t + t^{k-1}v_{tt},$$
$$\frac{2-k}{t}w_t = -\frac{(k-1)(k-2)}{t^2}w + (2-k)t^{k-2}v_t,$$

$$w_{tt} + \frac{2-k}{t}w_t = 2(k-1)t^{k-2}v_t + t^{k-1}v_{tt} + (2-k)t^{k-2}v_t =$$
$$= t^{k-1}\left(v_{tt} + \frac{k}{t}v_t\right),$$

или

$$w_{tt} + \frac{2-k}{t}w_t = t^{k-1}\left(v_{tt} + \frac{k}{t}v_t\right). \tag{4.4}$$

Если $w = t^{k-1}v$ удовлетворяет уравнению

$$Aw = w_{tt} + \frac{2-k}{t}w_t,$$

то, используя (4.4), получим

$$t^{k-1}Av = t^{k-1}\left(v_{tt} + \frac{k}{t}v_t\right);$$

это означает, что v удовлетворяет уравнению

$$Av = v_{tt} + \frac{k}{t}v_t.$$

Обозначая $w = u^{2-k}$, получим (4.2).

Докажем теперь (4.3). Пусть $tw = v_t$, $v = u^k$. Запишем

$$w_t = -\frac{1}{t^2}v_t + \frac{1}{t}v_{tt},$$
$$w_{tt} = \frac{2}{t^3}v_t - \frac{2}{t^2}v_{tt} + \frac{1}{t}v_{ttt}.$$

Найдём теперь

$$\frac{k+2}{t}w_t = -\frac{k+2}{t^3}v_t + \frac{k+2}{t^2}v_{tt}.$$

Имеем

$$w_{tt} + \frac{k+2}{t}w_t = \frac{2}{t^3}v_t - \frac{2}{t^2}v_{tt} + \frac{1}{t}v_{ttt} - \frac{k+2}{t^3}v_t + \frac{k+2}{t^2}v_{tt} =$$
$$= \frac{1}{t}v_{ttt} - \frac{k}{t^3}v_t + \frac{k}{t^2}v_{tt} = \frac{1}{t}\left(v_{ttt} - \frac{k}{t^2}v_t + \frac{k}{t}v_{tt}\right) = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(v_{tt} + \frac{k}{t}v_t\right),$$

или

$$w_{tt} + \frac{k+2}{t} w_t = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(v_{tt} + \frac{k}{t} v_t\right). \tag{4.5}$$

Если $w = \dfrac{1}{t} v_t$ удовлетворяет уравнению

$$Aw = w_{tt} + \frac{k+2}{t} w_t,$$

то, используя (4.5), получим

$$\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t} Av = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(v_{tt} + \frac{k}{t} v_t\right),$$

откуда следует, что v удовлетворяет уравнению вида

$$Av = v_{tt} + \frac{k}{t} v_t.$$

Обозначая $w = u^{k+2}$, $v = u^k$, получим (4.3).

Лемма доказана.

Для $A = \Delta_\gamma$ формула (4.2) доказана в [362], а формула (4.3) доказана в [9]. Обе формулы присутствуют в статье Вайнштейна [495], но в случае, когда в уравнении (4.1) по переменным x_i, $i = 1, \ldots, n$, действует вторая производная. Эти рекуррентные формулы позволят при помощи решения u^k уравнения (4.1) получить решения того же уравнения, но со значениями параметра $k+2$ и $2-k$ соответственно.

Таким образом, если функция $u(x, t; k)$ является решением абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу $Au = (B_k)_t\, u$, где A — линейный оператор, действующий только по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то решением его будет также и функция $t^{1-k} u(x, t; 2-k)$.

4.1.2. Оператор Пуассона и абстрактное уравнение ЭПД. Как известно, оператор Пуассона (2.11) сплетает вторую производную и оператор Бесселя, т. е.

$$\mathcal{P}_t^k D_t^2 = (B_k)_t \mathcal{P}_t^k.$$

Это свойство позволяет находить решение абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (4.1) по известному решению уравнения $Aw = w_{tt}$, $w = w(x, t)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $t \in \mathbb{R}$, применением оператора Пуассона.

Теорема 4.1. *Пусть $k > 0$. Дважды непрерывно дифференцируемое при $t > 0$ решение $u = u(x, t;\ k)$ уравнения*

$$Au = (B_k)_t u, \quad u = u(x, t;\ k), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad t > 0, \tag{4.6}$$

связано с дважды непрерывно дифференцируемым решением уравнения

$$Aw = w_{tt}, \quad w = w(x, t), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.7}$$

формулой

$$u(x,t;\ k) = \mathcal{P}_t^k w(x,t), \tag{4.8}$$

где $\mathcal{P}_t^k$ *— оператор Пуассона* (2.11), *действующий по переменной* t.

Доказательство. Покажем, что функция u, определённая формулой (4.8), удовлетворяет уравнению (4.6). Имеем

$$u = \frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int\limits_0^1 w(x,\alpha t)(1-\alpha^2)^{k/2-1}\,d\alpha.$$

Пусть $\xi = \alpha t$. Интегрируя по частям, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int\limits_0^1 \alpha\, w_\xi(x,\alpha t)(1-\alpha^2)^{k/2-1}\,d\alpha =$$

$$= \Big\{ u = w_\xi(x,\alpha t), dv = \alpha(1-\alpha^2)^{k/2-1}\,d\alpha, du =$$

$$= t w_{\xi\xi}(x,\alpha t) d\alpha, v = -\frac{1}{k}\,(1-\alpha^2)^{k/2} \Big\} =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,\frac{t}{k} \int\limits_0^1 w_{\xi\xi}(x,\alpha t)(1-\alpha^2)^{k/2}\,d\alpha =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,\frac{t}{k} \int\limits_0^1 w_{\xi\xi}(x,\alpha t)(1-\alpha^2)^{k/2}\,d\alpha =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,\frac{t}{k} \int\limits_0^1 A w(x,\alpha t)(1-\alpha^2)^{k/2}\,d\alpha.$$

Для $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int\limits_0^1 \alpha^2\, w_{\xi\xi}(x,\alpha t)(1-\alpha^2)^{k/2-1}\,d\alpha =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int\limits_0^1 A w(x,\alpha t)\alpha^2\,(1-\alpha^2)^{k/2-1}\,d\alpha.$$

Таким образом,

$$(B_k)_t u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^1 Aw(x,\alpha t)\alpha^2 \left(1-\alpha^2\right)^{k/2-1} d\alpha + \int\limits_0^1 Aw(x,\alpha t)(1-\alpha^2)^{k/2}\, d\alpha \right) =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int\limits_0^1 Aw(x,\alpha t)(1-\alpha^2)^{k/2-1}\, d\alpha = A\mathcal{P}_t^k w(x,t) = Au.$$

Получаем, что функция u удовлетворяет уравнению (4.8).

Заметим, что при $k > -\frac{1}{2}$, зная решение u уравнения (4.8), можно восстановить по (4.8) решение уравнения (4.7) по формуле (2.13).

Доказательство закончено.

Замечание. Естественные условия задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу имеют вид

$$u(x,0;k) = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Кроме того, можно поставить второе ненулевое условие в предельной форме

$$\lim_{t\to 0} t^k \frac{\partial u}{\partial t} = g(x).$$

§ 4.2. Гиперболические уравнения с одной пространственной переменной

Проиллюстрируем метод применения оператора преобразования Пуассона из теоремы 4.1 на примере поиска решения простейшего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу по известному решению волнового уравнения.

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \tag{4.9}$$

его общее решение имеет вид

$$F(x+t) + G(x-t), \tag{4.10}$$

где F и G — произвольные функции. Применяя теорему 4.1, получим, что одним из решений уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (B_k)_t u, \qquad u = u(x,t;k), \tag{4.11}$$

будет функция

$$u_1 = 2C(k)\frac{1}{t^{k-1}}\int\limits_0^t [F(x+z)+G(x-z)](t^2-z^2)^{k/2-1}\,dz.$$

Преобразуем полученное общее решение следующим образом:

$$u_1 = \frac{C(k)}{t^{k-1}}\int\limits_{-t}^{t} \frac{F(x+z)+F(x-z)+G(x+z)+G(x-z)}{(t^2-z^2)^{1-k/2}}\,dz.$$

Введем новую переменную p по формуле $z = t(2p-1)$, получим

$$u_1 = \int\limits_0^1 \frac{\Phi(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{1-k/2}}\,dp,$$

где

$$\Phi(x+z) = F(x+z)+F(x-z)+G(x+z)+G(x-z).$$

Из леммы 4.1 следует, что если функция $u(x,t;k)$ является решением (4.11), то решением его будет также и функция $t^{1-k}u(x,t;2-k)$. Поэтому вторым решением (4.11) будет функция

$$u_2 = t^{1-k}\int\limits_0^1 \frac{\Psi(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{k/2}}\,dp,$$

где Ψ — произвольная функция, вообще говоря, не совпадающая с Φ. Составив сумму u_1 и u_2, получим, что общее решение (4.11) имеет вид

$$u = \int\limits_0^1 \frac{\Phi(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{1-k/2}}\,dp + t^{1-k}\int\limits_0^1 \frac{\Psi(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{k/2}}\,dp. \qquad (4.12)$$

Замечание 1. Исходя из вида общего решения (4.12), можно понять, что для суммируемых функций Φ и Ψ такое решение имеет место только при $0 < k < 2$.

Замечание 2. Из (4.12) следует, что естественные условия задачи Коши для (4.12) при $0 < k < 1$ имеют вид

$$u(x,0;k) = f(x), \qquad \left(t^k\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=0} = g(x).$$

Найдем теперь решение задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (B_k)_t u, \qquad u = u(x,t;k), \qquad 0 < k < 1, \qquad (4.13)$$

$$u(x,0;k) = f(x), \qquad \left(t^k\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=0} = g(x). \qquad (4.14)$$

Используя (4.12), при $0 < k < 1$ получим

$$u(x,0;k) = \Phi(x)\int\limits_0^1 [p(1-p)]^{k/2} - 1\,dp = f(x);$$

следовательно,

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)} f(x).$$

Найдём $\left(t^k \frac{\partial u}{\partial t}\right)|_{t=0}$. Имеем

$$\left(t^k \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=0} = (1-k)\Psi(x)\int\limits_0^1 [p(1-p)]^{k/2} dp = g(x),$$

тогда

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma(k+2)}{(1-k)\Gamma^2\left(\frac{k}{2}+1\right)} g(x).$$

Получаем, что решение задачи Коши (4.13)–(4.14) при $0 < k < 1$ имеет вид

$$u = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_0^1 \frac{f(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{1-k/2}} dp + \\ + t^{1-k}\frac{\Gamma(k+2)}{(1-k)\Gamma^2\left(\frac{k}{2}+1\right)}\int\limits_0^1 \frac{g(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{k/2}} dp. \quad (4.15)$$

Замечание 3. Задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (B_k)_t u, \qquad u = u(x,t;k), \quad (4.16)$$

$$u(x,0;k) = f(x), \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=0} = 0 \quad (4.17)$$

можно поставить для любого $k > 0$. Её решение имеет вид

$$u = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_0^1 \frac{f(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{1-k/2}} dp.$$

Замечание 4. Задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (B_k)_t u, \qquad u = u(x,t;k), \quad (4.18)$$

$$u(x,0;k) = 0, \qquad \left(t^k \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=0} = g(x) \quad (4.19)$$

можно поставить для любого $k < 1$. Её решение имеет вид

$$u = t^{1-k}\,\frac{\Gamma(k+2)}{(1-k)\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\int\limits_0^1 \frac{g(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{k/2}}dp.$$

Задачу Коши (4.13)–(4.14) можно рассматривать и при $k \notin (0,1)$. В этом случае для получения решения используются либо рекуррентные формулы (4.2), (4.3) (при $k \neq -1, -3, -5, \ldots$), либо операторы преобразования, сдвигающие индекс оператора Бесселя (например, (2.15)). Случай $k = -1, -3, -5, \ldots$ является исключительным и исследуется отдельно.

Используя теорему 4.1 и решение (4.12), найдём общее решение уравнения

$$(B_\gamma)_x u = (B_k)_t u. \tag{4.20}$$

Применяя оператор Пуассона $\mathcal{P}_x^\gamma$ при $\gamma > -\dfrac{1}{2}$ по переменной x к (4.12), получим, что общее решение уравнения (4.20) имеет вид

$$u = \frac{2C(\gamma)}{x^{\gamma-1}}\left(\int\limits_0^x (x^2-z^2)^{\gamma/2-1}\,dz\int\limits_0^1 \frac{\Phi(z+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{1-k/2}}\,dp + \right.$$
$$\left. + t^{1-k}\int\limits_0^x (x^2-z^2)^{\gamma/2-1}\,dz\int\limits_0^1 \frac{\Psi(z+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{k/2}}\,dp\right). \tag{4.21}$$

Получим теперь решение уравнения (4.20) при $0 < k < 1$ и условиях

$$u(x,0;k) = f(x), \qquad [t^k u_t(x,t;k)]|_{t=0} = g(x). \tag{4.22}$$

Тогда

$$u(x,0;k) = 2C(\gamma)\frac{1}{x^{\gamma-1}}\int\limits_0^x (x^2-z^2)^{\gamma/2-1}\,dz\int\limits_0^1 \frac{\Phi(z)}{[p(1-p)]^{1-k/2}}\,dp = f(x)$$

или

$$\mathcal{P}_x^\gamma \Phi(x) = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}\right)} f(x).$$

Найдём $\Phi(x)$, применяя (2.13); получим

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}\right)}\cdots\frac{2\sqrt{\pi}\,x}{\Gamma\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\dfrac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^n \times$$
$$\times\int\limits_0^x f(z)(x^2-z^2)^{n-\gamma/2-1}z^{2-\gamma}dz, \quad n = \left[\frac{\gamma}{2}\right]+1. \tag{4.23}$$

Найдём теперь $\lim\limits_{t\to 0} t^k u_t(x,t;k)$. Имеем

$$\lim_{t\to 0} t^k u_t(x,t;k) = (1-k)\frac{2C(\gamma)}{x^{\gamma-1}}\int\limits_0^x (x^2-z^2)^{\gamma/2-1}\,dz\int\limits_0^1 \frac{\Psi(z)}{[p(1-p)]^{k/2}}dp = g(x),$$

или

$$\mathcal{P}_x^\gamma \Psi(x) = \frac{\Gamma(2-k)}{(1-k)\Gamma^2\left(1-\dfrac{k}{2}\right)} g(x).$$

Тогда, применяя (2.13), получаем

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma(2-k)}{(1-k)\Gamma^2\left(1-\dfrac{k}{2}\right)}\frac{2\sqrt{\pi}\,x}{\Gamma\left(\dfrac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(n-\dfrac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^n \times$$
$$\times \int\limits_0^x g(z)(x^2-z^2)^{n-\gamma/2-1} z^{2-\gamma}dz, \quad n = \left[\frac{\gamma}{2}\right]+1. \quad (4.24)$$

Таким образом, решение задачи Коши (4.20)–(4.22) при $0<k<1$ дается выражением (4.21), где Φ и Ψ определяются через начальные данные по формулам (4.23) и (4.24) соответственно.

Рассмотрим частный случай полученного решения. При $g(x)=0$, $0<k=\gamma<1$ будем иметь задачу вида

$$(B_\gamma)_x u = (B_k)_t u, \qquad u = u(x,t;k),$$
$$u(x,0;k) = f(x), \qquad u_t(x,0;k) = 0.$$

Преобразуя ее решение

$$u = \frac{2C(\gamma)}{x^{\gamma-1}}\int\limits_0^x (x^2-z^2)^{\gamma/2-1}\,dz\int\limits_0^1 \frac{\Phi(z+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{1-k/2}}\,dp,$$

получим

$$u = \frac{2}{\Gamma\left(\gamma+\dfrac{1}{2}\right)}\cdot\frac{(2t)^{1-\gamma}}{x^{2\gamma}}\cdot\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma^2\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)}\frac{(\gamma-2)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\gamma\right)}\int\limits_0^x (x^2-z^2)^{\gamma-1/2}\,dz\times$$
$$\times\int\limits_{z-t}^{z+t}(\xi-z)[t^2-(\xi-z)^2]^{\gamma/2-2}d\xi\int\limits_0^\xi \eta^{2\gamma+1}f(\eta)(\xi^2-\eta^2)^{-\gamma-1/2}d\eta.$$

Оператор

$$S_\xi^\gamma f(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\gamma\right)}\int\limits_0^\xi \eta^{2\gamma+1}f(\eta)(\xi^2-\eta^2)^{-\gamma-1/2}d\eta$$

— это оператор Сонина. Таким образом,

$$u = \frac{2\Gamma(\gamma+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{(2t)^{1-\gamma}}{x^{2\gamma}} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \frac{(\gamma-2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)} \int\limits_0^x (x^2-z^2)^{\gamma-1/2}\,dz \times$$

$$\times \int\limits_{z-t}^{z+t} (\xi-z)\left[t^2-(\xi-z)^2\right]^{\gamma/2-2} S_\xi^\gamma f(\xi)d\xi. \quad (4.25)$$

Известно (см. [126, с. 129]), что оператор Сонина действует на $j_\gamma(\xi)$ следующим образом: $S_\xi^\gamma j_\gamma(\xi) = \sin\xi$. Поэтому при $f(x) = j_\gamma(x)$ имеем

$$u = \frac{2\Gamma(\gamma+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{(2t)^{1-\gamma}}{x^{2\gamma}} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \cdot \frac{(\gamma-2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)} \int\limits_0^x (x^2-z^2)^{\gamma-1/2}\,dz \times$$

$$\times \int\limits_{z-t}^{z+t} (\xi-z)\left[t^2-(\xi-z)^2\right]^{\gamma/2-2} \sin\xi d\xi.$$

§ 4.3. Уравнение со спектральным параметром

В [243, задача 39] приведено общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = b^2 u, \quad 0 < k < 1, \qquad (4.26)$$

$$b \in \mathbb{R} \text{ или } b - \text{чисто мнимое.}$$

Это решение имеет вид

$$u = \int\limits_0^1 \frac{\Phi(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{1-k/2}} j_{k/2-1}\left(2bt\sqrt{p(1-p)}\right) dp +$$

$$+ t^{1-k} \int\limits_0^1 \frac{\Psi(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{k/2}} j_{-k/2}\left(2bt\sqrt{p(1-p)}\right) dp, \quad (4.27)$$

где Φ и Ψ — произвольные функции.

Доказательство. Решение уравнения (4.26) ищется в виде $u = F(r)$, где $r = \sqrt{t^2-(x-\xi)^2}$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{t}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2}} \frac{dF}{dr} = \frac{t}{r} \cdot \frac{dF}{dr},$$

$$\frac{k}{t} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \cdot \frac{dF}{dr},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{t^2}{t^2-(x-\xi)^2}\cdot\frac{d^2F}{dr^2} - \frac{(x-\xi)^2}{[t^2-(x-\xi)^2]^{3/2}}\cdot\frac{dF}{dr} =$$
$$= \frac{t^2}{r^2}\cdot\frac{d^2F}{dr^2} - \frac{(x-\xi)^2}{r^{3/2}}\cdot\frac{dF}{dr},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{(x-\xi)}{\sqrt{t^2-(x-\xi)^2}}\cdot\frac{dF}{dr} = -\frac{(x-\xi)}{r}\cdot\frac{dF}{dr},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(x-\xi)^2}{t^2-(x-\xi)^2}\cdot\frac{d^2F}{dr^2} - \frac{t^2}{[t^2-(x-\xi)^2]^{3/2}}\cdot\frac{dF}{dr} =$$
$$= \frac{(x-\xi)^2}{r^2}\cdot\frac{d^2F}{dr^2} - \frac{t^2}{r^{3/2}}\cdot\frac{dF}{dr}.$$

Получим

$$b^2u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t} =$$
$$= b^2F - \frac{(x-\xi)^2}{r^2}\cdot\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{t^2}{r^{3/2}}\cdot\frac{dF}{dr} + \frac{t^2}{r^2}\cdot\frac{d^2F}{dr^2} - \frac{(x-\xi)^2}{r^{3/2}}\cdot\frac{dF}{dr} + \frac{k}{r}\cdot\frac{dF}{dr} =$$
$$= b^2F + \frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1+k}{r}\cdot\frac{dF}{dr} = 0.$$

Одним из решений полученного уравнения будет

$$u_1 = F(r) = r^{-k/2}J_{-k/2}(br).$$

Для уравнения (4.26) справедливо следующее свойство: если $u(x,t;k)$ — решение этого уравнения, то решением его будет также и функция $t^{1-k}u(x,t;2-k)$. Поэтому в качестве второго решения этого уравнения возьмём

$$u_2 = t^{1-k}r^{k/2-1}J_{k/2-1}(br).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнению (4.26) удовлетворяют также выражения

$$u_1 = \int\limits_{x-t}^{x+t} \frac{\Psi(\xi)}{r^{k/2}}J_{-k/2}(br)d\xi, \tag{4.28}$$

$$u_2 = t^{1-k}\int\limits_{x-t}^{x+t} \frac{\Phi(\xi)}{r^{1-k/2}}J_{k/2-1}(br)d\xi, \tag{4.29}$$

где Φ и Ψ — произвольные функции. Переходя в (4.28) и (4.29) к функции $j_\nu(z)=\dfrac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{z^\nu}J_\nu(z)$ и переобозначая функции Φ и Ψ, получим:

$$u_1 = \int\limits_{x-t}^{x+t} \frac{\Psi(\xi)}{r^k}j_{-k/2}(br)d\xi, \tag{4.30}$$

$$u_2 = t^{1-k} \int\limits_{x-t}^{x+t} \frac{\Phi(\xi)}{r^{2-k}} j_{k/2-1}(br) d\xi, \tag{4.31}$$

Произведя в (4.30) и (4.31) подстановку $\xi = x + t(2p-1)$, будем иметь:

$$u_1 = t^{1-k} \int\limits_0^1 \frac{\Psi(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{k/2}} j_{-k/2}\left(2bt\sqrt{p(1-p)}\right) dp, \tag{4.32}$$

$$u_2 = \int\limits_0^1 \frac{\Phi(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{1-k/2}} j_{k/2-1}\left(2bt\sqrt{p(1-p)}\right) dp, \tag{4.33}$$

Составив сумму u_1 и u_2, получим, что общее решение (4.26) имеет вид (4.27).

Замечание. Производя в (4.30) и (4.31) подстановку $\xi = x + p$, используя обозначение j_ν и переобозначая функции Φ и Ψ, получим, что общее решение (4.26) имеет вид

$$u = \int\limits_{-t}^{t} \frac{\Phi(\xi+p)}{(t^2-p^2)^{1-k/2}} j_{k/2-1}(b\sqrt{t^2-p^2}\,) dp + t^{1-k} \times$$
$$\times \int\limits_{-t}^{t} \frac{\Psi(\xi+p)}{(t^2-p^2)^{k/2}} j_{-k/2}(b\sqrt{t^2-p^2}\,) dp. \tag{4.34}$$

Рассмотрим задачу Коши [243, задача 56] вида

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = b^2 u, \quad 0 < k < 1, \\ b \in \mathbb{R} \text{ или } b - \text{чисто мнимое}, \end{gathered} \tag{4.35}$$

$$u(x,0;k) = f(x), \qquad t^k u_t(x,t;k)|_{t=0} = g(x). \tag{4.36}$$

Используя (4.27), получим

$$u(x,0;k) = \Phi(x) \int\limits_0^1 [p(1-p)]^{k/2-1} dp = f(x),$$

тогда

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}\right)} f(x).$$

Найдём $\lim\limits_{t\to 0} t^k u_t(x,t;k)$. Имеем

$$\lim_{t\to 0} t^k u_t(x,t;k) = (1-k)\lim_{t\to 0}\int\limits_0^1 \frac{\Psi[x+t(2p-1)]}{[p(1-p)]^{k/2}} j_{-k/2}(2bt\sqrt{p(1-p)}\,)dp =$$

$$= (1-k)\Psi(x)\int\limits_0^1 [p(1-p)]^{k/2}dp = g(x),$$

тогда

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma(k+2)}{(1-k)\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}+1\right)} g(x).$$

Получаем, что решене задачи Коши (4.35)–(4.36) имеет вид

$$u = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}\right)}\int\limits_0^1 \frac{f(x+t(2p-1))}{(p(1-p))^{1-k/2}} j_{k/2-1}\cdot 2bt\sqrt{p(1-p)}\,dp +$$

$$+ t^{1-k}\frac{\Gamma(k+2)}{(1-k)\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\int\limits_0^1 \frac{g(x+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{k/2}} j_{-k/2}\cdot 2bt\sqrt{p(1-p)}\,dp.$$

Производя в полученном выражении замену $t(2p-1)=z$, получим, что решение задачи Коши (4.35)–(4.36) можно также записать в виде

$$u = \frac{(2t)^{1-k}\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}\right)}\int\limits_{-t}^{t} \frac{f(x+z)}{(t^2-z^2)^{1-k/2}} j_{k/2-1}\cdot b\sqrt{t^2-z^2}\,dz +$$

$$+ \frac{2^{k-1}\Gamma(k+2)}{(1-k)\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\int\limits_{-t}^{t} \frac{g(x+z)}{(t^2-z^2)^{k/2}} j_{-k/2}\cdot b\sqrt{t^2-z^2}\,dz. \qquad (4.37)$$

Получим теперь решение задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = b^2 u, \qquad (4.38)$$

$$0<k<1, \qquad b\in\mathbb{R} \text{ или } b - \text{чисто мнимое},$$

$$u(x,0;k) = f(x), \qquad t^k u_t(x,t;k)|_{t=0} = g(x), \qquad (4.39)$$

используя оператор Пуассона, сплетающий вторую производную и оператор Бесселя.

Применяя оператор Пуассона по переменной x к (4.27), получим, что общее решение уравнения (4.38) имеет вид

$$u = \frac{A(\gamma)}{x^{2\gamma}} \int\limits_0^x (x^2 - z^2)^{\gamma-1/2}\, dz \int\limits_0^1 \frac{\Phi(z + t(2p-1))}{[p(1-p)]^{1-k/2}} j_{k/2-1} \cdot 2bt\sqrt{p(1-p)}\, dp +$$

$$+ \frac{A(\gamma)}{x^{2\gamma}} t^{1-k} \int\limits_0^x (x^2 - z^2)^{\gamma-1/2}\, dz \int\limits_0^1 \frac{\Psi(z + t(2p-1))}{[p(1-p)]^{k/2}} j_{-k/2} \cdot 2bt\sqrt{p(1-p)}\, dp, \tag{4.40}$$

где

$$A(\gamma) = \frac{2\Gamma(\gamma+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}.$$

Тогда

$$u(x, 0; k) = \frac{A(\gamma)}{x^{2\gamma}} \int\limits_0^x (x^2 - z^2)^{\gamma-1/2}\, dz \int\limits_0^1 \frac{\Phi(z)}{[p(1-p)]^{1-k/2}} dp = f(x)$$

при

$$\frac{A(\gamma)}{x^{2\gamma}} \int\limits_0^x \Phi(z)(x^2 - z^2)^{\gamma-1/2}\, dz = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)} f(x)$$

или

$$\mathcal{P}_x^\gamma \Phi(x) = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)} f(x).$$

Применяя (2.13), получаем

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{2\sqrt{\pi}\, x}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma\left(n - \gamma - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{d}{2xdx}\right)^n \times$$

$$\times \int\limits_0^x z^{2\gamma+1} f(z)(x^2 - z^2)^{n-\gamma-3/2} dz, \quad n = \left[\gamma + \frac{3}{2}\right], \tag{4.41}$$

или, при $-\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}$,

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma^2\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x z^{2\gamma+1} f(z)(x^2 - z^2)^{-\gamma-1/2} dz. \tag{4.42}$$

Найдём теперь $\lim\limits_{t\to 0} t^k u_t(x, t; k)$. Имеем

$$\lim_{t\to 0} t^k u_t(x, t; k) = (1-k)\frac{A(\gamma)}{x^{2\gamma}} \int\limits_0^x (x^2 - z^2)^{\gamma-1/2}\, dz \int\limits_0^1 \frac{\Psi(z)}{[p(1-p)]^{k/2}} dp = g(x)$$

при

$$\frac{A(\gamma)}{x^{2\gamma}}\int\limits_0^x \Psi(z)(x^2-z^2)^{\gamma-1/2}\,dz = \frac{\Gamma(k+2)}{(1-k)\Gamma^2\left(\frac{k}{2}+1\right)}g(x)$$

или

$$\mathcal{P}_x^\gamma\Psi(x) = \frac{\Gamma(k+2)}{(1-k)\Gamma^2\left(\frac{k}{2}+1\right)}g(x)$$

Применяя (2.13) при $n=\left[\gamma+\frac{3}{2}\right]$, получаем

$$\Psi(x)=\frac{\Gamma(k+2)}{(1-k)\Gamma^2\left(\frac{k}{2}+1\right)}\cdot\frac{2\sqrt{\pi}\,x}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma\left(n-\gamma-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^n\times$$

$$\times\int\limits_0^x z^{2\gamma+1}g(z)(x^2-z^2)^{n-\gamma-3/2}dz \qquad (4.43)$$

или, при $-\frac{1}{2}<\gamma<\frac{1}{2}$,

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma(k+2)}{(1-k)\Gamma^2\left(\frac{k}{2}+1\right)}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\int\limits_0^x z^{2\gamma+1}g(z)(x^2-z^2)^{-\gamma-1/2}dz. \qquad (4.44)$$

Таким образом, решение задачи Коши (4.38)–(4.39) даётся выражением (4.40), где Φ и Ψ определяются через начальные данные соответственно по формулам (4.41) и (4.43) или (4.42) и (4.44).

Рассмотрим частный случай полученного решения. При $b=0$, $g(x)=0$, $0<k{=}\gamma<\frac{1}{2}$ получаем задачу вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\gamma}{t}\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$u(x,0;k)=f(x), \qquad u_t(x,0;k)=0,$$

и её решение

$$u=\frac{A(\gamma)}{x^{2\gamma}}\int\limits_0^x(x^2-z^2)^{\gamma-1/2}\,dz\int\limits_0^1\frac{\Phi(z+t(2p-1))}{[p(1-p)]^{1-\gamma/2}}dp=\{z+t(2p-1)=\xi\}=$$

$$=\frac{A(\gamma)(2t)^{1-\gamma}}{x^{2\gamma}}\int\limits_0^x(x^2-z^2)^{\gamma-1/2}\,dz\int\limits_{z-t}^{z+t}\Phi(\xi)[t^2-(\xi-z)^2]^{\gamma/2-1}d\xi=$$

$$= \frac{A(\gamma)(2t)^{1-\gamma}}{x^{2\gamma}} \int\limits_0^x (x^2 - z^2)^{\gamma-1/2}\, dz \int\limits_{z-t}^{z+t} \Phi(\xi)[t^2 - (\xi - z)^2]^{\gamma/2-1} d\xi =$$

$$= \frac{A(\gamma)(2t)^{1-\gamma}}{x^{2\gamma}} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)} \int\limits_0^x [x^2 - z^2]^{\gamma-1/2}\, dz \times$$

$$\times \int\limits_{z-t}^{z+t} [t^2 - (\xi - z]^2)^{\gamma/2-1} \left(\frac{d}{d\xi} \int\limits_0^\xi \eta^{2\gamma+1} f(\eta)(\xi^2 - \eta^2)^{-\gamma-1/2} d\eta \right) d\xi.$$

Проинтегрируем по частям интеграл по ξ, подставим константу $A(\gamma)$, получим

$$u = \frac{2}{\Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{(2t)^{1-\gamma}}{x^{2\gamma}} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \cdot \frac{(\gamma-2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)} \int\limits_0^x (x^2 - z^2)^{\gamma-1/2}\, dz \times$$

$$\times \int\limits_{z-t}^{z+t} (\xi - z)[t^2 - (\xi - z)^2]^{\gamma/2-2} d\xi \int\limits_0^\xi \eta^{2\gamma+1} f(\eta)(\xi^2 - \eta^2)^{-\gamma-1/2} d\eta.$$

§ 4.4. Первая задача Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу

В этом параграфе рассмотрим обобщение классического уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу на случай, когда по всем пространственным переменным действует оператор Бесселя B_x.

Классическое уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad u = u(x,t), \qquad (4.45)$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad -\infty < k < \infty.$$

Уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу (4.45) при $n = 1$ впервые было рассмотрено Л. Эйлером (Leonhard Euler) в [360, с. 227] и позднее исследовано в [442] С.Д. Пуассоном (Siméon Denis Poisson), в [195] Б. Риманом (Bernhard Riemann) и в [332] Г. Дарбу (Gaston Darboux) (см. также историю вопроса в [162, с. 532]. Многомерное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу (4.45) рассмотрено, например, в [172, 494]. А. Вайнштейном (Alexander Weinstein) в статьях [495, 496] решена задача Коши для уравнения (4.45), где k в правой части есть произвольное вещественное число и первое условие ненулевое, а второе нулевое. С.А. Терсеновым в [255] рассмотрена общая задача Коши

для (4.45), где и первое и второе условия ненулевые. Кроме того, уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу рассмотрено в [110–112].

Пусть

$$\triangle_\gamma = \sum_{i=1}^{n} (B_{\gamma_i})_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x},$$

$$(B_k)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Весовое сферическое среднее (2.183) тесно связано с общим уравнением Эйлера–Пуассона–Дарбу вида

$$\begin{gathered} \triangle_\gamma u(x,t) = (B_k)_t\, u, \quad -\infty < k < \infty, \\ u = u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t > 0. \end{gathered} \tag{4.46}$$

Будем рассматривать решения (4.46), удовлетворяющие следующим начальным условиям

$$u(x,0) = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{4.47}$$

В [362] (см. также [313, с. 243; 476]) и в [138] рассмотрены различные подходы к решению задачи Коши (4.46)–(4.47) для всех вещественных $k \neq -1, -3, -5, \ldots$. В статье [9] методом, отличным от использующихся в [362] и в [313], было получено решение (4.46)–(4.47) для любых вещественных k.

Приведём решения задачи (4.46)–(4.47) для различных k (см. [9]). Отметим сначала, что решение задачи Коши (4.46)–(4.47) при $k \geqslant 0$ единственно, а при $k < 0$ не является единственным (см. [362]).

4.4.1. Случай $k > n + |\gamma| - 1$. Рассмотрим, как получить решение задачи Коши (4.46)–(4.47) методом операторов преобразования.

К уравнению

$$\triangle_\gamma u = (B_k)_t\, u$$

применим весовое сферическое среднее M_t^γ по переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$, которое преобразует оператор $(\triangle_\gamma)_x$ в $B_{n+|\gamma|-1}$. Учитывая свойство 1 весового сферического среднего, получим

$$(\triangle_\gamma)_x (M_t^\gamma)_x [u(x,t;k)] = (B_{n+|\gamma|-1})_t (M_t^\gamma)_x [u(x,t;k)]$$

и

$$(B_{n+|\gamma|-1})_t (M_t^\gamma)_x [u(x,t;k)] = (B_k)_t\, (M_t^\gamma)_x [u(x,t;k)]. \tag{4.48}$$

При $k = n + |\gamma| - 1$ уравнение (4.48) превращается в тождество, а с учётом условия $u(x,0;k) = f(x)$ получаем равенство

$$(\triangle_\gamma)_x M_t^\gamma [f(x)] = (B_{n+|\gamma|-1})_t M_t^\gamma [f(x)]. \tag{4.49}$$

Таким образом, решение задачи (4.46)–(4.47) при $k = n + |\gamma| - 1$ единственно и имеет вид $u(x,t;n+|\gamma|-1) = M_t^\gamma [f(x)]$. Для того

чтобы получить решение задачи (4.46)–(4.47) при $k > n + |\gamma| + 1$, применим к обеим частям (4.49) по переменной t оператор (2.15) при $\beta = n + |\gamma| - 1$. Будем иметь

$$I^k_{n+|\gamma|-1}(B_{n+|\gamma|-1})_t M^\gamma_t[f(x)] = B_k I^k_{n+|\gamma|-1} M^\gamma_t[f(x)].$$

Возвращаясь к (4.49), получаем равенство

$$(\triangle_\gamma)_x I^k_{n+|\gamma|-1} M^\gamma_t[f(x)] = B_k I^k_{n+|\gamma|-1} M^\gamma_t[f(x)],$$

причём

$$(I^k_{n+|\gamma|-1})_t M^\gamma_t[f(x)]|_{t=0} = f(x), \qquad \left.\frac{\partial (I^k_{n+|\gamma|-1})_t M^\gamma_t[f(x)]}{\partial t}\right|_{t=0} = 0;$$

следовательно,

$$u(x,t;k) = (I^k_{n+|\gamma|-1})_t M^\gamma_t[f(x)] = \frac{2t^{1-k}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \times$$
$$\times \int\limits_0^t (t^2 - r^2)^{(k-n-|\gamma|-1)/2} r^{n+|\gamma|-1} M^\gamma_r f(x)\,dr \qquad (4.50)$$

есть единственное решение задачи (4.46)–(4.47) при $k > n + |\gamma| + 1$.

Хотя (4.50) было получено как решение задачи (4.46)–(4.47) при $k > n + |\gamma| + 1$, легко заметить, что интеграл (4.50) сходится при $k > n + |\gamma| - 1$. Непосредственная подстановка выражения $(I^k_{n+|\gamma|-1})_t M^\gamma_t[f(x)]$ в (4.46)–(4.47) даёт, что (4.50) является единственным решением (4.46)–(4.47) и при $n + |\gamma| - 1 < k \leqslant n + |\gamma| + 1$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть $f \in C^2_{\mathrm{ev}}$. Тогда при $n + |\gamma| - 1 \leqslant k$ единственное решение задачи*

$$\triangle_\gamma u(x,t) = (B_k)_t\, u, \quad u = u(x,t;\ k), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t > 0,$$
$$u(x,0;\ k) = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

имеет вид

$$u(x,t;k) = \frac{2t^{1-k}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n-|\gamma|+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \times$$
$$\times \int\limits_0^t (t^2 - r^2)^{(k-n-|\gamma|-1)/2} r^{n+|\gamma|-1} M^\gamma_r f(x)\,dr. \qquad (4.51)$$

4.4.2. Случай $k \leqslant n + |\gamma| - 1$.

Теорема 4.3. *Пусть* $f \in C_{\mathrm{ev}}^{[(n+|\gamma|-k)/2]+2}$. *Решение задачи Коши*

$$\triangle_\gamma u(x,t) = (B_k)_t\, u, \quad u = u(x,t;\ k), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad t > 0, \tag{4.52}$$

$$u(x,0;\ k) = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{4.53}$$

при $k < n + |\gamma| - 1$, $k \neq -1, -3, -5, \ldots$ *имеет вид*

$$u(x,t;\ k) = t^{1-k}\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^m (t^{k+2m-1}u(x,t;\ k+2m)), \tag{4.54}$$

где m *— минимальное целое число такое, что* $m \geqslant \dfrac{n+|\gamma|-k-1}{2}$ *и* $u(x,t;\ k+2m)$ *— решение задачи Коши*

$$(B_{k+2m})_t u = (\Delta_\gamma)_x u, \tag{4.55}$$

$$\begin{gathered} u(x,0;\ k+2m) = \frac{f(x)}{(k+1)(k+3)\ldots(k+2m-1)}, \\ u_t(x,0;\ k+2m) = 0. \end{gathered} \tag{4.56}$$

Решение (4.54) *единственно при* $k \geqslant 0$ *и не единственно при* $k < 0$.

Доказательство. Для того чтобы показать, что (4.54) есть решение рассматриваемой задачи при $k < n + |\gamma| - 1$, $k \neq -1, -3, -5, \ldots$, будем использовать рекуррентные формулы (4.2) и (4.3). Выберем наименьшее целое число m такое, что $k + 2m \geqslant n + |\gamma| - 1$. Выпишем теперь решение задачи Коши вида

$$(B_{k+2m})_t u = (\Delta_\gamma)_x u, \tag{4.57}$$

$$u(x,0;k+2m) = g(x), \qquad u_t(x,0;k+2m) = 0, \quad g \in C_{\mathrm{ev}}^2, \tag{4.58}$$

используя формулу (4.51):

$$u(x,t;k+2m) = \frac{2t^{1-k-2m}\,\Gamma\left(\dfrac{k+2m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k+2m-n-|\gamma|+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)} \times$$
$$\times \int_0^t (t^2 - r^2)^{(k+2m-n-|\gamma|-1)/2} r^{n+|\gamma|-1} M_r^\gamma f(x)\,dr.$$

Используя (4.2), получим

$$t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m) = u(x,t;2-k-2m).$$

Применяя (4.3) к последней формуле m раз, запишем

$$\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^m (t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m)) = u(x,t;2-k).$$

Снова применив (4.2), получим искомое решение уравнения (4.52) вида

$$u(x,t;k) = t^{1-k}\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^m (t^{k+2m-1}u(x,t;k+2m)). \tag{4.59}$$

Найдём теперь функцию g такую, чтобы выполнялись условия (4.53). Учитывая вид решения (4.59), запишем

$$\begin{aligned} u(x,t;k) &= \\ &= (k+1)(k+3)\ldots(k+2m-1)u(x,t;k+2m) + C\,t\,u(x,t;k+2m) + \\ &\quad + O(t^2), \quad t\to 0, \quad (t^2-r^2)^{(k+2m-n-|\gamma|-1)/2} r^{n+|\gamma|-1} M_r^\gamma f(x)dr, \end{aligned}$$

где C — некоторая постоянная. Таким образом, если

$$g(x) = \frac{f(x)}{(k+1)(k+3)\ldots(k+2m-1)},$$

то функция $u(x,t;k)$, определяемая формулой (4.59), удовлетворяет (4.53).

Заметим, что для того чтобы $u(x,t;k+2m)$ было решением (4.57)–(4.58), достаточно, чтобы $f \in C^2_{\mathrm{ev}}$. Однако, для того чтобы имела место формула (4.59), необходимо, чтобы $f \in C^{[(n+|\gamma|-k)/2]+2}_{\mathrm{ev}}$.

Теорема доказана.

Поскольку для того, чтобы u^{k+2m} было решением (4.46)–(4.47), достаточно, чтобы f имела непрерывную вторую производную, то для получения решения u^k в рассмотренном случае достаточно, чтобы f имела не менее $\frac{1}{2}(n-k+3)$ непрерывных производных. В этом случае решение рассматриваемой задачи имеет тоже не менее $\frac{1}{2}(n-k+3)$ непрерывных производных.

Запишем, наконец, решение задачи Коши (4.46)–(4.47) при $k=-1,-3,-5,\ldots$. Для этого нам потребуется определить B-полигармоническую функцию. А именно, если функция $f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ вещественных переменных, определённая в некоторой области пространства $\mathbb{R}^n_+$, имеет непрерывные частные производные до $(2m)$-го порядка включительно и удовлетворяет всюду в рассматриваемой области B-полигармоническому уравнению

$$\Delta_\gamma^m f = 0, \tag{4.60}$$

где Δ_γ — оператор, определённый в (2.178), то f называется *B-полигармонической функцией* порядка m.

Итак, в случае $k=-1,-3,-5,\ldots$ решение u^k задачи Коши (4.46)–(4.47) существует, когда f имеет $\frac{1}{2}(n-k+3)$ непрерывных производных. Однако частные производные $\dfrac{\partial^{1-k}u^k}{\partial t^{1-k}}$ этого решения стремятся к бесконечности при $t=0$ со скоростью $\log t$, хотя $f(x)$ — B-полигармоническая порядка $\dfrac{1-k}{2}$.

Пусть сначала $k=-1$. Предположим, что $u_{tt}^{-1}(x,0)$ существует. Устремляя t к 0 в уравнении

$$\Delta_\gamma u^{-1} = u_{tt}^{-1} - \frac{u_t^{-1}}{t},$$

получим, что $\Delta_\gamma u^{-1}(x,0)=0$, т. е. f должна быть B-гармонической и решение (4.46)–(4.47) при $k=-1$ есть

$$u^{-1}(x,t) = f(x). \tag{4.61}$$

Переходя далее к $k=-3,-5,\ldots$, получаем, что решение задачи Коши (4.46)–(4.47) при $k=-3,-5,\ldots$ даётся формулой

$$u^k(x,t) = f(x) + \sum_{h=1}^{-(k+1)/2} \frac{\Delta_\gamma^h f}{(k+1)\ldots(k+2h-1)} \cdot \frac{t^{2h}}{2\cdot 4\cdot\ldots 2h}, \tag{4.62}$$
$$k=-3,-5,\ldots.$$

Отметим, что фундаментальные решения для гиперболического и ультрагиперболического уравнений с оператором Бесселя, применённым по одной переменной, получены в [94, 95], по нескольким переменным (кроме временной), — в [92].

4.4.3. Одномерный случай. Рассмотрим случай, когда x одномерное. В этом случае

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{4.63}$$

$$u(x,0;k) = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x,t;k)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad f(x)\in C^2_{\mathrm{ev}}(\overline{\mathbb{R}}^1_+). \tag{4.64}$$

При $k>\gamma>0$ решение (4.63)–(4.64) даётся формулой (4.51)

$$u(x,t;k) = \frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \int_0^1 (1-y^2)^{(k-\gamma-2)/2}\, {}^\gamma T_x^{ty} f(x) y^\gamma dy. \tag{4.65}$$

При $k<\gamma$ решение задачи (4.63)–(4.64) находится по формулам (4.54), (4.61) или (4.62).

Пример 4.1. Найдём решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad k>\gamma>0,$$

$$u(x,0;k) = j_{(\gamma-1)/2}(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x,t;k)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad f(x)\in C^2_{\mathrm{ev}}(\overline{\mathbb{R}}^1_+).$$

По формуле (4.65) получим

$$u(x,t;k) = \frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \int_0^1 (1-y^2)^{(k-\gamma-2)/2}\, {}^\gamma T^{ty} j_{(\gamma-1)/2}(x) y^\gamma dy.$$

Справедлива формула (2.34):

$$T^{ty} j_{(\gamma-1)/2}(x) = j_{(\gamma-1)/2}(x) j_{(\gamma-1)/2}(ty);$$

следовательно,

$$u(x,t;k) = j_{(\gamma-1)/2}(x)\, t^{(1-\gamma)/2}\, \frac{2^{(\gamma+1)/2}\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k-\gamma}{2}\right)} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 (1-y^2)^{(k-\gamma-2)/2} J_{(\gamma-1)/2}(ty)\, y^{(\gamma+1)/2} dy.$$

Используя [447, формула 2.12.4.6]:

$$\int\limits_0^a x^{\nu+1}(a^2-x^2)^{\beta-1} J_\nu(cx)dx = \frac{2^{\beta-1}a^{\beta+\nu}}{c^\beta}\Gamma(\beta) J_{\beta+\nu}(ac), \tag{4.66}$$

$$a > 0, \qquad \operatorname{Re}\beta > 0, \qquad \operatorname{Re}\nu > -1,$$

получим

$$u(x,t;k) = j_{(\gamma-1)/2}(x) j_{(k-1)/2}(t). \tag{4.67}$$

График решения (4.67) при $k = \dfrac{5}{2}$ и $\gamma = \dfrac{2}{3}$, продолженного чётным образом на отрицательные значения x и t, приведён на рис. 4.1. (График построен при помощи Wolfram|Alpha.)

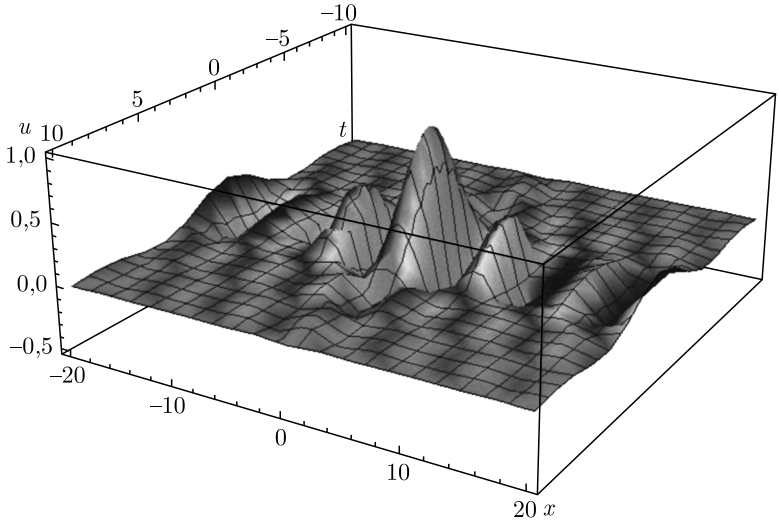

Рис. 4.1. $u(x,t;k) = j_{-1/6}(x) j_{3/4}(t)$

Пример 4.2. Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 1-\gamma \leqslant k < \gamma, \quad k \neq -1, -3, -5, \ldots, \quad \gamma > \frac{1}{2},$$

$$u(x, 0; k) = j_{(\gamma-1)/2}(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x,t;k)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Решение такой задачи даётся формулой (4.63) при $m = 1$:

$$u(x,t;k) = \frac{1}{t^k} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(t^{k+1} u(x,t;k+2)),$$

где $u(x,t;k+2)$ — решение задачи Коши вида

$$(B_{k+2})_t u = (\Delta_\gamma)_x u,$$

$$u(x,0;k+2) = \frac{j_{(\gamma-1)/2}(x)}{k+1}, \qquad u_t(x,0;k+2) = 0.$$

Используя предыдущий пример, получим

$$u(x,t;k+2) = \frac{1}{k+1} j_{(\gamma-1)/2}(x) j_{(k+1)/2}(t).$$

и, следовательно,

$$u(x,t;k) = {}_0F_1\left(;\frac{\gamma+1}{2};-\frac{x^2}{4}\right) {}_0F_1\left(;\frac{k+1}{2};-\frac{t^2}{4}\right). \tag{4.68}$$

График решения (4.68) при $k = \frac{1}{3}$ и $\gamma = \frac{3}{2}$, продолженного чётным образом на отрицательные значения x и t, приведён на рис. 4.2. (График построен при помощи Wolfram|Alpha.)

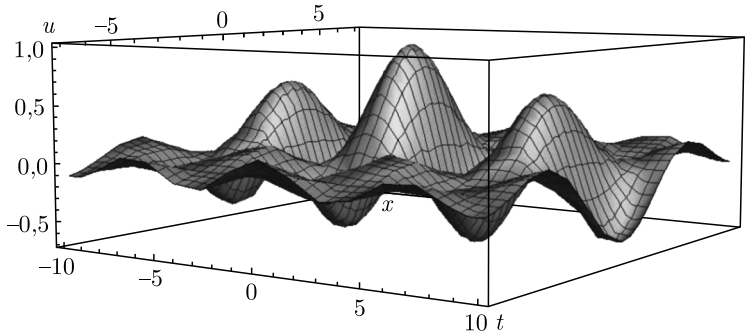

Рис. 4.2. $u(x,t;k) = {}_0F_1\left(;\frac{2}{3};-\frac{t^2}{4}\right) {}_0F_1\left(;\frac{5}{4};-\frac{x^2}{4}\right)$

§ 4.5. Вторая задача Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу

Поставим и решим задачу Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу с ненулевым вторым условием.

Теорема 4.4. *Если* $g \in C_{\mathrm{ev}}^{[(n+|\gamma|+k-1)/2]}$, *то решение* $u = u(x,t;k)$ *задачи*

$$(\triangle_\gamma)_x u = (B_k)_t u, \quad 0 < \gamma_i, \quad i = 1,\ldots,n, \quad k < 1, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad t > 0, \tag{4.69}$$

$$u(x,0;k) = 0, \qquad t^k \frac{\partial u}{\partial t} = g(x) \tag{4.70}$$

в случае, когда $n + |\gamma| + k$ *не является целым нечётным числом, имеет вид*

$$u(x,t;k) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q-n-|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)} \sum_{s=0}^{q} \frac{C_q^s\, t^{1-k+2s}}{2^s\Gamma\left(\dfrac{3-k}{2}+s\right)} \times$$

$$\times \int_0^1 (1-r^2)^{(1-k+2q-n-|\gamma|)/2} r^{n+|\gamma|-1} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s M_{tr}^\gamma g(x)\,dr. \tag{4.71}$$

Если же $n + |\gamma| + k$ *является целым нечётным числом, то решение* (4.69)–(4.70) имеет вид

$$u(x,t;k) = \frac{2^{-q}\Gamma\left(\dfrac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q}{2}\right)} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q \left(t^{n+|\gamma|-2} M_t^\gamma g(x)\right).$$

Здесь $q \geqslant 0$ — *наименьшее положительное целое число такое, что* $2 - k + 2q \geqslant n + |\gamma| - 1$.

Доказательство. Пусть $q \geqslant 0$ — наименьшее положительное целое число такое, что $2 - k + 2q \geqslant n + |\gamma| - 1$, т. е. $q = \left[\dfrac{n+|\gamma|+k-1}{2}\right]$, и пусть $u(x,t;2-k+2q)$ — решение уравнения (4.69), в котором вместо k взято $2-k+2q$, такое, что

$$u(x,0;2-k+2q) = g(x), \qquad u_t(x,0;2-k+2q) = 0. \tag{4.72}$$

Тогда, используя рекуррентную формулу (4.2), получим, что функция

$$u(x,t;k-2q) = t^{1-k+2q} u(x,t;2-k+2q)$$

есть решение уравнения

$$(\triangle_\gamma)_x u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k-2q}{t}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Далее, применяя q раз формулу (4.3), будем иметь, что

$$u(x,t;k)=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\dfrac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q}{2}\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left(t^{1-k+2q}u(x,t;2-k+2q)\right)\quad(4.73)$$

есть решение (4.69).

Покажем, что (4.73) удовлетворяет условиям (4.72). Для $u(x,t;2-$ $-k+2q)\in C^q_{\mathrm{ev}}(\Omega_+)$ справедлива формула (см. [255, с. 9])

$$\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left(t^{1-k+2q}u(x,t;2-k+2q)\right)=$$

$$=\sum_{s=0}^{q}\frac{2^{q-s}C_q^s\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1-k}{2}+s+1\right)}t^{1-k+2s}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s u(x,t;2-k+2q).\quad(4.74)$$

Принимая во внимание (4.74), получим $u(x,0;k)=0$ и

$$\lim_{t\to 0}t^k u_t(x,t;k)=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\dfrac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q}{2}\right)}\times$$

$$\times\lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left(t^{1-k+2q}u(x,t;2-k+2q)\right)=$$

$$=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\dfrac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q}{2}\right)}\lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial}{\partial t}\sum_{s=0}^{q}\frac{2^{q-s}C_q^s\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1-k}{2}+s+1\right)}\times$$

$$\times t^{1-k+2s}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s u(x,t;2-k+2q)=$$

$$=\frac{1}{1-k}\lim_{t\to 0}t^k\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{1-k}u(x,t;2-k+2q)\right)=$$

$$=\frac{1}{1-k}\lim_{t\to 0}t^k\left[(1-k)t^{-k}v^{2-k+2q}+t^{1-k}u_t(x,t;2-k+2q)\right]=$$

$$=\frac{1}{1-k}\lim_{t\to 0}\left[(1-k)u(x,t;2-k+2q)+tu_t(x,t;2-k+2q)\right]=g(x).$$

Получим теперь представление $u(x,t;k)$ через интеграл. Используя формулу (4.51), получим

$$u(x,t;2-k+2q)=\frac{2t^{k-2q-1}\,\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q-n-|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)}\times$$
$$\times\int\limits_0^t(t^2-r^2)^{(1-k+2q-n-|\gamma|)/2}r^{n+|\gamma|-1}M_r^\gamma g(x)dr.$$

Заменим r на tr в последней формуле, тогда

$$u(x,t;2-k+2q)=\frac{2\,\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q-n-|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)}\times$$
$$\times\int\limits_0^1(1-r^2)^{(1-k+2q-n-|\gamma|)/2}r^{n+|\gamma|-1}M_{tr}^\gamma g(x)dr.$$

Если $2-k+2q>n+|\gamma|-1$, то, применяя (4.73) и (4.74), запишем

$$u(x,t;k)=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\dfrac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q}{2}\right)}\times$$
$$\times\sum_{s=0}^q\frac{2^{q-s}C_q^s\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3-k}{2}+s\right)}t^{1-k+2s}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s u(x,t;2-k+2q)=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\dfrac{3-k}{2}\right)}{1-k}\sum_{s=0}^q\frac{C_q^s\,t^{1-k+2s}}{2^s\Gamma\left(\dfrac{3-k}{2}+s\right)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s u(x,t;2-k+2q)=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3-k+2q-n-|\gamma|}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)}\sum_{s=0}^q\frac{C_q^s\,t^{1-k+2s}}{2^s\Gamma\left(\dfrac{3-k}{2}+s\right)}\times$$
$$\times\int\limits_0^1(1-r^2)^{(1-k+2q-n-|\gamma|)/2}r^{n+|\gamma|-1}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s M_{tr}^\gamma g(x)dr,$$

что и даёт (4.71).

Если $2-k+2q=n+|\gamma|-1$, то $u(x,t;2-k+2q)=M_t^\gamma g(x)$ и, используя (4.74), получим

$$u(x,t;k)=\frac{2^{-q}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)}{(1-k)\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^q\left(t^{n+|\gamma|-2}M_t^\gamma g(x)\right)=$$

$$=\frac{2^{-1-q}\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}\sum_{s=0}^{q}\frac{2^{q-s}C_q^s\Gamma\left(\frac{3-k+2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-k}{2}+s\right)}t^{1-k+2s}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s M_t^\gamma g(x)=$$

$$=\sum_{s=0}^{q}\frac{C_q^s\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)}{2^{s+1}\Gamma\left(\frac{3-k}{2}+s\right)}t^{1-k+2s}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^s M_t^\gamma g(x).$$

Доказательство закончено.

В следующем параграфе мы приведём теорему о весовых сферических средних типа теоремы Асгейрссона и покажем, что с её помощью также можно получить решение задачи (4.46)–(4.47).

§ 4.6. B-ультрагиперболическое уравнение и обобщение теоремы Асгейрссона

В этом параграфе рассмотрим ультрагиперболическое уравнение, в котором вместо вторых производных по каждой переменной действует оператор Бесселя. Такое уравнение будем называть *B-ультрагиперболическим*. Для него приведем теорему типа теоремы Асгейрссона.

Классическое ультрагиперболическое уравнение вида

$$\Delta_x u=\Delta_y u,\qquad u=u(x,y),\qquad x\in\mathbb{R}^n,\qquad y\in\mathbb{R}^m \tag{4.75}$$

изучалось многими авторами (см. [15, 20, 21, 100, 331, 379, 436, 448]). При $n=1$ или $m=1$ (4.75) представляет собой обычное волновое уравнение, описывающее динамическое развитие многих процессов классической и квантовой физики. К уравнениям вида (4.75) при $n=m=2$ приводят, например: исследования проблемы Гильберта определения в трёхмерном декартовом пространстве всех метрик, геодезическими которых являются прямые (см. [437]); обратная задача дифракции при изучении неоднородности распределения зёрен поликристаллических материалов; гиперсферическое рентгеновское преобразование, а именно, функции плотности кристаллографических полюсов удовлетворяют ультрагиперболическому уравнению с оператором Лапласа–Бельтрами [433]. Случай, когда в (4.75) $n>2$ и $m>2$, является важным с математической точки зрения благодаря, в первую очередь, теореме Асгейрссона о среднем значении (см. [112; 304, с. 475; 72, с. 84; 371, с. 318; 375, I, с. 183]).

Теорема Асгейрссона для уравнения (4.75) имеет следующий вид (см. [112, с. 475]).

Теорема 4.5 (классическая теорема Асгейрссона). *Если* $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ *и функция* $u = u(x, y) \in C^2$ *является решением уравнения* (4.75), *то среднее значение функции* u, *взятое при постоянных* x *в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *переменных* y *по сфере радиуса* r, *равняется среднему значению* u, *взятому при постоянных* y *в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *переменных* x *по сфере того же радиуса* r:

$$\int\limits_{|\theta|=r} u(x+\theta, y)dS_\theta = \int\limits_{|\omega|=r} u(x, y+\omega)dS_\omega.$$

Приведём результаты, обобщающие теорему Асгейрссона на случай B-ультрагиперболического уравнения (4.76) (см. [138, 140]). Пусть $n = m' + m''$, m' и m'' — натуральные числа; $\gamma' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_{m'})$, $\gamma'_i > 0$, $i = 1, \ldots, m'$, $\gamma'' = (\gamma''_1, \ldots, \gamma''_{m''})$, $\gamma''_j > 0, j = 1, \ldots, m''$; $x \in \mathbb{R}^{m'}_+$, $y \in \mathbb{R}^{m''}_+$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{m'}_+ \times \mathbb{R}^{m''}_+$.

B-ультрагиперболическое уравнение, или сингулярное ультрагиперболическое уравнение имеет вид

$$(\Delta_{\gamma'})_x u = (\Delta_{\gamma''})_y u, \quad u = u(x, y), \tag{4.76}$$

где

$$(\Delta_{\gamma'})_x = \sum_{i=1}^{m'} (B_{\gamma'_i})_{x_i}, \qquad (\Delta_{\gamma''})_y = \sum_{j=1}^{m''} (B_{\gamma''_j})_{y_j}.$$

Пусть $u(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^n_+)$ и является чётной функцией по каждой из своих переменных $x_1, \ldots, x_{m'}, y_1, \ldots, y_{m''}$. Рассмотрим весовые сферические средние (2.183), взятые по частям поверхностей единичных сфер $S^+_1(m')$, $S^+_1(m'')$ в $\mathbb{R}^{m'}_+$ и $\mathbb{R}^{m''}_+$ по каждой из групп переменных x и y с центрами в точках $y \in \overline{\mathbb{R}}^{m'}_+$ и $z \in \overline{\mathbb{R}}^{m''}_+$ соответственно. Для этих весовых сферических средних введём обозначения

$$(M^{\gamma'}_r u)(x, r; y) = M^{\gamma'}_u(x, r; y) = \frac{1}{|S^+{}_1(m')|_{\gamma'}} \int\limits_{S^+{}_1(m')} {}^{y'}\mathbf{T} x^{r\xi} u(x, y)\, \xi^{\gamma'}\, dS_\xi,$$

$$(M^{\gamma''}_s u)(x; y, s) = M^{\gamma''}_u(x; y, s) = \frac{1}{|S^+{}_1(m'')|_{\gamma''}} \int\limits_{S^+{}_1(m'')} {}^{y''}\mathbf{T} y^{s\zeta} u(x, y)\, \zeta^{\gamma''}\, dS_\zeta.$$

Таким образом, $M^{\gamma'}_u(x, r; y)$ представляет собой весовое сферическое среднее функции u в $\mathbb{R}^{m'}_+$ при постоянном $y = (y_1, \ldots, y_{m''}) \in \overline{\mathbb{R}}^{m''}_+$, а $M^{\gamma''}_u(x; y, s)$ — весовое сферическое среднее функции u в $\mathbb{R}^{m''}_+$ при постоянном $x = (x_1, \ldots, x_{m'}) \in \overline{\mathbb{R}}^{m'}_+$.

Составим также общее весовое сферическое среднее функции u по переменным x и y:

$$(M_r^{\gamma'} M_s^{\gamma''} u)(x,r;y,s) = U(x,r;y,s) = \\ = \frac{1}{|S^+{}_1(m')|_{\gamma'}\ |S^+{}_1(m'')|_{\gamma''}} \int\limits_{S^+{}_1(m'')} \theta^{\gamma''}\, dS(\theta) \times \\ \times \int\limits_{S^+{}_1(m')} {}^{\gamma'}\mathbf{T}x, y^{r\xi,s\zeta} u(x,y) \xi^{\gamma'} \zeta^{\gamma''}\, dS(\xi).$$

Очевидно, что

$$M_u^{\gamma'}(x,r;y) = U(x,r;y,0); \quad M_u^{\gamma''}(x;y,s) = U(x,0;y,s). \tag{4.77}$$

Теорема 4.6. *Если*

$$m' + |\gamma'| = m'' + |\gamma''| \tag{4.78}$$

и функция $u(x',x'')$ *удовлетворяет сингулярному ультрагиперболическому уравнению* (4.76), *то справедливо равенство*

$$M_r^{\gamma'} M_s^{\gamma''} u = M_s^{\gamma'} M_r^{\gamma''} u\,. \tag{4.79}$$

Доказательство. Каждое из весовых сферических средних $\mu_{\gamma'}(y,z;r)$ и $\nu_{\gamma''}(y,z;r)$ функции u удовлетворяет уравнению (4.76). Это даёт два равенства для $\omega_{\gamma',\gamma''}(y,z;r,s)$:

$$\Delta_{\gamma'}\omega_{\gamma',\gamma''} = \sum_{i=1}^{m'} B_{y_i}\omega_{\gamma',\gamma''} = \frac{\partial^2\omega_{\gamma',\gamma''}}{\partial r^2} + \frac{m'+|\gamma'|-1}{r}\frac{\partial\omega_{\gamma',\gamma''}}{\partial r} \tag{4.80}$$

и

$$\Delta_{\gamma''}\omega_{\gamma',\gamma''} = \sum_{i=1}^{m''} B_{z_i}\omega_{\gamma',\gamma''} = \frac{\partial^2\omega_{\gamma',\gamma''}}{\partial s^2} + \frac{m''+|\gamma''|-1}{s}\frac{\partial\omega_{\gamma',\gamma''}}{\partial s}. \tag{4.81}$$

В силу свойства 5 весового сферического среднего (п. 2.5.2) получим

$$\Delta_{\gamma'}\omega_{\gamma',\gamma''} = \left(\Delta_{\gamma'} M_r^{\gamma'} M_s^{\gamma''} u\right)(y,r;z,s) = \\ = \left(M_r^{\gamma'} \Delta_{\gamma'} M_s^{\gamma''} u\right)(y,r;z,s)\,. \tag{4.82}$$

В (4.82) операторы $\Delta_{B_{\gamma'}}$ и $M_s^{\gamma''}$ тоже перестановочны, поскольку действуют по разным (не пересекающимся) группам переменных. Поэтому

$$\Delta_{\gamma'}\omega_{\gamma',\gamma''} = \left(M_r^{\gamma'} M_s^{\gamma''} \Delta_{\gamma'} u\right)(y,r;z,s)\,.$$

Точно так же получаем

$$\Delta_{\gamma''}\omega_{\gamma',\gamma''} = \left(M_r^{\gamma'} M_s^{\gamma''} \Delta_{\gamma''} u\right)(y, r; z, s)\,.$$

Согласно (4.75)

$$\Delta_{\gamma'} u = \Delta_{\gamma''} u\,.$$

Отсюда вытекает равенство правых частей в равенствах (4.80) и (4.81). Следовательно, двойное весовое среднее решения B-ультрагиперболического уравнения удовлетворяет сингулярному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \omega_{\gamma',\gamma''}}{\partial s^2} + \frac{m' + |\gamma'| - 1}{s}\frac{\partial \omega_{\gamma',\gamma''}}{\partial s} = \\ = \frac{\partial^2 \omega_{\gamma',\gamma''}}{\partial r^2} + \frac{m'' + |\gamma''| - 1}{r}\frac{\partial \omega_{\gamma',\gamma''}}{\partial r}\,. \quad (4.83)$$

Уравнение (4.83) — это уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу, решение которого хорошо известно и определяется следующим образом (см. [120, уравнение (5.17), решение (5.19)]): если $f = f(r)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, чётная по r, то решение уравнения (4.83) есть сдвиг этой функции, осуществляемый оператором обобщённого сдвига с индексом, равным индексу оператора Бесселя в уравнении Эйлера–Пуассона–Дарбу:

$$\omega_{\gamma',\gamma''}(y, z; r, s) = {}^{m+|\gamma|-1}T_r^s f(r) = \\ = {}^{m+|\gamma|-1}T_s^r f(s) = \omega_{\gamma',\gamma''}(y, z; s, r), \quad (4.84)$$

а одномерный обобщённый сдвиг по радиусам сфер в $\mathbb{R}_+^{m'}$ и $\mathbb{R}_+^{m''}$ определён выражением (см. § 2.2)

$$ {}^{m+|\gamma|-1}T_r^s f(r) = \\ = \frac{\Gamma(m + |\gamma| - 1)}{2^{m+|\gamma|-3}\Gamma^2\left(\dfrac{m + |\gamma| - 1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f(\sqrt{r^2 - 2rs\cos\varphi + s^2})\sin^{m+|\gamma|-2}\varphi d\varphi.$$

Равенство ${}^{m+|\gamma|-1}T_r^s f(r) = {}^{m+|\gamma|-1}T_s^r f(s)$ следует из свойства 10 обобщённого сдвига (см. п. 2.2.2). Кроме того,

$$\omega_{\gamma',\gamma''}(y, z; r, s)|_{s=0} = \mu_{\gamma'}(y, z; r) = f(r) \quad (4.85)$$

и

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\omega_{\gamma',\gamma''}(y, z; r, s)\right|_{s=0} = 0. \quad (4.86)$$

Из (4.84) вытекает независимость функции $\omega_{\gamma',\gamma''}$ от центров сфер y и z.

Следствие. *Весовое среднее значение функции u, взятое при постоянных y в пространстве z по сфере радиуса r, равняется среднему значению u, взятому при постоянных z в пространстве y по сфере того же радиуса r:*

$$\mu_\gamma(y,z,r) = \nu_\gamma(y,z,r).$$

Доказательство. Так как

$$\mu_\gamma(y,z,r) = \omega_\gamma(y,z;r,0); \quad \nu_\gamma(y,z,r) = \omega_\gamma(y,z;0,r),$$

то из теоремы 1 следует равенство $\mu_\gamma(y,z,r) = \nu_\gamma(y,z,r)$, что и требовалось доказать.

Как следствие теоремы 4.6 получается результат, являющийся обобщением теоремы 4.5 (Асгейрссона) на B-ультрагиперболическое уравнение (4.76).

Теорема 4.7. *Пусть функция $u = u(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемая, чётная по каждой из своих переменных $x_1,\dots,x_{m'}$, $y_1,\dots,y_{m''}(n = m' + m'')$, является решением B-ультрагиперболического уравнения* (4.76), *и пусть выполняется условие* (4.78). *Тогда весовое сферическое среднее функции $u(x,y)$, взятое при постоянных $x \in \overline{\mathbb{R}}_+^{m'}$ в пространстве $\mathbb{R}_+^{m''}$ по сфере радиуса r, равняется весовому сферическому среднему $u(x,y)$, взятому при постоянных $y \in \overline{\mathbb{R}}_+^{m''}$ в пространстве $\mathbb{R}_+^{m'}$ по сфере того же радиуса r:*

$$(M_u^{\gamma'})_x(x,y,r) = (M_u^{\gamma''})_y(x,y,r). \tag{4.87}$$

Справедливо утверждение, обратное к доказанному следствию и представляющее собой обратную теорему Асгейрссона для B-ультрагиперболического уравнения.

Теорема 4.8. *Пусть $u(x,y) \in C^2(\mathbb{R}_+^{m'} \times \mathbb{R}_+^{m''})$ и является функцией чётной по каждой из своих переменных $x_1,\dots,x_{m'}, y_1,\dots,y_{m''}$, $n = m' + m''$, и пусть для всякой точки $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{m'} \times \mathbb{R}_+^{m''}$ и для всяких неотрицательных r и s выполняется условие* (4.87). *Тогда если выполняется* (4.78), *то функция $u(x,y)$ удовлетворяет B-ультрагиперболическому уравнению* (4.76) *в $\mathbb{R}_+^{m'} \times \mathbb{R}_+^{m''}$.*

В [375, с. 222] приведено уточнение теоремы Асгейрссона следующего вида.

Теорема 4.9 (уточнение теоремы Асгейрссона). *Пусть $u(x,y)$ — непрерывное решение уравнения*

$$\Delta_x u = \Delta_y u$$

в некоторой окрестности множества

$$K = \{(\theta,y) \in \mathbb{R}^{m'} \times \mathbb{R}^{m''} : |\theta| + |\omega| \leqslant r\},$$

тогда

$$\int\limits_{|\theta|=r} u(\theta,0)dS_\theta = \int\limits_{|\omega|=r} u(0,\omega)dS_\omega.$$

В случае, когда n нечётно и отлично от 1, достаточно предполагать, что u является решением вблизи ∂K.

Справедливо обобщение теоремы 4.9 на случай B-ультрагиперболического уравнения (см. [142]):

Теорема 4.10. *Пусть $x \in \mathbb{R}_+^{m'}$, $y \in \mathbb{R}_+^{m''}$, $u = u(x,y)$ — чётная по каждой из своих переменных функция, являющаяся непрерывным в некоторой окрестности множества $K = \{\theta \in \mathbb{R}_+^{m'}, \omega \in \mathbb{R}_+^{m''} : |\theta| + |\omega| = r\}$ решением B-ультрагиперболического уравнения $(\Delta_{\gamma'})_x u = (\Delta_{\gamma''})_y u$, и пусть выполняется условие $m' + |\gamma'| = m'' + |\gamma''| \geqslant 3$. Тогда справедливо соотношение*

$$\frac{1}{|S_1(m')|_\gamma} \int\limits_{S_1^+(m')} u(r\theta;0) \prod_{i=1}^{m'} \theta_i^{\gamma_i}\, dS_\theta = \frac{1}{|S_1(m'')|_\gamma} \int\limits_{S_1^+(m'')} u(0;r\omega) \prod_{i=1}^{m''} \omega_i^{\nu_i}\, dS_\omega.$$

В следующей теореме приведено решение задачи Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу применением теоремы 4.7.

Теорема 4.11. *Пусть $f \in C_{\mathrm{ev}}(\mathbb{R}_+^n)$ и $\alpha = \dfrac{n+|\gamma|-1}{2}$. Тогда решение задачи Коши*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = \Delta_\gamma u(x,t), \qquad 0 < k < 1,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0$$

определяется равенством

$$u(x,t) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)} t^{1-\delta} D_r^\alpha \left(r^{(n+|\gamma|-2)/2} M_{\sqrt{r}}^\gamma f(x)\right)(t),$$

где D^α — левосторонняя дробная производная Римана–Лиувилля порядка α (см. (1.52))

§ 4.7. Итерированное весовое сферическое среднее и его свойства

Итерированное весовое сферическое среднее имеет вид

$$I_f^\gamma(x;\lambda,\mu) = I_{\lambda,\mu}^\gamma f(x) = M_\lambda^\gamma M_\mu^\gamma f(x) =$$
$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_{S_1^+(n)} \int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}x^{\lambda\zeta}\, {}^\gamma\mathbf{T}x^{\mu\xi}[f(x)]\zeta^\gamma \xi^\gamma dS(\xi)dS(\zeta).$$

Используя перестановочное свойство обобщённого сдвига (см. [126, формула (7.1)]), получим, что итерированное весовое сферическое среднее симметрично относительно λ и μ:

$$I_f^\gamma(x;\lambda,\mu) = I_f^\gamma(x;\mu,\lambda).$$

Очевидно, что

$$I_f^\gamma(x;\lambda,0) = I_f^\gamma(x;0,\lambda) = M_\lambda^\gamma f(x)$$

и

$$I_f^\gamma(x;0,0) = f(x).$$

Докажем равенство, выражающее итерированное сферическое среднее $I_f^\gamma(x;\lambda,\mu)$ через однократный интеграл от весового сферического среднего $M_f^\gamma(x;r)$.

Теорема 4.12. *Пусть f — интегрируемая с весом $x^\gamma = \prod\limits_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$ функция, чётная по каждой из своих переменных в смысле определения в п.* 1.2.3 (с. 33). *Тогда справедливы следующие формулы*:

$$I_f^\gamma(x;\lambda,\mu) = {}^\nu T_\mu^\lambda M_f^\gamma(x;\mu), \tag{4.88}$$

$$I_f^\gamma(x;\lambda,\mu) = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(2\lambda\mu)^{n+|\gamma|-2}} \times$$
$$\times \int\limits_{\lambda-\mu}^{\lambda+\mu} \left[(\lambda^2-(r-\mu)^2)\right]\left[(r+\mu)^2-\lambda^2)\right]^{(n+|\gamma|-3)/2} M_f^\gamma(x;r)\,rdr, \tag{4.89}$$

$$I_f^\gamma\left(x;\frac{\beta-\alpha}{2},\frac{\beta+\alpha}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \cdot \frac{2^{n+|\gamma|-1}}{(\beta^2-\alpha^2)^{n+|\gamma|-2}} \times$$
$$\times \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[(\beta^2-r^2)(r^2-\alpha^2)\right]^{(n+|\gamma|-3)/2} M_f^\gamma(x;r)rdr. \tag{4.90}$$

Доказательство. Пусть $g(s)$ — произвольная непрерывная финитная функция одной переменной. Рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_0^\infty \lambda^{n+|\gamma|-1} g(\lambda) I_f^\gamma(x;\lambda,\mu)d\lambda =$$
$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_0^\infty \lambda^{n+|\gamma|-1} g(\lambda)d\lambda \int\limits_{S_1^+(n)}\int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{\lambda\zeta}\,{}^\gamma\mathbf{T}_x^{\mu\xi}[f(x)]\zeta^\gamma\xi^\gamma dS(\xi)dS(\zeta).$$

Применяя перестановочное свойство обобщённого сдвига (см. п. 2.2.2) и формулу (2.171), запишем это выражение в виде

$$J = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{\mu\xi} \left[\int\limits_0^\infty \lambda^{n+|\gamma|-1} g(\lambda) d\lambda \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T} x^{\lambda\zeta}[f(x)]\zeta^\gamma dS(\zeta) \right] \xi^\gamma dS(\xi) =$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{\mu\xi} \left[\lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \lambda^{n+|\gamma|-1} g(\lambda) d\lambda \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{\lambda\zeta}[f(x)]\zeta^\gamma dS(\zeta) \right] \xi^\gamma dS(\xi) =$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{\mu\xi} \left[\lim_{R\to\infty} \int\limits_{B_R^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^z[f(x)] g(|z|) z^\gamma dz \right] \xi^\gamma dS(\xi) =$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{\mu\xi} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^+{}_n} {}^\gamma\mathbf{T}_x^z[f(x)] g(|z|) z^\gamma dz \right] \xi^\gamma dS(\xi).$$

Теперь, применяя свойства ассоциативности и самосопряжённости обобщённого сдвига (см. п. 2.2.2), получим

$$J = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_{S_1^+(n)} \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} \left({}^\gamma\mathbf{T}_z^{\mu\xi}\, {}^\gamma\mathbf{T}_z^x[f(z)] \right) g(|z|) z^\gamma dz\ \xi^\gamma dS(\xi) =$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_{S_1^+(n)} \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} {}^\gamma\mathbf{T}_z^x[f(z)]\ {}^\gamma\mathbf{T}_z^{\mu\xi}[g(|z|)]\, z^\gamma dz\ \xi^\gamma dS(\xi) =$$

$$= \frac{C(\gamma)}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_{S_1^+(n)} \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} {}^\gamma\mathbf{T}_x^z[f(x)] \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i \times$$

$$\times\, g\left(\sqrt{\mu^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \sum_{i=1}^n z_i^2 - 2\mu \sum_{i=1}^n \xi_i z_i \cos\alpha_i} \right) d\alpha_1 \ldots d\alpha_n\, z^\gamma dz\ \xi^\gamma dS(\xi).$$

В интеграле по z перейдём к сферическим координатам $z = r\eta$, $|\eta| = 1$, $r \geqslant 0$. Учитывая, что $|\xi| = 1$, получим

$$J = \frac{C(\gamma)}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_{S_1^+(n)} \int\limits_0^\infty r^{n+|\gamma|-1} dr \int\limits_{S_1^+(n)} T_x^{r\eta}[f(x)] \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1} \times$$

$$\times\, \alpha_i g(\sqrt{\mu^2 + r^2 - 2r\mu\langle \xi, \eta\cos\alpha\rangle}\,) d\alpha_1 \ldots d\alpha_n\, \eta^\gamma dS(\eta)\, \xi^\gamma dS(\xi),$$

где

$$\langle \xi, \eta\cos\alpha\rangle = \xi_1\eta_1\cos\alpha_1 + \ldots + \xi_n\eta_n\cos\alpha_n.$$

Используя многомерный оператор Пуассона $\mathcal{P}_x^\gamma$, действующий на интегрируемые функции по формуле

$$\mathcal{P}_x^\gamma[f(x)] = C(\gamma) \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi f(x_1\cos\alpha_1, \ldots, x_n\cos\alpha_n) \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i\, d\alpha_i,$$

интеграл J запишем в виде

$$J = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_0^\infty r^{n+|\gamma|-1} dr \int\limits_{S_1^+(n)} T_x^{r\eta}[f(x)] \eta^\gamma dS(\eta) \times$$

$$\times \int\limits_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_\eta^\gamma g(\sqrt{r^2 + \mu^2 - 2r\mu\langle \xi, \eta\rangle}\,)\, \xi^\gamma dS(\xi).$$

Применяя к интегралу $\int\limits_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_\eta^\gamma g(\sqrt{r^2 + \mu^2 - 2r\mu\langle \xi, \eta\rangle}\,)\, \xi^\gamma dS(\xi)$ формулу вида

$$\int\limits_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_\xi^\gamma f(\langle \sigma, \xi\rangle) \sigma^\gamma dS_\sigma =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\dfrac{\gamma_i + 1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, 2^{n-1} \Gamma\left(\dfrac{|\gamma| + n - 1}{2}\right)} \int\limits_{-1}^1 f(|\xi| p)(1 - p^2)^{(n+|\gamma|-3)/2}\, dp,$$

доказанную в [94], и учитывая, что $|\eta| = 1$, получим

$$J = \frac{\prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\dfrac{\gamma_i + 1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, 2^{n-1} \Gamma\left(\dfrac{|\gamma| + n - 1}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_0^\infty r^{n+|\gamma|-1} dr \int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_x^{r\eta}[f(x)] \eta^\gamma dS(\eta) \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} (1-p^2)^{(n+|\gamma|-3)/2} g(\sqrt{r^2+\mu^2-2r\mu p}\,)\; dp =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma\left(\dfrac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, 2^{n-1} \Gamma\left(\dfrac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_0^\infty r^{n+|\gamma|-1}\, M_f^\gamma(x;r)\, dr \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} (1-p^2)^{(n+|\gamma|-3)/2} g(\sqrt{r^2+\mu^2-2r\mu p}\,)\; dp.$$

Теперь вместо переменной p введём переменную λ, связанную с p формулой

$$r^2+\mu^2-2r\mu p = \lambda^2,$$

тогда имеем

$$p = \frac{r^2+\mu^2-\lambda^2}{2r\mu},\; dp = -\frac{\lambda}{r\mu}\; d\lambda,\; 1-p^2 = \frac{[\lambda^2-(r-\mu)^2][(r+\mu)^2-\lambda^2]}{(2r\mu)^2}.$$

Отсюда при $p=-1$ получим, что $\lambda = |r+\mu|$, а при $p=1$ будем иметь $\lambda = |r-\mu|$. Используя (2.174), запишем

$$J = (2\mu)^{2-n-|\gamma|} \frac{2\,\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty g(\lambda)\,\lambda\, d\lambda \times$$

$$\times \int\limits_{|\lambda-\mu|}^{\lambda+\mu} \left\{[\lambda^2-(r-\mu)^2][(r+\mu)^2-\lambda^2]\right\}^{(n+|\gamma|-3)/2}\; M_f^\gamma(x;r)\, r dr.$$

Поскольку $g(\lambda)$ — произвольная функция, то из

$$\int\limits_0^\infty \lambda^{n+|\gamma|-1} g(\lambda) I_f^\gamma(x;\lambda,\mu) d\lambda =$$

$$= (2\mu)^{2-n-|\gamma|} \frac{2\,\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty g(\lambda)\,\lambda\, d\lambda \times$$

$$\times \int\limits_{|\lambda-\mu|}^{\lambda+\mu} \left\{[\lambda^2-(r-\mu)^2][(r+\mu)^2-\lambda^2]\right\}^{(n+|\gamma|-3)/2}\; M_f^\gamma(x;r)\, r dr$$

следует

$$I_f^\gamma(x;\lambda,\mu) = \frac{2\,\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}\,\frac{1}{(2\lambda\mu)^{n+|\gamma|-2}}\times$$

$$\times\int\limits_{|\lambda-\mu|}^{\lambda+\mu}\left\{[\lambda^2-(r-\mu)^2][(r+\mu)^2-\lambda^2]\right\}^{(n+|\gamma|-3)/2}\,M_f^\gamma(x;r)\,rdr. \quad (4.91)$$

Теперь, используя представление обобщённого сдвига (2.35) при $\nu = n+|\gamma|-1$, получим

$$I_f^\gamma(x;\lambda,\mu) = {}^\nu T_\mu^t M_f^\gamma(x;\mu).$$

Если в формуле (4.91) мы положим $\alpha = \lambda-\mu$, $\beta = \lambda+\mu$ $(\beta > \alpha)$, то можем записать

$$I_f^\gamma\left(x;\frac{\beta-\alpha}{2},\frac{\beta+\alpha}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}\,\frac{2^{n+|\gamma|-1}}{(\beta^2-\alpha^2)^{n+|\gamma|-2}}\times$$

$$\times\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[(\beta^2-r^2)(r^2-\alpha^2)\right]^{(n+|\gamma|-3)/2}M_f^\gamma(x;r)rdr.$$

Теорема доказана.

Приведём следствие из доказанной теоремы, выражающее действие итерированных весовых средних на функции Бесселя.

Следствие. *Для функции* $\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)$ *имеет место формула*

$$I^\gamma_{(\beta-\alpha)/2,(\beta+\alpha)/2}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}\,\frac{2^{n+|\gamma|-1}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)}{(\beta^2-\alpha^2)^{n+|\gamma|-2}}\times$$

$$\times\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[(\beta^2-r^2)(r^2-\alpha^2)\right]^{(n+|\gamma|-3)/2}j_{(n+|\gamma|-2)/2}(r)rdr. \quad (4.92)$$

Доказательство. В теореме 4.12 выберем $f(x) = \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)$. В [138] показано, что

$$M_\mu^\gamma\mathbf{j}_\gamma(x,\xi) = \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\;j_{(n+|\gamma|-2)/2}(\mu).$$

Тогда

$$I^\gamma_{\lambda,\mu}\mathbf{j}_\gamma(x,\xi) = \mathbf{j}_\gamma(x,\xi)\;j_{(n+|\gamma|-2)/2}(\mu)\;j_{(n+|\gamma|-2)/2}(\lambda).$$

Используя равенство (4.90), получим доказываемую формулу (4.92). Её можно переписать в виде

$$j_{(n+|\gamma|-2)/2}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\ j_{(n+|\gamma|-2)/2}\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{2^{n+|\gamma|-1}}{(\beta^2-\alpha^2)^{n+|\gamma|-2}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[(\beta^2-r^2)(r^2-\alpha^2)\right]^{(n+|\gamma|-3)/2}j_{(n+|\gamma|-2)/2}(r)rdr.$$

Если для $I^{\gamma}_{\lambda,\mu}\mathbf{j}_{\gamma}(x,\xi)$ записать равенство (4.88), то получим известную формулу

$$^{\nu}\mathcal{T}^{\lambda}_{\mu}j_{(\nu-1)/2}(\mu)=j_{(\nu-1)/2}(\mu)\ j_{(\nu-1)/2}(\lambda),\quad \nu=n+|\gamma|-1,$$

полученную в ([128, с. 124]).

§ 4.8. Применение тождества для итерированного сферического среднего к задаче компьютерной томографии

Рассмотрим одно применение формулы (4.89) из теоремы 4.12 к компьютерной томографии. В задачах дифракционной томографии и обратного рассеяния преобразование Фурье–Бесселя (Ханкеля) функции представляет собой измеренные данные (см., например, [296; 373, с. 126]). Подобные формулы используются для восстановления функции.

Докажем формулу, выражающую функцию через её преобразование Фурье–Бесселя и обобщённый сдвиг. Это обобщение известной формулы для более простой задачи, в которой используются представление функции через её преобразование Фурье и обычный сдвиг. В такой форме подобные представления применяются для восстановления функции в указанных задачах томографии и интегральной геометрии.

В теория рассеяния поверхность шара $|x|<2\lambda$ называется *сферой Эвальда*.

Теорема 4.13. *Пусть $\widehat{F}$ — функция с носителем внутри части шара*

$$B_{2\lambda}(n)^{+}=\{x\in\mathbb{R}^{+}_{n}:|x|<2\lambda\}.$$

Тогда справедливо равенство

$$F(y)=C(n,\gamma)\int\limits_{S^{+}_{1}(n)}\int\limits_{S^{+}_{1}(n)}{}^{\gamma}\mathbf{T}^{\lambda\zeta}_{\lambda\xi}\left[\frac{|\lambda\xi|\widehat{F}(\lambda\xi)\mathbf{j}_{\gamma}(\lambda\xi,y)}{(4\lambda^2-|t\xi|^2)^{(n+|\gamma|-3)/2}}\right]\zeta^{\gamma}\xi^{\gamma}dS(\xi)dS(\zeta),$$

$$C(n,\gamma)=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{2n-3}\lambda^{2n+2|\gamma|-4}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)|S^{+}_{1}(n)|^2_{\gamma}}.\tag{4.93}$$

Доказательство. В (4.89) положим $\mu = \lambda$, получим

$$I_f^\gamma(x;\lambda,\lambda) = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{1}{(2\lambda^2)^{n+|\gamma|-2}} \int\limits_0^{2\lambda} \left(4\lambda^2 - r^2\right)^{(n+|\gamma|-3)/2} r^{n+|\gamma|-2}\, M_f^\gamma(x;r)dr. \quad (4.94)$$

Рассмотрим функцию

$$f_y(x) = \frac{|x|}{(4\lambda^2 - |x|^2)^{(n+|\gamma|-3)/2}} \widehat{F}(x)\mathbf{j}_\gamma(x,y), \quad x,y \in \mathbb{R}_n^+.$$

Найдём весовое сферическое среднее $f_y(x)$ при $x = 0$:

$$M_r^\gamma f_y(x)|_{x=0} = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_{S_1^+(n)} [\,{}^\gamma\mathbf{T}_x^{rz} f_y(x)]_{x=0} z^\gamma dS(z) =$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_{S_1^+(n)} \left[{}^\gamma\mathbf{T}_x^{rz} \frac{|x|}{(4\lambda^2 - |x|^2)^{(n+|\gamma|-3)/2}} \widehat{F}(x)\mathbf{j}_\gamma(x,y)\right]_{x=0} z^\gamma dS(z) =$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_{S_1^+(n)} \frac{r|z|}{(4\lambda^2 - r|z|^2)^{(n+|\gamma|-3)/2}} \widehat{F}(rz)\mathbf{j}_\gamma(rz,y) z^\gamma dS(z) =$$

$$= \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \frac{r}{(4\lambda^2 - |r|^2)^{(n+|\gamma|-3)/2}} \int\limits_{S_1^+(n)} \widehat{F}(rz)\mathbf{j}_\gamma(rz,y) z^\gamma dS(z).$$

Используя (4.94), получаем

$$I_f^\gamma(0;\lambda,\lambda) = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(2\lambda^2)^{n+|\gamma|-2}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{2\lambda} \left(4\lambda^2 - r^2\right)^{(n+|\gamma|-3)/2} r^{n+|\gamma|-2}\, M_f^\gamma(0,r)dr =$$

$$= \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \cdot \frac{(2\lambda^2)^{2-n-|\gamma|}}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_0^{2\lambda} \left(4\lambda^2 - r^2\right)^{(n+|\gamma|-3)/2} r^{n+|\gamma|-2} \times$$

$$\times \frac{r}{(4\lambda^2 - r^2)^{(n+|\gamma|-3)/2}}\, dr \int\limits_{S_1^+(n)} \widehat{F}(rz)\mathbf{j}_\gamma(rz, y) z^\gamma dS(z) =$$

$$= \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \cdot \frac{(2\lambda^2)^{2-n-|\gamma|}}{|S_1^+(n)|_\gamma} \times$$

$$\times \int\limits_0^{2\lambda} r^{n+|\gamma|-1}\, dr \int\limits_{S_1^+(n)} \widehat{F}(rz)\mathbf{j}_\gamma(rz, y) z^\gamma dS(z).$$

Применяя формулу (2.171), будем иметь

$$I_f^\gamma(0;\lambda,\lambda) = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{(2\lambda^2)^{2-n-|\gamma|}}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_{B_{2\lambda}^+} \widehat{F}(z)\mathbf{j}_\gamma(z, y) z^\gamma dz =$$

$$= \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{(2\lambda^2)^{2-n-|\gamma|}}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^+{}_n} \widehat{F}(z)\mathbf{j}_\gamma(z, y) z^\gamma dz =$$

$$= \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \frac{(2\lambda^2)^{2-n-|\gamma|}}{|S_1^+(n)|_\gamma} 2^{|\gamma|-n} \prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right) F(y) =$$

$$= \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \prod\limits_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, 2^{2n-3} \lambda^{2n+2|\gamma|-4} \Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} F(y).$$

Следовательно,

$$F(y) = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{2n-3} \lambda^{2n+2|\gamma|-4} \Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \prod\limits_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} I_f^\gamma(0;\lambda,\lambda). \tag{4.95}$$

С другой стороны,

$$I_f^\gamma(0;\lambda,\lambda) = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma^2} \int\limits_{S_1^+(n)} \int\limits_{S_1^+(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_{t\xi}^{t\zeta}[f(t\xi)] \zeta^\gamma \xi^\gamma dS(\xi) dS(\zeta). \tag{4.96}$$

Из (4.95) и (4.96) получим

$$F(y) = \frac{\sqrt{\pi}\, 2^{2n-3} \lambda^{2n+2|\gamma|-4} \Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right) |S_1^+(n)|_\gamma^2} \times$$

$$\times \int\limits_{S^+{}_1(n)} \int\limits_{S^+{}_1(n)} {}^\gamma\mathbf{T}_{\lambda\xi}^{\lambda\zeta} \left[\frac{|\lambda\xi|}{(4\lambda^2 - |t\xi|^2)^{(n+|\gamma|-3)/2}} \widehat{F}(\lambda\xi)\mathbf{j}_\gamma(\lambda\xi, y)\right] \times$$

$$\times\ \zeta^\gamma \xi^\gamma dS(\xi) dS(\zeta),$$

что и требовалось доказать.

§ 4.9. О приложениях весовых сферических средних

Сферические средние тесно связаны с различными методами визуализации, которые представляют большой интерес во многих областях современных исследований, имеющих дело с изображениями: в некоторых типах томографических экспериментов, в том числе оптоакустической томографии, термоакустической томографии, радиолокации и эхолокации (см. [413–415, 439] и др.). Особо важной является задача восстановления функции по её сферическим средним, решение которой и позволяет получить изображение по данным, полученным в результате сканирования объекта исследования. Чаще всего такой подход встречается в медицине, а именно в таких методах диагностики, как компьютерная томография, магнитно-резонансная томография, ультразвуковое исследование, термография, фотоакустическая томография. Кроме того, эти же самые методы восстановления изображения используются и для разведки местности при помощи радиолокации и эхолокации. Например, задача восстановления функции по её сферическим средним актуальна при получении радиолокационных изображений способом радиолокационного синтезирования апертуры, для решения задач оперативного выявления и оценки фактической радиационной обстановки с помощью позитронно-эмиссионной томографии, при исследовании местности методами тепловизорной томографии и др. При этом классическое сферическое среднее далеко не всегда адекватно описывает входные данные изображения, получаемого описанными способами. Во многих задачах (например, в задачах эмиссионной томографии) естественным образом возникает необходимость использовать весовые сферические средние.

Неотъемлемой частью теории дифференциальных уравнений являются сферические средние (см. [17, 72, 93, 111, 112, 180, 449] и др.). В случае, когда рассматриваются уравнения гиперболического типа с оператором Бесселя, вместо сферических средних возникают рассмотренные нами весовые сферические средние (см. [9, 93, 94,

301, 428] и др.). С точки зрения интегральной геометрии сферические средние рассмотрены в [371, 481, 488–491]. Большой интерес представляет рассмотрение весовых сферических средних с точки зрения интегральной геометрии.

§ 4.10. Явное построение дробных степеней оператора Бесселя

Методы дробного интегро-дифференцирования в настоящее время являются одним из наиболее плодотворных и активно развивающихся разделов современной математики, они широко применяются как в многочисленных задачах теории, так и в практических приложениях (см. [35, 167–169, 198, 368, 389–391]).

В данном параграфе построены в явном интегральном виде дробные степени дифференциального оператора Бесселя

$$B_\nu = D^2 + \frac{\nu}{x} D, \quad \operatorname{Re} \nu \geqslant 0,$$

заданного на подходящих гладких функциях. Безусловно, по аналогии с обычными производными, можно определить такие дробные степени на полуоси при помощи того естественного свойства, что они действуют как умножение на степень в образах преобразования Ханкеля. Такой подход за неимением лучшего оправдан и позволяет получить ряд интересных результатов, хотя на этом пути невозможно, по-видимому, получить явные представления дробных степеней. Но представим на минуту, что мы умеем определять обычные операторы дробного интегрирования Римана–Лиувилля только через их действие в образах преобразований Лапласа или Меллина, а интегральные формулы для этих операторов нам неизвестны. Тогда сразу становится ясным, что подобная теория будет сравнительно бедной и лишится большинства своих наиболее полезных и красивых результатов. Примерно в таком состоянии сейчас находится теория дробных степеней оператора Бесселя, поэтому их построение в явном интегральном виде является актуальной и интересной задачей.

Определение 4.1. Пусть $f(x) \in C^{2k}(0, b]$. Определим *правосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя* при условии $f^{(i)}(b) = 0, 0 \leqslant i \leqslant 2k-1, k \in N$ по формуле

$$(B_{b-}^{\nu,k} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int\limits_x^b \left(\frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2k-1} \times$$
$$\times {}_2F_1\left(k + \frac{\nu - 1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) f(y)\, dy =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)} \int\limits_x^b (y^2 - x^2)^{k-1/2} \left(\frac{y}{x} \right)^{\nu/2} P_{\nu/2-1}^{1/2-k} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right) f(y)\, dy. \tag{4.97}$$

Определение 4.2. Определим *левосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя* при условии $f^{(i)}(a) = 0, 0 \leqslant i \leqslant 2k-1, k \in N$ по формуле

$$(B_{a+}^{\nu,k} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int\limits_a^x \left(\frac{x^2 - y^2}{2x}\right)^{2k-1} \times$$
$$\times {}_2F_1\left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; ; 1 - \frac{y^2}{x^2}\right) f(y)\, dy =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)} \int\limits_a^x (x^2 - y^2)^{(k-1/2)} \left(\frac{x}{y}\right)^{\nu/2} P_{\nu/2-1}^{1/2-k}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right) tf(y)\, dy. \tag{4.98}$$

В (4.97) и (4.98) ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса, $P_\nu^\mu(z)$ — функция Лежандра.

Введённые операторы и являются интегральными реализациями отрицательных целых степеней оператора Бесселя $(B_\nu)^{-k}$. Их распространение на произвольные комплексные значения параметра k проводится аналогично классическому случаю (см. [198]) При $\nu = 0$ оператор Бесселя сводится ко второй производной, а введённые операторы — к дробным интегралам Римана–Лиувилля

$$B_{b-}^{0,k} f = I_{b-}^{2k} f, \quad B_{a+}^{0,k} f = I_{a+}^{2k} f.$$

Определённые выше дробные степени оператора Бесселя (4.97) и (4.98) в явном виде как одна из разновидностей операторов дробного интегро-дифференцирования были введены С.М. Ситником в [234] и затем в [211]. При этом в качестве наводящих соображений были существенно использованы результаты работы [478], в которой рассматривалось решение в явном виде обыкновенных дифференциальных уравнений с целыми степенями операторов Бесселя, а также результаты [335] по теории гипербесселевых операторов. Кроме того, было замечено, что выражение гипергеометрических функций Гаусса в формулах (4.97) и (4.98) через функции Лежандра существенно упрощает вычисления.

Многочисленные приложения операторов дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля основаны на их вхождении в остаточный член формулы Тейлора. Поэтому после определения дробных степеней оператора Бесселя сразу возникает задача о построении обобщенной формулы Тейлора, в которой функция разлагается по степеням оператора Бесселя. Эта задача возникла достаточно давно и имеет некоторую историю.

Впервые формулы разложения по степеням оператора Бесселя были получены Жаном Дельсартом (ряды Тейлора–Дельсарта) (см. [120–122, 334]). Общий способ их построения изложен в [262] в терминах операторно-аналитических функций. Но ряды Тейлора–Дельсарта позволяют разложить по степеням оператора Бесселя не обычный, а обобщённый сдвиг. По существу такие разложения

являются операторными вариантами рядов для функции Бесселя, так же, как обычные ряды Тейлора являются операторными версиями разложения в ряд экспоненты. Разумеется, ряды Тейлора–Дельсарта имеют свою область приложений. Но для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных нужны обобщённые формулы и ряды Тейлора несколько иной природы. При пересчёте решения со слоя на слой, например методом сеток, формулы для обобщённого сдвига совершенно бесполезны, а нужны именно формулы для обычного сдвига, выражающие решение на очередном рассчитываемом слое через его значения на предыдущих слоях. Оказалось, что строить такие формулы для обычного сдвига намного труднее, чем для обобщённого, так как они уже не являются прямыми аналогами известных тождеств для специальных функций.

Впервые с указанной мотивацией для применения к численному решению уравнений с оператором Бесселя методом конечных элементов формула Тейлора нужного типа была рассмотрена в работе В.В. Катрахова [78]. Но полученный там результат может рассматриваться только как первое приближение для желаемых формул в явном виде, так как коэффициенты выражались неопределёнными постоянными, задаваемыми системой рекуррентных соотношений, а ядро остаточного члена представлялось некоторым многократным интегралом. Это не случайно: угадать одновременно явный вид ядер и остаточных членов невозможно, пока не известны конкретные выражения для остатка в виде дробных степеней оператора Бесселя.

Мы находимся в другой ситуации, когда нужные выражения для дробных степеней уже введены в явном виде: (4.97) и (4.98), поэтому перейдём к описанию задачи о явном построении обобщённой формулы Тейлора для разложения обычного сдвига в ряд по степеням оператора Бесселя. Подобная формула в простейшем случае была анонсирована ранее в [237].

Теорема 4.14. *Справедлива формула Тейлора разложения произвольной достаточно гладкой функции по степеням дифференциального оператора Бесселя при $x = b$ с остаточным членом в интегральной форме*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b} \right)^{2i-2} \times \right.$$
$$\times {}_2F_1\left(i + \frac{\nu - 1}{2}, i-1; 2i-1; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) (B^{i-1} f)|_b - \frac{1}{\Gamma(2i)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b} \right)^{2i-1} \times$$
$$\left. \times {}_2F_1\left(i + \frac{\nu - 1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) (DB^{i-1} f)|_b \right] + B_{b-}^{\nu,k}(B^k f), \quad (4.99)$$

где $B_{b-}^{\nu,k}$ есть оператор левостороннего дробного интегрирования Бесселя (4.97), ${}_2F_1$ *— гипергеометрическая функция Гаусса.*

Также справедлива двойственная формула, использующая формально сопряжённый к B_ν оператор

$$C_\nu f = D^2 f - D(\frac{\nu}{y} f) = D^2 - \frac{\nu}{y} Df + \frac{\nu}{y^2}.$$

Теорема 4.15. *Справедлива формула Тейлора разложения произвольной достаточно гладкой функции по степеням дифференциального оператора C_ν при $x = a$ с остаточным членом в интегральной форме*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2x} \right)^{2i-2} \frac{a}{x} \, {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu - 1}{2}, i;\ 2i-1;\ 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \times \right.$$
$$\times (C_\nu^{i-1} f)|_a + \frac{1}{\Gamma(2i)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2x} \right)^{2i-1} \times$$
$$\left. \times \ {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu - 1}{2}, i;\ 2i;\ 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \ a^\nu \ (Dx^{-\nu} C_\nu^{i-1} f)|_a \right] + B_{a+}^{\nu,k} (C_\nu^k f), \tag{4.100}$$

где $B_{a+}^{\nu,k}$ есть оператор правостороннего дробного интегрирования Бесселя (4.98), ${}_2F_1$ *— гипергеометрическая функция Гаусса.*

Гипергеометрические функции в формулах Тейлора могут быть выражены через функции Лежандра аналогично определениям (4.97) и (4.98). Из формул (4.99)–(4.100) сразу следуют модификации операторов дробного интегро-дифференцирования Бесселя (4.97) и (4.98) по Капуто (см. [389]). Для этого нужно в определениях (4.97) и (4.98) вычесть из функций начальный отрезок их разложения по соответствующей обобщенной формуле Тейлора.

Могут быть рассмотрены и более общие комбинированные дробные степени для пары операторов $(\frac{1}{x} D)^m (B_\nu)^k$. Это семейство операторов интересно тем, что содержит обычные операторы Римана–Лиувилля ($m = 0,\ \nu = 0$), дробное интегро-дифференцирование Бесселя ($m = 0$), операторы Эрдейи–Кобера ($k = 0$). В этом случае также доказаны соответствующие формулы Тейлора.

Далее приведём выражение для резольвенты дробных степеней оператора Бесселя. Оно обобщает знаменитую формулу для дробных интегралов Римана–Лиувилля, написанную без доказательства Э. Хилле и Я.Д. Тамаркиным в 1930 г. (см. [374]). В их работе указывалось, что формула для резольвенты может быть выведена методом преобразования Лапласа с использованием нового на тот момент понятия свёртки в духе работ Дейтча, но этот способ, по-видимому, не был никогда реализован. Формула Тамаркина–Хилле была на самом деле впервые доказана в монографии М.М. Джрбашяна [65] обычным для теории интегральных уравнений методом последовательных приближений, хотя в этой монографии нет упоминания, что доказательство

дается её автором впервые, что характеризует этого замечательного математика. Поэтому, возможно, исторически правильным было бы называть формулу для резольвенты операторов дробного интегрирования Римана–Лиувилля *формулой Тамаркина–Хилле–Джрбашяна*. Кроме того, в [65] впервые были подробно изучены свойства функции Миттаг-Леффлера, из этой книги отечественные математики узнали о существовании подобной функции.

Формула Тамаркина–Хилле–Джрбашяна является самым известным применением функций Миттаг-Леффлера, а также основой огромного числа работ по приложениям дробного исчисления к дифференциальным уравнениям; функция Миттаг-Леффлера в работе [368] известных математиков Р. Горенфло и Ф. Майнарди была заслуженно названа *королевской функцией дробного исчисления* (Queen function of the fractional calculus).

Теорема 4.16. *Для резольвенты оператора дробного интегрирования Бесселя* (4.98) *при* $a = 0,\ 0 \leqslant \nu < 1$ *на подходящих функциях справедливо интегральное представление*

$$R_\lambda f = -\frac{1}{\lambda} f - \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^x K(x,y) f(y)\, dy, \tag{4.101}$$

где ядро $K(x,y)$ *выражается по формулам*

$$K(x,y) = \frac{2y}{x^2 - y^2} \int\limits_0^1 S_{\alpha,\nu}(z(t)) \frac{dt}{[t\,(1-t)]^{(\nu+1)/2}}, \tag{4.102}$$

$$z(t) = \left(\frac{t(1-t)\left(x^2 - y^2\right)^2}{\left[1 - \left(1 - \dfrac{x^2}{y^2}\right) t\right] 4y^2} \right)^\alpha,$$

$$S_{\alpha,\nu}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \frac{\nu-1}{2})\Gamma(\alpha k - \frac{\nu-1}{2})}$$

— разновидность гипергеометрической функции Райта или Фокса (см. [388, 396–398]).

Подобные функции также встречались в работах А.В. Псху [190], это специальные случаи более общих функций Райта, G-функций Мейера и H-функций Фокса, которые первоначально вводились как обобщения функций Бесселя (см. [388, 396–398]). Интересной задачей является дальнейшее упрощение представления ядра (4.102), если оно возможно.

Полученная формула для резольвенты дробных степеней оператора Бесселя позволяет рассматривать задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения вида

$$B_\nu^\alpha u(x) - \lambda u(x) = f(x)$$

при различных краевых условиях. По аналогии с известными результатами возможно также рассмотрение уравнений в частных производных с дробными степенями оператора Бесселя и их модификациями по Капуто. К числу таких уравнений относится обобщение B-эллиптического по терминологии И.А. Киприянова [87] дробного уравнения Лапласа–Бесселя

$$\sum_{k=1}^{n} B_{\nu_k}^{\alpha_k} u(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

— нестационарное уравнение вида

$$B_{\nu,t}^\alpha u(x,t) = \Delta_x u(x,t) + f(x,t).$$

Отметим, что рассмотрение спектральных свойств подобных уравнений нуждается в изучении асимптотики функции $K(x,y)$ из формулы (4.102) в комплексной плоскости, а также распределения её корней.

Часть III

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ОП ДЛЯ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ И РОДСТВЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Глава 5

КОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОП

Перечисленные выше классы ОП строились каждый своими методами. Поэтому возникает необходимость в разработке общей схемы построения ОП. Такая схема — метод факторизации или композиционный метод — предлагается в настоящей главе. Метод основан на представлении ОП в виде композиции интегральных преобразований. Композиционный метод даёт алгоритмы не только для построения новых ОП, но содержит как частные случаи ОП СПД, Векуа–Эрдейи–Лаундеса, Бушмана–Эрдейи различных типов, унитарные ОП Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова, обобщённые операторы Эрдейи–Кобера, а также введённые Р. Кэрроллом в [314–316] классы эллиптических, гиперболических и параболических ОП. В этой главе вводятся их обобщения: классы B-эллиптических, B-гиперболических и B-параболических ОП.

Общая схема композиционного метода следующая. На вход подается пара операторов произвольного вида A, B, а также связанные с ними обобщенные преобразования Фурье F_A, F_B, которые обратимы и действуют по формулам

$$F_A A = g(t) F_A, F_B^{-1} g(t) = B F_B^{-1}, \tag{5.1}$$

где t—двойственная переменная. В дальнейшем сделаем самый очевидный выбор $g(t) = -t^2$. На выходе получаем пару ОП, сплетающих A, B.

Действительно, определим пару формально взаимно обратных операторов по формулам

$$S = F_B^{-1} \frac{1}{w(t)} F_A, P = F_A^{-1} w(t) F_B \tag{5.2}$$

с произвольной весовой функцией $w(t)$. Тогда они являются ОП, которые удовлетворяют сплетающим соотношениям $SA = BS, PB = AP$.

Формальная проверка получается прямой подстановкой. Основную трудность представляет вычисление введённых композиций в явном интегральном виде, а также задание соответствующих областей определений операторов.

В композиционном методе может быть использован оператор квадратичного преобразования Фурье (КПФ, дробное преобразование Фурье, преобразование Фурье–Френеля). Это важное интегральное преобразование недостаточно широко известно (пока), оно возникло из предложения Френеля заменить стандартные плоские волны с линейными аргументами в экспонентах на более общие волны с квадратичными аргументами в экспонентах, что позволило полностью объяснить парадоксы со спектральными линиями при дифракции Фраунгофера. Математически операторы КПФ являются дробными степенями F^α обычного преобразования Фурье, достраиваемого до полугруппы по параметру α, они были определены Н. Винером и А. Вейлем. В теории всплесков, в которой принято каждую формулу считать новой и называть по-новому давно известные вещи, КПФ называется преобразованием Габора. Изложенный выше композиционный метод позволяет с помощью этого преобразования строить ОП для одномерного оператора Шрёдингера из квантовой механики. При этом может быть использовано и более общее квадратичное преобразование Ханкеля.

Далее на основе композиционного метода строятся гиперболические, эллиптические и параболические по Р. Кэрроллу операторы преобразования, обобщённые операторы Эрдейи–Кобера и др.

Мы используем классификацию операторов преобразования, предложенную Р. Кэрроллом и связанную с типом уравнения в частных производных, которому удовлетворяет ядро этого оператора. Так вводятся эллиптические и параболические операторы преобразования, классические же сплетающие операторы Сонина–Пуассона–Дельсарта по этому определению являются гиперболическими. Мы также используем естественные обобщения этих понятий: B-эллиптические, B-гиперболические и B-параболические операторы преобразования. При этом используются определения для соответствующих классов сингулярных уравнений в частных производных; эти классы были введены И.А. Киприяновым.

§ 5.1. B-гиперболические операторы преобразования

Так будем называть операторы сдвига по параметру оператора Бесселя, удовлетворяющие соотношению

$$TB_\nu = B_\mu T. \tag{5.3}$$

Будем искать такие операторы в факторизованном виде

$$T^{(\varphi)}_{\nu,\mu} = F_\mu^{-1}\left(\varphi(t)F_\nu\right). \tag{5.4}$$

Если $\nu = -\frac{1}{2}$ или $\mu = -\frac{1}{2}$, то такие операторы сводятся к уже изученным. Будем полагать $\varphi(t) = t^\alpha$, $T^{(\varphi)} = T^{(\alpha)}$.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия*

$$-2 - 2\operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}(\nu - \mu).$$

Тогда справедливо интегральное представление

$$\left(T^{(\alpha)}_{\nu,\mu} f\right)(x) =$$

$$= \frac{C_1}{x^{2\mu+\alpha+2}} \int\limits_0^x y^{2\nu+1}\, {}_2F_1\left(\mu + \frac{\alpha}{2} + 1, \frac{\alpha}{2} + 1;\ \nu + 1;\ \frac{y^2}{x^2}\right) f(y)\, dy +$$

$$+ C_2 \int\limits_x^\infty y^{-2\mu+2\nu-\alpha-1}\, {}_2F_1\left(\mu + \frac{\alpha}{2} + 1, \mu - \nu + \frac{\alpha}{2} + 1;\ \mu + 1;\ \frac{x^2}{y^2}\right) f(y)\, dy, \tag{5.5}$$

$$C_1 = \frac{2^{\mu-\nu+\alpha+1}\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma(\nu+1)},\ C_2 = \frac{2^{\mu-\nu+\alpha+1}\Gamma\left(\mu + \frac{\alpha}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\nu - \mu - \frac{\alpha}{2}\right)\Gamma(\mu+1)},$$

где ${}_2F_1$ *— гипергеометрическая функция Гаусса.*

Рассмотрим несколько частных случаев оператора (5.5).

а) Пусть $\alpha = -1 - 2\mu + \nu$, $\operatorname{Re}\nu > -1$, $\operatorname{Re}\mu > -1$. Тогда

$$\left(T^{(-1-2\mu+\nu)}_{\nu,\mu} f\right)(x) = 2^{-\mu}\frac{1}{x^\mu}\int\limits_x^\infty y^\nu (y^2 - x^2)^{\mu/2} P^{-\mu}_{\nu/2-1/2}\left(1 - 2\frac{x^2}{y^2}\right) f(y)\, dy +$$

$$+ 2^{1-\mu} e^{i\mu\pi} \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu - \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)} \frac{1}{x^\mu}\int\limits_0^x y^\nu (x^2 - y^2)^{\mu/2} Q^{\mu}_{\nu/2-1/2}\left(2\frac{x^2}{y^2} - 1\right) f(y)\, dy.$$

б) Пусть $\alpha = 0$; $-1 < \operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}\nu$. В этом случае получается замечательный оператор «спуска» по параметру, который не зависит от начального и конечного значений параметров ν, μ, а зависит лишь от величины «спуска» $\gamma = \nu - \mu$:

$$\left(T^{(0)}_{\nu,\mu} f\right)(x) = \frac{2^{1-(\nu-\mu)}}{\Gamma(\nu-\mu)} \int\limits_x^\infty y(y^2 - x^2)^{\nu-\mu-1} f(y)\, dy.$$

Этот оператор лишь числовым множителем отличается от дробного интеграла I_{-,x^2} по функции $g(x) = x^2$. В такой форме он был открыт А. Эрдейи, это частный случай операторов Эрдейи–Кобера или Лаундеса.

в) Пусть $\alpha = 2\nu$, $-1 < \mathrm{Re}(\nu+\mu) < 0$. Тогда

$$\left(T^{(2\nu)}_{\nu,\,\mu} f\right)(x) =$$
$$= \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi} 2^{\mu+\nu+1}\Gamma(\nu+\mu+1)\int\limits_x^\infty y^{2\nu+1}(y^2-x^2)^{-\mu-\nu-1} f(y)\,dy -$$
$$- \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} 2^{\mu+\nu+1}\Gamma(\nu+\mu+1)\int\limits_0^x y^{2\nu+1}(x^2-y^2)^{-\mu-\nu-1} f(y)\,dy.$$

г) Пусть $\mu = \nu$, $-2\mathrm{Re}\,\nu - 2 < \mathrm{Re}\,\alpha < 0$. Тогда получаем семейство операторов, перестановочных с B_ν:

$$\left(T^{(\alpha)}_{\nu,\,\nu} f\right)(x) = \frac{2^{\alpha+2}}{\sqrt{\pi}}\times$$
$$\times \frac{e^{-i\pi\alpha/2}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{1}{x^{\nu+1/2}}\int\limits_0^\infty y^{\nu+3/2}|x^2-y^2|^{-\alpha/2-1} Q^{\alpha/2+1}_{\nu-1/2}\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}\right) f(y)\,dy.$$

д) Пусть $\mu = -\nu$, $2\mathrm{Re}\,\nu - 2 < \mathrm{Re}\,\alpha < \mathrm{Re}\,2\nu$. Тогда

$$\left(T^{(\alpha)}_{\nu,\,-\nu} f\right)(x) = 2^{-2\nu+\alpha+1}\frac{\Gamma\left(-\nu+\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(2\nu-\frac{\alpha}{2}\right)} x^\nu \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty |y^2-x^2|^{\nu-\alpha/2-1} y^{\nu+1} P^\nu_{\nu-\alpha/2-1}\left(\frac{x^2+y^2}{|x^2-y^2|}\right) f(y)\,dy.$$

Другой подход к построению операторов сдвига по параметру заключается в следующем. Пусть по приведённым выше формулам построены оператор типа Сонина, для которого выбрано $\varphi = \varphi_1$, и оператор типа Пуассона при значениях $\nu = \mu$, $\varphi = \varphi_2$. Тогда их композиция $T = P_\mu S_\nu$ и будет искомым оператором. При этом в случае, если одновременно выбраны или синус- или косинус-преобразования Фурье, то получится в точности конструкция (5.4), где $\varphi = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$. Поэтому вопрос об ограниченности такого оператора в лебеговых пространствах со степенным весом $L_{p,\gamma}(0,\infty)$ сводится к задаче о возможности деления в пространствах мультипликаторов. В случае, если выбраны разные преобразования, мы приходим к следующей факторизации:

$$T^{(\varphi_1,\varphi_2)}_{\nu,\,\mu} = F^{-1}_\mu \cdot \varphi_2(t) \cdot F_{\left\{\substack{\mathrm{s}\\ \mathrm{c}}\right\}} \cdot F^{-1}_{\left\{\substack{\mathrm{c}\\ \mathrm{s}}\right\}} \frac{1}{\varphi_1(t)} F_\nu. \tag{5.6}$$

Несложно показать, что композиция преобразований Фурье сводится к так называемым *преобразованиям Гильберта на полуоси*:

$$(F_{\mathrm{s}}F_{\mathrm{c}}f)(x) = \int\limits_0^\infty \frac{x}{x^2 - y^2} f(y)\,dy, \tag{5.7}$$

$$(F_{\mathrm{c}}F_{\mathrm{s}}f)(x) = \int\limits_0^\infty \frac{y}{y^2 - x^2} f(y)\,dy, \tag{5.8}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, причём указанные преобразования унитарны в $L_2(0,\infty)$. Таким образом, в рассматриваемом случае оператор (5.6) факторизуется через два преобразования Фурье–Бесселя и одно из двухвесовых преобразований:

$$(A_1 f)(x) = x\,\varphi_2(x) \int\limits_0^\infty \frac{f(y)}{(x^2 - y^2)} \cdot \frac{dy}{\varphi_1(x)},$$

$$(A_2 f)(x) = \varphi_2(x) \int\limits_0^\infty \frac{y}{\varphi_1(x)} \cdot \frac{f(y)}{(y^2 - x^2)}\,dy.$$

Вопрос об ограниченности (5.6) в этом случае сводится к задаче об оценках с двумя весами для полуосевых преобразований Гильберта в соответствующих пространствах.

Другие классы B-гиперболических операторов преобразования можно построить, если использовать вместо преобразования Фурье–Бесселя F_ν преобразование с функцией Неймана $Y_\nu(z)$ в ядре.

§ 5.2. B-эллиптические операторы преобразования

Эти операторы удовлетворяют соотношению

$$TB_\nu = -D^2 T. \tag{5.9}$$

Этот необычный класс ОП осуществляет связь между решениями B-эллиптических и B-гиперболических дифференциальных уравнений, выражая их решения друг через друга.

Построение таких операторов основано на замене в предыдущих факторизациях синус- и косинус-преобразований Фурье преобразованием Лапласа или на замене преобразования Фурье–Бесселя преобразованиями с функциями Макдональда и Неймана в ядре

$$(K_\nu f)(t) = \frac{1}{t^\nu} \int\limits_0^\infty y^{\nu+1} K_\nu(ty) f(y)\,dy, \tag{5.10}$$

$$(Y_\nu f)(t) = \frac{1}{t^\nu} \int\limits_0^\infty y^{\nu+1} Y_\nu(ty) f(y)\, dy. \tag{5.11}$$

Возможно также использование преобразования с функцией Струве в ядре.

Теорема 5.2. *Пусть* $|\mathrm{Re}\,\nu| + \mathrm{Re}(\alpha+\nu) < 1$. *Тогда оператор*

$$(A_\nu^\alpha f)(x) = F_{\mathrm{c}}^{-1} t^{-\alpha} K_\nu f$$

является B*-эллиптическим, удовлетворяющим соотношению* (5.9). *Для него справедливо интегральное представление*

$$(A_\nu^\alpha f)(x) = \frac{\pi\Gamma(1-\alpha)}{4\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha-2\nu)\right)} \int\limits_0^\infty y^{\nu+1}(x^2+y^2)^{(\alpha+\nu-1)/2} \times$$

$$\times \left[P_{-\alpha-\nu}^{-\nu}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + P_{-\alpha-\nu}^{-\nu}\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right] f(y)\, dy.$$

Определим оператор, удовлетворяющий соотношению (5.9), по формуле

$$(C_\nu^\alpha f)(x) = L(t^{-\alpha} F_\nu f),$$

где L — преобразование Лапласа.

Теорема 5.3. *Пусть* $\mathrm{Re}\,\alpha < 1$. *Тогда справедливо интегральное представление*

$$(A_\nu^\alpha f)(x) = \Gamma(1-\alpha) \int\limits_0^\infty y^{\nu+1}(x^2+y^2)^{(\alpha+\nu-1)/2} P_{-\alpha-\nu}^{-\nu}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) f(y)\, dy.$$

Аналогичное представление при $|\mathrm{Re}\,\nu| + \mathrm{Re}(\alpha+\nu) < 1$ справедливо и для оператора

$$L(t^{-\alpha} Y_\nu f)(x) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\Gamma(1-\alpha) \int\limits_0^\infty y^{\nu+1}(x^2+y^2)^{(\alpha+\nu-1)/2} Q_{-\alpha-\nu}^{-\nu}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) f(y)\, dy.$$

Подобные формулы выведены и для более широкого класса B-эллиптических операторов преобразования, сплетающих B_ν и $-B_\mu$.

Рассмотрим простейшие из введённых выше операторов A_ν^α и C_ν^α при значениях $\nu = \pm\frac{1}{2}$. Эти операторы будут определяться по формулам

$$\left(A^\beta f\right)(x) = \left(F_{\left\{\substack{\mathrm{s}\\ \mathrm{c}}\right\}}^{-1} t^\beta L\right) f,$$

$$\left(C^{\beta} f\right)(x) = \left(L t^{-\beta} F_{\left\{\begin{smallmatrix} \mathrm{s} \\ \mathrm{c} \end{smallmatrix}\right\}}\right) f,$$

где L — преобразование Лапласа. Они сплетают D^2 и $-D^2$. В этом случае проще вычислить ядра интегральных операторов непосредственно. Это приводит к формулам

$$\left(C^{\beta} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(1-\beta) \int\limits_0^{\infty} \frac{f(y)}{\left(x^2+y^2\right)^{(1-\beta)/2}} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} [(1-\beta)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}]dy,$$

$$\operatorname{Re}\beta < 1+\delta,\ \delta = \begin{cases} 1 & \text{при выборе синуса,} \\ 0 & \text{при выборе косинуса;} \end{cases}$$

$$\left(A^{\beta} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(1+\beta) \int\limits_0^{\infty} \frac{f(y)}{\left(x^2+y^2\right)^{(1+\beta)/2}} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} [(1+\beta)\operatorname{arctg}\frac{x}{y}]dy,$$

где $\operatorname{Re}\beta > -\delta - 1$, δ определено выше. В частности, при $\beta = 0$ получаем пару операторов преобразования, связанную с интегралами Пуассона для полупространства:

$$\left(C^{0} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \frac{y f(y)}{x^2+y^2}\,dy,$$

$$\left(A^{0} f\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \frac{x f(y)}{x^2+y^2}\,dy.$$

Эти операторы и операторы C^{β}, A^{β} для частных значений $\beta \in \mathbb{N}$ построены в [314].

§ 5.3. B-параболические операторы преобразования

Этот необычный класс ОП позволяет выражать решения параболических уравнений через гиперболические и обратно.

Введём интегральные преобразования по формулам

$$(F'_{\mathrm{c}} f)(x) = (F_{\mathrm{c}} f)(\sqrt{x}),\ \ (F'_{\mathrm{s}} f)(x) = (F_{\mathrm{s}} f)(\sqrt{x}),$$

$$(Pf)(x) = \left(L\varphi(t) F'_{\left\{\begin{smallmatrix} \mathrm{s} \\ \mathrm{c} \end{smallmatrix}\right\}}\right)(x).$$

Тогда на финитных функциях оператор P сплетает вторую и первую производные по формулам

$$PD^2 f = DPf.$$

Таким образом, этот оператор является параболическим по терминологии Р. Кэрролла.

§ 5.4. Операторы сдвига по параметру типа Лаундеса

Операторы этого типа появились при установлении формул, выражающих решения уравнений Гельмгольца через гармонические функции. Их изучение, начатое в работах И.Н. Векуа и А. Эрдейи, было продолжено Дж. Лаундесом.

Рассмотрим оператор

$$T_1 = F_\nu^{-1}\left(\varphi(t)F'_\mu\right),$$

где введено преобразование с параметром λ

$$\left(F'_\mu f\right)(t) = \frac{1}{t^\nu}\int\limits_0^\infty y^{\nu+1}J_\nu(y\sqrt{t^2+\lambda^2}\,)f(y)\,dy.$$

Оператор T_1 удовлетворяет соотношению

$$T_1B_\mu = (B_\nu - \lambda^2)T_1. \tag{5.12}$$

Теорема 5.4. *При условиях* $-1 < \operatorname{Re}\nu < \operatorname{Re}\mu$ *и выборе* $\varphi(x) = x^\mu(x^2+\lambda^2)^{-\mu/2}$ *справедливо интегральное представление*

$$(T_1f)(x) = \lambda^{1+\nu-\mu}\int\limits_0^\infty y(y^2-x^2)^{(\mu-\nu-1)/2}J_{\nu-\mu-1}(\lambda\sqrt{y^2-x^2}\,)f(y)\,dy.$$

Приведём ряд других операторов, получаемых в факторизованном виде.

а) Пусть $\nu = 1$, $\varphi(x) = x^{\mu-2}(x^2+\lambda^2)^{\mu/2}$.

Тогда оператор $T_2 = F_1^{-1}\varphi(t)F'_\mu$, удовлетворяющий соотношению

$$T_2B_\mu = (B_1 - \lambda^2)\,T_2,$$

при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\mu > -1$ может быть представлен в виде

$$(T_2f)(x) = \frac{1}{x^2\lambda^2}\int\limits_0^\infty y^{\nu+1}J_\mu(\lambda y)f(y)\,dy-$$

$$-\frac{1}{x^2\lambda^2}\int\limits_x^\infty y(y^2-x^2)^{\mu/2}J_\mu(\lambda\sqrt{y^2-x^2}\,)f(y)\,dy.$$

б) Пусть $\varphi(x) = x^{\mu}(x^{\mu/2} + \lambda^2)^2$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, и пусть $T_3 = F_{\nu}^{-1}\varphi F'_{\mu}$. Тогда если $-1 < \operatorname{Re}\nu < -\operatorname{Re}\mu$, то

$$(T_3 f)(x) = \frac{2\sin(\pi\mu)}{\pi}\lambda^{\mu+\nu+1}\times$$
$$\times\int\limits_0^x y^{2\mu+1}(x^2-y^2)^{-(\mu+\nu+1)/2}K_{\mu+\nu+1}(\lambda\sqrt{x^2-y^2}\,)f(y)\,dy+$$
$$+\lambda^{\nu+\mu+1}\int\limits_x^{\infty} y^{2\mu+1}(y^2-x^2)^{-(\mu+\nu+1)/2}\Big[\sin(\pi\nu)Y_{\mu+\nu+1}(\lambda\sqrt{y^2-x^2}\,)-$$
$$-\cos(\pi\nu)J_{\nu+\mu+1}(\lambda\sqrt{y^2-x^2}\,)\Big]f(y)\,dy.$$

в) Пусть $\varphi(x) = x^{\mu-1}/\left[(x^2+\lambda^2)\left(x^2+\dfrac{\lambda}{2}^2\right)^{\mu/2}\right]$. Положим $T_4 = Y_{\nu}^{-1}\varphi F'_{\mu}$. Тогда если $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $-\dfrac{1}{2} < \operatorname{Re}\nu < 3 + \operatorname{Re}\mu$, то справедливо соотношение

$$(T_4 f)(x) = -\frac{\lambda^{\nu-\mu-1}}{2^{-\mu/2}}\cdot\frac{K_{\nu}(\lambda x)}{x^{\nu}}\int\limits_0^{\infty} y^{\mu+1}J_{\mu}\left(\frac{\lambda y}{\sqrt{2}}\right)f(y)\,dy.$$

Приведённые примеры демонстрируют важность свободы выбора функции φ.

Аналогично осуществляется построение операторов T, удовлетворяющих соотношению

$$TB_{\mu} = (B_{\mu}+\lambda^2)\,T. \tag{5.13}$$

Например, оператор вида

$$T_5 = (F'_{\mu})^{-1}\varphi F_{\nu}$$

для одной из функций φ является также оператором Лаундеса

$$(T_4 f)(x) = \frac{\lambda^{\nu-\mu+1}}{x^{2\mu}}\int\limits_0^{\infty} y^{2\nu+1}(x^2-y^2)^{(\mu-\nu-1)/2}J_{\mu-\nu-1}(\lambda\sqrt{y^2-x^2}\,)f(y)\,dy.$$

Отметим, что соотношения (5.12)–(5.13) ввиду линейности входящих в них операторов могут быть переписаны в форме

$$T_1(B_{\mu}+\lambda^2) = B_{\nu}T,\ T(B_{\nu}-\lambda^2) = B_{\mu}T. \tag{5.14}$$

Кроме того, во всех операторах можно обосновать замену $\lambda \to i\lambda$. Соотношение для наиболее общих операторов преобразования вида

$$T(B_{\nu}+\alpha) = (B_{\mu}+\beta)T \tag{5.15}$$

эквивалентно уже рассмотренным

$$T(B_\nu + \alpha - \beta) = B_\mu T, \ (B_\mu + \beta - \alpha)T = TB_\nu. \tag{5.16}$$

Впрочем, операторы, для которых выполняются соотношения (5.14)–(5.16), могут быть получены и непосредственно. Таким же образом строятся и B-эллиптические операторы типа Лаундеса, удовлетворяющие соотношению

$$T(B_\nu + \lambda) = (-B_\mu + \beta)\, T.$$

При выборе значений параметров $\nu = \mu = -\dfrac{1}{2}$ получаем операторы, сплетающие D^2 и $D^2 \pm \lambda^2$.

Глава 6

ПОСТРОЕНИЕ ОП ДЛЯ ВОЗМУЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

§ 6.1. Постановка задачи нахождения интегрального представления решений для возмущённого уравнения Бесселя с переменным потенциалом

Рассматривается задача о построении интегральной формулы для решений дифференциального уравнения с определённой асимптотикой

$$B_\alpha g(x) - q(x)g(x) = \lambda^2 g(x), \tag{6.1}$$

где B_α — оператор Бесселя, который в данной главе нам удобно определить в таком виде:

$$B_\alpha g = g''(x) + \frac{2\alpha}{x} g'(x), \quad \alpha > 0.$$

Заметим, что здесь используются разные формы записи постоянных в операторе Бесселя в зависимости от решаемых задач, что объясняется более простыми формулами для записи получаемых результатов; это не должно привести к путанице, так как задачи, рассматриваемые в разных местах работы, не имеют пересечений.

Данная задача решается методом операторов преобразования. Для этого достаточно построить пару взаимно обратных операторов преобразования, первый из которых S_α вида

$$S_\alpha h(x) = h(x) + \int\limits_x^\infty S(x,t)h(t)\,dt$$

сплетает операторы $B_\alpha - q(x)$ и B_α по формуле

$$S_\alpha(B_\alpha - q(x))h = B_\alpha S_\alpha h$$

а второй P_α, обратный к первому, должен быть построен в виде интегрального с ядром $P(x,t)$:

$$P_\alpha h(x) = h(x) + \int\limits_x^\infty P(x,t)h(t)\,dt, \tag{6.2}$$

и действовать по формуле

$$P_\alpha B_\alpha h = (B_\alpha - q(x))P_\alpha h$$

на функциях $h \in C^2(0,\infty)$.

В результате на решениях дифференциального уравнения (6.1) функция $S_\alpha u = v$ будет выражаться через решения невозмущённого уравнения, получаемого отбрасыванием слагаемого с потенциалом в (6.1), т. е. фактически через функции Бесселя, а функция $u = P_\alpha v$ будет решением исходного возмущённого уравнения (6.1). При этом для решения будет получено интегральное представление (6.2) с явным описанием ядра $P(x,t)$. Эта методика отражает одно из основных применений ОП — выражение решений более сложных дифференциальных уравнений через подобные более простые, что было отмечено во введении. Также заметим, что в силу использования линейных ОП одна и та же пара взаимно обратных ОП позволяет получить как представления решений дифференциального уравнения (6.1) со спектральным параметром, так и представление решений в более простом случае однородного уравнения

$$B_\alpha h(x) - q(x)h(x) = 0.$$

При этом если ставится задача о нахождении представления для решений возмущенного уравнения (6.1), то можно пропустить построение прямого оператора преобразования и сразу перейти к построению обратного и нахождению интегрального представления для искомого решения вида (6.2).

Оригинальная методика для решения подобных задач была разработана В.В. Сташевской [252, 253], что позволило ей включить в рассмотрение сингулярные потенциалы с оценкой в нуле $|q(x)| \leqslant \leqslant cx^{-3/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, при целых α; эта методика, основанная на применении обобщённых теорем Пэли—Винера, получила широкое развитие и признание. Случай непрерывной q, $\alpha > 0$ рассмотрен в работах А.С. Сохина [247–250], а также в [37]. При этом в работах В.В. Сташевской и В.Я. Волка строились операторы преобразования типа Повзнера с интегрированием по конечному промежутку, а в работах А.С. Сохина — типа Левина с интегрированием по бесконечному промежутку. Далее авторами предлагается новый модифицированный метод, позволяющий скомбинировать оба эти подхода.

Вместе с тем во многих математических и физических задачах необходимо рассматривать сильно сингулярные потенциалы, например,

допускающие произвольную степенную особенность в нуле. В настоящей главе сформулированы результаты по интегральному представлению решений уравнений с подобными сингулярными потенциалами. От потенциала требуется лишь мажорируемость определенной функцией, суммируемой на бесконечности. В частности, к классу допустимых в данной главе относятся сингулярный потенциал $q = x^{-2}$, сильно сингулярный потенциал со степенной особенностью $q = x^{-2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, потенциалы Юкавы типа $q = e^{-\alpha x}/x$, потенциалы Баргмана и Батмана–Шадана [286] и ряд других. При этом на функцию $q(x)$ не налагается никаких дополнительных условий типа быстрой осцилляции в начале координат или знакопостоянства, что позволяет изучать притягивающие и отталкивающие потенциалы единым методом.

Следует отметить, что в данной главе построены операторы преобразования специального вида, отличающиеся от ранее известных некоторыми деталями. До этого рассматривались лишь случаи одинаковых пределов (оба вида $[0; a]$ или $[a; \infty]$) в основном интегральном уравнении для ядра оператора преобразования. В этой главе показано, что можно рассматривать случай различных пределов в основном интегральном уравнении. Именно такая расстановка пределов и позволила охватить более широкий класс потенциалов с особенностями в нуле. Кроме того, по сравнению с рассуждениями по образцу классической работы Б.М. Левитана [126] мы вносим усовершенствование в эту схему. Используемую в доказательстве функцию Грина, как оказалось, можно выразить не только через общую гипергеометрическую функцию Гаусса, но и более конкретно через функцию Лежандра, зависящую от меньшего числа параметров, что позволяет избавиться от неопределённых постоянных в оценках из предыдущих работ.

§ 6.2. Решение основного интегрального уравнения для ядра оператора преобразования

Введём новые переменные и функции по формулам:

$$\xi = \frac{t+x}{2}, \quad \eta = \frac{t-x}{2}, \quad \xi \geqslant \eta > 0;$$

$$K(x,t) = \left(\frac{x}{t}\right)^{\alpha} P(x,t), \qquad u(\xi,\eta) = K(\xi-\eta, \xi+\eta). \tag{6.3}$$

Обозначим $\nu = \alpha - 1$. Таким образом, чтобы обосновать представление (6.2) для решения уравнения (6.1), достаточно определить функцию $u(\xi,\eta)$. Известно (см. [247–250]), что если существует дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(\xi,\eta)$ интегрального уравнения

$$u(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty} R_\nu(s,0;\xi,\eta)q(s)\,ds - \int\limits_{\xi}^{\infty} ds \int\limits_{0}^{\eta} q(s+\tau)R_\nu(s,\tau;\xi,\eta)u(s,\tau)\,d\tau$$

при условиях $0 < \tau < \eta < \xi < s$, то искомая функция $P(x,t)$ определяется по формулам (6.3) через это решение $u(\xi,\eta)$. Функция $R_\nu = R_{\alpha-1}$ является функцией Римана, возникающей при решении некоторой задачи Гурса для сингулярного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{4\alpha(\alpha-1)\xi\eta}{(\xi^2-\eta^2)^2}u(\xi,\eta) = q(\xi+\eta)u(\xi,\eta).$$

Эта функция известна в явном виде (см. [247–250]), она выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1$ по формуле

$$R_\nu = \left(\frac{s^2-\eta^2}{s^2-\tau^2}\cdot\frac{\xi^2-\tau^2}{\xi^2-\eta^2}\right)^\nu {}_2F_1\left(-\nu,-\nu;1;\frac{s^2-\xi^2}{s^2-\eta^2}\cdot\frac{\eta^2-\tau^2}{\xi^2-\tau^2}\right).$$

Это выражение упрощено в [81], где показано, что функция Римана в рассматриваемом случае выражается через функцию Лежандра по формуле

$$R_\nu(s,\tau,\xi,\eta) = P_\nu\left(\frac{1+A}{1-A}\right), \qquad A = \frac{\eta^2-\tau^2}{\xi^2-\tau^2}\cdot\frac{s^2-\xi^2}{s^2-\eta^2}\ . \tag{6.4}$$

Основное содержание этого параграфа составляет

Теорема 6.1. *Пусть функция* $q(r) \in C^1(0,\infty)$ *удовлетворяет условию*

$$|q(s+\tau)| \leqslant |p(s)|,\ \forall s,\forall\tau,\ 0<\tau<s,\ \int\limits_\xi^\infty |p(t)|\,dt < \infty, \forall\xi>0. \tag{6.5}$$

Тогда существует интегральное представление вида (6.2), *ядро которого удовлетворяет оценке*

$$|P(r,t)| \leqslant \left(\frac{t}{r}\right)^\alpha \frac{1}{2}\int\limits_{(t+r)/2}^\infty P_{\alpha-1}\left(\frac{y^2(t^2+r^2)-(t^2-r^2)}{2try^2}\right)|p(y)|\,dy\times$$

$$\times\exp\left[\left(\frac{t-r}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{(t+r)/2}^\infty P_{\alpha-1}\left(\frac{y^2(t^2+r^2)-(t^2-r^2)}{2try^2}\right)|p(y)|\,dy\right].$$

При этом ядро оператора преобразования $P(x,t)$, *а также решение уравнения* (6.4) *являются дважды непрерывно дифференцируемыми на* $(0,\infty)$ *функциями по своим аргументам.*

Доказательство. Разобьём доказательство теоремы на ряд лемм.

Введём обозначения:

$$I_q(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty} R_\nu(y,0;\xi,\eta)|p(y)|\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty} P_\nu\left(\frac{y^2(\xi^2+\eta^2)-2\xi^2\eta^2}{y^2(\xi^2-\eta^2)}\right)|p(y)|\,dy, \quad (6.6)$$

$$u_0(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty} R_\nu(s,0;\xi,\eta)|p(s)|\,ds,$$

$$Au_0(\xi,\eta) = -\int\limits_{\xi}^{\infty} ds\int\limits_{0}^{\eta} q(s+\tau)R_\nu(s,\tau;\xi,\eta)u_0(s,\tau)\,d\tau.$$

Докажем равномерную сходимость операторного ряда Неймана

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k u_0(\xi,y) \quad (6.7)$$

и возможность его двукратного дифференцирования.

Лемма 6.1. *Справедлива оценка*

$$|u_0(\xi,\eta)| \leqslant I_q(\xi,\eta).$$

Доказательство сразу следует из определения (6.6).

Лемма 6.2. *Пусть* $0<\tau<\eta<\xi<s$. *Тогда справедливо неравенство*

$$I_q(s,t) \leqslant I_q(\xi,\eta). \quad (6.8)$$

Доказательство. По условию дано $0<\tau<\eta<\xi<s<y$. Покажем, что тогда

$$\frac{\tau^2}{s^2}\cdot\frac{(y^2-s^2)}{(y^2-\tau^2)} \leqslant \frac{\eta^2}{\xi^2}\cdot\frac{(y^2-\xi^2)}{(y^2-\eta^2)}\ (\leqslant 1).$$

Действительно, это неравенство эквивалентно следующему:

$$\tau^2\xi^2(y^2-s^2)(y^2-\eta^2) \leqslant \eta^2 s^2(y^2-\xi^2)(y^2-\tau^2),$$

которое очевидно, так как каждый из сомножителей слева не превосходит соответствующего сомножителя справа. Далее, рассмотрим при $0<x<1$ функцию

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \geqslant 1,\ \ f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} > 0,\ \ 0<x<1.$$

Ясно, что эта функция возрастает по x. Поэтому

$$\frac{1+\dfrac{\tau^2}{s^2}\cdot\dfrac{(y^2-s^2)}{(y^2-\tau^2)}}{1-\dfrac{\tau^2}{s^2}\cdot\dfrac{(y^2-s^2)}{(y^2-\tau^2)}} \leqslant \frac{1+\dfrac{\eta^2}{\xi^2}\cdot\dfrac{(y^2-\xi^2)}{(y^2-\eta^2)}}{1-\dfrac{\eta^2}{\xi^2}\cdot\dfrac{(y^2-\xi^2)}{(y^2-\eta^2)}}.$$

Функция Лежандра $P_\nu(x)$ на интервале $x \in (1,\infty)$ при $\nu > -1$ монотонно возрастает, кроме того, $P_\nu(x) > 1$. Поэтому

$$P_\nu\left(\frac{1+\dfrac{\tau^2}{s^2}\cdot\dfrac{(y^2-s^2)}{(y^2-\tau^2)}}{1-\dfrac{\tau^2}{s^2}\cdot\dfrac{(y^2-s^2)}{(y^2-\tau^2)}}\right) \leqslant P_\nu\left(\frac{1+\dfrac{\eta^2}{\xi^2}\cdot\dfrac{(y^2-\xi^2)}{(y^2-\eta^2)}}{1-\dfrac{\eta^2}{\xi^2}\cdot\dfrac{(y^2-\xi^2)}{(y^2-\eta^2)}}\right).$$

Последнее неравенство можно записать иначе:

$$P_\nu\left(\frac{y^2(s^2+\tau^2)-2s^2\tau^2}{y^2(s^2-\tau^2)}\right) \leqslant P_\nu\left(\frac{y^2(\xi^2+\eta^2)-2\xi^2\eta^2}{y^2(\xi^2-\eta^2)}\right).$$

Заметим, что мы фактически доказали неравенство для функции Римана

$$R_\nu(y,0;s,\tau) \leqslant R_\nu(y,0;\xi,\eta) \tag{6.9}$$

при условиях $0 < \tau < \eta < \xi < s < y$.

Из проведённых вычислений получаем оценку

$$I_q(s,\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_s^\infty R_\nu(y,0;s,\tau)|p(y)|\,dy \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_\xi^\infty R_\nu(y,0;s,\tau)|p(y)|\,dy.$$

Заменяя нижний предел интегрирования s на $\xi < s$, мы можем лишь увеличить значение интеграла, так как функция Римана положительна, $R_\nu > 0$. В результате приходим к оценке (6.8).

Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Для n-го члена ряда Неймана* (6.7) *справедлива оценка*

$$|u_n(\xi,\eta)| \leqslant I_q(\xi,\eta)\cdot\frac{[\eta I_q(\xi,\eta)]^n}{n!}. \tag{6.10}$$

Доказательство. Приме́ним метод математической индукции. Для $n = 0$ неравенство (6.10) сводится к уже доказанному неравенству из леммы 1. Пусть выполняется (6.10) для некоторого $n = k$. Тогда для очередного члена ряда Неймана получаем

$$|u_{k+1}(\xi,\eta)| \leqslant |\int\limits_\xi^\infty ds\int\limits_0^\eta R_\nu(s,\tau;\xi,\eta)u_k(s,\tau)q(s+\tau)\,d\tau| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\xi^\infty ds\int\limits_0^\eta R_\nu(s,\tau;\xi,\eta)|q(s+\tau)|I_q(s,\tau)\frac{[\eta I_q(s,\tau)]^k}{k!}\,d\tau.$$

Повторяя рассуждения леммы 6.2, получаем

$$R_\nu(s,\tau;\xi,\eta) \leqslant R_\nu(s,0;\xi,\eta), \tag{6.11}$$

так как

$$R_\nu(s,\tau;\xi,\eta) = P_\nu\left(\frac{1+A}{1-A}\right),\ A = \frac{\eta^2-\tau^2}{\xi^2-\tau^2}\cdot\frac{s^2-\xi^2}{s^2-\eta^2},$$

а максимальное по τ значение A достигается при $\tau = 0$. Учитывая неравенство (6.11) и (справедливое по предположению индукции) неравенство (6.10), приходим к оценке

$$|u_{k+1}(\xi,\eta)| \leqslant I_q(\xi,\eta)\frac{[\tau I_q(\xi,\eta)]^k}{k!}\cdot\int\limits_\xi^\infty R_\nu(s,0;\xi,\eta)\int\limits_0^\eta |q(s+\tau)|\tau^k\,d\tau\,ds.$$

Мы рассматриваем потенциалы, для которых верно неравенство

$$|q(s+\tau)| \leqslant |p(s)|, \qquad 0<\tau<s.$$

Окончательно получаем

$$|u_{k+1}(\xi,\eta)| \leqslant I_q(\xi,\eta)\frac{[I_q(\xi,\eta)]^{k+1}}{k!}\cdot\frac{\eta^{k+1}}{(k+1)},$$

откуда по индукции следует оценка (6.10) для всех n.

Лемма доказана.

Вернёмся к доказательству теоремы 6.1. Суммируя все оценки (6.10), получаем, что ряд Неймана сходится равномерно в области $0<\eta<\xi$, а его сумма есть некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$|u(\xi,\eta)| \leqslant I_q(\xi,\eta)\exp[\eta\cdot I_q(\xi,\eta)]. \tag{6.12}$$

Из (6.12) следует, что мы смогли бы доказать сходимость ряда (6.7) для суммируемого потенциала q, который можно приблизить непрерывными потенциалами.

Возвращаясь к функциям K и P, получаем неравенства

$$|K(x,t)| \leqslant I_q\left(\frac{t+x}{2},\frac{t-x}{2}\right)\exp\left[\left(\frac{t-x}{2}\right)I_q\left(\frac{t+x}{2},\frac{t-x}{2}\right)\right],$$

$$|P(x,t)| \leqslant \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha I_q\left(\frac{t+x}{2},\frac{t-x}{2}\right)\exp\left[\left(\frac{t-x}{2}\right)I_q\left(\frac{t+x}{2},\frac{t-x}{2}\right)\right].$$

Преобразуем величину I_q, входящую в оценки:

$$I_q\left(\frac{t+x}{2},\frac{t-x}{2}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{(t+x)/2}^\infty P_{\alpha-1}\left(\frac{y^2(t^2+x^2)-(t^2-x^2)}{2txy^2}\right)|p(y)|\,dy.$$

Таким образом, мы приходим к оценке (6.6).

Для завершения доказательства теоремы 6.1 осталось обосновать существование вторых непрерывных производных функции $P(x,t)$ по переменным x,t при условии $q \in C^1(x>0)$. Очевидно, что это эквивалентно существованию вторых непрерывных производных функции $u(\xi,\eta)$ по переменным ξ,η. Доказательство последнего утверждения проводится по приведённому выше образцу методом последовательных приближений и полностью повторяет соответствующий фрагмент доказательства из [247].

Теорема доказана.

Перечислим классы потенциалов, для которых выполняются условия (6.5). Если $|q(x)|$ монотонно убывает, то можно принять $p(x)=|q(x)|$. Для потенциалов, имеющих произвольную особенность в начале координат и возрастающих при $0<x<M$ (например, кулоновских $q=-\dfrac{1}{x}$), которые обрезаны нулём на бесконечности, $q(x)=0,\ x>M$, можно принять $p(x)=|q(M)|,\ x<M,\ p(x)=0,\ x\geqslant M$. Условию (6.5) будут также удовлетворять потенциалы с оценкой $q(x+\tau)\leqslant c|q(x)|=|p(x)|$. На возможность подобного усиления теоремы 6.1 внимание авторов обратил В.В. Катрахов.

В частности, приведённым условиям удовлетворяют следующие потенциалы, встречающиеся в приложениях: сильно сингулярный потенциал со степенной особенностью вида $q(x)=x^{-2-\varepsilon}$, различные потенциалы Баргмана

$$q_1(x)=-\frac{e^{-ax}}{(1+\beta e^{-ax})^2},\quad q_2(x)=\frac{c_2}{(1+c_3x)^2},\quad q_3(x)=\frac{c_4}{ch^2(c_5x)}$$

и Юкавы

$$q_4(x)=-\frac{e^{-ax}}{x},\quad q_5(x)=\int\limits_x^\infty e^{-at}\,dc(t).$$

(см., например, [286]).

Замечание. Фактически при доказательстве приведённой теоремы не нужен явный вид функции Римана. Используются только существование функции Римана, её положительность и некоторое специальное свойство монотонности (6.11). Эти факты являются довольно общими, поэтому полученные результаты можно распространить на сравнительно широкий класс дифференциальных уравнений.

Оценку из теоремы 6.1 для потенциалов общего вида можно преобразовать в более грубую, но зато и более обозримую.

Теорема 6.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 6.1. *Тогда для ядра оператора преобразования* $P(x,t)$ *справедлива оценка*

$$|P(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha} P_{\alpha-1}\left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)\int\limits_x^{\infty}|p(y)|\,dy\times$$
$$\times\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t-x}{2}\right)P_{\alpha-1}\left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)\int\limits_x^{\infty}|p(y)|\,dy\right].$$

Отметим, что при $x\to 0$ ядро интегрального представления может иметь экспоненциальную особенность.

§ 6.3. Оценки для случая степенного сингулярного в нуле потенциала

Для класса потенциалов со степенной сингулярностью вида

$$q(x) = x^{-(2\beta+1)},\ \beta>0 \tag{6.13}$$

полученные оценки можно упростить, не снижая их точности. Ограничение на β вызвано условием суммируемости на бесконечности.

Теорема 6.3. *Рассмотрим потенциал вида* (6.13). *Тогда теорема* 6.1 *выполняется с оценкой*

$$|P(x,t)| \leqslant \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha}\frac{\Gamma(\beta)4^{\beta-1}}{(t^2-x^2)^{\beta}}\cdot P^{-\beta}_{\alpha-1}\left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)\times$$
$$\times\exp\left[\left(\frac{t-x}{x}\right)\frac{\Gamma(\beta)4^{\beta-1}}{(t^2-x^2)^{\beta}}P^{-\beta}_{\alpha-1}\left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)\right],$$

где $P^{\mu}_{\nu}(\cdot)$ *— функция Лежандра, величина* β *определяется из* (6.13).

Предваряя доказательство, отметим, что данная оценка получается после довольно длинных вычислений с использованием знаменитой теоремы Слейтер–Маричева (см. [148]), которая помогает вычислить в терминах гипергеометрических функций необходимые интегралы после их сведения к свёртке Меллина.

Доказательство. Для этого класса потенциалов мы упростим оценку (6.12), составляющую содержание теоремы 6.1, не снижая её точности. Для этого будет вычислена в явном виде величина I_q, входящая в оценку (6.12). Доказательство теоремы 6.3 разобьём на две леммы.

Лемма 6.4. *Для потенциала вида* (6.13) *справедливо соотношение*

$$I_q(\xi,\eta) = \frac{1}{4\xi^{2\beta}}\int\limits_0^1 P_{\nu}(2\alpha z+1)(1-z)^{\beta-1}\,dz, \tag{6.14}$$

где P_{ν} *— функция Лежандра,* $\alpha=\eta^2/(\xi^2-\eta^2)$.

Доказательство. Рассмотрим величину

$$I_q(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{\infty}P_\nu\left(\frac{t^2(\xi^2+\eta^2)-2\xi^2\eta^2}{t^2(\xi^2-\eta^2)}\right)\frac{dt}{t^{2\beta+1}}.$$

Выполним замену переменных, обозначив через x аргумент функции Лежандра:

$$x=\frac{t^2(\xi^2+\eta^2)-2\xi^2\eta^2}{t^2(\xi^2-\eta^2)},\quad dx=\frac{4\xi^2\eta^2}{t^3(\xi^2-\eta^2)}\,dt.$$

При такой замене новыми пределами интегрирования станут числа

$$1,\ 1+\frac{2\eta^2}{\xi^2-\eta^2}=\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2-\eta^2}=B>1,$$

а переменная t будет вычисляться по формуле

$$t=\xi\eta\left(\frac{2}{\xi^2+\eta^2-x(\xi^2-\eta^2)}\right)^{1/2}.$$

Это приводит к следующему выражению для I_q:

$$I_q(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{B}P_\nu(x)\frac{t^3(\xi^2-\eta^2)}{4\xi^2\eta^2}\frac{dt}{t^{2\beta+1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{B}P_\nu(x)\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{4\xi^2\eta^2}\right)\left(\frac{\xi^2+\eta^2-x(\xi^2-\eta^2)}{2\xi^2\eta^2}\right)^{\beta-1}dx.$$

В последнем интеграле выполним ещё одну замену переменной по формулам

$$z=(x-1)\frac{\xi^2-\eta^2}{2\eta^2},\ dz=\frac{\xi^2-\eta^2}{2\eta^2}\,dx.$$

В результате получим

$$I_q(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{4\xi^2\eta^2}\right)\int\limits_{0}^{1}P_\nu(2\alpha z+1)\frac{2\eta^2}{\xi^2-\eta^2}\times$$

$$\times\left(\frac{\xi^2+\eta^2-(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{2\eta^2}{\xi^2-\eta^2}z+1\right)}{2\xi^2\eta^2}\right)^{\beta-1}dz=$$

$$=\frac{1}{4\xi^{2\beta}}\int\limits_{0}^{1}P_\nu(2\alpha z+1)(1-z)^{\beta-1}\,dz,$$

где введено обозначение $\alpha=\eta^2/(\xi^2-\eta^2)$. Мы получили формулу (6.14).

Лемма доказана.

Лемма 6.5. *Пусть выполняются условия* $a > 0$, $\beta > 0$. *Тогда справедлива формула*

$$\int_0^1 P_\nu(2\alpha x+1)(1-x)^{\beta-1}\,dx = \Gamma(\beta)\left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^{\beta/2} P_\nu^{-\beta}(2\alpha+1). \quad (6.15)$$

Доказательство. При доказательстве мы будем использовать обозначения и технику, основанную на теореме Слейтер–Маричева (см. [148]).

Произведём в интеграле из (6.15) замену переменных $t = 1/x$. Получим

$$\int_0^1 P_\nu(2\alpha x+1)(1-x)^{\beta-1}\,dx = \int_1^\infty P_\nu\left(2\frac{\alpha}{t}+1\right)(t-1)^{\beta-1}t^{-\beta}\frac{dt}{t} =$$
$$= \int_0^\infty P_\nu\left(2\frac{\alpha}{t}+1\right)(t-1)_+{}^{\beta-1}t^{-\beta}\frac{dt}{t} = I(\alpha),$$

где использовано обозначение для усеченной степенной функции $x_+{}^\lambda$. Применим к функции $I(\alpha)$ преобразование Меллина по переменной α ($\alpha > 0$). Используя теорему о свёртке (см. [148]), получим

$$M[I(\alpha)](s) = M[P_\nu(2x+1)](s)\cdot M[x^{-\beta}(x-1)_+{}^{\beta-1}](s).$$

Используя последовательно соотношения 6(1), (4), 2(4) из [148], приходим к выражению

$$M[I(\alpha)](s) = -\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(s)\Gamma(-\nu-s)\Gamma(1+\nu-s)\Gamma(\beta)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-s)\Gamma(1+\beta-s)} =$$
$$= -\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\,\Gamma(\beta)\,\Gamma\begin{bmatrix} s, & -\nu-s, & 1+\nu-s \\ & 1+\beta-s & \end{bmatrix},$$

где использовано обозначение Слейтер для гамма-функций. В обозначениях теоремы Слейтер–Маричева мы имеем:

$$(a) = (0),\ (b) = (-\nu, 1+\nu),\ (c) = \varnothing,\ (d) = (1+\beta),$$

$$A = 1,\ B = 2,\ C = 0,\ D = 1.$$

Применяя теорему Слейтер–Маричева, получаем формулы для $I(\alpha)$ при $0 < \alpha < 1$:

$$I(\alpha) = -\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(1+\nu)\Gamma(-\nu)}{\Gamma(1+\beta)}{}_2F_1(-\nu, 1+\nu; 1+\beta; -\alpha) =$$
$$= \Gamma(\beta)\alpha^{-\beta/2}(1+\alpha)^{\beta/2}P_\nu^{-\beta}(1+2\alpha), \quad (6.16)$$

где использованы [11, с. 126, формула (3)] и тождество для гамма-функций (см. [11])

$$\Gamma(-\nu) = \frac{\pi}{\nu\,\Gamma(\nu)\sin\pi\nu}.$$

При $\alpha \geqslant 1$ получаем по виду другое выражение:

$$I(\alpha) = -\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\Gamma(\beta)\times$$
$$\times\left\{\alpha^{\nu}\,\Gamma\begin{bmatrix}1+\nu+\nu, & -\nu\\ 1+\beta+\nu & \end{bmatrix}\,{}_2F_1\left(-\nu, 1-1-\beta-\nu; 1-1-\nu-\nu; -\frac{1}{\alpha}\right)+\right.$$
$$+\ \alpha^{-1-\nu}\Gamma\begin{bmatrix}-\nu-1-\nu, & 1+\nu\\ 1+\beta-1-\nu & \end{bmatrix}\times$$
$$\left.\times\,{}_2F_1\left(1+\nu, 1-1-\beta+1+\nu; 1+\nu; -\frac{1}{\alpha}\right)\right\}=$$
$$= -\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\Gamma(\beta)\cdot\left[\alpha^{\nu}\frac{\Gamma(2\nu+1)\Gamma(-\nu)}{\Gamma(1+\beta+\nu)}\,{}_2F_1\left(-\nu, -\beta-\nu; -2\nu; -\frac{1}{\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\alpha^{-1-\nu}\frac{\Gamma(-1-2\nu)\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(\beta-\nu)}\,{}_2F_1\left(1+\nu, 1+\nu-\beta; 1+\nu; -\frac{1}{\alpha}\right)\right].$$

Но из [11, с. 131, формула (19)] следует, что выражения, полученные для $I(\alpha)$ при $0<\alpha<1$ и при $\alpha \geqslant 1$, совпадают.

Из (6.16) следует, что нами получена искомая формула (6.15), однако её вывод не является полностью строгим, так как мы не проверяли законность применения преобразования Меллина и условия справедливости теоремы Слейтер–Маричева (в нашем случае довольно сложные). Однако теперь мы можем применить преобразование Меллина к обеим частям полученного формального равенства (6.15). В результате доказываем, что при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ соотношение (6.15) является тождеством.

Лемма доказана.

Как следствие, теперь получаем нужную оценку для завершения доказательства теоремы 6.3.

Простейшая подобная оценка была получена в [81] для потенциала $q(x) = cx^{-2}$ при $\beta = \frac{1}{2}$. Как следует из [11], в этом случае функция Лежандра $P_{\nu}^{-1/2}(z)$ выражается через элементарные функции. Поэтому и соответствующая оценка может быть выражена через элементарные функции.

Другим потенциалом, для которого полученная оценка может быть ещё упрощена и выражена через элементарные функции, является потенциал вида $q(x) = x^{-(2\beta+1)}$, когда параметры связаны соотношением $\beta = \alpha - 1$.

Следствие. *Пусть выполняется соотношение между параметрами* $\beta = \alpha - 1$. *Тогда оценка из теоремы* 6.3 *принимает вид*

$$|P(x,t)| \leqslant \left(\frac{t}{x}\right)^{\beta+1} \frac{2^{\beta-2}}{\beta} \left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)^{\beta} \cdot \exp\left[\left(\frac{t-x}{2}\right) \frac{2^{\beta-2}}{\beta} \left(\frac{t^2+x^2}{2tr}\right)^{\beta}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\beta} \cdot \frac{1}{x^{2\beta+1}} (t^2+x^2)^{\beta} \exp\left[\frac{2^{\beta-2}}{\beta} \left(\frac{t-x}{2}\right) \left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)^{\beta}\right]. \quad (6.17)$$

Доказательство. В этом случае преобразуем оценку из теоремы 6.3 так:

$$\frac{4^{\beta-1}\Gamma(\beta)}{(t^2-x^2)^{\beta}} P_{\beta}^{-\beta}\left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right) = \frac{4^{\beta-1}\Gamma(\beta)}{(t^2-x^2)^{\beta}} \cdot \frac{2^{-\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \left[\left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)^2 - 1\right]^{\beta/2} =$$

$$= \frac{2^{\beta-2}}{\beta} \cdot \frac{1}{(t^2-x^2)^{\beta}} \cdot \frac{(t^2-x^2)^{\beta}(t^2+x^2)^{\beta}}{(2tx)^{\beta}} = \frac{2^{\beta-2}}{\beta} \left(\frac{t^2+x^2}{2tx}\right)^{\beta},$$

где при преобразованиях использована формула (см. [11])

$$P_{\nu}^{-\nu}(z) = \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)} (z^2-1)^{\nu/2}, \ z > 1.$$

Поэтому неравенство для ядра при $\beta = \alpha - 1$ принимает вид (6.17).

Следствие доказано.

Отметим, что при $\alpha = 0$ в формулах (6.1)–(6.2) теорема 6.1 сводится к известным оценкам для ядра интегрального представления решений Йоста для уравнения Штурма–Лиувилля.

Изложенная техника полностью переносится и на задачу о построении неклассических операторов обобщённого сдвига. Данная задача по существу эквивалентна выражению решений уравнения

$$B_{\alpha,x} u(x,y) - q(x) u(x,y) = B_{\beta,y} u(x,y) \quad (6.18)$$

через решения невозмущённого уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу (в несингулярном случае — волнового) при наличии дополнительных условий, обеспечивающих корректность. Такие представления получаются уже из факта существования операторов преобразования и изучались для несингулярного случая ($\alpha = \beta = 0$) в [119–121] как следствия теории обобщённого сдвига. Интересная оригинальная методика для получения подобных представлений также в несингулярном случае изложена в работах А.В. Боровских [23, 24]. Из результатов этой главы следуют интегральные представления некоторого подкласса решений уравнения (6.18) в общем сингулярном случае для произвольных потенциалов с особенностями в начале координат. При этом оценки для решений не содержат никаких неопределённых постоянных, а для ядер интегральных представлений в явном виде выписываются интегральные уравнения, которым они удовлетворяют.

Список литературы

1. *Абжандадзе З. Л.* Преобразование Фурье–Френеля и некоторые его приложения / З. Л. Абжандадзе, В. Ф. Осипов. Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2000. 224 с.
2. *Абловиц А.* Солитоны и метод обратной задачи / А. Абловиц, Х. Сигур. М.: Мир, 1979. 479 с.
3. *Агранович З. С.* Обратная задача теории рассеяния / З. С. Агранович, В. А. Марченко. Харьков: изд. ХГУ, 1960. 268 с.
4. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. М.: Наука, 1978. 352 с.
5. *Аршава Е. А.* Обращение интегральных операторов методом операторных тождеств / Е. А. Аршава // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. 2009. № 13 (68), вып. 17/2. С. 18–29.
6. *Ахиезер Н. И.* К теории спаренных интегральных уравнений / Н. И. Ахиезер // Уч. зап. Харьковского гос. ун-та. 1957. Т. 80. С. 5–21.
7. *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях / Н. И. Ахиезер. Харьков: Вища школа, изд-во при ХГУ, 1984. 122 с.
8. *Баврин И. И.* Операторы преобразования для краевых задач, интегральных представлений и восстановления зависимостей / И. И. Баврин, В. Л. Матросов, О. Э. Яремко. М.: Прометей, 2015. 358 с.
9. *Барабаш О. П.* Решение общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, содержащее оператор Бесселя по всем переменным / О. П. Барабаш, Э. Л. Шишкина // Вестник Тамбовского ун-та. Серия: Естественные и технические науки. 2016. № 6. С. 2146–2151.
10. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. Воронеж: ВГУ, 1987. 164 с.
11. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Т. 1. М.: Наука. Физматлит, 1973. 296 с.
12. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Т. 2. М.: Наука. Физматлит, 1966. 296 с.
13. *Бейтмен Г.* Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Т. 3. М.: Наука. Физматлит, 1967. 296 с.
14. *Бергман С.* Интегральные операторы в теории уравнений с частными производными / С. Бергман. М.: Мир, 1964. 309 с.
15. *Березанский Ю. М.* Об операторе, порождённом ультрагиперболическим дифференциальнымвыражением / Ю. М. Березанский // Укр. матем. ж. 1959. Т. 11, № 3. С. 315–321.
16. *Беркович Л. М.* Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения / Л. М. Беркович. М.: РХД, 2002. 464 с.

17. *Берс Л.* Уравнения с частными производными / Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер // М.: Мир. 1966. 352 с.

18. *Бицадзе А.В.* К теории уравнений Максвелла–Эйнштейна / А.В. Бицадзе, В.И. Пашковский // ДАН СССР. 1974. Т. 216, № 2. С. 9–10.

19. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа / А.В. Бицадзе. М.: АН СССР, 1959. 164 с.

20. *Благовещенский А.С.* О некоторых корректных задачах для ультрагиперболического и волнового уравнений с данными на характеристическом конусе / А.С. Благовещенский // ДАН СССР. 1961. Т. 140, № 5. С. 990–993.

21. *Благовещенский А.С.* О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения / А.С. Благовещенский // Матем. сб. 1964. Т. 63 (105), № 1. С. 137–168.

22. *Блох А.Ш.* Об определении дифференциального оператора по его спектральной матрице-функции / А.Ш. Блох // ДАН СССР. 1953. Т. 92, № 2. С. 209–212.

23. *Боровских А.В.* Формула распространяющихся волн для одномерной неоднородной среды / А.В. Боровских // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 6. С. 758–767.

24. *Боровских А.В.* Метод распространяющихся волн / А.В. Боровских // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2004. Вып. 24. С. 3–43.

25. *Боярский Б.В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами / Б.В. Боярский // Матем. сб. 1957. Т. 43 (85), № 4. С. 451–503.

26. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного / Н. Бурбаки. М.: Наука, 1965. 424 с.

27. *Буренков В.И.* Функциональные пространства / В.И. Буренков. М.: РУДН, 1989. 59 с.

28. *Буренков В.И.* Методические рекомендации к изучению курса «Функциональные пространства» / В.И. Буренков, М.Л. Гольдман. М.: РУДН, 1989. 32 с.

29. *Валицкий Ю.Н.* Об операторе преобразования для интегро-дифференциальных операторов типа Вольтерра / Ю.Н. Валицкий // Математическая физика. Киев: Наук. думка. 1965. С. 23–36.

30. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. М.: ИЛ. Т. 1. 1949. 728 с.

31. *Векуа И.Н.* О решениях уравнения $\Delta u + \lambda^2 u$ / И.Н. Векуа // Сообщения Акад. Наук Груз. ССР. 1942. Т. III, № 4. С. 307–314.

32. *Векуа И.Н.* Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения / И.Н. Векуа // Сообщения Акад. Наук Груз. ССР. 1945. Т. VI, № 3. С. 177–183.

33. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений / И.Н. Векуа. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.

34. *Векуа И.Н.* Обобщённые аналитические функции / И.Н. Векуа. М.: Наука, 1988. 512 с.

35. *Вірченко Н.О.* Основи дробового інтегро-диференціювання / Н.О. Вірченко, В.Я. Рибак. Київ: Задруга, 2007. 362 с.

36. *Вірченко Н.О.* Класичні й узагальнені багатопараметричні функції / Н.О. Вірченко, В.О. Гайдей. Київ: Задруга, 2008. 227 с.

37. *Волк В.Я.* О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при $x = 0$ / В.Я. Волк // Успехи матем. наук. 1953. Т. 111, вып. 4(56). С. 141–151.

38. *Волкодавов В.Ф.* Таблицы некоторых функций Римана, интегралов и рядов / В.Ф. Волкодавов, М.Е. Лернер, Н.Я. Николаев, В.А. Носов. Куйбышев: Пед. ин-т, 1982. 56 с.

39. *Волкодавов В.Ф.* Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с некоторыми специальными функциями в ядрах и их приложения / В.Ф. Волкодавов, Н.Я. Николаев. Самара: изд-во «Самарский университет», 1992. 100 с.

40. *Волкодавов В.Ф.* Таблицы функций Римана и Римана–Адамара для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерных евклидовых пространствах / В.Ф. Волкодавов, В.Н. Захаров. Самара, 1994. 31 с.

41. *Волкодавов В.Ф.* Краевые задачи для уравнения Эйлера–Пауссона–Дарбу / В.Ф. Волкодавов, Н.Я. Николаев. Куйбышев: Пед. ин-т, 1984. 80 с.

42. *Волчков Вит.В.* О функциях с заданными шаровыми средними на симметрическсских пространствах // Вит.В. Волчков // Укр. матем. вісник. 2010. Т. 7, № 4. С. 453–456. (Англ. перев.: *Volchkov Vit.V.* On functions with given spherical means on symmetric spaces // Ukrain. Mat. Visnyk. 2010. V. 7, No. 4. P. 453–466).

43. *Волчкова Н.П.* Об обращении локального преобразования Помпейю / Н.П. Волчкова // Укр. матем. ж. 2003. Т. 55, № 7. С. 875–880. (Англ. перев.: *Volchkova N.P.* On inversion of the local Pompeiu transform // Ukrain. Math. Zh. 2003. V. 55, No. 7. P. 875–880).

44. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. М.: Физматлит. 2010. 560 с.

45. *Глушак А.В.* Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши / А.В. Глушак, В.И. Кононенко, С.Д. Шмулевич // Изв. вузов. Матем. 1986. № 6. С. 55–56.

46. *Глушак А.В.* О возмущении абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А.В. Глушак // Матем. заметки. 1996. Т. 60, № 3. С. 363–369.

47. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя / А.В. Глушак // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 5. С. 587–589.

48. *Глушак А.В.* О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве / А.В. Глушак // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 4. С. 433–437.

49. *Глушак А.В.* Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А.В. Глушак // Матем. заметки. 1999. Т. 66, № 3. С. 364–371.

50. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта / А.В. Глушак // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 128–130.

51. *Глушак А.В.* Операторная функция Лежандра / А.В. Глушак // Изв. РАН. Матем. 2001. Т. 65, № 6. С. 3–14.

52. *Глушак А.В.* Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными / А.В. Глушак // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 1. С. 28–41.

53. *Глушак А.В.* О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя / А.В. Глушак // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 5. С. 583–589.

54. *Глушак А.В.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А.В. Глушак, О.А. Покручин // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 1. С. 41–59.

55. *Глушак А.В.* Начальная задача для слабо нагруженного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А.В. Глушак // Матем. Межд. науч. конф.: «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных». М.: МГУ. 2016. С. 101.

56. *Глушак А.В.* Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А.В. Глушак // Изв. вузов. Матем. 2016. № 6. С. 1–9.

57. *Глушак А.В.* Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя–Струве / А.В. Глушак // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 7. С. 891–905.

58. *Гордеев А.М.* Некоторые краевые задачи для обобщённого уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / А.М. Гордеев // Волжский матем. сб. 1968. № 6. С. 56–61.

59. *Гринберг Г.А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений / Г.А. Гринберг. М.: АН СССР, 1948. 727 с.

60. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости / М.И. Гуревич. М.: Наука, 1979. 536 с.

61. *Гусейнов И.М.* Об одном операторе преобразования / И.М. Гусейнов // М.: Матем. заметки. 1997. Т. 62, № 2. С. 206–215.

62. *Гусейнов И.М.* Операторы преобразования и асимптотические формулы для собственных значений полиноминального пучка операторов Штурма–Лиувилля / И.М. Гусейнов, А.А. Набиев, Р.Т. Пашаев // Сиб. матем. ж. 2000. Т. 41, № 3. С. 554–566.

63. *Джаяни Г.В.* Уравнение Эйлера–Пауссона–Дарбу / Г.В. Джаяни. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1984. 78 с.

64. *Джаяни Г.В.* Решение некоторых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их приложения к призматическим оболочкам / Г.В. Джаяни. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1982. 178 с.

65. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. М.: Наука, 1966. 672 с.

66. *Динь Х.А.* Интегральные уравнения с функцией Лежандра в ядрах в особых случаях / Х.А. Динь // ДАН БССР. 1989. Т. 33, № 7. С. 591–594.

67. *Жегалов В.И.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов. Казань: Казанское матем. общество, 2001. 226 с.

68. *Жегалов В.И.* Уравнения с доминирующей частной производной / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов, Е.А. Уткина. Казань: Казанский ун-т, 2014. 385 с.

69. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя / Я.И. Житомирский // Матем. сб. 1955. Т. 36 (78), № 2. С. 299–310.

70. *Зайцев В.Ф*, *Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 416 с.

71. *Захаров В.Е.* Теория солитонов: метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. М.: Наука. 1980. 319 с.

72. *Йон Ф.* Плоские волны и сферичесие средние в применении к диференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон. М.: ИЛ, 1958. 158 с.

73. *Карп Д.Б.* Пространства с гипергеометрическими воспроизводящими ядрами и дробные преобразования типа Фурье / Д.Б. Карп. Диссертация канд. физ.-мат. наук. Владивосток, 2000.

74. *Катрахов В.В.* Изометрические операторы преобразования и спектральная функция для одного класса одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / В.В. Катрахов // ДАН СССР. 1980. Т. 251, № 5. С. 1048–1051.

75. *Катрахов В.В.* Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона / В.В. Катрахов // ДАН СССР. 1981. Т. 259, № 5. С. 1041–1045.

76. *Катрахов В.В.* Об одной сингулярной краевой задаче для уравнения Пуассона / В.В. Катрахов // Матем. сб. 1991. Т. 182, № 6. С. 849—876.

77. *Катрахов В.В.* Сингулярные краевые задачи для некоторых эллиптических уравнений в областях с угловыми точками / В.В. Катрахов // ДАН СССР. 1991. Т. 316, № 5. С. 1047–1050.

78. *Катрахов В.В.* Формула Тэйлора с оператором Бесселя для функций одной и двух переменных / В.В. Катрахов, А.А. Катрахова // Воронеж: Деп. ВИНИТИ. 1982. 23 с.

79. *Катрахов В.В.* Метод факторизации в теории операторов преобразования / В.В. Катрахов, С.М. Ситник // Мемориальный сборник памяти Бориса Алексеевича Бубнова: неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. (Ответственный редактор В.Н. Врагов). Новосибирск. 1990. С. 104–122.

80. *Катрахов В.В.* Краевая задача для стационарного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом / В.В. Катрахов, С.М. Ситник // ДАН СССР. 1984. Т. 278, № 4. С. 797–799.

81. *Катрахов В.В.* Композиционный метод построения B-эллиптических, B-параболических и B-гиперболических операторов преобразования / В.В. Катрахов, С.М. Ситник // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 3. С. 307–311.

82. *Катрахов В.В.* Оценки решений Йоста для одномерного уравнения Шрёдингера с сингулярным потенциалом / В.В. Катрахов, С.М. Ситник // Докл. РАН. 1995. Т. 340, № 1. С. 18–20.

83. *Качалов А. П.* Метод операторов преобразования в обратной задаче рассеяния, одномерный Штарк-эффект / А. П. Качалов, Я. В. Курылев // Ленинград: Наука. Записки научных семинаров ЛОМИ. Математические вопросы теории распространения волн, 19 / Под ред. В. М. Бабича. 1989. Т. 179. С. 73–87.

84. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 181–183.

85. *Килбас А. А.* О композиции операторов обобщённого дробного интегрирования с дифференциальным оператором осесимметрической теории потенциала / А. А. Килбас, М. Сайго, В. А. Жук // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1640–1642.

86. *Килбас А. А.* Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с с функцией Лежандра по пирамидальной области / А. А. Килбас, О. В. Скоромник // Докл. РАН. 2009. Т. 429. № 4. С. 442–446.

87. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. М. : Наука. Физматлит, 1997. 204 с.

88. *Киприянов И. А.* Преобразования Фурье–Бесселя и теоремы вложения для весовых классов / И. А. Киприянов // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1967. Т. 89. С. 130–213.

89. *Киприянов И. А.* Об одном классе многомерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / И. А. Киприянов, В. В. Катрахов // Матем. сб. 1977. Т. 104, № 1. С. 49–68.

90. *Киприянов И. А.* Об одной сингулярной эллиптической краевой задаче в областях на сфере / И. А. Киприянов, В. В. Катрахов. Препринт ИПМ ДВО РАН. 1989. 10 с.

91. *Киприянов И. А.* Сингулярные краевые задачи для некоторых эллиптических уравнений высших порядков / И. А. Киприянов, В. В. Катрахов. Препринт ИПМ ДВО РАН. 1989. 26 с.

92. *Киприянов И. А.* Об одной краевой задаче для эллиптических уравнений второго порядка в областях на сфере / И. А. Киприянов, В. В. Катрахов // ДАН СССР. 1990. Т. 313, № 3. С. 545–548.

93. *Киприянов И. А.* О фундаментальном решении волнового уравнения с многими особенностями и о принципе Гюйгенса / И. А. Киприянов, Ю. В. Засорин // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 3. С. 452–462.

94. *Киприянов И. А.* Получение фундаментальных решений для однородных уравнений с особенностями по нескольким переменным / И. А. Киприянов, Л. А. Иванов // АН СССР Сиб. отд. инст. матем. Теоремы вложения и их приложения к задачам математической физики. Тр. семинара С. Л. Соболева № 1. 1983. С. 55–77.

95. *Киприянов И. А.* Фундаментальные решения для однородных B-гиперболических уравнений / И. А. Киприянов, Л. А. Иванов // Сиб. матем. ж. 1980. Т. 21, № 4. С. 95–102.

96. *Климентов С. Б.* Граничные свойства обобщённых аналитических функций / С. Б. Климентов. Владикавказ, 2014. 199 с.

97. *Ключанцев М. И.* О построении r-чётных решений сингулярных дифференциальных уравнений / М. И. Ключанцев // ДАН СССР. 1975. Т. 224, № 5. С. 1004–1007.

98. *Ключанцев М. И.* Интегралы дробного порядка и сингулярные краевые задачи / М. И. Ключанцев // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 6. С. 983–990.

99. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. 570 с.

100. *Костомаров Д. П.* Задачи Коши для ультрагиперболических уравнений / Д. П. Костомаров // М.: Наука, 2003. 81 с.

101. *Кочубей А. Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка / А. Н. Кочубей // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1359–1369.

102. *Кочубей А. Н.* Диффузия дробного порядка / А. Н. Кочубей // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 660–770.

103. *Кошляков Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. М.: Высш. школа, 1962 (второе издание 1970 г.). 712 с.

104. *Кратцер А.* Трансцендентные функции / А. Кратцер, В. Франц. М.: ИЛ, 1963. 465 с.

105. *Крейн С. Г.* Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. М.: Наука, 1978. 400 с.

106. *Кудрявцев Л. Д.* Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения / Л. Д. Кудрявцев, С. М. Никольский // М.: ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1988. С. 5–157.

107. *Кузнецов Н. В.* Формулы следа и некоторые их приложения в теории чисел / Н. В. Кузнецов. Владивосток: Дальнаука, 2003. 153 с.

108. *Кузнецов Н. В.* Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Суммы сумм Клоостермана / Н. В. Кузнецов. Матем. сб. 1980. Т. 111(153), № 3. С. 334–383.

109. *Кузнецов Н. В.* О собственных функциях одного интегрального уравнения / Н. В. Кузнецов. Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1970. Т. 17, № 3. С. 66–149.

110. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их применения в газовой динамике / А. Г. Кузьмин. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990, 208 с.

111. *Курант Р.* Уравнения с частными производными / Р. Курант. М.: Мир, 1964. 830 с.

112. *Курант Р.* Методы математической физики. Т. 2 / Р. Курант, Д. Гильберт. М.–Л.: Гостехиздат, 1945. 620 с.

113. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы / А. Г. Кусраев. М.: Наука, 2003. 619 с.

114. *Лакс П.* Теория рассеяния / П. Лакс, Р. Филлипс. М.: Мир, 1971. 312 с.

115. *Лакс П.* Теория рассеяния для автоморфных функций / П. Лакс, Р. Филлипс. М.: Мир, 1979. 330 с.

116. *Ландис Е.М.* Задачи Е.М. Ландиса / Е.М. Ландис // Успехи матем. наук. 1982. Т. 37, № 6. С. 278–281.

117. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций / Б.Я. Левин. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.

118. *Левин Б.Я.* Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка / Б.Я. Левин // ДАН СССР. 1956. Т. 106, № 2. С. 187–190.

119. *Левитан Б.М.* Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка / Б.М. Левитан. М.: Гостехиздат, 1950. 159 с.

120. *Левитан Б.М.* Операторы обобщённого сдвига и некоторые их применения / Б.М. Левитан. М.: Физматгиз, 1962. 324 с.

121. *Левитан Б.М.* Теория операторов обобщённого сдвига / Б.М. Левитан. М.: Наука, 1973. 312 с.

122. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции / Б.М. Левитан. М.: Гостехиздат, 1953. 398 с.

123. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля / Б.М. Левитан. М.: Наука, 1984. 240 с.

124. *Левитан Б.М.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака / Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. М.: Наука, 1988. 432 с.

125. *Левитан Б.М.* Дифференциальные уравнения Штурма–Лиувилля на полуоси и теорема Планшереля / Б.М. Левитан, А.Я. Повзнер // ДАН СССР. 1946. Т. 52, № 6. С. 483–486.

126. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б.М. Левитан // Успехи матем. наук. 1951. Т. VI, вып. 2 (42). С. 102–143.

127. *Левитан Б.М.* Применение операторов обобщённого сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка / Б.М. Левитан // Успехи матем. наук. 1949. Т. 4, № 1 (29). С. 3–112.

128. *Левитан Б.М.* Некоторые вопросы теории почти периодических функций. I / Б.М. Левитан // Успехи матем. наук. 1947. Т. 2, № 5 (21). С. 133–192.

129. *Левитан Б.М.* Некоторые вопросы теории почти периодических функций. II / Б.М. Левитан // Успехи матем. наук. 1947. Т. 2, № 6 (22). С. 174–214.

130. *Лейзин М.А.* К теоремам вложения для одного класса сингулярных дифференциальных операторов в полупространстве / М.А. Лейзин // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 6. С. 1073–1083.

131. *Лейзин М.А.* О вложении некоторых весовых классов / М.А. Лейзин // Методы решений операторных уравнений. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1978. С. 96–103.

132. *Леонтьев А.Ф.* Оценка роста решения одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях параметра и ее применения к некоторым вопросам теории функций / А.Ф. Леонтьев // Сиб. матем. ж. 1960. Т. 1, № 3. С. 456–487.

133. *Лизоркин П.И.* Классы функций, построенные на основе усреднений по сферам. Случай пространств Соболева / П.И. Лизоркин // Тр. МИАН СССР им. В.А. Стеклова. 1990. № 192. С. 122–139.

134. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. М.: Мир, 1980. 610 с.

135. *Ляхов Л.Н.* B-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами / Л.Н. Ляхов. Липецк: Изд-во ЛГПУ, 2007. 232 с.

136. *Ляхов Л.Н.* Весовые сферические функции и потенциалы Рисса, порожденные обобщённым сдвигом / Л.Н. Ляхов. Воронеж: ВГТА, 1997. 145 с.

137. *Ляхов Л.Н.* Обращение общих B-потенциалов Рисса с однородной характеристикой в весовых пространствах / Л.Н. Ляхов, Э.Л. Шишкина // Докл. РАН. 2009. Т. 426, № 4. С. 443–447.

138. *Ляхов Л.Н.* Об одной задаче И.А. Киприянова для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Л.Н. Ляхов, И.П. Половинкин, Э.Л. Шишкина // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 4. С. 516–528.

139. *Ляхов Л.Н.* RK_γ-преобразование с $\gamma \in (0,2]$ весовых сферических средних функций. Соотношения Асгейрссона / Л.Н. Ляхов // Докл. РАН. 2011. Т. 439, № 5. С. 589–592.

140. *Ляхов Л.Н.* Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени / Л.Н. Ляхов, И.П. Половинкин, Э.Л. Шишкина // Докл. РАН. 2014. Т. 459, № 5. С. 533–538.

141. *Ляхов Л.Н.* Преобразование Радона–Киприянова обобщённого сферического среднего значения функции / Л.Н. Ляхов // Матем. заметки. 2016. Т. 100. № 1. С. 118–132.

142. *Ляхов Л.Н.* Уточненная теорема Асгейрссона для сингулярного ультрагиперболического уравнения / Л.Н. Ляхов, И.П. Половинкин, Э.Л. Шишкина // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 8–12 июля 2016 г., Суздаль, Россия. С. 127.

143. *Маламуд М.М.* Об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков / М.М. Маламуд //Матем. анализ и теория вероятн. Киев: Наук. думка. 1978. С. 108–111.

144. *Маламуд М.М.* Необходимые условия существования оператора преобразования для уравнений высших порядков / М.М. Маламуд // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 3. С. 74–75.

145. *Маламуд М.М.* К вопросу об операторах преобразования / М.М. Маламуд. Киев: Препринт ИМ АН УССР, 1984. 48 с.

146. *Маламуд М.М.* Операторы преобразования для уравнений высших порядков / М.М. Маламуд // Матем. физика и нелин. механика. 1986, № 6. С. 108–111.

147. *Маламуд М.М.* К вопросу об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений / М.М. Маламуд // Тр. Моск. матем. об-ва. 1990. Т. 53. С. 69–97.

148. *Маричев О.И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций / О.И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1978. 312 с.

149. *Маричев О. И.*, *Килбас А. А.*, *Репин О. А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами / О. И. Маричев, А. А. Килбас, О. А. Репин. Самара: Изд-во Самарского гос. эконом. ун-та., 2008. 276 с.

150. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля / В. А. Марченко. Киев: Наук. думка, 1972. 220 с.

151. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. Киев: Наук. думка, 1977. 331 с.

152. *Марченко В. А.* Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка / В. А. Марченко // ДАН СССР. 1950. Т. 72, № 3. С. 457–460.

153. *Марченко В. А.* Обобщённый сдвиг, операторы преобразования и обратные задачи // Математические события XX века / Ред. Ю. С. Осипов, А. А. Болибрух, Я. Г. Синай. М.: Фазис, 2003. С. 209–226.

154. *Марченко В. А.* Операторы преобразования / В. А. Марченко // ДАН СССР. 1950. Т. 74, № 2. С. 185–188.

155. *Марченко В. А.* О формулах обращения, порождаемых линейным дифференциальным оператором второго порядка / В. А. Марченко // ДАН СССР. 1950. Т. 74, № 4. С. 657–660.

156. *Марченко В. А.* Некоторые вопросы теории одномерных дифференциальных операторов второго порядка, I / В. А. Марченко // Тр. Моск. матем. об-ва. 1952. Т. I. С. 327–420.

157. *Марченко В. А.* Некоторые вопросы теории одномерных дифференциальных операторов второго порядка, II / В. А. Марченко // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. II. С. 3–82.

158. *Марченко В. А.* Нелинейные уравнения и операторные алгебры / В. А. Марченко. Киев: Наук. думка, 1986. 152 с.

159. *Мацаев В. И.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков / В. И. Мацаев // ДАН СССР. 1960. Т. 130, № 3. С. 499–502.

160. *Мешков В. З.* Весовые дифференциальные неравенства и их применение для оценок скорости убывания на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1989. № 190. С. 139–158.

161. *Мешков В. З.* О возможной скорости убывания на бесконечности решений уравнений в частных производных второго порядка // Матем. сб. 1991. Т. 182, № 3. С. 364–383.

162. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1961. 588 с.

163. *Муравник А. Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши / А. Б. Муравник // СМФН. 2014. Т. 52. С. 3—141.

164. *Муравник А. Б.* Некоторые свойства весовых интегральных средних деп. в ВИНИТИ 25.12.85 № 8804-В85, 14 с.

165. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. М.: Наука, 1969. 528 с.

166. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии / Ф. Наттерер. М.: Мир, 1990. 280 с.

167. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. М.: Высш. школа, 1995. 301 с.

168. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение / А.М. Нахушев. Нальчик, 2000. 300 с.

169. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 273 с.

170. *Нижник Л.П.* Обратная нестационарная задача теории рассеяния / Л.Н. Нижник. Киев: Наук. думка, 1973. 183 с.

171. *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений / Л.Н. Нижник. Киев: Наук. думка, 1990. 230 с.

172. *Олевский М.Н.* Решение задачи Дирихле, относящейся к уравнению $\Delta u + \frac{p}{x_n}\frac{\partial u}{x_n} = \rho$ для полусферической области / М.Н. Олевский // ДАН СССР. 1949. 64, №6. С. 767–770.

173. *Омельченко А.В.* Методы интегральных преобразований в задачах математической физики / А.В. Омельченко. М.: МЦНМО, 2010. 182 с.

174. *Осипов В.Ф.* Почти периодические функции Бора–Френеля / В.Ф. Осипов. Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 1992. 312 с.

175. *Пасенчук А.Э.* Абстрактные сингулярные операторы / А.Э. Пасенчук. Новочеркасск, 1993. 214 с.

176. *Платонов С.С.* Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой / С.С. Платонов // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, №5. С. 149–196.

177. *Платонов С.С.* Обобщённые сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближения функций в метрике L_2–1 / Платонов С.С. // Тр. ПетрГУ. Сер. Математика. 2000. Вып. 7. С. 70–82.

178. *Платонов С.С.* Обобщённые сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближения функций в метрике L_2–2 / Платонов С.С. // Тр. ПетрГУ. Сер. Математика. 2001. Вып. 8. С. 20–36.

179. *Повзнер А.Я.* О дифференциальных уравнениях типа Штурма–Лиувилля на полуоси / А.Я. Повзнер // Матем. сб. 1948. Т. 23 (65), №1. С. 3–52.

180. *Половинкин И.П.* К теореме о среднем для волнового уравнения / И.П. Половинкин // Неклассические уравнения математической физики. Новосиб. гос. ун-т, 1993. С. 50–62.

181. *Половинкин И.П.* Обращение теоремы о среднем значении для волнового уравнения / И.П. Половинкин // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, №11. С. 1987–1990.

182. *Половинкин И.П.* К теоремам о среднем значении для линейных уравнений в частных производных / И.П. Половинкин // Тр. семинара имени И.Г. Петровского. Т. 29. М.: Изд-во МГУ, 2013. С. 396–404.

183. *Половинкин И.П.* Дополнения к свойствам средних значений решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / И.П. Половинкин // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. №11. С. 1669–1671.

184. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики / Г. Н. Положий. М.: Высш. школа, 1964. 560 с.

185. *Положий Г. Н.* Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. P-аналитические и (P, Q)-аналитические функции и некоторые их применения / Г. Н. Положий. Киев: Изд-во КГУ, 1965. 444 с.

186. *Положий Г. Н.* Теория и применение p-аналитических функций. 2-е изд., перераб. и доп. / Г. Н. Положий. Киев: Наук. думка, 1973. 423 с.

187. *Поляцкий В. Т.* О свойствах решений некоторого уравнения / В. Т. Поляцкий // Успехи матем. наук. 1965. Т. 17, № 4. С. 119–124.

188. *Прудников А. П.* Вычисление интегралов и преобразование Меллина / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев // ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Математический анализ. 1989. Т. 27. С. 3–146.

189. *Прудников А. П.* Интегралы и ряды. В 3 т. / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука. 1981. Т. 1. 1983. Т. 2. 1986. Т. 3. (2-е изд.: М: ФИЗМАТЛИТ, 2003).

190. *Псху А. В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / А. В. Псху. Нальчик: НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. 2005. 186 с.

191. *Пулькин С. П.* Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx} \pm u_{yy} + \dfrac{p}{x} u_x$ / С. П. Пулькин // Учеб. зап. Куйбышевского пед. ин-та. 1958. Вып. 21. С. 3–54.

192. *Пулькин С. П.* Избранные труды / С. П. Пулькин. Самара: Универс групп, 2007. 264 с.

193. *Пулькина Л. С.* Об одной неклассической задаче для вырождающегося гиперболического уравнения / Л. С. Пулькина // Изв. вузов. Матем. 1991. № 11. С. 48–51.

194. *Репин О. А.* Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов / О. А. Репин. Самара, 1992. 213 с.

195. *Риман Б.* О распространении плоских волн конечной амплитуды. Сочинения. М.–Л.: ОГИЗ, 1948. С. 376—395.

196. *Рисс Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. М.: Мир, 1979. 592 с.

197. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре в C^n / У. Рудин. М.: Мир, 1984. 456 с.

198. *Самко С. Г.*, *Килбас А. А.*, *Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

199. *Сахнович Л. А.* Спектральный анализ вольтерровских операторов и обратные задачи / Л. А. Сахнович // ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 4. С. 666–669.

200. *Сахнович Л. А.* Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами / Л. А. Сахнович // Матем. сб. 1958. Т. 46, № 1. С. 61–76.

201. *Сахнович Л. А.* Необходимые условия наличия операторов преобразования для уравнения четвертого порядка / Л. А. Сахнович // Успехи матем. наук. 1961. Т. 16, вып. 5. С. 199–205.

202. *Ситник С. М.* Операторы преобразования для дифференциального выражения Бесселя. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 23.01.1987, № 535-В87 Воронеж: Воронежский ун-т. 1986. 28 с.

203. *Ситник С. М.* Операторы преобразования для сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя // Сб. науч. тр.: Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (Отв. ред. В. Н. Врагов). Новосибирск, 1989. С. 179–185.

204. *Ситник С. М.* Операторы преобразования и их приложения // Исследования по современному анализу и математическому моделированию. (Отв. ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев). Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО–А, 2008. С. 226–293.

205. *Ситник С. М.* Об одной паре операторов преобразования // Сб. науч. тр.: Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (Отв. ред. В. Н. Врагов). Новосибирск, 1987. С. 168–173.

206. *Ситник С. М.* Об одном тождестве для итерированного весового сферического среднего и его приложениях / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 849–860.

207. *Ситник С. М.* О скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений / С. М. Ситник // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 3. С. 538–539.

208. *Ситник С. М.* Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи / С. М. Ситник // ДАН СССР. 1991. Т. 320, № 6. С. 1326–1330.

209. *Ситник С. М.* Неравенства для функций Бесселя / С. М. Ситник // Докл. РАН. 1995. Т. 340, № 1. С. 29–32.

210. *Ситник С. М.* Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений / С. М. Ситник // Вестник Самарского гос. ун-та. Естественнонаучная серия. № 8/1 (67). Самара: СамГУ, 2008. С. 237–248.

211. *Ситник С. М.* О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям / С. М. Ситник // Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2010. Т. 12, № 2. С. 69–75.

212. *Ситник С. М.* О представлении в интегральном виде решений одного дифференциального уравнения с особенностями в коэффициентах / С. М. Ситник // Владикавказский матем. ж. 2010. Т. 12, вып. 4. С. 73–78.

213. *Ситник С. М.* Монотонность отношений некоторых гипергеометрических функций / С. М. Ситник, Х. Мехрез // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 260—268.

214. *Ситник С. М.* Оператор преобразования специального вида для дифференциального оператора с сингулярным в нуле потенциалом / С. М. Ситник // Сб. науч. раб.: Неклассические уравнения математической физики. (Посвящен 65-летию со дня рождения профессора Владимира Николаевича Врагова). Отв. ред. А. И. Кожанов. Новосибирск: Изд-во Ин-та матем. им. С. Л. Соболева СО РАН. 2010. С. 264–278.

215. *Ситник С. М.* Уточнения и обобщения классических неравенств / С. М. Ситник // Итоги науки. Южный федеральный округ. Серия

«Матем. форум». Т. 3. Исследования по математическому анализу. Ред. Ю. Ф. Коробейник, А. Г. Кусраев. Владикавказ: Южный матем. ин-т ВНЦ РАН и РСО Алания. 2009. С. 221–266.

216. *Ситник С. М.* Обобщения неравенств Коши-Буняковского методом средних значений и их приложения / С. М. Ситник // Чернозёмный альманах научных исследований. Сер.: Фундаментальная математика. Спец. вып.: Избранные тр. участников Воронежского математического семинара по математическому анализу, теории функций и дифференциальным уравнениям. Воронеж. 2005. № 1 (1). С. 3–42.

217. *Ситник С. М.* Операторы преобразования Векуа–Эрдейи–Лаундеса / С. М. Ситник, Г. В. Ляховецкий. Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. Владивосток, 1994. 23 с.

218. *Ситник С. М.* Дробное преобразование Ханкеля и его приложения в математической физике / С. М. Ситник, Д. Б. Карп. Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. Владивосток, 1994. 24 с.

219. *Ситник С. М.* Неравенства для полных эллиптических интегралов Лежандра / С. М. Ситник. Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. Владивосток, 1994. 17 с.

220. *Ситник С. М.* Формулы композиций для интегральных преобразований с функциями Бесселя в ядрах / С. М. Ситник, Д. Б. Карп. Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. Владивосток, 1993. 21 с.

221. *Ситник С. М.* Оператор преобразования и представление Йоста для уравнения с сингулярным потенциалом / С. М. Ситник. Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. Владивосток, 1993. 21 с.

222. *Ситник С. М.* Формулы композиций для операторов Бушмана-Эрдейи / С. М. Ситник, Г. В. Ляховецкий. Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. Владивосток, 1991. 11 с.

223. *Ситник С. М.* Унитарность и ограниченность операторов Бушмана–Эрдейи нулевого порядка гладкости / С. М. Ситник. Препринт. Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН. Владивосток, 1990. 44 с.

224. *Ситник С. М.* О скорости убывания решений некоторых эллиптических и ультраэллиптических уравнений / С. М. Ситник. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 13.11.1986, N 7771-В86. Воронеж: Воронежский ун-т, 1986. 19 с.

225. *Ситник С. М.* Об унитарных операторах преобразования / С. М. Ситник. Рукопись депонирована в ВИНИТИ 13.11.1986, N 7771-В86. Воронеж: Воронежский ун-т, 1986. 9 с.

226. *Ситник С. М.* Метод операторов преобразования для стационарного уравнения Шрёдингера / С. М. Ситник. Автореферат кандидатской диссертации. Воронеж: Воронежский гос. ун-т. 1987. 16 с.

227. *Ситник С. М.* О скорости убывания решений стационарного уравнения Шрёдингера с потенциалом, зависящим от одной переменной / С. М. Ситник // Сб. науч. тр.: Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. (Отв. ред. В. Н. Врагов). Новосибирск, 1985. С. 139–147.

228. *Ситник С. М.* Новые краевые задачи с К-следом для решений с существенными особенностями в работах В. В. Катрахова / С. М. Ситник // Обратные и некорректные задачи матем. физики. Международная конференция, посвящённая 80-летию со дня рождения академика Михаила Михайловича Лаврентьева. Новосибирск, Россия, 5–12 августа 2012 г. Тезисы докл. Новосибирск: Сибирское научное изд-во. 2012. С. 439.

229. *Ситник С. М.* Работы В. В. Катрахова по теории операторов преобразования / С. М. Ситник // Материалы второго Российско-Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик: КБР, Институт прикладной матем. и автоматизации КБНЦ РАН, 2012. С. 241–243.

230. *Ситник С. М.* Различные классы операторов преобразования Бушмана–Эрдейи / С. М. Ситник // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая 110-й годовщине со дня рождения выдающегося математика И. Г. Петровского. 30 мая–4 июня 2011 г. Сб. тез. Москва: МГУ, 2011. С. 344–345.

231. *Ситник С. М.* Операторы дробного интегро-дифференцирования для дифференциального оператора Бесселя / С. М. Ситник // Тр. четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием: Математическое моделирование и краевые задачи. Ч. 3. Самара, 2007. С. 158–160.

232. *Ситник С. М.* Построение операторов преобразования Векуа–Эрдейи–Лаундеса / С. М. Ситник // Международная конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». Тез. докл. Новосибирск, 2007. С. 469–470.

233. *Ситник С. М.* Об обобщении формулы Хилле–Тамаркина для резольвенты на случай операторов дробного интегрирования Бесселя / С. М. Ситник // III Международная конференция: «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, 2006. С. 269–270.

234. *Ситник С. М.* Дробное интегродифференцирование для дифференциального оператора Бесселя / С. М. Ситник // Материалы международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик–Эльбрус, 22–26 мая 2004 г. Нальчик, 2004. С. 163–167.

235. *Ситник С. М.* О некоторых обобщениях дробного интегро-дифференцирования / С. М. Ситник // Материалы международного Российско-Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик–Эльбрус, 22–26 мая 2003 г. Нальчик, 2004. С. 86–88.

236. *Ситник С. М.* Метод получения последовательных уточнений неравенства Коши–Буняковского и его применения к оценкам специальных функций / С. М. Ситник // Тез. докл. Воронежская весенняя математическая школа Современные методы в теории краевых задач. «Понтрягинские чтения-VII». Воронеж: ВГУ, 1996. С. 164.

237. *Ситник С. М.* Формула Тэйлора для операторов типа Бесселя / С. М. Ситник, Д.С. Коновалова // Тез. докл. Воронежская весенняя математическая

школа Современные методы в теории краевых задач. «Понтрягинские чтения-VII». Воронеж: ВГУ, 1996. С. 102.

238. *Ситник С. М.* Дробное преобразование Ханкеля и его приложения / С. М. Ситник, Д.В. Карп // Тез. докл. Воронежская весенняя математическая школа, 17–23 апреля 1996 г. Современные методы в теории краевых задач. «Понтрягинские чтения-VII». Воронеж: ВГУ, 1996. С. 92.

239. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I / А. Л. Скубачевский // Соврем. матем. Фундам. направл. 2007. Т. 26. С. 3–132.

240. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II / А. Л. Скубачевский // Соврем. матем. Фундам. направл. 2009. Т. 3. С. 3–179.

241. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа / М. М. Смирнов. М.: Наука, 1970. 296 с.

242. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. Минск: Вышэйш. школа, 1977. 160 с.

243. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики (6-е изд.) / М. М. Смирнов. М.: Наука, 1973. 125 с.

244. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. М.: Наука, 1992. 432 с.

245. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций / А. П. Солдатов. М.: Высш. школа, 1991. 206 с.

246. *Сонин Н. Я.* Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах / Н. Я. Сонин. М.: Гостехиздат, 1954. 241 с.

247. *Сохин А. С.* Об одном классе операторов преобразования / А. С. Сохин // Тр. физ.-тех. ин-та низких температур АН УССР. 1969. Вып. 1. С. 117–125.

248. *Сохин А. С.* Обратные задачи рассеяния для уравнений с особенностью / А. С. Сохин // Тр. физ.-тех. ин-та низких температур АН УССР. 1971. Вып. 2. С. 182–233.

249. *Сохин А. С.* Обратные задачи рассеяния для уравнений с особенностями специального вида / А.С. Сохин // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1973. № 17. С. 36–64.

250. *Сохин А. С.* О преобразовании операторов для уравнений с особенностью специального вида / А. С. Сохин // Вестник Харьковского ун-та. 1974. № 113. С. 36–42.

251. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган // М.: Наука. Физматлит, 1979. 832 с.

252. *Сташевская В. В.* Метод операторов преобразования / В. В. Сташевская // ДАН СССР. 1953. Т. 113, № 3. С. 409–412.

253. *Сташевская В. В.* Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле / В. В. Сташевская // Уч. зап. Харьковского матем. об-ва. 1957. № 5. С. 49–86.

254. *Степанов В. Н.* Формулы обращения для полусферического преобразования в R^3 / В. Н. Степанов // Матем. структуры и моделирование. 2014. № 2 (30). С. 20–31.

255. *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе: Учеб. пособие / С. А. Терсенов. Новосибирск, 1973. 144 с.

256. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. 480 с.

257. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. М.: Мир, 1980. 664 с.

258. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных / Ф. Трикоми. М.: ИЛ, 1957. 444 с.

259. *Тыртышников Е.Е.* Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 480 с.

260. *Уиттекер Э.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. / Э. Уиттекер, Дж. Ватсон. М.: Физматгиз, 1963. 516 с.

261. *Успенский С.В.* О теоремах вложения для весовых классов / С.В. Успенский // Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1961. № 60. С. 282–303.

262. *Фаге М.К.*, *Нагнибида Н.И.* Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов / М. К. Фаге, Н. И. Нагнибида. Новосибирск: Наука, 1977. 280 с.

263. *Фаге М.К.* Операторно-аналитические функции одной независимой переменной / М. К. Фаге // ДАН СССР. 1957. Т. 112, № 5. С. 1008–1011.

264. *Фаге М.К.* Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной / М. К. Фаге // ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 5. С. 874–877.

265. *Фаге М.К.* Построение операторов преобразования и решение одной проблемы моментов для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка / М. К. Фаге // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12, вып. 1 (73). С. 240–245.

266. *Фаге М.К.* Операторно-аналитические функции одной независимой переменной / М. К. Фаге // Тр. Моск. матем. об-ва. 1958. Т. 7. С. 227–268.

267. *Фаге М.К.* Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной / М. К. Фаге // Тр. Моск. матем. об-ва. 1958. Т. 8. С. 3–48.

268. *Фаге М.К.* Операторно-аналітичні функції однієї незалежної змінної / М. К. Фаге. Львів: Вид-во Львів. держ. ун-ту, 1959. 174 с.

269. *Фаддеев Л.Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния / Л. Д. Фаддеев // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14, № 4. С. 57–119.

270. *Фаддеев Л.Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния. II / Л. Д. Фаддеев // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. ВИНИТИ. 1974. Т. 3. С. 93–180.

271. *Федоров В.Е.* Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной / В. Е. Федоров, Д. М. Гордиевских, М. В. Плеханова // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 10. С. 1367–1375.

272. *Федоров В.Е.* Нелокальная на полуоси задача для вырожденных эволюционных уравнений / Н. Д. Иванова, В. Е. Федоров // Матем. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 1 (85). С. 35–43.

273. *Фетисов В.Г.* Операторы и уравнения в локально ограниченных пространствах / В.Г. Фетисов // Операторы и уравнения в линейных топологических пространствах. Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2006. С. 7–142.

274. *Фридрихс К.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве / К. Фридрихс. М.: Мир, 1968. 232 С.

275. *Хайруллин Р.С.* К теории уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу / Р.С. Хайруллин // Изв. вузов. Математика. 1993. № 11. С. 69–76.

276. *Ханмамедов Аг.Х.* Операторы преобразования для возмущённого разностного уравнения Хилла и их одно приложение / Аг.Х. Ханмамедов // Сиб. матем. ж. 2003. Т. 44, № 4. С. 926–937.

277. *Харди Г.Г.* Неравенства / Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтлвуд, Г. Полиа. М.: ИЛ, 1948.

278. *Хачатрян И.Г.* Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков / И.Г. Хачатрян // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Математика. 1978. Т. 13, № 3. С. 215–236.

279. *Хачатрян И.Г.* Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющих асимптотику решений / И.Г. Хачатрян // М.: Изв. АН Арм.ССР. Сер. Математика. 1979. Т. 14, № 6. С. 424–445.

280. *Хелгасон С.* Преобразование Радона / С. Хелгасон. М.: Мир, 1983. 150 с.

281. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон. М.: Мир, 1987. 736 с.

282. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений / Л. Хермандер. М.: Мир. 1986. 482 с.

283. *Хорн Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. М.: Мир, 1989. 655 с.

284. *Хромов А.П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов / А.П. Хромов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. № 10. С. 3–163.

285. *Чернятин В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В.А. Чернятин. М.: МГУ, 1991. 112 с.

286. *Шадан К.* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния / К. Шадан, П. Сабатье. М.: Мир, 1980. 408 с.

287. *Шишкина Э.Л.* Обобщенная весовая функция r^γ / Э.Л. Шишкина // Вестник ВГУ. Серия. Физика. Математика. 2006. № 1. С. 215–221.

288. *Шишкина Э.Л.* О свойствах одного усредняющего ядра в весовом классе Лебега / Э.Л. Шишкина // Научные ведомости Белгородского гос. ун-та. Серия: Математика. Физика. 2016. Т. 42. № 6 (227). С. 12–19.

289. *Шишкина Э.Л.* Равенство для интерированных весовых сферических средних, порожденных обобщённым сдвигом. Материалы научной конференции «Герценовские чтения-2013«, 15–20 апреля 2013 г. / Э.Л. Шишкина // Санкт-Петербург: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2013. Т. LXVI. С. 143–145.

290. *Шостак Р.Я.* Алексей Васильевич Летников / Р.Я. Шостак // ИМИ. 1952. Вып. V.

291. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач / В.А. Юрко. М.: Наука, 2007. 384 с.

292. *Янушаускас А.И.* Аналитическая теория эллиптических уравнений / А.И. Янушаускас. Новосибирск: Наука, 1979. 190 с.

293. *Яремко О.Э.* Метод операторов преобразования в задачах математического моделирования / О.Э. Яремко. Пенза, 2012. 245 с.

294. *Ярославцева В.Я.* Об одном классе операторов преобразования и их приложении к дифференциальным уравнениям / В.Я. Ярославцева // ДАН СССР. 1976. Т. 227, №4. С. 816–819.

295. *Ярославцева В.Я.* Неоднородная граничная задача в полупространстве для одного класса сингулярных уравнений / В.Я. Ярославцева // Минск: Деп. ред. Дифференц. уравнения. 1989. 11 с.

296. *Agranovsky M.*, *Finch D.*, *Kuchment P.* Range conditions for a spherical mean transform // Inverse Problems and Imaging. 2009. V. 3, No. 3. P. 373–382.

297. *Agranovsky M.*, *Kuchment P.* Uniqueness of reconstruction and an inversion procedure for thermoacoustic and photoacoustic tomography with variable sound speed // Inverse Problems. 2007. V. 23. P. 2089—2102.

298. *Agranovsky M.*, *Kuchment P.*, *Kunyansky L.* On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic and photoacoustic tomography // L.V. Wang (ed.) Photoacoustic Imaging and Spectroscopy. CRC Press, 2009. P. 89–101 (ch. 8).

299. *Agranovsky M.*, *Kuchment P.*, *Quinto E.T.* Range descriptions for the spherical mean Radon transform // J. Funct. Anal. 2007. V. 248. P. 344–386.

300. *Ali I.*, *Kiryakova V.*, *Kalla S.L.* Solutions of fractional multi-order integral and differential equations using a Poisson-type transform / I. Ali, V. Kiryakova, S.L. Kalla // J. Math. Anal. a. Appl. 2002. V. 269, No. 1. P. 172–199.

301. *Aliev I.A.*, *Rubin B.* Spherical harmonics associated to the Laplace–Bessel operator and generalized spherical convolutions // Anal. Appl. 2003. V. 1. P. 81–109.

302. *Andrews G. E.*, *Askey R.*, *Roy R.* Special Functions / G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy. Cambridge University Press, 1999.

303. *Appell P.* Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite / P. Appell, J. Kampe de Feriet. Paris: Gauthier-Villars, 1926.

304. *Ásgeirsson L.* Über eine Mittelwertseigenschaft von Lösungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Math. Ann., 1937. V. 113, iss. 1. P. 321–346.

305. *Bailey W.N.* Generalized hypergeometric series / W.N. Bailey. Cambridge, 1964.

306. *Bers L.* On a class of differential equations in mechanics of continua / L. Bers, A. Gelbart // Quart. Appl. Math. 1943. V. 5, No. 1. P. 168–188.

307. *Bers L.* On a class of functions defined by partial differential equations / L. Bers, A. Gelbart // Trans. Amer. Math. Soc. 1944. V. 56. P. 67–93.

308. *Bers L.* A remark on an applications of pseudo-analytic functions / L. Bers // Amer. J. Math. 1956. V. 78, No. 3. P. 486–496.

309. *Bozhinov N*. Convolution Representations of Commutants and Multipliers / N. Bozhinov. Sofia: Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences, 1988.

310. *Buschman R.G*. An inversion integral for a general Legendre transformation / R. G. Buschman // SIAM Review. 1963. V. 5, No. 3. P. 232–233.

311. *Buschman R.G*. An inversion integral for a Legendre transformation / R. G. Buschman // Amer. Math. Mon. 1962. V. 69, No. 4. P. 288–289.

312. *Campos H*., *Kravchenko V. V*., *Torba S.M*. Transmutations, L-bases and complete families of solutions of the stationary Schrödinger equation in the plane // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 389, No. 2. P. 1222–1238.

313. *Carroll R. W*. Singular and Degenerate Cauchy problems / R. W. Carroll, R. E. Showalter. N.Y.: Academic Press, 1976. 333 p.

314. *Carroll R*. Transmutation and Operator Differential Equations / R. Carroll. North Holland, 1979. 245 p.

315. *Carroll R*. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions / R. Carroll. North Holland, 1982. 457 p.

316. *Carroll R*. Transmutation Theory and Applications / R. Carroll. North Holland, 1986. 351 p.

317. *Carroll R*. Topics in Soliton Theory / R. Carroll. North Holland, 1991. 428 p.

318. *Carroll R*. Toward a general theory of transmutation / R. Carroll, A. Boumenir. arXiv: funct-an/9501006.1995.19 p.

319. *Castillo-Pérez C.R*., *Kravchenko V.V*., *Torba S.M*. Spectral parameter power series for perturbed Bessel equations // Appl. Math. Comput. 2013. No. 220. P. 676–694.

320. *Castillo-Perez R*., *Kravchenko V.V*., *Torba S.M*. Analysis of graded-index optical fibers by the spectral parameter power series method // J. Opt. 2015. V. 17, No. 2.

321. *Chadan K*. An Introduction to Inverse Scattering and Inverse Spectral Problems / Chadan K., Cotton D., Paivarinta L., Rundell W. SIAM, 1997.

322. *Chebli H*. Opérateurs de translation généralises et semigroupes de convolution / H. Chebli // Springer Lect. Notes. 1974. No. 404. P. 35–59.

323. *Chebli H*. Sur un thèoréme de Paley–Winer associé à la décomposition spectrale d'un opérateur de Sturm–Liouville sur $(0,\infty)$ / H. Chebli // J. Funct. Anal. 1974. No. 17. P. 447–461.

324. *Chebli H*. Positivité des opérateurs de «translation généralises» associé à un opérateur de Sturm–Liouville et quelques applications a l'analyse harmonique / H. Chebli. These. Strasbourg, 1974.

325. *Chebli H*. Thèoréme de Paley–Winer associé à un opérateur différentiel singulier sur $(0,\infty)$ / H. Chebli // J. Math. Pures Appl. 1979. No. 58. P. 1–19.

326. *Copson E.T*. On the Riemann–Green Function / E. T. Copson // Arch. Ration. Mech. a. Anal. 1957/58. V. 1. P. 324–348.

327. *Copson E.T*. On a Singular Boundary Value Problem for an Equation of Hyperbolic Type / E. T. Copson // Arch. Ration. Mech. a. Anal. 1. 1957. No. 1. P. 349–356.

328. *Copson E. T.* On a Partial Differential Equation with Two Singular Lines / E. T. Copson, A. Erdelyi // Arch. Ration. Mech. a. Anal. 1958. V. 2, No. 1. P. 76–86.

329. *Copson E. T.* Partial Differential Equations / E. T. Copson. Cambridge University Press, 1975.

330. *Coscia D. R.* The volume of the n-sphere. Suffolk Country Community College Selden, New York. Presented at the NYSMATYC Convention 1973. 14 p.

331. *Craig W.*, *Weinstein S.* On determinism and well-posedness in multiple time dimensions // Proc. Roy. Soc. A. 2008. V. 465, No. 2110. P. 3023–3046.

332. *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. V. II. Paris. 2 ed., 1915 (1 ed., 1888). 579 p.

333. *Deans S. R.* The Radon Transform and Some of Its Applications / S.R. Deans. Dover, 1990. 304 p.

334. *Delsarte J.* Sur une extension de la formule de Taylor / J. Delsarte // J. Math. Pures et Appl. 1938. V. 17. P. 217–230.

335. *Delsarte J.* Une extension nouvelle de la théory de fonction presque périodiques de Bohr / J. Delsarte // Acta Math. 1939. V. 69. P. 259–317.

336. *Delsarte J.* Hypergroupes et operateurs de permutation et de transmutation / J. Delsarte // Colloques Internat. Nancy. 1956. P. 29–44.

337. *Delsarte J.* Lions, Jacques-Louis Transmutations d'operateurs differentiels dans le domaine complexe. C.R. Acad. Sci., Paris 244, 1957. P. 832–834.

338. *Delsarte J.* Sur certaines transformation fonctionnelles relative aux équations linéares aux dèrivées partielles du seconde ordre / J. Delsarte // Paris: C.R. Acad. Sci. 1938. V. 206. P. 1780–1782.

339. *Delsarte J.* Transmutations d'opérateurs différentiels dans le domaine complexe / J. Delsarte, J.L. Lions // Comm. Math. Helv. 1957. No. 32. P. 113–128.

340. *Delsarte J.* Moyennes généralisées / J. Delsarte, J. L. Lions // Comm. Math. Helv. 1959. No. 34. P. 59–69.

341. *Delsarte J.* Lectures on Topics in Mean Periodic Functions And The Two-Radius Theorem / J. Delsarte // Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1961.

342. *Dimovski I.* Convolutional Calculus. Kluwer Acad. Publ. / I.H. Dimovski. Dordrecht, 1990.

343. *Dimovski I. H.* Generalized Poisson transmutations and corresponding representations of hyper-Bessel functions / I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova // C. R. Acad. bulg. s Sci. 1986. V. 39, No. 10. P. 29–32.

344. *Dimovski I. H.* Transmutations, convolutions and fractional powers of Bessel-type operators via Meijer G-functions / I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova // Varna: Proc. Conf. Complex Anal. a. Appl. 1983, Sofia. 1985. P. 45–66.

345. *Dimovski I.* Commutants of the Dunkl operators in C(R) / I. Dimovski, V. Hristov, M. Sifi // Fractional Calculus and Appl. Anal. 2006. V. 9, No. 3. P. 195–213.

346. *Djrbashian M.M.* Harmonic Analysis and Boundary Value Problems in the Complex Domain / M.M. Djrbashian. Birkhauser, 1993.

347. *Dunkl Ch.* Differential-difference operators associated to reflection groups / Ch. Dunkl // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 311. P. 167–183.

348. *Dunkl Ch.* Intertwining operators associated to the group S3 / Ch. Dunkl // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. V. 347. P. 3347–3374.

349. *Dunkl Ch.* An Intertwining Operator for the Group B2 / Ch. Dunkl // arXiv:math.CA/0607823. 2006. 27 p.

350. *Dwork B.* Generalized hypergeometric functions / B. Dwork. Oxford, 1990.

351. *Dwork B.* Introduction to G-functions / B. Dwork, S. Gerotto, F. J. Sullivan. Princeton, 1994.

352. *Ehrenpreis L.* Theory of distributions for locally compact spaces // Hem. Amer. Math. Soc. 1956. V. 21.

353. *Eidelman S.D.*, *Ivasyshen S.D.*, *Kochubei A.N.* Analytic Methods in The Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type / Springer, 2004.

354. *Erdelyi A.* Some applications of fractional integration / A. Erdelyi // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. Math. Note D1-82-0286. 1963. No. 316. 23 p.

355. *Erdelyi A.* An integral equation involving Legendre functions / A. Erdelyi // SIAM Review. 1964. V. 12, No. 1. P. 15–30.

356. *Erdelyi A.* An application of fractional integrals / A. Erdelyi // J. Analyse Math. 1965. V. 14. P. 113–126.

357. *Erdelyi A.* Some integral equations involving finite parts of divergent integrals / A. Erdelyi // Glasgow Math. J. 1967. V. 8, No. 1. P. 50–54.

358. *Erdelyi A.* On the Euler–Poisson–Darboux equation / A. Erdelyi // J. Analyse Math. 1970. V. 23. P. 89–102.

359. *Estrada R.* Null Spaces Of Radon Transforms / Estrada R., Rubin B. // arXiv:1504.03766v1. 2015. 24 p.

360. *Euler L.* Institutiones calculi integralis. V. III. Petropoli. 1770. Pt. II. Ch. III, IV, V. Opera Omnia. Ser. 1. V. 13. Leipzig, Berlin, 1914. P. 212–230.

361. *Exton H.* Multiple Hypergeometric Functions and Applications / H. Exton. N.Y.: J. Wiley a. Sons, 1976.

362. *Fox D.N.* The solution and Huygens' principle for a singular Cauchy problem // J. Math. Mech. 1959. V. 8. P. 197–219.

363. *Gilbert R.* Transformations, Transmutations and Kernel Functions / R. Gilbert, H. Begehr. V. 1–2. Longman: Pitman, 1992.

364. *Gilbert R.* Constructive Methods for Elliptic Equations / R. Gilbert. Springer Lecture Notes Math. 1974. P. 365.

365. *Gilbert R.* Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations / R. Gilbert. N.Y.: Acad. Press, 1969.

366. *Glaeske H.J.* Operational Calculus And Related Topics / H. J. Glaeske, A. P. Prudnikov, K. A. Skornik. Chapman & Hall/CRC, 2006.

367. *Golenia J.* The general differential-geometric structure of multidimensional Delsarte transmutation operators in parametric functional spaces and their

applications in soliton theory / J. Golenia, A. M. Samoilenko, Ya. A. Prykarpatsky, A. K. Prykarpatsky. arXiv: math-ph/0404016. 2004. 10 p.

368. *Gorenflo R.* Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order / R. Gorenflo, F. Mainardi // N.Y.: Springer, Wien. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. 1997. P. 223–278.

369. *Gorenflo R.* Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications / R. Gorenflo, A.A. Kilbas, F. Mainardi, S. V. Rogosin. Springer, 2014.

370. *Hamma M. E.*, *Daher R.* Estimate of K-functionals and modulus of smoothness constructed by generalized spherical mean operator // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) V. 124, No. 2, 2014. P. 235–242.

371. *Helgason S.* Groups and geometric analysis. Orlando: Academic Press, 1984.

372. *Helgason S.* Integral Geometry and Radon Transform. Springer, New York–Dordrecht–Heidelberg–London, 2011.

373. *Higgins T. P.* A hypergeometric function transform / T. P. Higgins // SIAM J. 1964. V. 12, No. 3. P. 601–612.

374. *Hille E.* On the theory of linear integral equations / E. Hille, J. D. Tamarkin // Ann. Math. 1930. V. 31. P. 479–528.

375. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators I–II. Berlin: Springer Verlag, 1983.

376. *Hutson V.*, *Pym J.* General translations associated with an operator // Math. Annalen. 1970. V. 187. P. 241–258.

377. *Hutson V.*, *Pym J.* Generalized translations associated with a differential operator // Proc. London Math. Soc. 1972. V. 24. P. 548–576.

378. *Jafford K.* Inversion of the Lions transmutation operators using generalized wavelets / K. Jafford // Appl. a. Comput. Harmonic Anal. 1997. V. 4, No. 1. P. 97–112.

379. *John F.* The Ultrahyperbolic Differential Equation with Four Independent Variables // Duke Math. J. 1938. V. 4, No. 2. P. 300–322.

380. *Kamoun L.* Bessel–Struve intertwining operator and generalized Taylor series on the real line / L. Kamoun, M. Sifi // Integral Transforms and Special Functions. 2005. V. 16, No. 1. P. 39–55.

381. *Karlsson P. W.* Multiple Gaussian hypergeometric series / P. W. Karlsson, H. M. Srivastava. New York: Ellis Horwood Series: Mathematics and Its Applications, 1985.

382. *Karp D.* Some New Facts Concerning the Delta Neutral Case of Foxs H Function / D. Karp, E. Prilepkina // Comput. Methods a. Function Theory. 2017. V. 17, No. 2. P. 343–367.

383. *Karp D.* Completely monotonic gamma ratio and infinitely divisible H-function of Fox / D. Karp, E. Prilepkina // Comput. Methods a. Function Theory. 2016. V. 16, No. 1. P. 135–153.

384. *Karp D.* Hypergeometric differential equation and new identities for the coefficients of Nørlund and Buhring / D. Karp, E. Prilepkina // SIGMA. 2016. No. 052. 23 p.

385. *Karp D.* Representations of hypergeometric functions for arbitrary values of the parameters and their use / D. Karp, J. L. López // J. Approximation Theory. 2017. V. 218. P. 42–70.

386. *Karp D.* A class of Meijer's G functions and further representations of the generalized hypergeometric functions / D. Karp, J. L. López. arXiv:1801.08670v1. 2018. 23 p.

387. *Karp D.* Hypergeometric functions as generalized Stieltjes transforms / D. Karp, E. Prilepkina // J. Math. Anal. a. Appl. 2012. V. 393, No. 2. P. 348–359.

388. *Kilbas A. A.* H-transforms. Theory and applications / A. A. Kilbas, M. Saigo. Chapman and Hall: CRC, 2004.

389. *Kilbas A. A.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Truhillo. Elsevier: North Holland Mathematical Studies. 2006. V. 204.

390. *Kilbas A. A.* Differential equations of fractional order: methods, results and problems. Part I / A. A. Kilbas, J. J. Trujillo // J. Appl. Anal.. 2001. V. 78. Nos. 1–2. P. 153–192.

391. *Kilbas A. A.* Differential equations of fractional order: methods, results and problems. Part II / A. A. Kilbas, J. J. Trujillo // J. Appl. Anal. 2001. V. 81, No. 2. P. 435–493.

392. *Kilbas A. A.* Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on $\mathcal{L}_{\nu,r}$-spaces / A. A. Kilbas, O. V. Skoromnik // Integral Transforms and Special Functions. 2009. V. 20. Iss. 9. P. 653–672.

393. *Kiryakova V.* Generalized Fractional Calculus and Applications / V. Kiryakova. UK: Pitman Research Notes in Math. Series No. 301. Longman Sci. UK. 1994.

394. *Kiryakova V. S.* An explanation of Stokes phenomenon by the method of transmutations / V. S. Kiryakova // Proc. Conf. Diff. Equations and Appl., Rousse. 1982. P. 349–353.

395. *Kiryakova V. S.* Applications of the generalized Poisson transformation for solving hyper-Bessel differential equations (In Bulgarian) / V. S. Kiryakova // Godishnik VUZ. Appl. Math. 1986. V. 22, No. 4. P. 129–140.

396. *Kiryakova V.* All the special functions are fractional differintegrals of elementary functions / V. Kiryakova // J. Physics A: Math. & General. 1997. V. 30, No. 14. P. 5085–5103.

397. *Kiryakova V.* The multi-index Mittag-Leffler functions as an important class of special functions of fractional calculus / V. Kiryakova // Computers and Mathematics with Applications. 2010. V. 59, iss. 5. P. 1885–1895.

398. *Kiryakova V.* Multiple (multiindex) Mittag-Leffler functions and relations to generalized fractional calculus / V. Kiryakova // J. Comput. a. Appl. Mathem. 2000. V. 118, iss. 1–2. P. 241-259.

399. *Kober H.* On a Theorem of Schur and On Fractional Integrals of Purely Imaginary Order / H. Kober // Transactions of the American Mathematical Society. 1941. V. 50, No. 1. P. 160–174.

400. *Koornwinder T.H.* Fractional integral and generalized Stieltjes transforms for hypergeometric functions as transmutation operators / T.H. Koornwinder. arXiv:1504.08144v2. 2015. 25 p.

401. *Kravchenko V.V.* Applied Pseudoanalytic Function Theory / V.V. Kravchenko. Birkhauser Verlag, 2009.

402. *Kravchenko V.V.*, *Torba S.M.* Transmutations for Darboux transformed operators with applications // J. Physics A: Mathematical and Theoretical. 2012. V.45, iss.7. No.075201. 21 p.

403. *Kravchenko V.V.*, *Torba S.M.* Construction of transmutation operators and hyperbolic pseudoanalytic functions // Complex Anal. a. Operator Theory. 2015. V.9, No.2. C.379–429.

404. *Kravchenko V.V.*, *Torba S.M.* Analytic approximation of transmutation operators and applications to highly accurate solution of spectral problems // J. Comput. a. Appl. Mathematics. 2015. V.275. C.1–26.

405. *Kravchenko V.V.*, *Navarro L.J.*, *Torba S.M.* Representation of solutions to the one-dimensional Schrödinger equation in terms of Neumann series of Bessel functions // Appl. Math. a. Comput. 2017. V.314, No.1. C.173–192.

406. *Kravchenko V.V.*, *Torba S.M.*, *Khmelnytskaya K.V.* Transmutation operators: construction and applications // Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering CMMSE–2017, 2017. Cadiz, Andalucia, España, July 4–8. P.1198–1206.

407. *Kravchenko V.V.*, *Otero J.A.*, *Torba S.M.* Analytic approximation of solutions of parabolic partial differential equations with variable coefficients // Advances in Mathematical Physics. 2017. V.2017, No.2947275. 5 p.

408. *Kravchenko V.V.*, *Torba S.M.* Asymptotics with respect to the spectral parameter and Neumann series of Bessel functions for solutions of the one-dimensional Schrödinger equation// J. Math. Physics. 2017. V.58, No.12.

409. *Kravchenko V.V.* Construction of a transmutation for the one–dimensional Schrödinger operator and a representation for solutions // Appl. Math. a. Comput. 2018. *328*. C.75–81.

410. *Kravchenko V.V.*, *Torba S.M.* A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of Sturm–Liouville equations // Calcolo. V.55, No.11.

411. *Kravchenko V.V.*, *Torba S.M.*, *Castillo-Pérez R.* A Neumann series of Bessel functions representation for solutions of perturbed Bessel equations// Appl. Anal. 2018. V.97, No.5. C.677–704.

412. *Kravchenko V.V.*, *Torba S.M.*, *Castillo-Perez R.* A uniform with respect to the specrtal parameter representation for solution of peretrubed Bessel equations. https://arxiv.org/abs/1303.3911

413. *Kuchment P.* The Radon Transform and Medical Imaging. Philadelphia: SIAM, 2014. 233 p.

414. *Kuchment P.* Generalized Transforms of Radon Type and Their Applications / in G. Olafsson and E.T. Quinto (Editors). The Radon Transform, Inverse

Problems, and Tomography, Proc. Symp. Appl. Math. v. 63, AMS, Providence, RI 2006. P. 67–91.

415. *Kuchment P.*, *Kunyansky L.* Mathematics of thermoacoustic and photoacoustic tomography, Ch. 19 in V. 2 of «Handbook of Mathematical Methods in Imaging», 1688 P. ISBN: 978-0-387-92920-0, Springer Verlag 2010. P. 817–866.

416. *Kufner A.* The Hardy Inequality / A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson. Pilsen, 2007. 162 p.

417. *Lions J. L.* Equations differentielles operationnelles et problémes aux limites / J. L. Lions. Springer, 1961.

418. *Lions J. L.* Opérateurs de Delsarte et problème mixte / J. L. Lions // France: Bull. Soc. Math. France. 1956. No. 84. P. 9–95.

419. *Lions J. L.* Quelques applications d'opérateurs de transmutations / J. L. Lions // Colloques Internat. Nancy. 1956. P.125–142.

420. *Love E. R.* Some integral equations involving hypergeometric functions / E. R. Love // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1967. V. 15, No. 3. P. 169–198.

421. *Love E. R.* Two more hypergeometric integral equations / E. R. Love // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1967. V. 63, No. 4. P. 1055–1076.

422. *Lowndes J. S.* An application of some fractional integrals / J. S. Lowndes // Glasgow Math. J. 1979. V. 20, No. 1. P. 35–41.

423. *Lowndes J. S.* On some generalizations of Riemann–Liouville and Weil fractional integrals and their applications / J. S. Lowndes // Glasgow Math. J. 1981. V. 22, No. 2. P. 73–80.

424. *Lowndes J. S.* Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients / J. S. Lowndes // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1983. V. 26, No 3. P. 97–105.

425. *Ludwig D.* The Radon transform on Euclidean space / D. Ludwig // Math. Meth. in the Appl. Sci. 1980. V. 2. P. 108–109.

426. *Luke Y. L.* Mathematical functions and their approximations / Y. L. Luke. Academic Press, 1975.

427. *Luke Y. L.* The special functions and their approximations / Y. L. Luke. Academic Press. 1969. V. 1.

428. *Lyakhov L. N.*, *Shishkina E. L.* Weighted mixed spherical means and singular ultrahyperbolic equation. Analysis. 2016. V. 36, № 2. P. 65–70.

429. *Matveev V. B.* Darboux–Backlund transformations and applications / V. B. Matveev, M. I. Salle. N.Y., Springer-Verlag, 1991.

430. *Matveev V. B.* Intertwining relations between the Fourier transform and discrete Fourier transform, the related functional identities and beyond / V. B. Matveev // Inverse Problems. 2001. V. 17. P. 633-–657.

431. *McGregor J. L.* Generalized translation operators. Thesis In Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1954. 98 p.

432. *Mitrinović D. S.* Classical and new inequalities in analysis / D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink. Kluwer, 1993.

433. *Nikolayev D.I.*, *Schaeben H.* Characteristics of the ultrahyperbolic differential equation governing pole density functions // Inverse Problems 1999. V. 15. P. 1603—1619.

434. *Olver F. W.J.* NIST Handbook of Mathematical Functions / F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

435. *Opic B.* Hardy-type Inequalities / B. Opic, A. Kufner. Longman, 1990.

436. *Owens O.G.* Uniqueness of solutions of ultrahyperbolic partial differential equations // Amer. J. Math. 1947. V. 69, No. 1, P. 184–188.

437. *Owens O.G.* An ultrahyperbolic equation with an integral condition // Amer. J. Math. 1960. V. 82, No. 4. P. 799–811.

438. *Ozaktas H.* The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing / H. Ozaktas, Z. Zalevsky, M. Kutay. Wiley, 2001. 513 p.

439. *Palamodov V.* Reconstructive integral geometry. Monographs in Mathematics, 98. Birkhauser Verlag, Basel, 2004. 164 p.

440. *Paneva-Konovska J.* From Bessel to Multi-Index Mittag-Leffler Functions / J. Paneva-Konovska. London: World Scientific, 2016.

441. *Pike S.* Scattering. Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science / S. Pike, P. Sabatier. V. 1–2. Academic Press, 2002.

442. *Poisson S.D.* Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles // J. de L'École Polytechechnique. 1823. Ser. 1. V. 19. P. 215–248.

443. *Poisson S.D.* Memoire sur la theorie du son // J. de L'Ecole Polytechn. 7 V. A807. P. 319–392.

444. *Polyanin A.D.* Handbook of Linear Partial Differential Equations for engineers and scientists-Chapman & Hall-CRC, 2002.

445. *Poularicas A.D.* (Ed.) The transforms and applications handbook / A. D. Poularicas. CRC Press, 2000.

446. *Prudnikov A.P.*, *Brychkov Yu.A.*, *Marichev O.I.* // Integrals and Series: Elementary Functions. New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1986. V. 1.

447. *Prudnikov A.P.*, *Brychkov Yu.A.*, *Marichev O.I.* Integrals and Series: Special Functions. New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1990. V. 2.

448. *Radzikowski J.* On the uniqueness of the limit problem for the ultrahyperbolic equation // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., Astr., Phys. 1960. V. 8, No. 4, P. 203–207.

449. *Ratnakumar P.K.* Thangavelu S. Spherical Means, Wave Equations, and Hermite–Laguerre Expansions // J. Funct. Anal. 1998. V. 154, iss. 2. P. 253–290.

450. *Rodrigues J.* Operational calculus for the generalized Bessel operator / J. Rodrigues // SERDICA, Bulgaricae mathematicae publicationes. 1989. V. 15. P. 179–186.

451. *Rosler M.* Positivity of Dunkl's intertwining operator / M. Rosler // Duke Math. J. 1999. V. 98. P. 445–463.

452. *Rosler M*. Dunkl operators: theory and applications. Orthogonal Polynomials and Special Functions / M. Rosler. Berlin–Heidelberg–N.Y.: LNIM 1817. Springer. 2003. P. 93–135.

453. *Rubin B*. Radon transforms and Gegenbauer–Chebyshev integrals. I / Rubin B. // Anal. Math. Phys. 2016.

454. *Rubin B*. Gegenbauer–Chebyshev Integrals And Radon Transforms / Rubin B. arXiv:1410.4112v2. 2015. 58 p.

455. *Rubin B*. On the Funk–Radon–Helgason inversion method in integral geometry / Rubin B. // Contemp. Math. 2013. V. 599. P. 175–198.

456. *Rubin B*. Introduction to Radon transforms: With elements of fractional calculus and harmonic analysis (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Cambridge University Press, 2015. 596 p.

457. *Rubin B*. Inversion formulae for the spherical mean in odd dimensions and the Euler–Poisson–Darboux equation // Inverse Problems. 2008. V. 24. P. 025021 (10 p).

458. *Samko S.G*. Fractional integrals and derivatives: theory and applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

459. *Samoilenko A.M*. The generalized de Rham–Hodge theory aspects of Delsarte–Darboux type transformations in multidimension / A. M. Samoilenko, Ya. A. Prykarpatsky, A. K. Prykarpatsky // Central European J. Mathematics. 2005. V. 3. No. 3. P. 529–557.

460. *Shishkina E.L*. Inversion of integral of B-potential type with density from Φ_γ / E. L. Shishkina // J. Mathematical Sciences. 2009. V. 160. No. 1. P. 95–102.

461. *Siersma J*. Thesis / J. Siersma. Groningen, 1979.

462. *Sitnik S.M*. Transmutations and Applications: a survey. [math.CA] arXiv:1012.3741. 2010. 141 p.

463. *Sitnik S.M*. Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function / S. M. Sitnik, D. Karp // J. Comput. a. Appl. Math. Amsterdam: Elsevier. 2009. V. 161. P. 337—352.

464. *Sitnik S.M*. Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions / S. M. Sitnik, D. Karp // J. Comput. a. Appl. Math. Amsterdam: Elsevier. 2010. V. 364. P. 384–394.

465. *Sitnik S.M*. On monotonicity of ratios of some q-hypergeometric functions / S. M. Sitnik, Kh. Mehrez // Matematicki Vesnik. 2016. V. 68, No. 3. P. 225–231.

466. *Sitnik S.M*. Buschman-Erdelyi transmutations, classification and applications / S. M. Sitnik // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: Amade 2012 / Ed. by M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, Cottenham. 2013. P. 171–201.

467. *Sitnik S.M*. Generalized Young and Cauchy–Bunyakowsky Inequalities with Applications: a survey / S. M. Sitnik // [math.CA] arXiv:1012.3864. 2010. 51 p.

468. *Sitnik S.M*. Transmutations and Applications: a survey / S. M. Sitnik // [math.CA] arXiv:1012.3741. 2010. 141 p.

469. *Sitnik S.M.* Some problems in the modern theory of transmutations / S.M. Sitnik // Spectral theory and differential equations (STDE-2012). International conference in honor of Vladimir A. Marchenko's 90th birthday. Kharkiv, Ukraine. August 20–24, 2012. Ukraine, Kharkiv: B. Verkin Institute for low temperature and engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, V. Karazin Kharkiv National University. 2012. P. 101–102.

470. *Sitnik S.M.* Asymptotic approximations for the first incomplete elliptic integral near logarithmic singularity / S.M. Sitnik, D. Karp // J. Comput. a. Appl. Math. Amsterdam: Elsevier. 2007. No. 205. P. 186–206.

471. *Sitnik S.M.* Series expansions for the third incomplete elliptic integral via partial fraction decompositions / S.M. Sitnik, D. Karp, A. Savenkova // J. Comput. a. Appl. Math. Proceedings of The Conference in Honour of Dr. Nico Temme on the Occasion of his 65th birthday. Amsterdam: Elsevier. 2007. V. 207, iss. 2. P. 331–337.

472. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional differential equations and applications / A.L. Skubachevskii. Birkhauser, 1997.

473. *Slater L.J.* Generalized hypergeometric functions / L.J. Slater. Cambridge University Press, 1966. 285 p.

474. *Sprinkhuizen-Kuyper I.G.* A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator / I.G. Sprinkhuizen-Kuyper // J. Math. Anal. a. Appl. 1979. No. 72. P. 674–702.

475. *Stein E.M.* Maximal functions: Spherical means // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1976. V. 73, No. 7. P. 2174—2175.

476. *Stellmacher K.L.* Eine Klasse Huygenscher Differentialgleichungen und ihre Integration // Math. Ann. 1955. V. 130. P. 219–233.

477. *Sunada T.* Spherical means and geodesic chains on a Riemannian manifold // Trans. Am. Math. Soc. 1981. V. 267. P. 483–501.

478. *Sviridyuk G.A.*, *Fedorov V.E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. Utrecht: VSP, 2003.

479. *Ta Li.* A new class of integral transform / L. Ta // Proc. AMS. 1960. V. 11, No. 2. P. 290–298.

480. *Ta Li.* A note on integral transform / L. Ta // Proc. AMS. 1961. V. 12, No. 6. P. 556.

481. *Thangavelu S.* Spherical means on the Heisenberg group and a restriction theorem for the symplectic Fourier transform // Revista Matematica Iberoamericana. 1991. V. 7, No. 2, P. 135–155.

482. *Trimeche K.* Transformation intégrale de Weil et thèoréme de Paley–Wiener associés à un opérateur différentiel singulier sur $(0,\infty)$ / K. Trimeche // J. Math. Pures Appl. 1981. No. 60. P. 51–98.

483. *Trimeche K.* Transformation intégrale de Riemann–Liouville généralises et convergence des series de Taylor généralisées au sens de Delsarte / K. Trimeche // Rev. Fac. Sci. Tunis. 1981. No. 1. P. 7–14.

484. *Trimeche Kh.* Transmutation Operators and Mean-Periodic Functions Associated with Differential Operators / Kh. Trimeche // Mathematical Reports. V. 4, Part 1. USA: Harwood Academic Publishers, 1988.

485. *Trimeche Kh*. Inversion of the Lions transmutation operators using generalized wavelets / Kh. Trimeche // Appl. a. Comput. Harmonic Analysis. 1997. V. 4, No. 1. P. 97–112.

486. *Trimeche Kh*. Generalized Harmonic Analysis and Wavelet Packets (an Elementary Treatment of Theory and Applications) / Kh. Trimeche Taylor & Francis, 2001.

487. *Trimeche Kh*. Inversion of the Dunkl intertwining operator and its dual using Dunkl wavelets / Kh. Trimeche // Rocky Mountain J. Mathematics. 2002. V. 32, No. 2. P. 889–895.

488. *Virchenko N*. Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications / N. Virchenko, I. Fedotova // World Scientific, 2001.

489. *Virchenko N*. On Some Generalized Symmetric Integral Operators of Buschman–Erdelyi's Type / N. Virchenko // Nonlinear Mathematical Physics. 1996. V. 3, No. 3–4. P. 421–425.

490. *Volchkov Val. V*. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov // Springer, 2003. 465 p.

491. *Volchkov Val. V*., *Volchkov Vit. V*. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Birkhuser, 2013.

492. *Weinstein A*. Discontinuos integrals and generalized theory of potential / A. Weinstein // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. V. 63, No. 2. P. 342–354.

493. *Weinstein A*. Generalized axially symmetric potential theory / A. Weinstein // Bull. Amer. Math. Soc. 1953. V. 59. P. 2038.

494. *Weinstein A*. Selecta / A. Weinstein. Pitman, 1978.

495. *Weinstein A*. On the wave equation and the equation of Euler–Poisson // Proc. of Symposia in Applied Mathematics, V. V, Wave motion and vibration theory, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1954. P. 137—147.

496. *Weinstein A*. The generalized radiation problem and the Euler–Poisson–Darboux equation. Summa Brasiliensis Mathematicae 3 1955. P. 125–147.

497. *Weinstein A*. Spherical means in spaces of constant curvature // Annali di Matematica Pura ed Applicata 1962. V. 4, No. 60, P. 87–91.

Научное издание

СИТНИК Сергей Михайлович
ШИШКИНА Элина Леонидовна

МЕТОД ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРАМИ БЕССЕЛЯ

Редактор *В.С. Аролович*
Оригинал-макет: *К.А. Андреев*
Оформление переплета: *В.Ф. Киселёв*

Подписано в печать 05.02.2019. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 14. Уч.-изд. л. 16,5. Тираж 300 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117342, г. Москва, ул. Бутлерова, д. 17 Б
E-mail: porsova@fml.ru, sale@fml.ru
Сайт: http://www.fml.ru
Интернет-магазин: http://www.fmllib.ru

Отпечатано с электронных носителей издательства
в ООО «Типография «Перфектум»,
428000, г. Чебоксары, ул. Карла Маркса, 52