Министерство образования Российской Федерации

Тульский государственный университет

Ю.Н.КОЛМАКОВ, Ю.А.ПЕКАР, В.А.СЕМИН

Механика
и
теория относительности

Задачи и методы их решения

Тула 2002

УДК 537(07)
Механика и теория относительности. Задачи и методы их решения: Учеб. пособие /Ю.Н.Колмаков, Ю.А.Пекар, В.А.Семин; Тул.гос.ун-т. Тула, 2002. 189 с.

ISBN 5 – 7679 – 0206 – 2

Подробно рассмотрены методы решения задач по различным темам раздела “Механика и основы специальной теории относительности” курса общей физики. Кроме того, приведены тексты свыше 450 задач различной степени сложности по этим темам.

Предназначено для проведения семинарских и практических занятий со студентами всех специальностей инженерно-физического и инженерно-технического профилей. Пособие может быть использовано студентами в процессе самостоятельной подготовки к этим занятиям и при индивидуальной работе.

Ил.: 244. Библиогр.: 13.

Печатается по решению библиотечно-издательского совета Тульского государственного университета.

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, проф. Ю.Ф.Головнев, Тул. гос. пед. ун-т им. Л.Н. Толстого.

© Ю.Н.Колмаков, Ю.А.Пекар, В.А.Семин, 2002
ISBN 5 – 7679 – 0206 – 2 © Тульский государственный университет, 2002

Оглавление

Предисловие 4

Глава 1. **Кинематика** 5

Глава 2. **Динамика** 22

Глава 3. **Законы сохранения** 51

Глава 4. **Гармонические колебания** 71

Глава 5. **Специальная теория относительности (СТО)** 90

Глава 6. **Задачи для индивидуальной работы** 99

1. Кинематика 99
Тематика задач 114

2. Динамика 116
Тематика задач 137

3 Законы сохранения 139
Тематика задач 160

4 Колебания 162
Тематика задач 177

5 Релятивистская механика 179
Тематика задач 186

Библиографический список 187

ПРЕДИСЛОВИЕ

В соответствии с современными требованиями, предъявляемыми к высшей школе, возрастает роль практических и семинарских занятий, основная цель которых – научить студента не только решать стандартные задачи, но и самостоятельно оценивать возможности применения различных методов для решения специальных задач.

Целью данного пособия является подробное изложение и обсуждение приемов и способов решения задач по всем темам части курса общей физики “Механика”, включая задачи по кинематике, динамике, законам сохранения в механике, колебаниям механических систем и механике специальной теории относительности.

Пособие разбито на две части. Первая часть (главы 1 – 5) содержат объяснение способов решения основных типов задач. В них рассмотрены различные методы и специальные приемы использования законов физики в процессе решения. Знание этих методов позволяет решить любую из задач, предлагаемых для самостоятельной работы во второй части пособия (глава 6). Необходимый для работы теоретический материал можно найти в различных учебниках, например, [1] – [4].

При подборе текстов задач для самостоятельного решения были использованы различные пособия, например, [5] – [13] и другие, причем главными критериями выбора было соответствие содержания задачи иллюстрируемому ею физическому закону и связь условий задачи с возможным практическим применением изучаемых закономерностей. Для удобства использования все тексты задач сгруппированы по различным темам курса; к ним прилагается список тематического содержания, в котором указаны основные законы, используемые при решении задачи, а также обозначена степень ее трудности, отражающая, в первую очередь, объем и уровень сложности применяемого при решении математического аппарата, а также нестандартность подхода при использовании исходных физических законов.

Как правило, решение всех предлагаемых задач предусматривает применение методов высшей математики в объеме стандартного вузовского курса.

Глава 1

Кинематика

Кинематика прямолинейного движения

Задача 1.1

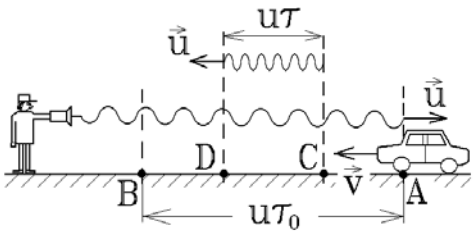

рис. 1.1

Ультразвуковой радар (сонар) испускает импульсы с длительностью $\tau_0 =$ 6 мкс. Чему равна скорость v движущегося навстречу автомобиля (рис.1.1), если отраженные от него импульсы имеют длительность $\tau = 5$ мкс ? Скорость звука в воздухе $u = 330$ м/с .

Решение

Пусть автомобиль встречает передний фронт звукового импульса в точке A . В это время задний фронт приближающегося со скоростью u импульса находится в точке B на расстоянии $BA = u\tau_0$ (рис.1.1)

Задний фронт импульса автомобиль встретит спустя время t_1 в точке C , где $BC = u\,t_1$, $CA = vt_1$, то есть $(u+v)t_1 = u\tau_0$ и $t_1 = u\tau_0/(u+v)$. К этому моменту передний фронт отраженного импульса успел пролететь расстояние $DA = u\,t_1$. Поэтому длина отраженного импульса $DC = DA - CA = u\,t_1 - vt_1 = u\,\tau$, а его длительность $\tau = (u-v)t_1/u =$ $= (u-v)\tau_0/(u+v)$.Отсюда скорость автомобиля $v = \dfrac{\tau_0 - \tau}{\tau_0 + \tau}u = 108$ км/ч .

Задача 1.2

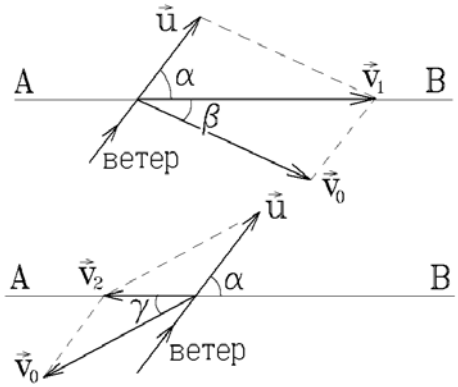

рис.1.2

Какой будет продолжительность перелета из A в B и обратно, если в течение всего полета под углом α к трассе дует ветер со скоростью u ? Скорость аппарата относительно воздуха равна v_0 , а длина трассы между A и B равна l . При каком направлении ветра продолжительность полета максимальна?

Решение

На основании теоремы сложения скоростей имеем: $\vec{v}_{1,2} = \vec{v} + \vec{u}$, где $\vec{v}_{1,2}$ - скорости аппарата относительно земли при движении из A в B и обратно, направленные вдоль линии, соединяющей A и B (рис.1.2). Теорема синусов дает

$u\sin\alpha = v_0\sin\beta$ и $u\sin\alpha = v_0\sin\gamma$, откуда следует, что $\beta = \gamma$. Поэтому $\cos\beta = \cos\gamma = \sqrt{1-(u/v_0)^2\sin^2\alpha}$. Продолжительность полета

$$t = \frac{l}{v_1} + \frac{l}{v_2} = \frac{l}{v_0\cos\beta + u\cos\alpha} + \frac{l}{v_0\cos\gamma - u\cos\alpha} = \frac{2l\sqrt{v_o^2 - u^2\sin^2\alpha}}{v_o^2 - u^2}. \quad (1.1)$$

Как следует из формулы (1.1), максимальное время полета получится при $\sin\alpha = 0$, т.е. при $\alpha = 0$: $t_{\max} = 2lv_0 \Big/ \sqrt{v_0^2 - u^2}$.

Задача 1.3

Машина движется по прямому участку шоссе с постоянной скоростью $v_1 = 60$ км/час. Пешеход, находившийся первоначально на расстоянии $l = 90$ м от шоссе, бежит со скоростью $v_2 = 18$ км/час. При каком наименьшем начальном расстоянии L до машины пешеход успеет встретиться с ней?

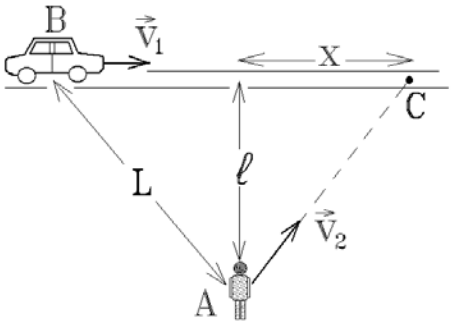

рис. 1.3

Решение

Точка встречи C показана на рис.1.3. Пешеход добежит до нее за время $t_2 = AC/v_2 = \sqrt{l^2 + x^2}\Big/v_2$, а машина доедет за время $t_1 = BC/v_1 = \left(\sqrt{L^2 - l^2} + x\right)\Big/v_1$. Если $t_1 \geq t_2$, то пешеход успеет встретиться с машиной. Он должен бежать к такой точке C шоссе, чтобы максимально опередить машину, т.е. $t_1 - t_2 = \max$.

Из условия экстремума $\dfrac{d(t_1 - t_2)}{dx} = \dfrac{1}{v_1} - \dfrac{x}{v_2\sqrt{l^2 + x^2}} = 0$ получаем

$x = \dfrac{v_2 l}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}$ (можно проверить, что в этой точке $d^2(t_1 - t_2)\Big/dx^2 < 0$, т.е. выполнено условие максимума). Подставляя найденное оптимальное расстояние x, находим:

$$(t_1 - t_2)_{\max} = \frac{\sqrt{L^2 - l^2}}{v_1} - \frac{l\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}{v_1 v_2}. \quad (1.2)$$

Чем меньше начальное расстояние L до машины, тем меньше время опережения. При $(t_1 - t_2)_{\max} = 0$ и машина, и пешеход достигнут точки встречи одновременно. Из уравнения (1.2) при этом условии получим

$L_{\min} = lv_1/v_2 = 300$ м .

Задача 1.4

Волк преследует зайца, который удирает от него к норе с постоянной скоростью $\vec{u}$. Скорость волка $\vec{v}$ постоянна по величине и направлена все время на зайца, причем $v > u$. В начальный момент $\vec{v} \perp \vec{u}$, расстояние между волком и зайцем равно L, а расстояние от зайца до норы равно b (рис.1.4). Найти время погони τ и наибольшее начальное расстояние $L_{\max}$, при котором волк догонит зайца.

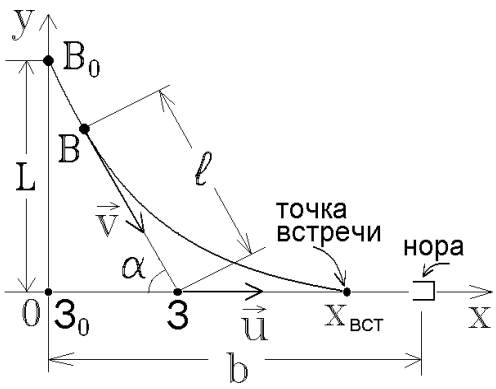

рис. 1.4

Решение

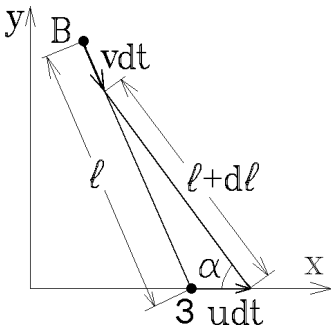

рис. 1.5

Обозначим расстояние между участниками погони в произвольный момент времени через l (рис.1.4). За последующий бесконечно малый интервал времени dt волк сместится на расстояние vdt, заяц – на расстояние udt, а расстояние между ними станет равным $l + dl$ (рис.1.5). Стороны треугольника, изображенного на рис.1.5, связаны теоремой косинусов:

$$(l - vdt)^2 = (l + dl)^2 + (udt)^2 - 2(l + dl)(udt)\cos\alpha .$$

Раскрывая скобки и пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, находим: $-dl = vdt - u\cos\alpha dt$.

Интегрируя это уравнение с учетом начальных условий, получим

$$-\int_L^0 dl = L = v\tau - u\int_0^\tau \cos\alpha dt , \qquad (1.3)$$

где в момент времени $t = \tau$ происходит встреча и $l = 0$. С другой стороны, в момент встречи x – координаты участников должны быть одинаковы, т.е.

$$x_{\text{вст}} = \int_0^\tau v_x dt = u\tau \qquad \text{или} \qquad v\int_0^\tau \cos\alpha dt = u\tau . \qquad (1.4)$$

Исключая $\int_0^\tau \cos\alpha dt$ из уравнений (1.3) и (1.4), находим время погони τ и координату точки встречи $x_{\text{вст}}$:

$$\tau = \frac{vL}{v^2 - u^2}; \qquad x_{\text{вст}} = u\tau = \frac{vuL}{v^2 - u^2} .$$

Так как встреча состоится только, если $x_{\text{вст}} \le b$, то максимальное начальное расстояние между волком и зайцем, при котором охота будет успешной, равно

$$L_{\max} = b\frac{v^2 - u^2}{vu}.$$

Прямолинейное ускоренное движение.

Задача 1.5

Космический аппарат при посадке выпускает тормозной парашют, благодаря которому ускорение торможения оказывается пропорциональным квадрату скорости с коэффициентом пропорциональности β=0,02 м$^{-1}$. При уменьшении начальной посадочной скорости v_0 =240 м/с в 100 раз включаются тормозные колодки, и аппарат останавливается. Найти время и путь торможения, а также среднюю скорость движения при посадке.

Решение

Согласно условию задачи,

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя это уравнение с учетом начальных условий (v=v_o при t=0), получаем:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -\beta\int_0^t dt, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \beta t.$$

Скорость аппарата меняется со временем по закону $v = \dfrac{v_o}{1+\beta v_o t}$. Подставив сюда конечную скорость $v = 0,01\cdot v_0$ находим время торможения: $t = 99/(\beta v_0) = 20,6$ с. Теперь вычислим тормозной путь:

$$l = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{v_0 dt}{1+\beta v_0 t} = \frac{1}{\beta}\ln(1+\beta v_0 t) = \frac{1}{\beta}\ln 100 = 230 \text{ м}.$$

Средняя скорость при торможении, по определению, имеет величину

$$\langle v \rangle = l/t = (v_0 \cdot \ln 100)/99 = 11,2 \text{ м/с}.$$

Криволинейное ускоренное движение.

Задача 1.6

Из наконечника брандспойта с сечением $S = 20$ см^2, находящегося на высоте $h = 1,5$ м над землей, со скоростью $v_0 = 15$ м/с вырывается струя воды (рис.1.6). Найти массу воды, висящей в воздухе, если наименьший радиус кривизны струи равен h. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

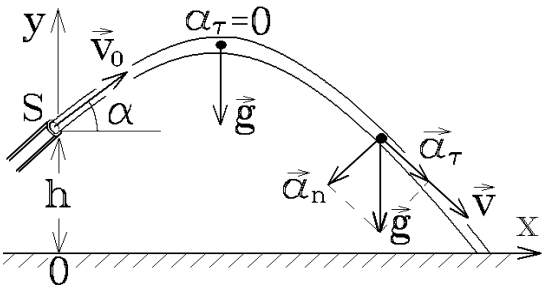

рис. 1.6

Радиус кривизны $R = v^2/a_n$ будет наименьшим в верхней точке траектории, где скорость струи $v = v_0 \cos\alpha$ минимальна (α – угол наклона брандспойта к горизонту), а нормальное ускорение $a_n = g$ – максимально (рис.1.6). Отсюда

$$R_{\min} = h = (v_0 \cos\alpha)^2 / g \qquad \text{и} \qquad \cos\alpha = \sqrt{gh/v_0^2}\ . \qquad (1.5)$$

Из кинематического соотношения

$$y = h + v_0 \sin\alpha\, t - gt^2/2 = 0$$

можно определить время полета струи до падения на землю:

$$t = \left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}\right) / g .$$

Подставляя сюда начальный угол α из формулы (1.5), найдем:

$$t = \left(\sqrt{v_0^2 - gh} + \sqrt{v_0^2 + gh}\right) / g\ .$$

За это время из брандспойта вылетает вода объемом $v_0 St$. Поэтому масса воды, находящейся в воздухе,

$$m = \rho_{\text{воды}} v_0 St = \frac{\rho_{\text{воды}} S v_0}{g}\left(\sqrt{v_0^2 - gh} + \sqrt{v_0^2 + gh}\right) = 91{,}7 \text{ кг}\ .$$

Задача 1.7

На горизонтальной поверхности стоят два забора с высотой h_1 и h_2. С какой минимальной скоростью v_0 следует бросить тело с уровня поверхности, чтобы оно перелетело через оба забора? Расстояние между верхними точками заборов равно l.

Решение

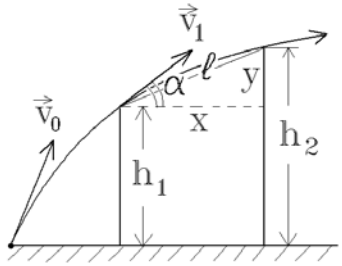

рис. 1.7

Так как $v_0^2 = v_1^2 + 2gh_1$ (v_1 – скорость тела у вершины первого забора (рис.1.7)), то можно искать не минимум v_0, а минимум v_1, что гораздо проще. Приведенная формула легко выводится как из кинематических соображений, так и из закона сохранения энергии.

Пусть расстояние между заборами равно x, разность их высот $h_2 - h_1 = y$, а в момент пролета над первым забором ско-

рость $\vec{v}_1$ тела составляет угол α с горизонтом (рис.1.7). Элементарные формулы кинематики равноускоренного движения приводят к связям: $x = v_1 \cos\alpha \cdot t$ и $y = v_1 \sin\alpha \cdot t - gt^2/2$, где g – ускорение свободного падения, t – время полета между вершинами заборов. Исключая отсюда t, приходим к уравнению:

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{g\,x^2}{2v_1^2\cos^2\alpha}.$$

Приняв во внимание, что $1/\cos^2\alpha = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$ и вводя обозначение $\mathrm{tg}\alpha = \xi$, находим соотношение между v_1 и ξ в неявном виде:

$$y = x\xi - \frac{gx^2}{2v_1^2}\left(1+\xi^2\right). \qquad (1.6)$$

Дифференцируя формулу (1.6) по ξ и учитывая, что x и y – постоянные величины, получаем:

$$x + \frac{gx^2}{v_1^3}\frac{dv_1}{d\xi}\left(1+\xi^2\right) - \frac{gx^2}{v_1^2}\cdot\xi = 0. \qquad (1.7)$$

В случае экстремума $dv_1/d\xi = 0$, и поэтому из уравнения (1.7) следует: $\xi_\mathrm{m} = v_{1\mathrm{m}}^2/gx$. Подстановка этого значения ξ_m в формулу (1.6) дает биквадратное уравнение для определения $v_{1\mathrm{m}}$:

$$v_{1\mathrm{m}}^4 - 2g\,y\,v_{1\mathrm{m}}^2 - g^2x^2 = 0,$$

решение которого позволяет получить искомую величину:

$$v_{1\mathrm{m}}^2 = g\,y + \sqrt{g^2y^2 + g^2x^2} = \left(y+l\right)g = \left(h_2 - h_1 + l\right)g.$$

Следовательно, $v_{0\mathrm{m}}^2 = v_{1\mathrm{m}}^2 + 2gh_1$ или, окончательно, $v_{0\mathrm{m}} = \sqrt{\left(h_1 + h_2 + l\right)g}$.

Задача 1.8

Сферический резервуар радиуса R находится на земле. С какой наименьшей скоростью и под каким углом к горизонту следует бросить камень, чтобы он перелетел резервуар?

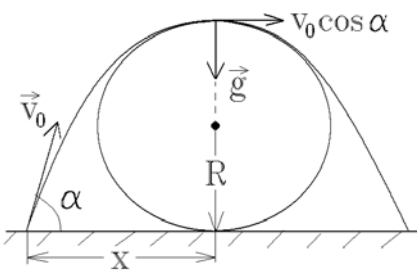

рис. 1.8

Решение

Очевидно, что траектория камня должна быть симметричной, а радиус кривизны этой траектории во всех точках должен превышать радиус сферы (рис.1.8). Радиус кривизны

$R_{\text{кр}} = v^2 / a_{\text{n}}$ будет наименьшим в верхней точке траектории, где нормальное ускорение максимально и равно ускорению свободного падения $(a_{\text{n}} = g)$, а скорость становится наименьшей $(v = v_0 \cos\alpha)$. Поэтому

$$\left(R_{\text{кр}}\right)_{\min} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \geq R. \qquad (1.8)$$

Из условия исчезновения вертикальной проекции скорости $v_0 \sin\alpha - gt = 0$ определяем время подъема камня на наибольшую высоту: $t = v_0 \sin\alpha / g$. Эта высота совпадает с высотой сферы (рис.1.8).

$$h = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 2R. \qquad (1.9)$$

Используя теперь тривиальное равенство $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, получаем из соотношений (1.8) и (1.9), что $\frac{4gR}{v_0^2} + \frac{gR}{v_0^2} \leq 1$, т.е. $v_{0\min} = \sqrt{5gR}$ и

$\alpha = \arcsin\left(\sqrt{0,8}\right) = 63^{\circ}26'$.

Задача 1.9.

Найти величину ускорения тела, соскальзывающего без начальной скорости по винтовому желобу с шагом h и радиусом R (рис.1.9) в конце n-го витка. Найти также время соскальзывания. Трение считать пренебрежимо малым.

Решение

Движение по винтовой (спиральной) линии можно представить в виде суммы двух движений: вращения по окружности радиуса R в горизонтальной плоскости и одновременного падения вертикально вниз.

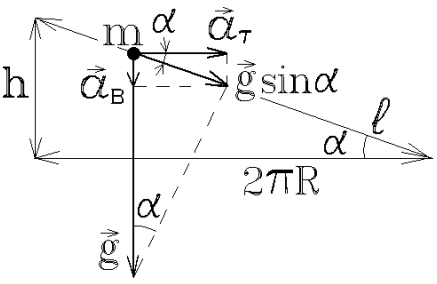

рис.1.9

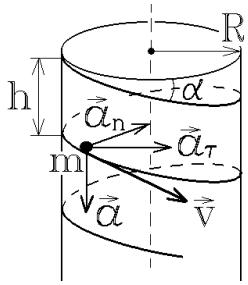

рис.1.10

Свободное скольжение тела происходит под действием проекции силы тяжести на направление траектории. Так как траектория наклонена к горизонту под углом α (рис.1.9), то вдоль траектории тело будет двигаться с касательным ускорением $g\sin\alpha$, где g – ускорение свободного падения (рис.1.10). Разложив это ускорение на вертикальную и горизонтальную проекции, нахо-

дим, что тело движется вниз с ускорением $a_{\text{в}} = (g\sin\alpha)\cdot\sin\alpha$ и одновременно вращается по окружности с тангенциальным ускорением $a_{\tau} = (g\sin\alpha)\cdot\cos\alpha$ и нормальным ускорением $a_{\text{n}} = (v')^2/R$, где $v' = v\cos\alpha$ – проекция скорости тела на горизонтальное направление.

Зная проекции ускорения на три взаимно перпендикулярных направления (рис.1.9), легко найти полное ускорение тела:

$$a = \sqrt{a_{\text{в}}^2 + a_{\text{n}}^2 + a_{\tau}^2} = \sqrt{g^2\sin^2\alpha + (v\cos\alpha)^4/R^2}\ . \qquad (1.10)$$

На рис.1.10 один виток траектории "развернут" на вертикальной плоскости, и видно, что $\sin\alpha = h/l$, $\cos\alpha = 2\pi R/l$, где $l = \sqrt{h^2 + 4\pi^2R^2}$ – длина одного витка.

Так как трение отсутствует, а силы нормальной реакции работу над телом не производят, то из закона сохранения энергии $mgH = mv^2/2$ следует, что спустившись с высоты n витков $H = hn$, тело приобретет скорость $v = \sqrt{2ghn}$. После подстановки в формулу (1.10), находим искомую величину ускорения в конце пути:

$$a = \sqrt{\frac{g^2h^2}{h^2+4\pi^2R^2} + \frac{4g^2h^2n^2(2\pi R)^4}{R^2\left(h^2+4\pi^2R^2\right)^2}} = \frac{gh}{h^2+4\pi^2R^2}\sqrt{h^2+4\pi^2R^2\left(1+16\pi^2n^2\right)}\,.$$

Время соскальзывания легко определить для вертикальной проекции движения:

$$H = hn = \frac{a_{\text{в}}t^2}{2}, \text{ откуда } t = \sqrt{\frac{2hn}{a_{\text{в}}}} = \sqrt{\frac{2hn}{g\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{2n\left(h^2+4\pi^2R^2\right)}{gh}}\ .$$

Задача 1.10

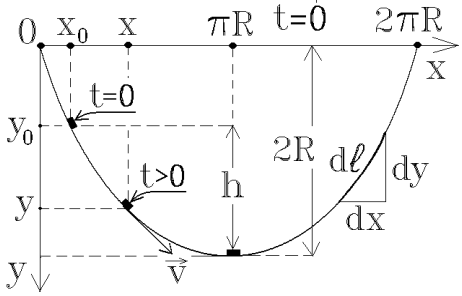

рис. 1.11

По наклонному желобу, имеющему форму вогнутой циклоиды (рис.1.11), соскальзывает без трения небольшая шайба. Найти время соскальзывания шайбы с высоты h до нижней точки желоба.

Решение

Циклоида – это кривая, которую описывает точка, находящаяся на ободе колеса, которое катится равномерно и без проскальзывания. В параметрической форме уравнение циклоиды имеет вид:

$$x = R(\varphi - \sin\varphi);\ \ y = R(1-\cos\varphi),$$

где R – радиус колеса, φ – угол поворота, а точкам $x = 0, \pi R, 2\pi R$ соответствуют углы поворота $0,\ \pi,\ 2\pi$.

Пусть в начальный момент времени шайба находилась в точке (x_0, y_0) и имела нулевую начальную скорость $v_0 = 0$. В произвольный момент времени $t > 0$ она окажется в точке (x, y), и ее скорость возрастет до величины $v = \sqrt{2g(y - y_0)}$ (так как трение отсутствует, эту формулу легко получить из закона сохранения энергии: $\dfrac{mv^2}{2} = mg(y - y_0)$).

Для дальнейшего решения перейдем к угловой координате φ. Тогда

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2gR(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}\,.$$

Но $v = dl/dt$, а элемент длины траектории $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} =$ $= \sqrt{(R - R\cos\varphi)^2 + (R\sin\varphi)^2}\,d\varphi = R\sqrt{2(1 - \cos\varphi)}\,d\varphi = 2R\sin\dfrac{\varphi}{2}d\varphi$. Следовательно $v = \sqrt{2gR(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)} = 2R\sin\dfrac{\varphi}{2}\dfrac{d\varphi}{dt}$. Разделяя в последнем уравнении переменные и интегрируя, находим время соскальзывания шайбы из точки с координатами x_0, y_0 в точку с координатами x, y:

$$t = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{2R\sin\dfrac{\varphi}{2}d\varphi}{\sqrt{2gR(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}} = -2\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0^2 - \xi^2}}.$$

Здесь использована замена переменной: $\cos(\varphi/2) = \xi$. Отсюда следует, что $d\xi = -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\varphi}{2}d\varphi$ или $\sin\dfrac{\varphi}{2}d\varphi = -2d\xi$, а также $\cos\varphi_0 - \cos\varphi =$ $= (1 + \cos\varphi_0) - (1 + \cos\varphi) = 2\left(\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2} - \cos^2\dfrac{\varphi}{2}\right) = 2\left(\xi_0^2 - \xi^2\right)$.

Нижней точке желоба соответствует угол $\varphi = \pi$, поэтому в верхнем пределе $\xi = \cos\dfrac{\varphi}{2} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, а искомое время:

$$t = -2\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\xi_0}^{0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0^2 - \xi^2}} = -2\sqrt{\frac{R}{g}}\arcsin\frac{\xi}{\xi_0}\bigg|_{\xi_0}^{0} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\arcsin(1) = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}\,.$$

Итак: время соскальзывания шайбы не зависит от высоты или от на-

чальной точки соскальзывания! Кривые или поверхности с таким свойством называются изохронными.

В 1673 г. Х. Гюйгенс доказал, что циклоида – единственная изохронная кривая. А в 1696 г. И.Бернулли показал, что циклоида, к тому же, является брахистохроной, т.е. кривой, время соскальзывания по которой с данной высоты является наименьшим. Вспомните, какую форму имеют крыши индийских пагод!

Кинематика вращательного движения.

Задача 1.11

Якорь электромотора, вращавшийся с частотой ν_0 =50 Гц, после выключения тока, двигался с угловым ускорением, линейно убывающим с течением времени, и остановился через $\tau = 10$ с, сделав до остановки $N = 300$ оборотов. Найти зависимость углового ускорения от времени в явном виде.

Решение

Согласно условию задачи, $\varepsilon = \alpha - \beta t$.Поэтому

$$\omega = \int \varepsilon\, dt = \omega_o + \alpha t - \beta t^2/2 ,$$

где $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ – начальная угловая скорость вращения. Так как $\omega = 0$ при $t = \tau$, то

$$\omega_0 = -\alpha\tau + \beta\tau^2/2 . \qquad (1.11)$$

Далее, поскольку $\varphi = \int \omega\, dt = \omega_0 t + \alpha t^2/2 - \beta t^3/6$, то

$$N = \varphi(\tau)/2\pi = \nu_0\tau + \alpha\tau^2/4\pi - \beta\tau^3/12\pi . \qquad (1.12)$$

Из уравнений (1.11) и (1.12) находим:

$$\alpha = \frac{4\pi}{\tau}\left(\frac{3N}{\tau} - 2\nu_0\right); \qquad \beta = \frac{12\pi}{\tau^3}\left(2N - \nu_0\tau\right) .$$

Подстановка численных значений в эти выражения дает: $\alpha = -4\pi$ с$^{-2}$ и $\beta = 1,2\pi$ с$^{-3}$. Таким образом, $\varepsilon = -4\pi(1 + 0,3t)$ с$^{-2}$.

Задача 1.12

Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловое ускорение меняется по закону $\varepsilon = \varepsilon_0(1 - \alpha\varphi)$, где ε_0 и α – положительные константы, а φ – угол поворота. Найти зависимость угловой скорости от угла поворота и описать характер движения. Известно, что $\omega = 0$ при $\varphi = 0$.

Решение

Из определения угловой скорости следует, что

$$d\omega = \varepsilon\, dt = \varepsilon_0(1 - \alpha\varphi)dt .$$

Но $dt = d\varphi/d\omega$, поэтому $\omega d\omega = \varepsilon_0(1-\alpha\varphi)d\varphi$. Интегрируя это дифференциальное уравнение с учетом начального условия, находим:

$$\int_0^{\omega}\omega d\omega = \varepsilon_0\int_0^{\varphi}d\varphi - \alpha\varepsilon_0\int_0^{\varphi}\varphi\, d\varphi, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\omega^2}{2} = \varepsilon_0\left(\varphi - \alpha\frac{\varphi^2}{2}\right),$$

откуда

$$\omega = \pm\sqrt{\varepsilon_0\varphi(2-\alpha\varphi)}\,. \tag{1.13}$$

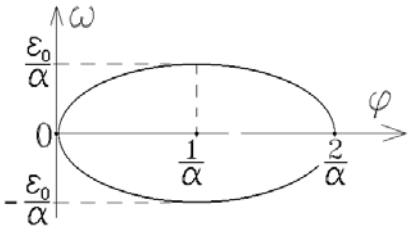

рис. 1.12

Применив к полученному результату условие экстремума $d\omega^2/d\varphi\big|_{\varphi=\varphi_m} = 2\varepsilon_0(1-\alpha\varphi_m) = 0$, определяем, что величина угловой скорости достигает максимума при $\varphi_m = 1/\alpha$ и обращается в нуль при $\varphi = 0$ и $\varphi = 2/\alpha$. Зависимость $\omega(\varphi)$ показана на рис.1.12 (при положительных ε_0 и α угол φ не может принимать отрицательных значений).

Движение, о котором идет речь – колебания около положения равновесия $\varphi = 1/\alpha$ с амплитудой $\varphi_m = 1/\alpha$. Из формулы (1.13), в силу того, что $\omega = d\varphi/dt$, следует:

$$\pm\frac{d\varphi}{\sqrt{\varepsilon_0\varphi(2-\alpha\varphi)}} = dt$$

Интегрируя это уравнение, находим зависимость угла поворота от времени. В частности период колебаний будет

$$T = 2\int_{\varphi=0}^{\varphi=2/\alpha}\frac{d\varphi}{\sqrt{2\varepsilon_0\varphi - \varepsilon_0\alpha\varphi^2}}\,.$$

С помощью замены переменной $\varphi = \xi^2$ приходим к известному интегралу

$$T = \frac{4}{\sqrt{\varepsilon_0\alpha}}\int_0^{\sqrt{2/\alpha}}\frac{d\xi}{\sqrt{2/\alpha - \xi^2}} = \frac{4}{\sqrt{\varepsilon_0\alpha}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\xi\right)\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=\sqrt{2/\alpha}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon_0\alpha}}\,. \tag{1.14}$$

К этому результату можно прийти намного быстрее, если привлечь на помощь динамику, где доказывается, что уравнение гармонических колебаний в канонической форме имеет вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0\,,$$

где ω_0 – циклическая частота колебаний. Тогда условие задачи можно записать в виде

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon_0 - \varepsilon_0\alpha\varphi \qquad \text{или} \qquad \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \varepsilon_0\alpha\varphi_1 = 0\,, \tag{1.15}$$

где $\varphi_1 = (\varphi - 1/\alpha)$ – новая угловая переменная (угол поворота, отсчитываемый от положения равновесия $\varphi_1 = 0$). Из уравнения (1.15) сразу следует, что $\omega_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \alpha}$ или $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/\sqrt{\varepsilon_0 \alpha}$ – в полном согласии с формулой (1.14).

Сложение скоростей.

Задача 1.13

На одном конце бесконечно растяжимого шнура длины $l = 1$ м сидит жук, тогда как другой конец шнура закреплен в стене. В начальный момент времени $t = 0$ шнур начали растягивать, перемещая свободный конец шнура с постоянной скоростью $v_0 = 1$ м/с , а жук пополз по шнуру к стене с постоянной скоростью $u = 0{,}1$ м/с . За какое время τ жук доползет до стены?

Решение

Направим ось x вдоль скорости растягиваемого шнура (рис.1.13,а). Правый конец шнура удаляется от стены со скоростью v_0 , и в момент t находится на расстоянии $l + v_0 t$, а левый конец шнура неподвижен. Поэтому скорость любой точки шнура пропорциональна ее удалению x от стены, как показано на рис.1.13,б:

$$v(x) = \frac{x}{l + v_0 t} v_0 .$$

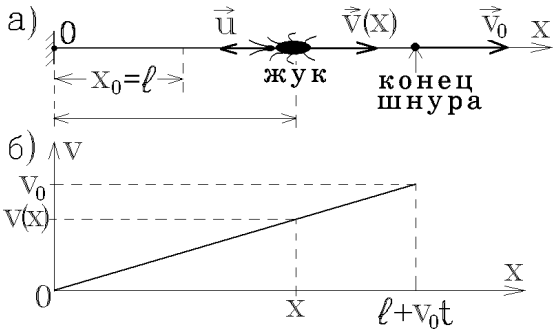

рис. 1.13

Пусть x – координата жука, который двигается вместе со шнуром со скоростью $v(x)$ и дополнительно ползет со скоростью u относительно шнура. Его скорость относительно стены:

$$\frac{dx}{dt} = v(x) - u = \frac{x v_0}{l + v_0 t} - u . \qquad (1.16)$$

Остается решить это дифференциальное уравнение с учетом начальных условий: $x_0 = l$ при $t = 0$. Сделаем замену переменной $x = (l + v_0 t)\xi$. Тогда $\frac{dx}{dt} = (l + v_0 t)\frac{d\xi}{dt} + \frac{v_0 x}{l + v_0 t}$, и подстановка в уравнение (1.16) позволяет привести его к виду

$$(l + v_0 t)\frac{d\xi}{dt} = -u .$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$d\xi = -\frac{u\,dt}{l + v_0 t} \quad \text{и} \quad \xi = -\frac{u}{v_0}\ln\left(1 + \frac{v_0}{l}t\right) + \xi_0 .$$

Начальные условия $x_0 = l \cdot \xi_0 = l$ дают постоянную интегрирования $\xi_0 = 1$. Возвращаясь к переменной x, получаем искомое решение уравнения (1.16):

$$x = \left(l + v_0 t\right)\left[1 - \frac{u}{v_0}\ln\left(1 + \frac{v_0 t}{l}\right)\right]. \qquad (1.17)$$

Полагая в формуле (1.17) $x = 0$ в тот момент времени $t = \tau$, когда жук доползет до стены, находим:

$$\tau = \frac{l}{v_0}\left(\exp\left(v_0/u\right) - 1\right) = \exp\left(10\right) - 1 = 6{,}12 \text{ час.}$$

Задача 1.14

В тот момент времени, когда центр катящегося без скольжения со скоростью v_0 колеса радиуса R находился в точке C (рис.1.14), с его обода сорвался застрявший камешек и пролетел через точку C. На какую максимальную высоту h над поверхностью земли взлетит этот камешек?

Решение

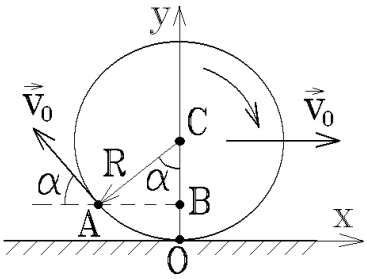

рис. 1.14

Катящееся колесо совершает два движения – поступательное со скоростью v_0 вдоль оси x и вращательное с угловой скоростью $\omega = v_0/R$. Скорости этих движений складываются векторно, и камешек, оторвавшийся в точке A (рис.1.14), имеет проекции скорости $v_{x0} = v_0 - v_0\cos\alpha$, $v_{y0} = v_0\sin\alpha$. Он летит за колесом вдоль оси x (если на автомобили не ставить брызговиков, то за ними будет лететь шлейф грязи, догоняющий автомобиль при его резком торможении).

Условие пролета камешка в некоторый момент времени t_1 через точку C, в которой в начальный момент $t_0 = 0$ находился центр колеса, дает кинематические соотношения:

$$OC = R = R\left(1 - \cos\alpha\right) + v_{0y}t_1 - \frac{gt_1^2}{2} \qquad \text{и} \qquad AB = R\sin\alpha = v_{0x}t_1.$$

Исключая из этих формул время $t_1 = R\sin\alpha \,/\, v_0\left(1 - \cos\alpha\right) = \left(R\ \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\Big/ v_0$,

получаем уравнение для определения неизвестного угла α:

$$\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2v_0^2}{gR}. \qquad (1.18)$$

Время подъема камешка до наивысшей точки $t_2 = v_{0y}/g = v_0\sin\alpha/g$, а

высота подъема над уровнем земли

$$h = R\left(1-\cos\alpha\right) + v_{0y}t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = R\left(1-\cos\alpha\right) + \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha\,.$$

Учитывая, что $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\Big/\left(1+\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$;

$\sin^2\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\Big/\left(1+\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right)^2$, и подставляя соотношение (1.18), находим:

$$h = 2R\frac{\left(gR+v_0^2\right)^2 + v_0^4}{\left(gR+2v_0^2\right)^2}\,.$$

Задача 1.15

Два твердых тела вращаются вокруг неподвижных взаимно перпендикулярных осей с **постоянными** угловыми скоростями ω_1 = 3 рад/с и ω_2 = = 4 рад/с. Найти угловую скорость и угловое ускорение одного тела относительно другого.

Решение

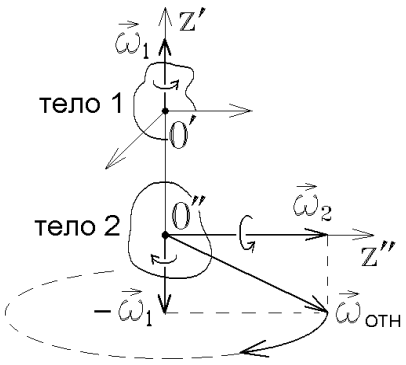

рис. 1.15

Рассмотрим систему O', в которой первое тело неподвижно, и которая вращается вместе с первым телом вокруг оси z' с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$. В этой системе ось вращения z'' второго тела дополнительно будет вращаться в противоположную сторону с угловой скоростью $\left(-\vec{\omega}_1\right)$, как показано на рис.1.15. Угловые скорости вращения второго тела складываются, и получается угловая скорость вращения второго тела относительно неподвижного первого:

$$\vec{\omega}_{\text{отн}} = \vec{\omega}_2 + \left(-\vec{\omega}_1\right) = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1\,,$$

в соответствии с определением относительной скорости. Ее величина $\omega_{\text{отн}} = \sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2} = 5$ рад/с постоянна, но направление изменяется. Поэтому относительное ускорение не равно нулю.

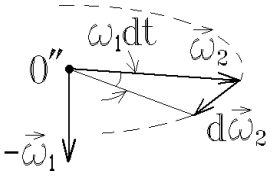

рис. 1.16

Вектор $\left(-\vec{\omega}_1\right)$ не изменяется. Поэтому $\vec{\varepsilon}_{\text{отн}} = d\vec{\omega}_{\text{отн}}/dt = d\vec{\omega}_2/dt$. Как видно из треугольника на рис.1.16, приращение вектора $\vec{\omega}_2$ за время dt будет равно (по модулю) $d\omega_2$ = радиус × угол поворота = $\omega_2\cdot\omega_1 dt$. С уче-

том направления получим

$$\vec{\varepsilon}_{\text{отн}} = \left[\vec{\omega}_2, \vec{\omega}_1\right] \qquad \text{и} \qquad \varepsilon_{\text{отн}} = \omega_2\omega_1 = 12 \text{ рад/с}^2 .$$

Задача 1.16

Нить, намотанную на ось катушки, тянут со скоростью v под углом α к горизонту. Вследствие этого катушка катится по горизонтальной плоскости без скольжения. Найти скорость центра масс и угловую скорость вращения катушки. При каком условии катушка движется а) в сторону движения нити? б) в противоположную сторону? Радиусы центральной части катушки и ее обода равны соответственно r и R.

Решение

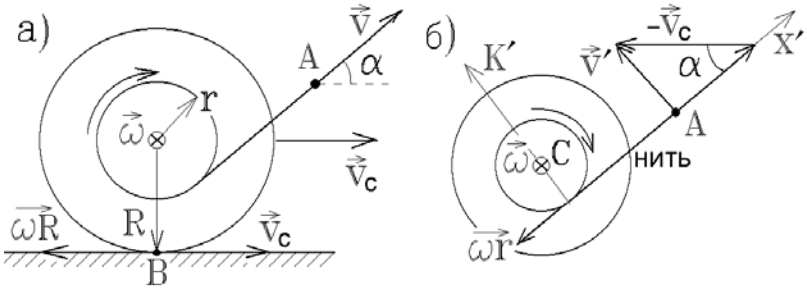

рис. 1.17

В неподвижной системе K, связанной с горизонтальной плоскостью, катушка совершает два движения: поступательное со скоростью $\vec{v}_C$ и вращательное с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис.1.17,а). Так как скольжения нет, то точка касания B неподвижна и $\omega R = v_C$.

Пусть v – скорость точки A нити в этой системе. Перейдем в систему K', связанную с центром масс C катушки (рис.1.17,б). В новой системе катушка только вращается вокруг оси C, а нить наматывается на нее со скоростью ωr. По теореме сложения скоростей точка A в системе K' имеет скорость $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_C$, проекция которой на ось x', направленную вдоль нити, равна по величине скорости намотки (рис.1.17,б):

$$v'_x = v - v_C \cos\alpha = -\omega r = -v_C r/R$$

(знак "–" показывает, что проекция скорости намотки на ось x' отрицательна). Отсюда

$$v_C = \frac{v}{\cos\alpha - r/R}; \quad \omega_z = \frac{v}{R\cos\alpha - r}. \tag{1.19}$$

Из соотношений (1.19) сразу следует, что

$$\left.\begin{array}{lll} v_C > 0 & \text{при} & \cos\alpha > r/R \text{ (нить наматывается на катушку),} \\ v_C < 0 & \text{при} & \cos\alpha < r/R \text{ (нить разматывается с катушки).} \end{array}\right\} \tag{1.20}$$

Переход в неинерциальную систему отсчета.

Задача 1.17

На клин, плоскость которого составляет угол φ с горизонтом, положили

шайбу A (рис.1.18). Какое ускорение a_0 необходимо сообщить клину в горизонтальном направлении, чтобы шайба A свободно падала вертикально вниз? Трением шайбы о клин пренебречь.

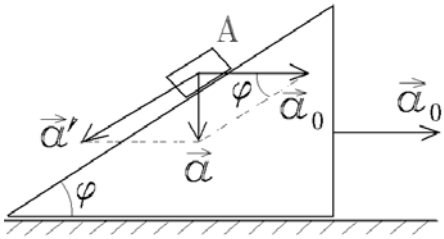

рис. 1.18

Решение

Согласно формуле преобразования ускорений $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$, где $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ – ускорения шайбы относительно Земли и клина соответственно. Но по условию задачи $\vec{a} = \vec{g}$. Поэтому, используя рис.1.18, находим $a_0 = g\mathrm{ctg}\varphi$.

<u>Задача 1.18</u>

Снаряд выстреливается с поверхности Земли на экваторе вертикально вверх с начальной скоростью v_0 =1 км/с. На каком расстоянии l от точки выстрела и в каком направлении он упадет на Землю?

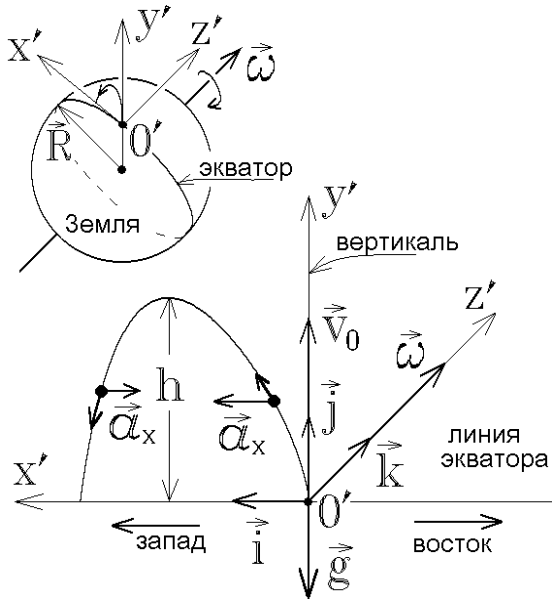

рис. 1.19

Решение

Система отсчета, связанная с Землей, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 7,27 \cdot 10^{-5}$ рад/с. В этом случае ускорение тела $\vec{a}$ в инерциальной системе отсчета связано с ускорением тела $\vec{a}'$ во вращающейся системе соотношением ([1], стр. 24)

$$\vec{a} = \vec{g} + 2\left[\vec{\omega}, \vec{v}'\right] - \omega^2 \vec{R}, \quad \text{или}$$

$$\vec{a}' = \vec{g} - 2\left[\vec{\omega}, \vec{v}'\right] + \omega^2 \vec{R}, \qquad (1.21)$$

где второе слагаемое в правой части – кориолисово ускорение, а третье слагаемое – центростремительное ускорение, которое, изменив знак, стало **центробежным,** и направлено от оси вращения.

Направим ось координат x' вдоль экватора, ось y' – вертикально, а ось z' – вдоль оси вращения Земли, как показано на рис.1.19. Тогда второе слагаемое в правой части (1.21) можно представить, как

$$-2\left[\vec{\omega}, \vec{v}'\right] = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ v'_x & v'_y & v'_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \underbrace{2\omega v'_y}_{=a'_x} - \vec{j} \cdot 2\omega v'_x ,$$

откуда заключаем, что кориолисово ускорение вызывает отклонение сна-

ряда от вертикали **на запад при подъеме и на восток при падении**.

Поэтому в проекциях на координатные оси x' и y' получим:

$$a'_x = 2\omega v'_y \ , \tag{1.22}$$

$$a'_y = -g - 2\omega v'_x + \omega^2 R \ . \tag{1.23}$$

Запишем уравнение (1.22) в виде $\frac{dv'_x}{dt} = 2\omega \frac{dy'}{dt}$ и, после вычисления интеграла $\int dv'_x = 2\omega \int dy'$, находим зависимость горизонтальной проекции скорости от высоты подъема:

$$v'_x = 2\omega y' \ . \tag{1.24}$$

Максимальная высота подъема снаряда h почти не отличается от высоты подъема $h_0 = v_0^2 / 2g$ в покоящейся системе. Действительно, последнее слагаемое в правой части (1.23) пренебрежимо мало по сравнению с ускорением свободного падения: $\omega^2 R / g \approx 3{,}5 \cdot 10^{-3}$ (на экваторе Земли). Вертикальная составляющая кориолисова ускорения направлена вниз и может только уменьшить высоту подъема. С учетом этого замечания, и используя формулу (1.24), находим $2\omega v'_x / g = 4\omega^2 y' / g \le 4\omega^2 h / g \le 2\omega^2 v_0^2 / g \approx 1{,}1 \cdot 10^{-4}$. Вертикальной проекцией кориолисова ускорения в формуле (1.23) можно пренебречь и считать, что $a'_y = -g$, т.е. движение по вертикальной оси y' – свободное падение. Поэтому

$$v'_y = v_0 - gt \qquad \text{и} \qquad y' = v_0 t - gt^2 / 2 \ .$$

Интегрируя уравнение (1.24) по времени, получаем искомое отклонение снаряда от точки выстрела:

$$x' = \int v'_x \, dt = 2\omega \int_0^t y' dt = 2\omega \left(\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{gt^3}{6} \right).$$

Так как время полета $t_{\text{п}} = 2v_0 / g$, то окончательно имеем:

$$l = x'(t_{\text{п}}) = \frac{4\omega v_o^3}{3g^2} \approx 10^3 \text{ м} \ .$$

Итак, снаряд, выпущенный вертикально вверх, упадет на расстоянии 1 км **к западу** от точки выстрела. Такое большое отклонение показывает, что в задачах баллистики (артиллерия, бомбометание и т.п.) очень важно учитывать вращение Земли.

Глава 2

Динамика.

Динамика поступательного движения

Задача 2.1

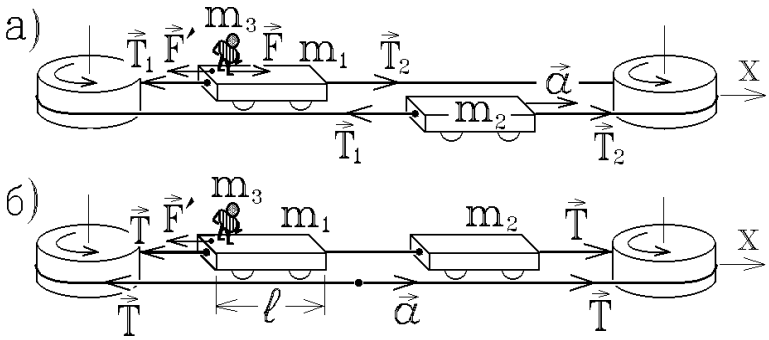

рис. 2.1

На рис.2.1,а две тележки соединены натянутым ремнем, перекинутым через блоки с закрепленными осями вращения. Ремень и блоки невесомы. Массы тележки и стоящего на ней человека m_1=100 кг и m_3=50 кг. Масса второй тележки m_2=150 кг. Как переместится центр масс системы, если человек пройдет по первой тележке вправо путь l'=1,8 м в случае а) и в случае б), когда тележки находятся по одну сторону от блоков (рис 2.1,б).

Решение

а) Покоившийся вначале человек движется по тележке с некоторым ускорением $a_ч$ под действием силы $\vec{F}$, с которой на него действует тележка. Эта сила противоположна силе $\vec{F}' = -\vec{F}$, с которой человек толкает тележку. Обе тележки начнут двигаться с одинаковым по величине ускорением a, равным ускорению ремня. Если обозначить силы натяжения ремня вблизи левого и правого блоков как T_1 и T_2 (рис.2.1,а), то уравнения движения тележек и человека **в инерциальной системе отсчета**:

$$m_2 a = T_2 - T_1, \qquad m_1 a = T_1 + F - T_2, \qquad m_3 a_ч = F. \tag{2.1}$$

Исключая из системы уравнений (2.1) величины сил, находим:

$$a_ч = (m_1 + m_2)a / m_3 = 5a .$$

Это – ускорение в неподвижной системе отсчета, а **относительно тележки** человек движется с ускорением

$$a' = a_ч + a = 6a. \tag{2.2}$$

Заметим, что последнее уравнение системы (2.1) сразу можно записать в неинерциальной системе, связанной с первой тележкой, добавляя силу инерции $\vec{F}_{ин} = -m_3\vec{a}$: $\quad m_3 a' = F + m_3 a$.

В этом случае система (2.1) сразу приводит к соотношению (2.2).

Проинтегрировав обе части уравнения (2.2) дважды по времени, находим связь перемещения тележки (или ремня) l и перемещения человека относительно тележки l': $l' = 6l$.

Относительно неподвижных блоков обе тележки и человек сдвинутся вдоль оси x на отрезки $\Delta x_1 = -l$, $\Delta x_2 = +l$, $\Delta x_3 = l' - l = 5l$. Поэтому, по определению, сдвиг $x-$координаты центра масс на рис.2.1,а будет:

$$\Delta x_C = \frac{\sum m_i \Delta x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m_3\Delta x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = l\frac{m_2 - m_1 + 5m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = l = \frac{l'}{6} = 0{,}3 \text{ м}$$

(центр масс переместится вправо, так как результирующая внешних сил $2\vec{T}_2 + 2\vec{T}_1$, действующая на систему тележки–человек, направлена вправо).

б) В этом случае тележки движутся как одно целое, а величина силы натяжения ремня T слева и справа от них одинакова (при невесомых блоках!, рис.2.1,б). Результирующая внешних сил равна нулю, и центр масс системы смещаться не должен: $\Delta x_C = 0$!

Действительно, система уравнений движения (2.1) примет вид:

$$(m_1 + m_2)a = F + T - T = F, \qquad m_3 a_{\text{ч}} = F,$$

откуда по-прежнему следует $a' = 6a$ и $l' = 6l$. Но теперь $\Delta x_1 = \Delta x_2 = -l$, $\Delta x_3 = l' - l = 5l$ и

$$\Delta x_C = \frac{-(m_1 + m_2)l + 5m_3 l}{m_1 + m_2 + m_3} = 0.$$

Задача 2.2

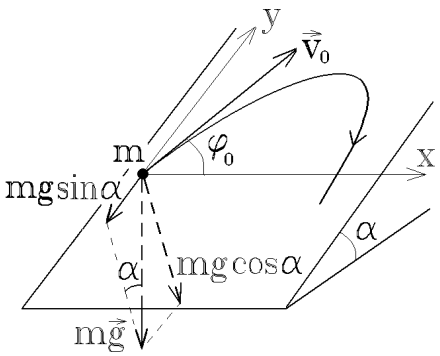

рис. 2.2

На плоскость, образующую с горизонтом угол α, положили тяжелую шайбу и толкнули ее вдоль плоскости с начальной скоростью v_0 под углом φ_0 к ребру наклонной плоскости (рис.2.2). Найти установившуюся скорость шайбы, если известно, что ее коэффициент трения о наклонную плоскость $\mu = \text{tg}\alpha$.

Решение

Уравнение движения шайбы имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{F}_{\text{тр}} \ . \qquad (2.3)$$

В плоскости движения шайбы на нее действует сила трения, направленная по касательной к траектории, и проекция силы тяжести $mg\sin\alpha$, направленная против оси y (рис.2.2). Проецируя уравнение (2.3) на ось y и на касательную к траектории, находим (рис.2.3):

$$ma_y = -mg\sin\alpha - F_{тр}\sin\varphi, \qquad (2.4)$$

$$ma_\tau = m\frac{dv}{dt} = -F_{тр} - mg\sin\alpha\sin\varphi. \qquad (2.5)$$

Так как $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha = mg\,\mathrm{tg}\alpha\cos\alpha = mg\sin\alpha$, то из уравнений (2.4) и (2.5) следует, что $ma_y = m\,dv/dt$ или $dv_y/dt = dv/dt$, откуда вытекает, что

$$v_y = v + \mathrm{const}.$$

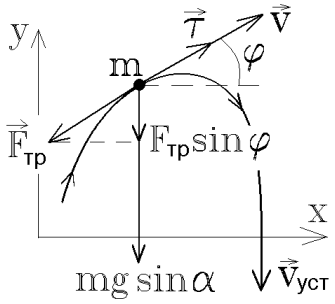

рис. 2.3

Из начальных условий ($v_y = v_0\sin\varphi_0$ и $v = v_0$ при $t = 0$) находим постоянную интегрирования const= $= -v_0(1-\sin\varphi_0)$, поэтому

$$v_y = v - v_0(1-\sin\varphi_0). \qquad (2.6)$$

Проекция скорости на ось x постепенно уменьшается до нуля, так как $mdv_x/dt = -F_{тр}\cos\varphi < 0$. В результате при установившемся движении шайба будет скользить с постоянной скоростью $v = v_{уст}$ вниз по наклонной плоскости (рис.2.3), т.е. $v_y = -v_{уст}$.

Следовательно, из уравнения (2.6) получим $v_{уст} = \frac{v_0}{2}(1-\sin\varphi_0)$.

Задача 2.3

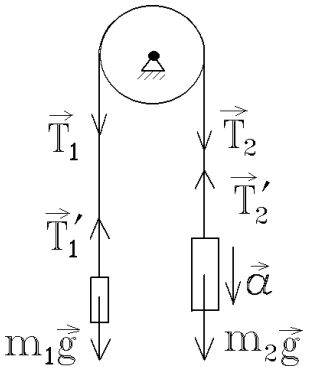

рис. 2.4

Через закрепленный неподвижный блок с горизонтальной осью перекинута невесомая нить, к концам которой прикреплены грузы с массами m_1 и m_2. Между блоком и нитью имеется трение. Оно таково, что нить начинает скользить по блоку, когда отношение масс грузов $m_2/m_1 = 2$. Найти: а) коэффициент трения μ, б) ускорение грузов при $m_2/m_1 = 3$.

Решение

При наличии трения между нитью и блоком натяжение нити будет различным с разных сторон блока, как показано на рис.2.4. Заметим, что $T_1' = T_1$ и $T_2' = T_2$.

Выделим бесконечно малый участок нити длины dl, прилегащий к блоку (рис.2.5). Он не будет смещаться в радиальном направлении. Поэтому проекции на это направление сил натяжения $\vec{T}$ и $\vec{T} + d\vec{T}$, растягивающих участок с разных сторон, уравновешены нормальной силой реакции:
$dN = T\sin(d\alpha/2) + (T + dT)\sin(d\alpha/2) = 2T\cdot d\alpha/2$ (с точностью до малых

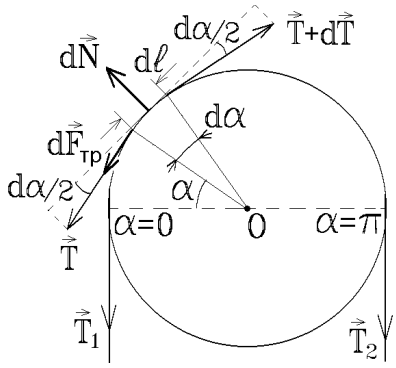

рис. 2.5

первого порядка).

Сила трения, действующая на выбранный участок, $dF_{\text{тр}} = \mu dN = \mu T d\alpha$ направлена по касательной к блоку. Так как массой нити можно пренебречь, то сумма проекций сил на касательное направление также равна нулю. С точностью до малых первого порядка получаем изменение силы натяжения нити на элементе длины dl:

$$dF_{\text{тр}} = \left(T + dT - T\right)\cos\frac{d\alpha}{2} = dT = \mu T d\alpha\,. \qquad (2.7)$$

Интегрируя это уравнение по углу α, $\int\limits_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = \mu\int\limits_0^{\pi} d\alpha$, находим, что **при любом** отношении масс грузов $T_2 = T_1\exp\left(\mu\pi\right)$. (2.8)

С другой стороны, из уравнений движения грузов

$$m_2 a = m_2 g - T_2 \quad \text{и} \quad m_1 a = T_1 - m_1 g \qquad (2.9)$$

вытекает, что скольжение начинается при $T_2 = m_2 g$ и $T_1 = m_1 g$, т.е. при $T_2 = 2T_1$ (так как $m_2 = 2m_1$). Тогда из уравнения (2.8) получаем:

$$\mu = \ln 2/\pi = 0,2206\,.$$

Итак, каким бы в данной задаче ни было отношение масс грузов,

$$T_2 = T_1\exp\left(\pi\mu\right) = T_1\exp\left(\ln 2\right) = 2T_1\,.$$

С учетом этого, из уравнений (2.9) находим, что всегда

$$\left(m_2 + 2m_1\right)a = \left(m_2 - 2m_1\right)g \quad \text{или} \quad a = g\frac{m_2 - 2m_1}{m_2 + 2m_1}\,.$$

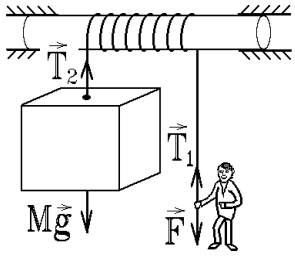

рис. 2.6

В случае $m_2/m_1 = 3$ это дает $a = g/5$.

Замечание. Если нить или канат перекинуть через блок n раз, то на нем можно удержать груз очень большой массы M, прилагая совсем небольшую силу F (рис.2.6). Например, при $F = T_1 = 1$ Н, $n = 10$ и $\mu = 0,2$, $\mu = 0,2$, интегрируя уравнение (2.7) по α в пределах от 0 до $2\pi n - \pi$, получим $Mg = T_2 = F\exp\left(19\pi\mu\right) = 15,6$ тонн веса

Задача 2.4

Парашютист совершает затяжной прыжок. До раскрытия парашюта он летит со скоростью $v_1 = 60$ м/с, а после раскрытия – приземляется со ско-

ростью $v_2 = 6$ м/с. а) Каким было бы максимальное натяжение строп парашюта, если бы он раскрывался мгновенно? б) Каково реальное натяжение строп, если время раскрытия парашюта $\tau = 1$ с, и в течение этого времени натяжение постоянно? Масса парашютиста $m = 80$ кг, массы строп и парашюта пренебрежимо малы, а сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна квадрату скорости падения.

Решение

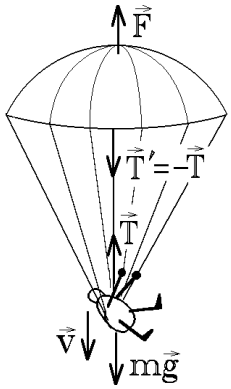

рис. 2.7

а) Пусть парашют раскрывается мгновенно в момент времени $t = 0$ при скорости падения $v_1 = 60$ м/с. Немедленно "включается" сила сопротивления, равная по модулю $F_1 = \eta v_1^2$, которая затем убывает до величины $F_2 = \eta v_2^2$ (здесь η – коэффициент сопротивления при падении человека **с раскрытым парашютом**). Из закона движения системы "человек – парашют" (рис.2.7)

$$m\,dv/dt = mg - \eta v^2$$

следует, что установившаяся скорость падения (то же, что и скорость приземления), равная v_2, определяется условием $dv/dt = 0$ или $mg = \eta v_2^2$, откуда находим:

$$\eta = mg/v_2^2 \qquad (2.10)$$

В начальный момент сила сопротивления F максимальна и равна по модулю

$$F_{\max} = \eta v_1^2 = mg\left(v_1/v_2\right)^2.$$

Для парашюта натяжение строп $T = F$, так как его массой можно пренебречь согласно условию задачи. Поэтому

$$T_{\max} = mg\left(v_1/v_2\right)^2 = 100mg.$$

Такой нагрузки в момент мгновенного раскрытия парашюта человек выдержать не может.

б) При постепенном раскрытии парашюта площадь его купола и, одновременно, коэффициент сопротивления η будут расти, а скорость падения v – уменьшаться. Это позволяет использовать сделанное в условии задачи предположение о том, что произведение $\eta v^2 = F = T \approx \text{const}$ во время раскрытия парашюта.

Закон движения человека в интервале времени $0 \le t \le \tau$ имеет вид:

$m\dfrac{dv}{dt} = mg - T = \text{const}$. Интегрируя это уравнение, $m\int\limits_{v_1}^{v_3} dv = \left(mg - T\right)\int\limits_0^{\tau} dt$,

находим силу натяжения строп $$T = mg + \frac{m}{\tau}\left(v_1 - v_3\right), \qquad (2.11)$$

где v_3 – скорость в момент $t = \tau$. В этот момент парашют раскроется полностью, коэффициент η станет равным выражению (2.10) и дальше меняться не будет, а сила натяжения строп, равная силе сопротивления F, начнет уменьшаться со скоростью по закону $T = \eta v^2$. В момент $t = \tau$ она имеет вид $$T = \eta v_3^2 = mg\left(v_3/v_2\right)^2. \qquad (2.12)$$

Подставляя формулу (2.11) в (2.12), получим

$$g\left(\frac{v_3}{v_2}\right)^2 = g + \frac{v_1}{\tau} - \frac{v_3}{\tau} \text{ или } \left(\frac{v_3}{v_2}\right)^2 + \frac{v_2}{g\tau}\left(\frac{v_3}{v_2}\right) - \left(1 + \frac{v_1}{g\tau}\right) = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим, что $v_3/v_2 = 2{,}38$ и, окончательно, $T = mg\left(v_3/v_2\right)^2 = 5{,}66\,mg$. Такое максимальное натяжение строп в течение одной секунды парашютист выдерживает.

Задача 2.5

Жидкость в стакане радиуса R вращается с угловой скоростью ω, и на ее поверхности образуется воронка (рис.2.8). Пренебрегая вязким трением в жидкости, определить глубину воронки H.

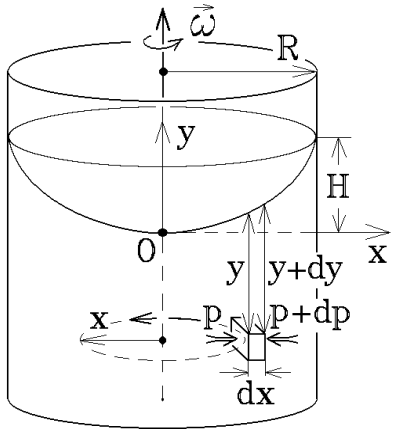

рис. 2.8

Решение

Чтобы применить законы динамики к жидкости или газообразной среде, части которой смещаются друг относительно друга, в среде выделяют элемент бесконечно малого объема. Такой элемент на рис.2.8 имеет толщину dx, поперечное сечение ΔS, находится на расстоянии x от оси вращения и может рассматриваться как материальная точка, движущаяся с нормальным ускорением $a_n = \omega^2 x$.

Единственными горизонтально направленными силами, способными создать это ускорение будут силы гидростатического давления: с увеличением расстояния от оси на dx высота столба жидкости над элементом увеличивается на dy, а гидростатическое давление возрастает на $dp = \rho g dy$, где ρ – плотность жидкости. Тогда уравнение движения элемента $$dm \cdot \omega^2 x = \Delta S\left(p + dp\right) - \Delta S\, p.$$

Подставляя массу элемента $dm = \rho \Delta S dx$, приходим к уравнению

$\omega^2 xdx = gdy$, которое, после интегрирования обеих частей, дает $y = \dfrac{\omega^2 x^2}{2g} + \text{const}$ – воронка имеет вид параболы. Ее глубина $H = \dfrac{\omega^2 R^2}{2g}$.

Приращение импульса

Задача 2.6

Цепочка массы m висит неподвижно, касаясь нижним концом поверхности стола (рис.2.9). Цепочку отпускают. Найти среднюю величину силы давления цепочки на стол за время падения.

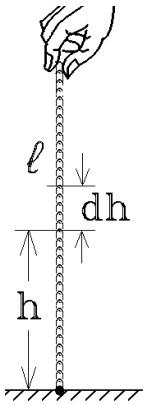

рис. 2.9

Решение

Цепочка падает свободно с ускорением g. Спустя время t на столе будет лежать участок цепочки длиной $h = gt^2/2$. Если длина всей цепочки равна l, то вес этого участка $P = g \cdot hm/l = mg^2t^2/2l$. Оставшаяся часть цепочки будет лететь со скоростью $v = gt$. За последующий бесконечно малый промежуток времени dt на стол упадет элемент цепочки длиной $dh = vdt$ с массой $dm = m \cdot dh/l$ и потеряет скорость. Следовательно, из-за взаимодействием со столом цепочка за время dt теряет импульс $dp = v \cdot dm$, и на стол действует дополнительная сила

$$F' = \frac{dp}{dt} = \frac{mv^2}{l} = \frac{mg^2}{l}t^2.$$

Суммарная сила, действующая со стороны цепочки на стол $F = P + F' = 3mg^2t^2/(2l)$, а ее среднее значение за все время падения

$\tau = \sqrt{2l/g}$ имеет величину $\langle F \rangle = \dfrac{1}{\tau - 0}\displaystyle\int_0^\tau F dt = \dfrac{mg^2\tau^2}{2l} = mg$.

Неинерциальные системы отсчета и силы инерции

Задача 2.7

На клин с углом α, стоявший на горизонтальной плоскости, был положен брусок (рис.2.10). Трение отсутствует. Оказалось, что оба тела начали двигаться с одинаковыми по величине ускорениями. Найти ускорение клина.

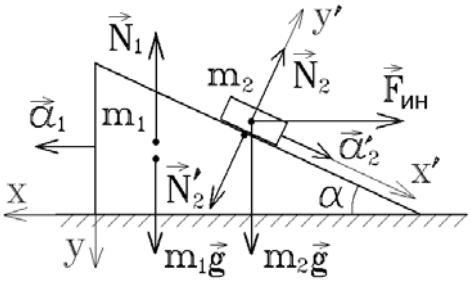

рис. 2.10

Решение

Пусть массы клина и бруска равны m_1 и m_2 соответственно, а клин смещается с ускорением $\vec{a}_1$. На рис.2.10 обозначены все силы, действующие на оба тела (брусок действует на клин с такой же по величине силой реакции, с какой клин действует на брусок, $\vec{N}_2' = -\vec{N}_2$). Уравнение движения бруска запишем в неинерциальной системе, связанной с клином, добавляя силу инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m_2\vec{a}_1$. В проекции на оси x' и y' получим:

$$\begin{cases} m_2 a'_2 = m_2 g \sin\alpha + m_2 a_1 \cos\alpha\ , & (2.13) \\ 0 = N_2 + m_2 a_1 \sin\alpha - m_2 g \cos\alpha\ . & (2.14) \end{cases}$$

Уравнение движения клина в инерциальной системе в проекции на ось x имеет вид: $m_1 a_1 = N_2 \sin\alpha.$ (2.15)

Исключая из уравнений (2.14) и (2.15) силу реакции N_2, находим:

$$a_1 = \frac{m_2 g \cos\alpha \sin\alpha}{m_1 + m_2 \sin^2\alpha}\ . \qquad (2.16)$$

Подставляя соотношение (2.16) в уравнение (2.13), получим:

$$a'_2 = \frac{(m_1 + m_2) g \sin\alpha}{m_1 + m_2 \sin\alpha}\ . \qquad (2.17)$$

В инерциальной системе, связанной с неподвижным наблюдателем (рис.2.10), горизонтальной и вертикальной проекциями ускорения бруска будут $a_{2x} = a_1 - a'_2 \cos\alpha$ и $a_{2y} = a'_2 \sin\alpha$, а его величина $a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} = a_1$ по условию. Возводя в квадрат обе части последнего уравнения, приходим к связи $a'_2 = 2a_1 \cos\alpha$, откуда, с учетом формул (2.16) и (2.17), находим соотношение между массами тел: $m_1 = m_2\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$. Подставляя это соотношение в (2.16), определяем: $a_1 = g\,\text{tg}\alpha$.

<u>Задача 2.8</u>

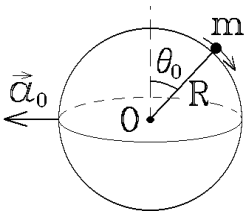

рис. 2.11

Небольшое тело поместили на вершину гладкого шара радиуса R. Затем шару сообщили в горизонтальном направлении постоянное ускорение $\vec{a}_0$, и тело начало скользить вниз. Найти угол θ_0 между вертикалью и радиус-вектором точки отрыва тела от поверхности шара (рис.2.11). Вычислить θ_0 при $a_0 = g$.

Решение

Уравнение движения тела в неинерциальной системе отсчета, связанной с шаром, имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{ин}}, \qquad (2.18)$$

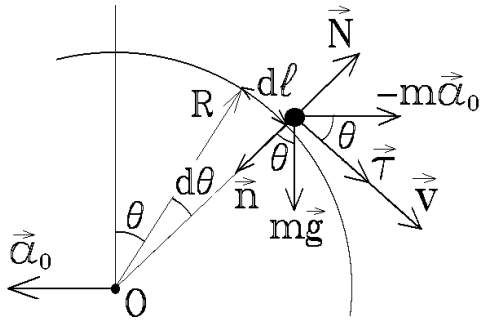

рис. 2.12

где $\vec{N}$ – сила нормальной реакции, а $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0$ – сила инерции. Проецируя уравнение (2.18) на направление нормали $\vec{n}$ к поверхности шара (рис.2.12), получим:

$$ma_n = mg\cos\theta - N - ma_0\sin\theta.$$

В точке отрыва $\vec{N} = 0$, нормальное ускорение $a_n = v^2/R$, и поэтому

$$\frac{v^2}{R} = g\cos\theta_0 - a_0\sin\theta_0. \qquad (2.19)$$

Проекция же уравнения (2.18) на направление касательной $\vec{\tau}$ к поверхности (рис.2.12) дает

$$m\frac{dv}{dt} = ma_0\cos\theta + mg\sin\theta. \qquad (2.20)$$

Подставляя длину элемента дуги $dl = Rd\theta$, проходимой телом за время dt (рис.2.12), в определение скорости $v = dl/dt$, находим, что $dt = dl/v = Rd\theta/v$. После подстановки этого дифференциала в уравнение (2.20), приходим к выражению $vdv/R = d\theta\left(a_0\cos\theta + g\sin\theta\right)$ или

$$\frac{1}{2R}d\left(v^2\right) = d\theta\left(a_0\cos\theta + g\sin\theta\right). \qquad (2.21)$$

Интегрируя уравнение (2.21) в пределах от 0 до v (по v) и от 0 до θ_0 (по θ), получаем $\frac{v^2}{2R} = \left(a_0\sin\theta - g\cos\theta\right)\Big|_0^{\theta_0} = a_0\sin\theta_0 - g\cos\theta_0 + g$.

Подставляя в это выражение значение v^2/R в момент отрыва из уравнения (2.19), приходим к равенству $3a_0\sin\theta_0 = 3g\cos\theta_0 - 2g$.

Возводя его в квадрат, и используя очевидную замену $\sin^2\theta_0 = 1 - \cos^2\theta_0$, получаем квадратное уравнение для величины $\cos^2\theta_0$:

$9\left(k^2+1\right)\cos^2\theta_0 - 12\cos\theta_0 - 9k^2 + 4$, где $k = a_0/g$, решение которого имеет вид:

$$\cos\theta_0 = \left(2 \pm k\sqrt{9k^2+5}\right)\Big/3\left(k^2+1\right).$$

Отрыв обязательно произойдет при **наименьшем** угле θ_0, которому соответствует знак "+". Поэтому

$$\theta_0 = \arccos\frac{2 + k\sqrt{9k^2 + 5}}{3\left(k^2 + 1\right)}$$

При $k = 1$ находим: $\theta_0 = 16°52'$.

Если же $a_0 = 0$ или $k = 0$ (шар покоится), то отрыв произойдет при $\theta_0 = \arccos(2/3) = 48°11'$.

Задача 2.9

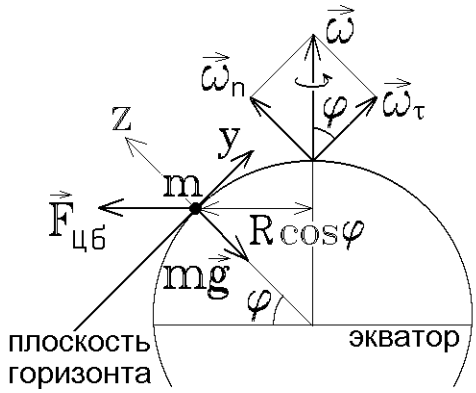

рис. 2.13

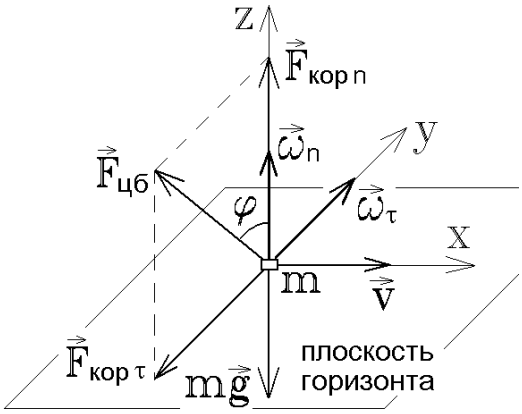

рис. 2.14

В районе Тулы скорость течения реки Упы $v = 0,2$ м/с. Тула находится на широте $\varphi = 54°$. Найти угол α наклона к горизонту поверхности воды в Упе на участке, где она течет прямо на восток.

Решение

В неинерциальной системе, связанной с вращающейся Землей, на элемент поверхности воды с массой m помимо силы тяжести $m\vec{g}$ будет действовать центробежная и кориолисова силы

$$F_{цб} = m\omega^2 R\cos\varphi \quad \text{и} \quad \vec{F}_{кор} = 2m\left[\vec{v}, \vec{\omega}\right],$$

где $R = 6400$ км – радиус Земли, $\omega = 7,27 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ – угловая скорость ее вращения, $\vec{v}$ – скорость течения реки.

Направим ось z по нормали к плоскости горизонта, ось y – вдоль меридиана к полюсу, а ось x – вдоль параллели на восток (рис.2.13).

Разложим вектор $\vec{\omega}$ на нормальную и касательную к горизонту составляющие: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_n + \vec{\omega}_\tau$, где $\omega_n = \omega\sin\varphi$, $\omega_\tau = \omega\cos\varphi$. Тогда сила Кориолиса также будет суммой двух составляющих: $\vec{F}_{кор\ n} = 2m\left[\vec{v}, \vec{\omega}_\tau\right]$, направленной вдоль оси z, и $\vec{F}_{кор\ \tau} = 2m\left[\vec{v}, \vec{\omega}_n\right]$, направленной против оси y (рис.2.14).

Очевидно, что поверхность воды должна быть перпендикулярна к результирующей всех сил (рис.2.15). Поэтому

$$\mathrm{tg}\alpha = \left|\frac{F_{\text{рез}\,y}}{F_{\text{рез}\,z}}\right| = \frac{F_{\text{кор}\,\tau} + F_{\text{цб}}\sin\varphi}{mg - F_{\text{кор}\,n}} =$$

$$= \frac{2v\omega\sin\varphi + \omega^2 R\cos\varphi\sin\varphi}{g - 2v\omega\cos\varphi} = 1{,}64\cdot 10^{-3},$$

откуда $\alpha = 5'39''$. Уровень воды у правого берега будет выше, чем у левого.

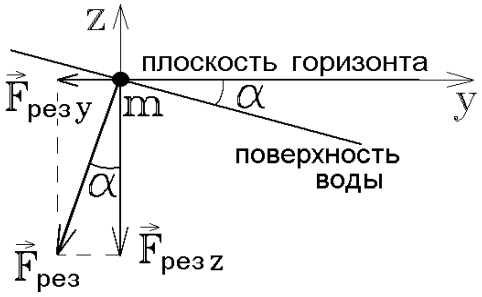

рис. 2.15

Задача 2.10

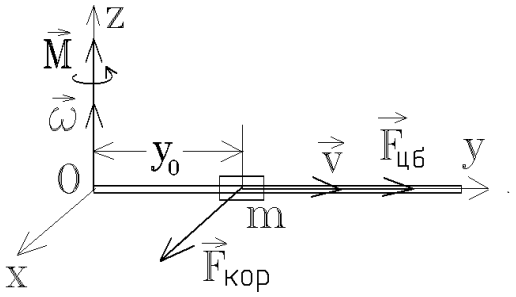

рис.2.16

На гладком горизонтальном стержне, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 40\pi$ рад/с, была закрепленна муфта с массой $m = 100$ г (рис.2.16). В начальный момент времени $t_0 = 0$ муфту отпускают, и она скользит вдоль стержня. Найти расстояние $y(t)$ от муфты до оси вращения в произвольный момент времени. Какой момент сил M должен быть приложен к стержню для того, чтобы он продолжал вращаться равномерно? Начальное расстояние центра масс муфты от оси вращения $y_0 = 2$ см.

Решение

Уравнение движения муфты во вращающейся системе отсчета, в которой стержень неподвижен, имеет вид:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{кор}}, \qquad (2.22)$$

где $\vec{v}$ – скорость муфты относительно стержня, $\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\vec{y}$ – центробежная, а $\vec{F}_{\text{кор}} = 2m[\vec{v},\vec{\omega}]$ – кориолисова сила инерции.

В проекции на ось y уравнение (2.22) дает $m\dfrac{dv_y}{dt} = m\omega^2 y$,

и если, в соответствии с определением скорости, подставить $dt = dy/v$, то получим уравнение $vdv = \omega^2 ydy$.

Интегрируя это уравнение с учетом начальных условий $v = 0$ и $y = y_0$ при $t = 0$, находим:

$$\frac{v^2}{2} = \omega^2\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}\right) \quad \text{или} \quad v = \frac{dy}{dt} = \omega\sqrt{y^2 - y_0^2}. \qquad (2.23)$$

Разделяем в уравнении (2.23) переменные, и еще раз интегрируем:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - y_0^2}} = \omega \int_0^t dt \ .$$

После интегрирования получим $\mathrm{Arch}\left(y/y_0\right) = \omega t$, откуда находим искомое расстояние муфты от оси и ее скорость:

$$y = y_0 \mathrm{ch}\left(\omega t\right) \qquad \text{и} \qquad v = dy/dt = \omega y_0 \mathrm{sh}\left(\omega t\right) .$$

Кориолисова сила $\vec{F}_{\text{кор}}$, действующая на движущуюся муфту, создает тормозящий момент $M_z = -2my\omega v$, так как $F_{\text{кор}} = 2m\omega v$, а плечо равно y . Для его компенсации к стержню необходимо приложить момент сил

$$M = -M_z = 2my\omega v = 2m\omega^2 y_0^2 \mathrm{sh}\left(\omega t\right)\mathrm{ch}\left(\omega t\right) =$$

$$= m\omega^2 y_0^2 \mathrm{sh}\left(2\omega t\right) = 0,632 \cdot \mathrm{sh}\left(80\pi t\right) \ \text{Н} \cdot \text{м}$$

Статическое равновесие

Задача 2.11

На какой угол φ наклонится автомобиль при торможении? Центр масс автомобиля расположен посередине колесной базы на высоте $h = 0,4$ м над землей, расстояние между осями колес $l = 5h$, коэффициент трения скольжения $\mu = 0,8$, упругость всех четырех пружин подвески одинакова и такова, что их прогиб у неподвижного автомобиля $\delta = 10$ см . Указание: считать, что тормозятся все колеса.

Решение

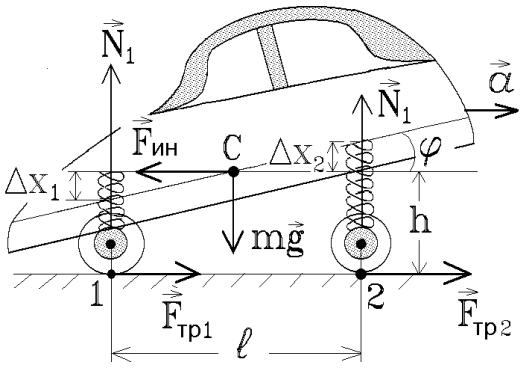

рис. 2.17

При торможении автомобиль наклоняется вперед (рис.2.17), из-за добавочного момента сил трения скольжения относительно центра масс C .

В неинерциальной системе отсчета, связанной с автомобилем, суммы проекций всех сил (силы тяжести, реакций опоры, трения и инерции) на вертикальную и горизонтальную координатные оси равны нулю, т.е.

$$mg = N_1 + N_2, \qquad F_{\text{ин}} = ma = F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2} = \mu\left(N_1 + N_2\right) = \mu mg \ .$$

Кроме того, сумма моментов всех сил относительно любой точки, в том числе и относительно точек опоры 1 и 2, равны нулю, т.е.

$$N_2 l + F_{\text{ин}} h - mgl/2 = 0, \qquad N_1 l - F_{\text{ин}} h - mgl/2 = 0.$$

Из этих уравнений находим величины сил реакций опоры:

$$N_1 = \frac{mg}{2} + \frac{\mu mgh}{l}, \qquad N_2 = \frac{mg}{2} - \frac{\mu mgh}{l}. \tag{2.24}$$

По условию у неподвижного автомобиля все пружины подвески сжаты на δ и поэтому $4k\delta = mg$, где $k = mg/(4\delta)$ – коэффициент жесткости каждой пружины. При торможении пружины передней подвески дополнительно сжимаются на величину Δx_1, а сжатие задних пружин уменьшается на Δx_2, как показано на рис.2.17. Тогда, если пренебречь весом колес, условия равновесия в рессорах запишутся как

$$N_1 = 2k(\delta + \Delta x_1), \qquad N_2 = 2k(\delta - \Delta x_2). \tag{2.25}$$

Сравнивая формулы (2.24) и (2.25), находим

$$N_1 - N_2 = 2\frac{\mu mgh}{l} = 2k(\Delta x_1 + \Delta x_2) = \frac{mg}{2\delta}(\Delta x_1 + \Delta x_2) \text{ или } \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{4\mu h\delta}{l}.$$

Как видно из рис.2.17,

$$\mathrm{tg}\varphi = (\Delta x_1 + \Delta x_2)/l = 4\mu h\delta/l^2 = 0{,}032, \qquad \text{откуда} \qquad \varphi = 1°50'.$$

Задача 2.12

Свободный конец висевшей вертикально цепочки массы m и длины L прикрепили к потолку так, что цепочка провисает под потолком на расстояние $L/4$ (рис.2.18). Найти силу натяжения цепочки в точке A, первоначально находившейся на том же расстоянии $L/4$ от потолка.

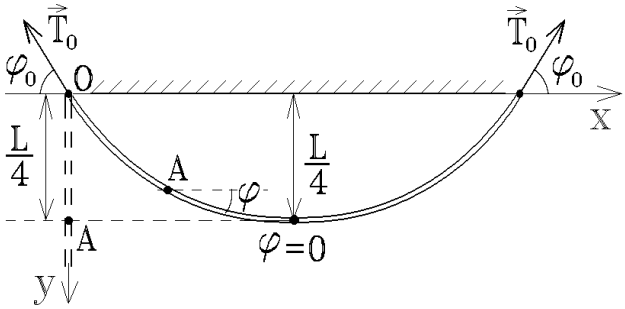

рис. 2.18

Решение

Выделим бесконечно малый элемент цепочки с длиной dl и массой $dm = mdl/L$. Приложенные к его концам силы натяжения направлены по касательной к цепочке и различны по величине (рис.2.19). Условия статического равновесия выделенного элемента в проекции на горизонтальную и вертикальную оси запишутся как:

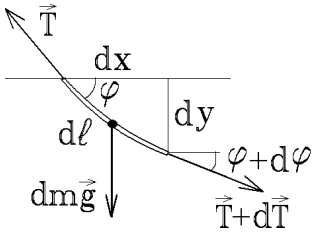

рис. 2.19

$$\left.\begin{aligned} (T + dT)\cos(\varphi + d\varphi) &= T\cos\varphi, \\ gdm + (T + dT)\sin(\varphi + d\varphi) &= T\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

Раскрывая тригонометрические функции, подставляя $\sin(d\varphi) = d\varphi$, $\cos(d\varphi) = 1$ и пренебрегая малыми второго порядка, пропорциональными $dT \cdot d\varphi$, приводим систему (2.26) к

виду:

$$\left.\begin{aligned} &\cos\varphi\cdot dT - T\sin\varphi\, d\varphi = d\left(T\cos\varphi\right) = 0, \\ &gdm + \sin\varphi\cdot dT + T\cos\varphi\, d\varphi = \frac{mg}{L}dl + d\left(T\sin\varphi\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.27)$$

Интегрируя первое уравнение (2.27), находим:

$$T\cos\varphi = T_0\cos\varphi_0 \qquad \text{или} \qquad T = \frac{T_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi}, \qquad (2.28)$$

где T_0 и φ_0 – натяжение и угол наклона цепочки в точке подвеса.

Условие равновесия, примененные ко всей цепочке целиком, $2T_0\sin\varphi_0 = mg$, позволяет устранить T_0 из соотношения (2.28):

$$T = \frac{mg}{2\mathrm{tg}\varphi_0\cos\varphi}. \qquad (2.29)$$

Чтобы определить угол φ_0, подставим формулу (2.29) и длину $dl = dy/\sin\varphi$ (рис.2.19) во второе уравнение (2.27): $\frac{mg}{L}dy = -\frac{mg\sin\varphi}{2\mathrm{tg}\varphi_0}d\left(\mathrm{tg}\varphi\right) = \frac{mg}{2\mathrm{tg}\varphi_0}\frac{d\cos\varphi}{\cos^2\varphi}$, и проинтегрируем его от точки подвеса O до середины провисшей цепочки:

$$\frac{2\mathrm{tg}\varphi_0}{L}\int_0^{L/4} dy = \int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi=0}\frac{d\cos\varphi}{\cos^2\varphi}, \text{ откуда следует } \frac{1}{2}\mathrm{tg}\varphi_0 + 1 = \frac{1}{\cos\varphi_0} = \sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi_0 + 1}.$$

Решением последнего алгебраического уравнения будет $\mathrm{tg}\varphi_0 = 4/3$.

Снова проинтегрируем второе уравнение (2.27) по длине цепочки, подставляя из формулы (2.29) $T = 3mg/\left(8\cos\varphi\right)$:

$$\frac{mg}{L}\int_0^{L/4} dl = -\frac{3mg}{8}\int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi=\varphi_A} d\left(\mathrm{tg}\varphi\right), \qquad \text{откуда} \qquad \mathrm{tg}\varphi_A = \mathrm{tg}\varphi_0 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

В итоге из формулы (2.29) находим натяжение в точке A:

$$T_A = \frac{3mg}{8\cos\varphi_A} = \frac{3mg}{8}\sqrt{\mathrm{tg}^2\varphi_A + 1} = \frac{\sqrt{13}mg}{8} = 0{,}451mg.$$

Вычисление моментов инерции

Задача 2.13

Плоская фигура массы m представляет собой квадрат со стороной $2R$ с симметричным круглым вырезом радиуса R (рис.2.20). Найти момент инерции фигуры относительно перпендикулярной оси OO', проходящей

через вершину квадрата.

Решение

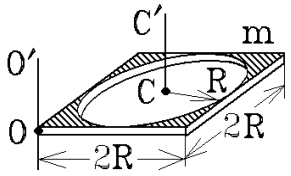

рис. 2.20

Поверхностная плотность фигуры (масса единицы ее площади) $\rho = m\Big/\left(4R^2 - \pi R^2\right)$. Момент инерции фигуры будет равен моменту инерции сплошного квадрата с массой $m_1 = \rho \cdot 4R^2 = 4m\big/(4-\pi)$, если из него вычесть момент инерции круга с массой $m_2 = \rho \cdot \pi R^2 = \pi m\big/(4-\pi)$, отмеченного на рис.2.21 штриховой линией.

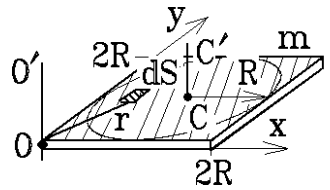

рис. 2.21

Момент инерции круга относительно оси OO' удобно определить по теореме Штейнера, зная момент инерции относительно центральной оси CC':

$$I_2 = I_{2C} + m_2\left(OC\right)^2 = \frac{m_2 R^2}{2} + m_2\left(\sqrt{2}R\right)^2 = \frac{5\pi m R^2}{2\left(4-\pi\right)}.$$

Для квадрата выделим бесконечно малый элемент поверхности $dS = dxdy$ с массой $dm = \rho dxdy$ на расстоянии $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ от оси OO' (рис.2.21), запишем для него момент инерции $dI = dm \cdot r^2$ и, проинтегрировав по всей площади, определим момент инерции всего квадрата:

$$I_1 = \int_0^{2R}\int_0^{2R} \rho\left(x^2 + y^2\right)dxdy = \rho\left\{\int_0^{2R} x^2 dx \int_0^{2R} dy + \int_0^{2R} dx \int_0^{2R} y^2 dy\right\} = \frac{32}{3}\rho R^4 = \frac{32 m R^2}{3\left(4-\pi\right)}.$$

В итоге
$$I_{OO'} = I_1 - I_2 = \frac{64 - 15\pi}{6\left(4-\pi\right)} m R^2 .$$

<u>Задача 2.14</u>

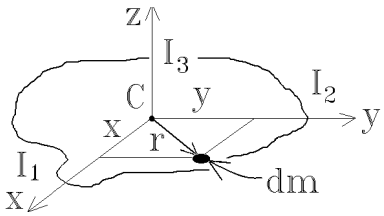

рис. 2.22

Найти соотношение между тремя главными моментами инерции плоской фигуры и использовать его для вычисления момента инерции диска относительно главной оси, лежащей в плоскости диска.

Решение

Решение этой задачи достаточно простое. Пусть x, y и z – главные оси инерции; тогда, как следует из рис.2.22 и определения главных моментов инерции,

$$I_3 = \int r^2 dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = I_1 + I_2 .$$

Отсюда вытекает, что для сплошного тонкого однородного диска с массой m и радиусом R (рис.2.23) $I_1 = I_2 = \frac{I_3}{2} = \frac{1}{4}mR^2$.

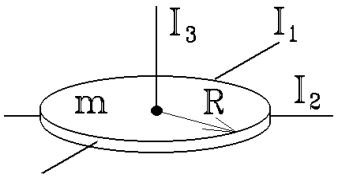

рис. 2.23

Динамика вращательного движения

Задача 2.15

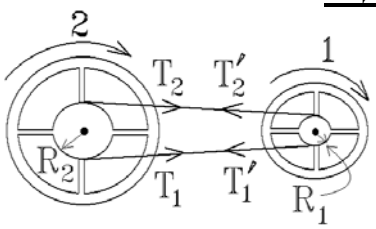

рис. 2.24

Шкивы двух маховиков с моментами инерции I_1 и I_2 и с радиусами шкивов R_1 и R_2 соединены ремнем (рис.2.24). Удерживая второй маховик, раскручивают первый до скорости ω_0, затем отпускают второй, и он тоже начинает раскручиваться. Найти скорости вращения маховиков после прекращения проскальзывания ремня. Массой ремня пренебречь.

Решение

После того, как второй маховик отпустили, он начинает вращаться (в ту же сторону, что и первый), благодаря разнице натяжений ремня снизу T_1 и сверху T_2. Так как натяжение невесомого ремня у обоих маховиков одинаково, $T_1 = T_1'$ и $T_2 = T_2'$, то уравнения их движения имеют вид:

$$I_1\varepsilon_1 = (T_1 - T_2)R_1, \qquad I_2\varepsilon_2 = (T_2 - T_1)R_2. \tag{2.30}$$

Исключая $T_1 - T_2$ из уравнений (2.30), получаем соотношение

$$\frac{I_1\varepsilon_1}{R_1} + \frac{I_2\varepsilon_2}{R_2} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{I_1\omega_1}{R_1} + \frac{I_2\omega_2}{R_2}\right) = 0, \tag{2.31}$$

так как $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt$ и $\varepsilon_2 = d\omega_2/dt$. Из (2.31) с учетом начальных условий ($\omega_1 = \omega_0$ и $\omega_2 = 0$ при $t = 0$) следует:

$$\frac{I_1\omega_1}{R_1} + \frac{I_2\omega_2}{R_2} = \text{const} = \frac{I_1\omega_0}{R_1}. \tag{2.32}$$

Отсутствие скольжения ремня означает, что его линейная скорость v совпадает с линейными скоростями точек на ободах обоих ремней, т.е. $v = v_1 = v_2$, откуда имеем:

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2. \tag{2.33}$$

Из соотношений (2.32) и (2.33) находим установившиеся угловые скорости маховиков:

$$\omega_1 = \frac{I_1 R_2^2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}\omega_0, \qquad \omega_2 = \frac{I_1 R_1 R_2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}\omega_0.$$

Заметим в заключение, что из уравнения (2.32) следует, что сохранение

суммарного момента импульса системы $L_z = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$ в процессе установления скоростей возможно только при $R_1 = R_2$!

Задача 2.16

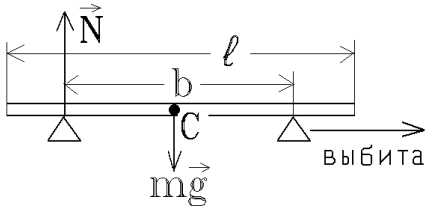

рис. 2.25

Абсолютно твердая однородная балка длины l и массы m лежит горизонтально на двух симметрично расположенных опорах, расстояние между которыми равно b. Одну из опор выбивают. С какой силой балка давит на оставшуюся опору в первый момент?

Решение

В первый момент после выбивания опоры (например, правой, как показано на рис.2.25) центр масс балки движется вертикально вниз, и его уравнение движения имеет вид:

$$ma_C = mg - N\,. \qquad (2.34)$$

С другой стороны, после выбивания опоры балка совершает вращательное движение около оставшейся опоры, согласно уравнению

$$I\varepsilon = mg\,b/2\,, \qquad (2.35)$$

где I – момент инерции балки относительно оставшейся опоры, в соответствии с теоремой Штейнера имеющий величину $I = ml^2/12 + mb^2/4$. Так как связью между линейным и угловым ускорением при вращении будет $a_C = \varepsilon b/2$, то, исключая a_C и ε из уравнений (2.34) и (2.35), находим искомую силу реакции:

$$N = m\left(g - a_C\right) = m\left(g - \frac{mgb^2}{4I}\right) = \frac{mg}{1 + 3\left(b/l\right)^2}.$$

Задача 2.17

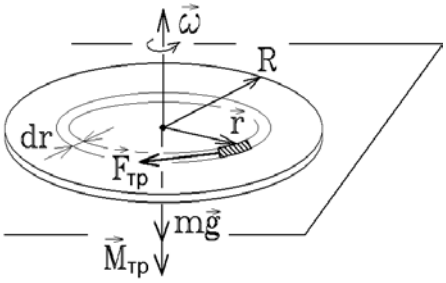

рис. 2.26

Раскрученный до угловой скорости ω_0 плоский диск массы m и радиуса R положили на горизонтальную плоскость (рис.2.26). Коэффициент трения равен μ. Спустя какое время τ вращение диска прекратится?

Решение

Выделим на диске бесконечно узкое кольцо (рис.2.26) с радиусом r, толщиной dr и площадью $dS = 2\pi r dr$. Масса такого кольца $dm = mdS/\pi R^2$. На каждый участок кольца действует сила трения скольжения, создающая момент, направленный вдоль оси кольца (рис.2.26). Таким моментом, тормозящим вращение кольца, будет

$$dM_{\text{тр}} = r \cdot dF_{\text{тр}} = r \cdot \mu dm \cdot g = 2mg\mu r^2 dr \big/ R^2 .$$

Проинтегрировав по всей поверхности диска, найдем тормозящий момент сил целиком:

$$M_{\text{тр}} = \frac{2mg\mu}{R^2}\int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3}mg\mu R .$$

Разделяя переменные в уравнении вращательного движения $I\,d\omega/dt = -M_{\text{тр}}$, где момент инерции диска $I = mR^2/2$, интегрируем его:

$$\int_0^\tau dt = -\frac{3R}{4g\mu}\int_{\omega_0}^0 d\omega , \qquad \text{откуда} \qquad \tau = \frac{3R\omega_0}{4g\mu} .$$

Задача 2.18

На вертикальный закрепленный цилиндр радиуса R намотана невесомая нить. К ее свободному растянутому концу длины l прикреплен грузик, который в начальный момент толкнули со скоростью v_0 перпендикулярно нити, и он стал скользить по гладкой горизонтальной плоскости (рис.2.27). Спустя какое время t грузик коснется цилиндра?

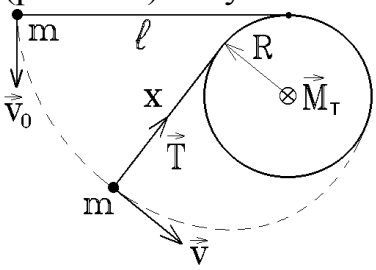

рис. 2.27

Решение

Пусть в некоторый момент времени длина свободного конца нити равна x. Скорость грузика $\vec{v}$ остается перпендикулярной нити (иначе грузик смещался бы вдоль нити, ослабляя или разрывая ее). Поэтому сила натяжения нити $\vec{T}$ перпендикулярна к траектории грузика, работу не производит, а величина скорости грузика сохраняется: $v = v_0 = \text{const}$.

Под действием момента силы натяжения относительно оси цилиндра $M_{\text{т}} = RT$ уменьшается момент импульса грузика $L = mvx$:

$$\frac{dL}{dt} = -M_{\text{т}} \qquad \text{или} \qquad mv\frac{dx}{dt} = -RT .$$

Подставив в это соотношение величину силы натяжения из уравнения движения $T = ma_n = mv^2/x$, получим уравнение $dx/dt = -Rv/x$. Разделяем в нем переменные и интегрируем обе части с учетом начальных условий задачи:

$$\int_l^0 x dx = -Rv_0\int_0^t dt ,$$

откуда время движения грузика $t = l^2 \big/ 2Rv_0$.

Задача 2.19

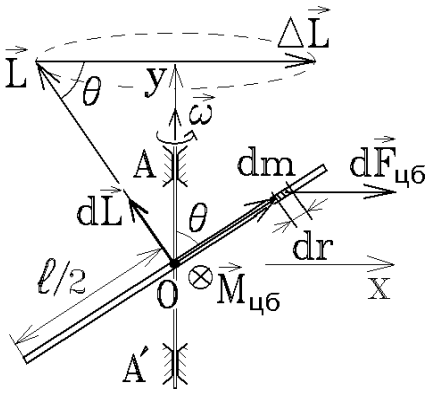

рис. 2.28

Середина O тонкого однородного стержня массы m и длины l жестко скреплена с осью вращения AA' так, что угол между стержнем и осью равен θ (рис.2.28). Стержень вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Найти момент центробежных сил, действующий на стержень, а также модуль приращения вектора момента импульса стержня относительно точки O за пол-оборота.

Решение

Перейдем в неинерциальную систему отсчета, в которой стержень покоится в плоскости xy (ось y направлена вдоль оси вращения AA', ось z перпендикулярна стержню, как показано на рис.2.28). В этой системе на элемент стержня длины dr с массой $dm = mdr/l$ действует центробежная сила $dF_{\text{цб}} = dm\omega^2 x$. Плечо этой силы относительно точки O равно y. А так как $x = r\sin\theta$, $y = r\cos\theta$, то она создает момент силы $dM_{\text{цб}} = ydF_{\text{цб}} = \dfrac{m\omega^2 \sin(2\theta) r^2 dr}{2l}$. Полный момент центробежных сил

$$M_{\text{цб}} = \int\limits_{r=-l/2}^{r=l/2} dM_{\text{цб}} = \frac{1}{24} ml^2\omega^2 \sin(2\theta).$$

Этот момент направлен против оси z перпендикулярно стержню, стремится развернуть его вдоль оси x. Вместе со стержнем вектор $\vec{M}_{\text{цб}}$ будет вращаться вокруг оси AA'.

Элемент стержня dm имеет скорость $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ и обладает моментом импульса $d\vec{L} = [\vec{r}, dm\vec{v}]$ относительно точки O, т.е. $dL = m\omega r^2 dr/l$. Величина момента импульса всего стержня

$$L = \int\limits_{r=-l/2}^{r=l/2} dL = \frac{1}{12} ml^2\omega \ .$$

Вектор $\vec{L}$ лежит в плоскости xy, перпендикулярен стержню и также вращается вместе с ним вокруг оси AA' (рис.2.28). За пол-оборота произойдет поворот на $180°$, поэтому величина приращения вектора момента импульса составит

$$\left|\Delta\vec{L}\right| = 2L\cos\theta = \frac{1}{6} ml^2\omega\cos\theta \ .$$

Плоское движение

Задача 2.20

Однородный шар массы m и радиуса R начинает скатываться без скольжения с наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти зависимость от времени момента импульса шара относительно точки касания в начальный момент времени. Как изменится результат в случае абсолютно гладкой поверхности?

Решение

Можно показать ([1], с.130), что момент импульса системы (шара) относительно точки O:

$$\vec{L}_0 = \tilde{\vec{L}} + \left[\vec{r}_C, \vec{p}\right],$$

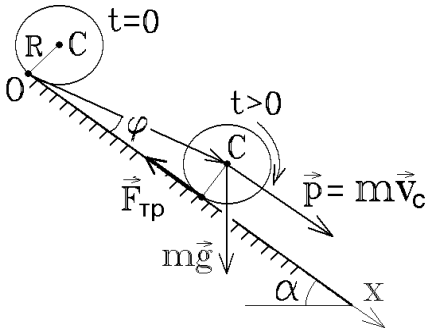

рис. 2.29

где $\tilde{\vec{L}}$ – собственный момент импульса, обусловленный вращением системы вокруг оси, проходящей через центр масс, а $\left[\vec{r}_C, \vec{p}\right]$ – момент импульса, обусловленный движением системы как целого. Из рис.2.29 видно, что оба этих вектора в данной задаче перпендикулярны плоскости чертежа и направлены от нас. Так как $\left|\left[\vec{r}_C, \vec{p}\right]\right| = mv_C r_C \sin\varphi = mv_C R$, $\tilde{L} = I\omega$, момент инерции шара $I = 2mR^2/5$, а угловая скорость его вращения связана со скоростью центра масс соотношением $\omega = v_C/R$, то

$$L_0 = I\omega + mv_C R = \frac{7}{5} mv_C R. \qquad (2.36)$$

Запишем теперь уравнения динамики поступательного движения шара в проекции на ось x (рис.2.29) и вращательного движения вокруг оси C:

$$\begin{cases} ma_C = mg\sin\alpha - F_{тр}, \\ I\varepsilon = F_{тр}R. \end{cases}$$

В отсутствии скольжения угловое ускорение шара $\varepsilon = a_C/R$ и, исключая из системы уравнений $F_{тр}$, получаем ускорение центра масс $a_C = \dfrac{g\sin\alpha}{1 + I/mR^2} = 5g\sin\alpha/7$. Движение равноускоренное, поэтому $v_C = a_C t = 5gt\sin\alpha/7$. Подставляя этот результат в формулу (2.36), получаем искомую зависимость

$$L_0 = mgR\sin\alpha \cdot t. \qquad (2.37)$$

При скольжении шара $F_{тр} = 0$, $\omega = 0$, $a_C = g\sin\alpha$, $L_0 = mv_C R$ и, по-прежнему, $v_C = a_C t$, т.е. приходим к тому же результату (2.37).

Задача 2.21

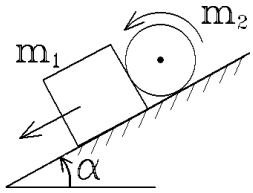

рис. 2.30

На наклонной плоскости, угол наклона α которой к горизонту можно изменять, лежат, соприкасаясь, однородный куб массы m_1 и сплошной цилиндр массы m_2 (рис.2.30). При увеличении угла α до некоторое критического значения куб начинает скользить, а цилиндр – катиться без скольжения. Найти это значение $\alpha_{кр}$, полагая, что коэффициент трения равен одному и тому же значению μ во всех точках соприкосновения тел.

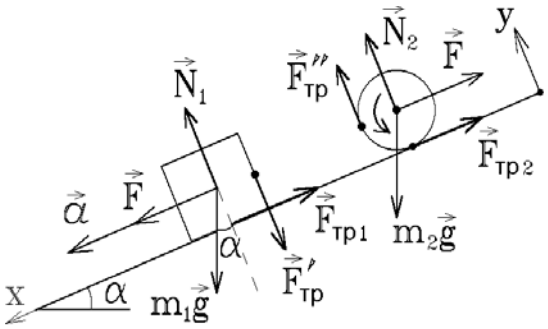

рис. 2.31

Решение

На рис.2.31 обозначены все силы, действующие на каждое тело порознь. На начавший скользить куб со стороны плоскости действует сила трения скольжения, определяемая величиной силы реакции: $F_{тр1} = \mu N_1$. Для катящегося без скольжения цилиндра $F_{тр2} < \mu N_2$!

Обозначим через $\vec{F}$ силу взаимодействия тел. Начав вращаться, цилиндр скользит по грани куба, действуя на него с силой трения скольжения $\vec{F}'_{тр}$. Со стороны куба на цилиндр действует противоположно направленная сила $\vec{F}''_{тр}$ (рис.2.31). Естественно, что $F'_{тр} = F''_{тр} = \mu F$.

Проекции уравнения поступательного движения куба на оси x и y образуют систему:

$$\left.\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g \sin\alpha - \mu N_1 + F \\ N_1 &= m_1 g \cos\alpha + \mu F \end{aligned}\right\}$$, откуда, исключая реакцию N_1, находим:

$$m_1 a = m_1 g \sin\alpha + F\left(1-\mu^2\right) - \mu m_1 g \cos\alpha . \qquad (2.38)$$

Плоское движение цилиндра также определяется уравнениями поступательного движения центра масс (в проекции на оси x и y) с тем же ускорением a. Дополнительно надо записать уравнение вращательного движения с угловым ускорением ε вокруг оси, проходящей через центр масс. Так как момент инерции цилиндра с радиусом R относительно данной оси $I = m_2 R^2/2$, а при качении без проскальзывания $\varepsilon = a/R$, то система уравнений, описывающих движение цилиндра имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &m_2 a = m_2 g \sin\alpha - F - F_{\text{тр}2}, \\ &N_2 = m_2 g \cos\alpha - \mu F, \\ &I\varepsilon = \frac{mR}{2} a = F_{\text{тр}2} \cdot R - \mu F \cdot R. \end{aligned}\right\} \qquad (2.39)$$

Вначале исключим из первого и последнего уравнения системы (2.39) неизвестную силу $F_{\text{тр}2}$ и получим:

$$3m_2 a/2 = m_2 g \sin\alpha - F(1+\mu). \qquad (2.40)$$

Затем, исключая из соотношений (2.38) и (2.40) силу F, находим:

$$\left[m_1 + 1{,}5 m_2 (1-\mu)\right] a = m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha + (1-\mu) m_2 g \sin\alpha .$$

Для того, чтобы движение началось, т.е. $a \geq 0$, необходимо выполнение неравенства: $\left[m_1 + m_2(1-\mu)\right] g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha \geq 0$,

или $\text{tg}\alpha \geq \dfrac{\mu m_1}{m_1 + m_2(1-\mu)}$, откуда $\alpha_{\text{кр}} = \text{arctg}\dfrac{\mu m_1}{m_1 + m_2(1-\mu)}$ (2.41)

Проверим выполнение условий задачи. Из уравнений (2.39) и (2.40) при $a = 0$ $(\alpha = \alpha_{\text{кр}})$ находим:

$$F = m_2 g \sin\alpha_{\text{кр}} / (1+\mu); \quad F_{\text{тр}2} = \mu F; \quad N_2 = \left((m_1 + m_2)(1-\mu^2) / \mu m_1 + 1\right) F .$$

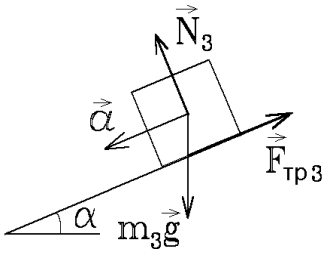

рис. 2.32

Условие отсутствия скольжения цилиндра $F_{\text{тр}2} < \mu N_2$ дает $(m_1 + m_2)(1-\mu^2) > 0$ и выполнено только при $\mu < 1$. Если $\mu \geq 1$, то цилиндр начнет скользить вместе с кубом не вращаясь, т.е. система будет двигаться поступательно как одно тело с массой $m_3 = m_1 + m_2$ (рис.2.32). Уравнение этого движения имеет вид: $m_3 a = m_3 g \sin\alpha - \mu N_3$.

Условие начала движения: $m_3 a = m_3 g \sin\alpha - \mu m_3 g \cos\alpha \geq 0$, т.е. $\alpha'_{\text{кр}} = \text{arctg}\mu$. Этот угол больше, чем соответствующее значение угла (2.41) при $\mu < 1$.

Гироскопический эффект

Задача 2.22

Монета катится по горизонтальной поверхности стола без скольжения с линейной скоростью v_C, описывая окружность радиуса $R \gg r$ (r – ради-

ус монеты). Найти угол наклона монеты к горизонту.

Решение

Монета вращается по кругу с угловой скоростью $\Omega = v_C / R$ и одновременно вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью $\omega = v_C / r$. Так как по условию $\omega/\Omega = R/r \gg 1$, то монету можно считать гироскопом с моментом инерции $I = mr^2/2$ и собственным моментом импульса

$$L = I\omega = mrv_C/2\,, \tag{2.42}$$

где v_C – скорость центра масс C монеты.

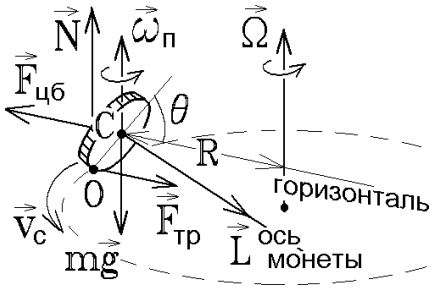

рис. 2.33

Перейдем в неинерциальную систему отсчета, в которой центр масс C неподвижен. Все приложенные к гироскопу силы – тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции $\vec{N}$, трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и центробежная $\vec{F}_{\text{цб}}$ – уравновешены. Как видно из рис.2.33, условиями равновесия будут:

$$N = mg \quad \text{и} \quad F_{\text{тр}} = F_{\text{цб}} = m\Omega^2 R\,. \tag{2.43}$$

Суммарный момент этих сил относительно точки C, в соответствии с известным уравнением движения гироскопа

$$\left[\vec{\omega}_{\text{п}}, \vec{L}\right] = \sum \vec{M}_{iC}\,, \tag{2.44}$$

приводит к прецессии гироскопа, т.е. к вращению его собственного момента импульса $\vec{L}$ вокруг оси, проходящей через "закрепленную" точку C, с угловой скоростью прецессии $\vec{\omega}_{\text{п}}$. Ненулевые моменты сил относительно точки C создают только силы трения и реакции, приложенные в точке O касания монеты и стола (отрезок $OC = r$ на рис.2.33 лежит в вертикальной плоскости).

Но монета всегда наклонена к центру траектории. Поэтому угловые скорости прецессии и вращения по окружности должны совпадать: $\vec{\omega}_{\text{п}} = \vec{\Omega}$. Угол между векторами $\vec{\Omega}$ и $\vec{L}$ равен $(\pi - \theta)$. В проекции на горизонтальную плоскость уравнение (2.44) запишется в виде:

$$\Omega L \sin(\pi - \theta) = N \cdot r\cos\theta - F_{\text{тр}} \cdot r\sin\theta\,.$$

После подстановки формул (2.42), (2.43) и связей $\Omega = v_C/R$, $\omega = v_C/r$

получим: $\dfrac{mv_C^2 r}{2R}\sin\theta = mgr\cos\theta - \dfrac{mv_C^2 r}{R}\sin\theta$, откуда

$$\theta = \mathrm{arctg}\left(2gr/3v_C^2\right). \qquad (2.45)$$

Заметим, что если бы монета скользила по окружности радиуса R на гладкой поверхности **не вращаясь**, то в выбранной неинерциальной системе отсчета следовало бы записать условие равновесия моментов сил относительно точки C: $F_{\text{тр}} \cdot r\sin\theta = N \cdot r\cos\theta$, откуда $\theta = \mathrm{arctg}\left(gR/v_C^2\right)$.

Такой угол наклона, отличный от выражения (2.45), получится, например, для конькобежца, скользящего по виражу.

Задача 2.23

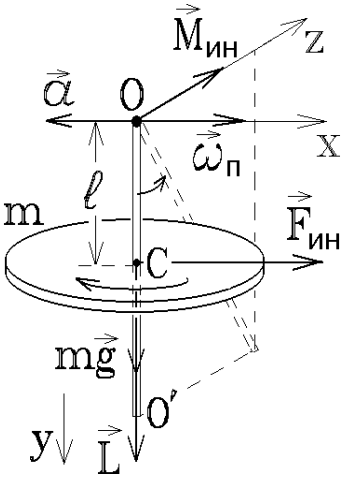

рис. 2.34

Акселерометр, используемый в авиации, представляет собой гироскоп, точка подвеса которого находится выше центра масс (рис.2.34). Характеристики его таковы: масса $m = 100$ г, момент инерции $I = 2\cdot10^{-5}$ кг·м^2, расстояние от точки подвеса до центра масс $l = 1$ см, частота вращения $n = 2\cdot10^6$ об/мин. При равномерном движении самолета ось вращения гироскопа расположена вертикально, при ускоренном – отклонена от вертикали. Найти величину и направление отклонения оси гироскопа в случае, когда самолет в течение $t = 10$ с движется с горизонтальным ускорением $a = 1$ м/с^2.

Решение

Перейдем в неинерциальную систему отсчета, в которой точка подвеса O гироскопа неподвижна. В этой системе, помимо силы тяжести $m\vec{g}$, ненулевой момент относительно точки O может создавать только сила инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}$. Из уравнения движения гироскопа

$$\left[\vec{\omega}_{\text{п}}, \vec{L}\right] = \sum \vec{M}_0 \qquad (2.46)$$

следует, что гироскоп, вообще говоря, должен совершать прецессию под действием двух моментов сил. При этом ось вращения OO' гироскопа, первоначально ориентированная вдоль вертикальной оси Oy (рис.2.34), начнет отклоняться от вертикали на угол φ. Однако этот угол настолько мал, что моментом силы тяжести $mgl\sin\varphi$ можно пренебречь по сравнению с моментом силы инерции $M_{\text{ин}} \approx mal$.

Поэтому можно считать, что прецессия происходит только под действием момента $\vec{M}_{\text{ин}}$, и ось гироскопа во время ускорения самолета начнет

поворачиваться вокруг горизонтальной оси Ox (рис.2.34) с угловой скоростью прецессии $\vec{\omega}_{\text{п}}$. Согласно уравнению (2.46)

$$\omega_{\text{п}} \cdot L \sin 90° = \omega_{\text{п}} \cdot I \cdot 2\pi n \approx mal, \quad \text{откуда} \quad \omega_{\text{п}} \approx mal/(2\pi In).$$

За время ускорения угол поворота составит:

$$\varphi = \omega_{\text{п}} t \approx \frac{malt}{2\pi In} = 2,39 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 8,21'.$$

Теперь убеждаемся в справедливости приближения: моментом сил тяжести, под действием которого ось гироскопа будет практически незаметно прецессировать вокруг вертикальной оси Oy, можно пренебречь.

Реактивное движение

Задача 2.24

Ракета массы $m_0 = 1$ т с поперечным сечением $S = 5$ м^2 летела с выключенным двигателем и попала в облако пыли. Масса каждой пылинки $m_1 = 10^{-6}$ кг, их концентрация $n = 10^{-4}$ м$^{-3}$, а соударения с ракетой абсолютно неупруги. Какова ширина облака l, если после пролета через него ракета потеряла 1% скорости?

Решение

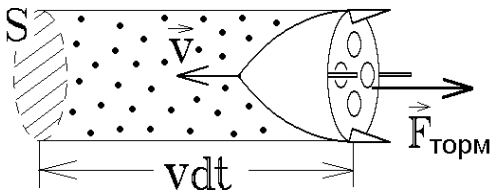

рис. 2.35

За время dt ракета, летящая со скоростью v, столкнется с пылью, находящейся в объеме $Svdt$ (рис.2.35), и суммарная масса этой пыли $dm = m_1 \cdot n \cdot Svdt$ увеличит массу ракеты. Уравнение Мещерского для реактивного движения запишется в виде:

$$m\frac{dv}{dt} = -v\frac{dm}{dt} = F_{\text{торм}} \tag{2.47}$$

(пылинки "прилипают" к ракете, создавая силу торможения).

Устраняя dt из уравнения (2.47), находим:

$dv/v + dm/m = d(\ln v + \ln m) = d(\ln(vm)) = 0$, откуда $vm = v_0 m_0 = \text{const}$

или
$$m = v_0 m_0 / v. \tag{2.48}$$

Подставляя найденную зависимость (2.48), а также полученное выше приращение dm в уравнение (2.47), приводим его к виду

$$dl = vdt = -\frac{v_0 m_0}{nSm_1}\frac{dv}{v^2}.$$

Проинтегрировав обе части с учетом того, что конечная скорость равна $0,99v_0$, найдем:

$$l = \frac{v_0 m_0}{nSm_1}\left(\frac{1}{0,99v_0} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{m_0}{99 \cdot nSm_1} = 2,02 \cdot 10^7 \text{ км}$$

Задача 2.25

Межпланетная станция имеет форму тора с внешним радиусом R. Для создания искуственного поля тяжести станция приводится во вращение вокруг оси симметрии с помощью двух ракетных двигателей, установленных на внешнем ободе тора на одном диаметре (рис.2.36). Через сколько времени после включения двигателей тела на станции будут иметь такой же вес, как и на Земле? Относительная скорость истечения газов $u = \text{const}$, общий секундный расход топлива μ тоже постоянен, момент инерции станции вместе с горючим равен I_0.

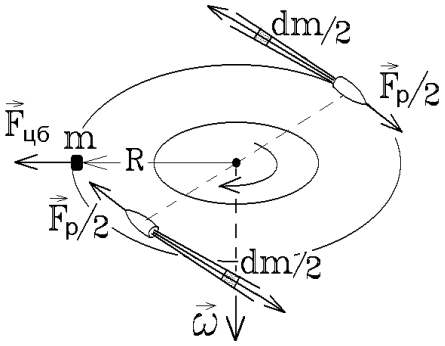

Рис. 2.36

Решение

Из двигателей станции за время dt вылетают по касательной к ободу газы с суммарной массой $dm = \mu dt$. Поэтому на станцию действует суммарная реактивная сила тяги $F_р = u\,dm/dt = u\mu$, направленная также по касательной (рис.2.36), имеющая момент $M_р = F_р R = u\mu R$ и раскручивающаяся станцию.

Момент инерции станции с потерей топлива уменьшается за время dt работы двигателей на величину $dI = dm \cdot R^2 = \mu R^2 dt$ и в момент t будет равен $I_0 - \mu R^2 t$.

Уравнение вращательного движения станции (аналог уравнения Мещерского при поступательном реактивном движении) принимает вид:

$$\left(I_0 - \mu R^2 t\right) d\omega/dt = M_р = u\mu R\,. \qquad (2.49)$$

Решим уравнение (2.49) методом разделения переменных:

$$d\omega = \frac{\mu u R dt}{I_0 - \mu R^2 t} = -\frac{u}{R}\frac{d\left(I_0 - \mu R^2 t\right)}{I_0 - \mu R^2 t}, \quad \text{откуда} \quad \omega = -\frac{u}{R}\ln\left(I_0 - \mu R^2 t\right) + \text{const}\,.$$

Из начальных условий ($\omega = 0$ при $t = 0$) находим постоянную интегрирования $\text{const} = \left(u \ln I_0\right)/R$, и в результате имеем:

$$\omega = -\frac{u}{R}\ln\left(1 - \frac{\mu R^2}{I_0} t\right). \qquad (2.50)$$

«Вес» тел на станции создается центробежной силой, поэтому искомое время определяется условием $mg = F_{цб} = m\omega^2 R$. Отсюда $\omega = \sqrt{g/R}$. Подставляя это значение в уравнение (2.54) и выражая из него время t_1, находим:

$$t = \frac{I_0}{\mu R^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{gR}}{u}\right)\right].$$

Гравитация

Задача 2.26

Однородный шар имеет массу m и радиус R. Найти обусловленное гравитационным сжатием давление p внутри шара как функцию расстояния r от его центра. Оценить p в центре Земли, считая Землю однородным шаром.

Решение

Сначала, применяя теорему Гаусса, $\oint \vec{E}_{гр} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{внутри}$, найдем величину напряженности $E_{гр}(r)$ гравитационного поля в точке $r < R$, где R – радиус шара:

$$E_{гр} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi G\rho \cdot 4\pi r^3/3 \qquad и \qquad E_{гр}(r) = 4\pi G\rho r/3.$$

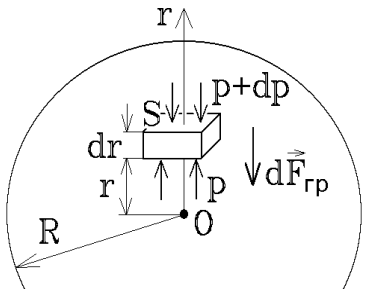

Рис. 2.37

Здесь G – гравитационная постоянная, ρ – плотность шара, $m = 4\pi r^3\rho/3$ – его масса.

Далее выделим элемент массы $dm = \rho S dr$ с площадью S на расстоянии r от центра шара (рис.2.37). Так как он находится в статическом равновесии, то сила гравитационного притяжения $d\vec{F}_{гр}$ к центру шара должна уравновешиваться разностью сил давления на его нижнюю и верхнюю поверхность:

$$dF_{гр} = E_{гр}(r) \cdot dm = pS - (p + dp)S.$$

Отсюда находим приращение давления внутри шара с увеличением расстояния от центра на dr: $\quad dp = -E_{гр} dm/S = -E_{гр}\rho dr = -4\pi G\rho^2 r dr/3.$

Давление уменьшается с ростом r и равно нулю на поверхности шара. Проинтегрировав последнее уравнение, найдем

$$p(r) = -\int_p^0 dp = \frac{4}{3}\pi G\rho^2 \int_r^R r\,dr = \frac{4}{3}\pi G\rho^2\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{3Gm^2}{8\pi R^4}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \qquad (2.51)$$

где m – масса шара.

Формула (2.51) позволяет оценить давление в центре Земли: если учесть, что $\frac{Gm_3}{R_3^2} = g\left(R_3\right) = 9{,}81$ м/с^2, то $p_3\left(0\right) = \frac{3}{8\pi G} g^2\left(R_3\right) = \ = 1{,}72 \cdot 10^{11}$ Па $\approx$ $\approx 1{,}7 \cdot 10^6$ атм .

Задача 2.27

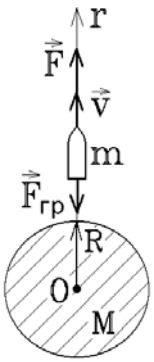

рис. 2.38

С поверхности планеты радиуса $R = 6400$ км вертикально вверх взлетает ракета (рис.2.38), причем ее двигатели с момента старта развивают постоянную силу тяги $F = kmg$, где m – масса ракеты, $g = 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения на поверхности планеты, $k = 2$. Какое время τ должны работать двигатели ракеты, чтобы она приобрела вторую космическую скорость v_{II} и навсегда покинула планету? Вращением планеты и присутствием атмосферы пренебречь.

Решение

Так как ускорение свободного падения на поверхности планеты $g = GM/R^2$, где M – масса планеты, G – гравитационная постоянная, то уравнение движения ракеты имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = F - F_{\text{гр}} = kmg - \frac{GMm}{r^2} = mg\left(k - \frac{R^2}{r^2}\right). \qquad (2.52)$$

Подставляя связь $dt = dr/v$, разделяем переменные и интегрируем обе части уравнения (2.52):

$$\int v dv = g\int\left(k - \frac{R^2}{r^2}\right)dr, \qquad \text{откуда} \qquad v^2 = 2g\left(kr + \frac{R^2}{r}\right) + \text{const} . \qquad (2.53)$$

Постоянную интегрирования находим из начальных условий: $v = 0$ при $r = R$. Поэтому $\text{const} = -2gR\left(k+1\right)$ и

$$v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{2gR\left(k\frac{r}{R} + \frac{R}{r} - k - 1\right)} . \qquad (2.54)$$

Второй космической скорости ракета достигнет на таком удалении r' от центра планеты, когда ее механическая энергия станет равной нулю: $E = mv_{\text{II}}^2/2 - GMm/r' = 0$. Из последней формулы и из формулы (2.53) находим $v_{\text{II}}^2 = \frac{2gR^2}{r'} = 2g\left(kr' + \frac{R^2}{r'}\right) - 2gR\left(k+1\right)$, откуда $r' = R\left(k+1\right)/k$.

Чтобы получить время ускорения τ, разделяем переменные в уравнении (2.54) и вычисляем интеграл:

$$\tau = \int_R^{r'} dr \Big/ \sqrt{2gR\left(k\frac{r}{R} + \frac{R}{r} - k - 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_R^{r'} \frac{\sqrt{r}dr}{\sqrt{kRr^2 - (k+1)Rr + R^2}}. \qquad (2.55)$$

Интеграл в правой части формулы (2.55) не вычисляется в элементарных функциях. Численное интегрирование с помощью ЭВМ после подстановки числовых значений позволяет выразить результат с помощью следующей таблицы:

k	1,5	2	3	4	5	10	20
τ, мин	19,2	12,6	7,53	5,38	4,19	1,98	0,97

Заметим, что при $k = 2$ космонавт испытывает двойную силу тяжести в момент старта.

Глава 3

Законы сохранения

Вычисление работы

Задача 3.1

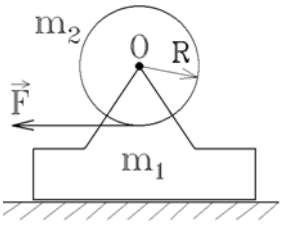

рис. 3.1

По гладкой горизонтальной поверхности без трения может перемещаться тело массы m_1. На нем, как показано на рис.3.1, укреплен шкив массы m_2, представляющий собой сплошной цилиндр, который может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси *O*. На цилиндр плотно намотана невесомая нить, которую в момент $t = 0$ начали тянуть с постоянной силой F. Найти работу этой силы за первые t секунд.

Решение

В условиях данной задачи вся система движется поступательно, а ее часть – цилиндр радиуса R – совершает к тому же вращательное движение вокруг оси *O*. Воспользуемся общим принципом: работа всех сил равна изменению кинетической энергии системы, т.е. в данном случае

$$A = \Delta K = \frac{(m_1 + m_2)v_C^2}{2} + \frac{I_2\omega^2}{2}, \qquad (3.1)$$

так как первоначальная кинетическая энергия равна 0. Постоянство силы F означает, что движения (и поступательное, и вращательное) – равноускоренные, поэтому $v_C = a_C t, \qquad \omega = \varepsilon t,$

где, согласно законам движения, $a_C = F/(m_1 + m_2)$ и $\varepsilon = M_Z/I_2 = FR/I_2$, а момент инерции сплошного однородного цилиндра $I_2 = m_2R^2/2$.

Подставляя выражения для скоростей и ускорений в формулу (3.1), находим окончательно:

$$A = \frac{(m_1 + m_2)a_C^2t^2}{2} + \frac{I_2\varepsilon^2t^2}{2} = \frac{(2m_1 + 3m_2)F^2t^2}{2m_2(m_1 + m_2)}.$$

Задача 3.2

Однородный куб массы m с ребром l лежит на горизонтальном полу. Коэффициент трения между кубом и полом равен μ. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы повернуть куб на $90°$, не отрывая его от пола, вокруг оси, совпадающей с одним из его ребер (рис.3.2)?

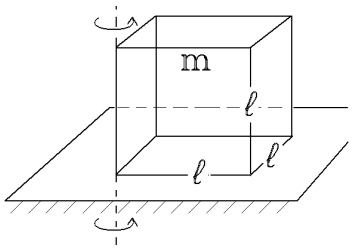

рис. 3.2

Решение

Минимальная работа – это работа, совершенная только против сил трения, без затрат на ускорение тела. Поэтому $A = \int M_{\text{тр}} d\varphi = M_{\text{тр}} \cdot \frac{\pi}{2}$,

так как в данной ситуации (при скольжении куба по полу) момент сил трения постоянен.

Для вычисления момента сил трения разделим площадь основания (квадрат) на бесконечно узкие полоски радиуса r и толщины dr (заштрихованы нарис.3.3). Тогда

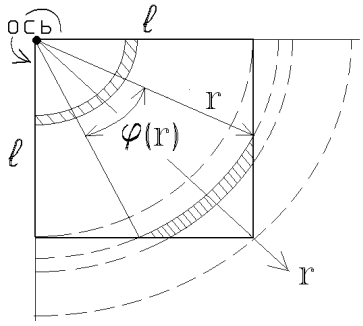

рис.3.3

$$M_{\text{тр}} = \int dF_{\text{тр}} \cdot r, \qquad (3.2)$$

где $dF_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на заштрихованную полоску и поэтому равная $\mu g dm$. Здесь $gdm = g\rho dS$ – вес элемента куба с основанием, равным площади полоски $dS = \rho\varphi(r) r dr$, $\varphi(r)$ – угловая длина полоски, а $\rho = m/l^2$ – масса, приходящаяся на единицу площади основания (поверхностная плотность). Как видно из рис.3.3,

$$\varphi(r) = \begin{cases} \pi/2 & \text{при} \quad 0 \le r \le l, \\ \pi/2 - 2\arccos(l/r) & \text{при} \quad l \le r \le l\sqrt{2}. \end{cases}$$

Подстановка всех этих соотношений в формулу (3.2) дает

$$M_{\text{тр}} = \mu g \rho \int \varphi(r) r^2 dr = \mu g \rho \left(\int_0^{l\sqrt{2}} (\pi/2) r^2 dr - 2 \int_l^{l\sqrt{2}} \arccos(l/r) r^2 dr \right).$$

Первый интеграл в круглых скобках тривиален и равен $\sqrt{2}\pi l^3/3$, а второй можно вычислить методом интегрирования по частям:

$$\int \underbrace{\arccos(l/r)}_{=u} \cdot \underbrace{r^2 dr}_{=d\upsilon} = \frac{r^3}{3} \arccos\left(\frac{l}{r}\right) - \int \frac{r^3}{3} d\left(\arccos\frac{l}{r}\right).$$

После нескольких преобразований получаем:

$$\int_l^{l\sqrt{2}} \arccos(l/r) \cdot r^2 dr = l^3 \left(\sqrt{2}(\pi - 1) - \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \right) / 6 .$$

Таким образом, $M_{\text{тр}} = \mu g \rho l^3 \left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \right) / 3$,

и окончательно $A = \mu m g l \pi \left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \right) / 6 = 1{,}20 \mu m g l$.

Сохранение энергии. Поступательное движение

Задача 3.3

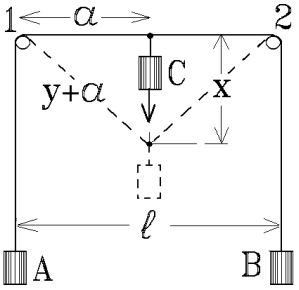

рис.3.4

Невесомая и нерастяжимая нить переброшена через гладкие горизонтальные стержни 1 и 2, расстояние между которыми равно $l = 2$ м. На концах нити подвешены грузы *A* и *B* одинаковой массы. В некоторый момент в середине нити подвесили груз *C* той же массы $m = 1$ кг, осторожно отпустили, и система пришла в движение (рис.3.4). Найти максимальную скорость груза *C*, максимальное перемещение его при движении вниз, а также максимальную кинетическую энергию системы.

Решение

Обозначим через x смещение груза *C* вниз, а через y – смещения грузов *A* и *B* вверх (из-за симметрии они одинаковы). Между этими перемещениями существует связь, вытекающая из геометрических соображений (рис.3.4):

$$y = \sqrt{x^2 + a^2} - a, \qquad \text{где} \qquad a = l/2. \tag{3.3}$$

Так как скорости грузов равны соответственно: $v_C = \dot{x}$, $v_A = v_B = \dot{y}$, то из равенства (3.3) вытекает связь между скоростями:

$$\dot{y} = x\dot{x} \Big/ \sqrt{x^2 + a^2}. \tag{3.4}$$

Рассматриваемая система консервативна, поэтому ее механическая энергия не меняется в процессе движения, т.е.

$$\Delta E = m\left(2gy - gx + \dot{x}^2/2 + \dot{y}^2\right) = 0. \tag{3.5}$$

В соотношении (3.5) два первых слагаемых – это изменения потенциальных энергий грузов, а два последних – изменение их кинетических энергий, первоначально равных нулю.

Сначала найдем максимальное смещение $x_{\max}$ вниз груза *C*. Очевидно, что в точке максимального смещения скорость груза *C* обращается в нуль, и, как следует из выражения (3.4), скорости грузов *A* и *B* – тоже. Поэтому из равенств (3.5) и (3.3) следует, что

$$2y_{\max} - x_{\max} = 0, \qquad \text{откуда} \qquad x_{\max} = 2l/3.$$

Зависимость кинетической энергии системы от смещения x легко выразить из соотношений (3.5) и (3.3):

$$K = m\left(\dot{x}^2/2 + \dot{y}^2\right) = mg\left(x - 2y\right) = mg\left(x + 2a - 2\sqrt{x^2 + a^2}\right). \tag{3.6}$$

Условие экстремума $\left(dK/dx\right)\Big|_{x=x_m} = 0$ дает $x_m = a/\sqrt{3}$. После подстанов-

ки в формулу (3.6) находим $K_{\max} = \left(2-\sqrt{3}\right)amg = 2,63$ Дж .

Сложнее определить $v_{C\max}$. Используя соотнощения (3.3) и(3.4), находим из уравнения (3.5) выражение для квадрата скорости груза *C:*

$$v_C^2 = \dot{x}^2 = 2g\left(x^2+a^2\right)\left(2a+x-2\sqrt{x^2+a^2}\right)\Big/\left(3x^2+a^2\right), \qquad (3.7)$$

и исследуем его на экстремум: $\left(d\dot{x}^2/dx\right)\Big|_{x=x_{\mathrm{m}}} = 0$. В итоге приходим к алгебраическому уравнению для координаты x_{m}, в которой скорость груза *C* максимальна: $3x_{\mathrm{m}}^4 - 8x_{\mathrm{m}}a^3 + a^4 - 6\left(x_{\mathrm{m}}^2 - a^2\right)x_{\mathrm{m}}\sqrt{x_{\mathrm{m}}^2+a^2} = 0.$

Решение этого алгебраического уравнения может быть получено численными методами и имеет величину $x_{\mathrm{m}} = 0,4152\cdot a$. Заметим, что максимальная скорость одного из грузов системы и ее суммарная кинетическая энергия K достигают максимума в разных точках x_{m} !

Подставляя найденные решения в уравнение (3.7), находим:

$$v_{C\max} = \dot{x}_{\max} \approx 0,4392\cdot\sqrt{g\,l} = 1,95 \text{ м/с}.$$

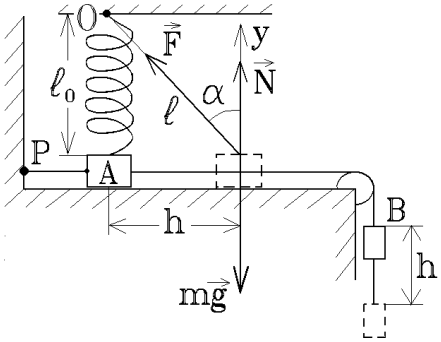

рис. 3.5

Задача 3.4

На гладкой горизонтальной плоскости лежит небольшой брусок *A*, соединенный нитями с точкой *P* и через невесомый блок – с грузом *B* той же массы (рис.3.5). Кроме того, брусок соединен с точкой *O* легкой недеформированной пружиной длины $l_0 = 50$ см и жесткости $k = 5mg/l_0$, где m – масса бруска. Нить *PA* пережгли, и брусок начал двигаться. Найти момент отрыва бруска от плоскости и его скорость в этот момент.

Решение

Брусок начинает скользить по горизонтальной плоскости, пружина постепенно растягивается, и сила ее натяжения $F = k\left(l-l_0\right)$ растет. Так как проекция суммы сил на вертикальную ось y при этом уравновешена: $N + F\cos\alpha = mg$, то будет уменьшаться сила реакции опоры $\vec{N}$. Условием отрыва бруска является обращение в нуль этой силы: $N = 0$. Тогда

$$F\cos\alpha = k\left(l-l_0\right)\cos\alpha = mg\ . \qquad (3.8)$$

Так как $l = l_0/\cos\alpha$ (рис.3.5), то из формулы (3.8) находим угол отклонения α пружины от вертикали в момент отрыва бруска:

$$\cos\alpha = 1 - mg/k\,l_0 = 4/5 \qquad \text{или} \qquad \mathrm{tg}\alpha = 3/4.$$

Запишем теперь закон сохранения энергии:

$$mgh = 2\left(mv^2/2\right) + k\left(l - l_0\right)^2/2.$$

Подстановка в него выражений для l, k и смещения каждого из брусков $h = l_0\mathrm{tg}\alpha$ дает:

$$v^2 = gl_0\mathrm{tg}\alpha - \frac{5gl_0}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)^2 = \frac{19}{32}gl_o \qquad \text{и} \qquad \upsilon = \sqrt{\frac{19}{32}gl_0} = 1{,}71 \text{ м/с}.$$

Упругие столкновения

Задача 3.5

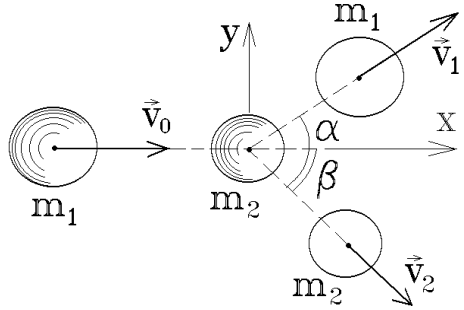

рис. 3.6

Шар массы m_1, двигавшийся со скоростью $\vec{v}_0$, абсолютно упруго сталкивается с шаром массы m_2, который до столкновения был неподвижен. После столкновения шары движутся со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в направлениях, показанных на рис.3.6. При каком соотношении масс m_1 и m_2 возможны случаи:

а) $\alpha = \pi/2$, б) $\alpha = \beta \neq 0$, в) $\alpha = \beta = 0$, г) $\alpha = \pi, \beta = 0$? Чему равно предельное значение угла β в случае (а)?

Решение

В данной задаче рассматривается упругий удар; поэтому можно записать векторное уравнение закона сохранения импульса, его проекцию на ось y (рис.3.6) и закон сохранения энергии:

$$m_1\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\ , \tag{3.9}$$

$$0 = m_1v_1\sin\alpha - m_2v_2\sin\beta\ , \tag{3.10}$$

$$m_1v_0^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2 \tag{3.11}$$

Преобразуем эту систему уравнений к более удобному для решения данной задачи виду. Для этого скалярно умножим обе части уравнения (3.9) сами на себя: $\left(m_1\vec{v}_0\right)^2 = \left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)^2$, откуда

$$m_1^2v_0^2 = m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2v_1v_2\cos\left(\alpha + \beta\right); \tag{3.12}$$

Уравнение (3.11) умножим на m_1 и полученное равенство вычтем из уравнения (3.12), что дает

$$v_2 = 2m_1v_1\cos\left(\alpha + \beta\right)/\left(m_1 - m_2\right). \tag{3.13}$$

Наконец, из уравнений (3.13) и (3.10) получаем:

$$\sin\alpha/\sin\beta = 2m_2\cos(\alpha+\beta)/(m_1-m_2). \qquad (3.14)$$

а) $\alpha = \pi/2$. В этом случае $\cos(\alpha+\beta) = -\sin\beta$ и из выражения (3.13) следует, что $\sin\beta/(m_2-m_1) > 0$, т.е. $m_2 > m_1$. Кроме того, из равенства (3.14) вытекает $\sin^2\beta = 1/2 - m_1/2m_2$, т.е. $\beta < \pi/4$.

б) $\alpha = \beta \neq 0$. При этом $\cos(\alpha+\beta) = \cos(2\alpha)$, и из уравнения (3.14) следует, что $\cos(2\alpha) = (m_1-m_2)/2m_2$, а так как $\cos(2\alpha) < 1$, то $m_1 < 3m_2$.

в) $\alpha = \beta = 0$. В этом случае $\cos(\alpha+\beta) = 1$ и из уравнения (3.13), учитывая, что $v_2 > 0$ и $v_1 > 0$, получаем $m_1 > m_2$.

г) $\alpha = \pi$, $\beta = 0$. Здесь $\cos(\alpha+\beta) = -1$ и из уравнения (3.13), в силу того, что $v_2 > 0$, следует $m_1 < m_2$. Случаи (в) и (г) соответствуют центральному удару.

Задача 3.6

Два идеально упругих шарика с одинаковыми массами $m_1 = m_2 = m$ движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 (рис.3.7). Найти возможный угол θ их разлета после столкновения. Найти также максимальную потенциальную энергию U деформации шариков в процессе столкновения в том случае, когда $v_1/v_2 = 3/2$, а первый шарик меняет направление движения на угол $\alpha = 45°$.

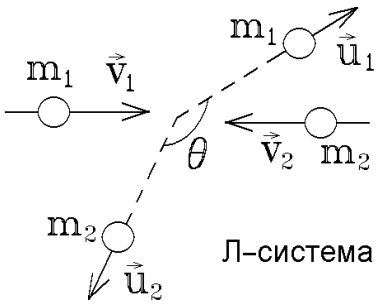

рис. 3.7

Решение

После столкновения шарики приобретают скорости $\vec{u}_i$ и импульсы $\vec{p}_i\,' = m_i\vec{u}_i$. Скалярно умножим обе части векторного уравнения закона сохранения импульса сами на себя: $(m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2)^2 = (m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2)^2$, откуда

$$v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = u_1^2 + u_2^2 + 2\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2\ . \qquad (3.15)$$

Используем закон сохранения энергии при упругом ударе:

$$mv_1^2/2 + mv_2^2/2 = mu_1^2/2 + mu_2^2/2\ . \qquad (3.16)$$

Из уравнений (3.15) и (3.16) следует $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2$ или $v_1v_2\cos\pi = u_1u_2\cos\theta$, откуда

$$u_2 = -v_1v_2/u_1\cos\theta\ . \qquad (3.17)$$

Подставляя соотношение (3.17) в уравнение (3.16), приходим к квадратичному уравнению

$$\left(u_1^2\right)^2-\left(v_1^2+v_2^2\right)u_1^2+v_1^2v_2^2\big/\cos^2\theta=0\ ,$$

дискриминант которого не должен быть положительным:

$$D=v_1^2v_2^2\big/\cos^2\theta-\left(v_1^2+v_2^2\right)^2\Big/4\le 0\ .$$

Отсюда следует, что косинус угла возможного разлета шариков лежит в пределах: $\cos\theta\le -2v_1v_2\Big/\left(v_1^2+v_2^2\right)$. Величина $\cos\theta$ зависит от точки соприкосновения шариков при ударе. Угол $\theta=\pi$ соответствует лобовому удару.

Чтобы найти энергию деформации U, удобнее перейти в Ц-систему, движущуюся со скоростью центра масс $\vec{v}_C=\left(m\vec{v}_1+m\vec{v}_2\right)\big/2m$, т.е. $v_C=\left(v_1-v_2\right)\big/2$. В этой системе шарики с одинаковой массой движутся навстречу друг другу с одинаковыми по величине скоростями $\vec{\tilde{v}}_1=\vec{v}_1-\vec{v}_C=\left(\vec{v}_1-\vec{v}_2\right)\big/2$, $\vec{\tilde{v}}_2=\vec{v}_2-\vec{v}_C=\left(\vec{v}_2-\vec{v}_1\right)\big/2$ и разлетаются после упругого удара с теми же по величине скоростями $\vec{\tilde{u}}_1=-\vec{\tilde{u}}_2$, т.е. $\tilde{v}_1=\tilde{v}_2=$ $=\tilde{u}_1=\tilde{u}_2=\left(v_1+v_2\right)\big/2$ (рис.3.8).

Силы упругости в момент столкновения могут действовать только вдоль биссектрисы AA' (рис.3.8), так как проекции импульсов шариков на перпендикулярное направление BB' не изменяются. В момент наибольшей деформации проекции скоростей обоих шариков на направление AA' обращаются в ноль, хотя шарики продолжают смещаться в направлении BB'. Часть кинетической энергии шариков переходит в потенциальную энергию упругой деформации, и из закона сохранения энергии $m\tilde{v}_1^2\big/2+m\tilde{v}_2^2\big/2=U_{\max}+m\left(\tilde{v}_1\cos\beta\right)^2\big/2+m\left(\tilde{v}_2\cos\beta\right)^2\big/2$ получаем:

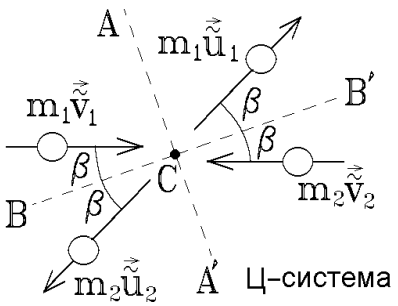

рис. 3.8

$$U_{\max}=m\sin^2\beta\,\left(v_1+v_2\right)^2\big/4\ . \qquad (3.18)$$

Возвращаясь в исходную систему отсчета, связываем углы α и 2β из геометрических соображений (рис.3.9):

$$\tilde{u}_1\sin 2\beta=\left(\tilde{u}_1\cos 2\beta+v_C\right)\mathrm{tg}\alpha\,, \qquad (3.19)$$

откуда можно определить $\sin^2\beta$.

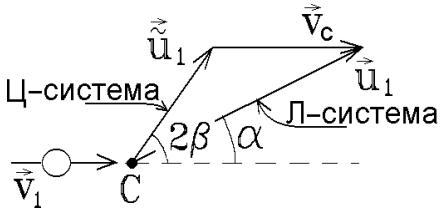

рис. 3.9

Подставляя в уравнение (3.19) данные в условии величины $\mathrm{tg}\alpha=1$, $\tilde{u}_1/v_C=\left(v_1+v_2\right)/\left(v_1-v_2\right)=5$, получим $5\sin 2\beta=5\cos 2\beta+1$. Решение по-

следнего уравнения будет неоднозначным: $\sin^2\beta = 2/5$ или $9/10$. Это означает, что первый шарик изменяет направление движения на один и тот же угол α при двух разных точках касания со вторым шариком. Неоднозначность решения – общая особенность задач об упругом нецентральном соударении. Окончательно из формулы (3.18) находим наибольшее из двух возможных значений $U_{\max} = 5mv_1^2/8$.

Задача 3.7

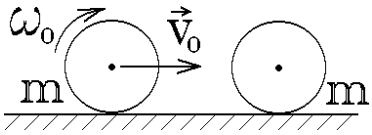

рис. 3.10

Бильярдный шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью v_0 и упруго ударяется в такой же покоящийся бильярдный шар, причем линия центров параллельна скорости движения (рис.3.10). Найти скорости обоих бильярдных шаров после того, как их движения перейдут в чистое качение. Какая доля первоначальной кинетической энергии перейдет в тепло? Указание: считать, что при столкновении не происходит передачи вращательного движения.

Решение

При качении налетающий шар массы m, радиуса r, с моментом инерции $I = 2mr^2/5$ вращался вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью $\omega_0 = v_0/r$. Так как в момент удара вращательное движение не передается, то угловая скорость и кинетическая энергия вращательного движения первого шара при ударе не изменяются, и следует записать законы сохранения импульса и энергии поступательного движения:

$$\begin{cases} mv_0 = mv_{10} + mv_{20}, \\ mv_0^2/2 = mv_{10}^2/2 + mv_{20}^2/2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} v_0 = v_{10} + v_{20}, \\ v_0^2 = v_{10}^2 + v_{20}^2, \end{cases}$$

откуда сразу следует, что $2v_{10}v_{20} = 0$, т.е. скорости поступательного движения налетавшего и покоившегося шаров сразу после удара будут равны, соответственно, $v_{10} = 0$ и $v_{20} = v_0$. В момент удара происходит обмен скоскоростями поступательного движения.

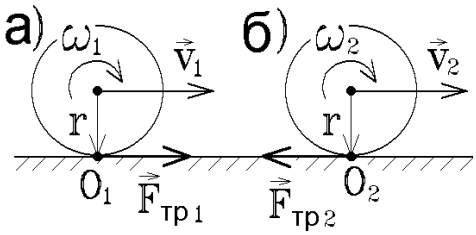

рис. 3.11

Сразу после удара первый шар буксует, вращаясь на месте. Возникающая сила трения $\vec{F}_{\text{тр}1}$ начнет увеличивать скорость его поступательного движения v_1, а момент этой силы будет замедлять вращение шара (рис.3.11,а). Исключая силу $F_{\text{тр}1}$ из уравнений движения

$$m dv_1/dt = F_{\text{тр}1}, \qquad I d\omega_1/dt = -F_{\text{тр}1} \cdot r,$$

приходим к соотношению $d\left(mv_1 \cdot r + I\omega_1\right) = 0$, откуда следует закон сохранения момента импульса первого шара относительно точки O_1 его касания с опорой (что вполне естественно, так как относительно этой точки равны нулю моменты всех сил, действующих на шар, рис.3.11,а):

$$L_{O_1} = mv_1 r + I\omega_1 = I\omega_0 = \text{const} . \qquad (3.20)$$

Постепенно скорость v_1 растет, скорость ω_1 уменьшается, и в момент, когда будет выполнено условие $v_1 = \omega_1 r$, движение шара превратится в чистое качение. Сила трения перестанет совершать работу и изменять величину скорости v_1. Подставляя условие $\omega_1 = v_1/r$ в уравнение (3.20), находим установившуюся скорость первого шара:

$$v_1 = I\omega_0 r \Big/ \left(mr^2 + I\right) = 2v_0/7 .$$

Второй шар сразу после удара скользит не вращаясь, и возникающая сила трения $\vec{F}_{\text{тр}2}$ будет уменьшать скорость его поступательного движения v_2, а момент этой силы начнет увеличивать угловую скорость вращения ω_2 (рис.3.11,б). Запишем аналогичный уравнению (3.20) закон сохранения момента импульса шара относительно точки касания O_2:

$$L_{O_2} = mv_2 r + I\omega_2 = mv_{02} r = \text{const}. \qquad (3.21)$$

Со временем окажется выполненным условие $v_2 = \omega_2 r$, и шар начнет катиться без скольжения с установившейся скоростью v_2, которую находим из соотношения (3.21): $v_2 = mv_0 r^2 \Big/ \left(mr^2 + I\right) = 5v_0/7$.

Первоначальная кинетическая энергия катящегося без скольжения шара $K_0 = mv_0^2/2 + I\omega_0^2/2 = mv_0^2/2 + mr^2\left(v_0/r\right)^2/5 = 7mv_0^2/10$. Пока действовали силы трения скольжения, часть этой энергии перешла в тепло:

$$Q = K_0 - \left(K_1 + K_2\right) = 7m\left(v_0^2 - v_1^2 - v_2^2\right)\Big/10 = 2mv_0^2/7.$$

Потери энергии $\left(Q/K_0\right)\cdot 100\ \% = 40{,}8\ \%$.

Задача 3.8

На идеально гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень длины l и массы M, который может скользить по этой поверхности без трения. В одну из точек стержня упруго ударяется шарик массы m, движущийся перпендикулярно стержню. На каком расстоянии x от середины стержня должен произойти удар, чтобы шарик передал стержню всю свою кинетиче-

скую энергию? При каком соотношении масс M и m это возможно?

Решение

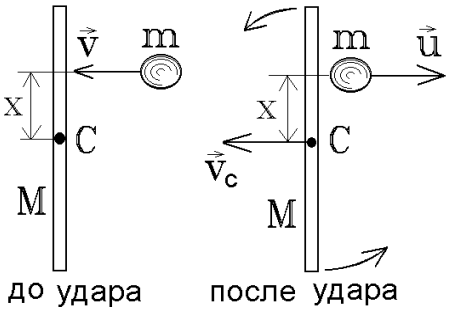

рис. 3.12

В данной задаче рассматривается упругий удар. Поэтому, кроме законов сохранения импульса и момента импульса, будет также выполняться и закон сохранения энергии. В результате получаем систему трех уравнений:

$$mv = Mv_C - mu, \qquad (3.22)$$

$$mvx = I\omega - mu\,x, \qquad (3.23)$$

$$mv^2/2 = Mv_C^2/2 + I\omega^2/2 + mu^2/2, \qquad (3.24)$$

где $I = M\,l^2/12$ – момент инерции стержня относительно перпендикулярной оси, проходящей через его середину C, v и u – скорости шарика до и после удара, v_C – скорость центра масс стержня, а ω – угловая скорость вращения стержня вокруг оси C после удара. (рис.3.12)

Выразим из этой системы координату точки удара x через скорости v и u. Для этого сначала из уравнения (3.22) найдем $v_C = m(v+u)/M$ и, подставив в уравнение (3.24), определим из него

$$\omega^2 = \left(12m/M^2l^2\right)\left[M\left(v^2-u^2\right) - m(v+u)^2\right].$$

Наконец, подставляя полученную величину ω в уравнение (3.23), находим:

$$x = \frac{l}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{M\left(v^2-u^2\right)}{m(v+u)^2} - 1}\,.$$

По условию задачи $u = 0$ и, следовательно, искомое значение x будет

$$x = l\sqrt{(M-m)/12m}\,. \qquad (3.25)$$

Проанализируем, при каком соотношении масс шарика и стержня это возможно. Из равенства (3.25) очевидно выполнение условия $M > m$. Кроме того, так как $x \le l/2$, то из того же равенства имеем:

$$1/2 > \sqrt{(M-m)/12m}\,, \qquad \text{откуда} \qquad M/m \le 4.$$

Таким образом, при упругом ударе шарик массы m может передать стержню всю свою кинетическую энергию только при выполнении неравенства $m < M \le 4m$.

<u>Задача 3.9</u>

Тонкий стержень падает не вращаясь в положении, наклоненном к горизонту под углом φ, и упруго ударяется о гладкую массивную горизонтальную

плиту (рис.3.13). Найти угол φ, если сразу после удара вся кинетическая энергия поступательного движения переходит в кинетическую энергию вращательного движения стержня вокруг оси, проходящей через центр масс.

Решение

Пусть масса стержня m, длина стержня l, а перед ударом он имеет скорость v_0. За время удара τ на стержень помимо силы тяжести $m\vec{g}$ действует **переменная** сила нормальной реакции $\vec{N}$ (рис.3.13). Запишем уравнения динамики поступательного движения центра масс C, вращательного движения вокруг оси, проходящей через точку C, и проинтегрируем эти уравнения по времени удара:

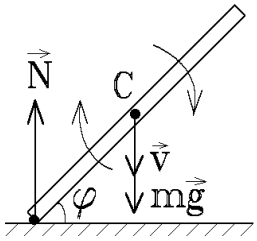

рис. 3.13

$$\left.\begin{aligned} &\int m dv = \int \left(mg - N\right) dt, \\ &\int I d\omega = \int N \frac{l}{2} \cos\varphi \, dt, \end{aligned}\right\} \quad \text{откуда} \quad \left.\begin{aligned} &m\left(v - v_0\right) = mg\tau - \int_0^\tau N dt, \\ &I\omega = \frac{l}{2}\cos\varphi \int_0^\tau N dt, \end{aligned}\right\} \qquad (3.26)$$

где $I = ml^2/12$ – момент инерции стержня, v и ω – скорость его центра масс и угловая скорость вращения сразу после удара.

За очень малое время удара τ угол наклона φ измениться не успевает, а величина $mg\tau$ настолько мала, что ею можно пренебречь. Исключая при этом допущении неизвестную величину $\int N dt$ из системы уравнений (3.26), находим связь

$$v - v_0 = l\omega/\left(6\cos\varphi\right). \qquad (3.27)$$

При упругом ударе можно записать закон сохранения энергии:

$$mv_0^2/2 = mv^2/2 + I\omega^2/2 . \qquad (3.28)$$

Уравнения (3.28) и (3.27) представляют собой систему двух уравнений для определения двух неизвестных скоростей v и ω. Перепишем их в виде:

$$\begin{cases} v_0^2 - v^2 = l^2\omega^2/12, \\ \left(v_0 - v\right)\cos\varphi = l\omega/6 . \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} v_0 + v = \left(\omega l/2\right)\cos\varphi , \\ v_0 - v = l\omega/\left(6\cos\varphi\right) , \end{cases}$$

откуда находим величины скоростей сразу после удара:

$$\omega = \frac{12 v_0 \cos\varphi}{l\left(3\cos^2\varphi + 1\right)}; \qquad v = \frac{3\cos^2\varphi - 1}{3\cos^2\varphi + 1} v_0 .$$

По условию должны получить $v = 0$, что дает $3\cos^2\varphi - 1 = 0$ или

$\varphi = \arccos\left(1/\sqrt{3}\right) = 54°44'$. Стержень начнет вращаться со скоростью $\omega = \sqrt{12}\, v_0 / l$. Заметим, что в частном случае $\varphi \approx 0$ будет $v \approx v_0/2$, $\omega \approx 3v_0/l$.

Неупругие столкновения

Задача 3.10

Математический маятник массы m и тонкий стержень массы M подвешены в одной и той же точке O, около которой они могут свободно колебаться (рис.3.14). Длина нити маятника равна длине стержня. Шарик маятника отклоняют в сторону так, что он приподнимается на высоту h относительно своего нижнего положения, и отпускают без начальной скорости. В нижней точке он неупруго сталкивается со стержнем. Как будут двигаться шарик и нижний конец стержня после удара и на какие высоты они поднимутся?

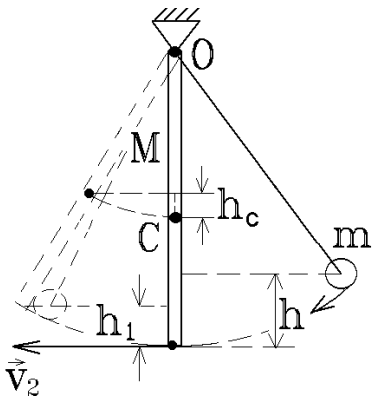

рис. 3.14

Решение

Непосредственно перед ударом шарик будет иметь скорость $v_0 = \sqrt{2gh}$ (как следует из сохранения энергии). Скорости шарика и нижнего конца стержня **сразу после удара будут одинаковы** (неупругий удар). Их можно найти из закона сохранения момента импульса системы:

$$mv_0 l = mvl + I\omega ,$$

где $I = M l^2/3$ – момент инерции стержня относительно оси O, l – длина нити маятника или длина стержня, v – скорость шарика, а $\omega = v/l$ – угловая скорость стержня **сразу после удара**. Из этого уравнения получим:

$$v = 3mv_0/(M+3m) = 3m\sqrt{2gh}/(M+3m). \qquad (3.29)$$

В момент удара маятник и стержень не слипаются. Чтобы определить, как они будут двигаться дальше, найдем порознь скорости шарика v_1 и нижнего конца стержня v_2 при подъеме на одну и ту же высоту h_1. Используем для этого законы сохранения энергий обоих тел:

$$mv^2/2 = mv_1^2/2 + mgh_1 , \qquad \text{откуда} \qquad v_1^2 = v^2 - 2gh_1;$$

$$I\omega^2/2 = I\omega_2^2/2 + Mgh_C , \qquad \text{откуда} \qquad v_2^2 = (\omega_2 l)^2 = v^2 - 3gh_1$$

(при этом учтено, что высота подъема центра масс стержня $h_C = h_1/2$).

Как следует из полученных формул, $v_2 < v_1$, т.е. шарик стремится дви-

гаться быстрее нижнего конца стержня. Поэтому они все время остаются в контакте, ведут себя как одно тело с моментом инерции $I_{\text{сист}} = ml^2 + Ml^2/3$, вращающееся вокруг оси O, и поднимаются на одну и ту же высоту h_1. Для нахождения этой высоты воспользуемся законом сохранения энергии системы **после** удара: $Mgh_C + mgh_1 = I_{\text{сист}}\omega^2/2$, где $\omega = v/l$. Используя формулу (3.29), находим окончательно:

$$h_1 = \frac{6m^2}{(M+2m)(M+3m)}h .$$

Сохранение момента импульса

Задача 3.11

В доску массы M, лежащую на гладком горизонтальном столе, попадает пуля массы m, летевшая перпендикулярно доске со скоростью v_0 и застревает в ней. Найти кинетическую энергию Q, перешедшую во внутреннюю энергию (теплоту) системы, если точка попадания пули находится на расстоянии $l/4$ от центра доски (l – длина доски). Шириной доски пренебречь.

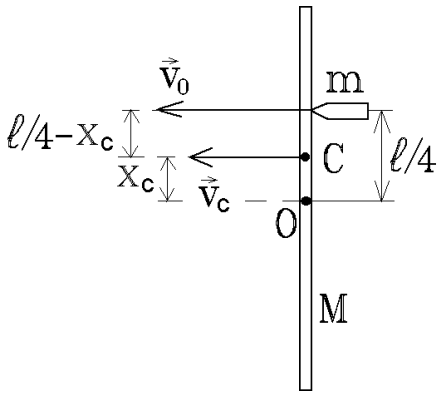

рис. 3.15

Решение

После попадания пули система «доска плюс пуля» совершает плоское движение. Центр ее масс C, находящийся на расстоянии $x_C = \dfrac{ml}{4(M+m)}$ от центра доски O (рис.3.15), движется со скоростью v_C, которая определяется законом сохранения импульса:

$$mv_0 = (M+m)v_C , \qquad \text{откуда} \qquad v_C = mv_0/(M+m) .$$

Одновременно доска вращается вокруг центра масс C с угловой скоростью ω, которая определяется законом сохранения момента импульса:

$$mv_0\left(\frac{l}{4} - x_C\right) = I\omega, \qquad \text{откуда} \qquad \omega = \frac{mMv_0 l}{4I(M+m)} ,$$

где момент инерции системы I вычисляется с помощью теоремы Штейнера:

$$I = I_{\text{доски}} + I_{\text{пули}} = \left(\frac{Ml^2}{12} + Mx_C^2\right) + m\left(\frac{l}{4} - x_C\right)^2 = \frac{\left(4M^2 + 7m^2 + 11Mm\right)l^2}{48(M+m)^2} .$$

Теперь можно вычислить искомую величину

$$Q=\frac{mv_0^2}{2}-\frac{(M+m)v_C^2}{2}-\frac{I\omega^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}\cdot\frac{4M(M+m)}{4M^2+7m^2+11Mm}.$$

Это и будет ответом для любого отношения масс пули и доски. Если же $m/M \ll 1$, то с точностью до малых первого порядка из общего ответа получим: $Q\approx(1-7m/4M)mv_0^2/2$.

Задача 3.12

Какой точкой меча или тяжелого лома следует бить по столбу, чтобы рука не чувствовала отдачи, и меч не вырвало из пальцев?

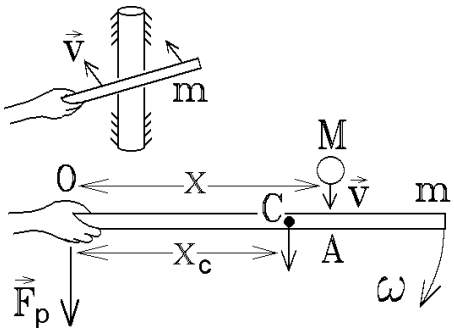

рис. 3.16

Решение

В момент удара кисть руки не вращается, и тяжелый меч можно рассматривать как стержень длины l и массы m, движущийся поступательно со скоростью v и при ударе застревающий в столбе.

Сформулируем эквивалентную задачу: в системе отсчета, где меч неподвижен, с ним неупруго соударяется тело массы M, представляющее собой столб и летящее со скоростью v. Удар происходит в точке A на расстоянии x от руки (рис.3.16). Сила реакции $F_\text{р}$ меняет импульс системы за время удара на величину

$$\Delta p=\int F_\text{р}dt=(M+m)u_C-Mv, \qquad (3.30)$$

где u_C – скорость центра масс системы, находящегося на расстоянии $x_C=(Mx+ml/2)/(M+m)$ от конца стержня O. Момент силы $F_\text{р}$ относительно точки ее приложения равен нулю, и можно использовать закон сохранения момента импульса: $Mv\cdot x=I_0\omega$, (3.31)

где $I_0=Mx^2+ml^2/3$ – момент инерции, а ω – угловая скорость вращения системы вокруг точки O после удара. Нетрудно заметить, что $u_C=\omega x_C$, а так как по условию сила реакции $F_\text{р}=0$, то из уравнений (3.30) и (3.31) находим: $\omega=\dfrac{Mv}{(M+m)x_C}=\dfrac{Mvx}{I_0}$ или $\dfrac{Mv}{Mx+ml/2}=\dfrac{Mvx}{Mx^2+ml^2/3}$.

Из полученного соотношения следует $x=2l/3$ – приблизительно на таком расстоянии от кисти руки надо бить тяжелым стержнем по предмету, чтобы не чувствовать силу отдачи. Заметим, что масса M предмета в ответ не вошла, будь то тяжелый столб $(M\gg m)$ или прутик $(M\ll m)$.

Легко вычислить, что скорость точки A после удара $u_A = \omega x \to v$ при $M \gg m$, т.е. массивный столб после удара останется неподвижным, а рука продолжит движение с прежней скоростью v.

Задача 3.13

Математический маятник длины l отвели на угол θ от вертикали, проходящей через точку подвеса. С какой скоростью v_0 надо толкнуть маятник в горизонтальном направлении перпендикулярно нити, чтобы в наивысшей точке траектории он отклонился от вертикали на угол $90°$ (рис.3.17)?

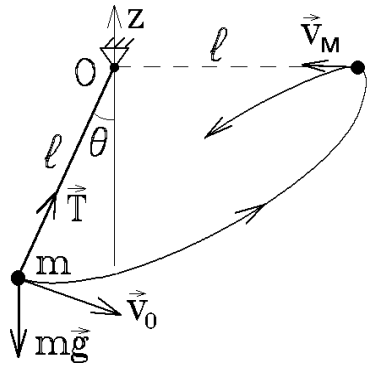

рис. 3.17

Решение

Две действующие на маятник силы (тяжести $m\vec{g}$ и натяжения нити $\vec{T}$) меняют и импульс, и момент импульса. Но суммарный момент сил относительно точки подвеса O совпадает с моментом силы тяжести и направлен горизонтально. Проекция момента сил на вертикальную ось z равна нулю, и можно записать закон сохранения проекции момента импульса на эту ось:

$$L_Z = mv_0 \cdot l \sin\theta = mv_M l = \text{const}. \qquad (3.32)$$

Скорость v_M маятника в верхней точке минимальна и определяется из закона сохранения энергии:

$$mv_0^2/2 = mv_M^2/2 + mgh, \qquad \text{где} \qquad h = l\cos\theta. \qquad (3.33)$$

Исключая v_M из уравнений (3.32) и (3.33), находим $v_0 = \sqrt{2gl/\cos\theta}$.

Законы сохранения при плоском движении

Задача 3.14

На идеально гладком полу стоит вертикальный стержень длины l. Равновесие, в котором находится стержень, неустойчивое, и он падает. Определить траекторию движения верхней точки стержня во время падения и скорость, которую будет иметь верхняя точка стержня в момент падения его на пол.

Решение

Из закона поступательного движения стержня (в проекциях на координатные оси x и y, рис.3.18). $ma_{Cx} = 0$, $ma_{Cy} = N - mg$.

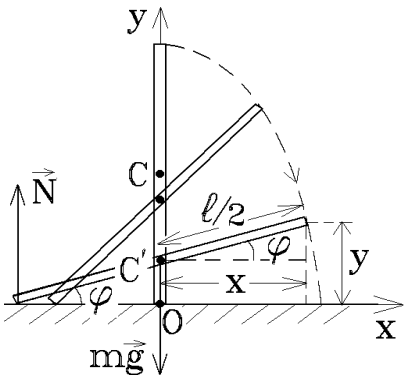

рис. 3.18

следует, что **центр масс *C* движется по вертикали** ! В момент, когда падающий стержень образуют угол φ с горизонталью, координаты его верхнего конца, обозначенные на рис.3.18, имеют значения $x = (l/2)\cos\varphi$,

$y = l\sin\varphi$. Исключая из этих равенств φ, находим уравнение траектории: $4x^2/l^2 + y^2/l^2 = 1$ – это уравнение эллипса с полуосями $l/2$ и l.

Стержень совершает плоское движение, вращаясь вокруг оси, проходящей через точку *C*. Его полная энергия сохраняется:

$$mgl/2 = mv_C^2/2 + I\omega^2/2 + mgy_C, \qquad (3.34)$$

где $I = ml^2/12$ – момент инерции относительно оси, проходящей через точку *C*, $\omega = d\varphi/dt$ – угловая скорость вращения вокруг этой оси, $y_C = OC = (l/2)\sin\varphi$ – высота центра масс, а $v_C = dy_C/dt = (l/2)\omega\cos\varphi$ – скорость движения центра масс.

В момент падения $\varphi = \pi/2$, $\cos\varphi = 1$, $y_C = 0$ и $v_C = l\omega/2$, поэтому из закона сохранения энергии (3.34) следует, что в момент падения угловая скорость вращения стержня имеет величину $\omega_{\text{пад}} = \sqrt{3g/l}$, а скорость верхнего конца стержня, направленная в этот момент по вертикали,

$$v_{\text{пад}} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(l\sin\varphi) = \omega_{\text{пад}}\, l = \sqrt{3gl}\ .$$

Задача 3.15

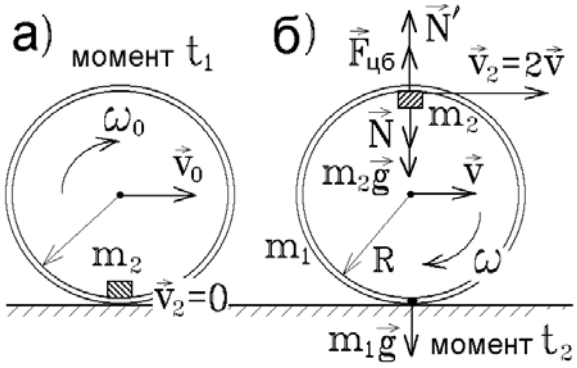

рис. 3.19

На внутренней поверхности тонкого жесткого обруча радиуса R и массы m_1, который катится без скольжения по горизонтальной плоскости, закреплено небольшое тело массы m_2. Какую скорость должен иметь центр обруча в тот момент, когда тело m_2 находится в нижнем положении, чтобы обруч подпрыгивал, когда тело m_2 будет находиться в верхнем положении?

Решение

При качении обруча без проскальзывания силы трения работу не совершают, и энергия системы сохраняется:

$$m_1v_0^2/2 + I\omega_0^2/2 = m_1v^2/2 + I\omega^2/2 + m_2v_2^2/2 + m_2gh. \qquad (3.35)$$

Здесь v_0 и $\omega_0 = v_0/R$ – скорости поступательного и вращательного движения обруча в тот момент времени t_1, когда тело m_2 находится в нижней неподвижной точке касания с плоскостью и не имеет скорости (рис.3.19,а). v и $\omega = v/R$ – соответствующие скорости обруча в другой момент времени t_2,

когда тело m_2 оказывается в верхней точке, поднимаясь на высоту $h = 2R$, и двигаясь со скоростью $v_2 = v + \omega R = 2v$ (рис.3.19,б). Момент инерции обруча $I = m_1 R^2$. Подставляя все эти соотношения в формулу (3.35), находим связь наибольшей v_0 и наименьшей v скорости обруча при качении:

$$m_1 v_0^2 = (m_1 + 2m_2)v^2 + 2m_2 gR \quad \text{или} \quad v_0 = \sqrt{\frac{(m_1 + 2m_2)v^2 + 2m_2 gR}{m_1}}. \qquad (3.36)$$

Тот факт , что скорость v в момент t_2 минимальна, означает отсутствие ускорения обруча в этот момент: $a = dv/dt = 0$. Поэтому в связанной с обручем системе отсчета единственной силой инерции, действующей на тело m_2 в момент t_2, будет центробежная сила инерции

$$F_{\text{цб}} = m_2 \omega^2 R = m_2 v^2 / R .$$

Эта сила, вместе с силой тяжести $m_2 \vec{g}$, уравновешивает силу реакции $\vec{N}$, с которой обруч действует на тело m_2 (рис.3.19,б):

$$N = F_{\text{цб}} - mg = m_2 \left(v^2 / R - g \right).$$

В свою очередь, тело m_2 действует на обруч с такой же по величине силой $\vec{N}'$, направленной вертикально вверх. Если эта сила превысит силу тяжести $m_1 \vec{g}$, то обруч подпрыгнет над плоскостью. Искомым условием подпрыгивания будет

$$N' = N = m_2 \left(v^2 / R - g \right) > m_1 g, \quad \text{откуда} \quad v^2 > R\,g\left(m_1/m_2 + 1\right). \qquad (3.37)$$

Подставляя условие (3.37) в формулу (3.36), находим окончательно:

$$v_0 > \sqrt{Rg\left(m_1/m_2 + 4m_2/m_1 + 3\right)}.$$

Заметим, что в частном случае $m_1 = m_2$ получим $v_0 > \sqrt{8Rg}$

Задача 3.16

Обруч радиуса r свободно скатывается без начальной скорости с вершины неподвижной цилиндрической поверхности радиуса $R > r$. В какой точке поверхности начнется скольжение обруча, если коэффициент трения $\mu = 0,5$?

Решение

Обруч массы m совершает плоское движение, которое описывается системой уравнений поступательного движения центра масс C и вращательного движения вокруг оси C (первое из них запишем в проекциях на касательную и нормаль к траектории центра масс):

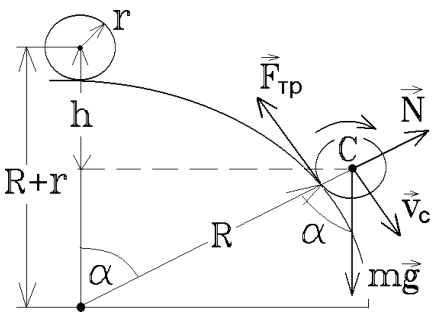

рис. 3.20

$$ma_\tau = mg\sin\alpha - F_{тр},$$

$$ma_n = \frac{mv_C^2}{R+r} = mg\cos\alpha - N, \qquad (3.38)$$

$$I\varepsilon = F_{тр}r.$$

Сначала происходит качение обруча без скольжения, условием которого является соотношение $v_C = \omega r$, откуда $a_\tau = dv_C/dt = r(d\omega/dt) = r\varepsilon$. Поэтому из первого и третьего уравнений системы (3.38) (с учетом величины момента инерции обруча $I = mr^2$) находим:

$$F_{тр} = (mg/2)\sin\alpha\,. \qquad (3.39)$$

Далее, после уменьшения высоты центра масс обруча на h, из закона сохранения энергии $mgh = mv_C^2/2 + I\omega^2/2 = mv_C^2$

получаем выражение $v_C^2 = gh$, а из геометрических соображений (рис.3.20) – равенство $h = (R+r)(1-\cos\alpha)$. Это позволяет найти из второго уравнения системы (3.38) зависимость реакции опоры N от угла α:

$$N = mg(2\cos\alpha - 1)\,. \qquad (3.40)$$

Из формул (3.39) и (3.40) видно, что величина силы трения $F_{тр}$ растет, а сила реакции N – уменьшается с ростом угла α. Скольжение обруча начнется, очевидно, при условии $F_{тр} = (F_{тр})_{max} = \mu N$.

Подставляя в это условие выражения (3.39), (3.40), и решая полученное тригонометрическое уравнение $\sin\alpha = 2\cos\alpha - 1$, находим значение угла $\alpha = \arccos(0,8) = 36°52'$, при котором обруч начнет скользить.

Отрыв обруча от поверхности произойдет при условии $N = 0$, или, с учетом формулы (3.40), при угле $\alpha = \arccos(0,5) = 60°$.

Движение в гравитационном поле

Задача 3.17

Оценить силу сопротивления, испытываемую спутником с поперечным сечением $S = 0,1$ м^2 и массой $m = 10$ кг, летящим на высоте $h = 200$ км. Как изменяются скорость спутника и его высота за один оборот вокруг Земли? Плотность атмосферы на этой высоте $\rho \approx 1,6\cdot10^{-11}$ кг/м^3. Масса Земли $M = 5,98\cdot10^{24}$ кг, ее радиус $R = 6370$ км.

Решение

Спутник движется по круговой орбите радиуса $r = R + h$. Его скорость можно определить из уравнения движения $mv^2/2 = GmM/r^2$, где G – гравитационная постоянная. Отсюда $v = \sqrt{GM/r}$. (3.41)

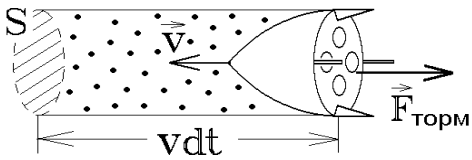

рис. 3.21

За время dt спутник столкнется с молекулами воздуха в объеме $Svdt$ (рис.3.21), и в значительной степени увлечет их за собой, сообщив им скорость v направленного движения. Если масса молекулы воздуха $m_{\text{м}}$, а их концентрация n, то движение будет вовлечено $\sim nSvdt$ молекул, которые приобретут импульс $dp \approx (m_{\text{м}} nSvdt) \cdot v = \rho Sv^2 dt$. Спутник теряет такой же импульс, и действующая на него сила сопротивления

$$F_{\text{сопр}} = dp/dt \approx \rho Sv^2 = \rho SGM/(R+h) \approx 10^{-4}\,\text{Н}.$$

Соотношение (3.41) позволяет выразить механическую энергию спутника либо через радиус орбиты, либо через скорость:

$$E = mv^2/2 - GmM/r = -GmM/2r \qquad \text{или} \qquad E = -mv^2/2. \qquad (3.42)$$

Отрицательный знак полной энергии в гравитационных задачах смущать не должен – к потенциальной энергии U можно добавить любую отрицательную **постоянную** величину. Энергию U гравитационного поля определяют так, что $U_{\text{грав}} \le 0$, чем объясняется знак E.

За один оборот спутника вокруг Земли его энергия должна уменьшиться на величину, равную работе неконсервативной силы сопротивления:

$$\Delta E = -F_{\text{сопр}} \cdot 2\pi r \approx -2\pi(R+h)\rho Sv^2 \approx -4 \cdot 10^3\ \text{Дж}.$$

Так как $|\Delta E| \ll |E|$, то вычисляя производные от формул (3.42) можно найти изменения высоты и скорости спутника за один оборот:

$$\Delta E/\Delta r \approx dE/dr = GmM/2r^2 \quad \text{и} \quad \Delta E/\Delta v \approx dE/dv = -mv.$$

Высота спутника будет уменьшаться за один оборот на

$$\Delta h = |\Delta r| \approx 2(R+h)^2 |\Delta E|/GmM = 86\ \text{м},$$

а его скорость возрастает на $\Delta v \approx |\Delta E|/(mv) = 5{,}15$ см/с (хотя спутник теряет импульс при столкновении с молекулами, его скорость растет, так как при падении потенциальная энергия переходит в кинетическую).

Совершая один оборот за время $2\pi(R+h)/v =$ 1 час 28 мин, спутник за сутки опустится на 1,4 км!

Задача 3.18

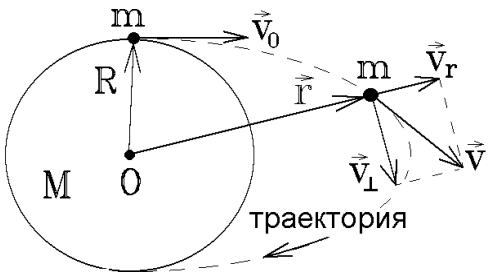

рис. 3.22

С поверхности планеты радиуса R и массы M в горизонтальном направлении запускают снаряд, начальная скорость v_0 которого составляет 80% от второй космической скорости для данной планеты (рис.3.22). На какое максимальное расстояние r от центра планеты удалится снаряд и какую наименьшую скорость он будет иметь во время полета? Атмосферы у планеты нет, и ее вращение не учитывать.

Решение

Разложим вектор скорости снаряда в произвольной точке траектории на две составляющие: $\vec{v}_r$ направлена вдоль прямой линии, соединяющей снаряд с центром планеты O, а $\vec{v}_\perp$ – в перпендикулярном направлении (рис.3.22). Очевидно, что $v^2 = v_r^2 + v_\perp^2$.

Так как по условию начальная скорость $v_0 = 4v_{\text{II}}/5$, где $v_{\text{II}} = \sqrt{2GM/R}$, то $GM/R = (5v_0)^2/32$, и в момент запуска энергия $E = mv_0^2/2 - GMm/R = -9mv_0^2/32$, а момент импульса $L_0 = mv_0 \cdot R$.

Снаряд движется в плоскости, в которой лежит центр O, и при движении выполняются законы сохранения энергии и момента импульса:

$$E = mv^2/2 - GMm/r = -9mv_0^2/32, \quad \text{откуда} \quad v^2 = v_0^2\left(25R/r - 9\right)/16, \qquad (3.43)$$

$$L_0 = \left|\left[\vec{r}, m\vec{v}\right]\right| = mv_\perp r = mv_0 R, \qquad \text{откуда} \qquad v_\perp^2 = \left(v_0 R\right)^2/r^2. \qquad (3.44)$$

Из уравнений (3.43) и (3.44) легко определить $v_r^2 = v^2 - v_\perp^2 = v_0^2\left(25R/16r - 9/16 - R^2/r^2\right)$, а так как в точке максимального удаления $v_r = dr/dt = 0$, то получаем простое алгебраическое уравнение для определения $r_{\max}$:

$$9r^2 - 25Rr + 16R^2 = 0,$$

решением которого будет $r = r_{\max} = 16R/9$ (второй корень $r = R$ соответствует начальной точке траектории, где также $v_r = 0$).

На этом удалении снаряд имеет наименьшую скорость, которую находим из формулы (3.44): $v_{\min} = \dfrac{v_0}{4}\sqrt{\dfrac{25R}{r_{\max}} - 9} = \dfrac{9}{16}v_0 = \dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{2GM}{R}} = \dfrac{3}{5}v_{\text{II}}$.

Глава 4

Колебания

Гармонические незатухающие колебания.

<u>Задача 4.1</u>

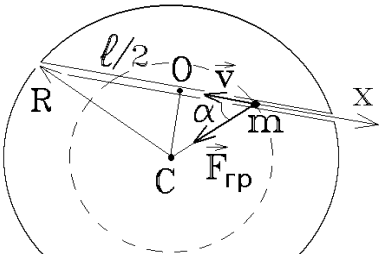

рис. 4.1

Как будет двигаться тело под действием силы тяжести в гипотетическом туннеле, прорытом вдоль одной из хорд земного шара? Трением пренебречь. Сколько времени оно затратит на прохождение туннеля длиной l?

Решение

Направим ось x вдоль туннеля, а ее начало O выберем в центре туннеля (рис.4.1). На тело массы m, находящееся в точке A будет действовать гравитационная сила притяжения, направленная к центру Земли C, и имеющая величину $F_{\text{гр}} = GM'm/r^2$, где $r = CA$ – расстояние от центра Земли, а M' – масса шара с радиусом r, отмеченного на рис. 4.1 штриховой линией, G – гравитационная постоянная. Если считать Землю однородным шаром с массой M и радиусом $R = 6370\,\text{км}$, то $M' = M\left(r/R\right)^3$ (масса шара пропорциональная его объему). Кроме того учтем, что на поверхности Земли $g = GM/R^2 = 9{,}81$ м/с^2. Тогда $F_{\text{гр}} = GMmr/R^3 = mgr/R$. Запишем уравнение движения тела в проекции на ось x и учтем, что $x = r\cos\alpha$ (рис. 4.1):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{гр}\,x} = -F_{\text{гр}}\cos\alpha = -\frac{mgx}{R}, \quad \text{откуда} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{R}x = 0. \qquad (4.1)$$

Уравнение (4.1) является уравнением гармонических незатухающих колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{g/R}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{R/g}$. При сделанных выше предположениях этот результат от длины туннеля не зависит. Сквозь любой туннель, хотя бы прорытый сквозь центр Земли, тело, отпущенное с нулевой начальной скоростью, пролетит за время $\tau = T/2 = \pi\sqrt{R/g} = 42{,}2\,\text{мин}$. Если в момент $t = 0$ тело находится на поверхности Земли, то закон его движения или решение уравнения (4.1) имеет вид:

$$x = \left(l/2\right)\cos\left(\sqrt{R/g}\,t\right).$$

Максимальной скорости тело достигнет в центре O туннеля:

$v_{\max} = \left|\frac{dx}{dt}\right|_{t=T/4} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{g}{R}} = \frac{l}{2R}v_{\mathrm{I}}$, где $v_{\mathrm{I}} = 7{,}91$ км/с – первая космическая скорость.

Задача 4.2

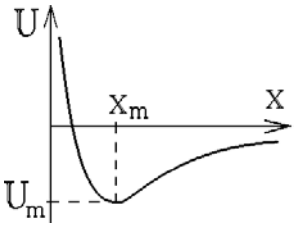

рис. 4.2

Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия, если известно, что она находится в потенциальном поле $U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$, где x – координата, а a и b – некоторые положительные постоянные.

Решение

Положение равновесия частицы соответствует минимуму потенциальной энергии в точке с координатой x_{m} (рис. 4.2), для которой $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_{\mathrm{m}}} = -\frac{2a}{x_{\mathrm{m}}^3} + \frac{b}{x_{\mathrm{m}}^2} = 0$, откуда $x_{\mathrm{m}} = \frac{2a}{b}$.

Разложим функцию $U(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x = x_{\mathrm{m}}$:

$$U(x) = \underbrace{U(x_{\mathrm{m}})}_{=\mathrm{const}} + \underbrace{\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_{\mathrm{m}}}}_{=0} \cdot (x - x_{\mathrm{m}}) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_{\mathrm{m}}} \cdot (x - x_{\mathrm{m}})^2 + O\left((x - x_{\mathrm{m}})^3\right). \quad (4.2)$$

При малых отклонениях от положения равновесия можно пренебречь слагаемыми высших порядков малости для переменной $(x - x_{\mathrm{m}})$. После вычисления коэффициента $\left.\frac{1}{2!}\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_{\mathrm{m}}} = \frac{1}{x_{\mathrm{m}}^3}\left(\frac{3a}{x_{\mathrm{m}}} - b\right) = \frac{b^4}{16a^3}$ формула (4.2) перепишется как : $U(x) = \mathrm{const} + \left(b^4/16a^3\right)(x - x_{\mathrm{m}})^2$.

Тогда сила, действующая на частицу, имеет проекцию $F_x = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{b^4}{8a^3}(x - x_{\mathrm{m}})$, а уравнение движения $m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x$ преобразуется к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b^4}{8ma^3}x = \frac{b^4 x_{\mathrm{m}}}{8ma^3}.$$

Это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{b^4/\left(8ma^3\right)}$ и с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi a}{b^2}\sqrt{2ma}$.

Задача 4.3

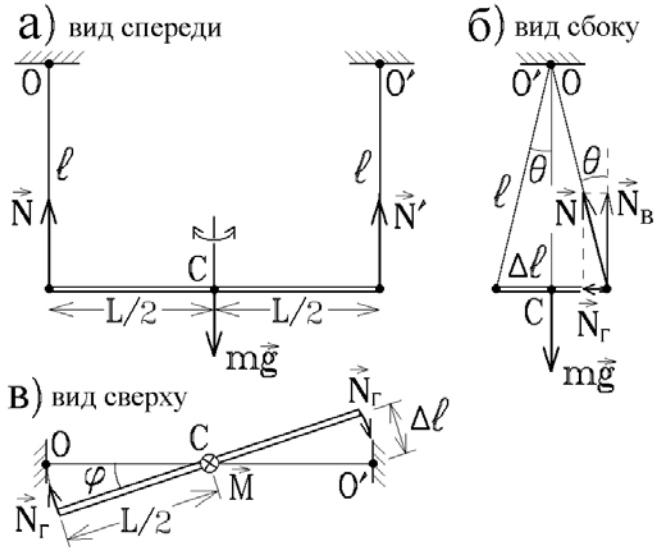

рис. 4.3

Тонкий стержень подвешен горизонтально на двух невесомых вертикальных нитях длины l, прикрепленных к концам стержня (рис. 4.3,а). Найти период T малых колебаний стержня вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину.

Решение

При закручивании каждая из нитей отклоняется от вертикали на малый угол θ (рис. 4.3,б), и сила натяжения $\vec{N}$ нити имеет горизонтальную $N_г = N\sin\theta \approx$ $\approx N\theta$ и вертикальную $N_в = N\cos\theta \approx N$ составляющие. Смещение стержня по вертикали $\Delta h = l(1-\cos\theta) \approx l\theta^2/2$ практически отсутствует из-за малости угла θ. Горизонтальные же составляющие сил натяжения двух нитей создают момент сил $M = 2N_г \cdot (L/2)$, возвращающий стержень в положение равновесия (рис. 4.3,в). Поэтому уравнение вращательного движения стержня в горизонтальной плоскости имеет вид

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -M = -N\theta \cdot L, \qquad (4.3)$$

где L – длина стержня, $I = mL^2/12$ – момент его инерции относительно оси C, m – масса стержня. Подставляя N из условия равновесия вертикальных проекций сил, $2N = mg$, перепишем уравнение (4.3) как

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{6g}{L}\theta = 0. \qquad (4.4)$$

Но из треугольников на рис. 4.3,б и 4.3,в видно, что $\Delta l \approx l \cdot \theta = L\varphi/2$, т.е. $\theta = L\varphi/2l$ и уравнение (4.4) приобретает вид уравнения незатухающих гармонических колебаний $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{3g}{l}\varphi = 0$ с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{3g/l}$ и периодом $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/3g}$.

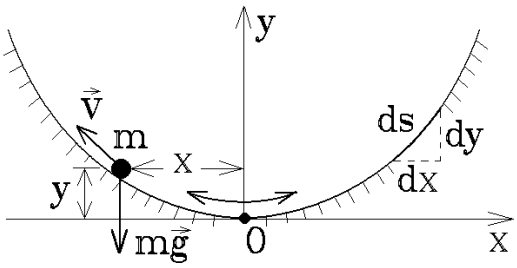

рис. 4.4

Задача 4.4

Частица массы m совершает гармонические колебания, скользя по желобу без трения (рис.4.4). При какой форме желоба период таких колебаний не зависит от амплитуды?

Решение

Механическая энергия частицы сохраняется:

$$E = \frac{m\dot{s}^2}{2} + mgy = \text{const}, \qquad (4.5)$$

где s – путь, проходимый частицей от точки равновесия O, $v = \dot{s}$ – ее скорость. Чтобы колебания были гармоническими, необходима квадратичная зависимость высоты подъема y от пройденного пути: $y = ks^2/2$.

Действительно, подставив эту связь в формулу (4.5) и вычислив производную по времени от обеих частей, получим $m\dot{s}\left(\ddot{s} + kgs\right) = 0$, откуда следует уравнение гармонических колебаний $\ddot{s} + \omega^2 s = 0$ с частотой $\omega = \sqrt{k\,g}$, справедливое при любом отклонении s от положении равновесия!

Приращение пути при этом $ds = d\left(\sqrt{2y/k}\right) = dy/\sqrt{2ky} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ (рис. 4.4). Разделяем переменные в последнем уравнении, $dx = \sqrt{(1/2ky) - 1}\,dy$, и проинтегрируем его. Для вычисления интеграла сделаем замену переменной $y = \frac{1}{2k}\sin^2\frac{\varphi}{2}$. Тогда $\sqrt{(1/2ky) - 1} = \text{ctg}(\varphi/2)$;

$dy = \frac{1}{2k}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$ и $x = \frac{1}{2k}\int\cos^2\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{1}{4k}\int(1 + \cos\varphi)d\varphi = \frac{1}{4k}(\varphi + \sin\varphi)$.

Постоянная интегрирования равна нулю ввиду начальных условий: $x = y = 0$ при $\varphi = 0$. Таким образом поперечное сечение желоба должно иметь форму кривой, которая зависит от параметра φ следующим образом:

$$x = (\varphi + \sin\varphi)/(4k); \qquad y = (1 - \cos\varphi)/(4k).$$

Это – уравнение **циклоиды**.

Собственные затухающие колебания

Задача 4.5

Речное судно с площадью горизонтального сечения на уровне ватерлинии S = 3000 м^2 совершает в воде малые вертикальные колебания с периодом T = 6 с. Амплитуда колебаний уменьшается в χ раз за время T. Счи-

тая, что затухание колебаний происходит из-за силы вязкого трения, пропорционального вертикальной скорости судна, вычислить массу m судна.

Решение

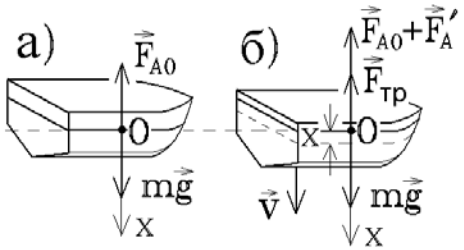

рис. 4.5

В положении равновесия (рис. 4.5,а) сила тяжести, действующая на судно, уравновешена силой Архимеда: $mg = \rho V_0 g = F_{A0}$, где V_0 – объем вытесненной воды, а $\rho = 1000$ кг/м^3 – ее плотность. Но стоит судну опуститься на малое расстояние x (рис. 4.5,б), как объем вытесненной воды возрастает на $\Delta V = S\,x$, а возвращающая судно в положение равновесия архимедова сила возрастает на $F_A' = \rho S\,x\,g$. Уравнение динамики вертикального движения

$$m\ddot{x} = \underbrace{mg - F_{A0}}_{=0} - F_A' - F_{тр}, \qquad (4.6)$$

где $F_{тр} = \eta\dot{x}$ – сила трения, η – некоторая константа.

Уравнение (4.6) приводится к стандартному виду уравнения собственных затухающих колебаний $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, где коэффициент затухания $\beta = \eta/2m$, $\omega_0^2 = \rho g S/m$. Амплитуда таких колебаний $A_0 e^{-\beta t}$ за время T уменьшится по условию χ раз, т.е. $A_0 e^{-\beta T} = A_0/\chi$, откуда $\beta = (\ln\chi)/T$.

Период затухающих колебаний $T = 2\pi\Big/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, что дает

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \beta^2 = \frac{4\pi^2 + \ln^2\chi}{T^2} = \frac{\rho g S}{m} \quad \text{и} \quad m = \frac{\rho g S T^2}{4\pi^2 + \ln^2\chi} = 2{,}48\cdot 10^4 \text{ т}.$$

<u>Задача 4.6</u>

Маятник совершает малые колебания в жидкой среде, для которой логарифмический декремент затухания $\theta_1 = 1{,}5$. Каким будет значение θ_2, если сопротивление среды увеличить в $n = 2$ раза? Во сколько раз следует увеличить сопротивление среды, чтобы колебания стали невозможны?

Решение

Коэффициент затухания колебаний β пропорционален вязкости среды, т.е. пропорционален ее сопротивлению. При увеличении сопротивления в n раз во столько же раз возрастает коэффициент β: $\beta_2 = n\beta_1$. А так как логарифмический декремент затухания пропорционален периоду затухающих колебаний, $\lambda = \beta T = 2\pi\beta\Big/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, то

$$\omega_0^2 = \underbrace{\beta_1^2\left(1+\frac{4\pi^2}{\lambda_1^2}\right)}_{\text{в первой среде}} = \underbrace{\left(n\beta_1\right)^2\left(1+\frac{4\pi^2}{\lambda_2^2}\right)}_{\text{во второй среде}}.$$

Отсюда находим $$\lambda_2 = \frac{2\pi n\lambda_1}{\sqrt{4\pi^2-\left(n^2-1\right)\lambda_1^2}} = 3{,}29\ .$$

Чтобы колебания прекратились, коэффициент затухания β следует увеличить до критического значения $\beta_{\text{кр}} = \omega_0 = \beta_1\sqrt{1+4\pi^2/\lambda_1^2}$, т.е. увеличить сопротивление среды в $n_2 = \sqrt{1+4\pi^2/\lambda_1^2} = 4{,}31$ раз .

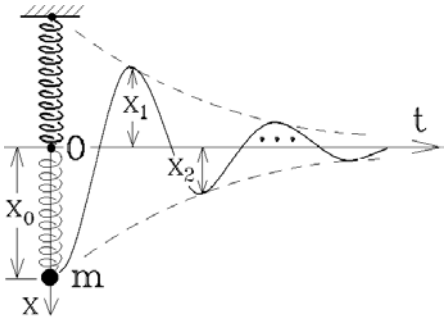

рис. 4.6

Задача 4.7

Логарифмический декремент затухания вертикальных колебаний грузика пружинного маятника в некоторой вязкой среде $\lambda = 0{,}1$. Грузик маятника отвели на расстояние $x_0 = 1$ см от положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Какой путь S он проделает до остановки?

Решение

Вертикальное отклонение от положения равновесия и скорость грузика будут меняться во времени по закону

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi);$$
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\beta Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi) - \omega Ae^{-\beta t}\sin(\omega t+\varphi), \qquad (4.7)$$

где ω – собственная частота затухающих колебаний, β – коэффициент затухания. В начальный момент $v\big|_{t=0} = 0$, что приводит к соотношению $-\beta\cos\varphi - \omega\sin\varphi = 0$ или $\operatorname{tg}\varphi = -\beta/\omega$.

Максимального отклонения $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (рис.4.6) грузик будет достигать в те моменты времени, когда его скорость $v = 0$ или, согласно той же формуле (4.7), при $\operatorname{tg}(\omega t+\varphi) = -\beta/\omega$. Отсюда следует $\omega t+\varphi = \operatorname{arctg}(-\beta/\omega)+\pi n$ и $t = \pi n/\omega = Tn/2$, где T – период затухающих колебаний, $n = 1, 2, 3, \ldots$ – целое число.

В эти моменты времени $x(t) = Ae^{-\beta Tn/2}\cos(\pi n+\varphi) = \pm(A\cos\varphi)e^{-\beta Tn/2}$.

Но начальное смещение грузика $x\big|_{t=0} = A\cos\varphi = x_0$, а $\beta T = \lambda$. Поэтому величины максимальных отклонений грузика $x_n = x_0 e^{-\lambda n/2}$.

Из рис. 4.6 видно, что грузик проделает путь x_0, потом дважды (вверх и вниз) путь x_1 и т.д. Суммарный путь, пройденный грузиком можно представить в виде геометрической прогрессии:

$$S = x_0 + 2x_1 + 2x_2 + \ldots = 2x_0 + 2x_0 e^{-\lambda/2} + 2x_0\left(e^{-\lambda/2}\right)^2 + 2x_0\left(e^{-\lambda/2}\right)^3 + \ldots - x_0 =$$

$$= 2x_0 \frac{\left(e^{-\lambda/2}\right)^{\infty} - 1}{e^{-\lambda/2} - 1} - x_0 = x_0 \frac{1 + e^{-\lambda/2}}{1 - e^{-\lambda/2}} = 40 \text{ см}.$$

Задача 4.8

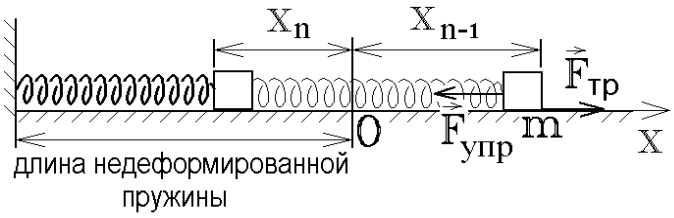

рис. 4.7

На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения $\mu = 0{,}1$ лежит брусок массы $m = 0{,}5$ кг, соединенный горизонтальной недеформированной пружиной со стенкой. Жесткость пружины $k = 2{,}4$ Н/см, а ее масса пренебрежимо мала. Брусок сместили на $x_0 = 3$ см и отпустили без начальной скорости. Спустя какое время τ движение бруска прекратится?

Решение

После начала движения брусок движется вдоль оси x (рис. 4.7) в соответствии с уравнением

$$m\ddot{x} = F_{\text{упр}\,x} + F_{\text{тр}\,x} = -kx + \mu mg \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu g, \tag{4.8}$$

где $\omega_0^2 = k/m$. Общее решение уравнения гармонических колебаний (4.8) имеет вид $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \alpha$, где $\alpha = \mu g/\omega_0^2 = \mu mg/k$. Неизвестные постоянные A и φ определяем из начальных условий:

$$x\big|_{t=0} = A\cos\varphi + \alpha = x_0, \quad \dot{x}\big|_{t=0} = -A\omega_0 \sin\varphi = 0,$$

откуда следует, что $\varphi = 0$ и $A = x_0 - \alpha$, т.е.

$$x(t) = (x_0 - \alpha)\cos(\omega_0 t) + \alpha.$$

Такие колебания не симметричны. Скорость бруска $\dot{x} = -\omega_0(x_0 - \alpha)\sin\omega_0 t$ станет равной нулю в последующий момент времени $t_1 = \pi/\omega_0$. В этот момент брусок достигнет максимального отклонения в противоположную от

положения равновесия O сторону: $x_1 = \left|\left(x_0 - \alpha\right)\cos\omega_0 t_1 + \alpha\right| = x_0 - 2\alpha$. Затем движение повторится в обратную сторону, и брусок отклонится на максимальное расстояние $x_2 = x_1 - 2\alpha = x_0 - 4\alpha$ в момент $t_2 = 2\pi/\omega_0$ и т.д.

Этот результат для амплитуды смещения можно получить и из закона сохранения энергии. В двух последовательных точках максимального отклонения на расстояния x_{n-1} и x_n (рис. 4.7) брусок не имеет скорости. Изменение потенциальной энергии растянутой пружины равно работе неконсервативной силы трения скольжения: $\dfrac{k\,x_{n-1}^2}{2} - \dfrac{k\,x_n^2}{2} = \mu mg\left(x_{n-1} + x_n\right)$, откуда $x_n = x_{n-1} - 2\mu mg/k = x_{n-1} - 2\alpha$ или $x_n = x_0 - 2n\alpha$.

В точке максимального отклонения сила трения меняет свое направление на противоположное. Но если в этой точке $\left|F_{\text{упр}}\right|_{\max} = kx_n < \mu mg$, то силы натяжения пружины недостаточно, чтобы заставить брусок скользить, и он останется неподвижным. Это произойдет при $x_n = x_0 - 2n\alpha =$ $= x_0 - 2\mu mgn/k < \mu mg/k$ или при $n > x_0 k/2\mu mg - 1/2 = 6{,}84$.
Брусок проделает семь последовательных смещений за время $\tau = 7\pi/\omega_0 =$ $= 7\pi\sqrt{m/k} = 1{,}00$ с и остановится на расстоянии $x_7 = x_0 - 14\mu mg/k =$ $= 1{,}39$ мм от положения равновесия. В этой точке его будет удерживать сила трения покоя $F_{\text{тр}} = kx_7 = 0{,}336$ Н.

Физический маятник

Задача 4.9

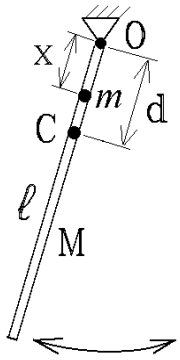

рис. 4.8

Из-за трения в оси подвеса малые колебания подвешенного за край тонкого стержня массы M = 300 г и длины $l = 1$ м происходят с затуханием. Груз массы m = 400 г, размерами которого можно пренебречь, прикрепляют к стержню так, чтобы период колебаний маятника стал минимальным (рис.4.8). Найти этот максимальный период колебаний, если логарифмический декремент их затухания $\lambda = 2$.

Решение

Из формул для периода собственных затухающих колебаний $T = 2\pi\Big/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ и его связи с логарифмическим декрементом затухания $\lambda = \beta T$ исключаем коэффициент затухания колебаний β:

$$T^2\left(\omega_0^2 - \beta^2\right) = T^2\omega_0^2 - \lambda^2 = 4\pi^2, \text{ откуда } T = \sqrt{\left(4\pi^2 + \lambda^2\right)\Big/\omega_0^2}. \qquad (4.9)$$

Пусть груз m прикреплен на расстоянии x от точки подвеса O. Тогда расстояние от точки подвеса до центра масс C системы $d = \left(mx + Ml/2\right)/\left(m + M\right)$, момент инерции системы относительно оси O складывается из моментов инерции груза и стержня $I = mx^2 + Ml^2/3$, а квадрат собственной частоты незатухающих колебаний такого физического маятника $\omega_0^2 = \left(m + M\right)gd/I = g\left(6mx + 3Ml\right)/\left(6mx^2 + 2Ml^2\right)$.

После подстановки соотношения $m = 4M/3$, заданного в условии, получим

$$\omega_0^2 = g\left(8x + 3l\right)/\left(8x^2 + 2l^2\right).$$

Условие экстремума $d\omega_0^2/dx = 0$ приводит к квадратному уравнению $4x^2 + 3lx - l^2 = 0$, подходящим корнем которого будет $x = l/4$. Нетрудно проверить, вычислив вторую производную от ω_0^2, что полученное значение x соответствует максимальной величине $\left(\omega_0^2\right)_{\max} = 2g/l$. Подставляя это значение в формулу (4.9) находим минимальное возможное значение периода колебаний $T_{\min} = \sqrt{l\left(4\pi^2 + \lambda^2\right)/2g} = 1{,}49$ с.

Задача 4.10

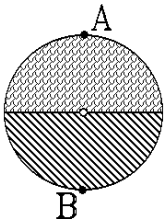

рис. 4.9

Диск состоит из двух половин, сделанных из разного материала. Масса верхнего полудиска в 4 раза больше массы нижнего полудиска. Каким будет отношение периодов колебаний диска вокруг осей, перпендикулярных к его плоскости и проходящих через точки A и B (рис. 4.9)

Решение

Чтобы найти период колебаний физического маятника, надо знать положение его центра масс C. Обозначим расстояние OC от центра диска как y, а расстояние $OC_1 = OC_2$ до центра масс каждого из полудисков как x_C (рис. 4.10).

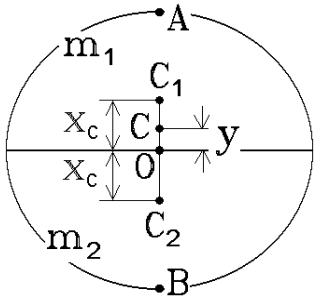

рис. 4.10

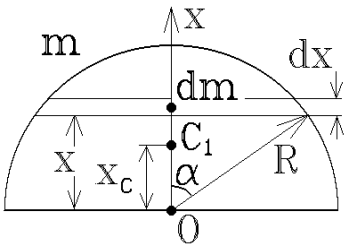

рис. 4.11

Расстояние z найдем, разделив однородный полудиск на бесконечно узкие полоски шириной dx, длиной $2R\sin\alpha$ с площадью $dS = 2R\sin\alpha\, dx$, где R – радиус диска (рис. 4.11). Так как $x = R\cos\alpha$, то $dS = -2R^2\sin^2\alpha\, d\alpha$. Масса полоски пропорциональна ее площади:

$$dm = mdS\Big/\left(\pi R^2/2\right) = -\frac{4}{\pi} m \sin^2\alpha\, d\alpha\,.$$

Тогда по определению координаты центра масс

$$x_C = \frac{\int xdm}{m} = \frac{4}{\pi} R \int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2} \cos\alpha\left(-\sin^2\alpha\right) d\alpha = \frac{4}{\pi} R \int\limits_0^1 \sin^2\alpha d\left(\sin\alpha\right) = \frac{4R}{3\pi}\,.$$

Координата центра масс всей системы

$$y = \frac{m_1 x_C - m_2 x_C}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\frac{4R}{3\pi} = \frac{4R}{5\pi}\,.$$

Момент инерции полудиска массы m_1 относительно оси O равен $I_{10} = \frac{1}{2} m_1 R^2$. По теореме Штейнера можно определить момент его инерции относительно оси, проходящей через его собственный центр масс C_1, и относительно оси, проходящей через точку C (рис. 4.10):

$$I_{10} = I_{1C_1} + m_1 x_C^2, \qquad I_{1C} = I_{1C_1} + m_1\left(x_C - y\right)^2.$$

Исключая из этих двух уравнений I_{1C_1}, находим

$$I_{1C} = I_{10} - m_1 x_C^2 + m_1\left(x_C - y\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 y^2 - 2m_1 x_C y = \frac{75\pi^2 - 224}{150\pi^2} m_1 R^2$$

Аналогично момент инерции второго диска относительно оси C:

$$I_{2C} = I_{20} - m_2 x_C^2 + m_2\left(x_C + y\right)^2 = \frac{75\pi^2 + 416}{150\pi^2} m_2 R^2\,.$$

Момент инерции всей системы $I_C = I_{1C} + I_{2C}$ относительно оси, проходящей через общий центр масс, позволяет вычислить момент инерции относительно осей подвеса A и B (опять используем теорему Штейнера):

$$I_A = I_C + \left(m_1 + m_2\right)\left(R - y\right)^2, \qquad I_B = I_C + \left(m_1 + m_2\right)\left(R + y\right)^2.$$

Периоды колебаний физического маятника относительно данных осей:

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{\left(m_1 + m_2\right) g\left(R - y\right)}}, \qquad T_B = 2\pi\sqrt{\frac{I_B}{\left(m_1 + m_2\right) g\left(R + y\right)}}.$$

Их отношение после подстановки всех вычисленных выше величин окажется равным

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{I_A\left(R + y\right)}{I_B\left(R - y\right)}} = \sqrt{\frac{\left(15\pi - 16\right)\left(5\pi + 4\right)}{\left(15\pi + 16\right)\left(5\pi - 4\right)}} = 0{,}911\,.$$

Вынужденные колебания

Задача 4.11

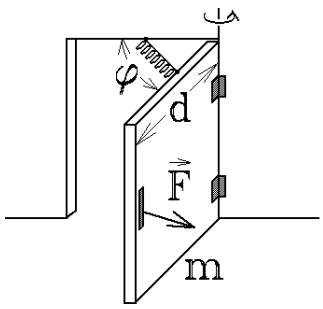

рис. 4.12

При открывании двери пружина создает квазиупругий момент сил, возвращающий ее в закрытое состояние. Чтобы удержать дверь открытой (повернутой на угол $\pi/2$) надо к ручке, перпендикулярно к плоскости двери, приложить постоянную силу $F = 50$ Н. Какой минимальной по величине силой можно открыть дверь на угол $\pi/2$, если масса двери $m = 15$ кг, ее ширина $d = 1$ м, а при вращении двери с угловой скоростью ω в ее петлях возникает момент сил трения $\vec{M}_{\text{тр}} = -\eta\vec{\omega}$, где $\eta = 0{,}075\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/(\text{рад}\cdot\text{с})$.

Решение

Подействуем на ручку двери перпендикулярной к плоскости гармонической силой с амплитудой F_0. Уравнение вынужденных колебаний двери будет уравнением динамики вращательного движения:

$$I\ddot{\varphi} = (F_0\cos\omega t)\cdot d - k\varphi - \eta\dot{\varphi}\,, \qquad (4.10)$$

где $I = md^2/3$ – момент инерции двери относительно оси вращения, Fd – момент приложенной силы, а коэффициент k в квазиупругом моменте сил можно найти из условия статического равновесия: $k\cdot\pi/2 = F\cdot d$, откуда $k = 2Fd/\pi$.

Уравнение (4.10) приводится к стандартному виду

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = (F_0 d/I)\cos\omega t\,,$$

где $\beta = \eta/(2I)$, $\omega_0^2 = k/I = 6F/(\pi md)$. Его решение $\varphi = A\cos(\omega t + \alpha)$, описывающее установившиеся вынужденные колебания, имеет амплитуду

$$A = \frac{F_0 d/I}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\,,$$

которая будет максимальной при совпадении частоты внешней силы с резонансной частотой $\omega = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. После подстановки находим этот максимальный угол отклонения двери, равный по условию $\pi/2$:

$$A_{\max} = F_0 d\Big/\left(2\beta I\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right) = \pi/2\,,\ \text{откуда}\ \ F_0 = \frac{\pi\beta I\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{d} =$$

$$= \frac{\pi\eta}{2d}\sqrt{\frac{6F}{\pi md} - \left(\frac{3\eta}{2md^2}\right)^2} \approx \frac{\eta}{d}\sqrt{\frac{3\pi F}{2md}} = 0,297 \text{ Н}.$$

Достаточно действовать на дверь гармонической силой с такой малой амплитудой $F_0 \ll F$, чтобы дверь приоткрылась на угол $\pi/2$. Но при этом период колебаний двери $T = 2\pi/\omega_{\text{рез}} \approx 2\pi/\omega_0 = \pi\sqrt{2\pi md/3F} = 2,5$ с не слишком велик, чтобы можно было спокойно пройти в приоткрываемую дверь.

Задача 4.12

Найти коэффициент затухания β и собственную частоту ω_0 колебаний осциллятора, если при действии на него внешней гармонической силы как с частотой ω_1, так и с частотой ω_2, амплитуда установившихся колебаний скорости осциллятора равна половине максимального значения.

Решение

Установившимися будут вынужденные колебания осциллятора, при которых его координата и скорость меняются по закону $x = A\cos(\omega t - \varphi)$, $v = dx/dt = -A\omega\sin(\omega t - \varphi)$, где $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$ – амплитуда вынужденных колебаний, ω – частота внешней силы, F_0 – амплитуда внешней силы, m – масса осциллятора, φ – начальная фаза колебаний. Амплитуда скорости $v_0 = A\omega = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left((\omega_0^2 - \omega^2)/\omega\right)^2 + 4\beta^2}}$ достигает максимального значения при $\omega = \omega_0$ (рис. 4.13). Это максимальное значение $v_{0\max} = F_0/(2\beta m)$.

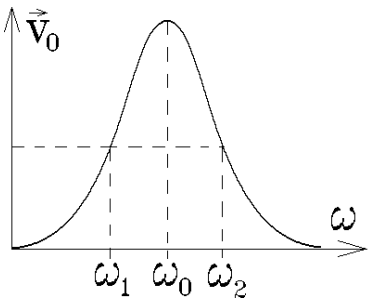

Рис. 4.13

Условие задачи $A(\omega_1)\cdot\omega_1 = A(\omega_2)\cdot\omega_2 = (v_{0\max})/2$ приводит к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_1^2 = (4\beta\omega_1)^2,\\ \left(\omega_0^2 - \omega_2^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_2^2 = (4\beta\omega_2)^2,\end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned}\omega_0^2 - \omega_1^2 = \sqrt{12}\beta\omega_1,\\ \omega_0^2 - \omega_2^2 = -\sqrt{12}\beta\omega_2\end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

(из рис. 4.13 видно, что $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$). Исключая из системы (4.11) величину ω_0^2, получим $\omega_2^2 - \omega_1^2 = \sqrt{12}\beta(\omega_1 + \omega_2)$, откуда $\beta = (\omega_2 - \omega_1)/2\sqrt{3}$.

Подставив полученное выражение для β, например, в первое уравнение системы (4.11), находим $\omega_0^2 = \omega_1^2 + \omega_1(\omega_2 - \omega_1) = \omega_1\omega_2$. Поэтому собственная частота затухающих колебаний осциллятора $\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_1\omega_2 - (\omega_2 - \omega_1)^2/12}$.

Колебания систем с несколькими степенями свободы

Задача 4.13

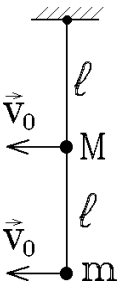

рис. 4.14

К тяжелому математическому маятнику массы M подвешен легкий математический маятник массы $m \ll M$. Длина нитей обоих маятников равна l. В начальный момент $t_0 = 0$ оба маятника толкнули из положения равновесия в одну сторону с одинаковыми начальными скоростями v_0 (рис. 4.14). Найти зависимость скорости верхнего маятника от времени и описать движение маятников.

Решение

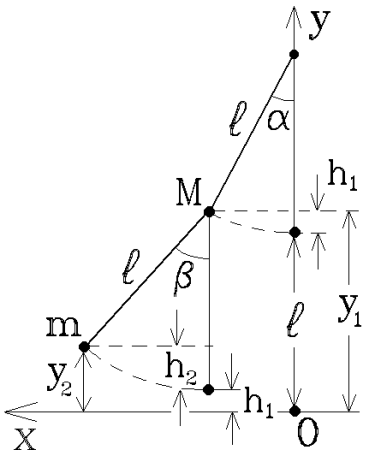

рис. 4.15

Совместим начало отсчета O с нижней точкой системы в положении равновесия и направим ось y вдоль вертикали (рис. 4.15). Система имеет две степени свободы, которые определим **малыми** углами отклонения α и β нитей маятников от вертикали. Тогда, как видно из рис. 4.15, координатами маятника M будут

$$x_1 = l\sin\alpha \approx l\alpha;$$

$$y_1 = l + h_1 = l + l(1-\cos\alpha) \approx l(1+\alpha^2/2), \quad (4.12)$$

а маятник m имеет координаты

$$x_2 = l\sin\alpha + l\sin\beta \approx l(\alpha+\beta);$$

$$y_2 = h_1 + h_2 = l(1-\cos\alpha) + l(1-\cos\beta) \approx l(\alpha^2+\beta^2)/2 \quad (4.13)$$

(воспользовались разложением $\sin\alpha \approx \alpha$ и $\cos\alpha \approx 1-\alpha^2/2$ при $\alpha \ll 1$).

Потенциальная энергия системы

$$U = Mgy_1 + mgy_2 = Mgl\left(1+\alpha^2/2\right) + mgl\left(\alpha^2+\beta^2\right)/2. \quad (4.14)$$

Из формул (4.12) и (4.13) видно, что при малых колебаниях можно пренебречь проекциями скоростей маятников на вертикаль y:

$$\dot{y}_1 = d\,y_1/dt = l\alpha\dot{\alpha} \ll \dot{x}_1 = dx_1/dt = l\dot{\alpha}; \quad \dot{y}_2 = l\left(\alpha\dot{\alpha}+\beta\dot{\beta}\right) \ll \dot{x}_2 = l\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right).$$

Поэтому кинетическая энергия системы

$$K \approx \left(M\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2\right)\Big/2 = Ml^2\dot{\alpha}^2\big/2 + ml^2\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)^2\Big/2. \qquad (4.15)$$

Уравнения движения для связанной системы с несколькими степенями свободы проще получить вводя функцию Лагранжа $\mathsf{L} = K - U$ и записывая уравнения Лагранжа-Эйлера

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \beta} = 0,$$

что после подстановки формул (4.14), (4.15) и вычисления производных дает систему

$$\ddot{\alpha} + \frac{m}{m+M}\ddot{\beta} + \frac{g}{l}\alpha = 0, \qquad \ddot{\alpha} + \ddot{\beta} + \frac{g}{l}\beta = 0. \qquad (4.16)$$

Подстановкой новых переменных $\alpha = \dfrac{\xi+\eta}{2}$; $\beta = \sqrt{\dfrac{m+M}{m}}\,\dfrac{\xi-\eta}{2}$ можно привести систему (4.16) к двум обычным уравнениям незатухающих гармонических колебаний:

$$\ddot{\xi} + \omega_1^2\xi = 0, \quad \ddot{\eta} + \omega_2^2\eta = 0, \text{ где } \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{l\left(1 \pm \sqrt{m/(M+m)}\right)}}. \qquad (4.17)$$

Если учесть, что $m \ll M$, $\sqrt{\dfrac{m}{m+M}} \approx \sqrt{\dfrac{m}{M}}$ и $\sqrt{1 \pm \sqrt{\dfrac{m}{m+M}}} \approx 1 \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{m}{M}}$, то

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{M}}\right); \qquad \omega_2 \approx \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{M}}\right). \qquad (4.18)$$

Общее решение уравнений (4.17) ищем в виде $\xi = \xi_0 \sin\left(\omega_1 t + \varphi_1\right)$; $\eta = \eta_0 \sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right)$. Поэтому $\alpha = \dfrac{\xi_0}{2}\sin\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) + \dfrac{\eta_0}{2}\sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right)$;

$$\beta = \sqrt{\frac{M}{m}}\,\frac{\xi_0}{2}\sin\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) - \sqrt{\frac{M}{m}}\,\frac{\eta_0}{2}\sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right). \qquad (4.19)$$

Из начальных условий для координат: $\alpha\big|_{t=0} = \beta\big|_{t=0} = 0$ получаем $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = 0$ или $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Начальные условия для скоростей $\dot{x}_1\big|_{t=0} = l\,\dot{\alpha}\big|_{t=0} = v_0$ и $\dot{x}_2\big|_{t=0}\, l\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\Big|_{t=0} = v_0$ после подстановки решений (4.19) приводят к системе уравнений:

$$v_0 = \frac{l}{2}\left(\xi_0\omega_1 + \eta_0\omega_2\right); \qquad 0 = \sqrt{\frac{M}{m}}\,\frac{l}{2}\left(\xi_0\omega_1 - \eta_0\omega_2\right),$$

решением которой будут амплитуды $\xi_0 = \dfrac{v_0}{l\omega_1}$ и $\eta_0 = \dfrac{v_0}{l\omega_2}$.

Как видно из формул (4.19), угловые скорости маятников меняются со временем по закону:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{v_0}{2l}\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right) = \frac{v_0}{l}\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \approx$$

$$\approx \frac{v_0}{l}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gm}{lM}}\,t\right)\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right),$$

$$\dot{\beta}(t) = \sqrt{\frac{M}{m}}\frac{v_0}{2l}\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right) = \sqrt{\frac{M}{m}}\frac{v_0}{l}\sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{M}{m}}\frac{v_0}{l}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gm}{lM}}\,t\right)\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right).$$

Скорости маятников меняются с большой частотой $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, а амплитуды скоростей меняются медленно с много меньшей частотой $\omega' = \omega_0\sqrt{m/4M} \ll \omega_0$. Такое движение называется <u>биениями.</u> Когда амплитуда скорости одного маятника максимальна, у другого она равна нулю. Часть кинетической энергии "переходит" то к одному маятнику, то к другому.

Искомая скорость верхнего (тяжелого) маятника $v_1 \approx \dot{x}_1 = l\dot{\alpha} = v_0\cos\omega' t\,\cos\omega_0 t$. Периодически в моменты времени $t = (2n+1)\pi/\omega'$, где n – целое число этот маятник будет покоиться.

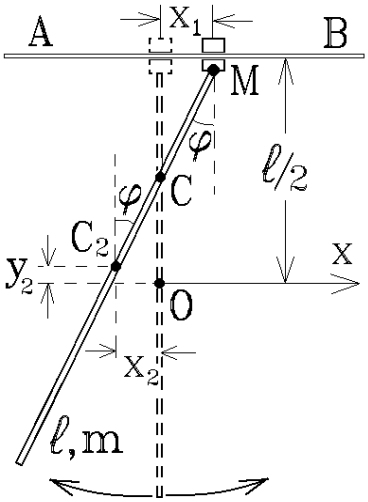

рис. 4.16

<u>Задача 4.14</u>

Муфта массы M может скользить без трения по горизонтальной направляющей (рис. 4.16). К муфте подвешен тонкий стержень массы m и длины l, совершающий колебания в вертикальной плоскости, проходящей через направляющую AB. Найти период малых колебаний системы. Исследовать случай $M = 0$.

Решение

Система имеет две степени свободы, которые соответствуют смещению x_1 муфты и повороту стержня на малый угол φ_1 (рис. 4.16). Совместим начало системы координат O с точкой центра масс стержня, когда он находится в вертикальном положении. Потенциальную

энергию системы в этом положении считаем нулевой. Тогда, как видно из рис. 4.16, при повороте стержня на угол φ и одновременном смещении муфты на расстояние x_1 координатами центра масс C_2 стержня будут

$$x_2 = x_1 - (l/2)\sin\varphi \approx x_1 - l\varphi/2;\quad y_2 = (l/2)(1-\cos\varphi) = l\sin^2(\varphi/2) \approx l\varphi^2/4 .$$

Кинетическая энергия стержня $K_2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} \approx \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1 - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$,

где $I = ml^2/12$ – момент инерции стержня относительно оси C_2, а слагаемым $(\varphi\dot{\varphi})^2$ пренебрегли из-за малости угла φ. Кинетическая энергия муфты $K_1 = M\dot{x}_1^2/2$. Потенциальная энергия муфты при горизонтальном смещении не меняется, а у стержня увеличивается на $U = mgy_2 \approx mgl\varphi^2/4$.

Таким образом функция Лагранжа системы

$$\mathsf{L} = K_1 + K_2 - U = \frac{m+M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}l\,\dot{x}_1\dot{\varphi} + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 - \frac{mgl}{4}\varphi^2 .$$

Уравнения Лагранжа-Эйлера или уравнения движения системы

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \varphi} = 0$$

после вычисления производных примут вид:

$$(M+m)\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}ml\,\ddot{\varphi} = 0, \qquad \frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}ml\,\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}mgl\,\varphi = 0 . \tag{4.20}$$

Исключая из системы уравнений (4.20) переменную $\ddot{x}_1$, приходим к уравнению незатухающих гармонических колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \text{, где } \omega = \sqrt{\frac{6g(M+m)}{l(4M+m)}} \text{ – циклическая частота колебаний.}$$

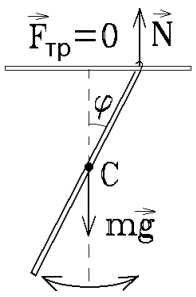

рис. 4.17

С той же частотой колеблется и муфта, но в противофазе со стержнем, так что общий центр масс C системы не смещается в горизонтальном направлении (все внешние силы направлены вдоль вертикали), но совершает колебания в вертикальном направлении с тем же периодом

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l(4M+m)/6g(m+M)} . \tag{4.21}$$

Наглядно это видно при $M = 0$ (рис. 4.17). Центр масс C стержня в горизонтальном направлении не смещается. Вертикальным смещением при малых углах можно пренебречь, и сохраняю-

щаяся полная энергия стержня $E = K_{\text{вращ}} + U = \dfrac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \approx$ $\approx \dfrac{ml^2}{24}\dot{\varphi}^2 + \dfrac{mgl}{4}\varphi^2 = \text{const}$. Вычисляя производную $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{1}{12}ml^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} +$ $+\dfrac{1}{2}mgl\varphi\dot{\varphi} = 0$ и поделив полученное выражение на $ml^2\dot{\varphi}/12$, находим $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$, где $\omega_0^2 = 6g/l$. Период малых колебаний стержня на рис.4.17 $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/6g}$ совпадает с результатом (4.21) при $M = 0$.

Негармонические колебания

Задача 4.15

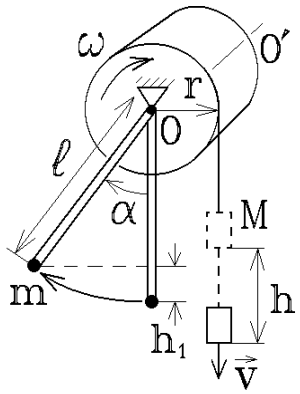

рис. 4.18

С невесомым блоком радиуса r жестко скреплен невесомый стержень длины l (рис. 4.18). На конце стержня находится грузик массы m. На блок намотана невесомая нить, к концу которой подвешен груз массы M. При каком условии движение системы будет иметь колебательный характер, если в начальный момент угол α отклонения стержня от вертикали и скорость движения системы равны нулю?

Решение:

При опускании груза M на высоту h блок вместе со стержнем, имеющие момент инерции $I = ml^2$, поворачиваются на угол α, где $h = r\alpha$ – удлинение нити (рис. 4.18). При этом блок и стержень приобретают угловую скорость ω, а груз M – скорость $v = \omega r$.

Подставляя эти соотношения между h и α, v и ω в закон сохранения энергии:

$$Mgh = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + mgh_1, \text{ где } h_1 = l(1-\cos\alpha) = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

получаем
$$Mgr\alpha = \frac{1}{2}\left(Mr^2 + ml^2\right)\omega^2 + 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (4.22)$$

Чтобы система совершала колебания вокруг положения равновесия, она должна при некотором максимальном (амплитудном) угле отклонения α_0 **остановиться** и начать двигаться в обратную сторону. При остановке $\omega = 0$, и из уравнения (4.1) получим условие $Mr\alpha_0 = 2ml\sin^2(\alpha_0/2)$.

Введем обозначение $b = Mr/ml$, тогда условие возникновения колебаний примет вид:

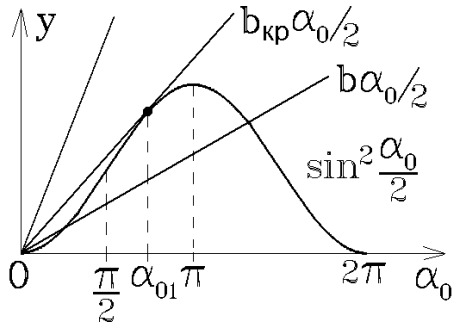

рис. 4.19

$$b\alpha_0/2 = \sin^2(\alpha_0/2). \qquad (4.23)$$

Решением уравнения (4.23) будут точки пересечения графиков на рис.4.19. При некотором значении $b = b_{кр}$ прямая линия $y = b\alpha_0/2$ касается кривой $y = \sin^2(\alpha_0/2)$ в точке $\alpha_0 = \alpha_{01}$. Если $b < b_{кр}$, то решение уравнения (4.23) имеется. Если же $b > b_{кр}$, то колебаний не будет и блок вместе со стержнем будут с переменной скоростью вращаться вокруг оси OO' до тех пор, пока нить с грузом M не размотается полностью.

Уравнение касательной к кривой $y = \sin^2(\alpha_0/2)$ имеет вид:

$$y(\alpha_0) = y(\alpha_{01}) + (d\,y/d\alpha_0)_{\alpha_0=\alpha_{01}} \cdot (\alpha_0 - \alpha_{01}) =$$

$$= \sin^2(\alpha_{01}/2) + 2\sin(\alpha_{01}/2)\cos(\alpha_{01}/2)\cdot\frac{1}{2}(\alpha_0 - \alpha_{01}). \qquad (4.24)$$

Так как эта касательная должна пройти через точку O (рис. 4.19), то из уравнения (4.24) при $\alpha_0 = 0$ и $y(0) = 0$ получим:

$$\sin^2(\alpha_{01}/2) - \alpha_{01}\sin(\alpha_{01}/2)\cos(\alpha_{01}/2) = 0 \quad \text{или} \quad \alpha_{01} = \mathrm{tg}(\alpha_{01}/2). \qquad (4.25)$$

Подставляя теперь уравнение (4.25) и его решение $\alpha_{01} = 2{,}331$ рад $=$ $= 133°34'$ в формулу (4.23), находим

$$b_{кр} = \left(2\sin^2(\alpha_{01}/2)\right)\Big/\alpha_{01} = 2\sin(\alpha_{01}/2)\cos(\alpha_{01}/2) = \sin\alpha_{01} = 0{,}725.$$

Таким образом, негармонические колебания системы (с большой амплитудой) могут происходить только при выполнении условия $Mr < 0{,}725\,ml$.

<u>Задача 4.16</u>

Найти период колебаний физического маятника, угловая амплитуда колебаний φ_0 которого не мала.

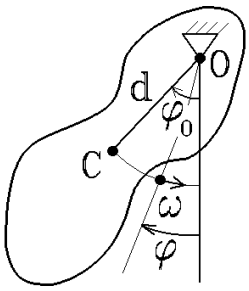

рис. 4.20

Решение

При максимальном отклонении от положения равновесия на угол φ_0 маятник имеет максимальную потенциальную энергию. При движении к положению равновесия возрастает угловая скорость вращения маятника $\omega = \dot{\varphi}$ и его кинетическая энергия. Из закона сохранения энергии следует

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} = mgd\left(1-\cos\varphi_0\right) = mgd\left(1-\cos\varphi\right) = 2mgd\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right), \qquad (4.26)$$

где m – масса маятника, g – ускорение свободного падения, d – расстояние от центра масс маятника до точки подвеса O, I – момент инерции относительно оси O. Вводим приведенную длину маятника $l_п = I/(mg)$ и из уравнения (4.26) получаем

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l_п}}\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_o}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}, \text{ или } dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l_п}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}. \qquad (4.27)$$

Проинтегрировав правую часть уравнения (4.27) в пределах от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_0$, найдем время движения маятника от положения равновесия до максимального отклонения, т.е. четверть периода колебаний, которые не будут гармоническими. Отсюда $T = 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l_п}{g}}\int\limits_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}$. (4.28)

Сделаем замену переменной $\sin\frac{\varphi}{2} = k\sin u$, где $k = \sin\frac{\varphi_0}{2}$. Тогда

$\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = k\cos u du$ и $d\varphi = \frac{2k\cos u}{\cos(\varphi/2)}du = \frac{2k\cos u}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi/2)}}du =$

$= \frac{2k\cos u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}du$. После замены интеграл (4.28) примет вид

$T = 4\sqrt{\frac{l_п}{g}}K(k)$, где $K(k) = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$ – полный эллиптический интеграл первого рода, не выражаемый с помощью элементарных функций. Его можно представить в виде сходящегося ряда:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}k^4 + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}k^6 + \ldots\right].$$

Как видим, период негармонических колебаний физического или математического маятника с произвольной не малой амплитудой φ_0 нельзя выразить простой формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right).$$

Глава 5

Специальная теория относительности (СТО)

Преобразования Лоренца.
Релятивистская теорема сложения скоростей.

Задача 5.1

Найти ускорение свободно падающего тела для наблюдателя, движущегося со скоростью v_0 1) в горизонтальном направлении; 2) под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Как оно направлено в обоих случаях?

Решение

Проекции скорости тела в исходной инерциальной системе отсчета K и в системе K', движущейся относительно нее с постоянной скоростью v_0 вдоль оси x, связаны соотношениями

$$v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - v_x v_0 / c^2} = \frac{v_x - v_0}{1 - \beta v_x}, \quad v_y' = \frac{v_y \sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}{1 - v_x v_0 / c^2} = \frac{\gamma v_y}{1 - \beta v_x}, \tag{5.1}$$

где $\gamma = \sqrt{1 - v_0^2 / c^2}$, $\beta = v_0 / c^2$. Это – релятивистская теорема сложения скоростей. А так как интервалы времени в этих системах связаны преобразованием Лоренца $dt' = \left(dt - v_0 dx / c^2\right) \Big/ \sqrt{1 - v_0^2 / c^2} = dt\left(1 - \beta v_x\right)/\gamma$, то используя определения $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, $\vec{a}' = d\vec{v}'/dt'$, вычисляя дифференциалы для соотношений (5.1) и производя все подстановки и преобразования, приходим к связи проекций ускорения тела в системах K и K':

$$a_x' = \frac{dv_x'}{dt'} = \frac{dv_x\left(1 - \beta v_x\right) + \left(v_x - v_0\right)\beta dv_x}{\left(1 - \beta v_x\right)^2} \frac{\gamma}{dt\left(1 - \beta v_x\right)} = \frac{dv_x}{dt} \frac{\gamma^3}{\left(1 - \beta v_x\right)^3},$$

$$a_y' = \frac{dv_y'}{dt'} = \frac{\left(dv_y \gamma\left(1 - \beta v_x\right) + v_y \gamma \beta dv_x\right)\gamma}{\left(1 - \beta v_x\right)^2 dt\left(1 - \beta v_x\right)} = \frac{dv_y}{dt} \frac{\gamma^2}{\left(1 - \beta v_x\right)^2} + \frac{dv_x}{dt} \frac{\beta v_y \gamma^2}{\left(1 - \beta v_x\right)^3},$$

или

$$a_x' = a_x \frac{\left(1 - v_0^2 / c^2\right)^{3/2}}{\left(1 - v_x v_0 / c^2\right)^3}, \quad a_y' = \frac{\left(a_x v_y v_0 / c^2 + a_y\left(1 - v_x v_0 / c^2\right)\right)\left(1 - v_0^2 / c^2\right)}{\left(1 - v_x v_0 / c^2\right)^3}. \tag{5.2}$$

Переходим к анализу условий задачи. В первом случае (рис. 5.1) в исходной системе K имеем $a_x = 0$; $a_y = -g$; $v_x = 0$; $v_y = -gt$ (скорость свободно па-

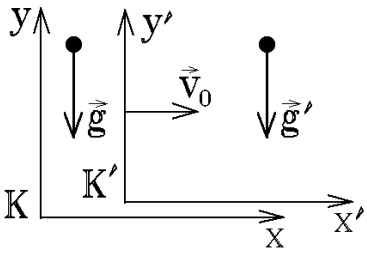

рис. 5.1

дающего тела). Поэтому из формул (5.2) следует $a_x' = 0$; $a_y' = -g\left(1 - v_0^2/c^2\right)$, т.е для наблюдателя в системе K', движущейся горизонтально, ускорение свободного падения по-прежнему направлено вертикально, но его величина $g' = g\left(1 - v_0^2/c^2\right)$ уменьшилась.

Во втором случае выбираем направление осей x и x' вдоль скорости $\vec{v}_0$ системы K' (рис. 5.2). В системе K имеем $a_x = a_y = -g/\sqrt{2}$; $v_x = v_y = -gt/\sqrt{2}$. Из формул (5.2) следует, что

$$a_x' = -2g\frac{\left(1 - v_0^2/c^2\right)^{3/2}}{\left(\sqrt{2} + v_0 gt/c^2\right)^3}; \qquad a_y' = -2g\frac{\left(1 - v_0^2/c^2\right)}{\left(\sqrt{2} + v_0 gt/c^2\right)^3}. \qquad (5.3)$$

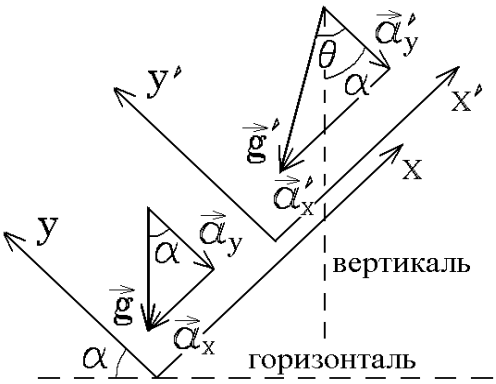

рис. 5.2

Таким образом, для наблюдателя в движущейся системе K' величина ускорения свободного падения будет зависеть от времени и от координаты падающего тела (в формулах (5.3) надо сделать замену $t = \left(t' + v_0 x'/c^2\right)\Big/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$). Направление ускорения $\vec{g}'$ отклонится от вертикали (рис. 5.2) на угол $\varphi = \theta - \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{a_x'}{a_y'} - \dfrac{\pi}{4} =$

$= \operatorname{arctg}\sqrt{1 - \dfrac{v_0^2}{c^2}} - \dfrac{\pi}{4}$. Легко видеть, что при $v_0/c \to 0$ получим $\varphi \to 0$. Но при ультрарелятивистских скоростях $v_0 \to c$ будет $\varphi \to -\dfrac{\pi}{4}$.

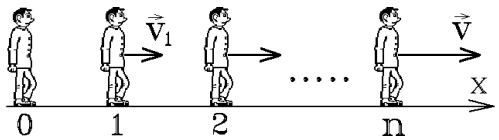

рис. 5.3

Задача 5.2

Наблюдатель "0" неподвижен, наблюдатель "1" движется относительно него со скоростью $v_1 = 3 \cdot 10^7$ м/с и т.д. – каждый последующий наблюдатель движется относительно предыдущего в одном и том же направлении со скоростью v_1 (рис. 5.3). Найти скорость v последнего $n = 10$-го движущегося наблюдателя относительно неподвижного.

Решение

Если v_2 – скорость наблюдателя "2" относительно наблюдателя "1", то его скорость относительно наблюдателя "0" вычисляется согласно релятивистской теореме сложения скоростей $v = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$, которую удобно использовать, вводя безразмерные параметры $\text{th}\theta = v/c$, $\text{th}\theta_i = v_i/c$. Тогда

$$\text{th}\theta = \frac{\text{th}\theta_1 + \text{th}\theta_2}{1 + \text{th}\theta_1 \cdot \text{th}\theta_2} = \text{th}\left(\theta_1 + \theta_2\right) \qquad \text{или} \qquad \theta = \theta_1 + \theta_2 .$$

В релятивистской теории складываются не скорости частиц v_i, а безразмерные параметры $\theta_i = \text{Arth}\left(v_i/c\right)$! Повторяя процедуру сложения и учитывая, что по условию задачи все $v_i = v_1$, находим

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n \qquad \text{или} \qquad \text{Arth}\frac{v}{c} = \text{n} \cdot \text{Arth}\frac{v_1}{c} . \tag{5.4}$$

Используя связь $\text{Arth}\, x = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ и определение $\text{th}\, x = \dfrac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1}$, получим из формулы (5.4) выражение

$$v = c \cdot \text{th}\left(n \cdot \text{Arth}\frac{v_1}{c}\right) = c \cdot \text{th}\left(\ln\left(\frac{c + v_1}{c - v_1}\right)^{n/2}\right) = c \cdot \frac{\left(c + v_1\right)^n - \left(c - v_1\right)^n}{\left(c + v_1\right)^n + \left(c - v_1\right)^n} .$$

А так как по условию $v_1 = c/10$, то $v = c \cdot \left(11^{10} - 9^{10}\right) \Big/ \left(11^{10} + 9^{10}\right) =$

$= 0,763 \cdot c = 2,29 \cdot 10^8$ м/с .

Релятивистский интервал

<u>Задача 5.3</u>

На расстоянии $l = 1000$ св. лет $= 9,46 \cdot 10^{18}$ м от Земли произошел взрыв Сверхновой, и были испущены нейтроны. Период полураспада свободного нейтрона $T = 11,7$ мин . С какой скоростью должен лететь нейтрон, чтобы успеть долететь до Земли с вероятностью, большей 50%.

Решение

Период полураспада T – это время, за которое распадается половина нейтронов в системе отсчета, в которой они покоятся. Чтобы нейтрон с вероятностью 50% не распался, **собственное** время его полета должно иметь величину $\Delta\tau = T$.

Для наблюдателя на Земле проходит время Δt, которое можно опреде-

лить из инвариантности релятивистского интервала:

$$s^2 = \underbrace{c^2(\Delta\tau)^2}_{\text{в системе, связанной с нейтроном}} = \underbrace{c^2(\Delta t)^2 - l^2}_{\text{в системе, связанной с Землей}} .$$

Отсюда $\Delta t = \sqrt{(\Delta\tau)^2 + (l/c)^2}$ и $v \ge l/\Delta t = \dfrac{lc}{\sqrt{(c\tau)^2 + l^2}} \approx c\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c\tau}{l}\right)^2\right)$.

Скорость нейтрона должна отличаться от скорости света не более, чем на

$$\left|(v-c)/c\right| \cdot 100\,\% = c^2T^2/2l^2 \cdot 100\,\% = 2{,}48 \cdot 10^{-14}\,\% .$$

Задача 5.4

Двигатели космического корабля развивают постоянную тягу, при которой сила инерции, действующая на экипаж, равна земной силе тяжести. За какое время t_k космонавты могут долететь до центра Галактики и вернуться обратно на Землю? Какую максимальную скорость при этом разовьет их корабль, и какое время $t_З$ пройдет для обитателей Земли? Расстояние от Солнца до центра Галактики $l = 3 \cdot 10^4$ св. лет $= 2{,}84 \cdot 10^{20}$ м .

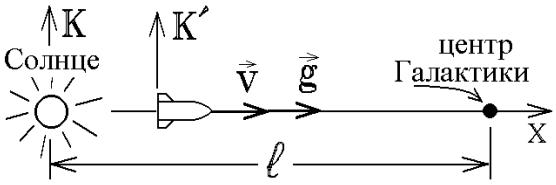

рис. 5.4

Решение

Половину пути до центра Галактики корабль движется с постоянным ускорением $a_x' = g = 9{,}81$ м/с^2 ускоряясь, а вторую половину пути – тормозя с тем же по величине ускорением. a_x' – это ускорение корабля **в мгновенной инерциальной** системе отсчета K', связанной с кораблем (рис. 5.4). Это система, в которой в данный момент времени корабль неподвижен, и которая движется относительно инерциальной системы K, связанной с Солнцем, со скоростью $\vec{v}$ корабля в данный момент.

Запишем релятивистскую связь скоростей корабля в K и K' системах: $v_x = \dfrac{v_x' + v}{1 + v_x' v/c^2}$, и вычислим производную по времени t, взятому по часам системы K (земному времени). Находим ускорение корабля относительно Земли: $\dfrac{dv_x}{dt} = \left[\dfrac{dv_x'}{dt}\left(1 + \dfrac{v_x' v}{c^2}\right) - \left(v_x' + v\right)\dfrac{v}{c^2}\dfrac{dv_x'}{dt}\right] \Bigg/ \left(1 + \dfrac{v_x' v}{c^2}\right)^2$ (при вычислении производной скорость v инерциальной системы K' считалась постоянной).

В правой части полученной формулы перейдем к производной по времени t', отсчитанному по часам корабля. Для этого подставим преобразование Лоренца $dt = dt'\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}$ и, после вычисления производной, положим $dv_x'/dt' = g$, $v_x' = 0$ (в системе K', связанной с кораблем, он в каждый момент покоится: $x' = \text{const}$). Получим кинематический закон изменения скорости корабля $v_x = v$ в K-системе: $dv/dt = g\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}$.

Разделяя переменные и вычисляя интеграл от обеих частей уравнения, $\int\limits_0^v \frac{dv}{\left(c^2-v^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{c^2}\frac{v}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{gt}{c^3}$, приходим к зависимости скорости корабля от времени для земного наблюдателя:

$$v = cgt\Big/\sqrt{c^2+g^2t^2}\ . \tag{5.5}$$

Очевидно, что эта скорость не может превысить скорость света c!

Корабль будет столько же времени ускоряться, сколько и замедляться. Поэтому половину пути в одну сторону он проделает за четверть времени всего путешествия, и

$$\frac{l}{2} = \int\limits_0^{t_3/4} vdt = \int\limits_0^{t_3/4} \frac{gctdt}{\sqrt{c^2+g^2t^2}} = \frac{c}{g}\sqrt{c^2+g^2t^2}\Bigg|_0^{t_3/4} = \frac{c}{g}\left(\sqrt{c^2+\left(\frac{gt_3}{4}\right)^2}-c\right).$$

Отсюда находим время полета по земным часам:

$$t_3 = \sqrt{\frac{16l}{g}+\frac{4l^2}{c^2}} = 1{,}89\cdot 10^{12}\ \text{с} = 60000\ \text{лет}.$$

Максимальную скорость корабля в средней точке пути получим, подставляя в формулу (5.5) время $t = t_3/4$: $v_{\max} = 0{,}99999994\cdot c$.

Время путешествия по часам корабля значительно меньше. Если учесть формулу (5.4), для космонавтов оно будет равно всего

$$t_k = \int dt' = 4\int\limits_0^{t_3/4}\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt = 4\int\limits_0^{t_3/4}\sqrt{1-\frac{g^2t^2}{c^2+g^2t^2}}dt = 4\int\limits_0^{t_3/4}\frac{cdt}{\sqrt{c^2+g^2t^2}} =$$

$$= \frac{4c}{g}\operatorname{Arsh}\frac{gt_3}{4\text{c}} \approx \frac{4c}{g}\ln\left(\frac{gt_3}{2c}\right) = 1{,}26\cdot 10^9\,\text{с} = 40{,}1\ \text{лет}.$$

Задача 5.5

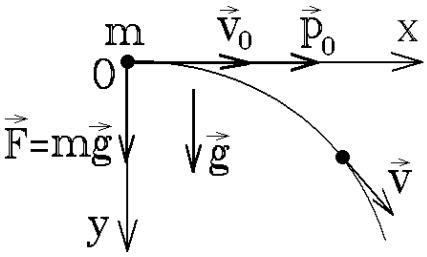

рис. 5.5

Релятивистская частица массы m летит в постоянном поле силы тяжести $m\vec{g}$ и имеет начальную скорость $\vec{v}_0$, направленную перпендикулярно силе $m\vec{g}$ (рис. 5.5). Найти уравнение траектории частицы.

Решение

Запишем уравнение движения частицы в проекции на оси координат (рис. 5.5):

$$\frac{dp_x}{dt} = 0; \quad \frac{dp_y}{dt} = mg. \tag{5.6}$$

Проинтегрировав уравнения (5.6), получим зависимость **релятивистского** импульса частицы от времени:

$$p_x = p_0, \qquad p_y = mgt. \tag{5.7}$$

Релятивистский импульс частицы $\vec{p} = m\vec{v}\Big/\sqrt{1-(v/c)^2}$ связан с ее полной энергией $\varepsilon = mc^2\Big/\sqrt{1-(v/c)^2}$ соотношением

$$\vec{p} = \vec{v}\,\varepsilon\big/c^2 \ . \tag{5.8}$$

С другой стороны, эту связь можно выразить известной формулой

$$\varepsilon = \sqrt{\left(p_x^2 + p_y^2\right)c^2 + m^2c^4} = \sqrt{(mgct)^2 + \varepsilon_0^2}\,, \tag{5.9}$$

где $\varepsilon_0 = \sqrt{p_0^2c^2 + m^2c^4}$ – начальная полная энергия частицы. Используя соотношения (5.7) и (5.9), можно переписать уравнение (5.8) в виде:

$$v_x = \frac{p_xc^2}{\varepsilon}, \quad v_y = \frac{p_yc^2}{\varepsilon} \ \text{или} \ \frac{dx}{dt} = \frac{p_0c^2}{\sqrt{(mgct)^2 + \varepsilon_0^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{mgc^2t}{\sqrt{(mgct)^2 + \varepsilon_0^2}}. \tag{5.10}$$

Разделяя переменные и делая замену переменной $\xi = mgct$, можно проинтегрировать уравнения (5.10):

$$x = \int_0^t \frac{p_0c^2dt}{\sqrt{(mgct)^2 + \varepsilon_0^2}} = \frac{p_0c}{mg}\int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon_0^2}} = \frac{p_0c}{mg}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\xi}{\varepsilon_0}, \tag{5.11}$$

$$y = \int_0^t \frac{mgc^2tdt}{\sqrt{(mgct)^2 + \varepsilon_0^2}} = \frac{1}{2mg}\int_0^{\xi^2} \frac{d\xi^2}{\sqrt{\xi^2 + \varepsilon_0^2}} = \frac{1}{mg}\left(\sqrt{\xi^2 + \varepsilon_0^2} - \varepsilon_0\right). \tag{5.12}$$

Выражая переменную $\xi = \varepsilon_0 \mathrm{sh}\left(mgx/p_0c\right)$ из формулы (5.11), подставляя ее в соотношение (5.12) и используя связь $\mathrm{sh}^2\eta + 1 = \mathrm{ch}^2\eta$, получаем искомое уравнение траектории релятивистской частицы:

$$y = \frac{\varepsilon_0}{mg}\left(\mathrm{ch}\left(mgx/p_0c\right) - 1\right), \tag{5.13}$$

где $p_0 = mv_0 \Big/ \sqrt{1-\left(v_0/c\right)^2}$; $\varepsilon_0 = mc^2 \Big/ \sqrt{1-\left(v_0/c\right)^2}$. Это – уравнение цепной линии. Только в случае нерелятивистской частицы, когда $v_0/c \ll 1$, $p_0 \approx mv_0$, $\varepsilon_0 \approx mc^2$ и $\eta = mgx/\left(p_0c\right) \approx gx/v_0c \ll 1$, можно воспользоваться разложением в ряд функции $\mathrm{ch}\,\eta = 1 + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!} + \ldots$ и, отбросив малые высшего порядка, получить из формулы (5.13) известное уравнение параболы

$$y = \frac{c^2}{g}\frac{\eta^2}{2} = \frac{gx^2}{2v_0^2} .$$

Задача 5.6

Релятивистская ракета выбрасывает струю газа со скоростью u , постоянной относительно ракеты. Найти зависимость скорости ракеты v от ее массы m , если в начальный момент движение массы ракеты равна m_0 .

Решение

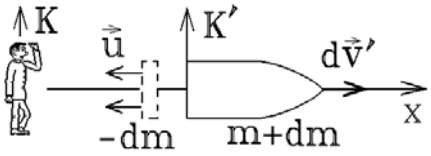

рис. 5.6

Как и в задаче 5.4, перейдем в мгновенную инерциальную систему отсчета K', которая в данный момент времени t движется со скоростью ракеты v . Спустя бесконечно малый интервал времени ракета потеряет массу $dm < 0$ и приобретет в системе K' скорость dv_x' (рис.5.6). Устраняем из закона сохранения релятивистского импульса в системе K'

$$\frac{dm \cdot u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{\left(m+dm\right)dv_x'}{\sqrt{1-\left(dv_x'/c\right)^2}} = 0$$

слагаемые второго порядка малости, разделяем переменные и получаем

$$dv_x' = -\frac{dm}{m}\frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} . \tag{5.14}$$

Переходим в систему K , связанную с неподвижным наблюдателем,

скорость ракеты в которой связана со скоростью ракеты в системе K' релятивистской теоремой сложения скоростей:

$$v_x = \frac{v_x' + v}{1 + v_x' v / c^2}. \qquad (5.15)$$

После вычисления дифференциала от выражения (5.15) с учетом постоянства скорости v мгновенной **инерциальной** системы отсчета K', подставляем $v_x' = 0$ (в системе K' в любой момент времени ракета покоится). Находим приращение скорости v_x в системе K:

$$dv_x = dv_x' \left(1 - v^2 / c^2\right) = dv.$$

Подставляя сюда формулу (5.14), разделяя переменные и производя интегрирование, имеем:

$$\int_0^v \frac{dv}{c^2 - v^2} = -\frac{u}{c^2\sqrt{1 - u^2/c^2}} \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}, \text{ откуда } \frac{1}{2c}\ln\left(\frac{c+v}{c-v}\right) = \frac{u}{c^2\sqrt{1-u^2/c^2}}\ln\frac{m_0}{m}.$$

Последнее выражение приводим к виду $\ln\left[\left(\frac{c+v}{c-v}\right)\left(m/m_0\right)^{2u/\sqrt{c^2-u^2}}\right] = 0$.

Поэтому аргумент логарифма равен 1, и нетрудно определить искомую зависимость $v = c\left[1 - \left(m/m_0\right)^{\alpha}\right] \Big/ \left[1 + \left(m/m_0\right)^{\alpha}\right]$, где $\alpha = 2u \Big/ \sqrt{c^2 - u^2}$.

Задача 5.7

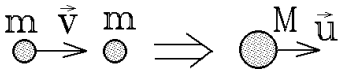

рис. 5.7

Релятивистская частица с массой m и кинетической энергией K налетает на покоящуюся частицу той же массы. Найти массу M и скорость u составной частицы, образовавшейся в результате соударения (рис. 5.7).

Решение

Используем закон сохранения полной энергии системы

$$\varepsilon' = \varepsilon \quad \text{или } Mc^2 \Big/ \sqrt{1 - \left(u/c\right)^2} = \varepsilon' = \left(mc^2 + K\right) + mc^2, \qquad (5.16)$$

и ее релятивистского импульса $\vec{p}\,' = \vec{p}$. Последний закон, используя связь полной энергии и импульса релятивистской частицы, можно записать в виде

$$p'^2 = \left(\varepsilon'/c\right)^2 - M^2c^2 = p^2 = \left(mc + K/c\right)^2 - m^2c^2. \qquad (5.17)$$

Подставляя в формулу (5.17) связь $\varepsilon' = 2mc^2 + K$, следующую из формулы (5.16), получим уравнение для определения M, из которого следует:

$$M^2c^2 = \left(2mc + K/c\right)^2 - \left(mc + K/c\right)^2 + m^2c^2 \quad \text{и} \quad M = \sqrt{2m\left(2m + K/c^2\right)}.$$

Масса в реакциях слияния частиц не сохраняется $(M > 2m)$ и должна возрасти!

Подставив найденное выражение для M в формулу (5.16), нетрудно определить скорость u образовавшейся частицы:

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{Mc^2}{2mc^2+K} = \sqrt{\frac{2mc^2}{2mc^2+K}}, \text{ откуда } u = c\sqrt{\frac{K}{2mc^2+K}}.$$

Задача 5.8

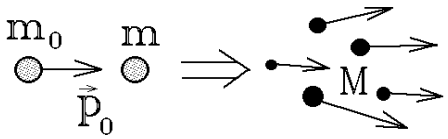

рис. 5.8

Релятивистская частица с массой m_0 налетает на покоящуюся частицу с массой m. Происходит реакция, в которой рождаются частицы с суммарной массой $M > m_0 + m$ (рис. 5.8). Найти энергетический порог реакции, т.е. минимальное значение кинетической энергии K_0 налетающей частицы, начиная с которого реакция становится энергетически возможной.

Решение

Используем релятивистский инвариант

$$(\varepsilon/c)^2 - \vec{p}^2 = (\varepsilon'/c)^2 - \vec{p}'^2 \qquad (5.18)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_0 + mc^2$ – полная энергия системы до соударения, $p = p_0 = \sqrt{(\varepsilon_0/c)^2 - m_0^2c^2}$ – величина ее импульса до соударения, ε_0 – полная энергия налетающей частицы. ε' и $\vec{p}'$ – полная энергия и импульс системы после соударения. Так как инвариант (5.18) одинаков во всех инерциальных системах отсчета, то запишем правую часть уравнения (5.18) в Ц-системе, где покоится центр масс образовавшихся частиц, т.е. $\vec{p}' = 0$.

Минимальной правая часть уравнения (5.18), а вместе с тем и величина ε_0 в левой части будет в том случае, когда все образовавшиеся частицы покоятся в Ц-системе и $\varepsilon' = \sum \varepsilon_i' = \sum m_i c^2 = Mc^2 = \min$. В этом случае из уравнения (5.18) следует, что

$$\left(\frac{\varepsilon_0 + mc^2}{c}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon_0^2}{c^2} - m_0^2c^2\right) = M^2c^2, \text{ откуда } \varepsilon_0 = \frac{M^2 - m_0^2 - m^2}{2m}c^2 = \min.$$

Пороговая кинетическая энергия

$$K_0 = \varepsilon_{0\min}^2 - m_0c^2 = \left(M^2 - (m_0+m)^2\right)c^2 \Big/ (2m).$$

Глава 6

Задачи для индивидуальной работы.

1. Кинематика

1-1. Две частицы движутся с постоянными скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Их радиусы-векторы в начальный момент равны $\vec{r}_{01}$ и $\vec{r}_{02}$. При каком соотношении между этими четырьмя векторами частицы обязательно испытают столкновение? Когда это произойдет?

Ответ: $-\dfrac{\Delta\vec{r}_0}{\left|\Delta\vec{r}_0\right|}=\dfrac{\Delta\vec{v}}{\left|\Delta\vec{v}\right|}$; $\quad t=\dfrac{\left|\Delta\vec{r}_0\right|}{\left|\Delta\vec{v}\right|}$.

1-2. Фонарь, находящийся на расстоянии 3 м от вертикальной стены, бросает на нее "зайчик". При равномерном вращении фонаря с частотой 0,5 Гц "зайчик" бежит по стене по горизонтальной прямой с переменной скоростью. Найти скорость "зайчика" через 0,1 с после того, как луч света был перпендикулярен к стене. Ответ: $v=10,4$ м/с

1-3. Частица движется со скоростью $\vec{v}=at\left(2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\right)$, где $a=1$ м/с^2. Найти: а) модуль скорости частицы в момент t = 1 с; б) ускорение частицы и его модуль; в) путь, пройденный частицей за промежуток времени от $t_1=2$ с до $t_2=3$ с. Ответ: 5,4 м/с; 5,4 м/с^2; 13,5 м

1-4. Две автомашины тянут третью с помощью привязанного к ней блока (рис.6.1). Ускорения автомашин a_1 и a_2. С каким ускорением движется буксируемая автомашина?

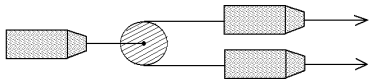

рис.6.1

Ответ: $0,5(a_1+a_2)$

1-5. Две частицы движутся с постоянными скоростями $v_1=3$ м/с и $v_2=4$ м/с по двум взаимно перпендикулярным прямым к точке их пересечения. В начальный момент они находились от нее на расстояниях $l_1=20$ м и $l_2=16$ м соответственно. Через сколько времени после этого расстояние между частицами будет наименьшим? Чему оно равно?

Ответ: 4,96 с; 6,4 м

1-6. Радиус-вектор частицы меняется со временем по закону $\vec{r}=\vec{b}t\left(1-\alpha t\right)$, где $\vec{b}$ – постоянный вектор, а α – положительная константа. Найти: а) скорость и ускорение частицы в зависимости от времени, б) промежуток времени Δt, по истечении которого частица вернется в исходную точку, а также путь l, который она пройдет за это время.

Ответ: $\Delta t=1/\alpha$; $l=b/2\alpha$

1-7. Лодка, имеющая скорость v_0, убирает парус в момент t_0, но продолжает двигаться так, что ее скорость убывает по гиперболическому закону ($v \sim 1/t$). Найти ускорение лодки и зависимость пути от времени при спущенном парусе.

Ответ: $-\dfrac{v^2}{v_0 t_0}$; $v_0 t_0 \ln\dfrac{t}{t_0}$.

1-8. Стержень длиной l упирается верхним концом в стену, а нижним в пол. Конец, упирающийся в стену, равномерно опускается вниз. Будет ли равномерным движение нижнего конца (рис. 6.2)?

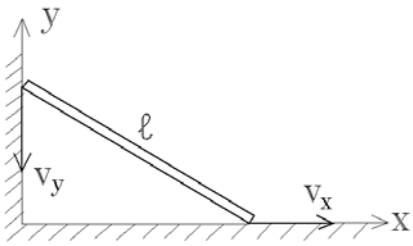

рис. 6.2

Ответ: Нет, так как $v_x = y|v_y| \Big/ \sqrt{l^2 - y^2}$

1-9. Начертить графики зависимостей от времени пути и ускорения некоторого тела, зависимость $v(t)$ для которого представлена на рис. 6.3. Интервал по времени: от 0 до 16 с.

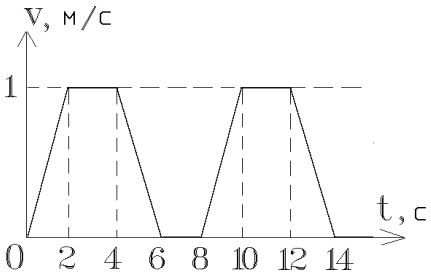

рис. 6.3

Ответ: Нарисованные Вами графики.

1-10. Наблюдатель, стоявший в момент начала движения электропоезда у его переднего края, заметил, что первый вагон прошел мимо него за 4 с. Сколько времени будет двигаться мимо него 7-й вагон? Движение электропоезда равноускоренное.

Ответ: 0,8 с.

1-11. Две прямые линейки лежат так, как показано на рис.6.4, образуя угол α. Если линейку *B* двигать поступательно со скоростью v, вектор которой образует угол β с линейкой *A*, то точка пересечения линеек (точка *C*) перемещается. Определить скорость точки *C* как функцию v и углов α и β. При каком угле β_1 скорость v_C наиболее велика? При каком угле β_2 скорости v_C и v равны?

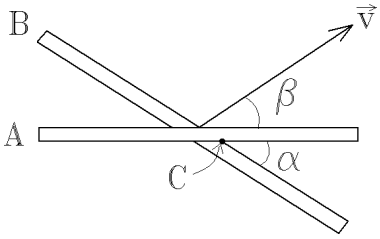

рис.6.4

Ответ: $v_C = v\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$; $\beta_1 = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$; $\beta_2 = 0$.

1-12. Поезд длиной l = 350 м начинает двигаться по прямому пути с постоянным ускорением a = 0,03 м/с^2. Через t = 20 с после начала движения был включен прожектор локомотива (событие 1), а через τ = 60 с после этого – сигнальная лампа в хвосте поезда (событие 2). Найти расстояния между этими событиями в системах отсчета, связанных с

между этими событиями в системах отсчета, связанных с поездом и с Землей. Как должна перемещаться инерциальная система отсчета, чтобы оба этих события произошли в ней в одной и той же точке?

Ответ: 350 м; 260 м; со скоростью 4,33 м/с навстречу поезду.

1-13. Известно из наблюдений, что все звезды удаляются от Солнца со скоростями, пропорциональными их расстоянию от него. Как будут вести себя звезды с точки зрения наблюдателя, находящегося на произвольной звезде *N*? Ответ: Аналогично.

1-14. Ядро, летящее со скоростью $\vec{v}$, распадается на два одинаковых осколка. Найти максимальный возможный угол α между скоростями одного из осколков и вектором $\vec{v}$, если про распаде покоящегося ядра осколки имеют скорости $\pm\vec{u}$, причем $u < v$.

Ответ: $\alpha = \arcsin(u/v)$

1-15. Имеется пучок одинаковых ядер, движущихся со скоростью v. Ядра в пучке самопроизвольно распадаются на пары одинаковых осколков. Скорость осколков, движущихся в направлении пучка, равна $3v$. Найти скорость осколков, движущихся перпендикулярно пучку.

Ответ: $v\sqrt{3}$

1-16. Корабль движется по экватору на восток со скоростью $v_0 = 30$ км/ч. С юго-востока под углом $\varphi = 60^{\circ}$ к экватору дует ветер со скоростью $v = 15$ км/ч. Найти скорость ветра относительно корабля и угол φ' между экватором и скоростью ветра в системе отсчета, связанной с кораблем.

Ответ: ≈ 40 км/ч; $\varphi' = 19^{\circ}$.

1-17. Имеются две наклонные плоскости, совпадающие с хордами одной и той же окружности радиуса *R*, что показано на рис.6.5. По ним из точек 1 и 2 одновременно начали соскальзывать без трения и начальной скорости небольшие тела. Определить, на какой промежуток времени Δt первое тело окажется в точке 3 раньше, чем второе. Ответ: $\Delta t = 0$.

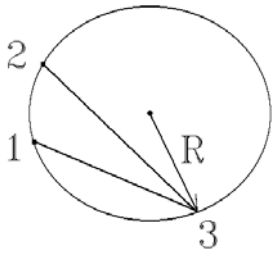

рис.6.5

1-18. Частица движется в положительном направлении оси *x* так, что ее скорость изменяется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α – положительная константа. В начальный момент $t = 0$ она находилась в точке $x = 0$. Найти зависимость от времени скорости и ускорения частицы, а также среднюю скорость на первых *l* метрах пути.

Ответ: $0{,}5\alpha^2 t$; $0{,}5\alpha^2$; $0{,}5\alpha\sqrt{l}$.

1-19. Вагонетка должна перевезти груз из одного места в другое (на расстояние *l*) за кратчайшее время. Она может разгоняться или тормозиться с

постоянным и одинаковым по модулю ускорением a, или двигаться равномерно. Какой максимальной скорости достигает вагонетка?

Ответ: $\sqrt{la}$.

1-20. Шарик падает с высоты h без начальной скорости. Вследствие сопротивления воздуха ускорение шарика уменьшается по сравнению с ускорением свободного падения g на величину βv^2 , где β – константа. Найти скорость шарика перед ударом о Землю.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{g}{\beta}\left(1 - e^{-2\beta h}\right)}$.

1-21. Рыбак едет на лодке вверх по реке; проезжая под мостом, он роняет в воду багор. Через полчаса рыбак это обнаруживает и, повернув назад, нагоняет багор в 5 км ниже моста. Какова скорость течения реки, если рыбак, двигаясь вверх и вниз по реке, греб одинаково?

Ответ: 5 км/ч.

1-22. Кабина лифта, высота которой равна 2,7 м, начала подниматься с постоянным ускорением 1,2 м/с^2. Через 2 с после начала подъема с потолка кабины стал падать болт. Найти время падения болта, а также модуль перемещения и путь болта за время свободного падения в системе отсчета, связанной с шахтой лифта.

Ответ: 0,7 с; 0,73 и 1,31 м.

1-23. Лодка движется относительно воды со скоростью в n = 2 раза меньшей, чем скорость течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

Ответ: $\theta = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{n} = 120°$

1-24. В лифте, движущемся с ускорением a, человек роняет с высоты H над полом кабины шарик. Через τ секунд после начала падения шарика ускорение лифта меняет знак, а через 2τ становится равным нулю. После этого шарик ударяется о пол кабины. На какую высоту от пола он отскочит после абсолютно упругого удара?

Ответ: $H - a\tau^2$.

1-25. На рис. 6.6 изображены графики ускорения двух тел в зависимости от времени. Начальные скорости тел равны нулю. Начертить графики зависимостей от времени скоростей и путей для каждого тела. Интервал по времени: от 0 до 6 с.

Ответ: Нарисованные Вами графики.

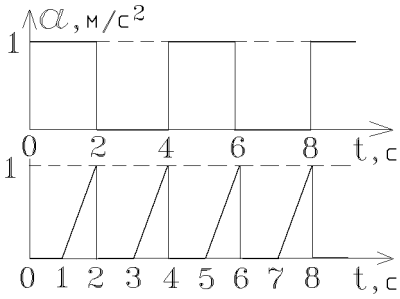

рис. 6.6

1-26. Начертить графики зависимостей от временит скоростей и пройденных путей для материальных точек, у которых ускорения меняются во времени так, как показано на рис. 6.7. Начальные скорости точек – нулевые. Интервалы по времени: от 0 до 6 с.

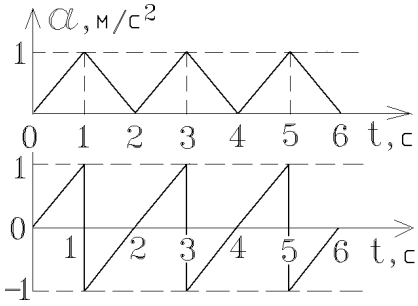

рис. 6.7

Ответ: Нарисованные Вами графики.

1-27. Два тела брошены одновременно под разными углами к горизонту с различными скоростями: $v_{10} = 10$ м/с , $v_{20} = 20$ м/с , $\alpha_1 = 70^o$, $\alpha_2 = 10^o$. Найти модуль их относительной скорости. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 17,3 м/с.

1-28. Пушка и цель находятся на одном уровне на расстоянии 5,1 км друг от друга. Через сколько времени снаряд с начальной скоростью 240 м/с достигнет цели в отсутствие сопротивления воздуха?

Ответ: 24,6 с или 42,4 с.

1-29. Теннисист посылает мяч в стенку, находящуюся от него на расстоянии 4,9 м, под углом 15° к горизонту. С какой скоростью нужно послать мяч, чтобы после упругого удара о стенку наивысшая точка траектории мяча оказалась над головой теннисиста?

Ответ: 19,6 м/с.

1-30. Две стальные плиты высотой 40 см помещены рядом, образуя вертикальную щель шириной 2 см (рис. 6.8). К щели подкатывается стальной шарик диаметром 0,6 см, движущийся со скоростью $v_0 = 1$ м/с , и проваливается в нее. Сколько раз он ударится о стенки щели, прежде чем упадет на пол? Ответ: 20 раз.

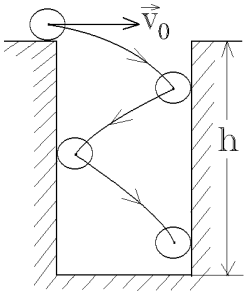

рис. 6.8

1-31. Камень брошен с вышки высотой h с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить радиус кривизны траектории камня в момент падения на землю.

Ответ: $\left(v_0^2 + 2gh\right)^{3/2} \Big/ gv_0 \cos\alpha$

1-32. Скорость пули можно определить по понижению ее траектории Δh на заданном расстоянии l_0 при горизонтальном выстреле (рис. 6.9). Рассчитайте скорость пули, считая l_0 , l и Δh известными и пренебрегая сопротивлением воздуха.

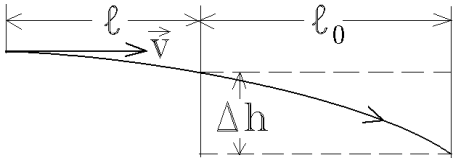

рис. 6.9

Ответ: $\sqrt{\dfrac{g\left(2l + l_0\right)l_0}{2\Delta h}}$

1-33. Падающее с высоты h тело на полпути сталкивается с маленькой площадкой, поставленной под углом α к горизонту и, упруго отразившись от нее, продолжает полет. Найти время полета тела, если $\alpha < 45°$ (рис. 6.10).

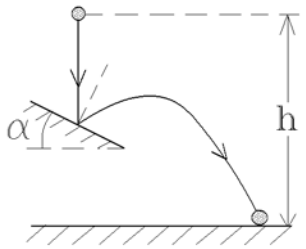

рис. 6.10

Ответ: $\left(1+\cos 2\alpha+\sqrt{1+\cos^2 2\alpha}\right)\sqrt{h/g}$

1-34. Под каким углом к горизонту нужно выстрелить, чтобы попасть в свободно падающую мишень? В момент выстрела мишень начинает падать с высоты 20 м и в 100 м от стрелка (по горизонтали). В какой точке траектории мишень будет поражена, если начальная скорость пули 400 м/с, а сопротивлением воздуха можно пренебречь?

Ответ: $\alpha = 11°20'$; в 32 см от точки падения.

1-35. Два тела брошены вертикально вверх из одной и той же точки с одинаковой начальной скоростью 24,5 м/с с промежутком времени $\tau = 0{,}5$ с. Через сколько времени после бросания второго тела и на какой высоте они столкнутся? Каков физический смысл решения при $\tau \geq 2v_0/g$?

Ответ: 2,25 с; 30,3 м.

1-36. Шарик начал падать с высоты h без начальной скорости на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. На каком расстоянии от места падения он вторично ударится о плоскость, если первый удар был абсолютно упругим?

Ответ: $8h\sin\alpha$.

1-37. Тело брошено с Земли под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти уравнение траектории, а также радиусы кривизны траектории в начальной и вершинной точках.

Ответ: $y = 0{,}577x - 0{,}0163x^2$; ≈ 47 м; ≈ 31 м.

1-38. Две частицы, находящиеся в одной точке в однородном поле тяжести, начали двигаться одновременно с начальными скоростями 3,0 м/с и 4,0 м/с, направленными горизонтально в противоположные стороны. Найти расстояние между частицами в тот момент, когда их скорости оказываются взаимно перпендикулярными. Ответ: 2,5 м.

1-39. Из пушки выпустили последовательно два снаряда со скоростью $v_0 = 250$ м/с , первый – под углом $\alpha_1 = 60°$ к горизонту, а второй – под углом $\alpha_2 = 45°$ (азимут один и тот же). Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти интервал времени между выстрелами, при котором снаряды столкнутся друг с другом.

Ответ: 11 с.

1-40. Небольшое тело бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти перемещение тела как функцию времени и средний вектор скорости $<\vec{v}>$ за первые t секунд и за все время движения τ.

Ответ: $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2$; $\langle\vec{v}\rangle_\tau = \vec{v}_0 - \vec{g}\left(\vec{v}_0 \cdot \vec{g}\right)/g^2$

1-41. Небольшое тело брошено с поверхности Земли под углом α к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: а) значения $\left|d\vec{v}/dt\right|$ и $d\left|\vec{v}\right|/dt$ в вершине траектории; б) радиусы кривизны траектории в точках максимального подъема и падения.

Ответ: g; 0; $v_0^2\cos^2\alpha/g$; $v_0^2/g\cos\alpha$.

1-42. В сферической лунке прыгает шарик (рис.6.11), упруго ударяясь о ее стенки в двух точках, находящихся на одной горизонтали. Промежуток времени между ударами при движении слева направо всегда равен T_1, а справа налево T_2 (причем $T_2 \neq T_1$). Найти радиус лунки.

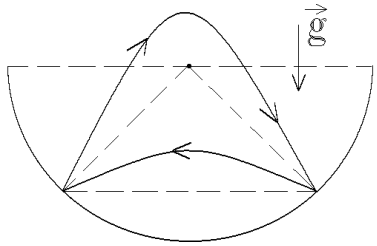

рис.6.11

Ответ: $R = gT_1T_2/2\sqrt{2}$.

1-43. Шарик, которому сообщена горизонтальная скорость v_0, падает на горизонтальную плиту с высоты h. При каждом ударе о плиту вертикальная составляющая скорости уменьшается, причем отношение вертикальных составляющих после удара и до удара постоянно и равно k. На каком расстоянии от места бросания отскоки шарика прекратятся? Считать, что горизонтальная составляющая скорости не меняется при ударе.

Ответ: $v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\dfrac{1+k}{1-k}$.

1-44. Автомобиль движется со скоростью υ по горизонтальной дороге, причем $v^2 > Rg$, где R – радиус колес, а g – ускорение свободного падения. На какую максимальную высоту может быть заброшена грязь, срывающаяся с колес автомобиля? С какой точки на покрышке? Сопротивлением воздуха пренебречь. Что будет, если $v^2 < Rg$?

Ответ: $h_{\max} = R + \dfrac{v^2}{2g} + \dfrac{gR^2}{2v^2}$; $\cos\varphi = -\dfrac{Rg}{v^2}$

1-45. Необходимо с земли попасть мячом в цель, находящуюся на расстоянии l от точки бросания и на высоте h над Землей. При какой наи-

меньшей начальной скорости мяча это можно сделать?

Ответ: $\sqrt{g\left(h+\sqrt{h^2+l^2}\right)}$.

1-46. Зенитное орудие может сообщить снаряду начальную скорость v_0. Найти границу (поверхность), отделяющую недостижимые цели от достижимых для данного орудия.

Ответ: $y=\dfrac{v_0^2}{2g}-\dfrac{gx^2}{2v_0^2}$

1-47. С поверхности Земли бросают с минимально допустимой скоростью камень через препятствие высотой h, находящееся на расстоянии l от точки бросания. На каком расстоянии от препятствия камень упадет на Землю после перелета через него? Ответ: $lh\Big/\sqrt{l^2+h^2}$.

1-48. Под каким углом к горизонту необходимо бросить камень с обрывистого берега реки, чтобы он упал в воду возможно дальше от берега? Высота обрыва h = 20 м, начальная скорость камня $v_0=14$ м/с.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=v_0\Big/\sqrt{v_0^2+2gh}$

1-49. Между целью и пушкой, находящимися на одном уровне, расположена стена высотой h. Определить минимальную начальную скорость снаряда и угол стрельбы, если расстояние от пушки до стены a, а от стены до цели – b.

Ответ: $v_0=\sqrt{\dfrac{gab}{2h}\left[1+\left(h\dfrac{a+b}{ab}\right)^2\right]}$, $\alpha=\operatorname{arctg}\left(h\dfrac{a+b}{ab}\right)$, если $h>\dfrac{ab}{a+b}$;

$v_0=\sqrt{g(a+b)}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, если $h<\dfrac{ab}{a+b}$

1-50. В трубу длиной l, наклоненную под углом α к горизонту, влетает шарик с горизонтальной скоростью v (рис. 6.12). Найти время пребывания шарика в трубе, если удары шарика о стенку упругие.

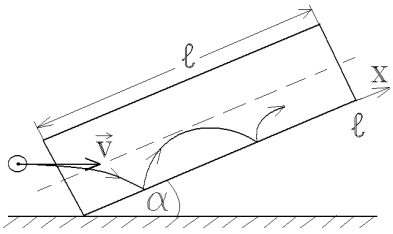

рис. 6.12

Ответ: $t=\begin{cases}\dfrac{2v}{g}\operatorname{ctg}\alpha, & \text{если} \quad v\cos\alpha<\sqrt{2gl\sin\alpha}\\[2ex] \dfrac{v}{g}\operatorname{ctg}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{2gl\ \operatorname{tg}\alpha}{v^2\cos\alpha}}\right), & \text{если} \quad v\cos\alpha\ge\sqrt{2gl\sin\alpha}\end{cases}$

1-51. Полусферический резервуар радиуса R находится на Земле. С какой наименьшей скоростью нужно бросить камень, чтобы он перелетел через резервуар, лишь коснувшись его вершины? Под каким углом?

Ответ: $v = \sqrt{3gR}$; $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{2}$

1-52. Концы твердого стержня MN могут свободно скользить по сторонам прямого угла (рис. 6.13). Какую траекторию описывает точка P стержня, делящая его на части с длинами a и b?

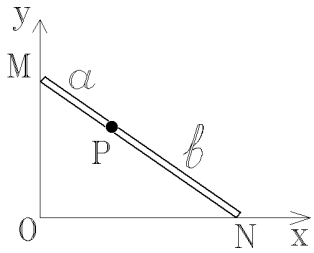

рис. 6.13

Ответ: Эллипс с полуосями a и b.

1-53. Точка движется в плоскости XY по закону $x = b\sin\omega t$, $y = b(1-\cos\omega t)$, где b и ω – положительные постоянные. Найти путь, проходимый за время τ, и угол между векторами скорости и ускорения. Ответ: $l = b\omega\tau$; $\varphi = \pi/2$.

1-54. С поверхности Земли начинает подниматься воздушный шар. Скорость его подъема постоянна и равна v_0. Благодаря ветру появляется горизонтальная компонента скорости $v_x = bh$, где b = const, h – высота подъема. Найти: а) зависимость величины сноса x от высоты подъема h; б) модули полного, тангенциального и нормального ускорений как функции высоты. Ответ:

$$x = bh^2/2v_0,\ a = bv_0,\ a_\tau = b^2h\Big/\sqrt{1+(bh/v_0)^2},\ a_n = bv_0\Big/\sqrt{1+(bh/v_0)^2}$$

1-55. Частица движется по эллипсу с полуосями A и B с постоянной по модулю скоростью v. Найти модуль ускорения частицы и радиус кривизны траектории в точке $x = 0$. Ответ: Bv^2/A^2, A^2/B

1-56. Частица за некоторое время проходит 3/4 окружности со средним значением модуля скорости $\langle v\rangle$. Найти модуль средней скорости частицы $|\langle\vec{v}\rangle|$ за то же самое время. Ответ: $0{,}3\langle v\rangle$.

1-57. Координаты точки, совершающей плоское движение, в зависимости от времени определяются выражениями $x = A\mathrm{ch}kt$; $y = B\mathrm{sh}kt$ где A, B и k – константы. Определить, по какой траектории движется точка и найти ее ускорение. Примечание: $\mathrm{ch}kt$ и $\mathrm{sh}\,kt$ – гиперболические косинус и синус.

Ответ: По гиперболе с ускорением $k^2\vec{r}$.

1-58. Найти траекторию катера (до середины реки), пересекающего реку перпендикулярно к берегам с постоянной скоростью υ, если скорость течения реки меняется по параболическому закону: $u(y) = ky^2$ при $y \le l/2$, где

l –ширина реки. Ответ: $y = \left(3vx/k\right)^{1/3}$.

1-59. На горизонтальной плоскости неподвижно укреплен вертикально расположенный цилиндр радиуса R. На цилиндр намотана нерастяжимая нить так, что кусок нити длины l_0 остался не намотанным. К концу нити прикреплена шайба, которая может скользить по плоскости без трения. В момент $t = 0$ шайбе сообщают скорость v_0, перпендикулярную к нити. Сколько времени она будет двигаться по плоскости до удара о цилиндр?

Ответ: $\tau = l_0^2 \big/ \left(2Rv_0\right)$.

1-60. Для экономии места въезд на один из высочайших в Японии мостов устроен в виде винтовой линии радиуса R и шагом h. Найти ускорение автомобиля, движущегося по ней с постоянной по модулю скоростью.

Ответ: $v^2 \cos^2 \alpha \big/ R$, где $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{h}/2\pi\mathrm{R}\right)$

1-61. За промежуток времени $\tau = 10$ с точка прошла половину окружности радиуса $R = 160$ см. Вычислить за это время: 1) среднюю скорость $\langle v \rangle$; 2) модуль среднего вектора скорости $\left|\langle \vec{v} \rangle\right|$; 3) модуль среднего вектора полного ускорения $\left|\langle \vec{a} \rangle\right|$, если точка двигалась с постоянным тангенциальным ускорением и $v_0 = 0$.

Ответ: 50 см/с; 32 см/с; 10 см/с^2.

1-62. Частица совершает движение в плоскости XY по закону $x = \beta t$, $y = \beta t\left(1 - \alpha t\right)$, где β и α – постоянные, а $t > 0$. Найти: а) уравнение траектории (и изобразить траекторию графически); б) модули скорости и ускорения частицы как функции времени; в) момент времени t_0, в который вектор скорости составляет угол $\pi/4$ с вектором ускорения.

Ответ: а) $y = x - \alpha x^2 \big/ \beta$; б) $v = \beta\sqrt{1 + \left(1 - 2\alpha t\right)^2}$, $a = 2\alpha\beta$; в) $t_0 = 1/\alpha$.

1-63. Частица движется в плоскости XY с постоянным ускорением $\vec{a}$, направленным противоположно оси Y. Уравнение траектории частицы имеет вид $y = b\,x - c\,x^2$, где b и c – положительные постоянные. Найти модуль скорости частицы в начале координат.

Ответ: $\sqrt{\left(1 + \beta^2\right) a \big/ 2c}$.

1-64. Радиус-вектор точки меняется по закону $\vec{r} = bt\vec{i} - ct^2\vec{j}$, где b и c – константы, а $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – орты осей X и Y. Найти: а) уравнение траектории (и

изобразить ее); б) $\vec{v}(t)$ и $\vec{a}(t)$, а также $v(t)$ и $a(t)$; в) угол между скоростью и ускорением как функцию времени; г) средний вектор скорости за первые t секунд движения и модуль этого вектора.

Ответ: а) $y = -cx^2/b^2$; б) $\vec{v} = b\vec{i} - 2ct\vec{j}$; $v = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2}$; $\vec{a} = -2c\vec{j}$; $a=2c$;

в) $\alpha = \arccos\dfrac{2ct}{\sqrt{b^2 + 4c^2t^2}}$; г) $\left|\langle\vec{v}\rangle\right| = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$

1-65. Точка A движется по окружности радиуса R=50 см так, что ее радиус-вектор $\vec{r}$ относительно точки O (рис. 6.14) поворачивается с постоянной угловой скоростью ω=0,40 рад/с. Найти модуль скорости частицы, а также модуль и направление вектора ее полного ускорения.

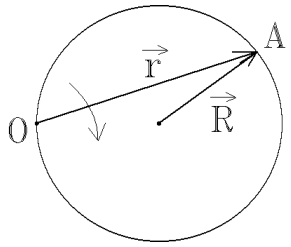

рис. 6.14

Ответ: 0,4 м/с; 0,32 м/с^2.

1-66. Частица движется в одну сторону по некоторой заданной криволинейной траектории с тангенциальным ускорением $a_\tau = \vec{b}\cdot\vec{\tau}$ (рис. 6.15), где $\vec{b}$ – постоянный вектор, параллельный оси X, а $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к траектории в данной точке. Найти $v(x)$, если в точке x = 0 скорость частицы была пренебрежимо мала. Ответ: $v = \sqrt{2bx}$.

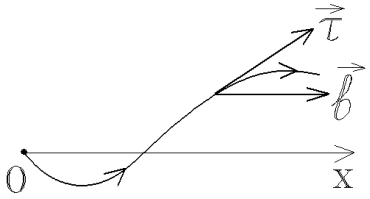

рис. 6.15

1-67. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды и перпендикулярной к берегам скоростью 0,3 м/с. Ширина реки b = 63 м. Скорость течения реки изменяется по параболическому закону $u = u_o - 4\dfrac{u_o}{b^2}\left(y - \dfrac{b}{2}\right)^2$ где y – расстояние от берега, u_o = 5,00 м/с. Найти снос лодки вниз по течению. Ответ: 700 м.

1-68. Определите скорость, с которой лунная тень во время полного солнечного затмения, наблюдаемого на экваторе, движется по поверхности Земли. Радиус лунной орбиты равен $3{,}8\cdot10^5$ км. Лунный месяц 27,3 суток. Для простоты можно полагать, что плоскости орбит Земли и Луны совпадают и перпендикулярны оси вращения Земли.

Ответ: Тень движется с запада на восток со скоростью ≈ 0,5 км/с.

1-69. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью υ, направленной под углом α к берегам. Скорость течения воды в реке меняется по линейному закону, достигая на середине реки значения u. Ширина реки равна l. При каком значении угла α лодка достигнет проти-

воположного берега в точке, расположенной напротив начальной?

Ответ: $\alpha = \arccos(u/2v)$.

1-70. Электрон движется в некоторой системе отсчета из начального положения, определяемого радиус-вектором $\vec{r}_0 = \vec{i}x_0 + \vec{k}z_0$, где $x_0 = 3$ м, $z_0 = 1$ м, с начальной скоростью $\vec{v}_0 = \vec{j}v$, где $v = 2$ м/с, и ускорением $\vec{a} = \vec{j}At + \vec{k}B$, где A = 12 м/с^3, B = 8,0 м/с^2. Чему равны: а) координата z электрона в момент времени t_1 = 0,5 с? б) модуль скорости электрона при t_2 = 1 с? в) угол между радиус-вектором и скоростью в момент t_o = 0?

Ответ: 2 м; $8\sqrt{2}$ м/с; 90°.

1-71. Два спутника Земли движутся по почти круговым стационарным орбитам, находящимся в одной плоскости, с периодами обращения T_1 и T_2. Радиусы орбит R_1 и R_2. Сколько времени может поддерживаться радиосвязь между ними, если одна возможна только в пределах прямой видимости?

Ответ: $\dfrac{T_1T_2}{\pi|T_2 - T_1|}\left(\arccos\dfrac{R_3}{R_1} + \arccos\dfrac{R_3}{R_2}\right)$, где R_3 – радиус Земли.

1-72. N черепах находятся в вершинах правильного многоугольника со стороной a. Они начинают одновременно двигаться с постоянной по модулю скоростью v, причем первая черепаха все время держит курс на вторую, вторая – на третью и т.д. Через сколько времени они встретятся в случаях N = 3 и N = 4? Ответ: $2a/3v$, a/v.

1-73. Частица движется по дуге окружности радиуса 1 м по закону $l = A\sin\omega t$, где A = 0,60 м, ω = 2,00 рад/с, а l – смещение от начального положения, отсчитываемое вдоль дуги. Найти: а) модуль полного ускорения частицы в точках l = 0 и $\pm A$; б) минимальное значение модуля полного ускорения и модуль смещения, ему соответствующий.

Ответ: 2,64 м/с^2; 3,20 м/с^2; 2,50 м/с^2; 0,37 м.

1-74. Лодка пересекает реку шириной l с постоянной относительно воды скоростью v, перпендикулярной к течению. Скорость же течения реки меняется от 0 у обоих берегов до величины u по середине реки по линейному закону. Найти траекторию лодки и изобразить ее на рисунке.

Ответ: Траектория состоит из ветвей двух сопряженных в середине реки парабол: $y = \sqrt{vlx/u}$ и $y = l - \sqrt{\left(l^2/2\right) - \left(vlx/u\right)}$.

1-75. Найти радиус кривизны в вершине траектории точки, находящейся на ободе колеса радиуса R, катящегося без скольжения по горизонтальной поверхности. Ответ: $4R$.

1-76. Частица A движется с постоянной по величине скоростью v так, что вектор $\vec{v}$ все время направлен на частицу B, которая, в свою очередь, движется прямолинейно и равномерно со скоростью $u < v$. В начальный момент $\vec{v} \perp \vec{u}$ и расстояние между частицами равно l_0. Через сколько времени они встретятся? При каком условии встреча произойдет на длине, меньшей L (по оси x)? Ответ: $\tau = vl_0 \Big/ \left(v^2 - u^2\right)$; $u\tau \le L$

1-77. По берегам ручья стоят два дерева высотой h_1 и $h_2 > h_1$. Зимородок перелетает с вершины одного на вершину другого, ныряя по пути в ручей. Считая скорость полета птицы постоянной по величине, определить кратчайшую траекторию и построить ее на рис. 6.16. Зависит ли точка соприкосновения траектории полета с водой от направления полета?

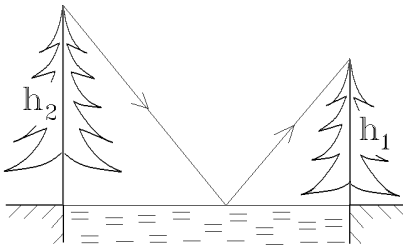

рис. 6.16

Ответ: Не зависит.

1-78. Из пункта A, находящегося на шоссе, необходимо в кратчайшее время попасть в пункт B, расположенный в поле на расстоянии h от шоссе (рис. 6.17). Известно, что скорость машины по полю в n раз меньше, чем по шоссе. На каком расстоянии от точки D следует свернуть с шоссе? Ответ: $h \Big/ \sqrt{n^2 - 1}$.

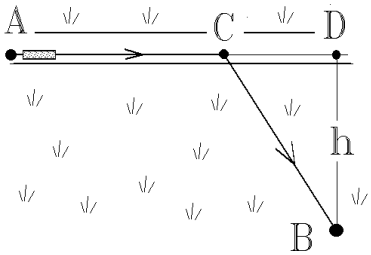

рис. 6.17

1-79. Ось x на рис. 6.18 служит границей между участком, поросшим травой, и участком, покрытым рыхлым песком. Человек должен попасть из A в B за наименьшее возможное время, поэтому его траектория будет ломаной линией AOB. Какое соотношение между углами α_1 и α_2 должно при этом выполняться? Скорости человека по траве $v_1 = 5$ км/ч, по песку $v_2 = 3$ км/ч.

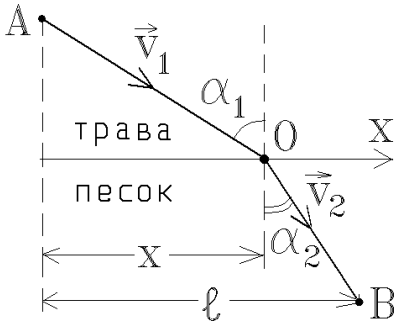

рис. 6.18

Ответ: $\sin\alpha_1/\sin\alpha_2 = 1{,}67$.

1-80. Снаряд вылетает со скоростью 320 м/с, сделав внутри ствола два оборота. Длина ствола 2 м. Считая движение снаряда внутри ствола равноускоренным, найти его угловую скорость в момент выстрела.

Ответ: $2 \cdot 10^3$ рад/с.

1-81. Между двойными задними шинами грузовика застрял камень. На каком минимальном безопасном расстоянии сзади можно ехать с той же скоростью, что и грузовик? Скорость грузовика 50 км/ч.

Ответ: 19,6 м.

1-82. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = At - Bt^3$, где A = 6,0 рад/с, B = 2,0 рад/с^3. Найти средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от t = 0 до остановки, а также угловое ускорение в момент остановки.

Ответ: 4 рад/с; – 6 рад/с^2; 12 рад/с^2.

1-83. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\varepsilon = At$, где $A = 2{,}0\cdot10^{-2}$ рад/с^3. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол 60° с ее вектором скорости?

Ответ: 7 с.

1-84. Найти полную угловую скорость вращения Луны. Лунный месяц равен 27,3 суток.

Ответ: $5{,}5\cdot10^{-6}$ рад/с.

1-85. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что его угол поворота зависит от времени квадратично, т.е. $\varphi = \alpha t^2$, где α = 0,20 рад/с^2. Найти полное ускорение точки на ободе колеса в момент t = 2,5 с, если линейная скорость точки в этот момент равна 0,65 м/с.

Ответ: 0,7 м/с^2.

1-86. Твердое тело вращается, замедляясь, вокруг неподвижной оси с угловым ускорение $\varepsilon = -\alpha\sqrt{\omega}$, где ω – его угловая скорость, α = const. Начальная угловая скорость равна ω_o. Найти среднюю угловую скорость за время, в течение которого тело будет вращаться, и угол поворота до остановки.

Ответ: $\omega_0/3$; $2\omega_0^{3/2}/3\alpha$.

1-87. Угловая скорость вращающегося вокруг неподвижной оси тела меняется по закону $\omega = \omega_0 - b\varphi$, где b = const, φ – угол поворота. В момент t = 0 φ = 0. Найти зависимости от времени угла поворота и угловой скорости.

Ответ: $\varphi = \left(1 - e^{-bt}\right)\omega_o \big/ b$; $\omega = \omega_o e^{-bt}$

1-88. В открытом море на экваторе возвышается высокая вертикальная скала (предположение). Как будет двигаться по этой скале тень, отбрасываемая сферической поверхностью Земли при заходе Солнца? Найти ускорение движения тени и время ее движения от подножья скалы до вершины скалы высотой 1 км. Радиус Земли принять равным 6400 км.

Ответ: $\alpha \approx$ const = 3,4 см/с^2; $t \approx 4$ мин.

1-89. По внутренней поверхности закрепленного цилиндра радиуса $2r$ катится со скоростью v без скольжения колесо радиуса r. Найти траекторию точки обода колеса.

Ответ: диаметр цилиндра $x = R\cos(vt/r)$

1-90. С какой линейной скоростью движется центр тяжести шарика в шарикоподшипнике, если внутренняя обойма радиусом r_1 вращается с угловой скоростью ω_1, а внешняя радиусом r_2 – с угловой скоростью ω_2? Движение шарика происходит без скольжения. С какой угловой скоростью вращается шарик?

Ответ: $0{,}5(\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2)$; $\left(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2\right)\Big/\left(r_2^2 - r_1^2\right)$

1-91. Шар радиусом 16 см, насаженный на горизонтальную ось, катится по плоскости со скоростью 0,6 м/с, описывая окружность радиусом 30 см. Определить угловую скорость шара и наклон ее к горизонту, а также угловое ускорение шара. Схема движения шара показана на рис. 6.19.

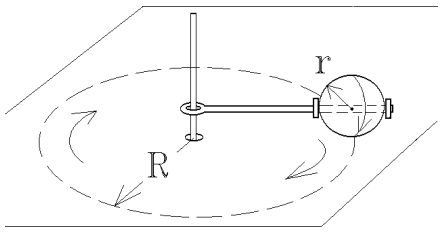

рис. 6.19

Ответ: 4,25 $с^{-1}$; 28°; 7,5 $с^{-2}$.

1-92. Твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 = 0,5 рад/с вокруг горизонтальной оси AB. В момент t = 0 ось AB начали поворачивать вокруг вертикали с постоянным угловым ускорением ε_0 = 0,10 рад/$с^2$. Найти модули угловой скорости и углового ускорения через t = 3,5 с.

Ответ: $\omega = \omega_0\sqrt{1+\left(\varepsilon_0 t/\omega_0\right)^2}$ =0,6 рад/с; $\varepsilon = \varepsilon_0\sqrt{1+\omega_0^2 t^2}$ =0,2 рад/$с^2$.

1-93. Частица движется по радиусу вращающегося диска со скоростью 3 м/с. В начальный момент она находилась в центре диска, угловая скорость вращения которого 20 рад/с. Найти приближенное значение пути, пройденного частицей в неподвижной системе отсчета за время с момента t_1 = 9 с до момента t_2 = 10 с. Ответ: 570 м.

1-94. Стержень, одним концом шарнирно укрепленный на горизонтальной плоскости, опирается на цилиндр (рис. 6.20). Угловая скорость стержня равна ω. Проскальзывания между цилиндром и плоскостью нет. Найти зависимость угловой скорости цилиндра от угла α между цилиндром и плоскостью.

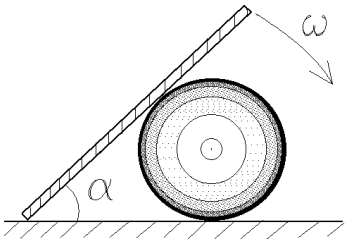

рис. 6.20

Ответ: $\dfrac{\omega}{2}\Big/\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

1-95. Шарик радиуса R катится без скольжения со скоростью v по ребрам двух тонких параллельных линеек, расстояние между которыми $d < 2R$. Найти уравнение траектории точки A шарика (рис. 6.21) и изобразить ее на графике. Определить также наибольший и наименьший радиусы кривизны этой траектории. Ответ: $R \pm r$

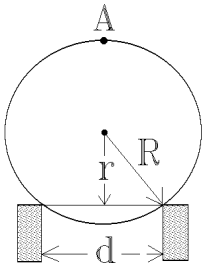

рис. 6.21

1-96. Стержень длины $2l$ вращается в горизонтальной плоскости так, что в некоторый момент времени скорость одного конца равна v_1 и направлена под углом α к стержню, а скорость другого конца равна v_2. Найти угловую скорость вращения стержня относительно его центра.

Ответ: $\dfrac{v_1}{2l}\left(\sin\alpha \pm \sqrt{\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^2 - \cos^2\alpha}\right)$

Тематика задач

Число, стоящее в скобках около номера задачи, обозначает примерный уровень сложности по восьмибалльной шкале)

Кинематика прямолинейного движения

1-1	ПД	(1)	1-10	ПД	(3)	1-19	ПД	(3)
1-2	ПД	(1)	1-11	ПД	(2)	1-20	ПДС	(3)
1-3	ПД	(1)	1-12	ПД,ТС	(2)	1-21	ПД,ТС	(3)
1-4	ПД,ПУ	(2)	1-13	ПД,ТС	(2)	1-22	ПД,ТС	(4)
1-5	ПД	(2)	1-14	ПД,ТС	(2)	1-23	ПД,ТС	(4)
1-6	ПД	(2)	1-15	ПД,ТС	(2)	1-24	ПД,ТС	(4)
1-7	ПД	(2)	1-16	ПД,ТС	(2)	1-25	ПД	(5)
1-8	ПД	(2)	1-17	ПД,НП	(2)	1-26	ПД	(5)
1-9	ПД	(2)	1-18	ПД	(3)			

Кинематика криволинейного движения

1-27	ОТ	(1)	1-45	ОТ,ТС	(4)	1-63	КД	(3)
1-28	ОТ	(2)	1-46	ОТ	(4)	1-64	КД	(3)
1-29	ОТ	(2)	1-47	ОТ	(4)	1-65	КД	(3)
1-30	ОТ	(2)	1-48	ОТ	(5)	1-66	КД	(3)
1-31	ОТ	(2)	1-49	ОТ	(5)	1-67	КД,ТС	(3)
1-32	ОТ	(2)	1-50	ОТ	(6)	1-68	КД,ТС	(3)
1-33	ОТ	(2)	1-51	ОТ	(6)	1-69	КД,ТС	(3)
1-34	ОТ	(2)	1-52	КД	(1)	1-70	КД	(3)
1-35	ОТ	(2)	1-53	КД	(2)	1-71	КД,ТС	(3)

1-36	ОТ	(2)	1-54	КД	(2)	1-72	КД,ТС	(4)
1-37	ОТ	(3)	1-55	КД	(2)	1-73	КД	(4)
1-38	ОТ	(3)	1-56	КД	(2)	1-74	КД,ТС	(4)
1-39	ОТ	(3)	1-57	КД	(2)	1-75	КД,ТС	(4)
1-40	ОТ	(3)	1-58	КД,ТС	(2)	1-76	КД,ТС	(7)
1-41	ОТ	(3)	1-59	КД	(2)	1-77	ПФ	(1)
1-42	ОТ	(3)	1-60	КД,ТС	(2)	1-78	ПФ	(3)
1-43	ОТ	(4)	1-61	КД	(3)	1-79	ПФ	(3)
1-44	ОТ,ТС	(4)	1-62	КД	(3)			

Кинематика вращательного движения

1-80	ВД	(1)	1-86	ВД	(3)	1-92	ВД,УС	(5)
1-81	ВД,ОТ	(1)	1-87	ВД	(3)	1-93	ВД,УП	(5)
1-82	ВД	(2)	1-88	ВД,УЛ	(3)	1-94	ПЛ	(2)
1-83	ВД,УЛ	(2)	1-89	ВД	(3)	1-95	ПЛ	(5)
1-84	ВД,УС	(2)	1-90	ВД,УЛ	(4)	1-96	ПЛ	(5)
1-85	ВД,УЛ	(2)	1-91	ВД,УС	(4)			

Пояснения к аббревиатуре

ВД – вращательное движение твердого тела,
КД – криволинейное движение,
КУ – кориолисово ускорение,
НП – движение по наклонной плоскости,
ОТ – движение в однородном поле тяжести,
ПД – прямолинейное движение,
ПЛ – плоское движение твердого тела,
ПУ – преобразование ускорений,
ПФ – принцип Ферма,
ТС – теорема сложения скоростей,
УЛ – связь угловых и линейных характеристик,
УП – преобразования угловых скоростей и ускорений,
УС – сложение угловых скоростей

2. Динамика

2-1. Частица массы m движется по окружности радиуса R. Найти модуль среднего вектора силы, действующей на частицу на пути, равном четверти окружности, если частица движется: а) равномерно со скоростью; б) с постоянным тангенциальным ускорением a_τ без начальной скорости.

Ответ: а) $\left|\left\langle \vec{F} \right\rangle\right| = 2\sqrt{2}mv^2 / \pi R$; б) $\left|\left\langle \vec{F} \right\rangle\right| = ma_\tau$.

2-2. Ледокол, ударяясь в льдину массой m, отбрасывает ее, сообщив ей скорость v . Пусть давление ледокола на льдину равномерно нарастает во времени при сближении со льдиной и равномерно убывает, когда они расходятся. Найти при этих условиях максимальную силу давления льдины на борт, если удар длится t секунд. Ответ: $F = 2mv/t$.

2-3. Какое давление оказывает на космическую ракету вблизи орбиты Земли "солнечный ветер", представляющий собой поток протонов, летящих со скоростью v = 300 км/с? Концентрация протонов в потоке n = 10 м$^{-3}$. Считать, что протоны поглощаются ракетой и что скоростью ракеты можно пренебречь. Ответ: $p = 1{,}5\cdot 10^{-15}$ Па.

2-4. Шарик радиуса R висит на нити длиной l и касается вертикального цилиндра радиуса r, установленного на оси вращающегося вала, как показано на рис. 6.22. При какой угловой скорости вращения вала шарик перестанет давить на стенку цилиндра?

Ответ: $\omega = \sqrt{g} \Big/ \sqrt[4]{(l-r)(l+r+2R)}$

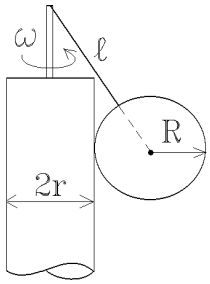

рис. 6.22

2-5. Горизонтальный диск вращается с угловой скоростью ω = 6,0 рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По одному из диаметров диска движется небольшое тело массы 0,5 кг с постоянной относительно диска скоростью v' = 50 см/с. Найти силу, с которой диск действует на это тело в тот момент, когда оно находится на расстоянии r = 30 см от оси вращения.

Ответ: $F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2 + 4v'^2\omega^2}$ =7,89 Н.

2-6. Тело массы m бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Спустя время τ тело упало на Землю. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти приращение импульса тела $\Delta\vec{p}$ за время полета и среднее значение импульса $\left\langle \vec{p} \right\rangle$ за время τ.

Ответ: $\Delta\vec{p} = m\vec{g}\tau$; $\left\langle \vec{p} \right\rangle = m\vec{v}_0 + \dfrac{1}{2}m\vec{g}\tau$.

2-7. На горизонтальной плоскости с коэффициентом трения μ находятся два тела: брусок и электромотор с батарейкой на подставке. На ось электромотора намотана нить, свободный конец которой соединен с бруском. Расстояние между обоими телами равно l. После включения мотора брусок, масса которого в два раза больше массы другого тела, начал двигаться с постоянным ускорением a. Через сколько времени оба тела столкнутся?

Ответ: Через $\Delta t = \sqrt{2l/(3a+\mu g)}$

2-8. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^{\circ}$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в $n = 2$ раза меньше времени спуска.

Ответ: 0,16.

2-9. Небольшое тело А начинает скользить с вершины клина с основанием $l = 2{,}1$ м. Коэффициент трения между телом и поверхностью клина $\mu = 0{,}14$. При каком значении угла α время соскальзывания будет наименьшим и чему оно равно? Ответ: $\alpha = 49^{\circ}$; $t_{\min} = 1$ с.

2-10. Брусок массы $m = 1$ кг втаскивают за нить с постоянной скоростью вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 20^{\circ}$ с горизонтом. Коэффициент трения $\mu = 0{,}1$. Найти угол β, который должна составлять нить с наклонной плоскостью, чтобы натяжение нити было наименьшим. Чему оно равно? Ответ: $\beta = 5^{\circ}43'$; $T_{\min} = 4{,}26$ Н.

2-11. На горизонтальной поверхности находится призма массы $m_1 = 2$ кг с углом $\alpha = 30^{\circ}$, а на ней – брусок массы $m_2 = 0{,}5$ кг. Пренебрегая трением, найти ускорение призмы.

Ответ: $a = \dfrac{g\sin 2\alpha}{2\left(\sin^2\alpha + m_1/m_2\right)} = 0{,}9$ м·с$^{-2}$.

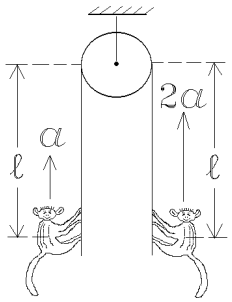

рис. 6.23

2-12. Через блок перекинута веревка, как показано на рис. 6.23, и за нее держатся две обезьяны одинаковой массы, находящиеся на одинаковых расстояниях l от блока. Обезьяны начинают одновременно подниматься вверх с постоянным ускорением относительно веревки, причем одна из них поднимается с ускорением a, а другая – с ускорением $2a$. Через какой промежуток времени каждая из обезьян достигнет блока? Массой блока и веревки пренебречь. Ответ: $\Delta t = 2\sqrt{l/3a}$

2-13. Лодка под парусом развила скорость v_0. Как будет убывать со временем скорость движения лодки в спокойной воде после спуска паруса, если сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна

квадрату скорости лодки массой m: $F_{\text{сопр}} = kv^2$. Какой путь пройдет лодка до полной остановки? Ответ: $v = v_0 / [1 + (k/m) v_0 t]$, $l = \infty$

2-14. Доска длиной l_o = 3 м и массой m_o = 20 кг опирается на уступ, как изображено на рис. 6.24, таким образом, что она составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^o$, а расстояние от уступа до свободного конца доски равно l_1 = 1 м. Плоскую шайбу массой m = 10 кг толкнули вверх по доске со скоростью v_0. При каком минимальном значении v_0 нижний конец доски оторвется от пола? Трением между шайбой и доской пренебречь. Ответ: 5,42 м/с.

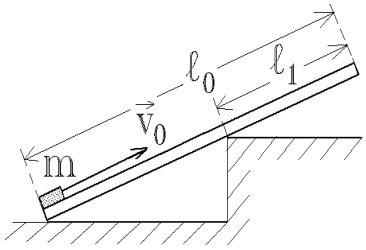

рис. 6.24

2-15. В системе, изображенной на рис. 6.25, отношение массы клина B к массе стержня A равно n, а трение между всеми соприкасающимися поверхностями отсутствует. Найти ускорения стержня и клина.

Ответ: $a_A = \dfrac{g}{1 + n\text{ctg}^2\alpha}$; $a_B = \dfrac{g}{\text{tg}\alpha + n\text{ctg}\alpha}$.

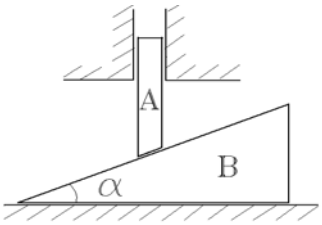

рис. 6.25

2-16. Велосипедист едет по круглой площадке, расположенной горизонтально, радиус которой R, а коэффициент трения зависит только от расстояния r до центра O площадки по закону $\mu = \mu_o(1 - r/R)$, где μ_o – постоянная. Найти радиус окружности с центром в точке O, по которой велосипедист может ехать с максимальной скоростью. Какова эта скорость?

Ответ: $r = R/2$; $v_{\max} = 0,5\sqrt{\mu_0 g R}$.

2-17. Цепочку длины l поместили на гладкую поверхность радиуса R так, что один ее конец закреплен на вершине сферы. С каким ускорением a начнет двигаться каждый элемент цепочки, если ее верхний конец освободить? Предполагается, что длина цепочки $l < \pi R/2$.

Ответ: $a = (Rg/l)(1 - \cos(l/R))$

2-18. Доска качелей с сидящими на ней людьми весит P Н. Какое наибольшее натяжение испытывают веревки, если отвести качели на 45° от положения равновесия и предоставить им качаться? Ответ: $T \approx 1,6P$.

2-19. Найти уравнения поверхности воды, вращающейся со скоростью ω в цилиндрическом стакане.

Ответ: $y = \dfrac{\omega^2}{2g} x^2$ при условии $\dfrac{\omega^2 R^2}{2g} \le H$, где H – высота воды в спокойном состоянии.

2-20. На покоившуюся частицу массы m в момент t=0 начала действовать сила, меняющаяся со временем по закону $\vec{F} = \vec{b}t(\tau - t)$, где $\vec{b}$ – постоянный вектор, τ – время, в течение которого действует данная сила. Найти импульс частицы после окончания действия силы и путь, пройденный частицей за время действия силы. Ответ: $\vec{p} = \vec{b}\,\tau^3/6$, $l = b\tau^4/12m$

2-21. На наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, поместили два бруска 1 и 2 (рис. 6.26). Массы брусков равны m_1 и m_2, коэффициенты трения между плоскостью и этими брусками – соответственно μ_1 и $\mu_2 < \mu_1$. Найти а) силу взаимодействия между брусками в процессе движения, б) значение угла α, при которых не будет скольжения.

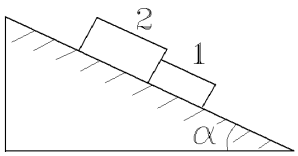

рис. 6.26

Ответ: $F_{вз} = g\dfrac{m_1 m_2(\mu_1 - \mu_2)}{m_1 + m_2}\cos\alpha$, $\alpha \le \dfrac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}$

2-22. Частица массы m = 0,1 кг движется по внутренней гладкой поверхности вертикального цилиндра радиуса R = 2 м. Найти силу давления частицы на стенку цилиндра, если в начальный момент времени ее скорость v_0 = 6 м/с и составляет с горизонтом угол $\alpha = 45^o$.

Ответ: 0,9 Н.

2-23. Винтовку навели на вертикальную черту мишени, находящейся точно в северном направлении, и выстрелили. Выстрел произведен в горизонтальном направлении на широте $\varphi = 60^o$, начальная скорость пули v_0 = 900 м/с , а расстояние до мишени l = 1,0 км. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти, на сколько сантиметров и в какую сторону отклонится от черты попавшая в мишень пуля.

Ответ: на расстояние $S = l^2\omega\sin\varphi/v_0$ =7 см к востоку.

2-24. На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, лежат один на другом два бруска. Можно ли подобрать такие значения масс брусков m_1 и m_2 и коэффициентов трения брусков о плоскость и друг о друга μ_1 и μ_2, чтобы нижний брусок в процессе движения выскользнул из-под верхнего? В начальный момент система покоится; никаких дополнительных сил к брускам не прикладывается. Ответ: Нет.

2-25. Через блок перетянута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы μ_1 и μ_2. Блок движется в горизонтальном направлении с ускорением a_o. Какова сила натяжения нити? Вращением блока пренебречь. Ответ: $\dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{g^2 + a_0^2}$

2-26. Стальной шарик массы m = 50 г падает с высоты h = 1 м на горизонтальную поверхность массивной плиты. Найти суммарный импульс, который он передаст плите в результате многократных отскакиваний, если при каждом ударе скорость шарика изменяется в η = 0,8 раз.

Ответ: $\Delta p = m\sqrt{2gh}\,(1+\eta)/(1-\eta)$ =2 кг·м/с.

2-27. Цепочка массы m = 1 кг и длины l = 1,4 м висит на нити, касаясь поверхности стола своим нижним концом. После пережигания нити цепочка упала на стол. Найти полный импульс, который она передала столу.

Ответ: $p = 2m\sqrt{2gl}/3$ =3,5 кг·м/с.

2-28. На прямоугольный трехгранный клин ABC массы M, лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, положен подобный же, но меньший клин BDE массы m (рис. 6.27). Определить, на какое расстояние x сместится влево большой клин, когда малый клин соскользнет вниз и займет такое положение, что точка D совместится с C. Длины катетов AC и BE равны соответственно a и b.

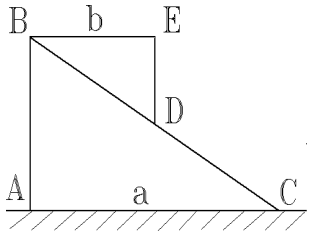

рис. 6.27

Ответ: $x = m(a-b)/(m+M)$

2-29. Парусная яхта может двигаться "против" ветра, как показано на рис. 6.28, потому что ветер оказывает на парус нормальное давление. Под каким углом к ветру нужно поставить парус, чтобы при заданном курсе яхты (угол θ между осью яхты и и направление ветра) ускорение яхты было наибольшим? Ответ: α = θ/2.

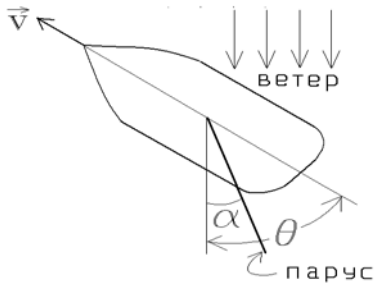

рис. 6.28

2-30. Катер массы m движется по озеру со скоростью v_0. В момент $t = 0$ выключили двигатель. Считая силу сопротивления воды прямо пропорциональной скорости движения катера $\vec{F} = -\eta\vec{v}$, где η – постоянная. Найти время движения катера с выключенным двигателем, полный путь до остановки и среднюю скорость катера за время, в течение которого его начальная скорость уменьшилась в n раз.

Ответ: $t \to \infty$, $l_{\text{полн}} = mv_0/\eta$, $\langle v \rangle = v_0 \dfrac{n-1}{n \ln n}$

2-31. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы m_1, а на ней брусок массы m_2. К бруску приложили горизонтальную силу, увеличивающуюся со временем t по закону $F = bt$, где b – постоянная. Найти зависимость от t ускорений доски a_1 и бруска a_2, если коэффициент трения

между доской и бруском равен μ. Изобразить примерные графики этих зависимостей.

Ответ: $a_1 = a_2 + bt/(m_1 + m_2)$ при $t \le t_0$; $a_1 = \mu g m_1/m_2$,

$a_2 = (bt - \mu m_2 g)/m_2$ при $t \ge t_0$, где $t_0 = \dfrac{\mu g (m_1 + m_2) m_2}{b m_1}$.

2-32. На небольшое тело массы m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени по закону $F = bt$, где b – постоянная. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом. Найти скорость тела в момент отрыва от плоскости и путь, пройденный телом к этому моменту.

Ответ: $v = \dfrac{mg^2 \cos\alpha}{2b \sin^2\alpha}$; $l = \dfrac{m^2 g^3 \cos\alpha}{6b^2 \sin^2\alpha}$

2-33. К бруску массы m, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = mg/3$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону $\alpha = bl$, где b – постоянная, l – пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска как функцию угла α. Ответ: $v = \sqrt{2g \sin\alpha / 3b}$.

2-34. Шарик, подвешенный на нити, качается в вертикальной плоскости так, что его ускорения в крайнем и нижнем положениях равны по модулю друг другу. Найти угол отклонения нити в крайнем положении.

Ответ: $53^\circ 08'$.

2-35. В системе, изображенной на рис. 6.29, массы тела 1 в n=4 раза больше массы тела 2. Высота h=20 см. Массы блоков и нитей, а также трение пренебрежимо малы. В некоторый момент тело 2 отпустили, и система пришла в движение. На какую максимальную высоту от пола поднимется тело 2?

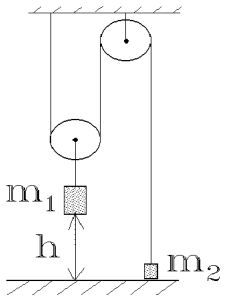

рис. 6.29

Ответ: $H = 6n\pi/(n+4) = 0{,}6$ м.

2-36. С каким минимальным ускорением следует перемещать в горизонтальном направлении брусок A, изображенный на рис. 6.30, чтобы тела 1 и 2 не двигались относительно него? Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и обоими телами равен μ. Массы блока и нитей пренебрежимо малы, трения в блоке нет.

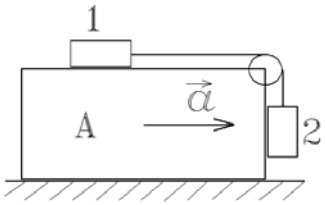

рис. 6.30

Ответ: $a_{\min} = (1-\mu) g/(1+\mu)$

2-37. По гладкой внутренней поверхности чаши, имеющей форму параболоида вращения с вертикальной осью z, с высоты h соскальзывает без трения шайба массы m. Линия сечения чаши вертикальной плоскостью удовлетворяет уравнению $z = k(x^2 + y^2)$. Найти ускорение a шайбы и силу её давления F на дно чаши в нижней точке.

Ответ: $a = 4kgh$; $F = mg(1 + 4kh)$.

2-38. С какой минимальной скоростью мотоциклист может ехать по внутренней поверхности вертикального цилиндра (так, чтобы траектория была круговой)? Радиус цилиндра $R = 5$ м, коэффициент трения между колесами и поверхностью $\mu = 0{,}34$, центр масс человека с мотоциклом находится на расстоянии $l = 0{,}8$ м от стенки. Каким при этом будет угол наклона к горизонту? Ответ: 11 м/с; $18{,}8^{\circ}$.

2-39. Цепочка массы m, образующая окружность радиуса R, надета на гладкий круговой конус с углом полураствора θ. Найти силу натяжения цепочки, если она вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии конуса.

Ответ: $T = m\left(g\operatorname{ctg}\theta + \omega^2 R\right) \Big/ 2\pi$

2-40. Поезд массы $m = 2\cdot 10^3$ т движется на северной широте $\varphi = 60^{\circ}$. Найти а) модуль и направление силы бокового давления поезда на рельсы, если он движется вдоль меридиана со скоростью $v = 54$ км/ч, б) в каком направлении и с какой скоростью должен был бы двигаться поезд, чтобы результирующая сила инерции, действующая на него в системе "Земля", была равна нулю?

Ответ: а) $F_{\text{давл}} = 3{,}8$ кН на правый (по ходу поезда) рельс, б) 418 км/ч в направлении с востока на запад.

2-41. Шарик массы m подвешен на идеальной пружине жесткости k и начальной длины l_0 над центром платформы, которая может вращаться вокруг своей оси. Какой угол образует пружина с вертикалью, если платформа вращается с угловой скоростью ω?

Ответ: $\alpha=0$, если $\omega^2 < \dfrac{k/m}{1 + kl_0/mg}$; $\alpha = \arccos\dfrac{g}{\omega^2 l_0}\left(1 - \dfrac{m\omega^2}{k}\right)$,

если $\dfrac{k/m}{1 + kl_0/mg} < \omega^2 < \dfrac{k}{m}$; при $\omega^2 = k/m$ пружина разрывается.

2-42. Будет ли возникать отдача у пушки, стреляющей вертикально вверх? Если – да, то куда будет двигаться пушка, находящаяся на экваторе, после выстрела и с какой начальной скоростью? Предполагается, что она находится на гладкой горизонтальной поверхности, её масса m_1, масса

снаряда m_2, длина ствола l, и снаряд движется внутри ствола с постоянным ускорением.

Ответ: Да, к западу с $v_0 = 2m_2 l\omega_0 / (m_1 + m_2)$, где $\omega_o = 7{,}272 \cdot 10^{-5}$ рад/с.

2-43. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_0 до v_1. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости. Ответ: $t = \dfrac{h(v_0 - v_1)}{v_0 v_1 \ln(v_0/v_1)}$

2-44. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от пройденного пути x по закону $\mu = bx$, где b – постоянная. Найти путь, пройденный бруском до остановки, и максимальную скорость его на этом пути.

Ответ: $l = 2\mathrm{tg}\alpha / b$, $v_{\max} = \sqrt{g \sin^2 \alpha / b \cos\alpha}$

2-45. Из одного неподвижного облака через τ секунд одна за другой начинают падать две дождевые капли. Как будет изменяться со временем расстояние между ними, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости капли $\vec{F} = -\eta\vec{v}$, η – постоянная?

Ответ: $\Delta l = v_0 \left[\tau + \dfrac{m}{\eta} e^{-\eta t/m} \left(1 - e^{\eta\tau/m} \right) \right]$, где $v_0 = mg/\eta$, m – масса капли.

2-46. В установке, изображенной на рис. 6.31, массы стержня M и шарика m, причем $M > m$. Шарик имеет отверстие и может скользить по нити с некоторым трением. Масса блока и трение в его оси пренебрежимо малы. В начальный момент времени шарик находился напротив нижнего конца стержня. После того, как систему предоставили самой себе, оба тела стали двигаться с постоянными ускорениями. Найти силу трения между шариком и нитью, если через t секунд после начала движения шарик оказался напротив верхнего конца стержня. Длина стержня равна l. Ответ: $F_{\text{тр}} = \dfrac{2lmM}{(M - m)\ t^2}$

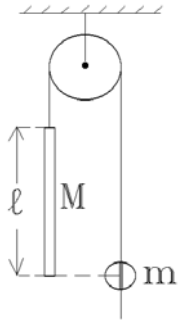

рис. 6.31

2-47. Автомашина движется равномерно по горизонтальному пути, имеющему форму синусоиды $y = A\sin(x/\alpha)$, где A и α – некоторые постоянные. Коэффициент трения между колесами и дорогой равен μ. При какой скорости движение будет происходить без скольжения? Тот же вопрос для дороги в форме эллипса с полуосями A и B.

Ответ: $v_{\text{син}} < \alpha\sqrt{\mu g / A}$; $v_{\text{элл}} < B\sqrt{\mu g / A}$

2-48. Тело массы m бросили вертикально вверх со скоростью v_0. Найти скорость v', с которой тело упадет обратно, если сила сопротивления воздуха равна μv^2, где μ – постоянная, v – скорость тела.

Ответ: $v' = v_0 \Big/ \sqrt{1 + \mu v_0^2 / mg}$

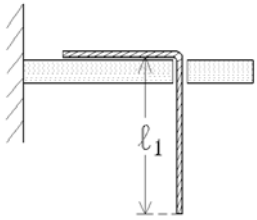

рис. 6.32

2-49. Веревка, положенная на доску, пропущена одним концом в отверстие, просверленное в доске, как показано на рис. 6.32. Найти, с какой скоростью υ соскользнет с доски конец веревки, если известна длина всей веревки l_o и длина ее конца l_1, свешивающегося в момент начала движения. Найти зависимость от времени длины свисающего с доски отрезка веревки. Трение между доской и веревкой не учитывать.

Ответ: $v = \sqrt{g\left(l^2 - l_1^2\right)/l_0}$; $\quad x = l_1 \mathrm{ch}\left(\sqrt{g/l_0}\, t\right)$

2-50. Лодка массы m_1 = 140 кг неподвижно стоит на озере. На корме и на носу лодки на расстоянии l' = 2 м друг от друга сидят рыболовы массами m_2 = 70 кг и m_3 = 40 кг. На сколько перемещается лодка относительно дна озера, когда рыболовы меняются местами? Ответ: На 12 см.

2-51. Тело массы m брошено с начальной скоростью $\vec{v}_0$, образующей угол α с горизонтом. Приняв плоскость, в которой движется тело, за плоскость x, y, и направив ось y вверх, а ось x – вдоль направления движения, найти вектор момента импульса тела относительно точки бросания в момент, когда тело находится в верхней точке траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ: $\vec{L} = -\vec{e}_z\, m v_0^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha \big/ 2g$.

2-52. Небольшое тело (материальная точка) массы m начинает скользить без трения с вершины наклонной плоскости, как показано на рис. 6.33. Буквой $\vec{n}$ обозначена на рисунке нормаль, направленная за чертеж. Найти выражение для момента импульса $\vec{L}(t)$ тела относительно точки O. Как изменится это выражение при появлении трения (коэффициент трения μ)? Ответ: $\vec{L} = \vec{n} \cdot \sin 2\alpha \cdot mght/2$

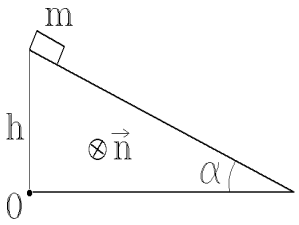

рис. 6.33

2-53. Тело массы m = 0,1 кг брошено с некоторой высоты в горизонтальном направлении со скоростью v_0 = 20 м/с. Найти модуль приращения момента импульса тела $\left|\Delta\vec{L}\right|$ относительно точки бросания за первые $\tau = 5$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\left|\Delta\vec{L}\right| = mgv_0\tau^2/2 = 245$ кг·м^{2}с$^{-1}$.

2-54. Модель ворота укреплена на одной чашке весов, как показано на рис. 6.34. На ворот с моментом инерции $I = 5\cdot10^{-4}$ кг·м^2 намотана нить с грузом массы m = 0,5 кг. Весы уравновешены, когда ворот заторможен и нить не разматывается. На сколько следует изменить массу гирь на другой чашке весов для того, чтобы восстановить равновесие, когда ворот вращается под действием опускающегося вниз груза? Радиус ворота r = 5 см.

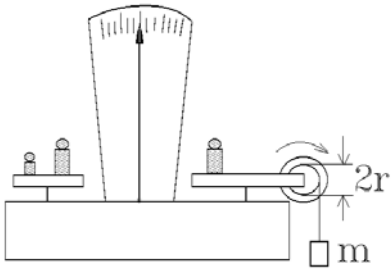

рис. 6.34

Ответ: $\Delta m = -357$ г.

2-55. Горизонтальный тонкий однородный стержень AB массы m и длины l может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. В некоторый момент на конец B начала действовать постоянная сила F, которая все время перпендикулярна первоначальному положению покоившегося стержня и направлена в горизонтальной плоскости. Найти угловую скорость стержня как функцию его угла поворота φ из начального положения (рис. 6.35).

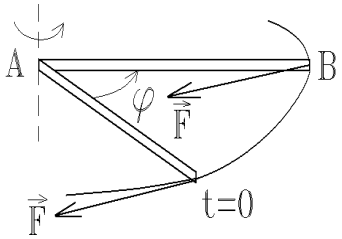

рис. 6.35

Ответ: $\omega = \sqrt{6F\sin\varphi/ml}$

2-56. Сплошной однородный цилиндр A массы m_1 может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, которая укреплена на подставке B массы m_2, как показано на рис. 6.36. На цилиндр плотно намотана легкая нить, к концу K которой приложили постоянную горизонтальную силу $\vec{F}$. Трения между подставкой и опорной горизонтальной плоскостью нет. найти ускорение точки K.

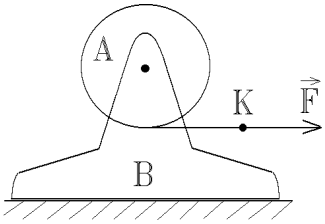

рис. 6.36

Ответ: $a = \dfrac{F\left(3m_1 + 2m_2\right)}{m_1\left(m_1 + m_2\right)}$

2-57. Блок радиуса R с моментом инерции I может вращаться вокруг своей оси с трением, характеризуемым вращательным моментом $M_{тр}$, который не зависит от скорости вращения блока. На блок намотана невесомая нить, к концу которой подвешен груз массы m. Груз отпускают без толчка, и он начинает опускаться, раскручивая блок. Найти угловую скорость блока и момент импульса системы относительно оси вращения через t секунд после начала движения.

Ответ: $L_z = (mgR - M_{тр})t$; $\omega = \dfrac{L_z}{mR^2 + I}$

2-58. Колесо с моментом инерции I вращается с угловой скоростью ω. С ним жестко связан тормозной барабан радиуса r, к которому прижимается тормозная колодка. Коэффициент трения скольжения между барабаном и колодкой равен μ. Сколько оборотов сделает колесо до полной остановки, если колодка прижимается к барабану с силой $F = \alpha t$ (где α = const)?

Ответ: $n = (\omega_0/3\pi)\sqrt{2I\omega_0 / \mu\alpha r}$.

2-59. Однородный шар массы m движется поступательно по поверхности стола под действием постоянной силы F, приложенной, как показано на рис. 6.37. Коэффициент трения между шаром и столом равен μ. Найти силу F и ускорение центра шара.

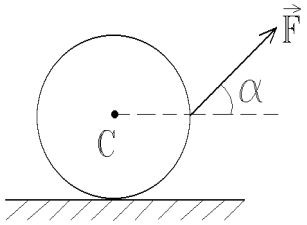

рис. 6.37

Ответ: $F = \dfrac{\mu mg}{(1+\mu)\sin\alpha}$, $a_C = \dfrac{\mu g}{1+\mu}(\mathrm{ctg}\alpha - 1)$

2-60. Молярная масса молекулы ДНК из бактериофага Т2 составляет $1{,}2\cdot10^5$ кг/моль. Молекула ДНК представляет собой двойную спираль, похожую на винтовую лестницу, в которой $1{,}2\cdot10^4$ витков, а радиус витка спирали 0,67 нм. Оценить момент инерции этой молекулы относительно оси спирали. Сколько примерно времени потребуется на то, чтобы "развинтить" эту спираль со скоростью $3\cdot10^8$ рад/с на две отдельные спирали?

Ответ: $I \approx 5\cdot10^{-31}$ г·см^2; $\tau \approx 0{,}2$ мс.

2-61. На полюсе установлена пушка, ствол которой направлен горизонтально и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через замок орудия. С какой угловой скоростью относительно Земли будет вращаться ствол пушки после выстрела? Считать, что в начальный момент времени снаряд находится на оси вращения и движется внутри ствола при выстреле с постоянным ускорением a. Масса пушки ($M = 1000$ кг) значительно больше массы снаряда (m = 10 кг). Длин ствола значительно больше его диаметра. $\omega_З$ – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

Ответ: $\omega = (3m/M)\omega_З = 2{,}2\cdot10^{-6}$ рад/с.

2-62. Система состоит из однородного массивного блока радиусом R = 15 см, на который намотана нить с грузом на конце. Нить перекинута через гладкий горизонтальный стержень C, укрепленный в стене (рис. 6.38). В момент $t = 0$ система пришла в движение. Найти момент импульса системы относительно оси блока через 4 с после начала движения, если в процессе движения нить давит на стержень C с постоянной силой F = 50 Н, а угол θ = 60°.

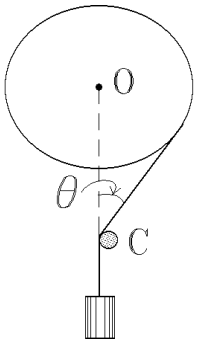

рис. 6.38

Ответ: 30 кг·м^2/с.

2-63. Небольшой шарик массы m, привязанный к нити длины l к потолку в точке O, движется по горизонтальной окружности в постоянной угловой скоростью ω. Относительно каких точек момент импульса $\vec{L}$ шарика остается постоянным? Найти модуль приращения вектора момента импульса относительно точки O за половину оборота.

Ответ: $\left|\Delta\vec{L}\right| = \left(2mgl/\omega\right)\sqrt{1-\left(g\,/\,\omega^2 l\right)^2}$

2-64. Маховик с начальной угловой скоростью ω_o начинает тормозиться силами, момент которых относительно его оси пропорционален квадратному корню из его угловой скорости. Найти среднюю угловую скорость маховика за все время торможения.

Ответ: $\langle\omega\rangle = \omega_0/3$

2-65. Однородный диск радиуса R раскрутили до угловой скорости ω_o и осторожно положили на горизонтальную поверхность. Сколько времени диск будет вращаться на поверхности, если коэффициент трения равен μ? Давление диска на поверхность считать равномерным.

Ответ: $t = 3\omega R\,/\,4\mu g$

2-66. Тонкую квадратную пластинку со стороной l и массой m раскрутили вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон, как показано на рис. 6.39, до угловой скорости ω_o. После этого пластинку предоставили самой себе. Считая, что сила сопротивления окружающей среды все время перпендикулярна поверхности пластинки и пропорциональна ее скорости (т.е. на единицу поверхности пластинки действует сила $f = kv$), найти угловую скорость пластинки как функцию времени.

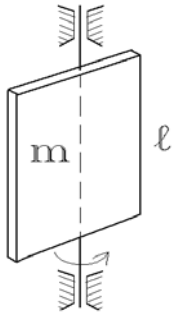

рис. 6.39

Ответ: $\omega = \omega_0 \exp\left(-kl^2\tau/m\right)$

2-67. Тонкий стержень длиной $a+b$ шарнирно закреплен в точке, отстоящей на расстоянии b от одного из его концов, и вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, описывая круговой конус, как показано на рис. 6.40. Определить угол α отклонения стержня от вертикали.

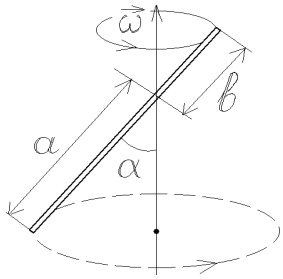

рис. 6.40

Ответ: $\alpha = \arccos\dfrac{3\left(a^2-b^2\right)g}{2\omega^2\left(a^2+b^2\right)}$

2-68. В системе, показанной на рис. 6.41, однородному диску сообщили угловую скорость вокруг горизонтальной оси O, а затем осторожно опустили на него конец A стержня так, что он образовал угол $\theta = 45^{\circ}$ с вертикалью. Трение имеется только между диском и стержнем, коэффициент трения $\mu = 0{,}13$. Найти отношение n_2/n_1, где n_1 и n_2 – числа оборотов диска до остановки при его вращении по и против часовой стрелки – при одинаковой начальной скорости.

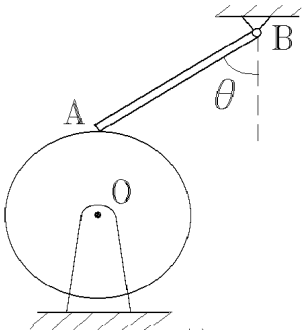

рис. 6.41

Ответ: $n_2/n_1 = (1-\mu)/(1+\mu) = 0{,}77$.

2-69. Горизонтально расположенный однородный стержень AB массы $m = 1{,}4$ кг и длины $l_o = 1$ м вращается свободно вокруг неподвижной вертикальной оси OO', проходящей через его конец A. Точка A находится посредине оси OO', длина которой $l = 0{,}55$ м. При каком значении угловой скорости стержня горизонтальная составляющая силы, действующей на нижний конец оси OO', будет равна нулю? Какова при этом горизонтальная составляющая силы, действующая на верхний конец оси?

Ответ: $\omega = \sqrt{2g/l}$, $\quad F = mgl_0/l$

2-70. На каком расстоянии от оси баллистического маятника должно находиться место попадания горизонтально летящей пули, чтобы при ударе ось маятника не испытывала дополнительной нагрузки? Примечание: баллистический маятник – произвольное тело, способное совершать колебания около горизонтальной оси.

Ответ: $l = I/md$, где d – расстояние от оси до центра масс маятника.

2-71. Однородный диск радиуса $R = 5$ см, вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 60$ рад/с, падает в вертикальном положении на горизонтальную шероховатую поверхность и отскакивает под углом $\theta = 30^{\circ}$ к вертикали, уже не вращаясь. Найти скорость диска сразу после столкновения. Ответ: $v_C = \dfrac{R\omega}{2\sin\theta} = 3$ м/с.

2-72. Однородный цилиндр радиуса R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_o и поместили затем в угол, как показано на рис. 6.42. Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен μ. Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?

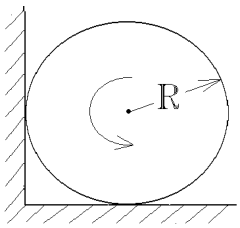

рис. 6.42

Ответ: $n = \dfrac{\left(1+\mu^2\right)\omega_0 R}{8\pi\mu(1+\mu)g}$

2-73. На шероховатой горизонтальной доске стоит прямоугольная призма высотой h и с квадратным основанием площадью b^2. С каким минимальным ускорением нужно начать двигать доску в горизонтальном направлении, чтобы призма опрокинулась назад (через ребро основания)? Найти также силу нормального давления призмы на доску и точку ее приложения при движении доски с ускорением $a < a_{\min}$. Скольжение отсутствует.

Ответ: $a_{\min} = bg/h$; $F_{\text{давл}} = mg$; $x = ah/2g$.

2-74. Автомобиль с шириной колеи $2b$ и высотой h центра масс над землей проходит горизонтальное закругление дороги радиуса R. При какой скорости он опрокинется, если не возникнет скольжения колес в направлении, перпендикулярном скорости автомобиля? При каком минимальном коэффициенте трения μ это может произойти?

Ответ: $v > \sqrt{gbR/h}$; $\mu_{\min} > b/h$

2-75. Тонкий стержень длины l = 1 м и массы m = 0,6 кг может вращаться без трения вокруг перпендикулярной к нему горизонтальной оси, отстоящей от центра стержня на расстояние b = 0,1 м. Стержень приводится в горизонтальное положение и отпускается без толчка с нулевой начальной скоростью. Найти 1) угловое ускорение стержня ε_o и силу давления F_o на ось в начальный момент времени; 2) угловую скорость и силу давления на ось в момент прохождения положения равновесия.

Ответ: 1) $\varepsilon_0 = \dfrac{12gb}{l^2 + 12b^2}$ =10,5 рад/с^2, $F_0 = \dfrac{mgl^2}{l^2 + 12b^2}$ =5,35 Н;

2) ω=4,6 рад/с, F=7,1 Н.

2-76. Расположенный горизонтально однородный цилиндр радиуса R может вращаться вокруг оси, совпадающей с его геометрической осью. Трение в оси создает не зависящий от частоты вращения момент $M_{\text{тр}}$. К цилиндру прикреплена точечная масса m^*, как показано на рис. 6.43. Цилиндр устанавливают так, чтобы эта масса оказалась на уровне оси, и отпускают без толчка. Найти, при каком значении m^*: а) цилиндр придет во вращение; б) сделав 1/4 оборота, цилиндр остановится.

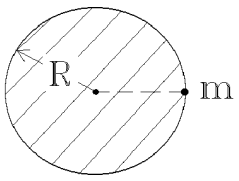

рис. 6.43

Ответ: а) $m^* > M_{\text{тр}}/gR$; б) $m^* = \pi M_{\text{тр}}/2gR$.

2-77. Автомобиль, одна из дверец которого открыта и составляет угол 90° с кузовом автомобиля, трогается с места с ускорением a. За какой промежуток времени дверца закроется, если ее центр масс находится на расстоянии l от петель? Масса дверцы m, момент инерции I.

Ответ: $t = 1{,}854\sqrt{\dfrac{I}{mal}}$

2-78. Какое максимальное ускорение может развить автомобиль с задней ведущей осью, если коэффициент трения скольжения колес о землю равен μ, расстояние между осями l, а центр масс автомобиля находится на высоте h (от дороги) посредине колесной базы?

Ответ: $a_{max} = \mu g/2(1-\mu h/l)$ при обязательном условии $\mu h/l \le 1/2$.

2-79. С наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатывается без скольжения однородное симметричное тело радиуса R и момента I (диск, цилиндр, шар, кольцо и т.п.). Найти ускорение центра масс тела и силу трения сцепления о плоскость.

Ответ: $a_C = \dfrac{g\sin\alpha}{1+I/mR^2}$; $F_{сц} = mg\sin\alpha\dfrac{I}{I+mR^2}$

2-80. Тонкие нити плотно намотаны на концах однородного сплошного цилиндра массы m. Свободные концы нитей прикреплены к потолку кабины лифта. Кабина начала подниматься с ускорением a_o. Найти ускорение a' цилиндра относительно кабины и силу F, с которой цилиндр действует (через нити) на потолок.

Ответ: $a' = 2(g + a_o)/3$; $F=m(g + a_o)/3$.

2-81. На гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^o$ с горизонтом, находится катушка с ниткой, свободный конец которой укреплен, как показано на рис. 6.44. Масса катушки m = 200 г, ее момент инерции относительно собственной оси I=0,45 г·м^2, радиус намотанного слоя ниток r = 3 см. Найти ускорение оси катушки.

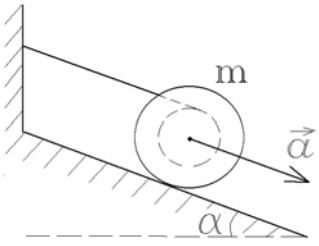

рис. 6.44

Ответ: a = 1,4 м/с^2.

2-82. Однородный цилиндр находится на доске на расстоянии l от ее правого конца. С какой скоростью относительно доски будет двигаться цилиндр вблизи края доски, если ей сообщить влево ускорение a_o? Движение цилиндра происходит без скольжения.

Ответ: $v' = 2\sqrt{a_0 l/3}$

2-83. На валик радиусом r = 15 мм наглухо насажен сплошной диск радиусом R = 50 мм, сделанный из того же материала (стали) плотностью ρ = 8 г·см$^{-3}$. На оси валика, которая проходит в отверстии внутри валика, свободно (без трения) на нитях подвешен груз массы m = 314 г. На валик симметрично намотаны нити, за которые система подвешена к потолку. Весом нитей и оси пренебречь. Определить ускорение a системы.

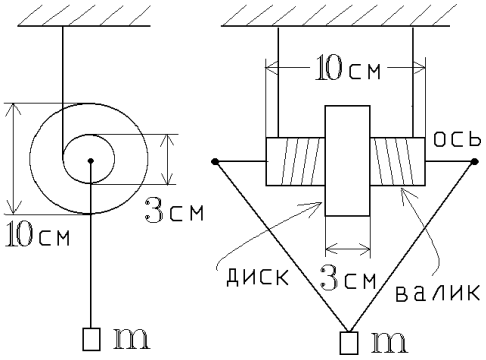

рис. 6.45

Ответ: a = 1,92 м·с$^{-2}$.

2-84. Установка, изображенная на рис. 6.46, состоит из двух одинаковых сплошных однородных цилиндров каждый массы m, на которые симметрично намотаны две нити, не имеющие массы. Найти натяжение каждой нити в процессе движения. Трения в оси верхнего цилиндра нет. Ответ: $T = 0{,}1mg$.

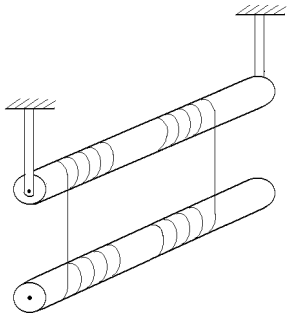

рис. 6.46

2-85. Найти ускорение, с которым цилиндрическая бочка, целиком заполненная жидкостью, скатывается без скольжения с наклонной плоскости с углом наклона α. Трением между жидкостью и стенками бочки пренебречь; момент инерции бочки относительно оси равен I; массы воды и бочки – m_1 и m_2 соответственно, радиус бочки R. Ответ: $a_C = \dfrac{(m_1 + m_2)\, g \sin\alpha}{m_1 + m_2 + I/R^2}$

2-86. Однородный диск радиуса R и массы m лежит на гладкой горизонтальной поверхности. На боковую поверхность диска плотно намотана нить, к свободному концу K которой приложили постоянную горизонтальную силу F. После начала движения точка K переместилась на расстояние l. Найти угловую скорость диска к этому моменту.

Ответ: $\omega = 2\sqrt{\dfrac{2Fl}{3mR^2}}$

2-87. С каким ускорением сплошной однородный шарик скатывается без скольжения по наклонному желобу, образующему угол α с горизонтом. Форма желоба показана на рис. 6.47.

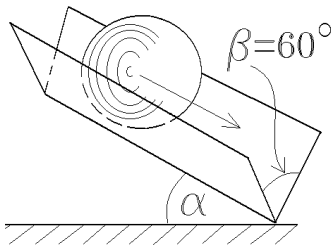

рис. 6.47

Ответ: $5g\sin\alpha/13$.

2-88. Цилиндр или шар (полые или сплошные) катятся по наклонной плоскости с углом α. При каких значениях угла α будет происходить качение со скольжением, если коэффициент трения между катящимся телом и наклонной плоскостью равен μ? Для какого из четырех перечисленных тел этот угол наибольший?

Ответ: $\alpha > \mathrm{arctg}\left[\mu\left(1 + mR^2/I\right)\right]$; для сплошного шара.

2-89. При каких значениях коэффициента трения μ а) однородный шарик будет скатываться с наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, без скольжения? б) тот же вопрос для однородного цилиндра.

Ответ: а) $\mu \geq \dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{3{,}5}$; б) $\mu \geq \dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{3}$

2-90. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы m_1 и на ней однородный шар массы m_2. К доске приложили постоянную горизонтальную силу F. С какими ускорениями будут двигаться доска и центр шара относительно доски в отсутствие скольжения между ними?

Ответ: $a_o = \dfrac{7F}{7m_1 + 2m_2}$; $a' = \dfrac{2F}{7m_1 + 2m_2}$

2-91. В системе, показанной на рис. 6.48, известны масса m груза A, масса M ступенчатого блока B, момент инерции I последнего относительно его оси и радиусы ступеней блока R и $2R$. Масса нитей пренебрежимо мала. Найти ускорение груза A.

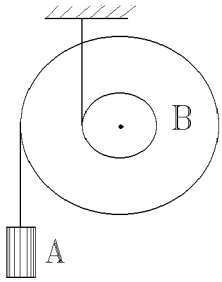

рис. 6.48

Ответ: $a = (m_1 - m_2)g \Big/ \left(m_1 + m_2/2 + I/2R^2\right)$

2-92. На двух параллельных сплошных цилиндрических катках находится доска, к которой приложена горизонтальная сила F. Массы катков одинаковы и равны m_1, масса доски m_2; между всеми соприкасающимися поверхностями нет скольжения. Найти ускорение доски.

Ответ: $a = F/(m_2 + 0{,}75m_1)$.

2-93. Однородный шарик радиуса 1 см и массы 0,102 кг помещен на плоскость, образующую угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, как показано на рис. 6.49. Коэффициент трения шарика μ = 0,1. Найти значения скоростей точек A, B и C шарика спустя секунду после начала движения.

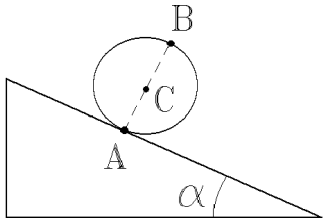

рис. 6.49

Ответ: v_A = 1,9 м/с; v_B = 6,2 м/с; v_C = 4,1 м/с.

2-94. На двух параллельных горизонтальных брусьях, как показано на рис. 6.50, лежит сплошной цилиндр радиусом R и массой m, на который намотана веревка. К опущенному вниз концу веревки приложена вертикальная сила F, равная половине веса цилиндра. Найти горизонтальное ускорение цилиндра и минимальное значение коэффициента трения μ между цилиндром и брусьями, при котором будет происходить качение без скольжения. Ось цилиндра перпендикулярна брусьям, центр его тяжести и сила F лежат в вертикальной плоскости, проходящей посередине между брусьями. Ответ: $a = g/3$; $\mu \geq 2/9$.

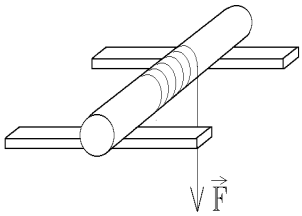

рис. 6.50

2-95. Сплошному цилиндру радиуса R = 10 см и массой m сообщено вращение вокруг его оси с частотой ν_o = 10 об/с. Вращающийся цилиндр кладут на горизонтальную плоскость и предоставляют самому себе. Он

начинает двигаться по плоскости, причем коэффициент трения скольжения между цилиндром и плоскостью $\mu = 0{,}1$. Определить, через какое время τ движение цилиндра перейдет в чистое качение без скольжения. Сила трения скольжения предполагается не зависящей от скорости, а трение качения отсутствует. Какое ускорение будет иметь цилиндр при $t > \tau$?

Ответ: $\tau = 2{,}135$ с; $a_C(t > \tau) = 0$.

2-96. На катушку массы m_1 и моментом инерции относительно оси симметрии I симметрично (рис. 6.51) намотаны две нити, поддерживающие груз массы m_2. Сама катушка также подвешена к потолку на двух симметрично намотанных нитях. Система падает вниз и все нити разматываются. Радиус валика, на который они намотаны, равен r. Найти натяжение нитей при условии $I/r^2 > m_1$. Что произойдет при $I/r^2 \le m_1$?

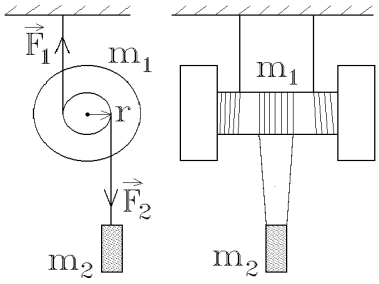

рис. 6.51

Ответ: $F_1 = \left(m_2 + \dfrac{I}{2r^2}\right)a - \dfrac{m_2 g}{2}$; $F_2 = m_2\left(\dfrac{g}{2} - a\right)$, где $a = \dfrac{(2m_2 + m_1)g}{4m_2 + m_1 + I/r^2}$ – ускорение катушки. При $I \le m_1 r^2$: $F_2 = 0$, $F_1 = \dfrac{I}{2r^2}a$, где $a = \dfrac{m_1 g}{m_1 + I/r^2}$

2-97. Полый цилиндр массы m_1 скатывается без скольжения с наклонной плоскости с углом α. В цилиндре находится гладкий шарик массы m_2, который может скользить по внутренней поверхности без трения. Найти такое положение шарика, при котором он будет двигаться параллельно наклонной плоскости (если такое положение существует). Рассмотреть предельные случаи: $m_2/m_1 << 1$ и $\alpha << 1$.

Ответ: $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{m_1}{2m_1 + m_2}\mathrm{tg}\alpha$, где φ – угловое отклонение шарика от точки касания цилиндра с плоскостью.

2-98. Система тел, состоящая из сплошного цилиндра массы m_1, груза массы m_2, легкого неподвижного блока и невесомой нити, навитой на цилиндр, изображена на рис. 6.52. Каким должен быть коэффициент трения, чтобы качение цилиндра происходило со скольжением? Ответ: $\mu < 1/(8+3m_1/m_2)$.

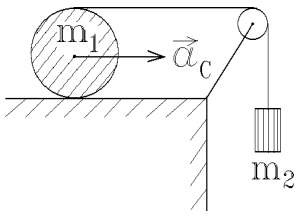

рис. 6.52

2-99. Корабль массы 10^7 кг гироскопически стабилизируется однородным круглым диском массой $5\cdot10^4$ кг и радиусом 2 м, который вращается с частотой 15 об/с. Время свободного поворота при крене

(считая крен от –20° до +20°) составляет 12 с. Оценить момент сил, стабилизирующий корабль при таком крене. Ответ: $\approx 10^6$ Н·м.

2-100. На полу кабины лифта, которая начинает подниматься с постоянным ускорением $a = 2$ м/с^2, установлен гироскоп – однородный диск радиуса R = 5 см на конце стержня l = 10 см, показанный на рис. 6.53. Другой конец стержня укреплен в шарнире О. Гироскоп прецессирует в горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\Omega = \pi$ рад/с. Пренебрегая трением и массой стержня, найти собственную угловую скорость диска.

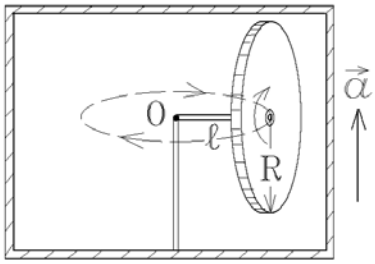

рис. 6.53

Ответ: $\omega = 2(g+a)l \,/\, \Omega R^2$ =300 рад/с.

2-101. Волчок массы m, ось которого наклонена под углом θ = 30° к вертикали, прецессирует под действием силы тяжести. Момент инерции волчка относительно его оси симметрии I = 2 г·м^2, угловая скорость вращения вокруг этой оси ω = 350 рад/с, расстояние от точки опоры до центра масс волчка l = 10 см. Найти модуль и направление горизонтальной составляющей силы реакции, действующей на волчок в точке опоры.

Ответ: 0,012 Н.

2-102. Какой момент сил следует приложить к рулю мотоцикла, чтобы на скорости 36 км/ч повернуть его на 30° за 1 с? Момент инерции колеса мотоцикла 0,5 кг·м^2, радиус 20 см. Под каким углом к горизонту он должен при этом наклониться? Ответ: 13 Н·м; 62°.

2-103. Локомотив приводится в движение турбиной, ось которой параллельна осям колес. Направление вращения турбины совпадает с направлением вращения колес. Момент инерции ротора турбины относительно собственной оси I = 240 кг·м^2. Найти добавочную силу давления на рельсы, обусловленную гироскопическими силами, когда локомотив идет по закруглению радиуса R = 250 м со скоростью v = 50 км/ч. Расстояние между рельсами l = 1,5 м. Турбина делает n = 1500 об/мин.

Ответ: На наружный рельс нагрузка возрастет, на внутренний – уменьшится на $F_{доб} = 2\pi nIv/Rl$ = 1400 Н.

2-104. Диск гироскопа массы m = 5 кг и радиуса r = 5 см вращается с угловой скоростью ω = 330 рад/с. Расстояние между подшипниками, в которых укреплена ось диска, l = 15 см. Ось вынуждают совершать гармонические колебания с периодом T = 1 с и амплитудой α_m = 20°. Найти максимальное значение гироскопических сил, действующих на подшипники со стороны оси диска. Ответ: $F_{max} = mr^2\omega\pi\alpha_m \,/\, lT$ =30 Н.

2-105. Массивный цилиндрический каток, могущий вращаться вокруг своей геометрической оси, приводится во вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω и катится по горизонтальной опорной плите (дисковая мельница). Найти силу давления катка на опорную плиту. Радиус катка 0,5 м, а рабочая частота вращения вокруг вертикальной оси равна 1 об/с. Ответ: $F_{давл} \approx 2mg$

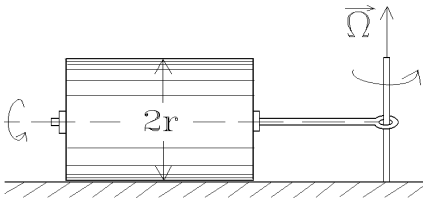

рис. 6.54

2-106. Плотность цилиндра радиуса R линейно возрастает вдоль радиуса цилиндра от значения ρ_1 до значения $\rho_2 = 3\rho_1$. Вычислить момент инерции I цилиндра относительно его оси. Ответ: $I = 39mR^2/70$

2-107. Прямой круглый однородный конус имеет массу m = 3 кг и радиус основания R = 10 см. Найти момент инерции конуса относительно его оси. Ответ: $I = 9\cdot10^{-3}$ кг·м^2.

2-108. Однородная прямоугольная пластинка массы m длины a и ширины b вращается с постоянным угловым ускорением ε вокруг оси, перпендикулярной пластинке и проходящей через одну из ее вершин. Найти момент сил, действующий на пластинку. Ответ: $M = \varepsilon m\left(a^2 + b^2\right)/3$

2-109. Однородный куб массы m с длиной ребра l в начальный момент времени t = 0 начинает вращаться относительно оси, проходящей через центры его противолежащих граней, с постоянным угловым ускорением ε. Найти момент импульса куба в момент времени t. Ответ: $L = \varepsilon ml^2t/6$.

2-110. Однородная пирамида, основанием которой служит квадрат со стороной l (рис. 6.55), начинает в момент времени t = 0 вращаться вокруг оси, проходящей через вершину и центр основания, под действием силы F все время приложенной вдоль ребра основания. Найти среднюю угловую скорость пирамиды за промежуток времени от t = 0 до t = τ. Масса пирамиды равна m. Ответ: $\langle\omega\rangle = 5F\tau / 2ml$

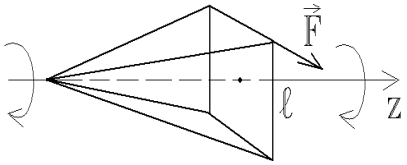

рис. 6.55

2-111. Куб, изображенный на рис. 6.56, может вращаться вокруг оси OO', проведенный через центры противолежащих граней и вокруг оси AA'. Считая, что моменты сил, действующих на куб, в обоих случаях одинаковы, определить, в каком случае работа этих моментов сил при повороте куба на один и тот же угол φ больше: при повороте вокруг OO' или вокруг AA'? И в каком случае

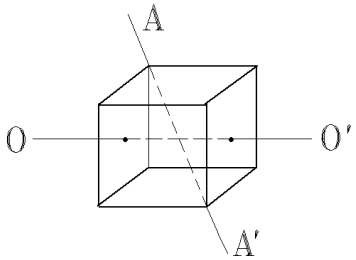

рис. 6.56

куб приобретет большую угловую скорость ω?

Ответ: $A_{AA'} \equiv A_{OO'}$; $\omega_{AA'} = \omega_{OO'}$, если вращение начинается с один момент времени.

2-112. Имеется однородный прямой круглый цилиндр. При каком отношении высоты цилиндра h к его радиусу R все три главных момента инерции будут одинаковыми? Ответ: $h = R\sqrt{3}$

2-113. Куб и шар начинают одновременно вращаться вокруг оси, проходящей через их центр масс (ось куба проходит через центр основания) под действием одинаковых моментов сил M. Плотности и массы куба и шара одинаковы. Определить отношение их угловых скоростей в произвольный момент времени t. Ответ: $\omega_{куба} / \omega_{шара} = 0,924$.

2-114. Конус с основанием, имеющим радиус r, катится по горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, на которой закреплена вершина конуса O на высоте r от плоскости. Угловая скорость вращения конуса ω_z изменяется по закону $\omega_z = kt^3$ со временем t, k – постоянная. Масса конуса равна m, а его высота равна h. Определить среднее значение z-проекции момента сил, действующего на конус в промежуток времени от t=0 до $t=\tau$.

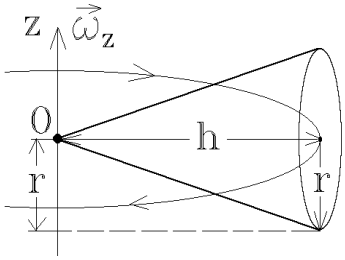

рис. 6.57

Ответ: $\langle M_z \rangle = 0,6mk\tau^2 \left(h^2 + r^2/4\right)$

2-115. Однородный диск радиуса R = 20 см имеет круглый вырез, как показано на рис. 6.58. Масса оставшейся (заштрихованной) части диска m = 7,3 кг. Найти момент инерции такого диска относительно оси, проходящей через его центр инерции C и перпендикулярной к плоскости диска. Ответ: $I = 37mR^2/72 = 0,15$ кг·м^2

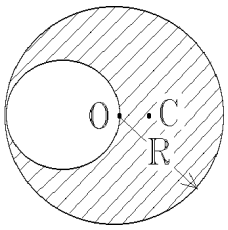

рис. 6.58

2-116. Вывести формулу для момента инерции однородного шара массы m и радиуса R и с его помощью найти момент инерции тонкого сферического слоя массы m и радиуса R относительно оси6 проходящей через через его центр. Ответ: $I_{слоя} = 2mR^2/3$

Тематика задач

(Число, стоящее в скобках около номера задачи, обозначает примерный уровень сложности по восьмибалльной шкале)

Динамика поступательного движения

2-1 - ДО,СЗ	(1)	2-18 - ЦБ	(2)	2-35 - СТ	(3)
2-2 - ИМ	(1)	2-19 - ДО,ЦБ	(2)	2-36 - СТ,СИС	(3)
2-3 - ИМ	(1)	2-20 - ИМ	(2)	2-37 - ДК,РКС	(3)
2-4 - ДО,ЦБ,ПУ	(1)	2-21 - НП,СТ	(2)	2-38 - ДО,ЦБ	(3)
2-5 - КС,ЦБ	(1)	2-22 - ДК	(2)	2-39 - ДО,ЦБ	(3)
2-6 - ИМ,СЗ	(1)	2-23 - КС	(2)	2-40 - КС	(3)
2-7 - СТ	(1)	2-24 - НП,СТ	(2)	2-41 - ДО,ЦБ,СУ	(3)
2-8 - НП	(2)	2-25 - СИ,СТ	(2)	2-42 - КС,ИФ	(3)
2-9 - НП	(2)	2-26 - ИМ	(2)	2-43 - С2,ИУ	(4)
2-10 - НП,ЭК	(2)	2-27 - ИМ	(2)	2-44 - НП,ИУ	(4)
2-11 - НП,СТ,СИ	(2)	2-28 - СТ,ЦМ	(2)	2-45 - С1,ИУ	(4)
2-12 - СТ	(2)	2-29 - ЭК	(2)	2-46 - СТ	(4)
2-13 - С2,ИУ	(2)	2-30 - С1,ИУ	(2)	2-47 - ДК,РК	(4)
2-14 - ЦМ	(2)	2-31 - СИ,СТ	(3)	2-48 - С2,ИУ	(5)
2-15 - СТ	(2)	2-32 - ИФ	(3)	2-49 - ИУ,ИФ	(5)
2-16 - ДО,ЦБ,ЭК	(1)	2-33 - ИФ	(3)	2-50 - ЦМ	(5)
2-17 - ДО,ЦМ	(2)	2-34 - ДО	(3)		

Динамика вращательного движения

2-51 – МИТ	(1)	2-67 - ЦБ	(3)	2-83 – ПЛ,ПД,СТКД	(3)
2-52 – МИТ	(1)	2-68 - ВД	(3)	2-84 – ПЛ,СТ	(3)
2-53 – МИТ	(2)	2-69 - ЦБ	(3)	2-85 – ПЛ,ПД	(3)
2-54 – ПВ,СТ	(2)	2-70 - ПВ	(3)	2-86 – ПЛ	(3)
2-55 – ИУ	(2)	2-71 - ПВ	(3)	2-87 – ПЛ,НП	(3)
2-56 – ПВ	(2)	2-72 - МС	(4)	2-88 – ПЛ,НП	(3)
2-57 – МИ,СТ	(2)	2-73 - ПВ	(4)	2-89 – ПЛ,НП	(3)
2-58 – ИУ	(2)	2-74 - ДО,СИ	(4)	2-90 – ПЛ,СИ,СТ	(4)
2-59 – МС,ПД	(2)	2-75 - ПВ,ДО	(5)	2-91 – ПЛ	(4)
2-60 – ВД	(2)	2-76 - ИУ	(5)	2-92 – ПЛ,ПД	(4)
2-61 – ВД	(2)	2-77 - ИУ,СИ	(5)	2-93 - ПЛ	(4)
2-62 – МИ	(2)	2-78 - СИ	(6)	2-94 - ПЛ	(4)
2-63 – МИТ	(3)	2-79 - ПЛ	(2)	2-95 - ПЛ	(5)
2-64 – ИУ,СЗ	(3)	2-80 - ПЛ,СИ	(2)	2-96 - ПЛ,ПД,СТ	(6)
2-65 – МС	(3)	2-81 - ПЛ	(2)	2-97 - ПЛ,НП	(6)
2-66 – МС,ТС	(3)	2-82 - ПЛ	(2)	2-98 - ПЛ,ПД,СТ	(6)

Элементарная теория гироскопа

2-99 - ПР	(1)	2-101 - СИ	(2)	2-103 - ГЭ	(3)
2-100 - СИ	(2)	2-102 - ПР	(2)	2-104 - ГЭ	(3)
2-105 - ГЭ	(3)				

Вычисление моментов инерции

2-106 - ИФ	(2)	2-110 - ИФ,МС	(2)	2-114 - ИФ,МС	(3)
2-107 - ИФ	(2)	2-111 - ГО	(2)	2-115 - ИФ	(3)
2-108 - ИФ	(2)	2-112 - ИФ,ГО	(2)	2-116 - ИФ	(3)
2-109 - ИФ,МИ	(2)	2-113 - ВД	(3)		

Пояснения к аббревиатуре

ВД -- вращательное движение твердого тела,
ГО -- главные оси.
ГЭ -- гироскопический эффект,
ДК -- движение по произвольной криволинейной траектории,
ДО -- движение по окружности,
ИМ -- изменение импульса частицы,
ИУ -- интегрирование уравнений движения,
ИФ -- интегрирование функций,
КС -- кориолисова сила,
МИ -- момент импульса относительно оси,
МИТ -- момент импульса относительно точки,
МС -- момент силы,
НП -- движение по наклонной плоскости,
ПВ -- поступательное и вращательное движения в системе тел,
ПД -- поступательное движение,
ПЛ -- плоское движение твердого тела,
ПР -- прецессия гироскопа,
РК -- радиус кривизны траектории,
С2 -- сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости,
СЗ -- средние значения физических величин,
СИ -- сила инерции при поступательном движении,
С1 -- сила сопротивления, пропорциональная скорости,
СТ -- система взаимодействующих тел,
СУ -- сила упругости,
ЦБ -- центробежная сила,
ЦМ -- закон движения центра масс,
ЭК -- экстремальные значения физических величин.

3. Законы сохранения

3-1. Тело перемещают по двум траекториям – горизонтальной AB и состоящей из двух наклонных отрезков AC и CB, как показано на рис. 6.59. Коэффициент трения одинаков на всех участках. Найти отношение работ, совершенных против сил трения при движении по этим двум траекториям.

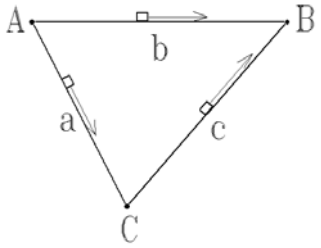

рис. 6.59

Ответ: 1.

3-2. Тело массы m толкнули вверх по наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту, сообщив ему начальную скорость v_0. Какой путь пройдет тело до остановки и какова на этом пути работа сил трения, если коэффициент трения равен μ?

Ответ: $l = \dfrac{v_0^2}{2g\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)}$; $\quad A = -\dfrac{\mu m v_0^2}{2\left(\mu + \mathrm{tg}\alpha\right)}$

3-3. Однородный шар массы m и радиуса r катится без скольжения по горизонтальной плоскости, вращаясь вокруг горизонтальной оси OA (рис. 6.60). При этом центр шара движется со скоростью v по окружности радиуса R. Найти кинетическую энергию шара. Ответ: $K = 07mv^2\left(1 + 2r^2/7R^2\right)$

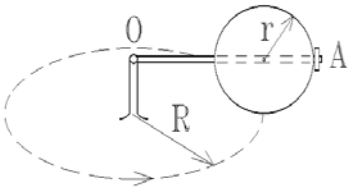

рис. 6.60

3-4. Обручу массы m, стоящему на полу, сообщили скорость v без вращения. Пренебрегая трением качения, найти энергию, израсходованную на преодоление трения скольжения к тому моменту, когда движение обруча перейдет в чистое качение. Ответ: $\Delta E = mv^2/4$.

3-5. Кинетическая энергия частицы, движущейся по окружности радиуса R, зависит от пройденного пути l по закону $K = bl^2$, где b – постоянная. Найти зависимость силы, действующей на частицу, от l.

Ответ: $F = 2bl\sqrt{1 + \left(l/R\right)^2}$

3-6. Вытащенное из колодца ведро с водой уронили, и оно стало опускаться вниз, раскручивая ворот. Трение в подшипниках ворота создает постоянный вращательный момент M = 0,17 Н·м. Масса ведра с водой m_1 = 13,2 кг, масса ворота m_2 = 43,1 кг, радиус ворота r = 12,8 см, расстояние от края сруба до воды в колодце h = 7 м. Определить, через сколько времени τ ведро коснется воды в колодце и какую работу A совершают силы трения за

время падения ведра. Ворот считать сплошным однородным цилиндром, массой и толщиной веревки пренебречь. Ответ: $\tau = 1{,}9$ с; $A = -9{,}0$ Дж.

3-7. В системе, изображенной на рис. 6.61, известны массы тел m_1 и m_2, коэффициент трения μ между телом m_1 и горизонтальной плоскостью, а также масса блока m, который можно считать однородным диском. В момент $t = 0$ тело m_2 начинает опускаться, причем нить движется по блоку без проскальзывания. Пренебрегая массой нити и трением в оси блока, найти работу силы трения, действующей на тело m_1, за первые t секунд после начала движения. Ответ: $A = -\dfrac{(m_2 - \mu m_1)\mu m_1 (gt)^2}{m + 2(m_1 + m_2)}$

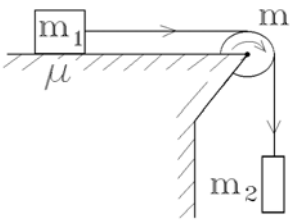

рис. 6.61

3-8. Однородный шар массы m и радиуса R скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти кинетическую энергию шара через t секунд после начала движения.

Ответ: $K = 5mg^2t^2 \sin^2 \alpha / 14$

3-9. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = a(x/y - y/z)$. Найти силу, действующую на частицу, и работу A, совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки (1, 1, 1) в точку (2, 2, 3).

Ответ: $\vec{F} = -\dfrac{a}{y}\vec{e}_x + a\left(\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{1}{z}\right)\vec{e}_y - \dfrac{ay}{z^2}\vec{e}_z$; $A = -a/3$

3-10. Найти кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью $\vec{v}$, если масса гусеницы равна m (рис. 6.62). Ответ: $K = mv^2$.

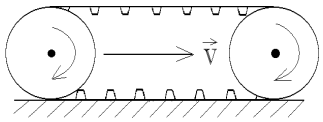

рис. 6.62

3-11. Тонкий стержень массы $m = 200$ г и длины $l = 1$ м может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его конец. Если угол между вертикалью и стержнем, отсчитываемый от верхнего положения стержня, составляет $\varphi_o = 10^o$, стержень начинает поворачиваться. Найти 1) угловую скорость стержня в момент прохождения им нижнего положения и 2) модуль момента импульса в тот же момент времени.

Ответ: $\omega = 6{,}6$ рад/с; $L = 0{,}44$ кг·м^{2}с$^{-2}$.

3-12. Локомотив массы m начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону $v = b\sqrt{l}$, где b – постоянная, l – пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив за первые t секунд после начала движения. Ответ: $A = mb^4t^2/8$.

3-13. Шайба массы $m = 50$ г соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^o$ с горизонтом, и, пройдя

по горизонтальной плоскости расстояние l = 50 см, останавливается. Найти работу силы трения на всем пути, считая коэффициент трения μ всюду одинаковым и равным 0,15. Ответ: $A = -\dfrac{\mu mgl}{1-\mu\mathrm{ctg}\alpha} = -0{,}05$ Дж.

3-14. Цепочка массы m = 0,8 кг и длины l = 1,5 м лежит на шероховатом столе так, что один ее конец свешивается с его края. Цепочка начинает соскальзывать, когда ее свешивающаяся часть составляет η = 1/3 длины цепочки. Какую работу совершают силы трения, действующие на цепочку, при ее полном соскальзывании со стола? Ответ: $A = -0{,}5\eta(1-\eta)mgl = -1{,}3$ Дж

3-15. Система состоит из двух последовательно соединенных пружинок с жесткостями k_1 и k_2. Найти минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы растянуть эту систему на Δl.

Ответ: $A_{\min} = k_1k_2(\Delta l)^2 / 2(k_1+k_2)$

3-16. Табуретку наклоняют так, что она опирается на пол двумя ножками, и отпускают, после чего она падает на все четыре ножки. Оценить максимальное расстояние, на которое она при этом продвигается по полу.

Ответ: $x \approx h_c/\mu$, где h_c – высота, на которую был поднят центр масс, а μ – коэффициент трения.

3-17. На горизонтальной шероховатой плоскости лежит катушка ниток массы m. Ее момент инерции относительно собственной оси $I = kmR^2$, где k – числовой коэффициент, а R – внешний радиус катушки. Радиус намотанного слоя ниток равен r. Катушку начали тянуть с постоянной силой $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонту (рис. 6.63), в результате чего катушка движется без скольжения. Найти ускорение центра масс и работу силы $\vec{F}$ за первые t секунд движения.

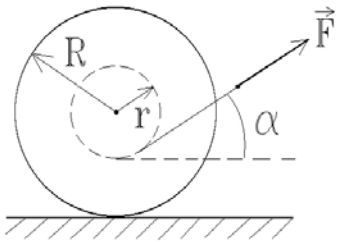

рис. 6.63

Ответ: $a_c = \dfrac{F(\cos\alpha - r/R)}{m(1+k)}$; $A = \dfrac{F^2t^2(\cos\alpha - r/R)^2}{2m(1+k)}$

3-18. Автомобиль массы m = 1 тонна трогается с места. Мощность мотора N = 50 кВт, сила сопротивления пропорциональна (с коэффициентом пропорциональности η = 0,1) весу автомобиля. За какое минимальное время автомобиль может набрать скорость v = 72 км/час?

Ответ: $t = \dfrac{1}{g\eta}\left(\dfrac{N}{mg\eta}\ln\dfrac{N}{N-\eta mgv} - v\right)$=5,5 с.

3-19. Горизонтальный диск массы m и радиуса R может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На краю диска стоит

человек массы m_1. Вначале диск и человек неподвижны. Затем человек начинает идти по краю диска со скоростью v' относительно диска. С какой частотой начнет вращаться диск? Толщиной человека в сравнении с R можно пренебречь. Ответ: $\nu = \dfrac{m_1 v'}{\pi(2m_1 + m)R}$

3-20. Математический маятник длины l отводят на 90° и отпускают. При прохождении положения равновесия нить задевает за гвоздь, находящийся ровно на половине длины нити, после чего шарик начинает двигаться по окружности вдвое меньшего радиуса. В каком положении шарика натяжение нити обращается в нуль? Какой будет в этот момент скорость шарика? Каким будет движение шарика после этого?

Ответ: $\cos\alpha = 2/3$; $v = \sqrt{gl/3}$

3-21. Оценить наибольшую нагрузку на руки гимнаста, выполняющего большой оборот из стойки на руках. Трением ладоней о перекладину пренебречь. Ответ: $F \approx 4mg$.

3-22. Тонкий обод массы m и радиуса R скатывается с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, наматывая при этом на себя очень тонкую ленту, единица длины которой имеет массу ρ. Обод начинает скатываться с высоты h (рис. 6.64). На каком расстоянии l от основания наклонной плоскости обод остановится? Считать переход от наклонной плоскости к горизонтальной поверхности плавным и $R \ll h$. Ответ: $l \approx \dfrac{h}{R}\left(\dfrac{m}{\rho} + \dfrac{h}{2\sin\alpha}\right)$

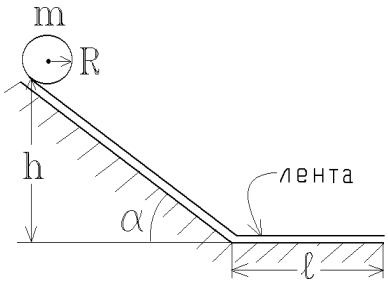

рис. 6.64

3-23. Невесомая нерастяжимая нить может скользить по изогнутому желобу (рис. 6.65). К концам нити прикреплены грузы $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 1$ кг. Груз m_1 поднимают так, чтобы груз m_2 коснулся пола, и отпускают. На какую максимальную высоту h_2 поднимется груз m_2 после того, как груз m_1 ударится о пол? Высота $h_1 = 1$ м.

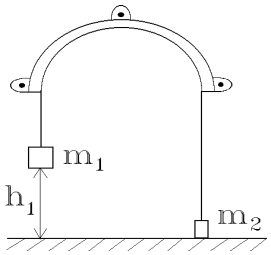

рис. 6.65

Ответ: $h_2 = 1{,}5$ м.

3-24. Небольшое тело начинает скользить без трения вниз с вершины сферической поверхности радиуса R. На какой высоте над центром сферы тело отделится от поверхности и полетит свободно?

Ответ: $h = 2R/3$.

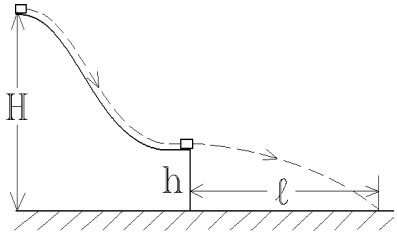

рис. 6.66

3-25. Небольшая шайба соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высотой H, имеющей горизонтальный трамплин (рис. 6.66). При какой высоте h шайба пролетит наибольшее расстояние по горизонтали? Чему оно равно? Ответ: $h = H/2$; $l_{max} = H$.

3-26. Пушка массы m начинает свободно скользить вниз по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Когда пушка прошла путь l, произвели выстрел, в результате которого снаряд вылетел с импульсом $\vec{p}$ в горизонтальном направлении, а пушка остановилась. Пренебрегая массой снаряда в сравнении с массой пушки, найти продолжительность выстрела. Ответ: $\tau = \left(p\cos\alpha - m\sqrt{2gl\sin\alpha}\right)\Big/ mg\sin\alpha$

3-27. Имеются два одинаковых однородных диска, один из которых может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Этот диск первоначально неподвижен. Второй диск раскручивают до угловой скорости ω_o и опускают в горизонтальном положении на первый диск так, что край второго диска совпадает с центром первого. и диски мгновенно слипаются. Найти угловую скорость, с которой будет вращаться образовавшаяся система, и изменение кинетической энергии системы.

Ответ: $\omega = \omega_o/4$; K уменьшается в 4 раза.

3-28. Метеорит массы $m = 10^8$ кг, двигавшийся со скоростью $v = 50$ км/с, ударился о Землю на широте $\varphi = 60^o$. Вся его кинетическая энергия перешла в тепловую энергию, а сам он испарился. Какое максимальное влияние мог оказать удар такого метеорита на продолжительность суток? Землю считать однородным шаром.

Ответ: $\left(\Delta T/T\right)_{max} = 2mvT\cos\varphi/\,MR \approx 2\cdot 10^{-15}$; здесь M, R, T – масса, радиус и период вращения Земли.

3-29. Легкая штанга длины l может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси O, проходящей через один из ее концов. На другом конце штанги закреплена другая ось A, на которой закреплен однородный диск радиуса r (рис. 6.67). Штангу поднимают до горизонтального положения, а затем отпускают. Когда штанга проходит через положение равновесия, диск мгновенно освобождают, и в дальнейшем он может свободно вращаться вокруг оси A. Найти высоту подъема диска h при последующем движении системы. Ответ: $h = 2l^3\Big/\left(r^2 + 2l^2\right)$

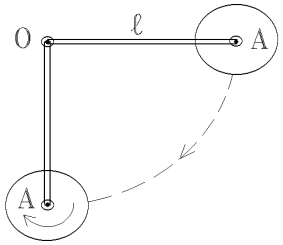

рис. 6.67

3-30. Частица движется по замкнутой траектории в центральном силовом поле, где ее потенциальная энергия $U = kr^2$ (k – положительная постоянная, а r – расстояние частицы до центра поля O). Найти массу частицы,

если наименьшее расстояние ее до точки O равно r_1, а скорость на **наибольшем** расстоянии от этой точки v_2. Ответ: $m = 2kr_1^2 / v_2^2$.

3-31. Летящая горизонтально пуля массы m попала в тело массы M, подвешенное на двух одинаковых нитях длины l, и застревает в нем (рис. 6.68). В результате нити отклоняются каждая на угол θ. Считая $m \ll M$, найти скорость v пули перед попаданием в тело и относительную долю кинетической энергии пули, перешедшей в тепло.

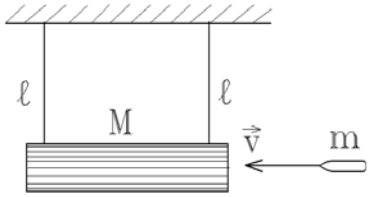

рис. 6.68

Ответ: $v = 2M\sqrt{gl}\sin(\theta/2)/m$; $\eta \approx 1 - m/M$.

3-32. Небольшая шайба массы m соскальзывает без начальной скорости с гладкой горки высотой h и попадает на доску массы M, лежащей на гладкой горизонтальной поверхности у подножия горки (рис. 6.69). Вследствие трения между шайбой и доской шайба тормозится и, спустя некоторое время, движется вместе с доской, как единое целое. Найти суммарную работу сил трения в этом процессе. Ответ: $A = -mMgh/(m+M)$.

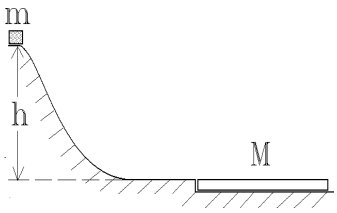

рис. 6.69

3-33. Тележка массы m_1 и длины l неподвижно стоит на гладкой горизонтальной поверхности. На одном конце тележки сидит лягушка массы m_2. С какой наименьшей скоростью относительно земли и под каким углом к горизонту она должна прыгнуть, чтобы оказаться на другом конце доски?

Ответ: $v_{\min} = \sqrt{\frac{gl}{2}}\frac{\sqrt{1+(1+m_2/m_1)^2}}{1+m_2/m_1}$; $\beta = \operatorname{arctg}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)$

3-34. Два шара одинаковой массы, движущиеся со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, сталкиваются, причем удар – абсолютно упругий, но нецентральный. В каких случаях угол между векторами скоростей после удара равен π/2?

Ответ: 1) $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ 2) $\vec{v}_1$ (или $\vec{v}_2$)=0.

3-35. Четыре одинаковых шара массой m каждый соединены попарно с помощью невесомых стержней длиной l в две гантели. Размеры шаров много меньше, чем l; поэтому их можно считать материальными точками. Гантели движутся вдоль оси x навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v и сталкиваются (рис. 6.70). Считая удар шаров мгновенным и абсолютно неупругим, найти скоро-

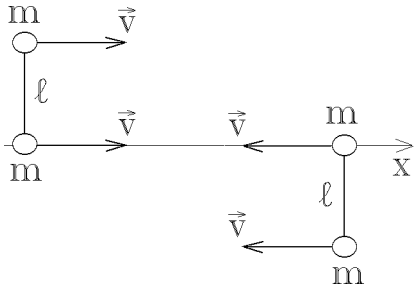

рис. 6.70

сти центров гантелей v_C после удара, угловую скорость их вращения ω, а также относительное изменение механической энергии системы. Описать движение шаров после удара.

Ответ: $v_C = v/2$; $\omega = v/l$; $\Delta K/K = 0{,}5$.

3-36. Горизонтально расположенный деревянный стержень массы m и длины l может вращаться вокруг вертикальной перпендикулярной к стержню оси, проходящей через его середину. В конец стержня попадает пуля массы m_1, летящая перпендикулярно оси и стержню со скоростью v, и застревает в стержне. Найти угловую скорость вращения стержня ω после удара и изменение механической энергии системы.

Ответ: $\omega = \dfrac{6m_1 v}{(m+3m_1)l}$; $\Delta E = \dfrac{m_1 m v^2}{2(m+3m_1)}$.

3-37. Горизонтально расположенный деревянный стержень массы m и длины l может вращаться вокруг вертикальной перпендикулярной к стержню оси, проходящей через его середину. В конец стержня ударяется пластмассовый шарик массы m_1, летящий перпендикулярно оси и стержню со скоростью v. Считая удар абсолютно упругим, найти угловую скорость стержня ω и скорость шарика u после удара.

Ответ: $\omega = \dfrac{12m_1 v}{(m+3m_1)l}$; $u = -\dfrac{m-3m_1}{m+3m_1}v$

3-38. Горизонтально расположенный однородный диск массы M и радиуса R свободно вращается с угловой скоростью ω_o вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Диск имеет радиальную направляющую, вдоль которой может без трения скользить небольшое тело массы m, к которому привязана невесомая нить, проходящая через полую ось диска. Приложив к нити силу F, тело медленно подтягивают к оси диска. Как при этом изменится угловая скорость вращения диска и какую работу совершит сила F.

Ответ: $\omega = \left(1+\dfrac{2m}{M}\right)\omega_o$; $A = \dfrac{1}{2}m\omega_o^2 R^2\left(1+\dfrac{2m}{M}\right)$

3-39. Человек массы m_1 стоит на краю покоящегося горизонтального однородного диска массы m_2 и радиуса R, который может свободно вращаться вокруг своей оси симметрии. В некоторый момент человек начал двигаться по краю диска со скоростью $v'(t)$ относительно него и, переместившись на угол φ', остановился. Пренебрегая размерами человека, найти угол, на который повернулся диск, и средний момент сил, с которым человек действовал на диск во время движения.

Ответ: $\varphi_д = -\dfrac{2m_1}{2m_1 + m_2}\varphi$; $\langle M_z \rangle = 0$

3-40. Тяжелая веревка длины l с линейной плотностью ρ перекинута через блок с моментом инерции I и радиусом r. В начальный момент блок неподвижен, а больший из свешивающихся концов веревки имеет длину l_1. Найти угловую скорость вращения блока ω в тот момент, когда веревка соскользнет с него. Веревка движется по блоку без скольжения, трение в оси блока не учитывать.

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{\rho g}{I + lr^2\rho}\left[l^2 + 4r^2 - l_1^2 - (l - l_1 - \pi r)^2\right]}$

3-41. Человек, сидящий на неподвижной горизонтальной платформе, которая может свободно вращаться вокруг вертикальной оси OO', держит в руках вращающееся вокруг оси AA' (параллельной OO') колесо (рис. 6.71). Момент инерции человека и платформы относительно оси OO' равен I_o, момент инерции колеса относительно оси AA' – I_1 и частота вращения колеса – ν. Какую работу совершает человек, повернув ось колеса AA' вокруг горизонтальной оси на 180°?

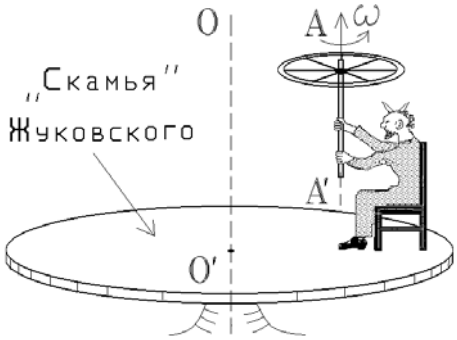

рис. 6.71

Ответ: $A = 8\pi^2\nu^2 I_1^2 / I_0$

3-42. На гладком горизонтальном столе лежит шар массы m_1, соединенный с пружиной жесткости k, закрепленной в стенке (рис. 6.72). С ним сталкивается шар массы $m_2 \ll m_1$, движущийся со скоростью v. Удар – центральный и абсолютно упругий. Найти амплитуду колебаний первого шара после удара.

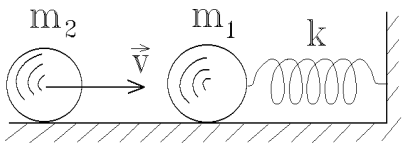

рис. 6.72

Ответ: $x_{max} = \dfrac{2m_2 v}{m_2 + m_1}\sqrt{\dfrac{m_1}{k}}$

3-43. Частица массы m_1 упруго сталкивается с неподвижной частицей массы m_2 так, что после столкновения она движется либо в прежнем, либо в обратном направлении. При некотором соотношении масс сталкивающихся частиц потеря энергии движущейся частицей максимальна. Найти эту максимальную долю энергии, теряемую первой частицей, и объяснить, почему в ядерных реакторах для замедления нейтронов используется рассеяние их на легких ядрах (дейтерий, углерод), а не на тяжелых.

Ответ: $(\Delta K_1 / K_1)_{max} = 1$ при $m_2 = m_1$.

3-44. На дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит шмель, масса которого равна массе пробирки, а расстояние от дна пробирки до поверхности стола равно длине пробирки l. Нить пережигают, и за время падения пробирки шмель перелетает с ее дна в верхний конец пробирки. Найти время, за которое дно пробирки достигнет стола. Ответ: $t = \sqrt{l/g}$

3-45. На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массы M, имеющее фигурную форму (рис. 6.73) и на нем небольшая шайба массы m. Последней в горизонтальном направлении сообщили скорость v. На какую высоту (по сравнению с первоначальным уровнем) поднимется шайба после отрыва от тела M? Ответ: $h = \dfrac{Mv^2}{2g(M+m)}$

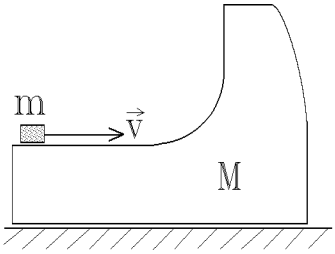

рис. 6.73

3-46. Шар массы M = 1 кг, лежащий на горизонтальной плоскости, пробивается по диаметру пулей, летящей горизонтально с начальной скоростью $v_0 = 500$ м/с. После удара шар начинает скользить по плоскости. Спустя некоторое время его движение переходит в чистое качение с постоянной скоростью $v = 3$ м/с. Найти скорость пули после вылета ее из шара, если масса пули m = 10 г. Трением качения пренебречь.

Ответ: $u = v_0 - 7Mv/5m$ = 80 м/с.

3-47. Частица A массы m_1, пролетая вблизи другой, первоначально покоившейся частицы B, отклонилась на угол α. При этом импульс частицы A изменился от p_o (до взаимодействия) до p_1 (после взаимодействия). Считая систему частиц замкнутой, найти массу m_2 частицы B.

Ответ: $m_2 = m_1\left(p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1\cos\alpha\right)\Big/\left(p_0^2 - p_1^2\right)$

3-48. На гладкой горизонтальной поверхности лежит однородный стержень массы m и длины l. По одному из концов стержня произвели удар в горизонтальном направлении, перпендикулярном стержню, в результате которого стержню был передан импульс p. Найти силу, с которой одна половина стержня будет действовать на другую в процессе движения. На какое расстояние переместится центр стержня за время одного полного оборота? Какой будет кинетическая энергия стержня после удара?

Ответ: $F = 9p^2/2ml$; $\Delta x_c = \pi l/3$; $K = 2p^2/m$.

3-49. На гладкой горизонтальной плоскости находятся два бруска с массами m_1 и m_2, соединенные невесомой пружиной жесткости k (рис.

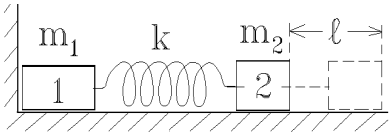

рис. 6.74

6.74). Брусок 2 переместили влево на небольшое расстояние l и отпустили. Найти скорость центра инерции системы после отрыва бруска 1 от стенки.

Ответ: $v_C = l\sqrt{km_2}\big/\left(m_1 + m_2\right)$

3-50. Частица массы m испытала столкновение с покоившейся частицей массы M, в результате чего частица m отклонилась на угол $\pi/2$, а частица M отлетела под углом $\theta = 30^{\circ}$ к первоначальному направлению движения частицы m. Как и на сколько процентов изменилась кинетическая энергия этой системы после столкновения, если $M = 5m$.

Ответ: уменьшилась на $(1 + m/M)\mathrm{tg}^2\theta + m/M - 1 = 40\%$.

3-51. Однородная тонкая квадратная пластинка массы m_0 может свободно вращаться вокруг вертикальной оси OO', как показано на рис. 6.75. В точку A, находящуюся на расстоянии $2a/3$ от оси, по нормали к пластинке ударяется шар массы m, летевший со скоростью $\vec{v}$. Найти угловую скорость пластинки и скорость шара после соударения, считая его абсолютно упругим.

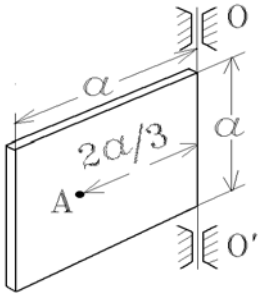

рис. 6.75

Ответ: $\omega = \dfrac{12mv}{\left(4m + 3m_0\right)a}$, $\vec{v}_0 = \dfrac{4m - 3m_0}{4m + 3m_0}\vec{v}$

3-52. Однородный брус массы M, размеры которого указаны на рис. 6.76 (a = 1 м, b = 0,25 м, d = 0,1 м, l = 3 м), может свободно вращаться вокруг оси AB. В точку O бруса ударяется горизонтально летящее тело массы m=10 кг. Какова скорость этого тела υ, если после удара брус отклонился на угол α=28°, а тело упало под точкой удара?

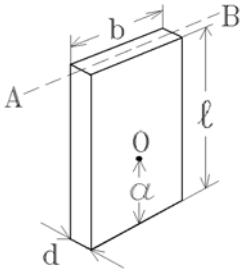

рис. 6.76

Ответ: $v = \dfrac{Ml\sin\left(\alpha/2\right)}{m\left(l - a\right)}\sqrt{\dfrac{2gl}{3}\left(1 + \dfrac{d^2}{4l^2}\right)} \approx 6$ м/с.

3-53. Четыре одинаковых шара массой m каждый объединены попарно с помощью невесомых стержней длины l в две гантели. Размеры шаров малы в сравнении с l – поэтому их можно считать материальными точками. Гантели движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v (рис. 6.77). Считая удар шаров мгновенным и абсолютно упругим, найти 1) угловую скорость вращения гантелей после удара, 2) время Δt, в течение которого происходит это вращение, а также описать движение гантелей по истечении этого времени.

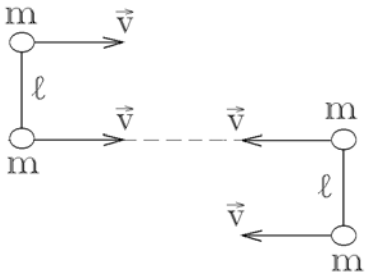

рис. 6.77

Ответ: 1) $\omega = 2v/l$, 2) $\Delta t = \pi/\omega$.

3-54. Вертикально висящий однородный стержень массы M и длины l может без трения вращаться вокруг своего верхнего конца. В нижний конец стержня попадает (и застревает в нем) горизонтально летевшая пуля массы m, в результате чего стержень отклоняется на угол α. Считая $m \ll M$, найти изменение импульса системы "пуля – стержень" за время удара и объяснить причину этого изменения. В какую точку стержня должна попасть пуля, чтобы импульс системы не изменился?

Ответ: $\Delta p = M\sqrt{\dfrac{gl}{6}}\sin\dfrac{\alpha}{2}$ на расстоянии $2l/3$ от точки подвеса.

3-55. Твердый стержень длины l и массы M может вращаться вокруг горизонтальной оси A, проходящей через его конец (рис. 6.78). К той же оси A подвешен математический маятник такой же длины l и массы m. Первоначально стержень находился в горизонтальном положении, а затем был отпущен. В нижнем положении происходит абсолютно упругий удар, в результате которого сталкивающиеся тела деформируются – при этом часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию упругой деформации и обратно. Найти максимальное значение энергии упругой деформации U.

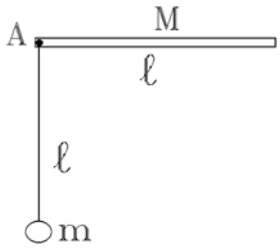

рис. 6.78

Ответ: $U_{\max} = 3mMgl/2(M+3m)$

3-56. На гладкой горизонтальной плоскости лежат три одинаковых шайбы A, B и C (рис. 6.79). Шайбе A сообщается скорость $\vec{v}$, и она упруго сталкивается одновременно с двумя другими шайбами. Найти скорость шайбы A после соударения, если известно, что до столкновения расстояние между центрами шайб B и C было в η раз больше диаметра каждой шайбы. При каком значении η шайба А после соударения а) отскочит назад, б) остановится, в) будет двигаться вперед?

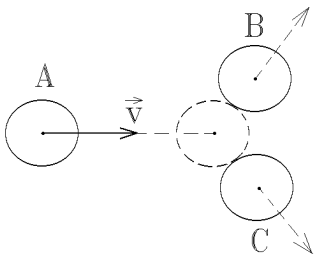

рис. 6.79

Ответ: $\vec{u} = -\vec{v}\left(2-\eta^2\right)/\left(6-\eta^2\right)$; а) $\eta < \sqrt{2}$, б) $\eta = \sqrt{2}$, в) $\eta > \sqrt{2}$.

3-57. На гладкой горизонтальной поверхности находится неподвижная тележка, на конце которой стоит человек, держащий в руке на высоте h спортивное ядро. Длина тележки $l < 20$ м, масса тележки вместе с человеком M, масса ядра m. Какую работу должен совершить человек, чтобы, бросив ядро горизонтально, попасть в другой конец тележки? С какой скоростью относительно Земли должно быть брошено ядро?

Ответ: $A = \dfrac{ml^2}{4h}$, $\qquad v = \dfrac{lM}{M+m}\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$.

3-58. Вертикально висящий жесткий стержень длины l может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси O, проходящей через верхний конец стержня. В нижний его конец попадает горизонтально летевшая со скоростью v пуля массы m и застревает в нем (рис. 6.80). Линейная плотность стержня ρ (масса единицы длины) изменяется вдоль оси OX по закону $\rho = \rho_0 \left(x/l\right)^2$, где ρ_o – постоянная. Определить импульс системы в первый момент после удара.

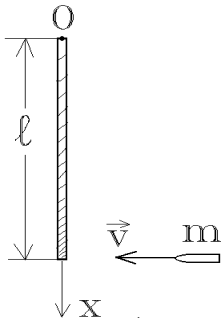

рис. 6.80

Ответ: $p = mv \cdot \left(m + \rho_0 l/4\right) / \left(m + \rho_0 l/5\right)$.

3-59. Небольшую шайбу поместили на внутреннюю гладкую поверхность неподвижного круглого конуса (рис. 6.81) на высоте h_1 от его вершины и сообщили ей в горизонтальном направлении по касательной к поверхности конуса скорость v_1. На какую высоту h_2 поднимется шайба?

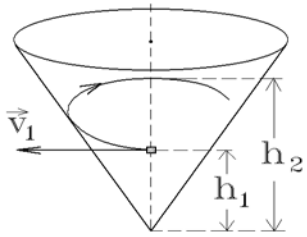

рис. 6.81

Ответ: $h_2 = v_1^2 \left(1 + \sqrt{1 + 8gh_1/v_1^2}\right) \Big/ 4g$.

3-60. Обруч радиуса R бросают вперед со скоростью v_0, одновременно сообщая ему угловую скорость ω_0. При какой угловой скорости обруч после движения вперед (с проскальзыванием) покатится назад? Найти также значение конечной скорости v при $\omega_0 > \omega_{0min}$. Трением качения пренебречь

. Ответ: $\omega_0 \geq v_0/R$, $v = \left(\omega_0 R - v_0\right)/2$

3-61. Две пластинки массами m_1 и m_2 соединены пружиной, как показано на рис. 6.82. С какой силой нужно надавить на верхнюю пластинку, чтобы после прекращения действия этой силы верхняя пластинка, подпрыгнув, приподняла нижнюю? Массой пружинки пренебречь.

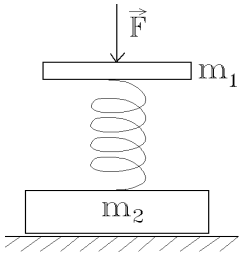

рис. 6.82

Ответ: $F > (m_1 + m_2)g$

3-62. Каким участком сабли следует рубить лозу, чтобы рука не чувствовала удара? Саблю считать однородной пластиной длины l.

Ответ: Участком, отстоящим на $2l/3$ от ручки сабли.

3-63. По резиновому шнуру, подвешенному одним концом к кронштейну, как показано на рис. 6.83, может скользить с независящим от скорости трением муфта массы m = 0,3 кг. Величина трения характеризуется силой F = 0,294 Н. Длина недеформированного шнура l_o = 1 м, коэффициент пропорциональности между упругой силой и

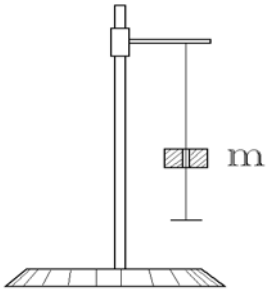

рис. 6.83

удлинением шнура k = 560 Н/м. На нижнем конце шнура имеется упор. Муфту поднимают в крайнее верхнее положение и отпускают. Пренебрегая внутренним трением в шнуре, размерами муфты, а также массами шнура и упора, определить удлинение шнура Δl при движении муфты до упора и максимальное удлинение шнура Δl_{max}.

Ответ: $\Delta l = 0{,}53$ мм; $\Delta l_{max} = \dfrac{mg - F}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2kl_0}{mg - F}}\right) = 10{,}2$ см.

3-64. Центры шаров 1, 2 и 3 расположены на одной прямой. Шар 1 с начальной скоростью $\vec{v}_1$, направленной по линии центров, ударяет шар 2. Шар 2 (рис. 6.84), получив после удара скорость $\vec{v}_2$, ударяет шар 3. Оба удара абсолютно упругие. Какой должна быть масса m_2 шара 2, чтобы при известных массах m_1 и m_3 третий шар после удара получил наибольшую скорость? Ответ: $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$

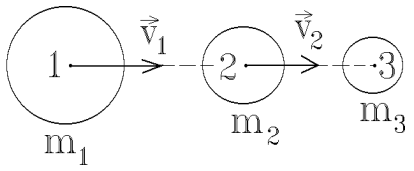

рис. 6.84

3-65. Шар, двигавшийся поступательно, испытал упругое соударение с другим, покоившимся шаром той же массы. При соударении угол между прямой, проходящей через центры шаров, и направлением первоначального движения налетающего шара оказался равным $\alpha = 40^o$. Считая шары гладкими, найти долю кинетической энергии налетающего шара, которая перешла в потенциальную энергию в момент наибольшей деформации.

Ответ: $\eta = (1/2)\cos^2\alpha = 0{,}25$

3-66. Частица массы m_1 испытала абсолютно упругое соударение с покоившейся частицей массы m_2, причем $m_1 > m_2$. Найти максимальный угол, на который может отклониться налетающая частица в результате соударения.

Ответ: $\theta_{max} = \arcsin(m_2/m_1)$

3-67. Четыре одинаковых шара массой m = = 0,5 кг каждый соединены попарно с помощью невесомых стержней длиной l = 2 м в две гантели, которые движутся вдоль оси X так, как показано на рис. 6.85, где v = 0,8 м/с. Размеры шаров много меньше, чем l; поэтому их можно считать материальными точками. Считая удар шаров мгновенным и абсолютно упругим (левая гантель до удара покоилась), найти угловую скорость ω вращения гантелей после удара, определить время Δt, в течение которого происходит это вращение, и описать движение гантелей. Ответ: $\omega = 0{,}8$ рад/с; $\Delta t = 3{,}93$ с.

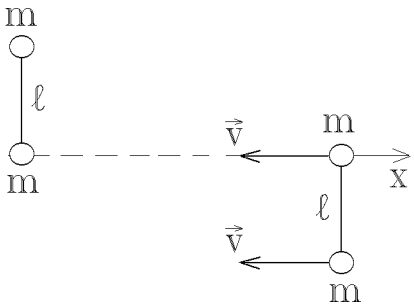

рис. 6.85

3-68. Шарик массы *m,* двигавшийся со скоростью v_0, испытал упругое лобовое соударение с одним из шариков покоившейся жесткой гантели, как показано на рис. 6.86. Масса каждого шарика гантели равна *m*/2, расстояние между ними *l*. Пренебрегая размерами шариков, найти собственный момент импульса L_C гантели после соударения, т.е. момент импульса в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром инерции гантели. Ответ: $L_C = lmv_C/3$

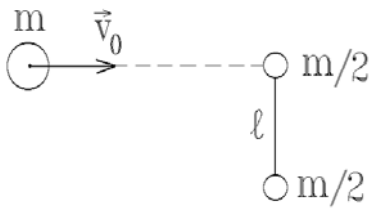

рис. 6.86

3-69. В общей точке подвеса А , как изображено на рис. 6.87, подвешены шарик на нити длины l_1 и однородный стержень длины l_2, отклоненный в сторону на некоторый угол. При возвращении стержня в положение равновесия происходит упругий удар. При каком соотношении между массами стержня *M* и шарика *m* шарик и точка удара стержня будут двигаться после удара с равными скоростями в противоположных направлениях? При каком соотношении между массами *M* и *m* описанный процесс невозможен?

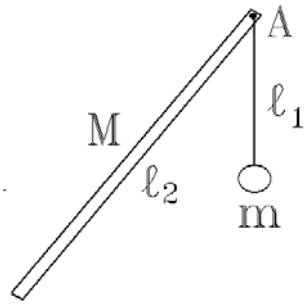

рис. 6.87

Ответ: $M/m = (l_1/l_2)^2$; при $M > m$.

3-70. Вращающийся с угловой скоростью ω_o однородный цилиндр массы m_1 ставится без начальной поступательной скорости на длинную доску массы m_2, лежащую на гладкой горизонтальной плоскости. Начальная скорость доски равна нулю. Пренебрегая силой трения качения, но учитывая трение скольжения между доской и цилиндром, найти угловую скорость вращения цилиндра после того, как его движение перейдет в чистое качение. Доска предполагается настолько длинной, что чистое качение успевает установиться до того, как цилиндр скатится с доски.

Ответ: $\omega = \omega_0 (m_1 + m_2)/(m_1 + 3m_2)$

3-71. В конец стержня массы *M*, лежащего на гладком горизонтальном столе, попадает шарик, летевший перпендикулярно стержню и параллельно плоскости стола со скоростью v_0. Считая массу шарика *m* пренебрежимо малой по сравнению с массой стержня, определить кинетическую энергию *K* стержня после удара, если удар был абсолютно упругий.

Ответ: $K = 8m^2 v_0^2 / M$

3-72. По гладкой горизонтальной поверхности стола поступательно движется твердый стержень длины *l* и массы *M* со скоростью v_0, перпендику-

лярной его продольной оси. Навстречу стержню перпендикулярно той же оси движется твердый шарик массы m. Шарик ударяется в конец стержня, а затем отскакивает от него. Считая удар абсолютно упругим и предполагая, что трение между поверхностью стола и движущимися по ней телами пренебрежимо мало, определить, с какой скоростью v должен двигаться шарик, чтобы после удара центр масс стержня остановился. Найти также угловую скорость вращения стержня вокруг центра масс после удара.

Ответ: $v = v_0\left(M + 2m\right)/2m$; $\omega = v_0 Ml/2I$

3-73. Замедлитель нейтронов – графит (углерод). Во сколько раз уменьшится энергия нейтрона при упругом соударении с ядром углерода (которое в 12 раз тяжелее нейтрона), если после удара нейтрон движется: а) противоположно первоначальному направлению; б) перпендикулярно первоначальному направлению. Ответ: а) в 1,4 раза; б) в 1,2 раза.

3-74. Два шарика массами m_1 и m_2, соединенные недеформированной пружинкой, лежат на горизонтальной поверхности. В момент $t = 0$ им сообщили скорости $\vec{v}_1$ перпендикулярно поверхности и $\vec{v}_2$ вдоль поверхности, в результате чего система начала двигаться в однородном поле тяжести Земли. Найти 1) максимальное приращение потенциальной энергии системы во внешнем поле; 2) собственную механическую энергию системы в момент, когда ее центр масс поднимется на максимальную высоту. Укзание: собственный механической энергией системы называется сумма кинетической энергии и энергии взаимодействия частиц системы.

Ответ: 1) $U_{\text{внеш}} = m_1^2 v_1^2 / 2\left(m_1 + m_2\right)$; 2) $E_{\text{соб}} = \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} - U_{\text{внеш}}$

3-75. Быстро вращающийся с угловой скоростью ω_o однородный шар радиуса R положен на горизонтальную поверхность так, что его ось вращения составляет с вертикалью угол φ. Найти скорость шара и угловую скорость его вращения, которые установятся после того, как проскальзывание шара прекратится.

Ответ: $v = \left(2/7\right)\omega_0 R \sin\varphi$; $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \left(45/49\right)\sin^2\varphi}$

3-76. Небольшое тело A начинает скользить с высоты h по наклонному желобу, переходящему в полуокружность радиуса $h/2$, как показано на рис. 6.88. Пренебрегая трением, найти скорость тела в наивысшей точке его траектории (после отрыва от желоба). Ответ: $\sqrt{4g/27}$

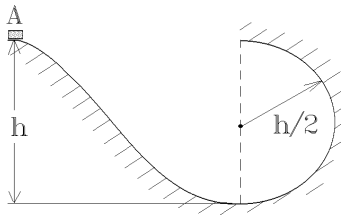

рис. 6.88

3-77. Снаряд, летящий со скоростью $v = 500$ м/с, разрывается на три одинаковых осколка так, что кинетическая энергия

системы увеличивается в n = 1,5 раза. Какую максимальную скорость может иметь один из осколков?

Ответ: $v_{\max} = v\left(1+\sqrt{2(n-1)}\right)$ =1 км/с.

3-78. Стержень массы M и длины l, который может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через один из его концов, под действием силы тяжести переходит из горизонтального положения в вертикальное (рис. 6.89). Проходя через вертикальное положение, нижний конец стержня упруго ударяет о малое тело массы m, лежащее на горизонтальном столе. Коэффициент трения между телом и столом равен μ и не зависит от скорости. Определить, на какое расстояние s переместится тело массы m после удара, если оно скользит по столу без вращения, а стержень после удара остановился.

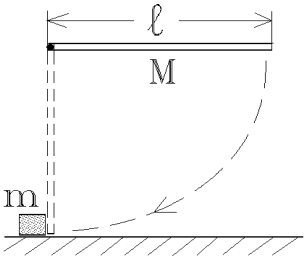

рис. 6.89

Ответ: $s = M^2 l \,/\, 6\mu m^2$

3-79. Легкий желоб свернут в виде вертикальной цилиндрической спирали радиуса R, которая может свободно вращаться вокруг вертикальной оси симметрии. Витки спирали наклонены к горизонту под углом φ = π/4. По желобу скользит без трения тело массы m. Какую скорость приобретет тело в конце спирального спуска, опустившись с высоты h (рис. 6.90), если скольжение началось без начальной скорости? Считать массу желоба равной массе тела. Какова будет угловая скорость вращения желоба?

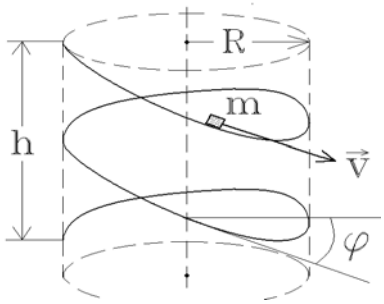

рис. 6.90

Ответ: $v = \sqrt{5gh/3}$; $\omega = \sqrt{gh/3R^2}$

3-80. Как нужно ударить кием по бильярдному шару, чтобы сила трения шара о сукно бильярдного стола заставляла его двигаться: а) ускоренно, б) замедленно, в) равномерно? Предполагается, что удар наносится горизонтально в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара и точку касания его с плоскостью бильярдного стола. Считать силу трения малой в сравнении с силой удара.

Ответ: а) $r > 2R/5$, б) $r < 2R/5$, в) $r = 2R/5$, где r – расстояние по вертикали от точки удара до центра шара.

3-81. На гладкой горизонтальной плоскости лежат небольшая шайба и тонкий однородный стержень длины l, масса которого в η раз больше массы шайбы. Шайбе сообщили скорость v в горизонтальном направлении перпендикулярно к стержню, после чего она испытала упругое соударение

с концом стержня. Найти скорость v_C центра стержня после столкновения. При каком значении η скорость шайбы после столкновения будет равна нулю?

Ответ: $v_C = 2v/(4+\eta)$, $\eta = 4$

3-82. Сплошной однородный цилиндр радиуса R = 15 см катится по горизонтальной плоскости, которая переходит в наклонную плоскость, составляющую угол α = 30° с горизонтом, как показано на рис. 6.91. Найти максимальное значение скорости v_0, при котором цилиндр перейдет наклонную плоскость еще без скачка. Считать, что скольжения нет. Ответ: $v_0 = \sqrt{gR(7\cos\alpha - 4)/3}$ =1 м/с.

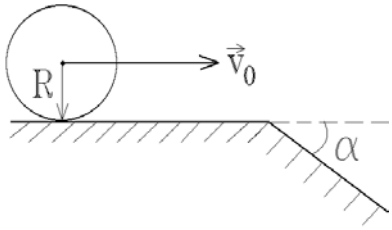

рис. 6.91

3-83. Шар массы m_1, движущийся со скоростью $\vec{v}_0$, абсолютно упруго сталкивается с шаром массы m_2, который до столкновения был неподвижен. После столкновения шары летят со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в направлениях, указанных на рис. 6.92. Какую относительную долю η своей кинетической энергии передает первый шар второму в случаях а) α = π/2, б) α = β ≠ 0, в) α = = β = 0, г) α = π, β = 0? Чему равно предельное значение η в случае б)?

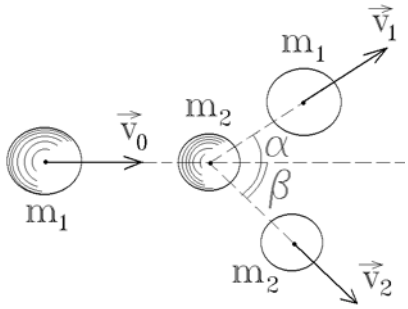

рис. 6.92

Ответ: а) $\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}$, б) $\dfrac{m_1}{m_1+m_2}$, в) и г) $\dfrac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$; $\eta_{пред} < 3/4$

3-84. Математический маятник массы m и стержень массы M подвешены в одной и той же точке A, вокруг которой они могут свободно колебаться (рис. 6.93). Длина нити маятника равна длине стержня. Стержень отклоняют от вертикального положения так, что его нижний конец поднимается на высоту h, и отпускают. В нижней точке удар стержня о шарик неупругий. Как будут двигаться шарик и нижний конец стержня после удара и на какие высоты они поднимутся?

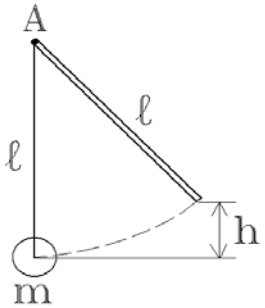

рис. 6.93

Ответ: $h_{шарика} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{M}{M+3m}\right)^2 h$; $h_{\substack{конца\\стержня}} = \left(\dfrac{M}{M+3m}\right)^2 h$

3-85. Диск с моментом инерции I_o и радиусом R может свободно вращаться вокруг своей оси. В момент t = 0 его начали облучать по нормали к

поверхности равномерным потоком частиц – N частиц в единицу времени. Каждая частица имеет массу m и собственный момент импульса L_o, направление которого совпадает с направлением движения частиц. Считая, что все частицы застревают в диске, найти его угловую скорость в момент времени t, если $\omega(0) = 0$. Построить график зависимости $\omega(t)$.

Ответ: $\omega = NL_0 t \Big/ \left(I_0 + NmR^2\, t/2\right)$

3-86. Водометный двигатель катера забирает воду из реки и выбрасывает ее со скоростью u = 10 м/с относительно катера назад. Масса катера $M = 1000$ кг. Масса ежесекундно выбрасываемой воды постоянна и равна $m = 10$ кг. Пренебрегая сопротивлением движению катера и скоростью течения реки, определить скорость катера v спустя время t = 1 мин после начала движения, и предельную скорость $v_{\max}$, которую может достичь катер.

Ответ: v = 4,5 м/с; $v_{\max} = u$, $v = u\left(1 - \exp\left(-mt/M\right)\right)$

3-87. Стартовая скорость космического аппарата v, скорость истечения газов u = const. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти такой закон изменения массы аппарата, чтобы во время подъема космонавты не испытывали перегрузок. Указание: учесть изменение g с высотой.

Ответ: $m = m_0 \exp\left[-\dfrac{gR_3 t}{u\left(R_3 + vt\right)}\right]$

3-88. Найти минимальный запас топлива, необходимый для мягкой посадки ракеты на Луну, если тормозной двигатель включается на высоте h над поверхностью ($h \ll R_л$) и работает в течение времени τ. Скорость ракеты на высоте h равна v_0, масса m_0, а скорость истечения газов относительно ракеты u. Ответ: $m_{топл} = m_0\left[1 - \exp\left(-\dfrac{v_0 + g_л\tau}{u}\right)\right]$

3-89. На цилиндрический блок массой m, который может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси O, намотана невесомая веревка, к концу которой подвешено ведро массой $m_в = m/2$. В ведро, как показано на рис. 6.94, насыпан песок, который может высыпаться через дырку в днище ведра, причем за одну секунду высыпается через дырку масса μ песка. В начальный момент t = 0 система покоилась и в ведре находился песок массой $m_п = m/2$. С какой скоростью будет опускаться ведро в тот момент, когда последний песок высыплется в дырку? Ответ: $v = g\dfrac{m}{2\mu}\left(1 - \ln\dfrac{3}{2}\right)$

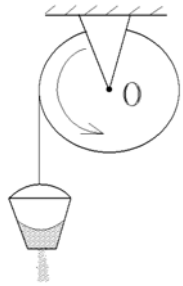

рис. 6.94

3-90. Льдина начала сползать с горы с углом наклона 30°. Коэффициент трения между льдом и горой $\mu = 0{,}5$. В результате трения лед разогревается и тает так, что масса льдины с течением времени убывает по закону $m = m_0\left(1 - 0{,}5t\right)$. Пренебрегая абсолютной скоростью отделяющихся частиц, найти скорость лбдины через 1 с после начала движения.

Ответ: $v = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)\dfrac{2t - t^2/2}{2 - t} \approx 1$ м/с.

3-91. Сферическая капля воды свободно падает в атмосфере пересыщенного водяного пара. Считая, что скорость возрастания массы капли пропорциональна ее поверхности и пренебрегая силой сопротивления среды, определить характер движения капли. Предполагается, что в момент зарождения капли ($t = 0$) скорость ее падения равна нулю.

Ответ: Равноускоренное падение с $a = g/4$.

3-92. В ракете продукты сгорания (газы) выбрасываются со скоростью $u = 3$ км/с (относительно ракеты). Найти отношение η кинетической энергии ракеты к кинетической энергии продуктов сгорания в момент достижения ракетой скорости 12 км/с. Движение ракеты происходит в отсутствии внешних сил. Ответ: $\eta = 42{,}6\%$

3-93. Космический аппарат, движущийся в свободном от поля тяготения пространстве, должен повернуть на 180°, сохранив скорость. Есть два способа такого маневра: 1) затормозить аппарат до остановки, а затем разогнать до прежней скорости; 2) заставить двигаться по дуге полуокружности. Скорость истечения газов из сопел маневрового двигателя в обоих случаях одинакова и постоянна. В каком из этих способов требуется меньшая затрата горючего? Ответ: В первом.

3-94. Имеется очень тонкий однородный прямой стержень длины l и массы m. На его оси на расстоянии l от центра стержня находится частица массы m_o. Найти модуль F силы, с которой стержень действует на частицу.

Ответ: $F = 4\gamma m m_0 / 3l^2$

3-95. Найти потенциальную энергию гравитационного взаимодействия материальной точки массы m и тонкого однородного стержня массы M и длины l, если они находятся на одной прямой на расстоянии a друг от друга.

Ответ: $U = -\left(\gamma m M / l\right)\ln\left(1 + l/a\right)$

3-96. Двойная звезда – это система из двух звезд, движущихся под действием притяжения вокруг центра инерции системы. Найти расстояние между компонентами двойной звезды, если ее сумарная масса $m_1 + m_2 = M$ и период обращения T. Ответ: $l = \sqrt[3]{\gamma M\left(T/2\pi\right)^2}$

3-97. Имеется очень тонкое однородное кольцо массы m и радиуса R. На прямой, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр, находится на расстоянии l от центра кольца частица массы m_o. Определить силу, действующую на частицу со стороны кольца.

Ответ: $F = \gamma m m_0 l \Big/ \left(R^2 + l^2\right)^{3/2}$

3-98. Имеется бесконечный очень тонкий однородный прямой стержень с линейной плотностью (массой, приходящейся на единицу длины), равной λ. На расстоянии l от его оси находится частица массы m. Частица какой массы M, находясь от m на расстоянии l, действовала бы на нее с такой же силой? Ответ: $M = 2\lambda l$

3-99. Имеется однородное очень тонкое полукольцо массы M и радиуса R. В центре этого полукольца находится частица массы m. Какую силу F надо приложить к частице, чтобы она начала двигаться в направлении, указанном на рис. 6.95 стрелкой, с ускорением $\vec{a}$?

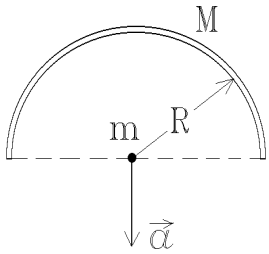

рис. 6.95

Ответ: $F = \dfrac{2\gamma m M}{\pi R^2} + ma$

3-100. Две взаимодействующие между собой частицы образуют замкнутую систему, центр инерции которой покоится. На рис. 6.96 показаны положения обеих частиц в некоторый момент времени и траектория частицы массой m_1 (эллипс с полуосями 10 и 5 см). Построить траекторию частицы массой m_2, если $m_2 = m_1/2$.

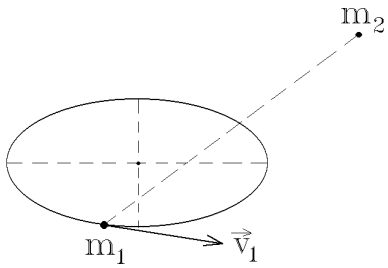

рис. 6.96

Ответ: Построить самостоятельно.

3-101. Космическое тело A движется к Солнцу, имея вдали от него скорость $\vec{v}_0$ относительно центра Солнца (рис. 6.97). Найти наименьшее расстояние, на которое это тело приблизится к Солнцу.

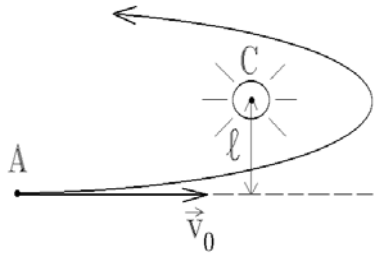

рис. 6.97

Ответ: $r_{\min} = \left(\gamma m_C \big/ v_0^2\right)\left(\sqrt{1 + \left(l v_0^2 \big/ \gamma m_C\right)^2} - 1\right)$

3-102. Имеется очень тонкий однородный слой в виде полусферы радиуса R и массы m. В центре полусферы находится частица массы m_o. Найти модуль гравитационной силы, с которой слой действует на частицу.

Ответ: $F = \gamma m m_0 \big/ 2R^2$

3-103. Имеется очень тонкий однородный диск радиуса R. Поверхностная плотность (масса единицы площади) диска равна σ. На прямой, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр, находится на расстоянии l от диска частица массы m. Найти силу F, с которой диск действует на частицу. Ответ: $F = 2\pi\gamma m\sigma\left(1 - l\Big/\sqrt{l^2 + R^2}\right)$

3-104. В Земле, которую считать однородным шаром, просверлили вдоль земной оси узкий канал и бросили в него с начальной нулевой скоростью небольшое тело. Определить отношение потенциальной энергии тела на поверхности Земли к потенциальной энергии его в центре Земли (положить потенциальную энергию тела на бесконечно большом удалении от Земли равной нулю). Ответ: 2/3

3-105. Наибольшее расстояние от Солнца до Земли $R_{max} = 1{,}52\cdot10^{11}$ м, наименьшее $R_{min} = 1{,}47\cdot10^{11}$ м. Исходя из этих данных, найти среднюю $<v>$, максимальную v_{max} и минимальную v_{min} скорости движения Земли по орбите. Сравнить максимальную и минимальную скорости со средней.

Ответ: $<v> = 2{,}97\cdot10^4$ м/с; $v_{max} = 1{,}017\cdot<v> = 3{,}02\cdot10^4$ м/с; $v_{min} = 2{,}92\cdot10^4$ м/с.

3-106. С воображаемой возвышенности, расположенной на полюсе Земли, посылают с одинаковой скоростью v_0 два снаряда. Начальная скорость первого снаряда направлена так, что он движется по направлению радиуса Земли; начальная скорость второго перпендикулярна радиусу Земли, и он движется по эллиптической траектории. Найти отношение R_1/R_2 максимальных возможных удалений от центра Земли первого и второго снарядов. Скорость $v_0 > \sqrt{gR_0}$. Ответ: $2gR_0\big/v_0^2$

3-107. Около звезды с массой M по круговой орбите движется спутник (другая звезда) массы m, причем $m \ll M$. В некоторый момент центральная звезда вспыхивает как сверхновая, выбрасывая массу qM. Считая, что выбрасываемая масса выходит за орбиту спутника практически мгновенно, описать возможные виды последующего движения спутника.

Ответ: $q < 0{,}5$ – эллипс; $q = 0{,}5$ – парабола; $q > 0{,}5$ – гипербола.

3-108. В вершинах равностороннего треугольника со стороной l помещены точечные массы m_1, m_2, m_3, взаимодействующие по закону всемирного притяжения. С какой угловой скоростью должна вращаться система, чтобы относительное расположение масс не изменилось?

Ответ: с $\omega = \sqrt{\gamma\Sigma m_i\big/l^3}$ вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости треугольника.

Тематика задач

(Число, стоящее в скобках около номера задачи, обозначает примерный уровень сложности по восьмибальной шкале)

Работа, мощность, энергия

3-1. – РА	(1)	3-8. – ЭН	(2)	3-15. – РА	(3)
3-2. – РА	(1)	3-9. – РА,ПЭН	(2)	3-16. – РА	(3)
3-3. – ЭН	(1)	3-10. – ЭН	(2)	3-17. – РА	(4)
3-4. – ПД,РА	(1)	3-11. – ВД,ИЭН	(2)	3-18. – МЩ,ПД	(4)
3-5. – РА	(2)	3-12. – РА	(3)		
3-6. – РА	(2)	3-13. – РА	(3)		
3-7. – РА	(2)	3-14. – РА	(3)		

Сохранение энергии, импульса, момента импульса

3-19. – МИ	(1)	3-42. – ИМ,ЭН	(3)	3-65. – ИМ,ЭН	(5)
3-20. – ЭН,ДО	(2)	3-43. – ИМ,ЭН	(3)	3-66. – ИМ,ЭН	(5)
3-21. – ЭН,ВД	(2)	3-44. – ИИМ,СТ	(3)	3-67. – ВЗС	(5)
3-22. – ЭН,ПД	(2)	3-45. – ИМ,ЭН	(3)	3-68. – ВЗС	(5)
3-23. – ЭН,ПД	(2)	3-46. – МИ	(3)	3-69. – МИ,ЭН	(5)
3-24. – ЭН,ДО	(2)	3-47. – ИМ,ЭН	(3)	3-70. – ИМ,МИТ	(5)
3-25. – ЭН,ПД	(2)	3-48. – ВЗС	(4)	3-71. – ВЗС	(5)
3-26. – ИИМ,СТ	(2)	3-49. – ИМ,ЭН	(4)	3-72. – ВЗС	(5)
3-27. – МИ	(2)	3-50. – ИМ,ИЭН	(4)	3-73. – УНЦ	(5)
3-28. – МИ	(2)	3-51. – МИ,ЭН	(4)	3-74.– ИИМ,ЭН	(5)
3-29. – ЭН	(2)	3-52. – МИ,ЭН	(4)	3-75.– МИ	(5)
3-30. – ЭН,МИ	(2)	3-53. – ВЗС	(4)	3-76. – ЭН,ДО	(6)
3-31. – ИМ,ЭН	(2)	3-54. – ВЗС	(4)	3-77. – ИМ,ИЭН	(6)
3-32. – ИМ,ИЭН	(2)	3-55. – МИ,ЭН	(4)	3-78. – МИМ,ЭН	(6)
3-33. – ИМ,ПД	(3)	3-56. – ИМ,ЭН	(4)	3-79. – МИ,ЭН	(6)
3-34. – ИМ,ЭН	(3)	3-57. – ИМ,РБ	(4)	3-80. – ИМ,МИ	(6)
3-35. – ИМ,МИ	(3)	3-58. – МИ	(4)	3-81. – ВЗС	(6)
3-36. – МИ	(3)	3-59. – МИ,ЭН	(4)	3-82. – ЭН,ДО	(7)
3-37. – МИ,ЭН	(3)	3-60. – МИТ	(4)	3-83. – ИМ,ЭН	(8)
3-38. – МИ,РБ	(3)	3-61. – ЭН	(5)	3-84. – МИ,ЭН	(8)
3-39. – МИ	(3)	3-62. – ВЗС	(5)		
3-40. – ЭН	(3)	3-63. – ЭН,ПД	(5)		
3-41. – МИ,РБ	(3)	3-64. – ИМ,ЭН	(5)		

Реактивное движение

3-85. – ВД	(2)	3-88. – ПД	(4)	3-91. – ПД	(6)
3-86. – ПД	(3)	3-89. – ВД	(4)	3-92. – ПД	(7)
3-87. – ПД	(4)	3-90. – ПД	(5)	3-93. – ПД,ВД	(7)

Гравитационное поле

3-94.– ТГ	(1)	3-99. – НГП,ПС	(2)	3-104. – ПЭН,ТГ	(3)
3-95. – ПЭН	(1)	3-100. – ДГП,ЦМ	(2)	3-105. – ДГП,ЗС	(4)
3-96. – ДГП,ДО	(1)	3-101. – ДГП,ЗС	(2)	3-106. – ДГП,ЗС	(4)
3-97. – НГП,ПС	(2)	3-102. – НГП,ПС	(3)	3-107. – ДГП,ЭН	(4)
3-98. – ТГ	(2)	3-103. – НГП,ПС	(3)	3-108. – ДГП,ЦБ	(6)

Пояснения к аббревиатуре

ВД – вращательное движение,
ВЗС – законы сохранения импульса, энергии и момента импульса,
ДГП – движение в гравитационном поле,
ДО – движение по окружности,
ЗС – законы сохранения,
ИИМ – изменение импульса,
ИМ – закон сохранения импульса,
ИЭН – изменение энергии,
МИ – закон сохранения момента импульса относительно оси,
МИТ – сохранение момента импульса относительно точки,
МЩ – мощность,
НГП – напряженность гравитационного поля,
НУ – неупругий удар,
ПД – поступательное движение,
ПС – принцип суперпозиции,
ПЭН – потенциальная энергия,
РА – работа,
СТ – система тел,
ТГ – теорема Гаусса,
УНЦ – упругий нецентральный удар,
УП – упругий центральный удар,
ЦБ – центробежная сила,
ЦМ – центр масс системы,
ЭН – энергия.

4. Колебания.

4-1. Найти период малых колебаний математического маятника – шарика, подвешенного на нити длиной l = 20 см, если он находится в жидкости, плотность которой в n = 3 раза меньше плотности шарика. Сопротивление жидкости считать пренебрежимо малым. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{nl}{g(n-1)}}$ =1,10 с.

4-2. Маятник состоит из невесомого стержня и двух шариков пренебрежимо малого радиуса, укрепленных на нем (рис.6.98). Массы шариков m_1 и m_2, их расстояния до оси вращения l_1 и l_2. Найти период малых колебаний

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{g(m_1 l_1 + m_2 l_2)}}$.

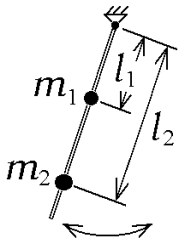

рис.6.98

4-3. Физический маятник устанавливают так, что его центр масс располагается над точкой подвеса. Из этого положения он начинает двигаться без трения и в момент прохождения положения равновесия имеет угловую скорость ω_{max}. Найти собственную частоту малых колебаний этого маятника.

Ответ: $\omega_o = \omega_{max}/2$.

4-4. Тело массы m = 0,5 кг висит на невесомом резиновом шнуре с коэффициентом упругости k = 50 Н/м. Найти максимальное расстояние, на которое можно оттянуть тело вниз, чтобы его колебания еще носили гармонический характер? Какова при этом энергия колебаний?

Ответ: $l_m = mg/k$ =9,81 см; E=0,241 Дж.

4-5. Найти период малых продольных колебаний тела массы m в системе, показанной на рис.6.99, если жесткости пружинок равны k_1 и k_2, а их массами можно пренебречь, так же как и трением. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)}$.

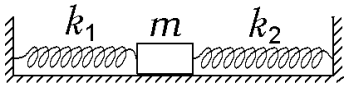

рис.6.99

4-6. Кубик совершает малые колебания в вертикальной плоскости, двигаясь без трения по внутренней поверхности сферической чаши радиусом R. Найти период колебаний, учитывая, что ребро кубика много меньше радиуса чаши. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{R/g}$

4-7. Однородный стержень массы m совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O (рис.6.100). Правый конец стержня подвешен на невесомой пружинке жесткости k. Найти период колебаний стержня, если в положении равновесия он горизонтален.

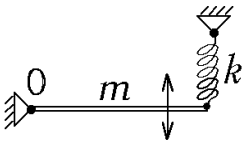

рис.6.100

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{m/3k}$.

4-8. При сложении двух гармонических колебаний одного направления результирующее колебание точки имеет вид: $x = a\cos(2{,}1t)\cos(50{,}0t)$, где t измеряется в секундах. Найти круговые частоты складываемых колебаний и период биений результирующего колебания.

Ответ: $\omega_1 = 47{,}9$ с$^{-1}$; $\omega_2 = 52{,}1$ с$^{-1}$; $T_б = 1{,}5$ с.

4-9. На концах горизонтального стержня длины l закреплены одинаковые положительные заряды Q. По стержню без трения может скользить колечко массы m с положительным зарядом q (рис.6.101). Найти период малых колебаний колечка. Ответ: $T = \pi l\sqrt{ml/8kqQ}$.

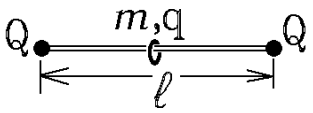

рис.6.101

4-10. Маленький шарик подвесили на нити длины l к точке O стенки, составляющей небольшой угол α с вертикалью (рис.6.102). Затем шарик отклонили на небольшой угол $\beta > \alpha$ и отпустили без начальной скорости. Считая удар шарика о стенку абсолютно упругим, найти период колебаний такого маятника. Ответ: $T = 2\left(\pi - \arccos\left(\alpha/\beta\right)\right)\cdot\sqrt{l/g}$

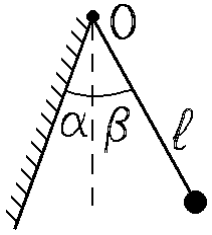

рис.6.102

4-11. Шар, радиус которого 5 см, подвешен на нити длиной 10 см. Найти погрешность в определении периода малых колебаний, которую совершают, приняв шар за точечный маятник длиной 15 см. Ответ: $\Delta T/T = 2{,}15\%$

4-12. На стальной проволоке длиной l = 6 м и площадью сечения $S = 0{,}5$ мм^2 висит шар массы m = 2 кг. Шар поднимают вертикально вверх на некоторую высоту и затем отпускают, после чего он начинает колебаться в вертикальном направлении. При каких амплитудах колебания шара будут синусоидальными и какой у них будет период? Модуль Юнга для стали E = 200 ГПа. Ответ: $A < mgl/ES$ =1,18 мм.

4-13. Доска с лежащим на ней бруском совершает горизонтальные гармонические колебания с амплитудой A = 10 см. Найти коэффициент трения между доской и бруском, если последний начинает скользить по доске, когда ее период колебаний меньше 1 с. Ответ: $\mu = 4\pi^2 A/gT^2 = 0{,}402$.

4-14. Грузик на дне цилиндрической пробирки при погружении пробирки в жидкость удерживает ее в вертикальном положении. В равновесном состоянии дно пробирки погружено на глубину h. Найти период малых колебаний пробирки. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{h/g}$.

4-15. Найти период малых вертикальных колебаний тела массы m, подвешенного на двух пружинках, если их жесткости k_1 и k_2, а массами можно пренебречь (рис.6.103).

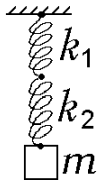

рис.6.103

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{m(k_1 + k_2)/(k_1 k_2)}$.

4-16. Частица массы m находится в одномерном потенциальном поле. Ее потенциальная энергия имеет вид $U(x) = U_0(1 - \cos ax)$, где x – координата, а U_0 и a – константы. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{m/a^2 U_0}$.

4-17. Найти период малых колебаний физического маятника массы m, к центру масс которого прикреплена горизонтальная пружина жесткости k, другой конец которой закреплен (рис.6.104). В вертикальном положении равновесия маятника пружина не деформирована. Момент инерции маятника относительно точки подвеса равен I, расстояние от оси качаний до центра масс $OC = a$.

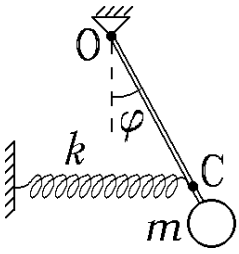

рис.6.104

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{I/(mga + ka^2)}$.

4-18. Маятник представляет собой легкий тонкостенный сферический сосуд радиуса R на невесомом стержне, целиком заполненный водой (рис.6.105). Расстояние от центра сосуда до точки подвеса равно l. Во сколько раз изменится период колебаний такого маятника после того, как вода замерзнет? Вязкостью воды и изменением ее объема при замерзании пренебречь.

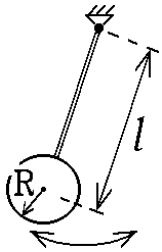

рис.6.105

Ответ: увеличится в $\sqrt{1 + 0,4\cdot(R/l)^2}$ раз.

4-19. Найти период колебаний маятника, состоящего из тонкого однородного полукольца (рис.6.106), подвешенного в центре кольца O с помощью двух натянутых невесомых нитей AO и OB. Радиус кольца равен R.

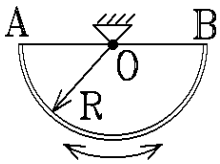

рис.6.106

Ответ: $T = \pi\sqrt{2\pi R/g}$.

4-20. Физический маятник совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси с частотой $\omega_1 = 15$ с$^{-1}$. Если к нему прикрепить небольшое тело массы 50 г на расстоянии 20 см ниже оси, то частота колебаний становится равной $\omega_2 = 10$ с$^{-1}$. Найти момент инерции этого маятника относительно оси качаний. Ответ: $I = 8,15\cdot10^{-4}$кг·м^2.

4-21. На каком расстоянии x от центра следует подвесить тонкий однородный стержень длины l, чтобы частота его малых колебаний была максимальна? Найти также эту частоту.

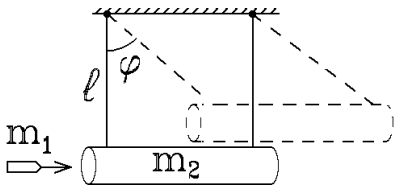

рис.6.107

Ответ: $x = l/\sqrt{12}$; $\omega_{max} = \sqrt{\sqrt{3}g/l}$.

4-22. Бревно массы $m_2 = 20$ кг висит на двух шнурах длины $l = 1$ м каждый (рис.6.107). В торец бревна ударяется пуля массы $m_1 = 10$ г, летящая со скоростью 500 м/с, и застревает в нем. Найти амплитуду φ_{max} и период возникших колебаний этой системы. Ответ: $\varphi_{max} = 4°35'$; $T \approx 2{,}01$ с.

4-23. Найти период малых колебаний математического маятника длины $l = 21$ см, если его точка подвеса O движется относительно Земли с постоянным ускорением $\vec{a}$ под углом $\beta = 30°$ к горизонту (рис.6.108), причем $a = g/2$.

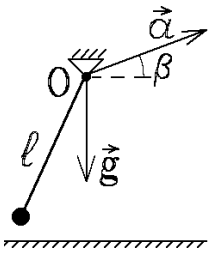

рис.6.108

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{2l/\left(\sqrt{7}g\right)} = 0{,}799c.$

4-24. Самолет летает по горизонтальной окружности радиуса $R = 25$ км с постоянной скоростью $v = 250$ м/с. В кабине самолета установлены пружинные и маятниковые часы. Сколько времени пройдет по маятниковым часам за 1 час по пружинным?

Ответ: $t_м \approx t_{пр}\left(1 + v^4/4g^2R^2\right)$ = 1 ч 58 с ≈ 1 ч 1 мин.

4-25. Найти зависимость от времени угла отклонения математического маятника длины 80 см при разных начальных условиях: а) в начальный момент маятник отклонили на угол 3° и без толчка отпустили; б) в состоянии равновесия ему сообщили горизонтальную скорость 0,22 м/с; в) отклонили на 3° и сообщили скорость 0,22 м/с, направленную к положению равновесия.

Ответ: а) $\alpha = 3°\cos(3{,}5t)$; б) $\alpha = 4{,}45°\sin(3{,}5t)$; в) $\alpha = 5{,}41°\cos(3{,}5t + 0{,}983)$.

4-26. Математический маятник массы $m = 1$ г прикреплен невесомой нитью длины $l = 1$ м к муфте массы $M = 2$ г, которая может без трения скользить по горизонтальной проволоке, лежащей в плоскости качаний маятника. Найти частоту малых колебаний этого маятника. Ответ: $\omega_0 = 3{,}84$ с$^{-1}$.

4-27. На горизонтальной пружине укреплено тело массой $m_1 = 10$ кг, лежащее на гладком столе (рис.6.109). В него попадает пуля и застревает в нем. Масса пули $m_2 = 10$ г, ее скорость $v = 500$ м/с. Возникают колебания с амплитудой $A = 10$ см. Найти период колебаний.

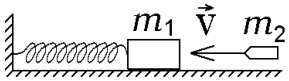

рис.6.109

Ответ: $T = 2\pi A\left(m_1 + m_2\right)/m_2 v$ =1,26 с.

4-28. Брусок массы m покоился на гладкой горизонтальной поверхности (рис.6.110). К нему прикреплена легкая пружина жесткости k. Свободный конец пружины начали перемещать горизонтально с некоторой постоянной скоростью v. Через сколько времени надо остановить этот конец пружинки, чтобы после его остановки брусок не колебался?

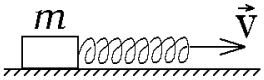

рис.6.110

Ответ: $t = 2\pi n\sqrt{m/k}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

4-29. Тела с массами M и m соединены вертикальной пружиной. С какой силой F надо надавить на верхнее тело (рис. 6.111), чтобы после прекращения ее действия нижнее тело подпрыгнуло над опорой? Ответ: $F > (M + m)g$.

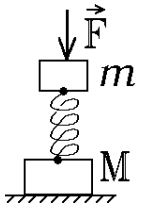

рис. 6.111

4-30. Пренебрегая вязкостью, найти период малых колебаний жидкости, налитой в U-образную трубку сечением 0,50 см^2. Объем жидкости 16 см^3. Ответ: $T = \pi\sqrt{2V/Sg}$ =0,802 с.

4-31. Однородный диск массы m и радиуса R укреплен на конце тонкого стержня (рис.6.112). При повороте диска на угол φ в стержне возникает момент упругих сил, равный – $k\varphi$, где k – константа. Найти амплитуду малых крутильных колебаний и их энергию, если в начальный момент диск отклонили на угол φ_o и сообщили ему угловую скорость ω_o.

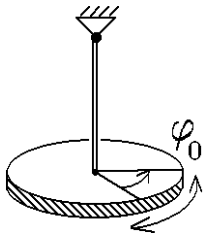

рис.6.112

Ответ: $\varphi_{max} = \varphi_0\sqrt{1 + mR^2\omega_0^2/2k\varphi_0^2}$; $E = k\varphi_{max}^2/2$.

4-32. Брусок массы m, находящийся на гладкой горизонтальной поверхности, соединен со стенкой легкой горизонтальной пружиной жесткости k и находится в покое. Начиная с некоторого момента на брусок начинает действовать вдоль пружины постоянная сила F. Найти пройденный путь и время движения бруска до первой остановки.

Ответ: $l = 2F/k$; $t = \pi\sqrt{m/k}$.

4-33. Найти период малых вертикальных колебаний шарика массы m = 40 г, укрепленного на середине горизонтально натянутой струны длиной l = 1 м. Натяжение струны считать постоянным и равным F = 10 Н.

Ответ: $T = \pi\sqrt{ml/F} = 0{,}199$ с.

4-34. На доске лежит груз весом 1 Н. Доска совершает гармонические вертикальные колебания с амплитудой 2 см и периодом 0,5 с. Найти силу давления груза на доску.

Ответ: $F_\partial = \left(1 + 0{,}32\cos\left(4\pi t + \varphi_0\right)\right)H$; где φ_0 – начальная фаза.

4-35. Два шарика массами m_1 и m_2 могут скользить без трения по тонкому горизонтальному стержню (рис.6.113). Шарики связаны невесомой пружиной жесткости k. Их смещают в разные стороны и отпускают без толчка. Начальное относительное смещение шариков равно A. Как ведет себя центр масс системы? Какова частота возникших колебаний? Чему равно максимальное значение относительной скорости?

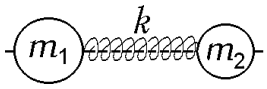

рис.6.113

Ответ: $\omega = \sqrt{k/\mu}$, где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$; $v_{\max} = A\omega$.

4-36. Частица массы m движется под действием силы $\vec{F} = -\alpha m \vec{r}$, где $\alpha = \text{const} > 0$, $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы. Найти траекторию движения частицы, если в начальный момент $\vec{r} = r_0 \vec{i}$, $\vec{v} = v_0 \vec{j}$; $\vec{i}, \vec{j}$ – орты декартовой системы. Ответ: $(x/r_0)^2 + \alpha (y/v_0)^2 = 1$.

4-37. Тела с массами m_1 = 1 кг и m_2 = 4,1 кг соединены между собой пружиной (рис.6.114). Тело m_1 совершает свободные вертикальные гармонические колебания с амплитудой A = 1,6 см и частотой ω = 25 с$^{-1}$. Пренебрегая массой пружины, найти наибольшее и наименьшее значение силы давления этой системы на опорную площадь.

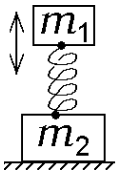

рис.6.114

Ответ: $F_д = (m_1 + m_2) g \pm m_1 A \omega^2$; $F_{\max} = 60$ Н, $F_{\min} = 40$ Н.

4-38. Имеется недеформированная пружина жесткости k = 13 Н/м, концы которой закреплены. В точке, отстоящей от одного из концов пружины на η = 1/3 ее длины, укрепили небольшое тело массой m = 25 г. Пренебрегая массой пружины, найти период малых продольных колебаний пружины (сила тяжести скомпенсирована). Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\eta m (1-\eta)/k} = 0{,}130$ с.

4-39. Два одинаковых математических маятника длины l связаны пружиной жесткости k (рис.6.115). При равновесии маятники вертикальны, а пружина не деформирована. Определить частоты малых колебаний системы в двух случаях: 1) маятники отклоняют на равные углы в одну и ту же сторону, 2) маятники отклоняют на равные углы в разные стороны.

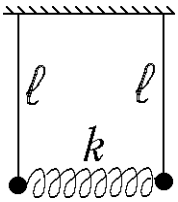

рис.6.115

Ответ: $\omega_1 = \sqrt{g/l}$; $\omega_2 = \sqrt{g/l + 2k/m}$.

4-40. Однородный цилиндрический блок массы M и радиуса R может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси O (рис.6.116). На блок намотана нить, к концу которой прикреплен груз A. Груз A уравновешивается точечным телом массы m, укрепленным на ободе блока, при определенном значении угла α. Найти частоту малых колебаний системы.

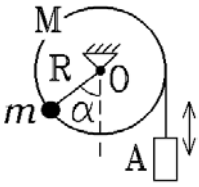

рис.6.116

Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{mg\cos\alpha}{0{,}5MR + mR(1+\sin\alpha)}}$.

4-41. На тележке, стоящей на горизонтальных рельсах, подвешен математический маятник длины l и массы m_1, которая сравнима с массой тележки m_2. Тележка может катиться по рельсам практически без трения.

Найти период малых колебаний маятника. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{lm_2/g\left(m_2+m_1\right)}$

4-42. Точка участвует одновременно в двух колебаниях одного направления: $x_1 = a\cos\omega t$ и $x_2 = a\cos 2\omega t$. Найти максимальную величину скорости точки. Ответ: $v_{\max} = 2,74a\omega$.

4-43. Маятник метронома представляет собой груз массы m_1, качающийся около оси O, с прикрепленной к нему невесомой спицей, по которой может перемещаться маленький грузик массы m_2 (рис.6.117). Момент инерции груза m_1 относительно оси O равен I, а расстояние от его центра масс до оси O равно a. Построить график зависимости периода колебаний от координаты x грузика и определить наименьшую величинуэтого периода в случае $x > m_1 a/m_2$.

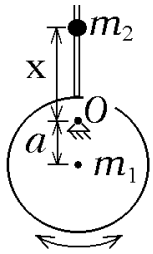

рис.6.117

Ответ: $T_{\min} = 2\pi\sqrt{2\left(m_1 a + \sqrt{m_1^2 a^2 + m_2 I}\right)/m_2 g}$.

4-44. Тонкая прямоугольная пластинка может колебаться около горизонтальной оси, лежащей в ее плоскости и перпендикулярной одной из ее сторон, длина которой равна l. При каком расстоянии x оси от верхней стороны период колебаний будет наименьшим? Каким он будет?

Ответ: x=0,211l; $T_{\min} = 2\pi\sqrt{l/\sqrt{3}g}$

4-45. Физический маятник состоит из двух одинаковых массивных шаров с радиусом 5 см каждый на невесомом стержне (рис.6.118). Ось колебаний отстоит на b = 10 см от центра верхнего шара. При каком расстоянии x между центрами шаров период колебаний будет наименьшим? Найти такой период, приведенную длину и расстояние d между осью и центром масс маятника.

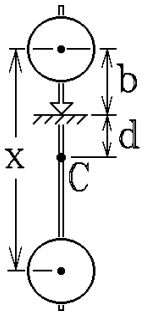

рис.6.118

Ответ: x = 34,8 см; $T_{\min}$ =1,41 с; d =7,42 см; $l_{\text{пр}}$ = 49,7 см.

4-46. Тонкая пластинка из однородного материала, имеющая форму равностороннего треугольника высоты h (рис.6.119), совершает малые колебания около горизонтальной оси, проходящей через одно из оснований треугольника. Найти период таких колебаний.

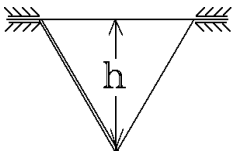

рис.6.119

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{h/(2g)}$.

4-47. Кольцо из тонкой проволоки совершает малые колебания около горизонтальной оси, проходящей через одну из точек кольца O. Сравнить периоды колебаний относительно оси Oy, лежащей в плоскости кольца, и оси Ox, перпендику-

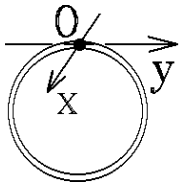

рис.6.120

лярной этой плоскости (рис.6.120). Ответ: $T_y/T_x = \sqrt{3}/2$.

4-48. Маятниковые часы с периодом 1 с на поверхности Земли идут точно. В каком случае эти часы больше отстанут за сутки: если их поднять на высоту 200 м или же опустить в шахту на глубину 200 м?

Ответ: на высоте отстанут вдвое больше, чем в шахте.

4-49. Найти частоту малых колебаний тонкого однородного вертикального стержня массы m и длины l, который шарнирно укреплен в точке O (рис.6.121). Жесткость пружин равна k_1 и k_2. Массами их и трением в шарнире можно пренебречь. Ответ: $\omega_0 = \sqrt{3g/2l + 3(k_1 + k_2)/m}$.

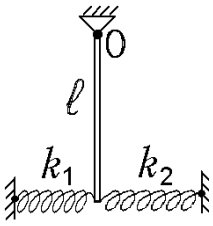

рис.6.121

4-50. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от пройденного пути l по закону $\mu = \mu_0 l$, где $\mu_0 = \text{const}$. Найти время движения бруска до остановки. Ответ: $t = \pi/\sqrt{\mu_o g \cos\alpha}$.

4-51. Найти период колебаний ртути массы m = 200 г, налитой в изогнутую трубку (рис.6.122), одно из колен которой составляет угол θ = 30° с вертикалью. Площадь сечения канала трубки S = 0,5 см^2. Вязкостью ртути пренебречь.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{S\rho g(1+\cos\theta)}} = 0,796$ с.

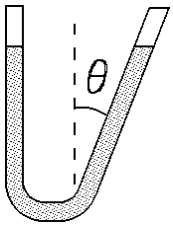

рис.6.122

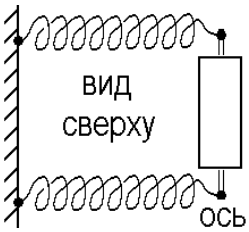

рис.6.123

4-52. На горизонтальной плоскости лежит цилиндр с моментом инерции I (относительно проходящей через центр масс горизонтальной оси), с массой m и с радиусом r. К оси цилиндра прикреплены две пружины, каждая жесткостью k. Пружины расположены горизонтально, и их другие концы прикреплены к стене (рис.6.123). Найти период малых колебаний цилиндра, которые возникнут, если его вывести из положения равновесия и дать возможность кататься без скольжения по горизонтальной плоскости.

Ответ: $T = (2\pi/r)\sqrt{(I + mr^2)/2k}$

4-53. По штанге, вращающейся в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω (рис.6.124), может скользить без трения груз массы m, удерживаемый пружиной с жесткостью k, длина которой в недеформированном состоянии равна l_0. Найти уравнение движения груза, если штангу внезапно остановить?

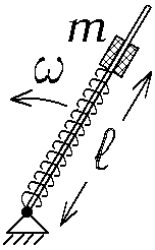

рис.6.124

Ответ: $l = l_0\left(1+\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega_0 t\right)$, где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ и $\omega < \omega_0$.

4-54. Тело массы m упало с высоты h на чашку пружинных весов. Прилипнув к чашке, тело начинает совершать вертикальные гармонические колебания. Пренебрегая массами чашки и пружины, найти амплитуду колебаний и их энергию. Жесткость пружины k.

Ответ: $A = (mg/k)\sqrt{1+2kh/mg}$; $E = mgh + m^2g^2/2k$

4-55. К нерастянутой пружине, верхний конец которой закреплен, подвесили в нижней точке с координатой $y = 0$ и без толчка отпустили тело массы m. Жесткость пружины k. Пренебрегая массой пружины, найти закон движения тела $y(t)$, а также максимальное и минимальное натяжение пружины в процессе движения.

Ответ: $y = (mg/k)\left(1-\cos\sqrt{k/m}\,t\right)$; $F_{\max} = 2mg$; $F_{\min} = 0$.

4-56. Однородный стержень положили на два быстро вращающихся валика (рис.6.125). Расстояние между осями валиков l = 20 см, коэффициент трения между стержнем и валиком μ = 0,18. Показать, что стержень будет совершать гармонические колебания и найти период этих колебаний. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{l/2\mu g} = 1{,}50$ с .

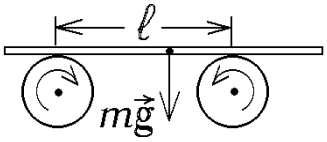

рис.6.125

4-57. На тонкий стержень длины l, подвешенный за конец и совершающий малые колебания с угловой амплитудой α_0, надето с трением небольшое кольцо массы m. Расстояние кольца от оси маятника d. Массой кольца при вычислении периода можно пренебречь. Найти силу нормального давления, действующую на кольцо со стороны стержня, и силу трения между ними.

Ответ: $F_{\text{давл}} = mg\alpha_0\left(1-3d/2l\right)\cos\omega t$, где $\omega = \sqrt{3g/2l}$;

$F_{\text{тр}} = mg\left[1-\alpha_0^2\left(\cos^2\omega t-(3d/l)\text{in}^2\,\omega t\right)/2\right]$

4-58. Цепочка длины l и массы m первоначально находилась в вертикальном отрезке стеклянной трубки, согнутой под углом 90° (рис.6.126), и была отпущена без начальной скорости. За какое время она соскользнет в горизонтальный отрезок трубки, если трение отсутствует? Ответ: $t = \pi\sqrt{l/4g}$.

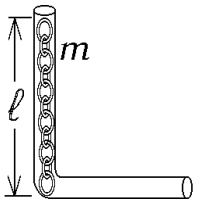

рис.6.126

4-59. Система из двух одинаковых частиц и трех пружин одинаковой жесткости k и равновесной длины l_0 изображена на рис.6.127. Найти частоты колебаний этих связанных осцилляторов.

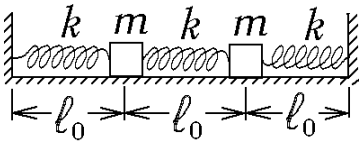

рис.6.127

Ответ: $\omega_1 = \sqrt{k/m}$; $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$

4-60. На гладкой горизонтальной поверхности покоились два бруска с массами m_1 = 60 г и m_2 = 20 г, соединенные невесомой пружинкой жесткости k =2 Н/м и длины l_0 =15 см в недеформированном состоянии. На брусок с массой m_1 начали действовать постоянной горизонтальной силой F =1 Н. Найти закон изменения расстояния между брусками с течением времени, а также максимальное и минимальное расстояние между ними.

Ответ: $l = l_o + \dfrac{Fm_2}{k(m_1+m_2)}\left(1-\cos\sqrt{\dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}t\right)$, $l_{\max} = 40$ см; $l_{\min} = 15$ см .

4-61. Найти период малых крутильных колебаний тонкого горизонтального диска, подвешенного симметрично на трех параллельных нитях одинаковой длины l = 120 см каждая (рис.6.128).

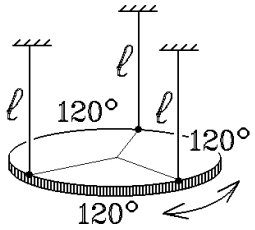

рис.6.128

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{l/2g} = 1{,}55$ с .

4-62. Зайчик колеблется гармонически с некоторой неизменной частотой относительно шкалы, которая сама колеблется относительно стенки. Оба колебания имеют одинаковое направление. При частотах колебаний шкалы 20 Гц и 22 Гц частота биений зайчика относительно стенки одинакова. При какой частоте колебаний шкалы частота биений зайчика станет вдвое большей?

Ответ: 19 Гц или 23 Гц.

4-63. Как изменится период T_0 малых колебаний математического маятника, подвешенного вблизи поверхности Земли, если под маятником в Земле находится сферическая полость радиуса r, заполненная веществом со средней плотностью ρ, большей, чем средняя плотность Земли ρ_0? Расстояние от центра полости до маятника h, радиус Земли R.

Ответ: уменьшится на $\Delta T \approx T_0 \dfrac{\rho-\rho_0}{2\rho_0}\dfrac{r^3}{Rh^2}$.

4-64. Маятниковые часы установили в кабине лифта, которая начала подниматься с постоянным ускорением $a < g$. На высоте h ускорение лифта изменило направление на противоположное, оставшись тем же по величине. Через сколько времени после начала движения показания часов окажутся верными? Ответ: $\Delta t = \sqrt{\dfrac{2h}{a}}\dfrac{\sqrt{1+\varepsilon}-\sqrt{1-\varepsilon}}{1-\sqrt{1-\varepsilon}}$, где $\varepsilon = a/g$.

4-65. Как изменится ход карманных часов, если их положить на горизонтальный абсолютно гладкий стол? Для простоты считать, что ось крутильного маятника часов проходит через их центр, а момент инерции ча-

сов I_0 в 500 раз больше момента инерции маятника I.

Ответ: $T'/T = 1 - I/2I_0$, т.е. ход часов ускорится на 0,1%.

4-66. Тело вращения радиуса r с моментом инерции I (относительно геометрической оси) и массой m катается без скольжения по внутренней поверхности цилиндрического желоба радиуса R, совершая малые колебания. Найти период этих колебаний.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\left(1 + I/mr^2\right)(R - r)/g}$.

4-67. Найти частоту малых колебаний груза массы m_1 = 1 кг, а также максимальные силы натяжения нити слева и справа при амплитуде колебаний A = 5 см (рис.6.129). Блок представляет собой сплошной цилиндр с массой m_2 = 5 кг и с радиусом R = 10 см, жесткость невесомой пружины $k = 10^3$ Н/м. Трением вращения блока и проскальзыванием нити пренебречь.

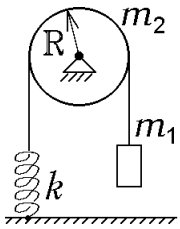

рис.6.129

Ответ: $\omega = \sqrt{2k/(2m_1 + m_2)}$ = 16,9 с$^{-1}$;

$F_{\text{слева}} = kA + m_1 g = 59{,}8$ Н; $F_{\text{справа}} = m_1\left(g + \omega^2 A\right)$ = 24,1 Н.

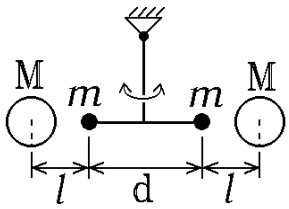

рис.6.130

4-68. На концах невесомого стержня длины d = 1 м укреплены два маленьких шарика с массами m = 1 г. Стержень может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину (рис.6.130). На одной прямой со стержнем укреплены два массивных шара с массами M = 20 кг. Расстояние между центрами большого и малого шаров l = 16 см. Найти период малых колебаний такого крутильного маятника.

Ответ: $T = 2\pi l\sqrt{\dfrac{ld}{(2l + d)GM}} = 2{,}66$ ч.

4-69. В гипотетическом туннеле, прорытом вдоль одной из хорд земного шара, под действием только силы тяжести, без трения и без начальной скорости движется поезд. На какое время Δt отстанут часы в поезде от станционных часов после выхода поезда из тоннеля? Предполагается, что все часы были синхронизированы. R – радиус Земли, L – наименьшее удаление поезда от центра Земли. Ответ: $\Delta t = \pi\left(\sqrt{R} - \sqrt{L}\right)/\sqrt{g}$.

4-70. Деревянный молоток, состоящий из цилиндрического бойка радиуса R = 4 см и тонкой рукоятки длины l = = 90 см, положен на два параллельных бруска. Масса бойка 0,8 кг, рукоятки – 0,6 кг. Найти период малых колебаний молотка (рис.6.131). Рассмотреть два случая: 1) боек катится без проскальзывания; 2) боек скользит без трения. Ответ: T_1 = 1,50 с; T_2 = 1,30 с

4-71. Доска, на которой лежит тело массы m, начинает двигаться вертикально вверх по закону $y = A(1-\cos\omega t)$, где y – смещение из начального положения, а $\omega = 11$ с$^{-1}$. Найти: а) минимальную амплитуду колебаний доски, при которой тело начнет отрываться от нее; б) амплитуду колебаний доски, при которой тело подскочит вверх на высоту h=50 см относительно начального положения (в момент t=0).

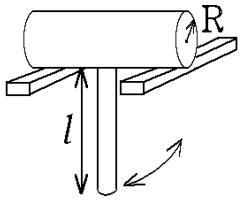

рис.6.131

Ответ: а) $A_{\min} = g/\omega^2 = 8{,}11$ см ; б) $A = \left(g/\omega^2\right)\left(\omega\sqrt{2h/g}-1\right) = 20{,}4$ см .

4-72. На верхнюю ветвь горизонтально расположенного камертона (рис.6.132) насыпан мелкий песок. Камертон приводится в колебания с частотой $\nu = 500$ Гц. Какова амплитуда колебаний в той точке камертона, где песчинки подскакивают на высоту h = 3 мм (по отношению к неподвижному камертону)?

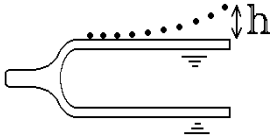

рис.6.132

Ответ: $A = \sqrt{8\pi^2\nu^2 gh - g^2}\Big/\left(2\pi\nu\right)^2 = 77{,}2$ мкм .

4-73. Однородная квадратная горизонтальная плита подвешена за свои углы к потолку зала на четырех параллельных веревках длины l каждая. Найти период малых крутильных колебаний вокруг вертикальной оси, проходящей через центр плиты. Ответ: $T = 2\pi\sqrt{l/(3g)}$.

4-74. Найти период малых колебаний небольшого тела массы m, способного перемещаться без трения по прямой проволоке ПП' (рис.6.133). Тело прикреплено невесомой пружиной в точке A, находящейся на удалении l над проволокой. Пружина, имея длину l, натянута с силой F.

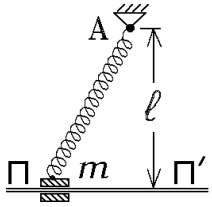

рис.6.133

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{ml/F}$.

4-75. Каков логарифмический декремент затухания математического маятника длины 0,8 м, если его начальная амплитуда через 5 с уменьшается в 10 раз? Ответ: $\theta = 0{,}834$.

4-76. Однородный диск радиуса 13 см может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через край диска. Найти период малых колебаний этого диска, если логарифмический декремент затухания $\theta = 1{,}13$.

Ответ: $T = \sqrt{\left(3R/2g\right)\left(4\pi^2+\theta^2\right)} = 0{,}9$ с .

4-77. Найти добротность осциллятора, у которого 1) амплитуда смещения уменьшается в $\eta = 2$ раза через каждые n = 110 периодов колебаний;

2) собственная частота $\omega_0 = 0{,}1$ с$^{-1}$ и время релаксации $\tau = 60$ с.

Ответ: 1) $Q = \pi n / \ln\eta = 499$; 2) $Q = \sqrt{(\omega_0\tau)^2 - 1}\Big/2 = 2{,}96$.

4-78. К невесомой пружине подвесили грузик, и она растянулась на $x_0 = 9{,}8$ см. С каким периодом будет колебаться грузик, если ему дать небольшой толчок в вертикальном направлении? Логарифмический декремент затухания $\theta = 3{,}1$. Ответ: $T = \sqrt{x_0\left(4\pi^2 + \theta^2\right)\Big/g}$.

4-79. Точка совершает затухающие колебания с частотой $\omega = 25$ с$^{-1}$. Найти коэффициент затухания β, если в начальный момент скорость точки равна нулю, а ее смещение в $\eta = 1{,}02$ раза меньше амплитуды.

Ответ: $\beta = \omega\sqrt{\eta^2 - 1} = 5{,}02$ с$^{-2}$.

4-80. Осциллятор со временем релаксации $\tau = 20$ с в момент $t = 0$ имеет начальное смещение $x_0 = 10$ см. При каком значении начальной скорости v_0 это смещение будет равно своей амплитуде?

Ответ: $v_0 = -0{,}5$ см/с.

4-81. Осциллятор колеблется в вязкой среде с логарифмическим декрементом $\theta_0 = 0{,}7$. а) Возможны ли колебания этого осциллятора в среде, сопротивление которой в 10 раз больше, чем у данной? б) Тот же вопрос, но с $\theta_0 = 0{,}1$. Если – да, то каковы декременты затухания в новой среде?

Ответ: а) нет; б) да; $\theta_1 = 1{,}013$.

4-82. Тонкий однородный диск массы m и радиуса R, подвешенный к упругой нити (рис.6.134), совершает крутильные колебания в жидкости. Момент упругих сил со стороны нити равен $-\alpha\varphi$, где $\alpha = \text{const}$, а φ – угол поворота из положения равновесия. Сила сопротивления, действующая на единицу поверхности диска, равна $-\eta v$, где η – константа, а v – скорость данного элемента диска относительно жидкости. Найти частоту малых колебаний.

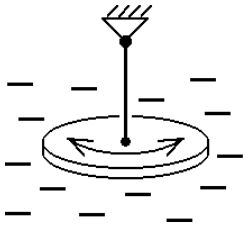

рис.6.134

Ответ: $\omega = \sqrt{2\alpha\big/mR^2 - \left(\pi\eta R^2\big/2m\right)^2}$

4-84. Маятник стенных часов массы $m = 40$ г колеблется с периодом $T = 0{,}4$ с, причем амплитуда колебаний центра инерции маятника $a_C = 7$ мм . Если часы не заведены, то амплитуда колебаний уменьшается вдвое за 3 колебания. Найти полезную работу, которая производится при заводе часов на недельный срок. Ответ: $A = 4\pi^2 m a_C^2 t \ln 2\big/3T^3 = 169$ Дж .

4-83. Математический маятник длины $l = 1$ м имеет добротность $Q = 100$. За какое время τ полная механическая энергия колебаний этого маятника уменьшится в $\eta = 10^5$ раз? Ответ: $\tau = \sqrt{l\left(4Q^2+1\right)\ln^2\eta/4g} = 36{,}8$ с.

4-85. Найти логарифмический декремент затухания собственных колебаний маленького пружинного маятника, если при смещении из положения равновесия на $l_0 =$ см он останавливается, проделав путь $l = 1$ м.

Ответ: $\theta = 2\ln\left(\left(l+l_0\right)/\left(l-l_0\right)\right) = 0{,}04$.

4-86. На льдину массой M, плавающую в море, опустился с вертикальной скоростью v_1 вертолет массы m. Определите среднюю скорость диссипации энергии за время релаксации τ. Сила сопротивления воды $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\eta\vec{v}$.

Ответ: $\langle dE/dt\rangle = -\eta\left(mv_1/2\left(m+M\right)\right)^2\left(1-e^{-2}\right)$

4-87. Три последовательных крайних положения качающейся стрелки гальванометра пришлись против делений $n_1 = 20{,}0$; $n_2 = 5{,}5$; $n_3 = 12{,}8$. Считая декремент затухания постоянным, определить деление, соответствующее положению равновесия стрелки. Ответ: $n_0 = \dfrac{n_1n_3 - n_2^2}{n_1+n_3-2n_2} = 10{,}4$.

4-88. Найти выражение для вынуждающей силы, под действием которой осциллятор массы m с коэффициентом затухания β испытывает гармонические колебания по закону $x = A\sin\left(\omega_0 t - \varphi\right)$, где ω_0 – собственная частота осциллятора. Ответ: $F = 2\beta mA\omega_0\cos\left(\omega_0 t - \varphi\right)$.

4-89. Тело массы m, подвешенное к невесомой пружине, совершает вынужденные колебания с амплитудой A и частотой ω. Собственная частота незатухающих колебаний системы равна ω_0. Найти среднюю за период механическую энергию данного осциллятора.

Ответ: $\langle E\rangle = mA^2\left(\omega_0^2+\omega^2\right)/4$

4-90. Осциллятор массы m движется по закону $x = A\sin\omega t$ под действием вынуждающей силы $F = F_0\cos\omega t$. Найти коэффициент затухания осциллятора. Ответ: $\beta = F_0/\left(2A\omega m\right)$

4-91. Осциллятор с собственной частотой $\omega_0 = 314$ с$^{-1}$ колеблется в вязкой среде с коэффициентом затухания $\beta = 10$ с$^{-1}$ под действием периодической вынуждающей силы, частота которой может меняться. При каком периоде колебаний осциллятора амплитуда его скорости достигает максимального значения? Ответ: $T = 0{,}02$ с.

4-92. Оценить, через сколько времени установятся колебания в системе с добротностью $Q = 10^6$ и собственной частотой $\omega_0 = 5\cdot10^3$ с$^{-1}$ при резонансном воздействии на эту систему вынуждающей гармонической силы.

Ответ: $\tau \approx 2Q/\omega_0 = 400$ с .

4-93. При неизменной амплитуде вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний при частотах $\omega_1 = 100$ с$^{-1}$ и $\omega_2 = 300$ с$^{-1}$ оказывается одинаковой. Найти резонансную частоту для смещения осциллятора.

Ответ: $\omega_р = 224$ с$^{-1}$.

4-94. При какой скорости поезда рессоры его вагонов будут особенно сильно колебаться под действием толчков колес о стыки рельс, если длина рельса 12,5 м, нагрузка на одну рессору равна $5{,}5\cdot10^4$ Н и если рессора прогибается на 16 мм при нагрузке 10^4 Н?

Ответ: $v = 75{,}6$ км/ч .

4-95. Найти частоту, при которой амплитуда скорости частицы достигает максимума, если известно, что при циклических частотах 100 с$^{-1}$ и 300 с$^{-1}$ амплитуда скорости одинакова. При этом амплитуда вынуждающей силы неизменна. Ответ: $\omega = 173$ с$^{-1}$.

4-96. Некоторая резонансная кривая соответствует осциллятору с логарифмическим декрементом затухания $\theta = 1{,}60$. Найти для этой кривой отношение максимальной амплитуды смещения к амплитуде смещения при очень малой частоте. Ответ: $A_m/A_{ст} = (\theta/4\pi)\left(1+4\pi^2/\theta^2\right) = 2{,}09$.

4-97. Шарик массы $m = 50$ г подвешен на невесомой пружине жесткости $k = 20$ Н/м. Под действием вынуждающей силы, частота которой $\omega = 25$ с$^{-1}$, шарик совершает установившиеся вынужденные колебания. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на $\varphi = 3\pi/4$. Найти добротность данного осциллятора.

Ответ: $Q = \sqrt{\left(\omega\omega_0/\left(\omega^2-\omega_0^2\right)\right)^2 - 1/4} = 2{,}17$.

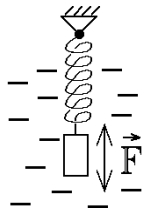

рис.6.135

4-98. Тело, подвешенное на пружине, имеет период собственных колебаний равный 0,5 с (рис.6.135). На тело действует вертикально направленная синусоидальная сила с амплитудой 10^{-3} Н и некоторая сила вязкого трения. Определить максимальную величину амплитуды силы трения и коэффициент трения, если известно, что амплитуда колебаний при резонансе равна 5 см.

Ответ: $F_m = 10^{-3}$ Н; η=1,59 г/с.

4-99. На графике зависимости амплитуды скорости от частоты вынуждающей силы провели прямую, параллельную оси абсцисс, на высоте, равной половине максимума. Отрезок этой прямой между точками пере-

сечения с графиком равен 20 Гц. Найти коэффициент затухания.

Ответ: $\beta = \pi\Delta\nu/\sqrt{3} = 36{,}3\ \text{с}^{-1}$.

4-100. Шарик массы m, подвешенный на невесомой пружинке, совершает установившиеся вынужденные колебания под действием силы $F = F_0 \cos\omega t$. Коэффициент затухания β и собственная частота колебаний ω_0 известны. Найти среднюю за период мощность силы F, а также максимальное значение этой средней мощности и соответствующую частоту вынуждающей силы.

Ответ: $\langle P\rangle = \dfrac{F_0^2\beta\omega^2}{m\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right]}$; $\langle P\rangle_{\max} = \dfrac{F_0^2}{4\beta m}$ при $\omega = \omega_0$.

4-101. Под действием вынуждающей силы $F = F_0\cos\omega t$ система совершает установившиеся вынужденные колебания $x = a\cos(\omega t - \varphi)$. Найти работу вынуждающей силы за период и сравнить ее с работой силы трения за то же время. Ответ: $A_{\text{вын}} = \pi a F_0 \sin\varphi = -A_{\text{тр}}$

4-102. Осциллятор массы m = 10 г с коэффициентом затухания β = 20 с$^{-1}$ совершает вынужденные колебания под действием гармонической силы с амплитудой $F_0 = 4$ Н. Найти максимальное значение мощности этой силы.

Ответ: $P_{\max} = F_0^2/2\beta m = 40$ Вт.

Тематика задач

Число, стоящее в скобках около номера задачи, обозначает примерный уровень сложности по восьмибалльной шкале)

Незатухающие гармонические колебания

4-1	ММ	1	4-26	ММ,НК	3	4-51	НК,ДП	4
4-2	ФМ	1	4-27	НК	3	4-52	НК,ДВ	4
4-3	ФМ	1	4-28	НК	3	4-53	НК	4
4-4	НК,Э	1	4-29	НК	3	4-54	НК,Э	4
4-5	НК,ДП	1	4-30	НК,ДП	3	4-55	НК,ДП	4
4-6	НК,ДП	1	4-31	НК,Э,ДВ	3	4-56	НК,ДП	4
4-7	ДВ,НК	1	4-32	НК,ДП	3	4-57	ФМ,ДП,Пр	4
4-8	СК	1	4-33	НК,ДП	3	4-58	НК,ДП	4
4-9	ММ	2	4-34	НК,ДП	3	4-59	НК,ДП	4
4-10	ММ	2	4-35	НК,ДП	3	4-60	НК,ДП	4
4-11	ММ,ФМ	2	4-36	НК,ДП	3	4-61	НК,ДВ	4
4-12	НК	2	4-37	НК,ДП	3	4-62	СК	4
4-13	НК	2	4-38	НК,ДП	3	4-63	ММ,Пр	5
4-14	НК,ДП	2	4-39	ММ,ДВ	3	4-64	НК,ММ	5

4-15	НК,ДП	2	4-40	НК,ДП,ДВ	3	4-65	НК,Э,Пр	5
4-16	НК,ДП	2	4-41	НК,ДП	3	4-66	НК,Э,ДВ	5
4-17	ФМ,ДВ	2	4-42	СК	3	4-67	НК,ДП,ДВ	5
4-18	ММ,ФМ	3	4-43	ФМ	4	4-68	НК,ДВ,Пр	5
4-19	ФМ	3	4-44	ФМ	4	4-69	НК,ММ,ДП	6
4-20	ФМ	3	4-45	ФМ	4	4-70	ФМ,ДВ	6
4-21	ФМ	3	4-46	ФМ	4	4-71	НК	6
4-22	ММ,НК	3	4-47	ФМ	4	4-72	НК	6
4-23	ММ	3	4-48	ММ	4	4-73	НК,ДВ	6
4-24	ММ,Пр	3	4-49	ФМ,ДВ	4	4-74	НК,ДП	7
4-25	ММ,НК	3	4-50	НК,ДП	4			

Затухающие колебания

4-75	ЗК,ММ	2	4-80	ЗК	2	4-84	ЗК,Э	4
4-76	ЗК,ФМ	2	4-81	ЗК	3	4-85	ЗК	4
4-77	ЗК	2	4-82	ЗК,ДВ	3	4-86	ЗК,Э	4
4-78	ЗК	2	4-83	ЗК,Э	3	4-87	ЗК	5
4-79	ЗК	2						

Вынужденные колебания

4-88	ВК	2	4-93	ВК	3	4-98	ВК	4
4-89	ВК,Э	2	4-94	ВК,НК	3	4-99	ВК	4
4-90	ВК	2	4-95	ВК	3	4-100	ВК	5
4-91	ВК	2	4-96	ВК	3	4-101	ВК	5
4-92	ВК	2	4-97	ВК	4	4-102	ВК	5

Пояснения к аббревиатуре

ВК – вынужденные колебания;
ДВ – динамическое уравнение колебаний (вращательное движение);
ДП – динамическое уравнение колебаний (поступательное движение);
ЗК – затухающие собственные колебания;
ММ – математический маятник;
НК – незатухающие собственные колебания;
Пр – разложение функции по малому параметру;
СК – сложение однонаправленных колебаний;
ФМ – физический маятник;
Э – энергия гармонического осциллятора.

5. Релятивистская механика.

5-1. Чему равен интервал между рождением и распадом частицы собственное время жизни которой 1 мкс? Ответ: 300 м.

5-2. Космический корабль движется по направлению к центру Земли с постоянной скоростью, отличающейся от скорости света на 4%. Какое расстояние в системе отсчета, связанной с Землей, пройдет корабль за $\Delta t' = 7$ с по корабельным часам? Ответ: $7{,}2\cdot10^6$ км.

5-3. На сколько увеличится скорость распространения видимого света в текущей со скоростью v воде по сравнению со скоростью в неподвижной воде? Показатель преломления воды для видимого света $n = 1{,}33$.

Ответ: $\Delta v_{\text{св}} = 0{,}435\cdot v$.

5-4. Плотность покоящегося тела равна ρ_0. Найти скорость системы отсчета относительно данного тела, в которой его плотность будет на $\eta = 25\%$ больше ρ_0. Ответ: $v = c\sqrt{\eta(2+\eta)}\big/(1+\eta) = 0{,}6\cdot c$

5-5. Ракета движется относительно неподвижного наблюдателя со скоростью $v = 1{,}8\cdot10^5$ км/с. Какое расстояние она пролетит за время $\tau = 1$ мин, отсчитанное по часам ракеты? Ответ: $1{,}35\cdot10^7$ км.

5-6. Две ракеты движутся относительно Земли в одном направлении со скоростями $v_2 = 2{,}4\cdot10^5$ км/с и $v_1 = 1{,}8\cdot10^5$ км/с. По часам одной из ракет проходит время $\tau = 1$ мин. Сколько времени при этом пройдет по часам другой ракеты? Ответ: 65 с.

5-7. Стержень длины $l_0 = 1$ м движется со скоростью $v_1 = 10^5$ км/с в системе отсчета К', которая, в свою очередь, движется относительно системы отсчета К в том же направлении со скоростью $v_2 = 2\cdot10^5$ км/с. Определить длину стержня в К-системе. Ответ: 57,5 см.

5-8. В инерциальной системе отсчета частица движется вдоль оси x со скоростью $v = 1{,}8\cdot10^8$ км/с. Двумя последовательными событиями будет пролет частицы мимо детекторов, находящихся в точках с координатами $x_1 = 3$ м и $x_2 = 12$ м. Найти интервал времени между этими событиями в другой инерциальной системе, в которой эти события происходят в одной пространственной точке. Ответ: $4\cdot10^{-8}$ с.

5-9. В системе, относительно которой стержень покоится, его длина 1 м, а угол с осью x равен 45°. Какова будет длина стержня и угол наклона в системе, движущейся со скоростью $c/2$ с вдоль оси x?

Ответ: $l = 0{,}935$ м; $\alpha = 49{,}1°$.

5-10. В камере Вильсона две частицы распались на расстоянии 1 м через 10 нс одна после другой. С какой скоростью движется относительно камеры такая ИСО, в которой время между распадами минимально? Чему равно это время? Существует ли ИСО, в которой распад частиц происходит в обратном порядке? Ответ: $(\Delta t)_{\min} = 9{,}43$ нс; нет.

5-11. Два стержня одинаковой собственной длины l_0 движутся в продольном направлении навстречу друг другу параллельно общей оси с одинаковой скоростью v относительно лабораторной системы отсчета. Какова длина стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем?

Ответ: $l = l_0\left(1-\beta^2\right)\Big/\left(1+\beta^2\right)$, где $\beta = v/c$.

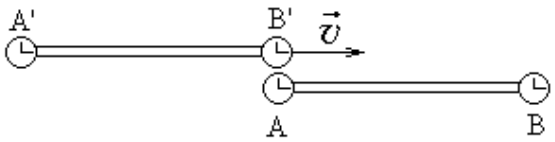

рис.6.136

5-12. Стержень $A'B'$ движется с постоянной скоростью v относительно стержня AB (рис.6.136). Оба стержня имеют одинаковую собственную длину l_0 и на концах каждого из них установлены синхронизированные между собой часы: A с B и A' с B'. Пусть момент, когда часы B' поравнялись с часами A, взят за начало отсчета времени в системах отсчета, связанных с каждым из стержней. Определить: а) показания часов B и B' в момент, когда они окажутся напротив друг друга; б) то же для часов A и A'.

Ответ: а) $t_{\text{B}} = l_0/v$, $t_{\text{B}'} = (l_0/v)\sqrt{1-(v/c)^2}$; б) $t_{\text{A}} = (l_0/v)\sqrt{1-(v/c)^2}$; $t_{\text{A}'} = l_0/v$

5-13. Стержень пролетает с постоянной скоростью мимо метки, неподвижной в K-системе отсчета. Время пролета $\Delta t = 20$ нс в K-системе. В системе же отсчета, связанной со стержнем, метка движется вдоль него в течение $\Delta t' = 25$ нс. Найти собственную длину стержня.

Ответ: $l_0 = c\Delta t'\sqrt{1-(\Delta t/\Delta t')^2}$ =4,5 м.

5-14. К неподвижному в лабораторной системе приемнику приближается со скоростью $v = c/3$ источник света с собственной частотой $\nu_0 = 5\cdot 10^{14}$ Гц. Используя преобразование Лоренца для энергии фотонов, найти частоту сигналов, воспринимаемых приемником.

Ответ: $\nu = 7{,}07\cdot 10^{14}$Гц.

5-15. Стержень движется вдоль оси x и повернут под углом $\theta_0 = 60°$ к этой оси. В системе отсчета, связанной со стержнем он повернут к той же оси x под углом $\theta = 30°$. Определить скорость движения стержня.

Ответ: $v = c\sqrt{1-(\operatorname{tg}\theta/\operatorname{tg}\theta_0)^2} = 9{,}43\cdot c$

5-16. Двойная звезда – две почти одинаковые по массе звезды, обращающиеся вокруг их центра масс – излучает спектр, линии которого периодически становятся двойными, причем максимальное расщепление спектральных линий $\Delta\nu/\nu = 1{,}2\cdot10^{-4}$ происходит через каждые 30 суток. Оценить расстояние между звездами и их суммарную массу.

Ответ: $l = 2{,}97\cdot10^{7}$ км, $M = 2{,}88\cdot10^{29}$ кг.

5-17. Два стержня одинаковой собственной длины l_o движутся навстречу друг другу параллельно общей горизонтальной оси. В системе отсчета, связанной с одним из стержней, промежуток времени между моментами совпадения левых и правых концов стержней оказался равным Δt. Какова скорость одного стержня относительно другого?

Ответ: $v = \left(2l_0/\Delta t\right)\Big/\left[1+\left(l_0/c\Delta t\right)^2\right]$.

5-18. Две нестабильные частицы движутся в *К*-системе отсчета по некоторой прямой в одном направлении со скоростью $v = 0{,}99c$. Расстояние между ними в этой системе отсчета l = 120 м. В некоторый момент обе частицы распались одновременно в системе отсчета, связанной с ними. Какой промежуток времени между моментами распада обеих частиц наблюдали в *К*-системе? Какая частица распалась позже в *К*-системе?

Ответ: частица, двигавшаяся впереди, распалась позже на время $\Delta t = lv\Big/\left(c^2 - v^2\right)$ = 19,9 мкс.

5-19. С ракеты, движущейся в инерциальной системе К со скоростью v, запускается вторая ракета с той же постоянной скоростью v относительно первой. Угол между направлениями движения ракет равен θ = 60° в системе, связанной с первой ракетой, и равен θ/4 в системе К. Найти скорость v ракеты. Ответ: $v = c\sqrt{1-\cos^2\theta/2\Big/\left(2\cos^2\theta/4\right)^2} = 0{,}886\cdot c$

5-20. Для неподвижного наблюдателя луч света, испущенный с ракеты, движущейся со скоростью $v = 3c/5$ составляет угол θ = 30° с направлением движения ракеты. Под каким углом θ' к направлению движения был испущен луч для наблюдателя, находящегося на ракете?

Ответ: θ' = 56,4° или 164,7°

5-21. Метровый стержень параллельный оси *x* движется в положительном направлении оси *y* лабораторной системы со скоростью v. В системе O', движущейся вдоль оси *x* с относительной скоростью v_0, стержень будет наклонен к оси *x'* под углом φ'. Найти этот угол, предварительно объяснив явление. Ответ: $tg\varphi' = vv_0\Big/c^2\sqrt{1-v_0^2\Big/c^2}$.

5-22. Сколько энергии (в расчете на единицу массы) необходимо затратить, чтобы сообщить первоначально покоившемуся космическому кораблю скорость $v = 0{,}98c$? Сопротивления нет. Ответ: $3{,}6\cdot10^{17}$Дж/кг

5-23. Частица массы m движется вдоль оси x некоторой системы отсчета по закону $x = \sqrt{\alpha^2 + c^2t^2}$, где α – некоторая постоянная, c – скорость света, t – время. Найти силу, действующую на частицу в этой системе отсчета.

Ответ: $F = mc^2/\alpha$

5-24. Пучок релятивистских электронов с массой m и кинетической энергией K падает нормально на поглощающую мишень. Площадь пучка равна S, а концентрация электронов в нем равна n. Найти силу давления пучка на мишень. Ответ: $F = nSK\left(K + 2mc^2\right)/\left(K + mc^2\right)$.

5-25. Найти скорость релятивистского электрона, движущегося равномерно по окружности радиусом 2,5 см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 5{,}5\cdot10^{-2}$ Тл, а также силу, действующую на электрон.

Ответ: $v = 0{,}627\cdot c$; $F = 1{,}66\cdot10^{-12}$ Н.

5-26. При каких скоростях частицы величина ее кинетической энергии, вычисленная по нерелятивистской формуле отличается от истинного значения не больше, чем на 1%? Ответ: $v \le 3{,}46\cdot10^7$ м/с

5-27. Частица массы m в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием постоянной силы $\vec{F}$. Найти скорость частицы и пройденный ею путь в зависимости от времени t.

Ответ: $\mathrm{v} = Fct/\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}$, $l = \sqrt{\left(mc^2/F\right)^2 + c^2t^2} - mc^2/F$.

5-28. Первоначально частица покоилась в инерциальной К-системе. В системе отсчета, связанной с частицей, она имеет постоянное ускорение $\vec{a}$. Какую скорость приобретет частица в К-системе, преодолев путь l?

Ответ: $\mathrm{v} = c\sqrt{1 - \left(1 + la/c^2\right)^{-2}}$.

5-29. Стартовавшая с Земли воображаемая космическая ракета движется с ускорением $a' = 10g$, одинаковым в каждой инерциальной системе, мгновенно сопутствующей ракете. Разгон продолжался по земному времени $\tau = 1$ год. Найти ускорение ракеты относительно Земли. На сколько процентов отличается скорость ракеты от скорости света в конце разгона. Каков путь, пройденный ракетой к этому моменту? Определить время разгона ракеты τ_0 в системе отсчета, связанной с самой ракетой.

Ответ: $(c - v)/c = 0{,}467\%$; $\tau_o = (c/a')\ln\left(\beta + \sqrt{1 + \beta^2}\right) = 3{,}5$ мес, где $\beta = a'\tau/c$.

5-30. Найти время и длину пробега до остановки для релятивистского электрона при его начальной полной энергии E_0 = 1 Мэв в тормозящем однородном электрическом поле с напряженностью E = 10 МВ/м, параллельном начальной скорости частицы.

Ответ: $\tau = \sqrt{E_0^2/c^2 - m^2c^2}\Big/eE = 0,286$ нс ; $l = \left(E_0 - mc^2\right)\Big/eE = 4,88$ см .

5-31. Ракета стартует с поверхности Земли и удаляется с постоянным ускорением $a = g$ =9,81 м/с^2 в системе отсчета, связанной с ракетой. Передатчик на ракете испускает световые импульсы с интервалом τ = 1 с. Спустя какое время по земным часам эти импульсы будут регистрироваться на Земле с интервалом $\Delta t = 1$ мин ?

Ответ: $t = c\beta\Big/a\sqrt{1-\beta^2}$ = 29,1 лет, где $\beta = \left((\Delta t)^2 - \tau^2\right)\Big/\left((\Delta t)^2 + \tau^2\right)$.

5-32. Испытатель запускает ракету, движущуюся с постоянным ускорением a (это ускорение в системе отсчета, связанной с ракетой), и по формулам кинематики нерелятивистского равноускоренного движения вычисляет, что ракета долетит до цели за время t (по часам испытателя). На какое время в действительности запоздает ракета?

Ответ: на $\Delta t = t\left(\sqrt{(at/2c)^2 + 1} - 1\right)$.

5-33. Энергия фотона в некоторой системе отсчета О равна E. Найти энергию E' фотона в системе отсчета О', движущейся со скоростью v относительно О в направлении движения фотона. При каком значении v окажется, что $E' = E/2$? Ответ: $E' = E\sqrt{(c-v)/(c+v)}$; $v = 0,6\cdot c$.

5-34. Найти скорость электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 0,5 МВ без начальной скорости. Ответ: 0,863·c.

5-35. Две свободные частицы с зарядом q и массой m каждая, первоначально покоились на расстоянии r друг от друга. Чему будет равен максимальный импульс одной частицы, если их предоставить самим себе?

Ответ: $p_{\max} = q\sqrt{km/r + (kq/2rc)^2}$; где $k = 1/4\pi\varepsilon_1$

5-36. Релятивистский электрон, имеющий импульс p_0 , влетает в однородное электрическое поле перпендикулярно силовым линиям. На какой угол отклонится скорость электрона от первоначального направления движения, когда он пройдет разность потенциалов U ?

Ответ: $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{\left(\dfrac{eU}{cp_0}\right)^2 + \dfrac{2eU}{cp_0}\sqrt{1+\left(\dfrac{mc}{p_0}\right)^2}}$.

5-37. Частица с массой m и полной энергией E упруго сталкивается с такой же покоящейся частицей. Найти суммарную кинетическую энергию частиц после соударения в той инерциальной системе отсчета, в которой покоится центр масс частиц. Ответ: $K' = \sqrt{2mc^2}\left(\sqrt{E+mc^2} - \sqrt{2mc^2}\right)$.

5-38. Покоящийся нейтрон имеет полную энергию $E_0 = 939{,}55$ МэВ и среднее время жизни $\tau_0 = 930$ с. Какое среднее расстояние до распада пролетают нейтроны, образующиеся с полной энергией $E = 3000$ МэВ?

Ответ: $\langle l \rangle = c\tau_0\sqrt{\left(E/E_0\right)^2 - 1} = 8{,}46 \cdot 10^{11}$ м.

5-39. Покоящаяся частица массы M распадается на две частицы с массами m_1 и m_2. Найти кинетические энергии продуктов распада.

Ответ: $K_1 = \left[\left(M - m_1\right)^2 - m_2^2\right]\dfrac{c^2}{2M}$; $K_2 = \left[\left(M - m_2\right)^2 - m_1^2\right]\dfrac{c^2}{2M}$

5-40. Может ли свободный электрон излучить (или поглотить) фотон? Ответ аргументировать, используя законы сохранения энергии-импульса.

Ответ: нет.

5-41. Нейтральный пион с массой m, движущийся в лабораторной системе отсчета в направлении оси x с кинетической энергией равной энергии покоя, распадается на два фотона с одинаковыми энергиями E_γ. Найти энергию E_γ и угол между направлениями вылета фотонов в этой системе отсчета. Ответ: $E_\gamma = mc^2$, $\varphi = 30^\circ$.

5-42. Релятивистская частица с массой m налетела на точно такую же покоящуюся частицу. В результате столкновения образовалась одна частица с массой M. Найти импульс налетавшей частицы и скорость образовавшейся частицы. Ответ: $p = Mc\sqrt{\left(M/2m\right)^2 - 1}$; $v = c\sqrt{1 - \left(2m/M\right)^2}$.

5-43. В ускорителе на встречных пучках два электрона летят навстречу друг другу с одинаковыми энергиями $E = 10$ МэВ. С какой полной энергией E' должен лететь электрон навстречу покоящемуся электрону-мишени, чтобы в системе центра масс их суммарная энергия была равна энергии двух электронов из встречных пучков? Указание: воспользоваться инвариантностью квадрата 4-вектора энергии-импульса при переходе из одной системы в другую. Ответ: $E' = 2E^2/mc^2 - mc^2 = 390$ МэВ.

5-44. Частица с массой m_1, летевшая со скоростью $v_1 = 1{,}8 \cdot 10^5$ км/с налетела на покоившуюся частицу с вдвое большей массой $m_2 = 2m_1$. Опре-

делить скорость частицы, образовавшейся в результате абсолютно неупругого соударения. Ответ: $v' = 5v_1/13 = 6,92 \cdot 10^4$ км/с.

5-45. Две одинаковые релятивистские частицы летят навстречу друг другу с одинаковыми полными энергиями $E_1 = E_2$. Чему равна кинетическая энергия частиц в той системе отсчета, в которой одна из них покоится?

Ответ: $K' = 2\left(E_1^2 - m^2c^4\right)/mc^2$.

5-46. Найти пороговую энергию гамма-кванта, порождающего пару электрон-позитрон при столкновении с покоящимся электроном. Указание: использовать инвариантность квадрата 4-вектора энергии-импульса при переходе из лабораторной системы отсчета в систему центра масс.

Ответ: $E_{\text{пор}} = 3m_ec^2/2 = 0,769$ МэВ.

5-47. Разность уровней энергии ядра железа Fe^{57} в возбужденном и основном состояниях $\Delta E_0 = 14,4$ кэВ. При переходе из возбужденного в основное состояние ядро испускает γ-квант (фотон). На какую величину отличается энергия испущенного фотона от энергии ΔE_0? Масса возбужденного ядра $M = 9,5 \cdot 10^{-26}$ кг.

Ответ: $\Delta E_0 - E_{\text{ф}} = \left(\Delta E_0\right)^2 / \left(2Mc^2\right) = 1,94 \cdot 10^{-3}$ эВ.

5-48. Частица с массой m и с полной энергией E упруго сталкивается с такой же покоящейся частицей. После удара налетавшая частица имеет полную энергию E'. Под каким углом θ к первоначальному направлению движения она улетает?

Ответ: $\theta = \arccos\sqrt{\dfrac{\left(E + mc^2\right)\left(E' - mc^2\right)}{\left(E - mc^2\right)\left(E' + mc^2\right)}}$.

5-49. Покоящаяся частица массы M распадается на две частицы, разность масс которых равна Δm. Величина разности кинетических энергий разлетающихся частиц равна ΔK. Найти дефект масс реакции распада.

Ответ: $\Delta M = M\Delta K / c^2\Delta m$.

5-50. Частица с массой m_1 и с полной энергией E_1 упруго сталкивается с более легкой покоящейся частицей, масса которой равна m_2 ($m_2 < m_1$). Найти наибольший угол отклонения налетавшей частицы от первоначального направления движения.

Ответ: $\theta_{\max} = \arcsin\left(m_2/m_1\right)$.

Тематика задач

Кинематика

5-1.	И	1	5-8.	И	2	5-15.	СД	3
5-2.	Л	1	5-9.	СД	3	5-16.	ЭД	4
5-3.	СС	2	5-10.	Л	3	5-17.	СД	4
5-4.	СД	2	5-11.	СД, СС	3	5-18.	Л	4
5-5.	ЗВ, Л	2	5-12.	СД	3	5-19.	СС	4
5-6.	ЗВ, СС	2	5-13.	СД	3	5-20.	СС	4
5-7.	СД, СС	2	5-14.	Л	3	5-21.	Л, СД, СС	7

Динамика

5-22.	ЭИ	1	5-26.	ЭИ	4	5-30.	ЭИ, УД	6
5-23.	УД	2	5-27.	УД	5	5-31.	ЭД, УД	6
5-24.	ЭИ, УД	3	5-28.	УД	5	5-32.	УД	6
5-25.	УД	3	5-29.	УД	6			

Законы сохранения

5-33.	ЭИ	1	5-39.	ЭИ, ЗС	4	5-45.	ЭИ, ЗС	4
5-34.	ЭИ	2	5-40.	ЭИ, ЗС	4	5-46.	ЭИ, ЗС	5
5-35.	ЭИ, ЗС	2	5-41.	ЭИ, ЗС	4	5-47.	ЭИ, ЗС	5
5-36.	ЭИ, ЗС	3	5-42.	ЭИ, ЗС	4	5-48.	ЭИ, ЗС	5
5-37.	ЭИ, ЗС	3	5-43.	ЭИ	4	5-49.	ЭИ, ЗС	5
5-38.	ЭИ, ЗВ	3	5-44.	ЭИ, ЗС	4	5-50.	ЭИ, ЗС	7

ЗВ – релятивистское замедление времени
ЗС – законы сохранения полной энергии и релятивистского импульса
И – релятивистский интервал
Л – преобразование Лоренца
СД – релятивистское сокращение длины
СС – релятивистская теорема сложения скоростей
УД – релятивистское уравнение движения (ускоренное движение)
ЭД – релятивистский эффект Доплера
ЭИ – полная энергия, релятивистский импульс и их связь

Библиографический список

1. Иродов И.Е. Основные законы механики.-4-е изд.- М.: Высшая школа, 1997.- 239 с.

2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности.-2-е изд.- М.: Высшая школа, 1986.- 320 с.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика.- 2-е изд.- М.: Наука, 1979.- 552 с.

4. Савельев И.В. Курс физики.Т.1: Механика. Молекулярная физика. - М.: Наука, 1989.- 352 с.

5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. - М.: Наука,1988. - 416 с.

6. Козел С.М., Рашба Э.И., Славатинский Э.И. Сборник задач по физике (задачи МФТИ). –М.: Наука,1987. - 304 с.

7. Сборник задач по общему курсу физики. Механика. под ред. Яковлева И.А. – М.: Наука,1977. - 288 с.

8. Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. – 2-е изд.- М.: Наука, 1988.- 288 с.

9. Жукарев А.С. Задачи повышенной сложности в курсе общей физики. – М.: МГУ,1985 - 200 с.

10. Мин Чен. Задачи по физике с решениями.-М.: Мир,1978 - 296 с.

11. Сена Л.А. Сборник вопросов и задач по физике. - М.: Высш.шк.,1986 - 239 с.

12. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. - М.: Мир, 1969.- 624 с.

13. Сахаров Д.И. Сборник задач по физике. –10-е изд.- М.: Учпедгиз, 1963. – 288 с.

Колмаков Юрий Николаевич

Пекар Юрий Александрович

Семин Валерий Анатольевич

МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Задачи и методы их решения

Редактор И.А.Есаян

Подписано в печать 06.02.02. Формат бумаги $60\times841/16$. Бумага типограф.№ 2. Офсетная печать. Усл.печ.л. 11,2. Уч.-изд. л. 9,5.
Тираж 100 экз. Заказ
Тульский государственный университет. 300600, Тула, просп. Ленина, 92.
Редакционно-издательский центр Тульского государственного университета. 300600 Тула, ул.Болдина, 151.