



ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА

---

П. В. МЕЛЕНТЬЕВ

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1962

*Павел Владимирович Мелентьев*  
Приближенные вычисления

Редакторы *Б. А. Самокиш* и *Н. М. Роченгауз*  
Техн редактор *А. А. Лукьянов*                      Корректор *В. С. Иванова*

---

Сдано в набор 13/VII 1961 г    Подписано к печати 2/XI 1961 г    Бумага 70×108/16    Физ печ л 245.  
Условн печ л 3356    Уч -изд л 2962    Тираж 20 000 экз    Т-12310    Цена книги 1 р 68 к    Заказ № 347.

---

Государственное издательство физико-математической литературы  
Москва В-71 Ленинский проспект 15

---

Ленинградский Совет народного хозяйства    Управление полиграфической промышленности.  
Типография № 1 „Печатный Двор“ имени А. М. Горького, Ленинград, Гатчинская, 26.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
-----------------------	---

### ГЛАВА I

#### ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 1. О проведении вычислений . . . . .	8
§ 2. Погрешности . . . . .	8
§ 3. Запись чисел . . . . .	10
§ 4. Суммирование . . . . .	10
§ 5. Вычитание . . . . .	10
§ 6. Погрешности при умножении и делении . . . . .	11
§ 7. Арабский способ умножения . . . . .	11
§ 8. Умножение с поворотом множителя . . . . .	17
§ 9. Проверка умножения . . . . .	20
§ 10. Приближенное умножение . . . . .	21
§ 11. Деление . . . . .	22
§ 12. Приближенное представление биномов . . . . .	26
§ 13. Вычисление квадратных корней — первый способ . . . . .	26
§ 14. Вычисление квадратных корней — второй способ . . . . .	27
§ 15. Вычисление кубических корней . . . . .	27
§ 16. Вычисление корней степени выше третьей . . . . .	28
§ 17. Умножение в уме . . . . .	28
§ 18. Вычисление в уме квадратных корней . . . . .	29
§ 19. Вычисление в уме кубических корней . . . . .	29
§ 20. Логарифмирование в уме . . . . .	30
§ 21. Общие указания . . . . .	31

### ГЛАВА II

#### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Графические методы решения . . . . .	32
§ 2. Метод хорд . . . . .	33
§ 3. Метод Ньютона . . . . .	35
§ 4. Метод итерации . . . . .	37
§ 5. Дополнение к методу итерации — первый способ . . . . .	41
§ 6. Дополнение к методу итерации — второй способ . . . . .	44
§ 7. Применение ряда Тейлора . . . . .	47
§ 8. Общие указания . . . . .	48

### ГЛАВА III

#### РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Отделение вещественных корней . . . . .	49
§ 2. Метод разделения корней . . . . .	56
§ 3. Метод разделения корней — случай комплексных корней . . . . .	61
§ 4. Метод отделения большего корня . . . . .	65
§ 5. Отделение большего корня — случай комплексных корней . . . . .	70



§ 6. Метод уточнения выделяемых трехчленов . . . . .	73
§ 7. Применение схемы Руффини — Горнера . . . . .	81
§ 8. Решение уравнений 4-й степени . . . . .	92
§ 9. Общие указания . . . . .	96

## ГЛАВА IV

## РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Два уравнения с двумя неизвестными . . . . .	98
§ 2. Два уравнения, неразрешимые относительно $x$ или $y$ . . . . .	100
§ 3. Использование производных для решения системы двух уравнений . . . . .	101
§ 4. Применение итераций для решения системы двух уравнений . . . . .	104
§ 5. Усиление сходимости итерации в случае двух уравнений . . . . .	106
§ 6. Системы линейных уравнений . . . . .	108
§ 7. Три уравнения с тремя неизвестными . . . . .	109

## ГЛАВА V

## ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

§ 1. Формула Грегори — Ньютона . . . . .	114
§ 2. Интерполирование назад по формуле Грегори — Ньютона . . . . .	116
§ 3. Разности степенных функций . . . . .	117
§ 4. Формула Гаусса . . . . .	119
§ 5. Формула Ньютона — Стирлинга . . . . .	121
§ 6. Погрешности высших разностей . . . . .	122
§ 7. Разделенные разности . . . . .	123
§ 8. Формула Ньютона для разделенных разностей . . . . .	124
§ 9. Формула Лагранжа . . . . .	126
§ 10. Графическое интерполирование . . . . .	128
§ 11. Глазомерное интерполирование . . . . .	131

## ГЛАВА VI

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

§ 1. Применение формулы Грегори — Ньютона . . . . .	134
§ 2. Применение формулы Ньютона — Стирлинга . . . . .	136
§ 3. Применение формулы Ньютона для вычисления производных высших порядков . . . . .	140

## ГЛАВА VII

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 1. Основные уравнения . . . . .	147
§ 2. Методы, использующие комбинации ординат . . . . .	150
§ 3. Метод трапеций . . . . .	150
§ 4. Примеры . . . . .	151
§ 5. Метод Симпсона . . . . .	154
§ 6. Применение метода Симпсона в случае четного числа частей . . . . .	154
§ 7. Формулы Ньютона — Котса . . . . .	156
§ 8. Метод прямоугольников . . . . .	158
§ 9. Метод средних ординат . . . . .	158
§ 10. Метод Чебышева . . . . .	160
§ 11. Метод Гаусса . . . . .	163
§ 12. Примеры . . . . .	168
§ 13. Построение интегральной кривой . . . . .	172
§ 14. Использование четырех ординат . . . . .	175
§ 15. Интегрирование в случае бесконечности производной . . . . .	176
§ 16. Интегрирование в случае интервала $(0, \infty)$ . . . . .	179
§ 17. Формула Эйлера — Маклорена . . . . .	182
§ 18. Другие формулы с учетом производных . . . . .	186
§ 19. Формула Грегори . . . . .	188

## ГЛАВА VIII

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Представление функции в виде ряда . . . . .	193
§ 2. Графическое интегрирование . . . . .	195
§ 3. Способ Пикара . . . . .	201
§ 4. Способ Рунге . . . . .	205
§ 5. Способ Эйлера . . . . .	208
§ 6. Способ Адамса . . . . .	210
§ 7. Пример к способу Адамса . . . . .	212
§ 8. Начало вычислений по способу Адамса . . . . .	216
§ 9. Применение сумм при вычислении по способу Адамса . . . . .	218
§ 10. Способ Лапласа . . . . .	224
§ 11. Уточнение вычислений по способу Лапласа . . . . .	227
§ 12. Расчет по двойным приращениям . . . . .	227
§ 13. Первый метод Коуэлла . . . . .	231
§ 14. Применение вспомогательной функции . . . . .	235
§ 15. Второй тип вспомогательной функции . . . . .	241
§ 16. Уравнение типа Риккати . . . . .	244
§ 17. Уравнения второго порядка . . . . .	249
§ 18. Второй тип уравнений второго порядка . . . . .	253
§ 19. Второй метод Коуэлла . . . . .	257

## ГЛАВА IX

## ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 1. Ряд Фурье . . . . .	261
§ 2. Вычисление по 12 ординатам . . . . .	262
§ 3. Вычисление по 24 ординатам . . . . .	267
§ 4. Вычисление по 36 ординатам . . . . .	268
§ 5. Пример разложения . . . . .	271
§ 6. Метод равных коэффициентов . . . . .	275
§ 7. Определение периодов . . . . .	288

## ГЛАВА X

## КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

§ 1. Постановка задачи . . . . .	293
§ 2. Первое приближение . . . . .	297
§ 3. Свойства первого приближения . . . . .	299
§ 4. Использование первого приближения в случае точного решения . . . . .	300
§ 5. Общий случай . . . . .	301
§ 6. Отображение внутренних областей . . . . .	303
§ 7. Отображение внешних областей . . . . .	309
§ 8. Отображение внутренних областей с симметричными контурами . . . . .	310
§ 9. Отображение внешних областей с симметричными контурами . . . . .	313
§ 10. Предварительное преобразование областей . . . . .	318

## ГЛАВА XI

## ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

§ 1. Метод наименьших квадратов . . . . .	320
§ 2. Метод равных площадей . . . . .	324
§ 3. Подбор параболы . . . . .	326
§ 4. Аппроксимирование синуса многочленом . . . . .	329
§ 5. Привязка точек . . . . .	331
§ 6. Аппроксимирование логарифмической функции многочленом . . . . .	331
§ 7. Применение метода наименьших квадратов в случае задания последовательности точек . . . . .	334
§ 8. Способ равных сумм . . . . .	336
§ 9. Подбор функции вида $y = a + bx^c$ . . . . .	339

§ 10. Подбор функции вида $y = a + bc^x$ . . . . .	342
§ 11. Преобразование координат . . . . .	343
§ 12. Подбор степенной функции способом равных сумм . . . . .	346
§ 13. Подбор показательной функции способом наименьших квадратов . . . . .	347
§ 14. Подбор показательной функции способом равных сумм . . . . .	348
§ 15. Полиномиальные кривые . . . . .	349
§ 16. Графики степенной и показательной функций . . . . .	350
§ 17. Кривая Гаусса . . . . .	351
§ 18. Многочлены с положительными и отрицательными степенями аргумента . . . . .	357
§ 19. Суммирование функций . . . . .	359
§ 20. Преобразование ординат . . . . .	360
§ 21. Семейства кривых . . . . .	361
§ 22. Пример семейства кривых . . . . .	362
Приложение . . . . .	367

-----

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В наше время большое распространение получили электронные вычислительные машины, работающие во много тысяч раз быстрее любого вычислителя. Однако механизация вычислений дает наибольший эффект при решении типовых задач, как, например, при составлении синоптических прогнозов, предвычислении приливов, расчете электрических сетей и т. д. Для случайных, единичных расчетов программирование и подготовка машины столь дороги, что применение их в таких случаях нецелесообразно. Поэтому умение провести быстро и точно математический расчет еще долгое время будет полезно инженеру и научному работнику.

Книга начинается с изложения нескольких приемов, позволяющих проводить скорее, чем обычно (иногда и в уме), некоторые элементарные вычисления. Не всегда бывают под рукою арифмометр или счетная линейка, и полезно каждому человеку, имеющему дело с вычислительной работой, уметь вычислить произведение, корень или логарифм, имея только карандаш и бумагу. При этом важно, конечно, не просто вычислить, а сделать это по возможности быстро и без большой затраты энергии.

В гл. II даны способы решения разного рода трансцендентных уравнений. В большинстве случаев самым продуктивным является метод итерации, с дополнением, гарантирующим получение результатов даже и при процессе, который в обычных условиях является расходящимся.

В гл. III рассмотрены способы решения алгебраических уравнений высоких степеней. В этой области автором разработано несколько способов, по-видимому, более удобных, чем метод Греффе — Лобачевского, — чрезвычайно утомительный, особенно в случае комплексных корней.

В гл. IV рассмотрены способы решения систем уравнений с двумя и тремя неизвестными. Такие задачи, при решении их методом подбора, обычно причиняют исследователям большие неприятности, и систематизация поисков решения играет решающую роль в достижении результатов.

В гл. V даны основные методы и формулы интерполирования, так же как и в следующей главе, касающейся дифференцирования.

В гл. VII рассматриваются формулы приближенного интегрирования.

В гл. VIII, посвященной приближенному интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, приводятся лишь некоторые основные вычислительные приемы. В последнее время появилось громадное количество вычислительных схем интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, но тем не менее основные классические схемы Адамса — Лапласа, Коуэлла и Шгёрмера, соответствующим образом оформленные в целях облегчения начала вычислений и перехода к новому интервалу, остаются в большинстве случаев наиболее простыми и эффективными.

В гл. IX, посвященной гармоническому анализу, даны лишь основные типы шаблонов, без систематизирующих шаблонов, способных скорее запутать вычислителя, чем помочь ему в выявлении высоких гармоник.

В гл. X дан метод автора для конформного преобразования односвязных внешних и внутренних областей. Судя по результатам его применения разными лицами, он в достаточной мере эффективен.

Наконец, в гл. XI рассматривается один из наиболее часто встречающихся вопросов — построение эмпирических формул.

Эта книга не является учебным руководством по курсу приближенных вычислений. В ней отражен личный опыт автора, накопленный за 35 лет работы по решению прикладных математических задач. Автор сочтет свой труд оправданным, если книга окажется полезной инженерам и научным работникам в их практической деятельности.

*П. Мелентьев*

## Г Л А В А 1

### ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

**§ 1. О проведении вычислений.** Люди, работающие в самых разнообразных отраслях знания, не только технических, но и таких, как медицина, зоология, география и т. д., при решении различных задач или при обработке накопленных ими цифровых материалов встречаются с необходимостью проведения всякого рода вычислений.

Результаты вычислительной работы и время, необходимое для ее выполнения, зависят от практического опыта специалиста, его умения пользоваться наиболее эффективными приемами вычислений.

Начинающий вычислитель, в частности, боясь получить результат с недостаточной точностью, делает вычисления с громадным числом знаков (особенно в тех случаях, когда под рукою имеется арифмометр), что переводит сравнительно легкую задачу в разряд сложных. Промежуточные вычисления при этом зачастую делаются на клочках бумаги и, когда появляется необходимость проверить результат вычисления, клочки эти невозможно отыскать, и все приходится делать заново. После нескольких округлений результатов теряются не только запасные знаки, но и часть нужных.

Отсутствие опыта нередко приводит к неумению произвести рационально самые элементарные действия. С этих элементарных вычислений мы и начнем.

**§ 2. Погрешности.** За очень редкими исключениями, имеющими место в том случае, когда речь идет о целых числах, результаты вычислений не бывают абсолютно точными, а даются лишь с некоторой степенью приближенности, зависящей от точности использованных данных и примененных методов расчета.

Абсолютная величина разности между приближенным  $\tilde{n}$  и истинным  $n$  значениями некоторой величины, имеющая ту же размерность, что и сама величина, называется абсолютной погрешностью этого значения:  $\Delta = |\tilde{n} - n|$ .

Отношение абсолютной погрешности к самому значению величины, выражающееся отвлеченным числом, называется относительной погрешностью:  $\epsilon = \frac{\Delta}{n}$ .

**Пример.** При сравнении с международным эталоном длины, платиновым метром № 6, оказалось, что длина некоторого, вновь изготовленного эталона равна 1000,0132 мм. Абсолютная погрешность  $\Delta$  изготовления нового эталона равна

$$\Delta = 1000,0132 - 1000 = 0,0132 \text{ (мм)},$$

а относительная погрешность  $\epsilon$  равна

$$\epsilon = \frac{0,0132}{1000} = 0,0000132.$$

**§ 3. Запись чисел.** Если между запятой и значащими цифрами дроби имеются нули, а также если целое число кончается несколькими нулями, мы будем такие числа записывать в более удобной для вычисления форме, ставя перед запятой лишь одну цифру, после запятой — остальные цифры, в точности которых мы уверены, и помещая над запятой степень десяти, соответствующую действительной величине числа.

**Пример.** Число 2 735 000, в точности пяти цифр которого мы уверены, запишем в виде  $2,7350 \cdot 10^6$ . Число 0,0000125, имеющее три верных знака, запишем в виде  $1,25 \cdot 10^{-5}$ .

Как пользоваться такой записью при наличии нескольких множителей и делителей, видно из следующего примера:

$$\frac{13\,864\,000 \cdot 0,0083642}{0,000031761 \cdot 2735,6} = \frac{1,3864 \cdot 8,3642}{3,1761 \cdot 2,7356} = \frac{11,5961}{8,6885} = 1,3347 = 1\,334\,700.$$

**§ 4. Суммирование.** При сложении нескольких приближенных чисел, сперва у наибольшего из них выделяется входящая в него целая степень десяти; затем эта же степень десяти выделяется и у всех остальных чисел, причем за запятой у них оставляется столько же знаков, сколько у наибольшего из слагаемых. Подписывая слагаемые друг под другом, достаточно приписать степень десяти к верхнему из них. Если при суммировании перед запятой получается число большее, чем десять, то его степень десяти соответственно изменяется.

**Пример.** Сложить числа 3857,2; 6342,5; 309,847; 25,71; 13,1692. Составляем столбец:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 6,3425 \\ 3,8572 \\ 0,3098 \\ 0,0257 \\ 0,0132 \\ \hline 3 \\ 10,5484, \\ 3 \quad 4 \\ 10,5484 = 1,05484 = 10548,4. \end{array}$$

При этом, если неучитываемая часть какого-либо числа начинается с цифр 0, 1, 2, 3, 4, то она отбрасывается, если же с цифр 5, 6, 7, 8, 9, то последняя из оставленных цифр увеличивается на единицу. Если неучитываемая часть в точности равна 500..., то последняя из оставленных цифр округляется до четной. Так, число 0,02571 мы округляем до 0,0257, отбрасывая лишнюю цифру; в числе 0,0131692 производим округление вверх до 0,0132. Для чисел 4,365000 и 8,57500 округление до трех значащих цифр даст 4,36 и 8,58.

Средняя погрешность при округлении равна примерно одной четвертой доле единицы последнего знака числа. Поскольку эта погрешность может быть как положительной, так и отрицательной, при суммировании приближенных чисел абсолютные погрешности частично взаимно погашаются, и сумма самих чисел растет быстрее, чем сумма их погрешностей. Вследствие этого относительная погрешность суммы обычно меньше, чем погрешность отдельных слагаемых.

**§ 5. Вычитание.** Если при сложении нескольких чисел с более или менее одинаковыми относительными погрешностями мы получаем сумму

с меньшей относительной погрешностью, т. е. более точную, чем отдельные слагаемые, то противоположный результат можно получить при вычитании, особенно если уменьшаемое и вычитаемое близки друг к другу.

Пусть, например, имеются два стержня, длины которых 206 см и 208 см. Точная разность длин стержней равна 2 см. При измерении этих длин получены приближенные значения 206,01 см и 207,99 см, т. е. погрешность измерения была порядка 0,01 см, что дало относительную погрешность обоих измерений  $\pm 1:20000$ . Разность между результатами измерений равна 1,98 см, т. е. отличается от точной разности на 0,02 см. Относительная погрешность измерения разности длин равна 1:100, т. е. в двести раз больше, чем погрешность каждого из основных измерений.

Если бы мы могли поставить оба стержня рядом на плоскость и измерить непосредственно разность их длин, то при относительной погрешности измерения в 1:20000 мы получили бы величину разности длин с абсолютной погрешностью порядка 0,0001 см. Отсюда ясно, что при вычислениях, связанных с получением разностей двух близких между собою чисел, надо стараться так преобразовывать формулы, чтобы эти разности вычислялись непосредственно, без вычисления самих основных величин.

**§ 6. Погрешности при умножении и делении.** При умножении или делении чисел с примерно одинаковыми относительными погрешностями, относительная погрешность результата будет больше погрешности отдельных чисел примерно во столько раз, сколько отдельных величин участвовало в вычислении. Например, при возвышении числа в четвертую степень можно считать, что перемножены четыре одинаковых числа; следовательно, относительная погрешность четвертой степени числа примерно в четыре раза больше погрешности самого числа.

Изложенных здесь ориентировочных сведений о поведении относительной погрешности и ее изменении в результате тех или иных вычислений вполне достаточно, так как в реальном вычислительном процессе совершенно невозможно точно учесть влияние всевозможных округлений, и при желании получить достоверные результаты расчет просто выполняется с несколько повышенной степенью точности, чтобы парализовать вредное влияние погрешностей.

**§ 7. Арабский способ умножения.** Даже самые простые вычисления можно производить различными способами. Из этих способов нам необходимо выбрать наиболее эффективные, т. е. приводящие к результату с минимальным утомлением и в кратчайший срок. Начнем с умножения.

Обычный, школьный метод перемножения чисел заставляет писать много вспомогательных цифр и является поэтому весьма медленным. Уже несколько веков назад арабы разработали значительно лучший способ так называемого систематического перемножения чисел, позволяющий получать произведение непосредственно под записанными сомножителями, без единого вспомогательного знака. Сущность арабского метода заключается в следующем.

Если возьмем два трехзначных числа

327 и 456

и перемножим их

$$\begin{array}{r}
 \times 327 \\
 456 \\
 \hline
 1962 \\
 + 1635 \\
 1308 \\
 \hline
 149112,
 \end{array}$$



то произведенные нами действия можно разбить на отдельные элементы

$$\begin{array}{r}
 \times 327 \\
 456 \\
 \hline
 42 \\
 12 \\
 18 \\
 35 \\
 + 10 \\
 15 \\
 28 \\
 8 \\
 12 \\
 \hline
 149112.
 \end{array}$$

Произведение не изменится, если мы, оставив элементы неизменными, иначе разместим их:

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & 3 & 2 & 7 & & \\
 & & 4 & 5 & 6 & & \\
 \hline
 & & & & 4 & 2 & \text{I} \\
 & & & 1 & 2 & & \text{II} \\
 & & & 3 & 5 & & \\
 & 1 & 8 & & & & \text{III} \\
 & 1 & 0 & & & & \\
 & 2 & 8 & & & & \\
 & 1 & 5 & & & & \text{IV} \\
 & & 8 & & & & \\
 1 & 2 & & & & & \text{V} \\
 \hline
 1 & 4 & 9 & 1 & 1 & 2 & \\
 \text{VI} & \text{V} & \text{IV} & \text{III} & \text{II} & \text{I} & 
 \end{array}$$

Мы видим, что при определенном расположении элементов они могут дать группы, обладающие следующим свойством.

Группа I дает возможность определить первую цифру произведения, группа II определяет вторую цифру произведения и т. д. Следовательно, для получения некоторой последующей цифры произведения нужно сложить остаток, полученный после записи предыдущей цифры результата, с произведениями соответствующей группы. Так, в нашем примере для получения первой цифры произведения имеем в группе I одно число 42, количество единиц которого 2 и дает первую цифру произведения. Число десятков 4 является остатком, используемым при получении следующей цифры. Вторая цифра получится, если этот остаток 4 сложим с произведениями группы II:

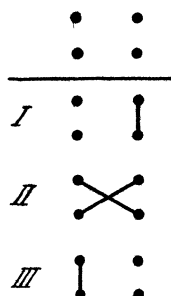
$$\begin{array}{r}
 4 \\
 + 12 \\
 35 \\
 \hline
 51.
 \end{array}$$

Следовательно, вторая цифра будет 1, а остаток для следующей цифры — 5.

Если складывать остаток с числами, составляющими группу, в уме, без записи, то все перемножение можно будет записать так:

$$\begin{array}{r}
 \times 327 \\
 456 \\
 \hline
 149112
 \end{array}$$

Перейдем к тому, как составлять группы. Начнем с перемножения двузначных чисел, для чего составим следующую схему:



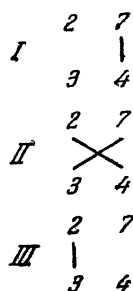
В этой схеме точками обозначены цифры сомножителей, черточка же соответствует произведению соединенных ею цифр.

Из схемы следует: первую (крайнюю правую) цифру произведения дает произведение единиц сомножителей; вторую цифру дает сумма из остатка, полученного после записи первой цифры, произведения десятков множимого на единицы множителя и произведения единиц множимого на десятки множителя; третью цифру дает сумма из остатка, полученного после записи второй цифры и произведения десятков множимого на десятки множителя.

Пример.

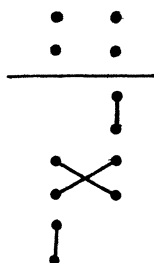
$$\begin{array}{r} \times 27 \\ 34 \\ \hline 918 \end{array}$$

Схема

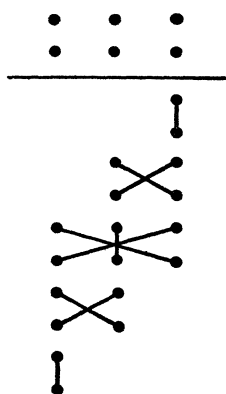


$$\begin{array}{lll} \text{I} & & 7 \times 4 = 28 \quad 8 \text{ пишем, } 2 \text{ в уме (остаток),} \\ \text{II} & 2 + 2 \times 4 + 7 \times 3 = 31 & 1 \text{ пишем, } 3 \text{ в уме,} \\ \text{III} & 3 + 2 \times 3 = 9 & 9 \text{ пишем.} \end{array}$$

Перейдем к перемножению трехзначных чисел. Если схема для двузначных чисел имела вид



то для трехзначных она будет иметь следующий вид:

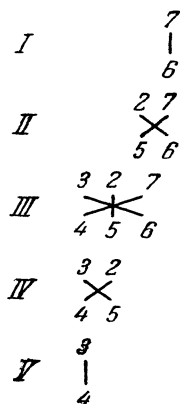


Символические обозначения те же, что и в предыдущей схеме: точка обозначает цифру, черточка — произведение двух соответствующих цифр сомножителей, группа из черточек — сумму произведений, определяющую по прибавлению к ней остатка от записи предыдущей цифры цифру последующую.

Пример.

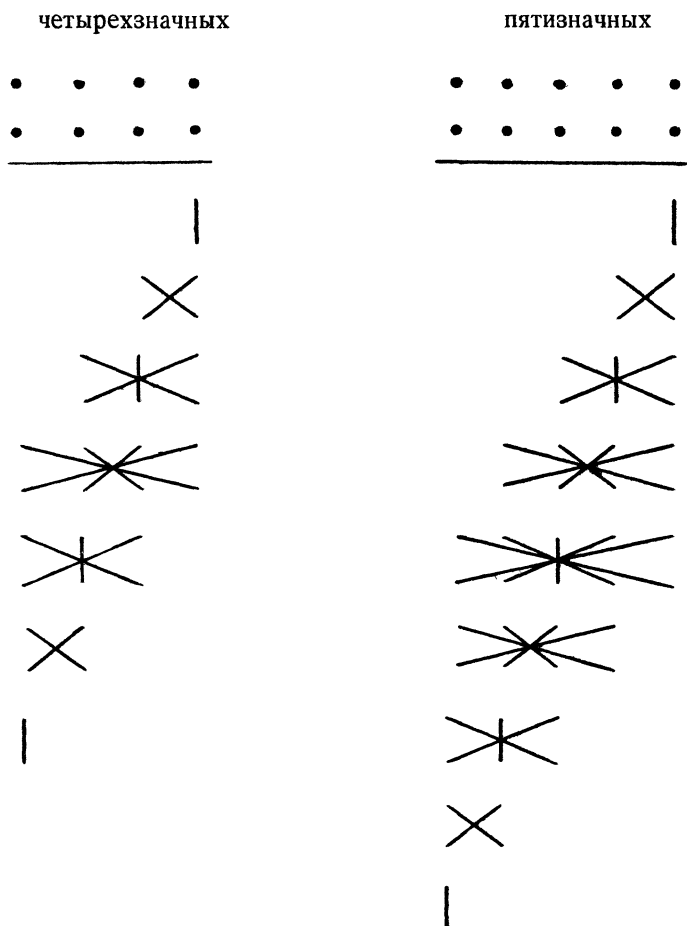
$$\begin{array}{r} \times 327 \\ 456 \\ \hline 149\ 112 \end{array}$$

Схема



			Пишем	Остаток
I		$7 \times 6 = 42$	2	4
II	$4 + 2 \times 6 + 7 \times 5 = 51$		1	5
III	$5 + 3 \times 6 + 2 \times 5 + 7 \times 4 = 61$		1	6
IV	$6 + 3 \times 5 + 2 \times 4 = 29$		9	2
V	$2 + 3 \times 4 = 14$		4	1
VI			1	

Продолжая разрабатывать схемы для многозначных сомножителей, получаем для перемножения чисел



и т. д.

Если число знаков у сомножителей неодинаковое, то меньший из них мысленно дополняют нулями. Например:

$$\begin{array}{r} \times 51342 \\ 245 \\ \hline \end{array}$$

можно привести к одному из двух видов:

$$\begin{array}{r} \times 51342 \\ 245,00 \\ \hline \end{array} \quad \text{либо} \quad \begin{array}{r} \times 51342 \\ 00245. \\ \hline \end{array}$$

При многозначных сомножителях число произведений, суммируемых в одну группу, довольно велико, и, вычисляя в уме, можно перемножить неправильно взятые пары цифр. Поэтому для овладения рассматриваемым способом умножения надо начинать с простейших примеров: сначала перемножать двузначные числа без восьмерок и девяток, затем — с любыми цифрами; после этого перейти к трехзначным числам, постепенно усложняя их.

Способ этот основан на том же принципе, что и перемножение многочленов. Когда мы перемножаем, например,

$$\begin{array}{r}
 \times \begin{array}{r} a_1x^2 + b_1x + c_1 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} c_1c_2 \\ + (a_1c_2 + b_1b_2 + c_1a_2)x \\ + (a_1b_2 + b_1a_2)x^2 \\ + a_1a_2x^4, \end{array}
 \end{array}$$

то коэффициенты при степенях  $x$  получаются в виде сумм нескольких произведений.

Если мы примем, что  $x = 10$ , а цифры числа являются коэффициентами при степенях 10, т. е. изобразим, например, число 327 в виде

$$327 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7 = 3x^2 + 2x + 7,$$

а число 456 в виде

$$456 = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 = 4x^2 + 5x + 6,$$

то перемножение чисел заменится перемножением многочленов

$$\begin{array}{r}
 \times \begin{array}{r} 3x^2 + 2x + 7 \\ 4x^2 + 5x + 6 \end{array} \\
 \hline
 12x^4 + 23x^3 + 56x^2 + 47x + 42.
 \end{array}$$

Подставив вместо  $x$  его значение  $x = 10$ , получим:

$$\begin{array}{r}
 42 \\
 470 \\
 5600 \\
 23000 \\
 120000 \\
 \hline
 237 \cdot 456 = 149112.
 \end{array}$$

Разница состоит лишь в том, что при перемножении многочленов коэффициенты записываются полностью, при перемножении же чисел записываются лишь единицы, десятки же добавляются в виде единиц к следующей группе произведений.

Изложенный способ перемножения может быть с удобством применен в случае, если дано несколько пар сомножителей и нужно найти сумму всех произведений, не вычисляя каждого произведения в отдельности. В этом случае для получения некоторой цифры результата берется сумма всех групп произведений, определяющих данную цифру в каждом отдельном произведении пары чисел.

Пример. Найти

$$27 \times 38 + 51 \times 73 + 62 \times 84 + 43 \times 57.$$

Записываем пары сомножителей рядом:

$$\begin{array}{cccc}
 27 & 51 & 62 & 43 \\
 38 & 73 & 84 & 57
 \end{array}$$

Получаем цифру единиц, суммируя произведения:

$$\begin{array}{cccc} 7 & 1 & 2 & 3 \\ | & | & | & | \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{array} = 88, \quad 8 \text{ пишем, } 8 \text{ в остатке.}$$

Для цифры десятков суммируем остаток и произведения:

$$8 \quad \begin{array}{cccc} 2 & 7 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 & 3 \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 3 & 8 & 7 & 3 & 8 & 4 & 5 & 7 \end{array} = 150, \quad 0 \text{ пишем, } 15 \text{ в остатке.}$$

Для цифры сотен получаем:

$$15 \quad \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 6 & 4 \\ | & | & | & | \\ 3 & 7 & 8 & 5 \end{array} = 124, \quad \text{полностью пишем это число сотен.}$$

Итак, сумма четырех произведений равна 12408.

Подобное суммирование значительно ускоряет вычислительную работу при составлении строительных смет и выполнении других подобных подсчетов. Его можно применять и при трехзначных сомножителях, но лишь по приобретении достаточного навыка.

**§ 8. Умножение с поворотом множителя.** Изложенный метод имеет при всей своей простоте один недостаток: необходимо безошибочно подбирать группы произведений. Возникающая при утомлении вычислителя рассеянность часто приводит к неправильному составлению групп. Поэтому постараемся найти метод механического составления групп, чтобы устранить возможность получения ошибок от неправильного соединения цифр.

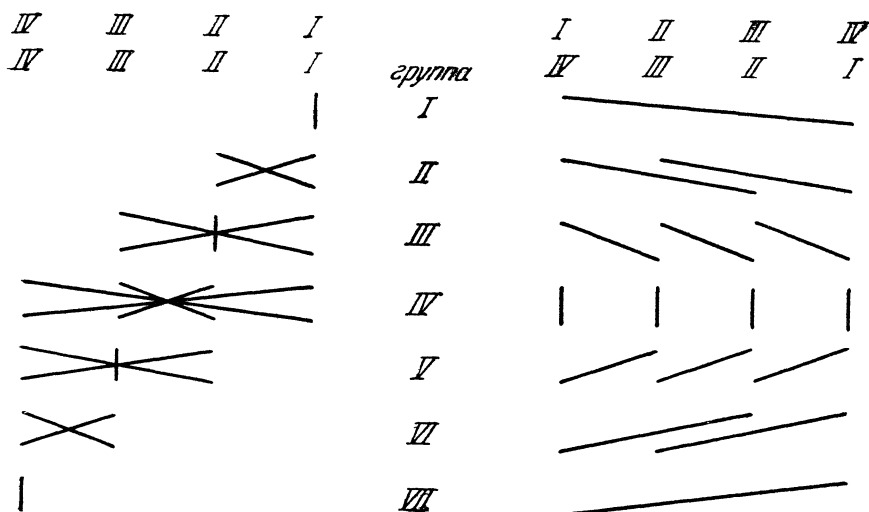
Рассмотрим, что получится, если мы напомним множимое в обратном порядке, т. е. вместо обычной записи

IV III II I  
IV III II I

(взяты четырехзначные сомножители), напомним числа так:

I II III IV  
IV III II I.

Сравним схемы перемножения для обоих случаев:



Мы видим, что в каждой группе обратной схемы все черточки параллельны. Поясним теперь, как воспользоваться этим обстоятельством.

Пусть даны два множителя. Записываем один из них на основном листе бумаги, а другой — в обратном порядке у нижнего края дополнительного листа бумаги и приставляем второй множитель к первому так, как показано ниже:

$$\begin{array}{r} \{ \quad \quad \quad \text{I II III IV} \} \\ \text{IV III II I} \\ \hline \text{I} \end{array}$$

Перемножаем стоящие друг над другом цифры (I—I) и записываем первую цифру произведения так же, как и в предыдущем способе. Запоминаем остаток.

Затем переставляем множимое на один знак левее:

$$\begin{array}{r} \{ \quad \quad \quad \text{I II III IV} \} \\ \text{IV III II I} \\ \hline \text{II I} \end{array}$$

С имеющимся остатком складываем произведения цифр, стоящих друг над другом (I—II и II—I), записываем вторую цифру произведения и запоминаем новый остаток.

Снова передвигаем множимое на один знак левее, складываем остаток и произведения I—III, II—II, III—I и т. д. до конца перемножения.

Поясним сказанное на примере. Помножим

$$4327 \cdot 1634.$$

Число 4327 записываем в обратном порядке и приставляем к числу 1634:

$$\begin{array}{r} \{ \quad 7234 \} \\ \text{1634} \\ \hline 8 \end{array} \quad 7 \cdot 4 = 28. \quad \begin{array}{r} \text{Пишем} \quad \text{Остаток} \\ 8 \quad \quad 2 \end{array}$$

Передвигаем на один знак:

$$\begin{array}{r} \{ \quad 7234 \} \\ \text{1634} \\ \hline 18 \end{array} \quad 2 + 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 31 \quad \begin{array}{r} 1 \quad 3 \end{array}$$

и т. д.:

$$\begin{array}{r} \{ \quad 7234 \} \\ \text{1634} \\ \hline 318 \end{array} \quad 3 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 63 \quad \begin{array}{r} 3 \quad 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \{ 7234 \} \\ \text{1634} \\ \hline 0318 \end{array} \quad 6 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 50 \quad \begin{array}{r} 0 \quad 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \{ 7234 \} \\ \text{1634} \\ \hline 70318 \end{array} \quad 5 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 37 \quad \begin{array}{r} 7 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \{ 7234 \} \\
 \underline{1634} \quad 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 6 = 30 \qquad 0 \qquad 3 \\
 070318 \\
 \{ 7234 \} \\
 \underline{1634} \quad 3 + 4 \cdot 1 = 7 \qquad 7 \qquad 0 \\
 7070318
 \end{array}$$

Итак,

$$1634 \cdot 4327 = 7070318.$$

Этот способ перемножения чисел дает возможность после одного — двух дней упражнений вычислять со скоростью, близкой к скорости работы на арифмометре. Необходимо лишь весьма четко суммировать произведения стоящих друг над другом пар цифр. Предположим, нужно сложить

$$5 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3.$$

При вычислении нужно произносить (вслух или мысленно) лишь частичные суммы в такой последовательности: „было пять, стало семь, стало двадцать пять, стало тридцать семь“.

Цель упражнения состоит в том, чтобы машинально видеть вместо пары  $3 \cdot 6$  соответствующее произведение 18, добавляемое к только что полученной частичной сумме 7.

Для ясности возьмем уже рассмотренный нами пример  $327 \cdot 456$ . Запишем в обратном порядке множитель 456. Получим взаимное расположение основного и приставляемого листов бумаги:

$$\begin{array}{r}
 \{ \quad 654 \} \\
 \underline{\quad 327}
 \end{array}$$

Первое положение: сорок два (записываем 2), в уме четыре.

Второе положение: было четыре, стало шестнадцать, стало пятьдесят один (записываем 1), в уме пять.

Третье положение: было пять, стало двадцать три, стало тридцать три, стало шестьдесят один (записываем 1), в уме шесть.

Четвертое положение: было шесть, стало двадцать один, стало двадцать девять (записываем 9), в уме два.

Пятое положение: было два, стало четырнадцать (пишем 14).

Проследите внимательно за этими действиями и вам станет ясна необходимость предельной четкости выполнения подсчетов. Только при этом можно добиться хороших результатов, увеличив скорость вычисления в два — три раза.

Этот способ применим также для получения сразу суммы нескольких произведений. Возьмем уже рассмотренный пример нахождения суммы

$$27 \cdot 38 + 51 \cdot 73 + 62 \cdot 84 + 43 \cdot 57.$$

Первые сомножители каждой пары записываем на основном листе, на некотором расстоянии друг от друга. Затем на краю приставляемого листа записываем в обратном порядке вторые сомножители — точно над первыми:

$$\begin{array}{r}
 \{ 83 \ 37 \ 48 \ 75 \} \\
 \underline{27 \ 51 \ 62 \ 43}
 \end{array}$$



После этого переводим приставляемый листок в первое положение, когда друг над другом во всех четырех парах чисел стоят единицы:

$$\begin{array}{r} \{ 83 \quad 37 \quad 48 \quad 75 \} \\ \hline 27 \quad 51 \quad 62 \quad 43 \end{array}$$

Суммируем четыре произведения стоящих друг над другом пар цифр, передвигаем множимое на один знак левее, прибавляем к остатку восемь произведений, опять передвигаем листок налево и заканчиваем вычисление.

После того как вы привыкните пользоваться ускоренным методом умножения, попробуйте сделать это упражнение обычным способом, т. е. перемножьте все четыре пары чисел и сложите произведения. Вы убедитесь в том, насколько общепринятый способ вычисления длиннее и утомительнее.

При пользовании дополнительным листком количество цифр в сомножителях обуславливает лишь число перестановок листка, и неодинаковое количество знаков во множимом и множителе никаких осложнений не вызывает.

**§ 9. Проверка умножения.** Для того чтобы быть абсолютно уверенным в правильности цифр полученного произведения, можно прибегнуть лишь к одному средству — попросить другое лицо перемножить заданные числа, после чего сравнить результаты обоих подсчетов. Так и поступают в вычислительных организациях при проведении ответственных подсчетов, когда работают независимо друг от друга два вычислителя (или две группы вычислителей), результаты работы которых время от времени сверяются третьим лицом.

Однако есть простой прием, не требующий двойной работы и дающий хотя и не абсолютную, но все-таки достаточную уверенность в том, что допущенная ошибка будет обнаружена. Им является так называемый способ девяти. Сущность способа девяти состоит в следующем.

Пусть даны сомножители  $A$  и  $B$ , дающие при делении на 9 остатки  $a$  и  $b$ , произведение которых дает, в свою очередь, при делении на 9, остаток  $d$ . Иными словами, пусть

$$A = 9A_1 + a,$$

$$B = 9B_1 + b,$$

$$ab = 9n + d.$$

Найдем остаток от деления на 9 произведения чисел  $A$  и  $B$ . Имеем:

$$\begin{aligned} AB &= (9A_1 + a)(9B_1 + b) = 81A_1B_1 + 9aB_1 + 9bA_1 + ab = \\ &= 9(9A_1B_1 + aB_1 + bA_1 + n) + d. \end{aligned}$$

Следовательно, искомый остаток равен  $d$ .

Известно, что число делится на 9, если сумма цифр его делится на 9. Следовательно, для нахождения остатка от деления числа на 9 достаточно разделить на 9 не само число, а только сумму его цифр; полученный остаток и будет искомым. Найдя таким образом остатки  $a$ ,  $b$  и  $d$ , проверяем: если остаток от деления на 9 произведения чисел  $A$  и  $B$  не равен  $d$ , то вычисление произведено неправильно. Если этот остаток равен  $d$ , то числа  $A$  и  $B$  перемножены правильно или же в результате имеется ошибка, кратная девяти и не меняющая остатка от деления полученного произведения на 9. Поскольку во время промежуточных вычислений чаще всего ошибаются на одну или две единицы, ошибки на величину, кратную девяти, маловероятны, и проверка эта достаточно надежна.

Проверим правильность произведения

$$3271 \cdot 4562 = 14\,922\,402.$$

Суммы цифр                      13    17            24

Остатки от деления на 9    4       8            6

Произведение остатков                      32

Остаток от деления на 9             $5 \neq 6$

Действие выполнено неверно. Действительно, произведение этих чисел равно 14 922 302 и при делении на 9 дает в остатке 5.

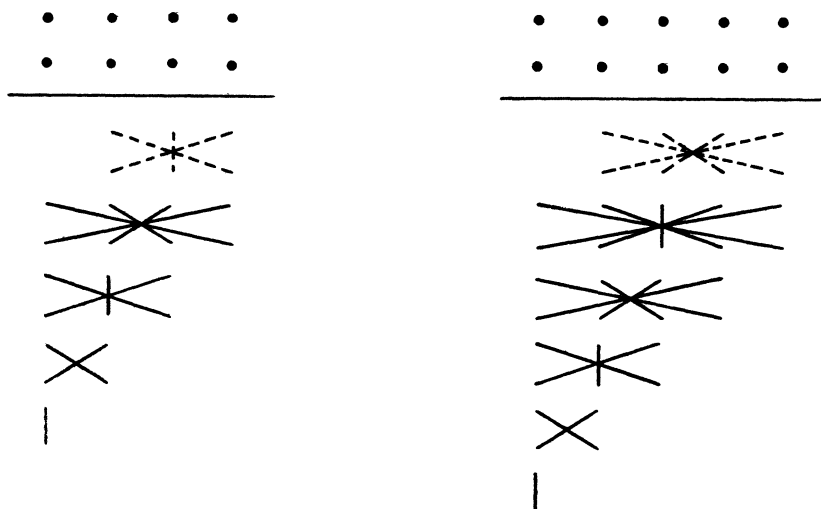
Проверка по способу девяти должна делаться в уме, иначе она становится слишком громоздкой.

**§ 10. Приближенное умножение.** Если мы перемножаем два  $n$ -значных числа, то в произведении мы получим  $2n$  или  $2n - 1$  цифр. Между тем из них достоверны лишь первые  $n$  цифр, остальные же мы можем отбросить или заменить нулями без ущерба для точности вычисления.

Условимся не вычислять всегда  $n - 1$  цифру с правого края произведения; тогда в произведении, состоящем из  $2n$  знаков, мы будем иметь некоторую излишнюю точность. При этом схемы систематического умножения примут упрощенный вид.

Вычисления мы будем начинать с  $(n - 1)$ -й группы произведений пар цифр, причем полученную для нее сумму произведений округлим вверх до полного числа десятков и это число примем за остаток, прибавляемый к произведениям следующей группы, начиная с которой будем выписывать цифры произведения данных чисел.

Приводим вид упрощенных схем для перемножения четырехзначных и пятизначных чисел:



Пунктиром даны группы, суммы которых округляются до полных десятков.  
Пример.

$$\begin{array}{r} \times 3271 \\ 4562 \\ \hline 14923000. \end{array}$$

Точное произведение равно 14 922 302.

Соответственно и при применении способа умножения со вспомогательным листком вычисление можно начинать не с первого положения листка, а лишь тогда, когда с правой стороны записанного на листке сомножителя останется только одна цифра, не имеющая пары. В этом положении произведения пар суммируются, дополняются до полного числа десятков, и лишь со следующего положения листка начинается запись знаков искомого произведения.

Для рассматриваемого примера мы получим начальное положение листка:

$$\begin{array}{r} \{ 1723 \} \\ 4562 \end{array}$$

Округляя, получаем остаток 6, добавляемый при следующем положении листка:

$$\begin{array}{r} \{ 1723 \} \\ 4562 \\ \hline 3 \text{ (6 в уме)} \end{array}$$

и далее идем обычным путем. По окончании вычисления приписываем к результату справа три нуля.

Само собой разумеется, приближенное произведение не может быть проверено способом девяти. Поэтому единственную гарантию правильности здесь может дать лишь внимательность, проявленная во время работы.

**§ 11. Деление.** Если при умножении можно добиться полного устранения промежуточных записей, то деление и в упрощенной форме не может быть полностью от них избавлено, хотя все же число их уменьшается в три — четыре раза, соответственно ускоряя получение результатов.

Изложенный ниже способ деления представляет собою некоторое развитее приемов, применяющихся в коммерческой арифметике. Состоит он в следующем.

При обычном делении, например, числа 7326 на 314, мы получаем следующую картину записей:

$$\begin{array}{r|l} 7326 & 314 \\ 628 & 23,33... \\ \hline 1046 & \\ 942 & \\ \hline 1040 & \\ 942 & \\ \hline 980 & \\ 942 & \\ \hline 38... & \end{array}$$

В нашем способе мы, во-первых, не будем писать вычитаемых чисел, а только лишь одни остатки, так что запись будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{r|l} 7326 & 314 \\ 1046 & 23,33... \\ 1040 & \\ 980 & \\ 38... & \end{array}$$

и, кроме того, ограничимся имеющимися в наличии знаками делимого, не добавляя фиктивных нулей:

$$\begin{array}{r} 7326 \\ 1046 \\ 104 \\ 10 \end{array} \left| \begin{array}{r} 314 \\ 23,33 \end{array} \right.$$

Вместо 25 цифр промежуточных записей оказалось возможным ограничиться девятью.

Начнем с первого упрощения; разделим, например, 3245 на 438.

Первой из вычислительных операций в обычном способе является вычитание произведения делителя на первую цифру частного — числа 3066:

$$\begin{array}{r} 3245 \\ - 3066 \\ \hline 1790 \end{array} \left| \begin{array}{r} 438 \\ 7 \end{array} \right.$$

Вычитаемое 3066 может быть вычтено по частям таким образом:

$$\begin{array}{r} 3245 \\ - 56 \\ - 21 \\ - 28 \\ \hline 1790 \end{array} \left| \begin{array}{r} 438 \\ 7 \end{array} \right.$$

Для того чтобы вычесть из 3245 первое произведение  $7 \cdot 8 = 56$ , мы должны занять у числа, стоящего в делимом левее цифры 5, шесть единиц. Тогда получим цифру остатка  $65 - 56 = 9$ . Чтобы снять эти 6 единиц, прибавляем их к следующему вычитаемому:

$$6 + 7 \cdot 3 = 27$$

$$\begin{array}{r} 3245 \\ - 56 \\ \hline 9 \end{array} \left| \begin{array}{r} 438 \\ 7 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 7 \cdot 8 = 56 \\ 65 - 56 = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324. \\ - 27 \\ \hline 79 \end{array} \left| \begin{array}{r} 438 \\ 7 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 6 + 7 \cdot 3 = 27 \\ 34 - 27 = 7. \end{array}$$

Заняв у числа 32 три единицы, мы получаем цифру остатка  $34 - 27 = 7$ , а занятые 3 единицы прибавляем к следующему вычитаемому.

Продолжая вычисления, получаем последовательность действий:

$$\begin{array}{r} 32.. \\ - 31 \\ \hline 179 \end{array} \left| \begin{array}{r} 438 \\ 7 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 3 + 7 \cdot 4 = 31 \\ 32 - 31 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1790 \\ - 32 \\ \hline 8 \end{array} \left| \begin{array}{r} 438 \\ .4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 4 \cdot 8 = 32 \\ 40 - 32 = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 179. \\ - 16 \\ \hline 38 \end{array} \left| \begin{array}{r} 438 \\ .4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 4 + 4 \cdot 3 = 16 \\ 19 - 16 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17.. \\ - 17 \\ \hline 38 \end{array} \left| \begin{array}{r} 438 \\ .4 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 1 + 4 \cdot 4 = 17 \\ 17 - 17 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 3800 & 438 \\
 \underline{64} & \underline{..08} \\
 6 & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 8 \cdot 8 = 64 \\
 70 - 64 = 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 380. & 438 \\
 \underline{31} & \underline{...8} \\
 96 & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 7 + 8 \cdot 3 = 31 \\
 40 - 31 = 9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 38.. & 438 \\
 \underline{36} & \underline{...8} \\
 296 & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 4 + 8 \cdot 4 = 36 \\
 33 - 36 = 2
 \end{array}$$

и т. д.

Все эти вычисления нужно делать в уме. Рассмотрим еще один пример:

$$\begin{array}{r}
 728'4 \\
 904 \\
 2660 \\
 1080 \\
 1230 \\
 2730 \\
 1780...
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 319 \\
 \hline
 22,8338
 \end{array}$$

Ход вычислений:

			Заняли
1)	$2 \cdot 9 = 18$	$18 - 18 = 0$	1
	$1 + 2 \cdot 1 = 3$	$12 - 3 = 9$	1
	$1 + 2 \cdot 3 = 7$	$7 - 7 = 0$	
2)	$2 \cdot 9 = 18$	$24 - 18 = 6$	2
	$2 + 2 \cdot 1 = 4$	$10 - 4 = 6$	1
	$1 + 2 \cdot 3 = 7$	$9 - 7 = 2$	
3)	$8 \cdot 9 = 72$	$80 - 72 = 8$	8
	$8 + 8 \cdot 1 = 16$	$16 - 16 = 0$	1
	$1 + 8 \cdot 3 = 25$	$25 - 25 = 0$	

и т. д.

После одного—двух часов упражнений непосредственная запись остатков не представляет затруднений. Тогда можно приступить ко второму упрощению записи.

В только что рассмотренном примере первые два знака частного получаются с использованием всех знаков делимого, после чего остается остаток 266.

$$\begin{array}{r|l}
 7284 & 319 \\
 904 & \underline{22} \\
 266 & 
 \end{array}$$

Дополняя этот остаток цифрой 0, мы вводим фиктивную цифру, в точности которой у нас не может быть никакой уверенности. Поэтому, чтобы не добавлять лишних знаков, вместо того, чтобы увеличивать остаток, будем уменьшать делитель. Отбросив в делителе один знак, мы сможем разделить остаток на уменьшенный делитель — получим цифру 8:

$$\begin{array}{r|l}
 266 & 31'9 \\
 & \underline{..8}
 \end{array}$$

Если мы теперь будем вычитать из числа 266 произведение  $8 \cdot 31$ , то получим некоторую неточность из-за недоучета дробной части делителя '9. Поэтому при вычитании учитываем и ее следующим образом:

$$\begin{array}{r} 266 \quad | \quad 31'9 \\ 11 \quad | \quad \dots 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} 8 \cdot 9 = 7 \\ 7 + 8 \cdot 1 = 15 \\ 16 - 15 = 1 \\ \bar{1} + 8 \cdot 3 = 25 \\ 26 - 25 = 1. \end{array}$$

Для получения следующего знака частного опять отбрасываем один знак в делителе и сразу получаем последний знак частного 3.

$$\begin{array}{r} 11 \quad | \quad 31'9 \\ \quad | \quad \dots 3 \\ \hline \end{array}$$

Общий вид записи будет:

$$\begin{array}{r} 7284 \quad | \quad 31'9 \\ 904 \quad | \quad 22,8\bar{3} \\ 266 \\ 11 \end{array}$$

Рассмотрим еще один пример

$$\begin{array}{r} 84325 \quad | \quad 27'3'6'3 \\ 2236 \quad | \quad 3,0817 \\ 47 \\ 20 \end{array}$$

Последовательность действий:

			Заняли
1)	$3 \cdot 3 = 9$	$15 - 9 = 6$	1
	$1 + 3 \cdot 6 = 19$	$\bar{22} - 19 = 3$	2
	$2 + 3 \cdot 3 = 11$	$\bar{13} - 11 = 2$	1
	$1 + 3 \cdot 7 = 22$	$\bar{24} - 22 = 2$	2
	$2 + 3 \cdot 2 = 8$	$\bar{8} - 8 = 0$	

2) Поскольку все знаки делимого исчерпаны, отделяем один знак у делителя. Остаток 2236 меньше делителя  $2736'3$ , поэтому пишем в частном 0 и уменьшаем делитель еще на один знак. Получаем:

$$\begin{array}{r} 2236 \quad | \quad 273'63 \\ \quad | \quad \dots 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} 8 \cdot 6 = 5 \\ 5 + 8 \cdot 3 = 29 \\ 3 + 8 \cdot 7 = 59 \\ 6 + 8 \cdot 2 = 22 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Заняли} \\ 36 - 29 = 7 \\ \bar{63} - 59 = 4 \\ \bar{22} - 22 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Заняли} \\ 3 \\ 6 \end{array}$$

$$3) \quad \begin{array}{r} 47 \quad | \quad 27'363 \\ 20 \quad | \quad \dots 1 \\ \hline \end{array}$$

$$4) \quad \begin{array}{r} 20 \quad | \quad 2'7363 \\ \quad | \quad \dots 7 \\ \hline \end{array}$$

Запятая в частном ставится, как обычно, из учета числа знаков в делимом и делителе.

**§ 12. Приближенное представление биномов.** Прежде чем переходить к рассмотрению других вычислительных операций, остановимся на приеме, лежащем в основе приближенного вычисления самых различных функций.

Как известно, разложение в ряд  $n$ -й степени двучлена  $1+x$  имеет вид:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

Пусть абсолютная величина  $x$  весьма мала по сравнению с единицей, т. е.  $|x| \ll 1$ . Тогда можно приближенно полагать

$$(1+x)^n \approx 1 + nx, \quad (1)$$

пренебрегая членами, содержащими  $x$  во второй и более высоких степенях, ввиду их малости.

Формула (1) дает возможность приближенно вычислять различные функции. Например:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} \approx 1 + \frac{x}{3},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{x}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}} \approx 1 - \frac{x}{3},$$

$$(1+x)^2 \approx 1 + 2x, \quad (1+x)^3 \approx 1 + 3x,$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \approx 1 - x, \quad \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + x,$$

$$\frac{1+x}{1-x} = (1+x)(1-x)^{-1} \approx (1+x)^2 \approx 1 + 2x,$$

$$\frac{1-x}{1+x} = (1-x)(1+x)^{-1} \approx (1-x)^2 \approx 1 - 2x.$$

Чем меньше абсолютная величина  $x$ , тем меньше будет погрешность от замены точного выражения приближенным. Рассмотрим применения этого преобразования.

**§ 13. Вычисление квадратных корней—первый способ.** Начнем с вычисления квадратных корней. Пусть задано число  $N$  и нужно найти  $\sqrt{N}$ .

Представим число  $N$  в виде

$$N = n^2 + a,$$

где  $n$  — величина, более или менее близкая к действительному значению  $\sqrt{N}$ , а

$$a = N - n^2$$

— величина положительная или отрицательная, небольшая по сравнению с  $n^2$ .

В этом случае, применив преобразование § 12, получим

$$\sqrt{n^2 + a} = n \sqrt{1 + \frac{a}{n^2}} \approx n \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{n^2} \right) = n + \frac{a}{2n}. \quad (2)$$

Эта формула дана Ньютоном.

**Пример.** Найти  $\sqrt{425}$ .

Представляем данное число в виде  $425 = 20^2 + 25$ ; получаем

$$\sqrt{425} = \sqrt{20^2 + 25} = 20 + \frac{25}{40} = 20,62.$$

Для дальнейшего уточнения берем за  $n$  полученное нами приближенное значение корня 20,62. Имеем:

$$n^2 = 20,62^2 = 425,1844, \quad a = -0,1844,$$

$$\sqrt{425} = 20,62 - \frac{0,1844}{41,24} = 20,62 - 0,0044714 = 20,6155286.$$

Более точное значение искомого корня — 20,6155281, т. е. наш результат получен с точностью восьми знаков. Вообще, каждое новое приближение удваивает число точных знаков корня.

**§ 14. Вычисление квадратных корней—второй способ.** При вычислении квадратных корней по формуле Ньютона некоторое затруднение представляет вычисление  $n^2$ . Это затруднение можно обойти.

Действительно, мы можем преобразовать формулу (2) следующим образом:

$$n + \frac{a}{2n} = \frac{2n^2 + a}{2n} = \frac{n^2 + (n^2 + a)}{2n} = \frac{n^2 + N}{2n} = \frac{n + \frac{N}{n}}{2}.$$

Итак,

$$\sqrt{N} = \frac{n + \frac{N}{n}}{2}, \quad (3)$$

где  $n$  — предварительно полученное приближенное значение корня. И здесь каждое новое приближение удваивает число точных знаков.

Найдем опять  $\sqrt{425}$ . За первое приближение берем  $n = 20$ . Получаем

$$\sqrt{425} = \frac{20 + \frac{425}{20}}{2} = \frac{20 + 21,25}{2} = 20,62.$$

Уточняем:

$$\sqrt{425} = \frac{20,62 + \frac{425}{20,62}}{2} = \frac{20,62 + 20,61057}{2} = \frac{41,231057}{2} = 20,615528.$$

**§ 15. Вычисление кубических корней.** Кубические корни, так же как и квадратные, мы можем извлекать двумя различными приемами.

Если представить число  $N$  в виде  $n^3 + a$ , то получим

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{n^3 + a} = n \sqrt[3]{1 + \frac{a}{n^3}} = n \left( 1 + \frac{a}{3n^3} \right) = n + \frac{a}{3n^2}. \quad (4)$$

Чтобы не вычислять куба приближенного значения корня, необходимого для дальнейших приближений, преобразуем формулу (4):

$$n + \frac{a}{3n^2} = \frac{3n^3 + a}{3n^2} = \frac{2n^3 + (n^3 + a)}{3n^2} = \frac{2n^3 + N}{3n^2} = \frac{2n + \frac{N}{n^2}}{3}. \quad (5)$$

Найдем  $\sqrt[3]{425}$ , пользуясь обеими формулами (4) и (5). Используя формулу (4), находим:

$$\begin{aligned} n &= 7,5, & 3n^3 &= 168,75, \\ n^2 &= 56,25, & n^3 &= 421,875, \\ a &= 3,125, \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{425} = 7,5 + \frac{3,125}{168,75} = 7,5 + 0,018 = 7,518;$$

$$\begin{aligned} n &= 7,518, & 3n^3 &= 169,56, \\ n^2 &= 56,520, & n^3 &= 424,91980, \end{aligned}$$

$$a = 0,08020,$$

$$\sqrt[3]{425} = 7,518 + \frac{0,08020}{169,56} = 7,518 + 0,0004730 = 7,5184730.$$



Все восемь знаков верные.

Используя формулу (5), находим:

$$n = 7,5, \quad n^2 = 56,25,$$

$$\sqrt[3]{425} = \frac{15,00 + \frac{425}{56,25}}{3} = \frac{15,00 + 7,555}{3} = \frac{22,555}{3} = 7,518;$$

$$n = 7,518, \quad n^2 = 56,520324,$$

$$\sqrt[3]{425} = \frac{15,036 + \frac{425}{56,520324}}{3} = \frac{15,036 + 7,5194190}{3} = \frac{22,5554190}{3} = 7,5184730.$$

**§ 16. Вычисление корней степени выше третьей.** Для корней более высоких целых степеней мы получим следующие вычислительные формулы:

$$\sqrt[k]{N} = \sqrt[k]{n^k + a} = n + \frac{a}{kn^{k-1}}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{N} &= n + \frac{a}{kn^{k-1}} = \frac{kn^k + a}{kn^{k-1}} = \frac{(k-1)n^k + (n^k + a)}{kn^{k-1}} = \\ &= \frac{(k-1)n^k + N}{kn^{k-1}} = \frac{(k-1)n + \frac{N}{n^{k-1}}}{k}. \end{aligned} \quad (7)$$

Применение этих формул, однако, мало целесообразно, так как для корней высоких степеней предпочтительнее вычисление с помощью логарифмов.

**§ 17. Умножение в уме.** Если необходимо получить результаты со многими точными знаками, вычисление обязательно нужно делать на бумаге. Однако иногда нужно быстро прикинуть, что получится в результате расчета, и при этом достаточно пары точных знаков. Такие подсчеты полезно уметь делать в уме. При этом, конечно, необходимо пользоваться особыми приемами вычисления. Эти приемы нельзя рекомендовать для общего применения, но лицам, имеющим склонность к вычислительной работе, они могут принести пользу.

Пусть, например, нужно перемножить два двузначных числа  $a$  и  $b$ , причем

$$a = A(1 + \delta_1), \quad b = B(1 + \delta_2), \quad (8)$$

где  $A$  и  $B$  — числа, кратные десяти, ближайšie к  $a$  и  $b$ , а  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — сравнительно небольшие величины.

Для произведения  $ab$  получим:

$$ab = AB(1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \approx AB(1 + \delta_1 + \delta_2) = AB + AB(\delta_1 + \delta_2).$$

Иными словами, пусть, например,  $a$  на  $\delta_1$  процентов больше, чем  $A$ , а  $b$  на  $\delta_2$  процентов больше, чем  $B$ . Тогда произведение  $ab$  будет на  $\delta_1 + \delta_2$  процентов больше, чем произведение  $AB$ .

**Примеры.**

1. Перемножить  $53 \cdot 42$ .

53 на 6% больше, чем 50,

42 на 5% больше, чем 40,

53 · 42 на 11% больше, чем 50 · 40, т. е. произведение равно  $2000 + 220 = 2220$  (точнее 2226).

2. Перемножить  $78 \cdot 63$ .

78 на  $2\frac{1}{2}\%$  меньше, чем 80,

63 на  $5\%$  больше, чем 60,

$78 \cdot 63$  на  $2\frac{1}{2}\%$  больше, чем  $80 \cdot 60$ , т. е. произведение равно  $4800 + 120 = 4920$  (точнее 4914).

3. Перемножить  $93 \cdot 27$ .

93 на  $3\%$  больше, чем 90,

27 на  $10\%$  меньше, чем 30,

$93 \cdot 27$  на  $7\%$  меньше, чем  $90 \cdot 30$ , т. е. произведение равно  $2700 - 190 = 2510$  (точнее 2511).

**§ 18. Вычисление в уме квадратных корней.** Вычисление в уме квадратных корней основано на применении формулы Ньютона. Кроме того, необходимо знать на память величину квадратов первых тридцати чисел и прочих двузначных чисел, кратных пяти.

Квадраты двузначных чисел, оканчивающихся на 5, помнить легко: первые два знака представляют собою произведение цифры десятков числа на следующую, а затем стоит 25. Например,  $65^2 = 4225$  ( $6 \cdot 7 = 42$ ),  $35^2 = 1225$  ( $3 \cdot 4 = 12$ ) и т. д.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Найти  $\sqrt{3386}$ .

Представляем данное число в виде  $3600 - 214$ . Искомый корень равен 60 минус  $\frac{214}{120}$ , т. е. примерно 60 минус 1,8.

Итак,  $\sqrt{3386} \approx 58,2$  (точнее 58,19).

2. Найти  $\sqrt{4793}$ .

$4793 = 4900 - 107$ ;  $\sqrt{4793}$  равен 70 минус  $\frac{107}{140}$ , т. е. примерно 70 минус 0,8.

Итак,  $\sqrt{4793} \approx 69,2$  (точнее 69,23).

3. Найти  $\sqrt{590}$ .

$590 = 576 + 14$ ;  $\sqrt{590}$  равен 24 плюс  $\frac{14}{48}$ , т. е. примерно 24,3 (точнее 24,29).

При некотором навыке можно достичь точности вычислений такой же, как на счетной линейке, и даже несколько более высокой при одной и той же скорости вычисления.

**§ 19. Вычисление в уме кубических корней.** Вычисление кубических корней незатруднительно в диапазоне чисел от 100 до 1000, если только помнить на память кубы чисел от 4,5 до 10, взятых через пол-единицы:

Число . . . 4,5   5   5,5   6   6,5   7   7,5   8   8,5   9   9,5   10

Куб . . . . 91   125   166   216   275   343   422   512   614   729   857   1000

Вычисление ведется также по формуле Ньютона.

**Примеры.**

1. Найти  $\sqrt[3]{582}$ .

$582 = 614 - 32$ . Утроенный квадрат первого приближения, равного 8,5, будет 216. Итак,

$$\sqrt[3]{582} \approx 8,5 - \frac{32}{216} \approx 8,35 \text{ (точнее 8,349).}$$

В дальнейших примерах постарайтесь разобраться и проследить ход вычисления.

$$2. \sqrt[3]{469} = 7,5 + \frac{47}{168} \approx 7,78 \text{ (точнее } 7,77).$$

$$3. \sqrt[3]{253} = 6,5 - \frac{22}{126} \approx 6,32 \text{ (точнее } 6,32).$$

$$4. \sqrt[3]{810} = 9,5 - \frac{47}{270} \approx 9,33 \text{ (точнее } 9,32).$$

Для чисел, меньших, чем 100, или больших, чем 1000, вычисление кубических корней весьма затруднительно, так как нужно помнить слишком много опорных значений кубов, без них же точность вычисления будет слишком низкой.

**§ 20. Логарифмирование в уме.** Для логарифмирования в уме нужно помнить некоторое количество логарифмов на память. Пусть мы помним десятичный логарифм числа  $N$ , а нужно вычислить десятичный логарифм числа  $n$ , несколько большего, чем  $N$ :

$$n = N(1 + \delta).$$

При  $0 < \delta < 0,20$  можно приближенно полагать:

$$\lg N(1 + \delta) \approx \lg N + 0,4\delta.$$

Для запоминания эту зависимость удобно представить так: если число  $n$  больше числа  $N$  на  $k\%$ , то, чтобы получить логарифм числа  $n$ , нужно к логарифму числа  $N$  прибавить  $4k$  единиц третьего десятичного знака. При  $0 < k < 20(\%)$  ошибка не превысит одной единицы третьего десятичного знака, т. е. вычисление будет в пределах точности счетной линейки.

Опорными пунктами вычисления будут логарифмы\*) следующих чисел:

Число	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6	7	8	9
Логарифм	000	079	146	204	255	301	398	477	544	602	653	699	778	845	903	954.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Найти  $\lg 273$ .

$$273 = 250 + 23, \text{ т. е. } 273 \text{ больше, чем } 250 \text{ на } 9\frac{1}{4}\%; \lg 273 = \lg 250 + 0,037 = 2,398 + 0,037 = 2,435 \text{ (точнее } 2,436).$$

2. Найти  $\lg 825$ .

$$825 \text{ на } 3\% \text{ больше, чем } 800; \lg 825 = 2,903 + 0,012 = 2,915 \text{ (точнее } 2,916).$$

Для того чтобы еще уменьшить погрешность, при  $2\% < k < 15\%$  надо к вычисленному логарифму добавлять одну единицу третьего знака за запятой.

3. Найти  $\lg 223$ .

$$223 \text{ на } 11\frac{1}{2}\% \text{ больше, чем } 200; \lg 223 = 2,301 + 0,046 + 0,001 = 2,348 \text{ (точно).}$$

При потенцировании, т. е. нахождении числа по логарифму, нужно поступать следующим образом. Подобрать ближайший меньший логарифм опорного числа, установить разницу между логарифмами, выразить ее в единицах третьего знака за запятой и разделить на 4. Получится число процентов, на которое нужно увеличить опорное число, чтобы получить искомое. Если это

---

\*) Здесь даны мантиссы логарифмов с точностью до третьего знака.

число процентов лежит в интервале между двумя и пятнадцатью, надо учитывать на четверть процента меньше.

Примеры.

1. Найти  $n$ , если  $\lg n = 0,752$ .

$\lg n = 0,752$  на 0,053 больше, чем  $\lg 5$ . Искомое число на  $13\frac{1}{4}\%$  больше, чем 5. С поправкой учитываем 13%. Получаем  $n = 5,65$  (точно).

2. Найти  $n$ , если  $\lg n = 0,340$ .

$\lg n = 0,340$  на 0,039 больше, чем  $\lg 2$ . Искомое число (с учетом поправки) на  $9\frac{1}{2}\%$  больше, чем 2. Получаем  $n = 2,19$  (точно).

**§ 21. Общие указания.** Необходимо подчеркнуть, что методы, изложенные в § 17—20, не могут быть рекомендованы для общего повседневного пользования, так как они доступны лишь лицам, много вычисляющим.

Зато умение вычислять в уме является весьма полезным для человека, по роду своей работы часто встречающегося с необходимостью проверки чужих расчетов или быстрой прикидки в условиях, исключающих применение таблиц или счетной линейки, например в цехе или в поле.

Заканчивая главу об элементарных вычислениях, необходимо привести основные правила проведения вычислений, сформулированные академиком А. Н. Крыловым.\*)

1. Точность вычислений нужно соотносить с точностью данных, а точность данных — с тою практической потребностью, для которой результат вычисления нужен.

2. При вычислении надо избегать выписывания лишних знаков, ограничивая всегда числа так, чтобы в них все цифры, кроме последней, были верны, и лишь последняя была бы сомнительной.

3. Логарифмами пользоваться с таким числом знаков, сколько их в числах.

4. Малые разности стараться вычислять непосредственно, не вычисляя самих чисел.

5. Для всякого вычисления следует предварительно составить схему, так чтобы каждое число ставилось в свое место. При составлении схем надо заботиться о том, чтобы при действиях над рядом чисел одно действие не шло вперемежку с другими, а напротив, один однообразный процесс сменялся другим, тоже однообразным, производимым над всеми числами ряда.

---

\*) Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1954, стр. 17.

## ГЛАВА II

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

**§ 1. Графические методы решения.** Среди бесконечного множества уравнений вида

$$F(x) = 0$$

мы почти не встречаем таких, корни которых можно определить точно.

Хотя уравнения, приводящиеся к алгебраическим уравнениям степени не выше четвертой, могут быть решены по готовым формулам с любой степенью точности, однако практически уже для уравнений третьей степени эти формулы настолько сложны, что предпочтительнее отыскивать корни, применяя специальные способы приближенного решения уравнений.

Некоторые из способов приближенного решения одинаково применимы к отысканию корней как трансцендентных, так и алгебраических уравнений. Эти способы мы и рассмотрим в настоящей главе. Другие приемы применимы только к алгебраическим уравнениям; они будут рассмотрены в следующей главе.

Однако, каким бы методом мы ни пользовались, применение его будет малоэффективным, если предварительно не сделать графического наброска, показывающего поведение рассматриваемых кривых в районе корня уравнения, а также расположение и число корней. Такой набросок, выполненный на клетчатой или на миллиметровой бумаге, дает возможность разумно выбрать первое приближение, с которого начнется применение метода решения уравнения. Иначе начало расчета может оказаться настолько неудачно выбранным, что вычислительный процесс будет очень медленно приближаться к окончательному значению корня, а в некоторых случаях и вообще не даст его.

Делая набросок, не стоит стремиться к тому, чтобы получить непосредственное графическое решение уравнения, так как проведение графических расчетов с большой точностью дает меньшую скорость работы по сравнению с численными методами и более утомительно. Изящество графических расчетов не может служить оправданием выбора медленного процесса решения поставленной перед вычислителем задачи, так как в вычислении важен только результат, но не способ решения, и необходимо всегда выбирать тот способ, который быстрее и надежнее приводит к цели.

Если графические расчеты и незаменимы в таких случаях, как построение диаграмм Кремоны и в задачах подобного рода, то в широком круге вопросов они не выдерживают сравнения с численными методами. Поэтому за последние годы область применения графических расчетов все более и более сужается. Это не относится к номографическим методам расчета, представляющим собою весьма эффективное сочетание графических и численных элементов, — они получают с годами все большее применение. Номографиче-

ские методы, ввиду их многообразия, требуют особого изучения, и в данной книге рассматриваться не будут.

**§ 2. Метод хорд.** Начнем с наиболее простого способа, имеющего несколько одинаково часто встречающихся названий. Это — способ хорд, или ложного положения, или простой интерполяции. Заключается он в следующем.

Пусть даны (рис. 1) на кривой

$$y = F(x)$$

две точки с координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , лежащие по разные стороны от оси абсцисс, и требуется найти корень уравнения  $F(x) = 0$ , т. е. абсциссу точки пересечения кривой с осью абсцисс.

Не зная действительного очертания кривой между этими двумя точками, мы можем лишь предположить, что оно не слишком отличается от прямой, соединяющей данные точки. Для этой прямой из ее уравнения

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (1)$$

при  $y = 0$  получаем

$$x_{y=0} = x_3 = x_1 - y_1 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}. \quad (2)$$

Вследствие различия между прямой (хордой) и кривой,  $x_3$  не дает еще достаточно близкого значения корня. Для дальнейших приближений нужно соединить новой прямой точку  $(x_3, y_3)$  с той из двух первых точек, которая будет лежать по другую сторону оси абсцисс. Эта прямая пересечет ось в точке с абсциссой

$$x_4 = x_3 - y_3 \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}. \quad (3)$$

По точкам  $(x_3, y_3)$  и  $(x_4, y_4)$ , как наиболее близким к оси абсцисс, нужно найти  $x_5$  и действовать так до тех пор, пока ордината кривой, соответствующая последней из полученных абсцисс, не окажется достаточно близкой к нулю.

Для возможности более быстрого получения корня с требуемой точностью важно, чтобы первые две точки, с которых начинается расчет, были достаточно близкими друг к другу. Для этой цели и важно иметь набросок, позволяющий при малом числе промежуточных точек добиться хороших результатов. Если, не имея наброска, взять первые две точки так, как показано на рис. 2, то вычисление может оказаться малоэффективным: во-первых, потребуется находить слишком много точек, во-вторых, имея несколько точек, трудно определить, какие две из них нужно соединять, чтобы получить новую точку. Соединив, например, точки 4 и 2, получим точку 5a; точки же 3 и 4 приведут к точке 5b и неясно, что предпочесть. Набросок дает возможность получать точки на кривой с наименьшей затратой труда на уточнение корня.

Пусть в соответствии с наброском (рис. 3) мы нашли первое приближение  $x_1$  значения корня уравнения и попутно отметили направление касательной к кривой. Вычислив  $y_1 = F(x_1)$ , изобразим район корня в большом масштабе тут же на рисунке и проведем из точки  $(x_1, y_1)$  прямую, парал-

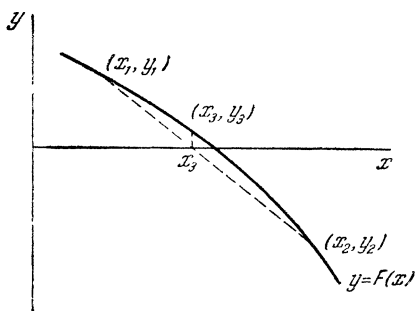


Рис. 1.

лельную полученной касательной, до пересечения с осью абсцисс. Абсцисса точки пересечения  $x_2$  даст точку  $(x_2, y_2)$  настолько близкую к оси абсцисс, что соединение точек  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  приведет к получению  $x_3$ , являющемуся окончательным значением корня.

Пример 1. Найти положительный корень уравнения

$$x^2 - \cos x = 0.$$

Начинаем с построения графика кривой

$$F(x) = x^2 - \cos x.$$

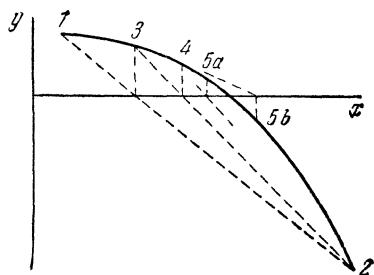


Рис. 2.

Строим отдельно параболу и косинусоиду, после чего вычерчиваем кривую их разности. При построении берем масштаб по оси

абсцисс в два раза больше, чем по оси ординат, чтобы построение не получилось слишком вытянутым вверх.

По графику (рис. 4) примерно имеем  $x_1 = 0,83$ . Вычисляем  $y_1$ , пользуясь таблицами Б. И. Сегала и К. А. Семендяева.\*) Эти таблицы, также как и таблицы Барлоу (таблицы степеней, корней и обратных величин), должен иметь каждый вычислитель, так как математические таблицы справочника Хютте и прочих справочных изданий слишком кратки. Имеем:

$$\begin{array}{r} 0,83^2 = 0,68890 \\ - \cos 0,83 = 0,67488 \\ \hline F(0,83) = 0,01402. \end{array}$$

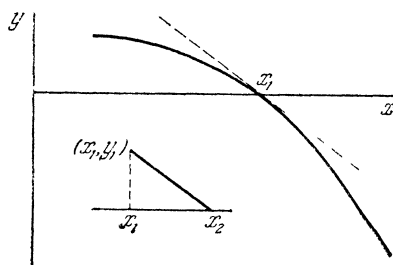


Рис. 3.

На том же рисунке (рис. 4) располагаем построение района корня в стократно увеличенном масштабе. Из точки  $(x_1, y_1)$  проводим прямую, параллельную касательной, проведенной на графике, и получаем  $x_2 \approx 0,8237$ . Вычисляем  $F(0,8237)$ :

$$\begin{array}{r} 0,8237^2 = 0,67848 \\ - \cos 0,8237 = 0,67951 \\ \hline F(0,8237) = -0,00103. \end{array}$$

Формулу для вычисления  $x_3$  можно применять либо вышеприведенную

$$x_3 = x_1 - y_1 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1},$$

либо, что то же самое,

$$x_3 = x_2 - y_2 \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2},$$

в зависимости от того, какая точка ближе к оси абсцисс — 1-я или 2-я. В нашем примере 2-я точка ближе к оси, поэтому применяем второй вариант формулы. Вычисление можно производить на счетной линейке. Получаем

$$\begin{aligned} x_3 &= 0,82370 - (-0,00103) \frac{0,8300 - 0,8237}{0,01402 - (-0,00103)} = \\ &= 0,82370 + 0,00043 = 0,82413. \end{aligned}$$

\*) Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Изд. АН СССР, 1948.

Вычислив  $F(0,82413)$ , убедимся, что все знаки  $x_3$  верны.

В ряде задач, к числу которых относится и только что рассмотренная, достаточно найти по графику значение  $x_1$ , дальнейшее же уточнение можно производить, пользуясь таблицами функций.

Так, мы получили  $x_1 = 0,83$ . Раскрыв таблицы Сегала и Семендяева на стр. 40—41, мы можем сравнить значения  $x^3$  и  $\cos x$  и подобрать то значение  $x$ , при котором обе эти функции равны, а следовательно,  $F(x)$  обращается в нуль. Имеем:

$x$	$x^2$	$\cos x$	$F(x)$	Разности
0,823	0,67733	0,68002	— 0,00269	
0,824	0,67898	0,67929	— 0,00031	238
0,825	0,68062	0,67856	0,00206	237
0,826	0,68228	0,67782	0,00446	240

Плавность хода разностей показывает, что в пределах каждого интервала можно производить линейную интерполяцию, что и дают применяемые нами формулы.

Имеем:

$$x = 0,824 - (-0,00031) \times \frac{0,825 - 0,824}{0,00206 - (-0,00031)} = 0,82413.$$

Практически было достаточно выписать лишь две строки — для  $x = 0,824$  и  $0,825$ , так что решение с помощью таблиц оказалось бы весьма несложным.

Пример 2. \*) Найти наименьший положительный корень уравнения

$$x - \operatorname{tg} x = 0, \quad \text{т. е. } x = \operatorname{tg} x.$$

Сперва строим графики функций

$$y = x \text{ и } y = \operatorname{tg} x,$$

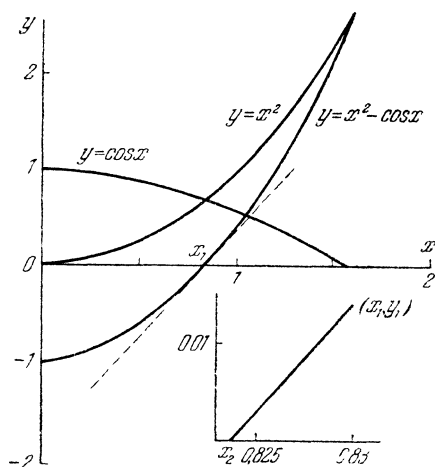


Рис. 4.

чтобы найти приближенное значение корня. Из рис. 5 видим, что искомый корень равен примерно 4,5.

На стр. 186 таблиц Сегала и Семендяева мы находим два значения  $x$ , лежащих по разные стороны от корня:

$x$	$\operatorname{tg} x$	$F(x)$
4,4930	4,4847	0,0083
4,4940	4,5060	— 0,0120

$$x = 4,493 - 0,0083 \frac{4,494 - 4,493}{-0,0120 - 0,0083} = 4,49341.$$

Поскольку для всех основных функций существуют таблицы их значений, использование их возможно для большого количества задач.

**§ 3. Метод Ньютона.** Наравне с методом хорд и нередко в комбинации с ним применяется метод Ньютона, или, иначе, метод касательных.

\*) Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, ГТТИ, 1932, стр. 61.



Метод Ньютона заключается в том, что, имея на кривой  $y = F(x)$  точку  $(x_1, y_1)$ , строят в этой точке касательную к кривой и находят ее пересечение с осью абсцисс, дающее значение  $x_2$ . В точке  $(x_2, y_2)$  проделывают те же операции, что и в первой, и находят следующее приближение к точному значению корня  $x_3$ . Так продолжают до тех пор, пока два последующих значения  $x$  не оказываются, в пределах точности вычислений, одинаковыми. Схема операций по методу Ньютона показана на рис. 6.

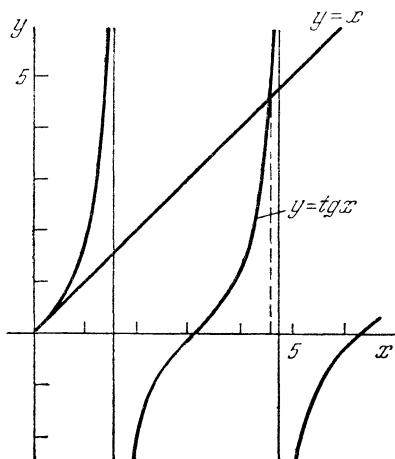


Рис. 5.

Длительность работы по уточнению значения корня и в этом методе зависит от удачности первого приближения. Более того, если в методе хорд при неудачно выбранных первых точках вычисление, хотя и медленно, но все же приводит к желаемому результату, в методе Ньютона не исключена возможность потери корня. Для примера рассмотрим рис. 7.

Если кривая  $y = F(x)$  имеет периодическое очертание, то, начав с неудачно выбранной точки 1, можно попасть в точку 2, с которой начнется определение уже не первого положительного корня (отмечен кружком), а второго. Не зная истинного очертания кривой, нельзя быть уверенным в том, что такого недоразумения не произошло. Поэтому, применяя метод Ньютона, особенно важно правильно определить положение первой опорной точки, а для этого обязательно должен быть построен график функции. При наличии графика уже вторая точка может явиться практически последней, определяя значение корня с вполне приемлемой точностью.

Пример 1. Возьмем уже рассмотренное нами ранее уравнение

$$x^2 - \cos x = 0.$$

Имеем:

$$y = F(x) = x^2 - \cos x,$$

$$y' = F'(x) = 2x + \sin x,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - \cos x_1}{2x_1 + \sin x_1},$$

Для вычисления корней по методу Ньютона нужно, имея функцию  $y = F(x)$ , получить ее производную  $y' = F'(x)$ . Затем из уравнения касательной к кривой в точке  $(x_1, y_1)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = y'_1 \quad (4)$$

найти точку пересечения касательной с осью абсцисс:

$$x_{y=0} = x_2 = x_1 - \frac{y_1}{y'_1}. \quad (5)$$

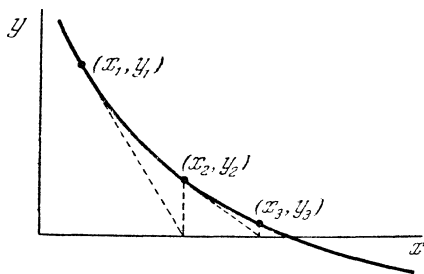


Рис. 6.

а для дальнейших приближений  $x_n$  будет аналогично выражаться через функции  $x_{n-1}$ .

Начальное приближение  $x_1$  возьмем из графика, приведенного на рис. 4:  $x_1 = 0,83$ , а дальнейшие вычисления, проведем по схеме табл. 1. Уже в  $x_2$  погрешность равна всего лишь 0,00002, так что значение  $x_3$  служит, главным образом, для контроля.

Пример 2. Второе рассмотренное нами уравнение было

$$x - \operatorname{tg} x = 0.$$

Имеем:

$$F(x) = x - \operatorname{tg} x,$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = \\ &= -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x, \end{aligned}$$

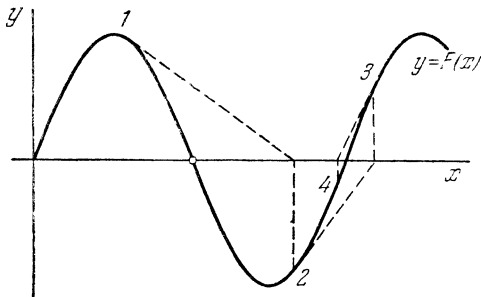


Рис. 7.

$$x_2 = x_1 + \frac{x_1 + \operatorname{tg} x_1}{\operatorname{tg}^2 x_1}.$$

Составляем таблицу вычислений (табл. 2). В результате получаем значение корня  $x_3 = 4,4934$ .

Таблица 1

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$x$	$x^2$	$\cos x$	II—III	$2x$	$\sin x$	V+VI	IV : VII	I—VIII
$x_1 = 0,83$	0,68890	0,67488	0,01402	1,66	0,73793	2,3979	0,00585	$0,82415 = x_2$
$x_2 = 0,82415$	0,67922	0,67918	0,00004	1,66	0,73793	2,4	0,00002	$0,82413 = x_3$

Таблица 2

I	II	III	IV	V	VI
$x$	$\operatorname{tg} x$	I—II	$\operatorname{tg}^2 x$	III : IV	I+V
$x_1 = 4,5$	4,6373	— 0,1373	21,50	— 0,0064	$4,4936 = x_2$
$x_2 = 4,4936$	4,4975	— 0,0039	20,20	— 0,0002	$4,4934 = x_3$

Приводившийся в § 2 гл. II ход решения с проведением касательной к кривой фактически также базировался на применении способа Ньютона, но только не в аналитической, а графической форме.

**§ 4. Метод итерации.** Существенное значение среди методов приближенного решения уравнений имеет метод итерации, или, иначе, повторения. Для возможности его применения заданное уравнение в большинстве случаев необходимо преобразовывать, приводя к определенной форме, удовлетворяющей условиям сходимости вычислительного процесса.

Пусть дано уравнение

$$F(x) = 0. \quad (6)$$

Приведем его к виду

$$F_1(x) = F_2(x) \quad (7)$$

так, чтобы функция  $F_1(x)$  удовлетворяла следующему условию. При любом вещественном  $m$  уравнение

$$F_1(x) = m \quad (8)$$

должно иметь один, вещественный, легко вычисляемый корень.

Вычисление корня уравнения (6), приведенного к виду (7), состоит в следующем: начальное приближенное значение корня  $x_1$  подставляется в правую часть уравнения (7) и из него определяется второе приближенное значение корня. Новое значение снова подставляется в правую часть уравнения (7) и находится третье приближение. Последовательность значений  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , получаемых по схеме

$$\begin{aligned} F_1(x_2) &= F_2(x_1), \\ F_1(x_3) &= F_2(x_2), \\ F_1(x_4) &= F_2(x_3), \\ &\dots \dots \dots \\ F_1(x_{n+1}) &= F_2(x_n), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (9)$$

в ряде случаев приводит к некоторому пределу, являющемуся корнем уравнения (6).

Рассмотрим геометрический смысл этих последовательных повторений цикла вычислений, а также условия, при которых приближения приводят к корню.

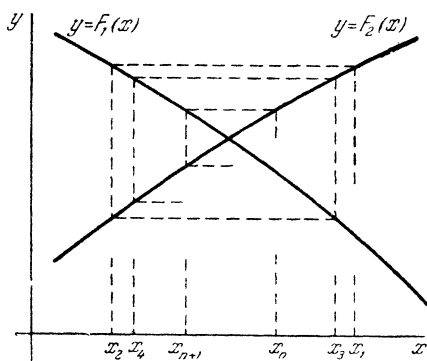


Рис. 8.

Очевидно, что искомый корень есть абсцисса точки пересечения двух кривых с уравнениями

$$y = F_1(x) \quad \text{и} \quad y = F_2(x). \quad (10)$$

Ход вычислений дает некоторую спиралеобразную или ступенчатую ломаную линию (см. рис. 8); если эта спираль сворачивается к точке пересечения кривых или если ступеньки последовательных приближений идут в направлении к этой точке, то мы в результате нескольких приближений подходим к корню, в противном же случае процесс является расходящимся и к корню не приводит.

Установим, в каких случаях приближения дают результат. Предположим, что  $n$ -е и  $(n+1)$ -е приближения не слишком далеки друг от друга, и участки обеих кривых в районе между точным значением корня  $x$  и приближенными значениями  $x_n$  и  $x_{n+1}$  можно приближенно принять за прямолинейные. Пусть

$$\begin{aligned} x_n &= x + \Delta_n, \\ x_{n+1} &= x + \Delta_{n+1}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\Delta_n$  и  $\Delta_{n+1}$  — погрешности  $n$ -го и  $(n+1)$ -го приближений.

Как для случая углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  с тангенсами разных знаков (рис. 9а), так и для углов с тангенсами одного знака (рис. 9б) будем приближенно иметь:

$$|\Delta_n \operatorname{tg} \varphi_2| \approx |\Delta_{n+1} \operatorname{tg} \varphi_1|, \quad (12)$$

откуда

$$|\Delta_{n+1}| \approx \left| \Delta_n \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} \right| \quad (13)$$

Процесс может привести к точному значению корня, если с каждым

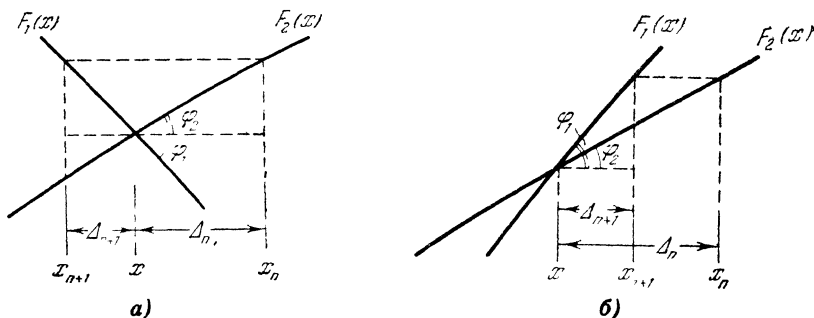


Рис. 9.

новым приближением погрешность будет все более уменьшаться по абсолютной величине, т. е. если

$$|\Delta_{n+1}| < |\Delta_n|, \quad (14)$$

что будет иметь место, если

$$\left| \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} \right| < 1. \quad (15)$$

Но

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= F'_1(x), \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= F'_2(x), \end{aligned} \quad (16)$$

следовательно, итерационный процесс будет сходящимся к корню, если в районе корня

$$\left| \frac{F'_2(x)}{F'_1(x)} \right| < 1. \quad (17)$$

Если же абсолютная величина этого отношения в районе корня будет равна или больше единицы, то процесс или не будет сходиться, или будет расходящимся. Чем меньше будет отношение производных, тем быстрее мы придем к корню.

Пример 1.\*)

$$x^5 - x - 0,2 = 0. \quad (18)$$

Наиболее простым является приведение этого уравнения к виду

$$\begin{aligned} x + 0,2 &= x^5, \\ F_1(x) &= x + 0,2, \quad F_2(x) = x^5. \end{aligned} \quad (19)$$

Сделаем графический набросок. Из рис. 10 мы видим, что уравнение имеет три корня, равных примерно

$$x_1 \approx -0,95; \quad x_2 \approx -0,20; \quad x_3 \approx 1,05.$$

\*) Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, ГТТИ, 1932, стр. 59.

Выясним, какие из этих корней мы можем уточнить итерационным процессом и какие не можем.

Из трех точек пересечения кривой и прямой только во второй точке наклон касательной к кривой меньше наклона прямой линии, и, следовательно, условие (17) удовлетворяется (при весьма быстрой сходимости приближений). Для первого и третьего корней итерационный процесс будет расходиться, причем весьма быстро.

Для наглядности проверим это на первом корне. Взяв первое приближение  $x_1 = -0,95$ , убеждаемся (см. табл. 3), что процесс расходится и, следовательно, первый корень надо уточнять с помощью какого-то иного преобразования уравнения (18).

Вычисления для второго корня дают быстро сходящийся процесс (см. табл. 4).

Для вычисления первого и третьего корней переменим функции  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  местами; получаем

Рис. 10.

$$x_{n+1}^5 = x_n + 0,2. \quad (20)$$

Проводим вычисление первого корня (см. табл. 5). Поскольку таблиц для извлечения непосредственно корня пятой степени не существует, прихо-

Таблица 3

$n$	$x_n$	$x_n^5$	$x_{n+1}$
1	-0,95	-0,774	-0,974
2	-0,974	-0,877	-1,077
3	-1,077	...	

Таблица 4

$n$	$x_n$	$x_n^5$	$x_{n+1}$
1	-0,20	-0,00032	-0,20032
2	-0,20032	-0,00032	-0,20032
3	-0,20032	...	

дится ввести логарифмирование с вычитаемым 5 для получения более удобного вида логарифма после деления на 5.

Таблица 5

$n$	$x_n$	$x_{n+1}^5$	$5 \lg  x_{n+1} $	$\lg  x_{n+1} $	$x_{n+1}$
1	-0,95	-0,75	4,875 — 5	0,975 — 1	-0,944
2	-0,944	-0,744	4,8716 — 5	0,9743 — 1	-0,9426
3	-0,9426	-0,7426	4,87076 — 5	0,97415 — 1	-0,94222
4	-0,94222	-0,74222	4,87053 — 5	0,97411 — 1	-0,94213
5	-0,94213	-0,74213	4,87048 — 5	0,97410 — 1	-0,94211
6	-0,94211	...			

Далее проводим вычисления для третьего корня и также получаем сходящийся процесс (см. табл. 6).

Таблица 6

$n$	$x_n$	$x_{n+1}^5$	$5 \lg  x_{n+1} $	$\lg  x_{n+1} $	$x_{n+1}$
1	1,05	1,25	0,0969	0,01938	1,0456
2	1,0456	1,2456	0,09538	0,01908	1,04491
3	1,04491	1,24491	0,09514	0,01903	1,04479
4	1,04479	1,24479	0,09510	0,01902	1,04476
5	1,04476	...			

Чтобы показать, какие затруднения встречаются при пользовании методом итерации, возьмем уже рассмотренное нами уравнение.

Пример 2.

$$x^2 - \cos x = 0, \quad (21)$$

или

$$x^2 = \cos x. \quad (22)$$

Построив графики обеих функций (см. рис. 11), мы видим, что в точке их пересечения наклон параболы больше, чем косинусоиды, следовательно, сходимость процесса итерации обеспечена. Однако эта сходимость весьма медленно приводит к результату, так как отношение производных в районе корня равно примерно половине и нужно многократное повторение вычислительного цикла, чтобы получить достаточно точный результат. Составим табл. 7. За начальное приближение возьмем, как и раньше,  $x_1 = 0,83$ .

Мы видим, что для уточнения корня потребовалось десять приближений.

При более сложных для вычисления функциях, входящих в состав уравнения  $F(x) = 0$ , подчас бывает весьма затруднительно привести это уравнение к виду, удобному для итерирования. Поэтому весьма полезно было бы внести в метод итерации некоторые добавления, чтобы сделать его независимым от отношения производных и всегда (или почти всегда, за исключением особых, редко встречающихся случаев) приводящим к цели. Рассмотрим такое видоизменение метода итерации.

**§ 5. Дополнение к методу итерации — первый способ.** В предыдущем параграфе мы показали, что если

$$x_n = x + \Delta_n, \quad (23)$$

где  $x$  есть точное значение корня, а  $\Delta_n$  — погрешность  $n$ -го приближения то примерно

$$x_{n+1} = x + \Delta_n \frac{F'_2(x)}{F'_1(x)}. \quad (24)$$

Исключая  $x$  вычитанием, получим

$$x_n - x_{n+1} = \Delta_n \left( 1 - \frac{F'_2(x)}{F'_1(x)} \right), \quad (25)$$

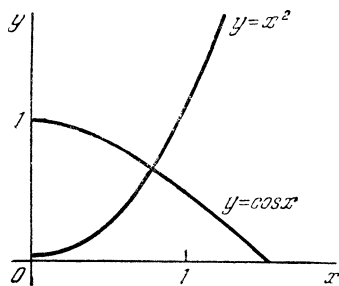


Рис. 11.

откуда

$$\Delta_n = \frac{x_n - x_{n+1}}{1 - \frac{F'_2(x)}{F'_1(x)}}. \quad (26)$$

Теперь мы можем получить для  $x$  значительно более точное значение, чем определяемое при обычном итерировании:

$$x = x_n - \Delta_n = x_n + \frac{x_{n+1} - x_n}{1 - \frac{F'_2(x)}{F'_1(x)}} = x_n + \frac{x_{n+1} - x_n}{\Phi(x)}, \quad (27)$$

где

$$\Phi(x) = 1 - \frac{F'_2(x)}{F'_1(x)}. \quad (28)$$

Значения производных следовало бы брать на абсциссе корня, но поскольку точное его значение неизвестно, а в интервале уточнения корня про-

Т а б л и ц а 7

$n$	$x_n$	$\cos x_n = x_{n+1}^2$	$x_{n+1}$
1	0,83	0,675	0,822
2	0,822	0,6808	0,8251
3	0,8251	0,6785	0,8238
4	0,8238	0,6794	0,8243
5	0,8243	0,67907	0,82406
6	0,82406	0,67925	0,82417
7	0,82417	0,67916	0,82411
8	0,82411	0,67921	0,82414
9	0,82414	0,67919	0,82413
10	0,82413	...	

изводные меняются сравнительно незначительно, мы можем для поправочного члена брать значение  $\Phi(x_1)$ . Чем больше мы будем приближаться к точному значению корня, тем меньшую роль будет играть поправочный член, а следовательно, некоторая его неточность не будет играть никакой роли вообще.

Итак, исправленный нами метод итерации будет иметь следующую вычислительную схему.

Уравнение

$$F(x) = 0 \quad (29)$$

приводят к виду

$$F_1(x) = F_2(x); \quad (30)$$

находят выражения для  $F'_1(x)$  и  $F'_2(x)$ ; с помощью графического наброска находят первое приближение значения корня  $x_1$ ; вычисляют

$$C = \Phi(x_1) = 1 - \frac{F'_2(x_1)}{F'_1(x_1)}; \quad (31)$$

находят  $x_2$ , после чего получают уточненное значение корня

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{C}. \quad (32)$$

Это значение корня можно взять за новое первое приближение и считать дальше. При этом величину коэффициента  $C$  можно не перевычислять. Обычно первый же цикл вычислений дает достаточно точное значение корня и второй цикл является лишь контрольным.

Пример 1. Вновь вернемся к уравнению

$$x^2 = \cos x. \quad (33)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= x^2, & F'_1(x) &= 2x, \\ F_2(x) &= \cos x, & F'_2(x) &= -\sin x, \\ \Phi(x) &= 1 + \frac{\sin x}{2x}. \end{aligned} \quad (34)$$

Для первого приближения  $x_1 = 0,83$ , получаем

$$C = \Phi(0,83) = 1 + \frac{0,738}{1,660} = 1,445. \quad (35)$$

Вычислительная формула для получения уточненного значения корня имеет вид

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{1,445}. \quad (36)$$

Проведя вычисления (см. табл. 8), мы видим, что первый же цикл итерирования дает тот же результат, что и девять циклов обычного хода вычислений.

Т а б л и ц а 8

I	II	III	IV	V	VI
$x_1$	$\cos x_1 = x_2$	$x_2$	$x_2 - x_1$	IV : 1,445	I + V = x
0,83	0,67488	0,82151	-0,00849	-0,00587	0,82413

Пример 2. Рассмотрим все три корня уже исследованного нами уравнения

$$x^5 - x - 0,2 = 0, \quad (37)$$

приведя его к виду

$$x = x^5 - 0,2. \quad (38)$$

Находим производные и функцию  $\Phi(x)$ :

$$\Phi(x) = 1 - 5x^4. \quad (39)$$

Для первого корня имеем:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,95, \\ \Phi(-0,95) &= 1 - 5 \cdot 0,95^4 = -3,07, \\ x &= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{-3,07}, \end{aligned}$$

$x_1$	$x_1^5$	$x_1^5 - 0,2 = x_2$	$x_2 - x_1$	$\frac{x_2 - x_1}{-3,07}$	$x$
-0,95	-0,77378	-0,97378	-0,02378	0,00774	-0,94226
-0,94226	-0,74276	-0,94276	-0,00050	0,00016	-0,94210

Для второго корня имеем:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,20, \\ \Phi(-0,20) &= 1 - 5 \cdot 0,20^4 = 0,992, \\ x &= x_1 + \frac{x_2 - x_1}{0,992}, \end{aligned}$$



$x_1$	$x_1^5$	$x_1^5 - 0,2 = x_2$	$x_2 - x_1$	$\frac{x_2 - x_1}{0,992}$	$x$
-0,2	-0,00032	-0,20032	-0,00032	-0,00032	-0,20032

Для третьего корня имеем:

$$x_1 = 1,05,$$

$$\Phi(1,05) = 1 - 5 \cdot 1,05^4 = -5,08,$$

$$x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{-5,08},$$

$x_1$	$x_1^5$	$x_1^5 - 0,2 = x_2$	$x_2 - x_1$	$\frac{x_2 - x_1}{-5,08}$	$x$
1,05	1,27628	1,07628	0,02628	-0,00518	1,04482
1,04482	1,24510	1,04510	0,00028	-0,00006	1,04476

Сходимость процесса для всех трех корней достаточно быстрая.

Анализируя расчетную формулу, мы видим, что вычисление теряет смысл лишь в одном случае: когда обе производные  $F'_1(x)$  и  $F'_2(x)$  в точке пересечения кривых равны. Тогда  $\Phi(x)$  превращается в нуль и вычисление становится невозможным. Но этот случай соответствует соприкосанию обеих кривых в их общей точке, абсцисса которой и есть корень уравнения, и сразу обнаруживается при построении графиков. Если это соприкосание точное, то вместо уравнения

$$F_1(x) = F_2(x)$$

решается уравнение, связывающее производные и имеющее тот же корень. Если же имеют место два близких друг к другу корня, то уравнения лучше всего решать способом хорд, так как применение способа итерации и в дополненном виде будет не совсем удобно.

**§ 6. Дополнение к методу итерации — второй способ.** В случае наличия в уравнении  $F_1(x) = F_2(x)$  функций, трудно дифференцируемых или заданных таблично, видоизмененный метод итерации принимает несколько иной вид. Операция нахождения производных отпадает, но уточненное значение корня находится при этом не по двум, а по трем последовательным приближениям, т. е. требует проведения двух циклов итерационных вычислений. Рассмотрим сущность расчета.

Пусть мы получили три приближенных значения корня  $x_1, x_2, x_3$ , применяя обычный итерационный прием. При этом нас не должно интересовать, является ли итерационный процесс в данном случае сходящимся или расходящимся.

Составим разности значений  $x$  — величины  $\delta$ . Индекс при  $\delta$  будет соответствовать уровню строки; таким образом, получим:

$$\begin{aligned} x_1 \\ \delta_{1,5} &= x_2 - x_1 \\ x_2 \\ \delta_{2,5} &= x_3 - x_2. \\ x_3 \end{aligned} \tag{40}$$

Используя соотношение (13) между погрешностями двух идущих друг за другом приближений, мы можем написать

$$\begin{aligned}x_1 &= x + \Delta_1 \\ \delta_{1,5} &= \Delta_1 \left[ 1 - \frac{F'_2(x)}{F'_1(x)} \right] \\ x_2 &= x + \Delta_1 \frac{F'_2(x)}{F'_1(x)} \\ \delta_{2,5} &= \Delta_1 \frac{F'_2(x)}{F'_1(x)} \left[ 1 - \frac{F'_2(x)}{F'_1(x)} \right] \\ x_3 &= x + \Delta_1 \left[ \frac{F'_2(x)}{F'_1(x)} \right]^2\end{aligned}\quad (41)$$

Деля  $\delta_{2,5}$  на  $\delta_{1,5}$ , получим

$$\frac{\delta_{2,5}}{\delta_{1,5}} = \frac{F'_2(x)}{F'_1(x)}. \quad (42)$$

Отсюда

$$C = 1 - \frac{F'_2}{F'_1} = 1 - \frac{\delta_{2,5}}{\delta_{1,5}} = - \frac{\delta_{2,5} - \delta_{1,5}}{\delta_{1,5}}. \quad (43)$$

Уточненное значение корня в соответствии с формулой (27) равно:

$$x = x_2 + \frac{x_3 - x_2}{C} = x_2 - \frac{\delta_{1,5} \delta_{2,5}}{\delta_{2,5} - \delta_{1,5}} = x_2 + \frac{1}{\frac{1}{\delta_{2,5}} - \frac{1}{\delta_{1,5}}}. \quad (44)$$

Вычисление по формуле (44) удобнее всего производить по следующей схеме:

$$\begin{array}{rcl}x_1 & & \\ \delta_{1,5} & \frac{1}{\delta_{1,5}} & \\ x_2 & \delta_{2,5} & \frac{1}{\delta_{2,5}} \\ \delta_{2,5} & \frac{1}{\delta_{2,5}} & \\ x_3 & & \end{array} \quad x_2 = \frac{1}{\delta_{2,5}} - \frac{1}{\delta_{1,5}} \quad \frac{1}{x_2} \quad x = x_2 + \frac{1}{x_2}. \quad (45)$$

Пример 1. Вернемся опять к уравнению

$$x^2 = \cos x.$$

Мы не можем использовать начало табл. 7, так как оно недостаточно точно поэтому восстановим его с большим количеством знаков (см. табл. 9).

Т а б л и ц а 9

$n$	$x_n$	$\cos x_n = x_{n+1}^2$	$x_{n+1}$
1	0,8300	0,67488	0,82151
2	0,82151	0,68112	0,82530
3	0,82530		

Т а б л и ц а 10

$x_n$	$\delta$	$\frac{1}{\delta}$	$z$	$\frac{1}{z}$	$x$
0,83000	-0,00849	-117,8			
0,82151	+0,00379	+263,8	381,6	0,00262	0,82413
0,83530					

Далее произведем уточнение по формуле (44) и схеме (45) (см. табл. 10).

Мы видим, что сразу же достигнут окончательный (в пределах пяти десятичных знаков) результат.

Пример 2. Возьмем похожий, но еще более затруднительный для решения пример:

$$x^2 = 2 \cos x.$$

Графики функций показывают, что корень уравнения лежит около единицы (см. рис. 12). Если принять 1 за первое приближение, то, как видно

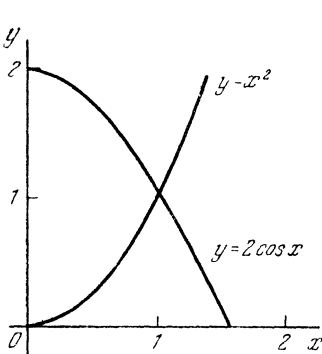


Рис. 12.

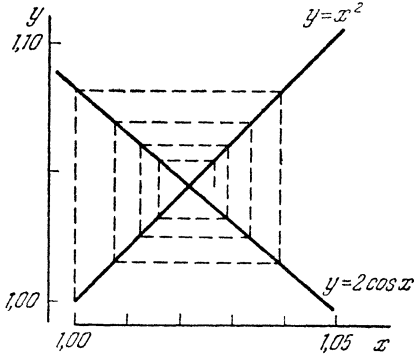


Рис. 13.

из рис. 13, для получения пяти точных знаков корня нужно очень много приближений. При взаимном перемещении функций  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  процесс становится вообще расходящимся.

Применим способ с разностями. Первые три приближения приведены в табл. 11. Уточнение по схеме (45) дано в табл. 12.

Таблица 11

$n$	$x_n$	$2 \cos x_n = x_{n+1}^2$	$x_{n+1}$
1	1,00000	1,08060	1,03951
2	1,03951	1,01328	1,00662
3	1,00662		

Таблица 12

$x_n$	$\delta$	$\frac{1}{\delta}$	$x$	$\frac{1}{x}$	$x$
1,00000					
1,03951	0,03951	25,31	-55,71	-0,01795	1,02156
1,00662	-0,03289	-30,40			

Поскольку поправочный член при получении  $x$  весьма велик, у нас не может быть уверенности в правильности полученного значения корня, поэтому проведем еще один цикл уточнения, взяв значение 1,02156 за начальное.

Находим три приближения (табл. 13). Проводим уточнение по схеме (45) (табл. 14).

В результате имеем три значения корня — первое приближение, первое и второе уточненные значения:

$x$	$\delta$
1,00000	
	2156
1,02156	
	13
1,02169	

Составив разности этих значений, мы убеждаемся в том, что значение корня  $x = 1,02169$  есть окончательное и дальнейшему уточнению не подлежит.

Т а б л и ц а 13

$n$	$x_n$	$2 \cos x_n = x_{n+1}^2$	$x_{n+1}$
1	1,02156	1,04407	1,02180
2	1,02180	1,04366	1,02160
3	1,02160		

Т а б л и ц а 14

$x_n$	$\delta$	$\frac{1}{\delta}$	$z$	$\frac{1}{z}$	$x$
1,02156					
1,02180	0,00024	4170			
1,02160	-0,00020	-5000	-9170	-0,00011	1,02169

**§ 7. Применение ряда Тейлора.** Хорошие результаты в решении уравнений дает применение разложения функции в ряд Тейлора совместно с применением принципа итерации.

Пусть для уравнения

$$F(x) = 0 \quad (46)$$

при помощи графика нашли начальное приближение

$$x \approx x_0. \quad (47)$$

Поскольку оно не вполне точно, то

$$F(x_0) \neq 0. \quad (48)$$

Пусть

$$x = x_0 + \Delta, \quad (49)$$

где  $\Delta$  — разность между точным и приближенным значениями корня.

Разложение в ряд Тейлора даст нам

$$F(x) = F(x_0 + \Delta) = F(x_0) + \Delta F'(x_0) + \Delta^2 \frac{F''(x_0)}{2} + \dots = 0. \quad (50)$$

Ограничимся тремя членами разложения и в двух последних членах выделим множитель  $\Delta$ :

$$F(x_0) + \Delta \left[ F'(x_0) + \Delta \frac{F''(x_0)}{2} \right] \approx 0. \quad (51)$$

Для вычисления значения  $\Delta$  мы можем привести это выражение к итеративной форме:

$$\Delta = - \frac{F(x_0)}{F'(x_0) + \Delta \frac{F''(x_0)}{2}}. \quad (52)$$

Вычисление  $\Delta$  производится путем нахождения последовательности приближений:

$$\Delta_1 = - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}, \quad \Delta_2 = - \frac{F(x_0)}{F'(x_0) + \Delta_1 \frac{F''(x_0)}{2}}, \dots, \quad \Delta_{n+1} = - \frac{F(x_0)}{F'(x_0) + \Delta_n \frac{F''(x_0)}{2}}. \quad (53)$$

Обычно уже  $\Delta_2$  дает достаточно точное значение  $\Delta$ . Имея  $\Delta$ , получаем

$$x = x_0 + \Delta. \quad (54)$$

Пример.

$$x^2 - \cos x = 0.$$

Первым приближением значения корня берем, как и раньше, 0,83. Точный корень равен

$$x = 0,83 + \Delta.$$

Имеем:

$$F(x) = x^2 - \cos x,$$

$$F'(x) = 2x + \sin x,$$

$$\frac{1}{2} F''(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos x.$$

Вычисляем функции при  $x = x_0$ :

$$F(0,83) = 0,68890 - 0,67488 = 0,01402,$$

$$F'(0,83) = 1,660 + 0,738 = 2,398,$$

$$\frac{1}{2} F''(0,83) = 1 + 0,34 = 1,34.$$

Итеративная формула имеет вид

$$\Delta = - \frac{0,01402}{2,398 + 1,34\Delta}$$

и дает следующие приближения значения  $\Delta$ :

$$\Delta_1 = - \frac{0,01402}{2,398} = - 0,00585,$$

$$\Delta_2 = - \frac{0,01402}{2,398 - 0,00585 \cdot 1,34} = - \frac{0,01402}{2,390} = - 0,00587,$$

$$\Delta_2 \approx \Delta.$$

Уточненное значение корня уравнения равно

$$x = 0,83 - 0,00587 = 0,82413.$$

**§ 8. Общие указания.** Мы рассмотрели несколько методов решения уравнений. Некоторые из них просты в применении, но зависят от случайных обстоятельств и не гарантируют быстрого получения ответа, а иногда и вообще не могут дать его. Другие методы мало зависят от вида решаемого уравнения и всегда приводят к результату, но требуют более сложных вычислений. Указать заранее, какой из методов нужно применить в том или ином случае, конечно, невозможно, однако можно дать некоторые общие указания.

Чем сложнее решаемая задача, тем быстрее она может быть решена с помощью более сложного, но зато и более сильного метода. Когда корень уточнен уже почти до требуемой степени точности, дальнейшее уточнение можно провести и более простым способом, если только он применим в данном случае.

Для простых задач применять сильные методы не следует. Например, средний корень рассматривавшегося нами уравнения пятой степени почти мгновенно определяется обычной итерацией, и применять в этом случае усиленный метод нет никакого смысла. В каждом отдельном случае лучший совет подскажет вычислительный опыт расчетчика.

### Г Л А В А  ІІІ

## РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**§ 1. Отделение вещественных корней.** Решение алгебраических уравнений степени выше второй связано с двумя вопросами. Первым из них является обнаружение и уточнение вещественных корней уравнения, вторым — нахождение комплексных корней.

Нахождение одним общим приемом и вещественных, и комплексных корней, как мы увидим ниже, приводит к излишней затрате труда и поэтому не является целесообразным.

Обнаружение вещественных корней уравнения

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x + A_0 = 0 \quad (1)$$

незатруднительно; для этого нужно построить по нескольким точкам график функции

$$y = x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x + A_0. \quad (2)$$

Для вычисления ординат данный многочлен нужно записать в виде

$$y = [x + A_{n-1}]x + A_{n-2}]x + \dots + A_1]x + A_0 \quad (3)$$

(здесь квадратная скобка заменяет  $n - 1$  круглых). Вычисление состоит из последовательных суммирований и перемножений; произведения записываются в одной строке, а суммы в другой, расположенной ниже.

**Пример 1.** Построить график функции

$$y = x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16.$$

При больших как положительных, так и отрицательных значениях  $x$ , ординаты кривой уходят в  $+\infty$ ; следовательно, построение нужно вести от  $x = 0$  в обе стороны до тех значений абсцисс, при приближении к которым кривая начнет круто уходить вверх. Для нашего примера достаточно рассмотреть интервал значений

$$-5 \leq x \leq +4.$$

В табл. 15 дано вычисление функции для целых значений  $x$  из указанного интервала.

График функции  $F(x)$  дан на рис. 14. Из него видно, что уравнение

$$x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16 = 0$$

имеет два вещественных корня. Остальные два корня — комплексные.

Зная вещественные корни  $x_1 = 1$  и  $x_2 = -4$ , мы можем представить наш многочлен в виде

$$x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16 = (x - 1)(x + 4)(x^2 + ax + b),$$

откуда

$$x^2 + ax + b = \frac{x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16}{x^2 + 3x - 4} = x^2 - 2x + 4.$$

Полученный трехчлен дает нам комплексные корни уравнения.

Т а б л и ц а 15

$F(x) = [x + 1] x - 6) x + 20) x - 16$					
$x = 4$	4	20	56	304	$288 = y$
		5	14	76	
3	3	12	18	114	98
		4	6	38	
2	2	6	0	40	24
		3	0	20	
1	1	2	-4	16	0
		2	-4	16	
0					-16
-1	-1	0	6	-26	-42
		0	-6	26	
-2	-2	2	8	-56	-72
		-1	-4	28	
-3	-3	6	0	-60	-76
		-2	0	20	
-4	-4	12	-24	16	0
		-3	6	-4	
-5	-5	20	-70	250	234
		-4	14	-50	

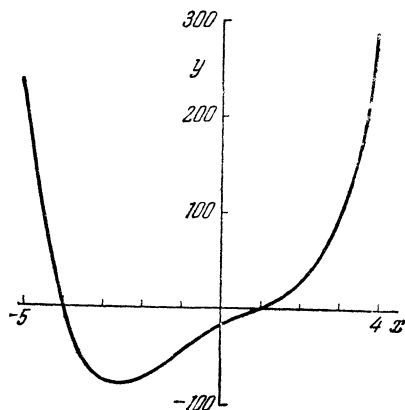


Рис. 14.

Пример 2. А. Н. Крылов \*) приводит пример, рассмотренный Энке:

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Найдем и отделим вещественные корни этого уравнения.

Вычислим ординаты кривой (табл. 16) и построим по ним график. Из графика (рис. 15) получаем приближенные значения вещественных корней уравнения:

$$x_1 \approx -1,9, \quad x_2 \approx 1,2, \quad x_3 \approx 1,6.$$

Уточнение корней проведем по методу, изложенному в § 7 гл. II, используя, однако, не только вторые производные, но и прочие члены разложения. Расчетная формула при этом, как легко видеть, примет вид

$$\Delta = - \frac{F(x_0)}{F'(x_0) + \Delta \frac{F''(x_0)}{2!} + \Delta^2 \frac{F'''(x_0)}{3!} + \dots + \Delta^{n-1} \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}}, \quad (4)$$

или, в более удобной для вычисления форме,

$$\Delta = - \frac{F(x_0)}{F'(x_0) + \Delta \left( \frac{F''(x_0)}{2!} + \Delta \left( \frac{F'''(x_0)}{3!} + \dots + \Delta \left( \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!} \right) \right) \right)}, \quad (5)$$

\*) Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1954, стр. 52.

причем первое приближение находят по формуле

$$\Delta_1 = -\frac{F(x_0)}{F'(x_0)}, \quad (6)$$

а следующие приближения — итерационным путем.

Т а б л и ц а 16

$[x + 0) x - 2) x + 0) x - 3) x + 4) x - 5) x + 6$							
$x = 2$	2    4	2    4	4    8	5    10	14    28	23    46	$52 = y$
1,5	1,5    2,25	0,25    0,38	0,38    0,57	—3,65 —2,43	0,52 0,35	—6,72 —4,48	—0,7
1	1    1	—1    —1	—1    —1	—4    —4	0    0	—5    —5	1
0,5	0,5    0,25	—0,88 —1,75	—0,44 —0,88	—1,72 —3,44	1,14 2,28	—1,93 —3,86	4,1
0							6
—0,5	—0,5    0,25	—1,75    0,88	0,88    —0,44	—3,44    1,72	5,72    —2,86	—7,86    3,93	9,9
—1	—1    1	—1    1	1    —1	—4    4	8    —8	—13    13	19
—1,5	—1,5    2,25	0,25    —0,38	—0,38    0,57	—2,43    3,65	7,65    —11,4	—16,4    24,6	30,6
—2	—2    4	2    —4	—4    8	5    —10	—6    12	7    —14	—8
—2,5	—2,5    6,2	4,2    —10,5	—10,5    26,2	23,2    —58	—54    135	130    —325	—319

Для вычисления производных применим схему (3), пристроив к ней снизу дополнительные строки. Сущность вычисления производных будет состоять в следующем (рассмотрим на примере уравнения четвертой степени).

Пусть дано уравнение

$$F(x) = x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0, \quad (7)$$

которое мы запишем, согласно схеме (3), в виде

$$F(x) = [x + A_3)x + A_2)x + A_1)x + A_0. \quad (8)$$

Вычислим значение  $F(a)$ :

$$F(a) = [a + A_3)a + A_2)a + A_1)a + A_0. \quad (9)$$



Располагая действия так, как в табл. 15, получим:

$$\begin{array}{r} [a + A_3) a + A_2) a + A_1) a + A_0 \\ a \quad B_2 a \quad B_1 a \quad B_0 a \\ a + A_3 = B_2 \quad B_2 a + A_2 = B_1 \quad B_1 a + A_1 = B_0 \quad B_0 a + A_0, \end{array} \quad (10)$$

где

$$B_2 = a + A_3, \quad (11)$$

$$B_1 = a^2 + A_3 a + A_2,$$

$$B_0 = a^3 + A_3 a^2 + A_2 a + A_1,$$

$$B_0 a + A_0 = F(a).$$

Если вместо коэффициентов  $A$  подставим в вычислительную схему коэффициенты  $B$  и вычислим

$$[a + B_2) a + B_1) a + B_0, \quad (12)$$

то получим:

$$\begin{array}{r} [a + B_2) a + B_1) a + B_0 \\ a \quad C_1 a \quad C_0 a \\ a + B_2 = C_1 \quad C_1 a + B_1 = C_0 \quad C_0 a + B_0, \end{array} \quad (13)$$

где

$$C_1 = a + B_2 = 2a + A_3,$$

$$C_0 = C_1 a + B_1 = 3a^2 + 2A_3 a + A_2, \quad (14)$$

$$C_0 a + B_0 = 4a^3 + 3A_3 a^2 + 2A_2 a + A_1 = F'(a).$$

Следующая строка вычислений дает:

$$[a + C_1) a + C_0 \quad (15)$$

$$\begin{array}{r} a \quad D_0 a \\ a + C_1 = D_0 \quad D_0 a + C_0, \end{array}$$

где

$$D_0 = a + C_1 = 3a + A_3, \quad (16)$$

$$D_0 a + C_0 = 6a^2 + 3A_3 a + A_2 = \frac{1}{2} F''(a).$$

Продолжая аналогичные действия, получим

$$\frac{1}{6} F'''(a) \quad \text{и} \quad \frac{1}{24} F^{IV}(a).$$

Эта вычислительная схема называется схемой Горнера.

Проведем вычисление для рассматриваемого примера, взяв для корня значение  $-1,9$  (табл. 17).

Далее переходим к вычислению поправки значения корня по схеме (5). Мы ограничимся четвертыми производными, так как дальнейшие производные при небольшой величине поправки никакой роли в вычислении играть не будут.

Вычислительная формула будет иметь вид

$$\Delta = - \frac{10,651}{146,34 + \Delta (-361,0 + \Delta (381 + \Delta (-221))}. \quad (17)$$

Первое приближение равно:

$$\Delta_1 = - \frac{10,651}{146,34} = -0,0728.$$

Т а б л и ц а 17

$\{-1,9 + 0] \cdot (-1,9) - 2] \cdot (-1,9) + 0] \cdot (-1,9) - 3] \cdot (-1,9) + 4] \cdot (-1,9) - 5] \cdot (-1,9) + 6$							
-1,9	3,61 -1,9	-3,059 1,61	5,812 -3,059	-5,343 2,812	2,552 -1,343	4,651 -2,448	$F(-1,9) =$ 10,651
-1,9	7,22 -3,8	-16,78 8,83	37,70 -19,84	-76,97 40,51	148,79 -78,31	$F'(-1,9) =$ 146,34	
-1,9	10,8 -5,7	-37,2 19,6	108,3 -57,0	-282,7 148,8	$\frac{1}{2} F''(-1,9) =$ -361,0		
-1,9	14 -7,6	-65 34	232 -122	$\frac{1}{6} F'''(-1,9) =$ 381			
-1,9	18 -9,5	-99 52	$\frac{1}{24} F^{IV}(-1,9) =$ -221				

Для следующих приближений вычисляем знаменатель поправки, как показано ниже:

$$\begin{array}{r} 146,34 - 0,0728 (-361,0 - 0,0728 (381 - 0,0728 (-221] \\ 28,97 \quad \quad \quad -26,9 \quad \quad \quad 16 \quad \quad \quad \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 175,31 \quad \quad \quad -387,9 \quad \quad \quad 397 \\ \Delta_2 = -\frac{10,651}{175,31} = -0,06076; \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 146,34 - 0,0608 (-361,0 - 0,0608 (381 - 0,0608 (-221] \\ 23,40 \quad \quad \quad -24,0 \quad \quad \quad 13 \quad \quad \quad \leftarrow \\ 169,74 \quad \quad \quad -385,0 \quad \quad \quad 394 \end{array}$$

$$\Delta_3 = -\frac{10,651}{169,74} = -0,06275;$$

$$\begin{array}{r} 146,34 - 0,06275 (-361,0 - 0,06275 (381 - 0,06275 (-221] \\ 24,21 \quad \quad \quad -24,8 \quad \quad \quad 14 \quad \quad \quad \leftarrow \\ 170,55 \quad \quad \quad -385,8 \quad \quad \quad 395 \end{array}$$

$$\Delta_4 = -\frac{10,651}{170,55} = -0,06245.$$

Приближения сходятся недостаточно быстро; для уточнения поправки мы можем применить усиление метода итерации (гл. II, § 6).

Имея четыре приближения, мы можем применить схему (45) гл. II два раза и сравнить уточненные значения поправки  $\Delta$  (см. табл. 18). Второе значение, как основывающееся на более точных  $\Delta$ , более точно. Итак, величина корня

$$x_1 = -1,96249.$$

Поскольку это же самое значение корня приведено и у А. Н. Крылова, мы не будем производить дальнейших уточнений.

На этом примере мы показали все этапы применения схемы Горнера и вычисления по ряду Тэйлора с итерацией. Однако потребовалось бы гораздо

Таблица 18

$\Delta_n$	$\delta$	$\frac{1}{\delta}$	$x$	$\frac{1}{x}$	$\Delta$
—0,07280	0,01204	83,0			
—0,06076	—0,00199	—502	—585,0	—0,00171	—0,06247
—0,06275	0,00030	3333	3835	0,00026	—0,06249
—0,06245					

меньше труда, если бы мы взяли первое приближение несколько более точно, для чего нужно было вычислить ординаты нескольких точек кривой для абсцисс, близких к —1,9.

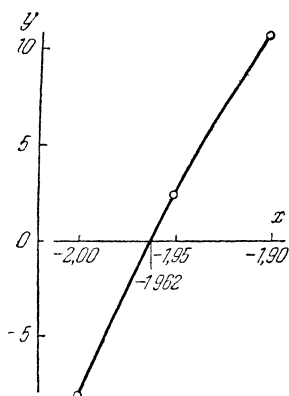


Рис. 16.

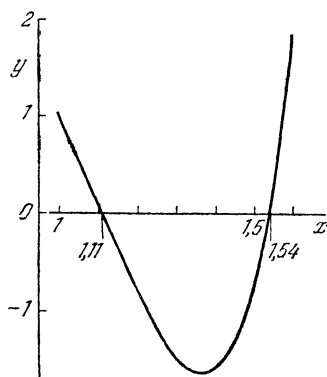


Рис. 17.

Действительно, из графика (рис. 15) видно, что значение корня близко к —1,95. Поэтому вычислим ординату для абсциссы —1,95 (для —2 ордината уже подсчитана в табл. 16). Имеем:

$$\begin{array}{ccccccc}
 -1,95 & 3,802 & -3,514 & 6,852 & -7,511 & 6,846 & -3,600 \\
 -1,95 & 1,802 & -3,514 & 3,852 & -3,511 & 1,846 & 2,400 \\
 & & & & & & 2,400 = F(-1,95).
 \end{array}$$

Построив по трем точкам участок кривой  $y = F(x)$  (см. рис. 16), мы видим, что более точное значение корня равно —1,962. Теперь одного уточнения по способу Ньютона будет вполне достаточно, поскольку поправка к корню очень мала. Вычисляем по схеме Горнера:

$$\begin{array}{ccccccc}
 -1,9620 & 3,8494 & -3,6285 & 7,1191 & -8,0817 & 8,0083 & -5,9023 \\
 -1,9620 & 1,8494 & -3,6285 & 4,1191 & -4,0817 & 3,0083 & 0,0977 \\
 -1,962 & 7,69 & -18,72 & 43,85 & -94,12 & 192,67 & \\
 -3,92 & 9,54 & -22,35 & 47,97 & -98,20 & 195,68 & \\
 & & & & & & \Delta = -\frac{0,0977}{195,7} = -0,00050, \\
 & & & & & & x = -1,962 - 0,00050 = -1,96250.
 \end{array}$$

Незначительная затрата труда на улучшение графика резко сократила трудоемкость дальнейшего уточнения.

Точно так же уточним график и для остальных корней. Вычислим ординаты кривой для абсцисс от 1 до 1,6 через 0,1 (табл. 19) и построим этот участок графика с большей точностью (рис. 17).

Т а б л и ц а 19

$[x+0) \ x-2) \ x+0) \ x-3) \ x+4) \ x-5) \ x+6)$							
1							1
1,1	1,21 1,1	—0,87 —0,79	—0,96 —0,87	—4,36 —3,96	—0,40 —0,36	—5,94 —5,40	0,06
1,2	1,44 1,2	—0,67 —0,56	—0,80 —0,67	—4,56 —3,80	—0,67 —0,56	—6,80 —5,67	—0,80
1,3	1,69 1,3	—0,40 —0,31	—0,52 —0,40	—4,58 —3,52	—0,75 —0,58	—7,48 —5,75	—1,48
1,4	1,96 1,4	—0,05 —0,04	—0,07 —0,05	—4,30 —3,07	—0,42 —0,30	—7,59 —5,42	—1,59
1,5							—0,72
1,6	2,56 1,6	0,90 0,56	1,44 0,90	—2,50 —1,56	2,40 1,50	—4,16 —2,60	1,84

График дает значения корней, равные примерно 1,11 и 1,54. Уточним корень 1,11. Имеем:

$$\begin{array}{r}
 1,11 \quad 1,2321 \quad -0,8524 \quad -0,9462 \quad -4,3803 \quad -0,4221 \quad -6,0185 \\
 1,11 \quad -0,7679 \quad -0,8524 \quad -3,9462 \quad -0,3803 \quad -5,4221 \quad -0,0185 \\
 1,11 \quad 2,46 \quad 1,88 \quad 1,14 \quad -3,11 \quad -3,88 \\
 2,22 \quad 1,70 \quad 1,03 \quad -2,80 \quad -3,49 \quad -9,30
 \end{array}$$

$$\Delta = -\frac{-0,0185}{-9,30} = -0,00199,$$

$$x = 1,11 - 0,00199 = 1,10801$$

(у А. Н. Крылова то же самое).

Для последнего вещественного корня имеем:

$$\begin{array}{r}
 1,54 \quad 2,3716 \quad 0,5723 \quad 0,8813 \quad -3,2628 \quad 1,1353 \quad -5,9516 \\
 1,54 \quad 0,3716 \quad 0,5723 \quad -2,1187 \quad 0,7372 \quad -3,8647 \quad 0,0484 \\
 1,54 \quad 4,74 \quad 7,87 \quad 13,00 \quad 16,76 \quad 26,95 \\
 3,08 \quad 5,11 \quad 8,44 \quad 10,88 \quad 17,50 \quad 23,09
 \end{array}$$

$$\Delta = -\frac{0,0484}{23,09} = -0,00210,$$

$$x = 1,54 - 0,00210 = 1,53790$$

(у А. Н. Крылова то же самое).

Итак, три вещественных корня уравнения обнаружены с помощью графика, значения их улучшены уточненным графиком и, наконец, все три корня доведены одним циклом метода Ньютона до точности шести значащих цифр.

Чтобы найти комплексные корни, разделим данный нам многочлен седьмой степени на произведение двучленов, корнями которых являются найденные выше вещественные корни:

$$\frac{x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6}{(x + 1,96249)(x - 1,53790)(x - 1,10801)} = \frac{x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6}{x^3 - 0,68342x^2 - 3,48856x + 3,34407} = \\ = x^4 + 0,68342x^3 + 1,95562x^2 + 0,37654x + 1,79420.$$

Корни полученного многочлена четвертой степени являются комплексными корнями рассматриваемого уравнения. Их нахождение будет дано в дальнейшем.

**§ 2. Метод деления корней.** Прежде всего рассмотрим классический метод нахождения как вещественных, так и комплексных корней уравнений высоких степеней — метод деления корней, предложенный Лобачевским в 1834 г., независимо от Лобачевского изложенный в несколько иной форме цюрихским профессором Греффе в 1837 г. и детально разработанный в применении к комплексным корням астрономом Энке в 1841 г. Наиболее полное изложение этого метода в трудах по приближенным вычислениям на русском языке дано А. Н. Крыловым в „Лекциях о приближенных вычислениях“. В нашем изложении мы несколько отступим от описания метода, данного А. Н. Крыловым.

Пусть дано уравнение

$$F(x) = x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \dots + A_1x + A_0 = 0, \quad (18)$$

содержащее как вещественные, так и комплексные корни, т. е.  $F(x)$  может быть представлено в виде

$$F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k)(x^2 - 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) \times \\ \times (x^2 - 2r_2 \cos \varphi_2 + r_2^2) \dots (x^2 - 2r_s \cos \varphi_s + r_s^2), \quad (19)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  — вещественные корни уравнения,  $r_1(\cos \varphi_1 \pm i \sin \varphi_1)$ ,  $r_2(\cos \varphi_2 \pm i \sin \varphi_2), \dots, r_s(\cos \varphi_s \pm i \sin \varphi_s)$  — его комплексные корни.

Перенесем часть членов уравнения направо так, чтобы с одной стороны стояли члены с четными степенями  $x$ , а с другой стороны — с нечетными:

$$x^n + A_{n-2}x^{n-2} + A_{n-4}x^{n-4} + \dots = -(A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-3}x^{n-3} + \dots). \quad (20)$$

Возведем обе части равенства в квадрат:

$$(x^n + A_{n-2}x^{n-2} + A_{n-4}x^{n-4} + \dots)^2 = (A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-3}x^{n-3} + \dots)^2. \quad (21)$$

Произведя все действия, получим как справа, так и слева многочлены

$$x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + a_{2n-4}x^{2n-4} + \dots = b_{2n-2}x^{2n-2} + b_{2n-4}x^{2n-4} + \dots \quad (22)$$

с членами, содержащими лишь четные степени  $x$ ; перенеся все члены в левую часть и обозначив

$$a_{2k} - b_{2k} = A_{1,k}, \quad x^2 = x_1, \quad (23)$$

получим новое уравнение  $n$ -й степени, корни которого являются квадратами корней данного уравнения (18), т. е. вещественные корни равны

$$\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_k^2, \quad (24)$$

а комплексные в соответствии с формулой Муавра

$$[r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi \pm i \sin 2\varphi) \quad (25)$$





Первое квадрирование

$$\begin{array}{r}
 \text{—} (1 \quad \text{—} \quad 5)^2 \\
 \quad \quad (2 \quad \text{—} \quad 6)^2 \\
 \text{—} \quad 1 \quad \text{—} 10 \quad 25 \\
 \quad \quad \quad 4 \quad \text{—} 24 \quad 36 \\
 \hline
 1 \quad \text{—} 14 \quad 49 \quad \text{—} 36
 \end{array}$$

Степень  
корней  
 $m = 2$

Второе квадрирование:

$$\begin{array}{r}
 \text{—} (1 \quad \quad 49)^2 \\
 \quad \quad (14 \quad \quad 36)^2 \\
 \text{—} \quad 1 \quad 98 \quad 2401 \\
 \quad \quad \quad 196 \quad 1008 \quad 1296 \\
 \hline
 1 \quad \text{—} 98 \quad 1393 \quad \text{—} 1296
 \end{array}$$

 $m = 4$ 

Третье квадрирование:

$$\begin{array}{r}
 \text{—} (1 \quad \quad 1393)^2 \\
 \quad \quad (98 \quad \quad 1296)^2 \\
 \text{—} \quad 1 \quad \quad 3 \quad 6 \\
 \quad \quad 2,786 \quad 1,94045 \\
 \quad \quad \quad 9,604 \quad 0,25402 \quad 1,67962 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 3 \quad 6 \quad 6 \\
 1 \quad \text{—} 6,818 \quad 1,68643 \quad 1,67962
 \end{array}$$

 $m = 8$ 

Четвертое квадрирование:

$$\begin{array}{r}
 \text{—} (1 \quad \quad 1,68643)^2 \\
 \quad \quad 3 \quad 6 \\
 \quad \quad (6,818 \quad 1,67962)^2 \\
 \text{—} \quad 1 \quad \quad 6 \quad 12 \\
 \quad \quad 3,37286 \quad 2,84405 \\
 \quad \quad \quad 46,48512 \quad 0,02290 \quad 2,82112 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 6 \quad 12 \quad 12 \\
 1 \quad \text{—} 43,11226 \quad 2,82115 \quad 2,82112
 \end{array}$$

 $m = 16$ 

Пятое квадрирование:

$$\begin{array}{r}
 \text{—} (1 \quad \quad 2,82115)^2 \\
 \quad \quad 7 \quad 12 \\
 \quad \quad (4,31123 \quad 2,82112)^2 \\
 \text{—} \quad 1 \quad \quad 14 \quad 24 \\
 \quad \quad 0,05642 \quad 7,95889 \\
 \quad \quad \quad 18,58670 \quad 0,00024 \quad 7,95872 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 14 \quad 24 \quad 24 \\
 1 \quad \text{—} 18,53028 \quad 7,95865 \quad \text{—} 7,95872
 \end{array}$$

 $m = 32$



Шестое квадрирование:

$$\begin{array}{r}
 \text{---} (1 \quad \quad \quad \overset{24}{7, 95865})^2 \\
 \quad \quad \quad \overset{15}{(1, 85303} \quad \quad \quad \overset{24}{7, 95872)^2} \\
 \text{---} 1 \quad \quad \quad \overset{30}{0, 00002} \quad \quad \quad \overset{48}{63, 34011} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \overset{3}{3, 43372} \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad \overset{48}{63, 34122} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \overset{30}{1} \quad \text{---} \overset{30}{3, 43372} \quad \quad \quad \overset{48}{63, 34011} \quad \quad \quad \overset{48}{\text{---} 63, 34122} \quad m=64
 \end{array}$$

Проведя шесть квадрирований, мы видим, что дальнейшее удвоение степени корня дает уравнение с коэффициентами, в точности равными квадратам коэффициентов предыдущего; следовательно, полное разделение корней достигнуто и можно их определять.

Во время вычислений нужно следить за тем, чтобы все слагаемые одного столбца имели над запятой одну и ту же степень десяти, соответствующую степени при наибольшем из слагаемых. Степень, как мы говорили, приписывается над запятой лишь у верхнего слагаемого.

Переходим к определению корней. Имеем:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^{64} &= \overset{30}{3, 43372}, & \alpha_2^{64} &= \frac{\overset{48}{63, 34011}}{\overset{30}{3, 43372}} = \overset{18}{18, 4465} = \overset{19}{1, 84465} \\
 64 \lg |\alpha_1| &= 30,53576, & 64 \lg |\alpha_2| &= 19,26591, \\
 \lg |\alpha_1| &= 0,47712, & \lg |\alpha_2| &= 0,30103, \\
 \alpha_1 &= \pm 3; & \alpha_2 &= \pm 2; \\
 \alpha_3^{64} &= \frac{\overset{48}{63, 34122}}{\overset{48}{63, 34011}} = 1,00000, \\
 \alpha_3 &= \pm 1.
 \end{aligned}$$

Для выбора знаков подставляем полученные значения корней в решаемое уравнение и убеждаемся в том, что корни следующие:

$$+3, -2, +1.$$

Процесс квадрирования тем быстрее приводит к разделению корней, чем больше разнятся их модули в основном уравнении. При корнях с равными модулями (т. е. с одинаковой абсолютной величиной) или при кратных корнях разделения корней не происходит, так как тогда для коэффициентов уравнения (29) нельзя ограничиться одним членом сумм (34), (35) и т. д., поскольку в этих суммах оказывается несколько членов, одинаковых по величине.

Наличие кратных корней обнаружить легко. Известно, что если уравнение

$$F(x) = 0$$

имеет корень кратности  $n$ , то уравнение

$$F'(x) = 0$$

имеет этот же корень кратности  $n-1$ . Следовательно, для обнаружения кратных корней уравнения (18) нужно найти производную  $F'(x)$  и затем общий наибольший делитель  $\Phi(x)$  многочленов  $F(x)$  и  $F'(x)$ . Многочлен  $\Phi(x)$  имеет корнями все кратные корни уравнения  $F(x)=0$ , причем кратность их на единицу меньше, чем в уравнении  $F(x)=0$ .

Деля  $F(x)$  на  $\Phi(x)$ , получим многочлен

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} = F_1(x),$$

дающий уравнение

$$F_1(x) = 0,$$

не содержащее ни одного кратного корня.

Если многочлен  $\Phi(x)$  — степени ниже третьей, то можно найти кратные корни непосредственно и выделить их в соответствующей кратности из  $F(x)$ . Этот же прием позволяет выделить из  $F(x)$  и трехчлены вида  $(x^2 + Px + Q)^{n-1}$ , содержащие кратные пары комплексных корней. Поэтому в дальнейшем рассмотрим будем считать, что кратных корней нет, ни вещественных, ни комплексных.

Что касается корней различных, но с одинаковыми модулями, как вещественных, так и комплексных, то от них избавляются, перестраивая выражение  $F(x)$  по степеням новой переменной  $x - x_0$ , где  $x_0$  — некоторая числовая, произвольно выбираемая величина.

Как мы видели из рассмотренного примера, если все корни вещественны, то их величины определяются из формул (40) извлечением корней степени  $2^t$ :

$$\alpha_1 = \pm \sqrt[2^t]{\beta_1}, \quad \alpha_2 = \pm \sqrt[2^t]{\beta_2}, \dots$$

и подбором правильного знака.

**§ 3. Метод разделения корней — случай комплексных корней.** Если в решаемом уравнении имеются пары комплексных корней, то способ нахождения их более сложен.

Если имеется одна пара комплексных корней, то один из коэффициентов  $A_t$  будет неправильно изменяться при переходе от одного квадрирования к другому. При любом числе квадрирований этот коэффициент не будет возвышаться в квадрат после каждого нового цикла действий. Кроме того, возможно изменение знака коэффициента, что вызывается изменением входящего в него косинуса и происходит от перемены кратности угла.

Пусть, например, после первого (наибольшего по абсолютной величине) корня  $\alpha_1$  идет пара комплексных корней с модулем  $r_1$ , где

$$\alpha_2 < r_1 < \alpha_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1, \\ \alpha_2 &= \rho_1 (\cos \psi_1 + i \sin \psi_1), \\ \alpha_3 &= \rho_1 (\cos \psi_1 - i \sin \psi_1), \\ \alpha_4 &= \beta_2, \\ &\dots \end{aligned} \tag{42}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \alpha_3 &= 2\rho_1 \cos \psi_1, \\ \alpha_2 \alpha_3 &= \rho_1^2. \end{aligned} \tag{43}$$

Вместо зависимостей (39) получим:

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= \beta_1, \\ B_{n-2} &= \beta_1 \cdot 2\rho_1 \cos \psi_1, \\ B_{n-3} &= \beta_1 \rho_1^2, \\ B_{n-4} &= \beta_1 \rho_1^2 \beta_2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (44)$$

Отсюда найдем:

$$\frac{B_{n-2}}{B_{n-1}} = 2\rho_1 \cos \psi_1, \quad \frac{B_{n-3}}{B_{n-1}} = \rho_1^2, \quad (45)$$

после чего вычислим  $\rho_1$  и  $r_1 = \sqrt[2]{\rho_1}$ .

Для определения  $\varphi_1$  используем связь между корнями уравнения и коэффициентом  $A_{n-1}$ , равным (с отрицательным знаком) их сумме:

$$A_{n-1} = -(\alpha_1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k). \quad (46)$$

Отсюда  $\varphi_1$  находится без труда.

При двух парах комплексных корней два коэффициента  $A_i$  будут изменяться неравномерно. Так же, как по выражениям (44), можно будет найти оба значения модулей комплексных корней  $r_1$  и  $r_2$ . Для нахождения значений углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  нужно будет составить еще одну зависимость между корнями и коэффициентами рассматриваемого уравнения.

Приведем уравнение (18) к виду

$$\frac{1}{A_0} + \frac{A_{n-1}}{A_0 x} + \frac{A_{n-2}}{A_0 x^2} + \dots + \frac{A_1}{A_0 x^{n-1}} + \frac{1}{x^n} = 0, \quad (47)$$

разделив все члены его на  $A_0 x^n$ .

Введем новую переменную

$$y = \frac{1}{x}, \quad (48)$$

тогда получим уравнение

$$y^n + \frac{A_1}{A_0} y^{n-1} + \frac{A_2}{A_0} y^{n-2} + \dots + \frac{A_{n-1}}{A_0} y + \frac{1}{A_0} = 0. \quad (49)$$

Очевидно, что отношение  $\frac{A_1}{A_0}$  будет равно сумме корней нового уравнения, взятой с противоположным знаком, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_0} = - \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)} + \frac{1}{r_1 (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} + \frac{1}{r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} \right). \end{aligned} \quad (50)$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{1}{r (\cos \varphi \pm i \sin \varphi)} &= \frac{1}{r} (\cos \varphi \pm i \sin \varphi)^{-1} = \frac{\cos \varphi \mp i \sin \varphi}{r}, \\ \frac{1}{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} + \frac{1}{r (\cos \varphi - i \sin \varphi)} &= \frac{2 \cos \varphi}{r}, \end{aligned} \quad (51)$$

следовательно,

$$\frac{A_1}{A_0} = - \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_k} + \frac{2 \cos \varphi_1}{r_1} + \frac{2 \cos \varphi_2}{r_2} \right). \quad (52)$$

Совместно с условием

$$A_{n-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + 2r_1 \cos \varphi_1 + 2r_2 \cos \varphi_2) \quad (53)$$

имеем два уравнения для определения косинусов.

Пример. Рассмотрим теперь то уравнение четвертой степени, которое осталось после отделения от уравнения седьмой степени трех его вещественных корней:

$$x^4 + 0,68342x^3 + 1,95562x^2 + 0,37654x + 1,79420 = 0.$$

Первое квадрирование:

$$\begin{array}{r} \text{—} (1 \quad 1,95562 \quad 1,79420)^2 \\ \quad (0,68342 \quad + 0,37654)^2 \\ 1 \quad 3,91124 \quad 3,82445 \quad 7,01755 \quad 3,21915 \\ \quad \quad 3,58840 \\ \text{—} \quad 0,46706 \quad 0,51467 \quad 0,14178 \\ \hline 1 \quad 3,44418 \quad 6,89818 \quad 6,87577 \quad 3,21915 \quad m=2 \end{array}$$

Второе квадрирование:

$$\begin{array}{r} \text{—} (1 \quad 6,89818 \quad 3,21915)^2 \\ \quad (3,44418 \quad 6,87577)^2 \\ 1 \quad 13,79636 \quad 47,58489 \quad 44,41255 \quad 10,36293 \\ \quad \quad 6,43830 \\ \quad 11,86238 \quad 47,36278 \quad 47,27621 \\ \hline 1 \quad 1,93398 \quad 6,66041 \quad -2,86366 \quad 10,36293 \quad m=4 \end{array}$$

Третье квадрирование:

$$\begin{array}{r} \text{—} (1 \quad 6,66041 \quad 10,36293)^2 \\ \quad (1,93398 \quad -2,86366)^2 \\ 1 \quad 13,32082 \quad 44,36106 \quad 138,04253 \quad 107,39032 \\ \quad \quad 20,72586 \\ \text{—} \quad 3,74028 \quad -11,07652 \quad 8,20055 \\ \hline 1 \quad 9,58054 \quad 76,16344 \quad 129,84198 \quad 107,39032 \quad m=8 \end{array}$$

Четвертое квадрирование:

$$\begin{array}{r} \text{—} (1 \quad 7,61634 \quad 1,07390)^2 \\ \quad (9,58054 \quad 1,29842)^2 \\ \quad \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \\ 1 \quad 15,23268 \quad 58,00863 \quad 1,63584 \quad 1,15326 \\ \quad \quad 2,14780 \\ \text{—} \quad 9,17867 \quad 24,87913 \quad -1,68589 \\ \hline \quad \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \\ 1 \quad 6,05401 \quad 35,27730 \quad -0,05305 \quad 1,15326 \quad m=16 \end{array}$$

Пятое квадрирование:

$$\begin{array}{r} \text{—} (1 \quad 3,52773 \quad 1,15326)^2 \\ \quad (6,05401 \quad -0,05305)^2 \\ \quad \quad 3 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\ 1 \quad 7,05546 \quad 12,44488 \quad 8,13678 \quad 1,33001 \\ \quad \quad 0,02307 \\ \text{—} \quad 3,66510 \quad -0,06423 \quad 0,02814 \\ \hline \quad \quad 3 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\ 1 \quad 3,39036 \quad 12,53218 \quad 8,10864 \quad 1,33001 \quad m=32 \end{array}$$

Шестое квадрирование:

$$\begin{array}{r}
 \text{---} (1 \quad \quad \quad \overset{7}{1,25322} \quad \quad \quad \overset{8}{1,33001})^2 \\
 \quad \quad \quad \overset{3}{(3,39036} \quad \quad \quad \overset{7}{8,10864})^2 \\
 \quad \quad \quad \overset{7}{1} \quad \overset{14}{2,50644} \quad \overset{15}{1,57056} \quad \overset{16}{3,33359} \quad \overset{16}{1,76893} \\
 \text{---} \quad \quad \quad \overset{0}{1,14945} \quad \overset{0}{0,00550} \quad \overset{0}{6,57500} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \overset{7}{1} \quad \overset{14}{1,35699} \quad \overset{15}{1,56506} \quad \overset{16}{3,24141} \quad \overset{16}{1,76893} \quad m=64
 \end{array}$$

Седьмое квадрирование:

$$\begin{array}{r}
 \text{---} (1 \quad \quad \quad \overset{14}{1,56506} \quad \quad \quad \overset{16}{1,76893})^2 \\
 \quad \quad \quad \overset{7}{(1,35699} \quad \quad \quad \overset{15}{3,24141})^2 \\
 \quad \quad \quad \overset{14}{1} \quad \overset{28}{3,13012} \quad \overset{30}{2,44941} \quad \overset{32}{5,53696} \quad \overset{32}{3,12911} \\
 \text{---} \quad \quad \quad \overset{0}{1,84142} \quad \overset{0}{0,00001} \quad \overset{0}{10,50674} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \overset{14}{1} \quad \overset{28}{1,28870} \quad \overset{30}{2,44940} \quad \overset{32}{-4,96978} \quad \overset{32}{3,12911} \quad m=128
 \end{array}$$

Коэффициенты  $B_2$  и  $B_0$  изменяются от квадрирования к квадрированию вполне правильно, и можно считать разделение корней законченным, так как влияние всех слагаемых, кроме основных, возводимых в квадрат, исчезло.

Коэффициенты  $B_3$  и  $B_1$  изменяются неправильно и в ходе вычислений меняют знак. Это свидетельствует о наличии двух пар комплексных корней, чего мы и вправе ожидать, поскольку все вещественные корни были нами уже выделены.

Переходим к определению величин  $r$  и  $\cos \varphi$ . Имеем:

$$\begin{aligned}
 (r_1^2)^{128} &= 2,44940, & (r_2^2)^{128} &= \frac{3,12911}{2,44940} = 1,27750, \\
 128 \lg r_1^2 &= 28,38906, & 128 \lg r_2^2 &= 4,106361, \\
 \lg r_1^2 &= 0,221790, & \lg r_2^2 &= 0,032081, \\
 \lg r_1 &= 0,110895, & \lg r_2 &= 0,016040, \\
 r_1 &= 1,29091; & r_2 &= 1,03762.
 \end{aligned}$$

Уравнения, служащие для определения косинусов:

$$1) \quad 0,68342 = -(2,58182 \cos \varphi_1 + 2,07524 \cos \varphi_2);$$

$$2) \quad \frac{0,37654}{1,79420} = -\left( \frac{2 \cos \varphi_1}{1,29091} + \frac{2 \cos \varphi_2}{1,03762} \right),$$

г. е.

$$-0,20987 = 1,54830 \cos \varphi_1 + 1,92749 \cos \varphi_2.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi_1 &= -0,50063, & 2r_1 \cos \varphi_1 &= -1,29259, \\
 \cos \varphi_2 &= 0,29354; & 2r_2 \cos \varphi_2 &= 0,60917.
 \end{aligned}$$

Итак, мы разложили данный нам многочлен на два трехчлена, соответствующие двум парам комплексных корней:

$$x^4 + 0,68342x^3 + 1,95562x^2 + 0,37654x + 1,79420 = \\ = (x^2 + 1,29259x + 1,66644)(x^2 - 0,60917x + 1,07667).$$

У А. Н. Крылова приведено более точное (с семью знаками за запятой) решение, данное Энке. В пределах принятого нами числа знаков оно дает

$$(x^2 + 1,29263x + 1,66642)(x^2 - 0,60921x + 1,07668).$$

Незначительные расхождения вполне понятны: они произошли от округлений последнего знака.

Метод разделения корней связан с необходимостью проведения значительного количества вычислений, причем с самого начала нужно вычислять с полной точностью. Любая ошибка дает отклонение получаемых результатов от истинных. Даже при проведении всех действий с помощью арифмометра на решение уравнения четвертой степени затрачивается несколько часов; если же пользоваться для вычислений логарифмическими таблицами, то длительность расчета еще возрастает. Кроме того, если корни близки по модулю, то разделение их представляет значительные трудности, ибо приходится делать большое количество квадратур. Не имея возможности по ходу расчета удостовериться в его правильности, вычислитель испытывает сомнение: является ли длительность расчета следствием плохого разделения корней из-за близости их модулей, или же в расчет вкралась ошибка.

В вычислительных учреждениях возможно проведение расчета двумя лицами с постепенной сверкой отдельных этапов вычислений третьим лицом; если же в работе участвует лишь одно лицо, никогда нельзя быть уверенным в правильности всех действий. Это является большим недостатком метода разделения корней.

Мы не рассматривали случаев наличия более двух пар комплексных корней, так как эти случаи приводят к исключительно сложной схеме вычислений, выполнять которые без ошибок вряд ли сможет даже опытный вычислитель.

**§ 4. Метод отделения большого корня.** В 1930 г. автором был опубликован\*) первый из нескольких разработанных им методов решения уравнений высоких степеней, применимый к нахождению как вещественных, так и комплексных корней.

В отличие от метода разделения корней, метод автора не дает сразу всех корней, а отделяет их по одному (или, в случае комплексных корней, по два), постепенно понижая степень рассматриваемого уравнения. Кроме того, точность вычислений в начале работы может быть взята минимальной и увеличение ее производится по мере приближения к окончанию отделения корня. Случайные ошибки в ходе расчета удлиняют работу, но не мешают получению результатов с любой степенью точности.

Сущность метода заключается в следующем. Начнем со случая вещественных корней.

Уравнение

$$F(x) = x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_1x + A_0 = 0 \quad (54)$$

приводится к виду

$$B_{n+m}x^{n+m} + x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \dots + B_1x + B_0 = 0, \quad (55)$$

где  $m$  — достаточно большое число.

\*) Мелентьев П. В., Журнал Русского физико-химического общества, т. LXII, в. 2, 1930.

Для всех корней уравнения (54), кроме корня, имеющего наибольший модуль, можно отбросить, ввиду его малости, первый член формы (55), получив уравнение, корнями которого являются все остальные корни уравнения (54).

Действительно, пусть модули корней уравнения (54)

$$|x_1| > |x_2| > \dots > |x_n|.$$

Если для  $x = \pm |x_1|$  абсолютные величины членов левой части уравнения (54) равны

$$|B_{n+m}x_1^{n+m}|, |x_1^{n-1}|, |B_{n-2}x_1^{n-2}|, \dots, |B_0| \quad (56)$$

и первый член имеет величину одного порядка с остальными, то при  $x = \pm |x_2|$ , где

$$|x_2| = \varepsilon |x_1| \quad (57)$$

и

$$\varepsilon < 1,$$

их абсолютные величины становятся равными соответственно

$$\varepsilon^{n+m} |B_{n+m}x_1^{n+m}|, \varepsilon^{n-1} |x_1^{n-1}|, \varepsilon^{n-2} |B_{n-2}x_1^{n-2}|, \dots, |B_0|. \quad (58)$$

Для удобства сравнения величин членов разделим все члены на  $\varepsilon^{n-1}$ ; тогда получим

$$\varepsilon^{m+1} |B_{n+m}x_1^{n+m}|, |x_1^{n-1}|, \frac{1}{\varepsilon} |B_{n-2}x_1^{n-2}|, \dots, \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} |B_0|. \quad (59)$$

Все члены, кроме первого, увеличились, а первый член уменьшился в  $\varepsilon^{m+1}$  раз. При достаточно большом  $m$  первый член становится пренебрежимо малым при любой требуемой степени точности и может быть отброшен.

После отбрасывания первого члена уравнения (55) остается уравнение  $(n-1)$ -й степени

$$\Phi(x) = x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \dots + B_1x + B_0 = 0, \quad (60)$$

содержащее все корни уравнения (54), кроме первого.

Случай равенства двух или нескольких корней с наибольшим модулем не вызывает особых трудностей. Действительно, в этом случае производная  $\Phi'(x)$  также содержит данный корень, т. е.

$$(n+m)B_{n+m}x_1^{n+m-1} + (n-1)x_1^{n-2} + (n-2)B_{n-2}x_1^{n-3} + \dots + B_1 = 0. \quad (61)$$

Умножив все члены (61) на  $\frac{x_1}{n+m}$ , мы видим, что первый член  $B_{n+m}x_1^{n+m}$  одного порядка величины с членами

$$\frac{n-1}{n+m} x_1^{n-1}, \frac{n-2}{n+m} B_{n-2}x_1^{n-2}, \dots, \frac{1}{n+m} B_1x_1. \quad (62)$$

Следовательно, он значительно меньше членов

$$x_1^{n-1}, B_{n-2}x_1^{n-2}, \dots, B_1x_1 \quad (63)$$

и при достаточно большом  $m$  может быть отброшен, т. е. мы и здесь можем пользоваться формой (60), в которой будут сохранены все корни уравнения (54), в том числе и наибольший, с кратностью на единицу меньшей, чем в (54).

Рассмотрим, как повышать степень первого члена уравнения

$$F(x) = 0.$$

Умножим все члены  $F(x)$  на  $\frac{x}{A_{n-1}}$  и вычтем  $F(x)$ . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{n-1}} x^{n+1} + x^n + \frac{A_{n-2}}{A_{n-1}} x^{n-1} + \dots + \frac{A_0}{A_{n-1}} x &= 0 \\ -x^n - A_{n-1} x^{n-1} - \dots - A_1 x - A_0 &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

$$F_1(x) = A_{1,n+1} x^{n+1} + A_{1,n-1} x^{n-1} + \dots + A_{1,1} x + A_{1,0} = 0.$$

Умножив  $F_1(x)$  почленно на  $\frac{x}{A_{1,n-1}}$  и вычтя опять  $F(x)$ , получим

$$F_2(x) = A_{2,n+2} x^{n+2} + A_{2,n-1} x^{n-1} + \dots + A_{2,1} x + A_{2,0} = 0. \quad (65)$$

Проведя таким путем  $n-1$  повышений степени первого члена уравнения, т. е. дойдя до

$$\begin{aligned} F_{n-1}(x) = A_{n-1,2n-1} x^{2n-1} + A_{n-1,n-1} x^{n-1} + A_{n-1,n-2} x^{n-2} + \dots \\ \dots + A_{n-1,1} x + A_{n-1,0} = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

и разделив на коэффициент при  $x^{n-1}$ , перенесем член

$$\frac{A_{n-1,2n-1}}{A_{n-1,n-1}} x^{2n-1}$$

в правую часть уравнения и возведем обе части в квадрат. Получим слева многочлен степени  $2(n-1)$ , а справа — один член степени  $4n-2$ .

Степень многочлена в левой части уравнения мы можем понизить сперва на единицу, затем еще на единицу и т. д. до степени  $n-1$ , вычитая многочлен  $F(x)$ , домноженный на соответствующие степень  $x$  и коэффициент. В правой части будет стоять член степени  $4n-2$ .

Опять возвысим обе части уравнения в квадрат и понизим степень левой части. Справа будет стоять уже член степени  $8n-4$ .

С каждым новым циклом, состоящим из двух операций — возвышения в квадрат и понижения степени, — показатель степени  $x$  в правой части уравнения будет удваиваться. Однако этот член мы вообще не будем записывать, так как нас будет интересовать лишь то, когда можно считать процесс отделения наибольшего корня законченным.

Для контроля, получив после понижения степени полинома остаток  $(n-1)$ -й степени, еще раз умножим его на  $x$  и вычтем  $F(x)$ . Если две последовательно полученные строки  $(n-1)$ -й степени будут одинаковыми, то процесс закончен.

Действительно, пусть после некоторого количества действий мы получили для основного уравнения

$$F(x) = 0$$

функцию  $(n-1)$ -й степени  $\Phi(x)$  и в дальнейшем имели

$$x\Phi(x) - F(x) = C\Phi(x),$$

т. е. функция  $\Phi(x)$  повторилась. Отсюда

$$F(x) = (x + C)\Phi(x),$$

т. е.  $-C$  — отделенный корень, а  $\Phi(x)$  — многочлен, корнями которого являются все остальные корни уравнения  $F(x) = 0$ .



Для примера возьмем уравнение

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0,$$

решенное ранее методом деления корней.

1	— 2	— 5	6	
	1	2,5	— 3	
	— 1	2	5	— 6
		4,5	2	— 6
		1	0,45	— 1,33
		— 1	2	5 — 6
		2,45	3,67	— 6
		1	1,5	— 2,5.

Степеней  $x$  мы не записываем, так как они очевидны. Проведя  $n-1$ , т. е. два понижения степени, возводим полученный многочлен 2-й степени в квадрат. Многочлен 4-й степени понижаем опять до второй. Для контроля делаем еще одно понижение степени и сравниваем обе строки.

	1	1,5	— 2,5	
		1,5	2,25	— 3,75
			— 2,5	— 3,75
				6,25
	1	3,0	— 2,75	— 7,50
	— 1	2	5	— 6
		5	2,25	— 13,50
		— 5	10	25
				— 30
			12,75	11,50
			1	0,94
			— 1	2
				5 — 6
			2,94	3,06
			1	1,04 — 2,04.

Сравнивая полученные многочлены

$$x^2 + 0,94x - 1,94 \text{ и } x^2 + 1,04x - 2,04,$$

видим, что процесс отделения корня еще не закончился, и требуется новый цикл вычислений. Возводим последний остаток в квадрат, понижаем его степень и получаем еще контрольную строку:

	1	1,04	— 2,04	
		1,04	1,0816	— 2,1216
			— 2,04	— 2,1216
				4,1616
	1	2,08	— 2,9984	— 4,2432
	— 1	2	5	— 6
		4,08	2,0016	— 10,2432
		— 4,08	8,16	20,40
				— 24,48
		10,1616	10,1568	— 20,3184
		1	0,9995	— 1,9995
		— 1	2	5 — 6
			2,9995	3,0005
			1	1,0003 — 2,0003.

В пределах четырех знаков отделение корня закончено. Нетрудно видеть, что первый из коэффициентов контрольной строки равен по величине отделенному корню:

$$2,9995 \approx 3.$$

Следующее возведение в квадрат даст вдвое больше верных цифр, г. е. 8 точных знаков.

Первое возведение в квадрат, если его производить с самого начала вычислений, дает менее быстрое повышение степени отбрасываемого члена, поэтому необходимо несколько строк провести вычитанием. Это легко проверить самим читателям.

Разберем еще один пример — уравнение, которое нельзя решить методом разделения корней, так как два его корня одинаковы.

Пример.

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0.$$

Начнем с двух вычитаний, а затем проведем возвышение в квадрат и понижение степени:

1	—5	8	—4	
	1	—1,6	0,8	
	—1	5	—8	4
		3,4	—7,2	4
		1	—2,12	1,18
		—1	5	—8 4
			2,88	—6,82 4
			1	—2,37 1,39,

1	—2,37	1,39		
	—2,37	5,6169	—3,2943	
		1,39	—3,2943	1,9321
1	—4,74	8,3969	—6,5886	1,9321
—1	5	—8	4	
	0,26	0,3969	—2,5886	1,9321
	—0,26	1,30	—2,08	1,04
		1,6969	—4,6686	2,9721
		1	—2,7512	1,7515
	—1	5	—8	4
		2,2488	—6,2485	4
		1	—2,7786	1,7787
	—1	5	—8	4 (*)
		2,2214	—6,2213	4
		1	—2,8006	1,8007. (**)

Рассматриваемое уравнение по отделении корня 2,0 должно дать остаток

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Вычисления ведут к нему, но весьма медленно. Дело в том, что при отделении наибольшего корня влияние отбрасываемого члена уравнения убывает по степенному закону, а при кратных корнях оно примерно обратно пропорционально величине  $m$ . Поэтому нецелесообразно доводить вычисление рассматриваемого примера до конца. Полученные же результаты будут использованы ниже.

Если при кратном корне вычисление все же может привести, хотя и медленно, к результату, то при корнях одинаковой абсолютной величины, но разного знака, отбрасывание старшего члена уравнения вообще невозможно и результат вычисления получить с помощью изложенного здесь процесса нельзя. Однако небольшое дополнение рассмотренного цикла вычислений дает возможность находить корни и в этих случаях.

**§ 5. Отделение большего корня — случай комплексных корней.** Пусть мы приведем уравнение (54) к виду (55). Если в уравнении имеются два корня с одинаковыми модулями и эти модули наибольшие, то, очевидно, необходимо отделить сразу оба корня. Для того чтобы это сделать, умножим полученный многочлен на  $x$  и вычтем из него  $F(x)$ . Получим

$$\begin{array}{r} B_{n+m}x^{n+m+1} + x^n + B_{n-2}x^{n-1} + \dots + B_1x^2 + B_0x = 0 \\ - x^n - A_{n-1}x^{n-1} - \dots - A_2x^2 - A_1x - A_0 = 0 \\ \hline C_{n+m+1}x^{n+m+1} + C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_2x^2 + C_1x + C_0 = 0. \end{array} \quad (67)$$

Разделим члены строки (67) на  $C_{n-1}$  и вычтем их из строки (55):

$$\begin{array}{r} B_{n+m}x^{n+m} + x^{n+1} + B_{n-2}x^{n-2} + \dots + B_1x + B_0 = 0 \\ \frac{C_{n+m+1}}{C_{n-1}}x^{n+m+1} + x^{n-1} + \frac{C_{n-2}}{C_{n-1}}x^{n-2} + \dots + \frac{C_1}{C_{n-1}}x + \frac{C_0}{C_{n-1}} = 0 \\ \hline -D_{n+m+1}x^{n+m+1} + D_{n+m}x^{n+m} + D_{n-2}x^{n-2} + \dots + D_1x + D_0 = 0. \end{array} \quad (68)$$

Разделив члены строки (68) на  $D_{n-2}$ , получим уравнение, два первые члена которого имеют порядок величины одинаковый с остальными членами лишь для значений  $x$ , соответствующих двум отдельным корням. Для значений  $x$ , соответствующих остальным корням, эти два члена оказываются исчезающе малыми. Поэтому остальные члены строки, полученной из (68):

$$x^{n-2} + \frac{D_{n-3}}{D_{n-2}}x^{n-3} + \dots + \frac{D_1}{D_{n-2}}x + \frac{D_0}{D_{n-2}} = 0$$

представляют собою уравнение, имеющее все корни уравнения (54), кроме двух отделенных корней.

Это следствие можно использовать в том случае, когда уравнение (54) содержит пару комплексных корней, модуль которых является наибольшим среди модулей всех корней уравнения, а также в случае двух вещественных корней с одинаковыми или почти одинаковыми модулями, так как в этом случае, отделение одного из корней без второго или затруднительно, или невозможно.

Для примера возьмем строки (\*) и (\*\*) рассмотренного в предыдущем параграфе решения уравнения

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

и вычтем одну из них из другой:

$$\begin{array}{r} x^3 - 2,8006x + 1,8007 = 0 \\ - x^3 - 2,7786x + 1,7787 = 0 \\ \hline -0,0220x + 0,0220 = 0, \\ x = 1. \end{array}$$

Деля решаемое уравнение на  $x - 1$ , получаем трехчлен

$$x^2 - 4x + 4,$$

корнями которого являются отделенные корни.

При решении в § 1 уравнения седьмой степени, отделив три вещественных корня, мы получили уравнение

$$x^4 + 0,68342x^3 + 1,95562x^2 + 0,37654x + 1,79420 = 0$$

с двумя парами комплексных корней, которые были вычислены в § 3 методом разделения корней. Найдем комплексные корни этого уравнения рассматриваемым методом. Вычислять будем сперва с минимальной точностью, чтобы только обнаружить начало отделения корней.

После нескольких вычитаний первое возведение в квадрат дает приближенное представление о виде трехчлена остающихся корней.

[illegible]

Как видим, три последовательных строки (\*), (\*\*) и (\*\*\*) не имеют между собою ни малейшего сходства. Это говорит о необходимости отделе-

ния более чем одного корня. Понизим степень остающейся части уравнения еще на одну единицу:

$$\begin{array}{rrrr}
 1 & 0,40 & 0,49 & 1,17 \\
 -1 & -5,25 & 2,82 & -6,40 \\
 \hline
 & -4,85 & 3,31 & -5,23 \\
 & 1 & -0,68 & 1,08, \\
 \\ 
 1 & 5,25 & -2,82 & 6,40 \\
 -1 & 1,05 & -1,32 & 0,39 \\
 \hline
 & 6,30 & -4,14 & 6,79 \\
 & 1 & -0,65 & 1,07.
 \end{array}$$

Поскольку процесс отделения корней уже замечен, добавляем еще один знак и делаем второе возведение в квадрат:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 1 & -1,050 & 1,320 & -0,390 & & \\
 & -1,050 & 1,102 & -1,386 & 0,410 & \\
 & & 1,320 & -1,386 & 1,742 & -0,515 \\
 & & & -0,390 & 0,410 & -0,515 & 0,152 \\
 \hline
 1 & -2,100 & 3,742 & -3,552 & 2,562 & -1,030 & 0,152 \\
 -1 & -0,683 & -1,956 & -0,377 & -1,794 & & \\
 \hline
 & -2,783 & 1,786 & -3,929 & 0,768 & -1,030 & \\
 & 2,783 & 1,901 & 5,444 & 1,049 & 4,993 & \\
 \hline
 & & 3,687 & 1,515 & 1,817 & 3,963 & 0,152 \\
 & & -3,687 & -2,518 & -7,212 & -1,390 & -6,614 \\
 \hline
 & & & -1,003 & -5,395 & 2,573 & -6,462 \\
 & & & 1 & 5,379 & -2,565 & 6,443 \\
 & & & -1 & -0,683 & -1,956 & -0,377 & -1,794 \\
 \hline
 & & & & 4,696 & -4,521 & 6,066 & -1,794 \\
 & & & & 1 & -0,963 & 1,292 & -0,382 & (**) \\
 & & & & -1 & -0,683 & -1,956 & -0,377 & -1,794 \\
 \hline
 & & & & & -1,646 & -0,664 & -0,759 & -1,794 \\
 & & & & & 1 & 0,403 & 0,461 & 1,090, \\
 & & & & & & & & (***) \\
 \\ 
 1 & 5,379 & -2,565 & 6,443 & & \\
 -1 & 0,963 & -1,292 & 0,382 & & \\
 \hline
 & 6,342 & -3,857 & 6,825 & & \\
 & 1 & -0,608 & 1,076 & & \\
 \\ 
 1 & -0,963 & 1,292 & -0,382 & & \\
 -1 & -0,403 & -0,461 & -1,090 & & \\
 \hline
 & -1,366 & 0,831 & -1,472 & & \\
 & 1 & -0,608 & 1,078. & & 
 \end{array}$$

В пределах точности трех знаков за запятой процесс отделения корней подходит к концу. Поэтому увеличиваем точность до пяти знаков за запятой

и делаем еще одно возведение в квадрат:

1	0,40300	0,46100	1,09000						
	0,40300	0,16241	0,18578	0,43927					
		0,46100	0,18578	0,21252	0,50249				
			1,09000	0,43927	0,50249	1,18810			
1	0,80600	1,08441	2,55156	1,09106	1,00498	1,18810			
—1	—0,68342	—1,95562	—0,37654	—1,79420					
	0,12258	—0,87121	2,17502	—0,70314	1,00498				
	—0,12258	—0,08377	—0,23972	—0,04616	—0,21993				
		—0,95498	1,93530	—0,74930	0,78505	1,18810			
		0,95498	0,65265	1,86758	0,35959	1,71343			
		2,58795	1,11828	1,14464	2,90153				
	1	0,43211	0,44230	1,12117					(*)
—1	—0,68342	—1,95562	—0,37654	—1,79420					
		—0,25131	—1,51332	0,74463	—1,79420				
	1	6,02173	—2,96299	7,13939					(**)
	—1	0,68342	—1,95562	—0,37654	—1,79420				
			5,33831	—4,91861	6,76285	—1,79420			
			1	—0,92138	1,26685	—0,33610,			(***)
	1	0,43211	0,44230	1,12117					
—1	—0,602173	2,96299	—7,13939						
		—5,58962	3,40529	—6,01822					
	1	—0,60922	1,07668,						
	1	6,02173	—2,96299	7,13939					
—1	0,92138	—1,26685	0,33610						
		6,94311	—4,22984	7,47549					
	1	—0,60921	1,07668.						

Отделенные корни находим, деля решаемое уравнение на оставшийся многочлен

$$x^2 - 0,60921x + 1,07668,$$

(полностью совпадающий с приведенным у А. Н. Крылова):

$$x^4 + 0,68342x^3 + 1,95562x^2 + 0,37654x + 1,79420 = \\ = (x^2 - 0,60921x + 1,07668)(x^2 + 1,29263x + 1,66642).$$

Рассмотренный способ позволяет довольно быстро уточнять корни, полученные с недостаточной точностью.

**§ 6. Метод уточнения выделяемых трехчленов.** В 1937 г. автор опубликовал свой второй \*) метод решения уравнений высоких степеней с комплексными корнями, частью которого оказалось возможным воспользоваться как самостоятельным методом, заключающимся в следующем.

Пусть в результате некоторой вычислительной работы удалось получить трехчлен

$$z^2 + B_1z + B_0, \quad (69)$$

близкий к тому, который соответствует паре комплексных корней уравнения

$$F(z) = z^n + A_{n-1}z^{n-1} + \dots + A_1z + A_0 = 0, \quad (70)$$

не имеющего вещественных корней (и, следовательно, четной степени).

\*) Мелентьев П. В., Несколько новых методов и приемов приближенных вычислений, ОНТИ, 1937.

Если мы разделим  $F(z)$  на этот трехчлен, то из-за его приближенности получим некоторый остаток (двучлен). Если мы будем делить  $F(z)$  не на данный трехчлен, а на

$$z^3 + (B_1 + p)z + (B_0 + q), \quad (71)$$

где  $p$  и  $q$  — две пока еще неизвестные поправки, то каждый из членов остатка будет зависеть от  $p$  и от  $q$  и можно подобрать такие их значения, чтобы оба члена остатка превратились в нули. При этих значениях  $p$  и  $q$  трехчлен (71) даст точные значения пары комплексных корней.

Однако при делении на трехчлен вида (71) получаются слишком сложные степенные зависимости от  $p$  и  $q$ , не разрешимые относительно этих неизвестных. Поэтому отыскание поправок к трехчлену (69) можно провести последовательными приближениями, учитывая при делении лишь первые степени этих поправок, что соответствует примерно способу Ньютона, но только примененному в области комплексной переменной.

При делении нужно для каждой степени  $z$  выделять столбец, состоящий из трех частей: 1) численной, 2) коэффициента при  $p$ , 3) коэффициента при  $q$ .

В начале процесса, поскольку мы не знаем вида трехчлена (69), можно делить только на трехчлен

$$z^3 + pz + q. \quad (72)$$

Результат от такого деления легко получить непосредственно, не производя самого деления. Как легко проверить, при этом получатся следующие значения  $p_0$  и  $q_0$ :

$$p_0 = \frac{A_1 A_3 - A_0 A_3}{A_3^2}, \quad q_0 = \frac{A_0}{A_3}. \quad (73)$$

Трехчлен

$$z^3 + p_0 z + q_0 \quad (74)$$

мы и примем за начальный, подлежащий дальнейшему уточнению.

Для примера рассмотрим уравнение 6-й степени, которое сообщил автору академик А. Н. Крылов. Это уравнение имеет историческое значение: с его помощью французский астроном Леверрье нашел планету Нептун. Оно имеет три пары комплексных корней и поэтому практически не разрешимо по методу разделения корней. Метод отделения корней, хотя и может быть к нему приложен, но, ввиду высокой степени уравнения, каждое возведение в квадрат будет связано со значительной затратой труда. Между тем, только что рассмотренный способ позволяет сравнительно быстро найти все три пары его корней.

Пример 1. Уравнение было получено Леверрье в виде

$$3447z^6 + 14\,560z^5 + 22\,430z^4 + 25\,857z^3 + 29\,193z^2 + \\ + 11\,596z + 5602 = 0. \quad (75)$$

Разделив на коэффициент при  $z^6$ , получим уравнение

$$z^6 + 4,2240z^5 + 6,5071z^4 + 7,5013z^3 + 8,4691z^2 + \\ + 3,3641z + 1,6252 = 0. \quad (76)$$

Начальные значения  $p_0$  и  $q_0$ :

$$p_0 = \frac{3,36 \cdot 8,47 - 1,63 \cdot 7,50}{8,47^2} \approx 0,22, \\ q_0 = \frac{1,63}{8,47} \approx 0,19. \quad (77)$$

Итак, начинаем уточнение с трехчлена

$$z^2 + 0,22z + 0,19. \quad (78)$$

Сперва проводим вычисления с малой точностью, чтобы приблизиться к более точному трехчлену без большой затраты труда. Последовательность действий видна из их записи (см. табл. 20).

После первого уточнения получаем трехчлен

$$z^2 + 0,34z + 0,29.$$

Второе и третье уточнения проводим с большей точностью (табл. 21 и 22). После третьего уточнения получаем трехчлен

$$z^2 + 0,3704z + 0,3053, \quad (79)$$

отличающийся от предыдущего лишь на несколько единиц последнего десяти-

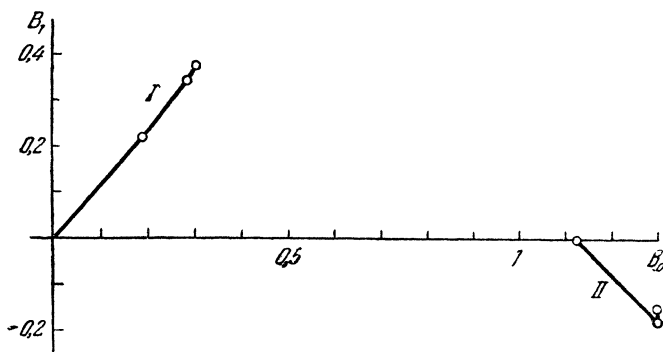


Рис. 18.

тичного знака. Подставив найденные значения  $p$  и  $q$  в частное, получим уравнение с оставшимися корнями:

$$z^4 + 3,8536z^3 + 4,7743z^2 + 4,5562z + 5,3238 = 0. \quad (80)$$

Получение корней этого уравнения также начинаем с вычисления начальных значений  $p_0$  и  $q_0$ :

$$p_0 = \frac{4,56 \cdot 4,77 - 5,32 \cdot 3,85}{4,77^2} \approx 0,$$

$$q_0 = \frac{5,32}{4,77} \approx 1,12,$$

а затем производим три последовательных уточнения (табл. 23).

Графическое изображение быстроты уточнения дано на рис. 18, где показаны изменения коэффициентов  $B_1$  и  $B_0$  в трехчленах, соответствующих определяемым корням (I и II), после очередного уточнения.

Вторая пара уточненных корней дает трехчлен

$$z^2 - 0,1567z + 1,2966 \quad (81)$$

Трехчлен последней пары корней получим, подставив в последнее частное числовые значения  $p$  и  $q$ , что дает

$$z^2 + 4,0103z + 4,1061. \quad (82)$$



Таблица 20

$z^6$	$z^5$	$p$	$q$	$z^4$	$p$	$q$	$z^3$	$p$	$q$	$z^2$	$p$	$q$	$z$	$p$	$q$	$z^0$	$p$	$q$
1	4,22			6,51			7,50			8,47			3,36			1,63		
-1	-0,22	-1		-0,19		-1												
	4,00	-1		6,32		-1	7,50											
	-4,00	+1		-0,88		-4,00	-0,76	0,19	-4,00									
						0,22												
				5,44	-3,78	-1	6,74	0,19	-4,00	8,47								
				-5,44	3,78	+1	-1,20	-5,44		-1,04			-5,44					
								0,83	0,22	0,72	0,19							
							5,54	-4,42	-3,78	7,43	0,72	-5,25	3,36	0,84	0,72			
							-5,54	4,42	3,78	-1,22	0,97	0,83	-1,05	0,84	-5,54			
										6,21	-3,85	-4,42	2,31	0,84	-4,82	1,63		
										-6,21	3,85	4,42	-1,36	0,85	0,97	-1,18	0,73	0,84
														-6,21				
													0,95	-4,52	-3,85	0,45	0,73	-5,37

$$z^2 + (0,22 + p)z + (0,19 + q)$$

$$z^4 (1) +$$

$$+ z^3 (4,00 - p) +$$

$$+ z^2 (5,44 - 3,78p - q) +$$

$$+ z (5,54 - 4,42p - 3,78q) +$$

$$+ z^0 (6,21 - 3,85p - 4,42q)$$

$$0,95 - 4,52p - 3,85q = 0$$

$$0,45 + 0,73p - 5,37q = 0$$

$$p = 0,12, q = 0,10$$

$$z^2 + 0,34z + 0,29$$

Таблица 21

$z^6$	$z^5$	$p$	$q$	$z^4$	$p$	$q$	$z^3$	$p$	$q$	$z^2$	$p$	$q$	$z$	$p$	$q$	$z^0$	$p$	$q$
1	4,2240			6,5071			7,5013			8,4691			3,3641			1,6252		
-1	-0,34	-1		-0,29		-1												
	3,8840	-1		6,2171		-1	7,5013											
	-3,8840	1		-1,3206		-3,88	-1,1264	0,29	-3,88									
						0,34												
				4,8965		-3,54	6,3749	0,29	-3,88	8,4691								
				-4,8965		3,54	-1,6648	-4,90	-4,90	-1,4200								
								1,20	0,34	1,03	0,29							
							4,7101	-3,41	-3,54	7,0491	1,03	-4,61	3,3641					
							-4,7101	3,41	3,54	-1,6014	-4,71	1,20	-1,3659		-4,71			
											1,16	1,03		0,99	1,03			
										5,4477	-2,52	-3,41	1,9982	0,99	-3,68	1,6252		
										-5,4477	2,52	3,41	-1,9622	-5,45	-4,71	-1,5798		-5,45
											0,86	1,16		0,99	0,73			0,99
													0,1460	-3,60	-2,52	0,0454	0,73	-4,46

$$z^2 + (0,34 + p)z + (0,29 + q)$$

$$z^4 (1) +$$

$$+ z^3 (3,8840 - p) +$$

$$+ z^2 (4,8965 - 3,54p - q) +$$

$$+ z (4,7101 - 3,41p - 3,54q) +$$

$$+ z^0 (5,4477 - 2,52p - 3,41q)$$

$$0,1460 - 3,60p - 2,52q = 0$$

$$0,0454 + 0,73p - 4,46q = 0$$

$$p = 0,0300, \quad q = 0,0150$$

$$z^2 + 0,3700z + 0,3050$$

Таблица 22

$z^6$	$z^5$	$p$	$q$	$z^4$	$p$	$q$	$z^3$	$p$	$q$	$z^2$	$p$	$q$	$z$	$p$	$q$	$z^0$	$p$	$q$
1	4,2240			6,5071			7,5013			8,4691			3,3641			1,6252		
-1	-0,3700	-1		-0,3050		-1												
	3,8540	-1		6,2021		-1	7,5013											
	-3,8540	1		-1,4260		-3,85	-1,1755											
						0,37												
				4,7761	-3,48	-1	6,3258	0,30	-3,85	8,4691								
				-4,7761	3,48	1	-1,7672	-4,78		-1,4567			-4,78					
								1,29	0,37		1,06	0,30						
							4,5586	-3,19	-3,48	7,0124	1,06	-4,48	3,3641					
							-4,5586	3,19	3,48	-1,6867	-4,56		-1,3804	-4,56				
											1,18	1,29		0,97	1,06			
										5,3257	-2,32	-3,19	1,9737	0,97	-3,50	1,6252		
										-5,3257	2,32	3,19	-1,9705	-5,33	-1,6243	-5,33		
														0,86	1,18	0,71	0,97	
													-0,0082	-3,50	-2,32	0,0009	0,71	-4,36

$$z^2 + (0,3700 + p)z + (0,3050 + q)$$

$$z^4 (1) +$$

$$+ z^8 (3,8540 - p) +$$

$$+ z^2 (4,7761 - 3,48p - q) +$$

$$+ z (4,5586 - 3,19p - 3,48q) +$$

$$+ z^0 (5,3257 - 2,32p - 3,19q)$$

$$0,0022 - 3,50p - 2,32q = 0$$

$$0,0009 + 0,71p - 4,36q = 0$$

$$p = 0,0004, \quad q = 0,0003$$

$$z^2 + 0,3704z + 0,3053$$

Итак, имеем:

$$z^6 + 4,2240z^5 + 6,5071z^4 + 7,5013z^3 + 8,4691z^2 + 3,3641z + 1,6252 = \\ = (z^3 + 0,3704z + 0,3053)(z^2 - 0,1567z + 1,2966) \times \\ \times (z^2 + 4,0103z + 4,1061). \quad (83)$$

Пример 2. Возьмем еще одно уравнение, решить которое невозможно ни методом разделения корней, ни методом их отделения

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \quad (84)$$

Найти корни этого уравнения можно искусственным приемом. Умножим обе части на  $z - 1$ , получим

$$z^5 - 1 = 0, \quad (85)$$

т. е.

$$z = \sqrt[5]{1}. \quad (86)$$

Корни этого уравнения:

$$z = \cos(72n)^\circ + i \sin(72n)^\circ \quad (87)$$

при

$$n = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Если отбросить корень  $z = 1$ , добавленный в процессе умножения на  $z - 1$ , то корни уравнения (84) будут:

$$z_{1,2} = \cos 72^\circ \pm i \sin 72^\circ, \\ z_{3,4} = \cos 144^\circ \pm i \sin 144^\circ, \quad (88)$$

что соответствует трехчленам

$$z^2 - 2\cos 72^\circ z + 1 \quad \text{и} \quad z^2 - 2\cos 144^\circ z + 1, \quad (89)$$

или, иначе,

$$z^2 + 1,61804z + 1 \quad \text{и} \quad z^2 - 0,61804z + 1. \quad (90)$$

Для этого уравнения начальные значения равны:

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 1.$$

После четырех циклов уточнений (см. табл. 24) получаем в пределах четырех десятичных знаков те же самые числа.

**§ 7. Применение схемы Руффини — Горнера.** В 1948 г. был опубликован \*) третий метод автора для отыскания комплексных корней уравнений высоких степеней. Заключается он в следующем.

Пусть дано уравнение четной степени, не имеющее вещественных корней:

$$F(z) = z^{2n} + A_{2n-1}z^{2n-1} + A_{2n-2}z^{2n-2} + \dots + A_1z + A_0 = 0. \quad (91)$$

Пусть одна из пар корней этого уравнения будет

$$z = \alpha_0 \pm \beta_0 i. \quad (92)$$

Сперва для упрощения дальнейшего рассуждения предположим, что значение  $\alpha_0$  нам известно и нужно найти  $\beta_0$ . Для этого расположим  $F(z)$  по степеням переменной

$$\zeta = z - \alpha_0. \quad (93)$$

\*) Мелентьев П. В., Журнал прикладной математики и механики, т. XII, № 2, 1948.

Т а б л и ц а 23

$z^4$	$z^3$	$p$	$q$	$z^3$	$p$	$q$	$z$	$p$	$q$	$z^0$	$p$	$q$
1	3,8536			4,7743			4,5562			5,3238		
-1		-1		-1,12		-1						
	3,85	-1		3,65		-1	4,56					
	-3,85	1			-3,85		-4,31	1,12	-3,85			
				3,65	-3,85	-1	0,25	1,12	-3,85	5,32		
				-3,65	3,85	1		-3,65		-4,08		-3,65
											4,31	1,12
							0,25	-2,53	-3,85	1,24	4,31	-2,53
1	3,8536			4,7743			4,5562			5,3238		
-1	0,18	-1		-1,30		-1						
	4,0336	-1		3,4743		-1	4,5562					
	-4,0336	1		-0,7308	-4,03		-5,2436	1,30	-4,03			
					-0,18							

$$z^3 + (0 + p)z + (1,12 + q)$$

$$z^2 + (3,85 - p)z + (3,65 - 3,85p - q)$$

$$0,25 - 2,53p - 3,85q = 0$$

$$1,24 + 4,31p - 2,53q = 0$$

$$p = -0,18, \quad q = 0,18$$

$$z^2 - 0,18z + 1,30$$

$$z^2 + (-0,18 + p)z + (1,30 + q)$$

$$z^2 + (4,0336 - p)z + (4,2051 - 4,21p - q)$$

$$0,0695 - 3,66p - 4,21q = 0$$

$$-0,1428 + 5,47p - 2,90q = 0$$

[illegible]

Таблица 24

$z^4$	$z^3$	$p$	$q$	$z^2$	$p$	$q$	$z$	$p$	$q$	$z^0$	$p$	$q$
1	1			1			1			1		
-1		-1	-1	-1								
$z^2 + (0 + p)z + (1 + q)$ $z^2 + (1 + p)z + (-p - q)$ $p - q = 0 \quad p = -0,5$ $1 + p + q = 0 \quad q = -0,5$ $z^2 - 0,5z + 0,5$												
1	1	-1	-1	0		-1	1					
-1		1			-1		-1	1	-1			
					-1	-1		1	-1	1	1	1
					1	1						
							0	1	-1	1	1	1
$z^2 + (-0,5 + p)z + (0,5 + q)$ $z^2 + (1,5 - p)z + (1,25 - 2p - q)$ $0,875 - 1,75p - 2q = 0$ $0,375 + p - 0,75q = 0$ $p = -0,03, \quad q = 0,46$ $z^2 - 0,53z + 0,96$												
1	1			1			1			1		
-1	0,5	-1	-1	-0,5		-1						
1,5	-1			0,5		-1	1					
-1,5	1			0,75	-1,5		-0,75	0,5	-1,5			
					-0,5							
				1,25	-2	-1	0,25	0,5	-1,5	1		-1,25
				-1,25	2	1	0,625	-1,25	-1	-0,625	1	0,5
								-1	-0,5			
							0,875	-1,75	-2	0,375	1	-0,75





Пусть новый вид функции будет

$$F(z) = \Phi(\zeta) = \zeta^{2n} + B_{2n-1}\zeta^{2n-1} + \dots + B_1\zeta + B_0, \quad (94)$$

где

$$\begin{aligned} B_0 &= \Phi(0) = F(\alpha_0) = \alpha_0^{2n} + A_{2n-1}\alpha_0^{2n-1} + \dots + A_1\alpha_0 + A_0, \\ B_1 &= \Phi'(0) = F'(\alpha_0) = 2n\alpha_0^{2n-1} + A_{2n-1}(2n-1)\alpha_0^{2n-2} + \dots + A_1, \\ B_2 &= \frac{1}{2!}\Phi''(0) = \frac{1}{2!}F''(\alpha_0) = \frac{2n(2n-1)}{2!}\alpha_0^{2n-2} + \dots + A_2 \end{aligned} \quad (95)$$

и т. д.

Вычисление коэффициентов  $B$  удобно производить по схеме Рурфини—Горнера, имеющей следующий вид:

$\begin{array}{c} + \\ \hline A_{2n-1} \\ \hline \alpha_0 \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \hline A_{2n-2} \\ \hline C_{2n-1,1}\alpha_0 \\ \hline + \\ \hline C_{2n-2,1} \\ \hline C_{2n-1,2}\alpha_0 \\ \hline + \\ \hline C_{2n-2,2} \\ \hline C_{2n-1,3}\alpha_0 \\ \hline + \\ \hline C_{2n-2,3} \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \hline A_{2n-3} \\ \hline C_{2n-2,1}\alpha_0 \\ \hline + \\ \hline C_{2n-3,1} \\ \hline C_{2n-2,2}\alpha_0 \\ \hline + \\ \hline C_{2n-3,2} \\ \hline C_{2n-2,3}\alpha_0 \\ \hline + \\ \hline C_{2n-3,3} \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \hline A_1 \\ \hline C_{2,1}\alpha_0 \\ \hline + \\ \hline C_{1,1} \\ \hline C_{2,2}\alpha_0 \\ \hline + \\ \hline B_1 \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \hline A_0 \\ \hline C_{1,1}\alpha_0 \\ \hline + \\ \hline B_0 \end{array}$
--	---	---	--	--

$\begin{array}{c} + \\ \hline C_{2n-1, 2n-1} \\ \hline \alpha_0 \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \hline C_{2n-2, 2n-2} \\ \hline C_{2n-1, 2n-1}\alpha_0 \\ \hline + \\ \hline B_{2n-2} \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \hline C_{2n-3, 2n-3} \\ \hline C_{2n-2, 2n-2}\alpha_0 \\ \hline + \\ \hline B_{2n-3} \end{array}$
--	---	---

$\begin{array}{c} + \\ \hline C_{k+1, m} \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \hline C_{k+1, m-1} \\ \hline C_{k+1, m}\alpha_0 \\ \hline + \\ \hline C_{k, m} \end{array}$	$C_{k, m} = C_{k, m-1} + C_{k+1, m}\alpha_0$
---	---	--

Если  $z = \alpha_0 + \beta_0 i$  есть корень уравнения (91), то поскольку  $\zeta = z - \alpha_0$ , корнем уравнения (94) является  $\beta_0 i$ , т. е.  $\Phi(\beta_0 i) = 0$ , или, в развернутом виде,  $\Phi(\beta_0 i) = B_0 - B_2\beta_0^2 + B_4\beta_0^4 - \dots + (-1)^n\beta_0^{2n} + i\beta_0[B_1 - B_3\beta_0^2 + B_5\beta_0^4 - \dots + (-1)^{n-1}B_{2n-1}\beta_0^{2n-2}] = 0$ . (96)



труда. Имеем

$$\begin{array}{r|rr}
 1 & 1,95 & 1,79 \\
 -1 & -0,56 & \\
 \hline
 & 1,39 & \\
 & -1,39 & -0,78 \\
 \hline
 & 1,01 & = P_0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rr}
 & 0,68 & 0,38 \\
 \hline
 & 1,47 & 2,04
 \end{array}$$

Кроме этого, возьмем еще два значения для  $\alpha$ , равные 0,1 и 0,2. Вычисляем коэффициенты  $B$  для этих значений  $\alpha$  с помощью счетной линейки, беря лишь два десятичных знака. Получив три значения  $P_0$ , проведем кривую, найдем примерное значение корня  $\alpha_0$  и затем уже будем вычислять точно.

$$\alpha = 0,1$$

$$\begin{array}{r}
 0,68 \\
 + \\
 1 \quad 1,96 \\
 0,78 \quad + \quad 8 \quad 0,38 \\
 + \\
 1 \quad 2,04 \quad 20 \quad 1,79 \\
 0,88 \quad + \quad 9 \quad 0,58 \quad + \quad 6 \\
 + \\
 1 \quad 2,13 \quad 21 \quad 1,85 \\
 0,98 \quad + \quad 10 \quad 0,79 \\
 + \\
 1 \quad 2,23 \\
 1,08 \\
 \begin{array}{r|rr}
 1 & 2,23 & 1,85 \\
 -1 & -0,73 & \\
 \hline
 & 1,50 & \\
 & -1,50 & -1,10 \\
 \hline
 & 0,75 & = P_0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|rr}
 & 1,08 & 0,79 \\
 \hline
 & 0,92 & 1,39
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\alpha = 0,2$$

$$\begin{array}{r}
 0,68 \\
 + \\
 2 \quad 1,96 \\
 0,88 \quad + \quad 18 \quad 0,38 \\
 + \\
 2 \quad 2,14 \quad 43 \quad 1,79 \\
 1,08 \quad + \quad 22 \quad 0,81 \quad + \quad 16 \\
 + \\
 2 \quad 2,36 \quad 47 \quad 1,95 \\
 1,28 \quad + \quad 26 \quad 1,28 \\
 + \\
 2 \quad 2,62 \\
 1,48
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr}
 1 & 2,62 & 1,95 \\
 -1 & -0,87 & \\
 \hline
 & 1,75 & \\
 & -1,75 & -1,51 \\
 \hline
 & & 0,44 = P_0
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 1,48 & 1,28 \\
 \hline
 0,68 & 1,18
 \end{array}$$

Проведя по полученным значениям  $P_0$  кривую (рис. 19), мы видим, что искомое значение  $\alpha_0$  вещественной части корня находится поблизости от 0,3. Находим все коэффициенты  $B$  для  $\alpha = 0,3$  с полной точностью.

$$\alpha = 0,3$$

$$\begin{array}{rcll}
 & 0,6834170 & & \\
 + & & 1,9556169 & \\
 & 3 & + & \\
 & 0,9834170 & 2950251 & 0,3765418 \\
 + & & & + \\
 & 3 & 2,2506420 & 6751926 & 1,7942053 \\
 & & + & & + \\
 & 1,2834170 & 3850251 & 1,0517344 & 3155204 \\
 + & & & + & \\
 & 3 & 2,6356671 & 7907001 & 2,1097257 \\
 & & + & & \\
 & 1,5834170 & 4750251 & 1,8424345 & B_0 \\
 + & & & & \\
 & 3 & 3,1106922 & B_1 & \\
 & 1,8834170 & B_2 & & \\
 & B_3 & & &
 \end{array}$$

Величину  $P_0$  определяем опять-таки с небольшой точностью, достаточной чтобы уточнить значение  $\alpha_0$  всего лишь на один знак

$$\begin{array}{r|rr}
 1 & 3,111 & 2,110 \\
 -1 & -0,978 & \\
 \hline
 & 2,133 & \\
 & -2,133 & -2,084 \\
 \hline
 & & 0,026 = P_0
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 1,883 & 1,842 \\
 \hline
 0,532 & 1,133
 \end{array}$$

Уточнение  $\alpha_0$  производим методом хорд:

$$x_1 = 0,3, \quad y_1 = 0,026;$$

$$x_2 = 0,2, \quad y_2 = 0,44;$$

$$x_3 = \alpha_0 = 0,3 - 0,026 \frac{-0,1}{0,41} = 0,305.$$

При вычислении новых значений коэффициентов  $B$  мы можем воспользоваться только что полученными их значениями для изменения  $\alpha$  на 0,005. Такое постепенное наращивание коэффициентов  $B$  проще, чем непосредственное их вычисление для всей величины  $\alpha$

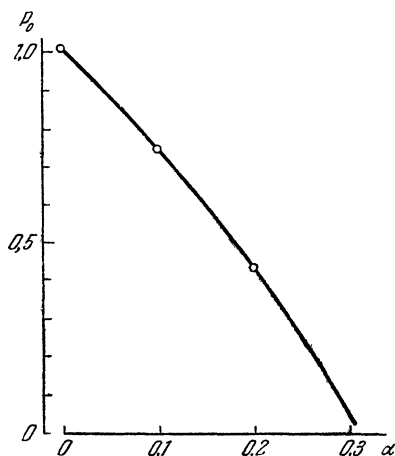


Рис. 19.

сразу.

$$\Delta\alpha = 0,005, \alpha = 0,305$$

1,8834170					
+	5	3,1106922			
		+			
1,8884170		94421	1,8424345		
+	5	3,1201343	+	156007	2,1097257
		+		+	
1,8934170		94671	1,8580352		92902
+	5	3,1296014	+	156480	2,1190159
		+			
1,8984170		94921	1,8736832		$B_0$
+	5	3,1390935			
					$B_1$
1,9034170		$B_2$			
					$B_3$

По мере приближения к точному значению  $\alpha_0$  и уменьшения величины  $P_0$ , вычисление ее следует производить, все более и более повышая точность.

1	3,13909	2,11902		1,90342	1,87369	
— 1	— 0,98438				0,525370	1,13202
<hr/>						
	2,15471					
	— 2,15471	— 2,12105				
	<hr/>					
	— 0,00203					

$$= P_0$$

$x_1 = 0,305, y_1 = - 0,00203;$

$x_2 = 0,3, y_2 = 0,026;$

$x_3 = 0,305 - (- 0,00203) \frac{- 0,005}{0,028} = 0,3046$

$(\Delta\alpha = - 0,0004).$

Перевычисляем коэффициенты  $B$ :

$$\Delta\alpha = - 0,0004, \alpha = 0,3046$$

1,9034170					
—	4	3,1390935			
1,9030170	—	7612	1,8736832		
—	4	3,1383323	—	12553	2,1190159
1,9026170	—	7610	1,8724279	—	7490
—	4	3,1375713	—	12550	2,1182669
1,9022170	—	7609	1,8711729		$B_0$
—	4	3,1368104			$B_1$
					$B_2$
1,9018170					$B_3$

Определяем  $P_0$ :

$$\begin{array}{r|rr}
 1 & 3,1368104 & 2,1182669 \\
 -1 & -0,9838869 & \\
 \hline
 & 2,1529235 & \\
 & -2,1529235 & -2,1182332 \\
 \hline
 & & 0,0000337 = P_0
 \end{array}
 \begin{array}{r|rr}
 1,9018170 & 1,8711729 \\
 \hline
 0,5258129 & 1,1320350
 \end{array}$$

Поскольку последние изменения коэффициентов  $B$  можно вычислить с помощью счетной линейки, определяем не один, а два знака приращения величины  $\alpha$ .

$$x_3 = \alpha_0 = 0,3046 - 0,0000337 \frac{-0,0004}{0,00206} = 0,3046 + 0,0000066 = 0,3046066.$$

В последнем перевычислении коэффициентов  $B$  нам не нужно вычислять  $B_0$ , так как для определения  $\beta_0$  необходимы лишь  $B_1$  и  $B_3$ .

$$\Delta\alpha = 0,0000066, \alpha = 0,3046066$$

$$\begin{array}{rcccl}
 & 1,9018170 & & & \\
 + & & & & \\
 & 66 & 3,1368104 & & \\
 & & + & & \\
 & 1,9018236 & 125 & 1,8711729 & \\
 + & & & & \\
 & 66 & 3,1368229 & 207 & \\
 & & + & & \\
 & 1,9018302 & 125 & 1,8711936 & \\
 + & & & & \\
 & 66 & 3,1368354 & 207 & \\
 & & + & & \\
 & 1,9018368 & 125 & 1,8712143 & \\
 + & & & & \\
 & 66 & 3,1368479 & B_1 & \\
 & 1,9018434 & B_2 & & \\
 & B_3 & & & 
 \end{array}$$

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{1,8712143}{1,9018434}} = 0,9919148.$$

Таким образом, найденные нами два корня уравнения будут:

$$z_{1,2} = 0,3046066 \pm 0,9919148i.$$

Проверка вычислений достигается составлением с помощью арифмометра схемы Руффини — Горнера для окончательного значения  $\alpha_0$ , минуя промежуточные этапы.

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 z^4 + 0,6834170z^3 + 1,95561692z^2 + 0,3765418z + 1,7942053 &= \\
 = (z^2 - 0,6092132z + 1,0766801)(z^2 + 1,2926302z + 1,6664238). &
 \end{aligned}$$

Пример 2. Для уравнения

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

находим с помощью счетной линейки значения  $P_0$  для  $\alpha = 0, 0,1$  и  $0,2$ . Кривая  $P_0(\alpha)$  должна, казалось бы, пересечь ось абсцисс около  $\alpha = 0,4$  (см. рис. 20); однако вычисленная для этого значения  $\alpha$  точка лежит довольно далеко под осью. Ввиду возникающего сомнения в правильности вычислений, находим положение еще двух точек — для  $\alpha = 0,3$  и —  $0,1$ .

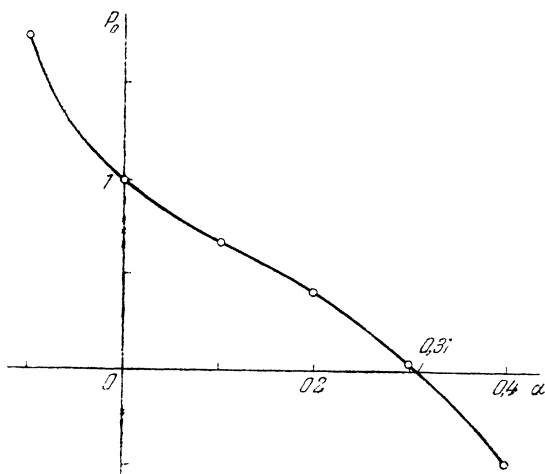


Рис. 20.

Оказывается, кривая имеет перегиб, следовательно, вычисления правильны. Искомое  $\alpha$  равно примерно  $0,31$ .

Составляем заново коэффициенты уравнения, приняв сперва  $\alpha = 0,30$ , а затем взяв поправку  $0,01$ ; при таком порядке вычислений мы можем делать их без арифмометра, между тем как, взяв  $\alpha = 0,31$ , мы должны были бы обязательно

пользоваться арифмометром, что и дольше, и утомительнее. Следующая поправка  $\Delta\alpha = -0,001$  и, наконец, последняя поправка  $\Delta\alpha = 0,000017$ .

Приводим вычисления:

$$\begin{array}{r}
 1,0 \\
 + \\
 3 \quad 1,00 \\
 + \quad 39 \quad 1,000 \\
 + \quad 3 \quad 1,39 \quad 417 \quad 1,0000 \\
 + \quad 3 \quad 1,39 \quad 417 \quad 4251 \\
 + \quad 3 \quad 1,87 \quad 561 \quad 1,4251 \\
 + \quad 3 \quad 2,44 \\
 2,2
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 2,440 \quad 1,425 \quad | \quad 2,200 \quad 1,978 \\
 - 1 \quad - 0,899 \quad \quad \quad | \quad 0,455 \quad 0,700 \\
 \hline
 1,541 \\
 - 1,541 \quad - 1,386 \\
 \hline
 0,039
 \end{array}$$

$$\Delta\alpha = -0,039 \frac{0,2 - 0,3}{0,406 - 0,041} = 0,01 \quad (0,406 = P_0(0,2));$$

$$\begin{array}{r}
 2,20 \\
 + \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad 2,4400 \\
 2,21 \quad + \quad 221 \quad 1,978000 \\
 + \quad 1 \quad 2,4621 \quad + \quad 24621 \quad 1,425100 \\
 2,22 \quad + \quad 222 \quad 2,002621 \quad + \quad 20026 \\
 + \quad 1 \quad 2,4843 \quad + \quad 24843 \quad 1,445126 \\
 2,23 \quad + \quad 223 \quad 2,027464 \\
 + \\
 1 \quad 2,5066 \\
 2,24
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 2,5066 \quad 1,4451 \quad | \quad 2,2400 \quad 2,0275 \\
 -1 \quad -0,9051 \quad | \quad 0,4464 \quad 0,7149 \\
 \hline
 1,6015 \\
 -1,6015 \quad -1,4495 \\
 \hline
 -0,0044
 \end{array}$$

$$\Delta\gamma = 0,0044 \frac{0,30 - 0,31}{0,039 - (-0,004)} = -0,001;$$

$$\begin{array}{r}
 2,240 \\
 - \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad 2,506600 \\
 2,239 \quad - \quad 2239 \quad 2,027464 \\
 - \\
 1 \quad 2,504361 \quad - \quad 2504 \quad 1,445126 \\
 2,238 \quad - \quad 2238 \quad 2,024960 \quad - \quad 2025 \\
 - \\
 1 \quad 2,502123 \quad - \quad 2502 \quad 1,443101 \\
 2,237 \quad - \quad 2237 \quad 2,022458 \\
 - \\
 1 \quad 2,499886
 \end{array}
 \end{array}$$

$$2,236$$

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 2,499886 \quad 1,443101 \quad | \quad 2,236000 \quad 2,022458 \\
 -1 \quad -0,904498 \quad | \quad 0,447227 \quad 0,713501 \\
 \hline
 1,595388 \\
 -1,595388 \quad -1,443026 \\
 \hline
 0,000075
 \end{array}$$

$$\Delta\alpha = -0,000075 \frac{0,310 - 0,309}{-0,004403 - 0,000075} = 0,000017,$$



$$\begin{array}{r}
 2,236000 \\
 + \\
 \quad 17 \quad 2,499886 \\
 + \\
 2,236017 \quad 38 \quad 2,022458 \\
 + \\
 \quad 17 \quad 2,499924 \quad 42 \\
 + \\
 2,236034 \quad 38 \quad 2,022500 \\
 + \\
 \quad 17 \quad 2,499962 \quad 42 \\
 + \\
 2,236051 \quad 38 \quad 2,022542 \\
 + \\
 \quad 17 \quad 2,500000 \\
 2,236068
 \end{array}$$

$$\beta_0^2 = \frac{2,022542}{2,236068} = 0,904508,$$

$$\alpha_0 = 0,309017, \quad \alpha_0^2 = 0,095492,$$

$$z^2 - 2\alpha_0 z + (\alpha_0^2 + \beta_0^2) = z^2 - 0,618034z + 1,000000.$$

Второй трехчлен получается автоматически. Итак,

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 - 0,618034z + 1,000000)(z^2 + 1,618034z + 1,000000).$$

Последний способ нахождения корней неприменим, когда уравнения (97) имеют более одного общего корня, т. е. когда уравнение (91) имеет две (или более) пары комплексных корней с одинаковой вещественной частью. При  $k$  общих корнях уравнений (97) остаток  $P_{k-1}$  уже равен нулю, и дальнейшее деление невозможно. В этих случаях затруднение можно обойти следующим путем.

1. Если возможно наличие двух или более пар корней с равными и вещественными и мнимыми частями, то установлением общего делителя многочленов  $F(z)$  и  $F'(z)$  отделяют кратные корни уравнения  $F(z) = 0$ .

2. Если корни уравнения  $F(z) = 0$  для двух или более пар корней имеют одинаковые вещественные части, но разные мнимые, то нужно переходить от корней  $z$  к корням  $z^2$ , проведя один цикл вычислений по способу разделения корней. У новых корней вещественные части будут различными.

Случай корней с различными вещественными частями и равными мнимыми затруднений не представляет.

**§ 8. Решение уравнений 4-й степени.** Все вышеизложенные способы решения уравнений высоких степеней относились к уравнениям любой степени. Однако при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений и в ряде других исследований приходится преимущественно встречаться с уравнениями 4-й степени, для решения которых можно предложить прием частного характера, приводящий к результатам в достаточной мере быстро и без утомительных вычислений.

Пусть дано уравнение 4-й степени

$$F(z) = z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0. \quad (101)$$

Вне зависимости от того, вещественны или комплексны корни этого уравнения, мы всегда можем представить  $F(z)$  в виде произведения двух трехчле-

нов второй степени:

$$F(z) = (z^2 + a_1z + a_0)(z^2 + b_1z + b_0) = f_1(z)f_2(z). \quad (102)$$

Но

$$\begin{aligned} f_1(z)f_2(z) &= \left(\frac{f_1(z) + f_2(z)}{2}\right)^2 - \left(\frac{f_1(z) - f_2(z)}{2}\right)^2 = \\ &= \left(z^2 + \frac{a_1 + b_1}{2}z + \frac{a_0 + b_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - b_1}{2}z + \frac{a_0 - b_0}{2}\right)^2 = \\ &= (z^2 + B_1z + B_0)^2 - (C_1z + C_0)^2. \end{aligned} \quad (103)$$

Из коэффициентов  $B$  и  $C$  один известен:

$$B_1 = \frac{A_3}{2}, \quad (104)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} (C_1z + C_0)^2 &= \left(z^2 + \frac{A_3}{2}z + B_0\right)^2 - (z^4 + A_3z^3 + A_2z^2 + A_1z + A_0) = \\ &= \left[2B_0 + \left(\frac{A_3^2}{4} - A_2\right)\right]z^2 + (A_3B_0 - A_1)z + (B_0^2 - A_0). \end{aligned} \quad (105)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} C_1^2 &= 2B_0 + \left(\frac{A_3^2}{4} - A_2\right), \\ C_0^2 &= B_0^2 - A_0, \\ 2C_1C_0 &= A_3B_0 - A_1, \end{aligned} \quad (106)$$

но

$$(2C_1C_0)^2 = 4C_1^2C_0^2. \quad (107)$$

Отсюда

$$(A_3B_0 - A_1)^2 = 4 \left[2B_0 + \left(\frac{A_3^2}{4} - A_2\right)\right](B_0^2 - A_0). \quad (108)$$

Это уравнение третьей степени относительно  $B_0$  всегда имеет по крайней мере один вещественный корень. Решить его можно итерационным способом, причем приведение к виду, удобному для вычисления, может быть двояким.

Из (106) видим, что

$$2B_0 - \left(A_2 - \frac{A_3^2}{4}\right) \quad \text{и} \quad B_0^2 - A_0 \quad (109)$$

могут быть только положительными, следовательно,

$$\text{I) } B_0 > \frac{1}{2} \left(A_2 - \frac{A_3^2}{4}\right) \quad (110)$$

или

$$\text{II) } B_0 > \sqrt{A_0}.$$

В зависимости от того, по какому из этих условий  $B_0$  получим бóльшим, мы можем написать:

в случае I

$$B_0 = \frac{1}{2} \left(A_2 - \frac{A_3^2}{4}\right) + \frac{(A_3B_0 - A_1)^2}{8(B_0^2 - A_0)}; \quad (111)$$

в случае II

$$B_0^2 = A_0 + \frac{(A_3B_0 - A_1)^2}{4 \left[2B_0 - \left(A_2 - \frac{A_3^2}{4}\right)\right]}. \quad (112)$$

В обоих случаях начальным значением  $B_0$  можно считать величину первого члена правой части.

Если сходимость итерационного процесса в его простейшей форме окажется недостаточно хорошей, можно усилить сходимость приемом, изложенным в гл. II, § 6. Прием, изложенный в гл. II, § 5, неприменим из-за слишком сложного вычисления производной правой части уравнения.

Пример 1.

$$z^4 + 0,2139z^3 + 1,5437z^2 + 0,4328z + 0,3958 = 0.$$

Имеем:

$$\frac{1}{2} \left( A_2 - \frac{A_3^2}{4} \right) = \frac{1}{2} (1,5437 - 0,0114) \approx 0,77,$$

$$\sqrt{A_0} = \sqrt{0,3958} \approx 0,63.$$

Следовательно, имеет место случай I:

$$B_0 = 0,7662 + \frac{(0,2139B_0 - 0,4328)^2}{8(B_0^3 - 0,3958)}.$$

Вычисляем:

$$1) B_0 = 0,7662;$$

$$2) B_0 = 0,7662 + \frac{(0,2139 \cdot 0,7662 - 0,4328)^2}{8(0,7662^3 - 0,3958)} = 0,8135;$$

$$3) B_0 = 0,7662 + \frac{(0,2139 \cdot 0,8135 - 0,4328)^2}{8(0,8135^3 - 0,3958)} = 0,7980;$$

$$4) B_0 = 0,7662 + \frac{(0,2139 \cdot 0,7980 - 0,4328)^2}{8(0,7980^3 - 0,3958)} = 0,8020;$$

$$5) B_0 = 0,7662 + \frac{(0,2139 \cdot 0,8020 - 0,4328)^2}{8(0,8020^3 - 0,3958)} = 0,8006;$$

$$6) B_0 = 0,7662 + \frac{(0,2139 \cdot 0,8006 - 0,4328)^2}{8(0,8006^3 - 0,3958)} = 0,8011;$$

$$7) B_0 = 0,7662 + \frac{(0,2139 \cdot 0,8011 - 0,4328)^2}{8(0,8011^3 - 0,3958)} = 0,8010.$$

Ввиду и без того достаточно хорошей сходимости усиления ее не требуется. Действительно, если бы мы применили прием усиления сходимости, то получили бы

0,7662						
	0,0473	21,2				
0,8135			— 85,7	— 0,0117	0,8018	
	— 0,0155	— 64,5				
0,7980			314	0,0032	0,8012	
	0,0040	250				
0,8020			— 964	0,0010	0,8010,	
	— 0,0014	— 714				
0,8006						

т. е. сэкономили бы всего лишь два приближения.

Прием, усиливающий сходимость, необходимо применять лишь в тех случаях, когда сходимость или слишком медленная, или же вообще отсутствует.

Получив  $B_0$ , мы можем перейти к трехчленам, на которые разлагается уравнение (101). Имеем:

$$C_1 = \pm \sqrt{2B_0 - \left(A_2 - \frac{A_3^2}{4}\right)} = \pm \sqrt{2 \cdot 0,8010 - 1,5323} = \pm 0,2640,$$

$$C_0 = \pm \sqrt{B_0^2 - A_0} = \pm \sqrt{0,8010^2 - 0,3958} = \pm 0,4958,$$

$$2C_1C_0 = A_3B_0 - A_1 = 0,2139 \cdot 0,8010 - 0,4328 = -0,2615.$$

Из последнего равенства следует, что  $C_1$  и  $C_0$  разных знаков. Знак при  $C_1$  можно взять произвольно. Если примем  $C_1$  положительным, то  $C_0$  мы должны считать отрицательным.

Получив все  $B$  и  $C$ , переходим к вычислению  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{a_1 + b_1}{2}, & C_1 &= \frac{a_1 - b_1}{2}, \\ B_0 &= \frac{a_0 + b_0}{2}, & C_0 &= \frac{a_0 - b_0}{2}, \end{aligned} \quad (113)$$

отсюда

$$\begin{aligned} a_1 &= B_1 + C_1, & b_1 &= B_1 - C_1, \\ a_0 &= B_0 + C_0, & b_0 &= B_0 - C_0, \end{aligned} \quad (114)$$

что для нашего примера дает

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,1070 + 0,2640 = 0,3710, & a_0 &= 0,8010 - 0,4958 = 0,3052, \\ b_1 &= 0,1070 - 0,2640 = -0,1570; & b_0 &= 0,8010 + 0,4958 = 1,2968; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^4 + 0,2139z^3 + 1,5437z^2 + 0,4328z + 0,3958 = \\ = (z^2 + 0,3710z + 0,3052)(z^2 - 0,1570z + 1,2968). \end{aligned}$$

Получающиеся при решении уравнений различными способами расхождения в последних знаках найденных величин вызваны округлениями. Чтобы гарантировать последний из учитываемых знаков, нужно вычисления вести с одним добавочным знаком, который после получения результата отбрасывается с округлением предшествующего ему знака.

Пример 2. Решим уравнение

$$z^4 + 0,68342z^3 + 1,95562z^2 + 0,37654z + 1,79420 = 0.$$

Рассмотрим условия приведения к виду, удобному для применения итерационного процесса:

$$\text{I) } B_0 > \frac{1}{2} \left( 1,95562 - \frac{0,68342^2}{4} \right) \approx 0,92,$$

$$\text{II) } B_0 > \sqrt{1,79420} \approx 1,34.$$

Следовательно, имеет место второй случай и вычислительная формула принимает вид

$$B_0^2 = 1,79420 + \frac{(0,68342B_0 - 0,37654)^2}{4(2B_0 - 1,83885)}.$$

Вычисляем:

$$1) B_0^2 = 1,79420, \quad B_0 = 1,33947;$$

$$2) B_0^2 = 1,79420 + \frac{(0,68342 \cdot 1,33947 - 0,37654)^2}{4(2 \cdot 1,33947 - 1,83885)} = 1,88062, \quad B_0 = 1,37136;$$

$$3) B_0^2 = 1,79420 + \frac{(0,68342 \cdot 1,37136 - 0,37654)^2}{4(2 \cdot 1,37136 - 1,83885)} = 1,88115, \quad B_0 = 1,37155.$$

Сравнив разности между последующими приближениями

$$\begin{array}{r} 1,33947 \\ 1,37136 \\ 1,37155 \end{array} \begin{array}{l} 3189 \\ 19 \end{array}$$

мы видим, что быстрота сходимости чрезвычайно большая и дальнейших приближений не требуется.

Из неравенства

$$2C_1C_0 = 0,683 \cdot 1,372 - 0,377 > 0$$

закключаем, что знаки при  $C_1$  и  $C_0$  одинаковы. Вычисляем

$$C_1 = \sqrt{2 \cdot 1,37155 - 1,83885} = 0,95092,$$

$$C_0 = \sqrt{1,88115 - 1,79420} = 0,29487.$$

Имеем:

$$B_1 = 0,34171, \quad B_0 = 1,37155.$$

Отсюда

$$a_1 = 0,34171 + 0,95092 = 1,29263, \quad a_0 = 1,37155 + 0,29487 = 1,66642,$$

$$b_1 = 0,34171 - 0,95092 = -0,60921; \quad b_0 = 1,37155 - 0,29487 = 1,07668.$$

Итак,

$$\begin{aligned} z^4 + 0,68342z^3 + 1,95562z^2 + 0,37654z + 1,79420 = \\ = (z^2 + 1,29263z + 1,66642)(z^2 - 0,60921z + 1,07668) \end{aligned}$$

**Пример 3.** Весьма своеобразным оказывается применение последнего способа к решению уравнения

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Находим:

$$\text{I) } B_0 > \frac{3}{8},$$

$$\text{II) } B_0 > 1.$$

Следовательно, имеет место случай II:

$$B_0^2 = 1 + \frac{(B_0 - 1)^2}{4(2B_0 - 1)}.$$

Первоначальное значение  $B_0 = 1$  оказывается и окончательным, после чего находим

$$C_1 = \sqrt{1,25} = 1,11803, \quad C_0 = 0$$

и получаем

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + 1,61803z + 1)(z^2 - 0,61803z + 1).$$

**§ 9. Общие указания.** Мы рассмотрели несколько способов решения уравнений высоких степеней. Каким же из этих способов пользоваться, когда задано уравнение и нужно решить его, а между тем о корнях уравнения ничего неизвестно — вещественные они или комплексные и сильно или мало различаются их модули?

Первое и основное, с чего следует начинать — это построить график кривой  $y = F(x)$  и отделить все вещественные корни, пользуясь методами хорд, Ньютона или итерацией для ряда Тэйлора. Затем следует определить комплексные корни. Для уравнений степени выше четвертой наиболее быстро приводит к результату метод, изложенный в § 6 данной главы, а для уравнений четвертой степени — в § 8.

Оба метода основаны на принципе последовательных приближений, а следовательно, исключают из результатов расчета влияние случайных ошибок, допущенных при вычислении. Это особенно важно, если расчет и его проверка проводятся одним лицом, ибо в этом случае часто происходит повторение одной и той же ошибки. В методах же, основанных на постепенном приближении к результату, единственным критерием правильности работы является совпадение двух последовательных результатов, возможное лишь при отсутствии ошибок.

Кроме того, при последовательном приближении к результату, первая часть работы может быть выполнена с минимальной точностью в уме или на счетной линейке, т. е. значительно быстрее, чем при использовании арифмометра или многозначных таблиц.

---

## ГЛАВА IV

### РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

**§ 1. Два уравнения с двумя неизвестными.** Если решение уравнений с одним неизвестным не представляет особых трудностей, то уже решение двух уравнений с двумя неизвестными весьма часто оказывается сложным.

Рассмотрим несколько часто встречающихся типов таких систем из двух уравнений и способы их решения. Наиболее простым является случай, когда заданные уравнения

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ \Phi(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

могут быть разрешены оба относительно одной из двух переменных.

Предположим, что из первого уравнения системы (1) мы получим

$$y = f(x), \tag{2}$$

а из второго

$$y = \varphi(x). \tag{3}$$

В результате имеем уравнение

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x) = 0, \tag{4}$$

которое и решаем любым из уже рассмотренных нами в предыдущих главах приемов.

**Пример 1.** Дана система

$$\begin{aligned} xy + \cos x &= 0, \\ x + y - \sin x &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Найти корень с положительным значением  $x$ .

Из первого уравнения получаем

$$y = -\frac{\cos x}{x}, \tag{6}$$

а из второго

$$y = \sin x - x, \tag{7}$$

т. е.

$$\sin x - x + \frac{\cos x}{x} = 0. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) дается абсциссой точки пересечения кривых (рис. 21), заданных уравнениями (6) и (7):

$$x \approx 1,22.$$

Уточнение корня не представляет труда и может быть выполнено читателем самостоятельно. Зная  $x$ , легко найти и  $y = -0,28$ .

К рассмотренному же случаю относятся системы уравнений, одно из которых может быть разрешено относительно первой переменной, а другое — относительно второй.

Возьмем пример, похожий на предыдущий, но, однако, не подходящий под разобранный выше случай.

Пример 2. Дана система

$$\begin{aligned} xy + \cos x &= 0, \\ x + y - \sin y &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Эти уравнения можно привести к виду

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\cos x}{x}, \\ x &= \sin y - y. \end{aligned} \quad (10)$$

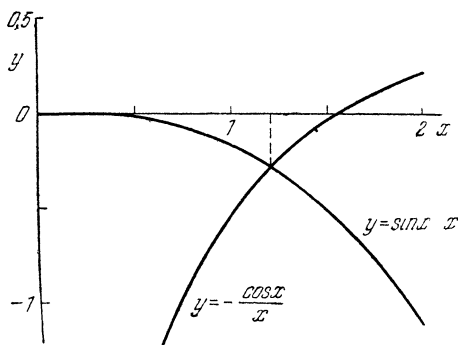


Рис. 21.

Графики уравнений даны на рис. 22.

Координаты точки пересечения кривых, дающие значения корней этой системы уравнений, примерно следующие:

$$x = 0,55, \quad y = -1,56.$$

Для уточнения координат точки пересечения кривых и в этом примере можно было бы перейти к одному уравнению с одним неизвестным, подставив во второе из уравнений (10) выражение для  $y$ , взятое из первого уравнения:

$$x = \sin \left( -\frac{\cos x}{x} \right) + \frac{\cos x}{x}. \quad (11)$$

Однако это привело бы в общем случае к весьма неудобному виду уравнения (11), и уточнение лучше производить, строя участки пересекающихся кривых вблизи точки пересечения во все большем и большем масштабе, до получения нужной точности координат точки пересечения.

Так, в нашем примере из первого уравнения получаем:

$$\text{для } x = 0,56 \quad y = -1,5130,$$

$$\text{для } x = 0,54 \quad y = -1,5872;$$

из второго уравнения получаем:

$$\text{для } y = -1,55 \quad x = 0,5502,$$

$$\text{для } y = -1,57 \quad x = 0,5700.$$

Проводя через найденные пары точек прямые (которые на рассматриваемых небольших участках весьма незначительно отличаются очертанием от действительных кривых), получаем новые, уточненные координаты точки пересечения кривых (см. рис. 23):

$$x = 0,550, \quad y = -1,550.$$



Второе уточнение (см. рис. 24) дает координаты с более чем достаточной точностью:

$$x = 0,55007, \quad y = -1,54985.$$

Для проведенной по четырем опорным точкам пары прямых можно найти координаты точки их пересечения и аналитически, но это значительно сложнее, чем графическое построение, и мы на этом останавливаться не будем.

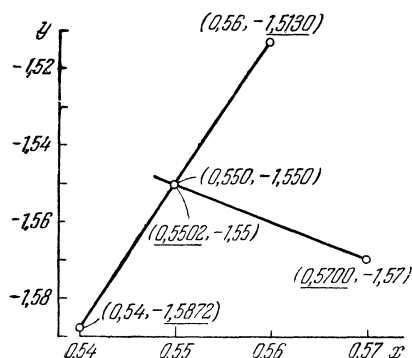


Рис. 23.

**§ 2. Два уравнения, неразрешимые относительно  $x$  или  $y$ .** Более сложен случай, когда ни  $F(x, y)$ , ни  $\Phi(x, y)$  не разрешаются относительно  $x$  или  $y$ . В этом случае действуют графическими приближениями, постепенно сужая область, в которой лежат корни системы уравнений (1). Начинают с прямоугольника достаточно большого, чтобы быть уверенными в том, что корни системы уравнений не лежат вне прямоугольника.

Пример. Дана система уравнений

$$\begin{aligned} F(x, y) &= e^{x+y} + y = 0, \\ \Phi(x, y) &= e^{x-y} + x = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Проанализируем размеры области, в которой могут лежать корни.

Значение  $e$  в любой степени всегда положительно, следовательно,  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие уравнениям, могут быть только отрицательными. Значит точка, дающая значения корней, лежит в третьей четверти.

При отрицательном показателе степени первый член первого из уравнений меньше единицы. Следовательно, искомое значение  $y$  лежит между 0 и  $-1$ .

Из второго уравнения видно, что  $|x|$  будет тем больше, чем больше  $-y$ . Наибольшее возможное значение  $|x|$  будет при  $-y=1$ , т. е. если второе из уравнения (12) примет вид

$$e^{x+1} + x = 0.$$

Легко видеть, что это уравнение имеет корень  $x = -1$ .

Итак, корни будем отыскивать в квадрате

$$\begin{cases} -1 < x < 0, \\ -1 < y < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Вычислим значения функций  $F(x, y)$  и  $\Phi(x, y)$  для вершин квадрата. Нумерацию вершин см. на рис. 25. Затем развернем контур квадрата в прямую и относительно нее построим в виде ломаных графики изменения функций  $F(x, y)$  и  $\Phi(x, y)$  по их значениям в точках I, II, III, IV (рис. 26). Отметим точки, в которых функции имеют нулевые значения. Нанеся эти точки на самом квадрате и соединив их прямыми, в точке пересечения пря-

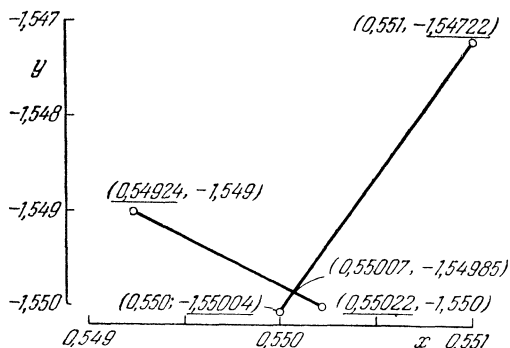


Рис. 24.

мы получим ориентировочное место положения корней системы. Вокруг этой точки прочерчиваем контур нового, меньшего прямоугольника, для вершин которого вычисляем значения функций и т. д., постепенно сужая область нахождения корней.

Для нашего примера получим последовательность вычислительных и графических действий, данную на рис. 25—30. В результате находим значения корней

$$x = -0,7024, \quad y = -0,3495.$$

Некоторыми несложными преобразованиями эту задачу можно привести к решению одного уравнения с одним неизвестным

$$\ln u + u(1 + e^{2u}) = 0,$$

причем

$$x = -ue^{2u}, \quad y = -u.$$

Таким образом, мы можем проверить другим путем решение, сделанное в предположении невозможности иного подхода.

**§ 3. Использование производных для решения системы двух уравнений.** До сих пор мы использовали для уточнения значений корней системы двух уравнений с двумя неизвестными только сами функции. Если учитывать

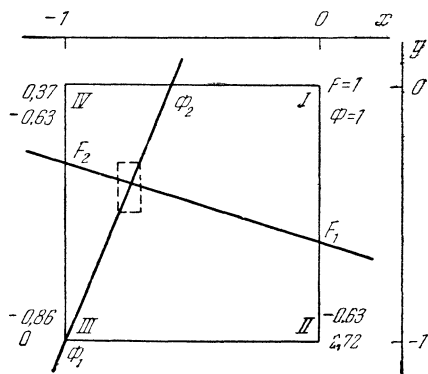


Рис. 25.

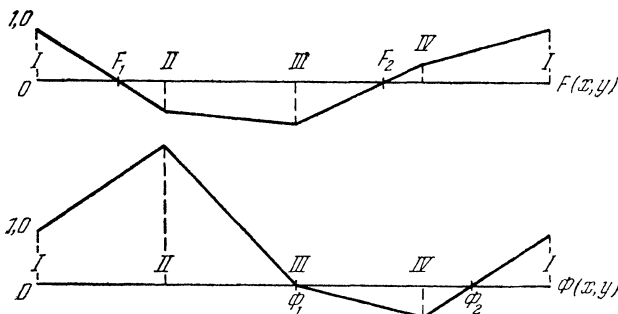


Рис. 26.\*)

также и производные функции, то получим способ вычисления, сходный с методом Ньютона, но с той разницей, что в расчет войдут частные производные.

Пусть для системы уравнений

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ \Phi(x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

мы получили приближенные значения корней

$$x \approx x_1, \quad y \approx y_1,$$

причем

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1) &= h, \\ \Phi(x_1, y_1) &= k. \end{aligned} \quad (15)$$

\*) Масштаб рис. 26, 28, 30 в 2 раза меньше, чем рис. 25, 27, 29.

Найдем значения

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \Delta x_1, \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_1, \end{aligned} \quad (16)$$

более близкие к точным.

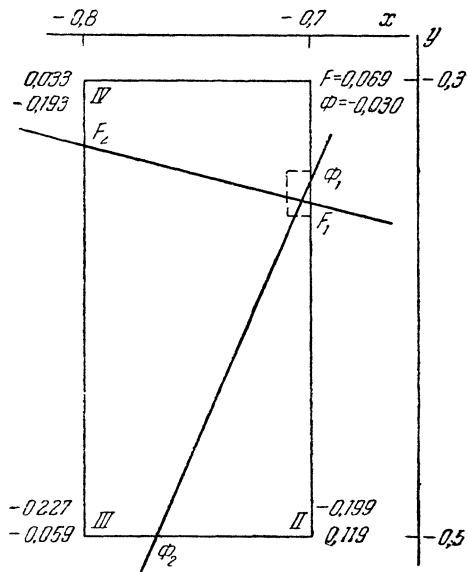


Рис. 27.

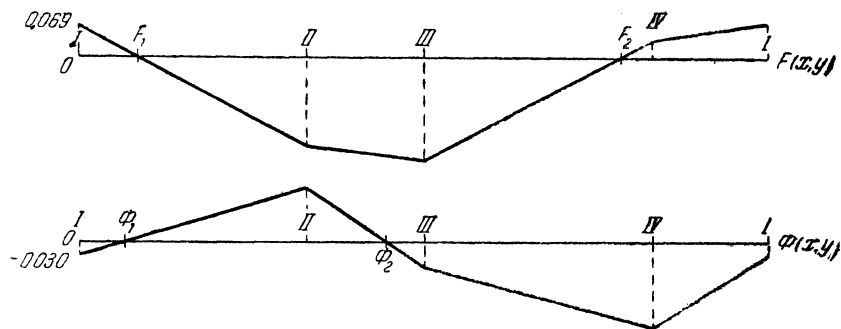


Рис. 28.

Мы можем, пренебрегая производными высших порядков, приближенно написать:

$$\begin{aligned} F(x_2, y_2) &= F(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1) \approx F(x_1, y_1) + \\ &\quad + \frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} \Delta x_1 + \frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} \Delta y_1, \\ \Phi(x_2, y_2) &= \Phi(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1) \approx \Phi(x_1, y_1) + \\ &\quad + \frac{\partial \Phi(x_1, y_1)}{\partial x} \Delta x_1 + \frac{\partial \Phi(x_1, y_1)}{\partial y} \Delta y_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Приравнявая  $F(x_2, y_2)$  и  $\Phi(x_2, y_2)$  нулю, получим два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} \Delta x_1 + \frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} \Delta y_1 + h &= 0, \\ \frac{\partial \Phi(x_1, y_1)}{\partial x} \Delta x_1 + \frac{\partial \Phi(x_1, y_1)}{\partial y} \Delta y_1 + k &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку поблизости от точки  $(x_1, y_1)$  имеются корни уравнений, можно не опасаться того, что определитель этой системы равен нулю. Отыскав  $\Delta x_1$  и  $\Delta y_1$ , мы можем уточнить и новые значения корней и т. д.

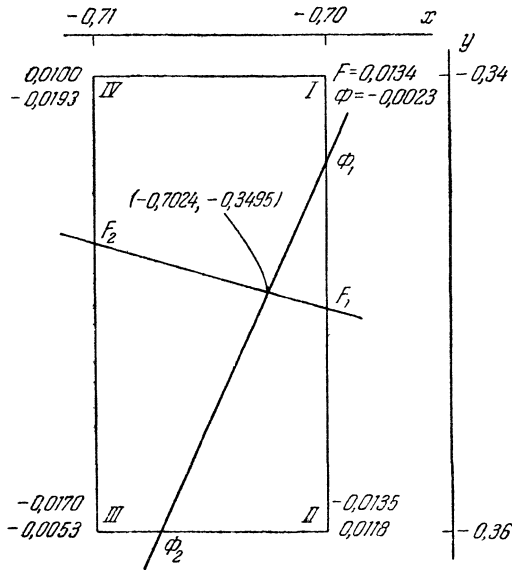


Рис. 29.

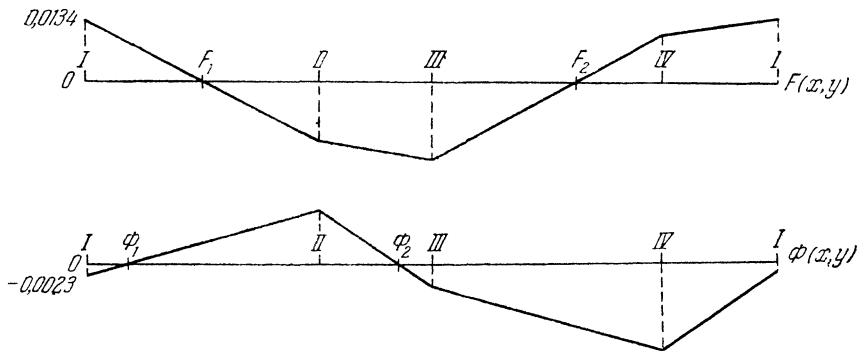


Рис. 30.

Как и в способе Ньютона, в этом приеме уточнения корней необходимо иметь первоначальные значения корней не слишком отдаленными от действительных, чтобы в процессе вычисления не потерять корни.

Рассмотрим пример уже разобранный нами, начав применение способа с ранее полученных приближений.

Пример.

$$F(x, y) = e^{x+y} + y,$$

$$\Phi(x, y) = e^{x-y} + x.$$

Имеем частные производные

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = e^{x+y}, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = e^{x+y} + 1;$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = e^{x-y} + 1; \quad \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} = -e^{x-y}.$$

Первое приближение берем из рис. 25.

$$x_1 = -0,75, \quad y_1 = -0,40.$$

Имеем:

$$F(x_1, y_1) = e^{-1,15} - 0,40 = -0,083,$$

$$\Phi(x_1, y_1) = e^{-0,35} - 0,75 = -0,045,$$

$$\frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} = e^{-1,15} \approx 0,32, \quad \frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} = e^{-1,15} + 1 \approx 1,32,$$

$$\frac{\partial \Phi(x_1, y_1)}{\partial x} = e^{-0,35} + 1 \approx 1,71, \quad \frac{\partial \Phi(x_1, y_1)}{\partial y} = -e^{-0,35} \approx -0,71.$$

Получаем уравнения для определения  $\Delta x_1$  и  $\Delta y_1$ :

$$0,32\Delta x_1 + 1,32\Delta y_1 - 0,083 = 0,$$

$$1,71\Delta x_1 - 0,71\Delta y_1 - 0,045 = 0.$$

Находим

$$\Delta x_1 = 0,053, \quad \Delta y_1 = 0,063;$$

$$x_2 = -0,697, \quad y_2 = -0,337.$$

Ввиду довольно значительной величины полученных поправок производим второе приближение. Имеем:

$$F(x_2, y_2) = 0,01858,$$

$$\Phi(x_2, y_2) = 0,00068,$$

$$\frac{\partial F(x_2, y_2)}{\partial x} \approx 0,356, \quad \frac{\partial F(x_2, y_2)}{\partial y} \approx 1,356,$$

$$\frac{\partial \Phi(x_2, y_2)}{\partial x} \approx 1,698, \quad \frac{\partial \Phi(x_2, y_2)}{\partial y} \approx -0,698,$$

$$0,356\Delta x_2 + 1,356\Delta y_2 + 0,01858 = 0,$$

$$1,698\Delta x_2 - 0,698\Delta y_2 + 0,00068 = 0;$$

$$\Delta x_2 = -0,0054, \quad \Delta y_2 = -0,0123;$$

$$x_3 = -0,7024, \quad y_3 = -0,3493.$$

По количеству затрачиваемого труда рассматриваемый общепринятый способ нахождения корней уступает способу графических приближений; кроме того, он лишен той наглядности, которую дает чертеж. Основным же его недостатком является необходимость предварительного получения первых приближений, неудовлетворительность которых может значительно усложнить вычисления.

**§ 4. Применение итераций для решения системы двух уравнений.**  
Для решения систем двух уравнений с двумя неизвестными можно также

применять метод итерации как в обычном виде, так и с усилением сходимости. В этом случае могут существовать два вида обычного итерационного процесса.

Первый вид дает итерационный цикл для системы уравнений типа

$$\begin{aligned}x &= F(x, y), \\ y &= \Phi(x, y)\end{aligned}\quad (19)$$

с такой последовательностью действий:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= F(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= \Phi(x_n, y_n).\end{aligned}\quad (20)$$

Второй вид имеет итерационный цикл

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= F(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= \Phi(x_{n+1}, y_n).\end{aligned}\quad (21)$$

Разница состоит в том, что во втором случае мы получаем значение  $y_{n+1}$ , используя новое, уточненное значение  $x_{n+1}$ , и, следовательно, процесс должен несколько быстрее приближаться к результату.

Нетрудно увидеть, что в обоих случаях сходимость будет тем более быстрой, чем меньшими будут абсолютные значения частных производных функций  $F$  и  $\Phi$ . Однако условия возможности получения точных корней здесь настолько сложны, что вместо исследования этих условий проще провести несколько циклов итерации и по сближению последовательных значений  $x$  и  $y$  убедиться в том, дает ли этот способ возможность получить решение. Это чрезвычайно сильно ограничивает возможности применения метода итерации в его обычной форме.

Пример. \*) Дана система уравнений

$$\begin{aligned}20x^2 &= 1 - 2x^3 + 4y^3, \\ 10y &= 5 + 2x^2 - 3y^3,\end{aligned}$$

корни которых близки к значениям

$$x = 0,3, \quad y = 0,5.$$

Для применения итерации приводим уравнения к виду

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[3]{\frac{1 + 4y^3 - 2x^3}{20}}, \\ y &= 0,5 + 0,2x^2 - 0,3y^3.\end{aligned}$$

Начинаем с указанных первых приближений,

$$\begin{aligned}x_1 &= 0,3, \quad y_1 = 0,5; \\ x_2 &= \sqrt[3]{\frac{1 + 4 \cdot 0,5^3 - 2 \cdot 0,3^3}{20}} = 0,269, \\ y_2 &= 0,5 + 0,2 \cdot 0,3^2 - 0,3 \cdot 0,5^3 = 0,481; \\ x_3 &= \sqrt[3]{\frac{1 + 4 \cdot 0,481^3 - 2 \cdot 0,269^3}{20}} = 0,265, \\ y_3 &= 0,5 + 0,2 \cdot 0,269^2 - 0,3 \cdot 0,481^3 = 0,480.\end{aligned}$$

---

\*) Безикович Я. С., Приближенные вычисления, Гостехиздат, 1949, стр. 272.

В пределах трехзначной точности процесс приближений можно считать завершённым.

Вследствие достаточно быстрой сходимости, применение итерационного процесса в его второй форме даст примерно то же самое.

Если возьмем рассмотренную нами в § 3 систему

$$e^{x+y} + y = 0,$$

$$e^{x-y} + x = 0,$$

приведем ее к виду, удобному для производства итерации:

$$x = -e^{x-y} = F(x, y),$$

$$y = -e^{x+y} = \Phi(x, y)$$

и проведем несколько циклов итерации, то увидим, что процесс сходиться не будет. Точно также не будет сходиться итерационный процесс для системы уравнений

$$xy + \cos x = 0,$$

$$x + y - \sin y = 0.$$

Поэтому рассмотрим видоизменение итерационного процесса, позволяющее не рассматривать условий сходимости и гарантирующее нахождение точных значений корней системы уравнений вне зависимости от поведения производных в области корней.

**§ 5. Усиление сходимости итерации в случае двух уравнений.** Пусть мы получили некоторое первое приближение  $x \approx x_1$ ,  $y \approx y_1$  для значений корней системы уравнений

$$\begin{aligned} x &= F(x, y), \\ y &= \Phi(x, y), \end{aligned} \quad (22)$$

причем

$$x_1 = x + \varepsilon_1, \quad y_1 = y + \delta_1. \quad (23)$$

Новое приближение даст:

$$\begin{aligned} x_2 &= F(x_1, y_1) = x + \varepsilon_2, \\ y_2 &= \Phi(x_1, y_1) = y + \delta_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку

$$F(x_1, y_1) = F(x + \varepsilon_1, y + \delta_1) \approx F(x, y) + \varepsilon_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \delta_1 \frac{\partial F}{\partial y}, \quad (25)$$

получим

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \delta_1 \frac{\partial F}{\partial y} \quad (26)$$

и аналогично

$$\delta_2 = \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \delta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (27)$$

Имея

$$\begin{aligned} x &= x_1 - \varepsilon_1, \\ x &= x_2 - \varepsilon_2 = x_2 - \varepsilon_1 \frac{\partial F}{\partial x} - \delta_1 \frac{\partial F}{\partial y}, \end{aligned} \quad (28)$$

исключаем  $x$ :

$$(x_2 - x_1) + \varepsilon_1 \left(1 - \frac{\partial F}{\partial x}\right) - \delta_1 \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (29)$$

Аналогично

$$(y_2 - y_1) - \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \delta_1 \left( 1 - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0. \quad (30)$$

Поскольку мы не знаем точных значений  $x$  и  $y$ , берем производные для приближенных значений  $x_1$  и  $y_1$ . Получаем систему уравнений, решая которую относительно  $\varepsilon_1$  и  $\delta_1$ , находим уточненные значения корней:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \left( 1 - \frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial x} \right) - \delta_1 \frac{\partial F(x_1, y_1)}{\partial y} + (x_2 - x_1) &= 0, \\ -\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi(x_1, y_1)}{\partial x} + \delta_1 \left( 1 - \frac{\partial \Phi(x_1, y_1)}{\partial y} \right) + (y_2 - y_1) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Пример.

$$x = -e^{x-y} = F(x, y),$$

$$y = -e^{x+y} = \Phi(x, y),$$

причем первые приближенные значения корней

$$x_1 = -0,75, \quad y_1 = -0,40;$$

вторые приближения

$$x_2 = -e^{-0,35} = -0,7047 = F(x_1, y_1),$$

$$y_2 = -e^{-1,15} = -0,3166 = \Phi(x_1, y_1).$$

Составляем выражения для производных:

$$F'_x = -e^{x-y} = F(x, y),$$

$$F'_y = e^{x-y} = -F(x, y),$$

$$\Phi'_x = -e^{x+y} = \Phi(x, y),$$

$$\Phi'_y = -e^{x+y} = \Phi(x, y).$$

Система уравнений для определения погрешностей:

$$1,70\varepsilon_1 - 0,70\delta_1 + 0,0453 = 0,$$

$$0,32\varepsilon_1 + 1,32\delta_1 + 0,0834 = 0.$$

Решая ее, получаем

$$\varepsilon_1 = -0,0480, \quad \delta_1 = -0,0517.$$

$$x = x_1 - \varepsilon_1 = -0,7020, \quad y = y_1 - \delta_1 = -0,3483.$$

Для следующего уточнения имеем:

$$x_1 = -0,7020, \quad y_1 = -0,3483;$$

$$x_2 = -e^{-0,3537} = -0,70208 = F(x_1, y_1),$$

$$y_2 = -e^{-1,0503} = -0,34984 = \Phi(x_1, y_1);$$

$$1,702\varepsilon_1 - 0,702\delta_1 - 0,00008 = 0,$$

$$0,348\varepsilon_1 + 1,348\delta_1 - 0,00154 = 0;$$

$$\varepsilon_1 = 0,00047, \quad \delta_1 = 0,00102;$$

$$x = x_1 - \varepsilon_1 = -0,70247,$$

$$y = y_1 - \delta_1 = -0,34932.$$

Поскольку мы использовали здесь в каждом цикле вычислений по два приближения, результат получился более точным, чем при непосредственном



уточнении по производным (см. § 3). Но все же количество труда, затраченного для проведения расчета, и здесь неоправданно велико. Графическое уточнение корней из всех приемов наиболее быстро дает результат и одновременно обеспечивает контроль вычислений.

**§ 6. Системы линейных уравнений.** При решении систем линейных уравнений часто встречаются случаи, когда в таблице коэффициентов диагональные члены являются наибольшими, превосходя сумму всех остальных коэффициентов (имеются в виду их абсолютные величины).

Такие системы целесообразно решать, при значительном количестве неизвестных, не методом исключения неизвестных, применение которого в этих случаях сопряжено с очень большим количеством вычислений, а методом скользящей итерации, предложенным Зейделем и заключающимся в том, что каждая новая уточненная величина сразу же учитывается в следующей строке вычислений. Поясним сказанное на примере.

Пример. \*) Дана система уравнений

$$\begin{aligned} 4,17x - 2,13y + 1,17z + 2,55 &= 0, \\ -1,03x + 3,71y + 0,65z + 1,15 &= 0, \\ 1,32x - 1,064y + 4,58z - 2,11 &= 0, \end{aligned}$$

в которой диагональные коэффициенты значительно больше остальных. Такую систему мы можем привести к виду

$$\begin{aligned} x &= 0,510y - 0,281z - 0,611, \\ y &= 0,278x - 0,175z - 0,310, \\ z &= -0,288x + 0,231y + 0,460. \end{aligned}$$

Начинаем вычисления со значений

$$x = -0,611, \quad y = -0,310, \quad z = 0,460.$$

Получив новое значение

$$x = 0,510 \cdot (-0,310) - 0,281 \cdot 0,460 - 0,611 = -0,899,$$

сразу же применяем его для следующей строки:

$$y = 0,278 \cdot (-0,899) - 0,175 \cdot 0,460 - 0,310 = -0,640.$$

Выражение для  $z$  включает новые значения как  $x$ , так и  $y$ :

$$z = -0,288 \cdot (-0,899) + 0,231 \cdot (-0,640) + 0,460 = 0,571.$$

Продолжая вычисления, получаем журнал их (см. табл. 25). В верхней части журнала подчеркнута та группа значений неизвестных, на основании которых заполняется строка, подчеркнутая в нижней части журнала.

Необходимо отметить, что при числе неизвестных до пяти — шести выгоднее, с точки зрения затраты времени, непосредственно решать систему исключением неизвестных, так что приведенный пример не является образцом для решения системы из трех уравнений, а лишь показывает последовательность действий, остающуюся принципиально неизменной при большом числе неизвестных.

---

\*) Занден, Элементы прикладного анализа, ГТИ, 1932, стр. 128.

§ 7. Три уравнения с тремя неизвестными. Если решение системы двух уравнений произвольного вида с двумя неизвестными довольно сложно,

Т а б л и ц а 25

	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	Свободный член	$\Sigma$
	—0,611 —0,899 —1,100 —1,148 —1,162 —1,166	—0,310 —0,640 —0,717 —0,736 —0,742 —0,744	0,460 0,571 0,610 0,620 0,623 0,623		
$x = 0,510y - 0,281z - 0,611$ $y = 0,278x - 0,175z - 0,310$ $z = -0,288x + 0,231y + 0,460$					
<i>x</i>		0,158	—0,130	—0,611	—0,899
<i>y</i>	—0,250		—0,080	—0,310	—0,640
<i>z</i>	0,259	—0,148		+0,460	0,571
<i>x</i>		—0,326	—0,163	—0,611	—1,100
<i>y</i>	—0,306		—0,101	—0,310	—0,707
<i>z</i>	0,316	—0,166		0,460	0,610
<i>x</i>		—0,365	—0,172	—0,611	—1,148
<i>y</i>	—0,319		—0,107	—0,310	—0,736
<i>z</i>	—0,330	—0,170		0,460	0,620
<i>x</i>		—0,376	—0,175	—0,611	—1,162
<i>y</i>	—0,323		—0,109	—0,310	—0,742
<i>z</i>	0,335	—0,172		0,460	0,623
<i>x</i>		—0,380	—0,175	—0,611	—1,166
<i>y</i>	—0,325		—0,109	—0,310	—0,744
<i>z</i>	0,335	—0,172		0,460	0,623

то особенно трудным является решение системы трех уравнений с тремя неизвестными. Пусть дана система уравнений

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0, \\ F_2(x, y, z) &= 0, \\ F_3(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

(32)

Решение системы возможно, если ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} x &= f_1(y, z_n), \\ x &= f_2(y, z_n), \quad n = 1, 2, \dots, N \\ x &= f_3(y, z_n) \end{aligned}$$

(33)

или в виде

$$\begin{aligned} x &= f_1(y, z_n), \\ x &= f_2(y, z_n), \\ y &= \varphi(x, z_n), \end{aligned}$$

(34)

определяющем три семейства кривых, построенных на плоскости  $(x, y)$  для заданных с некоторыми интервалами значений  $z$ .

Первое из семейств кривых вычерчивается на белой бумаге, а два остальных на прозрачной кальке. Сначала на белую бумагу накладывается одна из калек и накалываются точки пересечения кривых с одинаковыми значениями  $z$ . По наколотым точкам на белой бумаге проводится кривая, являющаяся геометрическим местом пар значений  $(x, y)$ , которым в обоих уравнениях соответствуют одинаковые значения  $z$ .

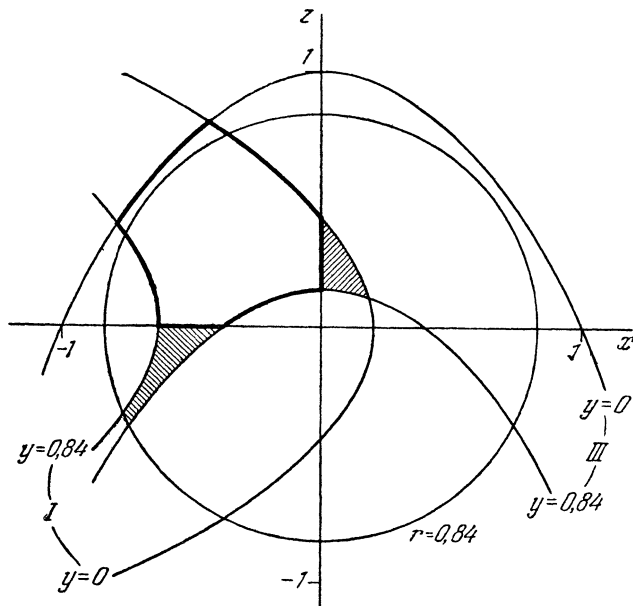


Рис. 31.

То же самое делается и с другой калькой — накалываются точки и проводится кривая. Точка пересечения обеих кривых дает значения  $x$  и  $y$ , которым во всех трех уравнениях соответствует одно и то же значение  $z$ . Эти значения  $x$ ,  $y$  и  $z$  и являются корнями данной системы трех уравнений.

Поскольку на чертеже нельзя дать столь крупного масштаба, чтобы найти корни с достаточной точностью, после их получения нужно провести уточнение построением области корней в большем масштабе и нахождением точки пересечения двух новых кривых. Если необходимо, такое уточнение можно провести несколько раз до получения любой требуемой точности.

Пример. Дана система уравнений

$$\begin{aligned} x + y + z^2 - 0,2 &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 0,7 &= 0, \\ x^2 + y + z - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Представим ее в виде

$$\begin{aligned} x &= (0,2 - y) - z^2, \\ x^2 + z^2 &= (0,7 - y^2), \\ z &= (1 - y) - x^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Первое из уравнений (36) дает в плоскости переменных  $(x, z)$  ряд парабол с осью симметрии, совпадающей с осью абсцисс. Второе уравнение дает

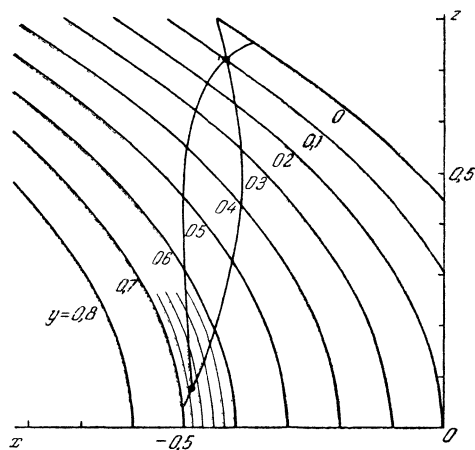


Рис. 32.

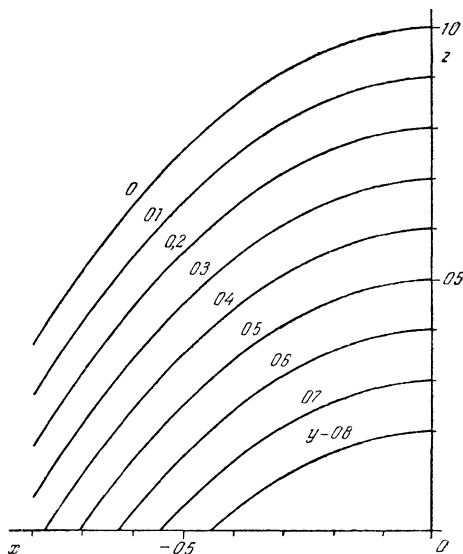


Рис. 33.

систему концентрических кругов с центром в начале координат. Третье уравнение дает ряд парабол с осью симметрии, совпадающей с осью ординат.

Параболы первого семейства нанесем на белой бумаге, а окружности и параболы второго семейства — на прозрачных кальках. При построении нас будет интересовать вопрос о том, в каких пределах значений координат нужно производить построение кривых. Из второго уравнения мы видим, что ни один из неизвестных корней не может быть по абсолютной величине больше, чем  $\sqrt{0.7} \approx 0.84$ . Кроме того, все построение должно заключаться внутри окружности этого же радиуса.

На рис. 31 показано более уточненно очертание области на плоскости координат  $(x, z)$ , в которой могут находиться корни системы уравнений. Из парабол третьего уравнения видно, что область парабол, соответствующих отрицательным значениям  $y$ , полностью выходит за пределы окружности, ограничивающей чертеж. Таким образом, для  $y$  можно отыскивать лишь положительные корни. Часть площади, заштрихованная в первой четверти, дает большие значения  $y$  для третьего уравнения и маленькие для первого уравнения, следовательно, должна быть отброшена. Заштрихованный участок в третьей четверти соответствует большим значениям  $y$  по

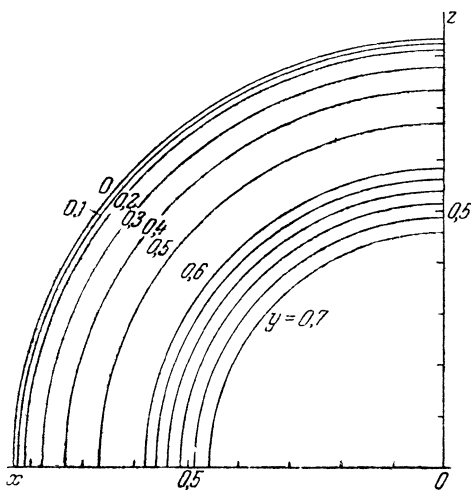


Рис. 34.

параболам и малым значениям по окружностям. Итак, остается участок внутри контура, обведенного жирной линией. Этот участок мы и заполним тремя системами линий.

На рис. 32, 33, 34 даны семейство окружностей и два семейства парабол. Накладывая поочередно на рис. 32 оба остальных, накатывая точки общих

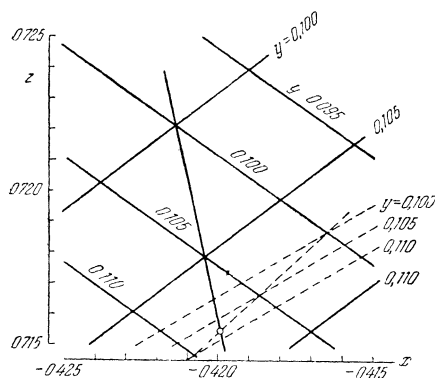


Рис. 35.

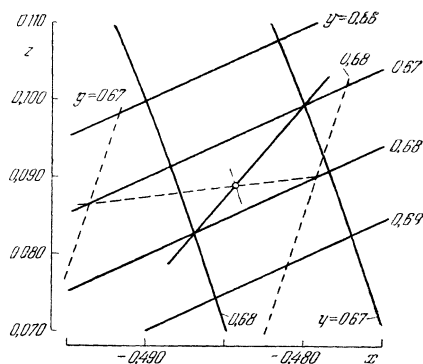


Рис. 36.

значений  $y$  и соединив точки кривыми, мы находим корни данной системы уравнений:

- 1)  $x = -0,420, \quad y = 0,100, \quad z = 0,720;$
- 2)  $x = -0,485, \quad y = 0,680, \quad z = 0,070.$

Проверим, насколько они удовлетворяют уравнениям системы.

Имеем для первого корня:

- 1)  $-0,4200 + 0,1000 + 0,5184 - 0,2000 = -0,0016,$
- 2)  $0,1764 + 0,0100 + 0,5184 - 0,7000 = 0,0048,$
- 3)  $0,1764 + 0,1000 + 0,7200 - 1,0000 = -0,0036;$

для второго корня:

- 1)  $-0,4850 + 0,6800 + 0,0049 - 0,2000 = -0,0001,$
- 2)  $0,2352 + 0,4624 + 0,0049 - 0,7000 = 0,0025,$
- 3)  $0,2352 + 0,6800 + 0,0700 - 1,0000 = 0,0102.$

Невязки — в пределах, допустимых при графическом подсчете; при желании большего уточнения проведем построение в области, окружающей корни, и повторим накатывание и проведение линий.

На рис. 35 и 36 даны уточняющие построения, причем на каждом чертеже даны все три системы линий: параболы — сплошными линиями, окружности — пунктирными.

Уточненные значения корней системы следующие:

- 1)  $x = -0,4199, \quad y = 0,1081, \quad z = 0,7155,$
- 2)  $x = -0,4843, \quad y = 0,6763, \quad z = 0,0890.$

Проверка подстановкой в уравнения дает: для первого корня

$$1) -0,4199 + 0,1081 + 0,5119 - 0,2000 = 0,0001,$$

$$2) 0,1763 + 0,0117 + 0,5119 - 0,7000 = -0,0001,$$

$$3) 0,1763 + 0,1081 + 0,7155 - 1,0000 = -0,0001;$$

для второго корня

$$1) -0,4843 + 0,6763 + 0,0079 - 0,2000 = -0,0001,$$

$$2) 0,2345 + 0,4574 + 0,0079 - 0,7000 = -0,0002,$$

$$3) 0,2345 + 0,6763 + 0,0890 - 1,0000 = -0,0002.$$

Проверка показывает достаточную быстроту приближения к точным значениям корней.

---

## ГЛАВА V

### ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

**§ 1. Формула Грегори—Ньютона.** При пользовании таблицами приходится находить значения функции для значений аргумента, промежуточных между табличными. Такая операция нахождения промежуточных значений функции называется **интерполированием**. При интерполировании используются кроме табличных значений функций еще и их разности различных порядков.

Первой разностью функции или, иначе, разностью первого порядка называется изменение функции за табличный интервал аргумента:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x_0), \quad (1)$$

где  $h$  — табличный интервал значений аргумента. Для следующих строк таблицы получим:

$$\begin{aligned} f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) &= \Delta f(x_0 + h), \\ f(x_0 + 3h) - f(x_0 + 2h) &= \Delta f(x_0 + 2h), \end{aligned} \quad (2)$$

. . . . .

Обозначим для краткости

$$\begin{aligned} f(x_0 + nh) &= y_n, \\ \Delta f(x_0 + nh) &= \Delta y_n, \\ x_0 + nh &= x_n, \end{aligned} \quad (3)$$

тогда вместо (1) запишем

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0. \quad (4)$$

Разность

$$\Delta y_{n+1} - \Delta y_n = \Delta^2 y_n \quad (5)$$

назовем второй разностью функции или разностью второго порядка; разность

$$\Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n = \Delta^3 y_n \quad (6)$$

— третьей разностью или разностью третьего порядка и т. д.

Таблица значений функции с ее разностями имеет следующий вид:

Аргумент	Функция	Разности			
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$\Delta^2 y_2$		
$x_3$	$y_3$	$\Delta y_3$			
$x_4$	$y_4$				

(7).

Выразим значения функции  $y_1, y_2, y_3, \dots$  через начальное значение функции  $y_0$  и его разности. Имеем

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0. \quad (8)$$

Ввиду общности правила образования разностей, по аналогии имеем

$$\Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0. \quad (9)$$

Далее

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \quad (10)$$

и аналогично

$$\Delta y_2 = \Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0. \quad (11)$$

Продолжая, получим

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0. \quad (12)$$

.....

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \Delta^n y_0. \quad (13)$$

Сравняя выражение (13) с биномом Ньютона

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^3 + \dots + a^n, \quad (14)$$

мы видим полную тождественность коэффициентов.

Как и бином Ньютона, формула (13), носящая название формулы Грегори — Ньютона, может быть применена в виде бесконечного ряда и для дробных значений  $n$ .\*)

Пусть нужно найти  $y(x)$ . Некоторое табличное значение аргумента  $x_0$  принимается за начальное; из равенства

$$x = x_0 + nh \quad (15)$$

определяется

$$n = \frac{x - x_0}{h} \quad (16)$$

и производится вычисление.

**Пример.** Дана часть сокращенной пятизначной таблицы логарифмов (мантиисы даны в единицах пятого знака за запятой). По значениям мантиис составлены ряды разностей  $\Delta$ ,  $\Delta^2$ , ... (см. табл. 26). Найти  $\lg 154$ .

За начальное значение аргумента принимаем ближайшее табличное — 150; определяем  $n$ :

$$n = \frac{154 - 150}{10} = 0,4.$$

Т а б л и ц а 26

$x$	$y = \lg x$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
100	00000				
110	04139	4139			
120	07918	3779	—360	57	
130	11394	3476	—303	46	—11
140	14613	3219	—257	34	—12
150	17609	2996	—223	30	—4
160	20412	2803	—193	23	—7
170	23045	2633	—170	19	—4
180	25527	2482	—151	17	—2
190	27875	2348	—134	14	—3
200	30103	2228	—120		

\*) Доказательство этого см., например, в кн.: Уиттекер и Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, 1933, стр. 13.



По формуле (13) для  $n = 0,4$  получаем:

$$\begin{aligned} y_{0,4} &= y_0 + 0,4\Delta y_0 + \frac{0,4(-0,6)}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{0,4(-0,6)(-1,6)}{6} \Delta^3 y_0 + \\ &\quad + \frac{0,4 \cdot (-0,6) \cdot (-1,6) \cdot (-2,6)}{24} \Delta^4 y_0 + \dots = \\ &= y_0 + 0,4\Delta y_0 - 0,12\Delta^2 y_0 + 0,064\Delta^3 y_0 - 0,0416\Delta^4 y_0 + \dots = \\ &= [17609 + 0,4 \cdot 2803 - 0,12 \cdot (-170) + 0,064 \cdot 19 + \dots] \cdot 10^{-5} \approx \\ &\approx (17609 + 1121,2 + 20,4 + 1,2) \cdot 10^{-5} = 0,18752. \end{aligned}$$

Лишний знак был добавлен в ходе вычислений во избежание потери точности из-за округлений; в конечном результате он отброшен.

Формуле Грегори — Ньютона часто придается вид, более удобный для вычислений:

$$y_n = y_0 + n \left( \Delta y_0 + \frac{n-1}{2} \left( \Delta^2 y_0 + \frac{n-2}{3} \left( \Delta^3 y_0 + \frac{n-3}{4} (\Delta^4 y_0 + \dots) \right) \right) \right). \quad (17)$$

Для нашего примера получим:

$$\begin{array}{ccccccc} y_{0,4} &= & 17609 & + & 0,4 & (2803 - 0,3(-170 - 0,533(19 - 0,65(-2) \\ & & & & & \begin{array}{ccccccc} 1143 & & 54 & & -10,4 & & 1,3 \leftarrow \\ 18752 & & 2857 & & -180,4 & & 20,3 \end{array} \\ & & & & & y_{0,4} &= 0,18752 \end{array}$$

Точное значение  $\lg 154 = 2,1875207$ , так что в пределах принятой точности вычислений результат верен.

**§ 2. Интерполирование назад по формуле Грегори—Ньютона.** Иногда бывает необходимо найти значение  $y$ , находящееся между двумя последними табличными значениями, когда, естественно, отсутствуют необходимые разности, идущие по наклонной строке вниз. В этом случае можно воспользоваться вариантом формулы Грегори — Ньютона. Имея

$$\begin{aligned} y_{-1} &= y_0 - \Delta y_{-1}, \\ \Delta y_{-2} &= \Delta y_{-1} - \Delta^2 y_{-2}, \\ y_{-2} &= y_{-1} - \Delta y_{-2} = y_0 - 2\Delta y_{-1} + \Delta^2 y_{-2}, \\ &\dots \dots \dots \\ y_{-3} &= y_0 - 3\Delta y_{-1} + 3\Delta^2 y_{-2} - \Delta^3 y_{-3}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (18)$$

мы приходим к формуле Грегори — Ньютона, но только знакопеременной, а именно

$$y_{-n} = y_0 - n\Delta y_{-1} + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y_{-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta^3 y_{-3} + \dots \quad (19)$$

или в виде, более удобном для вычисления,

$$y_{-n} = y_0 + n \left( -\Delta y_{-1} + \frac{n-1}{2} \left( \Delta^2 y_{-2} + \frac{n-2}{3} (-\Delta^3 y_{-3} + \dots) \right) \right). \quad (20)$$

По этой формуле вычисляют, принимая за начальное следующее (а не предыдущее) табличное значение функции и пользуясь разностями, идущими наискось вверх.

**Пример.** Пользуясь табл. 26 вычислить  $\lg 196$ .

Если использовать за начальное значение аргумента  $x = 200$ , то получим:

$$\begin{aligned}
 -n &= \frac{196 - 200}{10} = -0,4, \quad n = 0,4; \\
 v_{-0,4} &= 30103 + 0,4 \left( -2228 - 0,3 \left( -120 - 0,533 \left( -14 - 0,65 \left( -3 \right) \right) \right) \right) \\
 &\quad - 878 \qquad \qquad \quad 34 \qquad \qquad \quad 6 \qquad \qquad \quad 2 \quad \leftarrow \\
 &\quad 29225 \qquad \quad - 2194 \qquad \quad - 114 \qquad \quad - 12 \\
 v_{-0,4} &= 0,29225.
 \end{aligned}$$

Точное значение  $\lg 196 = 2,2922561$ , т. е. погрешность полученного значения логарифма меньше единицы последнего знака.

**§ 3. Разности степенных функций.** Поскольку степенные зависимости являются основными в большинстве вычислительных процессов, рассмотрим разности многочленов, расположенных по убывающим степеням  $x$ .

Пусть дан многочлен  $n$ -й степени

$$y = P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0. \quad (21)$$

Разность первого порядка при интервале  $h$  для этого многочлена будет равна

$$\begin{aligned}
 \Delta y &= P_n(x+h) - P_n(x) = A_n [(x+h)^n - x^n] + A_{n-1} [(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \dots = \\
 &= A_n \left[ nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 x^{n-2} + \dots + h^n \right] + \\
 &+ A_{n-1} \left[ (n-1)hx^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} h^2 x^{n-3} + \dots + h^{n-1} \right] + \dots = \quad (22) \\
 &= A_n nhx^{n-1} + \left[ A_n \frac{n(n-1)}{2} h^2 + A_{n-1}(n-1)h \right] x^{n-2} + \\
 &+ \left[ A_n \frac{n(n-1)(n-2)}{6} h^3 + A_{n-1} \frac{(n-1)(n-2)}{2} h^2 + A_{n-2}(n-2)h \right] x^{n-3} + \dots = \\
 &= A_n nhx^{n-1} + B_{n-2} x^{n-2} + \dots + B_1 x + B_0,
 \end{aligned}$$

т. е. тоже будет многочленом, но степени на единицу меньшей, причем член с высшей степенью  $x$  будет равен

$$A_n nhx^{n-1}.$$

Вторая разность даст многочлен степени  $n-2$ :

$$\Delta^2 y = A_n n(n-1) h^2 x^{n-2} + \dots \quad (23)$$

Третья разность будет многочленом степени  $n-3$ :

$$\Delta^3 y = A_n n(n-1)(n-2) h^3 x^{n-3} + \dots \quad (24)$$

и т. д.,  $n$ -я разность будет постоянной величиной, равной

$$\Delta^n y = A_n n! h^n. \quad (25)$$

Следующие разности будут нулевыми. Это обстоятельство дает возможность для вычисления таблицы значений функции — многочлена воспользоваться разностями.

Пусть дан многочлен 3-й степени

$$y = 8x^3 + 12x^2 - 2x + 1$$

и необходимо построить таблицу значений этой функции с интервалами в пол-единицы по аргументу для  $x$  в пределах от 0 до 10.

Таблица 27

$x$	$y$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
0	1			
0,5	4	3		
1	19	15	12	
1,5	52	33	18	6
2	109	57	24	
2,5	196	87	30	
3	319	123	36	
3,5	484	165	42	
4	697	213	48	
4,5	964	267	54	
5	1291	327	60	
5,5	1684	393	66	
6	2149	465	72	
6,5	2692	543	78	
7	3319	627	84	
7,5	4036	717	90	
8	4849	813	96	
8,5	5764	915	102	
9	6787	1023	108	
9,5	7924	1137	114	
10	9181	1257	120	

Для построения достаточно вычислить непосредственно лишь четыре значения функции. Имея третьи разности постоянными, легко надстроить вторые разности, по вторым получить первые, а по последним — значения самой функции, как показано в табл. 27.

Необходимо, однако, не упускать из виду серьезного обстоятельства: такое построение с помощью разностей возможно лишь при разностях, выражающихся в целых числах. При дробных разностях влияние округления последнего знака может весьма сильно исказить результаты по мере приближения к концу вычислений. Действительно, ничтожная погрешность, допущенная, предположим, в четвертой разности, будет накапливаться в третьей разности пропорционально количеству строк; во второй разности ошибка будет возрастать пропорционально квадрату количества строк; в первой разности — пропорционально третьей степени. Если не вести вычислений с несколькими запасными знаками, то можно совершенно незаметно прийти к весьма большим погрешностям.

В рассмотренном нами примере все разности были целыми, так что все значения функции абсолютно точны. Если же мы возьмем пример с дробными разностями, то получим совершенно иное.

Вычислим столько же значений функции с теми же интервалами по аргументу для многочлена

$$y = 0,1285x^4 + 0,6300x^3 - 0,2834x^2 + 0,7214x + 1,0920.$$

Первые пять значений, если вычислять с восемью десятичными знаками, дадут следующие разности:

$x$	$y$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
0	1,0920				
		0,37663125			
0,5	1,46863125		0,44323750		
		0,81986875		0,76162500	
1	2,2885		1,20486250		0,19275000
		2,02473125		0,95437500	
1,5	4,31323125		2,15923750		
		4,18396875			
2	8,4972				

Если же, как казалось бы с полным основанием, отбросить во втором и четвертом значениях функции лишние знаки ....3125, то вычисление окажется таким, какое приведено в табл. 28. Если при  $x=5$  мы имеем ошибку порядка 0,04 (точное значение  $y=156,6790$ ), то при  $x=10$  ошибка уже

Т а б л и ц а 28

$x$	$y$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
0	1,0920				
0,5	1,4686	0,3766			
1	2,2885	0,8199	0,4433	0,7615	0,1930
1,5	4,3132	2,0247	1,2048	0,9545	
2	8,4972	4,1840	2,1593	1,1475	
2,5	15,9880	7,4908	3,3068	1,3405	
3	28,1261	12,1381	4,6473	1,5335	
3,5	46,4450	18,3189	6,1808	1,7265	
4	72,6712	26,2262	7,9073	1,9195	
4,5	108,7242	36,0530	9,8268	2,1125	
5	156,7165	47,9923	11,9393	2,3055	
5,5	218,9536	62,2371	14,2448	2,4985	
6	297,9340	78,9804	16,7433	2,6915	
6,5	396,3492	98,4152	19,4348	2,8845	
7	517,0837	120,7345	22,3193	3,0775	
7,5	663,2150	146,1313	25,3968	3,2705	
8	838,0136	174,7986	28,6673	3,4635	
8,5	1044,9430	206,9294	32,1308	3,6565	
9	1287,6597	242,7167	35,7873	3,8495	
9,5	1570,0132	282,3535	39,6368	4,0425	
10	1896,0460	326,0328	43,6793		

достигает 1,07 (точное значение  $y=1894,9760$ ) и, следовательно, для получения во всех значениях функции четырех правильных десятичных знаков нужно было иметь четыре лишних знака в процессе вычисления.

**§ 4. Формула Гаусса.** Интерполяционная формула тогда является удобной в применении, когда входящие в ее состав разности высоких порядков имеют при себе множители возможно меньшей величины, так как тогда вычисление можно вести, учитывая наименьшее количество членов. Для того чтобы влияние разностей высоких порядков было наименьшим, нужно пользоваться

разностями, стоящими возможно ближе к той строке, которой соответствует индекс вычисляемой величины. Так, например, вычисляя  $\lg 154$ , нужно пользоваться разностями, стоящими на уровне значения аргумента, равного 150, и на пол-интервала ниже.

Рассмотрим интерполяционную формулу Гаусса, использующую разности, расположенные подобным образом.

Пусть мы хотим вычислить  $y_n$ , используя для вычисления величины

$$\Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-2}, \dots$$

Расчетная формула будет иметь вид

$$y_n = y_0 + a_1 \Delta y_0 + a_2 \Delta^2 y_{-1} + a_3 \Delta^3 y_{-1} + a_4 \Delta^4 y_{-2} + a_5 \Delta^5 y_{-2} + \dots, \quad (26)$$

где коэффициенты  $a$  можно получить, используя формулу Грегори—Ньютона.

Из схемы расположения разностей

$$\begin{array}{ccccccc} & & \Delta^2 y_{-1} & & \Delta^4 y_{-2} & & \\ & \Delta y_0 & & \Delta^3 y_{-1} & & \Delta^5 y_{-2} & \\ y_1 & & \Delta^2 y_0 & & \Delta^4 y_{-1} & & \dots \\ & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & & \Delta^5 y_{-1} & \\ y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 & & \end{array} \quad (27)$$

мы имеем:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta^2 y_{-1} + \Delta^3 y_{-1}, \\ \Delta^3 y_0 &= \Delta^3 y_{-1} + \Delta^4 y_{-1} = \Delta^3 y_{-1} + \Delta^4 y_{-2} + \Delta^5 y_{-2}, \\ \Delta^4 y_0 &= \Delta^4 y_{-2} + \Delta^5 y_{-2} + \Delta^5 y_{-1} = \Delta^4 y_{-2} + 2\Delta^5 y_{-2} + \Delta^6 y_{-2}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя эти выражения в формулу Грегори—Ньютона, получим:

$$\begin{aligned} y_n &= y_0 + n \Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Delta^3 y_0 + \dots = \\ &= y_0 + n \Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2} (\Delta^2 y_{-1} + \Delta^3 y_{-1}) + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} (\Delta^3 y_{-1} + \Delta^4 y_{-2} + \Delta^5 y_{-2}) + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} (\Delta^4 y_{-2} + 2\Delta^5 y_{-2} + \Delta^6 y_{-2}) + \dots = \\ &= y_0 + n \Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \\ &+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Пример. Пользуясь формулой Гаусса, найти  $\lg 154$ .

Имея  $n=0,4$ , получаем

$$\begin{aligned} y_{0,4} &= y_0 + 0,4 \Delta y_0 - 0,12 \Delta^2 y_{-1} + 0,056 \Delta^3 y_{-1} + 0,0224 \Delta^4 y_{-2} + \dots = \\ &= [17609 + 0,4 \cdot 2803 - 0,12 \cdot (-193) - 0,056 \cdot 23 + \dots] \cdot 10^{-5} = \\ &= 0,18752. \end{aligned}$$

Поскольку мы использовали лишь три разности, вычисление по формуле Гаусса оказалось примерно столь же трудоемким, как и по формуле Грегори—Ньютона. Если бы мы вычисляли по значительно большему числу разностей, то, применяя формулу Гаусса, могли бы сэкономить один—два члена суммы.

**§ 5. Формула Ньютона—Стирлинга.** До сих пор мы оперировали обычными разностями. Теперь введем средние арифметические из двух стоящих друг над другом разностей. Обозначим:

$$\frac{1}{2}(\Delta y_0 + \Delta y_{-1}) = \Delta y_{-\frac{1}{2}}, \quad (30)$$

$$\frac{1}{2}(\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}) = \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}},$$

$$\dots \dots \dots$$

и выразим  $y_n$  через  $y_0$ ,  $\Delta y_{-\frac{1}{2}}$ ,  $\Delta^2 y_{-1}$ ,  $\Delta^3 y_{-\frac{3}{2}}$ ,  $\Delta^4 y_{-2}$ , ...

Имея

$$\Delta y_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[\Delta y_0 + (\Delta y_0 - \Delta^2 y_{-1})] = \Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_{-1},$$

откуда

$$\Delta y_0 = \Delta y_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Delta^2 y_{-1}, \quad (31)$$

и аналогично

$$\Delta^3 y_{-1} = \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \Delta^4 y_{-2}, \quad (32)$$

$$\Delta^5 y_{-2} = \Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \Delta^6 y_{-3},$$

$$\dots \dots \dots$$

получим

$$\Delta^2 y_0 = \Delta^2 y_{-1} + \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \Delta^4 y_{-2}, \quad (33)$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \Delta^4 y_{-2} + \Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \Delta^6 y_{-3},$$

$$\dots \dots \dots$$

Подставляя эти выражения в формулу Грегори—Ньютона, получим в результате выражение, называемое формулой Ньютона—Стирлинга:

$$y_n = y_0 + n \Delta y_{-\frac{1}{2}} + \frac{n^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{n(n^2-1^2)}{3!} \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \\ + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{5!} \Delta^5 y_{-\frac{5}{2}} + \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{6!} \Delta^6 y_{-3} + \dots \quad (34)$$

**Пример.** Вычислим  $\lg 154$  по формуле Ньютона—Стирлинга.

При использовании этой формулы таблицу разностей нужно дополнить промежуточными значениями. Для нашего примера часть табл. 26 будет иметь вид

140	14613		— 223		— 4
		2996		30	
150	<u>17609</u>	<u>2900</u>	<u>— 193</u>	<u>26</u>	<u>— 7</u>
		2803		23	
160	20412		— 170		— 4

$$y_{0,4} = y_0 + 0,4 \Delta y_{-\frac{1}{2}} + 0,08 \Delta^2 y_{-1} - 0,056 \Delta^3 y_{-\frac{3}{2}} - 0,0056 \Delta^4 y_{-2} + \dots = \\ = [17609 + 0,4 \cdot 2900 + 0,08 \cdot (-193) - 0,056 \cdot 26 + \dots] \cdot 10^{-5} = 0,18752$$

**§ 6. Погрешности высших разностей.** При оперировании небольшим количеством разностей все рассмотренные формулы интерполирования требуют примерно одинаковой затраты труда на вычисление промежуточных значений

Таблица 29

$\Delta^4$	$\Delta^3$	$\Delta^2$	$\Delta^1$	$\Delta^0$	$\Delta^1$	$\Delta^2$
— 11	— 1					
— 12	8	9				
— 4	— 3	— 11	— 20	37	— 61	90
— 7	3	6	17	— 24	29	
— 4	2	— 1	— 7	5		
— 2	— 1	— 3	— 2			
— 3						

функций, как это видно из рассмотренных примеров. Разница между ними возникает лишь при использовании большого числа разностей, однако, если только имеется возможность, от работы с числом разностей, превышающим 3 или 4, лучше воздерживаться. Дело в том, что, как бы ни были аккуратно составлены таблицы, неизбежные округления последнего знака стоящих в них чисел вызывают в разностях высоких порядков большие скачки. Чем выше порядок разности, тем меньше должна быть величина стоящих в соответствующем столбце таблицы чисел; между тем из-за округлений величина высоких разностей начинает расти с систематическими переменами знака.

Для примера продлим ряды разностей табл. 26. Результат представлен в табл. 29.

Как влияют ничтожные погрешности значений функции на величину и плавность хода разностей, видно из следующего примера.

Пусть имеется таблица с совершенно плавно идущими разностями и в одном из значений функции допущена ошибка в одну единицу последнего знака. Получающиеся вследствие этой ошибки искажения разностей даны в табл. 30. Искажения разностей возрастают, как биномиальные коэффициенты разложения, степень которого равна порядку разности. Единственная возможность избежать негладкости хода высоких разностей — это не иметь с ними дела.

Таблица 30

$v$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$	$\Delta^6$
0		0		0		0
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0		1	1	— 6
0	1	1	— 3	— 4	— 5	15
1	— 1	— 2	3	6	10	— 20
0	0	1	— 4	— 10	5	15
0	0	0	— 1	1	— 6	
0	0	0	0	— 1	1	
0	0	0	0	0	0	0

Если некоторая функция задана формулой и при составлении таблицы функции приходится записывать слишком много разностей, необходимых для точного интерполирования, то значительно целесообразнее составить таблицу с меньшим интервалом значений аргумента. Затраченный на это дополнительный труд окупится улучшением таблицы и облегчением пользования ею. Уменьшение табличного интервала аргумента в два раза уменьшает первые разности функции в два раза, вторые — в четыре и  $k$ -е в  $2^k$  раз. Самые удобные таблицы те, для применения которых до-

статочно использовать одну разность, т. е. применить линейную интерполяцию с помощью пропорциональных частей. На этом принципе основаны почти все наиболее важные таблицы. Только таблицы, дающие много точных знаков (например, десятизначные таблицы логарифмов), требуют применения двух разностей.

Можно считать, что три или в крайнем случае четыре разности являются предельным числом, с которым практически возможно оперировать. Хотя расчетные формулы обычно даются до весьма высоких порядков разностей, это делается лишь для того, чтобы предоставить вычислителю возможность судить о том, как влияют разности высоких порядков на результат в случае применения той или иной формулы. Это облегчает выбор той из формул, применение которой позволяет обойтись наименьшим числом разностей без ущерба для точности расчета.

**§ 7. Разделенные разности.** Весьма часто исследуемые переменные величины являются функциями времени. При постоянном интервале между моментами наблюдений мы получим такие значения функции, к которым применимы рассмотренные выше формулы. Однако возможны случаи пропуска наблюдений или проведения их не в положенное время, так что интервалы времени между ними окажутся неравными. В таких случаях для получения возможности интерполирования необходимо прибегать к разделенным разностям.

Пусть функция известна для значений аргумента  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , промежутки между которыми не равны.

Под разделенной разностью первого порядка мы будем понимать величину изменения функции, приходящуюся на единицу изменения аргумента между двумя соседними его значениями

$$\Delta_{2,1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \Delta_{3,2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \quad \dots, \quad (35)$$

где

$$y_k = f(x_k).$$

Поскольку разделенные разности первого порядка для каждого интервала значений аргумента будут иметь свое значение, мы будем рассматривать также и разделенные разности более высоких порядков, образуя их по тому же принципу, что и разности первого порядка. Разности второго порядка будут

$$\Delta_{3,2,1} = \frac{\Delta_{3,2} - \Delta_{2,1}}{x_3 - x_1}, \quad (36)$$

$$\Delta_{4,3,2} = \frac{\Delta_{4,3} - \Delta_{3,2}}{x_4 - x_2},$$

$$\dots \dots \dots$$

Разности третьего порядка:

$$\Delta_{4,3,2,1} = \frac{\Delta_{4,3,2} - \Delta_{3,2,1}}{x_4 - x_1}, \quad (37)$$

$$\dots \dots \dots$$

У разделенных разностей порядок их особым индексом не отмечается; он равен числу интервалов между значениями аргумента, использованными для получения данной разности, или на единицу меньше числа использованных при составлении разности значений аргумента.

Основные свойства разделенных разностей следующие.

1. При заданных значениях аргумента

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

разделенные разности, полученные для функции, являющейся суммой двух других функций, равны сумме соответствующих разделенных разностей, полученных для каждой из этих двух функций по отдельности.



2. При домножении некоторой функции на постоянный множитель, все ее разделенные разности изменяются во столько же раз.

Эти два свойства очевидны и не требуют доказательства.

3. Если  $n$  — положительное целое число, то разделенные разности порядка  $n$  от функции  $x^n$  постоянны.

Пусть

$$y = x^n.$$

Тогда

$$\Delta_{2,1} = \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} = x_2^{n-1} + x_1 x_2^{n-2} + \dots + x_1^{n-2} x_2 + x_1^{n-1} \quad (38)$$

есть однородная функция от  $x_2$  и  $x_1$  степени  $n-1$ . Разделенная разность второго порядка

$$\begin{aligned} \Delta_{3,2,1} &= \frac{(x_3^{n-1} + x_2 x_3^{n-2} + \dots + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-1} + x_2 x_1^{n-2} + \dots + x_2^{n-1})}{x_3 - x_1} = \\ &= \frac{(x_3^{n-1} - x_1^{n-1}) + x_2 (x_3^{n-2} - x_1^{n-2}) + \dots + x_2^{n-2} (x_3 - x_1)}{x_3 - x_1} = \\ &= (x_3^{n-2} + x_1 x_3^{n-3} + \dots + x_1^{n-2}) + x_2 (x_3^{n-3} + x_1 x_3^{n-4} + \dots \\ &\quad \dots + x_1^{n-3}) + \dots + x_2^{n-2} \end{aligned} \quad (39)$$

есть также однородная функция от  $x_3$ ,  $x_2$ ,  $x_1$  степени  $n-2$ . Продолжая находить разделенные разности все более высоких порядков, мы увидим, что разделенная разность  $k$ -го порядка  $\Delta_{k+1,k,\dots,1}$  есть однородная функция от  $x_{k+1}$ ,  $x_k, \dots, x_1$  степени  $n-p$ . При  $p=n$  разделенная разность есть величина постоянная. Отсюда вытекает, что разделенные разности от  $x^n$  порядка выше чем  $n$  все равны нулю.

Сказанное относится и к многочлену  $n$ -й степени. Его разделенные разности  $n$ -го порядка постоянны, а более высоких порядков — равны нулю.

С помощью разделенных разностей можно производить интерполирование при неравных промежутках аргумента.

**§ 8. Формула Ньютона для разделенных разностей.** Пусть для функции  $y = f(x)$  даны значения

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \dots, \quad y_n = f(x_n)$$

и вычислены разделенные разности

$$\begin{aligned} \Delta_{2,1}, \quad \Delta_{3,2}, \dots; \\ \Delta_{3,2,1}, \quad \Delta_{4,3,2}, \dots; \\ \Delta_{4,3,2,1}, \quad \Delta_{5,4,3,2}, \dots \end{aligned} \quad (40)$$

Требуется найти  $y_0 = f(x_0)$ .

Добавим к собранию значений аргумента еще и значение  $x_0$ ; составим дополнительные разделенные разности

$$\begin{aligned} \Delta_{1,0} &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \\ \Delta_{2,1,0} &= \frac{\Delta_{2,1} - \Delta_{1,0}}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta_{2,1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta_{2,1} + \frac{y_1 - y_0}{x_0 - x_1}}{x_2 - x_0}, \\ \Delta_{3,2,1,0} &= \frac{\Delta_{3,2,1} - \frac{\Delta_{2,1} + \frac{y_1 - y_0}{x_0 - x_1}}{x_2 - x_0}}{x_3 - x_0} = \frac{\Delta_{3,2,1} + \frac{\Delta_{2,1} + \frac{y_1 - y_0}{x_0 - x_1}}{x_0 - x_2}}{x_3 - x_0} \end{aligned} \quad (41)$$

и т. д.

Пусть, начиная с  $k$ -го порядка, все разделенные разности нулевые, т. е.

$$\Delta_{k+1, k, \dots, 3, 2, 1} = 0, \quad (42)$$

. . . . .

Но

$$\Delta_{k+1, k, \dots, 2, 1} = \frac{\Delta_{k, k-1, \dots, 1} + \frac{\Delta_{k-1, \dots, 1} + \frac{\Delta_{k-2, \dots, 1} + \dots}{x_0 - x_{k-2}}}{x_0 - x_{k-1}} + \frac{\Delta_{2,1} + \frac{y_1 - y_0}{x_0 - x_1}}{x_0 - x_2} \quad (43)$$

Приравняв эту разность нулю, получим

$$\{(x_0 - x_{k-1}) \Delta_{k, \dots, 1} + \Delta_{k-1, \dots, 1}\} (x_0 - x_{k-2}) + \Delta_{k-2, \dots, 1} \dots \dots + \Delta_{3, 2, 1} (x_0 - x_2) + \Delta_{2, 1} (x_0 - x_1) + y_1 = y_0. \quad (44)$$

Формула

$$y_0 = y_1 + (x_0 - x_1) [\Delta_{2, 1} + (x_0 - x_2) [\Delta_{3, 2, 1} + (x_0 - x_3) [\Delta_{4, 3, 2, 1} + \dots]] \quad (45)$$

была дана Ньютоном.

Возьмем пример интерполирования при неравных промежутках. \*)

Пример 1. Даны значения аргумента, функции и разделенных разностей:

$n$	$x$	$y$	$\Delta'$	$\Delta''$	$\Delta'''$
1	5	150			
2	7	392	121		
3	11	1492	265	24	
4	13	2366	457	32	1
5	21	9702	917	46	1

Найти значение функции, соответствующее значению аргумента  $x_0 = 6,417$ .

На основании формулы Ньютона (45) пишем:

$$y_0 = 150 + (6,417 - 5) [121 + (6,417 - 7) [24 + (6,417 - 11) [1 + \dots]],$$

т. е.

$$y_0 \approx 150 + 1,417 (121 - 0,583 (24 - 4,583 (1$$

$$155,416402713 - 11,320111 - 4,583$$

$$y_0 = 305,416402713 - 109,679889 = 19,417$$

Пример 2. При обработке результатов некоторых наблюдений оказалось, что значение функции при  $x = 14$  утеряно. Требуется по сохранившимся данным восстановить это значение функции и проверить правильность его по ходу разностей функции.

Сохранившиеся данные:

$x$	12	13	15	16	17
$y$	1957	2085	2474	2779	3187

\*) Уиттекер и Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, ГИИТ, 1933, стр. 23.

Рассматриваем их как результаты наблюдений при неравных интервалах аргумента. Вычисляем разделенные разности и убеждаемся в том, что уже разделенные разности третьего порядка постоянны:

$n$	$x$	$y$	$\Delta'$	$\Delta''$	$\Delta'''$
1	12	1957			
2	13	2085	128		
3	15	2474	194,5	22,166	3,666
4	16	2779	305	36,833	3,666
5	17	3187	408	51,500	

Применяем формулу Ньютона для определения  $y_0$  при  $x_0 = 14$ .

$$y_0 = 1957 + (14 - 12)[128 + (14 - 13)[22,166 + (14 - 15)[3,666 + \dots]],$$

$$y_0 \approx 1957 + 2 \cdot (128 + 1 \cdot (22,166 - 1 \cdot (3,666)$$

$$\begin{array}{rcc} 293 & 18,500 & - 3,666 \\ y_0 = 2250 & 146,500 & 18,500 \end{array}$$

Для проверки вычислим это же значение  $y$ , пользуясь значениями аргумента, начиная не с 12, а с 13. Получим:

$$y_0 = 2085 + (14 - 13)[194,5 + (14 - 15)[36,833 + (14 - 16)[3,666 + \dots]],$$

$$y_0 \approx 2085 + 1 \cdot (194,5 - 1 \cdot (36,833 - 2 \cdot (3,666)$$

$$\begin{array}{rcc} 165 & - 29,5 & - 7,332 \\ y_0 = 2250 & 165 & 29,500 \end{array}$$

Проверим полученное значение  $y$  обычными разностями, поскольку теперь мы имеем равные промежутки аргумента. При разделенных разностях постоянными были разности третьего порядка, следовательно, и обычные разности третьего порядка должны быть постоянными. Строим таблицу:

$x$	$y$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
12	1957			
13	2085	128		
14	2250	165	37	22
15	2474	224	59	22
16	2779	305	81	22
17	3187	408	103	

Убеждаемся, что вычисление сделано правильно.

**§ 9. Формула Лагранжа.** Пусть дана некоторая функция  $y = f(x)$ , которая для значений аргумента  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  принимает значения  $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$  и для которой разделенные разности порядка  $n+1$  равны нулю. Эта функция может быть представлена многочленом  $n$ -й степени. Задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты этого многочлена.

Примем за  $x_0$  непосредственно само  $x$ ; получим разделенные разности:

$$\Delta_{1,0} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}, \quad (46)$$

$$\Delta_{2,1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2,1,0} &= \frac{\Delta_{2,1} - \Delta_{1,0}}{x_2 - x} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y}{x_1 - x}}{x_2 - x} = \\ &= \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x)} + \frac{y}{(x - x_2)(x - x_1)}. \end{aligned} \quad (47)$$

Аналогично

$$\Delta_{3, 2, 1, 0} = \frac{y_3}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)(x_2 - x)} + \\ + \frac{y_1}{(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_1 - x)} + \frac{y}{(x - x_3)(x - x_2)(x - x_1)}. \quad (48)$$

Разделенная разность  $(n+1)$ -го порядка будет

$$\Delta_{n+1, n, \dots, 1, 0} = \frac{y_{n+1}}{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1}) \dots (x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x)} + \dots \\ \dots + \frac{y}{(x - x_{n+1})(x - x_n) \dots (x - x_2)(x - x_1)} = 0. \quad (49)$$

Отсюда

$$\frac{y}{(x - x_{n+1})(x - x_n) \dots (x - x_2)(x - x_1)} = \\ = - \frac{y_{n+1}}{(x - x_{n+1})(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1}) \dots (x_{n+1} - x_2)(x_{n+1} - x_1)} + \\ + \frac{y_n}{(x - x_n)(x_n - x_{n+1})(x_n - x_{n-1}) \dots (x_n - x_2)(x_n - x_1)} + \dots \\ \dots + \frac{y_2}{(x - x_2)(x_2 - x_{n+1})(x_2 - x_n) \dots (x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \\ + \frac{y_1}{(x - x_1)(x_1 - x_{n+1})(x_1 - x_n) \dots (x_1 - x_3)(x_1 - x_2)}. \quad (50)$$

Освобождаясь от знаменателя при  $y$ , получаем интерполяционную формулу Лагранжа:

$$y = y_{n+1} \frac{(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_2)(x - x_1)}{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1}) \dots (x_{n+1} - x_2)(x_{n+1} - x_1)} + \\ + y_n \frac{(x - x_{n+1})(x - x_{n-1}) \dots (x - x_2)(x - x_1)}{(x_n - x_{n+1})(x_n - x_{n-1}) \dots (x_n - x_2)(x_n - x_1)} + \\ \dots + y_2 \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n) \dots (x - x_3)(x - x_1)}{(x_2 - x_{n+1})(x_2 - x_n) \dots (x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \\ + y_1 \frac{(x - x_{n+1})(x - x_n) \dots (x - x_3)(x - x_2)}{(x_1 - x_{n+1})(x_1 - x_n) \dots (x_1 - x_3)(x_1 - x_2)}. \quad (51)$$

Перемножив численные разности, стоящие в знаменателях, и раскрыв скобки в числителях, получим искомый многочлен.

Пример. Даны значения аргумента и функции:

$x$	1	3	6
$y$	10	16	4

Найти уравнение кривой, проходящей через эти точки.

Для трех точек получим по формуле Лагранжа параболу с уравнением

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_1)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} y_3 + \frac{(x - x_3)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} y_2 + \frac{(x - x_3)(x - x_2)}{(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)} y_1.$$

Подставляем заданные значения  $x$  и  $y$ :

$$y = \frac{(x - 3)(x - 1)}{3 \cdot 5} \cdot 4 + \frac{(x - 6)(x - 1)}{(-3) \cdot 2} \cdot 16 + \frac{(x - 6)(x - 3)}{(-5) \cdot (-2)} \cdot 10 = \\ = \frac{4}{15}(x^2 - 4x + 3) - \frac{8}{3}(x^2 - 7x + 6) + (x^2 - 9x + 18) = \\ = -1,4x^2 + 8,6 + 2,8.$$

Правильность вычислений проверяем подстановкой заданных пар значений  $(x, y)$ .

**§ 10. Графическое интерполирование.** Если по имеющимся данным нанесены на чертеже точки, через которые должна проходить некоторая кривая, но промежутки между этими точками слишком велики и проведение кривой на глаз затруднительно, можно прибегнуть к простейшей интерполяции для получения промежуточных точек, позволяющих построить искомую кривую без труда. При таком не очень точном построении достаточно полагать, что истинную кривую можно на каждом участке между двумя соседними опорными точками заменить некоторой кривой с уравнением третьей степени, имеющей с истинной кривой еще по одной общей точке с каждой стороны от рассматриваемого участка.

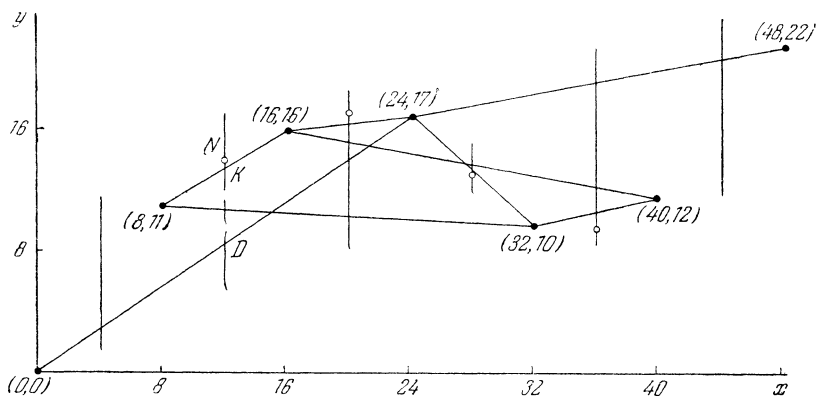


Рис. 37.

Пусть точки графика расположены с постоянными интервалами по абсциссам. Рассмотрим четыре точки, абсциссы которых обозначим — 3, — 1, 1 3, а ординаты  $y_{-3}$ ,  $y_{-1}$ ,  $y_1$ ,  $y_3$ .

Точка кривой, лежащая посередине участка между второй и третьей точкой, будет иметь нулевую абсциссу и ординату  $y_0$ . По формуле Лагранжа для кривой третьей степени, проходящей через четыре данные точки, получим (приняв  $x=0$ ):

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{(-x_3)(-x_2)(-x_1)}{(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)} y_4 + \frac{(-x_4)(-x_2)(-x_1)}{(x_3-x_4)(x_3-x_2)(x_3-x_1)} y_3 + \\ &+ \frac{(-x_4)(-x_3)(-x_1)}{(x_2-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_1)} y_2 + \frac{(-x_4)(-x_3)(-x_2)}{(x_1-x_4)(x_1-x_3)(x_1-x_2)} y_1 = \\ &= \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} y_4 + \frac{(-3) \cdot 1 \cdot 3}{(-2) \cdot 2 \cdot 4} y_3 + \frac{(-3) \cdot (-1) \cdot 3}{(-4) \cdot (-2) \cdot 2} y_2 + \\ &+ \frac{(-3) \cdot (-1) \cdot 1}{(-6) \cdot (-4) \cdot (-2)} y_1 = -\frac{1}{16} y_4 + \frac{9}{16} y_3 + \frac{9}{16} y_2 - \frac{1}{16} y_1 = \\ &= \frac{1}{16} (-y_4 + 9y_3 + 9y_2 - y_1). \quad (52) \end{aligned}$$

Отложить на чертеже эту ординату можно двумя различными приемами. Первый из них состоит в следующем.

Пусть дана система точек, изображенная на рис. 37. Все интервалы абсцисс между точками делятся пополам и через их середины проводятся

вертикальные линии. Для каждой из этих линий проводятся две прямые: соединяющие ближайшие от вертикальной линии точки и точки, вторые от нее;  $K$  и  $D$  — точки пересечения построенных прямых с соответствующей вертикальной линией. От точки  $K$  в сторону, противоположную точке  $D$ , откладывается отрезок  $KN$ , равный  $\frac{1}{8}$  отрезка  $KD$ . Точка  $N$  и есть искомая точка, получаемая интерполяцией по формуле Лагранжа для четырех опорных точек.

Действительно, ордината точки  $K$  равна

$$\frac{1}{2}(y_{-1} + y_1),$$

ордината точки  $D$  равна

$$\frac{1}{2}(y_{-3} + y_3).$$

Следовательно, ордината точки  $N$ , равная

$$y_N = y_K + \frac{1}{8}(y_K - y_D), \quad (53)$$

дает нам

$$y_N = \frac{1}{16}(-y_{-3} + 9y_{-1} + 9y_1 - y_3), \quad (54)$$

т. е. то же, что и формула Лагранжа.

Этим построением можно разделить пополам все участки, кроме крайних. Для крайних участков нет дальше лежащих точек, и потому новую точку можно найти, лишь пользуясь обыкновенной параболической зависимостью.

Если соединим три крайние точки  $A(0, 0)$ ,  $B(8, 11)$  и  $C(16, 16)$  прямыми линиями (см. рис. 38), то можно представить себе отрезок  $AC$  как хорду параболы, проходящей через эти три точки. Расстояние от хорды до средней точки будет максимальным расстоянием от хорды до кривой. Расстояние от хорды до точки, лежащей посередине крайнего интервала, как легко видеть,

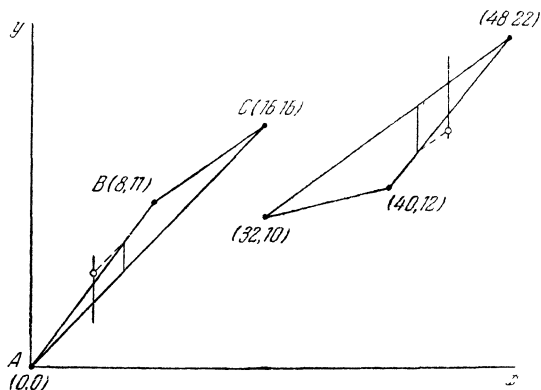


Рис. 38.

равно  $\frac{3}{4}$  от максимального; получить его можно следующим построением.

На расстоянии  $\frac{3}{4}$  интервала от края проводим вертикальную линию; по ней измеряем расстояние между хордами  $AB$  и  $AC$  и сносим на середину интервала. Таким образом получаем искомую точку. На рис. 38 даны построения для обоих краев кривой.

Если таким же путем еще раз разделим интервалы, то получим уже вчетверо больше точек, по которым без затруднения можем провести искомую кривую (рис. 39).

Второй прием построения промежуточных точек состоит в том, что проводятся прямые, соединяющие две соседние точки (см. рис. 40). Эти прямые выводятся за пределы своих интервалов на одну восьмую долю интервала; такие расстояния от опорных точек должны быть предварительно размечены вертикальными линиями. Крайние точки отрезков, находящиеся в одном интервале, соединяются прямыми. Легко видеть, что пересечение соеди-

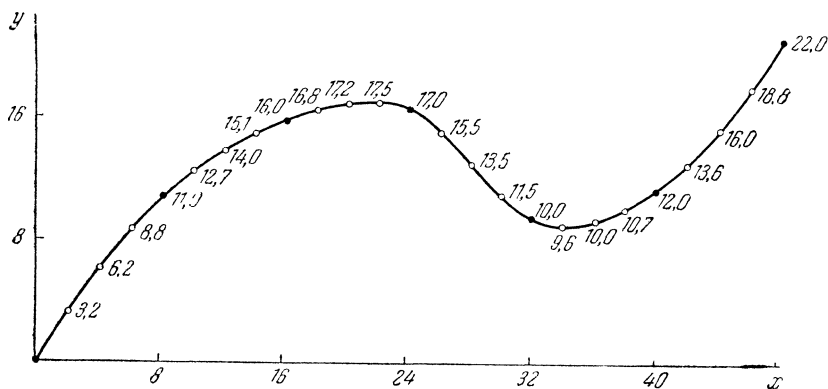


Рис. 39.

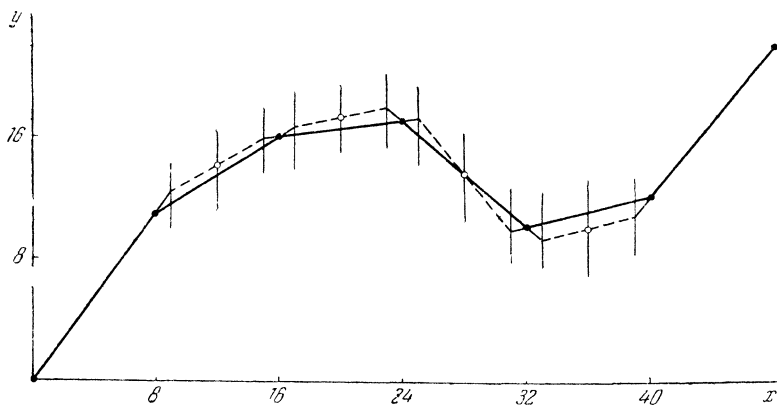


Рис. 40.

нительной прямой с вертикалью, проведенной посередине интервала, дает искомую точку. Крайние интервалы и в этом случае разделяются по параболу.

Если составим таблицу ординат опорных точек и их разностей, то увидим, что после убывания абсолютных величин разностей со столбца разностей третьего порядка начинается новое возрастание их, доходящее в разностях шестого порядка до 66. Получается так, как будто основной зависимостью, обнаруженной с помощью таблицы разностей, является зависимость шестой степени. В действительности же значения разностей высоких порядков здесь отражают лишь влияние округлений и неточностей значений  $y$ , которое обнаруживается в знакопеременности соседних значений некоторой разности (например,  $+27$  и  $-39$  в  $\Delta^5$ ):

$x$	$y$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$	$\Delta^6$
0	0	11					
8	11	5	— 6	2			
16	16	1	— 4	— 4	— 6		
24	17	— 7	— 8	17	21	27	— 66
32	10	2	9	— 1	— 18	— 39	
40	12	10	8				
48	22						

Практически, лучше не пользоваться разностями столбцов, на которых значения разностей вновь начинают возрастать — в нашем примере следует ограничиться тремя разностями. Это видно и из кривой рис. 41, промежу-

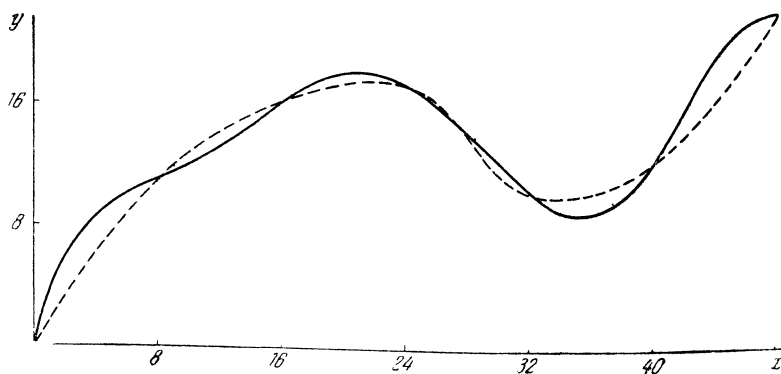


Рис. 41.

точные точки которой получены путем интерполяции с учетом всех шести разностей. На том же чертёже пунктиром дана кривая, построенная с учетом зависимостей третьей степени. Эта кривая значительно лучше соответствует системе опорных точек.

Поскольку при получении результатов любых экспериментов всегда возможны погрешности опыта и случайные ошибки, разности очень высоких порядков при интерполировании ненадежны и базироваться на них не следует. Говоря это, мы касаемся лишь технических задач, в которых точность не слишком велика; там же где, как например в астрономии, точность наблюдений значительна, возможно применение в расчете и большего числа разностей, чем три—четыре разности обычного технического расчета.

**§ 11. Глазомерное интерполирование.** При решении графической задачи интерполирования — проведении плавной кривой по совокупности заданных точек — можно порекомендовать практический прием, хотя и не основывающийся на математических зависимостях, но дающий неизменно хорошие результаты.

Пусть дана система точек только что рассмотренного примера. Берут несколько листов нелинованной бумаги, на них накладывают чертеж с системой точек и накалывают точки тонкой иглой. Получаются несколько совершенно точных копий расположения точек. На каждом из этих листов от руки проводится плавная кривая, соединяющая точки. На разных листах получаются различные кривые. Затем все кривые перечерчиваются на один лист прозрачной бумажной кальки. Получается семейство близких друг к другу линий. Если эти линии пересечь в нескольких местах прямыми штрихами и на каждом штрихе отметить точкой центр тяжести точек пересечения с построенными линиями, а затем по полученным точкам провести окончательную кривую, то она окажется ничуть не хуже математически обработанной.



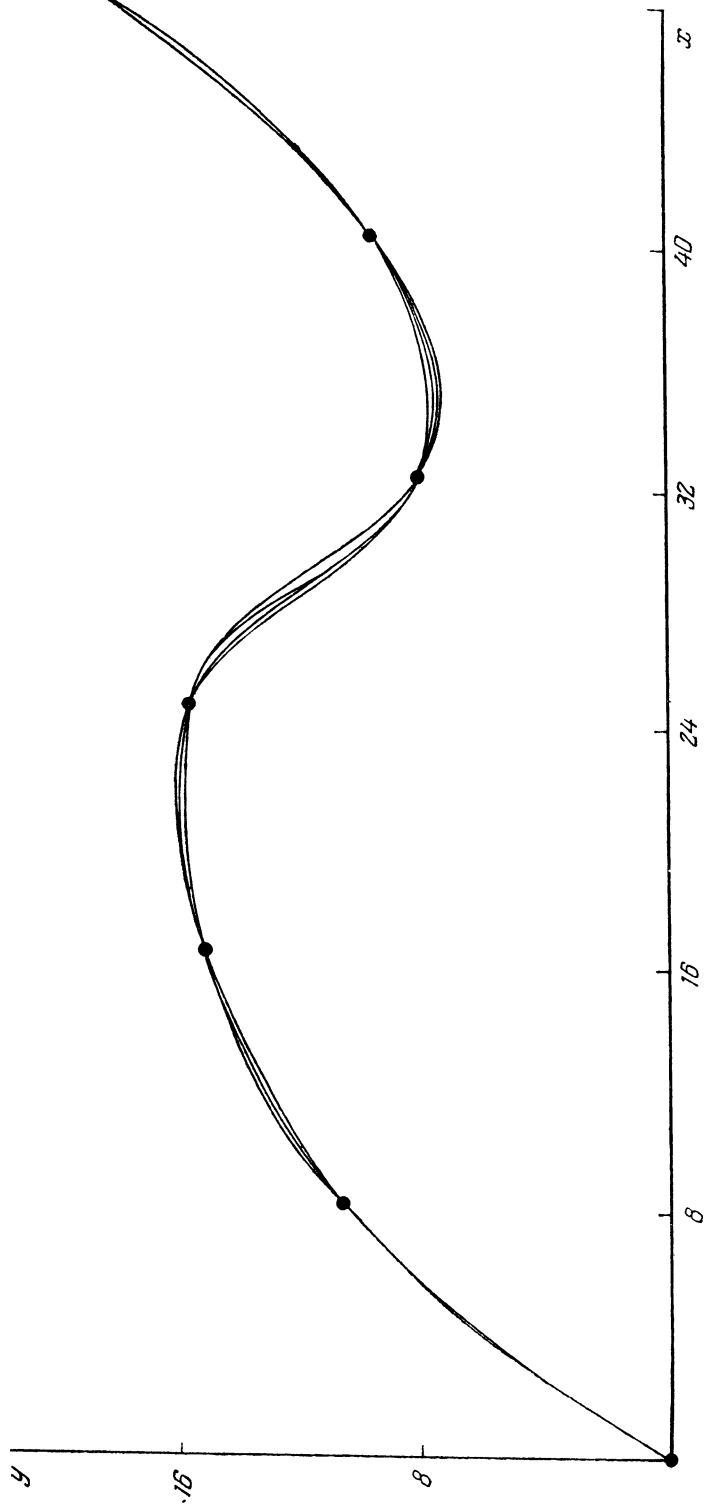


Рис. 42.\*)

\*) Масштаб рис. 42 в 2 раза больше, чем рис. 37—41.

Для людей с достаточно большим опытом графической работы достаточно четырех—пяти кривых, для менее опытных — несколько больше, но результат, как это ни покажется на первый взгляд странным, получается у различных людей почти один и тот же.

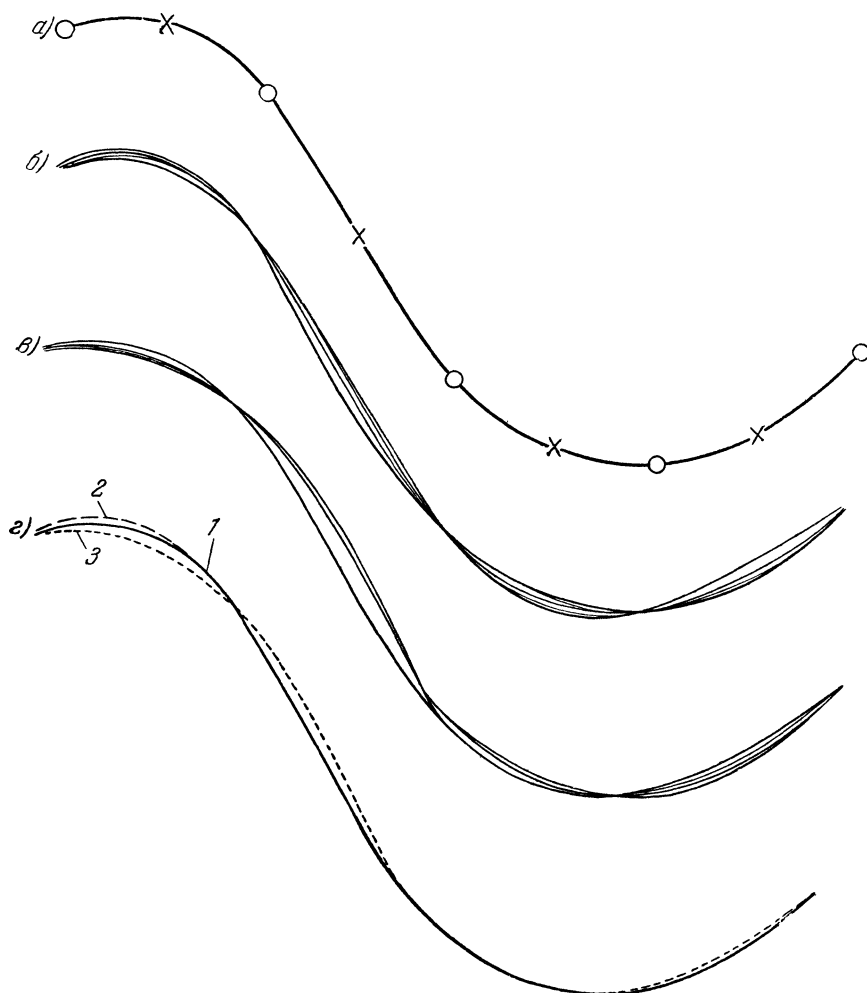


Рис. 43.

На рис. 42 показана обработка системы точек нашего примера — взяты четыре кривые. В местах двойного перегиба оказалось наибольшее расхождение между очертаниями кривых. Среднее очертание исключительно близко напоминает кривую графической интерполяции.

На рис. 43а даны промежуточные точки и построена интерполяционная кривая по пяти опорным точкам. На рис. 43б и в даны по пять кривых, построенных по этим точкам двумя лицами: инженером с 30-летним опытом графических работ (рис. 43б) и человеком, никогда графикой не занимавшимся (рис. 43в). На рис. 43г даны результативные кривые: 1 — математическая интерполяционная; 2 — инженера; 3 — не специалиста.

Для читателей будет весьма полезным попрактиковаться в проведении кривых и установить, насколько стабильно их представление о правильном направлении линий.

## ГЛАВА VI

### ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

**§ 1. Применение формулы Грегори—Ньютона.** Численное дифференцирование связано с формулами интерполирования, так как при табличном задании функции производные ее удобнее всего получать выраженными через разности различных порядков.

Формулу Грегори—Ньютона можно представить, обозначив

$$nh = \xi, \quad n = \frac{\xi}{h}, \quad \Delta^k y_0 = \Delta_0^k, \\ y_n = f(x_0 + nh) = f(x_0 + \xi) = f(x),$$

в следующем виде:

$$\begin{aligned} y_n = y_0 + \frac{\Delta_0}{h} \xi + \frac{\Delta_0^2}{2! h^2} \xi (\xi - h) + \\ + \frac{\Delta_0^3}{3! h^3} \xi (\xi - h) (\xi - 2h) + \\ + \frac{\Delta_0^4}{4! h^4} \xi (\xi - h) (\xi - 2h) (\xi - 3h) + \\ + \frac{\Delta_0^5}{5! h^5} \xi (\xi - h) (\xi - 2h) (\xi - 3h) (\xi - 4h) + \\ + \frac{\Delta_0^6}{6! h^6} \xi (\xi - h) (\xi - 2h) (\xi - 3h) (\xi - 4h) (\xi - 5h) + \dots = \quad (1) \\ = y_0 + \frac{\Delta_0}{h} \xi + \frac{\Delta_0^2}{2! h^2} (\xi^2 - h\xi) + \frac{\Delta_0^3}{3! h^3} (\xi^3 - 3h\xi^2 + 2h^2\xi) + \\ + \frac{\Delta_0^4}{4! h^4} (\xi^4 - 6h\xi^3 + 11h^2\xi^2 - 6h^3\xi) + \\ + \frac{\Delta_0^5}{5! h^5} (\xi^5 - 10h\xi^4 + 35h^2\xi^3 - 50h^3\xi^2 + 24h^4\xi) + \\ + \frac{\Delta_0^6}{6! h^6} (\xi^6 - 15h\xi^5 - 85h^2\xi^4 - 225h^3\xi^3 + 274h^4\xi^2 - 120h^5\xi) + \dots \end{aligned}$$

Поскольку дифференцирование по  $x$  и по  $\xi$  эквивалентны, мы можем найти выражение для любой производной:

$$\begin{aligned} y'_n = f'(x_0 + \xi) = \frac{\Delta_0}{h} + \frac{\Delta_0^2}{2! h^2} (2\xi - h) + \\ + \frac{\Delta_0^3}{3! h^3} (3\xi^2 - 6h\xi + 2h^2) + \frac{\Delta_0^4}{4! h^4} (4\xi^3 - 18h\xi^2 + 22h^2\xi - 6h^3) + \\ + \frac{\Delta_0^5}{5! h^5} (5\xi^4 - 40h\xi^3 + 105h^2\xi^2 - 100h^3\xi + 24h^4) + \\ + \frac{\Delta_0^6}{6! h^6} (6\xi^5 - 75h\xi^4 + 340h^2\xi^3 - 675h^3\xi^2 + 548h^4\xi - 120h^5) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_n'' &= \frac{\Delta_0^2}{2! h^2} \cdot 2 + \frac{\Delta_0^3}{3! h^3} (6\xi - 6h) + \frac{\Delta_0^4}{4! h^4} (12\xi^2 - 36h\xi + 22h^2) + \\
&\quad + \frac{\Delta_0^5}{5! h^5} (20\xi^3 - 120h\xi^2 + 210h^2\xi - 100h^3) + \\
&\quad + \frac{\Delta_0^6}{6! h^6} (30\xi^4 - 300h\xi^3 + 1020h^2\xi^2 - 1350h^3\xi + 548h^4) + \dots, \\
y_n''' &= \frac{\Delta_0^3}{3! h^3} \cdot 6 + \frac{\Delta_0^4}{4! h^4} (24\xi - 36h) + \frac{\Delta_0^5}{5! h^5} (60\xi^2 - 240h\xi + 210h^2) + \\
&\quad + \frac{\Delta_0^6}{6! h^6} (120\xi^3 - 900h\xi^2 + 2040h^2\xi - 1350h^3) + \dots, \\
y_n^{IV} &= \frac{\Delta_0^4}{4! h^4} \cdot 24 + \frac{\Delta_0^5}{5! h^5} (120\xi - 240h) + \\
&\quad + \frac{\Delta_0^6}{6! h^6} (360\xi^2 - 1800h\xi + 2040h^2) + \dots, \\
y_n^V &= \frac{\Delta_0^5}{5! h^5} \cdot 120 + \frac{\Delta_0^6}{6! h^6} (720\xi - 1800h) + \dots, \\
y_n^{VI} &= \frac{\Delta_0^6}{6! h^6} \cdot 720 + \dots
\end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя  $nh$  вместо  $\xi$  и сокращая на общую для числителя и знаменателя степень  $h$ , получим:

$$\begin{aligned}
hy_n' &= \Delta_0 + \frac{\Delta_0^2}{2} (2n - 1) + \frac{\Delta_0^3}{6} (3n^2 - 6n + 2) + \\
&\quad + \frac{\Delta_0^4}{12} (2n^3 - 9n^2 + 11n - 3) + \\
&\quad + \frac{\Delta_0^5}{120} (5n^4 - 40n^3 + 105n^2 + 100n + 24) + \\
&\quad + \frac{\Delta_0^6}{720} (6n^5 - 75n^4 + 340n^3 - 675n^2 + 548n - 120) + \dots, \\
h^2y_n'' &= \Delta_0^2 + \Delta_0^3 (n - 1) + \frac{\Delta_0^4}{12} (6n^2 - 18n + 11) + \\
&\quad + \frac{\Delta_0^5}{12} (2n^3 - 12n^2 + 21n - 10) + \\
&\quad + \frac{\Delta_0^6}{360} (15n^4 - 150n^3 + 510n^2 - 675n + 274) + \dots, \\
h^3y_n''' &= \Delta_0^3 + \frac{\Delta_0^4}{2} (2n - 3) + \frac{\Delta_0^5}{4} (2n^2 - 8n + 7) + \\
&\quad + \frac{\Delta_0^6}{24} (4n^3 - 30n^2 + 68n - 45) + \dots, \\
h^4y_n^{IV} &= \Delta_0^4 + \Delta_0^5 (n - 2) + \frac{\Delta_0^6}{12} (6n^2 - 3n + 34) + \dots, \\
h^5y_n^V &= \Delta_0^5 + \frac{\Delta_0^6}{2} (2n - 5) + \dots, \\
h^6y_n^{VI} &= \Delta_0^6 + \dots
\end{aligned} \tag{3}$$

При  $n=0$ , т. е. для производных, взятых на табличном значении аргумента, получим:

$$\begin{aligned}
hy_0' &= \Delta_0 - \frac{1}{2} \Delta_0^2 + \frac{1}{3} \Delta_0^3 - \frac{1}{4} \Delta_0^4 + \frac{1}{5} \Delta_0^5 - \frac{1}{6} \Delta_0^6 + \dots, \\
h^2y_0'' &= \Delta_0^2 - \Delta_0^3 + \frac{11}{12} \Delta_0^4 - \frac{5}{6} \Delta_0^5 + \frac{137}{180} \Delta_0^6 - \dots,
\end{aligned}$$

$$h^3 y_0''' = \Delta_0^3 - \frac{3}{2} \Delta_0^4 + \frac{7}{4} \Delta_0^5 - \frac{15}{8} \Delta_0^6 + \dots, \quad (4)$$

$$h^4 y_0^{IV} = \Delta_0^4 - 2\Delta_0^5 + \frac{17}{6} \Delta_0^6 - \dots,$$

$$h^5 y_0^V = \Delta_0^5 - \frac{5}{2} \Delta_0^6 + \dots,$$

$$h^6 y_0^{VI} = \Delta_0^6 - \dots$$

Эти формулы, поскольку они используют разности, идущие по наклонной строке и, следовательно, уходящие довольно далеко от нулевой строки, имеют сравнительно большие коэффициенты при разностях. Поэтому при вычислении по ним нельзя получить особенно точные результаты; обычно один знак теряется.

**§ 2. Применение формулы Ньютона—Стирлинга.** Значительно удобнее производить вычисление производных по формулам, получаемым из формулы Ньютона—Стирлинга, использующей члены таблицы разностей, наиболее близкие к нулевой строке.

Представив формулу Ньютона—Стирлинга так, как это сделано в предыдущем параграфе:

$$y_n = y_0 + \frac{\Delta_{-0,5}}{h} \xi + \frac{\Delta_{-1}^2}{2! h^2} \xi^2 + \frac{\Delta_{-1,5}^3}{3! h^3} \xi (\xi^2 - h^2) + \frac{\Delta_{-2}^4}{4! h^4} \xi^2 (\xi^2 - h^2) + \dots$$

$$+ \frac{\Delta_{-2,5}^5}{5! h^5} \xi (\xi^2 - h^2) (\xi^2 - 4h^2) + \frac{\Delta_{-3}^6}{6! h^6} \xi^2 (\xi^2 - h^2) (\xi^2 - 4h^2) + \dots, \quad (5)$$

раскроем скобки, произведем нужное число раз дифференцирование и получим формулы, аналогичные формулам (3):

$$h y_n' = \Delta_{-0,5} + \Delta_{-1}^2 n + \frac{\Delta_{-1,5}^3}{6} (3n^2 - 1) + \frac{\Delta_{-2}^4}{12} (2n^3 - n) +$$

$$+ \frac{\Delta_{-2,5}^5}{120} (5n^4 - 15n^2 + 4) + \frac{\Delta_{-3}^6}{360} (3n^5 - 10n^3 + 4n) + \dots,$$

$$h^2 y_n'' = \Delta_{-1}^2 + \Delta_{-1,5}^3 n + \frac{\Delta_{-2}^4}{12} (6n^2 - 1) + \frac{\Delta_{-2,5}^5}{12} (2n^3 - 3n) +$$

$$+ \frac{\Delta_{-3}^6}{360} (15n^4 - 30n^2 + 4) + \dots,$$

$$h^3 y_n''' = \Delta_{-1,5}^3 + \Delta_{-2}^4 n + \frac{\Delta_{-2,5}^5}{4} (2n^2 - 1) + \frac{\Delta_{-3}^6}{6} (n^3 - n) + \dots, \quad (6)$$

$$h^4 y_n^{IV} = \Delta_{-2}^4 + \Delta_{-2,5}^5 n + \frac{\Delta_{-3}^6}{6} (3n^2 - 1) + \dots,$$

$$h^5 y_n^V = \Delta_{-2,5}^5 + \Delta_{-3,2}^6 n + \dots,$$

$$h^6 y_n^{VI} = \Delta_{-3}^6 + \dots$$

При  $n=0$ , т. е. на уровне табличных значений аргумента, имеем:

$$h y_0' = \Delta_{-0,5} - \frac{1}{6} \Delta_{-1,5}^3 + \frac{1}{30} \Delta_{-2,5}^5 - \dots,$$

$$h^2 y_0'' = \Delta_{-1}^2 - \frac{1}{12} \Delta_{-2}^4 + \frac{1}{90} \Delta_{-3}^6 - \dots,$$

$$h^3 y_0''' = \Delta_{-1,5}^3 - \frac{1}{4} \Delta_{-2,5}^5 + \dots, \quad (7)$$

$$h^4 y_0^{IV} = \Delta_{-2}^4 - \frac{1}{6} \Delta_{-3}^6 + \dots,$$

$$h^5 y_0^V = \Delta_{-2,5}^5 - \dots,$$

$$h^6 y_0^{VI} = \Delta_{-3}^6 - \dots$$

Коэффициенты формул (7) удобнее для вычисления и гораздо быстрее уменьшаются, позволяя обходиться меньшим числом разностей и, следовательно, меньше ощущать влияние негладкости хода разностей, происходящей от округления последнего знака.

Т а б л и ц а 31

$x$	$y = \sin x$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$	$\Delta^6$
0	0						
		19 867					
0,2	0,19867		— 792				
		19 075		— 761			
0,4	0,38942		— 1553		64		
		17 522		— 697		22	
			— 2250		86		10
0,6	0,56464		— 611			32	
		15 272					— 19
			— 2861		118		
0,8	0,71736		— 493			13	
		12 411					5
			— 3354		131		
1,0	0,84147		— 362			18	
		9 057					— 9
			— 3716		149		
1,2	0,93204					9	
		5 341		— 213			
1,4	0,98545		— 3929		158		
		1 412		— 55			
1,6	0,99957		— 3984				
		— 2 572					
1,8	0,97385						

Пример. Дана таблица синусов (с интервалами  $h=0,2$ ) и их разностей (табл. 31). Найти первые три производные для  $x=0,6$  и  $x=0,750$ .

По формулам (4) получаем значения производных при  $x=0,6$ :

$$\begin{aligned}
 y'_{0,6} &= \frac{1}{0,2} \left[ 15\,272 - \frac{1}{2} \cdot (-2861) + \frac{1}{3} \cdot (-493) - \frac{1}{4} \cdot 131 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{5} \cdot 18 - \frac{1}{6} \cdot (-9) \right] \cdot 10^{-5} = \\
 &= 5 [15\,272 + 1430,5 - 164,3 - 35,2 + 3,6 + 1,5] \cdot 10^{-5} = 0,82540;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y''_{0,6} &= \frac{1}{0,2^2} \left[ -2861 - (-493) + \frac{11}{12} \cdot 131 - \frac{5}{6} \cdot 18 + \frac{137}{180} \cdot (-9) \right] \cdot 10^{-5} = \\
 &= 25 [-2861 + 493 + 120,1 - 15 - 6,8] \cdot 10^{-5} = -0,56742;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'''_{0,6} &= \frac{1}{0,2^3} \left[ -493 - \frac{3}{2} \cdot 131 + \frac{7}{4} \cdot 18 - \frac{15}{8} \cdot (-9) \right] \cdot 10^{-5} = \\
 &= 125 [-493 - 196,5 + 31,5 + 16,9] \cdot 10^{-5} = -0,8014.
 \end{aligned}$$

По формулам (7) получаем:

$$\begin{aligned}
 y'_{0,6} &= \frac{1}{0,2} \left[ \frac{17\,522 + 15\,272}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{-697 - 611}{2} + \frac{1}{30} \cdot \frac{22 + 32}{2} \right] \cdot 10^{-5} = \\
 &= 5 \left[ 16\,397 - \frac{1}{6} \cdot (-654) + \frac{1}{30} \cdot 27 \right] \cdot 10^{-5} = \\
 &= 5 [16\,397 + 109 + 0,9] \cdot 10^{-5} = 0,82534;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y''_{0,6} &= \frac{1}{0,2^3} \left[ -2250 - \frac{1}{12} \cdot 86 + \frac{1}{90} \cdot 10 \right] \cdot 10^{-5} = \\
 &= 25 \cdot [-2250 - 7,2 + 0,1] \cdot 10^{-5} = -0,56428; \\
 y'''_{0,6} &= \frac{1}{0,2^3} \left[ \frac{-697 - 611}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{22 + 32}{2} \right] \cdot 10^{-5} = \\
 &= 125 [-654 - 6,8] \cdot 10^{-5} = -0,8272.
 \end{aligned}$$

Здесь показан ход вычислений с одним запасным знаком во избежание потери точности от округлений.

Сравним результаты:

	$y'_{0,6}$	$y''_{0,6}$	$y'''_{0,6}$
Точно должно быть	0,82534	—0,56464	—0,82534
Наклонная строка	0,82540	—0,56742	—0,8014
Горизонтальная строка	0,82534	—0,56428	—0,8272

Потеря точности при работе по горизонтальной строке значительно меньшая, чем при оперировании с наклонной строкой, но все-таки имеет место вследствие того, что в разностях сохраняется меньше знаков, чем в значениях функции, а следовательно, меньше верных знаков и в вычисленных значениях производных.

Перейдем к производным для промежуточного значения аргумента  $x = 0,750 = 0,6 + 0,75 \cdot 0,2$ .

Имеем  $x_0 = 0,6$ ,  $n = 0,75$ . Начнем с вычислений по наклонной строке.

$$\begin{aligned}
 10^5 \cdot y'_{0,75} &= \frac{1}{0,2} \left[ 15\,272 + \frac{-2861}{2} (2 \cdot 0,75 - 1) + \right. \\
 &+ \frac{-493}{6} (3 \cdot 0,75^2 - 6 \cdot 0,75 + 2) + \frac{131}{12} (2 \cdot 0,75^3 - 9 \cdot 0,75^2 + 11 \cdot 0,75 - 3) + \\
 &+ \frac{18}{120} (5 \cdot 0,75^4 - 40 \cdot 0,75^3 + 105 \cdot 0,75^2 - 100 \cdot 0,75 + 24) + \\
 &\left. + \frac{-9}{720} (6 \cdot 0,75^5 - 75 \cdot 0,75^4 + 340 \cdot 0,75^3 - 675 \cdot 0,75^2 + 548 \cdot 0,75 - 120) \right].
 \end{aligned}$$

Вычисление это настолько сложно, что во избежание ошибок его нужно производить по схеме Горнера:

$$\begin{aligned}
 &[2 \cdot 0,75 - 1] \cdot (-1430,5) = -715,2 \\
 &\quad 1,50 \qquad \qquad \qquad 0,50 \\
 &[3 \cdot 0,75 - 6] \cdot 0,75 + 2] \cdot (-82,2) = 66,7 \\
 &\quad 2,25 \qquad \qquad -2,812 \qquad \qquad -0,812 \\
 &\quad -3,75 \qquad \qquad \qquad -0,812 \\
 &[2 \cdot 0,75 - 9] \cdot 0,75 + 11] \cdot 0,75 - 3] \cdot 10,9 = 11,2 \\
 &\quad 1,5 \qquad \qquad -5,62 \qquad \qquad 4,03 \\
 &\quad -7,5 \qquad \qquad \qquad 5,38 \qquad \qquad 1,03 \\
 &[5 \cdot 0,75 - 40] \cdot 0,75 + 105] \cdot 0,75 - 100] \cdot 0,75 + 24] \cdot 0,150 = -1,1 \\
 &\quad 3,75 \qquad \qquad -27,19 \qquad \qquad 58,36 \qquad \qquad -31,23 \\
 &\quad -36,25 \qquad \qquad \qquad 77,81 \qquad \qquad -41,64 \qquad \qquad -7,23 \\
 &[6 \cdot 0,75 - 75] \cdot 0,75 + 340] \cdot 0,75 - 675] \cdot 0,75 + 548] \cdot 0,75 - 120] \cdot 0,0125 = 0,4 \\
 &\quad 4,50 \qquad \qquad -52,9 \qquad \qquad 215,3 \qquad \qquad -345,8 \qquad \qquad 151,7 \\
 &\quad -70,5 \qquad \qquad \qquad 287,1 \qquad \qquad -459,7 \qquad \qquad 202,2 \qquad \qquad 31,7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'_{0,75} &= \frac{1}{0,2} (15\,272 - 715,2 + 66,7 + 11,2 - 1,1 + 0,4) \cdot 10^{-8} = 0,73170; \\
 y''_{0,75} &= \frac{1}{0,2^2} \left\{ -2861 + (-493) \cdot (0,75 - 1) + \frac{131}{12} [6 \cdot 0,75^2 - 18 \cdot 0,75 + 11] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{18}{12} [2 \cdot 0,75^3 - 12 \cdot 0,75^2 + 21 \cdot 0,75 - 10] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-9}{360} [15 \cdot 0,75^4 - 150 \cdot 0,75^3 + 510 \cdot 0,75^2 - 675 \cdot 0,75 + 274] \right\} \cdot 10^{-8} = \\
 &= -0,6828; \\
 y'''_{0,75} &= \frac{1}{0,2^3} \left\{ -493 + \frac{131}{2} (2 \cdot 0,75 - 3) + \frac{18}{4} [2 \cdot 0,75^2 - 8 \cdot 0,75 + 7] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-9}{24} [4 \cdot 0,75^3 - 30 \cdot 0,75^2 + 68 \cdot 0,75 - 45] \right\} \cdot 10^{-8} = -0,723.
 \end{aligned}$$

Переходим к вычислению по горизонтальной строке. Поскольку здесь степени  $n$  меняются через две единицы, вычисляем и значение  $n^2 = 0,75^2 = 0,5625$ .

$$\begin{aligned}
 10^8 \cdot y'_{0,75} &= \frac{1}{0,2} \left\{ \frac{17\,522 + 15\,272}{2} + (-2250) \cdot 0,75 + \frac{-697 - 611}{2} [3 \cdot 0,75^2 - 1] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{86}{12} [2 \cdot 0,75^3 - 0,75] + \frac{22 + 32}{220} [5 \cdot 0,75^4 - 15 \cdot 0,75^3 + 4] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-9}{360} [3 \cdot 0,75^5 - 10 \cdot 0,75^3 + 4 \cdot 0,75] \right\}.
 \end{aligned}$$

Применяем и здесь схему Горнера с учетом перехода степени через две единицы:

$$\begin{array}{r}
 (3 \cdot 0,5625 - 1) \cdot (-109) = -74,9 \\
 \quad 1,6875 \qquad \qquad \qquad 0,6875 \\
 (2 \cdot 0,5625 - 1) \cdot 0,75 \cdot 7,17 = 0,7 \\
 \quad 1,125 \qquad \qquad \qquad 0,094 \\
 \qquad \qquad \qquad 0,125 \\
 [5 \cdot 0,5625 - 15] \cdot 0,5625 + 4] \cdot 0,225 = -0,6 \\
 \quad 2,81 \qquad \qquad \qquad -6,86 \\
 \qquad \qquad \qquad -12,19 \qquad \qquad \qquad -2,86 \\
 [3 \cdot 0,5625 - 10] \cdot 0,5625 + 4] \cdot 0,75] \cdot (-0,0250) = 0 \\
 \quad 1,69 \qquad \qquad \qquad -4,65 \qquad \qquad \qquad -0,49 \\
 \qquad \qquad \qquad -8,31 \qquad \qquad \qquad -0,65
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 y'_{0,75} &= \frac{1}{0,2} (16\,397 - 1687,5 - 74,9 + 0,7 - 0,6) \cdot 10^{-8} = 0,73173; \\
 y''_{0,75} &= \frac{1}{0,2^2} \left[ -2250 + \frac{-697 - 611}{2} \cdot 0,75 + \frac{86}{12} (6 \cdot 0,75^2 - 1) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{22 + 32}{24} (2 \cdot 0,75^3 - 3 \cdot 0,75) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{10}{360} (15 \cdot 0,75^4 - 30 \cdot 0,75^3 + 4) \right] \cdot 10^{-8} = -0,68158; \\
 y'''_{0,75} &= \frac{1}{0,2^3} \left[ \frac{-697 - 611}{2} + 86 \cdot 0,75 + \frac{22 + 32}{8} (2 \cdot 0,75^2 - 1) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{10}{6} (0,75^3 - 0,75) \right] \cdot 10^{-8} = -0,7366.
 \end{aligned}$$



Сравним результаты:

	$y'_{0,730}$	$y''_{0,730}$	$y'''_{0,730}$
Точно должно быть	0,73169	— 0,68164	— 0,73169
Наклонная строка	0,73170	— 0,6828	— 0,723
Горизонтальная строка	0,73173	— 0,68158	— 0,7366

**§ 3. Применение формулы Ньютона для вычисления производных высших порядков.** Нахождение производных различных порядков при значениях функции, заданных для неравных интервалов изменения аргумента, можно осуществлять двумя путями: по формуле Ньютона [гл. V, (45)], или по формуле Лагранжа [гл. V, (51)].

Имея формулу Ньютона для переменного значения аргумента

$$y = y_1 + (x - x_1) \Delta_{2,1} + (x - x_1)(x - x_2) \Delta_{3,2,1} + \\ + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \Delta_{4,3,2,1} + \dots, \quad (8)$$

найдем первую производную  $y'$ :

$$y' = \Delta_{2,1} + [(x - x_1) + (x - x_2)] \Delta_{3,2,1} + \\ + [(x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)] \Delta_{4,3,2,1} + \dots \quad (9)$$

Аналогичным путем мы можем перейти к  $y''$ ,  $y'''$  и т. д. Но этот путь слишком сложен для реального проведения вычислений. Удобнее раскрыть все скобки в множителях при разделенных разностях и получить соответствующие многочлены, дифференцируя которые можно получить новые многочлены, служащие для определения производных. Получение многочленов упрощается тем, что для получения многочлена при  $k$ -й разделенной разности берется предыдущий и умножается на разность  $x - x_k$ , так что общее число действий невелико.

**Пример 1.\*** Дана таблица значений функции для неравноотстоящих значений аргумента

$x$	2	4	9	13	16	21	29
$y$	57	1345	66 340	402 052	1 118 209	4 287 844	21 242 820

Найти значения функции и ее производных при  $x = 14$ .

Составляем таблицу разделенных разностей (табл. 32). Подставляем численные значения в формулу Ньютона:

$$y = 57 + (x - 2) \cdot 644 + (x - 2)(x - 4) \cdot 1765 + (x - 2)(x - 4)(x - 9) \cdot 556 + \\ + (x - 2)(x - 4)(x - 9)(x - 13) \cdot 45 + \\ + (x - 2)(x - 4)(x - 9)(x - 13)(x - 16) \cdot 1.$$

\*) Уиттекер и Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, 1933, стр. 67.

Т а б л и ц а 32

$x_n$	$y_n$	$\Delta'$	$\Delta''$	$\Delta'''$	$\Delta^{IV}$	$\Delta^V$
2	57	644				
4	1 345	12 999	1 765	556		
9	66 340	83 928	7 881	1186	45	1
13	402 052	238 719	22 113	2274	64	1
16	1 118 209	633 927	49 401	4054	89	
21	4 287 844	2 119 372	114 265			
29	21 242 820					

Строим многочлены:

$x - 4$	$x - 2$ — 4	8				
$x - 9$	$x^2 - 6x + 8$ — 9	54	— 72			
$x - 13$	$x^3 - 15x^2 + 62x - 72$ — 13	195	— 806	936		
$x - 16$	$x^4 - 28x^3 + 257x^2 - 878x + 936$ — 16	448	— 4112	14048	— 14976	
	$x^5 - 44x^4 + 705x^3 - 4990x^2 + 14984x - 14976$					

Для функции  $y$  и ее производных получаем выражения:

$$y = 57 + 644(x - 2) + 1765(x^2 - 6x + 8) + 556(x^3 - 15x^2 + 62x - 72) + \\ + 45(x^4 - 28x^3 + 257x^2 - 878x + 936) + \\ + (x^5 - 44x^4 + 705x^3 - 4990x^2 + 14984x - 14976);$$

$$y' = 644 + 1765(2x - 6) + 556(3x^2 - 30x - 62) + \\ + 45(4x^3 - 84x^2 + 514x - 878) + (5x^4 - 176x^3 + 2115x^2 - 9980x + 14984);$$

$$y'' = 1765 \cdot 2 + 556(6x - 30) + 45(12x^2 - 168x + 514) + \\ + (20x^3 - 528x^2 + 4230x - 9980);$$

$$y''' = 556 \cdot 6 + 45(24x - 168) + (60x^2 - 1056x + 4230);$$

$$y^{IV} = 45 \cdot 24 + (120x - 1056);$$

$$y^V = 120;$$

$$y^{VI} = 0.$$



$$\begin{array}{r|l}
 y''' & \\
 (24 \cdot 14 - 168) \cdot 45 & 3\,336 \\
 336 & 7\,560 \\
 (60 \cdot 14 - 1056) \cdot 14 + 168 & 1\,206 \\
 840 & \\
 -216 & 1206 \\
 \hline
 y'''_{x=14} = 12\,102 & \\
 \\
 y^{IV} & \\
 120 \cdot 14 - 1056 & 1\,080 \\
 1680 & 624 \\
 624 & \\
 \hline
 y^{IV}_{x=14} = 1\,704 & \\
 \\
 y^V = 120. & 
 \end{array}$$

Этот пример показывает как вычислять, но не характерен в отношении демонстрации всех тех трудностей, с которыми приходится встречаться вычислителю при численном дифференцировании.

**Пример 2.** Рассмотрим несколько значений синусов, взятых для неравноотстоящих значений угла (см. табл. 33).

Таблица 33

$x$	$y = \sin x$	$\Delta'$	$\Delta''$	$\Delta'''$	$\Delta^{IV}$	$\Delta^V$	$\Delta^{VI}$
0	0						
0,10	0,09983	0,9983					
0,25	0,24740	0,9838	—0,0580	—0,1634			
0,35	0,34290	0,9550	—0,1152	—0,1600	0,0068		
0,50	0,47943	0,9102	—0,1792	—0,1520	0,0160	0,0153	
0,60	0,56464	0,8521	—0,2324	—0,1403	0,0260	0,0167	0,0020
0,70	0,64422	0,7958	—0,2815				

Поскольку синус есть функция трансцендентная, то ее разности любого порядка, как обыкновенные, так и разделенные, не могут быть одинаковыми. Поэтому встает вопрос: какое же число разделенных разностей нужно брать?

Математические критерии, связывающие число учитываемых разностей с видом функции, поведением ее высоких производных и т. д. в практическом расчете трудно применимы, так как легче просто учесть несколько лишних членов в расчете, чем исследовать необходимое их число.

Практический критерий значительно проще: нужно брать столько разностей, сколько их имеется в таблице до начала нового возрастания их величины, так как уменьшение величины разностей связано с поведением функции, а дальнейшее возрастание их — результат округлений, и, следовательно, чем

больше мы возьмем во внимание разностей, тем больше затемним расчет наложением погрешностей.

Иногда, как в нашем примере, и этого количества разностей может оказаться слишком много, так как если коэффициенты при высоких разностях малы, то и разности в несколько десятков или даже сотен единиц не окажут влияния на результат. Но опять-таки предварительное исследование величины многочленных коэффициентов будет более сложным и отнимет больше времени, чем вычисление величины нескольких лишних членов, которые потом придется отбросить.

В соответствии с приведенными в табл. 33 разделенными разностями мы получим для нахождения значений функции и ее производных уравнение

$$\begin{aligned}
 y = & 0 + x \cdot 0,9983 + \\
 & + x(x-0,1)(-0,0580) + \\
 & + x(x-0,1)(x-0,25)(-0,1634) + \\
 & + x(x-0,1)(x-0,25)(x-0,35) \cdot 0,0068 + \\
 & + x(x-0,1)(x-0,25)(x-0,35)(x-0,50) \cdot 0,0153 + \\
 & + x(x-0,1)(x-0,25)(x-0,35)(x-0,50)(x-0,60) \cdot 0,0020.
 \end{aligned}$$

Даже при поверхностном рассмотрении табл. 33 видно, что знак при разностях закономерно меняется через два столбца; между тем в разности шестого порядка перемены знака нет. По-видимому, это произошло от того, что разделенная разность шестого порядка отражает уже не свойства функции, а случайное сочетание последствий округления. Кроме того, стоящее перед величиной разности произведение пяти сомножителей столь мало, что последним членом выражения для  $y$  можно совершенно спокойно пренебречь. При вычислении мы проверим правильность этого предположения.

Раскроем скобки и построим выражения для функции и ее производных. Так как величины разделенных разностей не превышают единицы и при перемножении числовых значений многочленов на разности знаки теряться не будут, вычислим коэффициенты многочленов с пятью десятичными знаками.

$x - 0,1$	$x$
$x - 0,25$	$x^2 - 0,1x$ $- 0,25 \quad 0,025$
$x - 0,35$	$x^3 - 0,35x^2 + 0,025x$ $- 0,35 \quad 0,1225 \quad - 0,00875$
$x - 0,50$	$x^4 - 0,70x^3 + 0,1475x^2 - 0,00875x$ $- 0,50 \quad 0,35 \quad - 0,07375 \quad 0,00437$
$x - 0,60$	$x^5 - 1,20x^4 + 0,4975x^3 - 0,08250x^2 + 0,00437x$ $- 0,60 \quad 0,72 \quad - 0,29850 \quad 0,04950 \quad - 0,00262$
	$x^6 - 1,80x^5 + 1,2175x^4 - 0,38100x^3 + 0,05387x^2 - 0,00262x$

Получаем:

$$\begin{aligned}
 y = & 0 + x \cdot 0,9983 + (x^2 - 0,1x) \cdot (-0,0580) + \\
 & + (x^3 - 0,35x^2 + 0,025x) \cdot (-0,1634) + \\
 & + (x^4 - 0,70x^3 + 0,1475x^2 - 0,00875x) \cdot 0,0068 + \\
 & + (x^5 - 1,20x^4 + 0,4975x^3 - 0,08250x^2 + 0,00437x) \cdot 0,0153 + \\
 & + (x^6 - 1,80x^5 + 1,2175x^4 - 0,38100x^3 + 0,05387x^2 - 0,00262x) \cdot 0,0020.
 \end{aligned}$$

Повторные дифференцирования дадут выражения для производных:

$$y' = 0,9983 + (2x - 0,1) \cdot (-0,0580) + \\ + (3x^2 - 0,70x + 0,025) \cdot (-0,1634) + \\ + (4x^3 - 2,10x^2 + 0,2950x - 0,00875) \cdot 0,0068 + \\ + (5x^4 - 4,80x^3 + 1,4925x^2 - 0,1650x + 0,00437) \cdot 0,0153 + \\ + (6x^5 - 9x^4 + 4,87x^3 - 1,143x^2 + 0,10774x - 0,00262) \cdot 0,0020;$$

$$y'' = -0,1160 + (6x - 0,70) \cdot (-0,1634) + \\ + (12x^2 - 4,20x + 0,2950) \cdot 0,0068 + \\ + (20x^3 - 14,40x^2 + 2,9850x - 0,1650) \cdot 0,0153 + \\ + (30x^4 - 36x^3 + 14,61x^2 - 2,286x + 0,10774) \cdot 0,0020;$$

$$y''' = -0,9804 + (24x - 4,20) \cdot 0,0068 + \\ + (60x^2 - 28,80x + 2,9850) \cdot 0,0153 + \\ + (120x^3 - 108x^2 + 29,22x - 2,286) \cdot 0,0020;$$

$$y^{IV} = 0,1632 + (120x - 28,80) \cdot 0,0153 + (360x^2 - 216x + 29,22) \cdot 0,0020;$$

$$y^V = 1,8360 + (720x - 216) \cdot 0,0020;$$

$$y^{VI} = 1,44.$$

Вычислим значения  $y$  и производных для  $x=0,40$  и проверим: четные производные должны давать синусы, а нечетные — косинусы. Вычисление  $y$  целесообразно провести не раскрывая скобок.

$y$	
$0,4 \cdot 0,9983$	$0,39932$
$0,4 \cdot 0,3 \cdot (-0,0580)$	$-0,00696$
$0,12$	
$0,12 \cdot 0,15 \cdot (-0,1634)$	$-0,00294$
$0,018$	
$0,018 \cdot 0,05 \cdot 0,0068$	$0$

$$y_{x=0,4} = 0,38942$$

Две последние разделенные разности, как мы видим, не влияют на результат.

$y'$		
$(2 \cdot 0,4 - 0,1) \cdot (-0,0580)$	$0,8$	$-0,0406$
$[3 \cdot 0,4 - 0,7) 0,4 + 0,025] \cdot (-0,1634)$	$0,7$	$-0,0368$
$[4 \cdot 0,4 - 2,1) 0,4 + 0,295] \cdot 0,0068$	$1,2$ $0,2$ $0,5$ $0,225$	$-0,0003$
$[5 \cdot 0,4 - 4,8) 0,4 + 1,4925] \cdot 0,0153$	$1,6$ $-0,2$ $-0,5$ $-0,095$ $-0,036$ $-0,04475$	$0$
$[6 \cdot 0,4 - 9,0) 0,4 + 4,87] \cdot 0,0020$	$2$ $-1,12$ $0,149$ $-0,0064$ $-0,016$ $-0,0020$	

$$y'_{x=0,4} = 0,9206$$

$$\begin{array}{rcl}
 y'' & & \\
 (6 \cdot 0,4 - 0,7) \cdot (-0,1634) & | & -0,1160 \\
 2,4 & & -0,2778 \\
 & 1,7 & \\
 [12 \cdot 0,4 - 4,20] 0,4 + 0,295] \cdot 0,0068 & | & 0,0036 \\
 4,8 & 0,24 & \\
 & 0,6 & 0,535 \\
 [20 \cdot 0,4 - 14,4) 0,4 + 2,985) 0,4 - 0,1650] \cdot 0,0153 & | & 0,0001 \\
 8 & -2,56 & 0,17 \\
 -6,4 & 0,425 & 0,005
 \end{array}$$

$$y''_{x=0,4} = 0,3901$$

$$\begin{array}{rcl}
 y''' & & \\
 (24 \cdot 0,4 - 4,2) \cdot 0,0068 & | & -0,9804 \\
 9,6 & & 0,0367 \\
 & 5,4 & \\
 [60 \cdot 0,4 - 28,8) 0,4 + 2,985] \cdot 0,0153 & | & 0,0163 \\
 24 & -1,92 & \\
 -4,8 & 2,065 & \\
 [120 \cdot 0,4 - 108) 0,4 + 29,22) 0,4 - 2,286] \cdot 0,0020 & | & -0,0004 \\
 48 & -24 & 2,088 \\
 -60 & 5,22 & -0,198
 \end{array}$$

$$y'''_{x=0,4} = 0,9278$$

$$\begin{array}{rcl}
 y^{IV} & & \\
 (120 \cdot 0,4 - 28,8) \cdot 0,0153 & | & 0,1632 \\
 48 & & 0,2938 \\
 & 19,2 & \\
 [360 \cdot 0,4 - 216) 0,4 + 29,22] \cdot 0,0020 & | & 0,0008 \\
 144 & -28,8 & \\
 -72 & 0,42 &
 \end{array}$$

$$y^{IV}_{x=0,4} = 0,4578$$

$$\begin{array}{rcl}
 y^V & & \\
 (720 \cdot 0,4 - 216) \cdot 0,0020 & | & 1,836 \\
 288 & & 0,144 \\
 & 72 &
 \end{array}$$

$$y^V_{x=0,4} = 1,980$$

Имея из таблиц  $\sin 0,4 = 0,38942$  и  $\cos 0,4 = 0,92106$ , мы видим, что с повышением порядка производной точность все более теряется. Как бы ни была совершенна вычислительная формула, невозможно избежать влияния уменьшения числа знаков в разделенных разностях и накопления погрешностей от округлений. Практически более высокие производных чем вторая с достаточной точностью получить не удастся.

В предыдущем примере был взят многочлен с целыми числами для коэффициентов, поэтому вычисления можно было провести с полной точностью. Однако случай этот не реален, так как при любом исследовании приходится иметь дело с приближенными числами, а не с целыми.

## ГЛАВА VII

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ

**§ 1. Основные уравнения.** С развитием техники все большее количество самых разнообразных задач приводит к необходимости вычисления определенных интегралов.

Величина определенного интеграла

$$F = \int_A^B f(x) dx \quad (1)$$

равна площади  $F$ , ограниченной кривою  $y=f(x)$ , осью абсцисс и вертикальными прямыми  $x=A$  и  $x=B$ .

Для некоторых подынтегральных функций  $f(x)$  в справочниках имеются готовые решения, однако таких табличных интегралов сравнительно немного. Подавляющее большинство интегралов либо не берутся в конечном виде, либо выражаются через такие функции, получение числового значения которых представляет собою слишком трудную вычислительную задачу. Если функция  $f(x)$  задана графически, то аналитическое вычисление величины  $F$  вообще невозможно.

Таким образом, в большинстве случаев вычисление величины определенного интеграла можно осуществить лишь приближенно, лучше всего численными методами.

Наиболее часто применяемые методы численного нахождения величины  $F$  основаны на представлении  $F$  в виде линейной комбинации нескольких значений  $f(x)$ , взятых для определенных абсцисс и с определенными коэффициентами:

$$F = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (2)$$

где

$$y_k = f(x_k), \quad A \leq x_k \leq B.$$

Абсциссы, для которых вычисляются значения  $y_k$ , могут быть взяты равно- или неравноотстоящими; коэффициенты  $C$  могут быть одинаковыми или различными — от этого будет зависеть точность вычислений и удобство их проведения. Что касается пределов интегрирования, то нам достаточно рассмотреть применение различных способов численного интегрирования для случая

$$A = -1, \quad B = +1.$$

При иных значениях  $A$  и  $B$  введение зависимости

$$x = \frac{2}{B-A} u - \frac{B+A}{B-A},$$







Это отмечено и А. Н. Крыловым в „Лекциях о приближенных вычислениях“. Говоря о выражениях для установления погрешности приближенного интегрирования, А. Н. Крылов отмечает: „...Присутствие в этих выражениях  $f''(\xi)$ ,  $f^{IV}(\xi)$ ,  $f^{(2n)}(\xi)$  делает пользование ими на практике часто довольно затруднительным, а когда функция  $f(x)$  задана не аналитически, а чертежом, — то и совершенно невозможным; поэтому на практике приходится часто прибегать не к этим точным выражениям остаточных членов, а к другого рода приемам“.

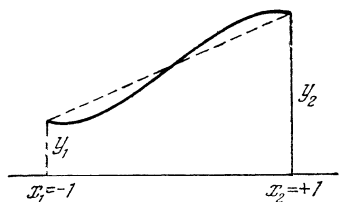


Рис. 44.

Как мы увидим ниже, числовые значения  $\epsilon$  дают более простое представление о точности того или иного метода.

**§ 2. Методы, использующие комбинации ординат.** Мы рассмотрим ниже методы приближенного численного интегрирования, основанные на следующих положениях.

1. Интервал интегрирования делится на  $n$  частей; ординаты берутся на границах между частями, т. е.

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -1 + \frac{2}{n}, \quad x_3 = -1 + 2 \cdot \frac{2}{n}, \quad \dots, \quad x_{n+1} = 1.$$

В эту группу входят методы трапеций, Симпсона и Ньютона — Котса.

2. Интервал интегрирования делится на  $n$  частей; ординаты берутся по серединам частей. Этот подход дает возможность получить формулы, аналогичные предыдущим, но несколько более точные.

3. Абсциссы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  назначаются такими, чтобы все коэффициенты  $C_k$  формулы (2) оказались одинаковыми — способ Чебышева.

4. Как абсциссы  $x_k$ , так и коэффициенты  $C_k$  определяются из условия удовлетворения максимально возможному числу строк системы (7) — метод Гаусса.

Погрешности для всех этих методов мы получим, обозначив

$$C_1 x_1^{2m} + C_2 x_2^{2m} + \dots + C_n x_n^{2m} = S_{2m},$$

по формуле

$$\epsilon_{2m} = S_{2m} - \frac{2}{2m+1}.$$

Начнем с метода трапеций.

**§ 3. Метод трапеций.** В простейшей форме метод трапеций состоит в замене истинной подынтегральной функции линейным двучленом (см. рис. 44).

Имеем:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = +1.$$

Из первого уравнения системы (7)

$$C_1 + C_2 = 2,$$

но вследствие условия (10)  $C_1 = C_2$ , следовательно,

$$C_1 = C_2 = 1.$$

Отсюда по методу трапеций

$$F = y_1 + y_2.$$

Рассмотрим получение погрешностей; для метода трапеций все  $S$  равны 2, отсюда

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_{2m} = 2 - \frac{2}{2m+1}. \quad (18)$$

Точно удовлетворяется лишь одно уравнение системы (7). Погрешности начинаются с

$$\varepsilon_2 = \frac{4}{3}.$$

При делении интервала интегрирования на две части и замене в каждой части истинного очертания кривой  $y=f(x)$  прямой линией (см. рис. 45) получим:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = +1, \\ F = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}(y_2 + y_3) = \frac{1}{2}y_1 + y_2 + \frac{1}{2}y_3, \quad (19)$$

$$C_1 = C_3 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = 1,$$

$$S_0 = 2, \quad S_2 = S_4 = \dots = S_{2m} = 1,$$

$$\varepsilon_{2m} = 1 - \frac{2}{2m+1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{3}.$$

При делении интервала интегрирования на  $n$  частей имеем:

$$F = \frac{2}{n} \left( \frac{1}{2}y_1 + y_2 + \dots + y_n + \frac{1}{2}y_{n+1} \right). \quad (20)$$

Кривая значений погрешности  $\varepsilon_2$  дана на рис. 46.\*) Из рисунка видно, что с увеличением числа частей, на которые делится общий интервал интегрирования, погрешность убывает сравнительно медленно. Относительная погрешность вычисления примерно обратно пропорциональна квадрату числа частей.

При делении на  $n$  частей интервала интегрирования от  $A$  до  $B$  формула метода трапеций приобретает вид

$$\int_A^B y dx = \frac{B-A}{n} \left( \frac{1}{2}y_1 + y_2 + \dots + y_n + \frac{1}{2}y_{n+1} \right). \quad (21)$$

**§ 4. Примеры.** Рассмотрим несколько примеров применения метода трапеций.

**Пример 1.** Вычислить

$$F = \int_1^{13} \frac{dx}{x}. \quad (22)$$

Мы взяли пример легко проверяемый, поскольку

$$F = \int_1^{13} \frac{dx}{x} = |\ln x|_1^{13} = \ln 13 = 2,56495. \quad (23)$$

\*) Здесь и далее в аналогичных рисунках значения погрешностей даны в логарифмической шкале.

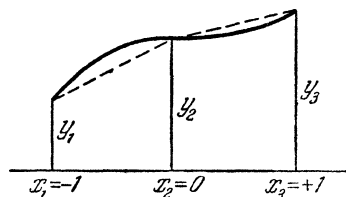


Рис. 45.

Это дает нам возможность непосредственно установить величину погрешностей вычисления.

Вычислительная формула будет иметь вид

$$F = \int_1^{13} y dx = \frac{12}{n} \left( \frac{1}{2} y_1 + y_2 + \dots + y_n + \frac{1}{2} y_{n+1} \right), \quad (24)$$

где

$$y = \frac{1}{x}.$$

Начнем вычисления, взяв  $n=3$ , поскольку при меньшем числе интервалов, как видно из рис. 47, погрешность будет чрезмерно велика — больше самой величины интеграла.

При  $n=3$  имеем:

$$x_1=1, \quad x_2=5, \quad x_3=9, \quad x_4=13,$$

$$F_3 = 4 \left( \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} \right) \approx 3,398.$$

При  $n=6$

$$x_1=1, \quad x_2=3, \quad x_3=5, \quad x_4=7, \quad x_5=9, \quad x_6=11, \quad x_7=13,$$

$$F_6 = 2 \left( \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} \right) \approx 2,833.$$

Двенадцать интервалов дают значение  $F_{12} = 2,642$ .

Поскольку значения  $F_6$  и  $F_{12}$  сильно отличаются друг от друга, в них, очевидно, имеют место погрешности. Обозначим эти погрешности  $\Delta_6$  и  $\Delta_{12}$ . Как выше было сказано, в методе трапеций погрешности примерно обратно

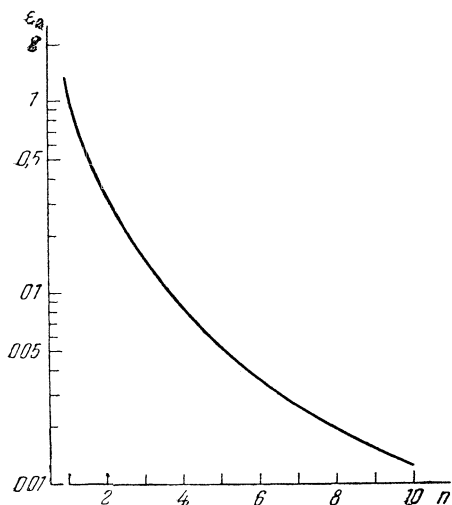


Рис. 46.

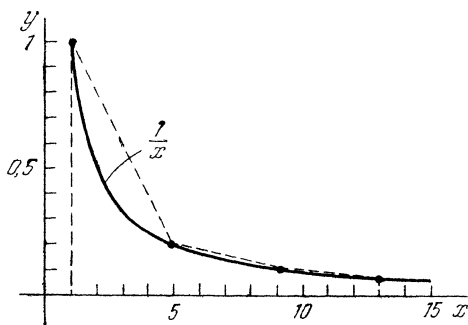


Рис. 47.

пропорциональны квадрату числа интервалов, следовательно, можно приблизительно считать, что  $\Delta_6 \approx 4\Delta_{12}$ . Имея

$$F_6 = F + \Delta_6 \approx F + 4\Delta_{12},$$

$$F_{12} = F + \Delta_{12},$$

из приближенного равенства

$$F = F_{12} - \Delta_{12} \approx F_6 - 4\Delta_{12}$$

получим

$$\Delta_{12} \approx \frac{F_6 - F_{12}}{3},$$

откуда

$$F \approx F_{12} - \frac{F_6 - F_{12}}{3}.$$

Новое значение  $F$  должно быть несколько более точным, чем  $F_{12}$ . Действительно, имеем

$$F \approx 2,642 - \frac{2,833 - 2,642}{3} \approx 2,578.$$

Погрешность вычисления уменьшилась более чем в четыре раза, т. е. используя значения  $F_6$  и  $F_{12}$ , мы получили точность, соответствующую примерно значению  $F_{24}$  без вычисления дополнительных ординат подынтегральной функции.

Для любого четного числа интервалов  $n = 2n_1$  можем применить уточняющую формулу

$$F \approx F_{2n_1} - \frac{F_{n_1} - F_{2n_1}}{3}. \quad (25)$$

Пример 2. Вычислить

$$F = \int_{0,2}^{1,2} \sin x dx.$$

Разделим интервал интегрирования на десять частей. Получим

$$F_5 = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2} \sin 0,2 + \sin 0,4 + \dots + \frac{1}{2} \sin 1,2 \right),$$

$$F_{10} = \frac{1}{10} \left( \frac{1}{2} \sin 0,2 + \sin 0,3 + \dots + \frac{1}{2} \sin 1,2 \right).$$

Имеем:

$\frac{1}{2} \sin 0,2 = 0,09933$	$\sin 0,3 = 0,29552$
$\sin 0,4 = 0,38942$	$\sin 0,5 = 0,47943$
$\sin 0,6 = 0,56464$	$\sin 0,7 = 0,64422$
$\sin 0,8 = 0,71736$	$\sin 0,9 = 0,78333$
$\sin 1,0 = 0,84147$	$\sin 1,1 = 0,89121$
$\frac{1}{2} \sin 1,2 = 0,46602$	$3,07824$
$\Sigma = 3,07824$	$\Sigma = 6,17195$

$$F_5 = \frac{1}{5} \cdot 3,07824 = 0,615648 \quad F_{10} = \frac{1}{10} \cdot 6,17195 = 0,617195$$

$$F \approx 0,617195 - \frac{0,615648 - 0,617195}{3} = 0,61771.$$

Точное значение:

$$F = \cos 0,2 - \cos 1,2 = 0,61771.$$

При том же числе ординат, что и в примере 1, мы получили значительно большую точность. Причина этого ясна из рис. 48. В пределах интегрирования наклон подынтегральной кривой во втором примере изменяется гораздо меньше, чем в первом; следовательно, производные высших порядков

во втором примере играют значительно меньшую роль, а это соответствует малым величинам коэффициентов  $A_m$  ряда (4) с большими значениями индекса  $m$ .

Для уточненной формулы погрешности начинаются с величины  $\varepsilon_4$ , что и объясняет большую точность формулы.

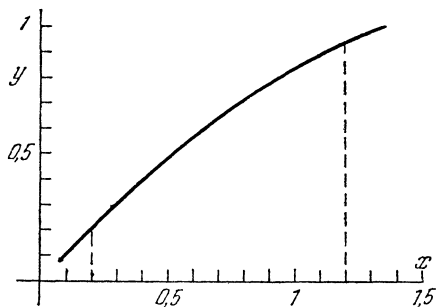


Рис. 48.

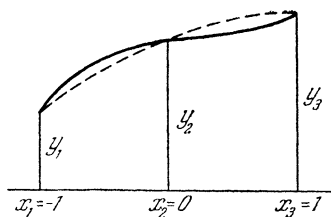


Рис. 49.

**§ 5. Метод Симпсона.** Следующим после метода трапеций является метод Симпсона, заключающийся в том, что в интервале интегрирования истинная кривая заменяется параболой, имеющей с истинной кривой три общие точки с абсциссами  $-1$ ,  $0$  и  $+1$  (см. рис. 49).

Расчетная формула метода Симпсона

$$F = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \quad (26)$$

для значений абсцисс

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = +1$$

в силу условия (10) дает

$$C_3 = C_1.$$

Таким образом, для определения коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  служат два уравнения системы (7):

$$2C_1 + C_2 = 2, \quad (27)$$

$$2C_1 = \frac{2}{3},$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{4}{3},$$

что даст

$$F = \frac{1}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3), \quad (28)$$

а при переходе от интервала  $(-1, +1)$  к интервалу  $(A, B)$

$$F = \frac{B-A}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3). \quad (29)$$

### § 6. Применение метода Симпсона в случае четного числа частей.

Если разделить интервал интегрирования на четное число частей  $n$  и для каждой пары частей применить метод Симпсона, то вычислительная формула примет следующий вид:

для интервала  $(-1, +1)$

$$F = \frac{2}{3n}(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \dots + 2y_{n-1} + 4y_n + y_{n+1}), \quad (30)$$

для интервала  $(A, B)$

$$F = \frac{B-A}{3n} (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + \dots + 2y_{n-1} + 4y_n + y_{n+1}). \quad (31)$$

Вычислив для метода Симпсона значения  $\epsilon_4$  при делении интервала интегрирования на 2, 4, 6, 8 и 10 частей, получим кривую рис. 50.

Как можно проверить непосредственным вычислением, метод Симпсона тождественен уточненному методу трапеций. Различие между ними заключается лишь в ходе вычислений, которые в уточненной формуле трапеций несколько проще, чем при применении метода Симпсона.

Пример. Вычислить

$$F = \int_1^2 e^x dx.$$

По методу трапеций имеем:

$$F_5 = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2} e^1 + e^{1,2} + e^{1,4} + \dots + \frac{1}{2} e^2 \right),$$

$$F_{10} = \frac{1}{10} \left( \frac{1}{2} e^1 + e^{1,1} + e^{1,2} + \dots + \frac{1}{2} e^2 \right);$$

по методу Симпсона

$$F_{10} = \frac{1}{30} (e^1 + 4e^{1,1} + 2e^{1,2} + 4e^{1,3} + \dots + e^2).$$

Вычисляем по методу трапеций:

$\frac{1}{2} e^1 = 1,3592$	$e^{1,1} = 3,0042$
$e^{1,2} = 3,3201$	$e^{1,3} = 3,6693$
$e^{1,4} = 4,0552$	$e^{1,5} = 4,4817$
$e^{1,6} = 4,9530$	$e^{1,7} = 5,4739$
$e^{1,8} = 6,0496$	$e^{1,9} = 6,6859$
$\frac{1}{2} e^2 = 3,6946$	23,4317
$\Sigma = 23,4317$	$\Sigma = 46,7467$

$$F_5 = \frac{1}{5} \cdot 23,4317 = 4,68634 \quad F_{10} = \frac{1}{10} \cdot 46,7467 = 4,67467$$

$$F = 4,67467 - \frac{4,68634 - 4,67467}{3} = 4,67078.$$

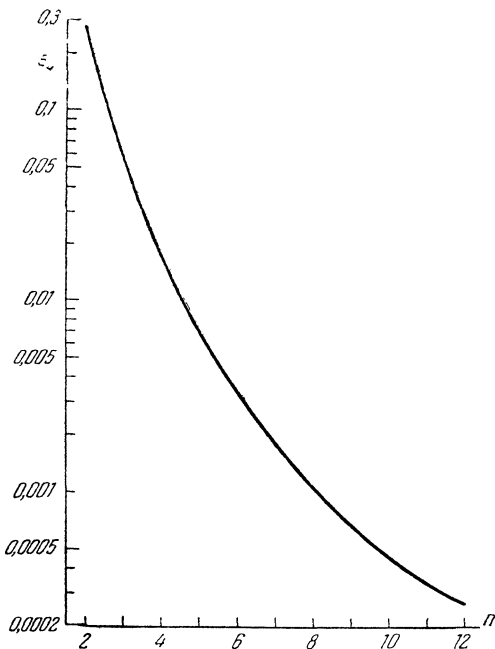


Рис. 50.



Вычисляем по методу Симпсона:

$x$	$e^x$	$e^x$	$2e^x$	$4e^x$
1	2,7183	2,7183		
1,1	3,0042			12,0168
1,2	3,3201		6,6402	
1,3	3,6693			14,6772
1,4	4,0552		8,1104	
1,5	4,4817			17,9268
1,6	4,9530		9,9060	
1,7	5,4739			21,8956
1,8	6,0496		12,0992	
1,9	6,6859			26,7436
2	7,3891	7,3891		
$\Sigma$	—	10,1074	36,7558	93,2600

$$F = \frac{10,1074 + 36,7558 + 93,2600}{30} = 4,67077.$$

Точное значение

$$F = e^2 - e = 4,6708,$$

т. е. в пределах четырех десятичных знаков полученные нами результаты совпадают с точным значением.

**§ 7. Формулы Ньютона — Котса.** При делении интервала интегрирования на  $n$  частей и замене истинной кривой алгебраической кривою  $n$ -й степени, имеющей с истинной общие точки на абсциссах деления интервала интегрирования, мы получим ряд формул Ньютона — Котса.

Для  $n=3$

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{3}, x = 1$$

и вычислительная формула с учетом условий (10) имеет вид

$$F = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_2 y_3 + C_1 y_4. \quad (32)$$

Коэффициенты  $C$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1, \\ C_1 + \frac{1}{9} C_2 &= \frac{1}{3}, \end{aligned} \quad (33)$$

дающих

$$C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = \frac{3}{4}.$$

Вычислительная формула для интервала  $(-1, +1)$  принимает вид

$$F = \frac{1}{4} (y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4), \quad (34)$$

а для интервала  $(A, B)$

$$F = \frac{B-A}{8} (y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4). \quad (35)$$

При делении интервала интегрирования на  $n=3n_1$  частей и применении к каждому трем смежным частям формулы (35), получим формулу

$$\begin{aligned} F = \frac{3(B-A)}{8n} (y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 2y_4 + 3y_5 + 3y_6 + 2y_7 + \dots \\ \dots + 2y_{n-2} + 3y_{n-1} + 3y_n + y_{n+1}). \end{aligned} \quad (36)$$

Значения погрешностей  $\varepsilon_k$ , получаемых при использовании этой формулы Ньютона — Котса для  $n=3, 6$  и  $9$ , даны на рис. 51.

Поскольку формула Ньютона — Котса для деления интервала интегрирования на три части вследствие условий симметрии имеет, так же как и формула Симпсона, лишь два различных коэффициента  $C$ , точность ее не превышает точности формулы Симпсона; между тем она требует деления интервала интегрирования на число частей, кратное трем, что менее удобно, чем деление на четное число частей. Поэтому в практических вычислениях предпочитают применять формулу Симпсона (которую мы представили также и в виде уточненной формулы трапеций).

При делении интервала интегрирования на четыре, пять, шесть и т. д. частей получают дальнейшие формулы Ньютона — Котса, имеющие следующий вид:

при  $n=4$

$$F = \frac{B-A}{90} (7y_1 + 32y_2 + 12y_3 + 32y_4 + 7y_5); \quad (37)$$

при  $n=5$

$$F = \frac{B-A}{288} (19y_1 + 75y_2 + 50y_3 + 50y_4 + 75y_5 + 19y_6); \quad (38)$$

при  $n=6$

$$F = \frac{B-A}{840} (41y_1 + 216y_2 + 27y_3 + 272y_4 + 27y_5 + 216y_6 + 41y_7) \quad (39)$$

и т. д.

На рис. 52 даны значения погрешностей для методов трапеций, Симпсона и Ньютона — Котса.

Как видно из приведенных данных, уменьшение погрешностей при делении интервала интегрирования на все большее число частей происходит довольно медленно, сложность же вычислений в результате появления различных коэффициентов увеличивается. Поэтому формулам Ньютона — Котса следует предпочесть формулу Симпсона с несколько большим числом частей деления интервала интегрирования, как наиболее простую.

Мы рассмотрели различные формулы, основанные на делении интервала интегрирования на некоторое число равных частей с учетом ординат, соответствующих абсциссам границ частей. Число ординат на единицу превышало число частей.

Теперь рассмотрим аналогичные формулы, также основанные на делении интервала интегрирования на равные части, но с учетом ординат, взятых посередине участков.

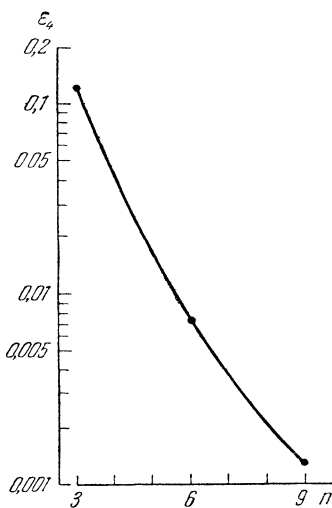


Рис. 51.

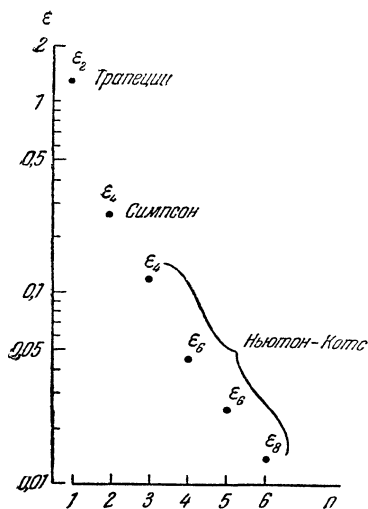


Рис. 52.

**§ 8. Метод прямоугольников.** При использовании ординат, находящихся посредине частей интервала интегрирования, основной будет формула прямоугольников.

Рассматривая весь интервал как одно целое и заменяя истинную подынтегральную кривую горизонтальной прямой, получим

$$x_1 = 0, F = 2y_1. \quad (40)$$

Деля интервал на две части, для метода прямоугольников получим

$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, F = y_1 + y_2, \quad (41)$$

а при делении на  $n$  частей

$$x_1 = -1 + \frac{1}{n}, x_2 = -1 + \frac{3}{n}, \dots \\ \dots, x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$F = \frac{2}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \text{ или}$$

$$F = \frac{B-A}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (42)$$

Величины погрешностей  $\epsilon_2$  приведены на рис. 53. Сравнивая их с соответствующими (т. е. полученными для одинакового числа ординат) значениями  $\epsilon_2$ , взятыми из рис. 46, мы видим,

что погрешности способа прямоугольников раза в четыре меньше, чем погрешности способа трапеций.

**§ 9. Метод средних ординат.** Деля интервал интегрирования на две части, получим формулу

$$F = y_1 + y_2, \quad (43)$$

т. е. такую же, как и (41), и, следовательно, интерес представляют лишь случаи деления интервала интегрирования на число частей, большее чем две.

При делении интервала на три части и замене истинной кривой параболою (как в методе Симпсона), получим

$$x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{3}, \quad (44)$$

$$F = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_1 y_3.$$

Для нахождения значений  $C$  имеем:

$$2C_1 + C_2 = 2,$$

$$\frac{8}{9} C_1 = \frac{2}{3},$$

откуда

$$C_1 = \frac{3}{4}, C_2 = \frac{2}{4},$$

$$F = \frac{1}{4}(3y_1 + 2y_2 + 3y_3). \quad (45)$$

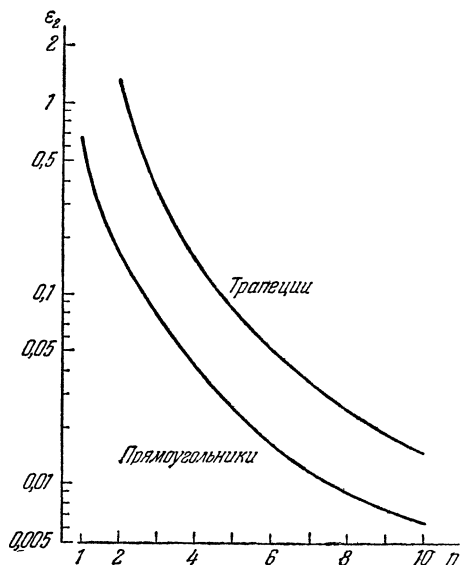


Рис. 53.

При делении интервала интегрирования на  $n = 3n_1$  частей и повторном применении формулы (45), получим для интервала  $(-1, +1)$

$$F = \frac{3}{4n} (3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 2y_5 + 3y_6 + \dots + 3y_n) = \\ = \frac{3}{4n} [3(y_1 + y_2 + \dots + y_n) - (y_2 + y_5 + \dots + y_{n-1})], \quad (46)$$

а для интервала  $(A, B)$

$$F = \frac{3(B-A)}{8n} [3(y_1 + y_2 + \dots + y_n) - (y_2 + y_5 + \dots + y_{n-1})]. \quad (47)$$

Формула (47) по точности примерно соответствует формуле Симпсона. Мы можем убедиться в этом и на уже рассматривавшемся ранее примере, взяв по 12 ординат.

Пример.

$$F = \int_1^{13} \frac{dx}{x} \quad (F = \ln 13 = 2,56495).$$

По Симпсону для 12 частей интервала имеем:

$$F = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \dots + 2 \cdot \frac{1}{11} + 4 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{13} \right) = 2,57778.$$

По формуле (47) метода средних ординат имеем:

$$F = \frac{3}{8} \left[ 3 \left( \frac{1}{1,5} + \frac{1}{2,5} + \frac{1}{3,5} + \dots + \frac{1}{12,5} \right) - \left( \frac{1}{2,5} + \frac{1}{5,5} + \frac{1}{8,5} + \frac{1}{11,5} \right) \right] = 2,54989.$$

Сравним результаты:

		Разница
Формула Симпсона	2,57778	
		+ 1283
Точное значение	2,56495	
		— 1506.
Формула (47)	2,54989	

Погрешности примерно одного порядка. Поэтому при оперировании с графически заданными подынтегральными кривыми можно пользоваться более простой для вычисления формулой (47), а при нахождении величины ординат из таблиц выбор метода будет зависеть от системы табличных значений аргумента; предпочтение нужно отдать тому приему, который не потребует интерполирования.

Если, применяя метод средних ординат, делить интервал интегрирования на большее количество частей, то для интервала  $(A, B)$  получим следующие формулы: при  $n = 4$

$$F = \frac{B-A}{48} (13y_1 + 11y_2 + 11y_3 + 13y_4); \quad (48)$$

при  $n = 5$

$$F = \frac{B-A}{1152} (275y_1 + 100y_2 + 402y_3 + 100y_4 + 275y_5); \quad (49)$$

при  $n = 6$

$$F = \frac{B-A}{3840} (741y_1 + 417y_2 + 762y_3 + 762y_4 + 417y_5 + 741y_6). \quad (50)$$

Значения погрешностей метода средних ординат даны на рис. 54. При числе интервалов порядка шести формула метода средних ординат и формула Ньютона — Котса дают примерно одинаковые погрешности.

Перейдем теперь к методу Чебышева, основанному на использовании одинаковых коэффициентов  $C$  равенства (2) для всех ординат.

**§ 10. Метод Чебышева.** Если все коэффициенты  $C$  равны между собою, то величина их равна  $\frac{2}{n}$ , где  $n$  — число используемых ординат. Учитывая условия симметрии (9), мы можем переписать уравнения (7) в виде, содержащем лишь отрицательные значения используемых абсцисс:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_{\frac{n}{2}}^3 &= \frac{n}{6}, \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_{\frac{n}{2}}^4 &= \frac{n}{10}, \\ x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + \dots + x_{\frac{n}{2}}^6 &= \frac{n}{14}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (51)$$

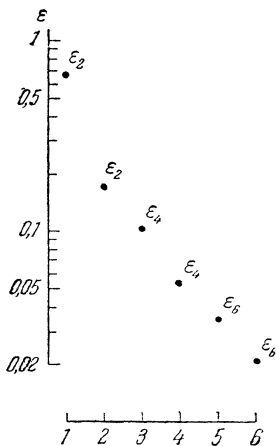


Рис. 54.

При нечетном  $n$  к ним кроме положительных значений добавляется еще и значение  $x_{\frac{n+1}{2}} = 0$ .

Обозначим  $x_k^3 = u_k$ , тогда вместо системы (51) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{\frac{n}{2}} &= \frac{n}{6}, \\ u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \dots + u_{\frac{n}{2}}^3 &= \frac{n}{10}, \\ u_1^5 + u_2^5 + u_3^5 + \dots + u_{\frac{n}{2}}^5 &= \frac{n}{14}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (52)$$

в которой мы можем удовлетворить столько уравнениям, сколько значений  $u$  будем определять.

Для решения системы (52) обозначим

$$\frac{n}{6} = k_1, \quad \frac{n}{10} = k_2, \quad \frac{n}{14} = k_3, \quad \dots, \quad \frac{n}{4m+2} = k_m, \quad \dots \quad (53)$$

и рассмотрим, как определять корни системы

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{\frac{n}{2}} &= k_1, \\ u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \dots + u_{\frac{n}{2}}^3 &= k_2, \\ u_1^5 + u_2^5 + u_3^5 + \dots + u_{\frac{n}{2}}^5 &= k_3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (54)$$

Пусть в системе (54) имеется  $s$  строк, и мы хотим определить  $s$  ее корней. Покажем, что определение их сведется к нахождению корней уравнения  $s$ -й степени

$$u^s + A_1 u^{s-1} + A_2 u^{s-2} + \dots + A_{s-1} u + A_s = 0, \quad (55)$$

коэффициенты которого нетрудно найти.



т. е.

$$u^2 - \frac{2}{3}u + \frac{1}{45} = 0. \quad (66)$$

Это уравнение дает

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,794654, & x_3 &= +0,187592, \\ x_2 &= -0,187592, & x_4 &= +0,794654. \end{aligned} \quad (67)$$

Для более высоких значений  $n$  получаем:

$$\begin{aligned} \text{для } n=5 & \quad u^2 - \frac{5}{6}u + \frac{7}{72} = 0; \\ \text{для } n=6 & \quad u^3 - u^2 + \frac{1}{5}u - \frac{1}{105} = 0; \\ \text{для } n=7 & \quad u^3 - \frac{7}{6}u^2 + \frac{119}{360}u - \frac{149}{1480} = 0; \\ \text{для } n=9 & \quad u^4 - \frac{3}{2}u^3 + \frac{27}{40}u^2 - \frac{57}{560}u + \frac{53}{22400} = 0. \end{aligned} \quad (68)$$

Для  $n=8$  и  $n>9$  уравнений не рассматриваем, так как они имеют отрицательные корни, приводящие к мнимым значениям  $x$ .

Решая уравнения (68), мы получим все значения абсцисс, для которых вычисляются ординаты по способу Чебышева. Приводим таблицу результатов:

$n=2$	$x_{1,2} = \mp 0,577350$	$n=7$	$x_4 = 0$
$n=3$	$x_2 = 0$		$x_{1,7} = \mp 0,883862$
	$x_{1,3} = \mp 0,707107$		$x_{2,6} = \mp 0,529657$
$n=4$	$x_{1,4} = \mp 0,794654$		$x_{3,5} = \mp 0,323912$
	$x_{2,3} = \mp 0,187592$	$n=9$	$x_5 = 0$
$n=5$	$x_3 = 0$		$x_{1,9} = \mp 0,911589$
	$x_{1,5} = \mp 0,832498$		$x_{2,8} = \mp 0,601019$
	$x_{2,4} = \mp 0,374541$		$x_{3,7} = \mp 0,528762$
$n=6$	$x_{1,6} = \mp 0,866247$		$x_{4,6} = \mp 0,167906$
	$x_{2,5} = \mp 0,422519$		
	$x_{3,4} = \mp 0,266635$		

Для интервала интегрирования  $(A, B)$  формулы Чебышева принимают вид

$$F = \int_A^B f(\xi) d\xi = \frac{B-A}{n} [f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)], \quad (69)$$

где

$$\xi_i = \frac{B+A}{2} + \frac{B-A}{2} x_i. \quad (70)$$

Исследуем точность интегрирования по методу Чебышева. Имея для интервала  $(-1, +1)$  сумму

$$S_{2m} = \frac{2}{n} (x_1^{2m} + x_2^{2m} + \dots + x_n^{2m}) = \frac{4}{n} (u_1^m + u_2^m + \dots + u_n^m), \quad (71)$$

получаем выражение для погрешности

$$\epsilon_{2m} = \frac{4}{n} (u_1^m + u_2^m + \dots + u_n^m) - \frac{2}{2m+1}. \quad (72)$$

Погрешности  $\epsilon$  для значений  $n=2, 3, 4, 5$  даны на рис. 55.

Если сравним рис. 55 с данными способа средних ординат (рис. 54), то увидим соответствие погрешностей формулы Чебышева для  $n$  ординат и погрешностей метода средних ординат для  $n+1$  ординаты. Рассмотрим пример, подтверждающий это.

Пример. Вычислить

$$F = \int_0^3 e^x dx \quad (F = e^3 - e^0 = 19,0855).$$

По методу Чебышева при пяти ординатах имеем:

$$F = \frac{3}{5} [f(0,25125) + f(0,93819) + f(1,5) + f(2,06181) + f(2,74875)] = \\ = 0,6 (1,2856 + 2,5554 + 4,4817 + 7,8602 + 15,6231) = 19,0836.$$

По методу средних ординат при шести ординатах имеем:

$$F = \frac{1}{1280} \{ 741 [f(0,25) + f(2,75)] + 417 [f(0,75) + f(2,25)] + \\ + 762 [f(1,25) + f(1,75)] \} = \frac{1}{1280} [741 (1,2840 + 15,6426) + \\ + 417 (2,1170 + 9,4877) + 762 (3,4903 + 5,7546)] = 19,0831.$$

Сравним результаты:

		Разница
Метод Чебышева	19,0836	19
Точное значение	19,0855	24
Метод средних ординат	19,0831	

Поскольку, применяя метод Чебышева, необходимо находить значения подынтегральной функции для многозначных значений аргумента и при пользовании таблицами это приводит к сложной интерполяции, утомляющей вычислителя и отнимающей у него много времени, применение метода Чебышева件лезно лишь для вычисления площадей фигур, заданных графически. Зато в этом случае способ Чебышева является наиболее простым и удобным в применении.

**§ 11. Метод Гаусса.** Из графиков погрешностей мы могли видеть, для многочленов какой степени рассмотренные методы приближенного интегрирования дают точное решение.

Так, для формулы Симпсона погрешность начинается лишь с  $m=2$ , т. е. ее создают лишь члены ряда (4) со степенью четвертой и выше; если же подынтегральная кривая — третьей степени, то формула Симпсона дает точное решение.

Формулы Ньютона—Котса при делении интервала интегрирования на  $n$  частей дают верное решение для подынтегральных кривых степени не выше  $n+1$  при четном  $n$  и не выше  $n$  при нечетном  $n$ .

Формулы средних ординат при делении интервала интегрирования на  $n$  частей дают точное решение для кривых степени не выше  $n$  при нечетном  $n$  и не выше  $n-1$  при четном  $n$ .

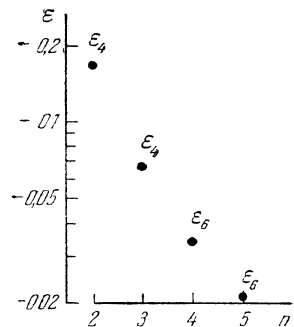


Рис. 55.



Формулы Чебышева для  $n$  ординат дают точное решение для кривых степени не выше  $n+1$  для четных  $n$  и не выше  $n$  для нечетных  $n$ .

Во всех этих формулах мы считаем заданными либо абсциссы, либо величины коэффициентов при ординатах; если же определять значения тех и других из условия удовлетворения подынтегральной кривой наиболее высокой степени, то мы придем к формулам Гаусса — наиболее точным из всех формул приближенного интегрирования.

Учитывая симметрию абсцисс и равенство соответствующих коэффициентов, для получения формул Гаусса нужно решить систему уравнений

$$C_1 + C_2 + \dots + C_{\frac{n}{2}} = 1,$$

$$C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + \dots + C_{\frac{n}{2}} x_{\frac{n}{2}}^2 = \frac{1}{3}, \quad (73)$$

$$C_1 x_1^4 + C_2 x_2^4 + \dots + C_{\frac{n}{2}} x_{\frac{n}{2}}^4 = \frac{1}{5},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_1 x_1^{2(n-1)} + C_2 x_2^{2(n-1)} + \dots + C_{\frac{n}{2}} x_{\frac{n}{2}}^{2(n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

при  $n$  четном и

$$2(C_1 + C_2 + \dots + C_{\frac{n-1}{2}}) + C_{\frac{n+1}{2}} = 2,$$

$$C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + \dots + C_{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n-1}{2}}^2 = \frac{1}{3},$$

$$C_1 x_1^4 + C_2 x_2^4 + \dots + C_{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n-1}{2}}^4 = \frac{1}{5}, \quad (74)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_1 x_1^{2(n-1)} + C_2 x_2^{2(n-1)} + \dots + C_{\frac{n-1}{2}} x_{\frac{n-1}{2}}^{2(n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

при  $n$  нечетном, когда  $x_{\frac{n+1}{2}} = 0$ .

Обозначим, как и раньше,  $x_k^2 = u_k$ , тогда системы уравнений (73) и (74) примут более простой вид:

$$C_1 + C_2 + \dots + C_{\frac{n}{2}} = 1,$$

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$C_1 u_1^2 + C_2 u_2^2 + \dots + C_{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}}^2 = \frac{1}{5}, \quad (75)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_1 u_1^{n-1} + C_2 u_2^{n-1} + \dots + C_{\frac{n}{2}} u_{\frac{n}{2}}^{n-1} = \frac{1}{2n-1}$$

при  $n$  четном и

$$\begin{aligned} 2(C_1 + C_2 + \dots + C_{\frac{n-1}{2}}) + C_{\frac{n+1}{2}} &= 2, \\ C_1 u_1 + C_3 u_2 + \dots + C_{\frac{n-1}{2}} u_{\frac{n-1}{2}} &= \frac{1}{3}, \\ C_1 u_1^2 + C_3 u_2^2 + \dots + C_{\frac{n-1}{2}} u_{\frac{n-1}{2}}^2 &= \frac{1}{5}, \\ &\dots \dots \dots \\ C_1 u_1^{n-1} + C_3 u_2^{n-1} + \dots + C_{\frac{n-1}{2}} u_{\frac{n-1}{2}}^{n-1} &= \frac{1}{2n-1} \end{aligned} \quad (76)$$

при  $n$  нечетном. Решение этих систем незатруднительно и производится составлением уравнения вида

$$u^{\frac{n}{2}} + A_1 u^{\frac{n}{2}-1} + \dots + A_{\frac{n}{2}-1} u + A_{\frac{n}{2}} = 0 \quad (77)$$

при  $n$  четном или вида

$$u^{\frac{n-1}{2}} + A_1 u^{\frac{n-1}{2}-1} + \dots + A_{\frac{n-1}{2}-1} u + A_{\frac{n-1}{2}} = 0 \quad (78)$$

при  $n$  нечетном. Корни этих уравнений дают искомые значения абсцисс, а найдя абсциссы, нетрудно получить значения коэффициентов  $C$  из решения системы линейных уравнений (75) или (76).

В качестве примера покажем решение задачи для случая  $n=4$ ; из этого решения будет понятно, как поступать при других значениях  $n$ .

При  $n=4$  имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & C_1 + C_2 = 1, \\ \text{II} \quad & C_1 u_1 + C_2 u_2 = \frac{1}{3}, \\ \text{III} \quad & C_1 u_1^2 + C_2 u_2^2 = \frac{1}{5}, \\ \text{IV} \quad & C_1 u_1^3 + C_2 u_2^3 = \frac{1}{7}. \end{aligned} \quad (79)$$

Для решения этой системы нужно составить уравнение

$$u^2 + A_1 u + A_2 = 0, \quad (80)$$

корни которого являлись бы корнями системы (79), т. е. для которого имели бы место равенства

$$\begin{aligned} u_1^2 + A_1 u_1 + A_2 &= 0, \\ u_2^2 + A_1 u_2 + A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (81)$$

Для получения уравнения (80) составим линейные комбинации из строк системы (79):

$$\begin{aligned} \text{IV} + A_1 \cdot (\text{III}) + A_2 \cdot (\text{II}) \\ \text{III} + A_1 \cdot (\text{II}) + A_2 \cdot (\text{I}). \end{aligned} \quad (82)$$

Получим:

$$\begin{aligned} C_1 u_1 (u_1^2 + A_1 u_1 + A_2) + C_2 u_2 (u_2^2 + A_1 u_2 + A_2) &= \\ &= \frac{1}{7} + \frac{1}{5} A_1 + \frac{1}{3} A_2. \end{aligned} \quad (83)$$

В этих уравнениях трехчлены, стоящие в скобках, согласно нашему предварительному условию равны нулю. Это дает нам систему из двух уравнений первой степени для отыскания коэффициентов  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{7} + \frac{1}{5} A_1 + \frac{1}{3} A_2 &= 0, \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{3} A_1 + A_2 &= 0.\end{aligned}\tag{84}$$

Решая ее, получаем:

$$A_1 = -\frac{6}{7}, \quad A_2 = \frac{3}{35}.$$

Итак, уравнение, служащее для определения искомых значений  $u_1$  и  $u_2$ , есть

$$u^2 - \frac{6}{7} u + \frac{3}{35} = 0.\tag{85}$$

Корни его с точностью до шестого знака равны:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 0,741555, \\ u_2 &= \frac{3}{7} - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 0,115587.\end{aligned}\tag{86}$$

Для нахождения значений  $C_1$  и  $C_2$  остается решить систему из двух уравнений

$$\begin{aligned}C_1 + C_2 &= 1, \\ \left(\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) C_1 + \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}\right) C_2 &= \frac{1}{3},\end{aligned}\tag{87}$$

дающую следующие значения коэффициентов:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}\right) \approx 0,347855, \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{6}}\right) \approx 0,652145.\end{aligned}\tag{88}$$

Вычислив квадратные корни из полученных значений  $u_1$  и  $u_2$ , мы получаем искомые абсциссы

$$x_{1,4} = \mp 0,861136, \quad x_{2,3} = \mp 0,339981.$$

Таким образом, по Гауссу для четырех ординат имеем:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} f(x) dx &= 0,347855 [f(-0,861136) + f(+0,861136)] + \\ &+ 0,652145 [f(-0,339981) + f(+0,339981)].\end{aligned}\tag{89}$$

Аналогичным путем с большою точностью были получены для различных значений  $n$  значения абсцисс и коэффициентов. Приводим таблицу их, заимствовав ее из „Лекций о приближенных вычислениях“ А. Н. Крылова. Таблица пересоставлена для интервала  $(-1, +1)$  [у А. Н. Крылова она дана для интервала  $(0, +1)$ ].

Число ординат	Абсциссы	Коэффициенты
$n=1$	$x_1=0$	$C_1=2$
$n=2$	$x_{1,2}=\mp 0,57735026$	$C_{1,2}=1$
$n=3$	$x_2=0$	$C_2=\frac{8}{9}$
	$x_{1,3}=\mp 0,77459666$	$C_{1,3}=\frac{5}{9}$
$n=4$	$x_{1,4}=\mp 0,86113632$	$C_{1,4}=0,34785484$
	$x_{2,3}=\mp 0,33998104$	$C_{2,3}=0,65214516$
$n=5$	$x_3=0$	$C_3=0,56888888$
	$x_{1,5}=\mp 0,90617984$	$C_{1,5}=0,23692688$
	$x_{2,4}=\mp 0,53846932$	$C_{2,4}=0,47862866$
$n=6$	$x_{1,6}=\mp 0,93246952$	$C_{1,6}=0,17132450$
	$x_{2,5}=\mp 0,66120938$	$C_{2,5}=0,36076158$
	$x_{3,4}=\mp 0,23861928$	$C_{3,4}=0,46791394$
$n=7$	$x_4=0$	$C_4=0,41795918$
	$x_{1,7}=\mp 0,94910792$	$C_{1,7}=0,12948496$
	$x_{2,6}=\mp 0,74153118$	$C_{2,6}=0,27970538$
	$x_{3,5}=\mp 0,40584516$	$C_{3,5}=0,38183005$
$n=8$	$x_{1,8}=\mp 0,96028986$	$C_{1,8}=0,10122854$
	$x_{2,7}=\mp 0,79666648$	$C_{2,7}=0,22238104$
	$x_{3,6}=\mp 0,52553242$	$C_{3,6}=0,31370664$
	$x_{4,5}=\mp 0,18343464$	$C_{4,5}=0,36268378$

Все формулы Гаусса дают точное решение, если подынтегральная кривая есть кривая алгебраическая, степени не выше  $2n-1$ .

Построим график погрешностей  $\epsilon$  для некоторых формул Гаусса. Имеем:

$$\epsilon_{2m} = 2(C_1 u_1^m + C_2 u_2^m + \dots + C_n u_n^m) - \frac{2}{2m+1}. \quad (90)$$

Для  $n=1$  получим точку способа прямоугольников; для  $n=2$  — точку способа Чебышева для двух ординат. Дальнейшие точки самостоятельные (см. рис. 56). Из рисунка видно, как быстро возрастает точность с повышением числа ординат — точки резко снижаются.

Однако, несмотря на весьма высокую точность, применение формул Гаусса приводит к сложным вычислениям; поэтому пользоваться ими стоит лишь тогда, когда во что бы то ни стало необходимо обойтись минимальным количеством ординат, вследствие трудности определения значений подынтегральной функции. Подобные случаи, вообще говоря, довольно редки.

При вычислении по методу Гаусса не для интервала  $(-1, +1)$ , а для интервала  $(A, B)$ , вместо вычислительной формулы

$$F = \int_{-1}^1 f(x) dx = C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n), \quad (91)$$

применяется формула

$$F = \int_A^B f(\xi) d\xi = \frac{B-A}{2} [C_1 f(\xi_1) + C_2 f(\xi_2) + \dots + C_n f(\xi_n)], \quad (92)$$

где

$$\xi_i = \frac{B+A}{2} + \frac{B-A}{2} x_i \quad (93)$$

аналогично формуле (70) метода Чебышева.

Рассмотрим несколько примеров, применяя все основные методы приближенного интегрирования, основанные на использовании отдельных ординат подынтегральной кривой. В примерах мы подробно остановимся на технике вычислений и оценим примененные методы с точки зрения простоты и удобства вычислений.

**§ 12. Примеры.** Возьмем пример, разобранный А. Н. Крыловым в „Лекциях о приближенных вычислениях“, но рассмотрим его с несколько иных позиций.

Во-первых, в настоящее время арифмометр стал настолько широко распространенным вычислительным инструментом, что малоцелесообразно проводить вычисления по логарифмической схеме, часто требующей применения логарифмов сумм — таблиц, редко у кого имеющих, — или связанной с постоянными переходами от чисел к логарифмам и обратно.

Во-вторых, в цитируемом труде рассмотрены 4 способа: трапеций по 10 ординатам, Симпсона также по 10 ординатам, Чебышева по 5 ординатам и Гаусса также по 5 ординатам.

Метод трапеций, взятый в его общепринятой форме, конечно, оказался недостаточно точным. Между тем в уточненной форме, когда он по точности равен методу Симпсона, метод трапеций имеет преимущество простоты вычислений.

После метода Симпсона нами добавлен метод средних ординат для трех строенных частей, т. е. по 9 ординатам.

Метод Чебышева дан нами для углов, выраженных не в градусах, а в радианах (значения тригонометрических функций для аргумента, изменяющегося в пределах от 0 до 10 радиан через 0,001 радиан, даны в „Пятизначных математических таблицах“ Б. И. Сегала и К. А. Семендяева).

Метод Гаусса дан не для пяти, а для четырех ординат, так как и этого количества ординат более чем достаточно — настолько сильны формулы Гаусса.

Формулы Ньютона — Котса, а также более сложные из формул метода средних ординат не сравнивались, так как они представляют больше теоретический, чем практический интерес.

**Пример 1.** Вычислить

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \quad \left( F = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \right).$$

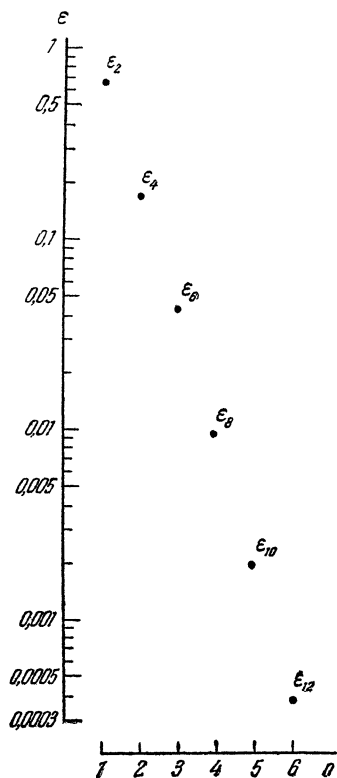


Рис. 56.

Сперва применим метод трапеций в его уточненной форме, используя формулы (21) и (25) для пяти и десяти ординат. Имеем:

$$\begin{array}{l}
 n=5, \\
 \frac{B-A}{5} = \frac{\pi}{10} = 0,314159
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \frac{1}{2} \sin 0^\circ = 0 \\
 \sin 18^\circ = 0,30902 \\
 \sin 36^\circ = 0,58779 \\
 \sin 54^\circ = 0,80902 \\
 \sin 72^\circ = 0,95106 \\
 \frac{1}{2} \sin 90^\circ = 0,50000 \\
 \hline
 \Sigma = 3,15689 \\
 F_5 = 3,15689 \cdot 0,314159 = 0,991765
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{l}
 n=10, \\
 \frac{B-A}{5} = \frac{\pi}{20} = 0,157080
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \sin 9^\circ = 0,15643 \\
 \sin 27^\circ = 0,45399 \\
 \sin 45^\circ = 0,70711 \\
 \sin 63^\circ = 0,89101 \\
 \sin 81^\circ = 0,98769 \\
 3,15689 \\
 \hline
 \Sigma = 6,35312 \\
 F_{10} = 6,35312 \cdot 0,157080 = 0,997948
 \end{array}$$
  

$$F = F_{10} - \frac{F_5 - F_{10}}{3} = 0,997948 - \frac{0,991765 - 0,997948}{3} \approx 1,00001.$$

При суммировании ординат во второй части подсчета к ним добавляется ранее полученная сумма 3,15689. Полученный результат, принимая во внимание всевозможные округления, вполне точен.

Перейдем к методу Симпсона, используя формулу (31) и взяв 10 частей интервала интегрирования. Имеем:

$$\frac{B-A}{3n} = \frac{\pi}{60} = 0,0523598,$$

$x$	$\sin x$	$\sin x$	$2 \sin x$	$4 \sin x$
$0^\circ$	0	0		
$9^\circ$	0,15643			0,62572
$18^\circ$	0,30902		0,61804	
$27^\circ$	0,45399			1,81596
$36^\circ$	0,58779		1,17558	
$45^\circ$	0,70711			2,82844
$54^\circ$	0,80902		1,61804	
$63^\circ$	0,89101			3,56404
$72^\circ$	0,95106		1,90212	
$81^\circ$	0,98769			3,95076
$90^\circ$	1,00000	1,00000		
$\Sigma$	—	1,00000	5,31378	12,78492

$$F = 0,0523598 (1,00000 + 5,31378 + 12,78492) = 1,00000.$$

Во избежание потери точности, здесь (так же, как и в методе трапеций) во всех промежуточных действиях брался лишний знак, отброшенный с округлением при получении результата (было 1,000004).

Применяя метод средних ординат, делим интервал интегрирования на три строенных части и вычисление ведем по формуле (47) для девяти ординат. Имеем:

$$\frac{3(B-A)}{8n} = \frac{3 \cdot \frac{\pi}{2}}{72} = \frac{\pi}{48} = 0,0654498,$$

$\sin 5^\circ$	0,08716	
$\sin 15^\circ$	0,25882	0,25882
$\sin 25^\circ$	0,42262	
$\sin 35^\circ$	0,57358	
$\sin 45^\circ$	0,70711	0,70711
$\sin 55^\circ$	0,81915	
$\sin 65^\circ$	0,90631	
$\sin 75^\circ$	0,96593	0,96593
$\sin 85^\circ$	0,99619	
$\Sigma$	5,73687	1,93186

$$F = 0,0654498 (3 \cdot 5,73687 - 1,93186) \approx 0,99999.$$

Применяя метод Чебышева для пяти ординат, будем вести вычисления по формулам (69) и (70). Имеем:

$$\frac{B-A}{n} = \frac{\pi}{10} = 0,314159, \quad \frac{B+A}{2} = \frac{B-A}{2} = \frac{\pi}{4} = 0,785398,$$

$$\xi_i = 0,785398 + 0,785398 x_i = 0,785398 (1 + x_i),$$

$\xi_1 = 0,785398 \cdot 0,167502 = 0,13156,$	$\sin 0,13156 = 0,13118$
$\xi_2 = 0,785398 \cdot 0,625459 = 0,49123,$	$\sin 0,49123 = 0,47171$
$\xi_3 = 0,785398 \cdot 1,0 = 0,78540,$	$\sin 0,78540 = 0,70711$
$\xi_4 = 0,785398 \cdot 1,374541 = 1,07956,$	$\sin 1,07956 = 0,88175$
$\xi_5 = 0,785398 \cdot 1,832498 = 1,43924,$	$\sin 1,43924 = 0,99136$

$$\Sigma = 3,18311,$$

$$F = 3,18311 \cdot 0,314159 = 1,00000.$$

При вычислении значений  $\xi$  пришлось ограничиться пятью десятичными знаками, так как шестой было бы затруднительно учесть при интерполятивном нахождении значений синусов.

Применяя метод Гаусса для четырех ординат, пользуемся формулами (92) и (93). Имеем:

$$\frac{B-A}{2} = 0,785398, \quad \xi_i = 0,785398 (1 + x_i),$$

$$\xi_1 = 0,785398 \cdot 0,138864 = 0,10906,$$

$$\xi_2 = 0,785398 \cdot 0,660019 = 0,51838,$$

$$\xi_3 = 0,785398 \cdot 1,339981 = 1,05242,$$

$$\xi_4 = 0,785398 \cdot 1,861136 = 1,46173,$$

$$C_1 \sin 0,10906 = 0,10884 \cdot 0,347855 = 0,03786$$

$$C_2 \sin 0,51838 = 0,49547 \cdot 0,652145 = 0,32312$$

$$C_3 \sin 1,05242 = 0,86863 \cdot 0,652145 = 0,56647$$

$$C_4 \sin 1,46173 = 0,99406 \cdot 0,347855 = 0,34579$$

$$\Sigma = 1,27324$$

$$F = 1,27324 \cdot 0,785398 = 1,00000.$$

Нами рассмотрены пять вариантов вычислительного процесса, эквивалентных по достигнутой точности. По простоте и краткости вычислений наиболее эффективным был метод средних ординат, затем уточненный метод трапеций, метод Симпсона, формула Чебышева и, наконец, формула Гаусса.

Невыгодность применения формулы Гаусса объясняется здесь элементарностью подынтегральной функции, значения которой в первых трех методах было чрезвычайно просто находить по таблицам, тогда как интерполяция для использования формул Чебышева и Гаусса производить было гораздо труднее. Теперь возьмем другой пример и решим его теми двумя способами, из которых один только что оказался самым простым, а другой самым сложным — методом средних ординат и методом Гаусса.

Пример 2. Вычислим

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0,61283 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

— длину дуги четверти эллипса, имеющего большую полуось, равную 1,00000, а малую, равную

$$\sqrt{1 - 0,61283} = 0,62222.$$

По методу Гаусса в соответствии с формулами (92) и (93) имеем:

$$A = 0, \quad B = \frac{\pi}{2} = 1,570796,$$

$$\varphi_i = 0,785398 (1 + x_i).$$

Дальнейшие вычисления располагаем в табл. 34.

Т а б л и ц а 34

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$x_i$	$\varphi_i$	$\sin \varphi_i$	$\sin^2 \varphi_i$	$0,61283 \cdot (IV)$	$1,0 - (V)$	$\sqrt{(VI)}$	$C_i$	$C_i \cdot (VII)$
0,138864	0,10906	0,10884	0,01185	0,00726	0,99274	0,99636	0,347855	0,346589
0,660019	0,51838	0,49547	0,24549	0,15044	0,84956	0,92172	0,652145	0,601095
1,339981	1,05242	0,86863	0,75452	0,46239	0,53761	0,73322	0,652145	0,478166
1,861136	1,46173	0,99406	0,98815	0,60557	0,39443	0,62804	0,347855	0,218467
$s = 1,644317 \cdot 0,785398 = 1,29144$								$\Sigma \quad 1,644317$

По методу средних ординат, пользуясь формулой (47), получим (для девяти ординат):

$$\frac{3(B-A)}{8n} = \frac{\pi}{48} = 0,0654498.$$

Дальнейшие вычисления располагаем в табл. 35.

Точное значение, приводимое А. Н. Крыловым\*), равно:

$$s = 1,29143,$$

так что оба полученных нами решения эквивалентны по точности. Однако в данном примере способ средних ординат не имеет никаких заметных пре-

\*) Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1954 стр. 90.



имуществ перед способом Гаусса, поскольку вычисление корня не менее трудоемко, чем интерполирование четырех значений синуса.

Если бы вычисление значений подынтегральной функции было еще немного труднее, то применять для вычисления следовало бы лишь способ Гаусса.

Т а б л и ц а 35

I	II	III	IV	V	VI	VII
$\varphi_i$	$\sin \varphi_i$	$\sin^2 \varphi_i$	0,61283 · (III)	1,0 — (IV)	$\sqrt{(\text{VI})}$	$\sqrt{(\text{VI})}$
5°	0,08716	0,00760	0,00466	0,99534	0,99767	
15°	0,25882	0,06698	0,04105	0,95895	0,97926	0,97926
25°	0,42262	0,17860	0,10945	0,89055	0,94369	
35°	0,57358	0,32899	0,20161	0,79839	0,89353	
45°	0,70711	0,50000	0,30642	0,69358	0,83282	0,83282
55°	0,81915	0,67101	0,41122	0,58878	0,76732	
65°	0,90631	0,82140	0,50338	0,49662	0,70471	
75°	0,96593	0,93302	0,57178	0,42822	0,65439	0,65439
85°	0,99619	0,99240	0,60817	0,39183	0,62597	
$\Sigma$					7,39936	2,46647
$s = 0,0654498 (3 \cdot 7,39936 - 2,46647) = 1,29143$						

**§ 13. Построение интегральной кривой.** Применением линейной комбинации нескольких ординат можно решать и задачу построения интегральной кривой  $y = \Phi(x)$ , где

$$\Phi(x) = \int_A^x f(x) dx, \quad (94)$$

вычисляя значения функции для равноотстоящих значений аргумента с интервалом  $\Delta x = h$ .

У А. Н. Крылова дан способ построения интегральной кривой, основывающийся на методе трапеций \*).

Обозначим

$$x_0 = A, \quad x_1 = A + h, \dots, \quad x_n = A + nh, \dots$$

Пусть имеется значение

$$\Phi_n = \Phi(x_n) = \Phi(A + nh), \quad (95)$$

и мы хотим найти следующее значение

$$\Phi_{n+1} = \Phi(x_{n+1}) = \Phi[A + (n+1)h]. \quad (96)$$

Очевидно,  $\Phi_{n+1}$  равно  $\Phi_n + \Delta\Phi_n$ , где  $\Delta\Phi_n$  — приращение ординаты интегральной кривой за один интервал, равное площади, ограниченной подынтегральной кривой на участке от  $x_n$  до  $x_{n+1}$ .

Если применять метод трапеций, то на этом участке истинную площадь можно приближенно заменить площадью трапеции, равной

$$\Delta\Phi_n = \frac{h}{2} (y_n + y_{n+1}), \quad (97)$$

где  $y = f(x_n)$ , а  $y_{n+1} = f(x_{n+1})$ . Суммированием таких отдельных приращений и получают последовательные значения  $\Phi(x)$ .

\*) Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1954, стр. 98.

Пример. Построить с интервалами  $h=0,1$  кривую функции  $\Phi(x)$ , где

$$\Phi(x) = \int_0^x e^x dx \quad (\Phi(x) = e^x - 1), \quad (98)$$

на участке

$$0 \leq x \leq 1.$$

Сперва выписываем значения подынтегральной функции с заданными интервалами по аргументу, затем вычисляем, пользуясь формулой

$$\Delta\Phi = \frac{h}{2} (y_n + y_{n+1}) = \frac{1}{20} (y_n + y_{n+1}) = \frac{1}{20} \Sigma_n,$$

располагая вычисления, как показано в табл. 36.

Т а б л и ц а 36

$x$	$y$	$\Sigma$	$\Delta\Phi$	$\Phi$	$\delta$
0	1,00000			0	
0,1	1,10517	2,10517	0,10526	0,10526	9
0,2	1,22140	2,32657	0,11633	0,22159	19
0,3	1,34986	2,57126	0,12856	0,35015	29
0,4	1,49182	2,84168	0,14208	0,49223	41
0,5	1,64872	3,14054	0,15703	0,64926	54
0,6	1,82212	3,47084	0,17354	0,82280	68
0,7	2,01375	3,83587	0,19179	1,01459	84
0,8	2,22554	4,23929	0,21196	1,22655	101
0,9	2,45960	4,68514	0,23426	1,46081	121
1,0	2,71828	5,17788	0,25889	1,71970	142

Способ этот, подкупающий своей простотой, годится для вычислений, от которых не требуется высокой точности, но совершенно неприемлем для точных расчетов. Как видно из только что рассмотренного примера, на всего лишь десяти интервалах вычисления мы получили ошибку, выросшую до 142 единиц последнего знака.

Рассмотрим другие, более точные способы вычисления ординат интегральной кривой.

Поставим вопрос так: нужно вычислить величину

$$F = \int_{-1}^1 f(x) dx. \quad (99)$$

Представим  $F$  в виде линейной комбинации нескольких ординат:

$$F = Cy_1 + C_0y_0 + C_1y_{-1} + C_2y_{-2} + \dots + C_ny_{-n}, \quad (100)$$

где

$$y_1 = f(1), \quad y_0 = f(-1), \quad y_{-1} = f(-3), \quad y_{-2} = f(-5), \dots, \quad y_{-n} = f[-(2n+1)]$$

(см. рис. 57). Поскольку

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad (101)$$

мы получим для отдельных ординат выражения:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \\ y_0 &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots, \\ y_{-1} &= a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 + \dots, \\ y_{-2} &= a_0 - 5a_1 + 25a_2 - 125a_3 + \dots \end{aligned} \quad (102)$$

Их комбинация должна дать ранее полученное выражение (5):

$$F = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \dots \quad (103)$$

Если введем в рассмотрение лишь две ординаты  $y_1$  и  $y_0$ , то получим формулу метода трапеций

$$F = y_0 + y_1. \quad (104)$$

Рассмотрим теперь комбинацию из трех ординат:

$$F = Cy_1 + C_0y_0 + C_1y_{-1}. \quad (105)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} &2a_0 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \dots = \\ &= Ca_0 + Ca_1 + Ca_2 + Ca_3 + Ca_4 + \dots + \\ &+ C_0a_0 - C_0a_1 + C_0a_2 - C_0a_3 + C_0a_4 - \dots + \\ &+ C_1a_0 - 3C_1a_1 + 9C_1a_2 - 27C_1a_3 + 81C_1a_4 - \dots \end{aligned} \quad (106)$$

Поскольку мы определяем три коэффициента  $C$ ,  $C_0$  и  $C_1$ , мы можем удовлетворить трем уравнениям, получаемым от приравнивания друг другу коэффициентов, стоящих в обеих частях уравнения (106) при соответствующих  $a$ :

$$\begin{aligned} C + C_0 + C_1 &= 2, \\ C - C_0 - 3C_1 &= 0, \\ C + C_0 + 9C_1 &= \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (107)$$

Решение этой системы дает

$$C = \frac{5}{6}, \quad C_0 = \frac{8}{6}, \quad C_1 = -\frac{1}{6}.$$

Таким образом, имеем:

$$F = \Delta\Phi_n = \frac{1}{6}(5y_{n+1} + 8y_n - y_{n-1}). \quad (108)$$

Если величина интервала будет не 2, а  $h$ , то формула (108) примет вид

$$F = \Delta\Phi_n = \frac{h}{12}(5y_{n+1} + 8y_n - y_{n-1}). \quad (109)$$

Произведем вычисления для только что рассмотренного примера. Поскольку мы должны, рассматривая некоторый отдельный интервал, иметь одну предшествующую ему ординату, введем в расчет в качестве дополнительного значение подынтегральной функции за интервал до начала расчета, т. е. при  $x = -0,1$ .

Расположение вычислений дано в табл. 37; для облегчения вычислений полезно пользоваться шаблоном с вырезами, показывающим, какие числа нужно выбирать для получения величины  $\Sigma$  (см. рис. 58).

**§ 14. Использование четырех ординат.** Еще более точным получится построение интегральной кривой, если использовать по одной ординате с каждой стороны участка. Вычислительная формула при этом принимает вид

$$\Delta\Phi_n = \frac{h}{24} (-y_{n-1} + 13y_n + 13y_{n+1} - y_{n+2}). \quad (110)$$

При пользовании формулой (110), кроме основных надо иметь еще и два дополнительных значения  $y$ : за один интервал до начала расчета и на один интервал дальше его конца. Покажем применение формулы (110) на примере предыдущего параграфа, взяв лишь интервал  $h$  вдвое большим, т. е. равным 0,2, и доведя кривую до значения  $x=2$ .

Сперва проведем расчет по методу трапеций, беря четыре десятичных знака (табл. 38). В последней строке вычисления погрешность возросла до величины 0,0212, т. е. примерно до четверти процента величины результата. Такая погрешность вполне может быть терпима при графических подсчетах, но численные расчеты в большинстве случаев требуют значительно большей точности.

Проведем расчет по формуле (110); для облегчения вычислений сделаем сначала шаблон (см. рис. 59). Вычисления располагаем в табл. 39. В третьем и четвертом столбцах таблицы можно было бы ограничиться четырьмя деся-

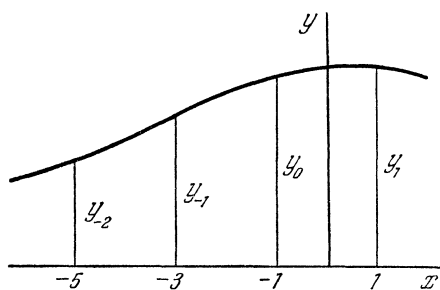


Рис. 57.

Таблица 37

$x$	$y$	$5y$	$8y$	$\Sigma$	$\Delta\Phi = \frac{\Sigma}{120}$	$\Phi$	$\delta$
-0,1	0,90484						
0	1,00000	5,00000	8,00000			0	
0,1	1,10517	5,52585	8,84136	12,62101	0,10517	0,10517	0
0,2	1,22140	6,10700	9,77120	13,94836	0,11623	0,22140	0
0,3	1,34986	6,74930	10,79888	15,41533	0,12846	0,34986	0
0,4	1,49182	7,45910	11,93456	17,03658	0,14197	0,49183	1
0,5	1,64872	8,24360	13,18976	18,82830	0,15690	0,64873	1
0,6	1,82212	9,11060	14,57696	20,80854	0,17340	0,82213	1
0,7	2,01375	10,06875	16,11000	22,99699	0,19164	1,01377	2
0,8	2,22554	11,12770	17,80432	25,41558	0,21179	1,22556	2
0,9	2,45960	12,29800	19,67680	28,08857	0,23407	1,45963	3
1,0	2,71828	13,59140	21,74624	31,04266	0,25869	1,71832	4

тичными знаками, но поскольку вычисление  $\Sigma$  связано с числами второго столбца, то во избежание ошибок от неодинакового количества десятичных знаков в различных слагаемых, оставляем лишний знак и проводим вычисле-

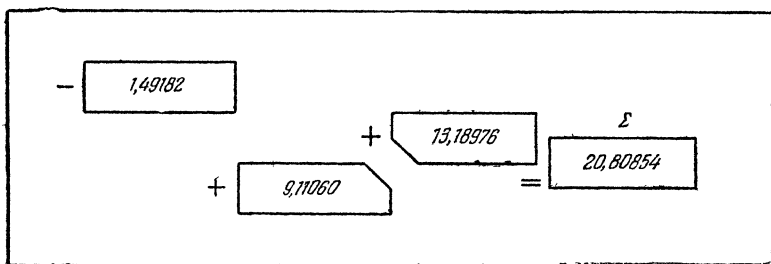


Рис. 58.

ние с пятью десятичными знаками. Ошибка в конце расчета — 16 единиц последнего знака, т. е. более чем в сто раз меньшая, чем при расчете по методу трапеций.

**§ 15. Интегрирование в случае бесконечности производной.** Выполняя вычислительную работу по приближенному численному интегрированию, нельзя

Таблица 38

$x$	$y = e^x$	$\Delta \Phi_n = \frac{1}{10}(y_n + y_{n+1})$	$\Phi$	$\delta$
0	1,0000	0,2221	0	
0,2	1,2214	0,2713	0,2221	7
0,4	1,4918	0,3314	0,4934	16
0,6	1,8221	0,4048	0,8248	27
0,8	2,2255	0,4944	1,2296	41
1,0	2,7183	0,6038	1,7240	57
1,2	3,3201	0,7375	2,3278	77
1,4	4,0552	0,9008	3,0653	101
1,6	4,9530	1,1003	3,9661	131
1,8	6,0496	1,3439	5,0664	168
2,0	7,3891		6,4103	212

действовать механически, произвольно задаваясь применяемым методом и числом ординат интегрирования. В большом количестве задач имеются особенности, неучет которых может привести к грубо ошибочному результату вычисления. Имея уравнение подынтегральной функции, необходимо, хотя бы приблизительно, построить ее график и удостовериться в том, что не требуется применять специальных мер во избежание утраты точности. Причин такой утраты точности может быть много; мы рассмотрим главные из них.

Первым обстоятельством, которое должно быть учтено, является связь между очертанием кривой подынтегральной функции  $y = f(x)$  и расположением ординат вычисления. Предположим, что данная кривая имеет вид, показанный на рис. 60.

Если мы, не ознакомившись предварительно с очертанием этой кривой, наметим проводить вычисления по методу Гаусса для четырех ординат, то

окажется, что в правой части чертежа гауссовские ординаты отразят не подлинное очертание кривой, а некоторое другое, показанное на чертеже пунктирной линией, и результат получится сильно отклоняющимся от истинного. Между тем применение способа Симпсона для десяти частей деления интервала интегрирования даст для этой же кривой прекрасный результат.

Чем более извилистой будет кривая  $y=f(x)$ , тем большее количество ординат будет нужно для охвата всех ее искривлений.

Но если учет очертания кривой подынтегральной функции может помочь выбрать подходящий метод интегрирования и дать возможность получить достаточно точный результат, то есть и более сложные случаи, в которых ни один из рассмотренных выше методов не даст решения более или менее точного.

Наиболее опасно, когда в пределах интегрирования производная  $f'(x)$  в какой-либо точке имеет бесконечное значение, обнаруживаемое по вертикальной направленности кривой в этой точке. К такой кривой

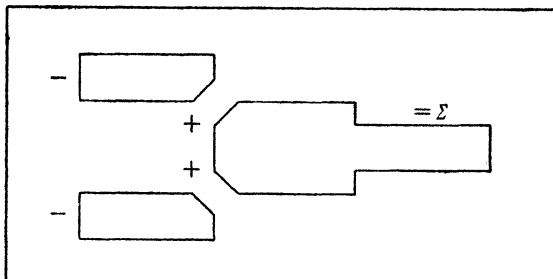


Рис. 59.

нельзя применить с достаточной точностью ни один из методов расчета, так как при малом числе ординат получаются большие ошибки, большое же число ординат можно применить, лишь пользуясь недостаточно точными методами подсчета

Т а б л и ц а 39

$x$	$y$	$13y$	$\Sigma$	$\Delta\Phi = \frac{\Sigma}{120}$	$\Phi$	$\delta$
-0,2	0,81873					
0	1,00000	13,00000			0	
0,2	1,22140	15,87820	26,56765	0,22140	0,22140	0
0,4	1,49182	19,39366	32,44974	0,27041	0,49181	1
0,6	1,82212	23,68756	39,63428	0,33029	0,82210	2
0,8	2,22554	28,93202	48,40948	0,40341	1,22551	3
1	2,71828	35,33764	59,12742	0,49273	1,71824	4
1,2	3,32012	43,16156	72,21846	0,60182	2,32006	6
1,4	4,05520	52,71760	88,20785	0,73507	3,05513	7
1,6	4,95303	64,38939	107,73722	0,89781	3,95294	9
1,8	6,04965	78,64545	131,58958	1,09658	5,04952	13
2	7,38906	96,05778	160,72519	1,33938	6,38890	16
2,2	9,02501					

по равноотстоящим ординатам, поскольку для наиболее точного метода — гауссовского — абсциссы и коэффициенты даны лишь для случаев не более чем восьми ординат.

В качестве примера возьмем определение площади четверти круга. При приближении к оси абсцисс кривая подынтегральной функции здесь становится вертикальной.

Пример. Вычислить

$$F = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad \left( F = \frac{\pi}{4} = 0,78540 \right). \quad (111)$$

Для того чтобы получить более точное решение, отсечем некоторую часть вычисляемой площади в районе вертикального направления кривой и учтем эту часть, принимая очертание данного отрезка кривой за параболическое. Остальную часть площади, не имеющую выделенной особенности, будем находить обычным путем. Для нашего примера выделим часть площади, лежащую правее абсциссы  $x = 0,96$  (см. рис. 61).

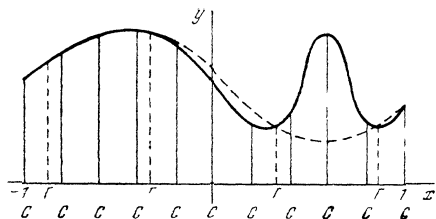


Рис. 60.

Применяя метод средних ординат (формулу 47) для шести ординат, получим:

$$F = \frac{2}{3} \cdot 0,04 \cdot f(0,96) + \frac{3 \cdot 0,96}{8 \cdot 6} \{ 3 [f(0,08) + f(0,24) + f(0,40) + f(0,56) + f(0,72) + f(0,88)] - [f(0,24) + f(0,72)] \}. \quad (112)$$

Вычисления приведены в табл. 40.

Для сравнения приведем результат подсчета методом Гаусса по пяти ординатам. Для обычных кривых, не имеющих особенностей такого характера, как рассматриваемая, вычисление по пяти ординатам методом Гаусса дает несравненно более точный результат, чем по шести ординатам формулы (47).

Вычисления по Гауссу даны в табл. 41. Расчет производится с учетом интервала (0,1) по формуле:

$$F = 0,11846 [f(0,04691) + f(0,95309)] + 0,23931 [f(0,23076) + f(0,76924)] + 0,28444 f(0,5). \quad (113)$$

Как видим, погрешность получилась совершенно та же, что и по способу средних ординат.

Чтобы убедиться в том, что причиной этого является неотделенная вертикальная часть кривой, проведем расчет по тем же пяти ординатам Гаусса, но с отделением параболического полусегмента.

Расчетная формула при интервале (0; 0,96) имеет вид:

$$F_{0,96} = 0,11372 [f(0,04503) + f(0,91497)] + 0,22974 [f(0,22153) + f(0,73847)] + 0,27307 f(0,48000). \quad (114)$$

Площадь полусегмента возьмем ранее вычисленную. В результате получим (см. табл. 42) значение  $F = 0,7854$ , т. е. совершенно точное.

Только что рассмотренная трудность все же является не самой большой. Хотя и с потерей точности, но выполнить вычисления все же возможно, если даже и не отделять часть площади, ограниченную параболой. Более трудным является случай, когда рассматривается интервал интегрирования  $(a, \infty)$ .

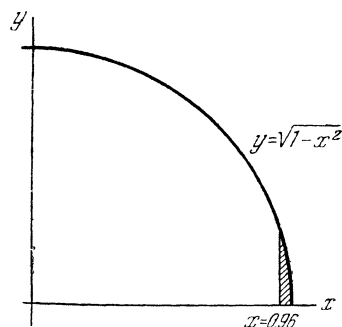


Рис. 61.

**§ 16. Интегрирование в случае интервала  $(0, \infty)$ .** Рассматривая интервал интегрирования бесконечной протяженности мы можем разделить его на несколько частей и отсечь остаток площади за достаточно большой абсциссой, но это слишком трудоемкая работа и потому для решения необходимо провести замену переменной интегрирования.

Будем считать, что в интервале  $(a, \infty)$   $a$  положительно; если  $a$  отрицательно, то можно разбить интеграл на два: с промежутком интегрирования  $(a, 0)$  и  $(0, \infty)$  и рассмотреть каждый интеграл в отдельности.

Введем новую переменную

$$z = \frac{x}{1+x}. \quad (115)$$

При этом интервал интегрирования  $(a, \infty)$  заменяется интервалом  $\left(\frac{a}{1+a}, 1\right)$ .

Из зависимости (115) получаем обратную зависимость

$$x = \frac{z}{1-z}. \quad (116)$$

Имеем:

$$f(x) = f\left(\frac{z}{1-z}\right). \quad (117)$$

$$dx = \left(\frac{z}{1-z}\right)' dz = \frac{1}{(1-z)^2} dz.$$

Т а б л и ц а 41

$x$	$x^2$	$1 - x^2$	$\sqrt{1 - x^2}$	$\Sigma$
0,04691	0,00220	0,99780	0,99890	} 1,30157
0,95309	0,90839	0,09161	0,30267	
0,23076	0,05325	0,94675	0,97301	} 1,61198
0,76924	0,59172	0,40828	0,63897	
0,50000	0,25000	0,75000	0,86602	
$F = 0,11846 \cdot 1,30157 + 0,23931 \cdot 1,61198 + 0,28444 \cdot 0,86602 = 0,7863$				

Т а б л и ц а 42

$x$	$x^2$	$1 - x^2$	$\sqrt{1 - x^2}$	$\Sigma$
0,04503	0,00203	0,99797	0,99898	} 1,40250
0,91497	0,83717	0,16283	0,40352	
0,22153	0,04908	0,95092	0,97515	} 1,64943
0,73847	0,54534	0,45466	0,67428	
0,48000	0,23040	0,76960	0,87727	
$F_{0,98} = 0,11372 \cdot 1,40250 + 0,22974 \times$ $\times 1,64943 + 0,27307 \cdot 0,87727 = 0,77798,$ $F = 0,77798 + 0,00746 = 0,7854.$				

Следовательно, данный нам интеграл преобразовывается в следующий:

$$F = \int_a^\infty f(x) dx = \int_{\frac{a}{1+a}}^1 \frac{f\left(\frac{z}{1-z}\right)}{(1-z)^2} dz. \quad (118)$$



Вычисляя его по методу Гаусса как наиболее полезному при полученной сложной форме подынтегральной функции, получим:

$$F = C_1 \frac{f\left(\frac{z_1}{1-z_1}\right)}{(1-z_1)^2} + C_2 \frac{f\left(\frac{z_2}{1-z_2}\right)}{(1-z_2)^2} + \dots + C_n \frac{f\left(\frac{z_n}{1-z_n}\right)}{(1-z_n)^2} = \\ = \frac{C_1}{(1-z_1)^2} f\left(\frac{z_1}{1-z_1}\right) + \frac{C_2}{(1-z_2)^2} f\left(\frac{z_2}{1-z_2}\right) + \dots + \frac{C_n}{(1-z_n)^2} f\left(\frac{z_n}{1-z_n}\right). \quad (119)$$

Здесь

$$C_1, C_2, \dots, C_n; \quad z_1, z_2, \dots, z_n$$

— коэффициенты и абсциссы метода Гаусса для интервала

$$\left(\frac{a}{1+a}, 1\right).$$

Пример 1. Вычислить

$$F = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^3} \quad \left(F = \frac{1}{2}\right). \quad (120)$$

При переходе к переменной  $z$  получаем интервал  $(0, 1)$ . Вычисления проведем для четырех ординат методом Гаусса; они даны в табл. 43. При пяти ординатах мы получили бы все знаки верными, но и при четырех погрешность невелика.

Таблица 43

$z$	$1-z$	$(1-z)^2$	$C$	$\frac{C}{(1-z)^2}$	$\frac{z}{1-z} = x$	$1+x$	$(1+x)^3$	$\frac{C}{\frac{(1-z)^2}{(1+x)^3}}$
0,069432	0,930568	0,865957	0,173927	0,200849	0,074612	1,074612	1,241120	0,161829
0,330009	0,669991	0,448888	0,326073	0,726402	0,492558	1,492558	3,324344	0,218510
0,669991	0,330009	0,108906	0,326073	2,99408	2,030216	3,030216	27,8241	0,107607
0,930568	0,069432	0,0048208	0,173927	36,0785	13,40261	14,40261	2987,60	0,012076
$F = 0,500022$								

Возьмем еще один пример с интервалом интегрирования  $(0, \infty)$ , усложненный дополнительно тем, что в пределах интегрирования значения подынтегральной функции стремятся к бесконечности.

Пример 2. Вычислить

$$F = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (F = \pi). \quad (121)$$

Имеем:

$$z = \frac{x}{1+x}, \quad x = \frac{z}{1-z}, \quad dx = \frac{dz}{(1-z)^2}, \\ 1+x = \frac{x}{z} = \frac{1}{1-z}. \quad (122)$$

Преобразовываем интеграл:

$$F = \int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{1-z}\sqrt{\frac{z}{1-z}}} \cdot \frac{dz}{(1-z)^2} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}. \quad (123)$$

Ввиду симметричности подынтегральной функции относительно середины интервала интегрирования можем написать:

$$F = 2 \int_0^{0,5} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}. \quad (124)$$

При  $z \rightarrow 0$  подынтегральная функция стремится к бесконечности; поэтому мы должны выделить начальный участок, разбив интеграл на две части: содержащую особенность и никакой особенности не содержащую:

$$F = 2 (F_1 + F_2), \quad (125)$$

где

$$F_1 = \int_0^{0,1} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}, \quad F_2 = \int_{0,1}^{0,5} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}.$$

Первую часть берем разложением в ряд:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} &= \frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \left( 1 + \frac{1}{2}z + \frac{3}{8}z^2 + \frac{5}{16}z^3 + \dots \right) = \\ &= z^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}z^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{6}z^{\frac{5}{2}} + \dots \end{aligned} \quad (126)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^{0,1} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} = \left( 2z^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}z^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8}z^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{16}z^{\frac{7}{2}} + \dots \right) \Big|_0^{0,1} = \\ &= 2\sqrt{0,1} \left( 1 + \frac{1}{6} \cdot 0,1 + \frac{3}{40} \cdot 0,01 + \frac{5}{112} \cdot 0,001 + \dots \right) \approx 0,643497. \end{aligned} \quad (127)$$

Вторую часть берем по методу Гаусса для четырех ординат. Для интервала  $(0,1; 0,5)$  имеем вычислительную формулу:

$$\begin{aligned} F_2 &= 0,069571 [f(0,127773) + f(0,472227)] + \\ &\quad + 0,130429 [f(0,232004) + f(0,367996)]. \end{aligned} \quad (128)$$

Вычисления даны в табл. 44.

Т а б л и ц а 44

$z$	$1-z$	$z(1-z)$	$\sqrt{z(1-z)}$	$C$	$\frac{C}{\sqrt{z(1-z)}}$
0,127773	0,872227	0,111447	0,333837	0,069571	0,208398
0,232004	0,767996	0,178178	0,422112	0,130429	0,308991
0,367996	0,632004	0,232575	0,482260	0,130429	0,270454
0,472227	0,527773	0,249229	0,499229	0,069571	0,139357
$F_2 = 0,927200$					
$F = 2(F_1 + F_2) = 2(0,643497 + 0,927200) =$					
$= 3,14139 \ (\delta = 0,00020)$					

На этом закончим примеры, иллюстрирующие приложение рассмотренных методов, и перейдем к методам, использующим не только значения подынтегральной функции, но и ее производные.

**§ 17. Формула Эйлера — Маклорена.** Раньше мы рассматривали интервал интегрирования длиной в две единицы, теперь перейдем к интервалу длиной  $h$ , также симметрично расположенному относительно оси ординат. Представляя подынтегральную функцию по-прежнему в виде ряда, мы получим:

$$\begin{aligned} F &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) dx = \\ &= \left( a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \frac{1}{4} a_3 x^4 + \dots \right) \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \quad (129) \\ &= 2 \left[ \frac{h}{2} a_0 + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2} \right)^3 a_2 + \frac{1}{5} \left( \frac{h}{2} \right)^5 a_4 + \frac{1}{7} \left( \frac{h}{2} \right)^7 a_6 + \dots \right] = \\ &= h a_0 + \frac{h^3}{12} a_2 + \frac{h^5}{80} a_4 + \frac{h^7}{448} a_6 + \frac{h^9}{2304} a_8 + \dots \end{aligned}$$

Пусть имеется возможность вычислить по краям интервала (при  $x_1 = -\frac{h}{2}$  и  $x_2 = +\frac{h}{2}$ ) не только значения подынтегральной функции  $y_1$  и  $y_2$ , но и производные

$$y'_1, y'_2, y''_1, y''_2, y'''_1, y'''_2, \dots$$

Определим коэффициенты  $C, C_1, C_2, C_3$  и т. д., соответствующие представлению интеграла в форме

$$F = C(y_2 + y_1) + C_1(y'_2 - y'_1) + C_2(y''_2 - y''_1) + C_3(y'''_2 - y'''_1) + \dots \quad (130)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} y_2 &= f\left(\frac{h}{2}\right) = a_0 + \frac{h}{2} a_1 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 a_2 + \left(\frac{h}{2}\right)^3 a_3 + \left(\frac{h}{2}\right)^4 a_4 + \left(\frac{h}{2}\right)^5 a_5 + \dots, \\ y_1 &= f\left(-\frac{h}{2}\right) = a_0 - \frac{h}{2} a_1 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 a_2 - \left(\frac{h}{2}\right)^3 a_3 + \left(\frac{h}{2}\right)^4 a_4 - \left(\frac{h}{2}\right)^5 a_5 + \dots, \quad (131) \end{aligned}$$

$$y_2 + y_1 = 2a_0 + \frac{h^2}{2} a_2 + \frac{h^4}{8} a_4 + \frac{h^6}{32} a_6 + \frac{h^8}{128} a_8 + \dots;$$

$$y' = f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots,$$

$$y'_2 = f'\left(\frac{h}{2}\right) = a_1 + 2 \frac{h}{2} a_2 + 3 \left(\frac{h}{2}\right)^2 a_3 + 4 \left(\frac{h}{2}\right)^3 a_4 + 5 \left(\frac{h}{2}\right)^4 a_5 + \dots \quad (132)$$

$$y'_1 = f'\left(-\frac{h}{2}\right) = a_1 - 2 \frac{h}{2} a_2 + 3 \left(\frac{h}{2}\right)^2 a_3 - 4 \left(\frac{h}{2}\right)^3 a_4 + 5 \left(\frac{h}{2}\right)^4 a_5 - \dots,$$

$$y'_2 - y'_1 = 2ha_2 + h^3 a_4 + \frac{3}{8} h^5 a_6 + \frac{1}{8} h^7 a_8 - \dots$$

Аналогично

$$\begin{aligned} y''_2 - y''_1 &= 6ha_3 + \frac{10}{2} h^3 a_5 + \frac{21}{8} h^5 a_7 + \dots, \\ y'''_2 - y'''_1 &= 24ha_4 + 30h^3 a_6 + 21h^5 a_8 + \dots, \\ y^{IV}_2 - y^{IV}_1 &= 120ha_5 + 210h^3 a_7 + \dots, \\ y^V_2 - y^V_1 &= 720ha_6 + 1680h^3 a_8 + \dots, \\ y^{VI}_2 - y^{VI}_1 &= 5040ha_7 + \dots, \\ y^{VII}_2 - y^{VII}_1 &= 40320ha_8 + \dots \end{aligned} \quad (133)$$

Подставляя в (130) полученные выражения для первой суммы и дальнейших разностей, мы получим равенство:

$$\begin{aligned}
 ha_0 + \frac{h^3}{12} a_2 + \frac{h^5}{80} a_4 + \frac{h^7}{448} a_6 + \frac{h^9}{2304} a_8 + \dots = \\
 = C \left( 2a_0 + \frac{h^2}{2} a_2 + \frac{h^4}{8} a_4 + \frac{h^6}{32} a_6 + \frac{h^8}{128} a_8 + \dots \right) + \\
 + C_1 \left( 2ha_2 + h^3 a_4 + \frac{3h^5}{8} a_6 + \frac{h^7}{8} a_8 + \dots \right) + \\
 + C_3 (24ha_4 + 30h^3 a_6 + 21h^5 a_8 + \dots) + \\
 + C_5 (720ha_6 + 1680h^3 a_8 + \dots) + \\
 + C_7 (40320ha_8 + \dots) + \\
 \dots \dots \dots
 \end{aligned} \tag{134}$$

(коэффициенты  $C_2$ ,  $C_4$  и т. д., как легко видеть, равны нулю).

Приравнявая в равенстве (134) для каждого отдельного  $a$  коэффициенты, стоящие в левой и правой частях, получим систему уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты:

$$\begin{aligned}
 h &= 2C \\
 \frac{h^3}{12} &= \frac{h^2}{2} C + 2hC_1, \\
 \frac{h^5}{80} &= \frac{h^4}{8} C + h^3 C_1 + 24hC_3, \\
 \frac{h^7}{448} &= \frac{h^6}{32} C + \frac{3h^5}{8} C_1 + 30h^3 C_3 + 720hC_5, \\
 \frac{h^9}{2304} &= \frac{h^8}{128} C + \frac{h^7}{8} C_1 + 21h^5 C_3 + 1680h^3 C_5 + 40320hC_7.
 \end{aligned} \tag{135}$$

Отсюда имеем:

$$C = \frac{h}{2}, \quad C_1 = -\frac{h^2}{12}, \quad C_3 = \frac{h^4}{720}, \quad C_5 = -\frac{h^6}{30240}, \quad C_7 = \frac{h^8}{21600}, \dots$$

Подставляя эти значения коэффициентов в выражение (130), получаем:

$$\begin{aligned}
 F = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y dx = \frac{h}{2} (y_2 + y_1) - \frac{h^2}{12} (y_2' - y_1') + \frac{h^4}{720} (y_2''' - y_1''') - \\
 - \frac{h^6}{30240} (y_2^V - y_1^V) + \frac{h^8}{21600} (y_2^{VII} - y_1^{VII}) - \dots
 \end{aligned} \tag{136}$$

Очевидно, такое же выражение получим и для интеграла

$$F = \int_A^{A+h} y dx. \tag{137}$$

Если интеграл будет задан в пределах от  $A$  до  $B = A + nh$ , то, разбив интервал интегрирования на части длиной  $h$  и представляя полученные

интегралы в форме (136), просуммировав, получим:

$$\begin{aligned}
 \int_A^{A+nh} y dx &= \int_A^{A+h} y dx + \int_{A+h}^{A+2h} y dx + \dots + \int_{A+(n-1)h}^{A+nh} y dx = \\
 &= \frac{h}{2} (y_2 + y_1) + \frac{h}{2} (y_3 + y_2) + \dots + \frac{h}{2} (y_{n+1} + y_n) - \\
 &- \frac{h^2}{12} (y'_2 - y'_1) - \frac{h^2}{12} (y'_3 - y'_2) - \dots - \frac{h^2}{12} (y'_{n+1} - y'_n) + \quad (138) \\
 &+ \frac{h^4}{720} (y'''_2 - y'''_1) + \frac{h^4}{720} (y'''_3 - y'''_2) + \dots + \frac{h^4}{720} (y'''_{n+1} - y'''_n) - \dots = \\
 &= h \left( \frac{1}{2} y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \frac{1}{2} y_{n+1} \right) - \frac{h^2}{12} (y'_{n+1} - y'_1) + \\
 &+ \frac{h^4}{720} (y'''_{n+1} - y'''_1) - \frac{h^6}{30240} (y^{(v)}_{n+1} - y^{(v)}_1) + \frac{h^8}{21600} (y^{(vii)}_{n+1} - y^{(vii)}_1) - \dots
 \end{aligned}$$

Полученная формула называется формулой Эйлера—Маклорена. В ней индекс  $k$  имеет ордината, стоящая в начале  $k$ -й части интервала интегрирования. Члены, стоящие после первых скобок, представляют собой поправку к непосредственному вычислению по способу трапеций.

Пример. Вычислить

$$F = \int_1^{13} \frac{dx}{x} \quad (F = \ln 13 = 2,56495). \quad (139)$$

Имеем:

$$y = \frac{1}{x}, \quad y' = -\frac{1}{x^2}, \quad y''' = -\frac{6}{x^4}, \quad y^{(v)} = -\frac{120}{x^6}, \dots$$

Применяя формулу Эйлера—Маклорена, мы должны, если хотим получить достаточно большую точность, брать очень много ординат, так как в начале интервала интегрирования величина производных растет быстрее, чем затухают учитывающие эти производные коэффициенты. Чтобы ограничиться не слишком большим числом ординат, полезно разделить весь интервал интегрирования на несколько участков, в каждом из которых брать ординаты так часто, как требуется для достижения требуемой точности.

Произведем следующее разбиение:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^4 \frac{dx}{x} + \int_4^{13} \frac{dx}{x}, \quad (140)$$

причем на первом участке интегрирования возьмем десять частей по 0,1 каждая, на втором участке — десять частей по 0,2 и, наконец, на последнем участке — девять частей по 1.

Для удобства вычисления будем обозначать

$$f^{(s)}(x) = f_x^{(s)}.$$

Тогда для трех интегралов, на которые мы разбили рассматриваемый нами интеграл получим:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 0,1 \left( \frac{1}{2} f_1 + f_{1,1} + f_{1,2} + \dots + f_{1,9} + \frac{1}{2} f_2 \right) - \\
 &- \frac{1}{1200} (f'_2 - f'_1) + \frac{1}{720000} (f'''_2 - f'''_1) - \dots,
 \end{aligned}$$

$$F_2 = 0,2 \left( \frac{1}{2} f_2 + f_{2,2} + f_{2,4} + \dots + f_{2,8} + \frac{1}{2} f_4 \right) - \frac{1}{300} (f'_4 - f'_2) + \frac{1}{450\,000} (f'''_4 - f'''_2) - \dots, \quad (141)$$

$$F_3 = \frac{1}{2} f_4 + f_6 + f_8 + \dots + f_{12} + \frac{1}{2} f_{13} - \frac{1}{12} (f'_{13} - f'_4) + \frac{1}{720} (f'''_{13} - f'''_4) - \dots$$

Проводим вычисления:

$$F_1 = 0,1 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \dots + \frac{1}{1,9} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{1200} \left( -\frac{1}{4} + 1 \right) + \frac{1}{7200000} \left( -\frac{3}{8} + 6 \right) = \\ = 0,693772 - 0,000625 + 0,000001 = 0,693148,$$

$$F_2 = 0,2 \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2,2} + \frac{1}{2,4} + \dots + \frac{1}{3,8} + \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{300} \left( -\frac{1}{16} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{450000} \left( -\frac{3}{128} + \frac{3}{8} \right) = \\ = 0,693771 - 0,000625 + 0,000001 = 0,693147,$$

$$F_3 = \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{12} + \frac{1}{26} \right) - \frac{1}{12} \left( -\frac{1}{169} + \frac{1}{16} \right) + \frac{1}{720} \left( -\frac{6}{28561} + \frac{3}{128} \right) = \\ = 1,183339 - 0,004715 + 0,000032 = 1,178656,$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 0,693148 + 0,693147 + 1,178656 = 2,564951.$$

По величине чисел, суммированных для получения  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ , мы видим, что дальнейшие, более высокого порядка производные учитывать не требовалось, так как уже производные третьего порядка дали весьма малые поправки. Поэтому применение формулы Эйлера—Маклорена (если только ею можно воспользоваться) гарантирует получение хороших результатов.

Если бы мы попробовали добиться успеха в только что решенном примере с помощью одного из методов, учитывающих одни лишь ординаты, то были бы в весьма затруднительном положении.

Предположим, что мы использовали бы самый точный из всех таких методов — вычисление по восьми гауссовским ординатам. Мы получили бы следующий результат:

$$F = \int_1^{13} \frac{dx}{x} = 0,607368 [f(1,238260) + f(12,761740)] + \\ + 1,334286 [f(2,220004) + f(11,779996)] + \\ + 1,882242 [f(3,846808) + f(10,153192)] + \\ + 2,176104 [f(5,899390) + f(8,100610)] = \\ = 0,607368 (0,807585 + 0,078359) + \\ + 1,334286 (0,450450 + 0,084890) + \\ + 1,882242 (0,259956 + 0,098491) + \\ + 2,176104 (0,169509 + 0,123447) = 2,564578 \quad (\delta = 0,00037).$$

Поскольку для нашего примера взят интеграл, для которого известно точное значение, мы в состоянии установить, что полученное решение дает погрешность в 0,00037. Но если бы для вычисления был дан другой, действительно не берущийся аналитически интеграл, то мы не могли бы получить никаких сведений о степени точности ответа. Величина погрешности  $\varepsilon$  дает суждение о сравнительных достоинствах того или иного метода; остаточный член, выраженный через некоторое среднее значение  $n$ -й производной, дает еще меньше сведений, например, в только что рассмотренной задаче шестнадцатая производная на протяжении интегрирования меняется в  $13^{17}$  раз, а именно с нею связана величина погрешности для восьми ординат Гаусса.

Для „ординатных“ методов хорошим, вообще говоря, критерием точности является близость друг к другу результатов, полученных при использовании одного какого-либо метода повторно со все большим числом ординат. Однако для последнего примера такая проверка была бы весьма затруднительной, так как при семи гауссовских ординатах разница с результатом, полученным по восьми ординатам, оказалась бы порядка 0,001—0,002, что явно не дает оснований удовлетвориться результатом подсчета по восьми ординатам. Для девяти ординат, однако, пока еще не вычислены ни абсциссы, ни коэффициенты. Значит, можно было бы пользоваться лишь способами с равноотстоящими ординатами, где нет препятствий к увеличению числа ординат. Но в этом случае затруднение было бы вызвано необходимостью вычисления очень большого числа значений функции.

Недаром А. Н. Крылов писал, что мнение, высказываемое Лораном о приближенных формулах для вычисления интегралов — „Эти формулы доставляют численное значение искомого интеграла с приближением, которое в общем зависит от терпения вычислителя“, — на практике оправдывается, несмотря на то, что для этих формул выражения остаточных членов и известны.\*)

Лишь формулы, содержащие кроме ординат еще и значения производных, избавляют от необходимости снова и снова повторять все уточняемые вычисления. К сожалению, не всегда возможно получить нужное число производных подынтегральной функции, вследствие трудности дифференцирования.

**§ 18. Другие формулы с учетом производных.** Кроме формулы трапеций, к виду, аналогичному формуле Эйлера—Маклорена, приводятся таким же путем формулы прямоугольников и Симпсона.

Если интервал интегрирования  $(A, B)$  разделим на  $n$  частей, длина каждой из которых равна  $h = \frac{B-A}{n}$ , и обозначим

$$F = \int_A^B f(x) dx, \quad f(A + nh) = f_n,$$

то для формул трапеций, прямоугольников и Симпсона получим легко сравнимые между собой выражения.

Формула трапеций (формула Эйлера—Маклорена):

$$F = h \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right) - \frac{h^2}{12} [f'(B) - f'(A)] + \frac{h^4}{720} [f'''(B) - f'''(A)] - \frac{h^6}{30240} [f^{(5)}(B) - f^{(5)}(A)] + \dots \quad (142)$$

---

\*) Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1954, стр. 97.

Формула прямоугольников:

$$F = h(f_{0,5} + f_{1,5} + f_{2,5} + \dots + f_{n-1,5} + f_{n,5}) + \\ + \frac{h^2}{24}[f'(B) - f'(A)] - \frac{7h^4}{5760}[f'''(B) - f'''(A)] + \\ + \frac{31h^6}{157680}[f^V(B) - f^V(A)] - \dots \quad (143)$$

Формула Симпсона (при  $n$  четном):

$$F = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n] - \\ - \frac{h^4}{180}[f'''(B) - f'''(A)] + \frac{h^6}{1512}[f^V(B) - f^V(A)] - \dots \quad (144)$$

Все формулы примерно равноценны; для ясности рассмотрим пример.  
Пример. Вычислить

$$F = \int_0^2 \frac{dx}{(x+2)^2} \quad (F = 0,250000).$$

Имеем:

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}, \quad f'(x) = -\frac{2}{(x+2)^3}, \quad f'''(x) = -\frac{24}{(x+2)^5}, \\ f^V(x) = -\frac{720}{(x+2)^7}, \dots$$

Установим применительно к формуле (142), как более точной, требуемую величину интервала из того условия, что последний член формулы, примерно равный (для нашего примера)

$$\frac{h^6 f^V(0)}{30000} \approx \frac{6h^6}{30000} = \frac{h^6}{5000},$$

не должен превышать 0,000001. Получим:

$$h = \sqrt[6]{0,000001 \cdot 5000} = \sqrt[6]{0,005} \approx 0,5.$$

Итак, достаточно разделить интервал интегрирования на четыре части по 0,5 каждая.

Проведем вычисления по всем трем формулам.

Вычисление по формуле трапеций:

$$f_0 = \frac{1}{4} = 0,250000, \quad f_1 = \frac{1}{6,25} = 0,160000, \quad f_2 = \frac{1}{9} = 0,111111,$$

$$f_3 = \frac{1}{12,25} = 0,081633, \quad f_4 = \frac{1}{16} = 0,062500;$$

$$f'(0) = -\frac{1}{4}, \quad f'(2) = -\frac{1}{32}, \quad f'(2) - f'(0) = \frac{7}{32};$$

$$f'''(0) = -\frac{3}{4}, \quad f'''(2) = -\frac{3}{128}, \quad f'''(2) - f'''(0) = \frac{93}{128};$$

$$f^V(0) = -\frac{45}{8}, \quad f^V(2) = -\frac{45}{1024}, \quad f^V(2) - f^V(0) = \frac{5715}{1024};$$

$$F = 0,5 \left( \frac{1}{2} \cdot 0,250000 + 0,160000 + 0,111111 + 0,081633 + \frac{1}{2} \cdot 0,062500 \right) - \\ - \frac{1}{48} \cdot \frac{7}{32} + \frac{1}{11520} \cdot \frac{93}{128} - \frac{1}{64 \cdot 30240} \cdot \frac{5715}{1024} = \\ = 0,254497 - 0,004557 + 0,00063 - 0,000003 = 0,250000.$$



Вычисление по формуле прямоугольников (члены, содержащие производные, те же, что и в формуле трапеций, но домножаются на другие числа):

$$F = 0,5 (0,197531 + 0,132231 + 0,094675 + 0,071111) + \\ + \frac{1}{96} \cdot \frac{7}{32} - \frac{7}{5760 \cdot 16} \cdot \frac{93}{128} + \frac{31}{157680 \cdot 64} \cdot \frac{5715}{1024} = \\ = 0,247774 + 0,002278 - 0,000055 + 0,000017 = 0,250014.$$

Вычисление по формуле Симпсона:

$$F = \frac{1}{6} (0,250000 + 0,640000 + 0,222222 + 0,326532 + 0,062500) - \\ - \frac{1}{16 \cdot 180} \cdot \frac{93}{128} + \frac{1}{1512 \cdot 64} \cdot \frac{5715}{1024} = \\ = 0,250209 - 0,000252 + 0,000058 = 0,250015.$$

Наилучший результат получен по формуле Эйлера—Маклорена, у которой последовательность членов, содержащих производные, затухает быстрее. Формула Симпсона в данном случае потеряла свое преимущество, так как отсутствие в ней поправочного члена, содержащего первые производные, компенсируется в плохую сторону большей по сравнению с формулой Эйлера—Маклорена величиной дальнейших членов.

**§ 19. Формула Грегори.** В тех случаях, когда дифференцирование подынтегральной функции затруднительно или невозможно, вместо формулы Эйлера—Маклорена можно пользоваться формулой Грегори, в которой вместо производных участвуют разности значений  $f(x)$ .

Если выражать производные некоторой функции не через ряды разностей, идущих наклонно вниз, а через разности, идущие наклонно вверх, то знакопеременные ряды членов становятся знакопостоянными, причем стоящие при них коэффициенты не меняются. Таким образом, производные, входящие в формулу Эйлера—Маклорена, можно заменить разностями по следующим формулам, вытекающим из формул (4) гл. VI:

$$hf'(A) = \Delta_0 - \frac{1}{2} \Delta_0^2 + \frac{1}{3} \Delta_0^3 - \frac{1}{4} \Delta_0^4 + \frac{1}{5} \Delta_0^5 - \frac{1}{6} \Delta_0^6 + \dots, \\ hf'(B) = \Delta_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta_{n-2}^2 + \frac{1}{3} \Delta_{n-3}^3 + \frac{1}{4} \Delta_{n-4}^4 + \frac{1}{5} \Delta_{n-5}^5 + \frac{1}{6} \Delta_{n-6}^6 + \dots, \\ h^3 f'''(A) = \Delta_0^3 - \frac{3}{2} \Delta_0^4 + \frac{7}{4} \Delta_0^5 - \frac{15}{8} \Delta_0^6 + \dots, \\ h^3 f'''(B) = \Delta_{n-3}^3 + \frac{3}{2} \Delta_{n-4}^4 + \frac{7}{4} \Delta_{n-5}^5 + \frac{15}{8} \Delta_{n-6}^6 + \dots, \\ h^5 f^V(A) = \Delta_0^5 - \frac{5}{2} \Delta_0^6 + \dots, \\ h^5 f^V(B) = \Delta_{n-5}^5 + \frac{5}{2} \Delta_{n-6}^6 + \dots$$
(145)

Произведя эту замену, получим:

$$F = \int_A^B f(x) dx = h \left[ \frac{1}{2} f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_{n-1}(x) + \frac{1}{2} f_n(x) - \right. \\ \left. - \frac{1}{12} (\Delta_{n-1} - \Delta_0) - \frac{1}{24} (\Delta_{n-2}^2 + \Delta_0^2) - \frac{19}{120} (\Delta_{n-3}^3 - \Delta_0^3) - \right. \\ \left. - \frac{3}{160} (\Delta_{n-4}^4 + \Delta_0^4) - \frac{863}{60480} (\Delta_{n-5}^5 - \Delta_0^5) - \frac{275}{24192} (\Delta_{n-6}^6 + \Delta_0^6) - \dots \right]. \quad (146)$$

Полученная формула называется формулой Грегори. Вычислим с помощью этой формулы интеграл предыдущего примера:

$$F = \int_0^2 \frac{dx}{(x+2)^2} \quad (F = 0,250000).$$

При  $h = 0,5$  получим:

$x$	$f(x)$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
0	0,250000	— 90000			
0,5	0,160000	— 48889	41111		
1	0,111111	— 29478	19411	— 21700	12634
1,5	0,081633	— 19133	10345	— 9066	
2	0,062500				

Разности почти не затухают, и поэтому мы не можем рассчитывать на точный результат. Действительно, вычисляя по формуле (146), находим:

$$F = 0,5 \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 0,250000 + 0,160000 + 0,111111 + 0,081633 + \frac{1}{2} \cdot 0,062500 \right) - \frac{1}{12} (-0,019133 + 0,090000) - \frac{1}{24} (0,010345 + 0,041111) - \frac{19}{720} (-0,009066 + 0,021700) - \frac{3}{160} (2 \cdot 0,012634) \right] = 0,250069.$$

Для того чтобы получить большую точность, нам придется взять вдвое меньшие интервалы  $h = 0,25$ . Тогда расчет даст:

$x$	$f(x)$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$	$\Delta^6$
0	0,250000	— 52469					
0,25	0,197531	— 37531	14938				
0,5	0,160000	— 27769	9762	— 5176	2063		
0,75	0,132231	— 21120	6649	— 3113	1148	— 915	
1	0,111111	— 16436	4684	— 1965	675	— 473	442
1,25	0,094675	— 13042	3394	— 1290	416	— 259	214
1,5	0,081633	— 10522	2520	— 874	265	— 151	108
1,75	0,071111	— 8611	1911	— 609			
2	0,062500						

В дальнейших подсчетах примем для упрощения:

$$\frac{19}{720} \approx \frac{1}{38}, \quad \frac{3}{160} \approx \frac{1}{53}, \quad \frac{863}{60480} \approx \frac{1}{70}, \quad \frac{275}{24192} \approx \frac{1}{88};$$

тогда:

$$F = 0,25 \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 0,250000 + 0,197531 + \dots + 0,071111 + \frac{1}{2} \cdot 0,062500 \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{12} (-0,008611 + 0,052469) - \frac{1}{24} (0,001911 + 0,014938) - \right. \\ \left. - \frac{1}{38} (-0,000609 + 0,005176) - \frac{1}{53} (0,000265 + 0,002063) - \right. \\ \left. - \frac{1}{70} (-0,000151 + 0,000915) - \frac{1}{88} (0,000108 + 0,000442) \right] = 0,250001.$$

Применим формулу Грегори к самому первому из наших примеров. Вычислим

$$F = \int_1^{13} \frac{dx}{x} \quad (F = 2,56495).$$

Для установления требуемой величины интервала возьмем сперва интервал, равный единице и рассмотрим ход разностей:

$x$	$f(x)$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$	$\Delta^6$
1	1,00000						
2	0,50000	— 50000					
3	0,33333	— 16667	33333				
4	0,25000	— 8333	8334	— 24999	19998		
5	0,20000	— 5000	3333	— 5001	3335	— 16663	14279
6	0,16667	— 3333	1667	— 1666	951	— 2384	1791
7	0,14286	— 2381	952	— 715	358	— 593	394
8	0,12500	— 1786	595	— 357	159	— 199	119
9	0,11111	— 1389	397	— 198	79	— 80	44
10	0,10000	— 1111	278	— 119	43	— 36	18
11	0,09091	— 909	202	— 76	25	— 18	10
12	0,08333	— 758	151	— 51	17	— 8	
13	0,07692	— 641	117	— 34			

Нам нужно, чтобы шестые разности не превышали ста — двухсот единиц последнего десятичного знака. Этому условию соответствует часть таблицы разностей, лежащая ниже значения  $x=4$ , отмечнутая наклонной чертой. Лежащую выше часть таблицы нужно пересоставить с меньшим интервалом, чтобы последние разности стали меньше.

При уменьшении интервала в  $m$  раз, первые разности функции уменьшаются примерно в  $m$  раз, вторые в  $m^2$  раз и т. д. Шестые разности после

уменьшения в  $m^6$  раз не должны превышать величины в 100—200 единиц последнего знака. Для этого, казалось бы, достаточно уменьшить интервал в два раза, так чтобы шестая разность уменьшилась раз в 60. Но при таком уменьшении интервала мы получим шестую разность, лежащую на уровне значения  $x=2,5$ , последняя же разность составленной таблицы лежит на уровне  $x=4$ , причем с уменьшением  $x$  разности в каждом столбце резко возрастают. Поэтому из предосторожности уменьшим интервал не в два, а в четыре раза. Получим таблицу:

$x$	$f(x)$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$	$\Delta^6$
1	1,00000	— 20000					
1,25	0,80000	— 13333	6667				
1,5	0,66667	— 9524	3809	— 2858	1430		
1,75	0,57143	— 7143	2381	— 1428	634	— 796	
2	0,50000	— 5556	1587	— 794	319	— 315	481
2,25	0,44444	— 4444	1112	— 475	171	— 148	167
2,50	0,40000	— 3636	808	— 304	101	— 70	78
2,75	0,36364	— 3031	605	— 203	65	— 36	34
3	0,33333	— 2564	467	— 138	37	— 28	8
3,25	0,30769	— 2198	366	— 101	27	— 10	18
3,50	0,28571	— 1904	294	— 74	17	— 10	0
3,75	0,26667	— 1667	237	— 57			
4	0,25000						

Вычислять интеграл придется в два приема: сначала вычислить  $F_1 = \int_1^4 \frac{dx}{x}$ ,

затем  $F_2 = \int_4^{13} \frac{dx}{x}$ . Приводим вычисления:

$$\begin{aligned}
 F_1 = \frac{1}{4} & \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 1,00000 + 0,80000 + \dots + 0,26667 + \frac{1}{2} \cdot 0,25000 \right) - \right. \\
 & - \frac{1}{12} (-0,01667 + 0,20000) - \frac{1}{24} (0,00237 + 0,06667) - \\
 & - \frac{1}{38} (-0,00057 + 0,02858) - \frac{1}{53} (0,00017 + 0,01430) - \\
 & \left. - \frac{1}{70} (-0,00010 + 0,00796) - \frac{1}{88} (0,00000 + 0,00481) \right] = 1,38631,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 = & \frac{1}{2} \cdot 0,25000 + 0,20000 + \dots + 0,08333 + \frac{1}{2} \cdot 0,07692 - \\
 & - \frac{1}{12} (-0,00641 + 0,05000) - \frac{1}{24} (0,00117 + 0,01667) - \\
 & - \frac{1}{38} (-0,00034 + 0,00715) - \frac{1}{53} (0,00017 + 0,00358) - \\
 & - \frac{1}{70} (-0,00008 + 0,000199) - \frac{1}{88} (0,00010 + 0,000119) = 1,17866, \\
 F = & F_1 + F_2 = 1,38631 + 1,17866 = 2,56497.
 \end{aligned}$$

Мы рассмотрели значительное количество примеров, иллюстрирующих методы приближенного численного интегрирования. Они показали нам с какой осторожностью нужно относиться к полученным результатам и как тщательно нужно вычислять, чтобы не впасть в ошибку.

В следующей главе мы рассмотрим процесс еще более тонкий, требующий большой опытности и внимания при составлении схемы вычислений и проведении расчета.

# Г Л А В А VIII **ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**§ 1. Представление функции в виде ряда.** Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с каждым годом становится все более и более важным разделом прикладной математики. Круг дифференциальных уравнений, для которых может быть найдено точное решение, весьма ограничен, причем это решение зачастую получается в виде столь сложного выражения, что вычислить по нему нужные величины гораздо труднее, чем проинтегрировать уравнение в численной форме.

Прежде чем рассматривать методы приближенного численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, составим эталонное решение одного уравнения, являющегося во всех трудах по данному вопросу примером применения того или иного метода. Речь идет об уравнении Муаньо:

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad (1)$$

начальные условия которого  $x=0, y=0$ . Решение должно быть дано для значений  $x$  в интервале от 0 до 1.

У Муаньо по методу Коши установлено, что значения  $y(x)$  лежат между значениями двух функций, приведенными в табл. 45:

$$f(x) < y < F(x). \quad (2)$$

Этого, конечно, совершенно недостаточно для определения действительных значений функции. Более точные значения  $y(x)$  для малых значений аргумента даны у многих авторов в форме ряда, у которого вычислены коэффициенты при пяти членах:

$$y = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{7} \sqrt{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{7} x^2 + \frac{1}{49} \sqrt{\frac{2}{3}} x^{\frac{9}{4}} - \frac{2}{1715} x^{\frac{5}{2}} - \dots \quad (3)$$

Для значений  $x$ , превышающих 0,2—0,3, вычисленных членов ряда (3) уже не хватает для получения достаточно большой точности. Получаемые с помощью численного интегрирования уравнения Муаньо значения  $y(x)$  недостоверны, так как отражают погрешности способа интегрирования. Для сравнения же различных способов численного интегрирования между собою, совершенно необходимо иметь таблицу значений  $y(x)$  с числом верных

Т а б л и ц а 45

$x$	$f(x)$	$F(x)$
0	0	0
0,1	0,021	0,041
0,2	0,074	0,114
0,3	0,151	0,209
0,4	0,243	0,325
0,5	0,366	0,460
0,6	0,501	0,613
0,7	0,652	0,782
0,8	0,809	0,967
0,9	0,992	1,167
1,0	1,189	1,377

знаков, превышающим число знаков, учитываемых при приближенном интегрировании. Такую таблицу с шестью десятичными знаками мы и составим.

Начнем с замены переменных, обозначив:

$$\sqrt{x} = u, \quad \sqrt{y} = v,$$

тогда уравнение Муаньо примет вид

$$\frac{2vdv}{2udu} = u + v, \quad (4)$$

т. е.

$$vv' = u^2 + uv. \quad (5)$$

Интеграл этого уравнения будем отыскивать в виде

$$v = C_0 u^a + C_1 u^{a+b} + C_2 u^{a+2b} + \dots + C_n u^{a+nb} + \dots, \quad (6)$$

где  $a$  и  $b$  — показатели степеней, подлежащие определению.

Из (6) имеем:

$$v' = aC_0 u^{a-1} + (a+b)C_1 u^{a+b-1} + (a+2b)C_2 u^{a+2b-1} + \dots; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} vv' &= aC_0^2 u^{2a-1} + aC_0C_1 u^{2a+b-1} + aC_0C_2 u^{2a+2b-1} + \dots \\ &\quad + (a+b)C_0C_1 u^{2a+b-1} + (a+b)C_1^2 u^{2a+2b-1} + \dots \\ &\quad + (a+2b)C_0C_2 u^{2a+2b-1} + \dots \\ &= u^2 + C_0 u^{a+1} + C_1 u^{a+b+1} + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Приравняв степени  $u$  первых двух членов обеих частей равенства (8), получим

$$2a - 1 = 2, \quad 2a + b - 1 = a + 1,$$

откуда

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{1}{2}.$$

После этого, приравняв коэффициенты всех соответствующих друг другу членов правой и левой части равенства (8), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1,5C_0^2 &= 1, \\ 3,5C_0C_1 &= C_0, \\ 4C_0C_2 + 2C_1^2 &= C_1, \\ 4,5C_0C_3 + 4,5C_1C_2 &= C_2, \\ 5C_0C_4 + 5C_1C_3 + 2,5C_2^2 &= C_3, \\ 5,5C_0C_5 + 5,5C_1C_4 + 5,5C_2C_3 &= C_4, \\ &\dots \end{aligned} \quad (9)$$

Решение этой системы даст значения всех коэффициентов  $C$ :

$$\begin{aligned} C_0 &= 0,816497, & C_5 &= 0,000204, \\ C_1 &= 0,285714, & C_6 &= -0,000010, \\ C_2 &= 0,037492, & C_7 &= -0,000010, \\ C_3 &= -0,002915, & C_8 &= 0,000003, \\ C_4 &= -0,000555, \end{aligned} \quad (10)$$

Возвращаясь к основному уравнению Муаньо, имеем

$$y' = x^{0,5} + y^{0,5} = u + v = u + C_0 u^{1,5} + C_1 u^3 + C_2 u^{2,5} + C_3 u^3 + \dots = \\ = x^{0,5} + C_0 x^{0,75} + C_1 x + C_2 x^{1,25} + C_3 x^{1,5} + \dots \quad (11)$$

Интегрируя, получаем (учитывая, что при  $x=0$   $y=0$ ):

$$y = \frac{2}{3} x^{1,5} + \frac{4}{7} C_0 x^{1,75} + \frac{4}{8} C_1 x^3 + \frac{4}{9} C_2 x^{2,25} + \frac{4}{10} C_3 x^{2,5} + \dots = \\ = 0,666667 x^{1,5} + 0,466570 x^{1,75} + 0,142857 x^2 + 0,016663 x^{2,25} - \\ - 0,001166 x^{2,5} - 0,000202 x^{2,75} + 0,000068 x^3 - 0,000003 x^{3,25} - \\ - 0,000003 x^{3,5} + 0,000001 x^{3,75} + \dots \quad (12)$$

Если обозначим  $\sqrt[4]{x} = \xi$ , то получим для  $y$  формулу, записанную согласно схеме (3) гл. III:

$$y = 0,666667 \xi^6 + 0,466570 \xi^7 + \dots = \xi^6 (0,666667 + \xi (0,466570 + \\ + \xi (0,142857 + \xi (0,016663 + \xi (-0,001166 + \xi (-0,000202 + \\ + \xi (0,000068 + \xi (-0,000003 + \xi (-0,000003 + \xi \cdot 0,000001)] \quad (13)$$

Для вычисления значений  $y$  по этой формуле найдем сперва значения  $\xi$  и  $\xi^6$  для  $x=0$ ; 0,05; 0,10; ...; 1,00 (см. табл. 46).

Вычисление значений  $y$  дано в табл. 47. В табл. 48 показан ход разностей значений  $y$ . Обычно негладкость изменения шестых разностей отражает погрешности вычисления, увеличенные в 15—20 раз;

Таблица 46

$x$	$\sqrt{x} = \xi^2$	$x \sqrt{x} = \xi^6$	$\sqrt[4]{x} = \xi$
0	0		
0,05	0,223607	0,011180	0,472864
0,1	0,316228	0,031623	0,562342
0,15	0,387298	0,058095	0,622333
0,2	0,447214	0,089443	0,668740
0,25	0,500000	0,125000	0,707107
0,3	0,547723	0,164317	0,740083
0,35	0,591608	0,207063	0,769160
0,4	0,632456	0,252982	0,795271
0,45	0,670820	0,301869	0,819036
0,5	0,707107	0,353553	0,840896
0,55	0,741620	0,407891	0,861174
0,6	0,774597	0,464758	0,880112
0,65	0,806226	0,524047	0,897901
0,7	0,836660	0,585662	0,914691
0,75	0,866025	0,649519	0,930605
0,8	0,894427	0,715542	0,945741
0,85	0,921954	0,783662	0,960184
0,9	0,948683	0,853815	0,974004
0,95	0,974679	0,925945	0,987258
1,0	1,000000	1,000000	1,000000

## § 2. Графическое интегрирование.

Получив возможность проверки всех будущих расчетов, произведенных для уравнения Муаньо, перейдем к рассмотрению методов приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Начнем с графического построения кривой  $y=f(x)$ , которое всегда должно предшествовать точному численному расчету. Это графическое построение важно потому, что позволяет иметь четкое представление об



$x$	$\xi, \xi^2$	$y = 10^{-0\xi^2} \cdot (666\ 667 + \xi \cdot (466\ 570 + \xi \cdot (142\ 857 + \xi$						
0	0	0						
0,05	0,472864 0,011180	0,010296	920 933	254 266	537 715	71 145	150 457	7 800
0,1	0,562342 0,031623	0,030897	977 052	310 385	551 950	85 380	151 830	8 973
0,15	0,622333 0,058095	0,059035	1 016 184	349 517	561 623	95 053	152 737	9 880
0,2	0,668740 0,089443	0,093673	1 047 298	380 631	569 176	102 606	153 432	10 575
0,25	0,707107 0,125000	0,134198	1 073 583	406 916	575 466	108 896	154 002	11 145
0,3	0,740083 0,164317	0,180187	1 096 584	429 917	580 904	114 334	154 488	11 631
0,35	0,769160 0,207063	0,231327	1 117 182	450 515	585 724	119 154	154 914	12 057
0,4	0,795271 0,252982	0,287371	1 135 934	469 267	590 072	123 502	155 295	12 438
0,45	0,819036 0,301869	0,348119	1 153 211	486 544	594 045	127 475	155 640	12 783
0,5	0,840896 0,353553	0,413403	1 169 281	502 614	597 713	131 143	155 956	13 099
0,55	0,861174 0,407891	0,483082	1 184 342	517 675	601 127	134 557	156 248	13 391
0,6	0,880112 0,464758	0,557032	1 198 541	531 874	604 325	137 755	156 520	13 663
0,65	0,897901 0,524047	0,635143	1 211 996	545 329	607 338	140 768	156 774	13 917
0,7	0,914691 0,585662	0,717319	1 224 800	558 133	610 188	143 618	157 013	14 156
0,75	0,930605 0,649519	0,803476	1 237 032	570 365	612 897	146 327	157 239	14 382
0,8	0,945741 0,715542	0,893535	1 248 752	582 085	615 480	148 910	157 453	14 596
0,85	0,960184 0,783662	0,987424	1 260 012	593 345	617 949	151 379	157 656	14 799
0,9	0,974004 0,853815	1,085078	1 270 859	604 192	620 318	153 748	157 851	14 994
0,95	0,987258 0,925945	1,186438	1 281 327	614 660	622 593	156 023	158 037	15 180
1,0	1,000000 1,000000	1,291452	1 291 452	624 785	624 785	158 215	158 215	15 358

Таблица 47

· (16 663 + ε · (-1166 + ε · (-202 + ε · (68 + ε · (-3 + ε · (-3 + ε											
16 074	— 589	—1246	— 80	—170	32	66	—2	—4	—1	—3	0
15 956	— 707	—1258	— 92	—164	37	66	—2	—4	—1	—2	1
15 875	— 788	—1266	—100	—160	41	66	—2	—4	—1	—2	1
15 812	— 851	—1272	—106	—159	43	65	—3	—4	—1	—2	1
15 761	— 902	—1276	—110	—156	46	65	—3	—4	—1	—2	1
15 716	— 947	—1280	—114	—154	48	65	—3	—4	—1	—2	1
15 675	— 988	—1284	—118	—153	49	64	—4	—5	—2	—2	1
15 640	—1023	—1286	—120	—151	51	64	—4	—5	—2	—2	1
15 607	—1056	—1289	—123	—150	52	64	—4	—5	—2	—2	1
15 578	—1085	—1290	—124	—148	54	64	—4	—5	—2	—2	1
15 550	—1113	—1293	—127	—147	55	64	—4	—5	—2	—2	1
15 524	—1139	—1294	—128	—146	56	64	—4	—5	—2	—2	1
15 499	—1164	—1296	—130	—145	57	64	—4	—5	—2	—2	1
15 476	—1187	—1298	—132	—144	58	63	—5	—5	—2	—2	1
15 454	—1209	—1300	—134	—143	59	63	—5	—5	—2	—2	1
15 433	—1230	—1301	—135	—142	60	63	—5	—5	—2	—2	1
15 413	—1250	—1302	—136	—141	61	63	—5	—5	—2	—2	1
15 394	—1269	—1303	—137	—140	62	63	—5	—5	—2	—2	1
15 376	—1287	—1304	—138	—139	63	63	—5	—5	—2	—2	1
15 358	—1305	—1305	—139	—139	63	63	—5	—5	—2	—2	1

особенностях процесса интегрирования, о выборе правильной величины интервала интегрирования, о могущих встретиться трудностях и т. д. В некоторых случаях, когда не требуется достижения особенно высокой степени точности,

Т а б л и ц а 48

$x$	$y$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$	$\Delta^6$
0	0						
0,05	0,010296	10 296					
0,1	0,030897	20 601	10 305	—2768			
0,15	0,059035	28 138	7 537	—1037	1731	—1307	
0,2	0,093673	34 638	6 500	— 613	424	— 234	1073
0,25	0,134198	40 525	5 887	— 423	190	— 80	154
0,3	0,180187	45 989	5 464	— 313	110	— 44	36
0,35	0,231327	51 140	4 904	— 247	66	— 19	25
0,4	0,287371	56 044	4 704	— 200	47	— 15	4
0,45	0,348119	60 748	4 536	— 168	32	— 5	10
0,5	0,413403	65 284	4 395	— 141	27	— 10	— 5
0,55	0,483082	69 679	4 271	— 124	17	— 3	7
0,6	0,557032	73 950	4 271	— 110	14	0	3
0,65	0,635143	78 111	4 161	— 96	14	— 2	— 2
0,7	0,717319	82 176	4 065	— 84	12	— 7	— 5
0,75	0,803476	86 157	3 981	— 79	5	2	9
0,8	0,893535	90 059	3 902	— 72	7	0	— 2
0,85	0,987424	93 889	3 830	— 65	7	— 1	— 1
0,9	1,085078	97 654	3 765	— 59	6	1	2
0,95	1,186438	101 360	3 706	— 52	7		
1,0	1,291452	105 014	3 654				

графическое решение может оказаться и окончательным; поэтому мы рассмотрим его детально.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \quad (14)$$

Задавшись некоторыми постоянными значениями производной

$$y' = y'_1, \quad y' = y'_2, \dots, \quad y' = y'_n, \dots,$$

мы можем получить семейство кривых, называемых изоклинами, с уравнениями

$$\begin{aligned} F(x, y, y'_1) &= 0, \text{ или } y = \Phi_1(x); \\ F(x, y, y'_2) &= 0, \text{ или } y = \Phi_2(x); \\ &\dots \dots \dots \\ F(x, y, y'_n) &= 0, \text{ или } y = \Phi_n(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Эти кривые обладают тем свойством, что пересечение кривой  $y = f(x)$  с кривой  $y = \Phi_n(x)$  происходит в точке, в которой  $f'(x) = y'_n$ .

Заменяем отрезок кривой  $y = f(x)$  между изоклинами  $y = \Phi_n(x)$  и  $y = \Phi_{n+1}(x)$  его хордой (см. рис. 62). Если предположить, что отрезок кривой  $y = f(x)$  имеет параболическое очертание (что при достаточно малой длине отрезка будет сколь угодно близко к действительности), то тангенс угла наклона хорды к оси абсцисс будет равен среднему арифметическому из значений  $f'(x)$  на этих двух изоклинах:

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{y'_n + y'_{n+1}}{2}. \quad (16)$$

Это дает возможность построить кривую  $y = f(x)$  в виде ломаной, вершины которой, лежащие на изоклинах, близки к точкам истинной кривой.

Доведя ломаную до изоклины  $y = \Phi_n(x)$ , следующий участок ломаной проводим под углом  $\alpha_n$  до пересечения со следующей изоклиной и т. д., пока не получим кривую  $y = f(x)$  на всем протяжении интегрирования.

На рис. 63 дано построение искомой функции  $y(x)$  для уравнения Муаньо с начальным условием  $x=0, y=0$ . Для вычерчивания изоклин предварительно проведены вертикальные и горизонтальные прямые:

$$\sqrt{x} = \text{const} \text{ и } \sqrt{y} = \text{const}.$$

Эти прямые образуют сетку, через узлы которой и проходят изоклины. Для построения отрезков ломаной даны направления с соответствующими тангенсами угла наклона от начала координат к помеченным наклонным линиям.

Построение ломаной дает при  $x=1$  значение  $y=1,28$ , т. е. погрешность порядка 1%.

На рис. 63 дано все семейство изоклин, строить которое полностью, конечно, не требуется. Достаточно иметь маленькие кусочки изоклин в районах пересечения с надстраиваемой ломаной; эти отрезки изоклин можно считать прямолинейными и проводить их по двум точкам. Покажем, как поступать при построении ломаной для кривой  $y(x)$  в случае уравнения Муаньо.

Пусть мы дошли до точки ломаной, лежащей на изоклине  $y' = 1,2$  (рис. 64). Мысленно удлиняем ломаную еще на один отрезок. Очевидно, что для изоклины 1,3 достаточно взять две точки с абсциссами 0,46 и 0,48. Имеем:

$$1) y = (1,3 - \sqrt{0,46})^2 = 0,387,$$

$$2) y = (1,3 - \sqrt{0,48})^2 = 0,368.$$

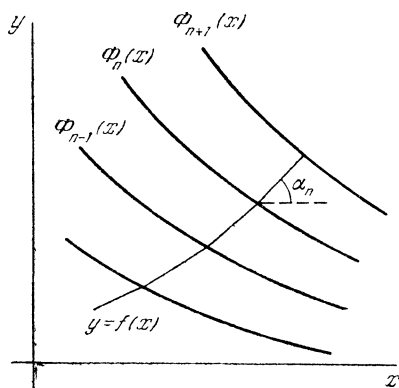


Рис. 62.

Через точки  $(0,46; 0,387)$  и  $(0,48; 0,368)$  проводим искомый отрезок изоклины  $y' = 1,3$ . Затем прочерчиваем от изоклины 1,2 прямую с наклоном 1,25 до изоклины 1,3 и идем дальше.

Построив всю ломаную, можем сделать следующий вывод: по мере приближения к началу координат, изоклины пересекают ломаную все чаще и чаще.

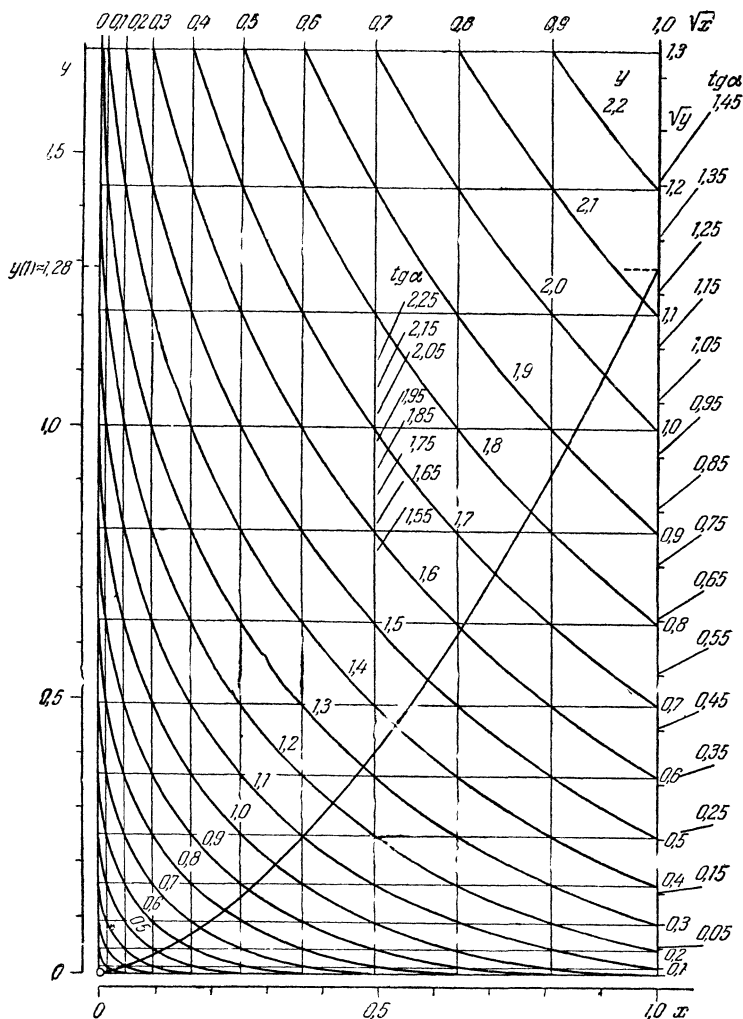


Рис. 63.

Это говорит об увеличении быстроты изменения  $y'$ , или, что то же самое, об увеличении второй производной  $y''$ . В начале координат вторая производная будет, очевидно, иметь наибольшее значение. Действительно, если продифференцируем выражение для  $y'$ , то получим

$$y'' = (\sqrt{x} + \sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}}. \quad (17)$$

Даже не анализируя величины второго члена, из первого члена мы видим, что при  $x=0$  вторая производная обращается в бесконечность вне зависи-

мости от величины ординаты. Это обстоятельство сильно затрудняет интегрирование уравнения Муаньо вблизи начала координат.

**§ 3. Способ Пикара.** Имея решение уравнения — кривую  $y(x)$ , полученную с недостаточной точностью, и желая ее уточнить, можно применить способ Пикара, заключающийся в следующем.

Пусть исследуемое дифференциальное уравнение первого порядка можно представить в виде

$$y' = F(x, y). \quad (18)$$

Если мы подставим в (18) вместо точных значений  $y$  имеющиеся у нас приближенные значения  $y_{(1)}$ , то получим для  $y'$  в большинстве случаев значения, весьма мало отличающиеся от точных:

$$y'_{(1)} = F(x, y_{(1)}). \quad (19)$$

Получив  $y'_{(1)}$ , мы можем построить интегральную кривую, как было показано в § 13, 14 гл. VII:

$$y_{(2)} = y_a + \int_a^x y'_{(1)} dx. \quad (20)$$

Имея  $y_{(2)}$ , вычислим значения

$$y'_{(2)} = F(x, y_{(2)}) \quad (21)$$

в новом приближении, снова построим интегральную кривую и т. д., пока не получим двух тождественных циклов вычислений (если процесс является сходящимся).

Покажем такое уточнение на примере уравнения Муаньо. Выпишем с интервалом по абсциссам, равным 0,05, значения  $y$ , снятые с кривой рис. 63, вычислим  $y'$  и проинтегрируем, применяя формулу (110) гл. VII. Вычисление дано в табл. 49.

Получив новые значения  $y$ , вторично вычислим значения  $y'$  и снова проинтегрируем — получим табл. 50.

Поскольку мы имеем точные значения  $y$ , сравним результаты двух уточняющих циклов вычислений с точными значениями. Получим погрешности  $\delta$ , приведенные в последнем столбце обеих таблиц.

Значения погрешностей, данные в табл. 49 в единицах четвертого десятичного знака, а в табл. 50 в единицах пятого знака, показывают нам, что процесс уточнения может достигнуть цели, но весьма медленно. Кроме того, даже получив какие-то предельные значения  $y$ , мы не сможем быть вполне уверенными в том, что эти значения являются точными, а не отражают погрешностей, скрывающихся в способе построения интегральной кривой.

Действительно, если вычислим совершенно точные значения  $y'$  на основании известных нам значений  $y$ , то окажется, что интегрирование по формуле четырех ординат приводит примерно к тем же значениям  $y$  (см. табл. 51); если же пользоваться формулой трапеций (табл. 52), то ошибки получаются

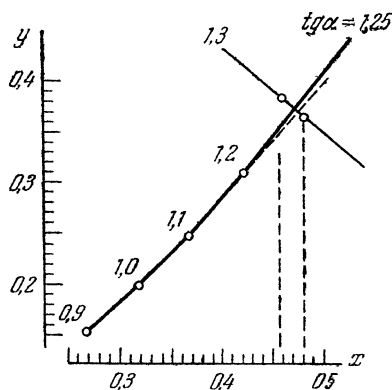


Рис. 64.

Т а б л и ц а 49

$x$	$y$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$13y'$	$\Sigma$	$\Delta y = \frac{\Sigma}{480}$	$y$	$\delta$
0	0,00000	0	0	0	4,2263	9,9901	0,0208	0	0
0,05	0,01030	0,2236	0,1015	0,3251	6,3960	13,5341	0,0282	0,0103	2
0,10	0,03090	0,3162	0,1758	0,4920	8,2186	16,6794	0,0347	0,0311	3
0,15	0,060	0,3873	0,2449	0,6322	9,8202	10,4922	0,0406	0,0593	3
0,20	0,095	0,4472	0,3082	0,7554	11,2762	22,0856	0,0460	0,0940	4
0,25	0,135	0,5000	0,3674	0,8674	12,6360	24,5279	0,0511	0,1346	4
0,30	0,180	0,5477	0,4243	0,9720	13,9256	26,8574	0,0560	0,1806	4
0,35	0,230	0,5916	0,4796	1,0712	15,1619	29,0986	0,0606	0,2317	3
0,40	0,285	0,6325	0,5338	1,1663	16,3553	31,2708	0,0651	0,2877	2
0,45	0,345	0,6708	0,5873	1,2581	17,5162	33,3857	0,0696	0,3483	0
0,50	0,410	0,7071	0,6403	1,3474	18,6472	35,4515	0,0738	0,4134	-1
0,55	0,480	0,7416	0,6928	1,4344	19,7548	37,4784	0,0781	0,4830	-2
0,60	0,555	0,7746	0,7450	1,5196	20,8403	39,4274	0,0821	0,5568	-2
0,65	0,635	0,8062	0,7969	1,6031	21,8699	41,3480	0,0861	0,6349	-3
0,70	0,715	0,8367	0,8456	1,6823	22,9216	43,2475	0,0901	0,7170	-4
0,75	0,805	0,8660	0,8972	1,7632	23,9252	45,0927	0,0939	0,8031	-3
0,80	0,895	0,8944	0,9460	1,8404				0,8932	

$x$	$y$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$13y'$	$\Sigma$	$\Delta y = \frac{\Sigma}{480}$	$y$	$\delta$
0,85	0,990	0,9220	0,9950	1,9170	24,9210	46,8935	0,0977	0,9871	—3
0,90	1,085	0,9487	1,0416	1,9903	25,8739	48,6185	0,1013	1,0848	—3
0,95	1,180	0,9747	1,0863	2,0610	26,7930	50,3095	0,1048	1,1861	—3
1,00	1,280	1,0000	1,1314	2,1314	27,7082			1,2909	—5

Таблица 50

$x$	$y$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$13y'$	$\Sigma$	$\Delta y = \frac{\Sigma}{480}$	$y$	$\delta$
0	0	0	0	0				0	0
0,05	0,0103	0,2236	0,1015	0,3251		13,5175	0,02816	0,01030	
0,10	0,0309	0,3162	0,1758	0,4920	6,3960	16,6409	0,03469	0,03090	2
0,15	0,0593	0,3873	0,2435	0,6308	8,2004	19,4656	0,04055	0,05906	8
0,20	0,0940	0,4472	0,3066	0,7538	9,7994	22,0880	0,04602	0,09375	10
0,25	0,1346	0,5000	0,3669	0,8669	11,2697	24,5583	0,05116	0,13430	13
0,30	0,1806	0,5477	0,4250	0,9727	12,6451	26,9110	0,05606	0,18032	15
0,35	0,2317	0,5916	0,4814	1,0730	13,9490	29,1656	0,06076	0,23148	17
0,40	0,2877	0,6325	0,5364	1,1689	15,1957			0,28754	



Продолжение

$x$	$y$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$13y'$	$\Sigma$	$\Delta y = \frac{\Sigma}{480}$	$y$	$\delta$
0,45	0,3483	0,6708	0,5902	1,2610	16,3930	31,3388	0,06529	0,34830	18
0,50	0,4134	0,7071	0,6430	1,3501	17,5513	33,4453	0,06968	0,41359	19
0,55	0,4830	0,7416	0,6950	1,4366	18,6758	35,4931	0,07395	0,48327	19
0,60	0,5568	0,7746	0,7462	1,5208	19,7704	37,4893	0,07810	0,55722	19
0,65	0,6349	0,8062	0,7968	1,6030	20,8390	39,4415	0,08219	0,63532	18
0,70	0,7170	0,8367	0,8468	1,6835	21,8855	41,3516	0,08615	0,71751	19
0,75	0,8031	0,8660	0,8962	1,7622	22,9086	43,2231	0,09005	0,80366	18
0,80	0,8932	0,8944	0,9451	1,8395	23,9135	45,0625	0,09388	0,89371	17
0,85	0,9871	0,9220	0,9935	1,9155	24,9015	46,8721	0,09765	0,98759	17
0,90	1,0848	0,9487	1,0416	1,9903	25,8739	48,6516	0,10136	1,08524	16
0,95	1,1861	0,9747	1,0891	2,0638	26,8294	50,4023	0,10500	1,18660	16
1,00	1,2909	1,0000	1,1362	2,1362	27,7706			1,29160	15

весьма ощутимыми, и совершенно неизвестно, какие результаты мы получим из-за несовершенства способа интегрирования.

Конечно, можно уменьшить раза в два величину интервалов  $h$ ; однако в итоге трудоемкость вычислительного процесса становится неоправданно

Таблица 51

$x$	$y$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$13y'$	$\Sigma$	$\Delta y = \frac{\Sigma}{480}$	$y$	$\delta$
0	0	0	0	0					
0,05	0,01030	0,2236	0,1015	0,3251				0,01030	
0,10	0,03090	0,3162	0,1758	0,4920	6,3960			0,03090	0
						13,5115	0,02815		
0,15	0,05904	0,3873	0,2430	0,6303	8,1939			0,05905	1
						16,6285	0,03481		
0,20	0,09367	0,4472	0,3061	0,7533	9,7929			0,09369	2
						19,4523	0,04053		
0,25	0,13420	0,5000	0,3663	0,8663	11,2619				
0,30	0,18019	0,5477	0,4245	0,9722	12,6386			0,13422	2

Таблица 52

$x$	$y$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$\Sigma$	$\Delta y = \frac{\Sigma}{40}$	$y$	$\delta$
0	0	0	0	0				
0,05	0,01030	0,2236	0,1015	0,3251			0,01030	0
					0,8171	0,02043		
0,10	0,03090	0,3162	0,1758	0,4920			0,03063	—27
					1,1223	0,02806		
0,15	0,05904	0,3873	0,2430	0,6303			0,05869	—35
					1,3836	0,03459		
0,20	0,09367	0,4472	0,3061	0,7533			0,09328	—39
					1,6196	0,04049		
0,25	0,13420	0,5000	0,3663	0,8663			0,13377	—43
					1,8385	0,04596		
0,30	0,18019	0,5477	0,4245	0,9722			0,17973	—46

большой, и можно сказать с речательством, что практическое применение способа Пикара, особенно при получении значительного количества точек интегральной кривой, малоцелесообразно. Поэтому мы не будем задерживаться на этом способе, теоретически применим и к уравнениям высших порядков, и к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, но с еще большей затратой труда и времени. Перейдем ко второму способу — способу Рунге.

**§ 4. Способ Рунге.** Способ Рунге, применяемый в настоящее время из-за его значительной трудоемкости лишь при машинном вычислении, заключается в следующем.

Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (22)$$

с начальным условием  $x = x_0, y = y_0$ .

Допустим, что интегрируя это уравнение, мы дошли до точки интегральной кривой с координатами

$$(x_k, y_k)$$

и хотим перейти к точке

$$(x_{k+1}, y_{k+1}),$$

где

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Для этого нужно вычислить значения функции  $f(x, y)$  для четырех точек (см. рис. 65):

$$\begin{aligned} T_1 &= f(x_k, y_k) = y'(M_1) = \operatorname{tg} \alpha_1, \\ T_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} T_1\right) = y'(M_2) = \operatorname{tg} \alpha_2, \\ T_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} T_2\right) = y'(M_3) = \operatorname{tg} \alpha_3, \\ T_4 &= f(x_k + h, y_k + h T_3) = y'(M_4) = \operatorname{tg} \alpha_4, \end{aligned} \quad (23)$$

после чего  $y_{k+1}$  определяется как сумма:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4). \quad (24)$$

Способ Рунге, как мы видим, требует вычисления на каждом интервале интегрирования четырех значений производной  $y'(x, y)$  и вследствие этого является весьма трудоемким, почему его и нельзя рекомендовать для применения при ручном вычислении.

Основывается метод Рунге на том, что комбинация (24) удовлетворяет ряду Тэйлора

$$y_{k+1} = y_k + h y'_k + \frac{h^2}{2} y''_k + \frac{h^3}{6} y'''_k + \frac{h^4}{24} y^{IV}_k + \dots \quad (25)$$

для всех членов его до  $\frac{h^4}{24} y^{IV}$  включительно.

Мы не будем приводить здесь доказательство метода Рунге, ввиду его сложности, поскольку не предполагаем использовать этот метод в дальнейшем.\*)

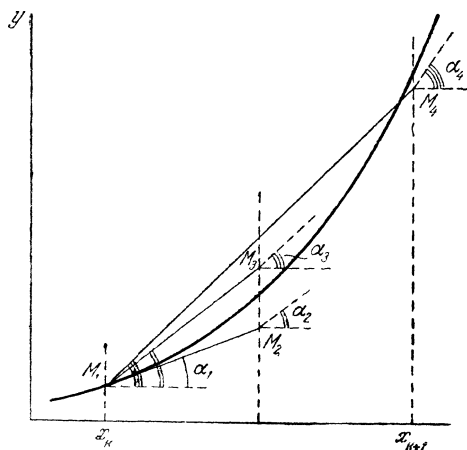


Рис. 65.

Покажем лишь на примере нескольких строк интегрирования уравнения Муаньо всю утомительность вычислений по методу Рунге, усугубляющуюся невозможностью оценки степени точности, достигаемой при его использовании.

Сначала отправной точкой возьмем  $(0, 0)$  при интервале  $h = 0,05$  (см. табл. 53). Проведя расчет для первых трех интервалов и проверив по эталонному расчету погрешности  $\delta$ , мы видим быстрое нарастание ошибки. Причиной этого является влияние производных высших порядков, которые в начале расчета имеют бесконечные значения.

Хотя в вычислениях по методу Рунге высшие производные и не участвуют, однако то обстоятельство, что метод верен лишь для первых пяти членов ряда Тэйлора (остальные же члены, если они не пренебрежимо малы,

\*) Доказательство метода Рунге см., например, в кн.: Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1954, стр. 293.

Таблица 53

$x$	$y$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$\sqrt{x_i}$	$\sqrt{y_i}$	$y'_i$	$\frac{h}{2} y'_i$	$hy'_i$	$\Sigma \frac{h}{6} = \Delta y$
$x_k$	$y_k$	$x_{(1)} = x_k$ $x_{(2)} = x_k + \frac{h}{2}$ $x_{(3)} = x_k + \frac{h}{2}$ $x_{(4)} = x_k + h$	$y_{(1)} = y_k$ $y_{(2)} = y_k + \frac{h}{2} T_1$ $y_{(3)} = y_k + \frac{h}{2} T_2$ $y_{(4)} = y_k + h T_3$	$\sqrt{x_{(1)}}$ $\sqrt{x_{(2)}}$ $\sqrt{x_{(3)}}$ $\sqrt{x_{(4)}}$	$\sqrt{y_{(1)}}$ $\sqrt{y_{(2)}}$ $\sqrt{y_{(3)}}$ $\sqrt{y_{(4)}}$	$T_1$ $T_2$ $T_3$ $T_4$	$\frac{h}{2} T_1$ $\frac{h}{2} T_2$ — —	— — $h T_3$ —	$\Sigma$  $\Delta y_k$
0	0	0 0,025 0,025 0,05	0 0 0,00395 0,01104	0 0,15811 0,15811 0,22361	0 0 0,06285 0,10507	0 0,15811 0,22096 0,32868	0 0,00395  0,01104	   0,01104	1,08682 0,31622 0,44192 0,32868
0,05	0,00906 (—124)	0,05 0,075 0,075 0,110	0,00906 0,01703 0,01917 0,02968	0,22361 0,27386 0,27386 0,31623	0,09518 0,13050 0,13845 0,17228	0,31879 0,40436 0,41231 0,48851	0,00797 0,01011  0,02062	   0,02062	2,44064 0,80872 0,82462 0,48851
0,10	0,02940 (—150)	0,10 0,125 0,125 0,150	0,02940 0,04159 0,04334 0,05749	0,31623 0,35355 0,35355 0,38730	0,17146 0,20393 0,20818 0,23977	0,48769 0,55748 0,56173 0,62707	0,01219 0,01394  0,02809	   0,02809	3,35318 1,11496 1,12346 0,62707
0,15	0,05734 (—170)								

вносят в расчет ошибку), не позволяет получить достаточно большой точности при расчете от начала координат.

Поскольку и все остальные методы также теряют точность в таких особых случаях, вследствие чего мы будем начинать вычисления от предварительно полученной с помощью ряда

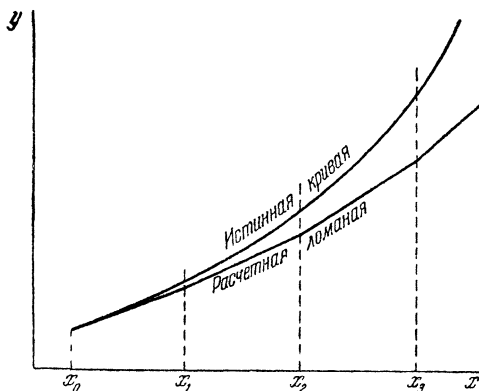


Рис. 66.

(13) точки  $(0,1; 0,03090)$ , то повторим расчет по методу Рунге, также отойдя от этой опорной точки. Получим табл. 54, в которой вычисленные значения  $y$  являются совершенно точными.

К сожалению, мы не имеем никакой возможности судить о качестве результатов. Расчеты табл. 53 и 54 друг от друга ничем не отличаются с точки зрения качественной, и единственным способом убедиться в правильности второго расчета является уменьшение интервала (хотя бы одного) в два раза и просчет по двум половинкам интервала. Но де-

лать восемь вычислений производной для проверки одной точки расчета совершенно невозможно, поскольку он и без того чрезвычайно утомителен. Особенно неприятным является чередование разнотипных операций, что не дает вычислителю возможности сосредоточиться и приводит подчас к грубым ошибкам даже у опытных работников.

**§ 5. Способ Эйлера.** Прежде чем перейти к так называемым „разностным“ методам, использующим для интегрирования уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (26)$$

значения производной и нескольких ее разностей, упомянем о лежащем в их основе наиболее раннем методе приближенного интегрирования—методе Эйлера. Этот метод заключается в том, что, имея точку интегральной кривой с координатами  $(x_k, y_k)$ , вычисляют

$$y'_k = f(x_k, y_k); \quad (27)$$

затем, пренебрегая влиянием производных более высоких порядков, для точки  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ , где  $x_{k+1} = x_k + h$ , полагают значение  $y_{k+1}$  равным

$$y_{k+1} = y_k + h y'_k. \quad (28)$$

Метод Эйлера прост, но практически неприменим из-за быстрого нарастания погрешности расчета, которое можно представить себе графически (рис. 66). Заменяя отрезок истинной интегральной кривой отрезком прямой, касательной к ней, мы на протяжении интервала  $h$  несколько отдаляемся от кривой. Вычисляя в новой точке значение производной, мы получаем некоторую погрешность, обусловленную различием расчетной и истинной ординат интегральной кривой. К этой погрешности добавляется новая погрешность от замены кривой прямолинейным отрезком и т. д. В результате точность расчета оказывается настолько невысокой, что он теряет практический смысл.

Уменьшение величины интервалов увеличивает точность расчета, но незначительно; можно приближенно считать, что погрешность пропорциональна величине интервала  $h$ , и, следовательно, для увеличения точности в десять раз

Таблица 54

[illegible]

надо во столько же раз увеличить количество вычислений, получая при этом лишь один добавочный верный знак результата.

Для примера рассмотрим интегрирование методом Эйлера уравнения Муаньо, начав с точки (0,1; 0,03090); получим табл. 55. Затем уменьшим вдвое величину интервала интегрирования; получим табл. 56. Нарастание погрешности при половинном интервале идет вдвое медленнее, чем при основном.

Т а б л и ц а 55

$x$	$y$	$\delta$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$\Delta y = hy'$
0,10	0,0309	0	0,3162	0,1758	0,4920	0,0246
0,15	0,0555	— 35	0,3873	0,2356	0,6229	0,0311
0,20	0,0866	— 70	0,4472	0,2943	0,7415	0,0371
0,25	0,1237	—105	0,5000	0,3517	0,8517	0,0426
0,30	0,1663	—138	0,5477	0,4078	0,9555	0,0478
0,35	0,2141	—170	0,5916	0,4627	1,0543	0,0527
0,40	0,2668	—204	0,6325	0,5165	1,1490	0,0574
0,45	0,3242	—239	0,6708	0,5694	1,2402	0,0620
0,50	0,3862	—272				

Недостаточность учета одной лишь первой производной побудила Эйлера ввести в расчетную формулу также и члены, содержащие производные более высоких порядков. В результате получился расчет с переходом от одной точки к другой при помощи отрезка ряда Тэйлора. Он сопряжен с необходимостью вычисления нескольких производных по различным формулам и применяется лишь для начала расчета в других методах.

Т а б л и ц а 56

$x$	$y$	$\delta$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$\Delta y = hy'$
0,10	0,0309	0	0,3162	0,1758	0,4920	0,0123
0,125	0,0432		0,3536	0,2078	0,5614	0,0140
0,150	0,0572	— 18	0,3873	0,2392	0,6265	0,0157
0,175	0,0729		0,4183	0,2700	0,6883	0,0172
0,200	0,0901	— 36	0,4472	0,3002	0,7474	0,0187
0,225	0,1088		0,4743	0,3298	0,8041	0,0201
0,250	0,1289	— 53	0,5000	0,3590	0,8590	0,0215
0,275	0,1504		0,5244	0,3878	0,9122	0,0228
0,300	0,1732	— 70	0,5477	0,4162	0,9639	0,0241
0,325	0,1973		0,5700	0,4442	1,0142	0,0254
0,350	0,2227	— 86	0,5916	0,4719	1,0635	0,0266
0,375	0,2493		0,6123	0,4993	1,1116	0,0278
0,400	0,2771	—103	0,6325	0,5264	1,1589	0,0290
0,425	0,3061		0,6519	0,5533	1,2052	0,0301
0,450	0,3362	—119	0,6708	0,5798	1,2506	0,0313
0,475	0,3675		0,6892	0,6062	1,2954	0,0324
0,500	0,3999	—135	0,7071			

**§ 6. Способ Адамса.** Разностные методы основаны на применении интерполяционной формулы Грегори—Ньютона. Если придавать индекс  $k$  разностям функции, стоящим на уровне  $k$ -й строки, то на основании схемы

табл. 57 мы, для значений  $n$  как целых, так и дробных, получим:

1) при учете разностей, идущих наклонно вниз (подчеркнуты прямой чертой),

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1!} \Delta_{0,5} y + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta_{1,5} y + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta_{1,5} y + \dots \quad (29)$$

2) при учете разностей, идущих наклонно вверх (подчеркнуты волнистой чертой),

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1!} \Delta_{-0,5} y + \frac{n(n+1)}{2!} \Delta_{-1,5} y + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \Delta_{-1,5} y + \dots \quad (30)$$

В последнем случае, при положительном  $n$  формула (30) будет служить уже для целей экстраполяции, а не интерполяции, что именно нам и нужно.

Т а б л и ц а 57

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
-4	$x_0 - 4h$	$y_{-4}$				
-3	$x_0 - 3h$	$y_{-3}$	$\Delta_{-3,5} y$	$\Delta_{-3}^2 y$		
-2	$x_0 - 2h$	$y_{-2}$	$\Delta_{-2,5} y$	$\Delta_{-2}^2 y$	$\Delta_{-2,5}^3 y$	
-1	$x_0 - h$	$y_{-1}$	$\Delta_{-1,5} y$	$\Delta_{-1}^2 y$	$\Delta_{-1,5}^3 y$	$\Delta_{-2}^4 y$
0	$x_0$	$y_0$	$\Delta_{-0,5} y$	$\Delta_0^2 y$	$\Delta_{-0,5}^3 y$	$\Delta_{-1}^4 y$
			$\Delta_{0,5} y$	$\Delta_1^2 y$	$\Delta_{0,5}^3 y$	$\Delta_0^4 y$
1	$x_0 + h$	$y_1$		$\Delta_{1,5} y$	$\Delta_{1,5}^3 y$	
2	$x_0 + 2h$	$y_2$	$\Delta_{2,5} y$	$\Delta_2^2 y$	$\Delta_{2,5}^3 y$	$\Delta_1^4 y$
3	$x_0 + 3h$	$y_3$	$\Delta_{3,5} y$	$\Delta_3^2 y$		
4	$x_0 + 4h$	$y_4$				

Пусть уравнение, которое нужно численно проинтегрировать, есть

$$y' = f(x, y). \quad (31)$$

Обозначая

$$hy' = \eta,$$

перепишем уравнение (31) в виде

$$\eta = hf(x, y) = \varphi(x, y). \quad (32)$$

Составим схему табл. 58, причем для упрощения записи вместо  $\Delta_m^k \eta$  будем писать просто  $\Delta_m^k$ .

Для того чтобы получить приращение  $y$  за интервал от  $x = x_0$  до  $x = x_1 = x_0 + h$ , мы должны вычислить интеграл

$$\Delta_{0,5} y = y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} y' dx = \int_{\frac{x_0}{h}}^{\frac{x_1}{h}} hy' d \frac{x}{h} = \int_0^1 \eta dn \quad (33)$$

(так как  $n = \frac{x - x_0}{h}$ ).



Применяя формулу Грегори—Ньютона, получим:

$$\Delta_{0,5}y = \int_0^1 \left[ \eta_0 + \frac{n}{1!} \Delta_{-0,5} + \frac{n(n+1)}{2!} \Delta_{-1}^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \Delta_{-1,5}^3 + \dots \right] dn, \quad (34)$$

что после раскрытия круглых скобок и почленного интегрирования дает ряд, служащий основой метода Адамса:

$$\begin{aligned} \Delta_{0,5}y = & \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta_{-0,5} + \frac{5}{12} \Delta_{-1}^2 + \frac{3}{8} \Delta_{-1,5}^3 + \frac{251}{720} \Delta_{-2}^4 + \frac{95}{288} \Delta_{-2,5}^5 + \frac{19\,087}{60\,480} \Delta_{-3}^6 + \\ & + \frac{5257}{17\,280} \Delta_{-3,5}^7 + \frac{1\,070\,017}{3\,628\,800} \Delta_{-4}^8 + \frac{2\,082\,753}{7\,257\,600} \Delta_{-4,5}^9 + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Английский астроном Адамс, одновременно с Леверье и независимо от последнего, занимался исследованием неправильностей движения планеты Уран.

Т а б л и ц а 58

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$\eta$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$\Delta^4 \eta$
-4	$x_0 - 4h$	$y_{-4}$		$\eta_{-4}$				
-3	$x_0 - 3h$	$y_{-3}$	$\Delta_{-3,5}y$	$\eta_{-3}$	$\Delta_{-3,5}$	$\Delta_{-3}^2$		
-2	$x_0 - 2h$	$y_{-2}$	$\Delta_{-2,5}y$	$\eta_{-2}$	$\Delta_{-2,5}$	$\Delta_{-2}^2$	$\Delta_{-2,5}^3$	
-1	$x_0 - h$	$y_{-1}$	$\Delta_{-1,5}y$	$\eta_{-1}$	$\Delta_{-1,5}$	$\Delta_{-1}^2$	$\Delta_{-1,5}^3$	$\Delta_{-2}^4$
0	$x_0$	$y_0$	$\Delta_{-0,5}y$	$\eta_0$	$\Delta_{-0,5}$			
1	$x_0 + h$	$y_1$	$\Delta_{0,5}y$					

Оба исследователя пришли к выводу, что причиной этих неправильностей является некая, еще до того времени не обнаруженная, планета (впоследствии названная Нептуном). Но в то время как Леверье пришел к уравнению шестой степени, корни которого давали ключ к координатам Нептуна, Адамс разработал метод численного интегрирования полученных им дифференциальных уравнений, также вполне точно установивший местоположение теоретически открытой планеты. С 1845 г. способ Адамса является классическим методом численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и их систем, и хотя на его базе развита система улучшенных методов, он не потерял прикладного значения и до нашего времени.

**§ 7. Пример к способу Адамса.** Рассмотрим со всеми подробностями пример применения метода Адамса (на уравнении Муаньо), поскольку многие детали этого расчета пригодятся и при исследовании других методов численного интегрирования. Итак, дано уравнение

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (36)$$

с начальным условием  $x=0$ ,  $y=0$ , для которого разложением в ряд мы вычислили точку, лежащую на интегральной кривой — (0,1; 0,03090). От этой точки и поведем расчет, взяв интервал равным 0,025, т. е. применяя вычислительную формулу (35) к уравнению

$$\eta = 0,025 (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{40}. \quad (37)$$

Вычислительная схема дана в табл. 59.

Когда вычисление уже начато и прошло несколько интервалов, дальнейшее вычисление очередных значений функции не представляет никаких труд-

Т а б л и ц а 59

$x$	$y$	$\delta$	$\Delta y$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$\eta = \frac{y'}{40}$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\frac{1}{2}\Delta$	$\frac{5}{12}\Delta^2$	$\frac{3}{8}\Delta^3$	$z$
0,100	0,03090	0		0,31623	0,17578	0,49201	0,01230							
0,125	0,04320		0,01230	0,35355	0,20785	0,56140	0,01404	174						
0,150	0,05811	-93	0,01491	0,38730	0,24106	0,62836	0,01571	167	-7		87			87
0,175	0,07468		0,01657	0,41833	0,27328	0,59161	0,01729	158	-9		83	-3		86
										-2				
									-3	3				
0,100	0,03090	0		0,31623	0,17578	0,49201	0,01230	179	0		89	-1	-1	88
0,125	0,04408		0,01318	0,35355	0,20995	0,56350	0,01409	179	-12		89	0	1	90
0,150	0,05907	3	0,01499	0,38730	0,24304	0,63034	0,01576	167	-10		83	-5	-4	74
0,175	0,07557		0,01650	0,41833	0,27490	0,69323	0,01733	157						
										2				
									-16	2				
0,100	0,03090	0		0,31623	0,17578	0,49201	0,01230	193						
0,125	0,04412		0,01322	0,35355	0,21005	0,56360	0,01409	179	-14		96	-6	1	92
0,150	0,05905	1	0,01493	0,38730	0,24300	0,63030	0,01575	166	-13		89	-6	1	84
0,175	0,07558		0,01653	0,41833	0,27492	0,69325	0,01733	158	-8		83	-5	0	78
0,200	0,09368	1	0,01810	0,44721	0,30607	0,75328	0,01883	150	-8		79	-3	2	77
0,225	0,11323		0,01955	0,47434	0,33650	0,81084	0,02027	144	-6		75	-3	0	72
0,250	0,13420	0	0,02097	0,50000	0,36633	0,86633	0,02166	139	-5		72	-2	0	70
0,275	0,15654		0,02234	0,52440	0,39565	0,92005	0,02300	134	-5		69	-2	0	68
0,300	0,18019	0	0,02365	0,54772	0,42448	0,97220	0,02430	130	-4		67	-2	0	65
0,325	0,20513		0,02494	0,57009	0,45292	1,02301	0,02558	128	-2		65	-1	0	64
0,350	0,23135	2	0,02622	0,59161	0,48099	1,07260	0,02682	124	-4		64	-1	1	64
											62	-1	-0	60

ностей; много сложнее начало вычисления. Дело в том, что вначале мы не имеем разностей функции  $\eta$ , и для их нахождения надо либо подойти к их значениям с помощью ряда последовательных приближений, либо получить их, вычислив несколько значений  $\eta$  непосредственно с помощью ряда Тейлора или Маклорена. Второй путь для нас ясен, поскольку мы пользовались им для получения таблицы эталонных значений  $y(x)$ ; поэтому рядом мы восполь-

зуемся лишь для проверки, а начнем вычисление путем последовательных приближений, что является единственным доступным в тех случаях, когда производных от  $y$  высоких порядков вычислить нельзя или когда это вычисление сопряжено с большим вычислительным трудом.

При составлении расчета, данного в табл. 59, рабочей формулой будет

$$\Delta y = \eta + \frac{1}{2} \Delta + \frac{5}{12} \Delta^2 + \frac{3}{8} \Delta^3. \quad (38)$$

Большого числа разностей учитывать не нужно, так как из-за негладкости их хода они вносят в расчет больше беспорядка, чем уточнения.

В начале расчета мы имеем лишь одно число  $\eta = 0,01230$  и не имеем никаких разностей. Поэтому для приращения  $y$  и берем одно это число. Найдя после этого второе значение  $\eta = 0,01404$ , мы уже можем получить первую разность  $\Delta = 174$  (единиц последнего знака) и ввести эту разность в получение нового приращения  $y$ . В следующей строке получаем вторую разность  $\Delta^2 = -7$  и, наконец, третья строка дает третью разность  $\Delta^3 = -2$ . Будем считать, что эта третья разность примерно постоянна для предыдущих трех строк; тогда мы получим возможность надстроить разности  $\eta$  вверх:

		— 3	— 2
0,01230	179	— 5	— 2
	<u>174</u>	— 7	— 2
		<u>— 7</u>	<u>— 2</u>

От этих разностей и начнем расчет снова — очевидно, он будет более точным. Действительно, имея контрольный столбец значений  $\delta$ , убеждаемся в уменьшении погрешностей. Критерием точности вычислений является сближение последующих серий вычислений и отсутствие влияния разностей более высоких порядков чем третий.

Во втором приближении мы надстраиваем разности снова:

		— 16	2
0,01230	193	— 14	2
	<u>179</u>	— 12	2
		<u>— 12</u>	<u>2</u>

При суммировании разностей для некоторого увеличения точности вычислений будем учитывать половины единиц последнего десятичного знака, отмечая их точкой вверху справа от числа. В сумме точка опускается с округлением до четного числа.

Проводим третье приближение — окончательное, так как сближение результатов полное. Например, значение  $y$  при  $x = 0,175$  имело колебания:

7468	
7557	— 89
7558	1

Дальнейшие вычисления проводим без каких-либо затруднений. При  $x > 0,30$  третьи разности перестают играть какую-либо роль в вычислении и поэтому напрашивается переход на увеличенный интервал. Однако для увеличения интервала надо иметь достаточное количество малых интервалов без третьих разностей. Если мы поспешим и слишком рано перейдем на увеличенный интервал, то на новом интервале третьи разности могут ока-

заться слишком большими и внести погрешность за счет недоучета разностей высших порядков.

Так, если мы перейдем на удвоенный интервал с  $x=0,35$ , то для получения разностей нам нужно будет вписать в расчет также и значения  $y$  при  $x=0,20$ ;  $0,25$  и  $0,30$ . При этом третьи разности получаются слишком высокими и сразу же начинает расти погрешность (см. табл. 60). Поэтому

Т а б л и ц а 60

$x$	$y$	$\delta$	$\Delta y$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$\eta = \frac{y'}{20}$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\frac{1}{2} \Delta$	$\frac{5}{12} \Delta^2$	$\frac{3}{8} \Delta^3$	$\Sigma$
0,200	0,09368	1				0,75328	0,03766							
0,250	0,13420	0				0,86633	0,04332	566						
0,300	0,18019	0				0,97220	0,04861	529	—37		10			
0,350	0,23135	2				1,07260	0,05363	502	—27		5			
0,400	0,28742	5	0,05607	0,63246	0,53612	1,16858	0,05843	480	—22		251	—11	4	244
0,450	0,34819	7	0,06077								240	— 8	2	234

правильнее будет довести расчет по малым интервалам до 0,45, а тогда уже увеличивать интервал интегрирования. Это и дано в табл. 61.

Как видим из столбца погрешностей, расчет в табл. 61 идет все время гладко. То, что окончательная погрешность выразилась всего в одной единице последнего знака, конечно, только случайность, но, во всяком случае, большой ошибки можно было и не ждать.

При желании использовать для начала расчета ранее полученный ряд, мы могли бы вычислить значения  $y$  при  $x$  равном 0,125; 0,150 и 0,175, после чего продолжение вычислений незатруднительно.

Часто вычисления по методу Адамса записывают без четырех последних столбцов. Это только фиктивно сокращает работу, так как вычисления, которые при наличии вспомогательных столбцов могут быть в любой момент проверены, становятся плохо контролируемыми и при возникшем сомнении их приходится делать заново. Кроме того, сложение в уме нескольких чисел, да еще домноженных на коэффициенты, утомительно и приводит к неожиданным грубым просчетам.

При больших подсчетах полезно составить для себя таблицу произведений первых ста чисел, умноженных на  $\frac{5}{12}$ , и первых десяти чисел, умноженных на  $\frac{3}{8}$ ; такая таблица упрощает заполнение последних столбцов.

Проверку вычислений облегчает большая чувствительность разностей высоких порядков к малейшим неточностям, допущенным вычислителем. Анализируя табл. 59, мы видим, что на всем интервале от  $x=0,100$  до  $x=0,350$  третьи разности весьма малы, и только в одной точке внезапно имеем  $\Delta^3=5$ . По-видимому, здесь вкралась какая-то ошибка, хотя и весьма небольшая. Действительно, проверяя близлежащий участок расчета, мы обнаруживаем не вполне корректное округление величины  $\eta$  при  $x=0,150$  — в соответствующую

щем столбце должно было стоять не 1575, а 1576. При этом мы имели бы

$$\begin{array}{rclcl} 1230 & & & & \\ 1409 & 179 & & & \\ & 167 & -12 & & 2 \\ 1576 & 157 & -10 & & 3, \\ 1733 & & -7 & & \\ 1883 & 150 & & & \end{array}$$

т. е. ход третьих разностей был бы менее негладок.

Таблица 61

$x$	$y$	$\delta$	$\Delta y$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$\eta = \frac{y'}{40}$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\frac{1}{2} \Delta$	$\frac{5}{12} \Delta^2$	$\frac{3}{8} \Delta^3$	$\eta$
0,350	0,23135	2					0,02682	124	-4	-2				
			0,02742					121	-3	1				60
0,375	0,25877			0,61237	0,50870	1,12107	0,02803	118	-3	0	60	-1	0	60
			0,02863					117	-1	2	59	-1	0	58
0,400	0,28740	3		0,63246	0,53610	1,16856	0,02921				58	-0	0	58
			0,02979											
0,425	0,31719			0,65192	0,56320	1,21512	0,03038							
			0,03096											
0,450	0,34815	3					$\eta = \frac{y'}{20}$							
						0,97220	0,04861	502						
0,30	0,18019					1,07260	0,05363	480	-22	3				
0,35	0,23135					1,16856	0,05843	461	-19	4				
0,40	0,28740							446	-15	2	230	-8	1	223
0,45	0,34815	3		0,67082	0,59004	1,26086	0,06304	433	-13	2	223	-6	1	218
			0,06527					422	-11	0	216	-6	0	210
0,50	0,41342	2		0,70711	0,64298	1,35009	0,06750	411	-11	2	211	-4	0	207
			0,06968					402	-9	1	205	-4	0	201
0,55	0,48310	2		0,74162	0,69505	1,43667	0,07183	394	-8	0	201	-4	0	198
			0,07393					386	-8	2	197	-3	0	194
0,60	0,55703	0		0,77460	0,74634	1,52094	0,07605	380	-6	0	193	-3	0	190
			0,07812					374	-6	0	190	-2	0	188
0,65	0,63515	1		0,80623	0,79696	1,60319	0,08016	368	-6		189	-2	0	184
			0,08217								184	-2	0	182
0,70	0,71732	0		0,83666	0,84694	1,68360	0,08418							
			0,08616											
0,75	0,80348	0		0,86603	0,89637	1,76240	0,08812							
			0,09006											
0,80	0,89354	0		0,89443	0,94527	1,83970	0,09198							
			0,09388											
0,85	0,98742	0		0,92195	0,99369	1,91564	0,09578							
			0,09766											
0,90	1,08508	0		0,94868	1,04167	1,99035	0,09952							
			0,10136											
0,95	1,18644	0		0,97468	1,08924	2,06392	0,10320							
			0,10502											
1,00	1,29146	1		1,00000										

§ 8. Начало вычислений по способу Адамса. Начинать вычисления по методу Адамса можно еще одним способом — предварительно определив величину разностей производной.

Если для взятых с интервалами  $h$  значений  $x$ , предшествующих начальному значению  $x_0$ , известны разности некоторой функции  $\varphi(x)$ , то эти разности можно выразить через производные функции. Для строки разностей, идущих наклонно вверх, имеем:

$$\begin{aligned}\varphi(x-h) &= \varphi(x) - h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) - \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x) + \dots, \\ \Delta\varphi &= \varphi(x) - \varphi(x-h) = h\varphi'(x) - \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) + \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x) - \dots, \\ \Delta^2\varphi &= \Delta(\Delta\varphi) = h\left[h\varphi'(x) - \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) + \dots\right]' - \\ &\quad - \frac{h^2}{2}\left[hy'(x) - \frac{h^2}{2!}\varphi''(x) + \dots\right]'' + \dots, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}\quad (39)$$

Проведя все действия, получим:

$$\begin{aligned}\varphi &= hy' = \eta, & \varphi' &= hy'', & \varphi'' &= hy''', \dots, \\ \Delta_{-0,5} &= h^2y_0'' - \frac{h^3}{2!}y_0''' + \frac{h^4}{3!}y_0^{IV} - \frac{h^5}{4!}y_0^V + \frac{h^6}{5!}y_0^{VI} - \dots, \\ \Delta_{-1}^2 &= h^3y_0''' - h^4y_0^{IV} + \frac{7}{12}h^5y_0^V - \frac{1}{4}h^6y_0^{VI} + \dots, \\ \Delta_{-1,5}^3 &= h^4y_0^{IV} - \frac{3}{2}h^5y_0^V + \frac{5}{4}h^6y_0^{VI} + \dots, \\ \Delta_{-2}^4 &= h^5y_0^V - 2h^6y_0^{VI} + \dots, \\ \Delta_{-2,5}^5 &= h^6y_0^{VI} - \dots.\end{aligned}\quad (40)$$

Получение разностей через производные удобно тогда, когда нахождение производных высших порядков незатруднительно. Для уравнения Муаньо вычисление значений производных не слишком просто, как будет видно ниже, и для этого уравнения предпочтительнее начинать расчет путем последовательных уточнений.

Покажем, к чему приводит вычисление начальных разностей. Для уравнения Муаньо имеем:

$$\begin{aligned}y' &= x^{0,5} + y^{0,5}, \\ y'' &= 0,5x^{-0,5} + 0,5y^{-0,5}y', \\ y''' &= -0,25x^{-1,5} - 0,25y^{-1,5}y'^2 + 0,5y^{-0,5}y'', \\ y^{IV} &= 0,375x^{-2,5} + 0,375y^{-2,5}y'^3 - 0,75y^{-1,5}y'y'' + 0,5y^{-0,5}y'''.\end{aligned}\quad (41)$$

Для точки (0,1; 0,030897) это дает:

$$\begin{array}{ll}x &= 0,1, & y &= 0,030897, \\ x^{0,5} &= 0,316228, & y^{0,5} &= 0,177775, \\ x^{-0,5} &= 3,16228, & y^{-0,5} &= 5,68906, \\ x^{-1,5} &= 31,6228, & y^{-1,5} &= 184,130, \\ x^{-2,5} &= 316,228, & y^{-2,5} &= 5959,48,\end{array}$$

$$\begin{aligned}y' &= 0,316228 + 0,177775 = 0,492003, \\ y'' &= 1,58114 + 2,84453 \cdot 0,492003 = 2,98066, \\ y''' &= -7,9057 - 46,0325 \cdot 0,492003^2 + 2,84453 \cdot 2,98066 = -10,5700, \\ y^{IV} &= 0,375 \cdot 316,228 + 0,375 \cdot 5959,48 \cdot 0,492003^3 - \\ &\quad - 0,75 \cdot 184,130 \cdot 0,492003 \cdot 2,98066 + 0,5 \cdot 5,68906 \cdot (-10,5700) = \\ &= 118,586 + 266,159 - 202,520 - 30,067 = 152,158;\end{aligned}$$

$$h = 0,025 = \frac{1}{40},$$

$$\Delta_{-0,5} = \frac{1}{1600} \cdot 2,98066 - \frac{1}{128\,000} (-10,5700) + \\ + \frac{1}{15\,360\,000} \cdot 152,158 + \dots \approx 0,00194,$$

$$\Delta_{-1}^2 = \frac{1}{64\,000} \cdot (-10,57) - \frac{1}{2\,560\,000} \cdot 152,158 + \dots \approx -0,00021,$$

$$\Delta_{-1,5}^3 = \frac{1}{2\,560\,000} \cdot 152,158 + \dots \approx 0,00006,$$

$$\Delta y = 0,01230 + \frac{1}{2} \cdot 0,00194 + \frac{5}{12} (-0,00021) + \frac{3}{8} \cdot 0,00006 = 0,01321.$$

Результат получается примерно тот же, что и при последовательных приближениях, но со значительно большей затратой труда.

Если бы ряд (13) был получен в целых степенях аргумента  $x$ , то мы могли бы использовать для получения значений производных схему Горнера (гл. III, § 1). Но ряд составлен в степенях  $\sqrt[4]{x}$  и, следовательно, пересчет на производные от  $x$  будет весьма затруднителен.

На основании имеющегося вычислительного опыта можно рекомендовать производить начало вычислений последовательными приближениями. Этот процесс всегда одинаков и поэтому к нему легче привыкнуть. Вычисление начальных значений интегральной функции с помощью ряда, а также вычисление начальных разностей требуют нахождения производных высших порядков, что для каждого уравнения приводит к необходимости составления своей вычислительной схемы и гораздо более сложно и трудоемко.

**§ 9. Применение сумм при вычислении по способу Адамса.** Метод Адамса обладает одной не совсем приятной особенностью: поскольку вычисляются не сами значения интегральной функции, а лишь ее приращения  $\Delta y$ , в которых отражаются небольшие погрешности от округления отдельных членов расчетной формулы (35), то вполне возможно случайное наличие погрешностей одного знака в нескольких, последовательно идущих величинах  $\Delta y$ . Это может на несколько единиц последнего знака изменить значения  $y$ ; такое отклонение начинает постепенно отражаться на вычисляемой величине  $\eta$ , приводя к дальнейшим неправильностям в приращениях. В результате, после некоторого количества интервалов интегрирования кривая  $y(x)$  начинает уходить в сторону от своих истинных ординат, и чем дальше, тем быстрее.

В качестве примера приведем расчет, имеющийся в „Лекциях о приближенных вычислениях“ А. Н. Крылова.

Интегрируемое уравнение

$$y' = y$$

с начальным условием  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ . Интеграл этого уравнения

$$y = e^x.$$

Расчет дан с учетом двух разностей производной, тогда как третьи разности еще не были настолько малы, чтобы ими можно было пренебречь. Если бы не было упомянутого нами прогрессирующего увеличения погрешностей, то ошибка в результатах должна была бы равняться трем восьмым суммы третьих, опущенных разностей, или, иначе, трем восьмым разницы между конечным и начальным значениями вторых разностей. Но постепенное искажение

производной привело к значительно более быстрому уклонению значений  $y$  от истинных.

У А. Н. Крылова расчет приведен до  $x=1$ ; продолжим его до  $x=2$  и добавим столбец погрешностей  $\delta$ . Попутно исправим допущенную вычислителем ошибку в значении  $\Delta_{0,5}y$ : должно стоять не 0,2350, а 0,2340 (см. табл. 62).

График нарастания величины  $\delta$  (рис. 67) показывает необходимость соблюдения максимальной аккуратности при вычислении и опасность пренебрежения не вполне затухшими разностями.

Для сравнения дадим более тщательный расчет для этого же примера; он приведен в табл. 63. Учитывая половины единиц последнего десятичного знака (что отмечается точкой вверху справа от числа), мы несколько усложняем вычисление, но зато получаем возможность избежать быстрого нарастания погрешностей от округления.

Для того чтобы точность вычисления меньше зависела от округлений, М. Ф. Субботин\*) предложил видоизменение метода Адамса, состоящее в применении сумм.

Если обычную вычислительную схему Адамса

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \Delta^2_{-1} & \Delta^3_{-1,5} & \dots \\ & & \eta_0 & \Delta_{-0,5} & & & \\ y_0 & \Delta_{0,5}y & & & & & \\ y_1 & & & & & & \end{array} \quad (42)$$

дополним столбцом функции  $s$ , получаемой из условия

$$\begin{aligned} s_{0,5} &= s_{-0,5} + \eta_0 \\ (\eta_0 &= s_{0,5} - s_{-0,5} = \Delta_0 s), \end{aligned} \quad (43)$$

то получим схему

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \Delta^2_{-1} & \Delta^3_{-1,5} & \dots \\ & & \eta_0 & \Delta_{-0,5} & & & \\ y_0 & s_{0,5} & & & & & \\ y_1 & & & & & & \end{array} \quad (44)$$

позволяющую находить с помощью строки Адамса не приращение, а непосредственно величину  $y_1$ :

$$y_1 = s_{0,5} + \frac{1}{2} \eta_0 + \frac{5}{12} \Delta_{-0,5} + \frac{3}{8} \Delta^2_{-1} + \frac{251}{720} \Delta^3_{-1,5} + \dots \quad (45)$$

\*) Субботин М. Ф., Численное интегрирование дифференциальных уравнений, Ташкент, 1927.

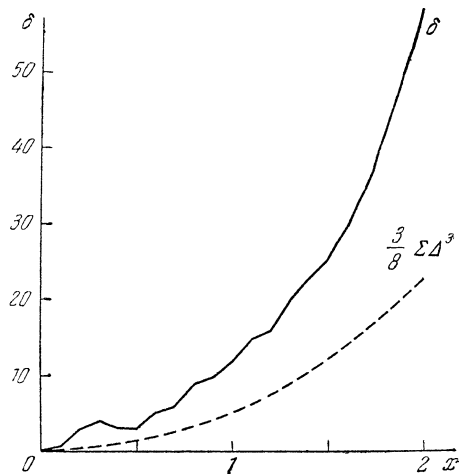


Рис. 67.



Несколько округляя последний, чрезвычайно малый член, получим более удобную для вычисления форму:

$$\begin{aligned} y_1 &= s_{0,5} + \frac{1}{2} (\eta_0 + \Delta_{-0,5} + \Delta_{-1}^2 + \Delta_{-1,5}^3) - \frac{1}{12} \Delta_{-0,5} - \frac{1}{8} \Delta_{-1}^2 - \frac{1}{6} \Delta_{-1,5}^3 = \\ &= s_{0,5} + \frac{1}{2} \Sigma - \frac{1}{12} \Delta_{-0,5} - \frac{1}{8} \Delta_{-1}^2 - \frac{1}{6} \Delta_{-1,5}^3. \quad (46) \end{aligned}$$

В вычислении функции  $s$  разности производной не участвуют, так что в каждом значении  $y$  сказывается влияние округлений лишь тех разностей, которые имеются в данной наклонной строке без их накопления.

Т а б л и ц а 62

$n$	$x$	$y$	$\delta$	$\Delta y$	$\eta = \frac{hy'}{0,1y} =$	$\Delta$	$\Delta^2$
0	0	1,0000	0		0,1000		
1	0,1	1,1051	— 1	0,1051	0,1105	105	11
2	0,2	1,2211	— 3	0,1160	0,1221	116	13
3	0,3	1,3495	— 4	0,1284	0,1350	129	13
4	0,4	1,4915	— 3	0,1420	0,1492	142	14
5	0,5	1,6484	— 3	0,1569	0,1648	156	18
6	0,6	1,8216	— 5	0,1732	0,1822	174	17
7	0,7	2,0132	— 6	0,1916	0,2013	191	21
8	0,8	2,2246	— 9	0,2114	0,2225	212	22
9	0,9	2,4586	—10	0,2340	0,2459	234	24
10	1,0	2,7171	—12	0,2585	0,2717	258	28
11	1,1	3,0027	—15	0,2856	0,3003	286	29
12	1,2	3,3185	—16	0,3158	0,3318	315	34
13	1,3	3,6673	—20	0,3488	0,3667	349	37
14	1,4	4,0529	—23	0,3856	0,4053	386	40
15	1,5	4,4791	—26	0,4262	0,4479	426	45
16	1,6	4,9500	—30	0,4709	0,4950	471	49
17	1,7	5,4704	—35	0,5204	0,5470	520	55
18	1,8	6,0454	—42	0,5750	0,6045	575	61
19	1,9	6,6809	—50	0,6355	0,6681	636	
20	2,0	7,3833	—58	0,7024			

Т а б л и ц а 63 \*)

$n$	$x$	$y$	$\delta$	$\Delta y$	$\eta = \frac{hy'}{= 0,1y}$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\frac{1}{2} \Delta$	$\frac{5}{12} \Delta^2$	$\frac{3}{8} \Delta^3$	$\Sigma$
0	0	1,0000		0,1000	0,1000	100						
1	0,1	1,1000		0,1100	0,1100	<u>125</u>	15					
2	0,2	1,2150		0,1150	0,1215							
						85	15					
0	0	1,0000		0,1000	0,1000	100	20		42•	7•		50
1	0,1	1,1050		0,1050	0,1105	105	12		52•	8•		61
2	0,2	1,2216		0,1166	0,1222	117	11		58•	7•		66
3	0,3	1,3504		0,1288	0,1350	<u>128</u>						
						95	11					
0	0	1,0000		0,1000	0,1000	100	10		47•	4•		52
1	0,1	1,1052		0,1052	0,1105	105	11	$\frac{1}{2}$	52•	4		56
2	0,2	1,2213		0,1161	0,1221	<u>116</u>	13	2	58	4•		62
3	0,3	1,3496		0,1283	0,1350	129						
							9	1				
0	0	1,0000		0,1000	0,1000	95	10	1	47•	4	0•	52
1	0,1	1,1052	0	0,1052	0,1105	105	11	1	52•	4	0•	57
2	0,2	1,2214	0	0,1162	0,1221	116	13	2	58	4•	0•	63
3	0,3	1,3498	-1	0,1284	0,1350	129	13	0	64•	5•	1	71
4	0,4	1,4919	1	0,1421	0,1492	142	15	2	71	5•	0	76
5	0,5	1,6487	0	0,1568	0,1649	157	16	1	78•	6•	1	86
6	0,6	1,8222	1	0,1735	0,1822	173	19	3	86•	6•	0•	94
7	0,7	2,0138	0	0,1916	0,2014	192	20	1	96	8	1	105
8	0,8	2,2257	2	0,2119	0,2226	212	22	2	106	8•	0•	115
9	0,9	2,4598	2	0,2341	0,2460	234	24	2	117	9	1	127
10	1,0	2,7185	2	0,2587	0,2718	258	28	4	129	10	1	140
11	0,1	3,0043	1	0,2858	0,3004	286	30	2	143	11•	1•	156
12	0,2	3,3203	2	0,3160	0,3320	316	33	3	158	12•	0•	171
				0,3491		349	4	4				

\*) В этой и аналогичных таблицах подчеркнуты значения разностей, используемые в следующем приближении.

Продолжение

$n$	$x$	$y$	$\delta$	$\Delta y$	$\eta = \frac{hy'}{=0,1y} =$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\frac{1}{2} \Delta$	$\frac{5}{12} \Delta^2$	$\frac{3}{8} \Delta^3$	$\Sigma$
13	0,3	3,6694	1		0,3669		37		174•	13•	1	189
14	0,4	4,0552	0	0,3858	0,4055	386	41	4	193	15•	1•	210
15	1,5	4,4817	0	0,4265	0,4482	427	44	3	213•	17	1•	232
16	0,6	4,9531	1	0,4714	0,4953	471	50	6	235•	18•	1	255
17	0,7	5,4739	0	0,5208	0,5474	521	55	5	260•	21	2	284
18	0,8	6,0497	1	0,5758	0,6050	576	60	5	288	23	2	313
19	0,9	6,6860	1	0,6363	0,6686	636			318	25	2•	346
20	2,0	7,3892	1	0,7032								

Для начала расчета по суммам  $s$  начальное значение  $s_{0,5}$  вычисляется после того, как получено значение  $y_1$ , по формуле

$$s_{0,5} = y_1 - \frac{1}{2} \eta_0 - \frac{5}{12} \Delta_{-0,5} - \frac{3}{8} \Delta_{-1}^2 - \frac{1}{3} \Delta_{-1,5}^3 \quad (47)$$

(последний член для простоты округлен).

Проведем вычисления для только что рассмотренного примера, добавив один дополнительный знак (при основной схеме Адамса мы не могли этого сделать, так как неучитываемые четвертые разности оказались бы слишком большими).

Ввиду простоты рассматриваемого уравнения, мы можем вычислить  $s_{0,5}$  через производные, используя строки (40):

$$\begin{aligned}
 s_{0,5} = & y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 + \frac{h^3}{6} y'''_0 + \frac{h^4}{24} y^{IV}_0 + \dots \\
 & - \frac{1}{2} hy'_0 \\
 & - \frac{5}{12} h^2 y''_0 + \frac{5}{24} h^3 y'''_0 - \frac{5}{72} h^4 y^{IV}_0 + \dots \\
 & - \frac{3}{8} h^3 y'''_0 + \frac{3}{8} h^4 y^{IV}_0 - \dots \\
 & - \frac{251}{720} h^4 y^{IV}_0 + \dots \\
 & \dots \dots \dots = \\
 = & y_0 + \frac{1}{2} hy'_0 + \frac{1}{12} h^2 y''_0 - \frac{1}{720} h^4 y^{IV}_0 + \dots \approx y_0 + \frac{1}{2} hy'_0 + \frac{1}{12} h^2 y''_0.
 \end{aligned} \quad (48)$$

В рассматриваемом примере все производные равны между собою:

$$\dots = y''' = y'' = y' = y,$$

поэтому имеем

$$s_{0,5} = 1,000000 + 0,050000 + 0,000833 = 1,05083.$$

Значения разностей также возьмем по формулам (40):

$$\Delta_{-0,5} = 0,010000 - 0,000500 + 0,000017 = 0,00952,$$

$$\Delta_{-1}^2 = 0,001000 - 0,000100 + 0,000006 = 0,00091,$$

$$\Delta_{-1,5}^3 = 0,000100 - 0,000015 + 0,000001 = 0,00009.$$

Вычисления приведены в табл. 64. Знаком  $\Sigma_1$  обозначена сумма величины  $\eta$  и трех ее разностей, идущих наклонно вверх; знаком  $\Sigma_2$  обозначена сумма чисел в четырех предшествовавших столбцах.

При вычислении с помощью сумм в результате прохождения двадцати интервалов накопившаяся погрешность достигла лишь шестнадцати единиц

Таблица 64

$n$	$x$	$y$	$\delta$	$s$	$\eta$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Sigma_1$	$\frac{1}{2} \Sigma_1$	$-\frac{1}{12} \Delta$	$-\frac{1}{8} \Delta^2$	$-\frac{1}{6} \Delta^3$	$\Sigma_2$
								9						
						952	100	91						
0	0	1,00000			0,10000	1052	100	9	11052					
1	0,1	1,10518	1	1,05083	0,11052	1162	110	10	12213	5526	— 79	— 11	— 1	5435
2	0,2	1,22140	0	1,16135	0,12214	1284	122	12	13496	6106	— 88	— 12	— 1	6005
3	0,3	1,34984	— 2	1,28349	0,13498	1420	136	14	14916	6748	— 97	— 14	— 2	6635
4	0,4	1,49181	— 1	1,41847	0,14918	1569	149	13	16488	7458	— 107	— 15	— 2	7334
5	0,5	1,64872	0	1,56765	0,16487	1734	165	16	18218	8244	— 118	— 17	— 2	8107
6	0,6	1,82209	— 3	1,73252	0,18221	1916	182	17	20136	9109	— 131	— 19	— 2	8957
7	0,7	2,01973	— 2	1,91473	0,20137	2118	202	20	22252	10068	— 144	— 21	— 3	9900
8	0,8	2,22550	— 4	2,11610	0,22255	2341	223	21	24595	11126	— 160	— 23	— 3	10940
9	0,9	2,45959	— 1	2,33865	0,24596	2586	245	22	27181	12298	— 176	— 25	— 3	12094
10	1,0	2,71825	— 3	2,58461	0,27182	2859	273	28	30035	13590	— 195	— 28	— 3	13364
11	1,1	3,00411	— 6	2,85643	0,30041	3160	301	28	33201	15018	— 215	— 31	— 4	14768
12	1,2	3,32007	— 5	3,15684	0,33201	3491	331	30	36690	16600	— 238	— 34	— 5	16323
13	1,3	3,66924	— 6	3,48885	0,36692	3859	368	37	40544	18345	— 263	— 38	— 5	18039
14	1,4	4,05512	— 8	3,85577	0,40551	4265	406	38	44815	20272	— 291	— 41	— 5	19935
15	1,5	4,48163	— 6	4,26128	0,44816	4713	448	42	49525	22408	— 321	— 46	— 6	22035
16	1,6	4,95294	— 9	4,70944	0,49529	5209	496	48	54732	24762	— 355	— 51	— 6	24350
17	1,7	5,47383	— 12	5,20473	0,54738	5757	520	52	60491	27366	— 393	— 56	— 7	26910
18	1,8	6,04953	— 12	5,75211	0,60495	6363	548	58	66852	30246	— 434	— 62	— 8	29742
19	1,9	6,08575	— 14	6,35706	0,66858		606		73885	33426	— 480	— 68	— 9	32869
20	2,0	7,38890	— 16	7,02564						36942	— 530	— 76	— 10	36326

последнего знака, т. е. она примерно в четыре раза меньше, чем при вычислении по обычной строке Адамса (табл. 62), с неучитываемыми разностями того же порядка величины. При этом, ввиду несколько большей сложности расчета, мы не учитывали половинок единиц. Если бы мы учитывали и их, то погрешность была бы еще меньшей.

Небольшое усложнение расчета получается вследствие того, что из-за сдвига всех членов вычислительной схемы на один столбец влево, учитываемые величины стали больше. Последние шесть столбцов, хотя они и являются лишь вспомогательными, обязательно должны быть введены в расчет во избежание применения дополнительных листков бумаги, обычно порождающих лишние ошибки вычисления.

**§ 10. Способ Лапласа.** Рассмотрим строку расчета, несколько отличающуюся от строки Адамса; хотя она и не дает возможности продвижения расчета вперед, но зато хорошо контролирует правильность вычислений и позволяет уточнять их.

Пусть мы получили  $y_1$  и вычислили  $\eta_1$  и до получения  $y_2$  хотим проверить, правильно ли мы определили значение  $y_1$ . Для этого мы можем воспользоваться имеющимися у нас значениями  $\eta_1$  и соответствующих разностей.

Имеем:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \Delta^3_{-1.5} & & \\
 & & & & \Delta^2_{-1} & & \\
 & & & \Delta_{-0.5} & \Delta^2_{-0.5} & & \\
 y_0 & & \eta_0 & & \Delta^2_0 & & \\
 & \Delta_{0.5} y & & \Delta_{0.5} & & & \\
 y_1 & & \eta_1 & & & & 
 \end{array} \quad (49)$$

$$\eta_0 = \eta_1 - \Delta_{0.5}, \quad \Delta_{-0.5} = \Delta_{0.5} - \Delta^2_0, \quad \Delta^2_{-1} = \Delta^2_0 - \Delta^2_{-0.5}, \dots$$

Подставив эти выражения для разностей в строку Адамса, получим:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{0.5} y = & (\eta_1 - \Delta_{0.5}) + \frac{1}{2} (\Delta_{0.5} - \Delta^2_0) + \frac{5}{12} (\Delta^2_0 - \Delta^2_{-0.5}) + \\
 & + \frac{3}{8} (\Delta^2_{-0.5} - \Delta^2_{-1}) + \dots = \eta_1 - \frac{1}{2} \Delta_{0.5} - \frac{1}{12} \Delta^2_0 - \frac{1}{24} \Delta^2_{-0.5} - \\
 & - \frac{19}{720} \Delta^2_{-1} - \frac{3}{160} \Delta^2_{-1.5} - \frac{863}{60480} \Delta^2_{-2} - \frac{275}{24192} \Delta^2_{-2.5} - \frac{33953}{3628800} \Delta^2_{-3} - \\
 & - \frac{57281}{7237600} \Delta^2_{-3.5} - \dots \quad (50)
 \end{aligned}$$

Это есть вычислительная строка Лапласа, в несколько видоизмененной форме примененная В. П. Ветчинкиным в целях продолжения расчета.

Применение строки Лапласа может произвести эффект, аналогичный применению сумм, избавляя расчет от быстрого нарастания погрешностей. Покажем это на примерах.

Как мы видели в табл. 62, недоучет третьих разностей привел к быстрой потере точности; этого можно избежать, проверяя каждую точку вычисления по методу Адамса строкой Лапласа.

В табл. 65 дано такое уточненное вычисление. В столбцах для  $y$  и для  $\Delta y$  стоят по два числа: верхнее — приближенное и нижнее — уточненное. Производная вычисляется по первому (приближенному) значению; ввиду малой разницы между приближенным и точным значением  $y$  переувеличения производной не делается. Как видно из табл. 65, такое вычисление обладает большими преимуществами перед другими рассмотренными нами схемами расчета:

Таблица 65

$n$	$x$	$y$	$\delta$	$\Delta y$	$\eta$	$\Delta$	$\Delta^2$	$-\frac{1}{2} \frac{\Delta}{1} \frac{\Delta}{2}$	$-\frac{1}{12} \frac{\Delta^2}{5} \frac{\Delta^2}{12}$	$z$
0	0	1,0000		0,1051 0,1051	0,1000	95	9	47*	3*	51
1	0,1	1,1051 1,1051		0,1161 0,1162	0,1105	105	10	— 52* 52*	— 1 4	— 54 56
2	0,2	1,2212 1,2213	— 1	0,1284 0,1284	0,1221	116	11	— 58 58	— 1 5	— 59 63
3	0,3	1,3497 1,3497	— 1	0,1420 0,1420	0,1350	129	13	— 64* 64*	— 1 5*	— 66 70
4	0,4	1,4917 1,4917	— 2	0,1568 0,1569	0,1492	142	13	— 71 71	— 1 5*	— 72 76
5	0,5	1,6485 1,6486	— 1	0,1732 0,1734	0,1648	156	14	— 78 78	— 1 6	— 79 84
6	0,6	1,8218 1,8220	— 1	0,1916 0,1916	0,1822	174	18	— 87 87	— 1* 7*	— 88 94
7	0,7	2,0136 2,0136	— 1	0,2118 0,2118	0,2014	192	18	— 96 96	— 1* 7*	— 98 104
8	0,8	2,2254 2,2254	— 2	0,2339 0,2340	0,2225	211	19	— 105* 105*	— 1* 8	— 107 114
9	0,9	2,4593 2,4594	— 1	0,2585 0,2586	0,2450	234	23	— 117 117	— 2 9	— 119 126
			— 2			259	25	— 129*	— 2	— 132

Продолжение табл. 65

$n$	$x$	$y$	$\delta$	$\Delta y$	$\eta$	$\Delta$	$\Delta^2$	$-\frac{1}{2}\Delta$ $\frac{1}{2}\Delta$	$-\frac{1}{12}\Delta^2$ $\frac{5}{12}\Delta^2$	$x$
10	1,0	2,7179 2,7180	-3	0,2858 0,2859	0,2718	286	27	129 <sup>*</sup>	10 <sup>*</sup>	140
11	1,1	3,0038 3,0039	-3	0,3158 0,3160	0,3004	316	30	-143 143	-2 11	-145 154
12	1,2	3,3197 3,3199	-2	0,3490 0,3492	0,3320	349	33	-158 158	-2 <sup>*</sup> 12 <sup>*</sup>	-160 170
13	1,3	3,6689 3,6691	-2	0,3857 0,3859	0,3669	386	37	-174 <sup>*</sup> 174 <sup>*</sup>	-2 <sup>*</sup> 13 <sup>*</sup>	-177 188
14	1,4	4,0548 4,0550	-2	0,4263 0,4265	0,4055	426	40	-193 193	-3 15 <sup>*</sup>	-196 208
15	1,5	4,4813 4,4815	-2	0,4711 0,4713	0,4481	472	46	-213 213	-3 16 <sup>*</sup>	-216 230
16	1,6	4,9526 4,9528	-2	0,5208 0,5210	0,4953	521	49	-236 236	-4 19	-240 255
17	1,7	5,4736 5,4738	-2	0,5755 0,5757	0,5474	575	54	-260 <sup>*</sup> 260 <sup>*</sup>	-4 20 <sup>*</sup>	-264 281
18	1,8	6,0493 6,0495	-1	0,6359 0,6362	0,6049	636	61	-287 <sup>*</sup> 287 <sup>*</sup>	-4 <sup>*</sup> 22 <sup>*</sup>	-292 310
19	1,9	6,6854 6,6857	-2	0,7029 0,7031	0,6685	704	68	-318 318	-5 <sup>*</sup> 25 <sup>*</sup>	-323 344
20	2,0	7,3886 7,3888	-3		0,7389			-352	-5 <sup>*</sup>	-358

во-первых, получается хорошая точность и, во-вторых, в каждой точке мы имеем проверку правильности вычисления.

**§ 11. Уточнение вычислений по способу Лапласа.** Строкой Лапласа можно пользоваться и для уточнения ранее сделанного менее точного расчета. Возьмем как первое приближение результат графического интегрирования, использованный ранее при рассмотрении способа Пикара, и применим к нему вычислительную схему Лапласа.

Проведя два цикла уточнений, получим табл. 66. Сравнив между собою изменения, получаемые при переходе от первого приближения ко второму и от второго к третьему (см. табл. 67), мы увидим быстрое их уменьшение, свидетельствующее о прекрасной сходимости вычислительного процесса к точным результатам, приведенным в крайнем правом столбце таблицы.

Это затухание изменений является весьма надежным критерием и вполне соответствует тем сведениям о точности результата, которые мы получаем из столбца погрешностей  $\delta$ , вводимого нами во все расчеты для анализа получаемых чисел. В действительном расчете мы не имеем значений  $\delta$ , но можем судить о них по различным косвенным признакам — пренебрежимо малой величине неучитываемых разностей, быстроте сближения последовательных приближений и т. д. Нужно только отметить, что использование всех этих косвенных данных будет более плодотворным у опытного вычислителя. Малоопытный расчетчик для решения задачи должен стремиться к выбору максимально простой вычислительной схемы, хотя бы и более трудоемкой, так как искусство вычисления постигается не сразу, и у начинающего вычислителя порою самый сильный метод расчета дает посредственные результаты из-за непонимания его особенностей.

**§ 12. Расчет по сдвоенным приращениям.** Особенно хорошие результаты при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка дает совместное применение строк Адамса и Лапласа.

Пусть имеется отрезок расчета:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \Delta^3_{-1,5} & \\
 & & & & & \Delta^2_{-1} & \\
 y_{-1} & & & & & \Delta^2_{-0,5} & \\
 & \Delta_{-0,5}y & & \Delta_{-0,5} & & & \\
 y_0 & & \eta_0 & & & & \\
 & \Delta_{0,5}y & & & & & 
 \end{array} \quad (51)$$

Приращение  $\Delta_{-0,5}y$  мы можем вычислить по строке Лапласа, а приращение  $\Delta_{0,5}y$  — по строке Адамса:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{-0,5}y &= \eta_0 - \frac{1}{2} \Delta_{-0,5} - \frac{1}{12} \Delta^2_{-1} - \frac{1}{24} \Delta^3_{-1,5} - \frac{19}{720} \Delta^4_{-2} - \dots, \\
 \Delta_{0,5}y &= \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta_{-0,5} + \frac{5}{12} \Delta^2_{-1} + \frac{3}{8} \Delta^3_{-1,5} + \frac{251}{720} \Delta^4_{-2} + \dots
 \end{aligned} \quad (52)$$

Сложив эти два равенства, получим

$$\begin{aligned}
 \Delta_{-0,5}y + \Delta_{0,5}y &= \Delta_{(0)}y = 2\eta_0 + \frac{1}{3} \Delta^2_{-1} + \frac{1}{3} \Delta^3_{-1,5} + \frac{29}{90} \Delta^4_{-2} + \frac{28}{90} \Delta^5_{-2,5} + \\
 &+ \frac{18\ 224}{60\ 480} \Delta^6_{-3} + \frac{35\ 424}{120\ 960} \Delta^7_{-3,5} + \frac{1\ 036\ 064}{3\ 628\ 800} \Delta^8_{-4} + \frac{2\ 025\ 472}{7\ 257\ 600} \Delta^9_{-4,5} + \dots
 \end{aligned} \quad (53)$$



Таблица 66

$x$	$\sqrt{x}$	$y$	$\delta$	$\sqrt{y}$	$y'$	$h y' = \eta$	$\Delta$	$\Delta y$	$y$	$\delta$	$\sqrt{y}$	$y'$	$\eta$	$\Delta$	$\Delta y$	$y$	$\delta$
0,100	0,3162	0,0309	0	0,1758	0,4920	0,0123	19	132	0,0309	0	0,1758	0,4920	0,0123	18	132	0,0309	0
0,125	0,3550	0,045	9	0,2121	0,5671	0,0142	14	149	0,0441	0	0,2100	0,5650	0,0141	17	150	0,0441	0
0,150	0,3873	0,060	10	0,2449	0,6322	0,0156	17	164	0,0590	0	0,2429	0,6302	0,0158	15	165	0,0591	1
0,175	0,4183	0,075	— 6	0,2739	0,6922	0,0173	16	181	0,0754	— 2	0,2746	0,6929	0,0173	15	180	0,0756	0
0,200	0,4472	0,095	13	0,3082	0,7554	0,0189	14	196	0,0935	— 2	0,3058	0,7530	0,0188	15	195	0,0936	— 1
0,225	0,4743	0,115	18	0,3391	0,8134	0,0203	14	210	0,1131	— 1	0,3363	0,8106	0,0203	14	210	0,1131	— 1
0,250	0,5000	0,135	8	0,3674	0,8674	0,0217	13	224	0,1341	— 1	0,3662	0,8662	0,0217	13	224	0,1341	— 1
0,275	0,5244	0,155	— 15	0,3937	0,9181	0,0280	13	236	0,1565	0	0,3956	0,9200	0,0230	13	237	0,1565	0
0,300	0,5477	0,180	— 2	0,4243	0,9720	0,0243	13		0,1801	— 1	0,4244	0,9721	0,0243			0,1802	0
0,250	0,5000	0,135	8	0,3674	0,8674	0,0434	52	460	0,1341	— 1	0,3662	0,8662	0,0433	53		0,1341	— 1
0,30	0,5477	0,180	— 2	0,4243	0,9720	0,0486	50	511	0,1801	— 1	0,4244	0,9721	0,0486	50	511	0,1802	0
0,35	0,5916	0,230	— 13	0,4796	1,0712	0,0536	47	559	0,2312	— 1	0,4808	1,0724	0,0536	48	560	0,2313	0

Продолжение табл. 66

$x$	$\sqrt{x}$	$y$	$\delta$	$\sqrt{y}$	$y'$	$h_{y'} = \eta$	$\Delta$	$\Delta y$	$y$	$\delta$	$\sqrt{y}$	$y'$	$\eta$	$\Delta$	$\Delta y$	$y$	$\delta$
0,40	0,6325	0,285	— 24	0,5338	1,1663	0,0583	46	606	0,2871	— 3	0,5360	1,1685	0,0584	46	607	0,2873	— 1
0,45	0,6708	0,345	— 31	0,5873	1,2581	0,0629	45	652	0,3477	— 4	0,5897	1,2605	0,0630	45	653	0,3480	— 1
0,50	0,7071	0,410	— 34	0,6403	1,3474	0,0674	43	695	0,4129	— 5	0,6426	1,3497	0,0675	43	696	0,4133	— 1
0,55	0,7416	0,480	— 31	0,6928	1,4344	0,0717	43	738	0,4824	— 7	0,6946	1,4362	0,0718	42	739	0,4829	— 2
0,60	0,7746	0,555	— 20	0,7450	1,5196	0,0760	42	781	0,5562	— 8	0,7458	1,5204	0,0760	41	781	0,5568	— 2
0,65	0,8062	0,635	— 1	0,7969	1,6031	0,0802	39	821	0,6343	— 8	0,7966	1,6028	0,0801	41	822	0,6349	— 2
0,70	0,8367	0,715	— 23	0,8456	1,6823	0,0841	41	862	0,7164	— 9	0,8464	1,6831	0,0842	39	861	0,7171	— 2
0,75	0,8660	0,805	+ 15	0,8972	1,7632	0,0882	38	901	0,8026	— 9	0,8959	1,7619	0,0881	39	900	0,8032	— 3
0,80	0,8944	0,895	+ 15	0,9460	1,8404	0,0920	39	939	0,8927	— 8	0,9448	1,8392	0,0920	38	939	0,8932	— 3
0,85	0,9220	0,990	+ 26	0,9950	1,9170	0,0958	37	977	0,9866	— 8	0,9933	1,9153	0,0958	37	977	0,9871	— 3
0,90	0,9487	1,085	— 1	1,0416	1,9903	0,0995	35	1012	1,0843	— 8	1,0413	1,9900	0,0995	37	1014	1,0848	— 3
0,95	0,9747	1,180	— 64	1,0863	2,0610	0,1030	35	1047	1,1855	— 9	1,0888	2,0635	0,1032	35	1049	1,1862	— 2
1,0	1,0000	1,280	— 114	1,1314	2,1314	0,1065	35	1047	1,2902	— 13	1,1359	2,1339	0,1067	35	1049	1,2911	— 4

Установить автора рассматриваемого способа численного интегрирования затруднительно. Этот способ был найден нами в 1932 г. и опубликован в 1937 г. \*). В том же году в работе А. Н. Волохова\*\*) была дана эта же формула, относительно которой автор замечает: "...формула 3.12, насколько нам известно, выведена впервые". Коллатц\*\*\*) приписывает авторство этого

Таблица 67

$x$	$y_{(1)}$	$y_{(2)} - y_{(1)}$	$y_{(2)}$	$y_{(3)} - y_{(2)}$	$y_{(3)}$	$y_{\text{точн}}$
0,100	0,0309		0,0309		0,0309	0,0309
0,125	0,0450	— 9	0,0441	0	0,0441	0,0441
0,150	0,0600	— 10	0,0590	1	0,0591	0,0590
0,175	0,0750	4	0,0754	2	0,0756	0,0756
0,200	0,0950	— 15	0,0935	1	0,0936	0,0937
0,225	0,1150	— 19	0,1131	0	0,1131	0,1132
0,250	0,1350	— 9	0,1341	0	0,1341	0,1342
0,275	0,1555	10	0,1565	0	0,1565	0,1565
0,30	0,1800	1	0,1801	1	0,1802	0,1802
0,35	0,2300	12	0,2312	1	0,2313	0,2313
0,40	0,2850	21	0,2871	2	0,2873	0,2874
0,45	0,3450	27	0,3477	3	0,3480	0,3481
0,50	0,4100	29	0,4129	4	0,4133	0,4134
0,55	0,4800	24	0,4824	5	0,4829	0,4831
0,60	0,5550	12	0,5562	6	0,5568	0,5590
0,65	0,6350	— 7	0,6343	6	0,6349	0,6351
0,70	0,7150	14	0,7164	7	0,7171	0,7173
0,75	0,8050	— 24	0,8026	6	0,8032	0,8035
0,80	0,8950	— 23	0,8927	5	0,8932	0,8935
0,85	0,9900	— 34	0,9866	5	0,9871	0,9874
0,90	1,0850	— 7	1,0843	5	1,0848	1,0851
0,95	1,1800	55	1,1855	7	1,1862	1,1864
1,00	1,2800	102	1,2902	9	1,2911	1,2915
—	$\Sigma  y_{(2)} - y_{(1)}  = 0,0468$		$\Sigma  y_{(3)} - y_{(2)}  = 0,0076$		—	—

способа Нистрему. Фактически же формула (53) однотипна с рассматриваемой ниже формулой первого метода Коуэлла, которая, как сообщает А. Н. Крылов в работе „Ньютонова теория рефракции“, встречается еще у Ньютона — в виде, ограниченном тремя первыми ее членами.

Вообще, над формулами численного интегрирования работало столько исследователей и ими дано столько разновидностей вычислительных формул, что точно разделить сферы авторства совершенно невозможно. Единственно, по-видимому, не вызывает сомнений приоритет Адамса (экстраполяционный разностный метод интегрирования уравнений первого порядка), Штёрмера (тот же метод применительно к уравнениям второго порядка), Лапласа (интерполяционный метод, основанный на использовании наклонной строки разностей, для уравнений первого порядка), Коуэлла (тот же метод для горизон-

\*) Мелентьев П. В., Несколько новых методов и приемов приближенных вычислений, ОНТИ, 1937.

\*\*) Волохов А. Н., Разностные методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Труды ЦАГИ, в. 314, 1937.

\*\*\*) Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953.

тальной строки разностей при вычислении сразу суммы двух приращений  $y$  и способ применения сумм для этой же цели).

Ряд других способов вычисления, разработанных М. Ф. Субботиным, В. П. Ветчинкиным, Г. Д. Оппоковым, А. Н. Волоховым, С. Н. Нумеровым, Мультином и др., представляют собою развитие основных положений ранее разработанных методов с частичным сходством некоторых деталей вычислительного процесса, во многих случаях не позволяющим точно приписать данное выражение определенному автору. Это не мешает новым способам численного интегрирования быть с пользой примененными.

Если при работе с формулой (53) обозначать буквой  $\eta$  величину удвоенную, т. е. принимать

$$\eta = 2hy',$$

и брать разности от этой функции, то расчетная формула примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_{[0]}y &= \eta_0 + \frac{1}{6} \Delta^2_{-1} + \frac{1}{6} \Delta^2_{-1.5} + \frac{29}{180} \Delta^4_{-2} + \dots \approx \\ &\approx \eta_0 + \frac{1}{6} (\Delta^2_{-1} + \Delta^2_{-1.5} + \Delta^4_{-2}) = \eta_0 + \frac{1}{6} \Sigma. \end{aligned} \quad (54)$$

Величину  $\Sigma$  — сумму второй, третьей и четвертой разности — следует отдельно выписывать лишь тогда, когда в расчете участвуют все эти разности.

Начало расчета надо вести с интервалами настолько малыми, чтобы в точке, первой после начала, можно было получить приращение  $y$ , взяв просто  $\Delta y = hy'$ . Пройдя четыре интервала, переходят к интервалам вдвое более крупным, потом еще удваивают интервал — до тех пор, пока не получат нормальной величины интервала.

В табл. 68 дано вычисление для уравнения Муаньо при четырех точных знаках за запятой. Первое приращение  $y$  дано в скобках. Расчет начал с интервала  $\frac{1}{160}$ , после удвоения величины интервала он стал равным  $\frac{1}{80}$ , после нового удвоения —  $\frac{1}{40}$  и, наконец, расчет был проведен с интервалами в  $\frac{1}{20} = 0,05$ .

В табл. 69 дано вычисление для этого же примера, но уже с пятью знаками за запятой. Для начала расчета вычислены с помощью ряда значения  $y$  при  $x = 0,125; 0,150; 0,175$  и  $0,200$ . Для уменьшения вредного влияния округлений учитывались и половины единиц. До  $x = 0,4$  интервал был взят равным  $0,025$ , а затем увеличен до  $0,05$ .

Табл. 69 можно сравнить с табл. 59 и 61. По точности результатов они эквивалентны, что же касается удобства вычислений, то по методу Адамса вычислять несколько сложнее, так что вычисление двойных приращений менее утомительно.

Всегда необходимо выбирать такой интервал, чтобы вычисление не шло на пределе точности метода, т. е. не нужно стараться использовать обязательно все четыре разности.

**§ 13. Первый метод Коуэлла.** Формула (53), представленная в виде (54)

$$\Delta_{[0]}y = \eta_0 + \frac{1}{6} \Delta^2_{-1} + \frac{1}{6} \Delta^2_{-1.5} + \frac{29}{180} \Delta^4_{-2} + \frac{28}{180} \Delta^4_{-2.5} + \dots, \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{[0]}y &= \Delta_{0,5}y + \Delta_{-0,5}y = y_1 - y_{-1}, \\ \eta &= 2hy' = 2hf(x, y), \end{aligned} \quad (56)$$

$2h$	$x$	$y$	$\delta$	$\Delta y$	$2hy' = \eta$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$
$\frac{1}{80}$	0,10000	0,0309		(0,0031)	0,0062				0,3162	0,1758	0,4920
	0,10625	0,0340		0,0064	0,0064	2			0,3260	0,1844	0,5104
	0,11250	0,0373		0,0066	0,0066	2			0,3354	0,1931	0,5285
	0,11875	0,0406		0,0068	0,0068	2			0,3446	0,2015	0,5461
	0,12500	0,0441							0,3536	0,2100	0,5636
$\frac{1}{40}$	0,1000	0,0309			0,0123	9					0,4920
	0,1125	0,0373			0,0132	9					0,5285
	0,1250	0,0441		0,0141	0,0141	8					0,5636
	0,1375	0,0514		0,0149	0,0149				0,3708	0,2267	0,5975
	0,1500	0,0590							0,3873	0,2429	0,6302
$\frac{1}{20}$	0,100	0,0309			0,0246	36					0,4920
	0,125	0,0441			0,0282	33	— 3				0,5636
	0,150	0,0590		0,0315	0,0315	32	— 1				0,6302
	0,175	0,0756		0,0347					0,4183	0,2750	0,6933
	0,200	0,0937			0,0347				0,4472	0,3061	0,7533
$\frac{1}{10}$	0,10	0,0309	0		0,0492	138					0,4920
	0,15	0,0590	0		0,0630	123	— 15				0,6302
	0,20	0,0937	0	0,0751	0,0753	113	— 10	5			0,7533
	0,25	0,1341	— 1	0,0865	0,0866	106	— 7	3	0,5000	0,3662	0,8662
	0,30	0,1802	0	0,0971	0,0972	100	— 6	1	0,5477	0,4245	0,9722
	0,35	0,2312	— 1	0,1071	0,1072	96	— 4	2	0,5916	0,4808	1,0724
	0,40	0,2873	— 1	0,1168	0,1168	93	— 3	1	0,6325	0,5360	1,1685
	0,45	0,3480	— 1	0,1261	0,1261	89	— 4	— 1	0,6708	0,5899	1,2607
	0,50	0,4134	0	0,1349	0,1350	86	— 3	1	0,7071	0,6430	1,3501
	0,55	0,4829	— 2	0,1436	0,1436	85			0,7416	0,6949	1,4365
	0,60	0,5570	0	0,1521	0,1521	82			0,7746	0,7463	1,5209
	0,65	0,6350	— 1	0,1603	0,1603	81			0,8062	0,7969	1,6031
	0,70	0,7173	0	0,1684	0,1684	78			0,8367	0,8469	1,6836
	0,75	0,8034	— 1	0,1762	0,1762	78			0,8660	0,8963	1,7623
	0,80	0,8935	0	0,1840	0,1840	76			0,8944	0,9451	1,8395
	0,85	0,9874	0	0,1916	0,1916	74			0,9220	0,9937	1,9157
	0,90	1,0851	0	0,1990	0,1990	74			0,9487	1,0416	1,9903
	0,95	1,1864	0	0,2064	0,2064				0,9747	1,0892	2,0639
	1,00	1,2915	0								

### Таблица 69

[illegible]



из столбца  $\delta$ , погрешность  $y$  после одного цикла приближения стала почти такой же, как после двух приближений по строке Лапласа.

§ 14. Применение вспомогательной функции. При решении уравнений вида

$$y' = f(x, y) \quad (62)$$

с начальным условием  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , для которых легко получать производные высших порядков, можно принять вычислительную схему, дающую

Т а б л и ц а 70

$x$	$\sqrt{x}$	$y$	$\sqrt{y}$	$y'$	$2hy' = 0,1y' = \eta$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta y$	$y$	$\delta$
0,10	0,3162	0,0309	0,1758	0,4920	0,0492	140		(282)	0,0309	0
0,15	0,3873	0,060	0,2449	0,6322	0,0632	123	— 17	629	0,0591	— 1
0,20	0,4472	0,095	0,3082	0,7554	0,0755	112	— 11	753	0,0938	1
0,25	0,5000	0,135	0,3674	0,8674	0,0867	105	— 7	866	0,1344	2
0,30	0,5477	0,180	0,4243	0,9720	0,0972	99	— 6	971	0,1804	2
0,35	0,5916	0,230	0,4795	1,0712	0,1071	95	— 4	1070	0,2315	2
0,40	0,6325	0,285	0,5338	1,1663	0,1166	92	— 3	1106	0,2874	0
0,45	0,6708	0,345	0,5873	1,2581	0,1258	89	— 3	1258	0,3481	0
0,50	0,7071	0,410	0,6403	1,3474	0,1347	87	— 2	( $\eta$ )	0,4132	— 2
0,55	0,7416	0,480	0,6928	1,4344	0,1434	86	— 1		0,4828	— 3
0,60	0,7746	0,555	0,7450	1,5196	0,1520				0,5566	— 4
0,65	0,8062	0,635	0,7969	1,6031	0,1603				0,6348	— 3
0,70	0,8367	0,715	0,8456	1,6823	0,1682				0,7169	— 4
0,75	0,8660	0,805	0,8972	1,7632	0,1763				0,8030	— 5
0,80	0,8944	0,895	0,9460	1,8404	0,1840				0,8932	— 3
0,85	0,9220	0,990	0,9950	1,9170	0,1917				0,9870	— 4
0,90	0,9487	1,085	1,0416	1,9903	0,1990				1,0849	— 2
0,95	0,9747	1,180	1,0863	2,0610	0,2061				1,1860	— 4
1,00	1,0000	1,280	1,1314	2,1314	0,2131				1,2910	— 5

каждое следующее значение  $y$  из непосредственно предшествующего ему значения (а не из второго до него).

Рассмотрим схему:

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_{-2} & y_{-2} & \eta_{-2} & \Delta_{-2}z & \Delta_{-2}^2z & \Delta_{-2}^3z & \Delta_{-2}^4z \\
 & & \Delta_{-1,5}y & z_{-1,5} & \Delta_{-1,5}^2z & \Delta_{-1,5}^3z & \Delta_{-1,5}^4z \\
 x_{-1} & y_{-1} & \eta_{-1} & \Delta_{-1}z & \Delta_{-1}^2z & \Delta_{-1}^3z & \\
 & & \Delta_{-0,5}y & z_{-0,5} & \Delta_{-0,5}^2z & & \\
 x_0 & y_0 & \eta_0 & \Delta_0z & & & \\
 & & & z_{0,5} & & & 
 \end{array} \quad (63)$$

Обозначим по-прежнему

$$\eta = 2hy' \quad (64)$$



и введем такую функцию  $z$ , для которой

$$z_{0,5} + z_{-0,5} = \eta_0. \quad (65)$$

Зависимость (65) аналогична зависимости

$$\Delta_{0,5}y + \Delta_{-0,5}y = \Delta_{[0]}y, \quad (66)$$

следовательно,  $\Delta_{0,5}y$  выражается через  $z_{0,5}$  и разности

$$\Delta_0 z, \Delta_{-0,5}^2 z, \Delta_{-1}^3 z, \dots$$

так же, как  $\Delta_{[0]}y$  выражается через  $\eta_0$  и его разности, т. е.

$$\Delta_{0,5}y = z_{0,5} + \frac{1}{6}\Delta_{-0,5}^2 z + \frac{1}{6}\Delta_{-1}^3 z + \frac{29}{180}\Delta_{-1,5}^4 z + \dots, \quad (67)$$

или приближенно

$$\Delta_{0,5}y \approx z_{0,5} + \frac{1}{6}\Sigma_{0,5}, \quad (68)$$

где

$$\Sigma_{0,5} = \Delta_{-0,5}^2 z + \Delta_{-1}^3 z + \Delta_{-1,5}^4 z. \quad (69)$$

Когда ряд значений  $y$  доведен до  $y_n$ , соответствующего значению аргумента  $x_0 + nh$ , то дальше расчет ведется следующим образом. Вычисляется  $\eta_n$ , затем  $z_{n+0,5} = \eta_n - z_{n-0,5}$ ; составляются разности  $\Delta_n z$ ,  $\Delta_{n-0,5}^2 z$ ,  $\Delta_{n-1}^3 z$ ,  $\Delta_{n-1,5}^4 z$  и сумма

$$\Sigma_{n+0,5} = \Delta_{n-0,5}^2 z + \Delta_{n-1}^3 z + \Delta_{n-1,5}^4 z,$$

после чего переходят по формуле (68) к следующему значению приращения  $\Delta_{n+0,5}y$  и т. д.

Выразим  $z_{0,5}$  и разности

$$\Delta_0 z, \Delta_{-0,5}^2 z, \Delta_{-1}^3 z, \Delta_{-1,5}^4 z, \dots$$

через

$$\eta_0, \Delta_{-0,5}\eta, \Delta_{-1}^2\eta, \Delta_{-1,5}^3\eta, \dots;$$

это нам необходимо для начала расчета.

Пусть

$$z_{0,5} = a_0\eta_0 + a_1\Delta_{-0,5}\eta + a_2\Delta_{-1}^2\eta + a_3\Delta_{-1,5}^3\eta + \dots \quad (70)$$

Тогда

$$\Delta_0 z = a_0\Delta_{-0,5}\eta + a_1\Delta_{-1}^2\eta + a_2\Delta_{-1,5}^3\eta + \dots, \quad (71)$$

$$\Delta_{-0,5}^2 z = a_0\Delta_{-1}^2\eta + a_1\Delta_{-1,5}^3\eta + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

Но

$$\begin{aligned} \eta_0 &= z_{0,5} + z_{-0,5} = z_{0,5} + (z_{0,5} - \Delta_0 z) = 2z_{0,5} - \Delta_0 z = \\ &= 2a_0\eta_0 + (2a_1 - a_0)\Delta_{-0,5}\eta + (2a_2 - a_1)\Delta_{-1}^2\eta + (2a_3 - a_2)\Delta_{-1,5}^3\eta + \dots \end{aligned} \quad (72)$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} 2a_0 &= 1, \\ 2a_1 - a_0 &= 0, & a_1 &= \frac{a_0}{2}, \\ 2a_2 - a_1 &= 0, & a_2 &= \frac{a_1}{2}, \\ \dots & \dots \dots & \dots & \dots \dots \\ 2a_k - a_{k-1} &= 0; & a_k &= \frac{a_{k-1}}{2}. \end{aligned} \quad (73)$$

Это дает

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{8}, \dots, \quad a_k = \frac{1}{2^{k+1}}, \quad (74)$$

так что

$$z_{0,5} = \frac{1}{2} \eta_0 + \frac{1}{4} \Delta_{-0,5} \eta + \frac{1}{8} \Delta_{-1}^2 \eta + \frac{1}{16} \Delta_{-1,5}^3 \eta + \dots \quad (75)$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \Delta_0 z &= \frac{1}{2} \Delta_{-0,5} \eta + \frac{1}{4} \Delta_{-1}^2 \eta + \frac{1}{8} \Delta_{-1,5}^3 \eta + \dots, \\ \Delta_{-0,5}^2 z &= \frac{1}{2} \Delta_{-1}^2 \eta + \frac{1}{4} \Delta_{-1,5}^3 \eta + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (76)$$

Перепишем выражения (75) и (76) в виде

$$\begin{aligned} z_{0,5} &= (hy')_0 + \frac{1}{2} \Delta_{-0,5} (hy') + \frac{1}{4} \Delta_{-1}^2 (hy') + \frac{1}{8} \Delta_{-1,5}^3 (hy') + \dots, \\ \Delta_0 z &= \Delta_{-0,5} (hy') + \frac{1}{2} \Delta_{-1}^2 (hy') + \frac{1}{4} \Delta_{-1,5}^3 (hy') + \dots, \\ \Delta_{-0,5}^2 z &= \Delta_{-1}^2 (hy') + \frac{1}{2} \Delta_{-1,5}^3 (hy') + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (77)$$

В соответствии с формулами (40) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_{-0,5} (hy') &= h^2 y_0'' - \frac{1}{2!} h^3 y_0''' + \frac{1}{3!} h^4 y_0^{IV} - \frac{1}{4!} h^5 y_0^V + \dots, \\ \Delta_{-1}^2 (hy') &= h^3 y_0''' - h^4 y_0^{IV} + \frac{7}{12} h^5 y_0^V - \dots, \\ \Delta_{-1,5}^3 (hy') &= h^4 y_0^{IV} - \frac{3}{2} h^5 y_0^V + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (78)$$

Следовательно, мы можем выразить  $z_{0,5}$  и разности  $\Delta_0 z$ ,  $\Delta_{-0,5}^2 z$ , ... через производные  $y_0'$ ,  $y_0''$ ,  $y_0'''$ , ... Соответственно просуммировав, получим:

$$\begin{aligned} z_{0,5} &= hy_0' + \frac{1}{2} h^2 y_0'' - \frac{1}{24} h^4 y_0^{IV} + \frac{1}{240} h^6 y_0^{VI} - \dots, \\ \Delta_0 z &= h^2 y_0'' - \frac{1}{12} h^4 y_0^{IV} + \frac{1}{120} h^6 y_0^{VI} - \dots, \\ \Delta_{-0,5}^2 z &= h^3 y_0''' - \frac{1}{2} h^4 y_0^{IV} + \frac{1}{12} h^5 y_0^V - \dots, \\ \Delta_{-1}^3 z &= h^4 y_0^{IV} - h^5 y_0^V + \frac{1}{2} h^6 y_0^{VI} - \dots, \\ \Delta_{-1,5}^4 z &= h^5 y_0^V - \frac{3}{2} h^6 y_0^{VI} + \dots, \\ \Delta_{-2}^5 z &= h^6 y_0^{VI} - \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (79)$$

Итак, имея уравнение  $y' = f(x, y)$  с начальным условием  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , повторным дифференцированием находим  $y_0''$ ,  $y_0'''$ ,  $y_0^{IV}$ , ...; вычисляем  $z_{0,5}$ ,  $\Delta_0 z$ ,  $\Delta_{-0,5}^2 z$ , ... по формулам (79) и производим дальнейший расчет по формуле (68).

Если дифференцировать решаемое уравнение затруднительно, но можно получить с помощью ряда несколько первых значений  $y$ , то вычисляются  $\eta_0 = 2hy_0'$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ , ...; составляются разности  $\Delta\eta$ ,  $\Delta^2\eta$ , ... и по формулам (75), (76) определяются  $z$  и разности  $\Delta z$ ,  $\Delta^2 z$ , ... Рассмотрим несколько примеров

Пример 1. Возьмем легко дифференцируемое уравнение

$$y' = y$$

с начальным условием  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ .

Имеем, при любом  $k$ :

$$y^{(k)} = y, \quad y_0^{(k)} = 1.$$

Отсюда при  $h = 0,1$  получим:

$$z_{0,8} = 0,100000 + 0,005000 - 0,000004 = 0,104996 \approx 0,10499,$$

$$\Delta_0 z = 0,010000 - 0,000008 = 0,009992 \approx 0,00999,$$

$$\Delta_{0,8}^2 z = 0,001000 - 0,000050 + 0,000001 = 0,000951 \approx 0,00095,$$

$$\Delta_{-1}^3 z = 0,000100 - 0,000010 = 0,000090 = 0,00009,$$

$$\Delta_{-1,8}^4 z = 0,000010 - 0,000001 = 0,000009 \approx 0,00001.$$

Дальнейший расчет дан в табл. 71. Если мы сравним его с ранее произведенными расчетами по методу Адамса — основному и с применением сумм, — то увидим, что при меньшем количестве вычислений получена несколько большая точность. Необходимо только отметить, что схема (63) требует предельно аккуратной работы. Дело в том, что допущенная в каком-то из значений  $z$  ошибка не может исчезнуть и вследствие связи между собою каждой пары значений  $z$  продолжает искажать все числа данного столбца то в положительную, то в отрицательную сторону поочередно. Это расстраивает ход разностей, особенно разностей высоких порядков, и начинает вносить дополнительные погрешности в производные, после чего расчет быстро теряет точность. Вычисление желательно вести с учетом половин единиц, как и было проведено в только что рассмотренном примере.

Пример 2. В уравнении Муаньо нахождение величины производных высших порядков затруднительно, но мы можем вычислить с помощью ряда значения  $y$  при  $x = 0,100$ ;  $0,125$ ;  $0,150$ ;  $0,175$  и  $0,200$ , составить таблицу значений  $\eta$  и ее разностей и вычислить  $z$  и его разности. В результате получим (промежуточных действий не приводим, так как нас интересует лишь процесс получения  $z$  и его разностей):

$x$	$\eta$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
0,100	0,02460				
		358			
0,125	0,02818		— 24·		
		333·		+ 6	
0,150	0,03151·		— 18·		— 2·
		315		+ 3·	
0,175	0,03466·		— 15		
		300			
0,200	0,03766·				

$$z_{x=0,2+\frac{h}{2}} = (18\ 832 + 750 - 19 + 2) \cdot 10^{-6} = 0,019565 \approx 0,01956,$$

$$\Delta_{x=0,8} z = (1500 - 37 + 4 - 1) \cdot 10^{-6} = 0,001466 \approx 0,00146,$$

$$\Delta_{x=0,2-\frac{h}{2}}^2 z = (-75 + 9 - 3) \cdot 10^{-6} = -0,000069 \approx -0,00007,$$

$$\Delta_{x=0,175}^3 z = (18 - 6) \cdot 10^{-6} = 0,000012 \approx 0,00001.$$

Переходим к вычислению (см. табл. 72). Дойдя до  $x = 0,4$  и желая перейти к удвоенному интервалу, мы должны снова составить таблицу значений  $\eta$  и соответствующих разностей, получить новые значения  $z$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta^2 z$  и т. д.

Таблица 71

$x$	$y$	$\delta$	$\Delta y$	$2hy' = 0,2y = \eta$	$z$	$\Delta z$	$\Delta^2 z$	$\Delta^3 z$	$\Delta^4 z$	$\Sigma$
0	1,00000	0	0,10517			999	95	9	1	
0,1	1,10517	0	0,11623	0,22103	0,10499	1104	105	10	1	105
0,2	1,22140	0	0,12845	0,24428	0,11604	1220	115	13	3	117
0,3	1,34985	0	0,14197	0,26997	0,12824	1349	129	12	— 1	125
0,4	1,49183	1	0,15689	0,29836	0,14173	1490	141	15	3	146
0,5	1,64872	0	0,17340	0,32974	0,15663	1647	157	16	1	152
0,6	1,82212	0	0,19163	0,36442	0,17311	1820	173	18	2	175
0,7	2,01375	0	0,21179	0,40275	0,19131	2012	191	20	2	190
0,8	2,22554	0	0,23406	0,44511	0,21143	2224	212	21	0	212
0,9	2,45960	0	0,25867	0,49192	0,23367	2457	233	26	5	234
1,0	2,71827	0	0,28589	0,54365	0,25824	2716	259	— 1	— 1	254
1,1	3,00417	0	0,31594	0,60083	0,28541	3001	285	25	5	291
1,2	3,32011	— 1	0,34918	0,66402	0,31542	3317	301	30	4	309
1,3	3,66929	1	0,38591	0,73386	0,34859	3667	315	34	0	351
1,4	4,05520	0	0,42647	0,81104	0,38526	4051	350	34	9	388
1,5	4,48167	— 1	0,47136	0,89633	0,42577	4478	384	43	0	418
1,6	4,95303	0	0,52090	0,99060	0,47056	4948	427	43	0	480
1,7	5,47393	— 1	0,57570	1,09478	0,52004	5469	470	51	7	513
1,8	6,04964	— 1	0,63625	1,20993	0,57474	6045	521	55	4	579
1,9	6,68589	0	0,70315	1,33718	0,63519	6680	576	58	3	635
2,0	7,39904	— 2			0,70199		634			696

Имеем:

$x$	$\eta$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
0,20	0,07532	1131			
0,25	0,08663	1058	— 72	18	
0,30	0,09722	1004	— 54	10	— 8
0,35	0,10726	959	— 44		
0,40	0,11685				

Т а б л и ц а   72

$x$	$y$	$\delta$	$\Delta y$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$2hy'=\eta$	$z$	$\Delta z$	$\Delta^2 z$	$\Delta^3 z$	$\Delta^4 z$	$\Sigma$
0,200	0,09367	0					0,03766		146	— 7	1		
			0,01955					0,01956	— 5	1			— 6
0,225	0,11322		0,02097	0,47434	0,33651	0,81085	0,04054		141	— 4	0		— 4
0,250	0,13419	0	0,02233	0,50000	0,36633	0,86633	0,04331		136	— 4			— 3
0,275	0,15653		0,02366	0,52440	0,39566	0,92006	0,04600		132	— 4			— 3
0,300	0,18019	0	0,02494	0,54772	0,42449	0,97221	0,04861		128	— 2			
0,325	0,20513		0,02620	0,57009	0,45293	1,02302	0,05115		126	— 4			
0,350	0,23133	0	0,02742	0,59161	0,48098	1,07259	0,05363		122	— 2			
0,375	0,25075		0,02862	0,61237	0,50868	1,12105	0,05605		120				
0,400	0,28737	0									3	— 4	
										— 20	4		
0,40	0,28737	0	0,06074	0,63246	0,53607	1,16853	0,11685		469	— 16			— 21
0,45	0,34811	— 1	0,06529	0,67082	0,59001	1,26083	0,12608		453	— 15			— 11
0,50	0,41340	0	0,06967	0,70711	0,64296	1,35007	0,13500		438	— 11			
0,55	0,48307	— 1	0,07395	0,74162	0,69505	1,43667	0,14366		427	— 12			
0,60	0,55702	— 1	0,07810	0,77460	0,74633	1,52093	0,15209		415	— 8			
0,65	0,63512	— 2	0,08218	0,80623	0,79695	1,60318	0,16032		407	— 10			
0,70	0,71730	— 1	0,08615	0,83666	0,84694	1,68360	0,16836		397	— 6			
0,75	0,80345	— 2	0,09006	0,86603	0,89635	1,76238	0,17624		391	— 9			
0,80	0,89352	— 2	0,09388	0,89443	0,94526	1,83969	0,18397		382	— 5			
0,85	0,98740	— 2	0,09765	0,92195	0,99367	1,91562	0,19156		377	— 6			
0,90	1,08505	— 2	0,10136	0,94868	1,04165	1,99033	0,19903		370	— 5			
0,95	1,18641	— 2	0,10501	0,97468	1,08921	2,06389	0,20639		365				
1,00	1,29142	— 3											

$$z_{x=0,4+\frac{h}{2}} = (58\,428 + 2399 - 55 + 6 - 2) \cdot 10^{-6} = 0,060776 \approx 0,06077,$$

$$\Delta_{x=0,4} z = (4797 - 111 + 12 - 5) \cdot 10^{-6} = 0,004693 \approx 0,00469,$$

$$\Delta^2_{x=0,4-\frac{h}{2}} z = (-222 + 25 - 1) \cdot 10^{-6} = -0,000198 \approx -0,00020,$$

$$\Delta^3_{x=0,35} z = (50 - 20) \cdot 10^{-6} = 0,000030 \approx 0,00003,$$

$$\Delta^4_{x=0,35-\frac{h}{2}} z = -0,00004.$$

Значения  $z$  во время расчета выписываем лишь тогда, когда приходится учитывать разности третьего и четвертого порядка; когда они слишком малы, мы прямо выписываем  $\Delta y$ , в уме вычитая из  $\eta$  одну шестую долю второй разности.

**§ 15. Второй тип вспомогательной функции.** Для уравнений, легко дифференцируемых, для получения значений производных  $y_0'', y_0''', \dots$  можно составить еще одну вычислительную схему, обладающую большой точностью и не страдающую быстрым нарастанием погрешностей значений интегральной функции. Схема эта имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} x_{-1} & y_{-1} & \eta_{-1} = 2hy'_{-1} & u_{-1} & & & \Delta^4_{-1}u \\ & & & & \Delta_{-0,5}u & & \Delta^3_{-0,5}u \\ x_0 & y_0 & \eta_0 = 2hy'_0 & u_0 & & \Delta^2_0u & \\ & & & & \Delta_{0,5}u & & \end{array} \quad (80)$$

$x_1 \quad y_1 \quad u_1$   
причем функция  $u$  здесь такова, что

$$\eta_0 = u_1 - u_{-1}, \quad (81)$$

т. е.

$$u_1 = u_{-1} + \eta_0. \quad (82)$$

Беря разности от левой и правой частей равенства (81), получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{-0,5}\eta &= \Delta_{0,5}u - \Delta_{-1,5}u, \\ \Delta^2_{-1}\eta &= \Delta^2_0u - \Delta^2_{-2}u, \\ \Delta^3_{-1,5}\eta &= \Delta^3_{-0,5}u - \Delta^3_{-2,5}u, \\ &\dots \end{aligned} \quad (83)$$

Теперь возьмем формулу (54):

$$y_1 - y_{-1} = \eta_0 + \frac{1}{6} \Delta^2_{-1}\eta + \frac{1}{6} \Delta^3_{-1,5}\eta + \frac{29}{180} \Delta^4_{-2}\eta + \dots \quad (84)$$

и подставим в нее вместо разностей  $\Delta^k\eta$  соответствующие выражения, взятые из (83). Тогда получим выражение, из которого совершенно очевидна зависимость между  $u$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} y_1 - y_{-1} &= u_1 - u_{-1} + \frac{1}{6} (\Delta^2_0u - \Delta^2_{-2}u) + \frac{1}{6} (\Delta^3_{-0,5}u - \Delta^3_{-2,5}u) + \\ &+ \frac{29}{180} (\Delta^4_{-1}u - \Delta^4_{-3}u) + \dots = u_1 + \frac{1}{6} \Delta^2_0u + \frac{1}{6} \Delta^3_{-0,5}u + \frac{29}{180} \Delta^4_{-1}u + \dots - \\ &- \left[ u_{-1} + \frac{1}{6} \Delta^2_{-2}u + \frac{1}{6} \Delta^3_{-2,5}u + \frac{29}{180} \Delta^4_{-3}u + \dots \right]. \end{aligned} \quad (85)$$

Это выражение соответствует зависимости

$$y_0 = u_0 + \frac{1}{6} \Delta^2_{-1}u + \frac{1}{6} \Delta^3_{-1,5}u + \frac{29}{180} \Delta^4_{-2}u + \dots, \quad (86)$$

которая по своей структуре полностью аналогична формуле (84).

Для начала расчета нужно выразить значения

$$u_0, \Delta_{-0,5}u, \Delta^2_{-1}u, \Delta^3_{-1,5}u, \dots$$

через начальные значения функции  $y$  и ее производных.

Отыскивая решение в виде

$$u_0 = y_0 + a_1 y'_0 + a_2 y''_0 + a_3 y'''_0 + \dots, \quad (87)$$

составим для этого выражения разности, подставим их в (86) и приравняем соответствующие члены. Мы получим систему уравнений, определяющих  $a_1, a_2, \dots$ . В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0 - \frac{1}{6} h^2 y_0'' + \frac{7}{360} h^4 y_0^{IV} - \dots, \\ \Delta_{-0,5} u &= h y_0' - \frac{1}{2} h^2 y_0'' + \frac{1}{24} h^4 y_0^{IV} - \dots, \\ \Delta_{-1}^2 u &= h^2 y_0'' - h^3 y_0''' + \frac{5}{12} h^4 y_0^{IV} - \frac{1}{12} h^5 y_0^V + \dots, \\ \Delta_{-1,5}^3 u &= h^3 y_0''' - \frac{3}{2} h^4 y_0^{IV} + \frac{13}{12} h^5 y_0^V - \dots, \\ \Delta_{-2}^4 u &= h^4 y_0^{IV} - 2 h^5 y_0^V + \dots, \\ \Delta_{-2,5}^5 u &= h^5 y_0^V - \dots. \end{aligned} \quad (88)$$

Если получить значения производных от  $y$  высоких порядков затруднительно, но можно с помощью ряда найти несколько значений  $y$ , то, составив их разности, можно вычислить также и значения функции  $u$  и ее разностей.

Задавшись зависимостью

$$u_0 = y_0 + b_1 \Delta_{-0,5} y + b_2 \Delta_{-1}^2 y + b_3 \Delta_{-1,5}^3 y + \dots \quad (89)$$

и аналогичными зависимостями для разностей  $u$  и подставив полученные выражения в (86), решим образовавшуюся систему уравнений и получим:

$$\begin{aligned} u_0 &= y_0 - \frac{1}{6} \Delta_{-1}^2 y - \frac{1}{6} \Delta_{-1,5}^3 y - \frac{2}{15} \Delta_{-2}^4 y - \frac{1}{10} \Delta_{-2,5}^5 y - \dots, \\ \Delta_{-0,5} u &= \Delta_{-0,5} y - \frac{1}{6} \Delta_{-1,5}^3 y - \frac{1}{6} \Delta_{-2}^4 y - \frac{2}{15} \Delta_{-2,5}^5 y - \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (90)$$

Аналогично для  $k$ -й строки

$$u_k = y_k - \frac{1}{6} \Delta_{k-1}^2 y - \frac{1}{6} \Delta_{k-1,5}^3 y - \frac{2}{15} \Delta_{k-2}^4 y - \frac{1}{10} \Delta_{k-2,5}^5 y - \dots \quad (91)$$

и т. д.

Использовать выражения (90) и (91) можно также и для начала вычисления путем последовательных приближений, но это значительно сложнее, чем начало расчета непосредственно по способу Адамса.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Для уравнения

$$y' = y$$

с начальным условием  $x=0$ ,  $y=1$ , учитывая равенство всех начальных значений производных, для интервала  $h$ , равного 0,1, получим из (88):

$$\begin{aligned} u_0 &= 1,000000 - 0,001667 + 0,000002 = 0,998333, \\ \Delta_{-0,5} u &= 0,100000 - 0,005000 + 0,000004 = 0,095004, \\ \Delta_{-1}^2 u &= 0,010000 - 0,001000 + 0,000042 - 0,000001 = 0,009041, \\ \Delta_{-1,5}^3 u &= 0,001000 - 0,000150 + 0,000011 = 0,000861, \\ \Delta_{-2}^4 u &= 0,000100 - 0,000020 = 0,000080, \\ \Delta_{-2,5}^5 u &= 0,000001. \end{aligned}$$





$x$	$y$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$
1,0	2,71827•					
		28590				
1,1	3,00417•		3003•			
		31593•		321		
1,2	3,32011		3324•		27•	
		34918		348•		7
1,3	3,66929		3673		34•	
		38591		383		
1,4	4,05520		4056			
		42647				
1,5	4,48167•					

$$u_{x-1,5} = \left( 448\,167 \cdot \frac{4056}{6} - \frac{383}{6} - \frac{2 \cdot 34 \cdot}{105} - \frac{7}{10} \right) \cdot 10^{-6} = 4,47422 \cdot$$

г. е. значение  $u_{x-1,5}$  в точности то же, что и в таблице. Кроме того, плавность хода разностей говорит об отсутствии ошибок.

Пример 2. Рассмотрим применение схемы (80) к уравнению Муаньо. Вычислив для интервала  $h=0,025$  значения  $y$  при  $x=0,100; 0,125; 0,150; 0,175$  и  $0,200$  с помощью ряда, определим значения  $u$  и ее разностей. Имеем:

$x$	$y$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
0,100	0,03090				
		1319			
0,125	0,04409		175•		
		1494•		— 14	
0,150	0,05903•		161•		4•
		1656		— 9•	
0,175	0,07559•		152		
		1808			
0,200	0,09367•				

$$u_{x-0,200} = \left( 9367 \cdot \frac{152}{6} - \frac{-9 \cdot}{6} - \frac{2 \cdot 4 \cdot}{15} \right) \cdot 10^{-5} = 0,09343 \cdot$$

$$\Delta u = \left( 1808 - \frac{-9 \cdot}{6} - \frac{1}{6} \right) \cdot 10^{-5} = 0,01809 \cdot,$$

$$\Delta^2 u = \left( 152 - \frac{4 \cdot}{6} \right) \cdot 10^{-5} = 0,00151 \cdot,$$

$$\Delta^3 u = -0,00009 \cdot,$$

$$\Delta^4 u = 0,00004 \cdot.$$

Находим  $u_{x-0,175}$  и можем начинать вычисление.

Результаты даны в табл. 74. При переходе к удвоенному интервалу снова строим значения функции  $u$  и ее разностей с помощью разностей  $u$ . Расчет по этой схеме очень устойчив и достаточно прост.

**§ 16. Уравнение типа Риккати.** В качестве полезного примера приведем интегрирование уравнения типа Риккати, рассмотренного В. П. Ветчинкиным \*),

$$y' = 4 - x^2 - y^2 \quad (93)$$

\*) Ветчинкин В. П., Руководство по приближенным вычислениям, Труды ЦАГИ, в. 210, 1935, стр. 71.

с начальным условием  $x_0 = -2$ ,  $y_0 = 0,5$ . Интегральную кривую нужно получить для значений  $-2 < x < -1$ .

Сначала даем графическое решение задачи (рис. 68).

Таблица 74

$x$	$y$	$\delta$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$y'$	$0,2y'=\eta$	$u$	$\Delta u$	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$	$\Delta^4 u$	$\Sigma$	$\frac{1}{6} \Sigma$
0,2	0,09367	0	0,44721	0,30605	0,75326	0,03766	0,07534	1 809	151	— 9	4		
0,225	0,11325		0,47434	0,33653	0,81087	0,04054	0,09343	1 959	148	— 3	6	146	24
0,25	0,13421	1	0,50000	0,36635	0,86635	0,04332	0,11300	2 097	140			150	25
0,275	0,15655		0,52440	0,39567	0,92007	0,04600	0,13398	2 234	137				
0,3	0,18020	2	0,54772	0,42450	0,97222	0,04861	0,15632	2 366	131				
0,325	0,20515		0,57009	0,45293	1,02302	0,05115	0,17998	2 495	129				
0,35	0,23134	2	0,59161	0,48099	1,07260	0,05363	0,20493	2 620	125				
0,375	0,25877		0,61237	0,50860	1,12106	0,05605	0,23113	2 743	123				
0,4	0,28739	2					0,25856	2 762	119				
							0,28719						
0,35							0,23053	5 607	489	— 24	5		
0,4	0,28739	2	0,63246	0,53609	1,16855	0,11685	0,28661	6 078	470	— 19	5	1 470	78
0,45	0,34815	3	0,67082	0,59004	1,26086	0,12608	0,34738	6 530	452	— 18		457	76
0,5	0,41342	2	0,70711	0,64298	1,35009	0,13501	0,41269	6 970	440	— 12	— 2	435	72
0,55	0,48312	4	0,74162	0,69506	1,43668	0,14366	0,48240	7 396	425	— 14		433	72
0,6	0,55704	1	0,77460	0,74634	1,52094	0,15209	0,55636	7 813	417			409	68
0,65	0,63519	5	0,80623	0,79700	1,60323	0,16032	0,63449	8 219	405				
0,7	0,71736	4	0,83666	0,84698	1,68364	0,16836	0,71668	8 617	398				
0,75	0,80352	4	0,86603	0,89639	1,76242	0,17624	0,80286	9 006	389				
0,8	0,89357	4	0,89443	0,94529	1,83972	0,18397	0,89292	9 390	384				
0,85	0,98747	5	0,92195	0,99372	1,91567	0,19156	0,98683	9 766	375				
0,9	1,08511	3	0,94868	1,04168	1,99036	0,19903	1,08443	10 137	371				
0,95	1,18648	4	0,97468	1,08925	2,06393	0,20639	1,18586	10 502	364				
1,0	1,29149	4					1,29088						

Проводим прямые  $x^2 = C$  и  $y^2 = C$ , т. е.  $x = \sqrt{C}$  и  $y = \sqrt{C}$  для значений  $C$ , взятых с интервалом 0,2. Затем через узлы этих линий проводим

изоклины (линии равного значения  $y'$ ) и строим интегральную кривую, как было показано в § 2. По полученным значениям  $y$  производим уточнение по строке Коуэлла. Результаты даны в табл. 75.

Если бы мы повторили цикл приближения, то увидели бы, что вместо сближения результатов двух соседних циклов получается увеличение расхождений между значениями  $y$ . В данном случае это происходит оттого, что

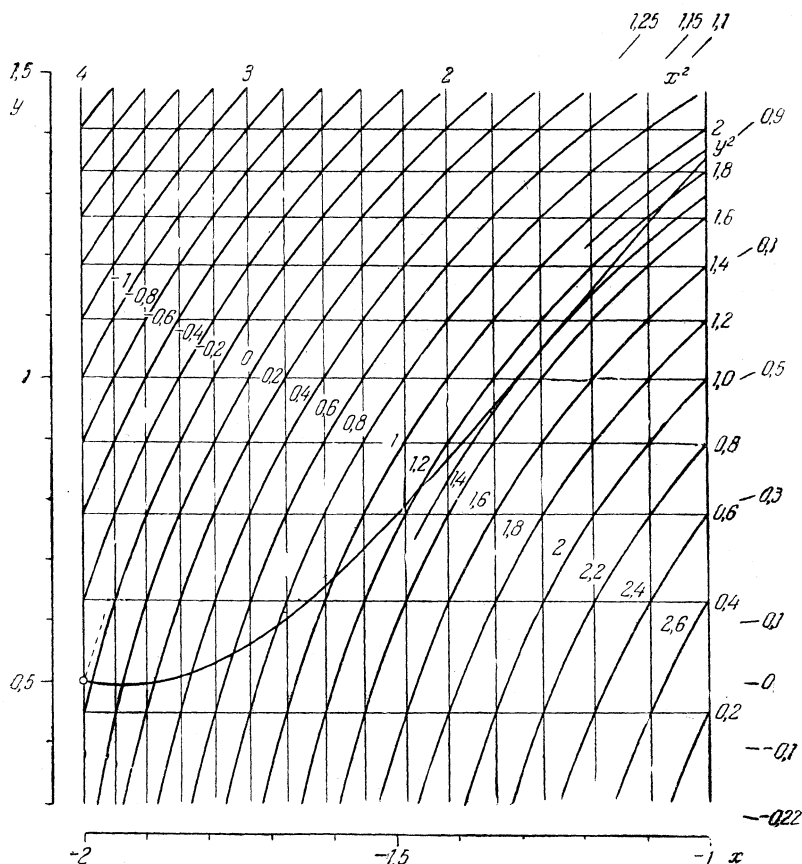


Рис. 68.

полученные нами графически значения  $y$  все несколько приуменьшены по сравнению с истинными. Поэтому все значения производных будут больше истинных. Поскольку зависимость между  $y$  и  $y'$  есть квадратичная, влияние неточностей  $y$  с каждым циклом приближений не только не затухает, но, наоборот, удваивается. Поэтому процесс является расходящимся и пользоваться им для данного уравнения нельзя.

Установление условий, при которых допустимо применение последовательных сближений, чрезвычайно сложно, и на практике такое исследование произвести невозможно; однако можно указать примерное условие сходимости или расходимости такого вычислительного процесса.

Если на всем протяжении интегрирования частная производная  $\frac{df}{dy}$ , где  $f = f(x, y) = y'$ , умноженная на ширину  $b - a$  полосы интегрирования, по

абсолютному значению меньше единицы, то процесс сходится, а если больше единицы, то процесс расходится. Пояснить это можно следующим образом.

Т а б л и ц а 75

$x$	$y(1)$	$x^2$	$y_{(1)}^2$	$y' = 4 - x^2 - y^2$	$\eta = 2hy' = 0,1y'$	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta_{(1)}y$	$y(2)$
— 2,00	0,5	4,0000	0,2500	— 0,2500	— 0,0250	207		(— 74)	0,5000
— 1,95	0,49	3,8025	0,2401	— 0,0426	— 0,0043	188	— 19	— 46	0,4926
— 1,90	0,495	3,6100	0,2450	0,1450	0,0145	177	— 11	143	0,4954
— 1,85	0,505	3,4225	0,2550	0,3225	0,0322	162	— 15	320	0,5069
— 1,80	0,525	3,2400	0,2756	0,4844	0,0484	151	— 11	482	0,5274
— 1,75	0,550	3,0625	0,3025	0,6350	0,0635	133	— 18	632	0,5551
— 1,70	0,585	2,8900	0,3422	0,7678	0,0768	119	— 14	766	0,5906
— 1,65	0,625	2,7225	0,3906	0,8869	0,0887	104	— 8	886	0,6317
— 1,60	0,670	2,5600	0,4489	0,9911	0,0991	88	— 16	988	0,6792
— 1,55	0,720	2,4025	0,5184	1,0791	0,1079	70	— 18	1076	0,7305
— 1,50	0,775	2,2500	0,6006	1,1494	0,1149	60	— 10	1147	0,7868
— 1,45	0,830	2,1025	0,6889	1,2086	0,1209	48	— 12	1207	0,8452
— 1,40	0,885	1,9600	0,7832	1,2568	0,1257	37	— 11	1255	0,9075
— 1,35	0,945	1,8225	0,8930	1,2845	0,1284	16	— 21	1281	0,9707
— 1,30	1,005	1,6900	1,0100	1,3000	0,1300	3	— 13	1298	1,0356
— 1,25	1,065	1,5625	1,1342	1,3033	0,1303	— 9	— 12	1301	1,1005
— 1,20	1,125	1,4400	1,2656	1,2944	0,1294	— 21	— 12	1292	1,1657
— 1,15	1,185	1,3225	1,4042	1,2733	0,1273	— 33	— 12	1271	1,2287
— 1,10	1,245	1,2100	1,5500	1,2400	0,1240	— 46	— 13	1238	1,2978
— 1,05	1,305	1,1025	1,7030	1,1945	0,1194	— 57	— 14	1194	1,3585
— 1,00	1,365	1,0000	1,8632	1,1368	0,1137				1,4122

Пусть полученные приближенные значения  $y_{(1)}$  отличаются от истинных на величину  $\delta_{(1)}$ , т. е.

$$y_{(1)}(x) = y(x) + \delta_{(1)}(x). \quad (94)$$

В этом случае значения  $y'_{(1)}$ , вычисленные по значениям  $y_{(1)}$ , будут приближенно равны

$$y'_{(1)}(x) = f(x, y) + \delta_{(1)}(x) \frac{\partial f}{\partial y} \quad (95)$$

и, следовательно, новые значения  $y_{(2)}$  будут примерно равны

$$y_{(2)}(x) = y(x) + \int_a^x \delta_{(1)}(x) \frac{\partial f}{\partial y} dx = y(x) + \delta_{(2)}(x). \quad (96)$$

Если на всем протяжении интегрирования имеет место неравенство

$$\left| (b-a) \frac{\partial f}{\partial y} \right| < 1, \quad (97)$$

то, очевидно,

$$|\delta_{(2)}| < |\delta_{(1)}| \quad (98)$$

и процесс сходится. В противоположном случае он расходится.

Это условие — достаточное, но не необходимое; поэтому в ряде случаев невыполнение его все же не исключает возможности получения результата. Но в этих случаях сходимость зачастую бывает медленная и применять последовательные сближения нецелесообразно.

Для уравнения Муаньо мы имели

$$\left| (b-a) \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}. \quad (99)$$

На значительной части полосы интегрирования условие (97) удовлетворялось и процесс сближения был сходящимся. Для уравнения Риккати, наоборот, почти на всем протяжении расчета величина

$$\left| (b-a) \frac{\partial f}{\partial y} \right| = 2y \quad (100)$$

больше единицы и процесс был расходящимся. Поэтому для данного уравнения наиболее целесообразным будет непосредственное интегрирование одним из вышеприведенных методов.

Для начинающего вычислителя необходимо, чтобы схема расчета была простой и чтобы вычисления можно было контролировать. Этим условиям лучше всего удовлетворяет расчет методом Адамса с немедленной проверкой по строке Лапласа и уточнением только что полученных величин. Остальные рассмотренные нами схемы пригодны для применения лишь при наличии у расчетчика достаточного вычислительного опыта.

Для уравнения Риккати мы можем начинать расчет либо последовательным приближением, описанным при изложении способа Адамса, либо продифференцировать это уравнение несколько раз, выразить производные высших порядков через предыдущие и получить несколько первых значений  $y$ , после чего найти значение  $\eta$  и его разностей для одной из первых строк расчета, а затем продолжать расчет обычным путем.

В табл. 76 дан расчет, основанный на использовании производных, полученных для  $x = -2$ . Имеем:

$$\begin{aligned} y' &= 4 - x^2 - y^2, \\ y'' &= -2x - 2yy', \\ y''' &= -2 - 2y'^2 - 2yy'', \\ y^{IV} &= -6y'y'' - 2yy''', \\ y^V &= -6y''^2 - 8y'y''' - 2yy^{IV}, \\ y^{VI} &= -20y''y''' - 10y'y^{IV} - 2yy^V, \\ &\dots \end{aligned} \quad (101)$$

Таблица 76

$x$	$x^2$	$y^2$	$\frac{4-x^2-y^2}{-y^2=y'}$	$y$	$\Delta y$	$\eta=0,05y'$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$	$\Delta^3 \eta$	$-\frac{1}{2} \Delta \eta$ $\frac{1}{2} \Delta \eta$	$-\frac{1}{12} \Delta^2 \eta$ $\frac{5}{12} \Delta^2 \eta$	$-\frac{1}{24} \Delta^3 \eta$ $\frac{3}{8} \Delta^3 \eta$	$\Sigma$
-2	4,00000	0,25000	-0,26000	0,50000		-0,01250	1024						
-1,95	3,80250	0,24273	-0,04623	0,49668		-0,00226	960	-74	3				
-1,9	3,61000	0,24525	0,14475	0,49523		0,00724	879	-71	0				
-1,85	3,42250	0,25697	0,32053	0,50692	2014	0,01603	808	-71		439*	-29*	1	411
-1,8	3,24000	0,27779	0,48221	0,52705	2013	0,02411	737	-71		-404	6		-398
-1,75	3,06250	0,30791	0,62969	0,55490	2785	0,03148	663	-74		404	-29*		374
-1,7	2,89000	0,34785	0,76215	0,58978	2786	0,03811	587	-76		-368*	6		-362
-1,65	2,72250	0,39800	0,87950	0,63087	3487	0,04398	507	-80		-368*	-29*		339
-1,6	2,56000	0,45896	0,98104	0,67747	3485	0,04905	427	-80		+331*	6		-326
-1,55	2,40250	0,53100	1,06650	0,72870	4111	0,05332	346	-81		331*	-31		300
-1,5	2,25000	0,61437	1,13563	0,78382	4111	0,05678	265	-81		-293*	6*		-287
				0,78382	4660					293*	-31*		262
				0,78382	4658					-253*	6*		-247
				0,78382	5125					253*	-33*		220
				0,78382	5125					-213*	6*		-207
				0,78382	5512					213*	-33*		180
				0,78382	5512					-173	7		-166
				0,78382	5817					173	-34		139
				0,78382	5817					-132*	6*		-126



При  $x_0 = -2$  и интервале  $h = 0,05$  это дает:

$$\begin{aligned} hy'_0 &= -0,012500, \\ h^2 y''_0 &= +0,010625, \\ h^3 y'''_0 &= -0,000797, \\ h^4 y^{IV}_0 &= +0,000080, \\ h^5 y^V_0 &= -0,000042, \\ h^6 y^{VI}_0 &= +0,000011, \\ &\dots \end{aligned}$$

Таким образом, для  $x = -2,0 + 0,05k$  получаем:

$$\begin{aligned} y_k &= 0,500000 - 0,012500k + 0,010625 \frac{k^2}{2} - 0,000797 \frac{k^3}{6} + 0,000080 \frac{k^4}{24} - \\ &\quad - 0,000042 \frac{k^5}{120} + 0,000011 \frac{k^6}{720} - \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$y_1 = 0,49268, \quad y_2 = 0,49523, \quad y_3 = 0,50692.$$

Этих значений достаточно для начала расчета.

Если начинать непосредственными приближениями, то получим табл. 77, имея которую можно продолжать расчет.

Т а б л и ц а 77

$x$	$x^2$	$y^2$	$4-x^2-y^2=$ $=y'$	$y$	$\Delta y$	$\eta=0,05y'$	$\Delta \eta$	$\Delta^2 \eta$
-2	4	0,25	-0,25	0,50000		-0,01250		
-1,95	3,80250	0,23760	-0,04010	0,48750	-1250	-0,00200	1050	
-2				0,50000		-0,01250	1050	-26
-1,95	3,80250	0,24280	-0,04530	0,49275	-725	-0,00226	1024	-76
-1,9	3,61000	0,24552	0,14448	0,49550	275	0,00722	948	
								-76
-2				0,50000		-0,01250	1100	-76
-1,95	3,80250	0,24273	-0,04523	0,49268	-732	-0,00226	1024	-74
-1,9	3,61000	0,24525	0,14475	0,49523	255	0,00724	950	

Сравним полученные нами значения  $y$  с теми, которые были получены В.П. Ветчинкиным при вычислении для каждой точки четырех значений производной.

$x$	Наши значения	Значения Ветчинкина	Разница
-1,9	0,49523	0,495229	0
-1,8	0,52705	0,527041	1
-1,7	0,58976	0,589757	0
-1,6	0,67745	0,677442	1
-1,5	0,78382	0,783827	0
-1,4	0,90241	0,902415	0
-1,3	1,02694	1,026947	-1
-1,2	1,15177	1,151768	0
-1,1	1,27229	1,272292	0



При уменьшении интервалов всего лишь в два раза (а не в четыре), мы получили бы точными почти семь знаков за запятой, так как неучитываемые четвертые разности  $\eta$  уменьшились бы в 32 раза. Покажем это для некоторой части расчета.

В табл. 78 разности показывают, что негладкость их хода касается лишь седьмого знака за запятой. В этом вычислении квадраты пришлось вычислять на арифмометре, так как точность таблиц Барлоу оказалась недостаточной, вернее, трудно было находить интерполяцией три последних знака.

**§ 17. Уравнения второго порядка.** Переходя к уравнениям второго порядка, мы должны разграничить два принципиально различных типа уравнений

$$\begin{aligned} 1) \quad y'' &= \varphi(x, y, y'); \\ 2) \quad y'' &= \varphi(x, y). \end{aligned} \quad (102)$$

Интегрирование уравнений первого типа сводится к интегрированию системы из двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} y' &= u, \\ u' &= \varphi(x, y, u); \end{aligned} \quad (103)$$

для уравнений же второго типа нужно применять особые приемы интегрирования.

Пример. В. П. Ветчинкиным \*) рассмотрено уравнение

$$y'' = -y - \frac{y'}{x}, \quad (104)$$

интеграл которого при начальных условиях

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 0$$

представляет бесселеву функцию нулевого порядка:

$$\begin{aligned} y &= J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \frac{x^8}{2^8(4!)^2} - \dots, \\ y' &= -2 \frac{x}{2^2} + 4 \frac{x^3}{2^4(2!)^2} - 6 \frac{x^5}{2^6(3!)^2} + 8 \frac{x^7}{2^8(4!)^2} - \dots, \\ y'' &= -\frac{1}{2} + 3 \cdot 4 \frac{x^2}{2^4(2!)^2} - 5 \cdot 6 \frac{x^4}{2^6(3!)^2} + 7 \cdot 8 \frac{x^6}{2^8(4!)^2} - \dots, \end{aligned} \quad (105)$$

Преобразуем это уравнение в систему двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} y' &= u, \\ u' &= -\left(y + \frac{u}{x}\right) \end{aligned} \quad (106)$$

с начальными условиями

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad u_0 = 0.$$

Для начала расчета вычисляем по формулам (105) три значения  $y$  и  $u$  с интервалом  $h=0,1$ , получаем значения  $u'$ , составляем необходимые разности и проводим расчет.

Необходимо отметить важное обстоятельство: найдя по строке Адамса значение  $u$  в новой точке, мы тем самым получаем и значение производной  $y'$  в этой точке; следовательно, вычисление  $y$  можно производить по строке Лапласа без дальнейших уточнений. Ввиду малого влияния разностей высоких порядков на результат вычисления по строке Лапласа, мы можем не бояться негладкости хода этих разностей и их сравнительно большой величины.

\*) В е т ч и н к и н В. П., Руководство по приближенным вычислениям, Труды ЦАГИ, в. 210, 1935, стр. 99.

Вычисление приведено в табл. 79. Для проверки результата по формуле (105) получено значение  $y$  при  $x = 1$ , равное 0,765198. Погрешность — 0,000005.

В начале вычисления имеется неопределенность: значение  $u'$  включает слагаемое вида  $\frac{0}{0}$ ; поэтому его приходится вычислять по формуле (105).

Интегрирование систем уравнений первого порядка ничем не отличается от интегрирования отдельных уравнений, так что мы ограничимся этим примером и перейдем к методу Штермера, применяемому к уравнениям второго типа.

**§ 18. Второй тип уравнений второго порядка.** Приведем несколько формул, выражающих с достаточной точностью связь между производными и разностями. Имеем:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ y_{-2} & & & & & & \\ & \Delta_{-1,5}y & & & & & \\ y_{-1} & & \Delta_{-0,5}y & & \Delta_{-0,5}^2y & & \\ & \Delta_{-0,5}y & & \Delta_{-0,5}^2y & & \Delta_{-0,5}^3y & \\ y_0 & & \Delta_{0,5}y & & \Delta_{0,5}^2y & & \Delta_{0,5}^3y \\ & \Delta_{0,5}y & & \Delta_{0,5}^2y & & \Delta_{0,5}^3y & \\ y_1 & & \Delta_{1,5}y & & & & \\ & \Delta_{1,5}y & & & & & \\ y_2 & & & & & & \end{array}$$

Выразим разности функции до четвертого порядка через ее производные (см. табл. 80). Аналогичные выражения составим для последующих разностей, стоящих в подчеркнутой наклонной строке (табл. 81).

В табл. 80 и 81 для удобства даны лишь коэффициенты при членах, указанных в заголовках столбцов. Значения коэффициентов, равные нулю, в таблицах не проставлены.

Проведя эту подготовительную работу, мы можем составлять разностные формулы для любых вычислительных схем.

Для уравнений вида

$$y'' = \varphi(x, y), \quad (107)$$

обозначая

$$\xi = h^2 \varphi(x, y) = h^2 y'' \quad (108)$$

и приняв вычислительную схему

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \Delta_{-1,5}^4 \xi \\ & & & & & \Delta_{-1,5}^2 \xi & \\ x_{-1} & y_{-1} & & & & & \\ & \Delta_{-0,5}y & & \Delta_{-0,5}^2y & & \Delta_{-0,5}^3y & \\ x_0 & y_0 & & \Delta_{0,5}y & & \xi_0 & \\ & \Delta_{0,5}y & & & & & \\ x_1 & y_1 & & & & & \end{array} \quad (109)$$

мы можем легко найти коэффициенты в расчетной формуле

$$\Delta_0^2 y = a \xi_0 + a_1 \Delta_{-0,5} \xi + a_2 \Delta_{-1,5}^2 \xi + a_3 \Delta_{-1,5}^3 \xi + \dots \quad (110)$$

Для этого нужно развернуть все разности по производным  $y$ :

$$\begin{array}{l} \Delta_0^2 y = h^2 y_0'' + \frac{1}{12} h^4 y_0^{IV} + \frac{1}{360} h^6 y_0^{VI} + \frac{1}{20160} h^8 y_0^{VIII} + \dots \\ a_0 = ah^2 y_0'' \\ a_1 \Delta_{-0,5} \xi = a_1 h^2 y_0'' - \frac{1}{2} a_1 h^4 y_0^{IV} + \frac{1}{6} a_1 h^6 y_0^{VI} - \frac{1}{24} a_1 h^8 y_0^{VIII} + \frac{1}{120} a_1 h^{10} y_0^{X} - \frac{1}{720} a_1 h^{12} y_0^{XII} + \dots \\ a_2 \Delta_{-1,5}^2 \xi = a_2 h^4 y_0^{IV} - a_2 h^6 y_0^{VI} + \frac{7}{12} a_2 h^8 y_0^{VIII} - \frac{1}{4} a_2 h^{10} y_0^{X} + \frac{31}{360} a_2 h^{12} y_0^{XII} + \dots \\ a_3 \Delta_{-1,5}^3 \xi = a_3 h^6 y_0^{VI} - \frac{3}{2} a_3 h^8 y_0^{VIII} + \frac{5}{4} a_3 h^{10} y_0^{X} - \frac{3}{4} a_3 h^{12} y_0^{XII} + \dots \end{array}$$

Г а б л и ц а 78

$y$	$x^3$	$y^2$	$4 - x^3 - y^2 = y'$	$y$	$\Delta y$	$y' = \frac{y}{40}$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$-\frac{1}{2} \Delta y$ $-\frac{1}{12} \Delta^2 y$ $-\frac{1}{24} \Delta^3 y$	$\Sigma$
-2	4,00000	0,250000	-0,250000	0,5000000	-62 500	-0,0062500	26 397				
-1,975	3,900625	0,243789	-0,144414	0,4937500		-0,0036103					
-2				0,5000000	-49 302	-0,0062500	26 397	-397			
-1,975	3,900625	0,245094	-0,145719	0,4950698		-0,0036430	26 070	-958			
-1,95	3,802500	0,242770	-0,045270	0,4927167	-23 531	-0,0011318	25 112				
-2				0,5000000		-0,0062500	27 028	-958			13 115
-1,975	3,900625	0,245086	-0,145711	0,4950615	-49 385	-0,0036428	26 072	-956	13 514	-399	-12 956
-1,95	3,802500	0,242736	-0,045236	0,4950616	-49 384	-0,0011309	25 119	-953	13 036	80	-12 638
-1,925	3,705625	0,242820	0,051555	0,4927679	-23 790	0,0012889	24 198	-901	12 560	79	-12 481
-1,90	3,610000	0,245254	0,144746	0,4952309	-23 790	0,0036186	23 297	-883	12 560	-397	-12 163
-1,875	3,515625	0,249977	0,234398	0,4997772	854	0,0058600	24 198	-901	32	77	-12 021
-1,85	3,422500	0,256970	0,320530	0,5069217	868	0,0080132	23 297	-883	20	-12	-11 727
-1,825	3,330625	0,266229	0,403146	0,5159742	24 616	0,0100786	22 414	-882	18	75	-11 574
-1,80	3,240000	0,277786	0,482220	0,5270492	24 612	0,0120655	21 532	-882	0	-1	-11 281
				0,5270488	47 467		20 654	-878	4	74	-10 846
					47 466		19 769	-885	0	7	-10 692
					69 446				4		-10 399
					69 440						-10 254
					90 531						9 963
					90 532				-7	2	-9 810
					110 749						
					110 745						

$$\begin{aligned}
 a_4 \Delta_{-2}^4 &= a_4 h^8 y_0^{VI} - 2a_4 h^7 y_0^{VII} + \frac{13}{6} a_4 h^8 y_0^{VIII} + \dots \\
 a_5 \Delta_{-2,5}^5 &= a_5 h^7 y_0^{VII} - \frac{5}{2} a_5 h^8 y_0^{VIII} + \dots \\
 a_6 \Delta_{-3}^6 &= a_6 h^8 y_0^{VIII} + \dots
 \end{aligned}$$

Составив соответствующее равенство, получим уравнения, служащие для определения величин  $a$ .

Имеем:

$$\begin{aligned}
 a &= 1; \\
 a_1 &= 0; \\
 a_2 &= \frac{1}{12}; \\
 a_3 - a_2 &= 0, & a_3 &= \frac{1}{12}; \\
 a_4 - \frac{3}{2} a_3 + \frac{7}{12} a_2 &= \frac{1}{360}, & a_4 &= \frac{19}{240}; \\
 a_5 - 2a_4 + \frac{5}{4} a_3 - \frac{1}{4} a_2 &= 0, & a_5 &= \frac{3}{40}; \\
 a_6 - \frac{5}{2} a_5 + \frac{13}{6} a_4 - \frac{3}{2} a_3 + \frac{31}{360} a_2 &= \frac{1}{20160}, & a_6 &= \frac{863}{12096}.
 \end{aligned} \tag{111}$$

Итак, расчетная формула, выведенная впервые норвежским астрономом Штермером, имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Delta_{-2}^2 y &= \xi_0 + \frac{1}{12} \Delta_{-1}^2 \xi + \frac{1}{12} \Delta_{-1,5}^3 \xi + \frac{19}{240} \Delta_{-2}^4 \xi + \frac{3}{40} \Delta_{-2,5}^5 \xi + \frac{863}{12096} \Delta_{-3}^6 \xi + \dots \approx \\
 &\approx \xi_0 + \frac{1}{12} (\Delta_{-1}^2 \xi + \Delta_{-1,5}^3 \xi + \Delta_{-2}^4 \xi) = \xi + \frac{1}{12} \Sigma, \tag{112}
 \end{aligned}$$

где

$$\Sigma = \Delta_{-1}^2 \xi + \Delta_{-1,5}^3 \xi + \Delta_{-2}^4 \xi. \tag{113}$$

Для начала расчета нужно иметь по крайней мере два значения  $y$  — для возможности получения  $\Delta_{-2,5}^5 y$ , а также начальные значения  $\xi$  и разностей этой функции. Если представляется возможность, то все это определяется с помощью повторного дифференцирования для получения высших производных  $y$  в начальной точке.

Если для начала заданы значения

$$x_0, y_0, y'_0,$$

то предварительно представляют интегрируемое уравнение в виде системы

$$\begin{aligned}
 y' &= u, \\
 u' &= \varphi(x, y), \tag{114}
 \end{aligned}$$

допускающей применение последовательных приближений. Получив нужное количество значений  $y$ , можно перейти к основной вычислительной схеме.

Если перестроить формулу Штермера (112), заменив разности наклонной строки разностями горизонтальной строки, то она примет вид

$$\Delta_{-2}^2 y = \xi_0 + \frac{1}{12} \Delta_0^2 \xi - \frac{1}{240} \Delta_0^4 \xi + \frac{31}{60480} \Delta_0^6 \xi - \dots \tag{115}$$

В правой части достаточно воспользоваться двумя членами, так как остальные весьма малы; тогда мы получим формулу

$$\Delta_{-2}^2 y \approx \xi_0 + \frac{1}{12} \Delta_0^2 \xi, \tag{116}$$

дающую возможность уточнять только что полученные значения так же, как при использовании строки Лапласа в уравнениях первого порядка.

$x$	$y$	$\Delta y$	$hy' = 0,1u$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$-\frac{1}{2}\Delta$	$-\frac{1}{12}\Delta^2$	$-\frac{1}{24}\Delta^3$	$\Sigma$	$u$
0	1,000000		0								0
0,1	0,997502		-0,004994	-4994							-0,04994
0,2	0,990025		-0,009950	-4956	38						-0,09950
0,3	0,977626		-0,014832	-4882	74	36					-0,14832
0,4	0,960398	-17 228	-0,019602	-4770	112	38					-0,19602
0,5	0,938469	-21 929	-0,024229	-4627	143	31	2385	-9	-1	2374	-0,19603
0,6	0,912002	-26 467	-0,028669	-4440	187	44	2313	-12	-1	2300	-0,24229
0,7	0,881199	-30 803	-0,032901	-4232	208	21	2220	-16	-2	2202	-0,24228
0,8	0,846284	-34 915	-0,036884	-3983	249	41	2116	-17	-1	2098	-0,28669
0,9	0,807520	-38 764	-0,040597	-3713	270	21	1991	-20	-2	1969	-0,28671
1,0	0,765193	-42 327	-0,044004	-3407	306	36	1856	-22	-1	1833	-0,32901
							1703	-25	-1	1677	-0,32901
											-0,36884
											-0,36886
											-0,40597
											-0,40597
											-0,44004

Пример. Дано уравнение

$$y'' = xy \quad (117)$$

с начальными условиями

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 0.$$

Это уравнение легко дифференцируется, поэтому найдем выражения для производных и их начальные значения:

$$\begin{aligned}
 y'' &= xy, & y''_0 &= 0 \\
 y''' &= y + xy', & y'''_0 &= 1, \\
 y^{IV} &= 2y' + xy'', & y^{IV}_0 &= 0, \\
 y^V &= 3y'' + xy''', & y^V_0 &= 0, \\
 y^{VI} &= 4y''' + xy^{IV}, & y^{VI}_0 &= 4, \\
 y^{VII} &= 5y^{IV} + xy^V, & y^{VII}_0 &= 0, \\
 y^{VIII} &= 6y^V + xy^{VI}, & y^{VIII}_0 &= 0, \\
 y^{IX} &= 7y^{VI} + xy^{VII}, & y^{IX}_0 &= 4 \cdot 7, \\
 y^X &= 8y^{VII} + xy^{VIII}, & y^X_0 &= 0, \\
 y^{XI} &= 9y^{VIII} + xy^{IX}, & y^{XI}_0 &= 0, \\
 y^{XII} &= 10y^{IX} + xy^X, & y^{XII}_0 &= 4 \cdot 7 \cdot 10, \\
 & \dots & & \dots
 \end{aligned} \quad (118)$$

Т а б л и ц а 79

$\Delta u$	$hu' = 0,1u'$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$-\frac{1}{2}\Delta$ $\frac{1}{2}\Delta$	$-\frac{1}{12}\Delta^2$ $\frac{5}{12}\Delta^2$	$-\frac{1}{24}\Delta^3$ $\frac{3}{8}\Delta^3$	$\Sigma$	$\frac{u}{x}$	$u' =$ $-(y + \frac{u}{x})$
	—0,05000								—0,5000	—0,5000
	—0,04981	19							—0,4994	—0,4981
		56	37							
	—0,04925								—0,4975	—0,4925
		93	37							
	—0,04832				46•	15•		62	—0,4944	—0,4832
—4770			35							
—4771		128			— 64	— 3		— 67		
	—0,04704				64	14•		78	—0,4900	—0,4704
—4626			37							
—4625		165			— 82•	— 3		— 86		
	—0,04539				82•	15•		98	—0,4846	—0,4539
—4441			32							
—4443		197			— 98•	— 2•		—101		
	—0,04342				98•	13•		112	—0,4778	—0,4342
—4230			33							
—4230		230			—115	— 3		—118		
	—0,04112				115	14		129	—0,4700	—0,4112
—3983			29							
—3985		259			—129•	— 2•		—132		
	—0,03853				129•	12•		142	—0,4610	—0,3853
—3711			30							
—3711		289			—144•	— 2•		—147		
	—0,03564				144•	12•		157	—0,4511	—0,3564
—3407										

Для начала расчета при  $h = 0,1$  и учитывая (118), вычисляем:

$$y_1 = y_0 + \frac{h^3}{6} y_0''' + \frac{h^6}{720} y_0^{VI} + \dots = 1,000167,$$

$$\xi_0 = 0,$$

$$\Delta_{-0,5} \xi = h^3 y_0''' + \dots \approx 0,001000,$$

$$\Delta_{-1}^2 \xi = \frac{7}{12} h^6 y^{VI} + \dots \approx 0,000002.$$

Расчет приведен в табл. 82.

Для проверки вычислим  $y$  при  $x = 1$ :

$$y = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{4x^6}{6!} + \frac{4 \cdot 7x^9}{9!} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10x^{12}}{12!} + \dots \tag{119}$$

$$y_{x=1} = 1,172300.$$

**§ 19. Второй метод Коуэлла.** Если добавить к функции  $\xi$  два столбца сумм первого и второго порядка, то мы получим вычислительную схему второго метода Коуэлла с формулами:  
экстраполяционной

$$y_1 = s_1^2 + \frac{1}{12} (\xi_0 + \Delta_{-0,5} \xi + \Delta_{-1}^2 \xi) + \dots \tag{120}$$



и проверочной

$$y_0 = s_0^3 + \frac{1}{12} \xi_0 - \frac{1}{240} \Delta_0^2 \xi + \dots \quad (121)$$

Этот способ интегрирования меньше подвержен накоплению ошибок, но зато обладает большим неудобством: величины  $\xi$  гораздо больше, чем  $\Delta^2 \xi$ ; поэтому сумму трудно составлять в уме, также как и делить ее на двена-

Т а б л и ц а 82

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\xi$	$\Delta \xi$	$\Delta^2 \xi$	$\Delta^3 \xi$	$\Delta^4 \xi$	$\Sigma$
0	1,000000	167		0	1000				
0,1	1,000167	1 167	1 000	0,001000	1000	0			
0,2	1,001334	3 170	2 003	0,002003	1003	3			
0,3	1,004504	3 170	2 003	0,003014	1011	8	5		
0,4	1,010689	6 185	3 015	0,004043	1029	18	10	5	
	1,010690	6 186	3 016						33
0,5	1,020922	10 232	4 046	0,005105	1062	33	15	5	
	1,020922	10 232	4 046						53
0,6	1,036263	15 341	5 109	0,006218	1113	51	18	3	
	1,036263	15 341	5 109						72
0,7	1,057828	21 565	6 224	0,007405	1187	74	23	5	
	1,057828	21 565	6 224						102
0,8	1,086807	28 979	7 414	0,008694	1289	102	28	7	
	1,086807	28 979	7 414						135
0,9	1,124491	37 684	8 705	0,010120	1426	137	35	5	
	1,124491	37 684	8 705						179
1,0	1,172310	47 819	10 135	0,011723	1603	177	40		
		47 819	10 135						

дцать. Вследствие этого в практическом применении второй метод Коуэлла уступает методу Штёрмера.

Рассмотренных нами примеров достаточно для получения общего представления о способах численного приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы сознательно рассмотрели лишь несколько основных вычислительных схем, не касаясь многих вариаций вычислительного процесса, могущих принести пользу в отдельных случаях, но не являющихся типичными. Точно так же мы не касались уравнений порядка выше второго, так как они встречаются весьма редко и могут быть представлены в виде системы уравнений первого или второго порядка.

При вычислениях полезно иметь один лишний знак, поскольку округления всегда приводят к тому, что последняя цифра чисел становится сомнительной и ее желательно отбросить, если это можно сделать без ущерба для точности.



Можно рекомендовать читателю, желающему приобрести практический опыт в численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений для решения какой-либо задачи, связанной с его научной или инженерной деятельностью, не начинать работу с применения изложенных здесь методов непосредственно к интересующему его уравнению. Лучше сперва решить самостоятельно одно или несколько уравнений, приведенных в книге, чтобы получить представление о достигаемой точности, о гладкости хода вычислений — словом, о всех особенностях того или иного метода. Для этой цели нами и были приведены с большой точностью решения уравнения Муаньо, Риккати и др. Эти эталонные данные дают возможность самопроверки, отсутствующую при реальном расчете.

---

## ГЛАВА IX

### ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**§ 1. Ряд Фурье.** Пусть в интервале  $A < x < B$  дана некоторая кривая  $y = f(x)$ , не имеющая бесконечно больших ординат и имеющая ограниченное количество точек излома и разрыва. Пусть эта кривая периодически повторяется и длина периода ее равна  $B - A$ .

Из теории рядов известно, что такую функцию можно разложить в тригонометрический ряд Фурье, представив  $y$  в виде

$$y = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{B-A} x + b_k \sin k \frac{2\pi}{B-A} x \right), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_A^B \cos k \frac{2\pi}{B-A} x f(x) dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_A^B \sin k \frac{2\pi}{B-A} x f(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Покажем правильность выражений (2).

Если в (2) подставим вместо  $f(x)$  соответствующий ряд из (1), то получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_A^B \cos k \frac{2\pi}{B-A} x f(x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_A^B \cos k \frac{2\pi}{B-A} x \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos n \frac{2\pi}{B-A} x + b_n \sin n \frac{2\pi}{B-A} x \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_A^B \sin k \frac{2\pi}{B-A} x f(x) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_A^B \sin k \frac{2\pi}{B-A} x \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos n \frac{2\pi}{B-A} x + b_n \sin n \frac{2\pi}{B-A} x \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Если раскрыть квадратные скобки и интегрировать получаемые произведения почленно, то как первый интеграл, так и все остальные при  $k \neq n$

обратятся в нули, и лишь два интеграла дадут

$$\frac{1}{\pi} \int_A^B a_k \cos^2 k \frac{2\pi}{B-A} x dx = a_k, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_A^B b_k \sin^2 k \frac{2\pi}{B-A} x dx = b_k,$$

что и требовалось.

В дальнейшем мы будем для удобства иметь дело с переменной  $\varphi$ , связанной с  $x$  соотношением

$$\varphi = \frac{2\pi}{B-A} x - \frac{B+A}{B-A} \pi, \quad (6)$$

откуда

$$x = \frac{B-A}{2\pi} \varphi + \frac{B+A}{2}. \quad (7)$$

При  $x$ , изменяющемся от  $A$  до  $B$ ,  $\varphi$  будет изменяться от  $-\pi$  до  $+\pi$ . Таким образом, получим сперва разложение

$$F(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (8)$$

а затем перейдем от аргумента  $\varphi$  к аргументу  $x$ .

**§ 2. Вычисление по 12 ординатам.** Разложение в ряд функции  $F(\varphi)$ , т. е. нахождение величин коэффициентов  $a$  и  $b$ , представляет собою задачу приближенного интегрирования, которую можно решать различными способами.

Действительно, если обозначим

$$F(\varphi) \cos k\varphi = \Phi_k(\varphi), \quad (9)$$

то нахождение коэффициента  $a_k$  сведется к получению величины интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(\varphi) d\varphi. \quad (10)$$

Аналогично будет и для коэффициентов  $b$ .

Отметим, что в местах разрыва функции мы должны будем полагать ее значение равным среднему арифметическому из верхнего и нижнего значений; следовательно, если применим к вычислению интеграла (10), например, формулу трапеций

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{2}{n} \left[ \frac{1}{2} \Phi_k(-\pi) + \Phi_k\left(-\pi + \frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \Phi_k\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) + \frac{1}{2} \Phi_k(\pi) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

то, вследствие равенства значений  $\Phi(-\pi)$  и  $\Phi(\pi)$  (вне зависимости от наличия или отсутствия разрыва на концах интервала, соответствующего периоду

функции), получим:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{n} \left[ \Phi_k(-\pi) + \Phi_k\left(-\pi + \frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \Phi_k\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) \right] = \\ &= \frac{2 \cos k(-\pi)}{n} F(-\pi) + \frac{2 \cos k\left(-\pi + \frac{2\pi}{n}\right)}{n} F\left(-\pi + \frac{2\pi}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{2 \cos k\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)}{n} F\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2 \sin k(-\pi)}{n} F(-\pi) + \frac{2 \sin k\left(-\pi + \frac{2\pi}{n}\right)}{n} F\left(-\pi + \frac{2\pi}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{2 \sin k\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)}{n} F\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Если брать число интервалов кратным четырем, то значения синусов будут равны соответствующим значениям косинусов и для вычисления можно будет применить шаблоны, облегчающие работу.

Пусть, например,  $n=12$ . Числовые значения множителей, на которые нужно домножать значения функции  $F(\varphi)$ , будут равны:

1,000; 0,866; 0,500; 0

соответственно синусам и косинусам углов в  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  и т. д.

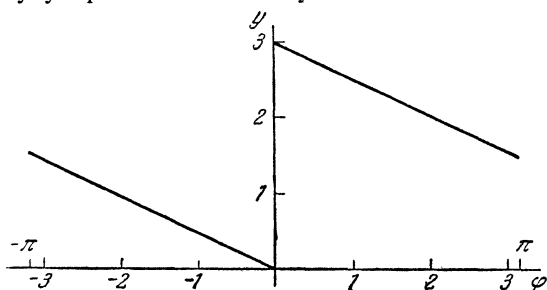


Рис. 69.

Построение таблицы и шаблонов и их применение покажем на примере.

Пусть требуется найти несколько первых коэффициентов разложения в ряд Фурье функции, график которой дан на рис. 69. Аналитическое выражение для этой функции:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1,5}{\pi} \varphi \quad \text{при} \quad -\pi < \varphi < 0, \\ y &= 3 - \frac{1,5}{\pi} \varphi \quad \text{при} \quad 0 < \varphi < \pi. \end{aligned} \quad (14)$$

Составляем таблицу значений функции, беря аргумент с интервалами в  $30^\circ$  (табл. 83). В точке разрыва считаем  $y=1,5$ . В трех столбцах правой части таблицы выписываем значения  $y$ , домноженные на числа:

$$\frac{2}{n} = 0,167, \quad \frac{2}{n} \cos 30^\circ = 0,145, \quad \frac{2}{n} \cos 60^\circ = 0,083,$$

где  $n=12$ .

Шаблоны даны на рис. 70. В них заштрихованными показаны окошки, через которые после наложения шаблона на правую часть табл. 83 видны числа, подлежащие суммированию с учетом знака, указанного на шаблоне слева от окошка. Положительные и отрицательные числа нужно суммировать в отдельности.

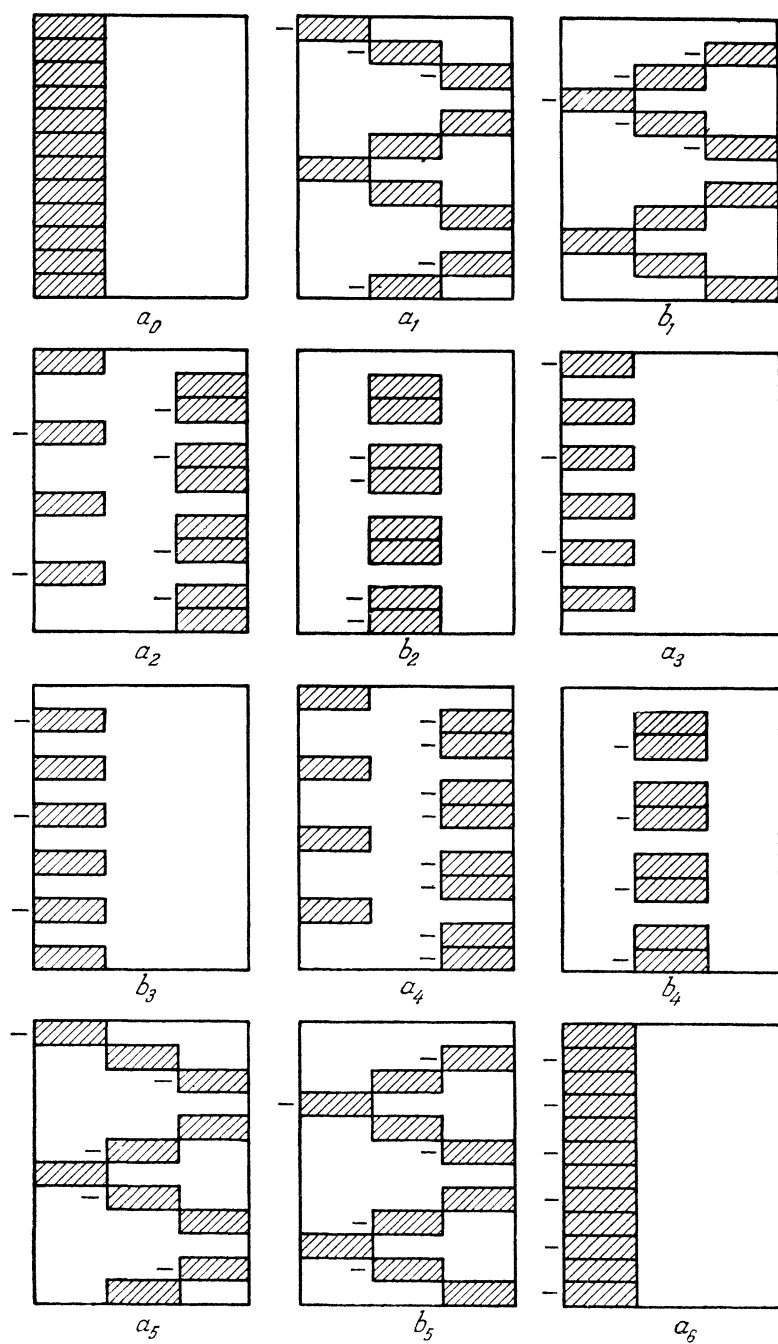


Рис. 70.

Вычислим, например, коэффициент  $b_1$ :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{12} \sin (-180^\circ) y_{-180^\circ} + \frac{2}{12} \sin (-150^\circ) y_{-150^\circ} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{2}{12} \sin 150^\circ y_{150^\circ} = \\ &= 0 \cdot 1,50 - 0,083 \cdot 1,25 - 0,145 \cdot 1,00 - 0,167 \cdot 0,75 - \\ &- 0,145 \cdot 0,50 - 0,083 \cdot 0,25 + 0 \cdot 1,50 + 0,083 \cdot 2,75 + 0,145 \cdot 2,50 + \\ &+ 0,167 \cdot 2,25 + 0,145 \cdot 2,00 + 0,083 \cdot 1,75 = -0,104 - 0,145 - \\ &- 0,125 - 0,072 - 0,021 + 0,229 + 0,360 + 0,375 + 0,288 + \\ &\quad + 0,146 = 0,931. \end{aligned}$$

Использование шаблона для вычисления коэффициента  $b_1$  показано на рис. 71.

Т а б л и ц а 83

$\varphi$	$y$	$0,167y$	$0,145y$	$0,083y$
$-180^\circ$	1,50	0,250	0,217	0,125
$-150$	1,25	0,208	0,180	0,104
$-120$	1,00	0,167	0,145	0,083
$-90$	0,75	0,125	0,108	0,062
$-60$	0,50	0,083	0,072	0,042
$-30$	0,25	0,042	0,036	0,021
0	1,50	0,250	0,217	0,125
30	2,75	0,458	0,396	0,229
60	2,50	0,417	0,360	0,208
90	2,25	0,375	0,324	0,188
120	2,00	0,333	0,288	0,167
150	1,75	0,292	0,252	0,146

Аналитическое разложение рассматриваемой функции дает:

$$\begin{aligned} y &= 1,5 + \frac{3}{\pi} \sin \varphi + \frac{3}{2\pi} \sin 2\varphi + \frac{3}{3\pi} \sin 3\varphi + \dots + \frac{3}{m\pi} \sin m\varphi + \dots = \\ &= 1,5 + 0,954 \sin \varphi + 0,477 \sin 2\varphi + 0,318 \sin 3\varphi + \\ &\quad + 0,238 \sin 4\varphi + 0,191 \sin 5\varphi + 0,159 \sin 6\varphi + \dots; \end{aligned} \tag{15}$$

подсчет с помощью шаблонов дает приведенные ниже суммы положительных и отрицательных величин и значения коэффициентов:

$\Sigma_+ + \Sigma_-$	Точное значение	$\delta$
$a_0 = 3$		
$a_1 = 0,932 - 0,932 = 0$		
$a_2 = 1,000 - 1,000 = 0$		
$a_3 = 0,750 - 0,750 = 0$		
$a_4 = 1,000 - 1,000 = 0$		
$a_5 = 0,932 - 0,932 = 0$		
$a_6 = 1,500 - 1,500 = 0$		
$b_1 = 1,398 - 0,467 = 0,931$	0,954	— 23
$b_2 = 1,081 - 0,648 = 0,437$	0,477	— 40
$b_3 = 0,875 - 0,625 = 0,250$	0,318	— 68
$b_4 = 0,936 - 0,793 = 0,143$	0,238	— 95
$b_5 = 0,967 - 0,898 = 0,069$	0,191	— 122

Мы видим, что отличающиеся от нуля коэффициенты разложения с самого начала определяются не особенно точно и по мере повышения порядкового номера дают все более грубые приближения. Это происходит оттого, что, усредняя значение функции в точке разрыва, мы лишаемся возможности точно учитывать и очертания на участках, непосредственно примыкающих к точке разрыва. Сказанное относится к интегрированию любым способом, в том числе и по формуле Симпсона.

Для рассматриваемого примера формула Симпсона имеет вид

$$a_k = \frac{4 \cos k(-\pi)}{3n} F(-\pi) + \frac{8 \cos k(-\pi + \frac{2\pi}{n})}{3n} F(-\pi + \frac{2\pi}{n}) + \frac{4 \cos k(-\pi + \frac{4\pi}{n})}{3n} F(-\pi + \frac{4\pi}{n}) + \dots + \frac{8 \cos k(\pi - \frac{2\pi}{n})}{3n} F(\pi - \frac{2\pi}{n}) \quad (16)$$

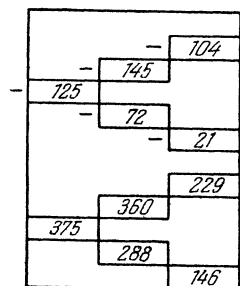


Рис. 71.

и аналогичный (с синусами) для коэффициентов  $b_k$ .

При  $n=12$  имеем:

$$a_k = \frac{1}{9} \cos(-180^\circ k) F(-180^\circ) + \frac{2}{9} \cos(-150^\circ k) F(-150^\circ) + \frac{1}{9} \cos(-120^\circ k) F(-120^\circ) + \dots + \frac{2}{9} \cos(150^\circ k) F(150^\circ), \quad (17)$$

$$b_k = \frac{1}{9} \sin(-180^\circ k) F(-180^\circ) + \frac{2}{9} \sin(-150^\circ k) F(-150^\circ) + \frac{1}{9} \sin(-120^\circ k) F(-120^\circ) + \dots + \frac{2}{9} \sin(150^\circ k) F(150^\circ).$$

Составляем таблицу значений функции  $y$ , домноженных на коэффициенты формулы (17), причем отмечаем точками строки с удвоенными величинами коэффициентов (табл. 84).

Т а б л и ц а 84

$\varphi$	$y$	$0,111y$ $0,222y$	$0,096y$ $0,192y$	$0,056y$ $0,111y$	.
$-180^\circ$	1,50	0,167	0,145	0,083	
$-150$	1,25	0,278	0,241	0,139	•
$-120$	1,00	0,111	0,096	0,056	
$-90$	0,75	0,167	0,145	0,083	•
$-60$	0,50	0,056	0,049	0,028	
$-30$	0,25	0,056	0,049	0,028	•
0	1,50	0,167	0,145	0,083	
30	2,75	0,610	0,529	0,305	•
60	2,50	0,278	0,241	0,139	
90	2,25	0,500	0,433	0,250	•
120	2,00	0,222	0,192	0,111	
150	1,75	0,389	0,337	0,194	•

Вычисление ведется по ранее приведенным шаблонам. Результаты применения формулы Симпсона следующие:

$\Sigma_+ + \Sigma_-$	Точное значение	$\delta$
$a_0 =$	3,001	
$a_1 = 0,912 - 0,912 =$	0	
$a_2 = 1,000 - 1,001 =$	-0,001	
$a_3 = 0,500 - 0,501 =$	-0,001	
$a_4 = 1,001 - 1,000 =$	0,001	
$a_5 = 0,912 - 0,912 =$	0	
$a_6 = 1,001 - 2,000 =$	-0,999	
$b_1 = 1,432 - 0,479 =$	0,953	0,954
$b_2 = 1,107 - 0,627 =$	0,480	0,477
$b_3 = 1,166 - 0,834 =$	0,332	0,318
$b_4 = 1,011 - 0,723 =$	0,288	0,238
$b_5 = 1,144 - 0,767 =$	0,377	
		— 1
		3
		14
		50
		186

Значение  $a_6$  по формуле Симпсона находить нельзя, так как периодичность изменения знаков совпадает с периодичностью изменения коэффициентов, что приводит к полной потере точности.

Т а б л и ц а 85

$\varphi$	$y$	0,0833y	0,0805y	0,0722y	0,0589y	0,0417y	0,0216y
—180°	1,500	0,125	0,121	0,108	0,089	0,062	0,033
—165	1,375	0,115	0,111	0,099	0,081	0,057	0,030
—150	1,250	0,104	0,101	0,090	0,074	0,052	0,027
—135	1,125	0,094	0,091	0,081	0,067	0,047	0,024
—120	1,000	0,084	0,081	0,072	0,059	0,042	0,022
—105	0,875	0,073	0,071	0,063	0,052	0,036	0,019
—90	0,750	0,063	0,061	0,054	0,044	0,031	0,016
—75	0,625	0,052	0,050	0,045	0,037	0,026	0,014
—60	0,500	0,042	0,040	0,036	0,030	0,021	0,011
—45	0,375	0,031	0,030	0,027	0,022	0,016	0,008
—30	0,250	0,021	0,020	0,018	0,015	0,010	0,005
—15	0,125	0,010	0,010	0,009	0,007	0,005	0,003
0	1,500	0,125	0,121	0,108	0,089	0,063	0,032
15	2,875	0,240	0,232	0,207	0,170	0,121	0,062
30	2,750	0,230	0,222	0,198	0,163	0,116	0,060
45	2,625	0,219	0,212	0,189	0,156	0,110	0,057
60	2,500	0,208	0,202	0,180	0,148	0,105	0,054
75	2,375	0,198	0,191	0,171	0,141	0,100	0,052
90	2,250	0,188	0,181	0,162	0,134	0,094	0,049
105	2,125	0,177	0,171	0,153	0,126	0,089	0,047
120	2,000	0,166	0,161	0,144	0,118	0,084	0,044
135	1,875	0,156	0,151	0,135	0,111	0,078	0,041
150	1,750	0,146	0,141	0,126	0,104	0,073	0,038
165	1,625	0,135	0,131	0,117	0,096	0,068	0,036

Для первых трех гармоник мы получаем действительно лучший результат, но дальнейшие вычисления неудовлетворительны. Поэтому проведем эти вычисления для 24 ординат.

**§ 3. Вычисление по 24 ординатам.** Составляем для рассматриваемого примера таблицы для вычислений по способу трапеций и способу Симпсона



при 24 ординатах (табл. 85 и 86). Вычисляя с помощью шаблонов (см. рис. 1—6 приложения) получим результаты, приведенные в табл. 87.

Способ трапеций дал погрешности, систематически возрастающие с самого начала, способ же Симпсона дал восемь коэффициентов, точных в пределах

Т а б л и ц а 86

$\varphi$	$y$	0 0556 $y$ 0,1111 $y$	0,0537 $y$ 0,1074 $y$	0 0481 $y$ 0,0962 $y$	0 0393 $y$ 0,0786 $y$	0 0278 $y$ 0,0556 $y$	0,0144 $y$ 0,0288 $y$	.
—180°	1,500	0,083	0,081	0,072	0,059	0,042	0,022	
—165	1,375	0,152	0,147	0,132	0,109	0,077	0,041	.
—150	1,250	0,069	0,067	0,060	0,050	0,035	0,019	
—135	1,125	0,125	0,120	0,108	0,089	0,063	0,034	.
—120	1,000	0,056	0,054	0,048	0,040	0,028	0,015	
—105	0,875	0,098	0,095	0,084	0,070	0,049	0,026	.
—90	0,750	0,042	0,040	0,036	0,030	0,021	0,011	
—75	0,625	0,070	0,066	0,060	0,050	0,035	0,019	.
—60	0,500	0,028	0,027	0,024	0,020	0,014	0,008	
—45	0,375	0,042	0,041	0,036	0,030	0,021	0,012	.
—30	0,250	0,014	0,014	0,012	0,010	0,007	0,004	
—15	0,125	0,014	0,014	0,012	0,010	0,007	0,004	.
0	1,500	0,023	0,079	0,072	0,059	0,042	0,022	
15	2,875	0,320	0,309	0,277	0,226	0,160	0,083	.
30	2,750	0,153	0,148	0,132	0,108	0,077	0,040	
45	2,625	0,292	0,282	0,253	0,207	0,146	0,076	.
60	2,500	0,139	0,134	0,120	0,098	0,069	0,036	
75	2,375	0,264	0,254	0,228	0,187	0,133	0,069	.
90	2,250	0,125	0,120	0,108	0,089	0,063	0,033	
105	2,125	0,236	0,228	0,204	0,168	0,119	0,062	.
120	2,000	0,111	0,107	0,096	0,079	0,056	0,029	
135	1,875	0,208	0,201	0,180	0,148	0,105	0,055	.
150	1,750	0,097	0,094	0,084	0,069	0,049	0,026	
165	1,625	0,180	0,174	0,156	0,129	0,091	0,048	.

погрешностей вычисления чисел в таблице значений функции, и лишь те гармоники, на которые распространяется влияние разрыва, определены неправильно.

Очевидно, если мы хотим получить точно, например, 10 гармоник, то нам нужно взять еще большее число ординат.

**§ 4. Вычисление по 36 ординатам.** Составляем для рассматриваемого примера таблицы для вычислений по способу трапеций и способу Симпсона

Т а б л и ц а 87

$k$	$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$b_k$ по способу трапеций	$\delta$	$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$b_k$ по способу Симпсона	$\delta$	Точное значение $b_k$
1	1,428	0,476	0,952	— 2	1,433	0,481	0,952	— 2	0,954
2	1,167	0,699	0,468	— 9	1,196	0,718	0,478	1	0,477
3	1,061	0,757	0,304	—14	1,122	0,801	0,321	3	0,318
4	0,972	0,756	0,216	—22	0,985	0,744	0,241	3	0,238
5	1,036	0,870	0,166	—25	1,056	0,861	0,195	4	0,191
6	0,813	0,687	0,126	—33	1,084	0,917	0,167	8	0,159
7	1,000	0,906	0,094	—42	1,033	0,896	0,137	1	0,136
8	0,900	0,828	0,072	—47	0,770	0,653	0,117	2	0,119
9	0,935	0,883	0,052	—52	1,038	0,885	0,153	47	0,106
10	0,951	0,915	0,036	—59	1,052	0,862	0,190	95	0,095

при 36 ординатах (табл. 88 и 89). Шаблоны для вычисления даны на рис. 7—24 приложения. Результаты вычислений приведены в табл. 90. Мы видим, что вычисления по формуле Симпсона неизменно дают лучший результат, чем вычисления по способу трапеций.

Очевидно, применяя более точную формулу интегрирования, например формулу Ньютона—Котса для шести ординат, мы должны будем получить и более точные результаты.

Составим для двенадцати ординат коэффициенты вычисления по формуле Ньютона—Котса для шести ординат. Формула при  $n=12$  будет иметь вид

$$a_k = \frac{82}{840} \cos(-180^\circ k) f(-180^\circ) + \frac{216}{840} \cos(-150^\circ k) f(-150^\circ) +$$

$$+ \frac{27}{840} \cos(-120^\circ k) f(-120^\circ) + \frac{272}{840} \cos(-90^\circ k) f(-90^\circ) + \dots$$

$$\dots + \frac{216}{840} \cos(150^\circ k) f(150^\circ) =$$

$$= [0,098 \cos(-180^\circ k) f(-180^\circ) + 0,257 \cos(-150^\circ k) f(-150^\circ) + (18)$$

$$+ 0,032 \cos(-120^\circ k) f(-120^\circ) + 0,324 \cos(-90^\circ k) f(-90^\circ) +$$

$$+ 0,032 \cos(-60^\circ k) f(-60^\circ) + 0,257 \cos(-30^\circ k) f(-30^\circ)] +$$

$$+ [0,098 \cos 0^\circ f(0^\circ) + \dots + 0,257 \cos(150^\circ k) f(150^\circ)].$$

Таблица 88

$\varphi$	$y$	0,0556y	0,0548y	0,0522y	0,0482y	0,0426y	0,0358y	0 0278y	0,0190y	0 0097y
—180°	1,500	0,083	0,082	0,078	0,072	0,064	0,054	0,042	0,029	0,015
—170	1,417	0,078	0,078	0,074	0,068	0,060	0,051	0,039	0,027	0,014
—160	1,333	0,074	0,073	0,070	0,064	0,056	0,048	0,037	0,025	0,013
—150	1,250	0,070	0,068	0,066	0,061	0,053	0,045	0,035	0,024	0,012
—140	1,167	0,065	0,064	0,061	0,056	0,050	0,042	0,033	0,023	0,012
—130	1,083	0,060	0,060	0,056	0,052	0,046	0,039	0,030	0,021	0,011
—120	1,000	0,056	0,055	0,052	0,049	0,042	0,036	0,028	0,019	0,010
—110	0,917	0,051	0,050	0,048	0,045	0,039	0,033	0,026	0,018	0,009
—100	0,833	0,046	0,046	0,044	0,040	0,036	0,030	0,023	0,016	0,008
— 90	0,750	0,042	0,042	0,040	0,037	0,032	0,027	0,021	0,014	0,007
— 80	0,667	0,037	0,037	0,035	0,032	0,028	0,024	0,018	0,012	0,006
— 70	0,583	0,032	0,032	0,030	0,028	0,025	0,021	0,016	0,011	0,006
— 60	0,500	0,028	0,027	0,026	0,024	0,022	0,018	0,014	0,009	0,005
— 50	0,417	0,023	0,022	0,022	0,020	0,018	0,015	0,012	0,008	0,004
— 40	0,333	0,018	0,018	0,017	0,016	0,015	0,012	0,009	0,006	0,003
— 30	0,250	0,014	0,014	0,013	0,012	0,011	0,009	0,007	0,005	0,003
— 20	0,167	0,009	0,009	0,009	0,008	0,008	0,006	0,004	0,003	0,002
— 10	0,083	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,003	0,002	0,001	0,000
0	1,500	0,084	0,082	0,078	0,073	0,064	0,054	0,042	0,029	0,015
10	2,917	0,163	0,160	0,152	0,142	0,124	0,105	0,082	0,056	0,028
20	2,833	0,157	0,155	0,148	0,137	0,120	0,102	0,078	0,054	0,027
30	2,750	0,152	0,150	0,144	0,133	0,116	0,099	0,076	0,052	0,026
40	2,667	0,148	0,146	0,139	0,130	0,113	0,096	0,074	0,051	0,026
50	2,583	0,144	0,142	0,135	0,126	0,110	0,093	0,072	0,049	0,025
60	2,500	0,139	0,137	0,131	0,122	0,106	0,090	0,070	0,048	0,024
70	2,417	0,134	0,132	0,126	0,117	0,102	0,087	0,067	0,046	0,023
80	2,333	0,129	0,128	0,122	0,113	0,099	0,084	0,064	0,044	0,022
90	2,250	0,124	0,124	0,118	0,108	0,096	0,081	0,062	0,042	0,021
100	2,167	0,120	0,119	0,113	0,105	0,092	0,078	0,060	0,041	0,021
110	2,083	0,116	0,114	0,108	0,102	0,088	0,075	0,058	0,040	0,020
120	2,000	0,111	0,110	0,104	0,099	0,085	0,072	0,056	0,039	0,020
130	1,917	0,106	0,105	0,100	0,093	0,082	0,069	0,053	0,036	0,018
140	1,833	0,102	0,100	0,096	0,089	0,078	0,066	0,051	0,035	0,018
150	1,750	0,098	0,096	0,092	0,086	0,074	0,063	0,049	0,033	0,017
160	1,667	0,093	0,091	0,087	0,081	0,071	0,060	0,047	0,032	0,016
170	1,583	0,088	0,086	0,082	0,077	0,068	0,057	0,044	0,030	0,015

Таблица 89

$\varphi$	$y$	0,0370 <sub>y</sub> 0,0740 <sub>y</sub>	0,0364 <sub>y</sub> 0,0729 <sub>y</sub>	0,0348 <sub>y</sub> 0,0696 <sub>y</sub>	0,0320 <sub>y</sub> 0,0640 <sub>y</sub>	0,0284 <sub>y</sub> 0,0567 <sub>y</sub>	0,0238 <sub>y</sub> 0,0476 <sub>y</sub>	0,0185 <sub>y</sub> 0,0370 <sub>y</sub>	0,0126 <sub>y</sub> 0,0253 <sub>y</sub>	0,0064 <sub>y</sub> 0,0129 <sub>y</sub>	.
—180°	1,500	0,056	0,054	0,052	0,048	0,042	0,036	0,028	0,019	0,010	.
—170	1,417	0,105	0,103	0,099	0,091	0,080	0,067	0,052	0,036	0,018	.
—160	1,333	0,050	0,048	0,046	0,043	0,038	0,032	0,025	0,017	0,009	.
—150	1,250	0,093	0,091	0,087	0,080	0,071	0,059	0,046	0,031	0,016	.
—140	1,167	0,043	0,042	0,040	0,037	0,033	0,028	0,022	0,015	0,008	.
—130	1,083	0,080	0,079	0,075	0,069	0,061	0,052	0,040	0,027	0,014	.
—120	1,000	0,037	0,036	0,035	0,032	0,028	0,024	0,018	0,012	0,006	.
—110	0,917	0,068	0,067	0,064	0,059	0,052	0,044	0,034	0,023	0,012	.
—100	0,833	0,031	0,030	0,029	0,027	0,024	0,020	0,016	0,011	0,006	.
—90	0,750	0,056	0,055	0,052	0,048	0,042	0,036	0,028	0,019	0,010	.
—80	0,667	0,025	0,024	0,023	0,021	0,019	0,016	0,012	0,008	0,004	.
—70	0,583	0,043	0,043	0,041	0,037	0,033	0,028	0,022	0,015	0,008	.
—60	0,500	0,018	0,018	0,018	0,016	0,014	0,012	0,009	0,006	0,003	.
—50	0,417	0,031	0,030	0,029	0,027	0,024	0,020	0,016	0,011	0,006	.
—40	0,333	0,012	0,012	0,012	0,011	0,010	0,008	0,006	0,004	0,002	.
—30	0,250	0,019	0,018	0,017	0,016	0,014	0,012	0,010	0,007	0,004	.
—20	0,167	0,006	0,006	0,006	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	.
—10	0,083	0,006	0,006	0,006	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001	.
0	1,500	0,056	0,055	0,052	0,048	0,042	0,036	0,028	0,019	0,010	.
10	2,917	0,216	0,213	0,203	0,187	0,165	0,139	0,108	0,074	0,037	.
20	2,833	0,105	0,103	0,098	0,091	0,080	0,068	0,052	0,036	0,018	.
30	2,750	0,204	0,200	0,191	0,176	0,156	0,131	0,102	0,070	0,035	.
40	2,667	0,099	0,097	0,093	0,085	0,076	0,064	0,050	0,034	0,017	.
50	2,583	0,191	0,188	0,180	0,165	0,146	0,123	0,096	0,066	0,033	.
60	2,500	0,092	0,091	0,087	0,080	0,071	0,060	0,046	0,032	0,016	.
70	2,417	0,179	0,176	0,168	0,155	0,137	0,115	0,090	0,062	0,031	.
80	2,333	0,086	0,085	0,081	0,075	0,066	0,056	0,043	0,029	0,015	.
90	2,250	0,167	0,164	0,157	0,144	0,127	0,107	0,084	0,058	0,029	.
100	2,167	0,080	0,079	0,076	0,069	0,061	0,052	0,040	0,027	0,014	.
110	2,083	0,154	0,152	0,145	0,133	0,118	0,099	0,077	0,053	0,027	.
120	2,000	0,074	0,073	0,070	0,064	0,057	0,048	0,037	0,025	0,013	.
130	1,917	0,142	0,140	0,133	0,123	0,109	0,091	0,071	0,049	0,025	.
140	1,833	0,068	0,067	0,064	0,059	0,052	0,044	0,034	0,023	0,012	.
150	1,750	0,130	0,128	0,122	0,112	0,099	0,083	0,065	0,044	0,022	.
160	1,667	0,062	0,061	0,058	0,053	0,047	0,040	0,031	0,021	0,011	.
170	1,583	0,117	0,115	0,110	0,101	0,090	0,075	0,058	0,040	0,020	.

Таблица 90

$k$	$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$b_k$ по способу трапеции	$\delta$	$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$b_k$ по способу Симпсона	$\delta$	Точное значение $b_k$
1	1,434	0,478	0,956	2	1,432	0,478	0,954	0	0,954
2	1,190	0,712	0,478	1	1,183	0,705	0,478	1	0,477
3	1,094	0,778	0,316	— 2	1,115	0,798	0,317	—1	0,318
4	1,067	0,836	0,231	— 8	1,065	0,825	0,240	1	0,239
5	1,044	0,869	0,175	—16	1,052	0,859	0,193	2	0,191
6	0,944	0,801	0,143	—16	0,948	0,782	0,166	7	0,159
7	1,016	0,893	0,123	—13	1,025	0,886	0,139	3	0,136
8	1,003	0,902	0,101	—18	1,007	0,883	0,124	5	0,119
9	0,782	0,706	0,076	—30	1,056	0,945	0,111	5	0,106
10	0,989	0,916	0,073	—22	0,997	0,893	0,104	9	0,095

Такой же вид, но только с синусами, будет иметь формула для определения коэффициентов  $b_k$ .

При  $n$ , равном 24 или 36, коэффициенты формулы (18) будут соответственно в два или три раза меньше. Однако мы воздержимся от применения этой формулы, поскольку составление таблицы с несколькими различными рядами коэффициентов весьма утомительно и лучше использовать более простую формулу при большем количестве ординат.

**§ 5. Пример разложения.** В случае непрерывности производных анализируемой функции метод трапеций эквивалентен другим приемам вычисления.

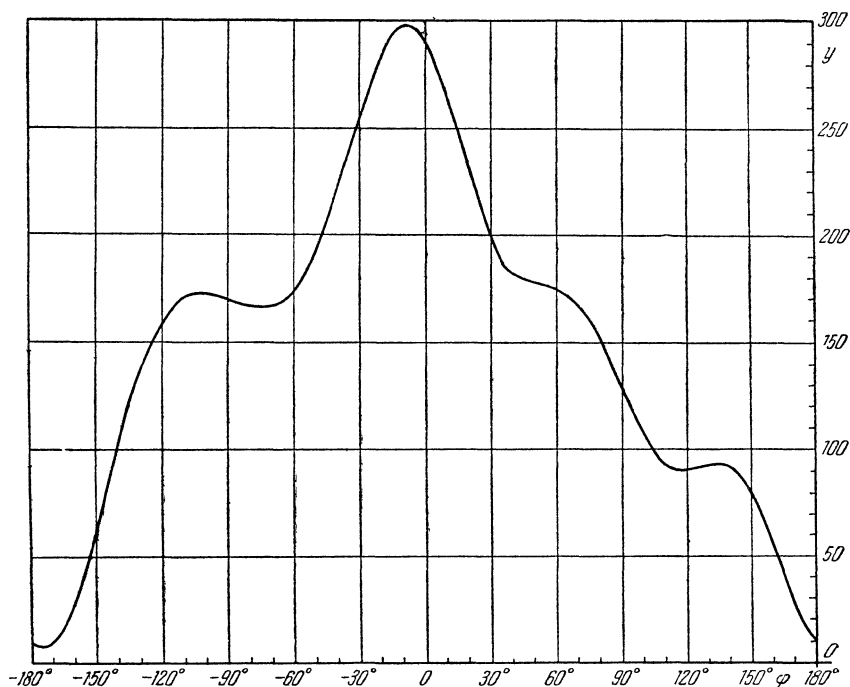


Рис. 72.

Это видно из формулы Эйлера—Маклорена [формула (138) гл. VII]. Если на концах интервала интегрирования производные одинаковы, то выражения во всех скобках указанной формулы, кроме первых скобок, обращаются в нуль и оказывается, что способ трапеций дает совершенно точное решение.

Для иллюстрации этого рассмотрим результаты разложения функции

$$y = 150 + 100 \cos x + 20 \sin x + 30 \cos 3x + 20 \sin 4x + 10 \cos 5x, \quad (19)$$

график которой дан на рис. 72. Вычисления произведены по способу трапеций и способу Симпсона (вспомогательные таблицы — табл. 91 и 92). Результаты разложения даны в табл. 93. Оба способа дали практически одинаковые по точности результаты.

Применение шаблонов для различного количества ординат предложено рядом авторов. В приведенном нами виде шаблоны были применены Германом и Лёманом. Ципперер дал несколько иной вид шаблона, для которого

Т а б л и ц а 91

$x$	$y$	0,0556 $y$	0,0548 $y$	0,0522 $y$	0,0482 $y$	0,0426 $y$	0,0358 $y$	0,0278 $y$	0,0190 $y$	0,0097 $y$
—180°	10,0	0,56	0,55	0,52	0,48	0,43	0,36	0,28	0,19	0,10
—170	28,5	1,58	1,56	1,48	1,37	1,22	1,02	0,80	0,54	0,28
—160	55,6	3,09	3,05	2,90	2,68	2,37	1,99	1,55	1,06	0,54
—150	79,4	4,41	4,35	4,14	3,83	3,38	2,84	2,21	1,51	0,77
—140	91,7	5,10	5,03	4,79	4,42	3,90	3,28	2,55	1,74	0,89
—130	93,0	5,17	5,09	4,85	4,48	3,95	3,32	2,58	1,76	0,90
—120	90,4	5,02	4,95	4,73	4,36	3,85	3,24	2,51	1,72	0,88
—110	93,5	5,20	5,13	4,87	4,50	3,97	3,34	2,60	1,77	0,90
—100	107,3	5,96	5,87	5,60	5,17	4,57	3,84	2,98	2,04	1,04
— 90	130,0	7,22	7,11	6,79	6,27	5,54	4,65	3,61	2,47	1,26
— 80	153,3	8,52	8,39	8,00	7,40	6,53	5,49	4,26	2,01	1,49
— 70	168,9	9,39	9,25	8,81	8,14	7,19	6,04	4,70	3,21	1,64
— 60	175,0	9,73	9,59	9,15	8,44	7,45	6,27	4,86	3,33	1,70
— 50	178,6	9,93	9,78	9,33	8,61	7,60	6,40	4,96	3,40	1,73
— 40	182,5	10,14	9,99	9,54	8,80	7,77	6,55	5,07	3,48	1,77
— 30	200,6	11,15	10,98	10,47	9,66	8,54	7,18	5,58	3,81	1,94
— 20	230,8	12,83	12,64	12,06	11,13	9,85	8,28	6,42	4,39	2,24
— 10	264,5	14,70	14,48	13,81	12,75	11,28	9,47	7,35	5,02	2,57
0	290,0	16,13	15,89	15,13	13,98	12,36	10,37	8,06	5,51	2,81
10	297,3	16,54	16,29	15,51	14,33	12,77	10,63	8,27	5,64	2,88
20	283,8	15,78	15,54	14,81	13,68	12,10	10,11	7,89	5,39	2,75
30	255,2	14,19	13,48	13,32	12,30	10,87	9,14	7,20	4,95	2,47
40	221,9	12,33	12,15	11,57	10,70	9,45	7,94	6,16	4,21	2,15
50	193,4	10,75	10,59	10,10	9,33	8,24	6,93	5,38	3,67	1,88
60	175,0	9,73	9,58	9,14	8,44	7,46	6,27	4,86	3,33	1,70
70	167,1	9,29	9,15	8,73	8,06	7,12	5,98	4,64	3,17	1,62
80	166,9	9,28	9,14	8,72	8,05	7,11	5,97	4,64	3,17	1,62
90	170,0	9,45	9,31	8,87	8,21	7,25	6,09	4,72	3,23	1,64
100	172,5	9,59	9,45	9,00	8,31	7,35	6,17	4,80	3,28	1,67
110	170,5	9,48	9,34	8,89	8,23	7,27	6,11	4,74	3,24	1,65
120	159,6	8,88	8,75	8,34	7,70	6,80	5,72	4,44	3,03	1,55
130	137,2	7,63	7,51	7,17	6,62	5,85	4,91	3,82	2,61	1,33
140	103,9	5,78	5,69	5,43	5,01	4,43	3,72	2,89	2,69	1,01
150	64,8	3,60	3,55	3,38	3,13	2,76	2,32	1,80	1,23	0,63
160	26,4	1,47	1,45	1,37	1,27	1,12	0,94	0,74	0,50	0,26
170	9,7	0,54	0,54	0,51	0,41	0,35	0,27	0,27	0,18	0,09

Т а б л и ц а 92

$x$	$y$	0,03704 $y$ 0,0740 $y$	0,0364 $y$ 0,0729 $y$	0,0348 $y$ 0,0696 $y$	0,0320 $y$ 0,0640 $y$	0,0284 $y$ 0,0567 $y$	0,0238 $y$ 0,0476 $y$	0,0185 $y$ 0,0350 $y$	0,0126 $y$ 0,0253 $y$	0,0064 $y$ 0,0129 $y$	*
—180°	10,0	0,37	0,36	0,35	0,32	0,28	0,24	0,18	0,13	0,06	
—170	28,5	2,11	2,08	1,98	1,83	1,62	1,36	1,05	0,72	0,37	*
—160	55,6	2,06	2,03	1,94	1,79	1,59	1,33	1,03	0,71	0,36	
—150	79,4	5,87	5,79	5,52	5,09	4,50	3,78	2,94	2,01	1,02	*
—140	91,7	3,40	3,34	3,19	2,94	2,60	2,18	1,70	1,16	0,59	
—130	93,0	6,90	6,78	6,48	5,96	5,30	4,42	3,44	2,34	1,20	*
—120	90,4	3,35	3,29	3,14	2,90	2,56	2,15	1,68	1,15	0,58	
—110	93,5	6,94	6,82	6,52	5,98	5,32	4,44	3,46	2,36	1,20	*
—100	107,3	3,97	3,91	3,73	3,43	3,05	2,55	1,98	1,35	0,69	
— 90	130,0	9,62	9,47	9,05	8,34	7,36	6,18	4,80	3,29	1,68	*
— 80	153,3	5,67	5,58	5,34	4,91	4,35	3,65	2,84	1,93	0,98	
— 70	168,9	12,48	12,29	11,75	10,81	9,58	8,03	6,24	4,26	2,18	*
— 60	175,0	6,48	6,37	6,09	5,60	4,97	4,16	3,24	2,20	1,12	
— 50	178,6	13,22	13,02	12,43	11,45	10,13	8,50	6,61	4,52	2,30	*
— 40	182,5	6,75	6,64	6,35	5,84	5,18	4,34	3,38	2,30	1,17	
— 30	200,6	14,84	14,62	13,96	12,86	11,37	9,55	7,42	5,07	2,59	*
— 20	230,8	8,54	8,40	8,03	7,39	6,55	5,49	4,27	2,91	1,48	
— 10	264,5	19,57	19,28	18,41	16,95	15,00	12,59	9,79	6,69	3,41	*
0	290,0	10,73	10,56	10,08	9,28	8,24	6,90	5,36	3,65	1,86	
10	297,3	22,00	21,67	20,69	19,06	16,86	14,15	11,00	7,52	3,84	*
20	283,8	10,48	10,33	9,87	9,08	8,05	6,75	5,25	3,57	1,82	
30	255,2	18,88	18,60	17,76	16,36	14,47	12,15	9,44	6,46	3,29	*
40	221,9	8,20	8,07	7,72	7,09	6,30	5,28	4,10	2,79	1,42	
50	193,4	14,31	14,10	13,46	12,40	10,97	9,21	7,16	4,89	2,49	*
60	175,0	6,48	6,37	6,09	5,60	4,97	4,17	3,24	2,20	1,12	
70	167,1	12,36	12,18	11,64	10,71	9,47	7,95	6,18	4,23	2,16	*
80	166,9	6,18	6,09	5,82	5,35	4,73	3,97	3,09	2,11	1,08	
90	170,0	12,58	12,40	11,84	10,90	9,64	8,09	6,29	4,30	2,19	*
100	172,5	6,38	6,28	6,00	5,52	4,90	4,10	3,19	2,17	1,10	
110	170,5	12,61	12,43	11,87	10,93	9,62	8,11	6,31	4,31	2,19	*
120	159,6	5,90	5,81	5,55	5,11	4,53	3,80	2,95	2,01	1,02	
130	137,2	10,15	10,00	9,55	8,80	7,78	6,53	5,07	3,47	1,77	*
140	103,9	3,84	3,78	3,61	3,32	2,95	2,47	1,92	1,31	0,67	
150	64,8	4,79	4,73	4,51	4,15	3,67	3,08	2,40	1,64	0,84	*
160	26,4	0,98	0,96	0,92	0,84	0,75	0,63	0,49	0,33	0,17	
170	9,7	0,72	0,70	0,68	0,62	0,54	0,46	0,35	0,25	0,12	*

вспомогательная таблица — матрица не составляется, необходимые же вычисления производятся, так сказать, на ходу. \*)

Покажем применение шаблонов Ципперера для двенадцати ординат. Шаблоны включают в себя двенадцать строк и семь столбцов с положительными

Т а б л и ц а 93

$k$	$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$a_k, b_k$ по способу трапеций	$\delta$	$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$a_k, b_k$ по способу Симпсона	$\delta$	Точное значение $a_k$ и $b_k$
1	145,49	45,12	$a_1 = 100,37$	0,4	145,02	44,84	$a_1 = 100,18$	0,2	$a_1 = 100$
1	105,41	85,43	$b_1 = 19,98$	0	105,37	85,19	$b_1 = 20,18$	0,2	$b_1 = 20$
2	96,05	96,05	$a_2 = 0$	0	95,85	95,95	$a_2 = -0,10$	-0,1	$a_2 = 0$
2	94,54	94,66	$b_2 = -0,12$	-0,1	94,42	94,46	$b_2 = -0,04$	0	$b_2 = 0$
3	108,49	78,36	$a_3 = 30,13$	0,1	105,97	76,08	$a_3 = 29,89$	-0,1	$a_3 = 30$
3	93,28	93,47	$b_3 = -0,19$	-0,2	95,24	95,50	$b_3 = -0,24$	-0,2	$b_3 = 0$
4	95,99	96,24	$a_4 = -0,25$	-0,2	95,93	96,10	$a_4 = -0,17$	-0,2	$a_4 = 0$
4	104,72	85,11	$b_4 = 19,61$	-0,4	104,39	84,28	$b_4 = 20,11$	0,1	$b_4 = 20$
5	100,25	90,05	$a_5 = 10,20$	0,2	99,88	90,02	$a_5 = 9,86$	-0,1	$a_5 = 10$
5	95,44	95,11	$b_5 = 0,33$	0,3	95,33	95,40	$b_5 = -0,07$	-0,1	$b_5 = 0$
6	100,16	99,97	$a_6 = 0,19$	0,2	99,97	99,82	$a_6 = 0,15$	0,2	$a_6 = 0$
6	86,88	86,57	$b_6 = 0,31$	0,3	86,64	86,36	$b_6 = 0,28$	0,3	$b_6 = 0$

и отрицательными коэффициентами. Вместо матрицы составляется лишь один столбец значений функции, к которому и приставляется требуемый шаблон.

Шаблоны для первых двух гармоник даны на рис. 73—76. На рис. 75 показано принципиальное использование шаблона для вычисления  $a_2$ . Шаблон приставляется к столбцу значений анализируемой функции и находятся суммы значений, соответствующих всем окошкам каждого столбца. Каждая такая сумма умножается на арифмометре на коэффициент, приписанный внизу столбца, и эти произведения на арифмометре приплюсовываются друг к другу до получения результата, который после деления на  $\frac{n}{2}$ , т. е. в данном случае на шесть, дает соответствующий коэффициент разложения.

Так, для случая, показанного на рис. 75, суммируем произведения следующих сомножителей:

$$3,00 \cdot 1,000 + 6,00 \cdot 0,500 + 6,00 \cdot (-0,500) + 3,00 \cdot (-1,000) = 0.$$

Такое вычисление обладает тем недостатком, что не оставляет никаких следов промежуточных действий и, следовательно, может быть проверено только новым вычислением с начала до конца. Кроме того, подобный расчет необходимо выполнять вдвоем, так как невозможно работать одновременно с шаблоном и на арифмометре.

Рациональнее было бы проводить вычисление следующим образом. Сначала записать в столбцах журнала, расположенного под шаблоном (см. рис. 76), получающиеся суммы. Под суммами приписать произведения их на коэффициенты, соответствующие столбцам. Эти произведения сложить и затем разделить на шесть. Такая работа под силу одному человеку, но неясно, дает ли она какую-либо экономию труда по сравнению с применением общепринятых шаблонов.

Кроме шаблонов описанных типов имеются шаблоны, группирующие отдельные ординаты с общими множителями, как, например, шаблоны Терезеби

\*) Серебрянников М. Г., Гармонический анализ, Гостехиздат, 1948, стр. 139—150.

и Лопшица\*). Однако применение этих шаблонов гораздо сложнее и может привести к значительным неточностям расчета из-за снижения внимания.

Отметим еще одно существенное обстоятельство. Какой бы метод гармонического анализа мы ни применили, вычислять будет легче, если все ординаты исследуемой кривой будут положительными. Поэтому, если заданная кривая пересекает ось абсцисс, следует поднять ее так, чтобы она вся легла выше оси. Это отразится только на константе  $a_0$ .

Перейдем теперь к иному способу гармонического анализа, разработанному автором применительно, главным образом, к функциям, заданным графически. Способ этот позволяет находить каждый из коэффициентов разложения самостоятельно, без подготовительной работы.

**§ 6. Метод равных коэффициентов.** Начнем с рассмотрения коэффициентов разложения  $a_1$  и  $b_1$ . Имея

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y \cos \varphi d\varphi, \quad (20)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y \sin \varphi d\varphi,$$

предположим, что интервал от  $\varphi = -\pi$  до  $\varphi = +\pi$  разбит на несколько участков и в пределах каждого участка значение  $y$  берется постоянным, равным его действительному значению в середине участка. Тогда получим при делении на  $n$  участков:

$$a_1 = \frac{y_1}{\pi} \int_{-\pi}^{\varphi_1} \cos \varphi d\varphi + \frac{y_2}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi + \dots + \frac{y_n}{\pi} \int_{\varphi_{n-1}}^{\pi} \cos \varphi d\varphi, \quad (21)$$

$$b_1 = \frac{y_1}{\pi} \int_{-\pi}^{\varphi_1} \sin \varphi d\varphi + \frac{y_2}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi + \dots + \frac{y_n}{\pi} \int_{\varphi_{n-1}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi,$$

или после интегрирования:

$$a_1 = y_1 \frac{\sin \varphi_1 - \sin(-\pi)}{\pi} + y_2 \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1}{\pi} + \dots + y_n \frac{\sin \pi - \sin \varphi_{n-1}}{\pi},$$

$$b_1 = y_1 \frac{\cos \varphi_1 - \cos(-\pi)}{-\pi} + y_2 \frac{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1}{-\pi} + \dots + y_n \frac{\cos \pi - \cos \varphi_{n-1}}{-\pi}. \quad (22)$$

\*) Серебренников М. Г., Гармонический анализ, Гостехиздат, 1948, стр. 151—156.

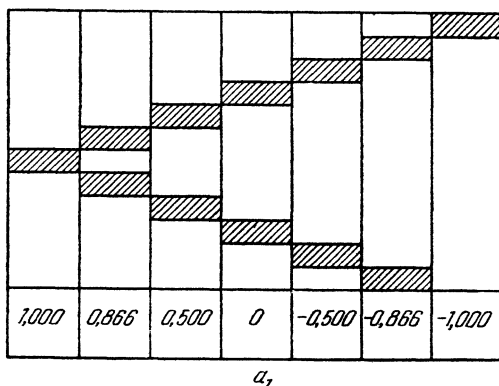


Рис. 73.

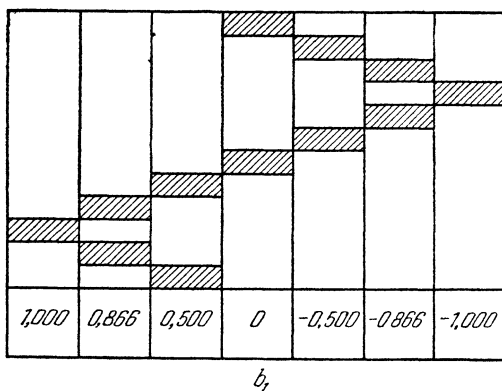


Рис. 74.



Рассмотрим выражение для  $a_1$ .

Разобьем интервал  $(-\pi, \pi)$  на 32 участка, по 8 участков в каждой четверти интервала. Участки выберем такими, чтобы все множители при  $y_1$

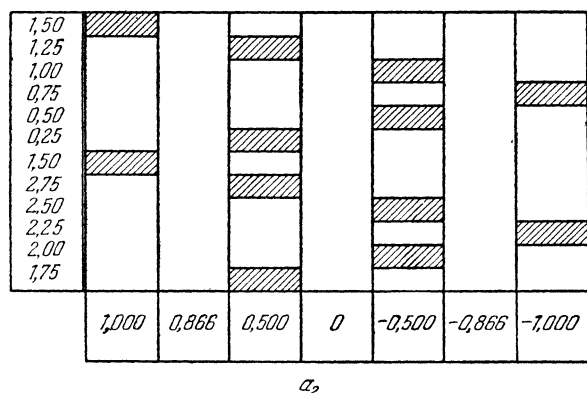


Рис. 75.

	1,50								
	1,25								
	1,00								
	0,75								
	0,50								
	0,25								
	1,50								
	2,75								
	2,50								
	2,25								
	2,00								
	1,75								
$b_2$	1,000	0,866	0,500	0	-0,500	-0,866	-1,000		
$a_1$	1,50	3,00	3,00	—	3,00	3,00	1,50	$\Sigma =$	$\Sigma \cdot 6 =$
	1,50	2,60	1,50	—	-1,50	-2,60	-1,50	$= 0$	$= 0$
$b_1$	2,25	4,50	4,50	—	1,50	1,50	0,75		
	2,25	3,90	2,25	—	-0,75	-1,30	-0,75	5,60	0,933
$a_2$	3,00	0	6,00	0	6,00	0	3,00		
	3,00	0	3,00	—	-3,00	0	-3,00	0	0
$b_2$	0	7,50	0	—	0	4,50	0		
	0	6,50	0	—	0	-3,90	0	2,60	0,433

Рис. 76.

$y_2, \dots, y_n$  в формуле (22) были равны по абсолютной величине; при этом первые 8 множителей будут отрицательными, следующие 16 положительными и последние 8 опять отрицательными.

Из условия равенства первых восьми множителей

$$\frac{\sin \varphi_1 - \sin(-\pi)}{\pi} = \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1}{\pi} = \dots = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin \varphi_7}{\pi} = m \quad (23)$$

получаем, сложив почленно:

$$8m = \frac{\sin \varphi_1 - \sin(-\pi)}{\pi} + \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1}{\pi} + \dots + \frac{\sin(-\frac{\pi}{2}) - \sin \varphi_7}{\pi} =$$

$$= \frac{\sin(-\frac{\pi}{2}) - \sin(-\pi)}{\pi} = -\frac{1}{\pi}. \quad (24)$$

Отсюда

$$m = -\frac{1}{8\pi} = -0,0398 \approx -0,04. \quad (25)$$

Из условий

$$\sin \varphi_1 - \sin(-\pi) = \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 = \dots = -\frac{1}{8} \quad (26)$$

получаем:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 &= -\frac{1}{8}, & \varphi_1 &= -3,01; & \sin \varphi_3 &= -\frac{5}{8}, & \varphi_3 &= -2,47; \\ \sin \varphi_2 &= -\frac{2}{8}, & \varphi_2 &= -2,89; & \sin \varphi_6 &= -\frac{6}{8}, & \varphi_6 &= -2,29; \\ \sin \varphi_3 &= -\frac{3}{8}, & \varphi_3 &= -2,76; & \sin \varphi_7 &= -\frac{7}{8}, & \varphi_7 &= -2,08; \\ \sin \varphi_4 &= -\frac{4}{8}, & \varphi_4 &= -2,62; & \sin \varphi_8 &= -1, & \varphi_8 &= -1,57. \end{aligned} \quad (27)$$

Аналогичным путем находим значения и остальных абсцисс. Перейдя к абсциссам середин участков, мы получим в результате

$$\begin{aligned} a_1 &= -0,04[f(-3,08) + f(-2,95) + f(-2,82) + f(-2,69) + \\ &\quad + f(-2,55) + f(-2,38) + f(-2,18) + f(-1,83)] + \\ &\quad + 0,04[f(-1,31) + f(-0,96) + f(-0,76) + f(-0,59) + \\ &\quad + f(-0,45) + f(-0,32) + f(-0,19) + f(-0,06)] + \\ &\quad + 0,04[f(0,06) + \dots + f(1,31)] - 0,04[f(1,83) + \dots + f(3,08)] \end{aligned} \quad (28)$$

или, записывая сокращенно:

$$a_1 = 0,04 \left[ -\sum f(\varphi_k) \left\{ \begin{array}{c} -3,08 \quad +1,83 \\ -2,95 \quad +2,18 \\ -2,82 \quad +2,38 \\ -2,69 \quad +2,55 \\ -2,55 \quad +2,69 \\ -2,38 \quad +2,82 \\ -2,18 \quad +2,95 \\ -1,83 \quad +3,08 \end{array} \right\} + \right.$$

$$\left. + \sum f(\varphi_k) \left\{ \begin{array}{c} -1,31 \quad +0,06 \\ -0,96 \quad +0,19 \\ -0,76 \quad +0,32 \\ -0,59 \quad +0,45 \\ -0,45 \quad +0,59 \\ -0,32 \quad +0,76 \\ -0,19 \quad +0,96 \\ -0,06 \quad +0,31 \end{array} \right\} \right]. \quad (29)$$

Поскольку обычно углы задаются не в радиальной мере, а в градусах, перепишем выражение (29) в следующем виде:

$$a_1 = 0,04 \left[ - \sum f(\varphi_k) \right] \left\{ \begin{array}{cc} \varphi_k & \\ -176,6^\circ & +104,9^\circ \\ -169,1^\circ & +125,0^\circ \\ -161,7^\circ & +136,5^\circ \\ -154,2^\circ & +146,2^\circ \\ -146,2^\circ & +154,2^\circ \\ -136,5^\circ & +161,7^\circ \\ -125,0^\circ & +169,1^\circ \\ -104,9^\circ & +176,6^\circ \end{array} \right\} + \quad (30)$$

$$+ \sum f(\varphi_k) \left\{ \begin{array}{cc} \varphi_k & \\ -75,1^\circ & +3,4^\circ \\ -55,0^\circ & +10,9^\circ \\ -43,5^\circ & +18,3^\circ \\ -33,8^\circ & +25,8^\circ \\ -25,8^\circ & +33,8^\circ \\ -18,3^\circ & +43,5^\circ \\ -10,9^\circ & +55,0^\circ \\ -3,4^\circ & +75,1^\circ \end{array} \right\}.$$

Совершенно аналогично, приравнявая коэффициенты

$$\frac{\cos \varphi_1 - \cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1}{-\pi} = \dots = \frac{\cos \pi - \cos \varphi_{n-1}}{-\pi}, \quad (31)$$

получим для  $b_1$  следующие выражения:

$$b_1 = 0,04 \left[ - \sum f(\varphi_k) \right] \left\{ \begin{array}{cc} \varphi_k & \\ -2,88 & -1,51 \\ -2,53 & -1,38 \\ -2,33 & -1,25 \\ -2,16 & -1,12 \\ -2,02 & -0,98 \\ -1,89 & -0,81 \\ -1,76 & -0,61 \\ -1,63 & -0,26 \end{array} \right\} +$$

$$+ \sum f(\varphi_k) \left\{ \begin{array}{cc} \varphi_k & \\ +0,26 & +1,63 \\ +0,61 & +1,76 \\ +0,81 & +1,89 \\ +0,98 & +2,02 \\ +1,12 & +2,16 \\ +1,25 & +2,33 \\ +1,38 & +2,53 \\ +1,51 & +2,88 \end{array} \right\} \quad (32)$$

или

$$b_1 = 0,04 \left[ -\sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -165,1^\circ & -86,6^\circ \\ -145,0^\circ & -79,1^\circ \\ -133,5^\circ & -71,7^\circ \\ -123,8^\circ & -64,2^\circ \\ -115,8^\circ & -56,2^\circ \\ -108,3^\circ & -46,5^\circ \\ -100,9^\circ & -35,0^\circ \\ -93,4^\circ & -14,9^\circ \end{Bmatrix} + \right. \\ \left. + \sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} +14,9^\circ & +93^\circ \\ +35,0^\circ & +100,9^\circ \\ +46,5^\circ & +108,3^\circ \\ +56,2^\circ & +115,8^\circ \\ +64,2^\circ & +123,8^\circ \\ +71,7^\circ & +133,5^\circ \\ +79,1^\circ & +145,0^\circ \\ +86,6^\circ & +165,1^\circ \end{Bmatrix} \right]. \quad (33)$$

Формулы (29) и (32) [(30) и [33]] получены для 32 ординат. Если мы возьмем вдвое меньше ординат, т. е. 16, то получим новые формулы, в которых коэффициенты будут вдвое больше, а абсциссы нужно будет взять средними из их значений в каждой паре ординат, объединяемых в одну. В результате получим:

$$a_1 = 0,08 \left[ -\sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -3,02 & +2,00 \\ -2,76 & +2,46 \\ -2,46 & +2,76 \\ -2,00 & +3,02 \end{Bmatrix} + \sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -1,14 & +0,12 \\ -0,68 & +0,38 \\ -0,38 & +0,68 \\ -0,12 & +1,14 \end{Bmatrix} \right] \quad (34)$$

или

$$a_1 = 0,08 \left[ -\sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -172,8^\circ & +125,0^\circ \\ -158,0^\circ & +141,4^\circ \\ -141,4^\circ & +158,0^\circ \\ -125,0^\circ & +172,8^\circ \end{Bmatrix} + \right. \\ \left. + \sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -65,0^\circ & +7,2^\circ \\ -38,6^\circ & +22,0^\circ \\ -22,0^\circ & +38,6^\circ \\ -7,2^\circ & +65,0^\circ \end{Bmatrix} \right], \quad (35)$$

$$b_1 = 0,08 \left[ -\sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -2,70 & -1,44 \\ -2,25 & -1,18 \\ -1,96 & -0,90 \\ -1,70 & -0,44 \end{Bmatrix} + \sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} +0,44 & +1,70 \\ +0,90 & +1,96 \\ +1,18 & +2,25 \\ +1,44 & +2,70 \end{Bmatrix} \right] \quad (36)$$

или

$$b_1 = 0,08 \left[ -\sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -155,0^\circ & -82,8^\circ \\ -128,6^\circ & -68,0^\circ \\ -112,0^\circ & -51,4^\circ \\ -97,2^\circ & -25,0^\circ \end{Bmatrix} + \right. \\ \left. + \sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} +25,0^\circ & +97,2^\circ \\ +51,4^\circ & +112,0^\circ \\ +68,0^\circ & +128,6^\circ \\ +82,8^\circ & +155,0^\circ \end{Bmatrix} \right]. \quad (37)$$

Для восьми ординат формулы примут вид:

$$a_1 = 0,16 \left[ -\sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -2,89 & +2,23 \\ -2,23 & +2,89 \end{Bmatrix} + \sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -0,91 & +0,25 \\ -0,25 & +0,91 \end{Bmatrix} \right] \quad (38)$$

или

$$a_1 = 0,16 \left[ -\sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -165,4^\circ & +128,2^\circ \\ -128,2^\circ & +165,4^\circ \end{Bmatrix} + \right. \\ \left. + \sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -51,8^\circ & +14,6^\circ \\ -14,6^\circ & +51,8^\circ \end{Bmatrix} \right], \quad (39)$$

$$b_1 = 0,16 \left[ -\sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -2,48 & -1,31 \\ -1,83 & -0,67 \end{Bmatrix} + \sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} +0,67 & +1,83 \\ +1,31 & +2,48 \end{Bmatrix} \right] \quad (40)$$

или

$$b_1 = 0,16 \left[ -\sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} -141,8^\circ & -75,4^\circ \\ -104,6^\circ & -38,2^\circ \end{Bmatrix} + \right. \\ \left. + \sum f(\varphi_k) \begin{Bmatrix} +38,2^\circ & +104,6^\circ \\ +75,4^\circ & +141,8^\circ \end{Bmatrix} \right] \quad (41)$$

и, наконец, для четырех ординат:

$$a_1 = 0,32 [-f(-2,56) + f(-0,58) + f(+0,58) - f(+2,56)]$$

или

$$a_1 = 0,32 [-f(-146,8^\circ) + f(-33,2^\circ) = f(+33,2^\circ) - f(+146,8^\circ)], \quad (42)$$

$$b_1 = 0,32 [-f(-2,16) - f(-0,99) + f(+0,99) + f(+2,16)]$$

или

$$b_1 = 0,32 [-f(-123,2^\circ) - f(-56,8^\circ) + f(+56,8^\circ) + f(+123,2^\circ)].$$

Покажем на примере кривой, приведенной на рис. 72, как применять эти формулы.

На рис. 77 даны шкалы, на которых размечены абсциссы, входящие в формулы (29) — (42). Эти шкалы помещаются под рис. 72 так, чтобы шкалы  $\varphi$  обоих рисунков совпали; параллельно им укрепляется линейка, а затем параллельно оси ординат перемещается прозрачный треугольник,

с помощью которого определяются значения функции для отмеченных значений абсцисс. В качестве примера на рис. 78 показано нахождение второго

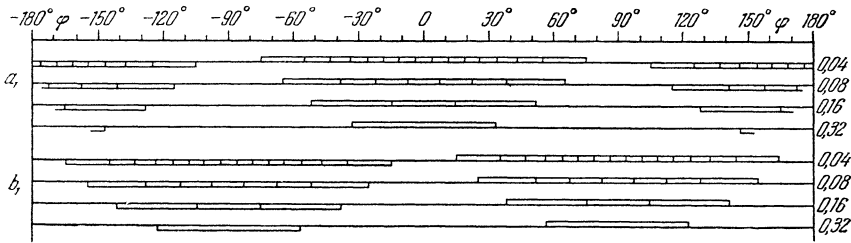


Рис. 77.

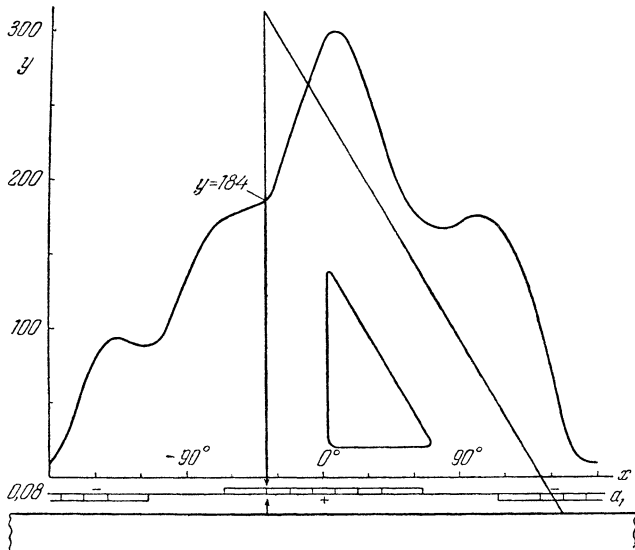


Рис. 78.

положительного значения функции при вычислении коэффициента  $a_1$  по 16 ординатам. В результате получаем:  
для четырех ординат

—	+
85	191
75	245
—160	436

$$a_1 = 276 \cdot 0,32 = 88,3,$$

—	+
91	189
176	155
—276	344

$$b_1 = 77 \cdot 0,32 = 24,6;$$

для восьми ординат

—	+
41	178
93	247
143	295
16	190
—293	910

$$a_1 = 617 \cdot 0,16 = 98,8$$

—	+
90	225
100	167
161	173
184	100
—535	665

$$b_1 = 130 \cdot 0,16 = 20,4;$$

для шестнадцати ординат

—				+			
21	165	172	297	69	146	270	172
60	99	184	279	92	170	190	169
90	36	222	228	92	178	168	144
90	8	272	170	112	215	168	48
— 570				— 1074			
1824				1329			
$a_1 = 1254 \cdot 0,08 = 100,3,$				$b_1 = 255 \cdot 0,08 = 20,4;$			

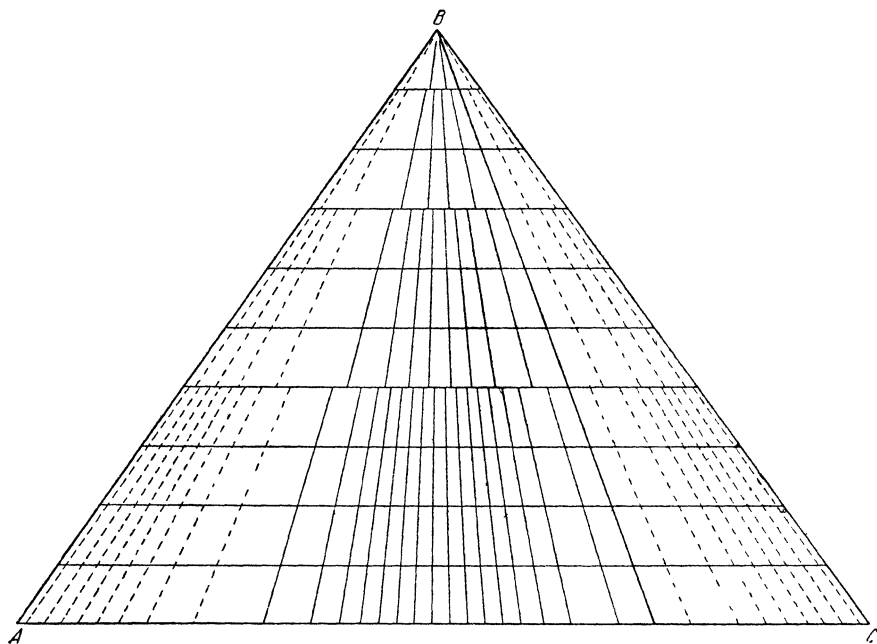


Рис. 79.

для тридцати двух ординат

—				+			
15	85	173	50	161	211	295	241
31	93	150	25	177	233	297	212
50	91	116	11	181	258	286	183
70	99	78	8	188	280	268	167
— 1145				3638			
$a_1 = 2493 \cdot 0,043 = 99,7;$							
—				+			
41	91	138	177	294	170	171	153
87	95	155	179	238	167	173	130
93	104	166	188	200	167	172	84
92	121	173	249	180	169	166	17
— 2149				2651			
$b_1 = 502 \cdot 0,04 = 20,1.$							

При получении величин  $a_1$  и  $b_1$  для кривой с произвольной длиной периода необходимо иметь шаблон, изображенный на рис. 79. На рис. 80 показано применение этого шаблона к разбивке абсцисс. Делая разбивку для вычисления  $a_1$ , нужно расположить шкалу так, чтобы она была параллельна стороне  $AC$  шаблона, а концы ее находились на сторонах  $AB$  и  $BC$ . При разбивке абсцисс для вычисления  $b_1$ , шкалу из предыдущего положения нужно сдвинуть на четверть периода влево (до жирной линии) и разбить три четверти периода; затем вернуть шкалу в исходное положение и, сдвинув на три четверти периода вправо, разбить последнюю четверть.

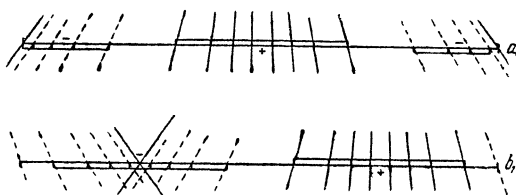


Рис. 80.

При разбивке шкал для вычисления высших гармоник основной период разбивается на число частей, соответствующее номеру гармоники, и в каждой части производится разбивка, как для целого периода. Коэффициент при сумме ординат берется потом во столько раз меньшим, сколько малых периодов заключается в большом.

На рис. 81 дана разбивка шкал для первых двадцати коэффициентов; у каждой шкалы показан множитель, берущийся при сумме ординат. Для применения этих шкал кривую нужно строить, беря по оси абсцисс тот же масштаб, что и на шкалах.

С помощью шкал рис. 81 был произведен анализ кривой, приведенной на рис. 72. Результаты получились следующие (коэффициенты  $a_1$  и  $b_1$  рассмотрены ранее):

—				+			
92	137	177	171	15	194	295	70
93	153	167	173	28	233	297	25
104	168	167	171	52	263	285	10
119	175	169	154	81	281	245	8
—2390				2382			

$$a_2 = -8 \cdot 0,04 = -0,3,$$

—				+			
156	181	173	111	34	93	296	198
172	188	166	81	69	92	269	181
176	210	152	52	84	91	239	170
178	255	135	13	92	101	217	167
—2399				2393			

$$b_2 = -6 \cdot 0,04 = -0,2;$$

—				+			
13	170	225	167	90	96	293	169
21	173	203	168	93	110	297	164
36	175	189	32	93	224	296	155
59	177	178	14	92	255	280	144
148	179	172	8	90	271	173	128
163	183	168	9	92	283	172	97
—3030				4157			

$$a_3 = 1127 \cdot 0,0267 = 30,1,$$



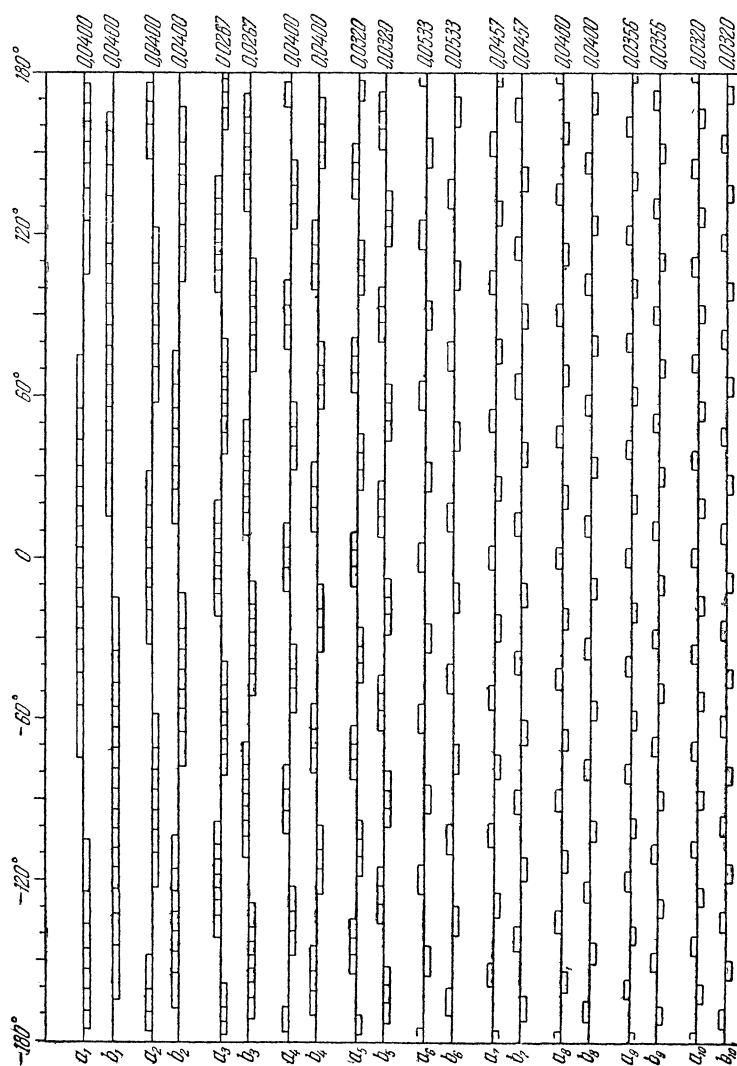


Рис. 81.

—				+			
25	93	205	167	92	157	246	97
45	93	220	169	101	169	231	75
60	178	238	170	112	297	211	59
78	180	266	172	122	291	190	39
83	185	167	173	134	276	143	21
89	193	167	170	145	262	118	9
<hr/> —3586				<hr/> 3597			

$$b_3 = 11 \cdot 0,0267 = 0,3;$$

—				+			
83	175	247	155	15	138	295	171
93	179	217	135	36	157	295	173
93	182	197	111	102	255	167	13
92	193	178	75	119	281	169	8
<hr/> —2405				<hr/> 2394			

$$a_4 = -11 \cdot 0,04 = -0,4,$$

—				+			
92	188	184	87	26	152	297	173
90	212	170	53	51	167	287	171
94	232	167	27	72	173	268	165
108	264	167	10	88	177	236	149
<hr/> —2145				<hr/> 2652			

$$b_4 = 507 \cdot 0,04 = 20,3;$$

—				+			
14	111	271	173	69	161	294	167
27	179	245	170	83	168	297	130
90	183	225	163	90	173	173	102
92	192	204	10	93	262	167	78
99	211	172	8	147	283	167	54
<hr/> —2839				<hr/> 3158			

$$a_5 = 319 \cdot 0,032 = 10,2,$$

—				+			
21	122	247	170	93	176	279	173
40	137	270	167	93	178	259	61
59	153	213	154	91	180	167	34
75	204	192	141	91	297	169	17
107	227	179	118	172	294	170	8
<hr/> —3006				<hr/> 3002			

$$b_5 = -4 \cdot 0,032 = -0,1.$$

Средняя величина полученных погрешностей — порядка двух — трех десятых долей единицы, т. е. порядка точности снятия величины ординат с кривой.

При желании уменьшить количество слагаемых, можно в шкалах рис. 81 взять меньшее количество абсцисс, что не повлияет особенно на получаемую точность. Для шкал первой гармоники можно ограничиться 16 делениями, для второй гармоники также 16, для третьей — 24, для четвертой — 16 и для

Т а б л и ц а 94 \*)

<i>N</i>	<i>m</i>	<i>N</i>	<i>m</i>	<i>N</i>	<i>m</i>	<i>N</i>	<i>m</i>	<i>N</i>	<i>m</i>	<i>N</i>	<i>m</i>
1	25	51	13	101	18	151	33	201	25	251	10
2	28	2	16	2	17	2	32	2	26	2	9
3	31	3	19	3	16	3	30	3	27	3	8
4	32	4	22	4	15	4	27	4	27	4	7
5	33	55	24	105	13	155	24	205	26	255	8
6	33	6	26	6	12	6	20	6	25	6	8
7	32	7	27	7	11	7	16	7	24	7	9
8	31	8	28	8	10	8	12	8	22	8	10
9	28	9	29	9	9	9	9	9	20	9	12
10	25	60	28	110	9	160	5	210	18	260	14
1	22	1	27	1	10	1	3	1	17	1	17
2	18	2	25	2	10	2	1	2	15	2	20
3	14	3	24	3	11	3	0	3	14	3	23
4	10	4	21	4	12	4	0	4	13	4	25
15	7	65	19	115	14	165	3	215	13	265	27
6	4	6	17	6	16	6	3	6	12	6	29
7	2	7	15	7	19	7	6	7	12	7	30
8	0	8	13	8	21	8	9	8	12	8	30
9	0	9	12	9	24	9	13	9	13	9	30
20	0	70	11	120	25	170	17	220	13	270	29
1	2	1	11	1	27	1	21	1	13	1	27
2	4	2	10	2	28	2	24	2	14	2	25
3	8	3	10	3	29	3	27	3	14	3	22
4	11	4	11	4	29	4	30	4	15	4	19
25	15	75	12	125	28	175	32	225	15	275	16
6	19	6	12	6	27	6	33	6	16	6	12
7	23	7	13	7	25	7	33	7	17	7	9
8	26	8	14	8	23	8	32	8	17	8	6
9	29	9	15	9	20	9	31	9	17	9	4
30	32	80	16	130	17	180	28	230	17	280	2
1	33	1	17	1	14	1	25	1	18	1	1
2	34	2	18	2	11	2	22	2	18	2	1
3	33	3	19	3	8	3	19	3	19	3	2
4	32	4	19	4	5	4	15	4	19	4	4
35	30	85	19	135	4	185	12	235	20	285	7
6	27	6	19	6	2	6	9	6	20	6	10
7	24	7	20	7	2	7	7	7	21	7	14
8	20	8	20	8	2	8	5	8	21	8	17
9	17	9	20	9	4	9	4	9	22	9	21
40	13	90	20	140	6	190	4	240	22	290	25
1	10	1	20	1	9	1	5	1	22	1	29
2	7	2	20	2	12	2	5	2	22	2	31
3	5	3	20	3	16	3	7	3	22	3	33
4	3	4	20	4	19	4	9	4	21	4	34
45	3	95	21	145	23	195	12	245	20	295	34
6	3	6	20	6	27	6	14	6	19	6	33
7	4	7	20	7	30	7	17	7	17	7	31
8	5	8	20	8	32	8	20	8	16	8	29
9	7	9	20	9	33	9	22	9	14	9	26
50	10	100	19	150	34	200	24	250	12	300	22

\*) В табл. 94 *N* — порядковый номер дня, *m* — величина звезды.

Продолжение табл. 94

<i>N</i>	<i>m</i>	<i>N</i>	<i>m</i>	<i>N</i>	<i>m</i>	<i>N</i>	<i>m</i>	<i>N</i>	<i>m</i>	<i>N</i>	<i>m</i>
301	19	351	24	401	7	451	2	501	18	551	20
2	14	2	22	2	8	2	1	2	17	2	23
3	11	3	21	3	10	3	1	3	17	3	26
4	7	4	19	4	12	4	2	4	16	4	29
305	4	355	18	405	15	455	4	505	16	555	31
6	2	6	17	6	18	6	6	6	16	6	32
7	1	7	16	7	22	7	9	7	16	7	32
8	0	8	15	8	24	8	13	8	15	8	32
9	1	9	15	9	27	9	17	9	15	9	31
310	2	360	14	410	29	460	20	510	15	560	29
1	5	1	14	1	31	1	23	1	14	1	26
2	7	2	14	2	31	2	26	2	14	2	23
3	11	3	14	3	31	3	28	3	13	3	20
4	15	4	14	4	31	4	30	4	13	4	16
315	19	365	14	415	29	465	31	515	13	565	12
6	22	6	14	6	27	6	31	6	13	6	8
7	25	7	14	7	24	7	31	7	13	7	6
8	28	8	14	8	21	8	29	8	13	8	3
9	31	9	14	9	18	9	27	9	14	9	1
320	32	370	14	420	14	470	24	520	14	570	0
1	32	1	15	1	10	1	22	1	15	1	0
2	32	2	15	2	7	2	19	2	16	2	1
3	31	3	15	3	5	3	16	3	18	3	3
4	29	4	15	4	2	4	13	4	19	4	6
325	26	375	16	425	1	475	11	525	21	575	10
6	23	6	16	6	0	6	9	6	22	6	13
7	21	7	17	7	1	7	8	7	24	7	17
8	17	8	18	8	2	8	7	8	24	8	21
9	14	9	19	9	5	9	7	9	25	9	25
330	11	380	20	430	8	480	7	530	26	580	28
1	9	1	22	1	12	1	8	1	26	1	31
2	7	2	22	2	15	2	9	2	25	2	33
3	6	3	23	3	19	3	11	3	24	3	34
4	5	4	23	4	23	4	12	4	23	4	34
335	6	385	24	435	27	485	14	535	21	585	33
6	6	6	24	6	30	6	16	6	19	6	31
7	7	7	24	7	32	7	18	7	16	7	29
8	9	8	23	8	34	8	20	8	14	8	26
9	11	9	22	9	34	9	21	9	12	9	22
340	13	390	21	440	34	490	22	540	9	590	18
1	15	1	19	1	32	1	23	1	7	1	15
2	18	2	17	2	30	2	23	2	5	2	11
3	20	3	15	3	28	3	23	3	5	3	8
4	22	4	13	4	24	4	23	4	4	4	5
345	23	395	11	445	20	495	23	545	5	595	3
6	24	6	9	6	16	6	22	6	6	6	2
7	25	7	7	7	13	7	21	7	8	7	2
8	25	8	6	8	9	8	20	8	10	8	2
9	25	9	6	9	6	9	19	9	13	9	4
350	24	400	6	450	3	500	18	550	16	600	5

пятой — 20. Перестройка будет заключаться в том, что две смежные черточки заменяются одной, взятой посредине между ними.

При желании получить большое число гармоник функции, нужно дать горизонтальный масштаб крупнее — около метра на период; тогда можно найти до пятидесяти гармоник. Большее количество членов разложения приходится находить редко, в особых случаях, которые вряд ли встретятся в обычных задачах.

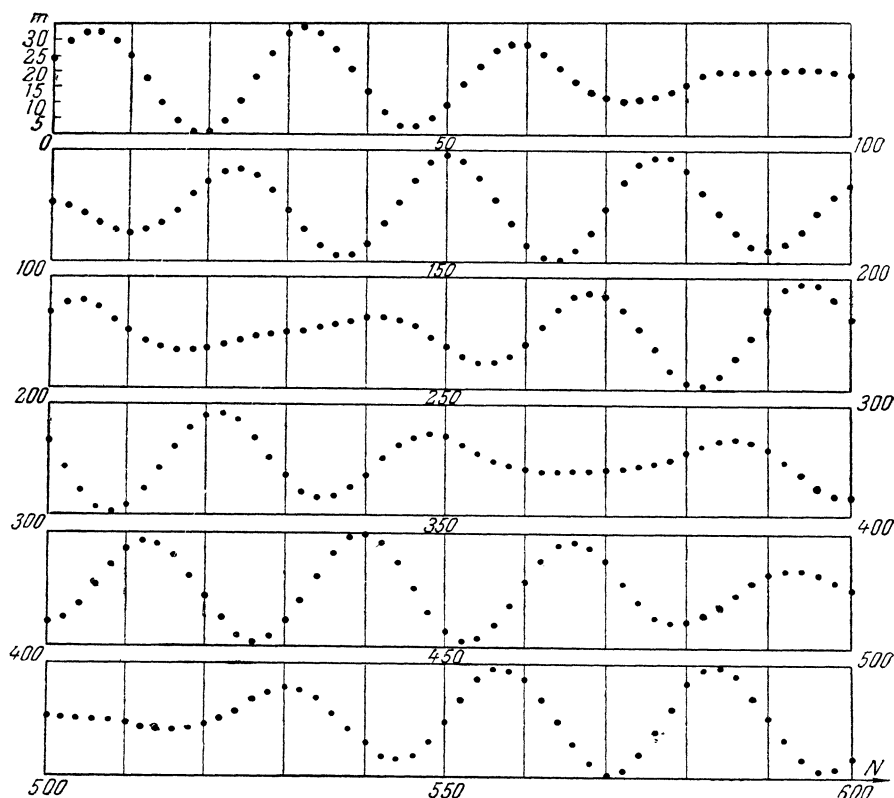


Рис. 82.

**§ 7. Определение периодов.** В ряде вопросов, как например при исследовании переменной яркости звезд, колебаний интенсивности приливов, многолетнего хода температуры и т. д., т. е. при исследовании явлений, имеющих периодический характер, который обуславливается наличием периодических составляющих в функции, описывающей эти явления, возникает необходимость отыскания периода этих составляющих.

Покажем, как производить отыскание периодов на примере.

В книге Уиттекера и Робинсона\*) дан пример изменения за шестьсот дней величины некоторой переменной звезды (величина — мера, характеризующая видимую яркость звезды; при изменении яркости в 2,5 раза величина звезды считается изменяющейся на единицу). Данные эти приведены в табл. 94 и на рис. 82.

\*) Уиттекер и Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, 1933, стр. 330.

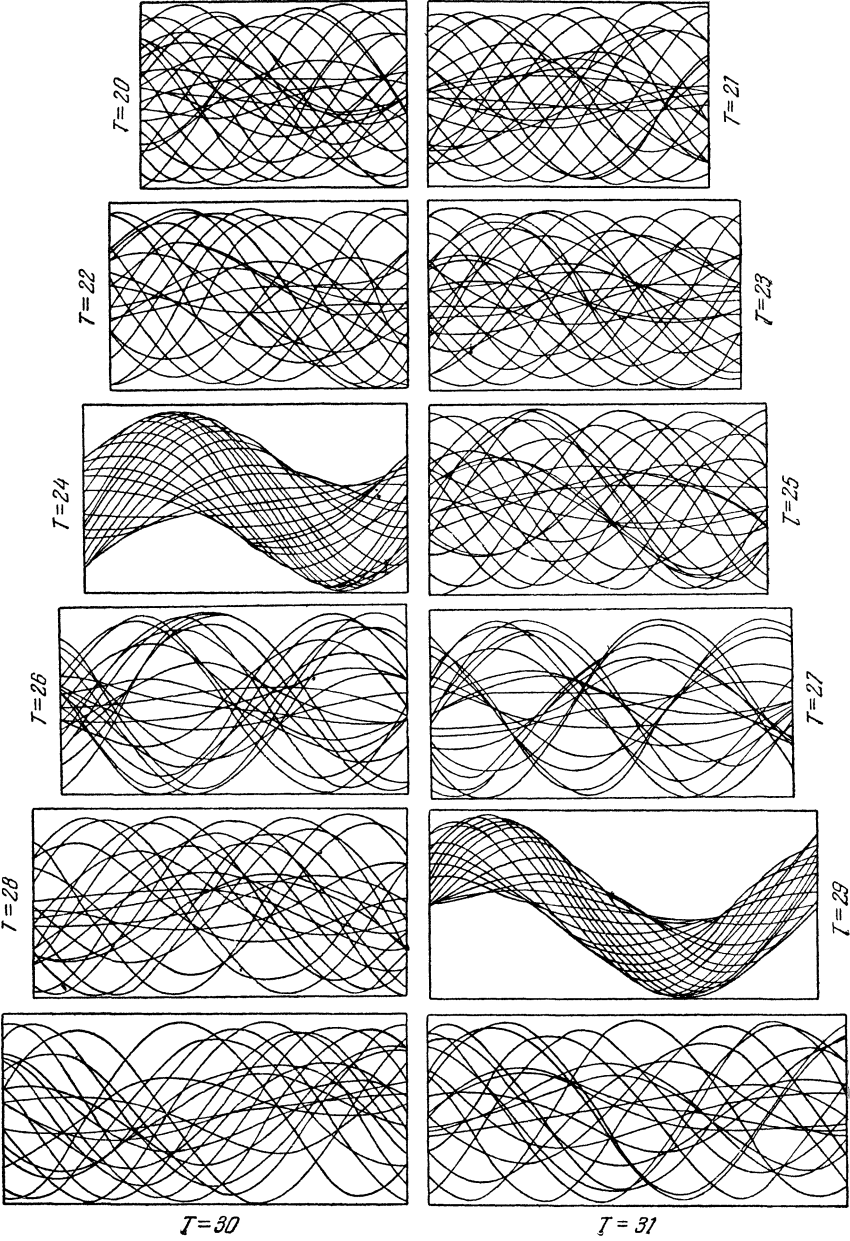


Рис. 83.

Кривая рис. 82 имеет вид, характерный для случая наложения двух колебаний, периоды которых находятся между 20 и 30 сутками. Чтобы точно определить эти периоды, поступим следующим образом.

Разобьем кривую на участки, соответствующие  $T$  суткам ( $T=20, 21, \dots, 24$ ) и затем совместим все эти участки на одном чертеже. (Практически этот процесс удобно осуществлять наложением кальки последовательно на каждый

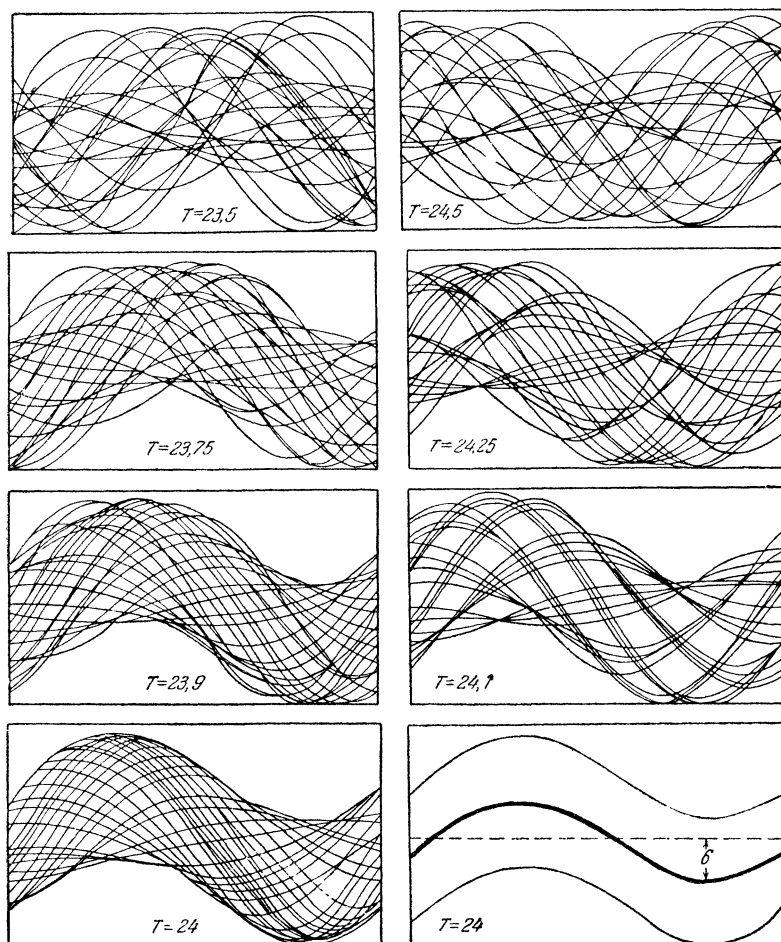


Рис. 84.

участок кривой). Картина, получаемая при этом для  $T=24$ , резко отличается от того, что получается при других значениях  $T$  — все кривые располагаются в ленте синусоидального очертания (см. рис. 83).

Если бы кривая рис. 82 была чисто периодической с периодом в 24 сутки, то все отрезки ее легли бы друг на друга, образовав одну синусоидальную линию. Поскольку кроме данного периода кривая отражает еще и иные зависимости, получается разброс отдельных участков кривой, создающий ленту.

Для дальнейших интервалов в 25, 26, 27, 28 суток периодичность вновь не обнаруживается, но при  $T=29$  суток мы опять получаем ленту,

еще более узкую, свидетельствующую о наличии периодической составляющей с периодом около 29 суток.

Для того чтобы уточнить величину периода обнаруженной периодической составляющей, например для  $T=24$  суток, построим чертежи для значений  $T$  больших 24 суток и меньших 24 суток, чтобы найти то значение периода, при котором лента будет наиболее узкой, т. е. будет отражать лишь разброс отрезков относительно чисто синусоидальной составляющей ординат, но не разброс отдельных отрезков самой выявляемой синусоиды (см. рис. 84).

Периодичность начинает проявляться при  $T=23,5$  и  $T=24,5$  суток, при  $T=23,75$  и  $T=24,25$  суток она становится более отчетливой и при  $T=23,9$  и  $T=24,1$  суток ширина ленты приближается к ее ширине для периода в 24 суток. Построив кривую изменения ширины ленты  $h$  (рис. 85), мы видим, что искомый период примерно равен 24 суткам.

Если бы продолжительность периода наблюдений была не шестьсот суток, а вдвое или втрое больше, то и точность определения величины  $T$  была бы соответственно большей.

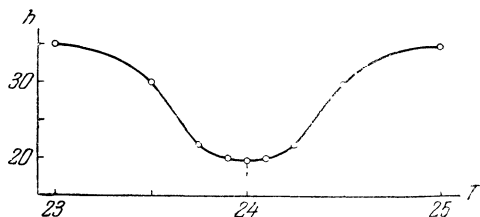


Рис. 85.

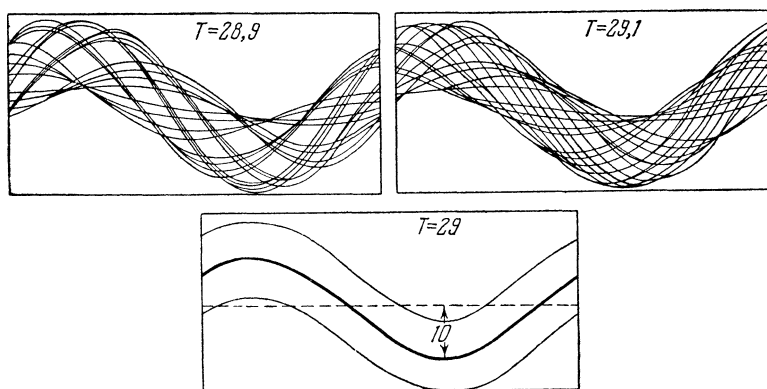


Рис. 86.

Для определения амплитуды периодической составляющей с периодом в 24 суток, выделяемой из кривой рис. 82, мы проведем на ленте две огибающие кривые и между ними посередине проведем линию, которая и даст искомую кривую. Линия проводится посередине, так как мы можем полагать разброс отдельных участков исследуемой кривой одинаковым как вверх, так и вниз. Полученная синусоидальная кривая с амплитудой в 6 единиц величины дана на рис. 84.

Проведя такое же уточнение для периода в 29 суток (рассматриваем  $T=28,9$  и  $T=29,1$  суток) и определив период второй составляющей в 29,0 суток, строим и для него огибающие и саму кривую, также являющуюся синусоидой с амплитудой в 10 единиц величины (см. рис. 86).

Проверим теперь правильность выделения периодических составляющих. Для этого нанесем на чертеж (рис. 87) обе полученные синусоиды, взяв их



осью линию средних значений ординат исследуемой кривой (т. е.  $m = 16,5$ ), и просуммируем ординаты синусоид — получим кривую, изображенную сплошной линией. Построив на этом же чертеже пунктиром линию истинных орди-

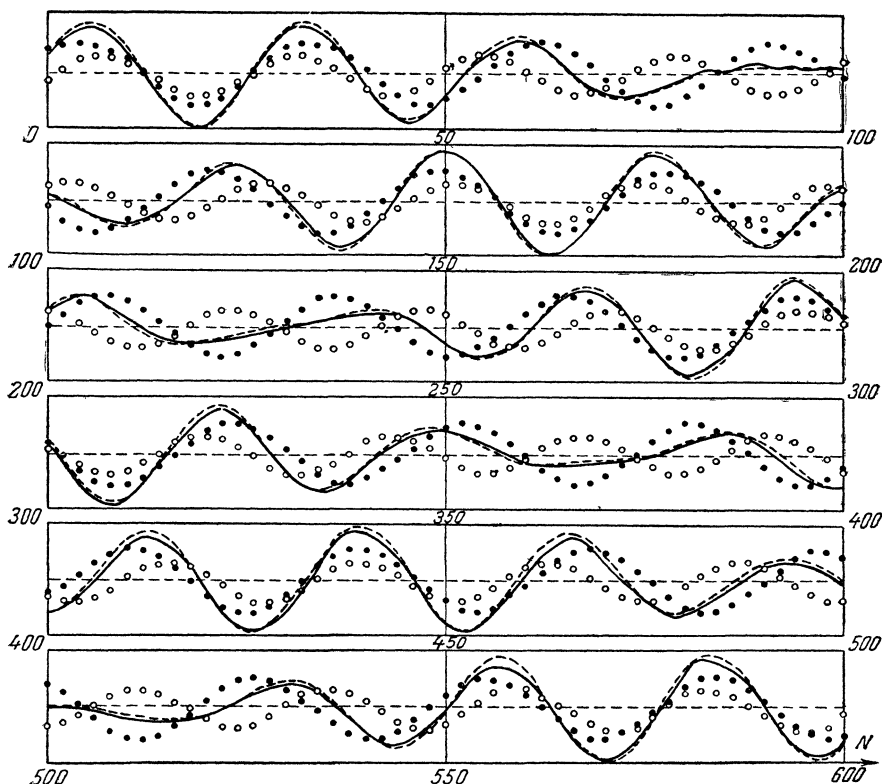


Рис. 87.

нат кривой яркости, мы убедимся в том, что полученная нами ранее суммарная кривая хорошо согласуется с ней, и, следовательно, кривая яркости может быть представлена уравнением

$$m = 16,5 + 6 \sin \frac{2\pi}{24} (t - 0,8) + 10 \sin \frac{2\pi}{29} (t + 2,9) \quad (43)$$

с погрешностью, в среднем не превышающей одну единицу величины звезды.

Дальнейшее выявление периодических составляющих ввиду малости погрешности можно не производить.

При желании проверить правильность полученных результатов еще и другим путем, можно способом, изложенным в § 6, вычислить амплитуды синусоиды и косинусоиды для периодов в 24 и 29 суток, взяв сумму ординат по всей протяженности кривой и затем разделив результат на число периодов, уместившихся в шестистах сутках.

## ГЛАВА X

### КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

**§ 1. Постановка задачи.** Во многих вопросах инженерного дела (исследование условий обтекания контура, распределение электрических, тепловых или фильтрационных токов и т. д.) приходится встречаться с необходимостью конформно отобразить область  $D$  внутри или вне окружности  $s$  единичного радиуса на область  $D'$  внутри или вне некоторого заданного замкнутого гладкого или кусочно-гладкого контура  $s'$ .

Нахождение преобразующей функции лишь в чрезвычайно редких случаях возможно осуществить аналитическими методами. Обычно контур области, на которую надлежит отобразить круг, задается графически, и потому применение методов конформного преобразования, требующих аналитического задания контура, становится либо практически невозможным, либо требует затраты дополнительного большого труда по составлению уравнения контура. Кроме того, если это уравнение сложно, то применение методов конформного преобразования становится часто настолько затруднительным, что задача может быть решена только приближенно.

Хотя приближенные методы не дают возможности получить результат с любой степенью точности и в этом уступают методам аналитическим, однако при графическом задании контура к очень высокой точности результатов и не стремятся, поскольку реальные возможности расчета лимитированы погрешностями графического построения задаваемого контура.

Рассмотрим способ приближенного конформного преобразования, разработанный автором еще в 1933 г. Способ этот дает удобное решение для тех случаев, когда преобразующей функцией может быть взят алгебраический многочлен с не слишком большим числом членов, что, в сущности, позволяет решать многие технические задачи с необходимой практически степенью точности.

Рассмотрим сперва преобразование внутренних областей, а затем полученные выводы распространим и на внешние области. Начнем с несимметричных контуров  $s'$ .

Пусть окружность  $s$  единичного радиуса аналитической функцией

$$\zeta = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k i) z^{1+k} \quad (1)$$

преобразовывается в кривую  $s'$  так, что область  $D$  внутри окружности конформно преобразуется в область  $D'$  внутри кривой  $s'$ . При этом точка  $O$  — начало координат области  $D$  — переходит в точку  $O'$  — начало координат области  $D'$ , а точка  $A$  пересечения окружности  $s$  с осью  $Ox$  переходит в точку  $A'$  пересечения кривой  $s'$  с осью  $O'x'$ .

Рассмотрим несколько свойств такого преобразования (см. рис. 88).

1. Точка  $P$  на окружности  $s$ , имеющая аргумент  $\varphi$ , перейдет в точку  $P'$ , координаты которой определяются комплексным числом  $\zeta$ :

$$\zeta = \sum_{k=0}^n \left\{ a_k \cos (1+k) \varphi - b_k \sin (1+k) \varphi + i [b_k \cos (1+k) \varphi + a_k \sin (1+k) \varphi] \right\}. \quad (2)$$

2. Если проведем луч  $O'B'$  под углом  $\varphi$  к оси  $O'x'$ , то получим отрезки  $P'B' = \eta$  и  $O'B' = \xi$ , являющиеся координатами точки  $P'$ . Это дает

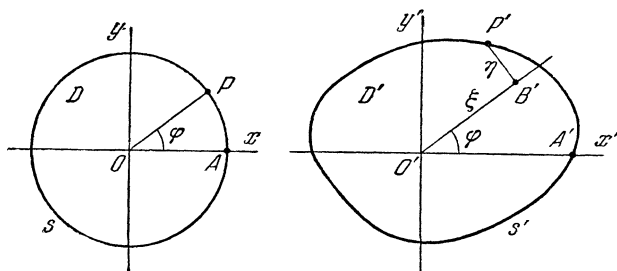


Рис. 88.

$$\xi + i\eta = \frac{\zeta}{z} = \sum_{k=0}^n [a_k \cos k\varphi - b_k \sin k\varphi + i(b_k \cos k\varphi + a_k \sin k\varphi)]. \quad (3)$$

На использовании функций  $\xi$  и  $\eta$  и будет построено все дальнейшее изложение.

3. Предположим, что в ряде

$$\zeta = x_0 z + x_1 z^2 + \dots + x_n z^{1+n}, \quad \text{где } x_k = a_k + b_k i, \quad (4)$$

для достижения желаемой точности достаточно взять лишь несколько членов, приняв

$$\zeta \approx x_0 z + x_1 z^2 + x_{\frac{m}{2}-1} z^{\frac{m}{2}} + x_{\frac{m}{2}} z^{\frac{m}{2}+1}. \quad (5)$$

Проведем (см. рис. 89) лучи I, II, III, ..., ( $m$ ), делящие полный угол на четное число  $m$  частей. Для значений  $\xi$  получим выражения:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left( a_k \cos \frac{2\pi}{m} k - b_k \sin \frac{2\pi}{m} k \right), \\ \xi_2 &= \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left( a_k \cos 2 \frac{2\pi}{m} k - b_k \sin 2 \frac{2\pi}{m} k \right), \\ &\dots \dots \dots \\ \xi_h &= \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left( a_k \cos h \frac{2\pi}{m} k - b_k \sin h \frac{2\pi}{m} k \right), \\ &\dots \dots \dots \\ \xi_m &= \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left( a_k \cos 2\pi k - b_k \sin 2\pi k \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогично для  $\eta$  получим

$$\eta_h = \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left( b_k \cosh h \frac{2\pi}{m} k + a_k \sinh h \frac{2\pi}{m} k \right), \quad (7)$$

причем из условия соответствия точек  $A$  и  $A'$  имеем  $\eta_m = 0$ .

Уравнения связи между  $\xi$ ,  $a$  и  $b$  мы можем преобразовать, приведя их к виду

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{m} \sum_{h=1}^m \xi_h \cosh h \frac{2\pi}{m} k, \\ b_k &= -\frac{2}{m} \sum_{h=1}^m \xi_h \sinh h \frac{2\pi}{m} k, \end{aligned} \quad \left( 1 \leq k \leq \frac{m}{2} - 1 \right) \quad (8)$$

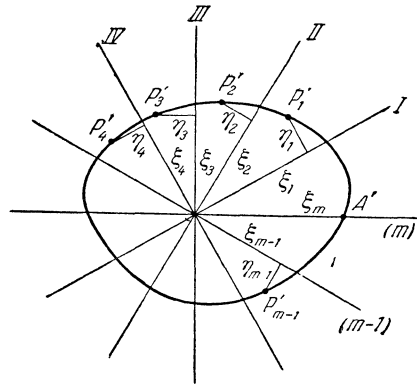


Рис. 89.

$$a_0 = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^m \xi_h, \quad a_{\frac{m}{2}} = \frac{1}{m} \sum_{h=1}^m (-1)^h \xi_h, \quad b_0 = -\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} b_k.$$

Не будем вдаваться в те соображения, на основании которых получены зависимости (8). Достаточно, если мы проверим правильность результатов. Для этого выразим все  $\xi$  через  $a$  и  $b$  в соответствии со строками (6); для некоторого  $a_r$ , где  $1 \leq r \leq \frac{m}{2} - 1$ , получим:

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{2}{m} \sum_{h=1}^m \left[ \cosh h \frac{2\pi}{m} r \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left( a_k \cosh h \frac{2\pi}{m} k - b_k \sinh h \frac{2\pi}{m} k \right) \right] = \\ &= \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left( a_k \sum_{h=1}^m \cosh h \frac{2\pi}{m} r \cosh h \frac{2\pi}{m} k - b_k \sum_{h=1}^m \cosh h \frac{2\pi}{m} r \sinh h \frac{2\pi}{m} k \right) = \\ &= \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left[ \frac{a_k}{4} \sum_{h=1}^m \left( e^{i \frac{2\pi}{m} h(k+r)} + e^{i \frac{2\pi}{m} h(k-r)} + e^{i \frac{2\pi}{m} h(-k+r)} + e^{i \frac{2\pi}{m} h(-k-r)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_k}{4i} \sum_{h=1}^m \left( e^{i \frac{2\pi}{m} h(k+r)} + e^{i \frac{2\pi}{m} h(k-r)} - e^{i \frac{2\pi}{m} h(-k+r)} - e^{i \frac{2\pi}{m} h(-k-r)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Это выражение можно несколько упростить, так как

$$\sum_{n=1}^m e^{cn} = e^c \frac{e^{cm} - 1}{e^c - 1}. \quad (10)$$

Проведя суммирование по  $h$ , получим:

$$\begin{aligned} a_r = \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \left[ a_k \left( e^{i \frac{2\pi}{m}(k+r)} \frac{e^{i2\pi(k+r)} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{m}(k+r)} - 1} + e^{i \frac{2\pi}{m}(k-r)} \frac{e^{i2\pi(k-r)} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{m}(k-r)} - 1} + \right. \right. \\ \left. + e^{i \frac{2\pi}{m}(-k+r)} \frac{e^{i2\pi(-k+r)} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{m}(-k+r)} - 1} + e^{i \frac{2\pi}{m}(-k-r)} \frac{e^{i2\pi(-k-r)} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{m}(-k-r)} - 1} \right) - \\ - \frac{b_k}{i} \left( e^{i \frac{2\pi}{m}(k+r)} \frac{e^{i2\pi(k+r)} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{m}(k+r)} - 1} + e^{i \frac{2\pi}{m}(k-r)} \frac{e^{i2\pi(k-r)} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{m}(k-r)} - 1} - \right. \\ \left. - e^{i \frac{2\pi}{m}(-k+r)} \frac{e^{i2\pi(-k+r)} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{m}(-k+r)} - 1} - e^{i \frac{2\pi}{m}(-k-r)} \frac{e^{i2\pi(-k-r)} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{m}(-k-r)} - 1} \right) \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

Если  $k \neq r$ , то знаменатели членов, стоящих в круглых скобках, в нуль не обращаются, числители же

$$e^{i2\pi(\mp k \mp r)} - 1$$

равны нулю. Если  $k = r$ , то два средних члена каждой из двух сумм становятся неопределенными; однако, если рассмотрим непосредственно суммирование, произведенное при переходе от (9) к (10), то увидим, что каждый из этих членов равен  $m$ , причем при  $b_r$  они взаимно уничтожаются, а при  $a_r$  суммируются, давая множитель  $2m$ , приводящий к тождеству.

Аналогичным путем убедимся в правильности выражений (8) для  $b_k$ ,  $a_0$  и  $a_{\frac{m}{2}}$ .

Из условия  $\eta_m = 0$ , т. е.

$$b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{\frac{m}{2}} = 0,$$

получаем

$$b_0 = - \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} b_k - b_{\frac{m}{2}},$$

что же касается  $b_{\frac{m}{2}}$ , то через значения  $\xi$  его выразить нельзя, так как он входит во все выражения для  $\xi$  со множителем 0. Будем полагать  $b_{\frac{m}{2}} \approx 0$ .

Тогда

$$b_0 = - \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} b_k. \quad (12)$$

Ограничимся полученными  $m+1$  уравнениями для  $a_k$  при  $0 \leq k \leq \frac{m}{2}$  и для  $b_k$  при  $0 \leq k \leq \frac{m}{2} - 1$ .

Из рассмотренного видно, что если бы мы знали значения  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  на лучах I, II, ..., (m), то простым вычислением могли бы получить параметры  $a_k$  и  $b_k$  преобразующей функции. То же самое было бы, если бы мы знали положение на кривой  $s'$  точек  $P'_1, P'_2, \dots, P'_m$ , так как, опустив из точки  $P'_h$  перпендикуляр на луч ( $h$ ), мы получили бы значение  $\xi_h$ . Но вся трудность задачи в том и заключается, что мы не знаем значений  $\xi_h$  и должны каким-то путем к ним подойти. Поступим следующим образом: найдя некоторым графическим приемом (сущность которого мы сейчас рассмотрим) положение точек  $P'_1, P'_2, \dots$  в первом приближении, вычислим, опустив перпендикуляры на лучи I, II, ..., (m), значения  $\xi$  также в первом приближении. По этим  $\xi$  получим все  $a$  и  $b$ , по  $a$  и  $b$  вычислим  $\eta$  и затем также особым приемом получим новые значения  $\xi$ , но уже несколько более точные. Повторяя цикл этих операций несколько раз, мы получим, наконец, достаточно точное решение.

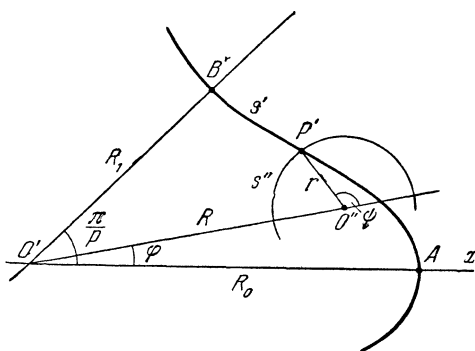


Рис. 90.

**§ 2. Первое приближение.** Графический прием, дающий положение точек  $P'$  в первом приближении, основан на учете свойств ряда

$$\zeta = A(z + Bz^{1+p} + BCz^{1+2p} + \dots + BC^{n-1}z^{1+np} + \dots), \quad (13)$$

где  $A, B, C$  — вещественные, а  $p$  — целое, при этом  $|C| < 1$ . В этом ряде все члены, начиная со второго, образуют геометрическую прогрессию; просуммировав их, получим

$$\zeta = Az \frac{1 + (B - C)z^p}{1 + (-C)z^p}. \quad (14)$$

Для упрощения записи обозначим

$$A = a, \quad B - C = b, \quad -C = c;$$

тогда

$$\zeta = az \frac{1 + bz^p}{1 + cz^p}. \quad (15)$$

Взятая нами функция дает преобразование окружности в кривую  $s'$  с  $p$  осями симметрии; при этом наличие трех параметров  $a, b$  и  $c$  делает этот класс кривых довольно обширным.

Функция  $\zeta$  имеет ту особенность, что для любой точки  $P$  окружности  $s$  ее отображение  $P'$  на кривой  $s'$  можно найти простым графическим построением, показанным на рис. 90.

Возьмем на кривой  $s'$  (относительно которой мы знаем, что конформное преобразование области при окружности  $s$  в область при кривой  $s'$  достигается функцией рассматриваемого нами вида) участок между двумя осями симметрии, расположив его так, чтобы одна из осей совпадала с осью  $O'x'$ , а другая лежала в области положительных значений угла. Допустим также, что расстояние от  $O'$  до кривой по оси  $O'x'$  больше, чем по второй оси симметрии. Пусть эти расстояния будут равны:

$$O'A' = R_0, \quad O'B' = R_1.$$

Возьмем на окружности  $s$  точку  $P$  с аргументом  $\varphi$ . Для отыскания ее отображения на  $s'$  — точки  $P'$  — сделаем следующее построение.

Проведем из  $O'$  луч под углом  $\varphi$  к оси  $O'x'$ , отложим на нем отрезок

$$O'O'' = R = \frac{R_0 + R_1}{2}$$

и из точки  $O''$ , как из центра, некоторым радиусом  $r$  опишем окружность  $s''$ .

Радиус  $r$  может быть взят таким, чтобы окружность  $s''$  пересекала кривую  $s'$  в точке  $P'$ . Для нахождения такого значения  $r$  обратимся к зависимости

$$\frac{\zeta}{r} = \xi + i\eta. \quad (16)$$

С одной стороны,

$$\frac{\zeta}{z} = a \frac{1 + bz^p}{1 + cz^p} = a \frac{1 + b \cos p\varphi + ib \sin p\varphi}{1 + c \cos p\varphi + ic \sin p\varphi}. \quad (17)$$

Обозначив для краткости  $p\varphi = \theta$  и освободившись от мнимости в знаменателе, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{z} &= a \frac{(1 + b \cos \theta + ib \sin \theta)(1 + c \cos \theta - i \sin \theta)}{(1 + c \cos \theta)^2 + c^2 \sin^2 \theta} = \\ &= a \frac{1 + b \cos \theta + c \cos \theta + bc}{1 + 2c \cos \theta + c^2} + ia \frac{b \sin \theta - c \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

С другой стороны (см. рис. 90),

$$\frac{\zeta}{z} = \xi + i\eta = R + r \cos \psi + ir \sin \psi. \quad (19)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \xi &= R + r \cos \psi = a \frac{1 + b \cos \theta + c \cos \theta + bc}{1 + 2c \cos \theta + c^2}, \\ \eta &= r \sin \psi = a \frac{b \sin \theta - c \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Выразим  $R$  через  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Имеем:

$$R_0 = a \frac{1+b}{1+c}, \quad R_1 = a \frac{1-b}{1-c};$$

отсюда

$$R = \frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{(1+b)(1-c) + (1-b)(1+c)}{1-c^2} = a \frac{1-bc}{1-c^2} \quad (21)$$

и

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{(1+b)(1-c) - (1-b)(1+c)}{1-c^2} = a \frac{b-c}{1-c^2} \quad (22)$$

(равенство (22) будет использовано нами в дальнейшем).

Подставляя (21) в (20), получаем:

$$\begin{aligned} \xi &= a \frac{1-bc}{1-c^2} + r \cos \psi = a \frac{1 + b \cos \theta + c \cos \theta + bc}{1 + 2c \cos \theta + c^2}, \\ \eta &= r \sin \psi = a \frac{b \sin \theta - c \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Обозначим для краткости  $\frac{r}{a} = r_1$ ; тогда

$$\begin{aligned} r_1 \cos \psi &= \frac{1 + b \cos \theta + c \cos \theta + bc}{1 + 2c \cos \theta + c^2} - \frac{1 - bc}{1 - c^2} = \\ &= \frac{(1 + b \cos \theta + c \cos \theta + bc)(1 - c^2) - (1 - bc)(1 + 2c \cos \theta + c^2)}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)} = \\ &= \frac{b \cos \theta - c \cos \theta + 2bc - 2c^2 + bc^2 \cos \theta - c^3 \cos \theta}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)} = \frac{(b - c)(\cos \theta + 2c + c^2 \cos \theta)}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$r_1 \sin \psi = \frac{(b - c) \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2} = \frac{(b - c)(1 - c^2) \sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)};$$

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (r_1 \cos \psi)^2 + (r_1 \sin \psi)^2 = \\ &= \left[ \frac{b - c}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)} \right]^2 [(\cos \theta + 2c + c^2 \cos \theta)^2 + (1 - c^2)^2 (1 - \cos^2 \theta)] = \\ &= \left[ \frac{b - c}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)} \right]^2 (c^4 + 4c^3 \cos \theta + 2c^2 + 4c^2 \cos^2 \theta + 4c \cos \theta + 1) = \\ &= \left( \frac{b - c}{1 - c^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Отсюда

$$r = ar_1 = \pm a \frac{b - c}{1 - c^2} = \pm \frac{R_0 - R_1}{2} \quad (26)$$

[см. равенство (10)].

Итак, мы пришли к следующему выводу: окружность  $s''$  нужно описывать радиусом, равным полуразности расстояний  $R_0$  и  $R_1$  от начала координат до кривой на смежных осях симметрии кривой  $s'$ .

**§ 3. Свойства первого приближения.** Рассмотрим некоторые особенности сделанного нами преобразования. Имеем:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{(b - c) \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2} = \frac{(b - c) \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2} = \pm \frac{(1 - c^2) \sin \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2}, \\ &\quad \pm \frac{b - c}{1 - c^2}, \quad (27) \\ \cos \psi &= \frac{(b - c)(\cos \theta + 2c + c^2 \cos \theta)}{(1 + 2c \cos \theta + c^2)(1 - c^2)} = \pm \frac{\cos \theta + 2c + c^2 \cos \theta}{1 + 2c \cos \theta + c^2}. \end{aligned}$$

$$\text{При } \varphi = \varphi_m = \frac{\pi}{2p}$$

$$\theta = \theta_m = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \theta_m = 0, \quad \sin \theta_m = 1,$$

отсюда

$$\sin \psi_m = \pm \frac{1 - c^2}{1 + c^2}, \quad \cos \psi_m = \pm \frac{2c}{1 + c^2}. \quad (28)$$

Для выбора знака возьмем  $\theta = 0$ , тогда  $\cos \psi = \pm 1$ . Из рис. 90 видно, что  $\cos \psi = +1$ , так как мы расположили на оси  $O'x'$  наиболее удаленную от  $O'$  точку кривой  $s'$ ; если бы мы поступили наоборот, то необходимо было бы взять знак минус.

Итак, имеем

$$\sin \psi_m = \frac{1 - c^2}{1 + c^2}, \quad \cos \psi_m = \frac{2c}{1 + c^2}. \quad (29)$$



Так как  $|c| < 1$ , то  $\sin \psi_m$  всегда будет положителен; это указывает, что из двух точек пересечения кривой  $s'$  с окружностью  $s''$  нужно брать ту, которая ближе к началу координат (или, что то же самое, ту, которая направлена в сторону уменьшения расстояния от кривой  $s'$  до начала координат).

Решая уравнения (29) относительно  $c$ , получим

$$c = \frac{1 - \sin \psi_m}{\cos \psi_m}. \quad (30)$$

Далее, имеем

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{1-b}{1+b} \cdot \frac{1+c}{1-c}, \quad (31)$$

откуда

$$b = \frac{\frac{1+c}{1-c} - \frac{R_1}{R_0}}{\frac{1+c}{1-c} + \frac{R_1}{R_0}} \quad (32)$$

и, наконец,

$$a = R_0 \frac{1+c}{1+b}. \quad (33)$$

Итак, по значениям  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $\sin \psi_m$  и  $\cos \psi_m$  мы можем определять параметры кривой  $s'$ .

**§ 4. Использование первого приближения в случае точного решения.** Для примера возьмем кривую  $s'$ , приведенную на рис. 91. Имеем две оси

симметрии, т. е.  $p=2$ ,  $\varphi_m = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ . Проводим окружности радиусами  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R$  и  $r$ ; с кривой снимаем

$$\sin \psi_m \approx 0,82, \quad \cos \psi_m \approx -0,57,$$

после чего находим

$$c \approx \frac{1-0,82}{-0,57} \approx -0,32.$$

Имея  $R_0 = 70$  и  $R_1 = 50$ , получаем:

$$\frac{R_1}{R_0} = 0,714, \quad \frac{1+c}{1-c} = 0,516,$$

$$b = \frac{0,516 - 0,714}{0,516 + 0,714} = -0,161, \quad a = 70 \cdot \frac{1-0,320}{1-0,161} = 56,6.$$

Итак, получаем преобразующую функцию

$$\zeta = 56,6z \frac{1-0,161z^2}{1-0,320z^2}.$$

Проверим наш вывод для значения  $\varphi = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ . Из уравнения имеем

$$\zeta = 56,6 (0,866 + 0,5i) \frac{1-0,161 (0,500 + 0,866i)}{1-0,320 (0,500 + 0,866i)} = 46,0 + 38,0i.$$

Ту же точку дает нам и построение.

Этим же самым построением можно получить и отображения точек, лежащих внутри области.

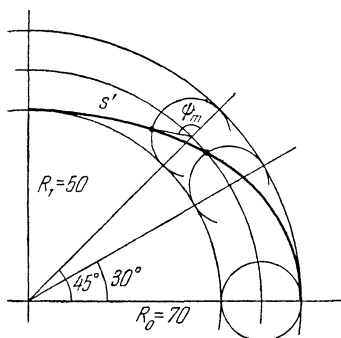


Рис. 91.

При данной преобразующей функции, для окружности радиуса не единица, а  $\rho$  ( $\rho < 1$ ), получим

$$\zeta = a\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \frac{1 + b\rho^p (\cos p\varphi + i \sin p\varphi)}{1 + c\rho^p (\cos p\varphi + i \sin p\varphi)}, \quad (34)$$

и все правила нашего построения останутся в силе, но только будем иметь

$$R_\rho = a\rho \frac{1 - \rho^{2p}bc}{1 - \rho^{2p}c^2}, \quad r_\rho = a\rho^{1+p} \frac{b - c}{1 - \rho^{2p}c^2}, \quad (35)$$

$$\sin \psi_{m,\rho} = \frac{1 - \rho^{2p}c^2}{1 + \rho^{2p}c^2}, \quad \cos \psi_{m,\rho} = \frac{2\rho^p c}{1 + \rho^{2p}c^2},$$

причем по-прежнему

$$R_{0,\rho} = R_\rho + r_\rho; \quad R_{1,\rho} = R_\rho - r_\rho. \quad (36)$$

Каждую кривую  $s'_\rho$ , в которую переходит окружность радиуса  $\rho$ , строим по значениям  $R_{0,\rho}$ ,  $R_{1,\rho}$ ,  $\psi_{m,\rho}$ ; при этом построение облегчается тем, что кривая перпендикулярна к осям симметрии. Для разных значений  $\rho$  и  $\varphi$  получаем поле точек; через них и проводим кривые, в которые преобразовались радиусы и окружности.

Для кривой рис. 91 возьмем значения

$$\rho = 0,75; 0,50; 0,25;$$

$$\varphi = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ.$$

Имея

$$a = 56,6, \quad b = -0,161, \quad c = -0,320, \quad p = 2,$$

получим

$$R_\rho = 56,6\rho \frac{1 - 0,051\rho^4}{1 - 0,102\rho^4},$$

$$r_\rho = 56,6\rho^3 \frac{0,159}{1 - 0,102\rho^4} = \frac{9,0\rho^3}{1 - 0,102\rho^4},$$

$$\sin \psi_{m,\rho} = \frac{1 - 0,102\rho^4}{1 + 0,102\rho^4}, \quad \cos \psi_{m,\rho} = \frac{-0,640\rho^2}{1 + 0,102\rho^4}.$$

Составим таблицу:

$\rho$	$R_\rho$	$r_\rho$	$\cos \psi_{m,\rho}$	$\psi_{m,\rho}$
0,75	43,2	3,9	— 0,35	110,5°
0,50	28,5	1,1	— 0,16	99,2°
0,25	14,2	0,2	— 0,04	92°.

Производим построение (см. рис. 92а). Соединяя найденные точки, получаем рис. 92б. Сравнивая очертание линий у областей  $D$  и  $D'$ , мы видим, что уже для  $\rho = 0,5$  влияние  $r$  весьма мало, а для  $\rho = 0,25$  оно совсем неощутимо.

**§ 5. Общий случай.** Мы рассмотрели применение графического преобразования в случае, когда оно давало точное решение. Теперь применим это построение для того, чтобы получить в общем случае первое приближение расположения точек  $P'$ .

Возьмем для примера кривую  $s'$ , изображенную на рис. 93. Разделим ее на участки так, чтобы концы участков находились в точках, соответствующих ближайшим максимуму и минимуму расстояния от начала координат. Предположим, что каждый участок не зависит от остальных и что к нему можно применить только что рассмотренное графическое построение. Тогда для каждого из таких участков можно построить окружности радиусов  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R$ ,  $r$  и получить расположение точек  $P'$ . Так, мы можем рассмотреть участки кривой  $s'$  между окружностями 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 1.

Опустив из полученных точек перпендикуляры на лучи I, II, ..., ( $m$ ) (в нашем примере  $m=12$ ), которые мы будем называть опорными лучами, получим  $m$  значений  $\xi$ . Так как в действительности все участки кривой  $s'$

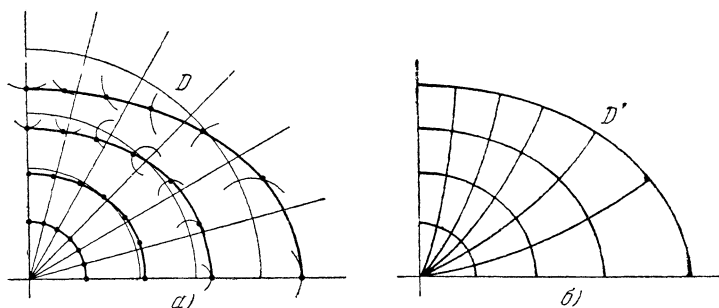


Рис. 92.

связаны между собою, то полученные значения  $\xi$  будут не вполне точными, а дадут лишь первое приближение, которое мы будем уточнять.

По формулам для  $a_k$  и  $b_k$  вычислим эти параметры по имеющимся  $\xi_k$ ; по  $a_k$  и  $b_k$  вычислим все  $\eta_h$ . Они не совпадут с имеющимися  $\eta$ , которые

были получены с помощью окружностей для первого приближения, так что если отложить новые значения  $\eta$  от концов отрезков  $\xi$ , то концы их будут расположены не на кривой  $s'$ , а вне ее, определяя собою некоторые точки  $Q$ .

Точки  $Q$  надо снести на кривую  $s'$ . Это можно сделать тремя способами, показанными на рис. 94.

1. Перенести точку  $Q$  на кривую  $s'$  параллельно опорному лучу, т. е. не изменяя значения  $\eta$  (рис. 94а).

2. Перенести ее лучом, направленным к началу координат (рис. 94б).

3. Перенести ее лучом, нормальным к кривой  $s'$  (рис. 94в).

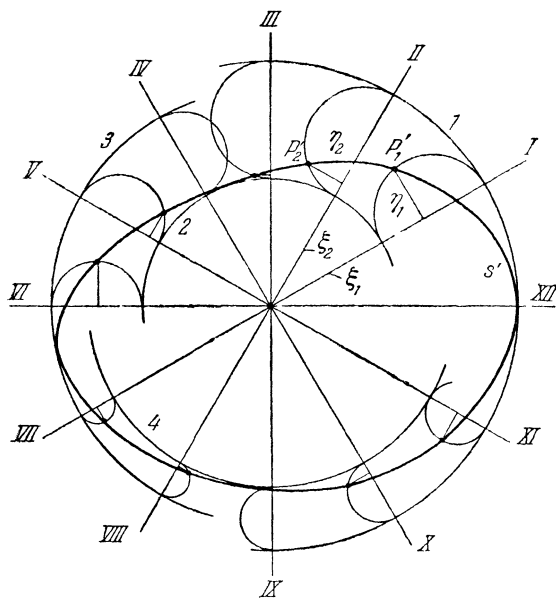


Рис. 93.

Во всех трех случаях из полученной на кривой  $s'$  точки на опорный луч опускается перпендикуляр, определяющий новое значение  $\xi$ .

Первый способ, когда мы от одних значений  $\eta$  переходим к другим, соответствует методу итерации. Второй способ основан на том, что при всех  $\xi$ , равных нулю, все  $\eta$  также равны нулю; следовательно, если при одном сочетании ошибок в значениях  $\xi$  мы получаем точку  $Q$ , а при другом сочетании точку  $O'$  (начало координат), то более точное положение точки  $P'$  будет в точке пересечения кривой  $s'$  с какой-то кривой, проходящей через

точки  $O'$  и  $Q$ . По способу ложного положения в таких случаях проводится прямая, что мы и делаем.

Перенос точки, примененный в третьем способе, дает правильное решение в том случае, когда и кривая  $s'$  и геометрическое место точек  $Q$  — концентрические окружности; в других случаях он тоже не вполне точен.

Трудно заранее сказать, какой из трех способов эффективнее в смысле получения большей скорости сближения последовательных результатов. Наиболее прост, конечно, первый, в особенности, если применить прозрачную палетку (рис. 95), которую движут по опорному лучу до пересечения шкалы  $\eta$  с кривой  $s'$  у соответствующего значения  $\eta$ . При этом не требуется проводить линий  $\eta$ , а достаточно прочесть на палетке отсчет  $\xi$ . На рис. 95 показано, как по значению  $\eta = 28$  определяется значение  $\xi = 69$ . Такой прием сильно упрощает расчет, поэтому мы и будем пользоваться только им.

Итак, расчет после получения первого приближения графическим путем будет заключаться в последовательных циклах вычисления значений  $\xi$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\eta$ ; от  $\eta$  с помощью палетки переходим к новым значениям  $\xi$  и т. д.

**§ 6. Отображение внутренних областей.** Совершенно очевидно, что без тщательной систематизации вычислительных операций провести расчет последовательных приближений значений  $\xi$  и  $\eta$  весьма трудно; он будет длительным и, кроме того, нельзя будет ручаться за достоверность полученных результатов.

Рассмотрим пример систематизированного расчета для кривой  $s'$ , данной на рис. 96, для случая  $m = 12$ .

Сперва графическим построением, приведенным на этом же рисунке, получаем первые приближения значений  $\xi$  и помещаем их в журнал вычислений, данный в табл. 95. Дальнейшее вычисление проводится с помощью шаблонов, напоминающих шаблоны, применяемые при гармоническом анализе. Имеются три типа шаблонов: для вычисления параметров  $a$ , параметров  $b$  и величин  $\eta$  (рис. 97 и 98).

Для получения параметров  $a$  и  $b$  используется часть I журнала, в которой приведены значения  $\xi$ ,  $1,732\xi$  (т. е.  $\sqrt{3}\xi$ ) и  $2\xi$  (при вычислениях достаточна точность в 0,5, соответствующая средней точности графических построений в 0,5 мм). Множители  $\sqrt{3}$  и 2 соответствуют удвоенным значениям синусов и косинусов углов, встречающихся при вычислении (эти углы кратны тридцати градусам).

На заполненную часть I журнала накладывают шаблон для  $a_0$  (для ориентировки служит черный прямоугольник), суммируют все числа, стоящие в прорези, и записывают полученную сумму  $\Sigma$ ; затем делят эту сумму на 12;

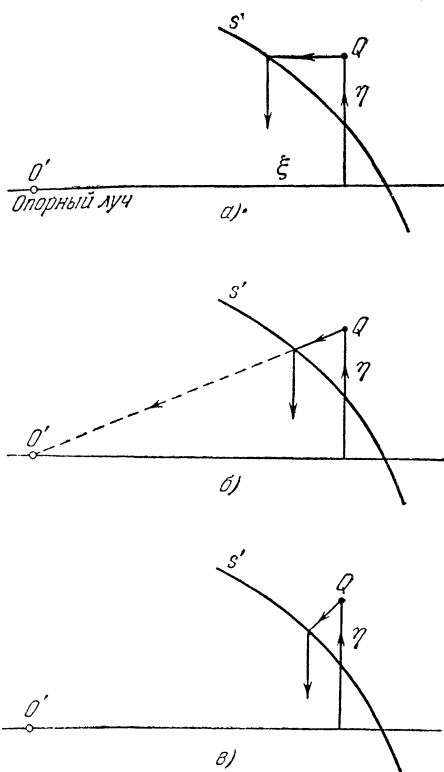


Рис. 94.

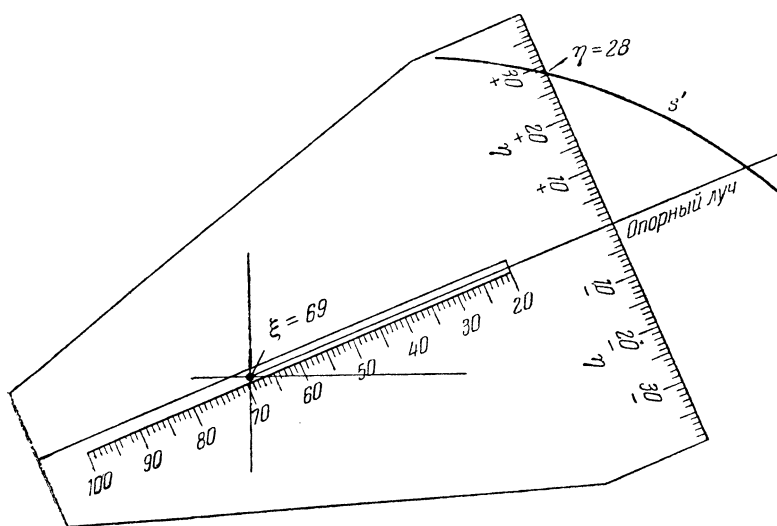


Рис. 95.

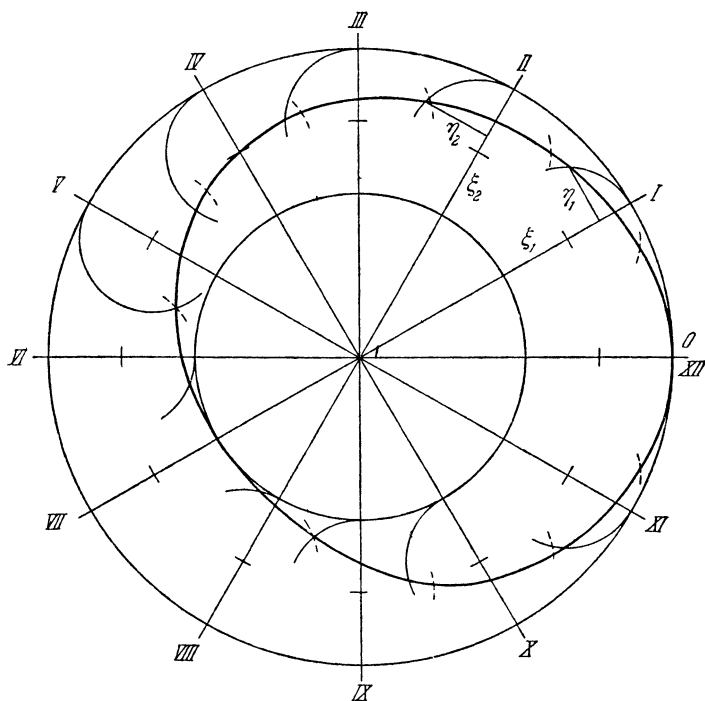


Рис. 96\*).

\*у Рис. 96 уменьшен в 3 раза по сравнению с расчетным оригиналом.

что дает  $a_0$ , так как [см. (8)]

$$a_0 = \frac{1}{12} \sum_{h=1}^{12} \xi_h.$$

Далее накладывают шаблон для  $a_1$ , находят сумму  $\sum_+$  чисел, стоящих в окошках без черных рамок и сумму  $\sum_-$  чисел в окошках с черными рам-

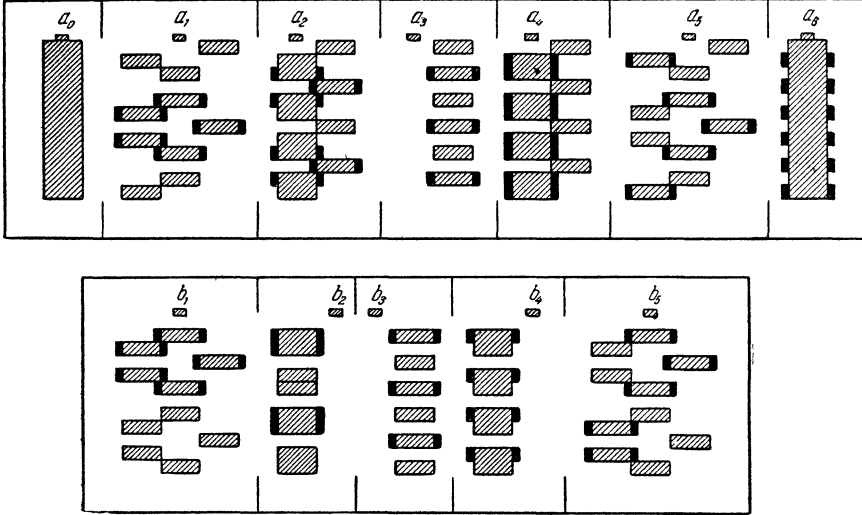


Рис. 97.

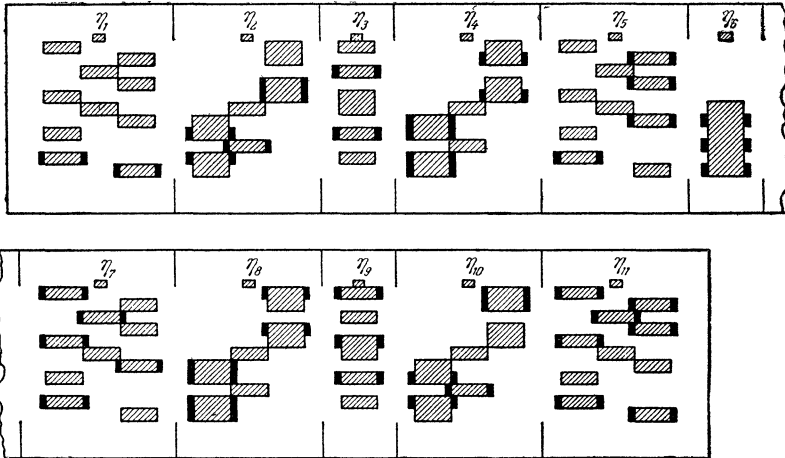


Рис. 98.

ками, находят разность  $D$  этих сумм и делят ее на 12. В результате получают  $a_1$ . Действительно,

$$a_1 = \frac{2}{12} \sum_{h=1}^{12} \xi_h \cos(30^\circ h)$$

Таблица 95

1-е приближение			2-е приближение			3-е приближение			4-е приближение		
$\xi_k$	1	2	1,732	1	2	1,732	1	2	1,732	1	2
I	$k=0, 12$										
	1	115,5	—	—	231	—	115,5	231	—	115,5	231
	2	101,5	176	181	209	181	104,5	209	181	104,5	209
	3	94,5	164	169	189	168	97	194	168	97	194
	4	88	—	—	176	—	88	176	—	88	176
	5	78	135	136	156	136	78,5	157	132,5	76,5	153
	6	68,5	118,5	117	137	117	67,5	135	116	67	134
	7	63	—	—	126	—	62	124	—	62,5	125
	8	61,5	106,5	106,5	123	106,5	61,5	123	106,5	61,5	123
	9	62	107,5	108	124	108	62,5	125	108	62,5	125
	10	68	—	—	136	—	68	136	—	67,5	135
	11	80,5	139,5	143	161	143	82,5	165	141	81,5	163
	101,5	176	176	203	178	103	206	176,5	102	204	
II	$\Sigma$	$a_0$	982,5	81,9	991	82,6	986,5	287,5	82,2	986	280,5
	$\Sigma^+$	$a_1$	758	22,2	768	23,3	770	482,5	24,0	767	486,5
	$\Sigma^-$	$a_2$	690	5,2	690	4,5	689,5	630,5	4,9	691	628,5
	$\Sigma$	$a_3$	511	2,9	513	2,4	508	484	2,0	509	482
	$\Sigma^+$	$a_4$	669	1,7	670	1,2	667	653	1,4	667	652,5
	$\Sigma^-$	$a_5$	631	1,1	634,5	1,0	631	621,5	0,8	632	621,5
	$\Sigma$	$a_6$	493,5	0,4	498,5	0,5	496	490,5	0,5	495,5	490,5
	$\Sigma^+$										
	$\Sigma^-$										
	$\Sigma$										
	$\Sigma^+$										
	$\Sigma^-$										
III	$b_1$	545	—8,3	550	—8,8	552	645,5	—93,5	547,5	648	—8,4
	$b_2$	569	15	572	0,6	566,5	563,5	3	566	563,5	0,2
	$b_3$	502	26	505	2,1	505	476	29	503	478	2,1
	$b_4$	566	9	570	0,3	567,5	562,5	5	568,5	561	0,6
	$b_5$	597	4	604	0,2	600	597,5	2,5	599	596,5	0,2
	$b_6$										
	$\Sigma$										
	$\Sigma^+$										
	$\Sigma^-$										
	$\Sigma$										
	$\Sigma^+$										
	$\Sigma^-$										

	$a_k$	$b_k$	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866
III	$k=1$			■			■			■	
	2		11,1	22,2	19,2	11,6	23,3	20,2	12,0	24,0	20,8
	3		—	5,2	4,5	—	4,5	3,9	—	4,9	4,2
	4		—	2,9	—	—	2,4	—	—	2,0	—
	5		—	1,7	1,5	—	1,2	1,1	—	1,2	1,0
			0,5	1,1	1,0	0,5	1,0	0,9	0,4	0,8	0,7
			—	3,8	—	—	5,6	—	—	4,6	—
			—	8,3	—	—	8,8	—	—	7,8	—
		$k=0$	—	1,2	—	—	0,3	0,6	—	0,1	—
		1	0,6	2,2	—	—	—	2,1	—	2,4	—
IV			—	0,8	—	0,1	0,3	—	0,2	0,4	—
			0,4	0,3	0,3	0,1	0,2	—	0,1	0,2	0,2
			0,1	0,3	0,3	0,1	0,2	0,2	0,1	0,2	0,2
IV	$\Sigma^+$										
	$\Sigma^-$										
		$\eta_1$	17,7	0,7	17,0	17,8	0,3	17,5	17,5	0,4	17,1
		$\eta_2$	23,8	5,4	18,4	25,4	4,5	20,9	25,9	4,3	21,6
		$\eta_3$	27,9	4,1	23,8	30,2	3,0	27,2	29,8	2,2	27,6
		$\eta_4$	26,7	2,5	24,2	29,0	0,9	28,1	28,8	1,4	27,4
		$\eta_5$	19,2	—	20,0	20,6	—	23,1	19,3	—	20,7
		$\eta_6$	5,8	—	11,6	6,5	—	13,0	5,2	—	10,4
		$\eta_7$	10,7	7,7	3,0	11,1	7,0	4,1	10,1	—	3,3
		$\eta_8$	11,5	17,7	—	12,5	17,4	—	11,9	18,3	—
		$\eta_9$	7,5	24,5	—	8,3	24,9	—	7,0	25,0	—
	$\eta_{10}$	2,6	26,6	—	3,3	26,6	—	2,6	27,6	—	
	$\eta_{11}$	—	21,2	—	—	19,8	—	—	20,0	—	



[см. (8)]; умножение на удвоенный косинус произведено при заполнении части I журнала, отбор чисел, подлежащих суммированию, осуществляется с помощью шаблона, а деление на 12 дает  $a_1$ .

Аналогично вычисляют остальные коэффициенты  $a$  и  $b$  (см. часть II журнала), затем вписывают их в определенном порядке в часть III журнала и умножают на 0,5 и на 0,866, т. е. на синусы и косинусы нужных углов.

Накладывая шаблоны для  $\eta$ , получают суммы  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$ ; их разность  $D$  дает  $\eta$  (см. часть IV журнала). Получив все  $\eta$ , определяют графически новые значения  $\xi$  и т. д.

В табл. 95 даны результаты, полученные после четырех приближений — одного графического и трех уточняющих. Судить о том, насколько быстро они приближаются к окончательным результатам, можно по сумме абсолютных значений разностей  $\Delta$  между параметрами двух смежных приближений. Для рассматриваемого примера эти разности даны в табл. 96.

Таблица 96

	1-е приближение	$ \Delta $	2-е приближение	$ \Delta $	3-е приближение	$ \Delta $	4-е приближение
$a_0$	81,9	0,7	82,6	0,4	82,2	0	82,2
$a_1$	22,2	1,1	23,3	0,7	24,0	0,6	23,4
$a_2$	5,2	0,7	4,5	0,4	4,9	0,3	5,2
$a_3$	2,9	0,5	2,4	0,4	2,0	0,2	2,2
$a_4$	1,7	0,5	1,2	0	1,2	0	1,2
$a_5$	1,1	0,1	1,0	0,2	0,8	0,1	0,9
$a_6$	0,4	0,1	0,5	0	0,5	0,1	0,4
$b_0$	3,8	1,8	5,6	1,0	4,6	0,7	5,3
$b_1$	—8,4	0,4	—8,8	1,0	—7,8	0,6	—8,4
$b_2$	1,2	0,6	0,6	0,4	0,2	0	0,2
$b_3$	2,2	0,1	2,1	0,3	2,4	0,3	2,1
$b_4$	0,8	0,5	0,3	0,1	0,4	0,2	0,6
$b_5$	0,3	0,1	0,2	0	0,2	0	0,2
$\Sigma$	—	7,2	—	4,9	—	3,1	—

После четырех приближений разности достаточно невелики и можно, не боясь большой ошибки, принять за преобразующую функцию результат четвертого приближения:

$$\zeta = (82,2 + 5,3i)z + (23,4 - 8,4i)z^2 + (5,2 + 0,2i)z^3 + (2,2 + 2,1i)z^4 + \\ + (1,2 + 0,6i)z^5 + (0,9 + 0,2i)z^6 + 0,4z^7.$$

Если бы мы сделали еще два приближения, то получили бы для преобразующей функции следующее выражение:

$$\zeta = (82,2 + 4,5i)z + (23,6 - 7,9i)z^2 + (5,0 + 0,5i)z^3 + (2,2 + 2,2i)z^4 + \\ + (1,2 + 0,5i)z^5 + (0,9 + 0,2i)z^6 + 0,4z^7.$$

При сравнении функций, полученных после четвертого и после шестого приближения, мы видим, что все коэффициенты в обеих функциях, за исключением  $b_0$ , весьма близки друг к другу, но коэффициент  $b_0$  равен сумме всех прочих  $b$  и, чтобы получить его с большей точностью, нужно увеличить точность снятия отсчетов с чертежа.

Вообще, получив после нескольких приближений преобразующую функцию, мы можем задаться вопросом: а) является ли этот результат окончательным и б) дает ли он отображение единичной окружности на заданную кривую или же на кривую, имеющую с заданной  $m$  общих точек  $P'$ , но между этими точками с заданной кривой не совпадающую?

О том, является ли результат окончательным, мы, как было только что сказано, можем судить по сумме невязок между значениями параметров преобразующей функции в смежных приближениях; что же касается до отображения действительно на заданную кривую, то исчерпывающий ответ можно получить, вычислив по уравнению преобразующей функции координаты отображений нескольких точек окружности, лежащих между опорными лучами. Если будут получены точки, лежащие на кривой, то задача решена удовлетворительно.

Вместо вычисления можно ограничиться рассмотрением коэффициентов преобразующей функции. Если последние из полученных значений  $a$  и  $b$  малы и практически их можно не учитывать, то это будет означать, что коэффициенты бесконечного ряда, в виде которого можно представить истинную преобразующую функцию, быстро затухают и, следовательно, можно ограничиться уже полученным числом их.

Если же последние из значений  $a$  и  $b$  сравнительно велики, то нет никакого основания предполагать, что коэффициенты последующих членов бесконечного ряда будут нулевыми. В таком случае нужно провести расчет не для 12, а для 24 опорных лучей. Однако во многих случаях вместо увеличения числа опорных лучей целесообразнее произвести некоторое предварительное преобразование заданной кривой аналитическим путем, так чтобы на полученную при этом кривую окружность отображалась при меньшем числе членов преобразующей функции.

**§ 7. Отображение внешних областей.** Изложенным методом мы можем решать также и задачи отображения внешних областей, для которых преобразующая функция будет иметь вид

$$\zeta = \sum_{k=0}^n x_k z^{1-k} = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k i) z^{1-k}. \quad (37)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \\ \eta &= \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} (b_k \cos k\varphi - a_k \sin k\varphi). \end{aligned} \quad (38)$$

Из сравнения этих выражений с выражениями (6) и (7), мы видим, что:

- 1) зависимость коэффициентов  $a$  от  $\xi$  не меняется и, следовательно, для их нахождения можно по-прежнему пользоваться имеющимися у нас шаблонами;
- 2) для получения коэффициентов  $b$  также могут быть использованы имеющиеся шаблоны, но знак  $b$  нужно брать противоположным;
- 3) при получении  $\eta$  найденные коэффициенты  $a$  должны быть взяты с измененным знаком.

Для получения первого приближения можно также воспользоваться графическим построением, поскольку мы рассматривали его для любого целого  $p$ .

(в том числе и отрицательного), причем преобразующая функция будет иметь вид

$$\zeta = az \frac{1 + bz^{-p}}{1 + cz^{-p}}. \quad (39)$$

Нужно только брать другую точку пересечения окружности  $s''$  с кривой  $s'$ , а именно более удаленную от начала координат, так как смещение точек на контуре кривой  $s'$  при отображении внутренних и внешних областей происходит в противоположных направлениях, как можно видеть из рис. 99, на котором показаны отображения  $l'$  радиальной прямой  $l$  области  $D$ .

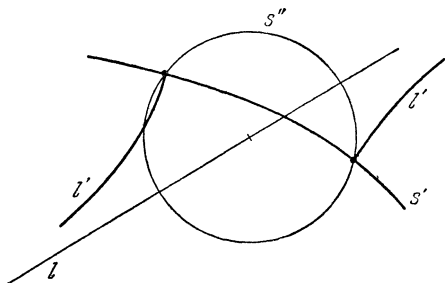


Рис. 99.

значений  $\eta$  записываются не  $a$ , а  $-a$ . В данном случае сходимость получилась окончательная; уже первое графическое приближение практически является окончательным.

Это можно объяснить следующим образом. Пусть кривая  $s'$  в точке  $P'$  составляет с отрезком  $\eta$  некоторый угол  $\alpha$  (см. рис. 100) и пусть конец отрезка  $\eta$ , вычисленного в некотором цикле приближений, выдается за кривую  $s'$  на длину  $\delta$  (или не доходит до кривой на эту длину). Изменение  $\xi$  при переходе к новому циклу вычислений будет равно примерно  $\delta \operatorname{tg} \alpha$ . Следовательно, чем меньше будут углы  $\alpha$  для всех опорных лучей, тем быстрее вычисление будет стремиться к окончательному результату.

Кривая  $s'$  нашего примера (рис. 96) при отображении внешних областей во всех точках первого графического приближения (дуги окружностей  $s''$  для которого показаны пунктиром) как раз имеет направление весьма близкое к направлениям отрезков  $\eta$ ; этим и объясняется быстрая сходимость процесса.

**§ 8. Отображение внутренних областей с симметричными контурами.** Рассмотрим теперь случай применения функций  $\xi$  и  $\eta$  к кривым  $s'$  с  $p$  осями симметрии, для которых преобразующая функция имеет вид

$$\zeta = \sum_{k=0}^n a_k z^{1+kp} \quad (40)$$

и параметры  $b$ , обусловленные несимметричностью контура  $s'$ , отсутствуют. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{k=0}^n a_k \cos kp \varphi, \\ \eta &= \pm \sum_{k=0}^n a_k \sin kp \varphi. \end{aligned} \quad (41)$$

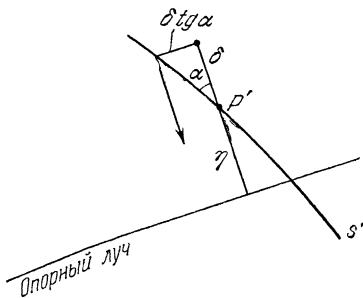


Рис. 100.

Таблица 97

$\xi_k$					1,732	1	2	1,732	1	2		
$k = 0, 12$					—	115,5	231	—	115,5	231		
1					190,5	110	220	190,5	110	220		
2					174	100,5	201	174	100,5	201		
3					—	95	190	—	96	192		
4					154	89	178	155	89,5	179		
5					138,5	80	160	138,5	80	160		
6					—	68,5	137	—	68,5	137		
7					106,5	61,5	123	106,5	61,5	123		
8					116	67	134	116	67	134		
9					—	84	168	—	84	168		
10					173	100	200	173	100	200		
11					191	110,5	221	191	110,5	221		
$\Sigma$					$: 12 = a_0$	1081,5		90,1	1083		50,2	
$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$D$	$: 12$	$a_1$	813	538	275	22,9	813	538,5	274,5	22,9
				$a_2$	730	714,5	15,5	1,3	730	717	13	1,1
				$a_3$	543	538	5	0,4	544	538	5	0,5
				$a_4$	726	718,5	7,5	0,6	728	719	9	0,7
				$a_5$	676,5	674,5	2	0,2	676,5	675	1,5	0,1
				$a_6$	540,5	541	—0,5	0	541	542	—1	—0,1
$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$D$	$:(-12)$	$b_1$	629	708	—79	6,6	629	711	—82	6,8
				$b_2$	656,5	587	69,5	—5,8	657,5	587	70,5	—5,9
				$b_3$	534	548	—14	1,2	536	548	—12	1,0
				$b_4$	619,5	624	—4,5	0,4	619,5	625	—5,5	0,5
				$b_5$	668	669	—1	0,1	669	671	—2	0,2
				$-\sum_{k=1}^5 b_k = b_0$				—2,5				—2,6
$-a_k$		$b_k$		0,5	1	0,866	0,5	1	0,866			
$k = 1$				—11,4	—22,9	—19,8						
2				—	—1,3	—1,1						
3				—	—0,4	—						
4				—	—0,6	—0,5						
5				—0,1	—0,2	—0,2						
$k = 0$				—	—2,5	—						
1				3,3	6,6	5,7						
2				—2,9	—5,8	—						
3				—	1,2	—						
4				0,2	0,4	—						
5				0	0,1	0,1						
$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$D$	$\eta_1$	—13,2	0,3	—13,5						
			$\eta_2$	—19,9	—2,4	—17,5						
			$\eta_3$	—25,2	—6,2	—19,0						
			$\eta_4$	—21,6	—0,7	—20,9						
			$\eta_5$	—17,2	4,3	—21,5						
			$\eta_6$	—17,9	7,9	—15,8						
			$\eta_7$	—6,9	—6,0	—0,9						
			$\eta_8$	—2,6	—15,7	13,1						
			$\eta_9$	—2,5	—28,9	26,4						
			$\eta_{10}$	0,3	—22,6	22,9						
			$\eta_{11}$	0,3	—13,2	13,5						

Здесь знак плюс ставится при отображении внутренних, а знак минус при отображении внешних областей.

Возьмем угол между соседними осями симметрии, равный  $\frac{\pi}{p}$ , и разделим его на  $m$  частей, равных каждая  $\frac{\pi}{pm}$ ; получим:

$$\begin{aligned}\xi_h &= \sum_{k=0}^m a_k \cos \frac{\pi}{pm} \cdot hkp = \sum_{k=0}^m a_k \cos \frac{\pi}{m} \cdot hk, \\ \eta_h &= \pm \sum_{k=0}^m a_k \sin \frac{\pi}{m} \cdot hk,\end{aligned}\quad (42)$$

откуда

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{2m} (\xi_0 + \xi_m) + \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m-1} \xi_h, \\ a_k &= \frac{1}{m} [\xi_0 + (-1)^k \xi_m] + \frac{2}{m} \sum_{h=1}^{m-1} \xi_h \cos \frac{\pi}{m} hk \text{ при } 1 \leq k \leq m-1, \\ a_m &= \frac{1}{2m} [\xi_0 + (-1)^m \xi_m] + \frac{1}{m} \sum_{h=1}^{m-1} (-1)^h \xi_h.\end{aligned}\quad (43)$$

Как видим, число осей симметрии  $p$  отражается лишь на расположении опорных лучей, расчет же от числа осей симметрии не зависит. Точно

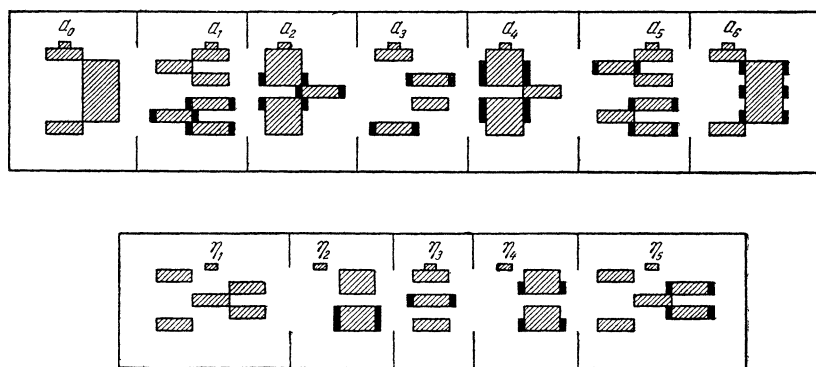


Рис. 101.

так же и при оперировании с внешними или внутренними областями все различие расчета заключается в выборе знака при записи в журнале величин  $a$  для вычисления  $\eta$ .

Шаблоны для случая  $m=6$  даны на рис. 101, а журнал вычислений — в табл. 98. Вычисление произведено для внутренней области эллипса с полуосями в 100 и 150 мм (рис. 102). Полученная преобразующая функция имеет вид

$$\zeta = 115,8z + 20,6z^3 + 6,8z^5 + 3,2z^7 + 1,7z^9 + 1,2z^{11} + 0,7z^{13}.$$

Она содержит лишь нечетные степени, так как у эллипса две оси симметрии и, следовательно,  $p=2$ .

Т а б л и ц а 98

$\xi_k$	1,732			1	2	1,732	1	2	1,732	1	2
$k=0$	—			150	—	—	150	—	—	150	—
1	232			134	268	233	134,5	269	—	134,5	—
2	—			118,5	237	—	120	240	—	120	—
3	—			109,5	219	—	110	220	—	110	—
4	—			104	208	—	104,5	209	—	104,5	—
5	175			101	202	175	101	202	—	101	—
6	—			100	—	—	100	—	—	100	—
$\Sigma$	: 12 = $a_0$			1384	115,3	1390	115,8				
$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$D$	$a_1$	500,5	379	503	379,5	123,5	20,6		
			$a_2$	485	441,5	485,5	444,5	41	6,8		
			$a_3$	358	337	359	340	19	3,2		
			$a_4$	469	457,5	470	460	10	1,7		
			$a_5$	443,5	436	445	437,5	7,5	1,2		
			: 12 = $a_6$	695	689	699	691	8	0,7		
$a_k$				0,5	1	0,5	1	0,866	0,5	1	0,866
$k=1$	10,1			20,2	17,5	10,3	20,6	17,9			
2	—			7,2	6,2	—	6,8	5,8			
3	—			3,5	—	—	3,2	—			
4	—			1,9	1,6	—	1,7	1,5			
5	0,6			1,2	1,0	0,6	1,2	1,0			
$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$D$	$\eta_1$	—	22,0	—	—	21,4			
			$\eta_2$	23,7	2,6	23,7	2,5	21,2			
			$\eta_3$	21,4	3,5	21,8	3,2	18,6			
			$\eta_4$	19,1	7,2	19,4	6,8	12,6			
			$\eta_5$	14,2	7,8	14,1	7,3	6,8			

Поскольку величина коэффициентов более или менее равномерно уменьшается, можно полагать, что все неучитываемые члены с высокими степенями  $z$  весьма невелики и в сумме могут создавать погрешность, не превышающую примерно 0,5. И в этом примере сходимость весьма быстрая.

**§ 9. Отображение внешних областей с симметричными контурами.** Рассмотрим пример отображения внешних областей, взяв в качестве линии  $s'$  одну восьмую контура квадрата, сторона которого равна 200 мм. Графическое первое приближение дано на рис. 103, а уточнение — в табл. 99. Преобразующая функция имеет вид

$$\zeta = 118,1z - 19,8z^{-3} + 2,2z^{-7} - 0,7z^{-11} + 0,5z^{-15};$$

члены, содержащие  $z^{-19}$  и  $z^{-23}$ , можно не учитывать.

В качестве второго примера рассмотрим ватерлинию (рис. 104), вычисления для которой приведены в табл. 100. Преобразующая функция имеет вид

$$\zeta = 55,2z + 2,6 + 43,2z^{-1} - 0,25z^{-2} + 1,3z^{-3}.$$

Во всех рассмотренных примерах можно было ограничиться вычисленными членами преобразующей функции ввиду их быстрого затухания. Для тех сравнительно не очень часто встречающихся задач, для которых шести

членов ряда для преобразующей функции недостаточно, можно было бы поступать следующим образом: сперва вычислением получить ту кривую (имеющую с заданной

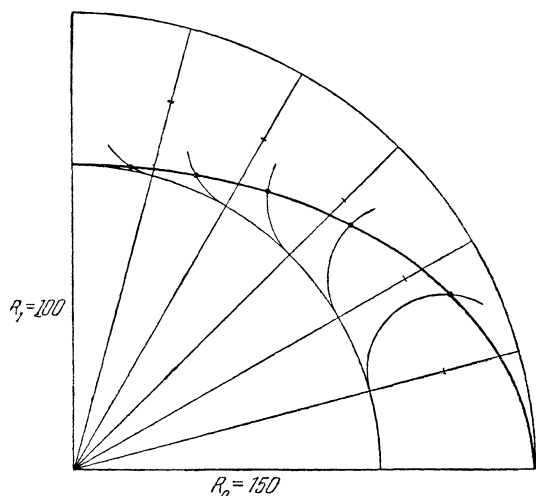


Рис. 102\*).

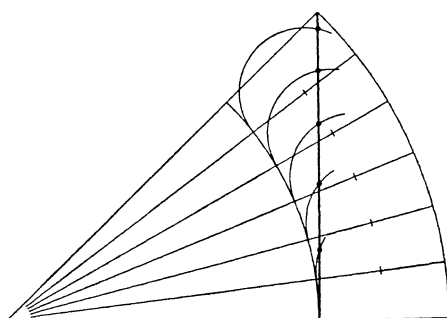


Рис. 103.

кривой двенадцать общих точек), на которую отображается окружность, а затем ввести местные уточнения на каждом участке расхождений между заданной кривой и полученной. Получить уточнения можно бы также, проведя расчет для большего числа членов ряда.

Однако все эти приемы, хотя и могут привести к лучшему результату, но требуют утомительных вычислений; поэтому, если контур  $s'$  столь сложен,

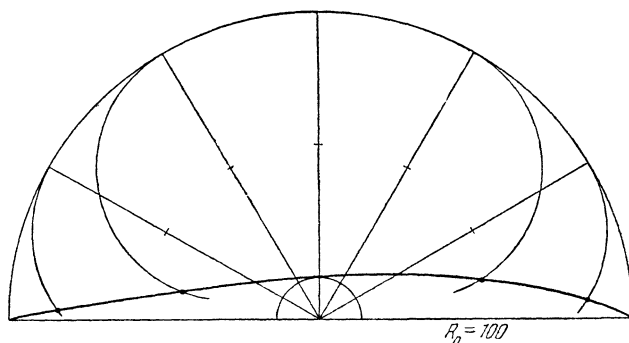


Рис. 104.

что отобразить область при окружности  $s$  на область при кривой  $s'$  малым числом членов многочлена трудно, то лучше искать возможности дополнительного преобразования, приводящего контур  $s'$  к более округлому виду, после чего сперва произвести отображение на область при этом контуре, а затем с него на область при истинном контуре  $s'$ . Для этих целей преобразование должно быть обратимым, или же его приходится производить номографически.

\*) Рис. 102—104 уменьшены в 2,5 раза по сравнению с расчетным оригиналом.

Т а б л и ц а 99

$\xi_k$					1,732	1	2	1,732	1	2	
$k = 0$					—	100	—	—	100	—	
1					176,5	102	204	176,5	102	204	
2					—	108	216	—	107,5	215	
3					—	116,5	233	—	116,5	233	
4					—	126,5	253	—	126,0	252	
5					235,5	136	272	235,5	136	272	
6					—	141,5	—	—	141,5	—	
$\Sigma$ : 12 = $a_0$					1419,5		118,3	1417,5		118,1	
$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$D$	$a_1$	384,5	503,5	— 119	— 19,8	384	503	— 119	— 19,8
			$a_2$	479,5	467,5	12	2,0	479,5	466,5	13	2,2
			$a_3$	353	357,5	— 4,5	— 0,7	352	356,5	— 4,5	— 0,7
			$a_4$	474,5	472,5	2	0,3	474,5	471,5	3	0,5
			$a_5$	443,5	444,5	— 1	— 0,2	443	444	— 1	— 0,2
			: 12 = $a_6$				710,5	709	1,5	0,1	708,5
$-a_k$					0,5	1	0,866	0,5	1	0,866	
$k = 1$					9,9	19,8	17,1				
2					—	— 2,0	— 1,7				
3					—	0,7	—				
4					—	— 0,3	— 0,3				
5					0,1	0,2	0,2				
$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$D$	$\eta_1$	—	—	8,7					
			$\eta_2$	15,4	— 0,1	15,5					
			$\eta_3$	20,0	0,7	19,3					
			$\eta_4$	16,8	— 1,5	18,3					
			$\eta_5$	10,7	— 2,0	12,7					



Таблица 100

$\varepsilon_k$					1,732	1	2	1,732	1	2		
$k=0$					—	100	—	—	100	—		
1					136	78,5	157	135	78	156		
2					—	37	74	—	37	74		
3					—	13	26	—	13	26		
4					—	29,5	59	—	29,5	59		
5					127,5	73,5	147	127,5	73,5	147		
6					—	100	—	—	100	—		
$\Sigma$ : 12 = $a_0$					663		55,2	662		55,2		
$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$D$	: 6	$a_1$	273	256,5	16,5	2,8	272	256,5	15,5	2,6
				$a_2$	352	92,5	25,5	43,2	351,5	92,5	259	43,2
				$a_3$	159	174	—15	— 2,5	159	164	—15	—2,5
				$a_4$	226	218,5	7,5	1,2	226	218	8	1,3
				$a_5$	264,5	265,5	— 1	— 0,2	264,5	264,5	0	0
				: 12 = $a_6$	333	330	3	0,2	333	329	4	0,3
$-a_k$					0,5	1	0,866	0,5	1	0,866		
$k=1$					—1,4	— 2,8	— 2,4					
2					—	—43,2	—37,4					
3					—	2,5	—					
4					—	— 1,2	— 1,0					
5					0,1	0,2	0,2					
$\Sigma_+$	$\Sigma_-$	$D$	$\eta_1$	—	—	—37,2						
			$\eta_2$	—39,8	— 0,8	—39,0						
			$\eta_3$	— 2,6	2,5	— 5,1						
			$\eta_4$	— 3,4	—37,2	33,8						
			$\eta_5$	1,2	—38,4	39,6						

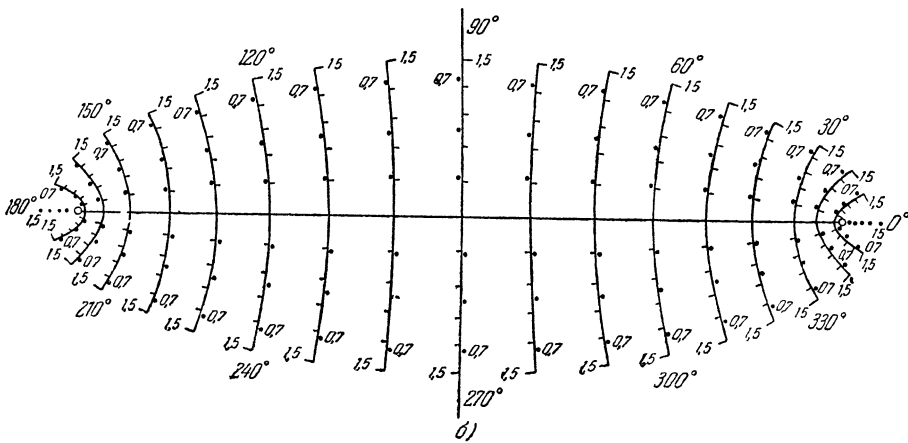
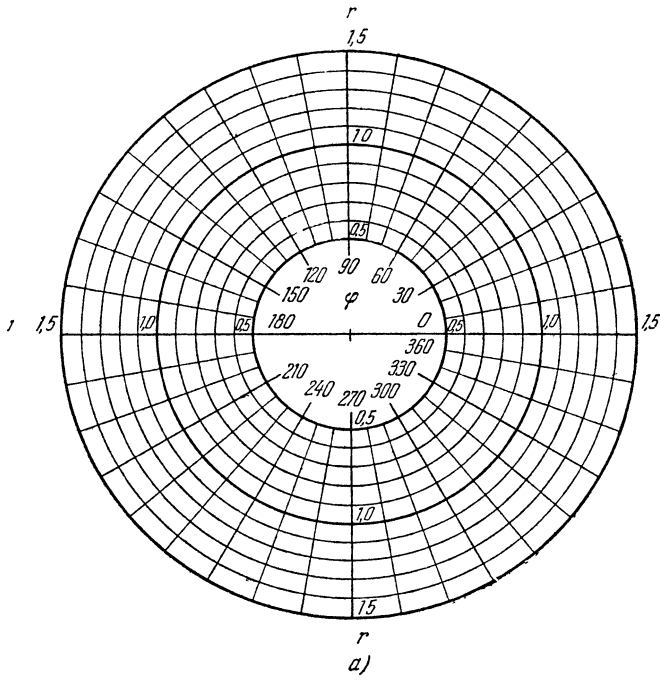


Рис. 105.

**§ 10. Предварительное преобразование областей.** Для многих контуров, с которыми приходится встречаться в аэро- и гидродинамике, хорошо пользоваться переходом от переменной  $\zeta$  к переменной  $z$ , связанной с  $\zeta$  уравнением

$$\zeta = z + \frac{1}{z}. \quad (44)$$

От  $z$  к  $\zeta$  перейти легко, предварительное же преобразование контура, т. е.

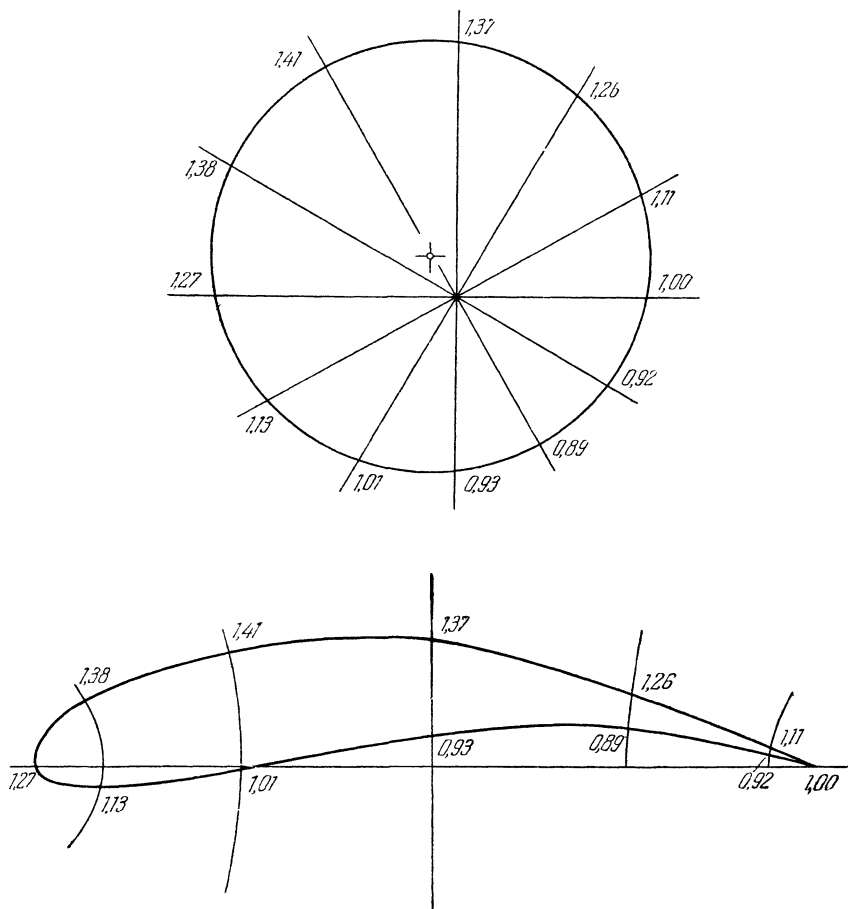


Рис. 106.

переход от  $\zeta$  к  $z$  совершается на специальном бинарном поле. Построение этого поля основано на следующем. Пусть

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (45)$$

тогда

$$\begin{aligned} \zeta &= r \cos \varphi + i \sin \varphi + \frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (46)$$

Для окружности  $r = \text{const}$ , обозначив  $r + \frac{1}{r} = c_1$  и  $r - \frac{1}{r} = c_2$ , получаем уравнение эллипса

$$\zeta = c_1 \cos \varphi + ic_2 \sin \varphi, \quad (47)$$

т. е. окружности области переменной  $z$  преобразуются в эллипсы области переменной  $\zeta$ .

Для радиальной прямой  $\varphi = \text{const}$ , обозначив  $\cos \varphi = c_3$  и  $\sin \varphi = c_4$ , получаем

$$\zeta = c_3 \left( r + \frac{1}{r} \right) + ic_4 \left( r - \frac{1}{r} \right). \quad (48)$$

Это уравнение дает семейство гипербол, в которое преобразуются радиальные прямые области переменной  $z$ .

На рис. 105б построены гиперболы для значений  $\varphi$  от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  с интервалом в  $10^\circ$ . На гиперболах показаны в виде шкал точки их пересечения с эллипсами для значений  $r$  от 0,7 до 1,5 через 0,10.

Для преобразования заданной области ее накладывают (начертив на кальке) на одну из областей рис. 105а и по точкам строят в криволинейных координатах, данных на рис. 105б.

На рис. 106 показан переход от окружности, заданной в полярных координатах, к очертанию крыла в координатах гиперболо-эллиптических. Это преобразование было предложено Н. Е. Жуковским, однако совершать его приходилось весьма сложным путем, требовавшим больших вычислений для каждого отдельного построения; номограмма же рис. 105 дает возможность построить преобразованную область за несколько минут без каких-либо вычислений.

## ГЛАВА XI

### ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

**1. Метод наименьших квадратов.** В результате любого опыта мы получаем числовые значения, которые дают возможность установить взаимосвязь между исследуемыми величинами в математической форме.

Получаемые в результате обработки опытных данных эмпирические формулы должны удовлетворять ряду требований: они должны быть надежными, простыми в применении и, что особенно важно, структура формулы должна соответствовать физической сущности рассматриваемого процесса. Последнее условие часто не принимается во внимание исследователями, вследствие чего составленные ими формулы очень скоро обнаруживают свою нестойкость.

Поясним сказанное примером. Пусть дана совокупность точек, полученных в результате каких-то наблюдений (рис. 107), и требуется найти математическую зависимость  $y = F(x)$ , график которой будет наилучшим образом соответствовать этой совокупности точек.

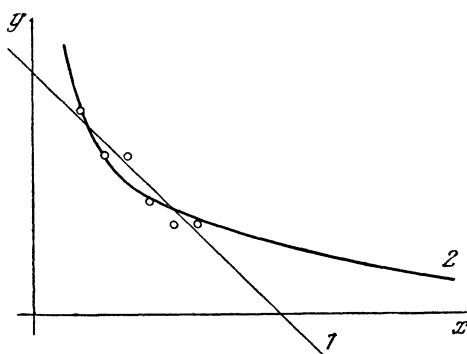


Рис. 107.

Наблюденная совокупность точек может быть представлена несколькими эмпирическими формулами в зависимости от физической сущности исследуемого процесса. Так, если наблюдаемые точки суть положения некоторого тела, движущегося по инерции, то искомая зависимость должна быть прямолинейной (кривая 1), если же наблюдалось движение жидкости с постоянной скоростью по трубам разного диаметра, то искомая зависимость между диаметром  $x$  и падением напора на единицу длины трубы  $y$  должна быть криволинейной (кривая 2).

Перейдем к рассмотрению теоретических оснований построения эмпирических формул.

Пусть некоторый самопишущий прибор, записывая ход регистрируемого им процесса, вычертил кривую  $A$  (рис. 108). Эта кривая кроме основного хода процесса отражает также и всевозможные мелкие отклонения. Подыскивая эмпирическую формулу, график которой наилучшим образом соответствовал бы кривой  $A$ , мы должны иметь критерий определения степени такого соответствия. Таким критерием может явиться интеграл невязок между графиком эмпирической зависимости и действительной кривой  $A$ , взятый на всем интервале построения кривой. Назовем этот интеграл интегральной невязкой.

Рассмотрим метод графического подбора уравнений.

Задавшись видом эмпирической зависимости между  $x$  и  $y$  и строя графики этой зависимости для различных сочетаний значений коэффициентов, входящих в формулу, мы можем последовательными приближениями определить те значения коэффициентов, при которых интегральная невязка будет минимальной.

Так, подыскивая для кривой  $A$  рис. 108 уравнения в виде

$$y = a + cx^2,$$

мы можем вычертить на кальке пучок парабол  $y = cx^2$  для различных значений  $c$  (рис. 109) и, перемещая его в вертикальном направлении по рис. 108, подобрать то сочетание значений  $a$  и  $c$ , при котором интегральная невязка будет наименьшей. Можно также нанести на кальку кривую  $A$  и передвигать ее по пучку парабол.

На рис. 108 пунктиром дана кривая

$$y = 5,5 + 0,040x^2,$$

наилучшим образом соответствующая заданной кривой  $A$ .

При некотором навыке указанным способом можно довольно быстро и с приемлемой степенью точности подбирать уравнения для заданных кривых. Однако метод графического подбора уравнений имеет много недостатков.

Прежде всего, результаты подбора субъективны: у разных людей они могут получиться неодинаковыми. Но особенно важно то обстоятельство, что если подбор прост при наличии одного изменяемого коэффициента и не слишком затруднителен при двух коэффициентах, то при большем числе их он становится очень сложным, а зачастую и просто невозможным даже для весьма опытного работника. Поэтому надо иметь в своем распоряжении иной метод выбора эмпирического уравнения, не зависящий от субъективных влияний и достаточно общий.

Однако при аналитическом подборе функции, наилучшим образом удовлетворяющей опытным данным, мы встречаемся с тем затруднением, что интегральные невязки, определяемые как интегралы разностей между ординатами  $y$  истинной кривой и ординатами  $y_e$  кривой эмпирической зависимости, представляют собой сумму положительных и отрицательных слагаемых, которая может быть достаточно малой даже и при значительных расхождениях между ординатами заданной и полученной кривой. Вследствие этого вместо исследования интегральной невязки приходится определять интеграл квадратов невязок, поскольку для любого знака невязки квадрат ее будет всегда положительным, и уменьшение интеграла квадратов невязок будет соответствовать и уменьшению самих невязок.

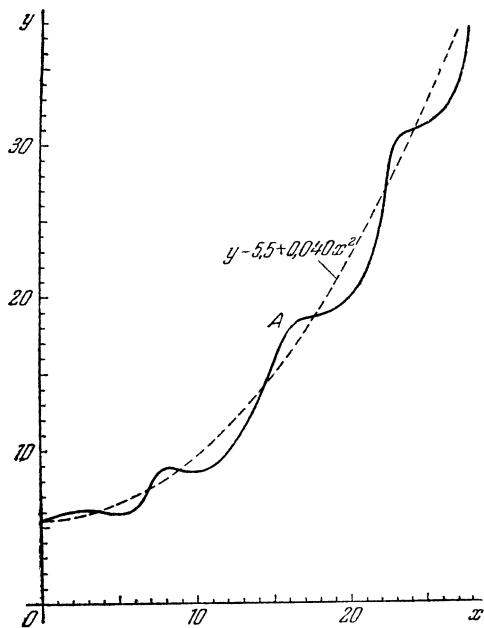


Рис. 108

Пусть для некоторой кривой  $y=f(x)$  будем подбирать уравнение

$$y_3 = F(x, a, b, c, d, \dots), \quad (1)$$

коэффициенты которого  $a, b, c, d, \dots$  должны быть взяты такими, чтобы интеграл квадратов невязок между истинной и полученной кривыми в заданном интервале значений абсцисс был наименьшим.

Обозначим этот интеграл через  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_A^B (y - y_3)^2 dx = \\ &= \varepsilon(a, b, c, d, \dots). \end{aligned} \quad (2)$$

Должно быть выполнено условие

$$\varepsilon(a, b, c, d, \dots) = \varepsilon_{\min}. \quad (3)$$

Рассматривая величину  $\varepsilon$  как функцию переменных  $a, b, c, d, \dots$ , мы должны для нахождения ее минимума приравнять нулю все частные производные

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial b}, \dots,$$

что приведет нас к системе уравнений

$$\begin{aligned} \int_A^B (y - y_3) \frac{\partial y_3}{\partial a} dx &= 0, \\ \int_A^B (y - y_3) \frac{\partial y_3}{\partial b} dx &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

.....

Решение этой системы даст искомые значения коэффициентов функции  $y_3$ .

В этом состоит сущность способа наименьших квадратов для нахождения эмпирического уравнения некоторой непрерывной кривой, полученной из опыта.

Решение системы (4), как легко видеть, возможно не для любого типа зависимости (1). Наиболее просто она решается, если зависимость (1) дана в виде многочлена

$$y_3 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots \quad (5)$$

Тогда система (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_A^B (y_3 - y) dx &= 0, \\ \int_A^B x (y_3 - y) dx &= 0, \\ \int_A^B x^2 (y_3 - y) dx &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (6)$$

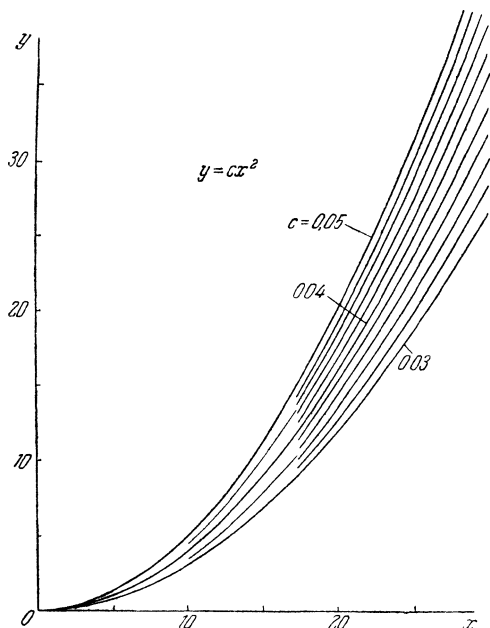


Рис. 109.

После подстановки вместо  $y$ , его значения из (5) мы получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \int_A^B (a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots - y) dx &= 0, \\ \int_A^B (ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots - xy) dx &= 0, \\ \int_A^B (ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \dots - x^2y) dx &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (7)$$

или, в результате интегрирования,

$$\begin{aligned} \left( ax + \frac{1}{2} bx^2 + \frac{1}{3} cx^3 + \frac{1}{4} dx^4 + \dots \right) \Big|_A^B - \int_A^B y dx &= 0, \\ \left( \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{3} bx^3 + \frac{1}{4} cx^4 + \frac{1}{5} dx^5 + \dots \right) \Big|_A^B - \int_A^B xy dx &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (8)$$

Разделив интервал  $(A, B)$  на  $n$  равных частей и взяв значения функции и абсцисс посередине каждой части, получим

$$\int_A^B x^k y dx \approx \frac{B-A}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k y_i, \quad (9)$$

и рассматриваемая система уравнений примет окончательный вид

$$\begin{aligned} (B-A)a + \frac{B^2-A^2}{2}b + \frac{B^3-A^3}{3}c + \dots - \frac{B-A}{n} \sum_{i=1}^n y_i &= 0, \\ \frac{B^2-A^2}{2}a + \frac{B^3-A^3}{3}b + \frac{B^4-A^4}{4}c + \dots - \frac{B-A}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i &= 0, \\ \frac{B^3-A^3}{3}a + \frac{B^4-A^4}{4}b + \frac{B^5-A^5}{5}c + \dots - \frac{B-A}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (10)$$

Решая эту систему как обычную систему из  $n$  уравнений первой степени с  $n$  неизвестными, мы и определим значения коэффициентов  $a, b, c, d, \dots$ , входящих в уравнение искомой эмпирической кривой.

Пример. Рассмотрим кривую, приведенную на рис. 108, и подберем для нее уравнение вида

$$y_s = a + cx^2, \quad (11)$$

пользуясь методом наименьших квадратов. Расчет проведем для сравнения в двух вариантах: при делении интервала интегрирования  $(0, 28)$  на семь и на четырнадцать частей.

Предварительно составим таблицу величин  $y_i$  и  $x_i^2 y_i$ , а также выпишем коэффициенты при  $a$  и при  $c$  в системе (10) (см. табл. 101).



Решаем полученную систему уравнений для двух вариантов свободных членов:

$$\begin{array}{rcl}
 28a + 7317c & = & 424 \quad 434 \\
 7317a + 3442000c & = & 167100 \quad 172400 \quad | -0,0038267 \\
 28a + 7317c & = & 424 \quad 434 \\
 -28a - 13172c & = & -639 \quad -660 \\
 \hline
 & & 5855c = -215 \quad -226 \\
 & & c = 0,0367 \quad 0,0386 \\
 \\ 
 & & - 7317c = -269 \quad -282 \\
 28a + 7317c & = & 424 \quad 434 \\
 \hline
 28a & = & 155 \quad 152 \\
 a & = & 5,5 \quad 5,4
 \end{array}$$

Таким образом, получаем эмпирические уравнения: для семи интервалов

$$y_s = 5,5 + 0,0367x^2,$$

для четырнадцати интервалов

$$y_s = 5,4 + 0,0386x^2.$$

Достаточно большое различие между ними говорит о том, что вычисление в первом случае недостаточно точно. Решение для четырнадцати интервалов

Таблица 101

$x_i$	$y_i$	$x_i^2 y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2 y_i$
2	5,9	24	1	5,7	6
6	6,1	220	3	6,0	54
10	8,6	860	5	5,9	148
14	12,6	2 470	7	7,3	358
18	18,6	6 026	9	8,7	705
22	22,9	11 084	11	8,9	1 077
26	31,2	21 091	13	11,0	1 859
$\Sigma$ 105,9 41 775			15	14,8	3 330
$\frac{B-A}{n} \Sigma$ 424 167 100			17	18,4	5 318
$B-A=28,$			19	18,9	6 823
$\frac{B^3-A^3}{3} = 7 317,$			21	20,8	9 173
$\frac{B^5-A^5}{5} = 3 442 000.$			23	28,0	14 812
			25	30,7	19 188
			27	32,0	23 328
			$\Sigma$	217,1	86 179
			$\frac{B-A}{n} \Sigma$	434	172 400

также следовало бы проверить. Проверку проведем способом прямоугольников для двадцати восьми интервалов.

Для новых значений свободных членов (см. табл. 102) решение системы уравнений также дает

$$y_s = 5,4 + 0,0386x^2.$$

Сравнение эмпирических уравнений, полученных подбором:

$$y_s = 5,5 + 0,0400x^2$$

и по методу наименьших квадратов:

$$y_s = 5,4 + 0,0386x^2,$$

показывает, что различие между ними невелико. Между тем, вычисления по методу наименьших квадратов требуют намного больше времени.

**§ 2. Метод равных площадей.** Рассмотрим метод, дающий возможность получать результаты без предварительного составления произведений ординат на различные степени абсцисс. Если обратимся к системе уравнений (6), то первое из них мы сможем представить в виде

$$\int_A^B y_s dx = \int_A^B y dx. \quad (12)$$

Это означает, что площади, ограниченные данной кривой  $y=f(x)$  и кривой, определяемой формулой (1), в интервале  $(A, B)$  равны между собой.

Используем это условие для того, чтобы получить возможность нахождения эмпирических уравнений с меньшей затратой труда, чем по методу наименьших квадратов.

Т а б л и ц а 102

$x_i$	$y_i$	$x_i^3 y_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^3 y_i$
0,5	5,6	1	14,5	13,6	2 859
1,5	5,8	13	15,5	16,0	3 844
2,5	6,0	38	16,5	17,9	4 873
3,5	6,0	74	17,5	18,4	5 635
4,5	5,9	119	18,5	18,7	6 400
5,5	6,0	182	19,5	19,1	7 263
6,5	6,4	270	20,5	20,0	8 405
7,5	8,3	467	21,5	21,6	9 985
8,5	8,7	629	22,5	24,8	12 555
9,5	8,6	776	23,5	29,7	16 402
10,5	8,6	948	24,5	30,5	18 308
11,5	9,2	1217	25,5	30,9	20 093
12,5	10,3	1609	26,5	31,5	22 121
13,5	11,7	2132	27,5	32,8	24 805
			$\Sigma$	432,6	172 023

Разделим весь интервал  $(A, B)$  на несколько приблизительно равных частей и будем подбирать уравнение эмпирической кривой так, чтобы площади, ограничиваемые истинной и эмпирической кривой, были равны между собой для каждого участка в отдельности. Число участков должно быть равно числу определяемых коэффициентов. Это даст нам систему уравнений первой степени, из которой мы получим значения коэффициентов весьма близкие к вычисленным по методу наименьших квадратов при значительно меньшем объеме вычислительной работы.

Пример. Для кривой, рассмотренной в предыдущем параграфе (рис. 108), разделим интервал интегрирования на две части —  $(0, 14)$  и  $(14, 28)$  и составим для каждой из них условие равенства площадей. Получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{14} y dx &= \int_0^{14} y_0 dx, \\ \int_{14}^{28} y dx &= \int_{14}^{28} y_0 dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} \int_0^{14} y_0 dx &= \int_0^{14} (a + cx^2) dx = \left( ax + \frac{1}{3} cx^3 \right) \Big|_0^{14} = 14a + 914,7c, \\ \int_{14}^{28} y_0 dx &= \int_{14}^{28} (a + cx^2) dx = 14a + 6402,7c. \end{aligned}$$

Величины  $\int_0^{14} y dx$  и  $\int_{14}^{28} y dx$  получим из табл. 102, суммируя сначала первые четырнадцать, а затем последние четырнадцать значений  $y_i$ :

$$\int_0^{14} y dx = 107,1, \quad \int_{14}^{28} y dx = 325,5.$$

Итак, имеем систему уравнений

$$14a + 914,7c = 107,1,$$

$$14a + 6402,7c = 325,5,$$

решая которую получаем

$$y_s = 5,0 + 0,0398x^2.$$

Проверим степень точности формул, полученных по методу наименьших квадратов и по способу равных площадей. Если обозначим  $|y - y_s| = \Delta$ , то для средней линейной невязки  $\Delta^{(1)}$  и средней квадратичной  $\Delta^{(2)}$  будем иметь выражения:

$$\Delta^{(1)} = \frac{\Sigma \Delta}{n}, \quad \Delta^{(2)} = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta^2}{n}}.$$

Вычислим их по обеим формулам (табл. 103). Величины средних невязок отличаются друг от друга всего лишь на 4—5%, что, конечно, несущественно для практических подсчетов.

**§ 3. Подбор параболы.** Для кривой, приведенной на рис. 110, будем отыскивать уравнение в виде

$$y_s = a + bx + cx.$$

Вычисление проведем по методу наименьших квадратов и по методу равных площадей.

Деля интервал интегрирования (0, 23) на 23 части, для метода наименьших квадратов получим систему уравнений [см. (10)]:

$$23a - 264,5b + 4055,7c - \sum_{i=1}^{23} y_i = 0,$$

$$264,5a + 4055,7b + 69960c - \sum_{i=1}^{23} x_i y_i = 0, \quad (14)$$

$$4055,6a + 69960b + 1287270c - \sum_{i=1}^{23} x_i^2 y_i = 0.$$

Для вычисления сумм

$$\sum_{i=1}^{23} y_i, \quad \sum_{i=1}^{23} x_i y_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{23} x_i^2 y_i,$$

составляем табл. 104.

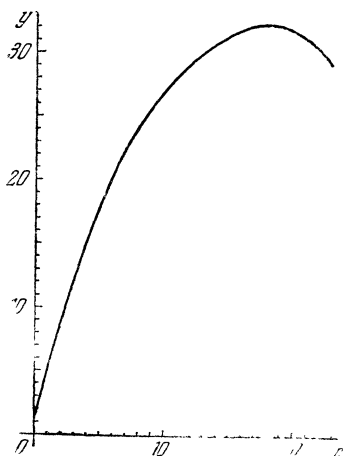


Рис. 110.

Т а б л и ц а 103

$x$	$y$	$y_9 = 5,4 + 0,0386x^2$			$y_9 = 5,0 + 0,0398x^2$		
		$y_9$	$\Delta$	$\Delta^2$	$y_9$	$\Delta$	$\Delta^2$
0,5	5,6	5,4	0,2	0,04	5,0	0,6	0,36
1,5	5,8	5,5	0,3	0,09	5,1	0,7	0,49
2,5	6,0	5,6	0,4	0,16	5,2	0,8	0,64
3,5	6,0	5,9	0,1	0,01	5,5	0,5	0,25
4,5	5,9	6,2	0,3	0,09	5,8	0,1	0,01
5,5	6,0	6,6	0,6	0,36	6,2	0,2	0,04
6,5	6,4	7,1	0,7	0,49	6,7	0,3	0,09
7,5	8,3	7,6	0,7	0,49	7,2	1,1	1,21
8,5	8,7	8,2	0,5	0,25	7,9	0,8	0,64
9,5	8,6	8,9	0,3	0,09	8,6	0	0
10,5	8,6	9,7	1,1	1,21	9,4	0,8	0,64
11,5	9,2	10,6	1,4	1,96	10,3	1,1	1,21
12,5	10,3	11,4	1,1	1,21	11,2	0,9	0,81
13,5	11,7	12,5	0,8	0,64	12,3	0,6	0,36
14,5	13,6	13,5	0,1	0,01	13,4	0,2	0,04
15,5	16,0	14,7	1,3	1,69	14,6	1,4	1,96
16,5	17,9	15,9	2,0	4,00	15,8	2,1	4,41
17,5	18,4	17,2	1,2	1,44	17,2	1,2	1,44
18,5	18,7	18,6	0,1	0,01	18,6	0,1	0,01
19,5	19,1	20,1	1,0	1,00	20,2	1,1	1,21
20,5	20,0	21,6	1,6	2,56	21,7	1,7	2,89
21,5	21,6	23,3	1,7	2,89	23,4	1,8	3,24
22,5	24,7	24,9	0,2	0,04	25,1	0,4	0,16
23,5	29,7	26,7	3,0	9,00	27,0	2,7	7,29
24,5	30,5	28,5	1,5	2,25	28,9	1,6	2,56
25,5	30,9	30,5	0,4	0,16	30,9	0	0
26,5	31,5	32,5	1,0	1,00	33,0	1,5	2,25
27,5	32,8	34,6	1,8	3,24	35,2	2,4	5,76
$\Sigma$		—	25,4	3638	—	26,7	39,97
		$\Delta^{(1)} = 0,91$ $\Delta^{(2)} = 1,14$			$\Delta^{(1)} = 0,95$ $\Delta^{(2)} = 1,20$		

Решая задачу методом равных площадей, мы должны разделить интервал интегрирования (0, 23) на 3 части. Для упрощения вычислений возьмем эти

Таблица 104

$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
0,5	3,0	2	1
1,5	6,0	9	14
2,5	9,6	24	60
3,5	13,3	46	163
4,5	16,6	75	336
5,5	19,2	106	580
6,5	20,6	134	870
7,5	23,4	175	1 316
8,5	25,0	212	1 806
9,5	26,3	250	2 374
10,5	27,5	289	3 032
11,5	28,6	329	3 782
12,5	29,6	370	4 625
13,5	30,5	412	5 559
14,5	31,2	452	6 560
15,5	31,7	491	7 616
16,5	32,2	531	8 766
17,5	32,5	569	9 953
18,5	32,5	602	11 123
19,5	32,3	630	12 282
20,5	31,7	650	13 322
21,5	31,0	666	14 330
22,5	30,0	675	15 188
$\Sigma$	564,3	7699	123 658
$J_1 = \sum_{i=1}^8 y_i = 111,7,$ $J_2 = \sum_{i=9}^{16} y_i = 230,4,$ $J_3 = \sum_{i=16}^{23} y_i = 253,9.$			

части равными и, чтобы длины их выражались целым числом, третий участок возьмем налегающим на второй:

$$(0, 8), \quad (8, 16), \quad (15, 23).$$

Из условия

$$\int_c^D (a + bx + cx^2) dx = \int_c^D y dx \quad (15)$$

получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 8a + 32b + 170,67c &= J_1, \\ 8a + 96b + 1194,67c &= J_2, \\ 8a + 136,5b + 2690,33c &= J_3, \end{aligned}$$

свободные члены которой берем из табл. 104.

Итак, метод наименьших квадратов дает систему уравнений

$$\begin{aligned} 23a + 264,5b + 4055,7c &= 564,3, \\ 264,5a + 4055,7b + 69960c &= 7699, \\ 4055,7a + 69960b + 1287270c &= 123658, \end{aligned}$$

соответствующую уравнению кривой

$$y_s = 1,8 + 3,55x - 0,102x^2,$$

а метод равных площадей — систему уравнений

$$\begin{aligned} 8a + 32b + 170,67c &= 111,7, \\ 8a + 96b + 1194,67c &= 230,4, \\ 8a + 152b + 2930,67c &= 253,9, \end{aligned}$$

соответствующую уравнению кривой

$$y_s = 2,5 + 3,38x - 0,096x^2.$$

На рис. 111 даны графики невязок  $y - y_s$  для обоих уравнений. Оба метода примерно равноценны по точности. Между тем метод равных площадей не требует заполнения третьего и четвертого столбцов табл. 104, что значительно ускоряет работу. Чем больше членов в составляемой эмпирической формуле, тем экономичней способ равных площадей.

**§ 4. Аппроксимирование синуса многочленом.** Подберем степенную функцию для выражения зависимости

$$y = \sin x \quad (16)$$

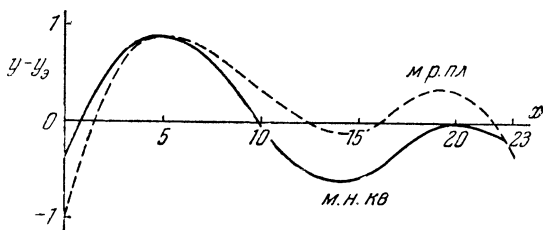


Рис. 111.

в пределах от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ . Учитывая нечетность исследуемой кривой, будем отыскивать коэффициенты членов только с нечетными показателями степени, причем ограничимся тремя членами, т. е. примем

$$y_s = C_1x + C_3x^3 + C_5x^5. \quad (17)$$

Если бы мы применили метод наименьших квадратов, то должны были бы вычислить произведения  $xu, \dots, x^5u$ . Чтобы избежать этого, используем метод равных площадей.

Имеем:

$$\int_A^B (C_1x + C_3x^3 + C_5x^5) dx = \int_A^B \sin x dx,$$

откуда

$$\frac{B^2 - A^2}{2} C_1 + \frac{B^4 - A^4}{4} C_3 + \frac{B^6 - A^6}{6} C_5 = -\cos B + \cos A. \quad (18)$$

Для удобства вычислений увеличим рассматриваемый интервал  $(0, \frac{\pi}{2})$  до  $(0; 1,59)$  и разделим его на три равные части. Поскольку в каждой части исследуемого интервала площади, ограниченные истинной и эмпири-

ческой кривыми, должны быть равны между собой, то они будут равны и на участках (0; 1,06) и (0; 1,59). Используя это, получаем систему:

$$\begin{aligned}\frac{0,53^2}{2} C_1 + \frac{0,53^4}{4} C_3 + \frac{0,53^6}{6} C_5 &= 1 - \cos 0,53, \\ \frac{1,06^2}{2} C_1 + \frac{1,06^4}{4} C_3 + \frac{1,06^6}{6} C_5 &= 1 - \cos 1,06, \\ \frac{1,59^2}{2} C_1 + \frac{1,59^4}{4} C_3 + \frac{1,59^6}{6} C_5 &= 1 - \cos 1,59,\end{aligned}\quad (19)$$

или, после деления на коэффициент при  $C_1$ ,

$$\begin{aligned}C_1 + \frac{0,53^2}{2} C_3 + \frac{0,53^4}{3} C_5 &= \frac{2(1 - \cos 0,53)}{0,53^2}, \\ C_1 + \frac{1,06^2}{2} C_3 + \frac{1,06^4}{3} C_5 &= \frac{2(1 - \cos 1,06)}{1,06^2}, \\ C_1 + \frac{1,59^2}{2} C_3 + \frac{1,59^4}{3} C_5 &= \frac{2(1 - \cos 1,59)}{1,59^2}.\end{aligned}\quad (20)$$

Упрощая, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}C_1 + 0,14045C_3 + 0,02630C_5 &= 0,97679, \\ C_1 + 0,56180C_3 + 0,42083C_5 &= 0,90981, \\ C_1 + 1,26405C_3 + 2,13043C_5 &= 0,80630,\end{aligned}\quad (21)$$

решая которую находим эмпирическую формулу

$$y_9 = 0,99993x - 0,16619x^3 + 0,00772x^5. \quad (22)$$

Если разложить  $y = \sin x$  в ряд Тейлора

$$y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \dots \quad (23)$$

и ограничиться только тремя его членами, то полученная формула

$$y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \quad (24)$$

будет значительно менее точной, чем формула (22).

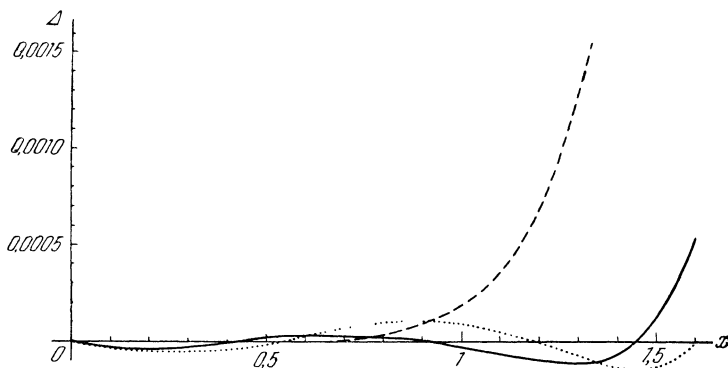


Рис. 112.

На рис. 112 даны погрешности  $\Delta$  эмпирического трехчлена (сплошная линия) и трехчлена (24) (пунктир).

**§ 5. Привязка точек.** Мы рассмотрели два принципа построения эмпирических формул: метод наименьших квадратов и метод равных площадей. Можно использовать еще один прием, дополняющий метод равных площадей.

Как видно из рис. 112 в конце исследованного интервала невязки между истинной и эмпирической кривой могут значительно возрасти. Поэтому бывает полезным использовать меньшее количество условий равенства площадей, но зато привязать конечные точки эмпирической кривой к определенным ординатам.

Для примера, рассмотренного в предыдущем параграфе, это имело место автоматически в начале координат, поскольку свободного члена в рассматривавшейся нами формуле не было и кривая, естественно, должна была проходить через начало координат. Рассмотрим тот же пример, но из трех условий равенства площадей используем лишь два, взяв третьим условием точное значение эмпирической функции в конце интервала.

Вместо интервала  $(0, \frac{\pi}{2})$  рассмотрим интервал  $(0; 1,60)$  и условие равенства площадей возьмем на участках  $(0; 0,80)$  и  $(0; 1,60)$ . Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} C_1 + \frac{0,8^2}{2} C_3 + \frac{0,8^4}{3} C_5 &= \frac{2(1 - \cos 0,8)}{0,8^2}, \\ C_1 + \frac{1,6^2}{2} C_3 + \frac{1,6^4}{3} C_5 &= \frac{2(1 - \cos 1,6)}{1,6^2}, \\ C_1 + 1,6^2 C_3 + 1,6^4 C_5 &= \frac{\sin 1,6}{1,6}, \end{aligned} \quad (25)$$

или, после упрощения,

$$\begin{aligned} C_1 + 0,32 C_3 + 0,13653 C_5 &= 0,94778, \\ C_1 + 1,28 C_3 + 2,18453 C_5 &= 0,80406, \\ C_1 + 2,56 C_3 + 6,55360 C_5 &= 0,62473. \end{aligned} \quad (26)$$

Решение этой системы уравнений приводит к функции

$$y_s = 0,99981x - 0,16572x^3 + 0,00750x^5.$$

График ее погрешностей дан на рис. 112 (точечный пунктир).

Мы видим, что максимальная невязка уменьшилась примерно в 4 раза и на всем протяжении применения формулы, т. е. для значений  $x$  от 0 до  $\frac{\pi}{2}$ , не превосходит 0,0001.

**§ 6. Аппроксимирование логарифмической функции многочленом.** Подберем приближенную формулу для функции  $y = \lg(x+1)$  в интервале  $0 \leq x \leq 1$ .

Рассмотрим несколько вариантов решения этой задачи. В качестве эмпирической функции будем подбирать:

- 1) двучлен;
  - 2) двучлен с фиксированной крайней точкой кривой (левая крайняя точка лежит в начале координат и фиксируется отсутствием свободного члена);
  - 3) трехчлен;
  - 4) трехчлен с теми же условиями, что и в п. 2.
- Вариант 1.* Отыскиваем функцию

$$y_s = C_1 x + C_2 x^2; \quad (27)$$



площадь, ограничиваемая соответствующей ей кривою, равна

$$\int_A^B y_s dx = \frac{B^2 - A^2}{2} C_1 + \frac{B^3 - A^3}{3} C_2. \quad (28)$$

Для заданной функции

$$y = \lg(1 + x) \quad (29)$$

площадь, ограничиваемая соответствующей ей кривою, равна

$$\begin{aligned} \int_A^B y dx &= \int_A^B \lg(1 + x) dx = \int_{A+1}^{B+1} \lg \xi d\xi = \\ &= 0,434294 \int_{A+1}^{B+1} \ln \xi d\xi = 0,434294 (\xi \ln \xi - \xi) \Big|_{A+1}^{B+1} = \\ &= (\xi \lg \xi - 0,434294 \xi) \Big|_{A+1}^{B+1} = [(1 + x) \lg(1 + x) - 0,434294(1 + x)] \Big|_A^B = \\ &= (1 + B) \lg(1 + B) - (1 + A) \lg(1 + A) - 0,434294(B - A). \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку для исследуемого интервала  $A = 0$ , равенства (28) и (30) примут вид:

$$\begin{aligned} \int_0^B y_s dx &= \frac{B^2}{2} C_1 + \frac{B^3}{3} C_2, \\ \int_0^B y dx &= (1 + B) \lg(1 + B) - 0,434294B. \end{aligned} \quad (31)$$

Разбиваем интервал  $(0, 1)$  на два равных участка. Имеем:  
для  $B = 0,5$

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} y_s dx &= 0,125000C_1 + 0,041667C_2, \\ \int_0^{0,5} y dx &= 1,5 \lg 1,5 - 0,217147 = 0,046990; \end{aligned}$$

для  $B = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^1 y_s dx &= 0,500000C_1 + 0,333333C_2, \\ \int_0^1 y dx &= 2 \lg 2 - 0,434294 = 0,167766. \end{aligned}$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 0,125000C_1 + 0,041667C_2 &= 0,046990, \\ 0,500000C_1 + 0,333333C_2 &= 0,167766, \end{aligned}$$

решая которую находим

$$y_s = 0,4163x - 0,1212x^2.$$

График невязок между значениями заданной и полученной функций дан на рис. 113 (сплошная кривая).

*Вариант 2.* Условие равенства площадей берем не два раза, а один (для всей площади), добавляя условие точного соответствия полученного и истинного значения функции при  $x = 1$ . Это дает нам систему уравнений

$$0,500000C_1 + 0,333333C_2 = 0,167766,$$

$$C_1 + C_2 = 0,301030,$$

решая которую получаем искомую функцию

$$y_0 = 0,4045x - 0,1035x^2.$$

График невязок между значениями заданной и полученной функций дан на рис. 113 (пунктир).

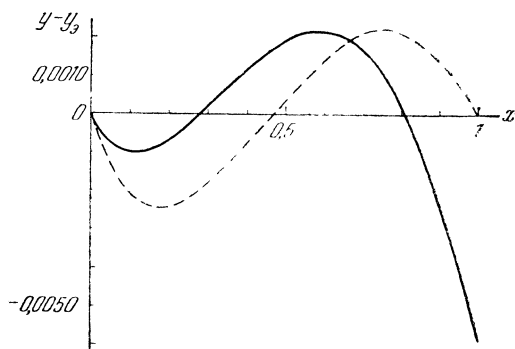


Рис. 113

*Вариант 3.* Для отыскиваемой функции

$$y_0 = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$$

имеем:

$$\int_A^B y_0 dx = \frac{B^2 - A^2}{2} C_1 + \frac{B^3 - A^3}{3} C_2 + \frac{B^4 - A^4}{4} C_3,$$

$$A = 0,$$

$$1) \quad B = \frac{1}{3}, \quad \int_0^{\frac{1}{3}} y_0 dx = \frac{1}{18} C_1 + \frac{1}{81} C_2 + \frac{1}{324} C_3;$$

$$2) \quad B = \frac{2}{3}, \quad \int_0^{\frac{2}{3}} y_0 dx = \frac{4}{18} C_1 + \frac{8}{81} C_2 + \frac{16}{324} C_3;$$

$$3) \quad B = 1, \quad \int_0^1 y_0 dx = \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{3} C_2 + \frac{1}{4} C_3.$$

Для заданной функции  $y = \lg(1+x)$  имеем:

$$\int_0^B y dx = (1+B) \lg(1+B) - 0,434294B,$$

$$1) \quad B = \frac{1}{3}, \quad \int_0^{\frac{1}{3}} y dx = \frac{4}{3} \lg \frac{4}{3} - \frac{0,434294}{3} = 0,021822;$$

$$2) \quad B = \frac{2}{3}, \quad \int_0^{\frac{2}{3}} y dx = \frac{5}{3} \lg \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \cdot 0,434294 = 0,080218;$$

$$3) \quad B = 1, \quad \int_0^1 y dx = 2 \lg 2 - 0,434294 = 0,167766.$$

Получаем систему уравнений

$$C_1 + \frac{2}{9} C_2 + \frac{1}{18} C_3 = 0,39280,$$

$$C_1 + \frac{4}{9} C_2 + \frac{4}{18} C_3 = 0,36098,$$

$$C_1 + \frac{6}{9} C_2 + \frac{9}{18} C_3 = 0,33553,$$

решая которую находим

$$y_9 = 0,43100x - 0,18620x^2 + 0,05733x^3.$$

График невязок между значениями заданной и полученной функций дан на рис. 114 (сплошная кривая).

*Вариант 4.* Используем два условия равенства площадей: для  $B=0,5$  и  $B=1$ , добавляя условие точного соответствия при  $x=1$ . Получаем систему уравнений

$$\frac{1}{8} C_1 + \frac{1}{24} C_2 + \frac{1}{64} C_3 = 0,046990,$$

$$\frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{3} C_2 + \frac{1}{4} C_3 = 0,167766,$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0,301030,$$

решение которой приводит к функции

$$y_9 = 0,42807x - 0,17413x^2 + 0,04708x^3.$$

График невязок между значениями заданной и полученной функций дан на рис. 114 (пунктир).

Сравнивая между собою сплошную и пунктирную линии рис. 113 и 114, мы видим, что накладываемое на систему уравнений условие точного соответствия ординат нескольких точек истинной и отыскиваемой кривой значительно уменьшает максимальную величину невязки между ними, что весьма важно.

Рассмотренные примеры показали нам, что возможно получить многочлены, значительно лучше представляющие заданные функции, чем результаты обычных разложений в ряд.

**§ 7. Применение метода наименьших квадратов в случае задания последовательности точек.** В предыдущих параграфах мы рассматривали экспериментальные данные, представленные в виде непрерывной кривой. Теперь перейдем к рассмотрению последовательности экспериментально полученных точек, расположенных с равными или неравными интервалами. Начнем с применения метода наименьших квадратов, в котором условие минимума интеграла квадратов невязок заменяется условием минимума суммы квадратов невязок по всем имеющимся точкам.

Пусть дано  $n$  точек с координатами  $(x_k, y_k)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), и для каждой из абсцисс  $x_k$  эмпирическое уравнение даст ординату  $y_{9k}$ .

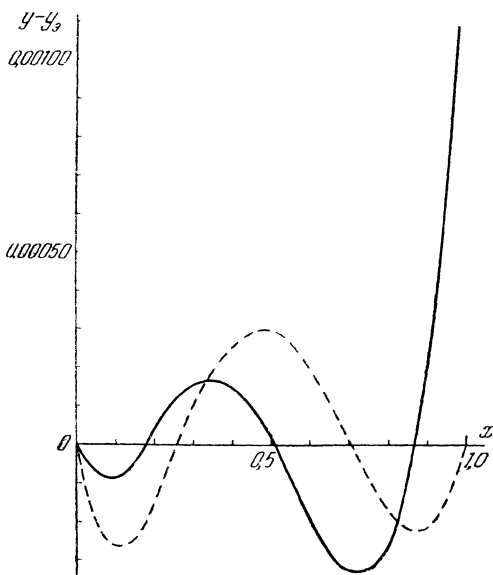


Рис. 114

Обозначим через  $S$  сумму

$$S = \sum_{k=1}^n (y_{\theta k} - y_k)^2 \quad (32)$$

и выявим условие ее минимума.

Если

$$y_{\theta} = F(x, a, b, c, \dots), \quad (33)$$

то условиями минимума будут

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \dots \quad (34)$$

Рассматривая по-прежнему функцию  $y_{\theta}$  в виде многочлена

$$y_{\theta} = a + bx + cx^2 + \dots, \quad (35)$$

откуда

$$S = \sum_{k=1}^n (a + bx_k + cx_k^2 + \dots - y_k)^2, \quad (36)$$

мы получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a + bx_k + cx_k^2 + \dots - y_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n (ax_k + bx_k^2 + cx_k^3 + \dots - x_k y_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n (ax_k^2 + bx_k^3 + cx_k^4 + \dots - x_k^2 y_k) &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (37)$$

которая при почленном суммировании принимает вид

$$\begin{aligned} na + b \sum_{k=1}^n x_k + c \sum_{k=1}^n x_k^2 + \dots &= \sum_{k=1}^n y_k, \\ a \sum_{k=1}^n x_k + b \sum_{k=1}^n x_k^2 + c \sum_{k=1}^n x_k^3 + \dots &= \sum_{k=1}^n x_k y_k, \\ a \sum_{k=1}^n x_k^2 + b \sum_{k=1}^n x_k^3 + c \sum_{k=1}^n x_k^4 + \dots &= \sum_{k=1}^n x_k^2 y_k, \\ &\dots \end{aligned} \quad (38)$$

Из этой системы определяются параметры  $a, b, c, \dots$

Сравнивая систему (38) с системой (10), мы видим, что вычисления несколько усложняются, так как для получения коэффициентов при неизвестных  $a, b, c, \dots$  в системе (38) нужно просуммировать различные степени абсцисс.

Пример. Даны следующие точки (см. рис. 115):

$x$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$y$	3	3	2	5	4	5	8	10	11	13

Рассмотрим для этого расположения точек две эмпирические зависимости: прямолинейную и параболическую.

Для прямолинейной зависимости

$$y_s = a + bx \quad (39)$$

мы должны составить систему уравнений

$$\begin{aligned} na + b \sum_{k=1}^n x_k &= \sum_{k=1}^n y_k, \\ a \sum_{k=1}^n x_k + b \sum_{k=1}^n x_k^2 &= \sum_{k=1}^n x_k y_k, \end{aligned}$$

коэффициенты которой получаем из табл. 105.

Имеем:

$$10a + 90b = 64,$$

$$90a + 1140b = 772.$$

Решение этой системы приводит к функции

$$y_s = 1,054 + 0,594x$$

(см. рис. 115).

Для параболической зависимости

$$y_s = a + bx + cx^2$$

составляем табл. 106, причем для уменьшения складываемых чисел вводим

переменную  $u = \frac{x}{2}$ . Получаем систему уравнений:

$$10a + 90b + 1140c = 64,$$

$$90a + 1140b + 16200c = 772,$$

$$1140a + 16200b + 245328c = 11120,$$

решение которой дает

$$y_s = 2,74 - 0,036x + 0,0350x^2$$

График этой функции также представлен на рис. 115.

Чтобы судить о том, какое из двух полученных уравнений лучше аппроксимирует данную совокупность точек, нужно вычислить сумму квадратов

невязок между истинными и полученными значениями ординат (см. табл. 107). Мы видим, что парабола дает сумму квадратов невязок в три раза меньшую, чем прямая и, следовательно, лучше аппроксимирует совокупность точек.

**§ 8. Способ равных сумм.** Необходимость суммирования различных степеней абсцисс и их произведений на ординаты сильно затрудняет применение метода наименьших квадратов в случае не целых абсцисс.

Рассмотрим теперь применение метода равных площадей, который в случае задания последовательности экспериментально полученных точек видоизменяется в способ равных сумм.

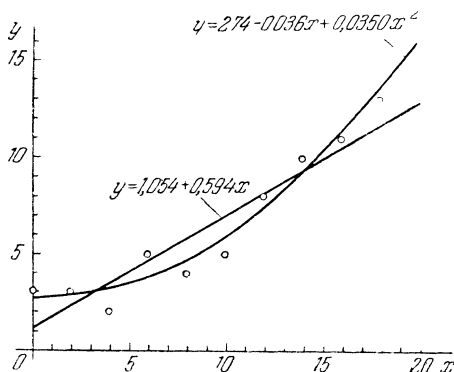


Рис. 115.

Из уравнений системы (38) используем только первое, но зато столько раз, сколько параметров эмпирической формулы мы будем определять.

Т а б л и ц а 105

$k$	$x_k$	$x_k^2$	$y_k$	$x_k y_k$
1	0	0	3	0
2	2	4	3	6
3	4	16	2	8
4	6	36	5	30
5	8	64	4	32
6	10	100	5	50
7	12	144	8	96
8	14	196	10	140
9	16	256	11	176
10	18	324	13	234
$\Sigma$	90	1140	64	772

Т а б л и ц а 106

$k$	$u_k$	$u_k^2$	$u_k^3$	$u_k^4$	$y_k$	$u_k^5$	$u_k^2 y$
1	0	0	0	0	3	0	0
2	1	1	1	1	3	3	3
3	2	4	8	16	2	4	8
4	3	9	27	81	5	15	45
5	4	16	64	256	4	16	64
6	5	25	125	625	5	25	125
7	6	36	216	1 296	8	48	288
8	7	49	343	2 401	10	70	490
9	8	64	512	4 096	11	88	704
10	9	81	729	6 561	13	117	1 053
$\Sigma$	45	285	2025	15 333	—	386	2 780
—	$x_k$	$x_k^2$	$x_k^3$	$x_k^4$	$y_k$	$x_k y_k$	$x_k^2 y$
$\Sigma$	90	1140	16 200	245 328	64	772	11 120

Для примера, рассмотренного в предыдущем параграфе, при нахождении прямолинейной зависимости между  $y$  и  $x$  получим

$$\begin{aligned}
 5a + b \sum_{k=1}^5 x_k &= \sum_{k=1}^5 y_k, \\
 5a + b \sum_{k=6}^{10} x_k &= \sum_{k=6}^{10} y_k.
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Суммы найдем из табл. 105 и для определения параметров  $a$  и  $b$  получим систему уравнений

$$5a + 20b = 17,$$

$$5a + 70b = 47,$$

решая которую находим уравнение прямой

$$y_0 = 1 + 0,600x.$$

Итак, приравнивание нулю сумм невязок по двум половинам исследуемого интервала в отдельности привело к уравнению, практически ничем не отличающемуся от того, которое было

Таблица 107

у	Прямая		Парабола	
	$y_0$	$\Delta^2$	$y_0$	$\Delta^2$
3	1,0	4,00	2,7	0,09
3	2,2	0,64	2,8	0,04
2	3,4	1,96	3,2	1,44
5	4,6	0,16	3,8	1,44
4	5,8	3,24	4,7	0,49
5	7,0	4,00	5,9	0,81
8	8,2	0,04	7,4	0,36
10	9,4	0,36	9,2	0,64
11	10,6	0,16	11,2	0,04
13	11,8	1,44	13,5	0,25
$\Sigma$	—	16,00	—	5,60

получено применением метода наименьших квадратов.

Для отыскания параболической зависимости приравняем нулю суммы невязок по первым четырем точкам, следующим трем и трем последним. Получим

$$4a + b \sum_{k=1}^4 x_k + c \sum_{k=1}^4 x_k^2 = \sum_{k=1}^4 y_k,$$

$$3a + b \sum_{k=5}^7 x_k + c \sum_{k=5}^7 x_k^2 = \sum_{k=5}^7 y_k, \quad (41)$$

$$3a + b \sum_{k=8}^{10} x_k + c \sum_{k=8}^{10} x_k^2 = \sum_{k=8}^{10} y_k,$$

что в соответствии с табл. 105 даст нам систему уравнений

$$4a + 12b + 56c = 13,$$

$$3a + 30b + 308c = 17,$$

$$3a + 48b + 776c = 34.$$

Решая эту систему, получим параболу

$$y_0 = 3,29 - 0,224x + 0,0449x^2.$$

Прямая и парабола, найденные по способу равных сумм, даны на рис. 116. Квадраты невязок между истинными и полученными значениями ординат приведены в табл. 108.

Сравнивая табл. 107 и 108, мы видим, что в пределах точности вычислений сумма квадратов невязок для прямой не отличается от полученной по методу наименьших квадратов; для параболы же эта сумма отличается на 10%, что соответствует средней квадратичной ошибке на 5% большей, чем ошибка, получаемая по способу наименьших квадратов. Зато вычисление по способу равных сумм значительно проще. Кроме того, при желании проверить правильность полученной формулы мы можем повторить весь расчет, иначе сгруппировав точки. Возьмем, например, три первых, три следующих и четыре последних точки. Тогда получим систему уравнений

$$3a + 6b + 20c = 8,$$

$$3a + 24b + 200c = 14,$$

$$4a + 60b + 920c = 42,$$

решение которой даст параболу

$$y_0 = 2,50 - 0,042x + 0,0375x^2,$$

изображенную на рис. 116 пунктиром.

Г а б л и ц а 108

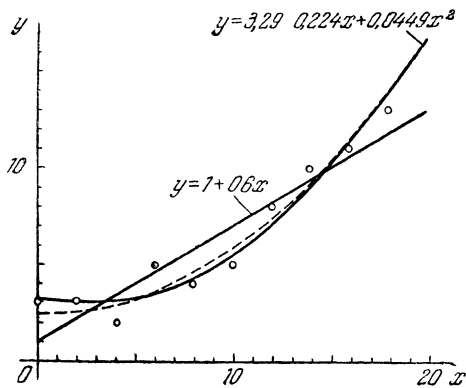


Рис. 116.

y	Прямая		Парабола	
	$y_0$	$\Delta^2$	$y_0$	$\Delta^2$
3	1,0	4,00	3,3	0,09
3	2,2	0,64	3,0	0
2	3,4	1,96	3,1	1,21
5	4,6	0,16	3,5	2,25
4	5,8	3,24	4,4	0,16
5	7,0	4,00	5,5	0,25
8	8,2	0,04	7,1	0,81
10	9,4	0,36	9,0	1,00
11	10,6	0,16	11,2	0,04
13	11,8	1,44	13,7	0,49
$\Sigma$	—	16,00	—	6,30

Некоторое отличие последней параболы от предыдущей показывает, что вследствие сравнительно небольшого числа точек, каждая из них оказывает довольно ощутимое влияние на очертание кривой.

§ 9. Подбор функции вида  $y = a + bx^c$ . До сих пор мы рассматривали эмпирические формулы, для получения которых можно было применить метод наименьших квадратов. Теперь перейдем к формулам иного вида, получение которых этим методом затруднительно.

Для последовательности точек, приведенной на рис. 117, рассмотрим зависимость вида

$$y = a + bx^c. \tag{42}$$

Метод наименьших квадратов к отысканию параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  применять не следует, так как для нахождения минимума функции  $\sum_{k=1}^n (a + bx_k^c - y_k)^2$  мы должны решить систему уравнений

$$\sum_{k=1}^n (a + bx_k^c - y_k) = 0,$$

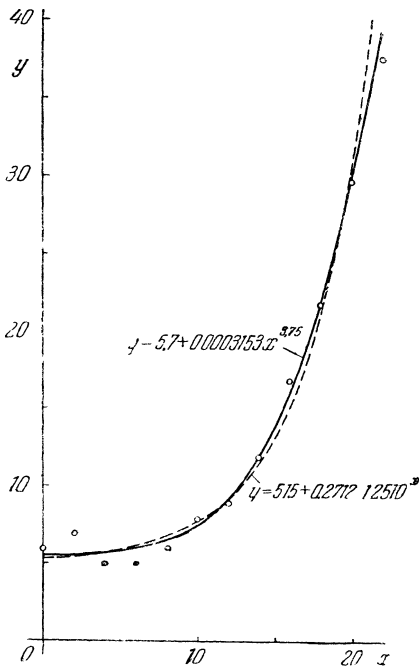


Рис. 117.



$$\sum_{k=1}^n x_k^c (a + bx_k^c - y_k) = 0, \quad (43)$$

$$\sum_{k=1}^n x_k^c \ln x_k (a + bx_k^c - y_k) = 0,$$

что хотя и возможно, но чрезвычайно трудно. Применяя же метод равных сумм, мы можем без большого труда построить эмпирическую формулу требуемого вида.

Разбив имеющиеся двенадцать точек на три группы по четыре точки и приравнявая для каждой группы суммы ординат истинной и отыскиваемой кривой, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} 4a + b(0 + 2^c + 4^c + 6^c) &= 23, \\ 4a + b(8^c + 10^c + 12^c + 14^c) &= 35, \\ 4a + b(16^c + 18^c + 20^c + 22^c) &= 107. \end{aligned} \quad (44)$$

Эта система позволяет исключить из нее неизвестные  $a$  и  $b$  и прийти к одному уравнению, содержащему лишь неизвестное  $c$  и решаемому приближенными методами. Начав с исключения неизвестного  $a$ , мы получим

$$\begin{aligned} b[(8^c + 10^c + 12^c + 14^c) - (0 + 2^c + 4^c + 6^c)] &= 12, \\ b[(16^c + 18^c + 20^c + 22^c) - (8^c + 10^c + 12^c + 14^c)] &= 72. \end{aligned} \quad (45)$$

Исключая делением неизвестное  $b$ , получаем уравнение

$$\Phi(c) = \frac{(16^c + 18^c + 20^c + 22^c) - (8^c + 10^c + 12^c + 14^c)}{(8^c + 10^c + 12^c + 14^c) - (0 + 2^c + 4^c + 6^c)} = 6, \quad (46)$$

для решения которого найдем значения  $\Phi(c)$  для нескольких значений  $c$ :

0	8	16	$c = 1,$
2	10	18	
4	12	20	
6	14	22	$\Phi(1) = \frac{76 - 44}{44 - 12} = 1;$
$\Sigma$ 12	44	76	
0	64	256	$c = 2,$
4	100	324	
16	144	400	
36	196	484	$\Phi(2) = \frac{1464 - 504}{504 - 56} = 2,14;$
$\Sigma$ 56	504	1464	
0	512	4096	$c = 3,$
8	1000	5832	
64	1728	8000	
216	2744	10648	$\Phi(3) = \frac{28576 - 5984}{5984 - 288} = 3,97;$
$\Sigma$ 288	5984	28576	
0	4096	65536	$c = 4,$
16	10000	104976	
256	20736	160000	
1296	38416	234256	$\Phi(4) = \frac{564768 - 73248}{73248 - 1568} = 6,86.$
$\Sigma$ 1568	73248	564768	

Построив по 4 точкам график функции  $\Phi(c)$  (рис. 118), мы видим, что искомое значение  $c \approx 3,75$ . Более точно определять показатель степени не требуется.

Определив  $c$ , составляем таблицу значений  $x^c$  (табл. 109). Затем из первого уравнения системы (45) находим

$$b = 0,0003153,$$

после чего любое из уравнений системы (44) дает нам

$$a = 5,67.$$

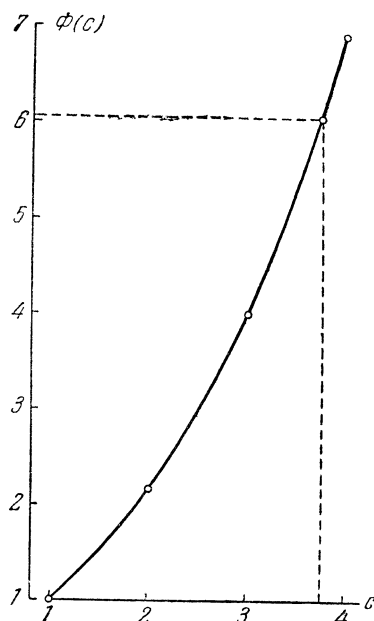


Рис. 118.

Т а б л и ц а 109

$x$	$\lg x$	$3,75 \lg x$	$x^{3,75} = x^c$
2	0,3010	1,1288	13
4	0,6021	2,2575	181
6	0,7782	2,9182	828
8	0,9031	3,3866	2435
10	1,0000	3,7500	5624
12	1,0792	4,0470	11140
14	1,1461	4,2979	19850
16	1,2041	4,4154	32770
18	1,2553	4,7074	50980
20	1,3010	4,8788	75650
22	1,3424	5,0340	108150

Итак, решение представляется функцией

$$y_a = 5,67 + 0,0003153x^{3,75}; \quad (47)$$

график этой функции дан на рис. 117.

Решить эту же задачу можно было бы и подбором. Представив зависимость (42) в виде

$$y - a = bx^c, \quad (48)$$

прологарифмировав ее:

$$\lg(y - a) = \lg b + c \lg x \quad (49)$$

и обозначив

$$\lg(y - a) = \eta, \lg x = \xi, \lg b = \beta,$$

получим линейную зависимость

$$\eta = \beta + c\xi, \quad (50)$$

параметры  $\beta$  и  $c$  которой найдем из чертежа.

Затруднение состоит в том, что мы не знаем величины  $a$  и должны действовать путем подбора: взять несколько значений  $a$  и установить, для какого из этих значений имеет место линейная зависимость. При этом точки, для которых  $y \leq a$ , выпадут из рассмотрения, так как для них нельзя будет найти  $\lg(y - a)$ .

Для последовательности точек, данной на рис. 117, выполним построение для значений

$$a = 4, 5, 6, 7.$$

Расположение точек в координатах  $(\xi, \eta)$  дано на рис. 119.

Насколько можно судить по чертежу, значение  $a$  лежит между 5 и 6, а значение коэффициента  $c$  (являющегося в координатах  $(\xi, \eta)$  угловым коэффициентом пунктирной прямой) — порядка 3,5. Однако такое определение значений  $a$  и  $c$  не является достаточно надежным.

Таким образом, для случаев, аналогичных рассматриваемому, обычно рекомендуемый способ перехода к логарифмическим координатам оказывается неприемлемым.

§ 10. Подбор функции вида  $y = a + bc^x$ . Методом равных сумм можно получить и зависимости вида

$$y = a + bc^x,$$

деля рассматриваемый интервал абсцисс на три части с равным количеством точек.

Для точек, приведенных на рис. 117, деля их на три группы по четыре точки в каждой, получаем [ср. (44)]:

$$\begin{aligned} 4a + b(c^0 + c^2 + c^4 + c^6) &= 23, \\ 4a + b(c^8 + c^{10} + c^{12} + c^{14}) &= 35, \\ 4a + b(c^{16} + c^{18} + c^{20} + c^{22}) &= 107. \end{aligned} \quad (51)$$

Исключая неизвестное  $a$ , получим

$$\begin{aligned} b(c^8 - 1)(c^0 + c^2 + c^4 + c^6) &= 12, \\ b(c^{16} - c^8)(c^0 + c^2 + c^4 + c^6) &= 72, \end{aligned} \quad (52)$$

а исключая  $b$ , найдем

$$c^8 = 6. \quad (53)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} c &= \sqrt[8]{6} = 1,2510, \\ c^2 &= 1,5651, \quad c^6 = 3,8337, \\ c^4 &= 2,4495, \quad c^{k+8} = 6c^k, \\ c^0 + c^2 + c^4 + c^6 &= 8,8482. \end{aligned}$$

Из первой строки системы (52) получаем:

$$\begin{aligned} b(c^0 + c^2 + c^4 + c^6) &= \frac{12}{5} = 2,4, \\ b &= \frac{2,4}{8,8482} = 0,2712, \end{aligned}$$

и, наконец, из первого уравнения системы (51)

$$4a + 2,4 = 23, \quad a = 5,15.$$

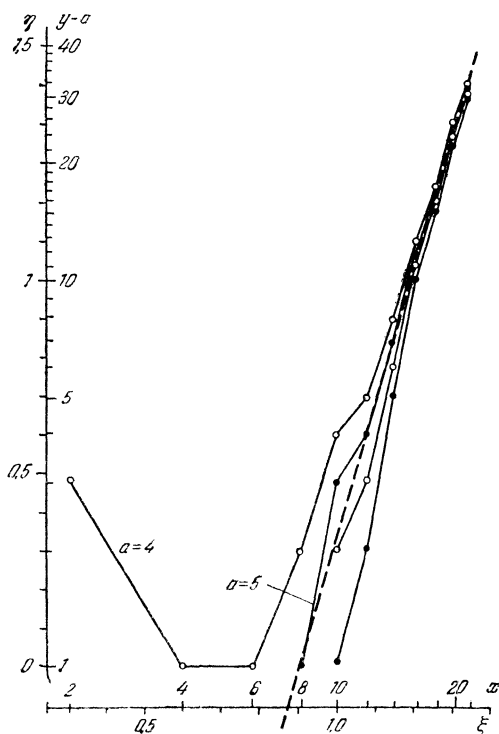


Рис. 119.

Итак,

$$y_0 = 5,15 + 0,2712 \cdot 1,2510^x.$$

График этой функции дан на рис. 117 (пунктир). Он, так же как и график функции (47), достаточно хорошо удовлетворяет данной совокупности точек, и вопрос о том, какое же уравнение — степенное или показательное лучше брать, должен решаться в зависимости от физической сущности рассматриваемого процесса.

**§ 11. Преобразование координат.** Рассмотрим один вопрос, оставляемый без внимания авторами работ, посвященных составлению эмпирических формул, но тем не менее весьма существенный.

При построении степенных или показательных эмпирических формул без свободного члена рекомендуется поступать следующим образом.

Пусть отыскивается зависимость вида

$$y = ax^b. \quad (54)$$

Логарифмируя, получим

$$\lg y = \lg a + b \lg x. \quad (55)$$

Обозначим

$$\lg x = \xi, \quad \lg y = \eta, \quad \lg a = \alpha;$$

тогда зависимость между  $\xi$  и  $\eta$  будет линейной:

$$\eta = \alpha + b\xi. \quad (56)$$

Найдя ее с помощью метода наименьших квадратов, от переменных  $\xi$  и  $\eta$  переходят к старым координатам  $x$  и  $y$ , и задача считается решенной.

Аналогично при отыскании функции вида

$$y = ab^x, \quad (57)$$

логарифмируя, получают

$$\lg y = \lg a + x \lg b. \quad (58)$$

Обозначая

$$\lg y = \eta, \quad \lg a = \alpha, \quad \lg b = \beta,$$

переходят к отысканию линейной зависимости

$$\eta = \alpha + \beta x, \quad (59)$$

после чего вновь переходят к  $y$ , и расчет закончен.

Как мы увидим в дальнейшем, таким приемом можно пользоваться лишь тогда, когда заведомо известно, что для экспериментальных данных можно составить ту или иную эмпирическую формулу, причем в них нет никакого разброса точек. В противном случае можно прийти к совершенно неправильным результатам.

**Пример.** Дана последовательность опытных точек:

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y$	0,5	0,5	1	2	4	5	6	8	12	15

и необходимо найти соответствующую им эмпирическую формулу вида

$$y = ax^b. \quad (60)$$

Поступим сперва согласно общепринятым рекомендациям. Введем новые переменные и построим данные точки в новой системе координат (рис. 120).

Составим требуемую систему уравнений

$$\begin{aligned} na + b \sum_{k=1}^n \xi_k &= \sum_{k=1}^n \eta_k, \\ \alpha \sum_{k=1}^n \xi_k + b \sum_{k=1}^n \xi_k^2 &= \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k \end{aligned} \quad (61)$$

с помощью табл. 110. Имеем:

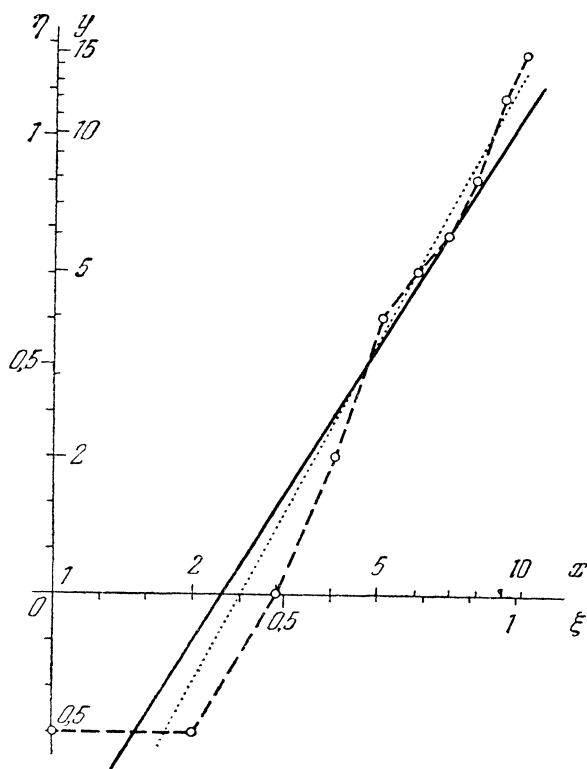


Рис. 120.

$$10a + 6,559b = 4,936,$$

$$6,559a + 5,214b = 4,732.$$

Решая, получаем:

$$\alpha = -0,581 = \lg a,$$

$$a = 0,262, \quad b = 1,639.$$

а следовательно,

$$\eta_0 = -0,581 + 1,639\xi \quad \text{и}$$

$$y_0 = 0,262x^{1,639}.$$

Графики этих функций даны на рис. 120, 121 (сплошные линии).

Все вычисления проведены правильно, однако мы видим, что в координатах  $(x, y)$  полученная кривая весьма плохо аппроксимирует заданную последовательность точек (см. рис. 121). Объясняется это тем, что нельзя применять метод наименьших квадратов в его чистой форме при наличии преобразования координат. Функция, удовлетворяющая условию минимума суммы квадратов невязок в координатах  $(\xi, \eta)$ , не будет удовлетворять такому условию после перехода к основным координатам.

Нужно обязательно учитывать то обстоятельство, что если в ординатах  $y$  невязка равна

$$y_0 - y = \Delta, \quad (62)$$

т. е. если

$$y_0 = y + \Delta,$$

то при переходе к новым ординатам  $\eta = f(y)$  мы имеем

$$\eta_0 = f(y_0) = f(y + \Delta) \approx f(y) + \Delta f'(y) = \eta + \Delta f'(y), \quad (63)$$

откуда

$$\Delta = \frac{\eta_9 - \eta}{f'(y)}, \quad (64)$$

и условие минимума суммы квадратов невязок будет выглядеть по-новому:

$$S_\eta = \sum_{k=1}^n \frac{1}{f'(y_k)} (\eta_{9k} - \eta_k) = S_{\eta \min}. \quad (65)$$

При переходе от  $y$  к  $\eta = \lg y$ , имеем

$$f(y) = \lg y, \quad f'(y) = \frac{0,4343}{y}, \quad \frac{1}{f'(y)} = 2,3026 y. \quad (66)$$

Следовательно, при  $\eta_9 = a + b\xi$  получим

$$S_\eta = 2,3026 \sum_{k=1}^n y_k (a + b\xi_k - \eta_k)^2. \quad (67)$$

Т а б л и ц а 110

$k$	$\xi_k$	$\xi_k^2$	$\eta_k$	$\xi_k \eta_k$
1	0	0	-0,301	0
2	0,301	0,091	-0,301	-0,091
3	0,477	0,228	0	0
4	0,602	0,362	0,301	0,181
5	0,699	0,489	0,602	0,421
6	0,778	0,605	0,699	0,544
7	0,845	0,714	0,778	0,657
8	0,903	0,815	0,903	0,815
9	0,954	0,910	1,079	1,029
10	1,000	1,000	1,176	1,176
$\Sigma$	6,559	5,214	4,936	4,732

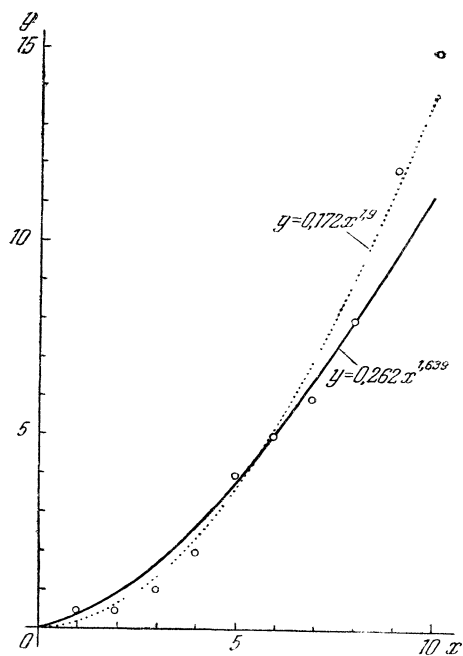


Рис. 121.

Для удовлетворения условия  $S_\eta = S_{\eta \min}$  нужно, чтобы

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n y_k (a + b\xi_k - \eta_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n y_k \xi_k (a + b\xi_k - \eta_k) &= 0, \end{aligned} \quad (68)$$

т. е.  $a$  и  $b$  определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} a \sum_{k=1}^n y_k + b \sum_{k=1}^n y_k \xi_k &= \sum_{k=1}^n y_k \eta_k, \\ a \sum_{k=1}^n y_k \xi_k + b \sum_{k=1}^n y_k \xi_k^2 &= \sum_{k=1}^n y_k \xi_k \eta_k. \end{aligned} \quad (69)$$

Только в этом случае мы получим эмпирическую кривую, соответствующую условиям метода наименьших квадратов и удовлетворяющую экспериментальным данным наилучшим образом. Вычислительная работа при этом значительно увеличивается, в чем мы убедимся, проведя расчет для нашего примера.

Составим табл. 111; получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} 54a + 47,259b &= 48,685, \\ 47,259a + 42,706b &= 45,178, \end{aligned}$$

решая которую находим:

$$\begin{aligned} a &= -0,7647 = \lg a, \\ a &= 0,172, \quad b = 1,904 \approx 1,9, \end{aligned}$$

а следовательно,

$$\eta_s = -0,7647 + 1,9\xi \quad \text{и} \quad y_s = 0,172x^{1,9}.$$

Графики этих функций даны на рис. 120, 121 (точечный пунктир).

Таблица 111

$k$	$x_k$	$y_k$	$\xi_k$	$\eta_k$	$y_k \xi_k$	$y_k \eta_k$	$y_k \xi_k^2$	$y_k \xi_k \eta_k$
1	1	0,5	0	-0,301	0	-0,150	0	0
2	2	0,5	0,301	-0,301	0,150	-0,150	0,045	-0,045
3	3	1	0,477	0	0,477	0	0,228	0
4	4	2	0,602	0,301	1,204	0,602	0,725	0,362
5	5	4	0,699	0,602	2,796	2,408	1,954	1,683
6	6	5	0,778	0,699	3,890	3,495	3,026	2,719
7	7	6	0,845	0,778	5,070	4,668	4,284	3,944
8	8	8	0,903	0,903	7,224	7,224	6,523	6,523
9	9	12	0,954	1,079	11,448	12,948	10,921	12,352
10	10	15	1,000	1,176	15,000	17,640	15,000	17,640
$\Sigma$	—	54	—	4,936	47,259	48,685	42,706	45,178

**§ 12. Подбор степенной функции способом равных сумм.** Построим эмпирическую формулу для точек только что рассмотренного примера, применяя способ равных сумм. Для формулы вида

$$y_s = ax^b, \quad (70)$$

сгруппировав данные 10 точек в две группы по пять точек, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a(1^b + 2^b + 3^b + 4^b + 5^b) &= 8, \\ a(6^b + 7^b + 8^b + 9^b + 10^b) &= 46, \end{aligned} \quad (71)$$

после чего, исключая  $a$ , найдем

$$\Phi(b) = \frac{6^b + 7^b + 8^b + 9^b + 10^b}{1^b + 2^b + 3^b + 4^b + 5^b} = 5,75. \quad (72)$$

Имеем для разных значений  $b$ :

$$\Phi(0) = \frac{5}{5} = 1, \quad \Phi(1) = \frac{40}{15} = 2,67, \quad \Phi(2) = \frac{330}{55} = 6.$$

Построив кривую значений  $\Phi(b)$ , мы видим (рис. 122), что искомое значение  $b$  равно 1,95 и округленно может быть принято равным 2. Тогда первое из уравнений системы (71) дает

$$55a = 8, \quad a = 0,145;$$

следовательно,

$$y_0 = 0,145x^2. \quad (73)$$

Предоставляется читателю построить график этой функции и убедиться в том, что он хорошо соответствует данным точкам.

**§ 13. Подбор показательной функции способом наименьших квадратов.** Построим методом наименьших квадратов с уче-

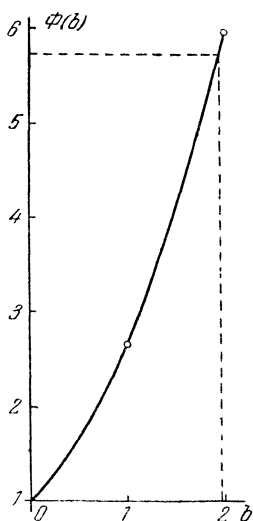


Рис. 122.

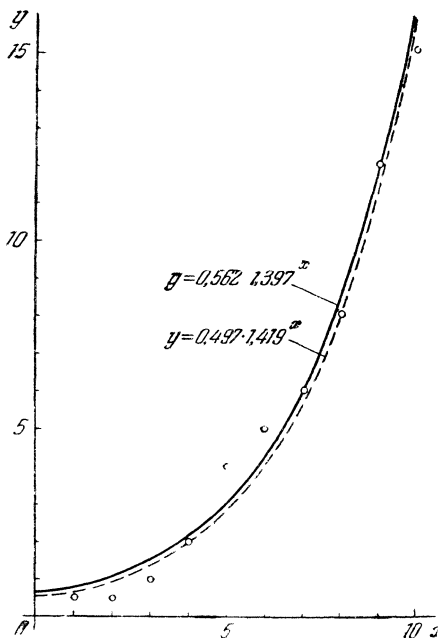


Рис. 123.

том преобразования координат показательную функцию для точек предыдущего примера.

Для формулы вида

$$y_0 = ab^x, \quad (74)$$

логарифмируя, получаем:

$$\lg y_0 = \lg a + x \lg b. \quad (75)$$

Обозначаем:

$$\lg y_0 = \eta_0, \quad \lg a = \alpha, \quad \lg b = \beta;$$

тогда

$$\eta_0 = \alpha + \beta x. \quad (76)$$

Поскольку связь между  $y$  и  $\eta$  такая же, как и для уже рассмотренной степенной зависимости, уравнения для определения  $\alpha$  и  $\beta$  аналогичны ранее полученным уравнениям (69) с той только разницей, что вместо  $\xi$  должно



стоять само  $x$ :

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{k=1}^n y_k + \beta \sum_{k=1}^n y_k x_k &= \sum_{k=1}^n y_k \eta_k, \\ \alpha \sum_{k=1}^n y_k x_k + \beta \sum_{k=1}^n y_k x_k^2 &= \sum_{k=1}^n y_k x_k \eta_k. \end{aligned} \quad (77)$$

Вычисления приведены в табл. 112; получаем систему

$$\begin{aligned} 54\alpha + 426,50\beta &= 48,685, \\ 426,5\alpha + 3601,5\beta &= 418,37, \end{aligned} \quad (78)$$

из которой

$$\begin{aligned} \alpha &= -0,250 = \lg a, \quad a = 0,562; \\ \beta &= 0,1453 = \lg b, \quad b = 1,397, \end{aligned}$$

а следовательно,

$$y_s = 0,562 \cdot 1,397^x. \quad (79)$$

График этой функции дан на рис. 123.

Т а б л и ц а 112

$k$	$x_k$	$y_k$	$\eta_k$	$y_k x_k$	$y_k \eta_k$	$y_k x_k^2$	$y_k x_k \eta_k$
1	1	0,5	-0,301	0,5	-0,150	0,5	-0,15
2	2	0,5	-0,301	1	-0,150	2	-0,30
3	3	1	0	3	0	9	0
4	4	2	0,301	8	0,602	32	2,41
5	5	4	0,602	20	2,408	100	12,04
6	6	5	0,699	30	3,495	180	20,97
7	7	6	0,778	42	4,668	294	32,68
8	8	8	0,903	64	7,224	512	57,79
9	9	12	1,079	108	12,948	972	116,53
10	10	15	1,176	150	17,640	1500	176,40
$\Sigma$	—	54	—	426,5	48,685	3601,5	418,37

§ 14. Подбор показательной функции способом равных сумм. Построим зависимость  $y = ab^x$  методом равных сумм.

Для двух групп по пять точек получаем систему

$$\begin{aligned} a(b + b^2 + b^3 + b^4 + b^5) &= 8, \\ a(b^6 + b^7 + b^8 + b^9 + b^{10}) &= ab^5(b + b^2 + b^3 + b^4 + b^5) = 46. \end{aligned} \quad (80)$$

Освобождаясь от  $a$ , находим

$$b^5 = \frac{46}{8} = 5,75,$$

откуда

$$b = 1,419.$$

Далее имеем:

$$b + b^2 + b^3 + b^4 + b^5 = b \frac{b^5 - 1}{b - 1} = 1,419 \cdot \frac{4,75}{0,419} = 16,1,$$

и из первого уравнения системы (80) находим

$$a = \frac{8}{16,1} = 0,497.$$

Следовательно,

$$y_3 = 0,497 \cdot 1,419^x. \quad (81)$$

График полученной функции дан на рис. 123.

**§ 15. Полиномиальные кривые.** Мы рассмотрели методы получения эмпирических формул, имеющих вид алгебраического многочлена, степенной и показательной функций. Рассмотрим теперь, какого именно вида эмпирическую формулу можно получить для того или иного задания кривой или группы точек, причем в случае задания группы точек нужно провести по ним на глаз кривую и исходить из ее свойств.

Начнем с формул, имеющих вид алгебраического многочлена.

Линейная зависимость

$$y = a + bx \quad (82)$$

элементарна и особых пояснений не требует.

Квадратичная зависимость

$$y = a + bx + cx^2 \quad (83)$$

преобразованием

$$y = c \left( x^2 + \frac{b}{c} x \right) + a = c \left( x + \frac{b}{2c} \right)^2 + \left( a - \frac{b^2}{4c^2} \right)$$

приводится к виду

$$\eta = c\xi^2, \quad (84)$$

где

$$\eta = y - \left( a - \frac{b^2}{4c^2} \right), \quad \xi = x + \frac{b}{2c}.$$

График этой функции представляет собой параболу с вертикальной осью и с вершиной в точке  $\left( -\frac{b}{2a}, a - \frac{b^2}{4c^2} \right)$ .

Основные условия, выполнение которых необходимо для подбора квадратичной функции, следующие: 1) кривая не должна иметь ни одного перегиба, 2) не должна иметь асимптот, 3) кривизна ее должна изменяться плавно.

График функции — многочлена третьей степени

$$y_3 = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (85)$$

представляет собою кривую, обе полуветви которой можно совместить, повернув одну из них на  $180^\circ$  вокруг точки перегиба кривой. Эта точка может произвольно располагаться на плоскости координат.

В зависимости от наклона, который имеет кривая в точке перегиба по отношению к проходящей через эту точку горизонтальной прямой, она может пересекаться с ней в трех точках или только в одной (рис. 124).

Благодаря наличию точки перегиба, многочлен третьей степени во многих случаях хорошо согласуется с опытными кривыми или группами точек. Так, например, для группы точек, приведенной на рис. 125 и уже неоднократно рассмотренной нами, можно подобрать многочлен третьей степени:

$$y_3 = -1,74 + 1,448x - 0,1875x^2 + 0,02084x^3.$$

Если мы хотим, чтобы эмпирическая кривая в точке пересечения ее с осью ординат имела горизонтальное направление, мы должны исключить из уравне-

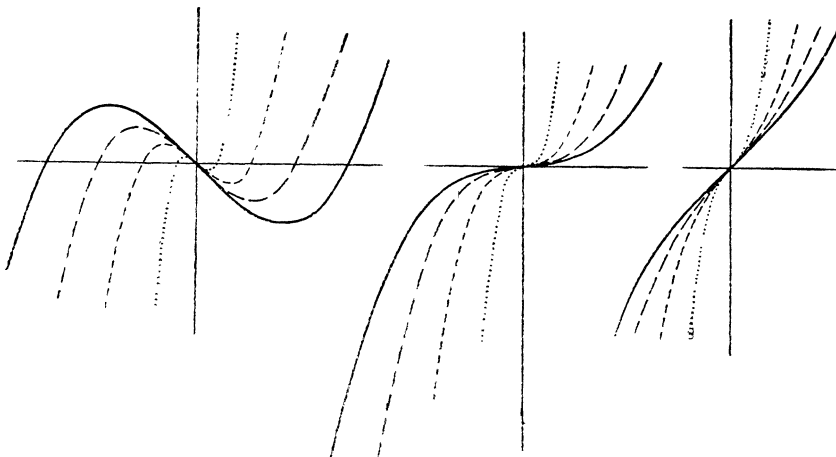


Рис. 124.

ния кривой член, содержащий  $x$  в первой степени. Тогда, если сохранить члены, содержащие  $x^2$  и  $x^3$ , получим уравнение

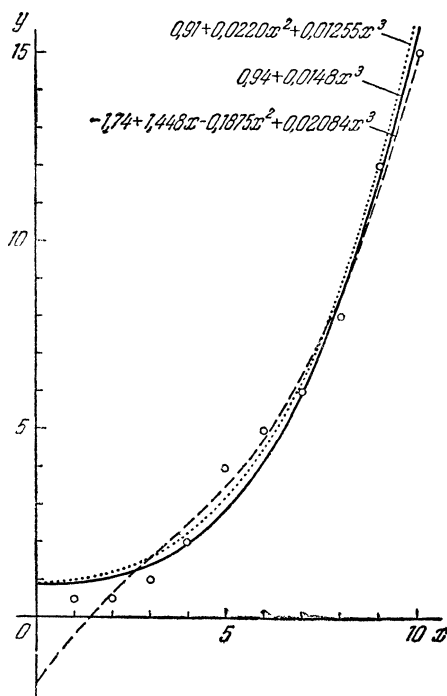


Рис. 125.

$$y_s = 0,91 + 0,0220x^2 + 0,01255x^3,$$

если же сохранить только член, содержащий  $x^3$ , то получим уравнение

$$y_s = 0,94 + 0,0148x^3.$$

При подборе многочленов четвертой и более высоких степеней степень многочлена должна быть на 2 единицы выше числа перегибов той кривой, для которой подбирается уравнение. Все члены многочлена используются редко. Чаще всего рассматриваются формулы, содержащие только свободный член и член с наибольшей степенью  $x$ .

**§ 16. Графики степенной и показательной функций.** Степенная функция

$$y = ax^n \quad (86)$$

при  $a=1$  и  $n > 0$  дает графики, приведенные на рис. 126. При  $x > 0$  для всех значений  $n$  кривые расположены в I четверти; при  $x < 0$  во II четверти для четных  $n$  и в III четверти для  $n$  нечетных и дробных с нечетными числителями и знаменателями.

Если ограничиться рассмотрением только положительных значений  $x$  и перейти к логарифмическим координатам, то получим зависимость

$$\eta = n\xi, \quad (87)$$

где  $\eta = \lg y$ ,  $\xi = \lg x$  (см. рис. 127).

На рис. 128 даны графики функции

$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

для  $x > 0$ . При всех значениях  $m$  кривые, приведенные на этом рисунке, в отличие от кривых, данных на рис. 126, имеют асимптоты. Соответствующие им в логарифмических координатах ( $\eta$ ,  $\xi$ ) прямые приведены также на рис. 127 (пунктир).

К зависимости вида

$$y = \frac{a}{x} \quad (88)$$

можно привести и дробно-линейную функцию

$$y = \frac{Ax + B}{Cx + D}. \quad (89)$$

Сократив дробь на коэффициент  $C$ , будем рассматривать функцию вида

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax + b}{x + c} = a \frac{x + \frac{b}{a}}{x + c} = \\ &= a + a \frac{\frac{b}{a} - c}{x + c} = a + \\ &+ \frac{d}{x + c} \quad (d = b - ac). \quad (90) \end{aligned}$$

Если обозначить

$$y - a = \eta, \quad x + c = \xi,$$

то получим

$$\eta = \frac{d}{\xi}.$$

Это есть уравнение гиперболы, но с пересечением осей не в начале координат, а в точке  $(-c, a)$ . Следовательно, если данная кривая имеет вид отрезка гиперболы, то получив уравнение гиперболы со смещенным пересечением осей, можно привести его к дробно-линейной форме.

Показательная функция

$$y = a^x \quad (91)$$

дает кривые, изображенные на рис. 129. При всех  $a \neq 1$  кривые асимптотически приближаются к оси абсцисс.

Если исследуемая кривая хотя бы в одной точке имеет горизонтальное направление и эту особенность поведения кривой необходимо отметить в эмпирической формуле, нельзя подбирать ее в виде показательной функции, так как направление всех получаемых для этой функции кривых становится горизонтальным лишь в бесконечности.

**§ 17. Кривая Гаусса.** В ряде инженерных вопросов весьма важную роль играет гауссова кривая нормального распределения отклонений. Не вдаваясь

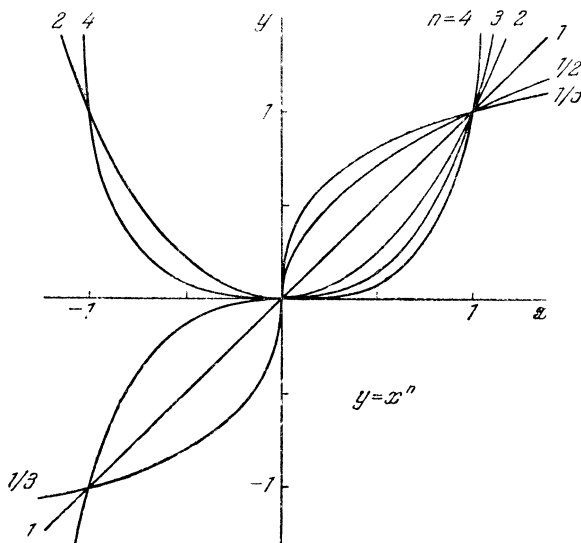


Рис. 126.

в теорию вероятностей и в исследование структуры формулы Гаусса, рассмотрим условия ее применения на примере технических задач.

Пусть изготовлено  $N$  стержней, номинальная (требуемая) длина которых равна  $L$ . Измеряя с высокой точностью действительную длину всех стержней,

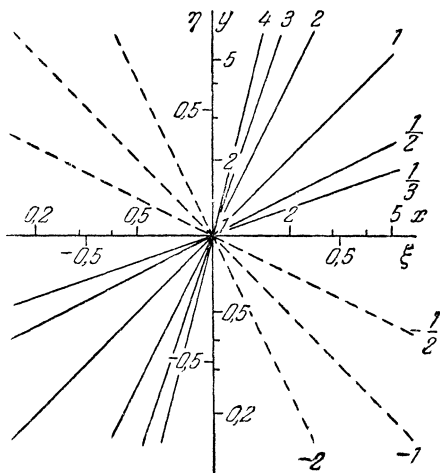


Рис. 127.

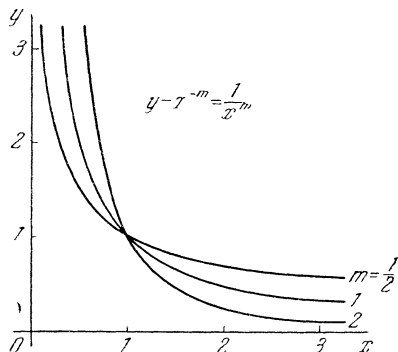


Рис. 128.

получим различные значения, отклонения которых от номинальной длины могут быть как положительными, так и отрицательными. Отклонение длины  $l_k$   $k$ -го стержня от номинального размера  $L$  обозначим  $x_k$ :

$$l_k = L + x_k, \quad x_k = l_k - L.$$

Рассортируем стержни на группы так, чтобы в каждой группе находились стержни примерно одинаковой длины, отличающиеся друг от друга не более чем на величину  $\Delta x$ .

Пример 1. Дана партия в 359 деталей, сгруппированных по отклонениям  $x$  (мм) от номинальной длины с интервалами в  $\Delta x = 0,01$  мм. С отклонениями, например от  $+0,02$  до  $+0,03$  мм, выявлено 35 стержней и т. д. (см. табл. 113).

Причиной появления этих отклонений от номинального размера могли явиться неправильная наладка

станка, недостаточная жесткость закрепления стержня и резца в процессе обточки, нагрев стержня затупившимся резцом и т. д.

Распределение таких случайных отклонений подчиняется закону Гаусса — закону нормального распределения отклонений, выражаемого формулой

$$y = \varphi(x) = Nae^{-b(x-c)^2} = Ae^{-b(x-c)^2}$$

$$(A = Na).$$

$$(92)$$

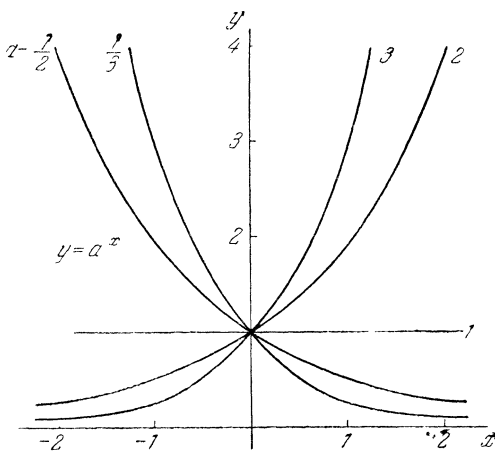


Рис. 129.

Эта формула имеет следующий физический смысл: интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx$$

представляет собою наиболее вероятное количество изделий из партии в  $N$  деталей, у которых отклонения от номинального размера будут находиться в интервале от  $x_1$  до  $x_2$ .

Параметры  $a$ ,  $b$  и  $c$  определяются следующим образом.

Таблица 113

1. Параметр  $c$  есть среднее арифметическое из всех замеренных значений  $x$  (абсцисса  $x=c$  соответствует максимальной ординате кривой, являющейся ее осью симметрии):

$$c = \frac{\sum_{m=1}^M x_m n_m}{N}, \quad (93)$$

где  $M$  — число групп,  $x_m$  — среднее значение  $x$  в  $m$ -й группе,  $n_m$  — число стержней данной группы.

2. Параметр

$$b = \frac{1}{2\sigma^2}, \quad (94)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия (рассеяние), определяемая по формуле

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M (x_m - c)^2 n_m, \quad (95)$$

а  $\sigma$  — среднее квадратичное отклонение размеров стержней данной партии от среднего их значения  $L + c$ . Раскрывая скобки, получим

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M x_m^2 n_m - \frac{2c}{N} \sum_{m=1}^M x_m n_m + \frac{c^2}{N} \sum_{m=1}^M n_m = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M x_m^2 n_m - \\ &\quad - 2c \cdot c + c^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M x_m^2 n_m - c^2. \end{aligned} \quad (96)$$

3. Величина  $a$  определяется из условия, чтобы площадь, заключенная между кривою Гаусса и осью абсцисс, равнялась  $N$  — числу изделий в партии:

$$a = \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi} \sigma} = \frac{0,399 \Delta x}{\sigma}. \quad (97)$$

Найдем параметры функции  $\varphi(x)$  для рассматриваемого нами примера. Составляем табл. 114. Вычисляем:

$$c = \frac{1,215}{359} = 0,0034;$$

$$\sigma^2 = \frac{0,2506}{359} - 0,0034^2 = 0,000688, \quad \sigma = 0,0262;$$

$x$	$n$	$x$	$n$
— 0,08	1	0,00	46
— 0,07	2	0,01	55
— 0,06	2	0,02	35
— 0,05	10	0,03	28
— 0,04	23	0,04	16
— 0,03	31	0,05	10
— 0,02	42	0,06	2
— 0,01	54	0,07	2
0,00		0,08	

$$b = \frac{1}{2 \cdot 0,000688} = 727; \quad a = \frac{0,399 \cdot 0,01}{0,0262} = 0,151;$$

$$A = aN = 0,151 \cdot 359 = 54,4.$$

Итак, в нашем примере распределению отклонений от номинального размера соответствует функция

$$\varphi(x) = 54,4 e^{-727(x-0,0034)^2}. \quad (98)$$

Т а б л и ц а 114

$x$	$x_m$	$n_m$	$x_m n_m$	$x_m^2 n_m$
— 0,08	— 0,075	1	— 0,075	0,0056
— 0,07	— 0,065	2	— 0,130	0,0084
— 0,06	— 0,055	2	— 0,110	0,0060
— 0,05	— 0,045	10	— 0,450	0,0202
— 0,04	— 0,035	23	— 0,805	0,0282
— 0,03	— 0,025	31	— 0,775	0,0194
— 0,02	— 0,015	42	— 0,630	0,0094
— 0,01	— 0,005	54	— 0,270	0,0014
0,00	0,005	46	0,230	0,0012
0,01	0,015	55	0,825	0,0124
0,02	0,025	35	0,875	0,0219
0,03	0,035	28	0,980	0,0343
0,04	0,045	16	0,720	0,0324
0,05	0,055	10	0,550	0,0302
0,06	0,065	2	0,130	0,0084
0,07	0,075	2	0,150	0,0112
0,08				
$\Sigma$		359	1,215	0,2506

Построение кривой  $y = \varphi(x)$  производится по точкам для абсцисс

$$x = c + k\sigma,$$

для которых

$$\varphi(x) = Ae^{-\frac{k^2}{2}}. \quad (99)$$

Приведем основные значения  $k$  и соответствующие значения  $e^{-\frac{k^2}{2}}$ :

$k$	0	$\pm 0,5$	$\pm 1$	$\pm 1,5$	$\pm 2$	$\pm 2,5$	$\pm 3$
$e^{-\frac{k^2}{2}}$	1,000	0,882	0,606	0,325	0,135	0,044	0,011

Для нашего примера имеем:

$k$	$x$	$\varphi(x)$	$k$	$x$	$\varphi(x)$
— 3	— 0,0752	0,6	0	0,0034	54,4
— 2,5	— 0,0621	2,4	0,5	0,0165	48,0
— 2	— 0,0490	7,4	1	0,0296	33,0
— 1,5	— 0,0359	17,7	1,5	0,0427	17,7
— 1	— 0,0228	33,0	2	0,0558	7,4
— 0,5	— 0,0097	48,0	2,5	0,0689	2,4
0	+ 0,0034	54,4	3	0,0820	0,6

На рис. 130 показано наблюдаемое распределение отклонений от номинального размера (ступенчатая линия) и найденная для этого распределения гауссова кривая.

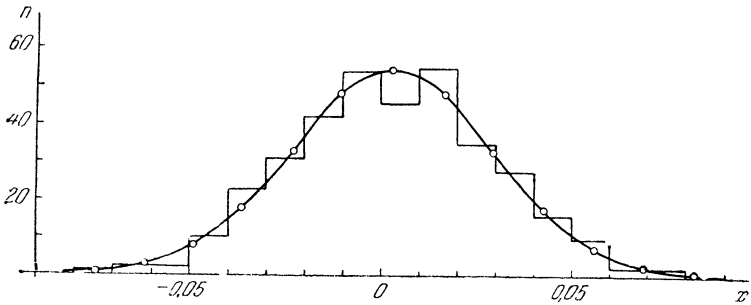


Рис. 130.

Пример 2. Для выяснения картины распределения плотностей грунта в возведенной земляной плотине была измерена плотность грунта в 83 точках земляного массива, характеризующих средние плотности примерно равных объемов земляной массы.

Требуемая по техническим условиям плотность  $\gamma$  была равна  $1,48 \text{ т/м}^3$ . Действительные значения плотности и распределение точек на группы показаны на рис. 131.

Составляем вспомогательную табл. 115 и вычисляем параметры функции  $\varphi(x)$ :

$$c = \frac{0,77}{83} = 0,0093;$$

$$\sigma^2 = \frac{0,1275}{83} - 0,0093^2 = 0,001449, \quad \sigma = 0,0381;$$

$$b = \frac{1}{2 \cdot 0,001449} = 345; \quad a = \frac{0,399 \cdot 0,02}{0,0381} = 0,210;$$

$$A = 0,210 \cdot 83 = 17,4.$$



Следовательно,

$$\varphi(x) = 17,4 e^{-345(x-0,0093)^2}.$$

Т а б л и ц а 115

$x$	$x_m$	$n_m$	$x_m n_m$	$x_m^2 n_m$
—0,08	—0,07	2	—0,14	0,0098
—0,06	—0,05	7	—0,35	0,0175
—0,04	—0,03	8	—0,24	0,0072
—0,02	—0,01	15	—0,15	0,0015
0,00	0,01	23	0,23	0,0023
0,02	0,03	13	0,39	0,0117
0,04	0,05	7	0,35	0,0175
0,06	0,07	4	0,28	0,0196
0,08	0,09	2	0,18	0,0162
0,10	0,11	2	0,22	0,0242
0,12				
$\Sigma$		83	0,77	0,1275

Вычисляем координаты опорных точек кривой:

$k$	$x$	$\varphi(x)$	$k$	$x$	$\varphi(x)$
—3	—0,1050	0,2	0	0,0093	17,5
—2,5	—0,0860	0,8	0,5	0,0283	15,3
—2	—0,0669	2,4	1	0,0474	10,5
—1,5	—0,0479	5,6	1,5	0,0664	5,6
—1	—0,0288	10,5	2	0,0855	2,4
—0,5	—0,0098	15,3	2,5	0,1045	0,8
0	+0,0093	17,4	3	0,1236	0,2

и строим соответствующую кривую (рис. 131). Средняя плотность грунта оказалась равной

$$1,48 + 0,0093 \approx 1,49,$$

т. е. чуть больше требуемой.

По этим данным мы можем построить так называемую „кривую обеспеченности“, уравнение которой

$$\Phi(x) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx. \quad (100)$$

Ордината кривой обеспеченности показывает долю общего объема, приходящуюся на грунт, плотность которого ниже данной. Построение этой кривой

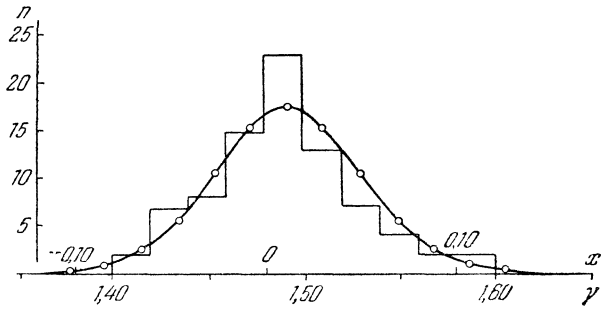


Рис. 131.

ведется по точкам с теми же абсциссами  $c + k\sigma$ ; ординаты берутся из таблицы:

$k$	$\Phi(x_k)$	$k$	$\Phi(x_k)$
— 3	0,0001	0	0,500
— 2,5	0,006	0,5	0,691
— 2	0,023	1	0,841
— 1,5	0,067	1,5	0,933
— 1	0,159	2	0,977
— 0,5	0,309	2,5	0,994
0	0,500	3	0,999

Для нашего примера кривая обеспеченности дана на рис. 132. Из нее мы видим, что, например, доля грунта, имеющего плотность ниже  $1,48 \text{ т/м}^3$ , равна 41%, а следовательно, более плотного — 59%.

Кривые Гаусса встречаются почти во всех случаях исследования распределения отклонений какой-либо величины от среднего значения. Другие виды распределения, значительно более редко встречающиеся, требуют предварительного исследования методами теории вероятности; их мы не рассматриваем.

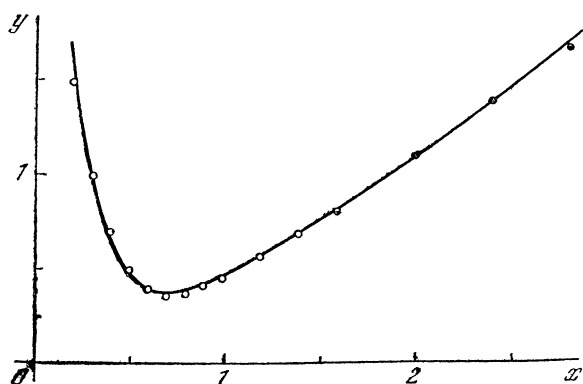
**§ 18. Многочлены с положительными и отрицательными степенями аргумента.** Если исследуемая кривая сначала круто идет вниз, а затем вновь поднимается, то ее нужно представлять функцией в виде суммы членов с положительными и отрицательными степенями  $x$ , например,

$$y_0 = \frac{a}{x} + b + cx + \dots \tag{101}$$

или

$$y_0 = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c + dx + \dots \tag{102}$$

При исследовании полезно рассматривать не саму кривую, а нанесенные на ней точки, которые надо располагать чаще в местах резкого изменения очертания кривой. Наиболее целесообразным при рассмотрении таких кривых является применение метода



равных сумм, поскольку метод наименьших квадратов связан с большими и утомительными вычислениями.

Рассмотрим для примера кривую, приведенную на рис. 133. Подберем для нее функцию вида

$$y_s = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c + dx. \quad (103)$$

Условие равенства сумм будет иметь вид

$$a \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2} + b \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} + nc + d \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k. \quad (104)$$

Взяв на кривой 15 точек, сгруппируем их следующим образом: первые четыре точки, следующие пять и две группы по три точки. Составим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & a \left( \frac{1}{0,04} + \frac{1}{0,09} + \frac{1}{0,16} + \frac{1}{0,25} \right) + b \left( \frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,4} + \frac{1}{0,5} \right) + 4c + \\ & \quad + d(+0,2 + 0,3 + 0,4 + 0,5) = 1,5 + 1,0 + 0,7 + 0,5, \\ & a \left( \frac{1}{0,36} + \frac{1}{0,49} + \frac{1}{0,64} + \frac{1}{0,81} + \frac{1}{1,00} \right) + b \left( \frac{1}{0,6} + \frac{1}{0,7} + \frac{1}{0,8} + \frac{1}{0,9} + \frac{1}{1,0} \right) + \\ & \quad + 5c + d(0,6 + 0,7 + 0,8 + 0,9 + 1,0) = 0,40 + 0,35 + 0,37 + 0,41 + 0,45, \\ & a \left( \frac{1}{1,44} + \frac{1}{1,96} + \frac{1}{2,56} \right) + b \left( \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,6} \right) + \\ & \quad + 3c + d(1,2 + 1,4 + 1,6) = 0,56 + 0,68 + 0,82, \\ & a \left( \frac{1}{4,00} + \frac{1}{5,76} + \frac{1}{7,84} \right) + b \left( \frac{1}{2,0} + \frac{1}{2,4} + \frac{1}{2,8} \right) + \\ & \quad + 3c + d(2,0 + 2,4 + 2,8) = 1,14 + 1,44 + 1,74, \end{aligned}$$

или, после упрощения:

$$46,36a + 12,833b + 4c + 1,4d = 3,70,$$

$$8,6157a + 6,4564b + 5c + 4,0d = 1,98,$$

$$1,5952a + 2,1726b + 3c + 4,2d = 2,06,$$

$$0,5512a + 1,2738b + 3c + 7,2d = 4,32.$$

Решая, получаем уравнение кривой

$$y_s = \frac{0,024}{x^2} + \frac{0,356}{x} - 0,799 + 0,868x.$$

**§ 19. Суммирование функций.** К суммированию функций различных типов приходится прибегать и тогда, когда эксперимент приводит к кривой, соответствующей, в общем, простой зависимости, но имеющей около одного из концов местное искривление.

Для примера рассмотрим кривую, заданную точками:

$x$	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
$y$	2,20	1,75	1,47	1,27	1,09	0,92	0,76	0,61	0,45	0,30	0,14

(см. рис. 134). Все точки, за исключением первых четырех, лежат на прямой

$$y_1 = 1,70 - 0,78x. \quad (105)$$

Разность ординат заданной кривой и прямой (105) дает кривую, расположенную в нижней части рисунка (пунктир). Подберем для нее уравнение вида

$$y_2 = ab^x. \quad (106)$$

Найдем параметры  $a$  и  $b$ . Величина  $a$  определяется ординатой кривой на оси ординат:

$$a = 0,50.$$

Число  $b$ , дающее нужное затухание кривой при увеличении  $x$ , определим из условия, что, например при  $x = 0,2$ , точки имеющейся и определяемой кривой должны совпадать. Это даст нам

$$0,5b^{0,2} = 0,21,$$

откуда

$$b = 0,0132,$$

и, следовательно,

$$y_2 = 0,5 \cdot 0,0132^x. \quad (107)$$

Итак, для рассматриваемой кривой находим уравнение

$$y_s = 1,70 - 0,78x + 0,5 \cdot 0,0132^x.$$

Если ординаты у обоих концов исследуемой кривой быстро возрастают и кривая симметрична, то ее можно представить параболой достаточно высокой степени с вершиной, смещенной относительно начала координат. Если же такая кривая несимметрична, то степенной функцией ее представить трудно, и можно попытаться подобрать для нее сумму двух показательных функций.

Дело в том, что при суммировании двух показательных функций у одной из них нулевые ординаты будут справа, а у другой слева, и, следовательно, обе восходящие части кривой суммы будут отражать каждая влияние только одной из функций.

Для проверки возможности указанного представления нужно построить кривую в логарифмических ординатах, так как при таком преобразовании показательная зависимость превращается в линейную.

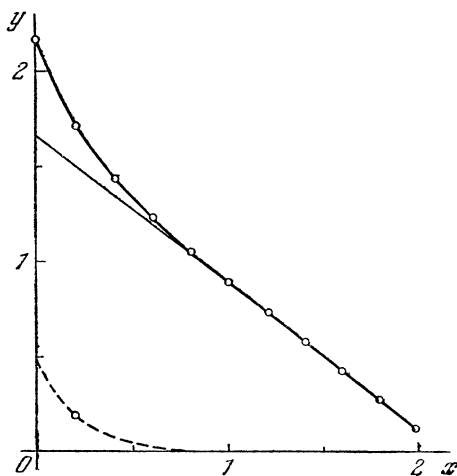


Рис. 134.

Исследуем кривую, приведенную на рис. 135. Представив ее в логарифмических ординатах, мы видим (см. рис. 136), что оба конца ее вырождаются в прямые, уравнения которых легко получить:

$$1) \lg y_1 = 0,82 - 1,48x, \quad 2) \lg y_2 = 1,50 + 0,78x.$$

Отсюда находим:

$$y_1 = 6,6 \cdot 0,0331^x, \quad y_2 = 0,0316 \cdot 6,03^x.$$

На рис. 135 пунктиром показаны графики обеих функций и график их суммы, который с достаточной точностью воспроизводит данную кривую.

## § 20. Преобразование ординат.

Пусть кривая настолько сложна, что рассмотренными способами мы не можем по-

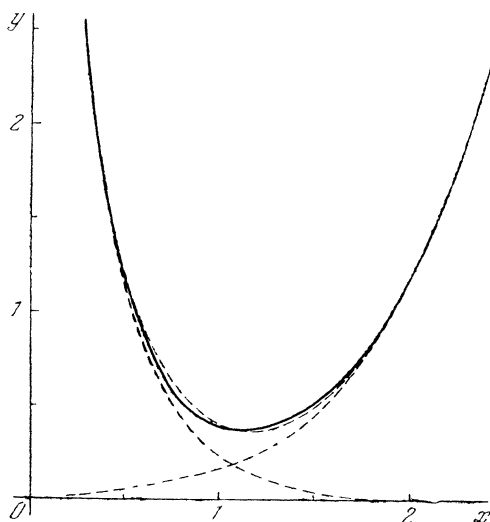


Рис. 135.

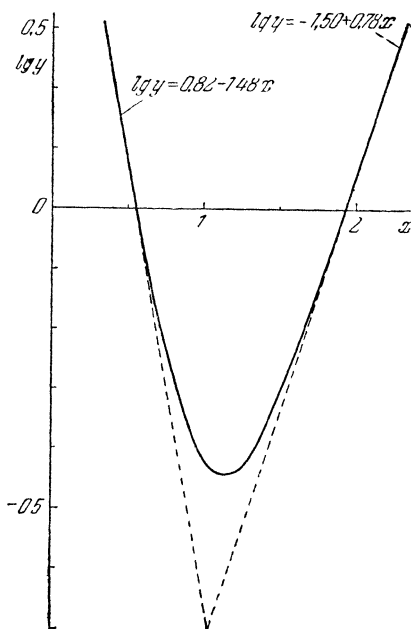


Рис. 136.

лучить для нее эмпирическую формулу. Тогда необходимо попытаться найти такую функцию  $\varphi(y)$ , чтобы, взяв вместо данной кривой  $y=f(x)$  новую кривую

$$\varphi(y) = \Phi(x), \quad (108)$$

мы смогли получить для нее эмпирическую формулу, которую потом можно преобразовать к виду, отвечающему заданной кривой. Преобразования эти должны быть обратимыми.

Приемлемыми могут быть преобразования следующих типов:

$$\begin{aligned} 1) y^n &= \Phi(x), & y &= \sqrt[n]{\Phi(x)}; \\ 2) a^y &= \Phi(x), & y &= \frac{1}{\lg a} \lg \Phi(x); \\ 3) \lg y &= \Phi(x), & y &= 10^{\Phi(x)} = e^{2,3025\Phi(x)}. \end{aligned} \quad (109)$$

Последнее из этих преобразований мы уже использовали, чтобы установить возможность получения показательной зависимости. Наиболее перспективным

является первое преобразование, ввиду возможности варьирования показателя степени.

**§ 21. Семейства кривых.** До сих пор мы рассматривали получение эмпирических формул для единичной кривой или для соответствующего ей ряда точек. Теперь рассмотрим построение уравнения семейства кривых

$$y_s = \varphi(x, t). \quad (110)$$

Для этого необходимо сперва для нескольких значений  $t$

$$t = t_1, t_2, t_3, \dots, \quad (111)$$

Т а б л и ц а 116

$x$	$y$		
	$t=1$	$t=2$	$t=3$
0	1	4	9
1	1	5	10
3	1	7	15
4	2	7	16
5	2	9	19
7	2	9	22
9	3	11	25
10	3	12	27

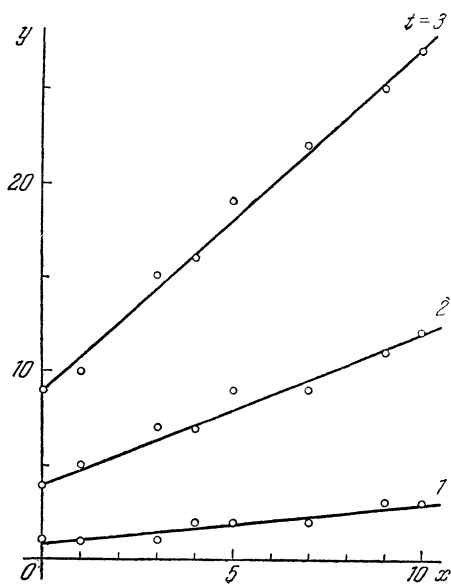


Рис. 137.

охватывающих все поле возможных значений этого аргумента, получить ряд однотипных функций

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x, a_1, b_1, c_1, \dots, t_1), \\ y_2 &= f(x, a_2, b_2, c_2, \dots, t_2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (112)$$

Затем по точкам

$$\begin{aligned} (t_1, a_1), (t_2, a_2), \dots \\ (t_1, b_1), (t_2, b_2), \dots \end{aligned} \quad (113)$$

получают уравнения функций

$$\begin{aligned} a &= a(t), \\ b &= b(t), \\ &\dots \end{aligned} \quad (114)$$

не обязательно однотипных, что дает

$$y_s = f[x, a(t), b(t), \dots] = \varphi(x, t). \quad (115)$$

**Пример.** Даны точки  $y(x, t)$  (см. табл. 116).

Нанеся эти точки на чертеж (рис. 137), мы видим, что для каждого из значений аргумента  $t$  совокупность точек аппроксимируется линейной функцией, причем коэффициенты уравнения семейства прямых должны быть функциями от  $t$ :

$$y_s = a(t) + b(t)x. \quad (116)$$

Ведя расчет по методу равных сумм, получим:  
для  $t=1$

$$4a_1 + b_1(0 + 1 + 3 + 4) = 1 + 1 + 1 + 2,$$

$$4a_1 + b_1(5 + 7 + 9 + 10) = 2 + 2 + 3 + 3,$$

т. е.

$$4a_1 + 8b_1 = 5,$$

$$4a_1 + 31b_1 = 10,$$

что дает уравнение

$$y_1 = 0,82 + 0,22x; \quad (117)$$

для  $t=2$

$$4a_2 + 8b_2 = 23,$$

$$4a_2 + 31b_2 = 41,$$

откуда

$$y_2 = 4,19 + 0,78x; \quad (118)$$

для  $t=3$

$$4a_3 + 8b_3 = 50,$$

$$4a_3 + 31b_3 = 93,$$

откуда

$$y_3 = 8,76 + 1,87x. \quad (119)$$

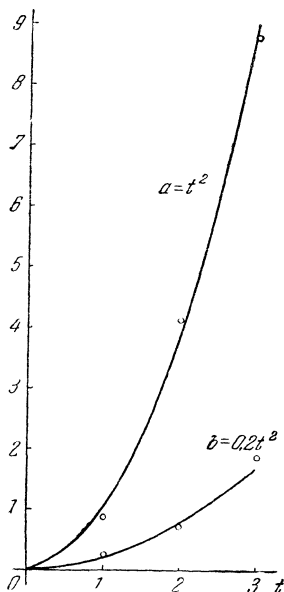


Рис. 138.

Представив графически (рис. 138) изменение коэффициентов  $a$  и  $b$  как функций от  $t$ , получаем для них квадратичные зависимости вида

$$a = t^2,$$

$$b = 0,2t^2.$$

Итак, искомая формула имеет вид

$$y_s = t^2 + 0,2t^2x = t^2(1 + 0,2x). \quad (120)$$

Т а б л и ц а 117

$t$	$y$			
	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$
1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
1,1	1,3	1,5	1,7	1,8
1,2	1,7	2,0	2,5	3,1
1,3	2,2	2,8	3,8	4,8
1,4	2,8	3,7	5,5	7,3
1,5	3,5	4,8	7,6	10,7

На рис. 137 проведены прямые, полученные по этой формуле для значений  $t=1, 2, 3$ .

**§ 22. Пример семейства кривых.** Произведем построение эмпирической формулы для результатов опытов, приведенных в табл. 117.

Изобразим эти результаты графически, беря по оси абсцисс аргумент  $x$  и строя кривые для каждого значения  $t$  (см. рис. 139). Однако для получен-

ных кривых трудно подобрать однотипные эмпирические формулы. Поэтому выполним построение иным способом, беря по оси абсцисс аргумент  $t$  (см. рис. 140). Мы видим, что полученные при таком построении кривые имеют

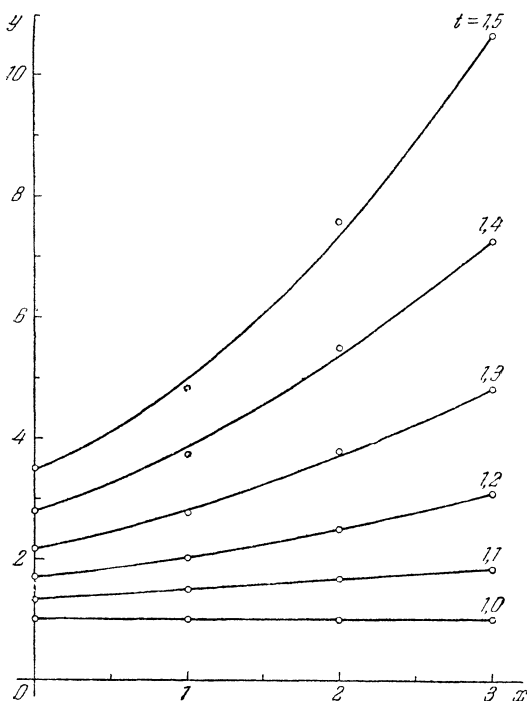


Рис. 139.

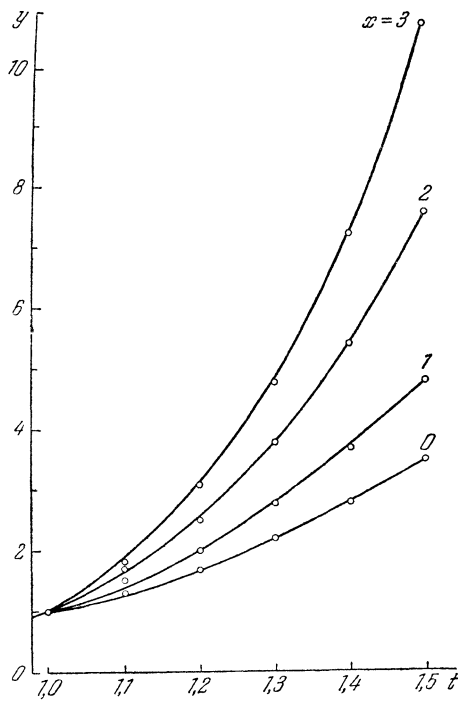


Рис. 140.

общую точку (1,1), и это позволяет нам подобрать для них эмпирические формулы в виде

$$y = a^{t-1}, \text{ где } a = a(x), \quad (121)$$

или в виде

$$y = t^a, \text{ где } a = a(x). \quad (122)$$

Выбор первой формулы объясняется тем, что, как известно, показательные кривые  $y = a^t$  пересекаются в точке (0,1) (см. рис. 129), а значит кривые  $y = a^{t-1}$  будут пересекаться в точке (1,1). Следовательно, нужно лишь подобрать для каждой кривой рис. 140 свое значение  $a$  и получить формулу зависимости  $a(t)$ .

Выбор второй формулы также объясняется тем, что графики функций  $y = t^a$  при разных  $a$  имеют общую точку (см. рис. 126).

Исследование проведем методом равных сумм, показав полностью последовательность действий. Рассматриваемый нами пример связан с реальным амортизационным устройством, поэтому интересно показать, как решаются такие в достаточной мере сложные задачи.

Для зависимости

$$y = a^{t-1}$$

для каждого значения  $x$  определим соответствующие  $a$ . Обозначим

$$a^0 + a^{0.1} + a^{0.2} + a^{0.3} + a^{0.4} + a^{0.5} = \Sigma_a.$$



При разных  $x$  имеем:

$x$	0	1	2	3
$\Sigma a$	12,5	15,8	22,1	28,7

С помощью таблицы логарифмов строим график  $\Sigma a$  как функции от  $a$  (рис. 141) и по заданным ординатам находим значение  $a$ . Получаем:

$x$	0	1	2	3
$a$	12,5	26	68	139

По точкам  $(x, a)$  строим кривую зависимости  $a(x)$  (см. рис. 142). Эмпири-

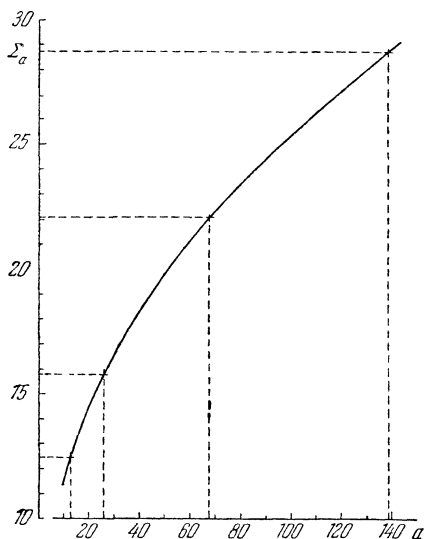


Рис. 141.

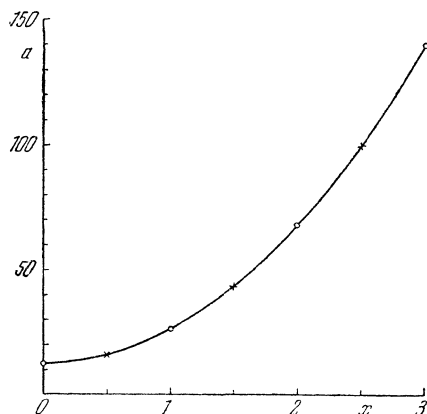


Рис. 142.

ческую формулу для нее будем искать в виде

$$a = \alpha + \beta x^2.$$

Для определения значений  $\alpha$  и  $\beta$  способом равных сумм возьмем на кривой  $a(x)$  помимо четырех имеющихся точки с абсциссами 0,5; 1,5; 2,5. Получим:

$$5\alpha + \beta(0 + 0,5^2 + 1^2 + 1,5^2 + 2^2) = 12,5 + 16 + 26 + 43,5 + 68,$$

$$5\alpha + \beta(1^2 + 1,5^2 + 2^2 + 2,5^2 + 3^2) = 26 + 43,5 + 68 + 98,5 + 139,$$

т. е.

$$5\alpha + 7,5\beta = 166,$$

$$5\alpha + 22,5\beta = 375.$$

Отсюда

$$a = 12 + 14x^2.$$

Итак, первый вариант расчета дает нам эмпирическую формулу

$$y_a = (12 + 14x^2)^{t-1}.$$

Соответствующие ей кривые даны на рис. 143 и 144 сплошными линиями.

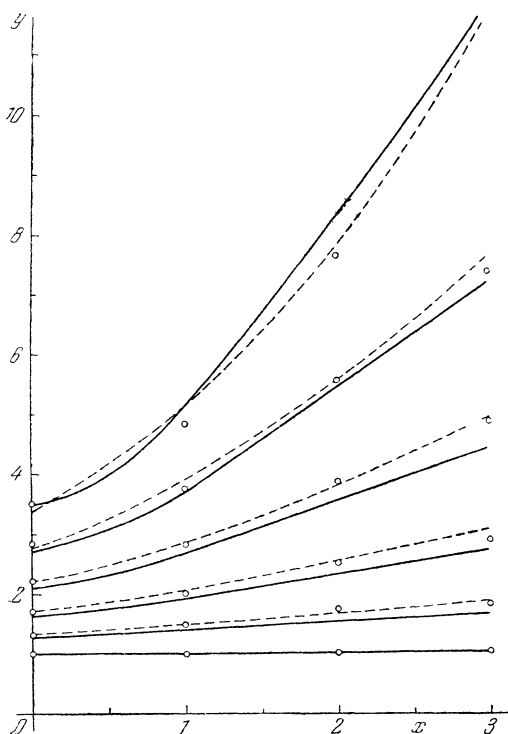


Рис. 143.

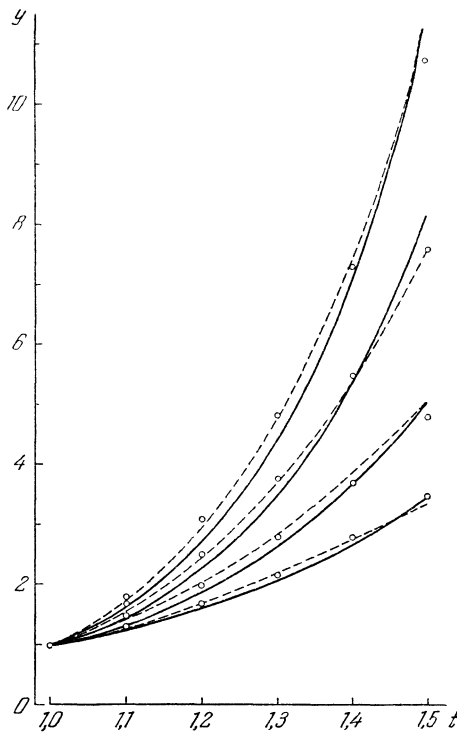


Рис. 144.

Теперь перейдем ко второму варианту

$$y = t^a.$$

Прологарифмировав, получим

$$\lg y = a \lg t.$$

Мы должны получить прямолинейную зависимость между  $\lg y$  и  $\lg t$ . На рис. 145, построенном в логарифмических координатах, видно, что такая зависимость действительно существует. Соответствующие прямые можно провести просто на глаз. Они дают значения углового коэффициента  $a$ :

$x$	0	1	2	3
$a$	3,12	4,05	5,30	6,30

На рис. 146 показано изменение величины  $a$  как функции  $x$ . Очевидно, что наилучшей зависимостью для данной совокупности точек будет  $a = 3 + x$ .

Таким образом, второй вариант расчета дает:

$$y_3 = t^{3+x}.$$

Соответствующие кривые даны на рис. 143 и 144 пунктиром.

Сравнение обоих вариантов построения формулы заставляет отдать предпочтение второму варианту; он значи-

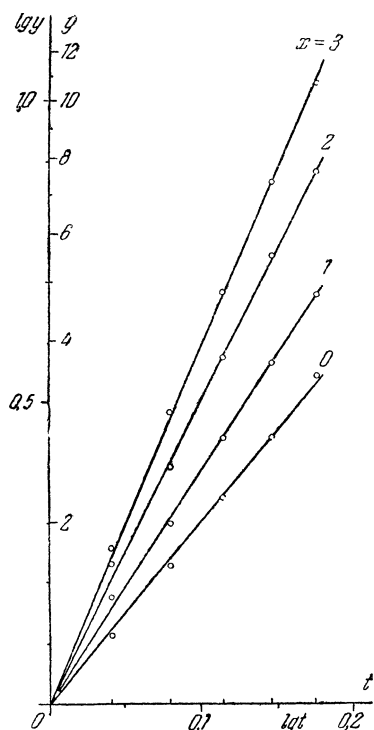


Рис. 145.

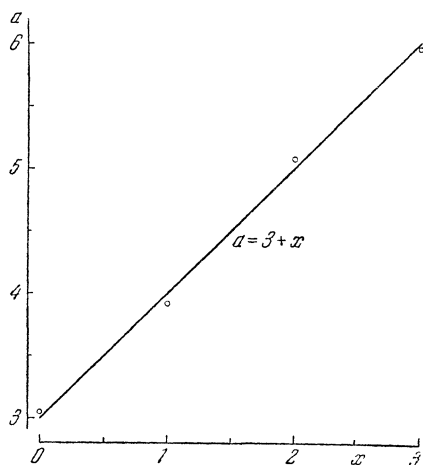


Рис. 146.

тельно лучше отражает данные опыта и проще в отношении вычислительной работы.

## *ПРИЛОЖЕНИЕ*

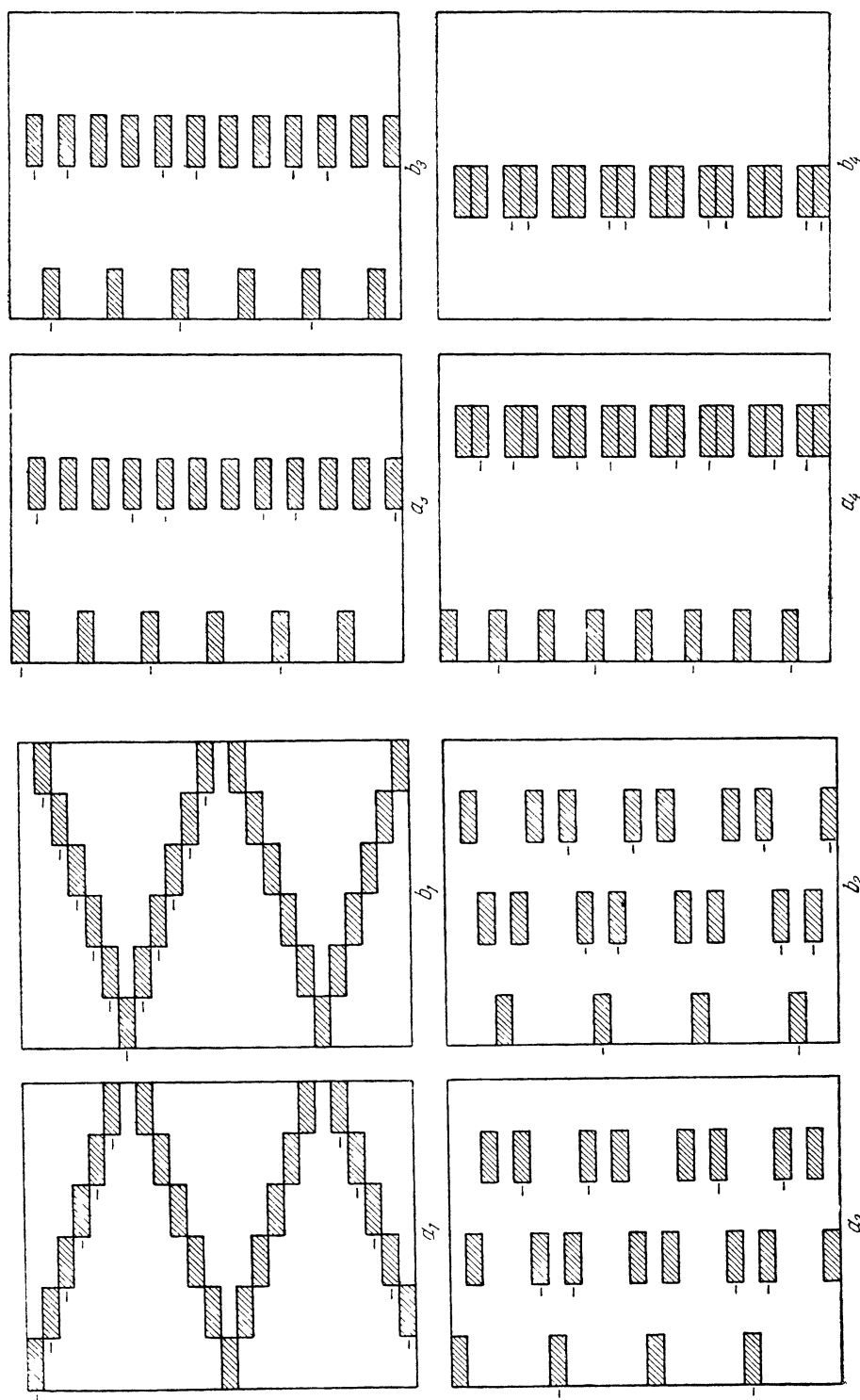


Рис. 2.

Рис. 1

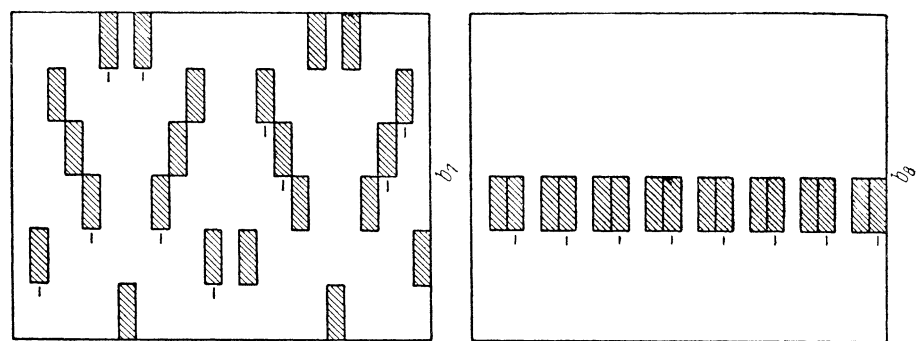


Рис 4

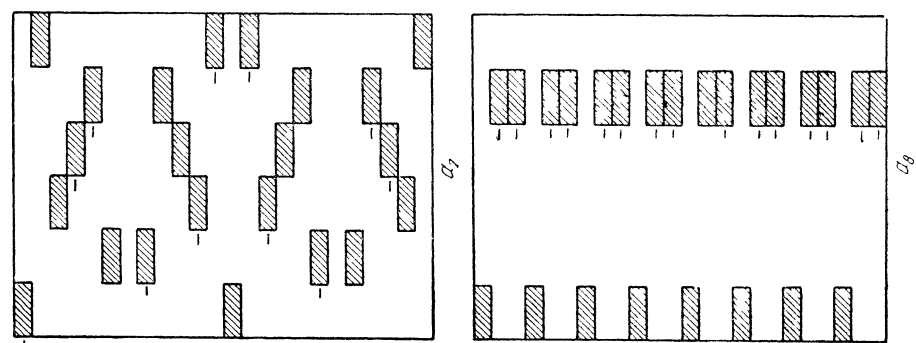
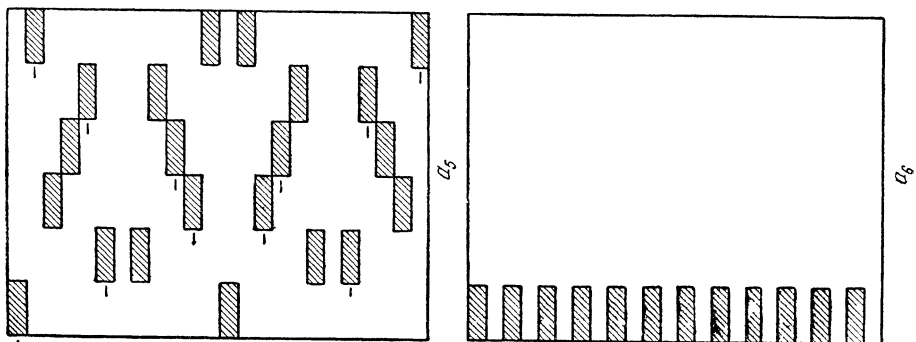
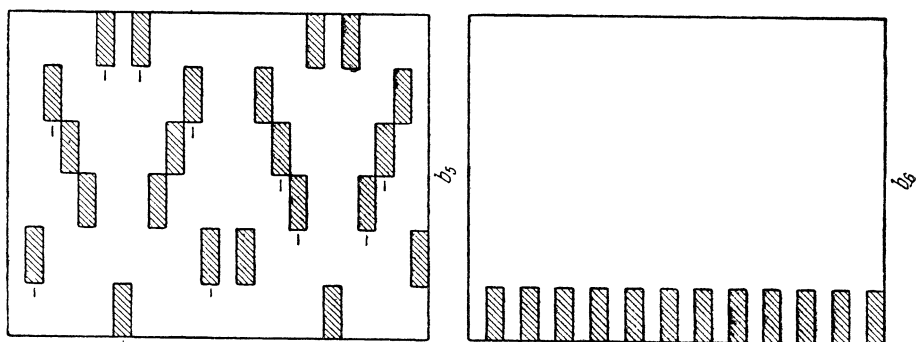


Рис 3



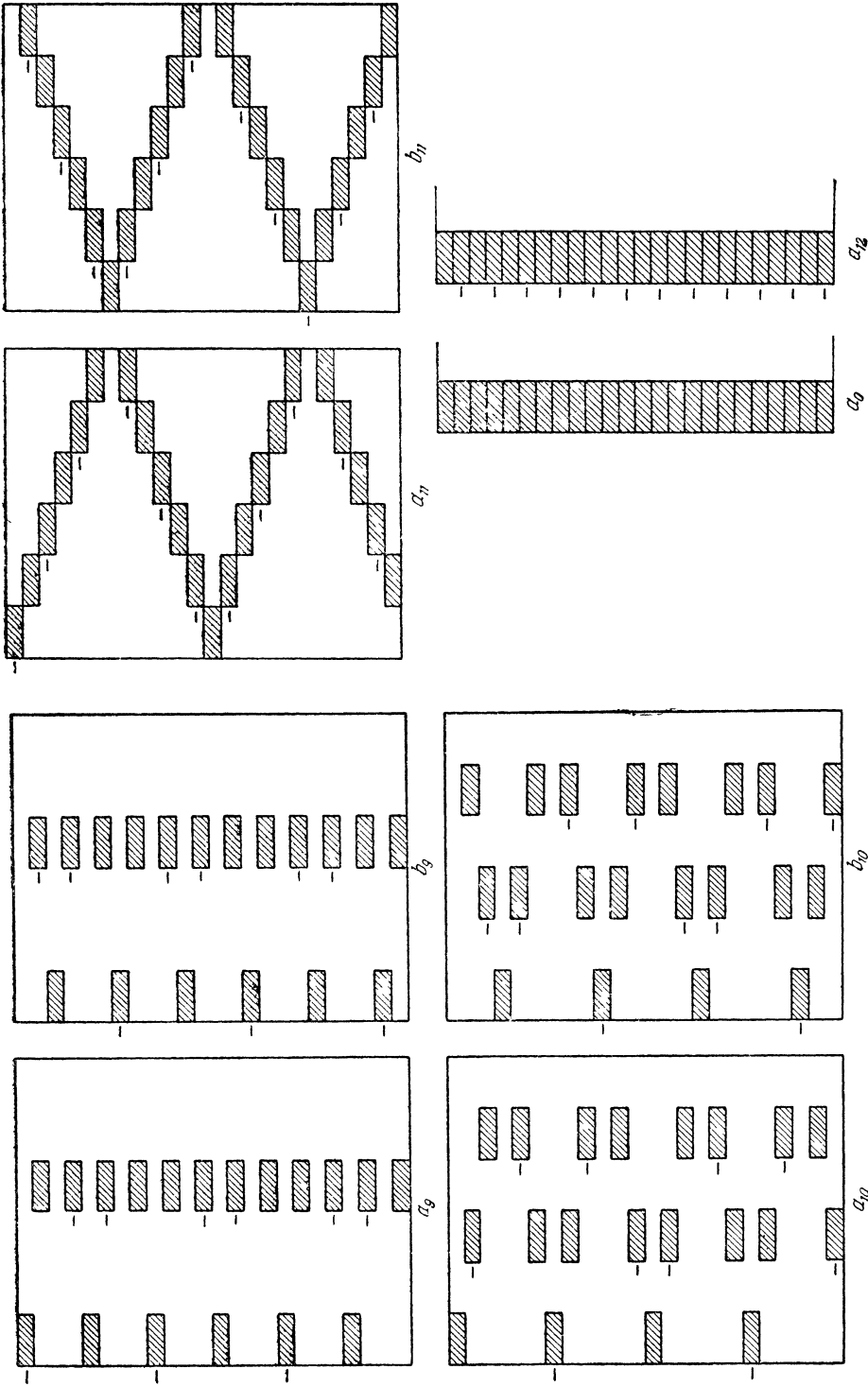


Рис. 6.

Рис. 5.

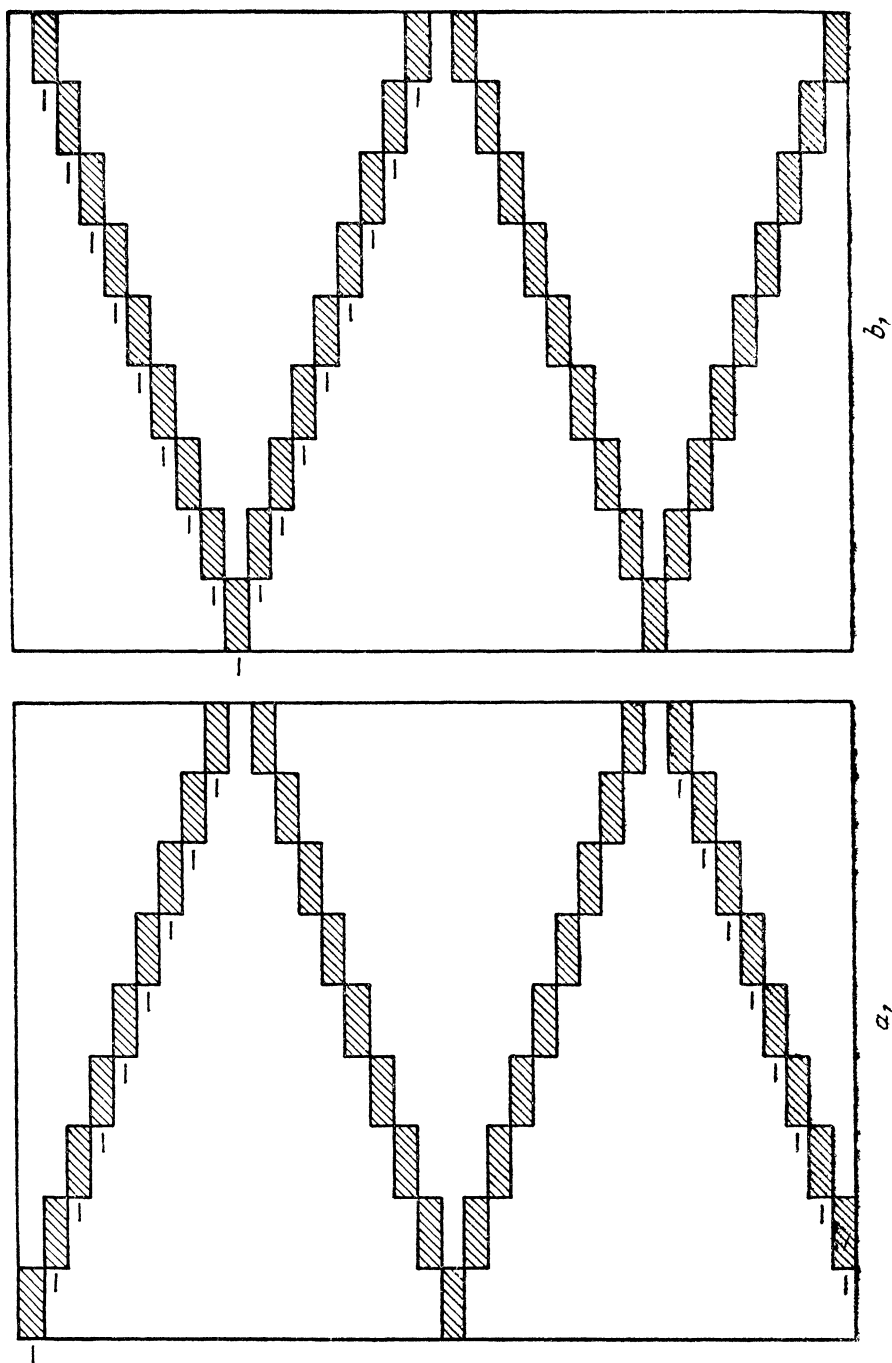


Рис. 7.



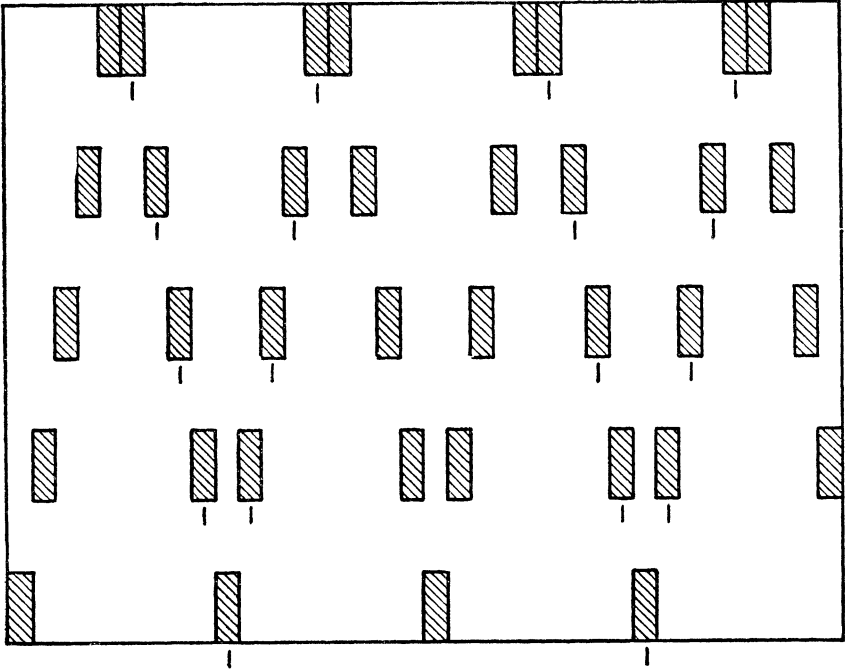
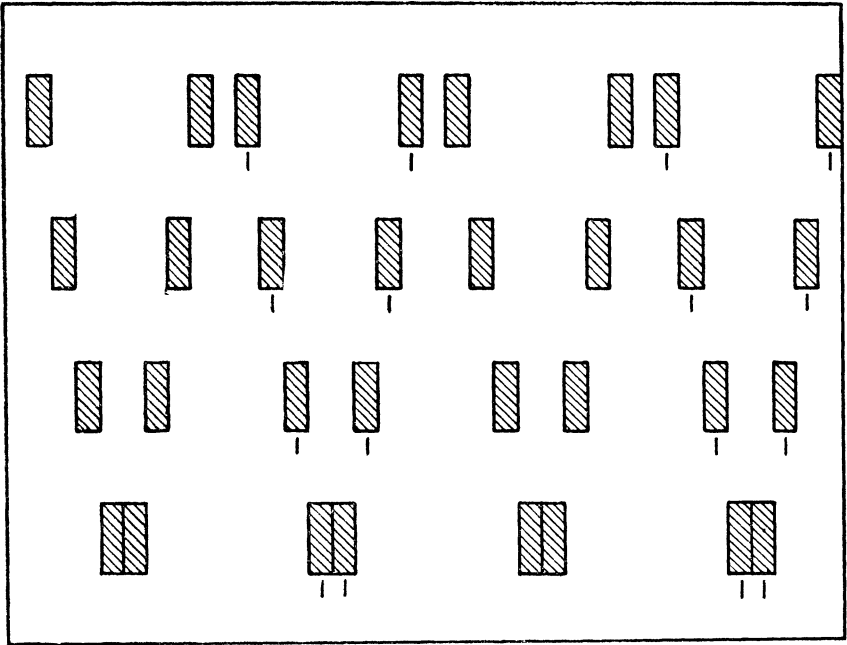


Рис. 8.

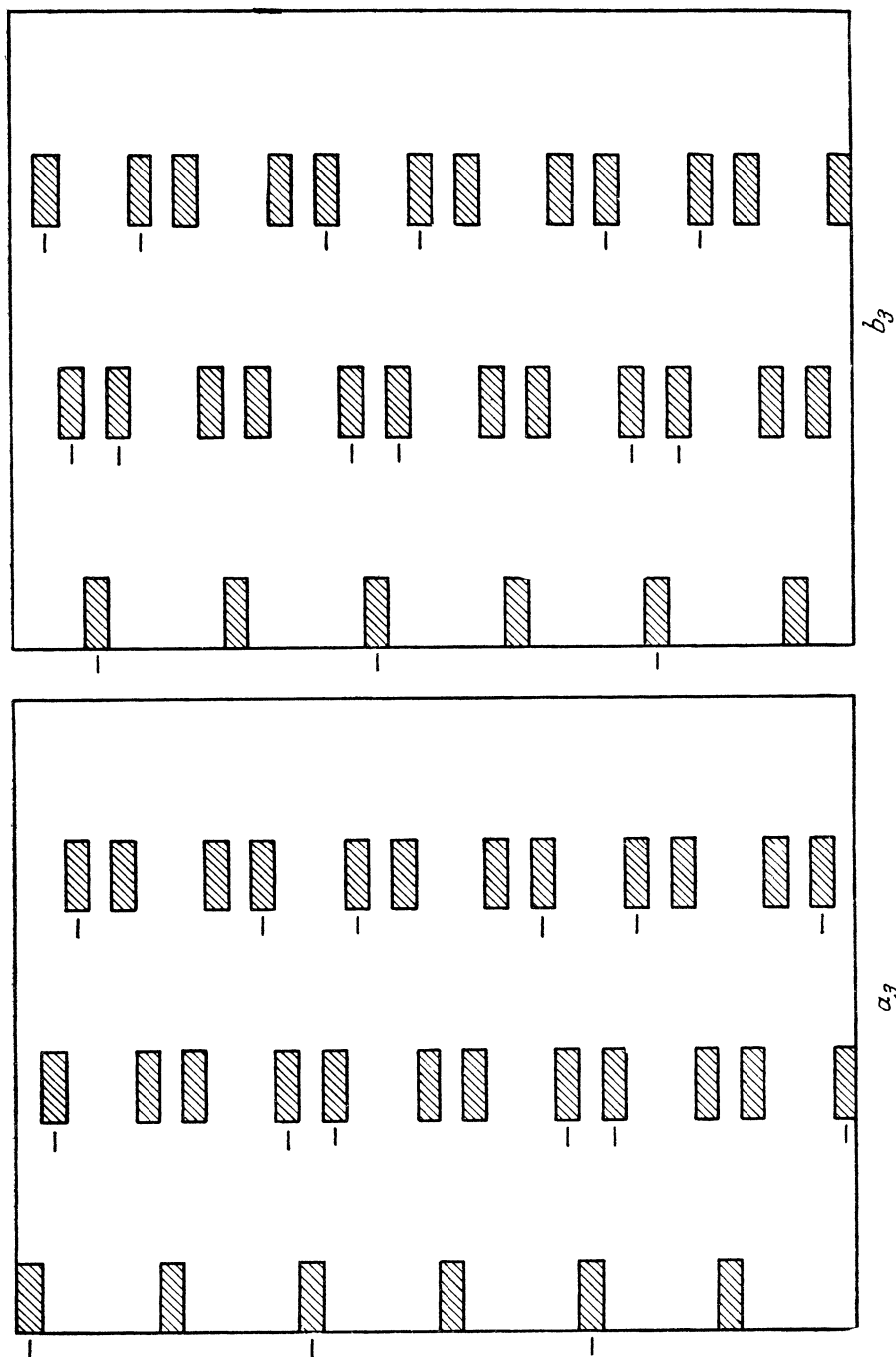


Рис. 9.

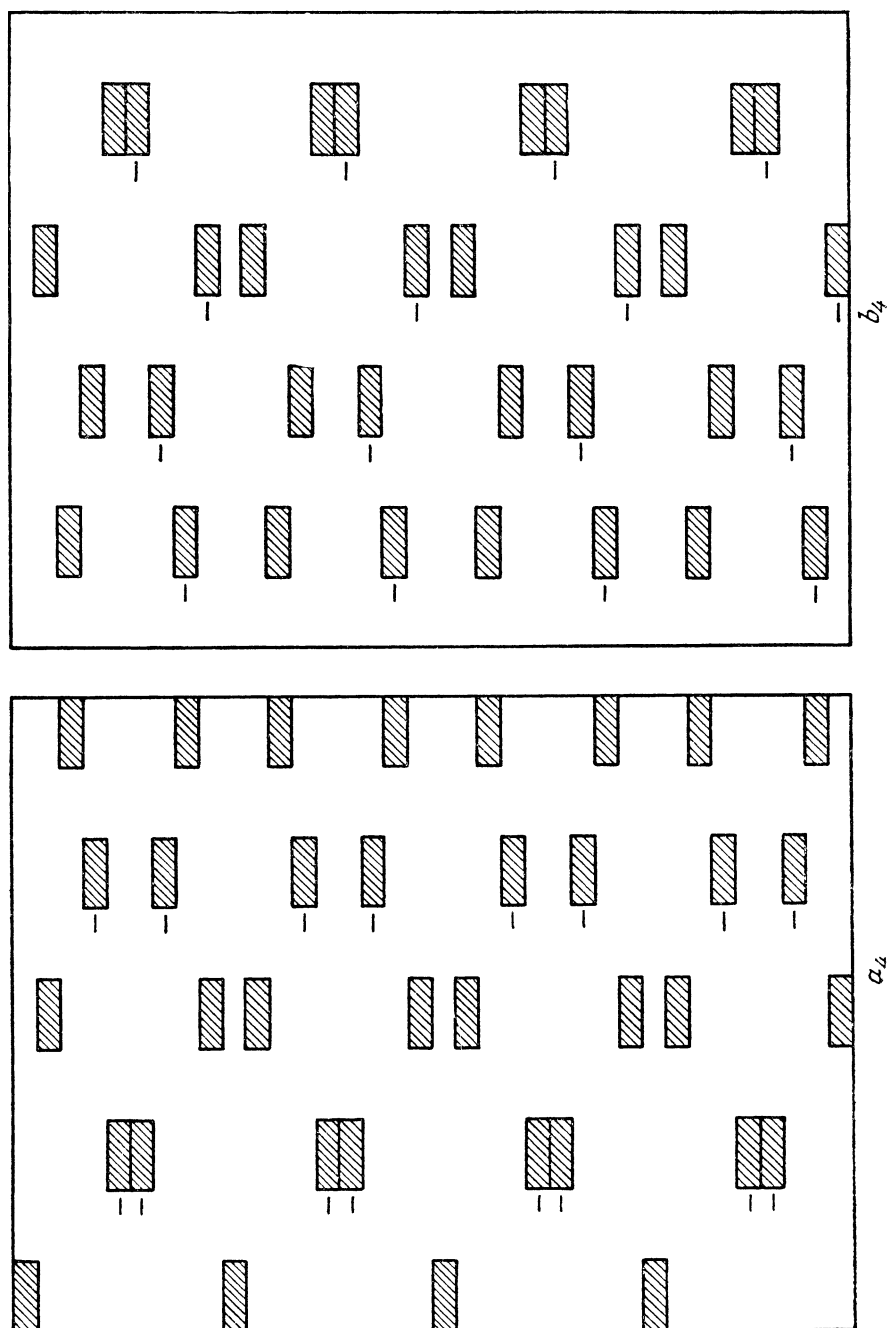


Рис. 10.

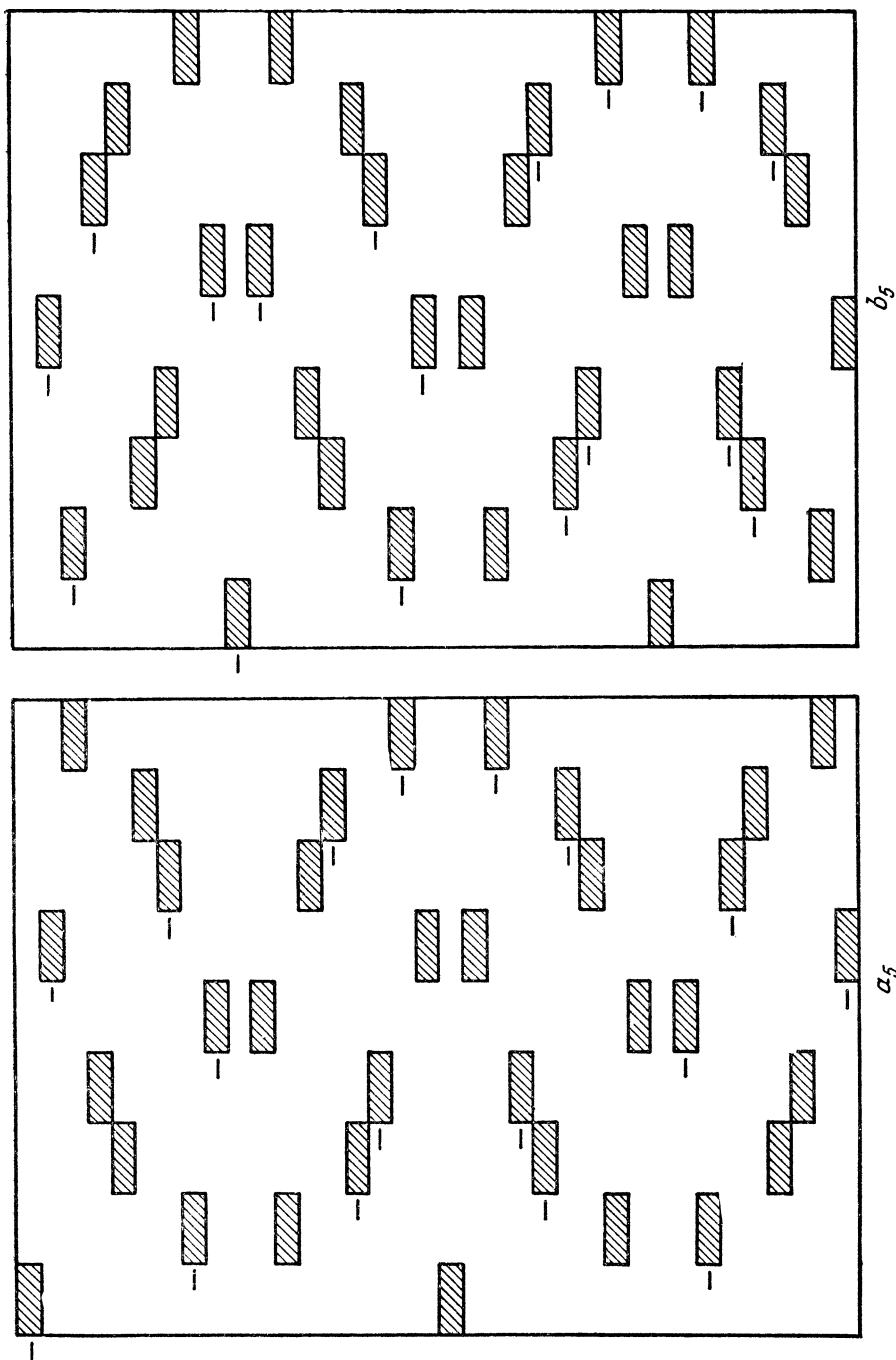


Рис. 11.

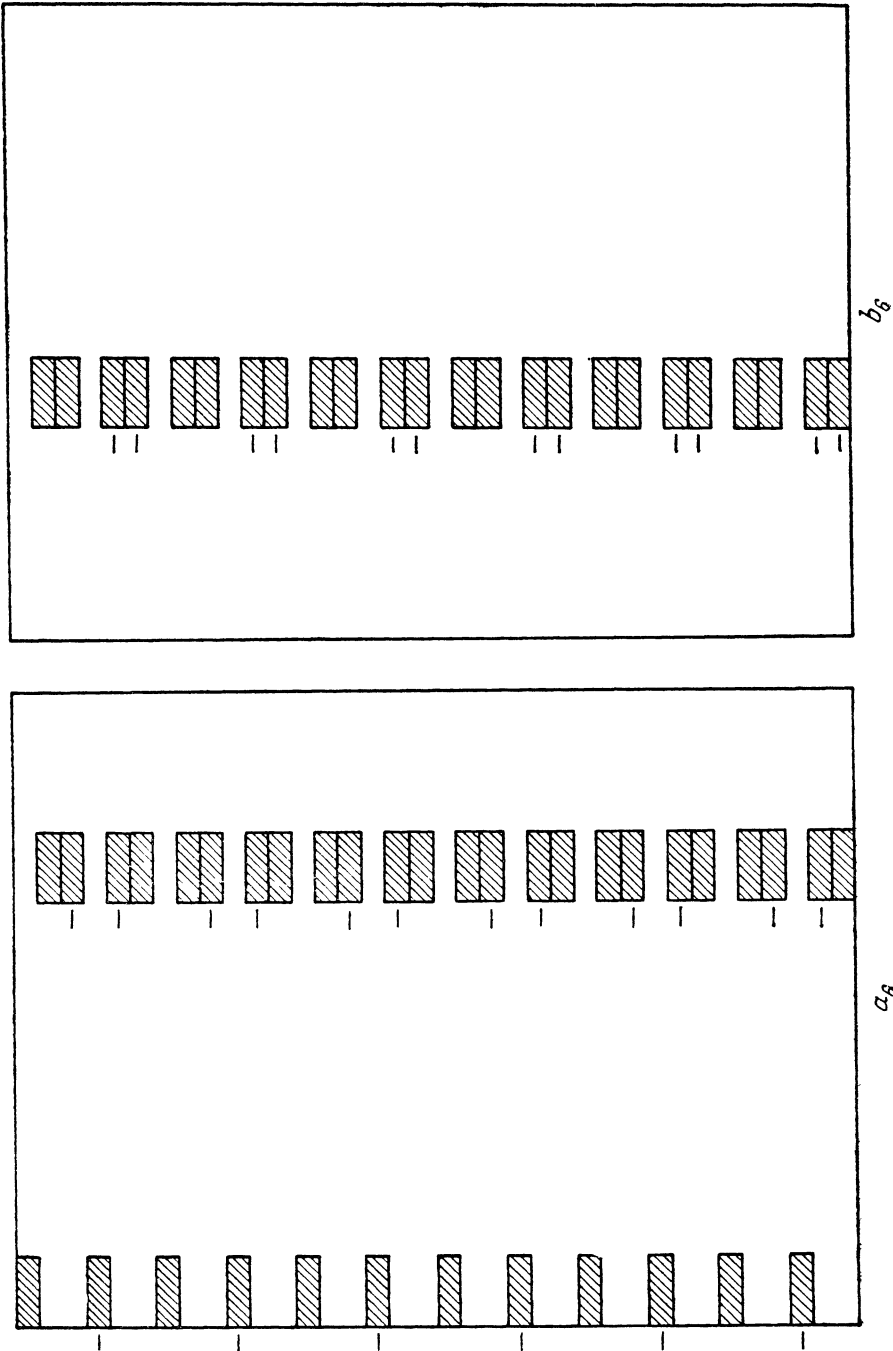


Рис. 12.

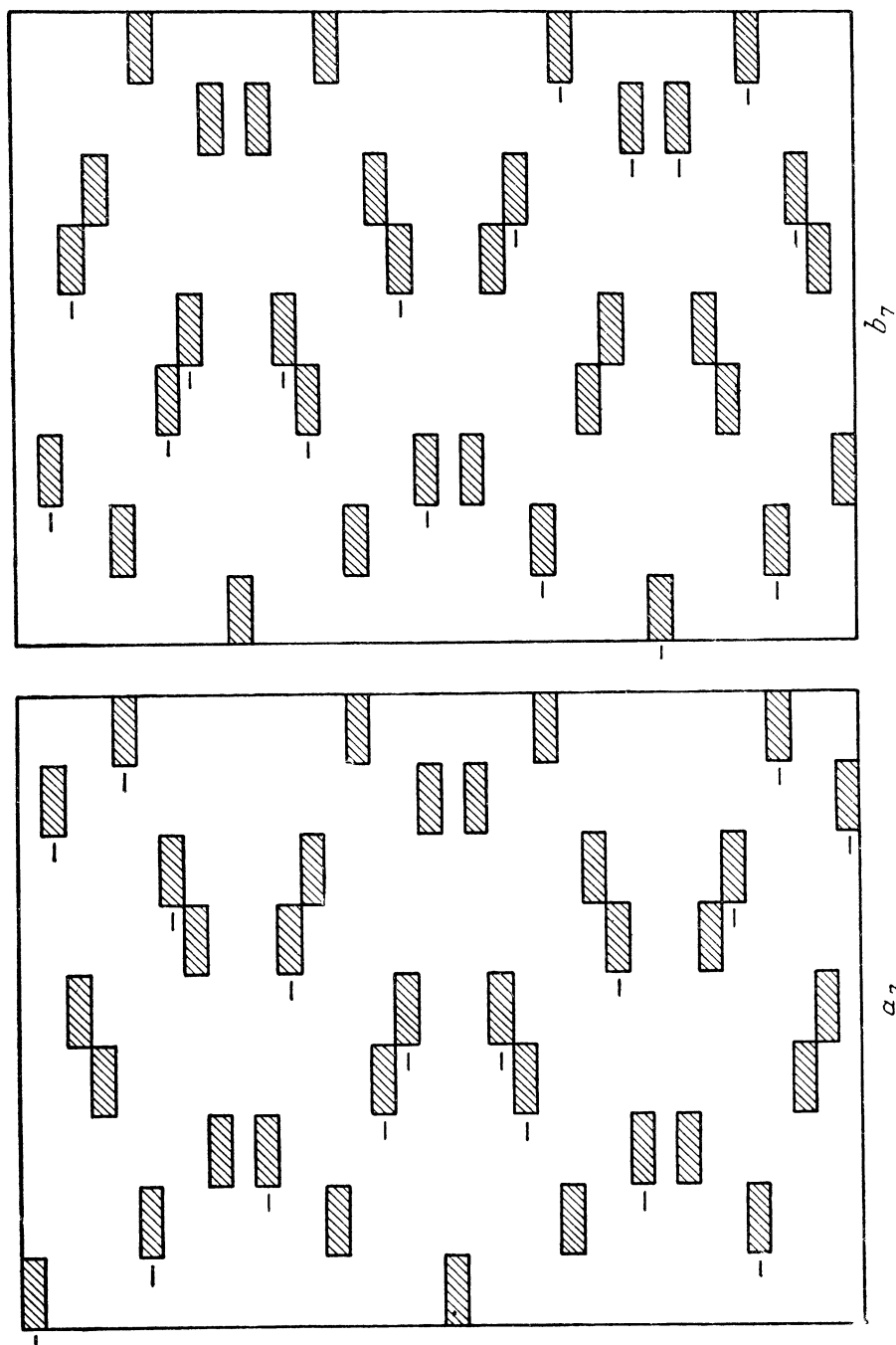


Рис. 13.

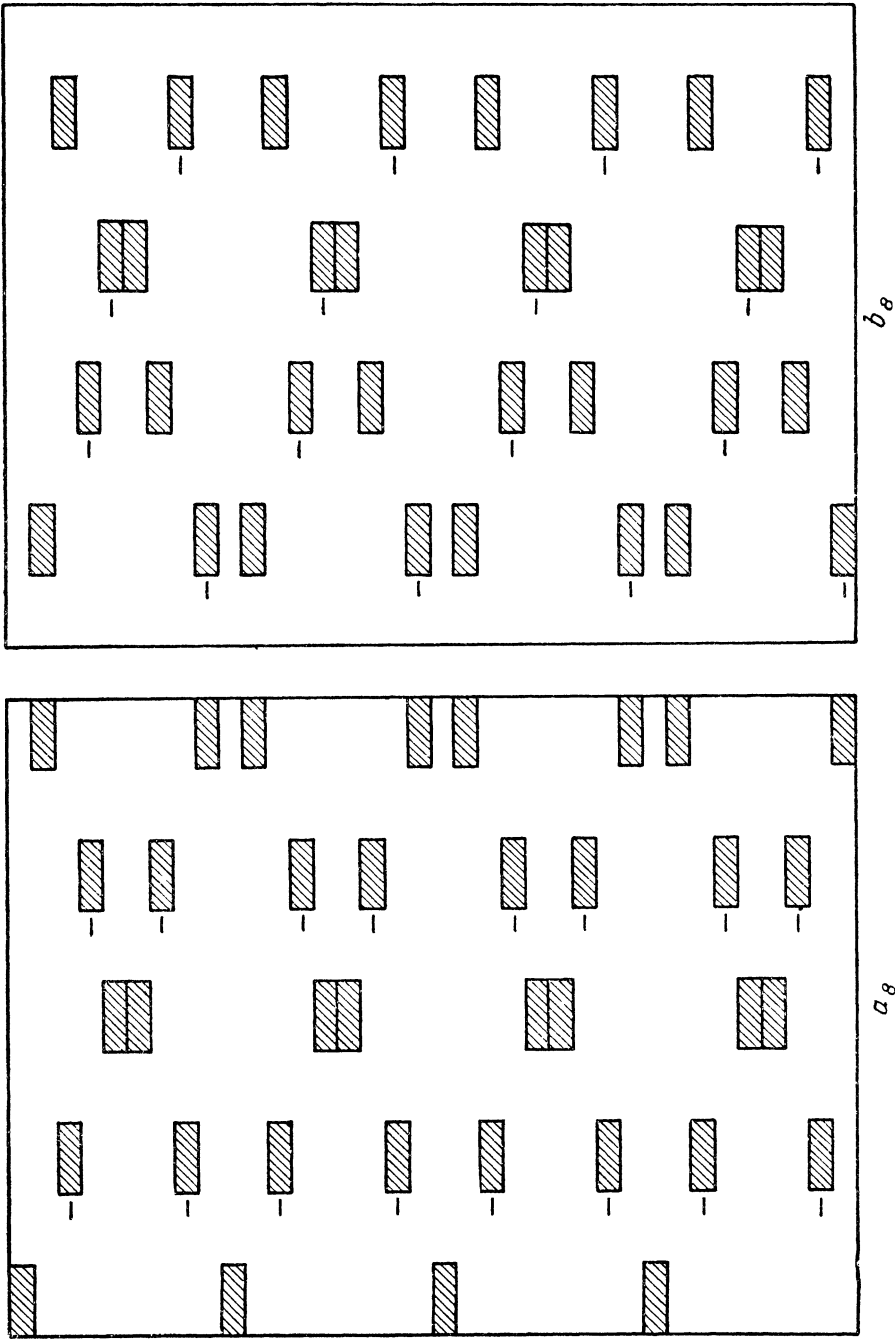


Рис. 14.

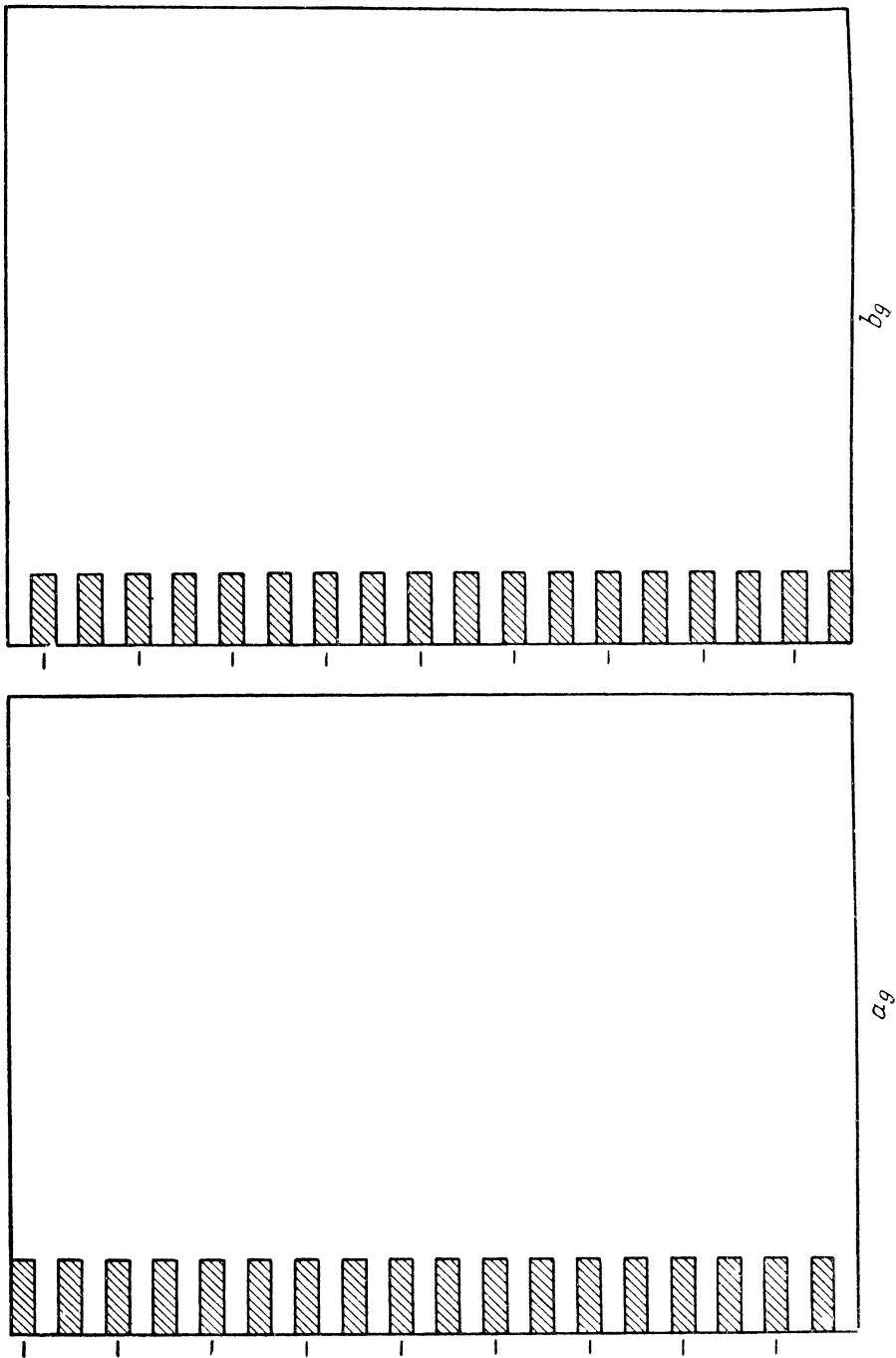


Рис. 15.



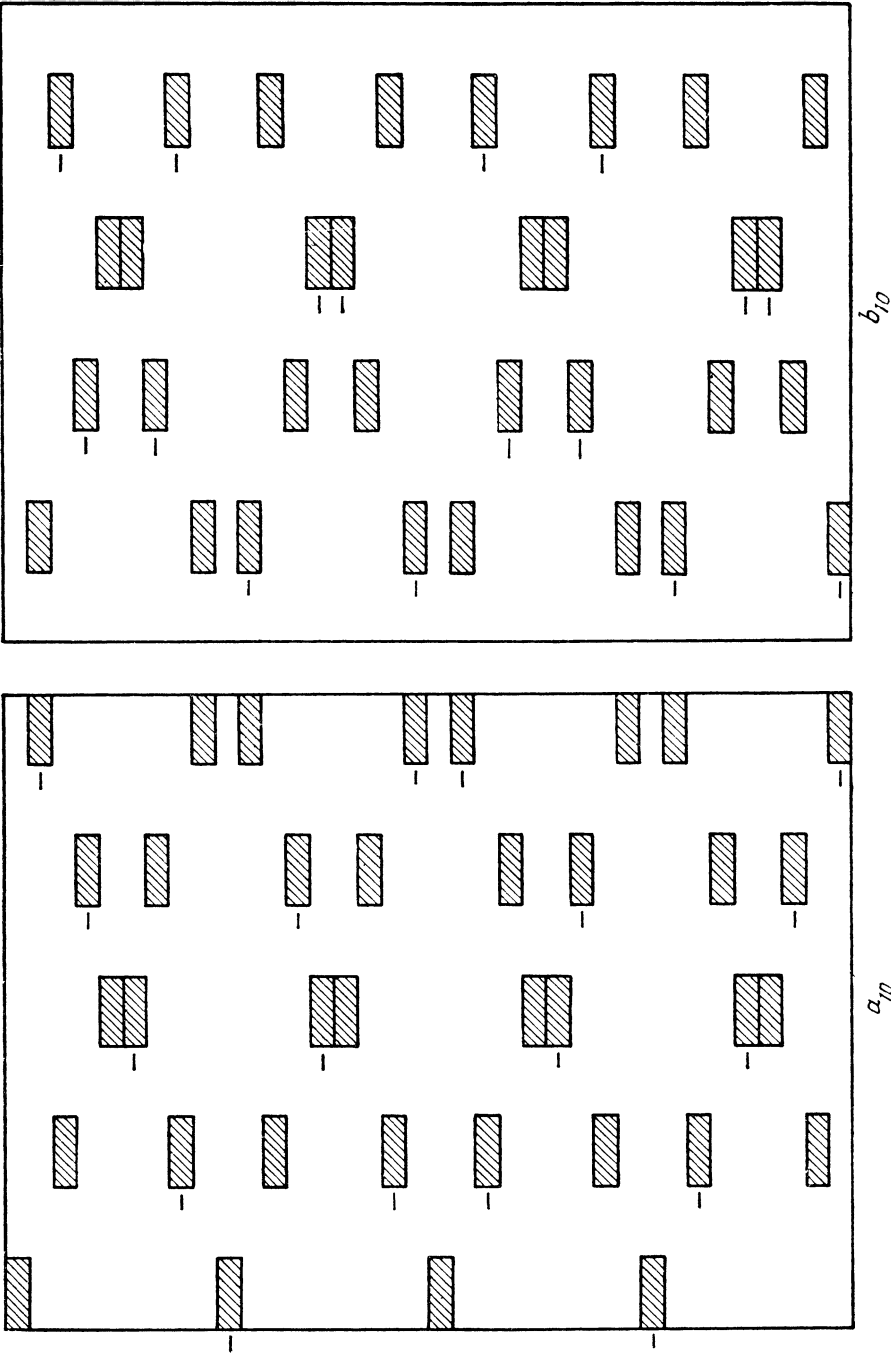


Рис. 16.

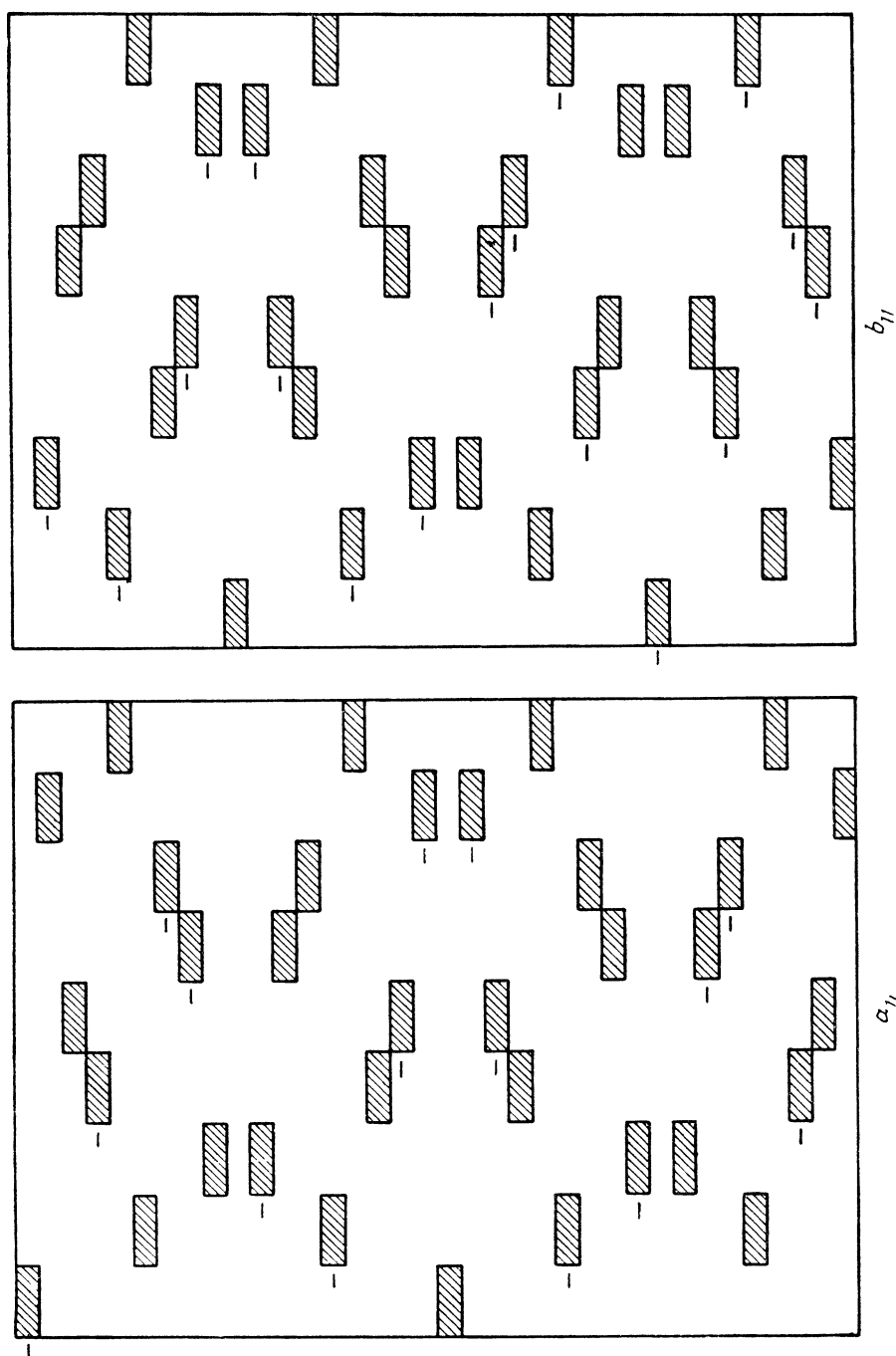


Рис. 17,

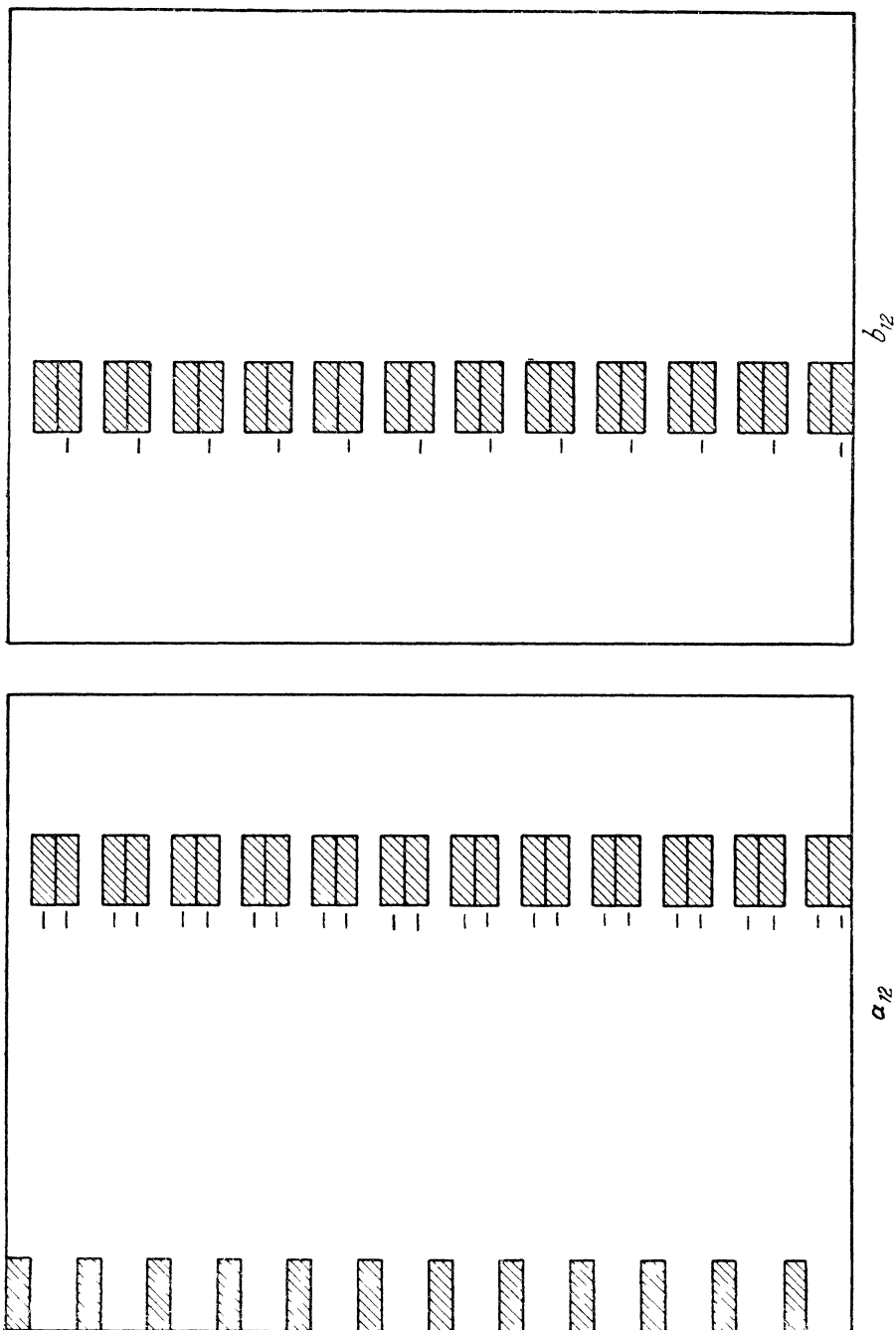


Рис. 18.

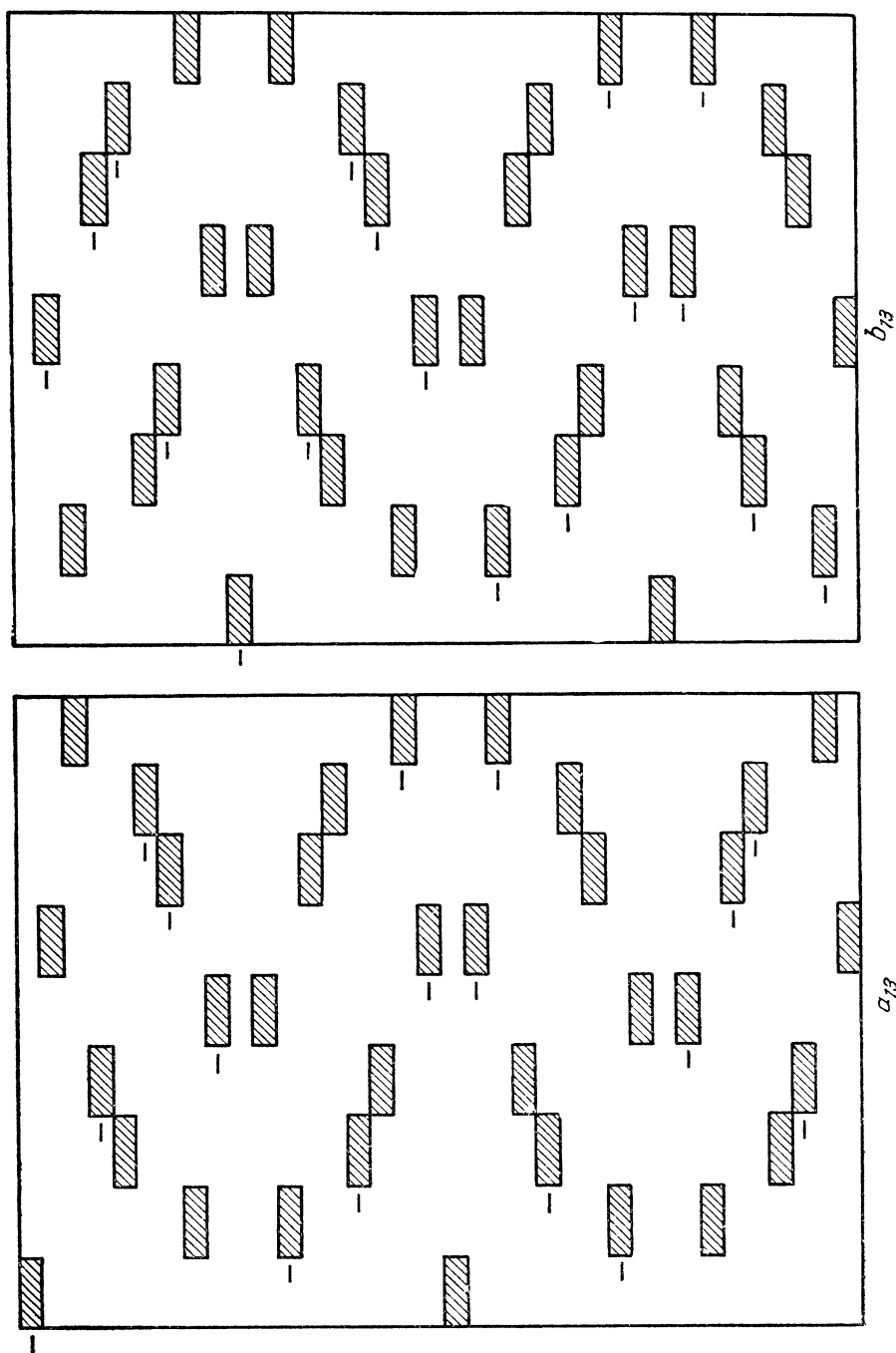


Рис. 19.

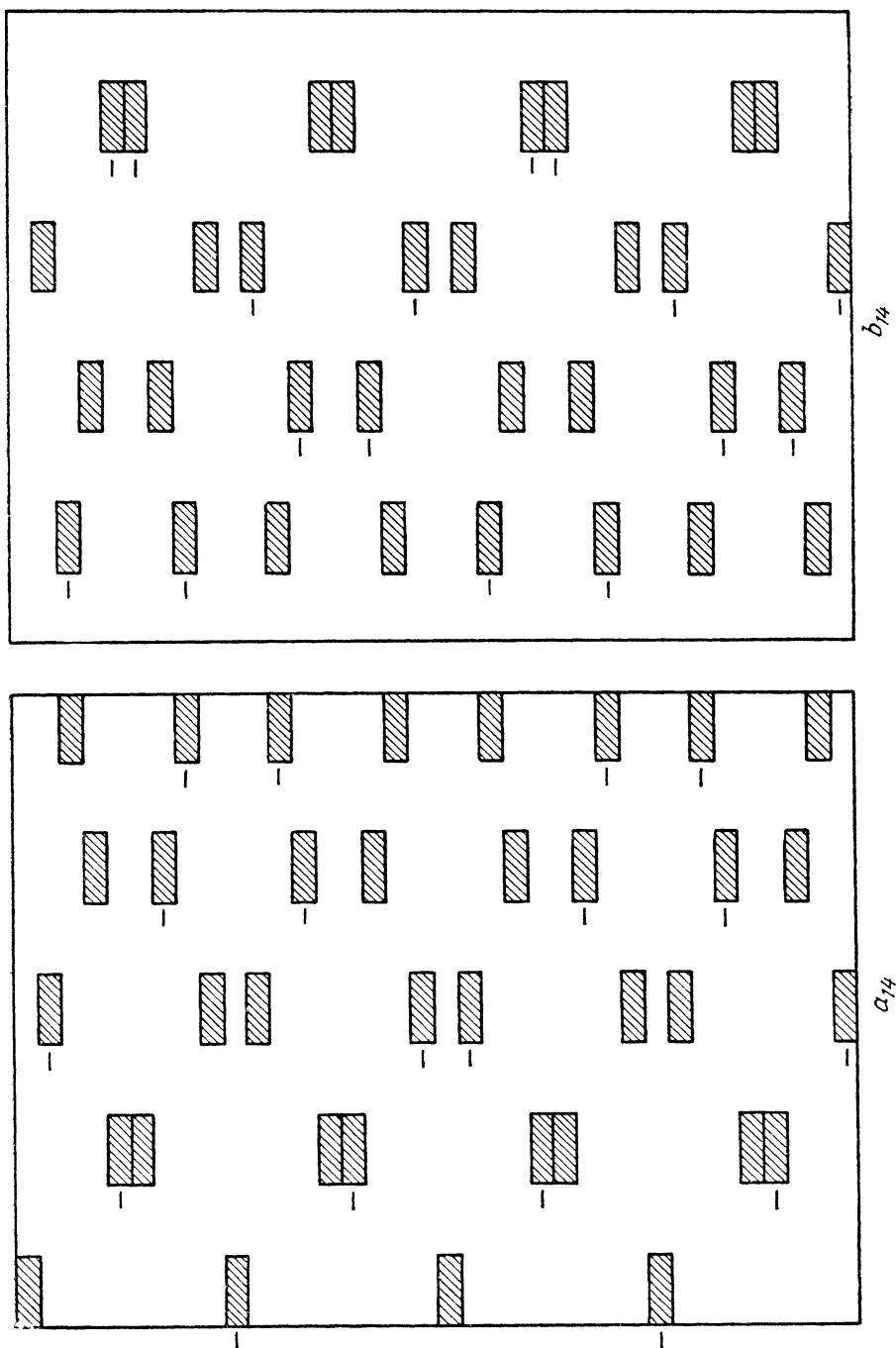


Рис. 20.

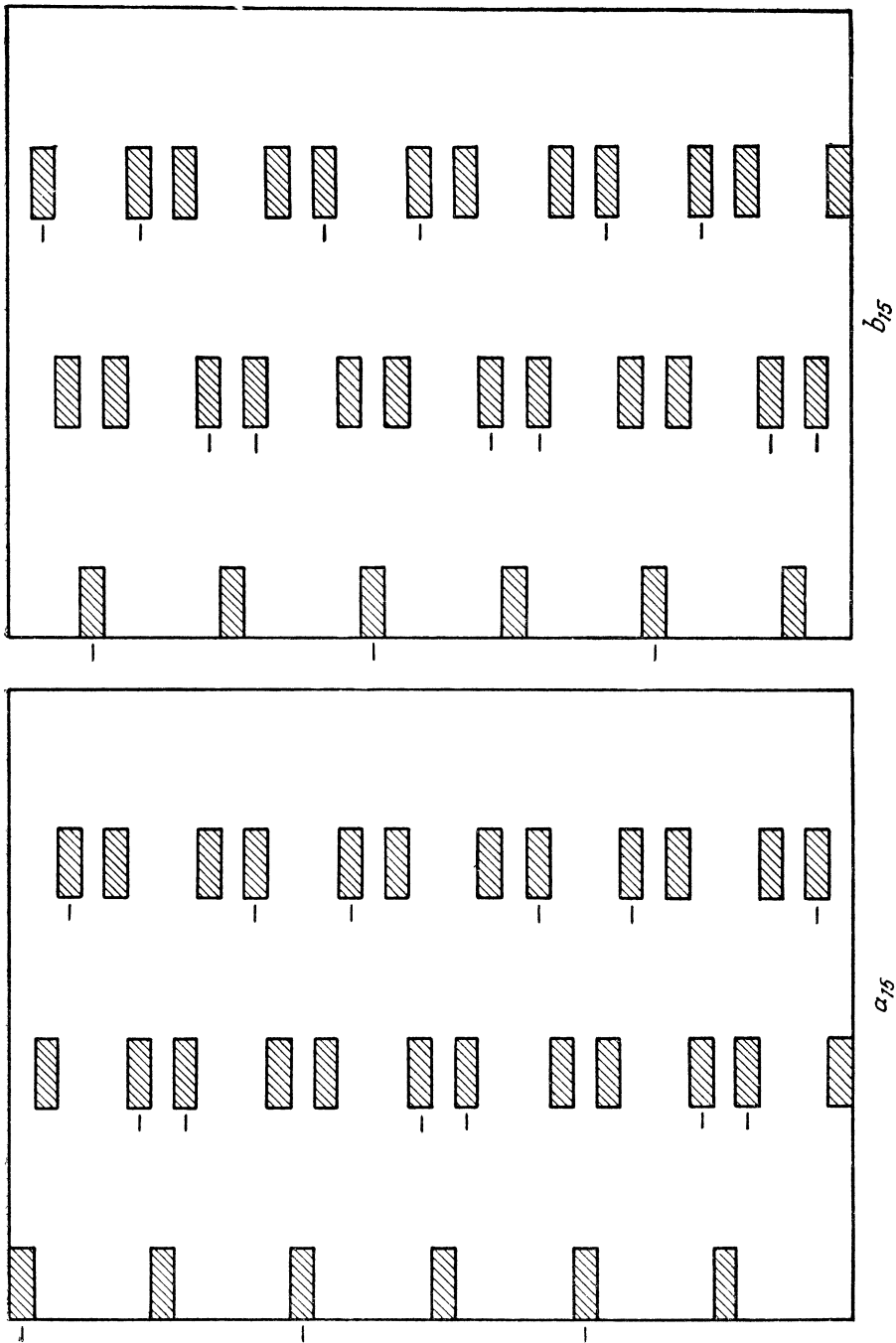


Рис. 21.

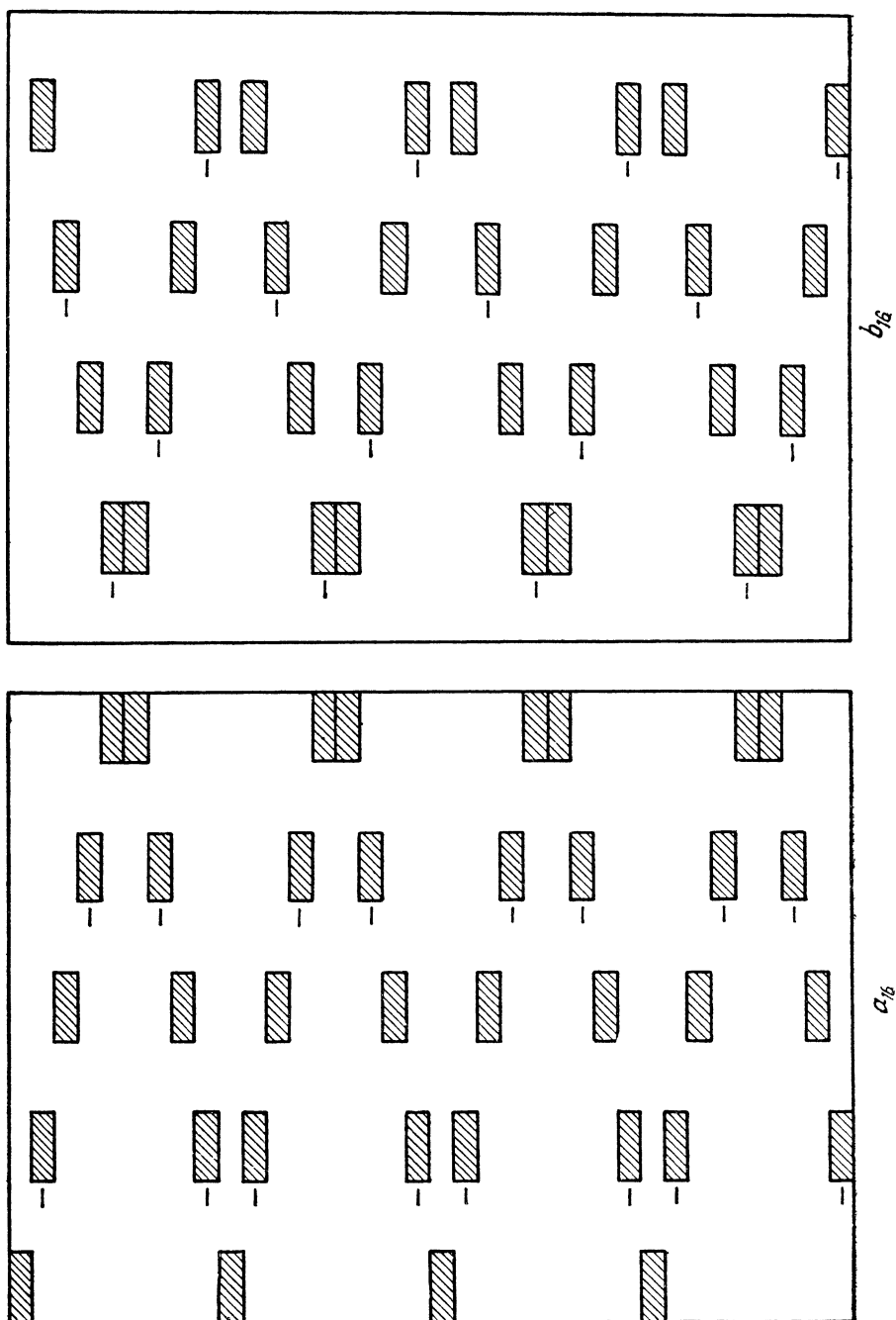


Рис. 22.

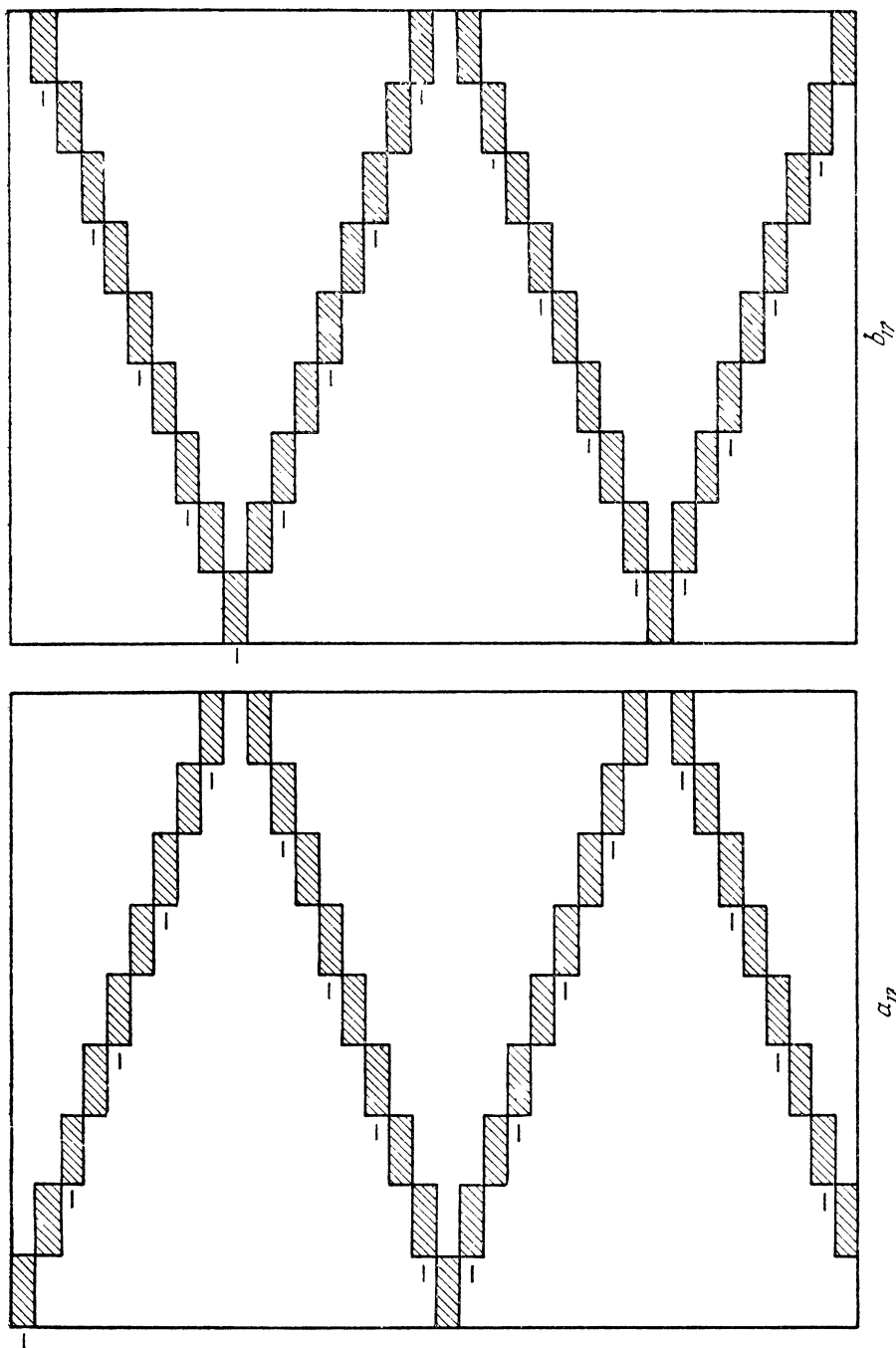


Рис. 23



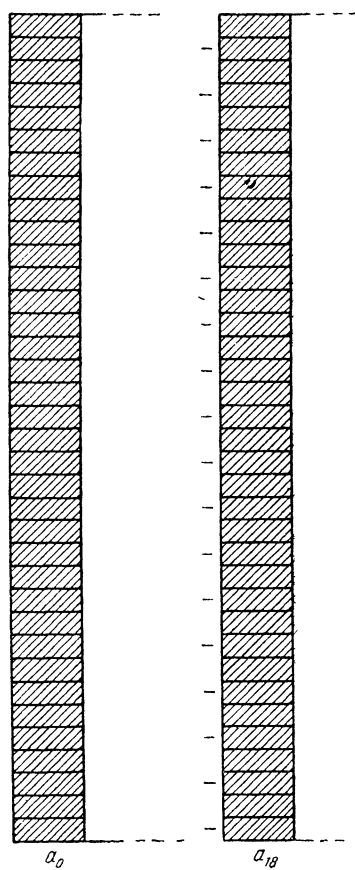


Рис. 24.

