Министерство образования Российской Федерации

Тульский государственный университет

Ю.Н.КОЛМАКОВ, Ю.А.ПЕКАР,
И.М.ЛАГУН, Л.С.ЛЕЖНЕВА

Механика
и
теория относительности

Лекции по физике

Тула 2002

УДК 537(07)
Механика и теория относительности. Лекции по физике: Учеб. пособие /Ю.Н.Колмаков, Ю.А.Пекар, И.М.Лагун, Л.С.Лежнева; Тул.гос.ун-т. Тула, 2002. 179 с.

ISBN 5 – 7679 – 0213 – 5

Изложен материал раздела "Механика" курса физики.

Предназначено для студентов всех специальностей физического и инженерно-технического профиля. Пособие может быть использовано студентами в процессе самостоятельной работы над курсом и лекторами, как основа для чтения этого раздела.

Ил.: 218. Библогр.: 10.

Печатается по решению библиотечно-издательского совета Тульского государственного университета.

Рецензент: академик РАЕН, проф. А.А.Рухадзе (Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова).

© Ю.Н.Колмаков, Ю.А.Пекар, И.М.Лагун, Л.С.Лежнева, 2002
© Тульский государственный университет, 2002

ISBN 5 – 7679 – 0213 – 5

Оглавление

Предисловие 6

Глава 1. **Кинематика** 7
1. Основные понятия и величины 7
2. Кинематика частицы. Перемещение, скорость, ускорение 8
3. Кинематика вращательного движения вокруг неподвижной оси 13
4. Связь линейных и угловых кинематических величин 16
5. Связь скоростей и ускорений в разных системах отсчета к другой 17

Глава 2. **Динамика частицы. Законы Ньютона и их следствия** 20
1. Сила, масса, импульс 20
2. Первый закон Ньютона 25
3. Преобразования координат Галилея 26
4. Второй закон Ньютона 27
5. Третий закон Ньютона 28
6. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции 29

Глава 3. **Работа и энергия** 33
1. Работа силы 33
2. Кинетическая энергия частицы 34
3. Консервативные силы и потенциальная энергия 35
4. Потенциальная энергия центральных сил 36
5. Градиент потенциальной энергии 37
6 Механическая энергия частицы и закон ее изменения 40

Глава 4. **Момент импульса** 42
1. Момент импульса частицы 42
2. Закон изменения момента импульса. Момент силы 43
3. Момент импульса относительно оси 44

Глава 5. **Динамика системы частиц. Законы сохранения** 45
1. Законы изменения и сохранения импульса системы частиц 45
2. Центр масс. Уравнение движения центра масс 47
3. Реактивное движение. Уравнение Мещерского 50
4. Энергия системы частиц 52
5. Закон сохранения механической энергии 53
6. Момент импульса системы. Уравнение моментов 54
7. Закон сохранения момента импульса 56

Глава 6. **Система центра масс** 58
1. Импульс системы частиц 58
2. Энергия системы частиц 59
2.1. Кинетическая энергия 59
2.2. Полная механическая энергия 59
3. Момент импульса системы 61
3.1. Суммарный момент внешних сил 61
3.2. Собственный момент импульса системы 62
3.3. Связь моментов импульса в Л - и Ц-системах 62
3.4. Уравнение моментов в Ц-системе 63
4. Столкновения 64

Глава 7. **Динамика твердого тела** 68
1. Движение твердого тела 68
2. Вращение тела относительно закрепленной оси 69
3. Момент инерции и его вычисление 72
4. Кинетическая энергия вращательного движения 74
5. Плоское движение 75
6. Тензор инерции 76
7. Гироскопы и гироскопический эффект 80
7.1. Симметричные волчки и гироскопы 80
7.2. Свободный гироскоп 81
7.3. Несвободный гироскоп 84
7.4. Прецессия гироскопа 85

Глава 8. **Гравитационное поле** 87
1. Закон тяготения Ньютона 87
2. Гравитационное поле 88
3. Принцип эквивалентности. Приливной эффект 91
4. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса 94
5. Задача Кеплера 97
6. Космические скорости 99
7. Потенциальные кривые 102

Глава 9. **Колебания** 106
1. Гармонический осциллятор. Условие гармонических колебаний 106
2. Физический и математический маятники 110
3. Затухающие колебания 111
4. Механическая энергия осциллятора 113
5. Сложение гармонических колебаний 115
5.1. Сложение взаимно-перпендикулярных колебаний осциллятора 115
5.2. Сложение однонаправленных колебаний осциллятора. 117

6. Вынужденные колебания 119
7. Резонанс 121
8. Вычисление периода негармонических колебаний 124
9. Параметрические колебания и автоколебания 125

Глава 10. **Лагранжев метод в механике** 128
1. Обобщенные координаты. Лагранжиан 128
2. Принцип наименьшего действия 130
3. Уравнения Лагранжа—Эйлера 131
4. Инвариантность и законы сохранения. Теорема Нётер 133

Глава 11. **Основы специальной теории относительности** 137
1. Опыты Майкельсона—Морли 137
2. Постулаты специальной теории относительности 138
3. Одновременность и синхронизация часов 139
4. Следствия постулатов Эйнштейна 141
4.1. Неизменность поперечных размеров 141
4.2. Релятивистское замедление времени 141
4.3. Парадокс близнецов и его объяснение 143
4.4. Релятивистское сокращение длины 147
5. Преобразования Лоренца 148
6. Кинематические следствия преобразований Лоренца 150
6.1. Одновременность 150
6.2. Релятивистское замедление времени 151
6.3. Лоренцово сокращение длины 151
6.4. Релятивистская теорема сложения скоростей 152
6.5. Ускоренное движение в СТО 154

Глава 12. **Свойства пространства-времени** 156
1. Четырехмерное пространство Минковского 156
2. Свойства пространства Минковского. Интервал 158
3. 4-векторы. Релятивистские инварианты 162
4. 4-векторы скорости и ускорения 163
5. Релятивистский эффект Доплера и аберрация
световой луча 164

Глава 13. **Динамика релятивистских частиц** 167
1. 4-вектор энергии-импульса 167
2. Уравнение движения релятивистской частицы 170
3. Система частиц в СТО и законы сохранения 172
4. Столкновения и распад релятивистских частиц 173

Предметный указатель 176

Библиографический список 179

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие представляет собой конспект лекций по одному из разделов курса общей физики, читаемого в ТулГУ для физических и инженерно-физических специальностей.

Оно предназначено для студентов технических и естественнонаучных специальностей, которым читается двух-- или трехсеместровый курс физики в рамках бакалаврской подготовки. Его изучение требует знания высшей математики в объеме дифференциального и интегрального исчисления и векторного анализа.

Имеется достаточно широкий набор рекомендуемой учебной литературы, содержащей те же темы, что и данное пособие. Но практически вся она рассчитана на значительно бóльший объем времени, необходимого для удовлетворительного изучения курса, чем определено учебными программами. При этом попытка облегчить усвоение материала упрощением используемой математики, как правило, не приводит к успеху.

Длинные качественные описания физических процессов в их многочисленных проявлениях и деталях обычно делают учебник слишком растянутым в объеме и труднопонимаемым для читателя, который сталкивается с изучаемым материалом впервые.

Существует и другая возможность – резко ограничить ряд изучаемых в курсе физики тем. Этот путь кажется самым простым, но приводит к ухудшению качества обучения.

Таким образом, при подготовке данного пособия перед авторами стояли следующие задачи:

– выделить такой объем теоретического материала, который является совершенно необходимым для понимания сути рассматриваемых физических явлений и законов, и изложить этот материал в наиболее компактной форме;

– использовать при изложении такой уровень математики, чтобы читатель мог непосредственно применять изучаемые законы к решению любых задач, как предлагаемых в курсе общей физики, так и возникающих при изучении прикладных дисциплин;

– доказать все получаемые следствия с помощью относительно несложных математических преобразований и вычислений;

– иллюстрировать изложение наглядными примерами, взятыми из различных областей науки и техники, и одновременно указать возможности применения изучаемых физических законов на практике.

В зависимости от уровня подготовки, от выделяемого на изучение курса времени и от специализации студента часть наиболее трудного для понимания материала может быть опущена при чтении данного пособия без смысловой потери.

Глава 1

Кинематика

1. Основные понятия и величины

Классическая механика изучает механическое движение частиц (материальных точек) и тел, т.е. изменение положения их в пространстве с течением времени.

Частица (материальная точка) – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Одно и то же тело в различных условиях либо может считаться частицей, либо – нет.

Другая абстракция – абсолютно твердое тело – это система частиц, расстояния между которыми в процессе движения тела остаются неизменными.

При этом постулируется, что:

1) пространство является бесконечным, однородным (все точки его одинаковы), изотропным (все свойства пространства одинаковы во всех направлениях), а свойства пространства не зависят от находящихся в нем тел;

2) время является однородным, течет только в одном направлении, и ход времени не зависит от состояния движения тел.

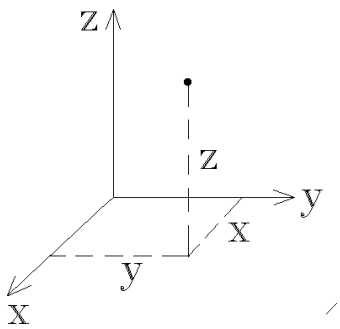

Рис.1.1

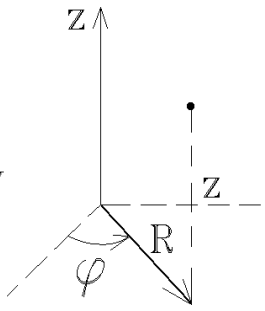

Рис.1.2

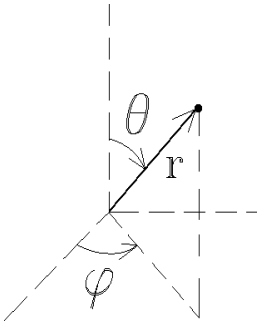

Рис.1.3

Так как все точки пространства одинаковы, то определить, изменили ли частица (тело) положение или нет, возможно только по отношению к какому-либо другому телу, называемому телом отсчета. Обычно с телом отсчета связывают некоторую систему координат: декартову (рис.1.1), цилиндрическую (рис.1.2), сферическую (рис.1.3).

Совокупность системы пространственных координат, жестко связанной с телом отсчета, и системы отсчета времени называется системой отсчета. Система отсчета времени представляет собой совокупность синхронизованных часов, находящихся в каждой точке системы координат. Вопрос о синхронизации часов мы детально рассмотрим позже (см. гл. 11), пока же только заметим, что само это понятие означает: "одинаково идущие". Механическое движение тел рассматривается в системе отсчета.

Кинематика – это раздел механики, рассматривающий движение тел

вне зависимости от причин, вызывающих это движение. Кинематика отвечает на вопрос, "как" тело движется.

2. Кинематика частицы. Перемещение, скорость, ускорение

Существуют различные способы определения положения частицы.

1) Векторный способ описания движения.

В этом случае положение частицы задается её радиус-вектором $\vec{r}$. Геометрическое место концов радиус-вектора представляет кривую, называемую траекторией. Зависимость радиус-вектора частицы от времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется кинематическим законом движения. С геометрической точки зрения – это уравнение траектории.

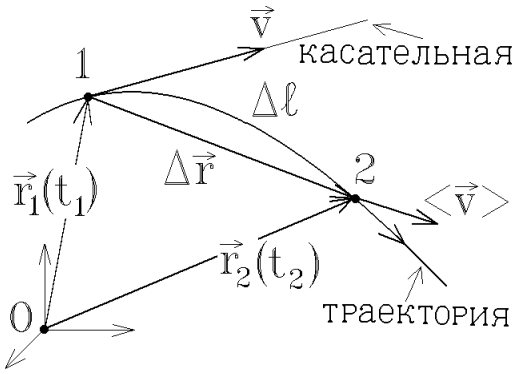

Рис.1.4

Изменение радиус-вектора $\vec{r}$ за время Δt называется перемещением: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Очевидно, что перемещение (вектор!) совпадает по величине с хордой, проведенной из точки 1 в точку 2 (рис.1.4). Длина дуги траектории между этими точками Δl называется путем. Для бесконечно малого временного интервала dt соответствующее бесконечно малое (в дальнейшем – элементарное) перемещение $d\vec{r}$ направлено по касательной к траектории в точке 1. Модуль элементарного перемещения равен элементарному пути: $|d\vec{r}| = dl$.

Важнейшей кинематической характеристикой движения является скорость. Скоростью частицы называется векторная величина, определяемая равенством

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},} \qquad (1.1)$$

иначе говоря, **скорость – это производная от радиус-вектора по времени**.

Из определения следует, что скорость $\vec{v}$ направлена по касательной к траектории (рис.1.4). Величина скорости

$$\boxed{v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{dl}{dt},} \qquad (1.2)$$

где l - путь, пройденный вдоль траектории. Иногда используется понятие средней скорости: это векторная величина, равная отношению перемещения ко времени, т.е.

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Производная скорости частицы по времени, т.е. вектор

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (1.3)$$

называется ускорением частицы. О направлении вектора $\vec{a}$ и о его величине $a = |\vec{a}|$ разговор пойдет чуть позже.

Таким образом, зная кинематический закон движения, можно простым дифференцированием по времени найти скорость и ускорение в любой момент времени (так называемая прямая задача кинематики). Наоборот, зная ускорение частицы, а также начальные условия, т.е. положение $\vec{r}_0$ и скорость $\vec{v}_0$ частицы в начальный момент времени $t_0 = 0$, можно найти траекторию движения частицы $\vec{r}(t)$ (обратная задача кинематики). Действительно, из формул (1.3) и (1.1) следует, что $d\vec{v} = \vec{a}\,dt$ и $d\vec{r} = \vec{v}dt$,

поэтому $$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}dt \qquad (1.4)$$

и далее: $$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}dt\,. \qquad (1.5)$$

2) Координатный способ описания движения.

Если с телом отсчета жестко связать какую-нибудь координатную систему (например, декартову), то положение частицы в любой момент времени определяется тремя ее координатами x, y, z .

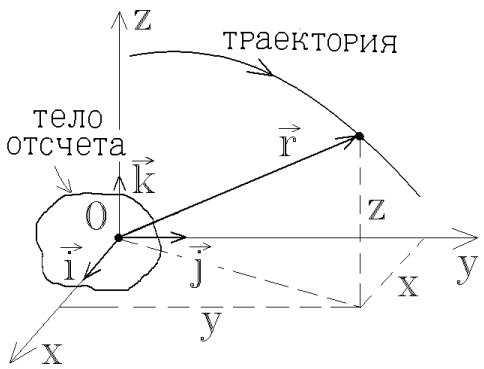

Рис.1.5

Проектируя радиус-вектор на координатные оси, получим три зависимости координат частицы от времени

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \qquad (1.6)$$

которые представляют кинематический закон движения в координатной форме. Из рисунка 1.5 видно, что

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные векторы, или орты декартовой системы координат. Отсюда немедленно следует принцип независимости движений: произвольное движение частицы можно рассматривать как сумму независимых движений по координатным осям x, y, z..

Зная зависимости (1.6), можно найти проекции скорости и ускорения частицы на координатные оси:

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt},} \qquad (1.7)$$

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.} \qquad (1.8)$$

Следовательно, модули скорости и ускорения будут

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ и $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Аналогично предыдущему пункту решается и обратная задача:

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x dt \qquad \text{и} \qquad x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t) dt$$

и так далее.

Пример: в случае равноускоренного движения $a_x = \text{const}$, и

$$v_x = v_{0x} + a_x \int_0^t dt = v_{0x} + a_x t \quad ;$$

$$x = x_0 + \int_0^t \left(v_{0x} + a_x t\right) dt = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

3) Естественный способ описания движения. Тангенциальное и нормальное ускорения.

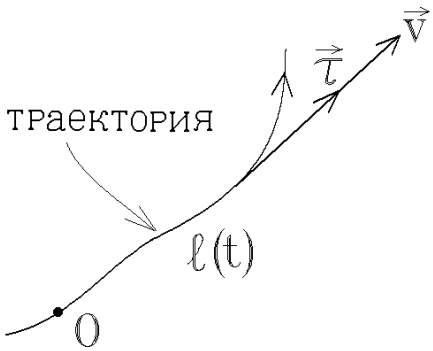

Рис.1.6

Этот способ обычно используется, если известна траектория движения точки. При этом начало отсчета (точка O) выбирается на траектории, выбирается также положительное направление движения вдоль траектории, а положение частицы описывается криволинейной координатой $l(t)$, представляющей не что иное, как длину дуги кривой линии, отсчитанной вдоль траектории от начальной точки O, т.е. путь (рис.1.6).

В этом случае $l = l(t)$ - кинематический закон движения. Из формулы (1.2) следует, что $dl = v \cdot dt$ и $l = \int_0^t v\, dt$.

Свяжем с траекторией естественную систему координат, состоящую из трех взаимно перпендикулярных осей: касательной (единичный вектор $\vec{\tau}$, направленный вдоль вектора скорости частицы), нормали (единичный вектор $\vec{n}$, направленный к центру кривизны траектории), и бинормали (единичный вектор $\vec{b} = [\vec{\tau},\ \vec{n}]$) (рис.1.7). По определению $\vec{\tau} \perp \vec{n} \perp \vec{b}$ и $|\vec{\tau}| = |\vec{n}| = |\vec{b}| = 1$.

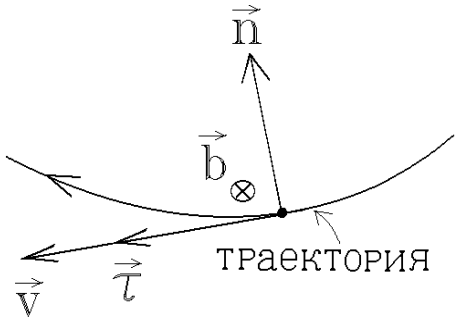

Рис.1.7

Как следует из рис.1.7,

$$\boxed{\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}\ .} \qquad (1.9).$$

Чтобы найти ускорение частицы, продифференцируем формулу (1.9) по времени, учитывая, что как v, так и $\vec{\tau}$ являются функциями времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (1.10)$$

Первое слагаемое в (1.10) направлено по касательной к траектории и называется <u>тангенциальным (касательным) ускорением</u>:

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}\ .} \qquad (1.11)$$

Его модуль $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ равен производной от величины скорости по времени, поэтому тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по величине.

Определим теперь направление и величину второго слагаемого в формуле (1.10). Для этого сначала преобразуем его:

$$v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = v\frac{d\vec{\tau}}{dl}\cdot\frac{dl}{dt} = v^2\frac{d\vec{\tau}}{dl} = v^2 \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta l}.$$

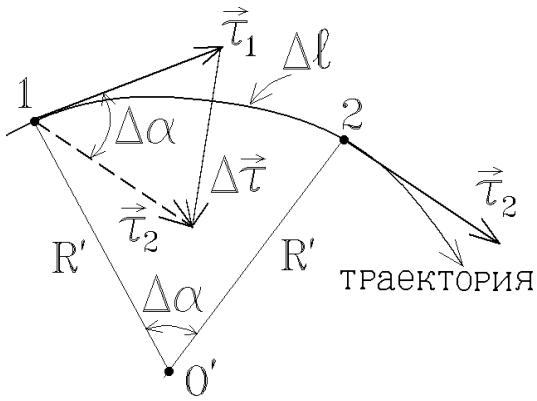

Рис.1.8

Используя теперь рис.1.8, вычислим $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta l}$. Для этого перенесем вектор $\vec{\tau}_2$ в точку 1, изобразим вектор $\Delta\vec{\tau}$ и проведем нормали к траектории в точках 1 и 2, которые пересекаются в некоторой точке O'. Тогда, как видно из рис.1.8, $|\Delta\vec{\tau}| \approx |\vec{\tau}| \cdot \Delta\alpha = \Delta\alpha$ и

$\Delta l \approx R'\Delta\alpha$, откуда: $\dfrac{|\Delta\vec{\tau}|}{\Delta l} \approx \dfrac{1}{R'}$. В пределе при $\Delta t \to 0$ точка O' стремится к некоторой точке O, а величина $R' \to R$, поэтому $\left|\dfrac{d\vec{\tau}}{dl}\right| = \dfrac{1}{R}$. Точка O называется центром кривизны, а величина R – радиусом кривизны траектории. Геометрически он равен радиусу окружности, вписанной в кривую траектории.

С другой стороны, из рис.1.8 следует, что в пределе вектор $\Delta\vec{\tau} \to d\vec{\tau}$ будет направлен по нормали к траектории к центру ее кривизны O. Итак: $\dfrac{d\vec{\tau}}{dl} = \dfrac{\vec{n}}{R}$ и $v^2\dfrac{d\vec{\tau}}{dl} = \dfrac{v^2}{R}\vec{n}$. Поэтому второе слагаемое в формуле (1.10) направлено по нормали к траектории, характеризует изменение скорости по направлению, называется нормальным ускорением и определяется выражением:

$$\boxed{\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}.} \qquad (1.12)$$

Его модуль $a_n = \dfrac{v^2}{R}$. (Заметим, что в случае движения частицы по окружности – это хорошо известное центростремительное ускорение.)

Подведем итоги.

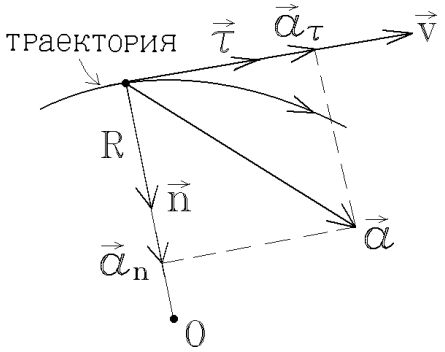

Рис.1.9

Полное ускорение можно разложить на **две** составляющие: тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ и нормальное ускорение $\vec{a}_n$ (рис.1.9): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, причем модуль полного ускорения $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. Что касается бинормальной составляющей ускорения, то, как следует из предыдущих рассуждений, она тождественно равна нулю.

В частности, при движении частицы по прямой $R \to \infty$, $\vec{a}_n = 0$ и $\vec{a} = \vec{a}_\tau$. А при равномерном движении частицы по окружности $\vec{a}_\tau = 0$ и $\vec{a} = \vec{a}_n$.

Вопрос: по какой траектории будет двигаться частица в случае $a_\tau > 0$ и $a_n = \text{const}$?

Ответ: по раскручивающейся спирали. Это следует из того, что, согласно формуле (1.11), $\frac{dv}{dt} > 0$, следовательно, скорость частицы растет с течением времени; тогда из формулы (1.12) вытекает $R = v^2 / \text{const}$, т.е. R возрастает, как v^2.

3.Кинематика вращательного движения вокруг неподвижной оси

Рассматривают несколько видов движений абсолютно твердого тела: поступательное, вращательное движение вокруг оси (в частности, – закрепленной), плоское движение, вращательное движение вокруг точки и свободное движение. Первые два вида – основные: любое движение твердого тела можно свести к поступательному движению и вращению относительно некоторой оси.

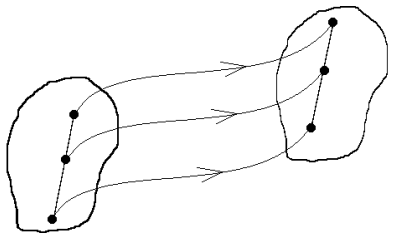

Рис.1.10

Поступательным движением называется такое движение, при котором все точки тела движутся по одинаковым траекториям, или, иначе говоря, любая прямая, связанная с телом, перемещается параллельно самой себе (рис.1.10).

При вращении вокруг закрепленной оси все точки движутся по соосным окружностям (рис.1.11). За время dt происходит поворот тела на угол $d\varphi$. Поэтому вместо линейных характеристик вводятся угловые характеристики: поворот тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ характеризуется вектором угла поворота $d\vec{\varphi}$, направленным по оси вращения по правилу правого винта.

Рис.1.11

Пример: движение стула на рис.1.12,а не будет вращательным. Это поступательное криволинейное движение по окружности, когда все точки тела движутся по одинаковым траекториям, но положение центра кривизны для них различно. На рис. 1.12,б изображено вращательное движение стула: все его точки описывают окружности вокруг общей оси вра-

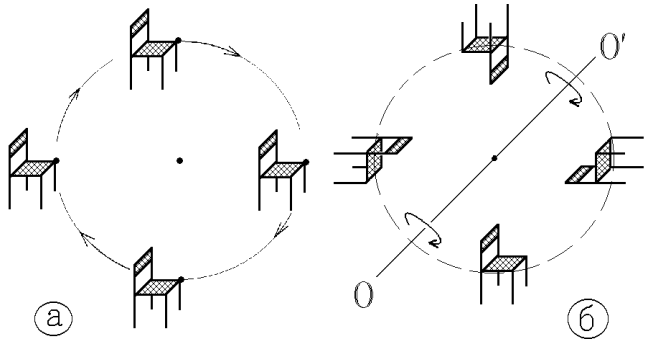

Рис.1.12

щения OO', но радиусы этих окружностей различны.

Быстрота изменения угла поворота характеризуется вектором угловой скорости

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}}, \qquad (1.13)$$

направленным так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$, т.е. по оси вращения по правилу правого винта.

Еще одна кинематическая характеристика вращательного движения – вектор углового ускорения

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.} \qquad (1.14)$$

Вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором угловой скорости при ускоренном вращении и противоположен ему при замедленном вращении.

Замечание. Конечный угол поворота не является вектором! Он не подчиняется принципу коммутативности, т.е. результат сложения двух конечных углов поворота (двух последовательных вращений) зависит от порядка слагаемых (от последовательности вращений):

$$\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_2 \neq \vec{\varphi}_2 + \vec{\varphi}_1 .$$

В качестве примера рассмотрим два последовательных поворота предмета (стула) по часовой стрелке на угол $\pi/2$. На рис.1.13,а изображен вначале поворот стула вокруг оси x, а затем – вокруг оси z. На рис.1.13,б стул вначале вращают вокруг оси z, а затем – вокруг оси x. Конечные положения стула заметно отличаются друг от друга. Тем не менее, бесконечно малые углы поворота можно складывать векторно:

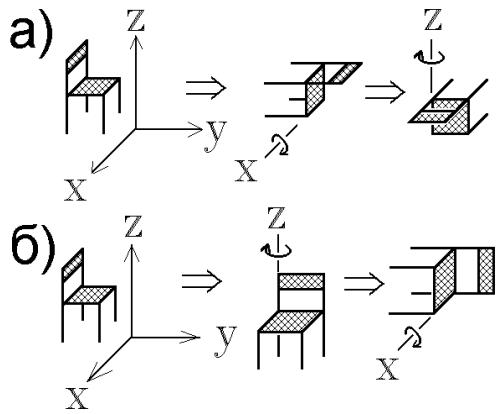

Рис.1.13

$$d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2 \approx d\vec{\varphi}_2 + d\vec{\varphi}_1 ,$$

так как при изменении порядка сложения бесконечно малых векторов результат будет отличаться на бесконечно малую второго порядка $O\left((d\varphi)^2\right)$, которой можно пренебречь. Поэтому, согласно формулам (1.13) и (1.14), векторы угловой скорости и углового ускорения можно складывать обычным образом: если тело участвует в двух вращениях, то результирующая угловая скорость равна векторной сумме двух составляющих векторов: $\vec{\omega}_{\text{рез}} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ (то же самое относится и к угловому ускорению).

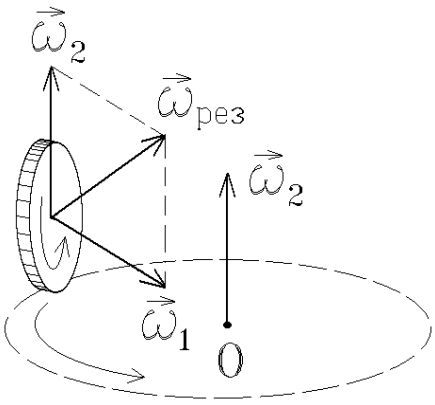

Рис.1.14

Пример: диск катится по горизонтальной плоскости по кругу (рис.1.14), совершая вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ вокруг своей собственной оси и с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ вокруг вертикальной оси О.

Размерности угловых величин:

$[\varphi] =$ рад, $[\omega] =$ рад/с $= \text{с}^{-1}$,

$[\varepsilon] =$ рад/с$^2 = \text{с}^{-2}$. Угол поворота в системе СИ необходимо задавать в радианах.

Векторные величины особенно удобны при рассмотрении сложных движений твердого тела. В простейших случаях, особенно при вращении вокруг закрепленной оси, можно ограничиться проекциями этих величин на ось z, которую обычно совмещают с осью вращения (а ее направление – с положительным направлением отсчета угла φ – т.е. с правилом правого винта):

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Так же, как и при поступательном движении, при вращательном существуют прямая и обратная задачи кинематики.

Прямая задача: по заданному как функция времени углу поворота $\varphi = \varphi(t)$ найти ω_z и ε_z; решается она дифференцированием по времени:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \qquad \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}.$$

Обратная задача: по заданному как функция времени угловому ускорению $\varepsilon_z = \varepsilon_z(t)$ и начальным условиям $(\omega_z(t=0) = \omega_0$ и $\varphi(t=0) = \varphi_0)$ найти кинематический закон вращения; она решается с помощью интегрирования:

$$\omega_z(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon_z(t)\,dt, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega_z(t)\,dt.$$

Отсюда получаются простые формулы равнопеременного вращения ($\varepsilon_z = \text{const}$):

$$\omega_z = \omega_0 + \varepsilon_z t, \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon_z t^2/2.$$

4. Связь линейных и угловых кинематических величин

Рассмотрим произвольную точку в твердом теле, которое вращается вокруг закрепленной оси (рис.1.15).

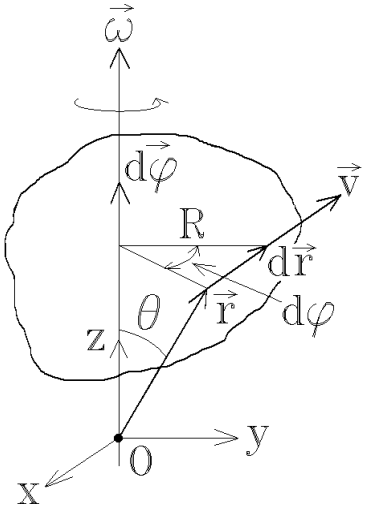

Рис.1.15

Установим связь между векторами $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$. Как следует из рис.1.15, величина элементарного перемещения точки (или путь) будет равна $\left|d\vec{r}\right| = Rd\varphi = r\,\sin\theta\, d\varphi$, поэтому

$$d\vec{r} = \left[d\vec{\varphi}\,,\,\vec{r}\right], \qquad (1.15)$$

т.е. элементарное перемещение равно векторному произведению элементарного угла поворота на радиус-вектор точки. Разделив формулу (1.15) почленно на dt, немедленно получим:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r}\right] \quad \text{или} \quad \vec{v} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right] \qquad (1.16)$$

Отсюда вытекает, что величины линейной и угловой скоростей связаны соотношением: $v = \left|\vec{v}\right| = \omega\, r\,\sin\theta = \omega R$, где R – расстояние от выделенной точки до оси вращения.

Теперь продифференцируем формулу (1.16) по времени. Это дает:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt},\ \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega},\ \frac{d\vec{r}}{dt}\right] \qquad \text{или}$$

$$\vec{a} = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \vec{v}\right]. \qquad (1.17)$$

Первое слагаемое направлено по касательной к траектории и равно по модулю $\left|\left[\vec{\varepsilon}\,,\ \vec{r}\right]\right| = \varepsilon r \sin\theta = \varepsilon R$ – это не что иное, как тангенциальное ускорение: $\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon}\,,\vec{r}\right]$.

Второе слагаемое направлено по радиусу к центру вращения, равно по модулю $\left|\left[\vec{\omega},\ \vec{v}\right]\right| = \omega\, v\ = \omega^2 R \equiv \dfrac{v^2}{R}$ и является нормальным ускорением: $\vec{a}_n = \left[\vec{\omega},\ \left[\vec{\omega},\ \vec{r}\right]\right]$. Итак:

$$a_\tau = \varepsilon R\,,\ a_n = \omega^2 R \quad \text{и} \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (1.18)$$

Пример: качение колеса со скоростью v без проскальзывания можно представить в виде суммы двух движений, поступательного со скоростью $\vec{v}$ и вращательного с угловой скоростью $\omega = v/R$ вокруг оси колеса

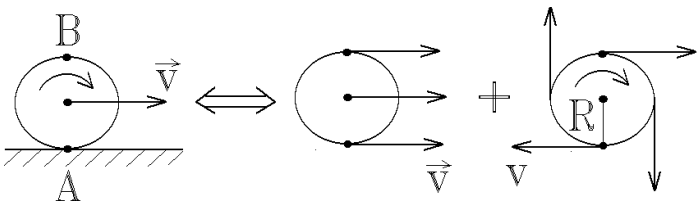

Рис.1.16

(рис.1.16). При этом нижняя точка колеса неподвижна ($v_A = 0$), т.е. сцеплена с дорогой, а скорость верхней точки $v_B = 2v$. Если колесо будет быстрее двигаться поступательно, чем вращаться, то оно начнет проскальзывать (скорость точки А на рис.1.16 будет направлена вправо). При более быстром вращении колесо пробуксовывает (точка А движется влево).

Замечание: при повороте осей координат векторы линейных и угловых скоростей преобразуются по одинаковым законам. Но при зеркальном отражении координатных осей (эту операцию называют инверсией пространства) векторы $\vec{r}$, $\vec{v}$ и $\vec{a}$ меняют знак (так как меняют знак орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ декартовой системы координат). Такие векторы называются <u>полярными</u>.

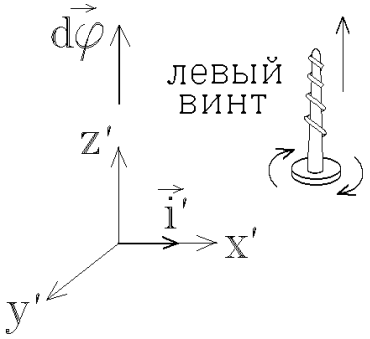

Рис.1.17

С другой стороны, при инверсии пространства правая тройка декартовой системы координат превращается в левую (рис.1.17), правый винт – в левый (в винт с левой нарезкой), и при вращении винта от оси x' к оси y' (сравните с рис.1.11) направление его перемещения не меняется. Иначе говоря, угловые векторы $d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ не меняют знака при инверсии пространства. Такие векторы называют <u>аксиальными</u>. Легко видеть, что векторное произведение любых полярных векторов при инверсии знака не меняет: $\left[\vec{a},\, \vec{b}\right] \underset{\text{инверсия}}{\longrightarrow} \left[-\vec{a},\, -\vec{b}\right] = \left[\vec{a},\, \vec{b}\right]$, т.е. является аксиальным вектором! Векторное произведение аксиального и полярного векторов будет полярным вектором (смотри формулы (1.16) и (1.17)).

5. Связь скоростей и ускорений в разных системах отсчета

Рассмотрим два особенно важных случая.

1) Пусть имеются две системы отсчета: К (система станции, условно назовем ее неподвижной) и K' (система поезда), движущаяся **поступательно** относительно К со скоростью $\vec{v}_0$ и ускорением $\vec{a}_0$ (рис.1.18). Пусть, далее, некая частица в поезде движется со скоростью $\vec{v}'$ и ускорением $\vec{a}'$. Возникает вопрос: как найти скорость и ускорение частицы от-

носительно станции? Ответ на него дают формулы преобразования скоростей и ускорений.

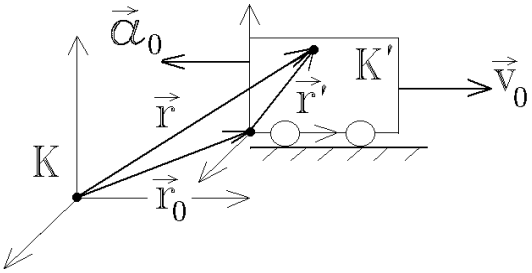

Рис.1.18

Как следует из рис.1.18, радиус-векторы частицы в двух системах отсчета связаны простым соотношением: $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$. Дифференцируя его по времени, находим закон преобразования скоростей:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0\ .} \qquad (1.19)$$

Повторное дифференцирование приводит к формуле преобразования ускорений:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_0\ .} \qquad (1.20)$$

Всё очень просто: для перехода в неподвижную систему следует к скорости и ускорению частицы прибавить соответственно скорость и ускорение движущейся системы.

2) Система K' (карусель) **вращается** относительно системы K с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega} = \text{const}$ вокруг неподвижной в системе К оси z (рис.1.19). В этом случае ситуация несколько сложнее, чем в предыдущем.

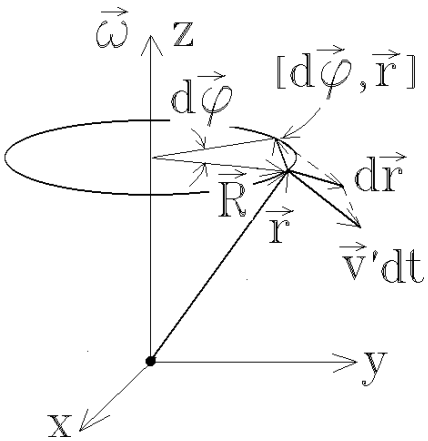

Рис.1.19

Для упрощения формул совместим начала отсчета обеих систем так, чтобы в некоторый момент времени t радиус-векторы частицы в них совпали. Тогда за последующее время dt частица переместится в системе K' на $\vec{v}\,'dt$, а вместе с системой K' еще и повернется относительно неподвижной системы на угол $d\vec{\varphi}$, т.е. ее суммарным перемещением в системе K будет рис.1.19)

$$d\vec{r} = \underbrace{\vec{v}\,'dt}_{\text{перемещение}} + \underbrace{\left[d\vec{\varphi}\,,\ \vec{r}\right]}_{\text{поворот}}. \qquad (1.21)$$

Разделив это выражение на dt, получим закон преобразования скоростей:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \left[\vec{\omega}\,,\ \vec{r}\right].} \qquad (1.22)$$

Перейдем к ускорениям. Из формулы (1.22) следует, что

$$d\vec{v} = d\vec{v}\,' + \left[\vec{\omega}, d\vec{r}\right], \qquad (1.23)$$

так как $\vec{\omega} = \text{const}$. Но изменение $\vec{v}\,'$ происходит как в результате движения частицы с ускорением $\vec{a}\,'$ в системе K', так и поворота вектора ско-

рости $\vec{v}\,'$ вместе с системой K' относительно системы K; поэтому, аналогично формуле (1.21),

$$d\vec{v}\,' = \underbrace{\vec{a}\,'dt}_{\text{движение}} + \underbrace{\left[d\vec{\varphi}\ ,\ \vec{v}\,'\right]}_{\text{поворот}}. \qquad (1.24)$$

Подставляя в (1.23) выражения (1.21) и (1.24), получаем

$$d\vec{v} = \vec{a}\,'dt + \left[d\vec{\varphi}\ ,\ \vec{v}\,'\right] + \left[\vec{\omega}\ ,\left(\vec{v}\,'dt + \left[d\vec{\varphi}\ ,\ \vec{r}\right]\right)\right] =$$

$$= \vec{a}\,'dt + \left[d\vec{\varphi}\ ,\ \vec{v}\,'\right] + \left[\vec{\omega}\ ,\vec{v}\,'\right]dt + \left[\vec{\omega},\left[d\vec{\varphi}\ ,\ \vec{r}\right]\right].$$

Разделив полученное выражение на dt и приведя подобные члены, найдем закон преобразования ускорений:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\ \left[\vec{\omega}\ ,\ \vec{v}\,'\right] + \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega}\ ,\ \vec{r}\right]\right].} \qquad (1.25)$$

Последнее слагаемое в формуле (1.25) направлено по радиусу к оси вращения и поэтому называется <u>центростремительным</u> или <u>осестремительным</u> ускорением:

$$\vec{a}_{\text{ос}} = \left[\vec{\omega}\ ,\left[\vec{\omega},\ \vec{r}\right]\right], \quad \text{его модуль } a_{\text{ос}} = \omega^2 R\ .$$

Второе слагаемое в правой части (1.25) называется <u>кориолисовым ускорением</u> (по имени Гюстава Кориолиса):

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2\left[\vec{\omega}\ ,\ \vec{v}\,'\right].$$

Если система K' относительно системы K совершает поступательное и вращательное движение одновременно, то формулы (1.20) и (1.25) следует объединить в одну:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,' + 2\left[\vec{\omega}\ ,\ \vec{v}\,'\right] + \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega}\ ,\ \vec{r}\right]\right].} \qquad (1.26)$$

Глава 2

Динамика частицы. Законы Ньютона и их следствия

1. Сила, масса, импульс

Если кинематика отвечает на вопрос "по какой траектории движется тело?", то динамика изучает другую сторону вопроса: "почему движение происходит именно так?". А так как вид траектории или изменение движения частицы связаны только с ее взаимодействием с другими телами, то приходится вводить такие понятия, как сила, масса, импульс и т.п., позволяющие описать это взаимодействие.

Силой называют количественную меру взаимодействия тел друг с другом. В разных случаях оно происходит по-разному, поэтому существует множество видов сил, и каждый вид описывается своим силовым законом. Рассмотрим силы, наиболее часто встречающиеся в задачах механики.

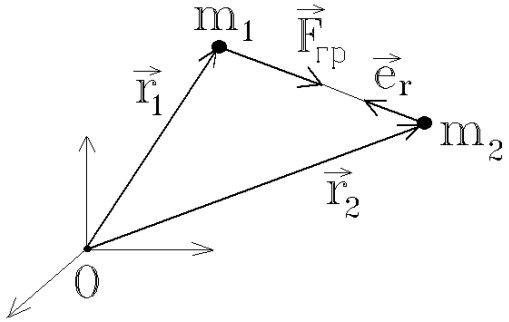

Рис.2.1

1. Гравитационная сила (сила притяжения между двумя частицами) (рис.2.1) определяется законом всемирного тяготения Ньютона

$\vec{F}_{гр} = -G\dfrac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}\vec{e}_r$, где $\vec{e}_r = \dfrac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|r_1 - r_2\right|}$ – единичный вектор, направленный вдоль линии, соединяющей частицы. Если частицу m_2 поместить в начало координат О, то этот закон примет вид:

$$\vec{F}_{гр} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r, \quad \text{где} \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Гравитационную силу притяжения частицы планетой записывают также в виде

$$\vec{F}_{гр} = m\vec{g},$$

где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

Заметим, что аналогичным законом (законом Кулона) определяется сила электростатического взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме:

$\vec{F}_{\text{кул}} = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}\vec{e}_r$ или по модулю $F_{\text{кул}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2}$.

Это означает, что задача о движении заряженной частицы в электростатическом поле имеет решение, аналогичное решению задачи о движении частицы в гравитационном поле.

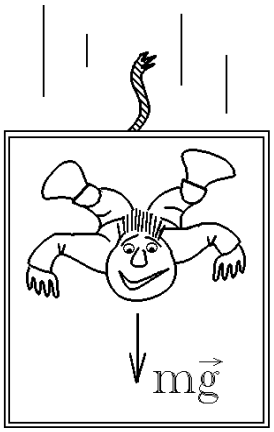

Рис.2.2

2.Вес – это вертикальная сила, с которой тело действует на опору или подвес. Как правило, она по величине равна силе $\vec{N}$ нормальной реакции опоры.

Пример: в свободно падающем лифте вес пассажира равен нулю (состояние невесомости), хотя гравитационная сила тяжести $m\vec{g}$ на него по-прежнему действует (рис.2.2).

3.Сила упругости определяется законом Гука:

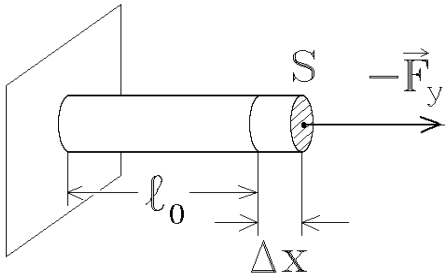

Рис.2.3

$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\,\Delta\vec{r}$, или в проекции на ось x: $F_{\text{упр x}} = -k\,\Delta x$, где $\Delta\vec{r}$ или Δx – смещение точки приложения силы относительно положения равновесия. Следует заметить, что если сила упругости действует на растягиваемое или сжимаемое упругое тело (рис.2.3), то коэффициент жесткости k, входящий в этот закон, имеет вид $k = \dfrac{E\,S}{l_0}$, где l_0 – длина нерастянутого стержня, S – площадь его поперечного сечения, E – модуль Юнга, или модуль упругости, зависящий только от материала стержня. Так, если упругую резину или пружину разрезать пополам, то ее жесткость возрастет в два раза.

Строго говоря, закон Гука действует только при малых деформациях:. $\Delta x / l_0 \ll 1$. Однако, существуют силы, не связанные с деформацией упругого тела и имеющие общий вид:

$$F_x = -k\,x \qquad (2.1)$$

где $k = \text{const}$, а x – смещение от положения равновесия (не обязательно малое). Такие силы называют квазиупругими.

4. Силы трения весьма разнообразны. Если лежащее на твердой поверхности тело тянуть вдоль поверхности с все большим усилием, то вначале оно не перемещается из-за возникающей силы трения покоя, направленной противоположно внешней силе. Эта сила трения зависит от прилагаемой внешней силы $\vec{F}_{\text{внеш}}$ и может иметь величину от нуля до некоторого максимального значения $F_{\text{тр max}}$. Если $F_{\text{внеш}} > F_{\text{тр max}}$, то тело начинает скользить, и на него уже действует сила трения скольжения

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\ \mu N \frac{\vec{v}}{v}, \qquad \text{или по модулю} \qquad F_{\text{тр}} = \mu N .$$

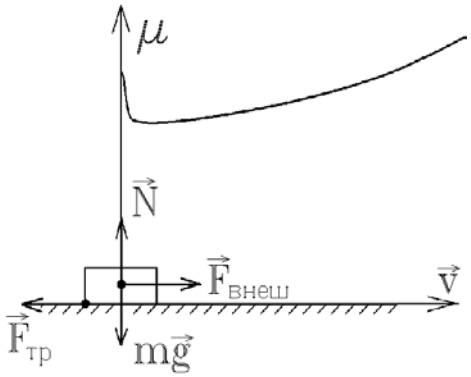

Рис.2.4

Здесь N – нормальная реакция опоры, μ – коэффициент трения скольжения, который зависит от материала тела и поверхности, и, что очень важно, от относительной скорости тела (рис.2.4).

Пример: когда автомобиль тормозит, но его колеса катятся без проскальзывания (точка касания колеса **неподвижна** относительно дороги), то коэффициент трения покоя может быть достаточно большим. При движении по сухому асфальту он достигает $\mu_{\text{пок}} = 0,8$.

Но при сильном нажатии на тормоза колеса перестают вращаться и начинают скользить по асфальту с некоторой скоростью v. Как видно из рис.2.4, коэффициент трения скольжения уменьшается до $\mu = 0,6$. В результате тормозящая сила трения уменьшается, а тормозной путь автомобиля увеличивается!

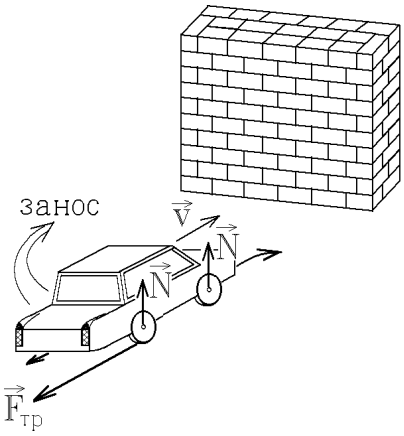

Рис.2.5

Если водитель при этом начнет резко выворачивать руль вправо (рис.2.5), то возрастают сила реакции $\vec{N}$ и сила трения скольжения, действующая на правые колеса, а на левые – уменьшается. В результате машину заносит боком влево, и она теряет управление.

Когда тело скользит по жидкому слою смазки или движется в жидкой или газообразной среде, то на него действует сила вязкого трения. Во многих случаях ее можно считать пропорциональной относительной скорости

тела и направленной против движения:

$$\vec{F}_{\text{вяз}} = -\eta\vec{v}\,,$$

где коэффициент η зависит от свойств среды и размеров тела.

Существуют и многие другие силы, которые будут описаны в следующих главах курса физики. Но, несмотря на непохожесть их силовых законов, все они являются результатом взаимодействия множества элементарных частиц, образующих реальные физические тела и среды. Все эти взаимодействия происходят **на расстоянии**, т.е. с помощью полей, и сводятся к четырем основным типам фундаментальных взаимодействий, перечисленных в следующей таблице:

тип взаимодействия	радиус действия	относит. интенсив-ность	вызываемые физические явления
сильное	$< 10^{-15}$ м	$10 \div 1$	образование ядер
электро-магнитное	∞	$\approx 10^{-2}$	образование атомов, молекул, кристаллов, электричество и магнетизм, оптика, свет, теплота, трение
слабое	$< 10^{-16}$ м	$\sim 10^{-14}$	термоядерные реакции, горение звезд
гравита-ционное	∞	$\sim 10^{-39}$	образование планет, звезд, галактик, движение спутников

Например, силы трения или упругости возникают при контакте физических тел (такие силы иногда называют контактными). Но их причиной является взаимодействие электронных облаков множества атомов, как показано на рис.2.6.

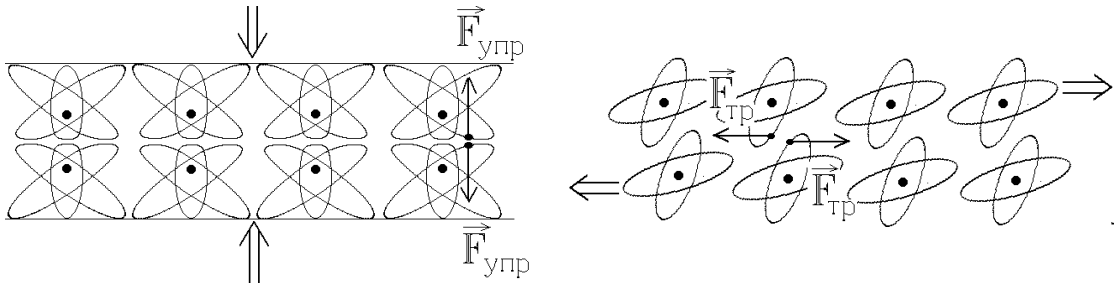

Рис.2.6

Вопрос: попробуйте объяснить, почему мы не проваливаемся сквозь пол?

Определим, наконец, другие динамические характеристики.

Все тела обладают свойством инертности – свойством противиться попыткам изменить их движение. Количественная характеристика (мера)

такого свойства называется массой (точнее, инертной массой). Именно она входит во второй закон Ньютона: $m\vec{a} = \sum \vec{F}$.

Пример: попытайтесь оттолкнуть большой плот или судно от причала. Чтобы преодолеть инерцию покоя, потребуются значительные усилия. А когда судно все же поплывет – попробуйте его остановить. По той же причине удар "тяжелого" тела на борту орбитальной космической станции приведет к большим последствиям, чем удар "легкого" тела, хотя оба – невесомы.

Масса, входящая в закон тяготения $\vec{F}_{\text{гр}} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$, описывает совсем другое свойство и называется гравитационной массой. Чем больше гравитационные массы, тем сильнее тела притягиваются друг к другу. Но все опыты, проведенные на сегодняшний день, показывают, что инертная и гравитационная массы равны:

$$\boxed{m_{\text{грав}} = m_{\text{инерт}}}.$$

(это равенство называется принципом эквивалентности, лежащим в основе общей теории относительности). Поэтому в дальнейшем используется один параметр – просто масса.

И, наконец, еще одна динамическая величина – импульс частицы, равный произведению массы частицы на ее скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (2.2)$$

Не следует забывать, что импульс – величина векторная, поэтому величина полного импульса двух частиц не равна сумме величин импульсов каждой из них, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример: современные системы противоракетной обороны могут использовать баллистическое оружие – наперехват летящей боеголовке запускается "противоракета", которая должна просто зацепить боеголовку. При движении с космическими скоростями даже касание приводит к такому большому выделению тепла, что обе ракеты могут практически сгореть.

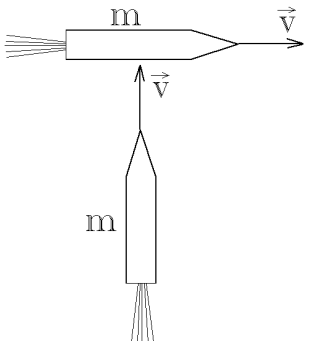

Рис.2.7

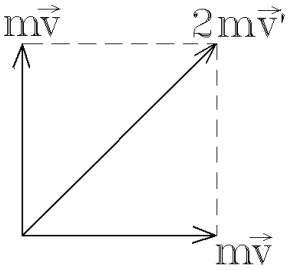

Рис.2.8

Пусть в летящую горизонтально ракету попадает противоракета, движущаяся перпендикулярно к первой и имеющая импульс той же величины (рис.2.7). Грубой ошибкой будет складывать ве-

личины импульсов: $mv + mv = (m + m)\, v'$, откуда $v' = 2v$ (означает ли это, что в цель попадают продукты взрыва двух ракет?).

Если же учесть векторный характер импульса, то, как видно из рис.2.8, $(2mv')^2 = (mv)^2 + (mv)^2$, откуда $v' = v/\sqrt{2}$, и в цель ничего не попадает!

2. Первый закон Ньютона

Первый закон Ньютона постулирует существование особого класса систем отсчета. Вообще говоря, описывать движение можно в любой системе отсчета, но наиболее просто это сделать в инерциальной системе отсчета (ИСО).

Современная формулировка первого закона Ньютона такова:

> существуют такие системы отсчета, в которых свободная частица движется неускоренно (т.е. равномерно и прямолинейно). Такие системы отсчета называются инерциальными, а движение свободной частицы в них – движением по инерции.

В формулировке закона используется понятие "свободной частицы", которое означает, что на частицу не действуют никакие силы.

Очевидно, что ИСО, как таковая, является физической абстракцией (моделью), поскольку наблюдать свободную частицу в земных условиях невозможно – на любую частицу всегда действует гравитационная сила. Конечно, действие ее можно скомпенсировать, но это – уже несколько иная ситуация. Кроме того, ответ на вопрос: "ускоренное это движение или нет?" может дать только опыт (измерение), а любое измерение имеет свою степень точности. Поэтому вопрос о практическом выборе инерциальной системы отсчета всегда связан с заданной степенью точности и диктуется условиями задачи.

Наиболее часто в качестве ИСО используется система отсчета, связанная с Землей. Это, если угодно, первое, достаточно грубое, приближение. Если же нет возможности пренебречь вращением Земли, то в качестве следующего, второго, более точного приближения к ИСО следует выбрать систему отсчета, связанную с центром Солнца и с неподвижными осями (гелиоцентрическую систему отсчета).

Однако, как будет показано ниже, **если инерциальная система отсчета найдена, то любая другая, движущаяся относительно нее неускоренно, тоже будет инерциальной**. Поэтому можно говорить о бесконечном множестве ИСО.

Заметим в заключение: до Ньютона считалось (на основании повседневного опыта!), что в отсутствие сил тела стремятся к состоянию покоя.

3. Преобразования координат Галилея

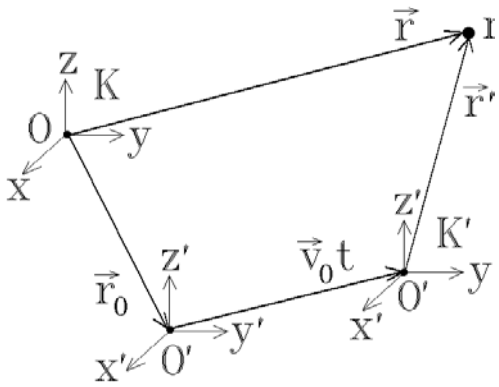

Рис.2.9

Рассмотрим две системы отсчета: инерциальную систему K и систему K', движущуюся относительно системы K с **постоянной скоростью** $\vec{v}_0$. Будем считать, что в начальный момент отсчета времени $t = 0$ начало координат O' системы K' находилось на удалении $\vec{r}_0$ от начала координат О системы K (рис.2.9). Тогда радиус-векторы любой частицы m в моменты времени t и t' в системах K и K' связаны простыми соотношениями:

$$\vec{r}(t') = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t, \quad t' = t, \qquad (2.3)$$

которые называются преобразованиями координат Галилея.

Обратим внимание на последнее преобразование, которое ниоткуда не следует, а вводится как **постулат классической механики**, утверждающий, что **время абсолютно**, т.е. не зависит от состояния движения и течет одинаково во всех системах отсчета. Пространство в классической (ньютоновской) механике тоже абсолютно, так как расстояние между двумя точками

$$\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \left|\vec{r}_2\,' - \vec{r}_1\,'\right|,$$

как следует из соотношений (2.2), одинаково во всех системах отсчета.

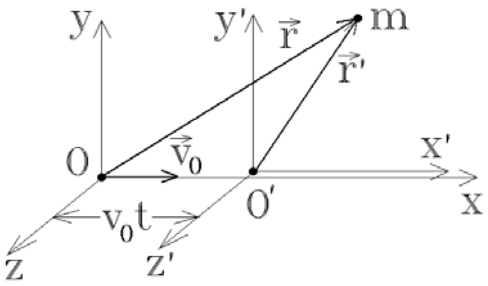

Рис.2.10

Заметим, что оси координат Ox и $O'x'$ систем координат K и K' всегда можно выбрать направленными вдоль скорости $\vec{v}_0$, а начала координат O и O' выбрать так, чтобы они совпадали в момент времени $t = 0$ (рис.2.10). Тогда преобразования Галилея (2.2) примут вид:

$$x' = x - v_0 t, \; y' = y, \; z' = z, \; t' = t. \qquad (2.4)$$

Дифференцируя соотношения (2.3) по времени, что легко сделать, так как $t' = t$, получаем классическую теорему сложения скоростей:

$$\vec{v}\,'(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_0. \qquad (2.5)$$

В классической механике скорости складываются векторно.

Повторное дифференцирование приводит к очень важному соотношению:

$$\boxed{\vec{a}\,' = \vec{a}\ .} \qquad (2.6)$$

Его смысл очевиден: если частица в ИСО (системе K) движется неускоренно ($\vec{a} = 0$), то и система K', движущаяся относительно системы K с постоянной скоростью, по определению тоже будет инерциальной.

Все инерциальные системы отсчета движутся друг относительно друга с постоянными скоростями.

4. Второй закон Ньютона

Формулировка второго закона Ньютона такова:

скорость изменения импульса частицы в инерциальной системе отсчета равна результирующей силе, действующей на частицу:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{рез}} = \sum_i \vec{F}_i\ .} \qquad (2.7)$$

Формула (2.6) нуждается в комментариях.

1) Результирующая сила $\vec{F}_{\text{рез}}$ – это векторная сумма всех сил, действующих на частицу, т.е. $\sum_i \vec{F}_i$. Определяется она по правилу параллелограмма (опытный факт).

2) Второй закон **не является определением** силы; он только устанавливает связь между кинематическими и динамическими величинами, позволяя найти траекторию частицы, если известны действующие на нее силы. Поэтому его называют уравнением движения частицы.

3) Так как частица имеет постоянную массу, то подстановка $\vec{p} = m\vec{v}$ в уравнение (2.6) приводит к формуле:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i. \qquad (2.8)$$

4) Любой физический закон имеет область применимости, т.е. совокупность условий, при выполнении которых закон можно применять. Попытка использовать одну и ту же формулировку закона в любых условиях может привести к грубым ошибкам. Попробуйте, например, применить закон Ньютона в форме (2.8) к брошенному камню. Получая траекторию движения, нельзя предсказать вращения камня, которое может изменить траекторию в реальной воздушной среде. Дело в том, что уравнения (2.7) и (2.8) мы определили для классических частиц, не имеющих размера, не

меняющих свою массу и движущихся поступательно. Поэтому из уравнения (2.8) можно получить только траекторию криволинейного поступательного движения.

Определить область применимости физического закона можно только опытным путем.

Опыты показывают, что законы классической механики (законы Ньютона), а также все следствия преобразований Галилея справедливы только для частиц или тел с достаточно большими массами, много большими масс атомов, которые движутся с малыми скоростями (по сравнению со скоростью света).

5) Уравнения (2.6) и (2.8) говорят о том, что при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую не должна меняться результирующая сила, действующая на классическую частицу, и, следовательно, не должна меняться траектория частицы. Это основной **постулат** классической механики, который называется классическим галилеевским принципом относительности.

Уравнения движения классической динамики одинаковы во всех ИСО (инерциальных системах отсчета), т.е. все ИСО эквивалентны (равноправны) по отношению к механическим явлениям. Или иначе: если лаборатория покоится относительно некоторой ИСО, то никакими механическими опытами, проводимыми в данной лаборатории, нельзя установить, действительно ли она находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

5. Третий закон Ньютона

Формулировка третьего закона Ньютона такова:

силы взаимодействия двух частиц равны по величине, противоположны по направлению и направлены по прямой, соединяющей частицы, т.е.

$$\boxed{\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}\ .} \qquad (2.9)$$

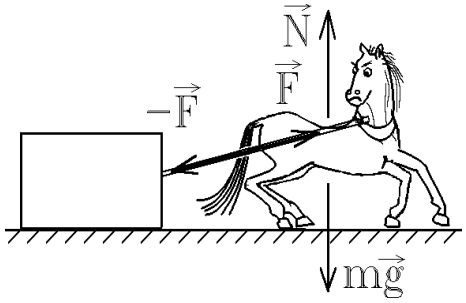

Рис.2.11

Вопрос: лошадь тянет груз с такой же силой, с какой груз тянет лошадь (рис.2.11). Почему же груз трогается с места?

Ответ: на абсолютно гладком льду все попытки лошади везти груз были бы так же неудачны, как и попытка штангиста поднять в воздух вместо штанги самого себя. себя. Причиной движения на рис.2.11 будет сила, действующая со стороны опоры. Попробуйте объяснить, почему при малом усилии лошади не удается сдвинуть груз, а при большом – удается.

6. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Неинерциальной системой отсчета называется любая система отсчета, **движущаяся с ускорением относительно ИСО.**

Например, трогающийся с места или тормозящий поезд, поворачивающий на закруглении шоссе автомобиль, взлетающая ракета с космическим аппаратом, вращающаяся Земля и т.п.

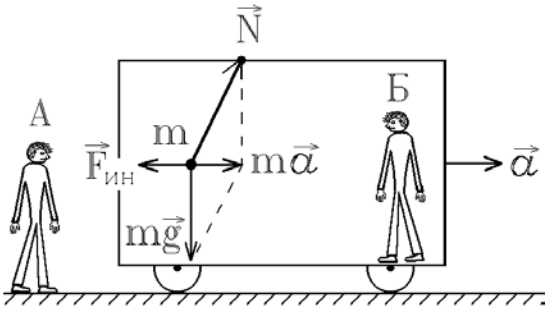

Рис.2.12

В неинерциальной системе закон Ньютона в виде (2.7) или (2.8) должен измениться. Действительно, для неподвижного наблюдателя "А" (связанного с инерциальной системой отсчета) математический маятник в движущемся с ускорением $\vec{a}$ вагоне отклонится от вертикального положения, так как должно выполняться векторное равенство

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = m\vec{g} + \vec{N},$$

где $\vec{N}$ – сила натяжения нити (рис.2.12). Но для наблюдателя "Б" в неинерциальной системе (связанной с вагоном) маятник неподвижен ($\vec{a}\,' = 0$), а силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ не меняются: $m\vec{a}\,' \neq m\vec{g} + \vec{N}$!

Используя формулу преобразования ускорений (1.26), не составляет труда записать закон движения частицы так, чтобы он выполнялся и в неинерциальной системе отсчета. Для этого подставим формулу (1.26) в уравнение движения (2.78) и запишем получившееся уравнение в виде:

$$m\vec{a}\,' = \sum_i \vec{F}_i - m\vec{a}_0 + 2m\left[\vec{v}\,', \vec{\omega}\right] + m\omega^2\vec{R}, \qquad (2.10)$$

где $\vec{R}$ – вектор, проведенный к частице от оси вращения (рис.1.19).

Три последних слагаемых в выражении (2.10) называются силами инерции.

Первая из них, которую просто обозначим $\vec{F}_{\text{ин}}$,

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0} \; –$$

это сила инерции, возникающая при поступательном движении системы отсчета с ускорением $\vec{a}_0$. Для наблюдателя "Б" на рис.2.12 закон Ньютона (2.10) выполнен: $m\vec{a}\,' = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{ин}} = 0$.

Вторая и третья – силы инерции, возникающие при вращении системы отсчета с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Одна из них – кориолисова сила инерции – действует только на движущиеся частицы:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{кор}} = 2m\left[\vec{v}\,',\ \vec{\omega}\ \right]\ .} \qquad (2.11)$$

Другая – центробежная сила инерции,

$$\boxed{\vec{F}_{\text{цб}} = m\left[\vec{\omega}, \left[\vec{r}, \vec{\omega}\right]\right] = m\omega^2\vec{R}\ ,} \qquad (2.12)$$

действует как на движущиеся, так и на неподвижные частицы.

Силы инерции отличаются от "обычных" сил тем, что они обусловлены не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчета. Они существуют только в неинерциальных системах отсчета и направлены противоположно ускорению системы! Но, с другой стороны, у них есть удивительное свойство, роднящее их с гравитационной силой – всем телам, независимо от их массы, они сообщают **одинаковое** ускорение!

Чтобы записать уравнение движения в неинерциальной системе отсчета, следует к векторной сумме "обычных" сил добавить силы инерции:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}\,'}{dt} = m\vec{a}\,' = \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{\text{ин}} + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{кор}}\,.} \qquad (2.13)$$

Рассмотрим несколько примеров действия сил инерции.

Так как мы живем на вращающейся Земле, то роль центробежной и кориолисовой сил может оказаться существенной.

То, что мы обычно называем силой тяжести, является результирующей двух сил – гравитационной и центробежной:

$$\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{g}_0 + m\omega^2\vec{R},$$

где $g_0 = 9{,}81\,\text{м/с}^2$, а $\omega = 2\pi/86400\ \text{с}^{-1}$. Отсюда следует, что ускорение свободного падения зависит от географической широты места наблюдения. Как видно из рис.2.13, согласно теореме косинусов, $(mg)^2 = (mg_0)^2 + F_{\text{цб}}^2 - 2mg_0F_{\text{цб}}\cos\varphi$.

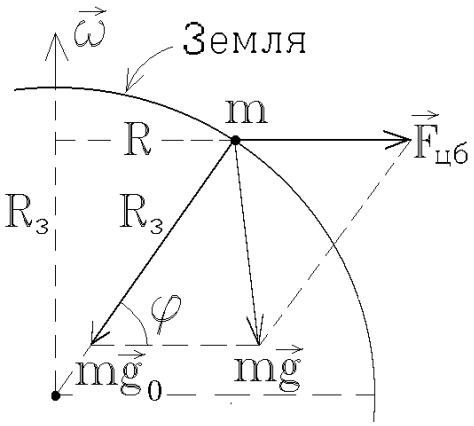

Рис.2.13

Так как $F_{\text{цб}} = m\omega^2R = m\omega^2R_{\text{з}}\cos\varphi << mg_0$, где $R_{\text{з}}$ – радиус Земли, то с точностью до малых первого порядка получим:

$$g = g_0\left(1-\frac{\omega^2 R_з}{g_0}\cos^2\varphi\right) = g_0\left(1-\frac{1}{290}\cos^2\varphi\right). \qquad (2.14)$$

(Заметим, что из-за сплюснутости Земли коэффициент в формуле (2.14) не $1/290$, а $1/190$.)

При движении по Земле со скоростью $\vec{v}\,' = 5$ км / час на пешехода с массой $m = 60$ кг действует очень малая кориолисова сила. Ее максимальная величина $F_{кор} = 2m\omega^2\vec{v}\,' \approx 0{,}012$ Н. Но в летящем со скоростью $v' = 1000$ км / час самолете эта сила, толкающая человека вбок, может возрасти до ощутимой величины $2{,}4$ Н.

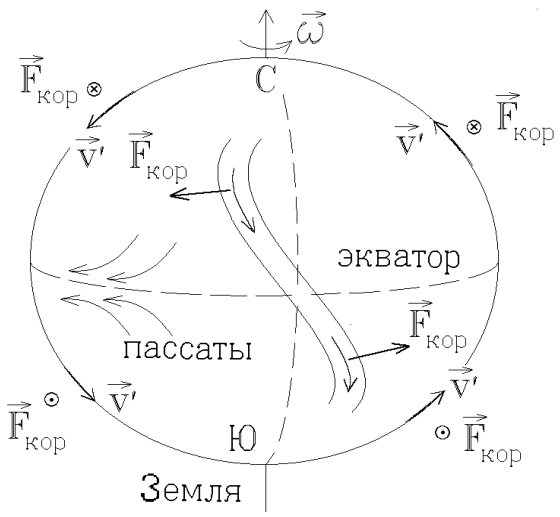

Рис.2.14

Во время первой мировой войны в сражении британского и немецкого флотов у Фолклендских островов все точно пристрелянные пушки английских кораблей стали посылать снаряды на расстояние 100 м от цели. Причина была в том, что военные моряки не учли простые законы физики. Прицелы были выверены у берегов Англии, в северном полушарии, а Фолкленды находятся в южном полушарии. Из формулы (2.11) и рис.2.14 видно, что сила Кориолиса в разных полушариях отклоняет летящие снаряды в разные стороны.

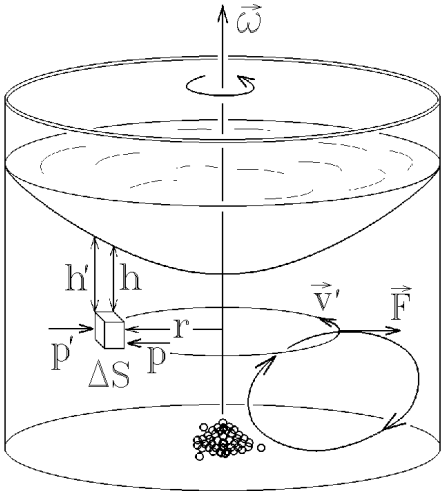

Рис.2.15

Из того же рисунка видно, что пассаты (ветры, дующие от тропиков к экватору) в обоих полушариях будут отклоняться к западу, а текущие реки будут отклоняться в северном полушарии к правому берегу, а в южном – к левому.

Рассмотрим еще один пример – вращение жидкости в сосуде (рис. 2.15). Уравнение движения (2.8) можно записать для любой "частицы" жидкости – бесконечно малого кубика с поперечным сечением ΔS, который вместе с жидкостью вращается с угловой скоростью ω. Центростремительное ускоре-

ние этого кубика создается, главным образом, силами гидростатического давления: $\Delta m\omega^2 r = p'\Delta S - p\Delta S = \rho g\left(h' - h\right)\Delta S$. Отсюда следует, что $h' > h$, и поверхность вращающейся жидкости должна принимать форму воронки (рис.2.15). По той же причине поверхность реки в месте поворота будет наклонена в сторону поворота.

Учтем теперь силы вязкого трения. Из-за них жидкость практически не движется вблизи дна сосуда, т.е. с высотой скорость вращения увеличивается. Если перейти в неинерциальную систему отсчета, вращающуюся со средней скоростью жидкости $\langle\vec{\omega}\rangle$, то в этой системе верхние слои жидкости будут двигаться со скоростью $\vec{v}\,'$, опережая вращение системы, а нижние слои будут отставать. Кориолисовы силы приведут к появлению поперечных циркулярных потоков (правая часть рис.2.15). Такие потоки собирают чаинки в аккуратную кучку в центре стакана. Эти же потоки будут размывать один из берегов реки в месте ее изгиба и наносить ил на другой, пологий берег.

Глава 3.

Работа и энергия

1. Работа силы

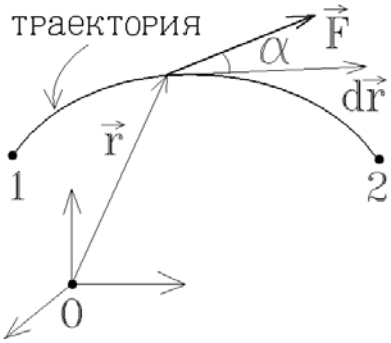

Рис.3.1

Обычно приходится иметь дело с силой, переменной как по величине, так и по направлению, и действующей на частицу, движущуюся по криволинейной траектории. Направление силы $\vec{F}$ составляет с траекторией угол α (вообще говоря, переменный). За время dt частица переместится на $d\vec{r}$ (рис.3.1), и сила совершит над ней элементарную работу, которая по определению равна скалярному произведению вектора силы на вектор бесконечно малого перемещения:

$$\boxed{dA = \vec{F}\, d\vec{r}.} \qquad (3.1)$$

Формулу (3.1) можно записать и по-другому:

$$dA = F\left|d\vec{r}\right|\cos\alpha = F\, dl \cos\alpha = F_l\, dl,$$

где F_l - проекция силы на направление траектории, dl – элементарный путь (рис.1.4). Выражение для работы при конечном перемещении из точки 1 в точку 2 будет выражаться интегралом:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\, d\vec{r}. \qquad (3.2)$$

Если же на тело одновременно действуют несколько сил, то их суммарная работа равна **алгебраической** сумме работ каждой силы, или, иначе, равна работе результирующей силы

$$A_{\text{рез}} = \int \vec{F}_{\text{рез}}\, d\vec{r} = \int \sum_i \vec{F}_i\, d\vec{r} = \sum_i A_i.$$

Знак работы каждой силы в этой сумме зависит от направления векторов $\vec{F}_i$ и $d\vec{r}_i$. Сила совершает положительную работу, когда она направлена "по движению" $\left(\alpha < \pi/2\right)$, и отрицательную – когда она направлена "против движения" ($\alpha > \pi/2$).

Сила, перпендикулярная к траектории частицы, работы не совершает. Так, в частности, всегда равна нулю работа силы, действующей на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля:

$$A_{\text{магн}} = \int \vec{F}_{\text{магн}}\, d\vec{r} = \int q\left[\vec{v},\, \vec{B}\right]\cdot \vec{v}dt = 0.$$

Кроме того, надо учитывать, что $d\vec{r}$ – это **перемещение точки приложения силы**. Например, при движении тела с закрепленным центром тяжести работа силы тяжести равна нулю! Помимо работы можно определить мощность силы, которая равна работе, совершенной за единицу времени:

$$\boxed{P = \frac{dA}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}.} \qquad (3.3)$$

2. Кинетическая энергия частицы

Пусть на движущуюся частицу действует некоторая сила $\vec{F}$. В результате движение частицы изменяется (меняется скорость $\vec{v}$). Найдем, чему равна работа силы по изменению скорости частицы. Для этого запишем второй закон Ньютона $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}$ и умножим каждую его часть скалярно на элементарное перемещение $d\vec{r}$. В итоге получим:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = md\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}d\vec{v} = \sum \vec{F}d\vec{r} = d\,A.$$

Но $\vec{v}d\vec{v} = v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = d\left(\dfrac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}\right) = d\left(\dfrac{v^2}{2}\right)$,

и поэтому

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA\,.$$

Величину $\boxed{K = \dfrac{mv^2}{2}}$ называют кинетической энергией частицы. Таким образом, **работа всех сил, действующих на частицу, идет на изменение ее кинетической энергии**, т.е.

$$dK = dA \quad \text{или} \quad K_2 - K_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 \sum \vec{F}d\vec{r}. \qquad (3.4)$$

3. Консервативные силы и потенциальная энергия

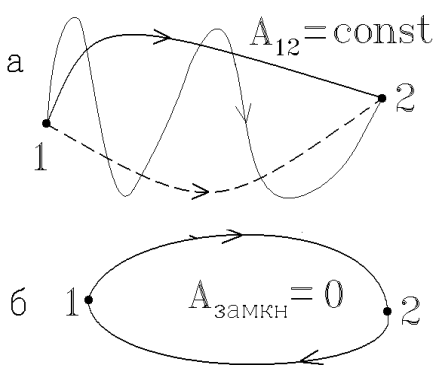

Рис.3.2

Определение: сила, **работа которой** не зависит от формы и длины пути (от траектории точки приложения силы), называется консервативной силой (рис.3.2,а).

Математически условие консервативности силы выражается в виде:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0 . \qquad (3.5)$$

Действительно, как следует из рис. 3.2,б и формулы (3.2), работа консервативной силы на замкнутом пути в силу определения будет: $A_{замкн} = A_{12} + A_{21} = A_{12} - A_{12} = 0$. Величина $\oint \vec{a} d\vec{r}$ называется циркуляцией вектора $\vec{a}$. Поэтому условие (3.5) читается так : **циркуляция консервативной силы по любому замкнутому контуру равна нулю.**

Из определения консервативной силы вытекает и еще одно важнейшее свойство: работу консервативной силы можно представить, как изменение (убыль) некоторой скалярной функции $U(\vec{r})$, зависящей только от положения частицы (тела), которая называется потенциальной энергией:

$$\boxed{dA_{конс} = \vec{F}_{конс} d\vec{r} = -dU,}$$

или

$$\boxed{U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = -\Delta U = \int_1^2 \vec{F}_{конс} d\vec{r}.} \qquad (3.6)$$

В том, что это действительно так, можно убедиться на примерах, рассмотренных в следующем параграфе.

Последняя из формул (3.6) являются определением потенциальной энергии. Из нее следует, что **потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной**. Так как определена только ее разность, то к выражению U можно добавить или вычесть любую постоянную величину.

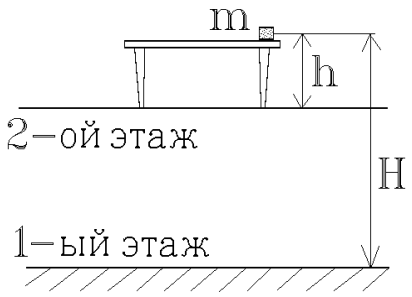

Рис.3.3

Например, потенциальную энергию тела (рис.3.3) можно вычислять относительно уровня любого этажа здания, относительно уровня моря, относительно центра Земли и т.д.; величина ее при этом, конечно, будет

разной, но работа консервативной силы тяжести при перемещении тела m во всех случаях будет одной и той же!

Поэтому в каждом конкретном случае договариваются о начале отсчета потенциальной энергии (в какой именно точке следует считать $U = 0$ из соображений удобства).

4. Потенциальная энергия центральных сил

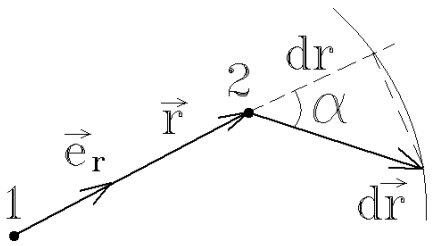

Рис.3.4

Определение: силы, действующие по прямой, соединяющей частицы, и зависящие только от расстояния r между ними, называются <u>центральными.</u> Общим для всех центральных сил будет следующий силовой закон:

$$\vec{F}_{\text{центр}}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{e}_r\ , \qquad (3.7)$$

где $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ – единичный вектор, направленный от одной частицы к другой. Как видно из рис.3.4, при смещении одной из частиц на $d\vec{r}$ получаем $\vec{e}_r d\vec{r} = |\vec{e}_r| \cdot |d\vec{r}| \cos\alpha = dr$, т.е. изменению расстояния между частицами. Поэтому работа любой центральной силы будет:

$$A_{\text{центр}} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{центр}}\, d\vec{r} = \int_1^2 f(r)\, dr.$$

Для любой функции $f(r)$ результат интегрирования определяется лишь начальным r_1 и конечным r_2 положениями траектории, и может быть записан в виде $A_{\text{центр}} = U(r_1) - U(r_2)$.

Поэтому любая центральная сила является консервативной, и частица в поле центральных сил обладает потенциальной энергией. Примерами центральных сил могут служить гравитационная, кулоновская и упругая силы.

Вычислим потенциальную энергию различных центральных сил.

1) Сила гравитационного притяжения:

$\vec{F}_{\text{грав}} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$, поэтому $f(r) = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$. Выберем $U = 0$ при $r = \infty$. Тогда работа перемещения частицы 2 (рис.3.5) из бесконечности в точку $\vec{r}$ будет:

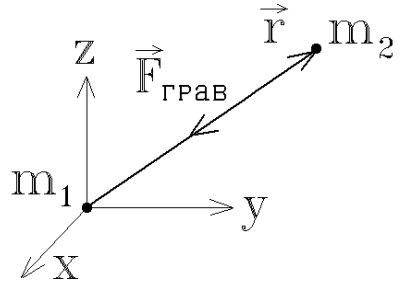

Рис.3.5

$$A=\int_{\infty}^{r}\left(-G\frac{m_1m_2}{r^2}\right)dr=G\frac{m_1m_2}{r}=0-U(r).$$

Следовательно, потенциальная энергия притяжения двух точечных масс

$$U_{грав}(r)=-G\frac{m_1m_2}{r}.$$

2) Кулоновская сила:

$\vec{F}_{кул}(r)=k\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_r$, поэтому $f(r)=k\frac{q_1q_2}{r^2}$. Если снова выбрать $U=0$ при $r=\infty$, то для потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов получим выражение аналогичное предыдущему:

$$U_{кул}(r)=k\frac{q_1q_2}{r}$$

3) Сила упругости: $\vec{F}_{упр}=-k\vec{r}=-k\,r\,\vec{e}_r$, т.е. $f(r)=-k\,r$ (k – жесткость, r - удлинение деформируемого тела). Полагаем $U=0$ при $r=0$ (рис.3.6), поэтому

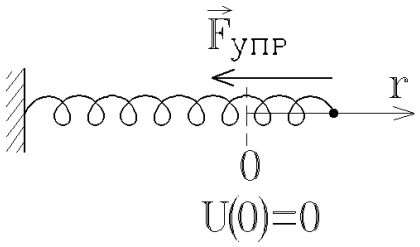

Рис.3.6

$$A=\int_{0}^{r}(-k\,r)\,dr=-\frac{kr^2}{2}=-U(r).$$

Итак, потенциальная энергия упругой силы (или упругой деформации)

$$U_{упр}(r)=\frac{k\,r^2}{2}.$$

Отсюда, в частности, следует, что работа, которую надо совершить для удлинения пружины на r, равна $\frac{k\,r^2}{2}$.

5. Градиент потенциальной энергии

Как следует из определения потенциальной энергии (3.6), $dA_{конс}=\vec{F}_{конс}\,d\vec{r}=-dU$.. С учетом $d\vec{r}=\vec{i}dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz$ получим: $-dU=F_xdx+F_ydy+F_zdz$. Отсюда, при перемещении вдоль оси x, когда $dy=dz=0$, находим $-dU=F_xdx$, т.е. $F_x=-\left.\frac{dU}{dx}\right|_{y,z=\text{const}}\equiv-\frac{\partial U}{\partial x}$.

Проекция консервативной силы на ось x равна **частной производной** от потенциальной энергии по x- координате (частная производная берется по одной переменной в предположении, что все остальные переменные не изменяются). Аналогично $F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}$ и $F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z}$.

Таким образом, консервативная сила выражается через потенциальную энергию следующим образом:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{конс}} = -\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} - \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} - \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}.} \qquad (3.8)$$

Введем дифференциальный оператор “набла”:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.} \qquad (3.9)$$

Им можно подействовать на любую скалярную функцию $f(x,y,z)$.

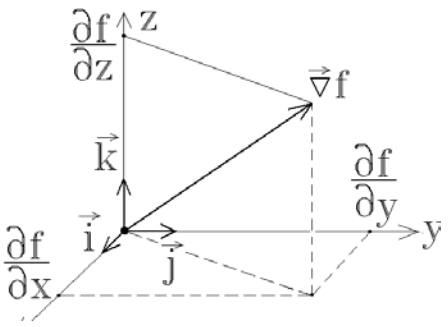

Рис.3.7

В результате получается вектор с проекциями $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ (рис.3.7), который называется <u>градиентом</u> функции f:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) \equiv \operatorname{grad} f\left(x,y,z\right) = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right) f(x,y,z). \qquad (3.10)$$

Итак, зная потенциальную энергию частицы, можно простым дифференцированием найти действующую на нее консервативную силу:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{конс}} = -\vec{\nabla} U \equiv -\operatorname{grad} U.} \qquad (3.11)$$

Наоборот, по выражению для силы можно интегрированием найти потенциальную энергию частицы (формула (3.6)).

Пример: пусть $U = \dfrac{\alpha}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $\alpha = \text{const}$. Тогда

$$\vec{F} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\right) =$$

$$= -\frac{\partial U}{\partial r}\left(\vec{i}\,\frac{x}{r} + \vec{j}\,\frac{y}{r} + \vec{k}\,\frac{z}{r}\right) = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} = -\vec{e}_r\,\frac{\partial U}{\partial r}.$$

Таким образом, в случае действия центральных сил, зависящих только от r, при вычислении градиента можно использовать только радиальную часть оператора $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla}_r = -\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}.$$

Поэтому в рассмотренном примере $\vec{F} = -\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\alpha}{r}\right) = \vec{e}_r \frac{\alpha}{r^2}$. При $\alpha = -G m_1 m_2$ получается сила гравитации Ньютона, при $\alpha = k q_1 q_2$ – сила Кулона.

Эквипотенциальные поверхности

Геометрическое место точек, в которых потенциальная энергия частицы (или потенциал) одинакова, называется эквипотенциальной поверхностью. Уравнение такой поверхности имеет вид: $U\big|_S = \text{const}$.

При перемещении по этой поверхности $dU = 0$, и из выражения $\vec{F}d\vec{r} = F_l dl = -dU = 0$ следует, что проекция силы F_l на эквипотенциальную поверхность всегда равна нулю. Поэтому

вектор консервативной силы всегда перпендикулярен эквипотенциальной поверхности.

Если $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к эквипотенциальной поверхности, то $F_n = -\frac{\partial U}{\partial n}$, и при $dU > 0$ $F_n < 0$, следовательно,

вектор консервативной силы направлен в сторону убывания (уменьшения) потенциальной энергии, и в этом же направлении под действием силы будут ускоряться все тела. Вектор $\text{grad}\, U$ также направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности, но в сторону возрастания U, т.е. **противоположно силе**.

Рис.3.8

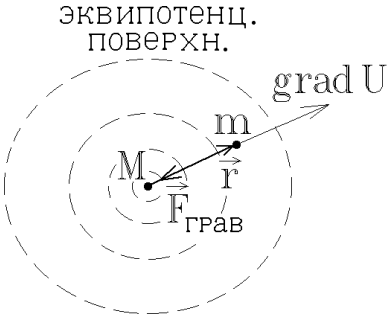

Рис.3.9

1) однородное поле тяжести: $\vec{g} = \text{const}$ (рис.3.8);

2) гравитационное поле точечной массы M: $\vec{F}_{\text{грав}} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r$, изображенное на рис.3.9. На

обоих рисунках штриховыми линиями изображены эквипотенциальные поверхности, а также показаны направления градиентов потенциальной энергии и сил тяготения.

6. Механическая энергия частицы и закон ее изменения

Сумма кинетической и потенциальной энергий частицы называется ее полной механической энергией: $\boxed{E = K + U\ .}$

Если на частицу действуют **только консервативные силы**, то с одной стороны, $dA = -dU$, а с другой стороны, как следствие второго закона Ньютона, $dA = dK$. Поэтому $-dU = dK$ или $d\left(K + U\right) = dE = 0$.

Иначе говоря, **механическая энергия частицы, подверженной действию только консервативных сил, сохраняется**. Отсюда, кстати, и название этих сил: “conservare” (лат.) – сохранять.

Неконсервативные силы

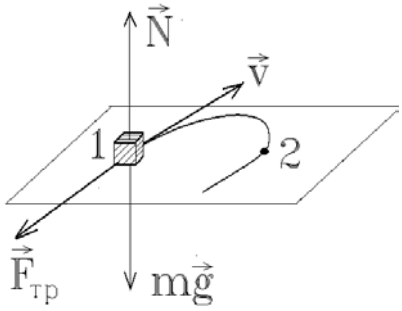

Рис.3.10

Неконсервативными называются силы, работа которых зависит от длины и формы пути. Отсюда следует, что на замкнутом пути работа неконсервативных сил не равна нулю, и с ними не связана потенциальная энергия.

Примерами неконсервативных сил являются: сила трения скольжения и силы вязкого трения. Так, из рис.3.10 видно, что работа силы трения скольжения зависит не от перемещения тела, а от длины пути: $A_{тр} = -\mu N l$, и не равна нулю при возвращении тела в исходную точку.

Пусть на частицу действуют как консервативные, так и неконсервативные силы. Тогда уравнение движения будет

$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{конс} + \sum \vec{F}_{неконс}$. Умножая его скалярно на $d\vec{r}$, получим:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = \sum \vec{F}_{конс}\, d\vec{r} + \sum \vec{F}_{неконс}\, d\vec{r} \Rightarrow dK = -dU + dA_{\ неконс} \text{ или}$$

$$\boxed{dE = d\left(K + U\right) = dA_{неконс}\ .} \qquad (3.12)$$

Изменение полной механической энергии частицы равно работе всех действующих на нее неконсервативных сил:

$$\Delta E = A_{\ неконс} = \int_1^2 \vec{F}_{\ неконс} \cdot d\vec{r}.$$

При этом изменение механической энергии в замкнутой системе компенсируется изменением тепловой, химической и других видов энергии.

Закону изменения энергии можно придать несколько иную форму, если выражение (3.12) почленно разделить на dt ; тогда

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{dA_{\text{неконс}}}{dt} = \vec{F}_{\text{неконс}} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}_{\text{неконс}} \vec{v} = P_{\text{неконс}},} \quad (3.13)$$

т.е. **скорость изменения механической энергии равна мощности неконсервативных сил.**

Важным частным случаем неконсервативных сил являются <u>диссипативные силы</u> – силы, зависящие от скорости частицы и направленные против скорости:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{дис}} = -f(v)\vec{v}\ .}$$

Примером может служить сила вязкого трения. Как следует из уравнения (3.13), мощность диссипативных сил всегда отрицательна: $P_{\text{дис}} = \vec{F}_{\text{дис}} \vec{v} = -f(v)v^2 < 0$, поэтому при действии диссипативных сил механическая энергия всегда убывает (и превращается во внутреннюю, в тепло). Отсюда и название: “dissipare” (лат.) – рассеивать.

Глава 4

Момент импульса

1. Момент импульса частицы

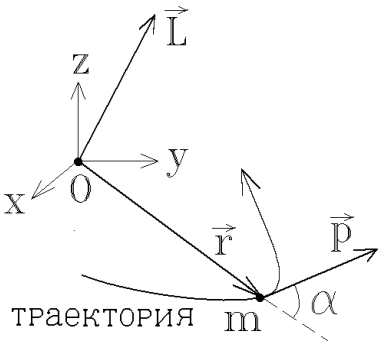

Рис.4.1

Пусть частица движется по некоторой траектории и в данный момент времени ее радиус-вектор равен $\vec{r}$, а импульс $\vec{p} = m\vec{v}$ (рис.4.1). Кроме импульса, существует еще одна векторная характеристика движения (динамическая переменная) – момент импульса.

<u>Моментом импульса</u> частицы относительно точки (центра) О называется векторное произведение радиус-вектора на импульс частицы:

$$\boxed{\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right] \ .} \qquad (4.1)$$

Согласно определению, $\vec{L} \perp \vec{r}$, и $\vec{L} \perp \vec{p}$, и его направление определяется по правилу правого винта (рис.4.2). Векторное произведение любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по правилу:

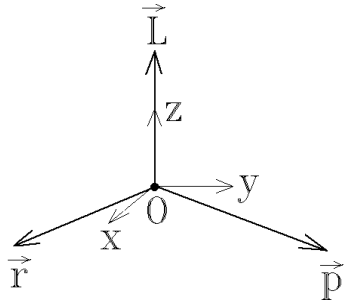

Рис.4.2

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\ \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Поэтому $\vec{L} = \left[\vec{r},\ \vec{p}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$,

или $\vec{L} = \vec{i}\underbrace{\left(yp_z - zp_y\right)}_{=L_x} + \vec{j}\underbrace{\left(zp_x - xp_z\right)}_{=L_y} + \vec{k}\underbrace{\left(xp_y - yp_x\right)}_{=L_z}$.

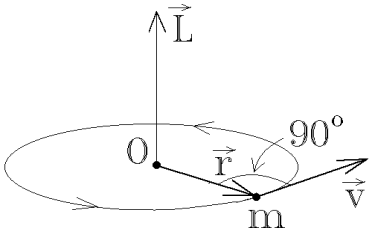

Рис.4.3а

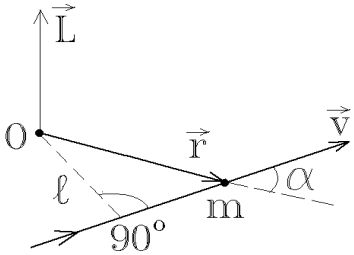

Рис.4.3б

Момент импульса определен как для криволинейного, так и для прямолинейного движения: на рис. 4.3,а показана частица, вращающаяся по окружности радиуса r – для нее

$L = pr\sin 90^{o} = mvr$; на рис.4.3б – частица, движущаяся по прямой; для нее $L = mvr\sin\alpha = mvl$.

Заметим, что величина $\vec{L}$ зависит от выбора точки О, которую, вообще говоря, можно выбрать, где угодно. Поэтому вектор $\vec{L}$ проводят из точки О. Если имеется ось вращения, точку О помещают на оси.

2. Закон изменения момента импульса. Момент силы

Найдем закон изменения момента импульса, для чего продифференцируем по времени выражение (4.1):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r},\ \vec{p}\right] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt},\ \vec{p}\right] + \left[\vec{r},\ \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = \left[\vec{v},\ \vec{p}\right] + \left[\vec{r},\ \frac{d\vec{p}}{dt}\right]. \qquad (4.2)$$

Так как $\vec{v} \parallel \vec{p}$, то первое слагаемое в уравнении (4.2) обращается в нуль, а $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ в силу второго закона Ньютона. Поэтому

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \vec{M}.} \qquad (4.3)$$

Вектор, равный векторному произведению радиус-вектора на силу, $\vec{M} = \left[\vec{r},\ \vec{F}\right]$ называется <u>моментом силы</u>. Итак: **скорость изменения момента импульса частицы относительно некоторой точки равна моменту силы относительно той же точки.**

Сделаем несколько замечаний относительно вектора $\vec{M}$. Во-первых, вектор $\vec{M}$ перпендикулярен к векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$ и образует с ними правую тройку векторов (рис.4.4). Во-вторых, величина (модуль) момента силы, согласно определению, будет (рис.4.5) $\left|\vec{M}\right| == rF\sin\alpha$ или

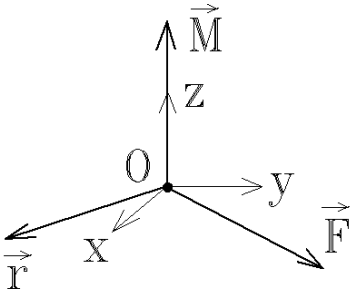

Рис.4.4

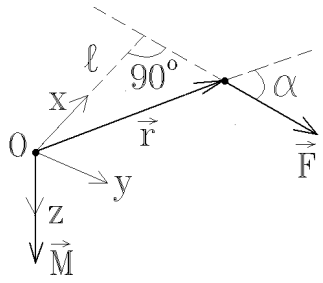

Рис.4.5

$$\boxed{M = lF.} \qquad (4.4)$$

Кратчайшее расстояние от точки О до линии действия силы $l = r\sin\alpha$ называется <u>плечом силы</u>. Отсюда следует, что точку приложения силы (если, конечно, речь идет о твердом теле) можно сдвигать **вдоль**

линии действия силы – при этом ни l, ни $\vec{M}$ не изменятся. Но величина и направление $\vec{M}$ зависят от выбора точки О.

Рассмотрим в качестве примера движение частицы под действием центральной силы $\vec{F}_{\text{центр}} = f(r)\vec{e}_r$ (начало координат О совпадает с силовым центром). Например, это может быть гравитационная или кулоновская сила. Так как момент силы **относительно силового центра** равен нулю: $\left[\vec{r}, \vec{F}_{\text{центр}}\right] = f(r)\left[\vec{r}, \vec{e}_r\right] = 0$, то момент импульса относительно этой же точки будет постоянным: $d\vec{L}/dt = \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$. Отсюда вытекает, что траектория точки в этом случае может быть только плоской кривой!

3. Момент импульса относительно оси

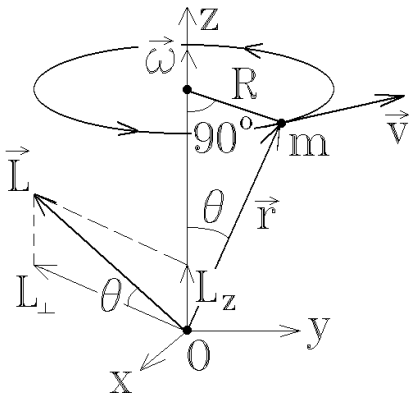

Рис.4.6

В дальнейшем нам придется столкнуться с проекцией момента импульса на некоторую **фиксированную (закрепленную)** ось (например, ось z). Эта величина называется <u>моментом импульса относительно оси.</u>

Пусть частица массы m движется по окружности радиуса R вокруг этой оси. Выберем точку О, относительно которой определяются векторы $\vec{L}$ и $\vec{M}$, на оси z. Тогда, как видно из рис.4.6, $L_z = L\sin\theta = mvr\sin 90^{\circ}\sin\theta = mvR$. Если учесть, что $v = \omega R$, где ω – угловая скорость вращения частицы, то $L_z = mR^2\omega$. Величина $I = mR^2$ называется <u>моментом инерции</u> частицы относительно оси. Таким образом, окончательно имеем:

$$L_z = I\omega, \qquad (4.5)$$

т.е. **момент импульса частицы относительно оси равен произведению ее момента инерции на угловую скорость вращения**.

Если записать проекцию уравнения (4.3) на эту **фиксированную** ось, то получим закон изменения момента импульса относительно оси:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \qquad (4.6)$$

где M_z – проекция момента силы на ту же ось (или момент силы относительно оси).

Глава 5

Динамика системы частиц. Законы сохранения

1. Законы изменения и сохранения импульса системы частиц

В этой главе объектом изучения будет не одна частица, а система частиц. Система частиц может представлять собой любое агрегатное состояние вещества – газ, жидкость или твердое тело.

Систему всегда можно разбить на столь малые участки (линейные, плоские или объемные) с массами m_i, что их размерами можно пренебречь и рассматривать эти участки как частицы (материальные точки).

Положение каждой из этих частиц задается радиус-вектором $\vec{r}_i$ (рис.5.1).

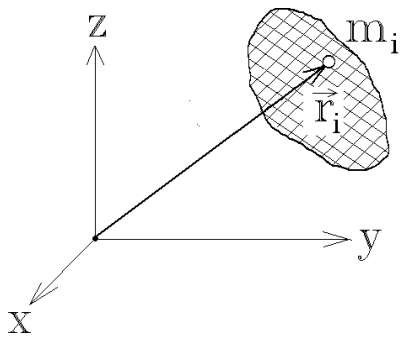

Рис.5.1

Масса всей системы определяется как $m = \sum_i m_i$. Строго говоря, в этом выражении должна стоять не сумма, а интеграл: если ρ – плотность системы (тела), а dV – объем маленького участка, то его масса $dm = \rho\, dV$, а масса всей системы $m = \int dm = \int_V \rho\, dV$, где интеграл берется по всему объему системы.

На i-ю частицу системы, вообще говоря, действуют как <u>внешние силы</u> $\vec{F}_i$ со стороны окружающих систему тел или полей, так и сумма <u>внутренних сил</u> $\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$ со стороны всех остальных частиц системы. Поэтому закон движения i-й частицы запишется в виде

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} .$$

Число таких уравнений равно числу частиц в системе. Просуммируем эти уравнения для **всех** частиц системы (т.е. попросту сложим все левые и все правые части). Так как в силу третьего закона Ньютона

$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, то сумма всех внутренних сил, действующих на все частицы системы, обращается в нуль: $\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = 0$. В результате получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = \sum_i \vec{F}_i .$$

Векторная сумма импульсов всех частиц системы называется полным импульсом системы: $\sum_i \vec{p}_i \equiv \sum_i m_i \vec{V}_i = \vec{P}$. Векторная сумма всех внешних сил является результирующей внешних сил: $\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внеш}}$. Таким образом, закон движения системы частиц или закон изменения полного импульса системы читается так:

производная по времени полного импульса системы частиц равна результирующей внешних сил (включая силы инерции в неинерциальных системах отсчета):

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}} . \qquad (5.1)$$

Уравнение (5.1) можно записать и прочитать по-иному, если ввести еще одно понятие – импульс силы за время dt: это $\vec{F}\,dt$. Тогда, умножая уравнение (5.1) на dt и интегрируя по времени от t_1 до t_2, получаем:

$$\boxed{\vec{P}_2 - \vec{P}_1 \equiv \Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{внеш}}\,dt} , \qquad (5.2)$$

т.е. изменение (приращение) полного импульса системы за время $\Delta t = t_2 - t_1$ равно импульсу внешних сил за то же время.

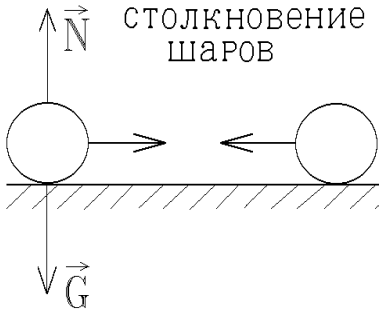

Рис.5.2

Если все внешние силы, действующие на систему, уравновешиваются, т.е. $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ то система называется замкнутой. Для нее $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ или $\boxed{\vec{P} = \text{const}}$ – **полный импульс замкнутой системы сохраняется**. Это – закон сохранения импульса.

Ошибочно говорить, что "импульс сохра-

няется, если на систему не действуют силы" – они действуют практически всегда, но **могут быть уравновешены** (рис.5.2).

Часто $\vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$, но действие внешних сил длится столь малое время $\Delta t \to 0$, что импульс не успевает заметно измениться: $\Delta \vec{P} = \vec{F}_{\text{внеш}} \Delta t \to 0$. В этих случаях (быстрое столкновение, взрыв и т.п.) также можно применять закон сохранения импульса:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots = \text{const}.$$

Заметим, что возможны случаи, когда $\vec{F}_{\text{внеш}} \neq 0$, но $F_{\text{внеш x}} = 0$. Тогда сохраняется только проекция импульса на соответствующую ось: $P_x = \text{const}$, что также широко используется в приложениях.

2. Центр масс. Уравнение движения центра масс

Центром масс системы называется точка с радиус-вектором

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}}, \qquad (5.3)$$

где сумма берется по всем частицам системы.

Для непрерывного распределения массы с плотностью ρ эта формула принимает вид: $\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int_V \vec{r}\, dm = \frac{1}{m}\int_V \rho \vec{r}\, dV$.

Из формулы (5.3) следует, что декартовыми координатами центра масс будут

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}; \qquad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}; \qquad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}.$$

Если силы тяжести, приложенные к каждой частице системы, направлены в одну сторону, то центр масс совпадает с центром тяжести. Покажем это, поместив начало координат О в центр масс (рис.5.3). Тогда $\vec{r}_C = 0$, следовательно, $\sum m_i \vec{r}_i = 0$. Если умножить это равенство на ускорение свободного падения, то получим:

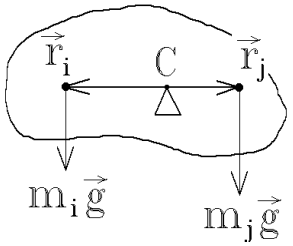

Рис.5.3

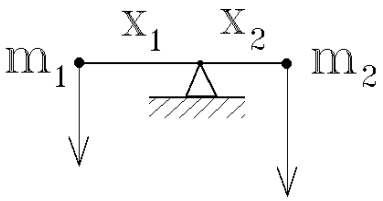

Рис.5.4

$\sum m_i g \vec{r}_i = 0$, что эквивалентно условию равновесия весов (рис.5.4), в которых точка опоры помещена в центр тяжести ($m_1 g\, x_1 = m_2\, g\, x_2$).

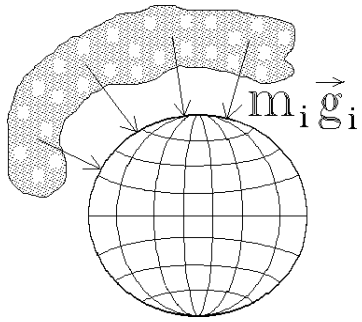

Рис.5.5

Но если $m_i\, \vec{g}_i$ **не параллельны**, как показано на рис.5.5, то центр масс и центр тяжести не совпадают. Взяв производную по времени от $\vec{r}_C$, получим:

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} \equiv \vec{v}_C = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_i =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_i m_i\, \vec{v}_i = \frac{1}{m}\sum_i \vec{p}_i$$

или

$$\boxed{m\vec{v}_C = \sum_i m_i\, \vec{v}_i = \vec{P}}\,, \qquad (5.4)$$

т.е. **полный импульс системы равен произведению ее массы на скорость центра масс** $\vec{V}_C$ **.**

Подставляя это выражение в закон изменения полного импульса (5.1), находим:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_C\right) = m\vec{a}_C == \vec{F}_{\text{внеш}}. \qquad (5.5)$$

Центр масс системы движется как частица, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложена результирующая **внешних** сил.

Рассмотрим примеры систем, изображенных на рис.5.6 – 5.9.

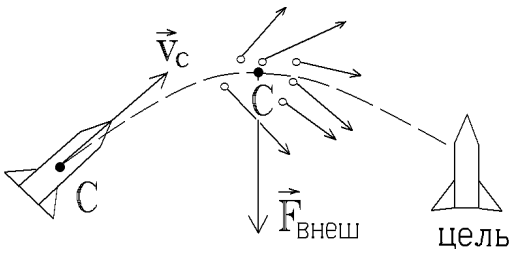

Рис.5.6

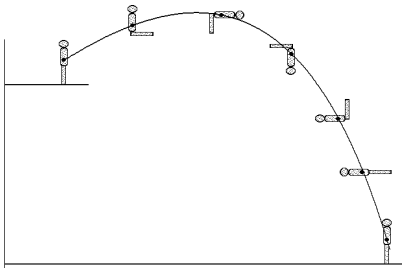
Рис.5.7

После подрыва ракеты (рис.5.6) центр масс облака разлетающихся осколков продолжает лететь по прежней траектории, что позволяет поразить цель. Точно так же при прыжке с вышки в воду (рис.5.7) прыгун может совершать различные кульбиты, но его центр масс движется приблизительно по параболе.

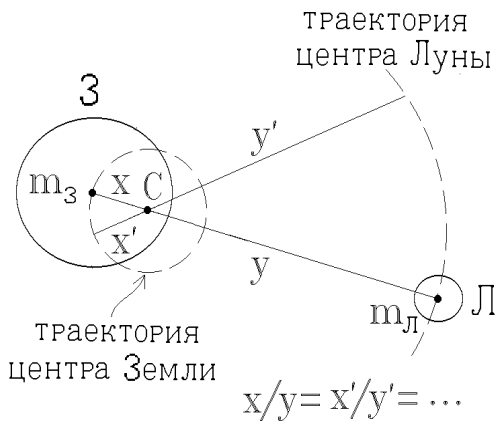

Рис.5.8

В системе Земля – Луна их центры вращаются вокруг общего центра масс С, который, в свою очередь, движется вокруг Солнца по эллиптической траектории (на рис.5.8 траектории показаны в системе центра масс, в которой центр С неподвижен). Кстати, наблюдая в телескоп извилистую траекторию звезды на небесной сфере, можно не только установить факт наличия у нее планеты (или планетной системы), но и вычислить массу последней.

Более интересным будет пример, показанный на рис.5.9: в ящике, стоящем на гладком льду, находятся кошка и мышь. Их беготня приводит к беспорядочным движениям ящика, но центр масс С системы остается неподвижным (если пренебречь силой трения!).

Однако на практике можно осуществить ситуацию, когда **полностью закрытый** и стоящий на льду **неподвижно** ящик, вдруг начинает смещаться в одну сторону! Для этого должна действовать **внешняя** сила (малая сила трения скольжения), заставляющая центр масс двигаться с ускорением $a_C = F_{\text{тр}} / m = \mu g$. Кошке достаточно бежать в одну сторону, например, налево, очень медленно в течение времени t_1, а возвращаться обратно очень быстро: $t_2 << t_1$. Результирующее смещение ящика

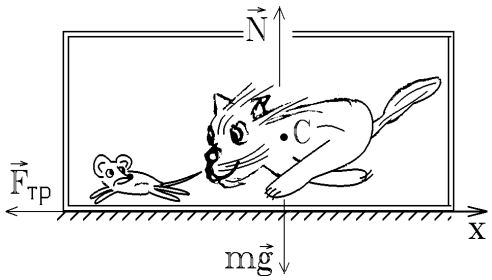

Рис.5.9

$$x_{\text{рез}} = \frac{a_C t_1^2}{2} - \frac{a_C t_2^2}{2}.$$

Таким образом, используя внешнюю силу трения, можно заставить закрытый ящик даже ползти вверх по наклонной плоскости.

Наконец, заметим, что при **поступательном** движении все точки твердого тела движутся так же, как и центр масс (по таким же траекториям), поэтому для описания поступательного движения достаточно записать и решить уравнение движения центра масс.

Так как $\vec{P} = m\vec{v}_C$, то центр масс **замкнутой системы** должен сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, т.е.

$\vec{v}_C = \text{const}$. Но при этом вся система может вращаться, разлетаться, взрываться и т.п. в результате действия **внутренних сил**.

3. Реактивное движение. Уравнение Мещерского

Реактивным называется движение тела, при котором его масса изменяется. Пусть в процессе движения за время dt тело массы m присоединяет (поглощает) или отбрасывает (испускает) массу dm со скоростью $\vec{u}$ **относительно тела**; в первом случае $dm > 0$, во втором $dm < 0$.

Рассмотрим такое движение на примере ракеты, испускающей газообразные продукты горения топлива.

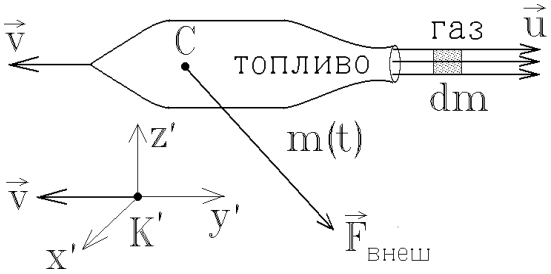

Рис.5.10

Перейдем в инерциальную систему отсчета K', которая в данный момент времени t движется с той же скоростью $\vec{v}$, что и ракета (рис.5.10) – такая ИСО называется сопутствующей, и ракета в этой системе отсчета в данный момент t **покоится**.

Если сумма внешних сил, действующих на ракету, не равна нулю, то изменение полного импульса системы "ракета – газ" за время dt будет:

$$d\vec{P} = \underbrace{m\,d\vec{v}}_{\substack{\text{изменение}\\ \text{импульса ракеты}}} - \underbrace{dm\cdot\vec{u}}_{\substack{\text{импульс}\\ \text{газа}}} = \vec{F}_{\text{внеш}}\,dt.$$

Разделив это выражение почленно на dt , получим уравнение движения ракеты в системе K', но так как все ИСО эквивалентны, то и в системе K уравнение будет иметь тот же самый вид:

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}} + \frac{dm}{dt}\vec{u}\ .} \qquad (5.6)$$

Это – уравнение Мещерского, описывающее движение **любого тела** с переменной массой в поле внешних сил с результирующей $\vec{F}_{\text{внеш}}$.

В уравнении (5.6) масса m – величина переменная, и ее нельзя внести под знак производной. Второе слагаемое в правой части уравнения (5.6) называется реактивной силой.

$$\boxed{\vec{F}_{\text{реакт}} = \frac{dm}{dt}\vec{u}\ .} \qquad (5.7)$$

Для ракеты реактивная сила играет роль **силы тяги**, но в случае присоединения массы $dm/dt > 0$, и реактивная сила будет **силой торможения** (например, при движении ракеты в облаке космической пыли).

Замечание: уравнение Мещерского совпадает с обычной формулировкой второго закона Ньютона только в одном частном случае, когда $\vec{u} = -\vec{v}$ (отбрасываемая или присоединяемая масса становится неподвижной относительно Земли). Тогда

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}} - \frac{dm}{dt}\vec{v} \qquad \text{или} \qquad \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}_{\text{внеш}}\ .$$

В качестве примера вычислим зависимость скорости ракеты от массы топлива.

Пусть все внешние силы, действующие на ракету, уравновешены, а скорость истечения газов (продуктов сгорания топлива) постоянна: $\vec{u} = \text{const}$. В этом случае уравнение Мещерского принимает простой вид

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\,\vec{u}$$

и легко интегрируется. Сокращая на dt и разделяя переменные, приходим к уравнению

$$d\vec{v} = \frac{dm}{m}\,\vec{u}\ ,$$

откуда находим

$$\int_0^t d\vec{v} = \vec{u}\int_{m_0}^{m(t)}\frac{dm}{m} \quad \text{и} \quad \vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \vec{u}\,\ln\frac{m(t)}{m_0} = -\vec{u}\,\ln\frac{m_0}{m(t)}\ .$$

Итак, зависимость скорости ракеты от времени имеет вид:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(0) - \vec{u}\,\ln\frac{m_0}{m(t)}\ ,} \qquad (5.8)$$

где m_0 – начальная масса ракеты: $m_0 = m_{\text{ракеты}} + m_{\text{топлива}}$. Поэтому величина конечной скорости ракеты (в отсутствие сил сопротивления и с учетом того, что скорости $\vec{u}$ и $\vec{v}$ направлены противоположно) будет

$$v_{\text{конечн}} = v(0) + u\ln\left(1 + \frac{m_{\text{топлива}}}{m_{\text{ракеты}}}\right). \qquad (5.9)$$

Заметим, что для ракет с химическим топливом $u \approx 4$ км/с.

4. Энергия системы частиц

Энергия системы частиц состоит из кинетической и потенциальной. Кинетическая энергия системы представляет собой сумму кинетических энергий всех частиц системы

$$\boxed{K_{\text{сист}} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.} \qquad (5.10)$$

и является, согласно определению, величиной **аддитивной** (как и импульс).

Иначе обстоит дело с потенциальной энергией системы.

Во-первых, между частицами системы действуют силы взаимодействия $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$. Если эти силы – консервативные, то работа, совершаемая ими над парой взаимодействующих частиц за время dt, будет

$$dA_{ij} = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = \vec{F}_{ij} \cdot \left(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j\right) = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i{}' \quad ,$$

где $d\vec{r}_i{}'$ – перемещение i-й частицы относительно j-й.

Тогда $dA_{ij} = -dU_{ij}$, где U_{ij} – потенциальная энергия взаимодействия i-й и j-й частиц.

Суммируя U_{ij} по всем частицам системы, находим так называемую <u>собственную потенциальную энергию</u> системы:

$$U_{\text{соб}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} U_{ij}$$

(коэффициент $1/2$ в этой формуле учитывает тот факт, что каждое слагаемое в двойной сумме повторяется дважды).

Существенно, что **собственная потенциальная энергия системы зависит только от ее конфигурации** (т.е. от расстояний между частицами системы). К тому же эта величина – не аддитивная.

Во-вторых, на каждую частицу системы, вообще говоря, действуют и внешние силы. Если эти силы – консервативные, то их работа будет равна убыли внешней потенциальной энергии $dA = -dU_{\text{внеш}}$, где

$$U_{\text{внеш}} = \sum_i U_i \ ,$$

U_i – потенциальная энергия i-ой частицы во внешнем поле. Она зависит от положений всех частиц во внешнем поле и является аддитивной.

Таким образом, полная механическая энергия системы частиц, находящейся во внешнем потенциальном поле, определяется как

$$E = K_{\text{сист}} + U_{\text{соб}} + U_{\text{внеш}} . \qquad (5.11)$$

5. Закон сохранения механической энергии

Согласно закону изменения кинетической энергии i-й частицы,

$$dK_i = dA_i .$$

Суммируя эти равенства почленно, получаем закон изменения кинетической энергии системы: **приращение кинетической энергии системы равно работе всех сил, действующих на все частицы системы**, т.е.

$$dK_{\text{сист}} = dA_{\text{конс}} + dA_{\text{неконс}} = -dU_{\text{соб}} - dU_{\text{внеш}} + dA_{\text{неконс}} ,$$

откуда

$$\boxed{dE_{\text{сист}} = dA_{\text{неконс}} .} \qquad (5.12)$$

Это – **закон изменения механической энергии системы: изменение механической энергии системы равно суммарной работе всех неконсервативных сил.**

Консервативной называется система, полная механическая энергия которой сохраняется: $E_{\text{сист}} = \text{const}$. В такой системе отсутствуют любые неконсервативные силы (и внешние, и внутренние).

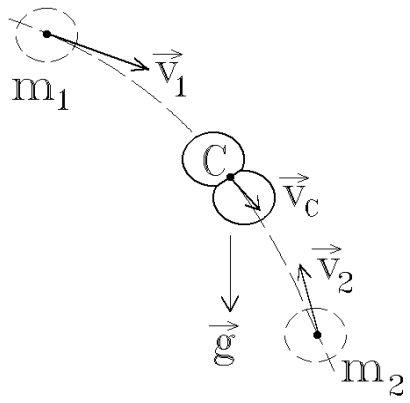

Рис.5.11

Заметим, что консервативность системы и закон сохранения механической энергии никак не связаны с замкнутостью системы.

Пример: лобовое столкновение двух летящих упругих резиновых мячей (рис.5.11). Система не замкнута (центр масс падает с ускорением $\vec{g}$), но консервативна. Часть кинетической энергии мячей в момент удара переходит в собственную потенциальную энергию упругой деформации, но полная энергия не меняется:

$$E = \frac{(m_1 + m_2)v_C^2}{2} + U_{\text{соб}} + (m_1 + m_2)\,g\,h_C = \text{const}$$

(в момент наибольшего сближения мячи движутся с одной и той же скоростью $\vec{v}_C$).

6. Момент импульса системы. Уравнение моментов

Моментом импульса системы называется аддитивная величина, равная векторной сумме моментов импульса всех частиц системы:

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \sum_i \vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right] .$$

В случае непрерывного распределения массы с плотностью ρ в этой формуле вместо суммы надо вычислять интеграл по объему системы V:

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \int_V \left[\vec{r}, \rho\vec{v}\right] dV.$$

Согласно закону изменения момента импульса (4.3), для каждой частицы системы можно записать уравнение

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i + \sum_{j\neq i} \vec{M}_{ij} ,$$

где первое слагаемое в правой части – это момент внешних сил, действующих на i-ю частицу, а второе слагаемое – сумма моментов внутренних сил.

Суммируя эти уравнения по всем частицам, получим закон изменения полного момента импульса системы:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{M}_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{M}_{ij}.$$

Двойная сумма в правой части уравнения обращается в нуль, так как содержит парные слагаемые вида $\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}\right] + \left[\vec{r}_j, \vec{F}_{ji}\right] = \left[\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{F}_{ij}\right]$ (если учесть, что по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$). Но векторы $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ и $\vec{F}_{ij}$ параллельны (рис.5.12), поэтому двойная сумма обращается в нуль. Внутренние силы не могут изменить полного момента импульса системы.

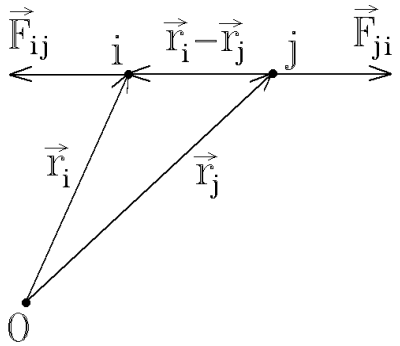

Рис.5.12

Окончательно имеем:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}} . \qquad (5.13)$$

Уравнение (5.13) называется уравнением моментов и утверждает, что **производная по времени полного момента импульса системы равна результирующему моменту внешних сил.**

Уравнения (5.13) и (4.3) являются следствиями уравнения движения (5.1). Однако, при записи (5.1), которое обычно называют уравнением динамики поступательного движения, надо учитывать все внешние силы. Уравнение моментов (5.13) позволяет исключить из рассмотрения любую из этих сил. Для этого надо выбрать точку О, относительно которой записаны моменты, на линии действия силы.

Пример: падение подпиленного столба (рис. 5.13). В точке опоры О действует неизвестная и к тому же меняющаяся со временем сила реакции $\vec{N}$. Но момент этой силы относительно точки опоры равен нулю, и в уравнение моментов войдет только момент известной силы тяжести: $\frac{dL_0}{dt} = mg \cdot l$, что очень облегчает решение задачи. Уравнение моментов определяет **закон динамики вращательного движения**. Описать такое движение с помощью уравнения (5.1) нельзя.

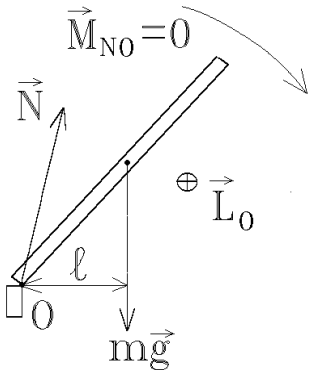

Рис.5.13

Пример: почему трогается с места и движется с ускорением автомобиль?

Очевидным является ответ: колеса не проскальзывают, и сила трения сцепления $\vec{F}_{тр}$ (сила трения покоя) направлена против вращения колес (рис.5.14). Эта **внешняя** сила и заставляет двигаться центр массы автомобиля с ускорением $\vec{a} = 4\vec{F}_{тр}/m$.

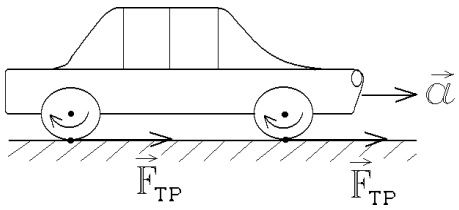

Рис.5.14

Заметим, однако, что эта сила приложена к **неподвижным** точкам касания колес с дорогой, т.е. работы не совершает и поэтому не может изменить кинетическую энергию и скорость системы! К тому же, сразу после выключения двигателя скорость и направление вращения колес не меняются, но автомобиль будет не ускорять, а замедлять движение!

Дело в том, что при сложном движении, когда система совершает и поступательное, и вращательное движения, **уравнение моментов (5.13) и уравнение поступательного движения (5.1) надо использовать совместно**. Колесо начинает двигаться с ускорением из-за появления вращающего момента сил $\vec{M}_0$ (этот момент передается колесу через карданный вал). Сила

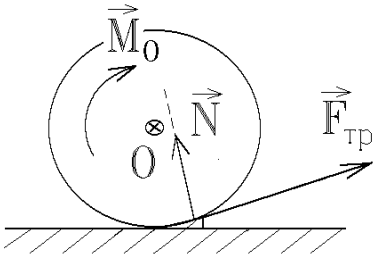

Рис.5.15

трения сцепления возникает как противодействие моменту $\vec{M}_0$: ее момент относительно оси О пропорционален $\vec{M}_0$ и **тормозит вращение колеса** (рис.5.15). Если выключить двигатель ($\vec{M}_0 = 0$), то исчезнет и сила трения сцепления: по твердой недеформируемой поверхности не проскальзывающее колесо будет катиться с постоянной скоростью (если пренебречь сопротивлением воздуха).

Но реальная поверхность дороги всегда деформируется под действием веса колеса (машины), и перед движущимся колесом возникает крошечный бугорок. Сила реакции $\vec{N}$ будет приложена к колесу со стороны такого бугорка (рис.5.15), а момент силы $\vec{N}$ относительно оси катящегося тела, который называют <u>моментом трения качения</u>, всегда тормозит качение.

7. Закон сохранения момента импульса

Как следует из уравнения моментов (5.13),

полный момент импульса системы сохраняется, если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю.

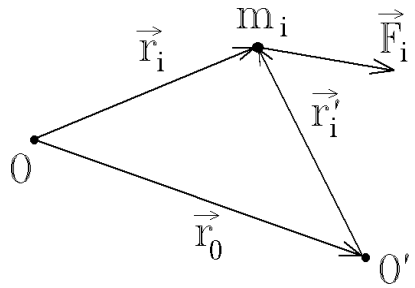

Рис.5.16

Найдем связь между суммарными моментами внешних сил $\vec{M}_O$ и $\vec{M}_{O'}$ относительно двух произвольных точек O и O'

Как следует из рис.5.16, $\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{r}_0$ и

$$\vec{M}_{O'} = \sum\left[\vec{r}_i{}', \vec{F}_i\right] = \sum\left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right] - \left[\vec{r}_0, \sum\vec{F}_i\right],$$

т.е. $$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O - \left[\vec{r}_0, \vec{F}\right] \qquad (5.14)$$

где $\vec{F} = \sum\vec{F}_i$ – результирующая внешних сил.

Поэтому, если $\vec{M}_O = 0$ и момент импульса системы относительно точки О сохраняется $\left(\vec{L}_O = \text{const}\right)$, то момент импульса этой же системы относительно другой точки O' сохраняться, вообще говоря, не будет. $\vec{L}_{O'} = \text{const}$ только, если $\vec{F} = 0$, или если линия, соединяющая точки O и O', параллельна вектору результирующей силы $\vec{F}$.

В частном случае движения тела (частицы) в поле центральной силы точку О можно совместить с силовым центром (рис.5.17). Так как

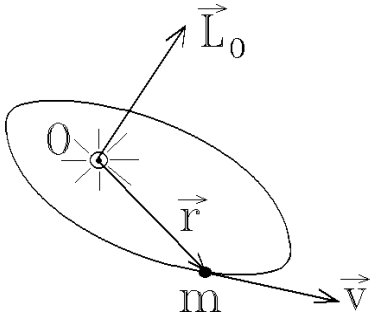

Рис.5.17

$\vec{M}_O = \left[\ \vec{r}, \vec{F}_{\text{цен}}\right] = \left[\vec{r}, f(r)\vec{r}\ \right] = 0$, то момент импульса относительно центра будет сохраняться

$$\vec{L}_O = \left[\vec{r}, m\vec{v}\right] = \text{const}.$$

Кроме того, надо учитывать, что закон сохранения момента импульса имеет векторный характер, поэтому может сохраняться не сам вектор момента импульса, а его проекция (или две проекции). Допустим, что $\sum_i M_{iz} = 0$.

Тогда

$$\sum_i L_{iz} = \text{const}$$

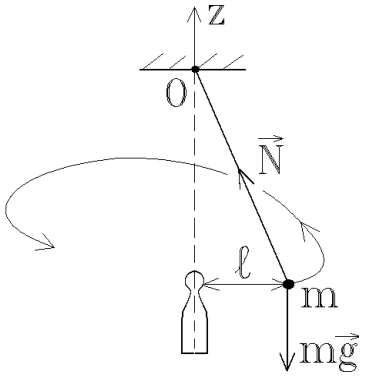

Рис.5.18

Пример: пусть кегля стоит под точкой подвеса О маленького шарика m на нити (рис.5.18). Отведите шарик и попытайтесь толкнуть его так, чтобы он сбил кеглю при обратном движении. Этого сделать не удается. Проекции моментов сил на вертикальную ось z равны нулю, и поэтому $L_{Oz} = m v_{\text{г}} l = \text{const}$. А так как горизонтальная составляющая скорости шарика $v_{\text{г}}$ конечна, то $l \neq 0$ (рис.5.18). Шарик будет вращаться вокруг оси z, меняя высоту и скорость вращения под действием горизонтальной проекции момента силы $M_{O\,\text{г}} = mgl$.

Глава 6

Система центра масс

Система отсчета, жестко связанная с центром масс системы частиц и движущаяся поступательно относительно инерциальной системы отсчета, называется системой центра масс или Ц-системой. ИСО, связанная с наблюдателем, тогда называется лабораторной или Л-системой.

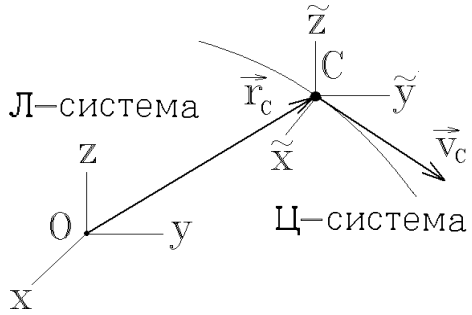

Рис.6.1

Ц-система представляет интерес в тех случаях, когда исследуется не движение системы частиц, как целого, а **относительное движение** частиц в системе. Все величины в Ц-системе будут обозначаться надстрочным значком "~" ("тильда"). Начало отсчета Ц-системы обычно совмещают с центром масс С системы частиц (рис.6.1).

1. Импульс системы частиц

Так как, согласно формуле (5.4), для системы частиц с массой $m = \sum m_i$ импульс $\vec{P} = m\vec{v}_C$, а в Ц-системе $\tilde{\vec{v}}_C = 0$, то импульс системы частиц в Ц-системе равен нулю, т.е. $\boxed{\tilde{\vec{P}} = 0}$.

И еще одно следствие этих выражений: так как для замкнутой системы частиц $\vec{P} = \text{const}$ и, следовательно, $\vec{v}_C = \text{const}$, то **Ц-система, связанная с замкнутой системой частиц, – инерциальная** (центр масс С **незамкнутой** системы частиц движется ускоренно, и, как легко увидеть из рис.6.1, соответствующая Ц-система будет **неинерциальной**).

Пример: система двух частиц.

Импульсы частиц в Л-системе будут: $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ и $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$, а в Ц-системе: $\tilde{\vec{p}}_1 = m_1\tilde{\vec{v}}_1 = m_1\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_C\right)$ и $\tilde{\vec{p}}_2 = m_2\tilde{\vec{v}}_2 = m_2\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_C\right)$.

Так как, согласно формуле (5.4), $\vec{v}_C = \dfrac{\vec{P}}{m} = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$, то

$$\tilde{\vec{p}}_1 = \mu\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) \quad \text{и} \quad \tilde{\vec{p}}_2 = \mu\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right),$$

где величина $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ называется приведенной массой.

Если к тому же учесть, что $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{1\,\text{отн}}$ – относительная скорость первой частицы относительно второй, то окончательно будем иметь:

$$\boxed{\tilde{\vec{p}}_i = \mu \vec{v}_{i\,\text{отн}}} \quad \text{и} \quad \boxed{\tilde{\vec{p}}_1 = -\tilde{\vec{p}}_2 .}$$

Итак, **импульс частицы в Ц-системе равен произведению приведенной массы на относительную скорость.**

2. Энергия системы частиц

2.1. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия системы частиц с общей массой m в Л-системе, согласно определению (5.10),

$$K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i}{2}\left(\tilde{\vec{v}}_i + \vec{v}_C\right)^2 =$$

$$= \sum \frac{m_i \tilde{\vec{v}}_i^2}{2} + \vec{v}_C \sum m_i \tilde{\vec{v}}_i + \sum \frac{m_i \vec{v}_C^2}{2} = \tilde{K} + \frac{m \vec{v}_C^2}{2},$$

так как второе слагаемое в выражении для K в силу того, что $\sum m_i \tilde{\vec{v}}_i = \tilde{\vec{P}}$, обращается в нуль.

Итак, энергия системы частиц в Л-системе

$$\boxed{K = \tilde{K} + \frac{m v_C^2}{2}.} \qquad (6.1)$$

Отсюда следует, что наименьшее значение, равное $\tilde{K}$, кинетическая энергия системы частиц имеет в Ц-системе!

Пример: кинетическая энергия двух частиц в Ц-системе

$$\tilde{K} = \frac{m_1 \tilde{\vec{v}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \tilde{\vec{v}}_2^2}{2} = \frac{\tilde{\vec{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\tilde{\vec{p}}_2^2}{2m_2} = \frac{\mu^2 v_{\text{отн}}^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2}.$$

2.2 Полная механическая энергия

На систему частиц могут действовать как внешние, так и внутренние силы. Собственная потенциальная энергия (энергия взаимодействия частиц друг с другом) зависит только от взаимного расположения частиц сис-

системы и поэтому одинакова во всех системах отсчета: $U_{\text{соб}} = \tilde{U}_{\text{соб}}$. Она связана с внутренними консервативными силами.

Полная механическая энергия системы частиц, согласно (5.11),

$$E = K + U_{\text{соб}} + U_{\text{внеш}} = \tilde{E} + \frac{mv_C^2}{2} + U_{\text{внеш}}, \qquad (6.2)$$

где энергия $\tilde{E} = \tilde{K} + \tilde{U}_{\text{соб}}$ называется <u>внутренней механической энергией</u> системы.

Если между частицами, т.е. **внутри** системы, начнут действовать консервативные силы, или произойдут какие-либо процессы, связанные с изменением механической энергии, то меняться будет только внутренняя механическая энергия $\tilde{E}$.

Еще раз напомним, что сумма **внутренних** сил (консервативных и неконсервативных равна нулю и не может изменить скорость $\vec{v}_C$ центра масс системы. Величина и направление $\vec{v}_C$ будут меняться только под действием внешних сил: $m\dfrac{d\vec{v}_C}{dt} = -\text{grad}\, U_{\text{внеш}} + \vec{F}_{\substack{\text{внеш}\\ \text{неконс}}}$.

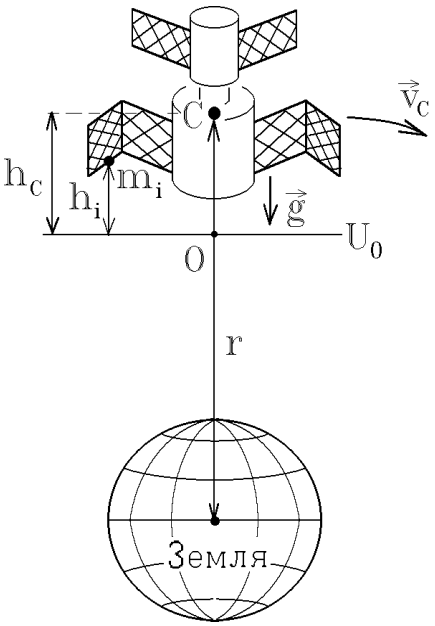

Рис.6.2

Пример: рассмотрим движение космической станции по орбите (рис.6.2).

При малых размерах станции на все ее участки действует внешняя сила тяжести $m_i\vec{g}$, где $\vec{g}$ практически одинаково. Согласно определению (3.6),

$$U_{\text{внеш}} - U_0 = -\sum_i \int_0^{h_i} \left(-m_i g\right) dh_i =$$

$= g\sum_i m_i h_i = mgh_C$, где координата (высота) h_i частицы m_i отсчитывается относительно уровня $h = 0$ близкого к станции, чтобы можно было считать $\vec{g} = \text{const}$.

Потенциальная энергия системы в однородном поле сил тяжести определяется по высоте h_C ее центра масс.

В Ц-системе $\tilde{h}_C = 0$ и $U_{\text{внеш}} = U_0 = -G\dfrac{Mm}{r}$, где r – радиус орбиты, M – масса Земли.

Из-за действия сил трения любое движение космонавтов или других тел на борту станции сопровождается уменьшением механической энергии. Но уменьшаться будет только внутренняя энергия $\tilde{E}$ (что приводит к затуханию движения **внутри** станции). Изменить скорость $\vec{v}_C$, уменьшить радиус орбиты и упасть на Землю по этой причине станция не может!

Однако на станцию может действовать **внешняя** диссипативная сила трения со стороны очень разреженных верхних слоев атмосферы, и именно эта сила приводит к постоянному уменьшению радиусов орбит всех искусственных спутников. Если **внутри** станции произойдет взрыв, но осколки не пробьют обшивку, то за счет химической энергии возрастет энергия $\tilde{E}$ (при взрывах сохраняется импульс $\vec{P}$, но не сохраняется механическая энергия!), но опять не изменятся ни радиус орбиты, ни скорость $\vec{v}_C$.

3. Момент импульса системы

3.1. Суммарный момент внешних сил

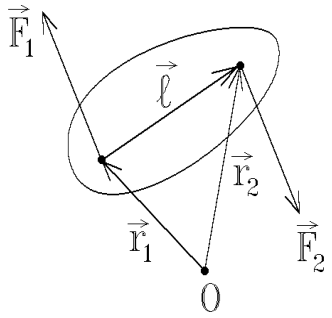

Рис.6.3

В предыдущей главе было показано (формула (5.14)), что при равенстве нулю результирующей внешних сил $\vec{F}$ суммарный момент внешних сил не зависит от выбора точки О.

Примером может служить <u>пара сил</u> – две силы, одинаковые по величине, противоположные по направлению и не направленные вдоль одной прямой (рис.6.3).

Так как $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, то

$\vec{M} = \left[\vec{r}_1, \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2, \vec{F}_2\right] = \left[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{F}_1\right] = \left[\vec{l}, \vec{F}_1\right]$. Таким образом, момент пары сил, действительно, не зависит от выбора точки О и равен произведению силы на кратчайшее расстояние между ними (плечо).

Можно сделать два важных вывода.

1) В Ц-системе система частиц покоится как целое ($\tilde{\vec{v}}_C = 0$), и поэтому $\vec{F} = \vec{F}_{\text{внеш}} + \vec{F}_{\text{ин}} = 0$. Следовательно, в Ц-системе суммарный мо-

мент внешних сил (включая силы инерции!) не зависит от выбора точки: $\vec{M}_{\mathrm{O}} = \vec{M}_{\mathrm{O}'}$.

2) В Ц-системе момент сил инерции относительно центра масс равен нулю (это связано с тем, что Ц-система движется **поступательно**).

Действительно, $\vec{M}_C^{\text{ин}} = \sum\left[\tilde{\vec{r}}_i, \left(-m_i \vec{a}_C\right)\right] = \left[\vec{a}_C, \sum m_i \tilde{\vec{r}}_i\right] = 0$, так как начало отсчета совпадает с центром масс ($\tilde{\vec{r}}_C = 0$).

3.2. Собственный момент импульса системы

Связь между моментами импульса относительно двух произвольных точек О и O' может быть найдена из элементарных вычислений (так же, как и для моментов сил): так как $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i{}'$ (рис.6.4), то

$$\vec{L}_O = \sum\left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right] = \sum\left[\vec{r}_i{}', \vec{p}_i\right] + \left[\vec{r}_C, \sum \vec{p}_i\right], \text{ откуда}$$

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_{O'} + \left[\vec{r}_C, \vec{P}\right]},$$

где $\vec{P}$ – полный импульс системы частиц.

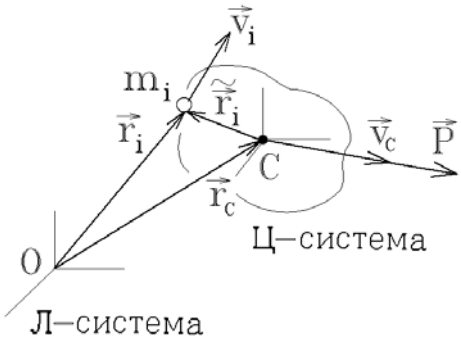

Рис.6.4

Вывод: если полный импульс системы частиц равен нулю, то момент импульса не зависит от точки, относительно которой его определяют! Таким образом, **в Ц-системе, где $\tilde{\vec{P}} = 0$, момент импульса не зависит от точки,** т.е. $\tilde{\vec{L}}_O = \tilde{\vec{L}}_{O'} = \tilde{\vec{L}}$ и называется <u>собственным моментом импульса</u> системы.

3.3. Связь моментов импульса в Л- и Ц-системах

Пусть в Л-системе момент импульса $\vec{L}$ определен относительно точки О (рис.6.4). Так как в Ц-системе момент импульса не зависит от выбора начала отсчета, то его можно вычислить относительно той же точки О:

$$\tilde{\vec{L}} = \sum_i m_i \left[\tilde{\vec{r}}_i, \tilde{\vec{v}}_i\right] = \sum_i m_i \left[\vec{r}_i, \tilde{\vec{v}}_i\right].$$

Тогда, используя соотношение $\vec{v}_i = \tilde{\vec{v}}_i + \vec{v}_{\mathrm{C}}$, находим

$$\vec{L} = \sum m_i \left[\vec{r}_i, \vec{v}_i\right] = \sum m_i \left[\vec{r}_i, \tilde{\vec{v}}_i\right] + \sum m_i \left[\vec{r}_i, \vec{v}_C\right].$$

Первое слагаемое в этом выражении – это собственный момент импульса $\tilde{\vec{L}}$. Второе преобразуется к виду $\sum m_i\left[\vec{r}_i,\vec{v}_C\right]=\left[m\vec{r}_C,\,\vec{v}_C\right]=\left[\vec{r}_C,\vec{P}\right]$. В итоге получаем:

$$\boxed{\vec{L}=\tilde{\vec{L}}+\left[\vec{r}_C,\,\vec{P}\right]} \quad – \qquad (6.3)$$

момент импульса в Л-системе равен собственному моменту импульса плюс момент импульса, обусловленный движением системы, как целого.

3.4. Уравнение моментов в Ц-системе

Так как уравнение моментов $\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$ справедливо в любой системе отсчета, то в Ц-системе его можно записать в виде

$$\boxed{\frac{d\tilde{\vec{L}}}{dt}=\vec{M}_C}, \qquad (6.4)$$

так как в Ц-системе $\vec{M}$ не зависит от точки, то его удобнее записывать относительно центра масс, поскольку в этом случае в $\vec{M}_C$ не включаются силы инерции, момент которых относительно центра масс равен нулю.

В частности, если $\vec{M}_C=0$, то $\tilde{\vec{L}}=\text{const}$ – закон сохранения момента импульса в системе центра масс.

Как следует из соотношения (6.4), в проекциях на ось z, проходящую через центр масс, уравнение моментов принимает вид:

$$\boxed{\frac{d\tilde{L}_z}{dt}=M_{Cz}.} \qquad (6.5)$$

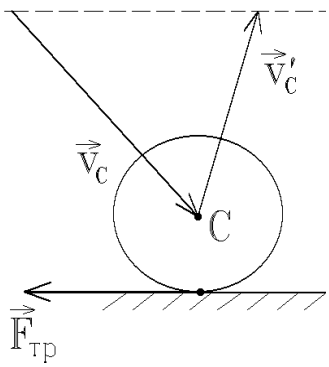

Рис.6.5

Пример: резиновый мяч движется поступательно и **упруго** отскакивает от пола. При этом вертикальная составляющая скорости центра масс $\vec{v}_C$ не меняется по величине, но изменяется по направлению. В момент удара возникает горизонтальная составляющая силы трения сцепления (рис.6.5). Работы эта внешняя сила $\vec{F}_{тр}$ не совершает (точка касания не проскальзывает), и полная механическая энергия не меняется, хотя горизонтальная составляющая $\vec{v}_C$ под действием силы трения уменьшается!

Дело в том, что момент силы приводит к возникновению собствен-

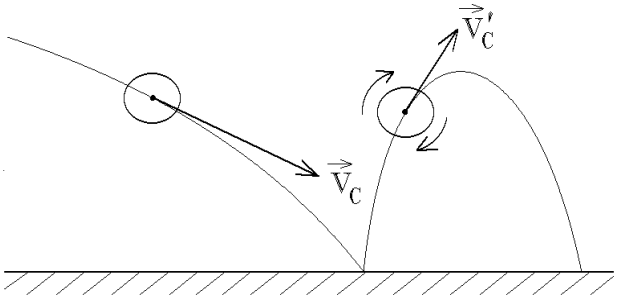

Рис.6.6

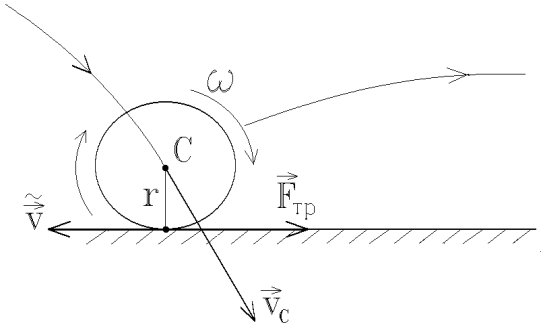

Рис.6.7

ного момента импульса: мяч после отскока будет вращаться вокруг своей оси (рис.6.6).

Дополнительно подкручивая мяч, можно получить неожиданные траектории отскока. Если мяч в момент удара вращается так, как показано на рис.6.7, и скорость движения нижней точки относительно центра масс $\tilde{v} = \omega r$ превышает горизонтальную составляющую скорости центра масс, то сила трения сцепления увеличивает скорость $\vec{v}_C$, а ее момент – замедляет вращение мяча. Мяч после удара полетит быстрее и по более пологой траектории.

4. Столкновения

Столкновением называется кратковременное взаимодействие частиц или тел, при котором происходит изменение их движения (траекторий). Столкновения могут быть **парными** (сталкиваются две частицы) – это наиболее простой случай, тройными (три частицы) – такие часто встречаются в физике газового разряда, коллективными (множество частиц) – это обычный случай в физике высокоионизированной плазмы.

Рассмотрим далее парные столкновения.

В любом случае – действуют на систему частиц внешние силы и силы инерции или нет – за очень малое время столкновения они не успевают изменить импульс $\vec{P}$ системы. Поэтому непосредственно перед столкновением и сразу после него частицы можно рассматривать как свободные (их называют асимптотически свободными).

Силы взаимодействия между частицами действуют только в момент максимального сближения (соударения), практически мгновенно. Можно считать, что в этот момент образуется промежуточная частица с массой $m = \sum m_i$ и импульсом $\vec{P}$ всей системы. Затем промежуточная частица превращается в разлетающиеся частицы.

В задачах ядерной физики разлетающиеся после соударения частицы

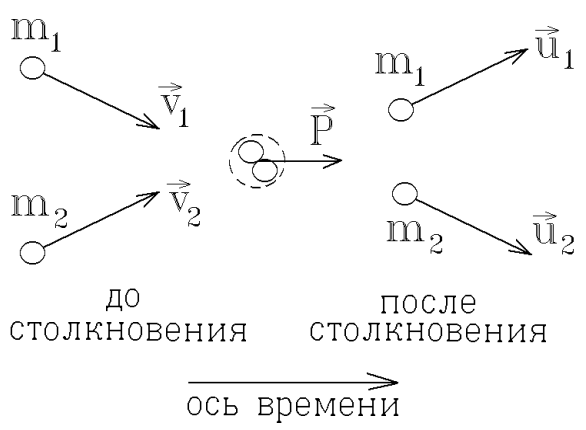

Рис.6.8

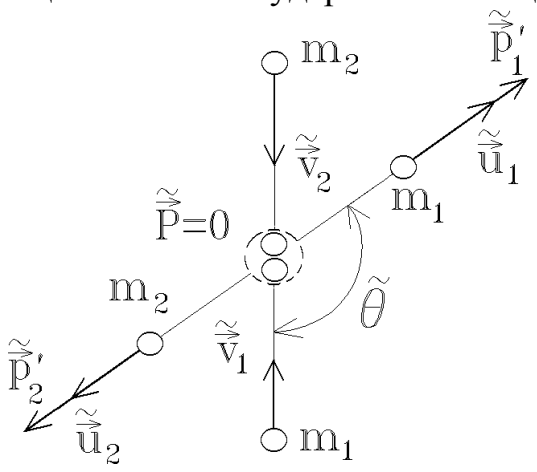

Рис.6.9

могут отличаться от сталкивающихся. На рис.6.8 процесс столкновения в Л-системе развернут во времени (здесь $\vec{v}_i$ – скорости частиц до удара, а $\vec{u}_i$ – после удара). На рис.6.9 этот же процесс изображен в Ц-системе.

Различают три типа парных столкновений: абсолютно неупругие, упругие и просто неупругие (промежуточный случай).

Абсолютно неупругие столкновения.

Абсолютно неупругим называется столкновение, в результате которого частицы **слипаются** и дальше движутся как единое целое (промежуточная частица на рис.6.8 не распадается).

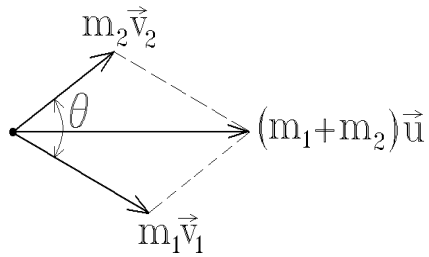

Рис.6.10

Пусть абсолютно неупругое столкновение испытывают две частицы с массами m_1 и m_2, движущиеся в Л-системе со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, направленными под некоторым произвольным углом θ друг к другу (рис.6.10). Обозначим скорость после столкновения через $\vec{u}$; ее величина и направление определяются законом сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

откуда

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \vec{v}_C,$$

т.е. скорость слипшихся частиц равна скорости центра масс системы.

При неупругом столкновении происходит превращение (частичное или полное) механической энергии шаров в тепловую. Так как в Ц-системе частицы после столкновения покоятся, то изменение внутренней энергии системы, согласно формуле (6.1), будет

$$\mathbb{Q} = \tilde{K} = \frac{\mu V_{\text{отн}}^2}{2} \quad .$$

Упругие столкновения.

Упругим столкновением называется такое взаимодействие, при котором не выделяется тепло, иначе говоря – **механическая энергия системы сохраняется**.

Поэтому скорости частиц после столкновения $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ (в Л-системе) определяются из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \\ &\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (6.6)$$

Так как уравнений всего три (векторный закон сохранения импульса можно записать в виде двух проекций на оси x и y в плоскости движения частиц), а неизвестных – четыре ($u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}$), то однозначного решения задачи система уравнений (6.6), в общем случае не дает: для этого необходимо знать закон взаимодействия частиц и решать совместно уравнения движения. Тем не менее, законы сохранения позволяют получить некоторые общие результаты, как, например, возможные интервалы углов разлета частиц после столкновения.

Наиболее просто это сделать в Ц-системе, где $m_2\tilde{\vec{v}}_2 = -m_1\tilde{\vec{v}}_1$ и $m_2\tilde{\vec{u}}_2 = -m_1\tilde{\vec{u}}_1$. Возводя в квадрат обе части этих равенств и подставляя их в уравнение закона сохранения энергии из (6.6), получим: $\tilde{u}_1 = \tilde{v}_1$ и $\tilde{u}_2 = \tilde{v}_2$.

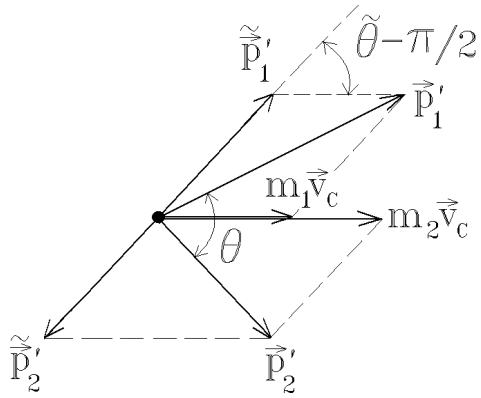

Рис.6.11

Величины скоростей двух упруго сталкивающихся частиц в Ц-системе не меняются! Изменяются только направления этих скоростей. После упругого удара частица может лететь в Ц-системе под любым углом $0 < \tilde{\theta} \le \pi$ к прежнему направлению движения (рис.6.9).

По углу отклонения $\tilde{\theta}$ в Ц-системе, пользуясь правилом сложения векторов, можно определить угол разлета θ частиц в Л-системе. На рис.6.11 показан случай $m_1 < m_2$. В некоторых случаях система уравнений (6.6) позволяет получить простое решение. Например:

1) *удар шаров в бильярде*.

Пусть движущийся шар налетает на покоящийся (в случае движения обоих шаров перейдем в Л-систему, где один шар покоится, рис.6.12). Возведем в квадрат обе части векторного закона сохранения импульса:

$$(\vec{p}_1)^2 = (\vec{p}_1^{\,'} + \vec{p}_2^{\,'})^2 = (\vec{p}_1^{\,'})^2 + (\vec{p}_2^{\,'})^2 + 2\vec{p}_1^{\,'}\vec{p}_2^{\,'} .$$

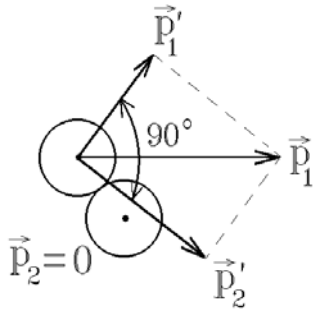

Рис.6.12

А так как в случае одинаковых масс $m_1 = m_2$ из закона сохранения энергии следует $p_1^2 = (p_1^{'})^2 + (p_2^{'})^2$, то получаем: $\vec{p}_1^{\,'} \cdot \vec{p}_2^{\,'} = 0$ – импульсы шаров после удара ортогональны. После упругого касательного соударения угол разлета шаров всегда равен 90°! В этом примере можно не учитывать качения шаров, если они движутся без проскальзывания, т.е. второй шар после удара сразу же начнет катиться (иначе часть механической энергии теряется из-за трения, и угол разлета будет другим).

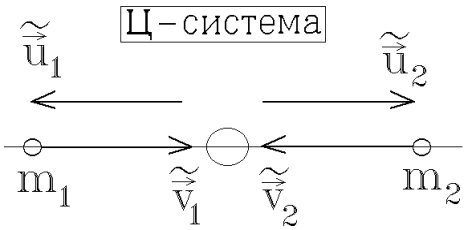

Рис.6.13

2) *Лобовое столкновение* (частицы до и после столкновения движутся по одной прямой). В Ц-системе частицы, столкнувшись, разлетятся с прежними по величине, но обратными по направлению скоростями (рис.6.13): $\tilde{\vec{u}}_i = -\tilde{\vec{v}}_i$; $\theta = \pi$. Переходя в Л-систему, получим:

$\vec{u}_i = \tilde{\vec{u}}_i + \vec{v}_C = -\tilde{\vec{v}}_i + \vec{v}_C = -(\vec{v}_i - \vec{v}_C) + \vec{v}_C = 2\vec{v}_C - \vec{v}_i$. Итак, скорости частиц после **упругого лобового** столкновения:

$$\boxed{\vec{u}_i = 2\vec{v}_C - \vec{v}_i} \qquad (i = 1,\ 2)\,. \qquad (6.7)$$

Если сталкиваются одинаковые частицы ($m_1 = m_2$), из равенств (6.7) получаем: $\vec{v}_C = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$, откуда $\vec{u}_1 = 2\vec{v}_C - \vec{v}_1 = \vec{v}_2$ и $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$, т.е. одинаковые частицы при упругом столкновении просто **обмениваются скоростями.**

Глава 7.

Динамика твердого тела

1. Движение твердого тела

Под твердым телом в механике понимается недеформируемое тело. Его частицы не могут передвигаться относительно друг друга и относительно центра масс. Поэтому в Ц-системе единственным возможным движением твердого тела может быть только вращение тела как целого вокруг оси, проходящей через центр масс С.

Тем самым доказано утверждение, сделанное в главе 1:

> произвольное движение твердого тела можно представить, как совокупность поступательного движения со скоростью центра масс $\vec{v}_C$ и вращательного движения с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, проходящей через центр масс (рис.7.1).

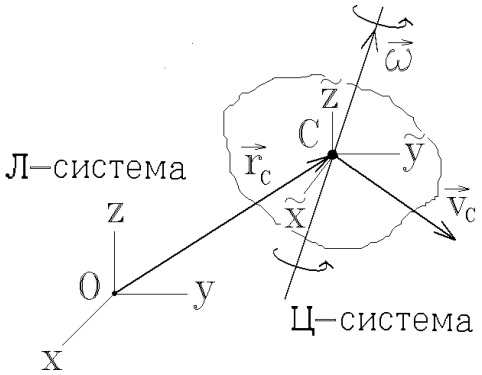

Рис.7.1

Следовательно, в инерциальной Л-системе отсчета уравнения произвольного движения твердого тела можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}} \quad \text{и} \quad \frac{d\tilde{\vec{L}}}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{внеш}} \ . \qquad (7.1)$$

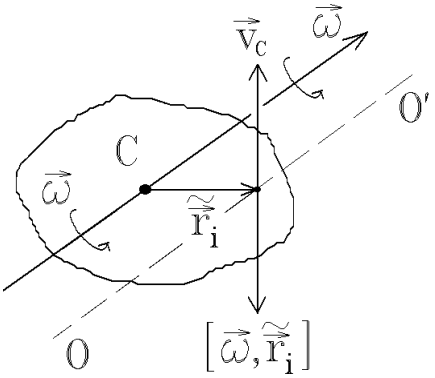

Рис.7.2

Первое из этих **векторных** уравнений описывает поступательное движение тела, второе – вращательное (оно записано в Ц-системе, и речь идет о собственном моменте импульса $\tilde{\vec{L}}$, но в следующих параграфах значок "тильда" использоваться не будет, чтобы не перегружать формулы).

Иногда уравнение вращательного движения записывают относительно <u>мгновенной оси</u> <u>вращения</u>. Эта ось OO' на рис.7.2 образована точками тела, которые в данный момент времени неподвижны в используемой Л-системе отсчета, для них,

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \left[\vec{\omega}, \vec{r}_i\right] = 0 \ .$$

Так, при качении без проскальзывания (рис.7.3) мгновенная ось вра-

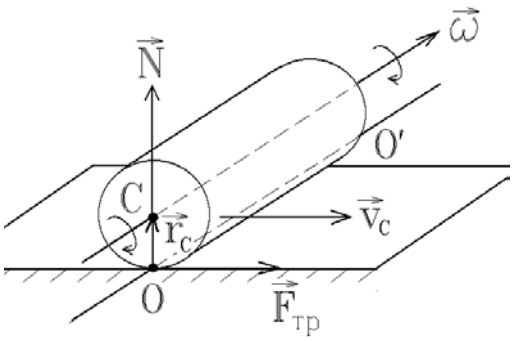

Рис.7.3

щения OO' образована точками касания катящегося тела и твердой поверхности.

Если связать начало координат Л-системы с мгновенной осью, то движение твердого тела определяется только уравнением вращательного движения:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{внеш } 0}, \text{ где}$$

$$\vec{L}_0 = \tilde{\vec{L}} + m\left[\vec{r}_C, \vec{v}_C\right]. \qquad (7.2)$$

Иногда это удобно. Например, моменты неизвестных сил трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и реакции $\vec{N}$, приложенных к мгновенной оси при качении тела (рис.7.3), окажутся равными нулю и не войдут в уравнение движения (7.2).

Но в последующий момент времени мгновенная ось вращения сместится. К тому же при произвольном движении твердого тела она остается параллельной оси вращения, проходящей через центр масс, и вместе с этой осью меняет свою ориентацию (направление) в пространстве. Так, на рис.7.4 показано кружение вращающегося предмета, проскальзывающего по твердой поверхности. Пользоваться мгновенной осью вращения уже неудобно, поэтому в общем случае для описания движения твердого тела используют инерциальную Л-систему отсчета и решают два векторных уравнения (7.1)

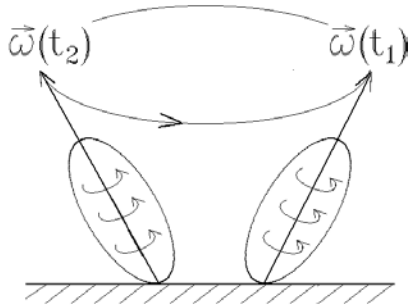

Рис.7.4

Такая задача очень сложна (классическая монография Ф.Клейна и А.Зоммерфельда "Теория волчков" состоит из четырех объемистых томов). Поэтому в данной главе более или менее подробно будут рассмотрены только некоторые наиболее простые частные случаи вращательного движения.

2. Вращение тела относительно закрепленной оси

Рассмотрим вращение тела вокруг закрепленной, т.е. неподвижной в пространстве оси (вообще говоря, не проходящей через центр масс). Инерциальную систему отсчета всегда будем выбирать так, чтобы ее ось Oz совпадала с закрепленной осью вращения (рис.7.5).

В главе 4 был введен момент импульса частицы относительно закрепленной оси z. Рассматривая твердое тело, как систему частиц, обобщим

формулу (4.5) на случай произвольного твердого тела. Момент импульса тела относительно закрепленной оси будет:

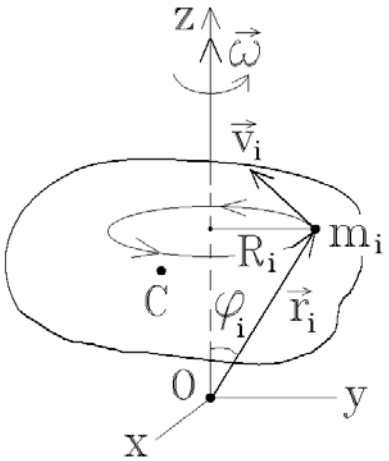

Рис.7.5

$$L_z = \sum_i m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_i m_i R_i^2 = I\omega \quad ,$$

где величина $\boxed{I = \sum_i m_i R_i^2}$ называется <u>моментом инерции тела относительно оси</u> (R_i – расстояние i-ой точки от оси вращения).

Таким образом, **момент импульса тела относительно закрепленной оси равен произведению момента инерции на угловую скорость:**

$$\boxed{L_z = I\omega} . \qquad (7.3)$$

Проекция второго из уравнений (7.1) на ось вращения z дает:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(I\omega) = \sum M_z . \qquad (7.4)$$

Так как для абсолютно твердого тела $I = \text{const}$, то уравнение (7.4) еще более упрощается и принимает вид:

$$\boxed{I\frac{d\omega}{dt} = I\varepsilon = \sum M_z} \quad – \qquad (7.5)$$

произведение момента инерции на угловое ускорение равно результирующему моменту внешних сил относительно закрепленной оси вращения.

Уравнение (7.5) называется <u>основным уравнением вращательного движения</u> твердого тела относительно закрепленной оси.

Кстати, из формулы (7.5) следует, что момент инерции играет роль меры инертности при вращательном движении тела (как масса – при поступательном движении).

Как следует из уравнения (7.5):

если моменты всех сил относительно оси уравновешены, т.е. $\sum M_z = 0$, то момент импульса тела (или системы тел) относительно той же оси сохраняется: $L_z = I\omega = \text{const}$. Это частный случай закона сохранения момента импульса.

Примеры применения этого закона иллюстрируют рисунки 7.6 – 7.8.

1) Вращение фигуриста (так называемый "волчок") (рис.7.6): вращение начинается при вытянутых в стороны руках, после чего фигурист прижимает руки к туловищу. В результате его момент инерции уменьша-

ется, а угловая скорость увеличивается.

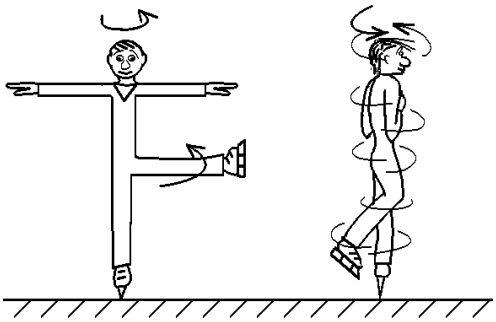

Рис.7.6

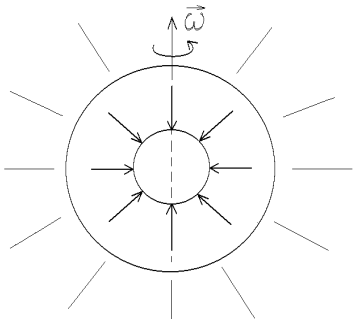

Рис.7.7

2) Вращение пульсара (рис.7.7): при ослаблении термоядерного процесса в недрах звезд с массой, превышающей массу Солнца в $1,4 \div 2,5$ раз, гравитационные силы взрывным образом сжимают внутреннюю часть звезды в шар радиусом ~ 10 км. Электроны при этом "вдавливаются" в ядра атомов, образуя вместе с протонами незаряженные частицы – нейтроны (отсюда другое название пульсаров – нейтронные звезды). Так как момент инерции медленно вращавшейся звезды резко уменьшается, то угловая скорость увеличивается настолько сильно, что период вращения пульсара составляет всего ~ 1 с !.

3) Два стержня соединены растянутой невесомой пружинкой и прижаты к гладкой горизонтальной поверхности (рис.7.8,а). Отпускаем стержни, и когда пружинка сожмется, пережигаем ее. Оба стержня будут вращаться по часовой стрелке (рис.7.8,б). Но силы упругости направлены вдоль одной линии, их суммарный момент равен нулю, и первоначально равный нулю момент импульса системы измениться не может!

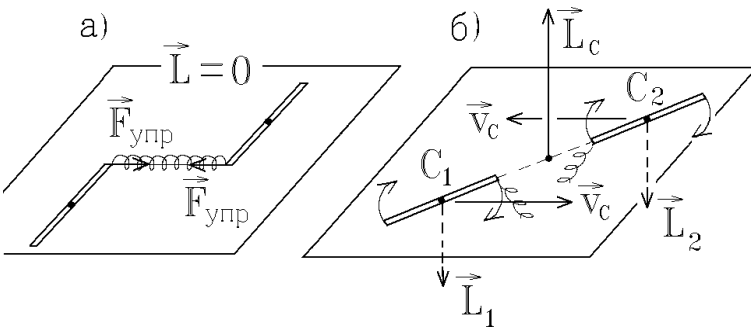

Рис.7.8

Действительно, кроме вращения стержней вокруг собственных центров масс, следует учесть движение этих центров масс, создающее противоположно направленный момент импульса $\vec{L}_C$ (рис.7.8,б). В сумме $\vec{L}_C + \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = 0$.

Если же $M_z \neq 0$, то из уравнения (7.5) следует:

$$\Delta L_z = I\Delta\omega = \int_{t_1}^{t_2} M_z\, dt \quad -$$

изменение момента импульса за время $\Delta t = t_2 - t_1$ равно <u>импульсу момента силы</u> за то же время.

3. Момент инерции и его вычисление

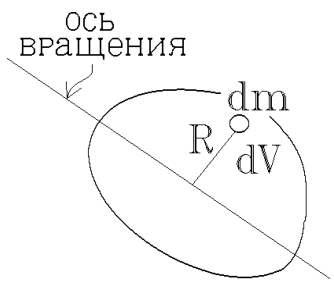

Рис.7.9

Согласно определению, **момент инерции тела относительно оси равен сумме произведений масс его материальных точек на квадраты их расстояний до оси вращения** или

$$I = \sum m_i R_i^2 .$$

Но так как масса твердого тела распределена непрерывно, то сумму следует заменить на интеграл. Для вычисления момента инерции тело разбивают на бесконечно малые объемы dV с массой $dm = \rho\, dV$ (рис.7.9). Тогда

$$I = \int R^2 dm = \int R^2 \rho dV \quad , \qquad (7.6)$$

где R – расстояние элемента dV от оси вращения.

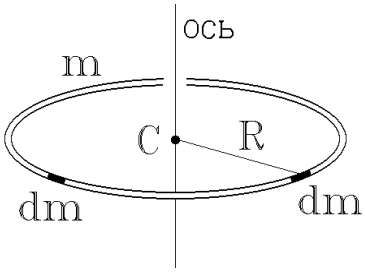

Рис.7.10

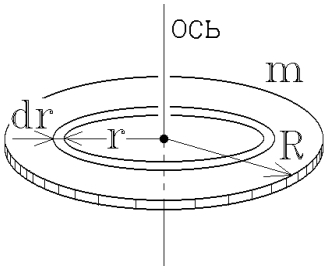

Рис.7.11

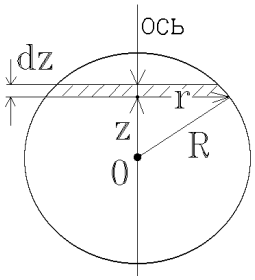

Рис.7.12

Рассмотрим несколько примеров вычисления момента инерции симметричных тел относительно оси, проходящей через центр масс.

1) Начнем с тонкого кольца массы m и радиуса R (рис.7.10). Так как R=const для оси, перпендикулярной плоскости кольца, то

$$I_{\text{кольца}} = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2 . \qquad (7.7)$$

2) Тонкий диск массы m и радиуса R. Выделим на диске бесконечно узкое кольцо радиуса r, ширины dr и массы $dm = \rho 2\pi r\, dr$, где $\rho = m/(\pi R^2)$ – масса единицы поверхности (рис.7.11). Момент инерции

этого кольца, согласно формуле (7.7), будет $dI = r^2 dm = 2mr^3 dr / R^2$. Суммируя (интегрируя) по всему диску, находим для оси, перпендикулярной плоскости диска:

$$I_{\text{диска}} = \int dI = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2}. \qquad (7.8)$$

3) Сплошной шар радиуса R и массы m (рис.7.12). Выделим в шаре бесконечно тонкий диск толщины dz, радиуса r и массы $dm = \rho\pi r^2 dz$, перпендикулярный к оси вращения, $\rho = m \Big/ \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ – обычная объемная плотность. Так как $r^2 = R^2 - z^2$, то, согласно формуле (7.8), момент инерции такого диска

$dI = dm \cdot r^2 / 2 = \pi\rho r^4 dz / 2 = (\pi\rho / 2)(R^2 - z^2)^2 dz$. Отсюда

$$I_{\text{шара}} = \int_{-R}^{R} dI = \frac{\pi\rho}{2} \int_{-R}^{R} \left(R^4 - 2R^2 z^2 + z^4\right) dz = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5} mR^2. \qquad (7.9)$$

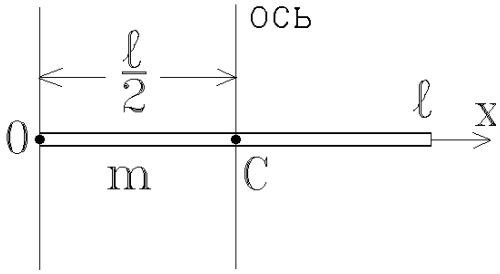

Рис.7.13

4) В качестве самостоятельного упражнения докажите, что момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через середину стержня массы m и длины l, перпендикулярно ему (рис.7.13),

$$I_{\text{стержня}} = \frac{1}{12} ml^2. \qquad (7.10)$$

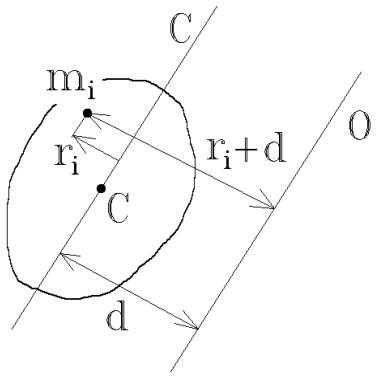

Рис.7.14

Если момент инерции I_C относительно оси, проходящей через центр масс, известен, то можно легко вычислить момент инерции относительно любой параллельной оси O, проходящей на расстоянии d от центра масс (рис.7.14). Как видно из этого рисунка, расстояния произвольной частицы твердого тела m_i от обеих осей равны соответственно r_i и $r_i + d$. Поэтому

$$I_0 = \sum_i m_i (r_i + d)^2 = \sum_i m_i r_i^2 + 2\sum_i m_i r_i d + \sum_i m_i d^2 \ ,$$

или $$\boxed{I_0 = I_C + md^2}, \qquad (7.11)$$

так как второе слагаемое в полученном выражении обращается в нуль в силу того, что $d = \text{const}$ и $2\sum_i m_i r_i d = 2d\sum_i m_i r_i = 2mr_C = 0$ (r_C – расстояние от оси С до центра масс). Соотношение (7.11) называется теоремой Штейнера:

> момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной ей и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями.

Примеры. Момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его край О (рис.7.13):

$$I_{0\ \text{стержня}} = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2. \qquad (7.12)$$

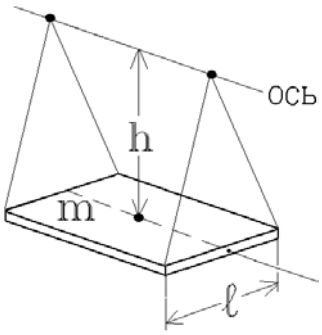

Рис.7.15

Момент инерции доски качелей массы m и ширины l относительно оси вращения (рис.7.15):

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + mh^2.$$

Интересным примером является конструкция гоночных машин – болидов, где тяжелый двигатель устанавливается как можно ближе к центру масс, т.е. посредине машины. Это делается для уменьшения момента инерции. Тогда, согласно уравнению (7.5), для поворота машины нужно приложить меньший момент сил, или же поворот происходит быстрее – машина становится "верткой".

4. Кинетическая энергия вращательного движения

Согласно формуле (5.10), кинетическая энергия вращающегося вокруг закрепленной оси твердого тела

$$\boxed{K_{\text{вращ}} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i\left(R_i\omega\right)^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}}. \qquad (7.13)$$

Дифференцируя выражение (7.13) по времени и используя уравнение (7.5), получим закон изменения кинетической энергии вращающегося вокруг закрепленной оси твердого тела:

$$\frac{dK_{\text{вращ}}}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{dt} = I\omega\varepsilon = M_z\omega \ –$$

скорость изменения кинетической энергии вращательного движения равна мощности результирующего момента сил относительно оси вращения.

Отсюда

$$dK_{\text{вращ}} = M_z \omega dt = M_z d\varphi \Rightarrow \Delta K \equiv K_2 - K_1 = \int_1^2 M_z d\varphi \,, \quad (7.14)$$

т.е. **изменение кинетической энергии вращательного движения равно работе момента сил.**

5. Плоское движение

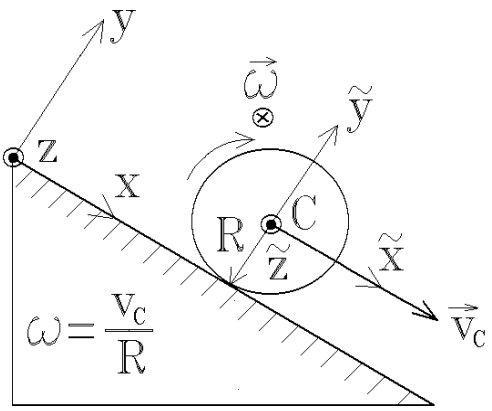

Рис.7.16

Движение твердого тела, при котором центр масс перемещается в фиксированной плоскости, а ось вращения тела, проходящая через его центр масс, остается перпендикулярной к этой плоскости, называется плоским движением. Типичный пример – качение симметричного тела (рис.7.16). Это движение можно свести к совокупности поступательного движения и вращения вокруг **неподвижной (закрепленной) оси,** так как в Ц-системе ось вращения, действительно, остается неподвижной. Поэтому плоское движение описывается упрощенной системой (7.1) двух уравнений движения:

$$\begin{cases} m\vec{a}_C = \vec{F}_{\text{внеш}}, \\ I\varepsilon = M_z. \end{cases} \quad (7.15)$$

Кинетическая энергия тела, совершающего плоское движение, согласно формуле (6.1), запишется в виде:

$$K_{\text{плоск}} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_i m_i \tilde{v}_i^2 = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\omega R_i\right)^2$$

и окончательно

$$\boxed{K_{\text{плоск}} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}}, \quad (7.16)$$

так как в данном случае $\tilde{v}_i$ – скорость вращения i -й точки вокруг неподвижной оси вращения в Ц-системе.

Пример: рассматривая упругое соударение одинаковых бильярдных шаров в §4 главы 6, мы не учли вращательного движения. При центральном ударе покоившемуся шару "2" передается энергия только поступательного движения катившегося шара "1". Поэтому сразу после удара шар "2" начнет скользить, а шар "1" – вращаться на месте (пробуксовывать) (рис.7.17). Согласно формуле (7.15), под действием сил трения и их моментов скорость $\vec{v}$ шара "2" начнет постепенно уменьшаться, а его вращение относительно центра – ускоряться. Для шара "1" – наоборот. В результате оба шара начнут катиться в направлении удара.

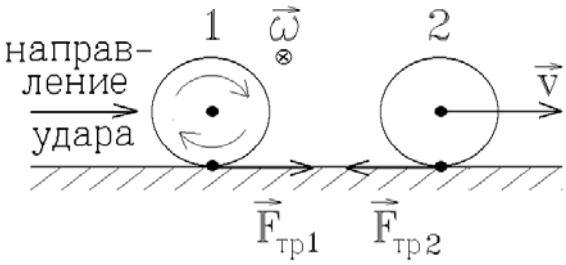

Рис.7.17

Можно сильно раскрутить легкий шар или мяч так, как показано на рис.7.18, и бросить его на поверхность со скоростью $\vec{v}_0$. Мяч будет проскальзывать, постепенно остановится и начнет катиться в обратную сторону, возвращаясь к бросившему его человеку.

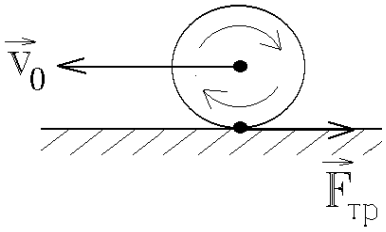

Рис.7.18

6. Тензор инерции

Рассмотрим теперь общий случай: вращение твердого тела вокруг незакрепленной оси (рис.7.1). Вычислим полный момент импульса тела. Так как, согласно формуле (1.16), $\vec{v}_i = \left[\vec{\omega}, \vec{r}_i\right]$, то

$$\vec{L} = \sum_i \left[\vec{r}_i,\ m_i\vec{v}_i\right] = \sum_i m_i \left[\vec{r}_i, \left[\vec{\omega}, \vec{r}_i\right]\right].$$

Раскроем двойное векторное произведение по формуле

$$\left[\vec{a},\ \left[\vec{b},\ \vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$$

Полагая $\vec{a} = \vec{r}_i$, $\vec{b} = \vec{\omega}$ и $\vec{c} = \vec{r}_i$, получим:

$$\boxed{\vec{L} = \sum_i m_i\vec{\omega}\ \left(\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i\right) - \sum_i m_i\vec{r}_i\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i\right)}. \qquad (7.17)$$

Первое слагаемое в этой формуле параллельно вектору, который по определению направлен вдоль оси вращения, тогда как второе – вообще говоря, направлено под некоторым углом к $\vec{\omega}$.

Поэтому **при вращении тела вокруг произвольной оси вектор**

момента импульса, вообще говоря, не параллелен вектору угловой скорости.

Запишем формулу (7.17) в проекциях на координатные оси:

$$L_x = \omega_x \sum_i m_i r_i^2 - \omega_x \sum_i m_i x_i^2 - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i =$$

$$= \omega_x \left[\sum_i m_i \left(r_i^2 - x_i^2 \right) \right] - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i$$

или

$$L_x = \omega_x I_{xx} + \omega_y I_{xy} + \omega_z I_{xz} \ , \ , \qquad (7.18)$$

где

$$I_{xx} = \sum_i m_i \left(r_i^2 - x_i^2 \right), \quad I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i \ , \qquad I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i \ .$$

Совершенно аналогично запишутся и две другие проекции:

$$\begin{aligned} L_y &= \omega_x I_{yx} + \omega_y I_{yy} + \omega_z I_{yz} \\ L_z &= \omega_x I_{zx} + \omega_y I_{zy} + \omega_z I_{zz} \end{aligned} \ , \qquad (7.19)$$

где величины I_{yx}, I_{yy} ,..., определяются аналогично I_{xy}, I_{xx} , ...

Таким образом, коэффициенты I_{mn} (индексы m и n принимают значения x, y, z) образуют квадратную матрицу:

$$I_{mn} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

которая преобразуется, как тензор, и называется <u>тензором момента инерции</u> или просто <u>тензором инерции</u>. Сами же коэффициенты I_{mn} являются компонентами тензора: I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – диагональными, остальные – недиагональными.

Как следует из их определения, если $I_{mn} = I_{nm}$ (т.е. $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{zy} = I_{yz}$) – недиагональные коэффициенты симметричны. Такой тензор называется симметричным.

В тензорных обозначениях формулы (7.18) и (7.19) запишутся очень компактно:

$$L_m = \sum_n I_{mn}\omega_n \ , \qquad \text{где} \ \ m,\ n = x,\ y,\ z\ .$$

Если к тому же договориться значок суммы $\sum$ не записывать, а по двум одинаковым индексам, встречающимся в произведении, производить суммирование, то формулы становятся компактными:

$$\boxed{L_m = I_{mn}\omega_n.} \qquad (7.20)$$

Кстати, с помощью специального симметричного тензора

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad m = n \\ 0 & \text{если} \quad m \neq n \end{cases},$$

называемого δ – <u>символом Кронекера</u>, можно записать общую формулу как для диагональных, так и для недиагональных компонентов тензора инерции, а именно:

$$I_{mn} = \sum_i m_i (r_{il}\ r_{il}\delta_{mn} - r_m r_n)\ , \quad \text{где} \quad m, n, l = x, y, z \quad . \ (7.21)$$

Если ось вращения совпадает с одной из осей координат, например, с осью z (рис.7.19), то из определения диагонального компонента тензора инерции следует:

$$I_{zz} = \sum_i m_i (r_i^2 - z_i^2\ ) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2\ ) = \sum_i m_i R_i^2$$

(здесь R_i – расстояние *i*-й частицы от оси вращения).

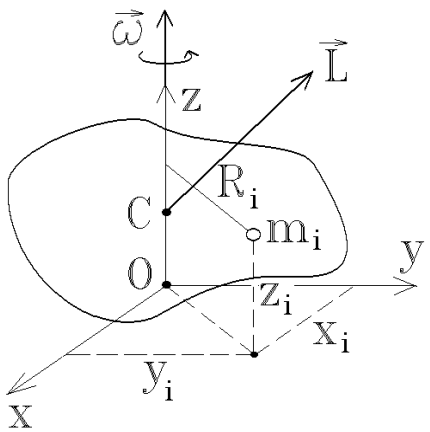

Рис.7.19

Отсюда видно, что **диагональные компоненты тензора инерции совпадают с ранее введенными моментами инерции *I* относительно закрепленной оси**. Поэтому, если ось вращения *Oz* закреплена, то $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$ и $L_z = I_{zz}\omega = I\omega$.

Однако если ось вращения не закреплена, то ее нельзя считать все время направленной вдоль фиксированной оси *Oz*, и необходимо вычислять все компоненты тензора инерции.

К счастью, любой симметричный тензор или матрицу можно диагонализировать, т.е. для любого тела можно выбрать три такие **взаимно перпендикулярные оси** x, y, z, для которых тензор инерции имеет вид:

$$I_{mn} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}, \qquad (7.22)$$

т.е. все недиагональные компоненты исчезают.

Такие оси называются главными осями инерции тела, а сохранившиеся диагональные компоненты тензора инерции называются главными моментами инерции. Проекции момента импульса на главные оси инерции имеют вид:

$$L_x = I_{xx}\,\omega_x\ , \qquad L_y = I_{yy}\,\omega_y\ , \qquad L_z = I_{zz}\,\omega_z\ .$$

Как следует из этих формул, даже в этом случае векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ не параллельны!

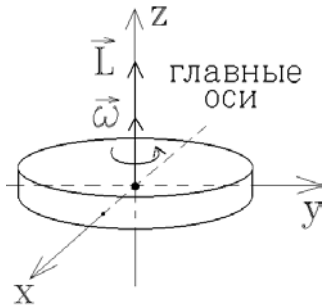

Рис.7.20

Если тело симметрично относительно поворота, то одна из главных осей инерции обязательно совпадает с осью симметрии (пусть это будет ось z), тогда как две другие – любые оси, перпендикулярные к оси z (рис.7.20).

Если тело вращается вокруг главной оси z (оси симметрии), то $L_x = L_y = 0$, $L_z = I_{zz}\,\omega$ и только в этом случае векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ будут параллельными, т.е. можно записать $\vec{L} = I\vec{\omega}$ и считать I скаляром. Следует заметить, что при работе приборов и механизмов такая ситуация вполне обычна (если, конечно, не рассматривать колесо на разболтанной оси, описывающее при вращении "восьмерки").

В заключение этого параграфа запишем в тензорных обозначениях кинетическую энергию тела, вращающегося вокруг произвольной оси:

$$K_{\text{вращ}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left[\vec{\omega}\ ,\ \ \vec{r}_i\right]^2 .$$

Но так как

$$\left[\vec{a},\ \vec{b}\right]\cdot\left[\vec{c},\ \vec{d}\right] = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right),\ \text{то}$$

$$\left[\vec{\omega},\vec{r}_i\right]^2 = \omega^2 r_i^2 - \left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i\right)^2 = \omega_m\,\omega_m\,r_{in}\,r_{in} - \omega_m\,r_{im}\,\omega_n\,r_{in} =$$

$$= \omega_m\omega_n\ \left(r_{il}\ \ r_{il}\ \ \delta_{mn} - r_{im}r_{in}\right).$$

Поэтому, с учетом формулы (7.21)

$$\boxed{K_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} I_{mn}\,\omega_m\,\omega_n \quad .}$$

Относительно главных осей эта же формула в развернутом виде выглядит так:

$$K_{\text{вращ}} = \frac{1}{2}\left(I_{xx}\,\omega_x^2 + I_{yy}\,\omega_y^2 + I_{zz}\,\omega_z^2\right).$$

7. Гироскопы и гироскопический эффект

7.1. Симметричные волчки и гироскопы

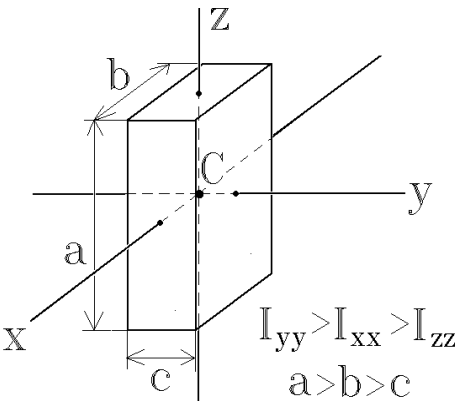

Рис.7.21

Любое вращающееся тело называется волчком. Свободный волчок – это тело, свободно движущееся в пространстве, или же тело, закрепленное в точке центра масс и способное поворачиваться вокруг этой точки в любом направлении.

Асимметричным называется волчок, у которого все три главных момента инерции различны. Такой волчок обладает интересной особенностью: если на него действует внешняя сила (например, сила тяжести), то вращение вокруг главных осей инерции, соответствующих максимальному и минимальному главным моментам инерции, будет устойчивым (ось вращения сохраняет свою ориентацию в пространстве). Вращение вокруг других осей, включая и третью главную ось инерции, – неустойчиво (волчок начнет кувыркаться). Попробуйте раскрутить и подбросить в воздух параллелепипед, изображенный на рис.7.21, и убедитесь в устойчивости вращения только вокруг осей C_y и C_z.

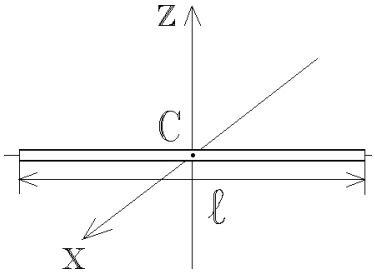

Рис.7.22

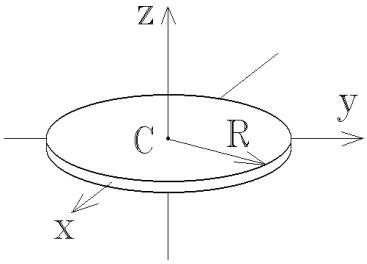

Рис.7.23

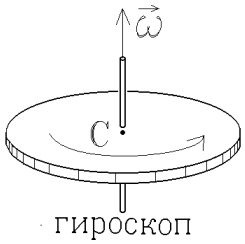

Рис.7.24

Тело, у которого два главных момента инерции совпадают, называется симметричным волчком (а в случае совпадения всех трех моментов

инерции $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ – шаровым волчком). Примеры симметричных волчков приведены на рис.7.22 (тонкий стержень) и на рис.7.23 (тонкий диск). Вращение таких волчков устойчиво вокруг любой главной оси инерции.

Гироскопом называется **массивный** симметричный волчок, вращающийся **с большой угловой скоростью** вокруг оси симметрии (рис.7.24). Но ось симметрии – это главная ось инерции; поэтому, **если она закреплена**, то направления векторов $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ совпадают.

Если же ось гироскопа сама поворачивается с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ (рис.7.25), то, как говорилось в предыдущем разделе, направления векторов $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ не совпадают. Однако, поскольку гироскоп вращается вокруг своей оси очень быстро, т.е. $\omega >> \omega_0$, то приближенно всегда можно считать, что **момент импульса гироскопа направлен по оси вращения (оси симметрии) параллельно** $\vec{\omega}$: $\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$

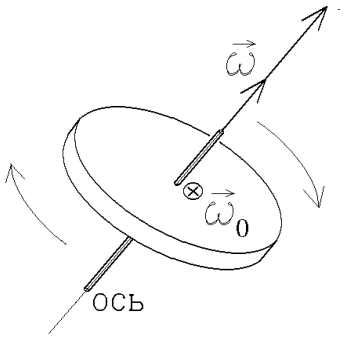

Рис.7.25

7.2. Свободный гироскоп

Рассмотрим сначала свободный гироскоп – волчок в карданном подвесе (рис.7.26). В таком подвесе кольца могут свободно поворачиваться вокруг осей AA' и BB', и ось гироскопа может принять любое направление, проходящее через его центр масс С.

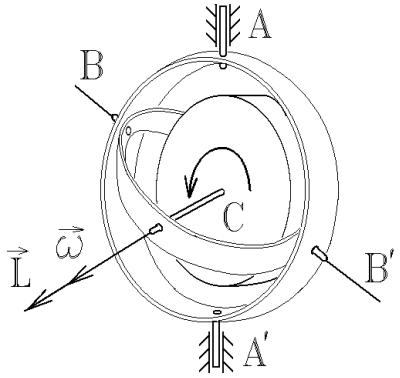

Рис.7.26

Приложим теперь к оси гироскопа (совпадающей с осью Oz, рис.7.27) пару сил $\vec{F}$, направленных вдоль оси Ox. Эти силы (точнее, их момент) стараются повернуть гироскоп вокруг оси Oy, но (совершенно неожиданно) гироскоп начинает поворачиваться вокруг оси Ox !

Объясним, почему так происходит. Так как момент пары сил $\vec{M}$ направлен по оси Oy (рис.7.27), то из уравнения динамики вращательного движения (уравнения моментов) $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ следует, что приращение

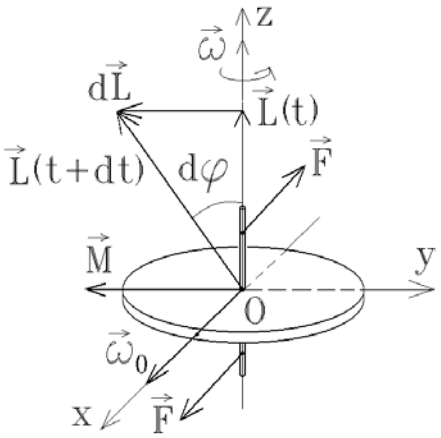

Рис.7.27

вектора момента импульса $d\vec{L}$ тоже направлено по оси Oy, т.е. за время dt вектор $\vec{L}$, а вместе с ним и ось гироскопа повернутся вокруг оси Ox на угол $d\varphi$, причем $\left|d\vec{L}\right| = Ld\varphi$. Подставляя $d\vec{L} = \vec{M}dt$, находим: $d\varphi = \dfrac{Mdt}{L}$ или $M = L\dfrac{d\varphi}{dt} = L\omega_0$ (поскольку $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega_0$ – угловая скорость вращения оси гироскопа). С учетом направлений векторов $\vec{M}$, $\vec{L}$ и $\vec{\omega}_0$ полученная формула может быть записана в векторном виде:

$$\boxed{\vec{M} = \left[\vec{\omega}_0\,,\ \vec{L}\right]\ .} \qquad (7.23)$$

Рассмотренное выше явление называется <u>гироскопическим эффектом</u>:

> если ось быстро вращающегося свободного гироскопа с моментом импульса $\vec{L}$ стараться повернуть моментом сил $\vec{M}$, то она начнет вращаться с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ в таком направлении, чтобы векторы $\vec{\omega}_0$, $\vec{L}$ и $\vec{M}$ составляли правую тройку векторов.

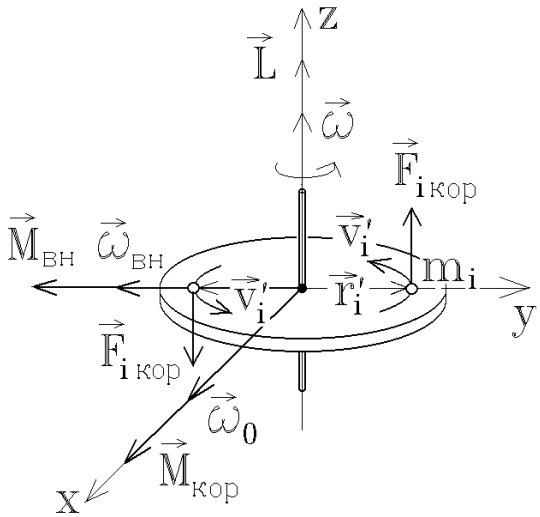

Рис.7.28

Но вращение вокруг оси Ox (рис. 7.27) должно быть вызвано появлением какого-то момента сил, направленного вдоль этой оси. Его появление нетрудно объяснить.

Момент внешних сил $\vec{M}_{вн}$ стремится вращать ось гироскопа с угловой скоростью $\vec{\omega}_{вн}$ (рис.7.28). Перейдем во вращающуюся со скоростью $\vec{\omega}_{вн}$ систему отсчета, в которой ось гироскопа неподвижна, а на его материальные точки, движущиеся со скоростями $\vec{v}'_i = \left[\vec{\omega}, \vec{r}_i\right]$, действуют кориолисовы силы инерции $\vec{F}_{i\,кор} = 2m_i\left[\vec{v}'_i,\ \vec{\omega}_{вн}\right]$. Момент

этих сил $\vec{M}_{кор}$ направлен вдоль оси Ox, и именно он вызывает вращение оси со скоростью $\vec{\omega}_0$.

Гироскопический эффект вызван действием кориолисовых сил инерции.

Пример: этот эффект используется для создания гироскопического компаса, простейшая модель которого показана на рис.7.29.

Ось гироскопа может свободно скользить внутри кольцеобразного обода. Если вращать сам обод со скоростью $\vec{\omega}_0$, то в неинерциальной системе, связанной с ободом, на гироскоп будет действовать момент кориолисовых сил инерции $\vec{M}_{кор}$. Как видно из рис.7.29, этот момент начнет поворачивать ось гироскопа до тех пор, пока она не станет параллельна $\vec{\omega}_0$ (при $\vec{L} \,||\, \vec{\omega}_0$ момент кориолисовых сил обращается в нуль).

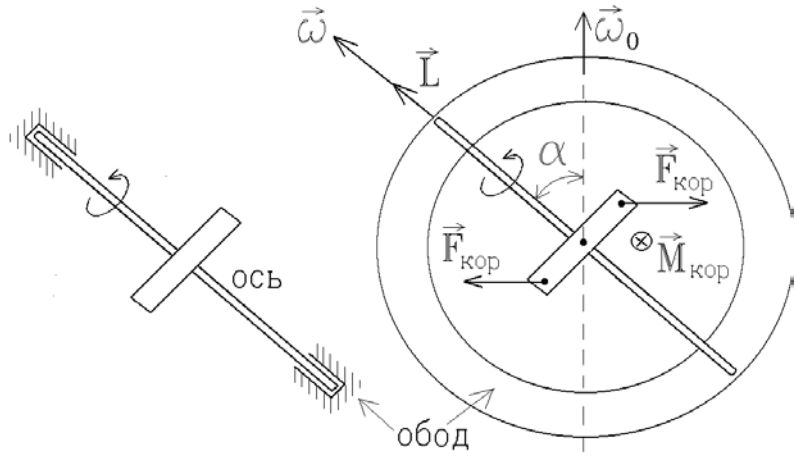

Рис.7.29

Итак, ось гироскопического компаса всегда старается установиться так, чтобы угол α между векторами $\vec{L}$ и $\vec{\omega}_0$ стал наименьшим.

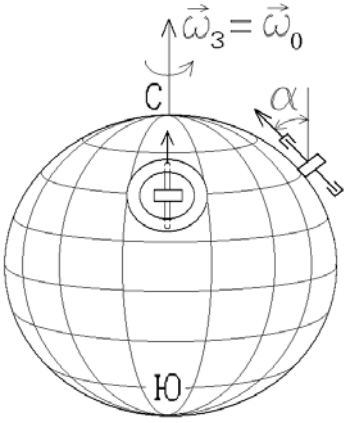

Рис.7.30

Гирокомпас, находящийся на Земле, вращается вместе с Землей $\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_З$. В результате его ось будет разворачиваться в строго меридиональном направлении с юга на север (рис.7.30). Гирокомпасы широко используют в навигации, так как в отличие от магнитных компасов они указывают направление точно, не реагируя на магнитные аномалии.

Отметим еще одно свойство свободного гироскопа. Если свободный волчок на рис.7.26 не вращается ($\vec{L} = 0$), то его легко повернуть в любом направлении. Но быстро вращающийся гироскоп обладает очень большим моментом импульса $\vec{L}$, и, согласно формуле (7.23), скорость поворота его

оси $\vec{\omega}_0$ будет очень мала. За непродолжительное время действия момента внешних сил ось может повернуться только на ничтожно малый угол $\varphi_0 = \int \omega_0 \, dt << 1$ рад. При перемещении, например, карданного подвеса на рис.7.26, его кольца будут поворачиваться так, что направление оси гироскопа практически не изменяется, т.е.

ось свободного гироскопа обладает способностью сохранять свою ориентацию в пространстве. Эту способность используют для создания гироскопических систем ориентации.

Пример: в американских крылатых ракетах свободным гироскопом служит заряженный бериллиевый шарик диаметром ~ 1см, висящий в электростатическом поле (для исключения трения) и раскрученный до $\omega = 10^5 - 10^6$ с$^{-1}$. Когда ракета изменяет направление полета (а она летит по извилистому маршруту заданной формы, облетая препятствия), то сохраняющееся направление оси гироскопа позволяет точно определить направление осей x, y и z (меридиональной, широтной и высотной).

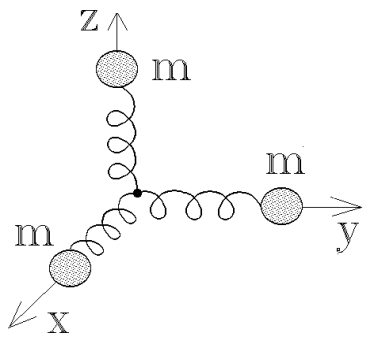

Рис.7.31

Акселерометры, установленные на ракете, непрерывно измеряют ее ускорение. Простейшим акселерометром будут, например, три пружинки (рис.7.31). При движении они растягиваются силами инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a} = -\vec{F}_{\text{упр}}$, и по их растяжениям в любой момент времени находятся величины проекций ускорения ракеты a_x, a_y и a_z. В бортовой ЭВМ эти величины интегрируются, т.е. непрерывно определяются истинная скорость $v_x = \int a_x dt$ и координаты ракеты: $x = \int v_x dt$, которые сравниваются с заданными координатами маршрута.

В случае отклонения от маршрута включаются двигатели, и ракета исправляет траекторию. Таким образом обеспечивается точность попадания ракеты в цель ≤ 50 м !

7.3. Несвободный гироскоп

Выше мы рассмотрели движение **свободного** гироскопа. Однако, ситуация изменяется, если ось гироскопа не свободна. Предположим, что мы держим ось быстро вращающегося гироскопа в точках А и В (рис.7.32) и действуем на нее парой сил $\vec{F}$, стремясь повернуть вокруг оси Oy.

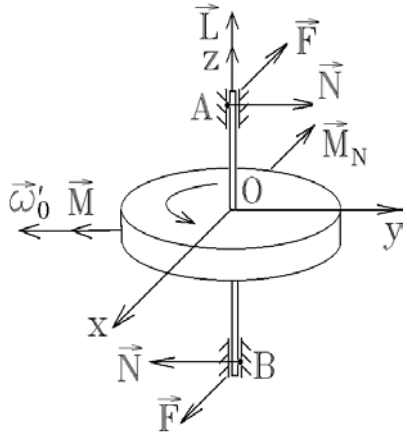

Рис.7.32

Возникающий момент сил $\vec{M}$ начнет поворачивать ось так же, как показано на рис.7.26. Но в точках опоры А и В ось гироскопа повернуться не может, и возникает пара сил реакции $\vec{N}$. Гироскопический эффект создается моментом этой пары сил $\vec{M}_N$, и, в соответствии с формулой $\vec{M}_N = \left[\vec{\omega}'_0,\ \vec{L}\right]$, ось **несвободного** гироскопа будет поворачиваться с угловой скоростью $\vec{\omega}'_0$ вокруг оси Oy (рис.7.32) – именно так, как мы хотели ее повернуть!

7.4. Прецессия гироскопа

Если на свободный гироскоп постоянно действует момент некоторой внешней силы, то ось гироскопа начинает вращаться вокруг направления этой силы; такое вращение называется <u>прецессией</u>.

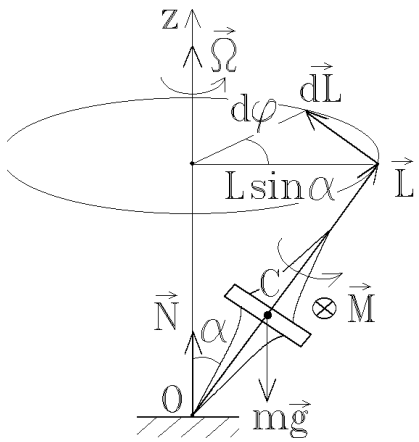

Рис.7.33

Проследим, например, за поведением вращающейся "юлы" (гироскопа, имеющего одну точку опоры), ось которой составляет угол α с вертикалью (рис.7.33). На нее действует момент пары сил тяжести и нормальной реакции опоры $\vec{M} = \left[\vec{l},\ m\vec{g}\right]$, равный по модулю $M = m\,g\,l\sin\alpha$, где $l = OC$. Так как, согласно уравнению моментов, $d\vec{L} = \vec{M}\,dt$ и в данном случае $d\vec{L} \perp \vec{L}$, то этот момент сил стремится не изменить, а повернуть вектор $\vec{L}$ (вместе с осью гироскопа) вокруг вертикальной оси Oz. За время dt ось повернется на угол $d\varphi = \dfrac{dL}{L\sin\alpha} = \dfrac{M\,dt}{L\sin\alpha}$ (рис.7.33). В результате конец вектора $\vec{L}$ будет вращаться вокруг оси Oz по окружности радиуса $L\sin\alpha$ с угловой скоростью $\Omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{M}{L\sin\alpha} = \dfrac{m\,g\,l\sin\alpha}{L\sin\alpha}$ или

$$\boxed{\Omega = \frac{m\,g\,l}{L} = \frac{m\,g\,l}{I\omega}}.$$

Это и есть угловая скорость прецессии оси гироскопа в поле сил тяжести. Заметим, что она не зависит от угла α .

Если трения в точке опоры нет, то гироскоп, стоящий на абсолютно гладкой поверхности, будет прецессировать так, что центр масс его останется неподвижным.

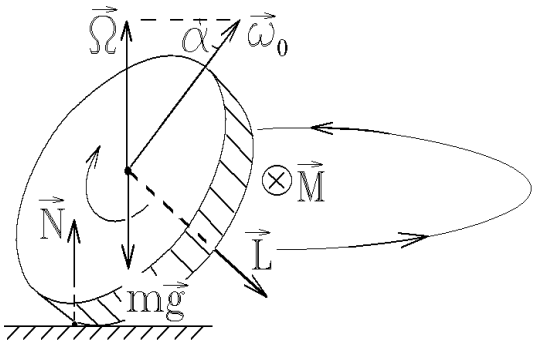

Рис.7.34

В качестве еще одного примера прецессии рассмотрим качение наклонного массивного диска, на который так же действует опрокидывающий момент $\vec{M}$ сил реакции и тяжести (рис.7.34). В соответствии с формулой (7.23) диск долго будет катиться по кругу со скоростью прецессии $\Omega = \omega_0 \sin\alpha = m\sin\alpha/L$. Легкий диск с малым моментом импульса $\vec{L}$ упадет очень быстро.

Вспомним, что в гонках по льду мотоциклист не поворачивает руль, а наклоняет мотоцикл: быстро вращающиеся массивные колеса начнут описывать по льду такой же круг, как и диск на рис.7.34. Попытка наклонить легкий велосипед приведет к падению. Из этих примеров видно, что прецессия обеспечивает устойчивость движения. Так, быстро вращающиеся вокруг своей оси пуля или снаряд, выпущенные из нарезного оружия, имеют более устойчивые траектории, чем при стрельбе из гладкоствольного оружия.

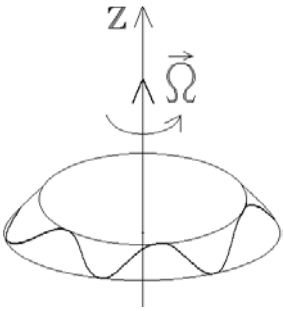

Рис.7.35

Замечание. Если исследовать движение гироскопа более строго, то окажется, что ось гироскопа может совершать еще одно движение, называемое <u>нутацией:</u> угол наклона оси α периодически изменяется от α_{min} до α_{max} . Нутация быстро затухает из-за сил трения, возникающих при вращении. На рис.7.35 показана траектория верхней точки оси с учетом нутации.

Глава 8.

Гравитационное поле

1. Закон тяготения Ньютона

В 1687 г. Исаак Ньютон в труде "Математические начала натуральной философии" в числе других законов сформулировал и <u>закон всемирного тяготения</u> – две частицы (материальные точки) с массами m и m_0 (рис.8.1) притягиваются друг к другу с силой

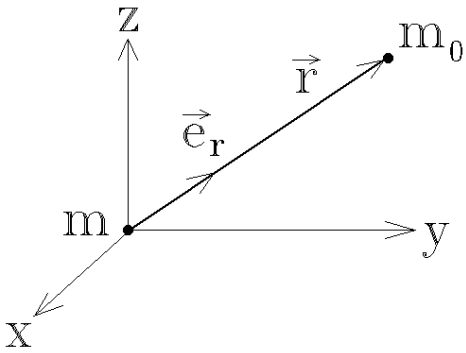

Рис.8.1

$$\vec{F} = -G\frac{m\,m_0}{r^3}\,\vec{r} = -G\frac{m\,m_0}{r^2}\vec{e}_r, \qquad (8.1)$$

где $G = 6,672\cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}$ – гравитационная постоянная, а начало отсчета совмещено с частицей m. Это – центральная и, следовательно, консервативная сила. Поэтому $\vec{F} = -\text{grad}U$, где

$$\boxed{U = -G\frac{m\,m_0}{r}} \quad – \qquad (8.2)$$

потенциальная энергия взаимодействия двух частиц (точечных масс), находящихся на расстоянии r друг от друга.

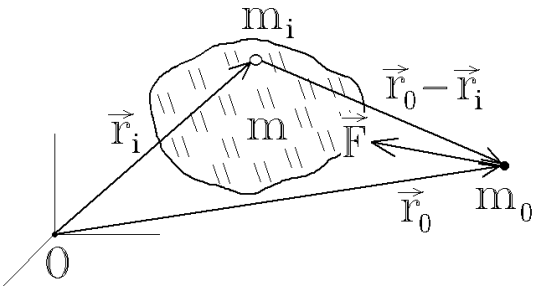

Рис.8.2

Реальные тела имеют конечные размеры, и силу притяжения частицы с массой m_0 к телу с массой m можно вычислить следующим образом: разбивают тело на малые участки (частицы) с массами m_i (рис.8.2) и, согласно принципу суперпозиции, суммируют силы притяжения по всем таким малым участкам:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = -\sum_i G\frac{m_i m_0}{\left|\vec{r}_0 - \vec{r}_i\right|^3}\left(\vec{r}_0 - \vec{r}_i\right).$$

Или, если $m_i = dm = \rho dV$, где dV – элемент объема тела, то окончательно

$$\vec{F} = -\int_V G \frac{m_0 \rho}{\left|\vec{r}_0 - \vec{r}\right|^3} \left(\vec{r}_0 - \vec{r}\right) dV \quad , \tag{8.3}$$

где интеграл вычисляется по объему V тела.

Аналогично вычисляется и потенциальная энергия взаимодействия:

$$U = -\int_V G \frac{m_0 \rho}{\left|\vec{r}_0 - \vec{r}\right|} dV. \tag{8.4}$$

Заметим также, что при $r \to 0$ формулы (8.1) и (8.2) приводят к физически бессмысленному результату: $\vec{F} \to \infty$ и $U \to -\infty$. Это означает, что классические законы тяготения при очень малых расстояниях между частицами становятся неприменимыми и должны быть заменены законами квантовой физики.

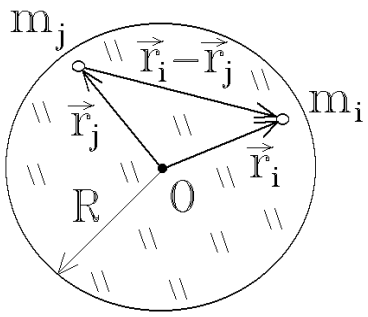

Рис.8.3

Но из-за малости гравитационной постоянной G и малости масс отдельных частиц такие расстояния крайне малы (много меньше размера атома). Поэтому гравитационное взаимодействие даже **соседних** малых участков, на которые мы разбили протяженное тело, можно описать с помощью классических законов (8.1) и (8.2). Это позволяет вычислить потенциальную энергию взаимодействия частей массивного тела друг с другом. Так, например, для однородного шара с массой M и радиусом R (рис.8.3) получим после суммирования энергию взаимодействия

$$U = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} G \frac{m_i m_j}{\left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right|} = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R} \quad . \tag{8.5}$$

Множитель $\frac{1}{2}$ в этой формуле введен для того, чтобы не учитывать взаимодействия частиц дважды: например, встречающиеся при суммировании индексы $i = 1,\ j = 2$ и $i = 2,\ j = 1$ относятся к взаимодействию одной и той же пары частиц m_1 и m_2.

2. Гравитационное поле

Интегралы, входящие в формулы (8.3) и (8.4), очень неудобны для конкретных вычислений. Более того, эти формулы становятся еще слож-

нее, если вместо частицы m_0 во взаимодействии участвует еще одно протяженное тело. Поэтому закон тяготения Ньютона удобно применять только для частиц. Взаимодействие протяженных тел проще описать, вводя понятие гравитационного поля.

Если в каждой точке некоторой области пространства на частицу действует сила, то говорят, что частица находится в поле сил. Поля могут быть как физическими (гравитационное, электромагнитное), так и формально-математическими (поле упругих сил). Общим для тех и других является одинаковый способ описания как самих полей, так и движения частиц в этих полях.

Поле называется потенциальным, если работа сил поля на замкнутом пути равна нулю, т.е. **потенциальные поля соответствуют консервативным силам**. Примерами таких полей будут гравитационное поле сил тяжести или электростатическое поле кулоновских сил. Характеристиками потенциального поля являются напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ.

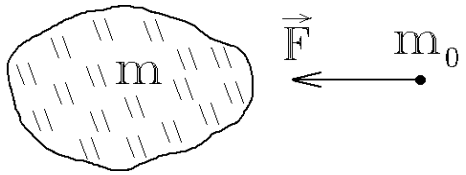

Рис.8.4

Гравитационное поле создается массивным телом, но чтобы его "почувствовать", измерить, надо внести в это поле постороннюю, пробную массу m_0 (рис.8.4). Вы сами, например, являетесь той пробной массой, которая "ощущает" гравитационное поле Земли. Но так как само поле не зависит от пробной массы m_0, ее величина не должна входить в выражения для характеристик поля. Как видно из формул (8.1) – (8.4), сила притяжения и потенциальная энергия пропорциональны m_0. Поэтому в качестве характеристики поля, создаваемого массой m, используются вектор напряженности поля

$$\boxed{\vec{E}_{\text{гр}} = \frac{\vec{F}_{\text{гр}}}{m_0}} \qquad (8.6)$$

и потенциал гравитационного поля

$$\boxed{\varphi_{\text{гр}} = \frac{U_{\text{гр}}}{m_0}}. \qquad (8.7)$$

Совершенно аналогичные выражения записываются и для кулонов-

ского электростатического поля: $\vec{E}_{\text{кул}} = \dfrac{\vec{F}_{\text{кул}}}{q_0}$ и $\varphi_{\text{кул}} = \dfrac{U_{\text{кул}}}{q_0}$.

В частности, для поля точечной массы m, находящейся в начале координат,

$$\boxed{\vec{E}_{\text{гр}} = -G\frac{m\vec{r}}{r^3}} \quad \text{и} \quad \boxed{\varphi_{\text{гр}} = -G\frac{m}{r}.} \tag{8.8}$$

Из соотношения $\vec{F}_{\text{гр}} = -\text{grad}U_{\text{гр}}$ немедленно следует (если его почленно поделить на m_0) <u>связь напряженности и потенциала</u>

$$\boxed{\vec{E}_{\text{гр}} = -\text{grad}\,\varphi_{\text{гр}} = -\vec{\nabla}\varphi.} \tag{8.9}$$

(заметим, что такая же связь справедлива для любого потенциального поля).

Можно, наоборот, выразить разность потенциалов через напряженность, используя определение потенциальной энергии (3.6),

$$U_1 - U_2 = A_{12} = \int_1^2 \vec{F}_{\text{гр}} \cdot d\vec{r}\,.$$

Разделив его на m_0, получим:

$$\boxed{\varphi_{1\ \text{гр}} - \varphi_{2\ \text{гр}} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{гр}} \cdot d\vec{r}.} \tag{8.10}$$

Потенциал, как и потенциальная энергия, определен с точностью до произвольной постоянной, т.е. к $\varphi_{\text{гр}}$ можно добавить или вычесть любую постоянную величину. Пользуясь этой свободой, потенциал гравитационного поля определяем так, что он равен нулю на бесконечном удалении от создающих поле масс: $\varphi_{\text{гр}}\big|_{r\to\infty} = 0$.

Любое потенциальное поле можно описать (и графически изобразить) с помощью <u>силовых линий</u>. Это линии в пространстве, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности $\vec{E}_{\text{гр}}$.

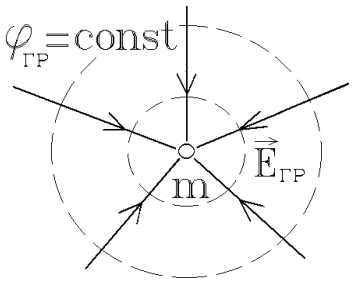

Рис.8.5

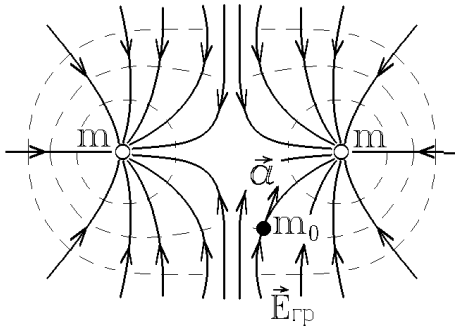

Рис.8.6

Они начинаются на бесконечности (на отрицательных массах) и заканчиваются на материальных частицах. Их плотность (число силовых линий, пронизывающих поверхность единичной площади в данном месте) численно равна величине $\vec{E}_{\text{гр}}$ Картины силовых линий простейших гравитационных полей представлены на рис.8.5 и 8.6.

Силовые линии перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям (поверхностям равного потенциала), следы которых изображены на рис.8.5 и 8.6 штриховыми линиями.

3. Принцип эквивалентности. Приливной эффект

Воспользуемся условием равенства гравитационной и инертной масс тела, о котором говорилось в главе 2. Тогда, согласно формуле (8.6),

$$\vec{F}_{\text{гр}} = m_0 \vec{E}_{\text{гр}} = m_0 \vec{a} \quad \text{или} \quad \vec{E}_{\text{гр}} = \vec{a},$$

т.е. **напряженность гравитационного поля совпадает с ускорением свободной частицы, помещенной в данное поле.**

Например, если пренебречь вращением Земли, то напряженность гравитационного поля на ее поверхности равна ускорению свободного падения: $E_{\text{гр. Земли}} = g = 9{,}81\,\text{м/с}^2$.

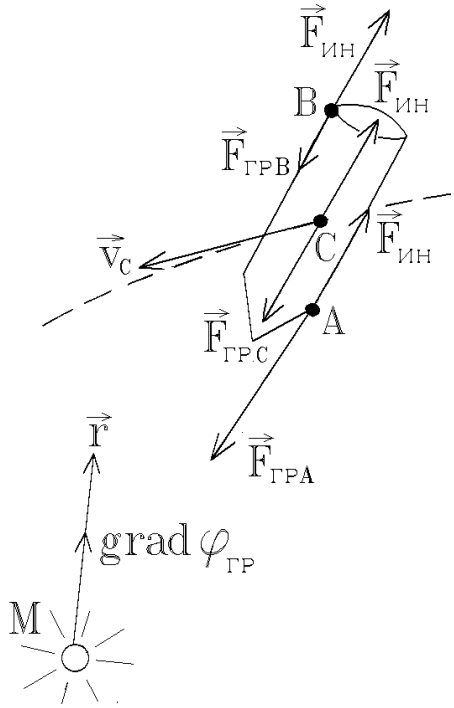

Рис.8.7

Это означает, что все тела, независимо от их массы, приобретают в гравитационном поле одинаковое ускорение.

Но точно так же ведут себя свободные тела (на которые не действуют никакие силы), наблюдаемые с точки зрения неинерциальной системы отсчета. Например, находясь в ракете и испытывая состояние невесомости, мы не можем сказать, находимся ли мы в глубоком космосе вдали от всяких массивных тел, или же ракета свободно падает на какую-то планету. Наоборот, испытывая нормальную тяжесть, мы не можем сказать, покоится ракета на поверхности планеты или движется с ускорением в глубоком космосе. Иначе говоря, **никакими опытами, проводимыми внутри системы отсчета, невозможно отличить неинерциальную систему отсчета в свободном пространстве от инерциальной, находящейся в однородном поле тяготения!** Это утверждение

составляет содержание принципа эквивалентности – эквивалентности между силами инерции и силами тяготения.

Следовательно, рассматривая движение тела в **неинерциальной системе отсчета**, выбранной подходящим образом, можно "исключить" гравитационное поле. Правда, сделать это можно только в сравнительно небольшой области пространства, так как гравитационные поля всегда неоднородны, а в движущейся поступательно неинерциальной системе отсчета ускорение в любой точке одинаково. Поэтому эквивалентность между силами гравитации и инерции имеет **локальный характер**.

Пример: космический корабль с выключенными двигателями пролетает **вблизи** нейтронной звезды с массой M по баллистической траектории (рис.8.7). Центр масс С корабля движется с ускорением $\vec{a}_C$, и в связанной с кораблем неинерциальной системе отсчета сила гравитационного притяжения звезды должна уравновешивать силу инерции: $\vec{F}_{\text{гр}\,C} + F_{\text{ин}} = \vec{F}_{\text{гр}\,C} - m\vec{a}_C = 0$. Космонавт, находящийся вблизи точки С, испытывает состояние невесомости.

Однако, рядом с массивной, но малой по размеру нейтронной звездой, гравитационное поле неоднородно. Его напряженность $\vec{E}_{\text{гр}} = -\vec{\nabla}\varphi_{\text{гр}} = -\frac{\vec{r}}{r}\frac{d}{dr}\left(-\frac{GM}{r}\right) = -G\frac{M\vec{r}}{r^3}$ очень быстро убывает с расстоянием r. В результате в точке А корабля суммарная сила $\vec{F}_{\text{гр А}} + \vec{F}_{\text{ин}}$ направлена к звезде, а в точке В – от звезды (рис.8.7). Локальное равновесие между силой инерции и силой гравитации нарушается, и космонавта, удалившегося от точки С, отбрасывает в сторону.

Эти же силы стремятся разорвать корабль, создавая приливной эффект. Такое название возникло при объяснении приливов, вызываемых на Земле гравитационным полем Луны.

Сумма сил $\vec{F}_{\text{гр}} + \vec{F}_{\text{ин}}$ равна нулю только вблизи центра Земли С, а на поверхности океанов она создает, как показано на рис. 8.8, **две** приливные волны (приливы случаются дважды в день).

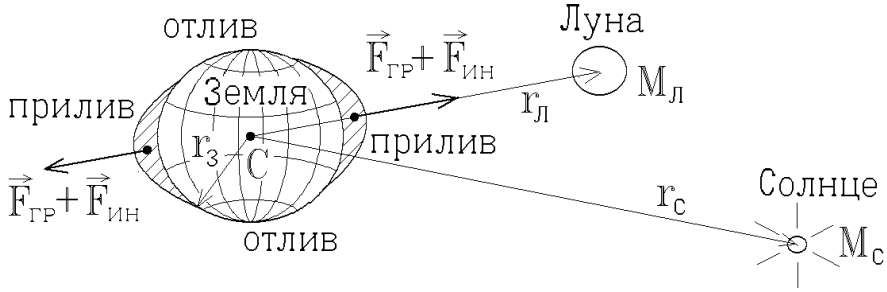

Рис.8.8

Еще раз отметим, что приливной эффект связан с **неоднородностью гравитационного**

поля, а не с величиной его напряженности. Сила гравитационного притяжения Земли к Солнцу в 180 раз больше, чем к Луне. Но расстояние Земли от Солнца $r_C \approx 1,5 \cdot 10^8$ км значительно превышает расстояние от Земли до Луны $r_Л \approx 3,8 \cdot 10^5$ км. Поэтому разность потенциалов гравитационного поля Солнца на противоположных сторонах Земли значительно меньше, чем гравитационного поля Луны:

$$\Delta\varphi_{гр} \approx \frac{GM_C}{r_C - r_З} - \frac{GM_C}{r_C + r_З} << \frac{GM_Л}{r_Л - r_З} - \frac{GM_Л}{r_Л + r_З}.$$

Здесь $r_З$ – радиус Земли, M_C и $M_Л$ – массы Солнца и Луны. Приливы, вызванные тяготением Солнца, наблюдаются, но они в десятки раз слабее приливов, вызванных Луной.

Отметим еще одну интересную особенность приливного эффекта для Земли. Приливная волна возникает не только в толще океанической воды, но и в земной коре (Земля не является абсолютно твердым телом – она деформируется, правда, значительно слабее, чем поверхность океана).

Вращаясь вокруг своей оси со скоростью $\omega_З$, Земля увлекает приливные волны. Силы трения не позволяют частицам воды или земной коры перемещаться мгновенно, они тормозят смещение приливной волны, которая вследствие этого чуть отстает от смещения Луны, как схематически показано на рис.8.9.

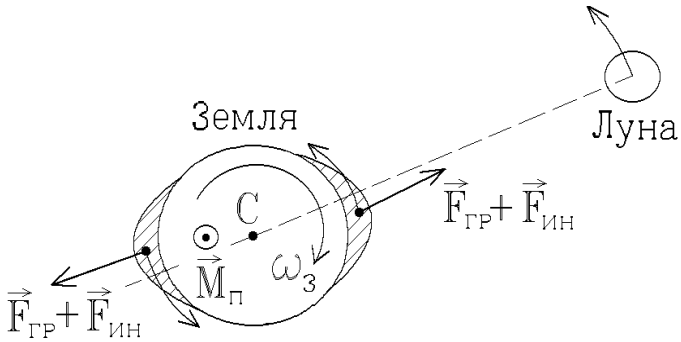

Рис.8.9

Поэтому силы $\vec{F}_{гр} + \vec{F}_{ин}$ создают очень небольшой момент сил $\vec{M}_{пр}$, тормозящий вращение Земли вокруг своей оси. Аналогичный момент сил действовал и на Луну, а так как ее масса мала по сравнению с массой Земли, то вращение Луны относительно Земли уже прекратилось: Луна постоянно обращена к Земле одной стороной.

Луна же продолжает тормозить вращение Земли, что приводит к увеличению земных суток. Но этот эффект очень мал, он становится заметным только спустя миллионы лет (500 млн. лет назад земные сутки длились ~ 22 часа).

4. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса

В некоторых случаях, особенно в случае симметричного распределения масс, гравитационное поле протяженных тел легко вычисляется с помощью интегральной теоремы Гаусса.

Учтем, что любой бесконечно малый участок поверхности можно считать плоским и определять вектором $d\vec{S}$, перпендикулярным к поверхности в данной точке и равным по величине площади dS этого бесконечно малого участка (рис.8.10). Тем самым одновременно задается и площадь участка, и его **ориентация** в пространстве.

Тогда по определению поток любого вектора $\vec{a}$ через площадку $d\vec{S}$ будет равен скалярному произведению этих векторов, т.е.

$$d\Phi_a = \vec{a} \cdot d\vec{S} = a\cos\theta \, dS \quad , \quad (8.11)$$

а поток вектора $\vec{a}$ через конечную поверхность S (рис.8.11) будет

$$\boxed{\Phi_a = \int \vec{a} \cdot d\vec{S}.} \qquad (8.12)$$

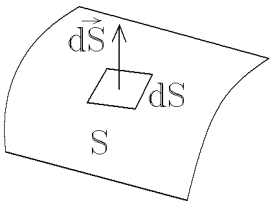

Рис.8.10

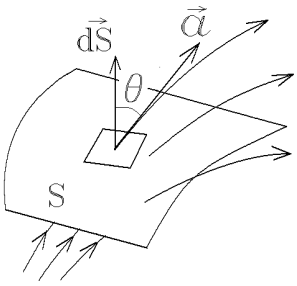

Рис.8.11

Поток вектора через з**амкнутую** поверхность обозначается как $\Phi_a = \oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$, причем по договоренности за направление вектора $d\vec{S}$ (как и вектора единичной нормали к поверхности) принимается направление от замкнутой поверхности наружу (внешнее).

Используя определение силовых линий, данное в предыдущем разделе, можно заключить, что поток вектора напряженности

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}_{\text{гр}} \cdot d\vec{S} \qquad -$$

это число силовых линий гравитационного (или иного) поля, пересекающих поверхность S.

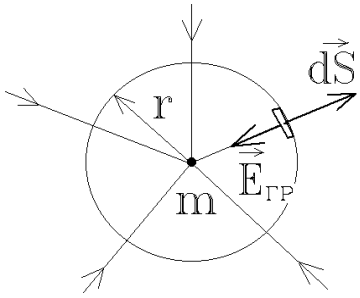

Рис.8.12

Окружим теперь частицу с массой m замкнутой сферической поверхностью радиуса r (рис.8.12). Вектор $\vec{F}_{\text{гр}} = -G\dfrac{m}{r^3}\vec{r}$ постоянен по величине и направлен противоположно $d\vec{S}$ во всех точках этой поверхности. Поэтому его можно вынести за пределы интеграла и воспользоваться формулой (8.8):

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}_{\text{гр}} \quad d\vec{S} = \oint_S E_{\text{гр}} dS \cos 180^{\circ} = -G\frac{m}{r^2}\oint_S dS = -4\pi G m = \text{const},$$

так как $\oint_S dS = 4\pi r^2$ – площадь сферы. Полученный результат вполне закономерен: число силовых линий, пересекающих сферическую поверхность любого радиуса, одинаково, так как силовые линии не могут обрываться и возникать в вакууме – они все должны заканчиваться на массе m. **Их число остается неизменным, если вместо сферической взять совершенно произвольную замкнутую поверхность**, как показано на рис.8.13 и 8.14. Дело в том, что линии, **выходящие** из замкнутой поверхности, образуют острый, а линии, **входящие** в замкнутую поверхность – тупой угол с вектором $d\vec{S}$. Согласно определению (8.11), **выходящие** линии будут создавать положительный поток и должны учитываться со знаком "плюс", а **входящие** линии создают отрицательный поток и учитываются со знаком "минус". Когда одна и та же линия пересекает поверхность несколько раз (рис.8.14), то ее вклад в общее число линий (поток) по-прежнему равен единице!

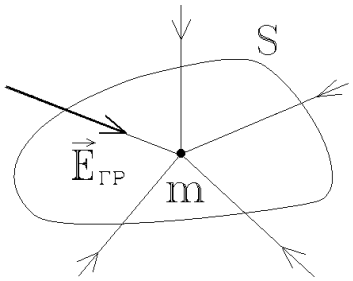

Рис.8.13

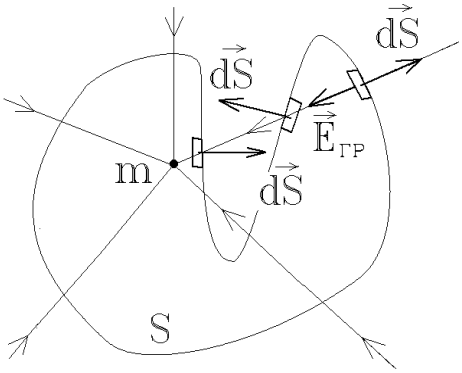

Рис.8.14

Если же внутри замкнутой поверхности находится не одна частица с массой m, а система частиц (или протяженное массивное тело), то, согласно принципу суперпозиции, получаем:

$$\Phi_E = \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_{\text{гр}i} \right) \cdot d\vec{S} = \sum_i \left(\oint_S \vec{E}_{\text{гр}i} \cdot d\vec{S} \right) = -4\pi G \sum_i m_i,$$

т.е. вклады всех частиц в поток вектора напряженности суммируются.

Итак, из закона тяготения и принципа суперпозиции выведена <u>теорема Гаусса</u> <u>для гравитационного поля</u>:

> поток вектора напряженности $\vec{E}_{\text{гр}}$ через любую замкнутую поверхность равен суммарной массе тел, находящихся **внутри** этой поверхности, умноженной на $(-4\pi G)$:

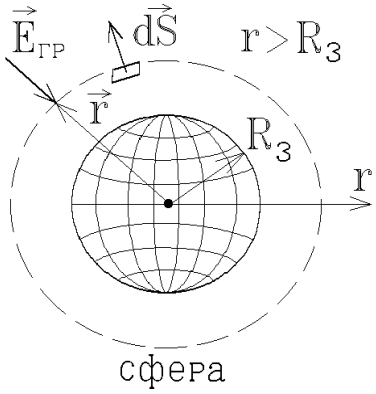

Рис.8.15

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E}_{гр} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \sum_i m_i}. \qquad (8.13)$$

Применим эту теорему для расчета гравитационного поля массивного шара (Земли) с радиусом $R_з$ и массой $M_з$.

Окружим шар (Землю) концентрической сферической поверхностью радиуса $r > R_з$ (рис.8.15). Вследствие симметрии на всей сфере $\left|\vec{E}_{гр}\right| = E_{гр} = \text{const}$. Поэтому

$$\oint_S \vec{E}_{гр} \cdot d\vec{S} = -E_{гр} \underbrace{\oint_S dS}_{=4\pi r^2} = -4\pi G M_з \ . \qquad (8.14)$$

Отсюда следует, что при $r > R_з$ $E_{гр} = G\dfrac{M_з}{r^2}$ и, значит,

$$\vec{E}_{гр} = -G\frac{M_з \vec{r}}{r^3}.$$

Таким образом, **вне** шара его гравитационное поле совпадает с полем материальной точки, имеющей массу всего шара и находящейся в центре шара.

Замечание: в астрономических задачах (когда речь идет о больших расстояниях) планеты и звезды можно приближенно считать не большими телами, а частицами (точечными массами), и использовать для них формулы (8.1), (8.2) и (8.8). Но в практических задачах космонавтики, например, при расчете сближения и стыковки космических аппаратов, надо учитывать, что Земля не является идеальным однородным шаром.

Плотность и толщина океанической и материковой коры различна в разных участках Земли. Вследствие этого величина напряженности $\vec{E}_{гр}$ (или ускорения свободного падения $\vec{g}$) немного меняется от точки к точке. Если пренебречь вращением Земли и приливными волнами, то уровень воды в океанах должен соответствовать одному и тому же значению $\vec{E}_{гр}$.

Например, в районе Бермудских островов, уровень поверхности воды находится на 120 м ниже принятого уровня мирового океана.

Поэтому спутник, облетающий Землю по свободной орбите, меняет высоту полета на десятки метров в соответствии с "рельефом" околозем-

ного гравитационного поля.

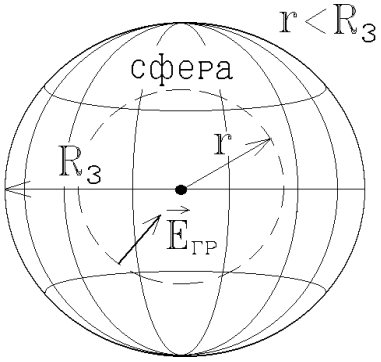

Рис.8.16

Теперь обратимся к случаю $r < R_З$ (рис.8.16). Так же, как и в предыдущем случае (формула (8.14)), $-E_{гр} \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G M'$, где M' – масса внутри сферической поверхности радиуса r. Поэтому, спускаясь в шахту, вы "ощущаете" притяжение не всей Земли, а только "шара под ногами". Сферический же слой над головой создает нулевое тяготение!

Вспомним в этой связи фантастический роман академика В.А.Обручева "Плутония". В нем Земля предполагается пустотелой с центральным светилом в центре (рис.8.17); на внутренней оболочке располагается весьма экзотический мир, в котором и происходят приключения попавших туда через отверстие во льдах Арктики людей. В действительности же, на всякий предмет, оказавшийся в этом мире, должно действовать только притяжение Плутона (так называется центральное светило). Все предметы должны упасть на Плутон!

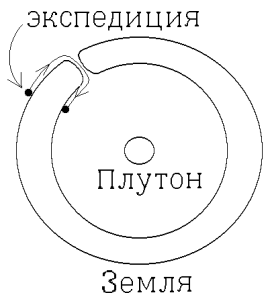

Рис.8.17

Если плотность ρ шара на рис.8.16 постоянна,

то $M' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ и $E_{гр} = \frac{4}{3}\pi G \rho r$ или

$\vec{E}_{гр} = -\frac{4}{3}\pi G \rho \vec{r}$, т.е. напряженность гравитационного поля (ускорение свободного падения) линейно убывает с расстоянием при приближении к центру Земли и обращается в нуль в самом центре.

5. Задача Кеплера

Задачей Кеплера называется задача о движении частицы в гравитационном поле тела с массой M. Полное решение ее дается в курсах теоретической механики; здесь же мы ограничимся изложением следствий этой задачи – законами Кеплера.

Иоганн Кеплер (1571-1630), немецкий астроном, опираясь на данные наблюдений датского астронома Тихо Браге и свои собственные, эмпирически установил законы движения планет (1609-1619).

Решение уравнения движения $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\dfrac{mM}{r^3}\vec{r}$

позволяет найти траекторию частицы (планеты), которая оказывается либо эллипсом (в частности – окружностью), либо параболой, либо гиперболой (в зависимости от начальных условий). Это и составляет содержание первого закона Кеплера.

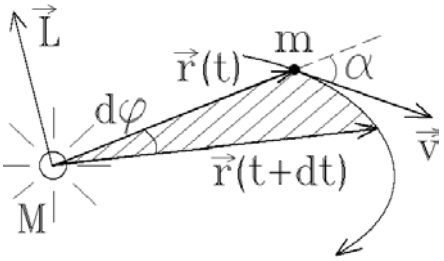

Рис.8.18

Второй закон Кеплера является следствием закона сохранения момента импульса планеты с массой m относительно центра Солнца (рис.8.18). Так как гравитационная сила является центральной, то относительно центра Солнца $\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const}$, откуда вытекает, что, во-первых, траектория планеты является плоской кривой, и, во-вторых, что $mvr\sin\alpha = m\omega r^2 = \text{const}$, где $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость. Но, с другой стороны, $r^2\dfrac{d\varphi}{dt} = 2\dfrac{dS}{dt}$, где $dS = \dfrac{1}{2}r^2 d\varphi$ – площадь элементарного сектора, заштрихованного на рис.8.18. Поэтому величина $\dfrac{dS}{dt}$ называется секториальной скоростью. В результате второй закон Кеплера можно сформулировать в следующем виде: "секториальная скорость планеты постоянна". Заметим, что он справедлив и для параболических и гиперболических траекторий, т.е. и для комет, метеоров и прочих космических объектов.

Третий закон Кеплера, гласящий, что "квадраты периодов обращения планет по эллиптическим траекториям пропорциональны кубам больших полуосей их орбит", можно элементарно вывести для частного случая круговых орбит.

Из закона движения планеты под действием тяготения Солнца (в пренебрежении влиянием остальных планет системы)

$ma_n = \dfrac{mv^2}{r} = G\dfrac{mM}{r^2}$ находим скорость $v = \sqrt{G\dfrac{M}{r}}$, а затем период обращения: $T = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}}$. Отсюда следует, что $T^2 \sim r^3$.

Заметим, что при $M >> m$ центральное тело (Солнце) можно считать неподвижным. В противном случае во всех записанных здесь и далее

формулах надо заменить M на приведенную массу $mM/(m+M)$.

6. Космические скорости

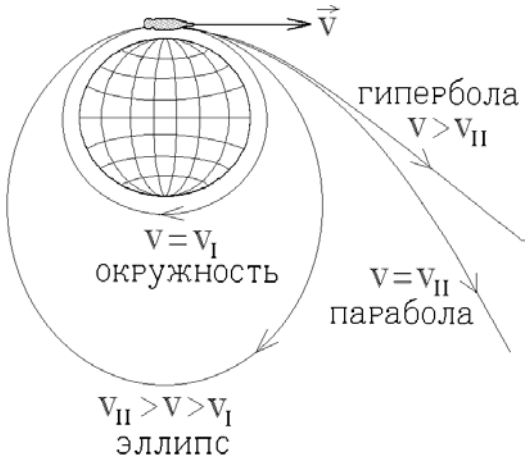

Рис.8.19

На рис.8.19 показаны различные возможные траектории тела, брошенного по касательной к поверхности планеты. Вид траектории зависит от сообщенной телу скорости. Различают две характерные скорости: первую и вторую космическую.

Первой космической скоростью v_{I} называется скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно стало спутником планеты. С этой скоростью оно будет двигаться по **круговой** орбите радиуса r (рис.8.20). Из уравнения движения $ma = F_{\text{гр}}$ или

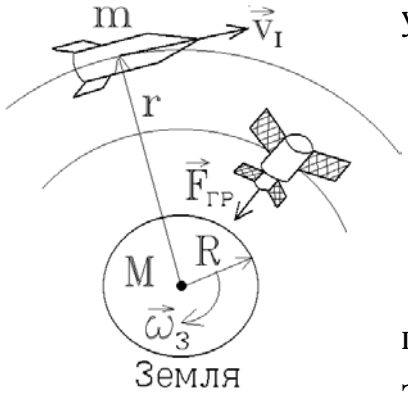

Рис.8.20

$$m\frac{v_{\mathrm{I}}^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$$ легко увидеть, что

$$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{G\frac{M}{r}}, \qquad (8.15)$$

где M – масса планеты. Вблизи поверхности Земли, где $E_{\text{гр}} = g = GM/R^2 = 9{,}81$ м/с^2, получаем $v_{\mathrm{I}} = \sqrt{gR} \approx 7{,}9$ км/с. Согласно формуле (8.15),

первая космическая скорость уменьшается с увеличением радиуса орбиты.

Пример: при запуске первого искусственного спутника Земли в 1957 году многие наблюдатели ожидали, что после отделения спутника большая ракета–носитель будет сильнее тормозиться очень разреженной атмосферой на высоте больше 100 км и начнет отставать от спутника. К изумлению этих наблюдателей ракета стала обгонять спутник!

Объяснение – очевидно: при торможении ракета начинает падать, т.е. радиус ее орбиты r уменьшается, а скорость $v = \sqrt{GM/r}$ – возрастает.

Этот пример нельзя считать простым курьезом. То же самое происходит при стыковке космических аппаратов: при подлете к орбитальной

станции (рис.8.20) попытка "затормозить" корабль приводит к его "падению", увеличению скорости и жесткому удару о стыкуемый аппарат (так была поломана большая часть стыковочных узлов на первых орбитальных станциях, в результате чего они приходили в негодность, и их приходилось затоплять).

Посадить находящийся на орбите космический корабль также не просто. При его падении уменьшается потенциальная энергия. Приблизительно половина ее идет на увеличение кинетической энергии, а половина – превращается в тепло за счет трения в атмосфере. Это трение и используют для торможения спускаемого аппарата – он летит в атмосфере до тех пор, пока скорость его не уменьшится до приемлемой величины. Внешняя оболочка корабля при этом кипит и испаряется не хуже поверхности падающего метеорита.

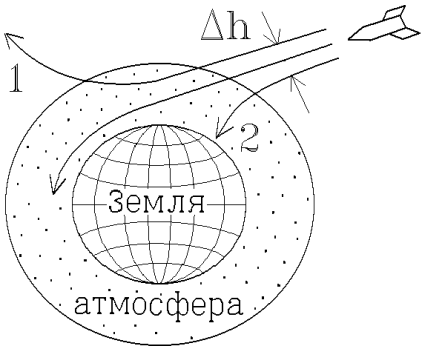

Рис.8.21

На Луне атмосферы нет, и для мягкой посадки корабля с помощью ракетных двигателей приходится тратить больше топлива, чем при последующем подъеме с поверхности. В результате посадить на Землю корабли, возвращаемые с Луны, еще труднее: топлива для торможения у них мало, и при подлете к Земле они должны влететь в атмосферу в очень узком "коридоре" шириной Δh в несколько сотен метров (рис.8.21). Иначе корабль будет либо "отскакивать" от атмосферы подобно гальке, отскакивающей от поверхности воды (1), либо входить в атмосферу под большим углом и, сгорая, падать, как метеорит (2).

Можно рассмотреть еще один интересный случай: из формулы (8.15) следует, что для некоторого радиуса $r = r_{\Gamma}$ угловая скорость вращения спутника по орбите становится равной угловой скорости вращения Земли, т.е. $v_{\mathrm{I}} / r_{\Gamma} = \omega_{З}$, откуда $r_{\Gamma} = \sqrt[3]{GM / \omega_{З}^{2}} = 42200\,\text{км}$. Такая орбита называется <u>геостационарной</u>. Спутник, находящийся на геостационарной орбите, неподвижно висит над одной точкой Земли. Такие спутники используются для наблюдения, связи, теле- и радиовещания.

К сожалению, спутник связи не может висеть неподвижно **над любой** точкой Земли. Сила гравитации направлена к центру Земли, лежащему в плоскости орбиты. Поэтому геостационарная орбита I должна совпадать с плоскостью экватора (рис.8.22). Спутник, находящийся на любой другой орбите II из-за вращения Земли будет пролетать то над северным, то над южным полушарием.

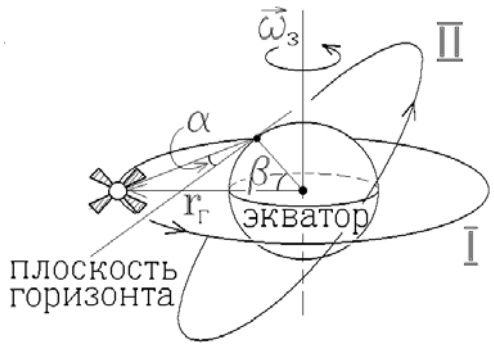

Рис.8.22

Как видно из рис.8.22, максимальный угол наклона к горизонту, под которым может быть виден геостационарный спутник, например, на широте Тулы $\left(\beta \approx 55^{o}\right)$, составляет $\alpha \approx 27^{o}$. Поэтому все спутниковые антенны в Туле ориентированы на юг.

<u>Второй космической скоростью</u> v_{II} называется **минимальная** скорость, которую следует сообщить спутнику, чтобы он двигался по параболической траектории (рис.8.19), т.е. ушел из сферы притяжения планеты. Ее можно найти из закона сохранения энергии:

$$E = K + U = \underbrace{\frac{mv_{II}^2}{2} - G\frac{mM}{r}}_{\text{вблизи планеты}} = \underbrace{0-0}_{\text{на бесконечности}},$$

откуда $v_{II}^2 = \sqrt{2G\dfrac{M}{r}} = v_I\sqrt{2}$.

Вблизи поверхности Земли вторая космическая скорость $v_{II} \approx 11,2$ км/с.

Пример: персонажа одного из рассказов Артура Кларка бросают на Юпитер с поверхности малой планетки-спутника. Так как масса спутника мала, то начальная скорость брошенного тела превысит вторую космическую скорость v_{II} для данного спутника. Тело покинет спутник, но упадет ли оно на Юпитер?

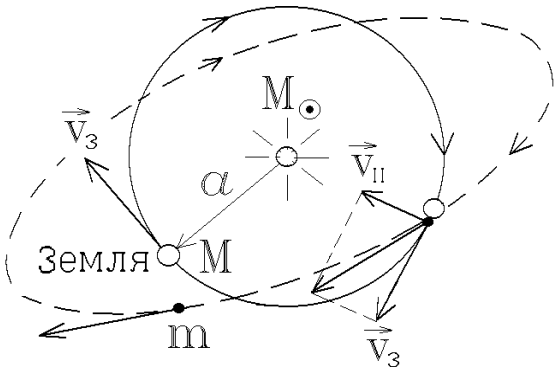

Рис.8.23

Конечно, нет! Точно так же тело, брошенное с Земли к Солнцу со второй космической скоростью, будет лететь вокруг Солнца по новой эллиптической орбите, показанной на рис.8.23 штриховой линией (сплошная линия на этом рисунке – траектория Земли, по которой Земля движется со скоростью $v_З \approx 29,9$ км/с). Спустя некоторое время, брошенное тело может снова приблизиться к Земле. Поэтому в космонавтике вводят еще и <u>третью</u> <u>космическую</u> <u>скорость</u> – это **минимальная** скорость, которую должен получить вблизи Земли космический аппарат, чтобы навсегда покинуть пределы Солнечной системы.

Если $M_{\odot}$ – масса Солнца, а a – радиус земной орбиты, то чтобы выйти из поля тяготения Солнца, аппарату, находящемуся на расстоянии a от него, надо сообщить скорость $v_{\text{параб}}$ определяемую законом сохранения энергии $\frac{mv^2_{\text{параб}}}{2} - G\frac{mM_{\odot}}{a} = 0$. Отсюда находим: $v_{\text{параб}} = 42{,}1$ км/с. Но если запускать аппарат в направлении орбитального движения Земли, то $29{,}9$ км/с уже есть; остается сообщить $v' = 42{,}1 - 29{,}9 = 12{,}2$ км/с, но предварительно надо вывести аппарат из поля тяготения Земли. Поэтому, применяя еще раз закон сохранения энергии $\frac{mv^2_{\text{III}}}{2} - G\frac{mM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}} = \frac{mv'^2}{2}$, находим окончательно для Земли: $v_{\text{III}} = 16{,}7$ км/с.

7. Потенциальные кривые

Потенциальной кривой называется кривая зависимости потенциальной энергии частицы от координаты при движении частицы в одномерном или сферически-симметричном поле, т.е. зависимости $U = U(x)$ или $U = U(r)$. С помощью потенциальных кривых можно не только качественно описать движение частицы, но и, воспользовавшись законами сохранения, провести некоторые важные расчеты.

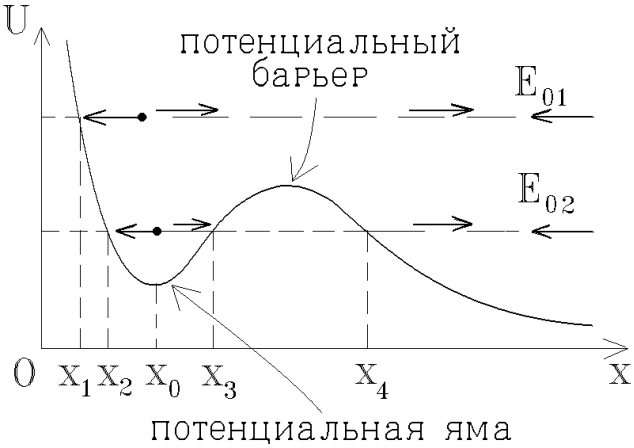

Рис.8.24

Рассмотрим одномерное движение частицы в поле, потенциальная кривая для которого изображена на рис.8.24.

При анализе движения частицы будем использовать:

1) закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = E_0 = \text{const};$$

2) выражение силы через потенциальную энергию

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Характер движения зависит не только от вида потенциальной кривой, но и от начальных условий, т.е. от заданных в некий нулевой момент времени значений координаты x_0 и скорости v_0 частицы, которые и определяют величину E_0.

Сначала проанализируем случай $E_0 = E_{10}$. Пусть частица движется к началу координат $x = 0$. Начиная с точки x_0, потенциальная энергия растет, а кинетическая (а, значит и скорость) убывает, так как их сумма $K + U = E_{01} = \text{const}$. В точке x_1, где $U = E_{01}$, кинетическая энергия и скорость обращаются в нуль; частица останавливается и под действием силы $F_x = -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_1} > 0$ начинает двигаться в противоположную сторону, улетая в бесконечность – такое движение называется <u>инфинитным</u> (дословно – "бесконечным"), а точка x_1 – <u>точкой поворота.</u>

Обратимся теперь к случаю $E_0 = E_{02}$. Как видно из рис.8.24, для энергии E_{02} на потенциальной кривой появляются две характерные области: область $\left[x_2,\ x_3\right]$, называемая <u>потенциальной ямой</u> и $\left[x_3, x_4\right]$ – <u>потенциальный барьер</u>. Разрешенных областей для движения частицы тоже две: $\left[x_4, \infty\right]$, которая соответствует инфинитному движению (и рассмотрена выше), и $\left[x_2, x_3\right]$. Так как частица не может находиться в областях $\left[x_3,\ x_4\right]$ и $\left[0, x_2\right]$, где $E < U$, т.е. $K = \frac{mv^2}{2} < 0$, то между точками поворота x_2 и x_3 частица будет совершать **колебания**, не имея возможности вылететь из потенциальной ямы. При этом в точке x_0 сила, действующая на частицу, будет равна $F_x = -\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0$, а скорость частицы будет максимальной. Такое движение называется <u>финитным</u> ("конечным").

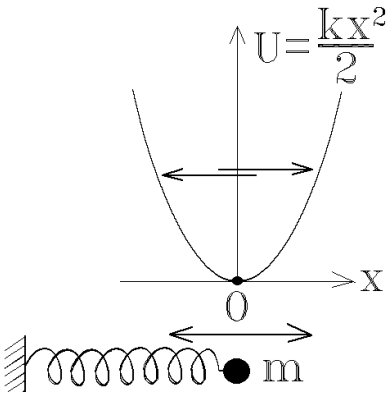

Рис.8.25

Аппарат потенциальных кривых очень широко используется во многих разделах физики. На рисунках 8.25–8.27 приведены примеры некоторых потенциальных кривых.

Частица, находящаяся "внутри" потенциальной ямы параболической формы (рис.8.25), под действием квазиупругой силы совершает гармонические колебания.

Падение тела по прямой в шахту, прорытую по диаметру Земли, соответствует, согласно формулам (8.14) и (3.6), потенциальной кривой, изображенной на рис.8.26. Приобретая максимальную скорость в центре Земли О, тело продолжает движение в другую сторону до остановки, т.е. совершает колебания с центром в точке О. Если же на по-верхности Земли телу сообщить скорость, большую второй космической, то механическая энергия $E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{R}$ станет положительной, и тело вылетит из потенциальной ямы и удалится на бесконечность.

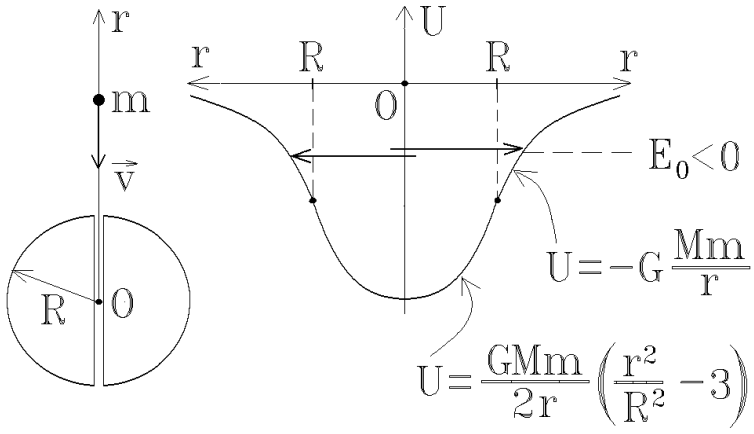

Рис.8.26

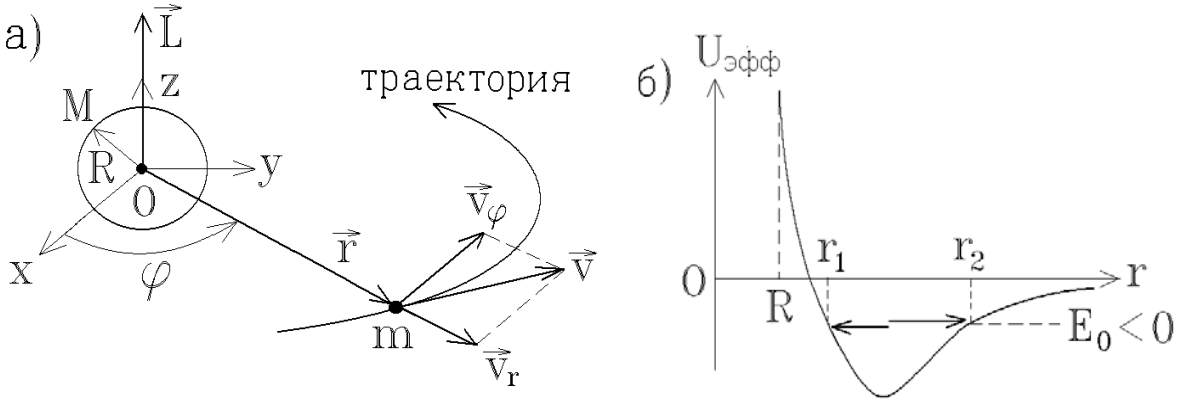

Рис.8.27

Но спутники и кометы, двигаясь в гравитационном поле Земли или Солнца, не только не падают в их центр, но даже не достигают поверхности. Это связано с тем, что реальное движение частицы (спутника) не од-

номерно, а двухмерно – траектория полета в поле центра с массой M (Земли), как было показано в главе 4, должна быть плоской (рис.8.27,а).

Перейдем в полярную систему координат (r, φ, z) и направим ось z вдоль сохраняющегося момента импульса $L = m v_\varphi r = \text{const}$ Скорость частицы можно разложить на радиальную $v_r = \dfrac{dr}{dt}$ и поперечную $v_\varphi = r\dfrac{d\varphi}{dt}$ составляющие. Тогда сохраняющаяся полная механическая энергия частицы

$$E_0 = K + U_{\text{гр}} = \frac{m}{2}\left(v_r^2 + v_\varphi^2\right) - \frac{GMm}{r} = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}.$$

Исключив угловую переменную φ из закона сохранения момента импульса, приводим задачу к одномерному радиальному движению с так называемой "эффективной" потенциальной энергией

$U_{\text{эф}}(r) = -G\dfrac{Mm}{r} + \dfrac{L^2}{2mr^2}$, график которой показан на рис.8.27,б.

Точки поворота r_1 (перигелий орбиты) и r_2 (афелий орбиты) соответствуют наименьшему и наибольшему удалению частицы от центра M при движении по эллиптической траектории ($E_0 < 0$). При $E_0 = 0$ траектория будет параболической, а при $E_0 > 0$ – гиперболической с единственной точкой поворота – перигелием.

Глава 9.

Колебания

1. Гармонический осциллятор. Условие гармонических колебаний

Колебаниями называются движения, повторяющиеся во времени. Если эти повторения следуют через равные промежутки времени, т.е. $x(t+T)=x(t)$, то колебания называются периодическими, а интервал времени T – периодом колебаний. Например, периодически повторяющиеся восходы Луны или Солнца над горизонтом, вызванные ими приливы и отливы и т.п.

Система, совершающая колебания, называется осциллятором (от латинского "oscillare" – колебаться). Колебания, которые совершает система, предоставленная самой себе, называются собственными, а частота колебаний $\nu=\dfrac{1}{T}$ в этом случае – собственной частотой. В случае механических колебаний, рассматриваемых в данной главе, изменяются координаты $x(t)$ или размеры колеблющейся системы.

Гармоническими колебаниями называются колебания, происходящие по синусоидальному или косинусоидальному закону. Например,

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0), \qquad (9.1)$$

где $x(t)$ – смещение колеблющейся частицы от положения равновесия, A – максимальное смещение, или амплитуда, $\omega t+\varphi_0$ – фаза колебаний, φ_0 – начальная фаза (при $t=0$), $\omega=2\pi\nu=\dfrac{2\pi}{T}$ – циклическая частота колебаний.

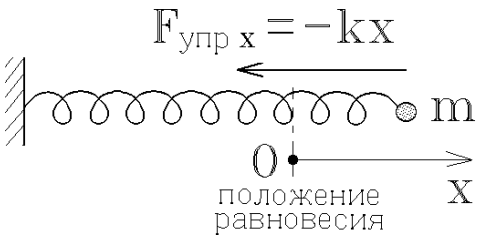

Рис.9.1

Система, совершающая гармонические колебания, называется гармоническим осциллятором. Существенно, что амплитуда A и частота ω гармонических колебаний постоянны. В механике гармонические колебания возникают при выполнении следующего условия:

на частицу (или систему частиц) должна действовать сила или момент сил, пропорциональные смещению частицы из положения равновесия и стремящиеся вернуть ее в положение равновесия. Такая сила (или момент сил) называется квазиупругой (латинское "quasy" – приставка со

значением "якобы", “мнимый”); она имеет вид $\vec{F} = -k\vec{r}$, где постоянный коэффициент k называется квазижесткостью.

В частности, это может быть и просто упругая сила, приводящая в колебания пружинный маятник (рис.9.1), колеблющийся вдоль оси x. Уравнение движения такого маятника имеет вид:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kx \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}, \qquad (9.2)$$

где введено обозначение $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$. (9.3)

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что решением уравнения (9.2) является функция

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \ ,$$

где A и φ_0 – **постоянные величины**, для определения которых следует задать два <u>начальных условия</u>: положение $x(0) = x_0$ частицы и ее скорость $v_x(0) = v_0$ в начальный (нулевой) момент времени, откуда

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \ , \\ v_0 = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -A\omega_0 \sin\varphi_0, \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2}, \\ \varphi_0 = -\mathrm{arctg}\left(\dfrac{v_0}{x_0\omega_0}\right). \end{cases}$$

Итак: **уравнение (9.2) представляет собой динамическое уравнение любых гармонических колебаний с собственной частотой ω_0.** Для грузика на пружинке ω_0 определяется формулой (9.3), следовательно, периодом колебаний пружинного маятника будет

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.} \qquad (9.4)$$

Часто, для удобства вычислений, решение уравнения гармонических колебаний записывают в комплексной форме. Напомним, что комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где $i = \sqrt{-1}$ так называемая мнимая единица. Число, отличающееся знаком перед мнимой частью, т.е. $z^* = x - iy$ называется комплексно-сопряженным числу z.

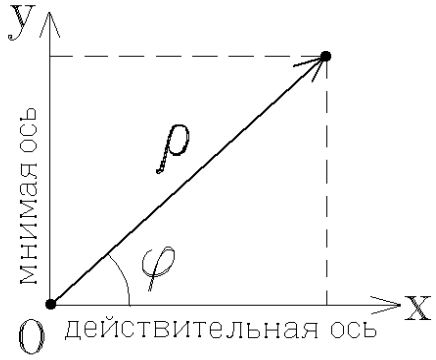

Рис.9.2

Любое комплексное число можно изобразить точкой или радиус-вектором на комплексной плоскости (рис.9.2). Длина такого вектора равна модулю комплексного числа $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а угол наклона к действительной оси равен аргументу $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$. Комплексное число можно записать в следующих формах:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi},$$

$$z^* = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho e^{-i\varphi}.$$

Эти формулы называются формулами Муавра. Из них следует, что

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2};\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.} \qquad (9.5)$$

Тогда $\cos\varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi}$ (действительная часть комплексного числа $e^{i\varphi}$), и функцию (9.1) можно записать в виде

$$\boxed{x(t) = \operatorname{Re}\ A e^{i(\omega t + \varphi_0)}.} \qquad (9.6)$$

В заключение этого параграфа заметим, что большинство периодических процессов в реальных системах гармоническими не являются. Так, из-за наличия диссипативных сил трения амплитуда смещения колеблющейся частицы должна уменьшаться со временем:

$$x(t) = \underbrace{A e^{-\beta t}}_{\text{амплитуда}} \cos\underbrace{(\omega t + \varphi_0)}_{\text{фаза}}, \quad \text{где} \quad \beta = \text{const}.$$

Эти колебания не только не гармонические, но и не периодические, так как $x(t+T) \neq x(t)$. И все же повторяемость движений очевидна (рис.9.3,в), и подобные колебания, называемые <u>затухающими,</u> по-прежнему характеризуют периодом $T = 2\pi/\omega$. Рассматривают даже движения, не повторяющиеся регулярно, т.е. не имеющие постоянного периода T (рис.9.3,г). Их называют <u>случайными колебаниями.</u>

Тем не менее, принципиальная важность изучения именно гармонических колебаний связана с тем, что **любую** периодическую функцию $x(t)$ с периодом $T = 2\pi/\omega$ (рис.9.3,б), для которой существует интеграл $\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|\, dt$ можно представить в виде бесконечного <u>ряда Фурье</u>:

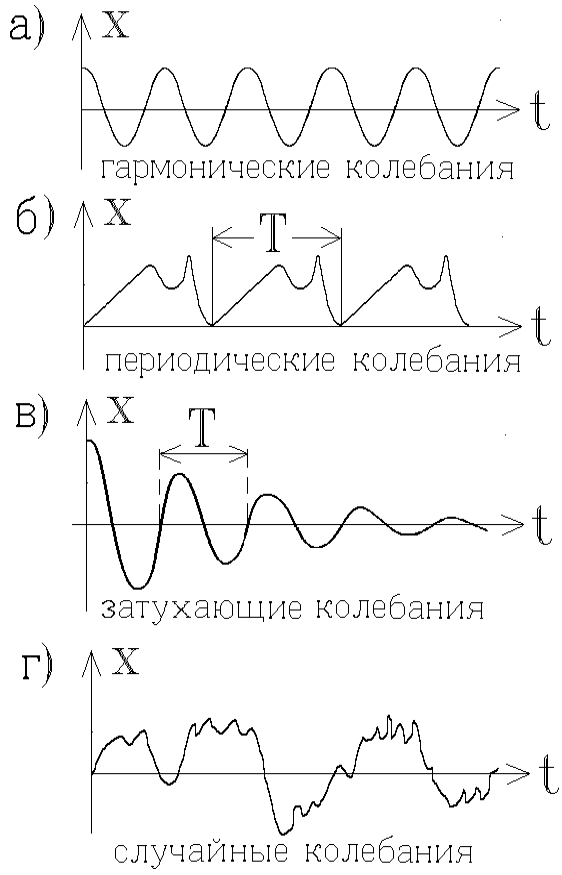

Рис.9.3

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_{0n}),$$

т.е. в виде суперпозиции (суммы) простых гармонических колебаний с постоянными амплитудами A_n и циклическими частотами $\omega_n = n\omega = 2\pi n/T$.

Любые непериодические функции (рис.9.3,в,г), для которых существует интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$, записываются в виде <u>интеграла Фурье</u>:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

как суперпозиция бесконечного числа гармонических колебаний (9.6).

Кроме того, отметим следующее: согласно формуле (3.11), квазиупругая консервативная сила $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -k\,x$ соответствует потенциальной энергии $U(x) = \frac{k\,x^2}{2}$, т.е. гармонические колебания может совершать только частица, находящаяся в потенциальной яме параболической формы (рис.8.25).

Если зависимость $U(x)$ другая, то колебания осциллятора не могут быть гармоническими. Однако к потенциальной энергии $U(x)$ всегда можно добавить постоянную величину, а начало координат сместить так, чтобы минимум потенциальной кривой приходился на значение $U(0) = 0$ (рис.9.4).

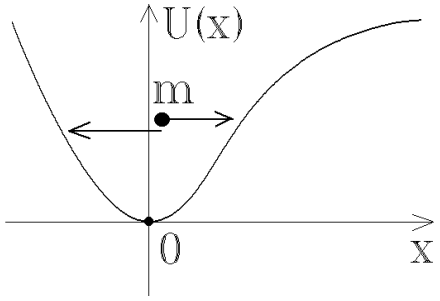

Рис.9.4

Разложим теперь функцию $U(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x = 0$ и ограничимся первым ненулевым членом ряда:

$$U(x) = \underbrace{U(0)}_{=0} + \underbrace{\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}}_{\substack{=0 \text{ в точке} \\ \text{минимума}}} \cdot x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} \cdot x^2 + 0(x^3) \approx \frac{k\,x^2}{2}\ .$$

Оказывается, что в случае любой зависимости $U(x)$, т.е. в поле любой консервативной силы, **малые** собственные колебания частицы вблизи положения равновесия, соответствующему минимуму потенциальной энергии, будут гармоническими! При этом коэффициент квазижесткости осциллятора в формулах (9.3) и (9.4) будет равен $k = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0}$.

2. Физический и математический маятники

Физический маятник – это любое физическое тело, совершающее колебания вокруг оси подвеса, не проходящей через центр масс, в поле сил тяжести (рис.9.5).

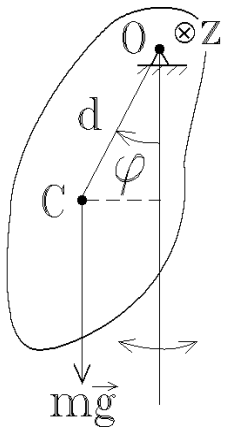

Рис.9.5

Пусть горизонтальная ось проходит через точку подвеса О, находящуюся на расстоянии d от центра масс (центра тяжести) С. Уравнение (4.6) вращательного движения маятника в проекции на ось вращения z (направленную от нас) имеет вид: $I_0 \frac{d\omega}{dt} = M_z$ или, так как $M_z = -mg \underbrace{d\sin\varphi}_{\text{плечо силы}}$, то $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0$. Здесь $\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_0}$, где I_0 – момент инерции тела относительно оси подвеса, d – расстояние от оси подвеса до центра масс тела.

Отсюда следует, что колебания физического маятника будут гармоническими только, если $\sin\varphi \approx \varphi$, т.е. при малых углах отклонения.

Итак: для **малых** амплитуд уравнение колебаний физического маятника принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\,\varphi = 0\,.$$

Его решением является функция $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$, а период колебаний определяется формулой:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgd}}.} \qquad (9.7)$$

Заметим, что квазиупругим здесь является момент силы тяжести $M_z \approx -mgd \cdot \varphi$, пропорциональный угловому отклонению φ.

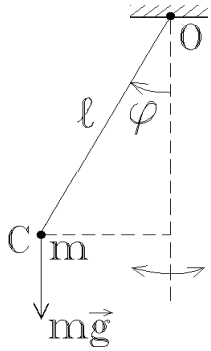

Рис.9.6

Частным случаем физического маятника является математический маятник – точечная масса, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити длины l (рис.9.6). Как видно из рис.9.6, в этом случае $I_0 = ml^2$, $d = l$, поэтому период **малых** колебаний математического маятника

$$\boxed{T_{\text{мат. м.}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.} \qquad (9.8)$$

3. Затухающие колебания

В реальной ситуации на осциллятор со стороны окружающей среды всегда действуют диссипативные силы (вязкого трения, сопротивления среды) $\vec{F}_{\text{сопр}} = -\eta\vec{v}$, которые замедляют движение. Уравнение движения тогда принимает вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{упр x}} + F_{\text{сопр x}} = -kx - \eta\frac{dx}{dt}.$$

Обозначая $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и $\frac{\eta}{2m} = \beta$, получаем динамическое уравнение собственных затухающих колебаний:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.} \qquad (9.9)$$

Как и в случае незатухающих колебаний, это – общая форма уравнения.

Решение уравнения (9.9) ищем в виде $x = Ae^{\lambda t}$, где A и λ – неизвестные константы. Подставляя это выражение в уравнение (9.9) и сокращая экспоненту, получаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

откуда находим

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\,.$$

Как и в случае незатухающих колебаний, это – общая форма уравнения.

Сначала рассмотрим случай $\boxed{\beta < \omega_0}$.

Обозначив $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2 > 0$, находим $\lambda = -\beta \pm \sqrt{-\omega^2} = -\beta \pm i\omega$; поэтому общее решение уравнения (9.9) имеет вид:

$$x = A_1 e^{-\beta t + i\omega t} + A_2 e^{-\beta t - i\omega t}\,.$$

Но смещение x должно быть не комплексным, а действительным числом. Поэтому необходимо, чтобы само число равнялось его комплексно-сопряженному, т.е. $x = x^* = A_1^* e^{-\beta t - i\omega t} + A_2^* e^{-\beta t + i\omega t}$, откуда немедленно следует: $A_1 = A_2^*$ и $A_2 = A_1^*$. А так как любое комплексное число можно представить в виде $A_1 = \dfrac{A_0}{2} e^{i\alpha}$, где A_0 и α – постоянные действительные числа, то

$$x(t) = \frac{A_0}{2} e^{-\beta t}\left(e^{i(\omega t + \varphi_0)} + e^{-i(\omega t + \varphi_0)}\right).$$

Используя формулы (9.5), получаем, что при не слишком большом сопротивлении среды ($\beta < \omega_0$) колебания осциллятора совершаются по закону:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos\left(\omega t + \varphi_0\right). \qquad (9.10)$$

График функции $x(t)$ при $\varphi_0 = 0$ изображен на рис.9.7.

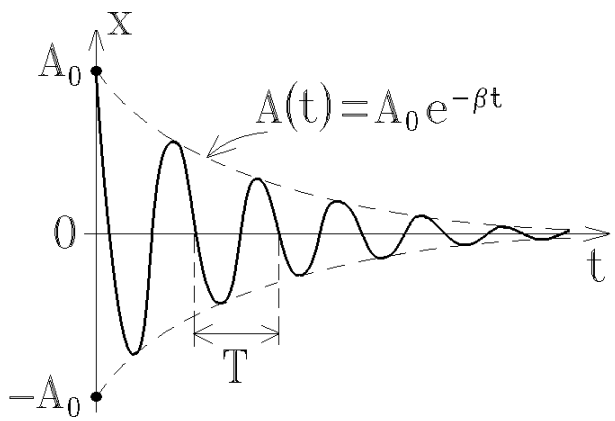

Рис.9.7

В выражении (9.10) функция $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ представляет собою убывающую по экспоненте амплитуду колебаний. Это уменьшение амплитуды называют <u>релаксацией</u> (ослаблением) колебаний, а коэффициент β – <u>коэффициентом затухания</u> колебаний. Время τ, за которое амплитуда колебаний уменьшается в $e = 2{,}71828$ раз, называется <u>временем релаксации</u>. Из закона изменения амплитуды следует:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0\, e^{-\beta t}}{A_0\, e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e\,,$$

откуда время релаксации $\boxed{\tau = \frac{1}{\beta}.}$

Кроме коэффициента затухания, вводится еще одна характеристика, называемая логарифмическим декрементом затухания – это натуральный логарифм отношения амплитуд (или смещений) через период:

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln\frac{A_0\, e^{-\beta t}}{A_0\, e^{-\beta\,(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\omega}\,.$$

Частота собственных затухающих колебаний

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad (9.11)$$

зависит не только от величины квазиупругой силы и массы тела, но и от сопротивления среды.

Поэтому период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad (9.12)$$

всегда больше периода незатухающих гармонических колебаний

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\,.$$

Теперь обратимся к случаю, когда сопротивление среды велико, т.е. $\boxed{\beta \geq \omega_0}$. Это происходит, например, когда грузик пружинного маятника находится в очень вязком веществе (например, в смоле).

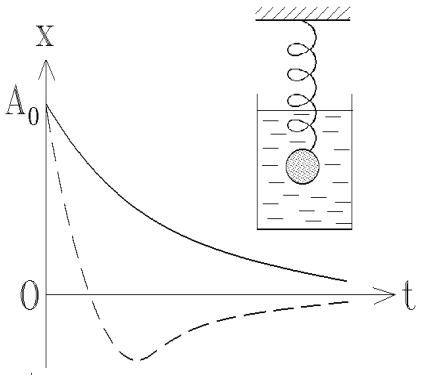

Рис.9.8

В этом случае общее решение уравнения (9.9) представляет собою сумму двух убывающих экспонент (поскольку $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ действительные числа):

$$x(t) = A_1\, e^{\lambda_1 t} + A_2\, e^{\lambda_2 t}\,.$$

При возвращении осциллятора в положение равновесия никаких колебаний не возникает, и такое движение осциллятора называется апериодическим (рис.9.8).

4. Механическая энергия осциллятора

Полная механическая энергия осциллятора складывается из потенциальной энергии, обусловленной наличием консервативной квазиупругой силы $F_x = -k\,x$ и равной

$$U(x) = \underbrace{U(0)}_{=0} - \int_0^x (-k\,x)\,dx = \frac{k\,x^2}{2}$$

и кинетической энергии $K = \frac{m}{2}\left(\frac{d\,x}{dt}\right)^2$. При вращательном движении осциллятора последняя заменяется на $K = \frac{I}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$.

Пример: незатухающие колебания гармонического осциллятора (рис.9.1). Здесь $x = A\cos(\omega_0\,t + \varphi_0)$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, и полная механическая энергия $E = K + U =$

$$= \frac{m}{2}\left(-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\right)^2 + \frac{k}{2}\left(A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\right)^2 = \frac{k\,A^2}{2} = \text{const}\,.$$

Вывод: **полная механическая энергия гармонического осциллятора всегда пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний.**

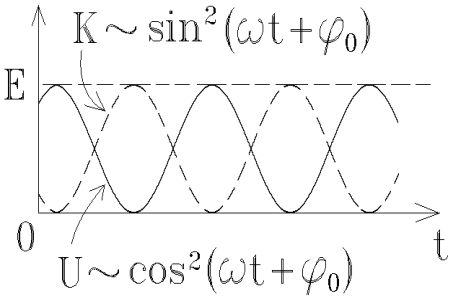

Рис.9.9

При незатухающих колебаниях она сохраняется (неконсервативные силы отсутствуют) и лишь переходит из потенциальной (в момент наибольшего отклонения) в кинетическую (в момент прохождения положения равновесия) и наоборот (рис.9.9).

Для затухающих колебаний

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega\,t + \varphi_0)\,,$$

и механическая энергия убывает пропорционально квадрату амплитуды:

$$E \sim \left(A\,e^{-\beta t}\right)^2.$$

Ее изменение равно работе диссипативных сил сопротивления среды:

$$-\Delta E = \mathbb{Q} = \left|\int_0^x \eta v dx\right|\,.$$

Пример распространение звука вызвано колебаниями (механическими смещениями) среды. При этом одни частицы среды смещаются относительно других.

В воздухе такие смещения (колебания плотности) достаточно велики, и возникающие диссипативные силы быстро уменьшают амплитуду колебаний, "гасят" звук (помимо того, что амплитуда колебаний убывает обратно пропорционально расстоянию до источника звука – звук рассеивается). При колебаниях твердой среды диссипативные силы не так велики, и звук в ней затухает и рассеивается меньше. Приложив ухо к земле, можно услышать топот лошади на значительно большем удалении, чем прислушиваясь к звукам в воздухе.

5. Сложение гармонических колебаний

Рассмотрим два важных случая такого сложения.

5.1.Сложение взаимно перпендикулярных колебаний осциллятора

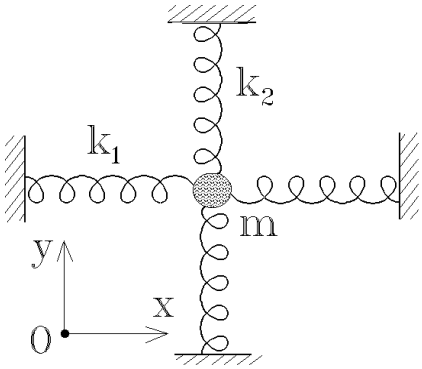

Рис.9.10

Примером могут служить колебания атомов в узлах кубической кристаллической решетки или эквивалентная модель грузика m, прикрепленного к двум взаимно-перпендикулярным парам пружинок (рис.9.10).

В этом случае вдоль осей x и y действуют две квазиупругие силы. Тогда

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\ y &= B\cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}\right\}$$

Для того чтобы найти траекторию осциллятора, следует исключить из этих уравнений время t.

Проще всего это сделать в случае **кратных частот**: $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{n}{m}$, где n и m – целые числа. В этом случае траекторией осциллятора должна быть некоторая **замкнутая** кривая, называемая <u>фигурой Лиссажу</u>.

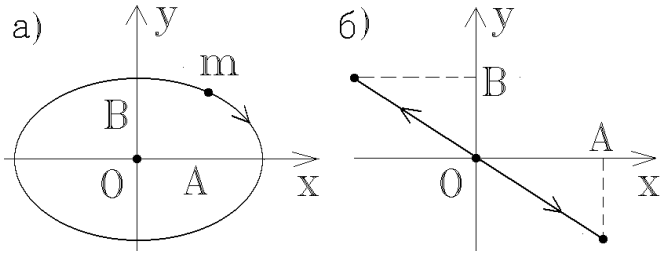

Рис.9.11

Пример: пусть частоты колебаний вдоль осей x и y одинаковы $\left(\omega_1 = \omega_2 = \omega\right)$, а разность фаз колебаний $\varphi_2 - \varphi_1 = 3\pi/2$ (для просто-

ты положим $\varphi_1 = 0$):

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos(\omega\, t), \\ y &= B\cos\left(\omega\, t + 3\pi/2\right) = -B\sin\omega\, t. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда находим: $\left(\dfrac{x}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{B}\right)^2 = \cos^2\omega\, t + \sin^2\omega\, t = 1$ – фигурой Листажу будет эллипс (рис.9.11,а).

Докажите, что в случае $\varphi_2 = \pi/2$; $\varphi_1 = 0$ фигура Лиссажу не изменится (рис.9.11,а), но осциллятор будет двигаться по эллипсу в обратном направлении, а в случае $\varphi_2 = \pi$ он будет колебаться вдоль прямой линии $y = -B\,x/A$ (рис.9.11,б).

При сложении гармонических колебаний траектория осциллятора зависит не только от частот (от действующих квазиупругих сил), но и от начальных фаз и амплитуд, т.е. от начальной скорости и положения осциллятора.

К сожалению, **в реальных** механических системах (рис.9.10) устойчивой траектории осциллятора в виде фигуры Лиссажу при сложении колебаний с кратными частотами не наблюдается! Для примера рассмотрим висящий пружинный маятник, у которого длина l практически невесомой пружины в положении равновесия такова, что частота малых вертикальных колебаний совпадает с частотой малых горизонтальных колебаний математического маятника: $\omega_2 = \sqrt{k/m} = \omega_1 = \sqrt{g/l}$.

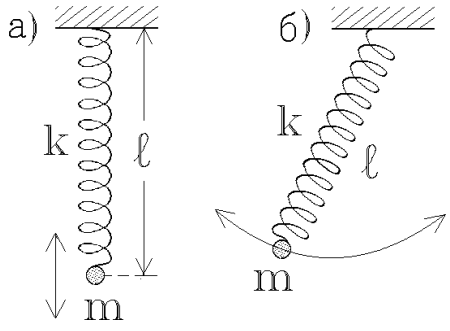

Рис.9.12

Заставим маятник колебаться строго вертикально (рис.9.12,а). Однако это движение не сохраняется – амплитуда вертикальных колебаний уменьшается, но возникают горизонтальные колебания, и, наконец, маятник начинает колебаться горизонтально, как математический (рис.9.12,б). Затем горизонтальные колебания снова перейдут в вертикальные, и т.д.

Рассмотренная система является примером <u>связанных колебаний</u>, которые возникают при наличии у осциллятора нескольких степеней свободы. Между различными колебаниями существует связь, через которую энергия одного колебания передается другому. В системе, изображенной на рис.9.12, такой связью будет пружинка – при сжатии она слегка изгибается и заставляет грузик m колебаться горизонтально.

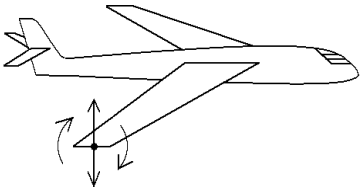
Рис.9.13

Учет связей очень важен во всех устройствах, где возникают механические колебания. Например, крыло самолета может совершать крутильные и вертикальные (изгибные) колебания (рис.9.13). Передача энергии от одного типа колебаний к другому может вызвать разрушение крыла (флаттер).

5.2 Сложение однонаправленных колебаний осциллятора

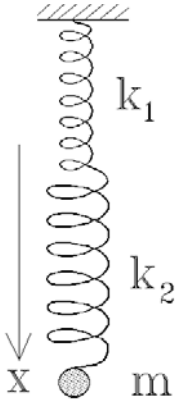

Рис.9.14

Примером такого сложения могут быть колебания мембраны микрофона, на которую одновременно попадают несколько звуковых волн, или грузика на двух пружинках (рис.9.14).

Пусть складываются два гармонических колебания, происходящих вдоль оси x:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{10}) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{20})$$

или, согласно формуле (9.6),

$$x = \mathrm{Re}\left(A_1 e^{i\varphi_1(t)} + A_2 e^{i\varphi_2(t)} \right),$$

где $\varphi_1(t) = \omega_1 t + \varphi_{10}$ и $\varphi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_{20}$ – фазы колебаний.

Аналитически колебания складывать очень неудобно, особенно, когда их не два, а несколько; поэтому часто используется геометрический метод векторных диаграмм.

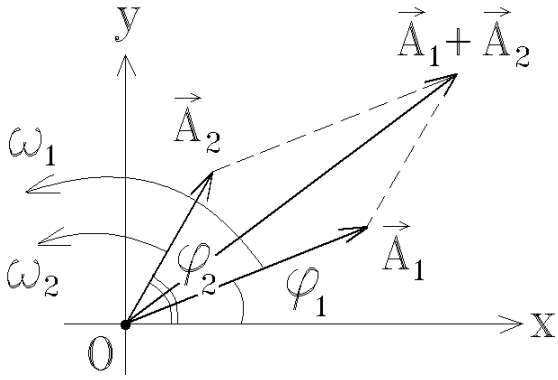

Рис.9.15

На комплексной плоскости (смотри рис.9.2) изобразим первое слагаемое вектором $\vec{A}_1$ под углом $\varphi_1(t)$ к оси x, а второе – вектором $\vec{A}_2$ под углом $\varphi_2(t)$ к оси x (рис.9.15). Тогда результирующее колебание изобразится геометрической суммой этих векторов, т.е. вектором $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Так как фазы колебаний $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ меняются с течением времени, то векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ будут вращаться вокруг точки О с угловыми скоростями ω_1 и ω_2.

Если $\boxed{\omega_1 \neq \omega_2}$, то угол между векторами $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ все время меняется и, следовательно, изменяется и длина вектора $\vec{A}$, т.е. в этом случае результирующее движение **не будет гармоническим колебанием.**

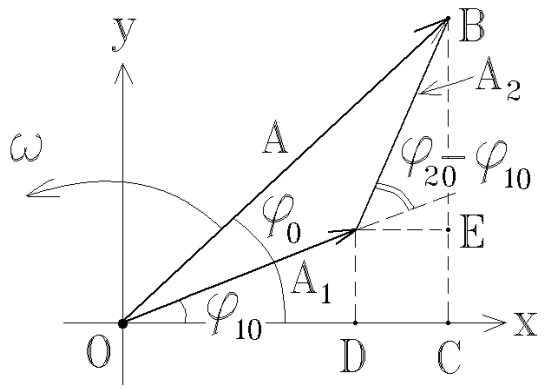

Рис.9.16

Если же $\boxed{\omega_1 = \omega_2 = \omega}$, то угол между векторами остается все время постоянным и равным разности фаз колебаний: $\Delta\varphi = \varphi_{20} - \varphi_{10} = \text{const}$. Поэтому векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью, и длина вектора $\vec{A}$ остается неизменной, – результирующее колебание будет гармоническим. Амплитуду и начальную фазу его можно (и достаточно) вычислить в начальный момент времени $t = 0$.

Как следует из рис.9.16, согласно теореме косинусов,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - \Delta\varphi),$$

т.е. амплитуда результирующего колебания будет:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)}. \qquad (9.13)$$

Начальная фаза его определяется из треугольника OBC:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{BC}{OC} = \frac{BE + EC}{OD + DC}, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_2\sin\varphi_{20} + A_1\sin\varphi_{10}}{A_2\cos\varphi_{20} + A_1\cos\varphi_{10}}.} \qquad (9.14)$$

Итак, сумма двух однонаправленных колебаний **с одинаковой частотой** есть гармоническое колебание той же частоты:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Таким способом можно сложить сколько угодно колебаний одинакового направления.

Сложим теперь два колебания с близкими частотами $\omega_1 = \omega$ и $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$, где $\Delta\omega << \omega$. Для простоты рассмотрим случай одинаковых амплитуд:

$$x = x_1 + x_2 = A\left[\cos\left(\omega t + \varphi_{10}\right) + \cos\left((\omega + \Delta\omega)t + \varphi_{20}\right)\right] =$$

$$= \underbrace{2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\varphi_{20} - \varphi_{10}}{2}\right)}_{\text{амплитуда}} \cos\underbrace{\left((\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t + \frac{\varphi_{20} + \varphi_{10}}{2}\right)}_{\text{фаза}}.$$

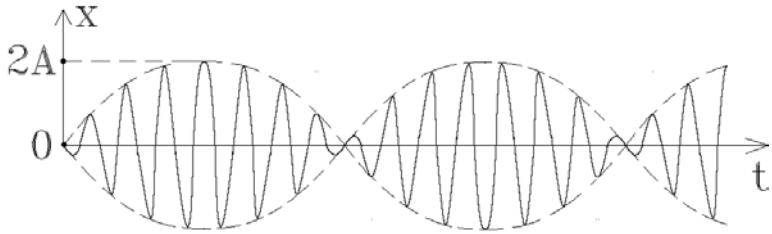

Рис.9.17

В результате получаем биения – почти периодические колебания с частотой

$$\omega + \frac{\Delta\omega}{2} \approx \omega$$

и с амплитудой, которая очень медленно меняется по гармоническому закону с периодом $T = 4\pi/\Delta\omega$ (рис.9.17).

6. Вынужденные колебания

Вынужденные колебания возникают при действии на осциллятор внешней периодической силы, изменяющейся, например, по гармоническому закону с частотой $\omega_{\text{вн}}$: $F_{\text{вн}} = F_0 \cos\omega_{\text{вн}} t$

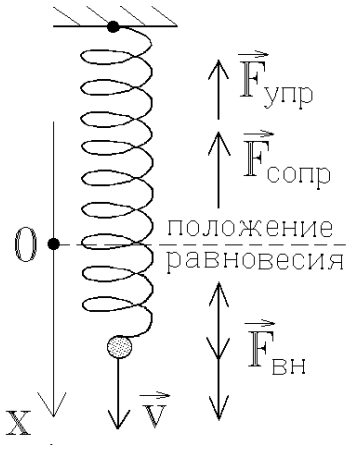

Рис.9.18

Пусть эта сила действует на одномерный осциллятор (рис.9.18), рассмотренный в 3 этой главы. Уравнение его движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - \eta\frac{dx}{dt} + F_{\text{вн x}}$$

называют динамическим уравнением вынужденных колебаний и записывают в виде дифференциального уравнения, аналогичного уравнению (9.9):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{d\,x}{dt} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_{\text{вн}}\,t \qquad (9.15)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что

> общее решение неоднородного дифференциального уравнения является суммой общего решения однородного (с нулевой правой частью) дифференциального уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения.

Иначе говоря, **осциллятор одновременно совершает два типа колебаний**.

Во-первых, это – общее решение однородного уравнения, которое, как уже получено в (9.10), представляет собою затухающие колебания с собственной частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$: $x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega\,t + \varphi_0)$, из-за сопротивления среды они **быстро затухают**.

Во-вторых, это – вынужденные колебания с частотой внешней силы $\omega_{\text{вн}}$, которые остаются после того, как собственные колебания затухнут.

Поэтому для такого, **установившегося со временем режима колебаний** решением уравнения (9.15) будет частное решение в виде гармонической функции:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_{\text{вн}}\, t - \varphi),} \qquad (9.16)$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний, а φ – отставание по фазе от вынуждающей силы.

Для определения A и φ подставим решение (9.16) в уравнение (9.15):

$$-A\omega_{\text{вн}}^2\cos(\omega_{\text{вн}}\, t - \varphi) - 2\beta A\omega_{\text{вн}}\sin(\omega_{\text{вн}}\, t - \varphi) + A\omega_0^2\cos(\omega_{\text{вн}}\, t - \varphi) =$$

$= \dfrac{F_0}{m}\cos\omega_{\text{вн}}\, t$ и преобразуем это соотношение к виду

$$A(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)\cos(\omega_{\text{вн}}\, t - \varphi) + 2\beta A\omega_{\text{вн}}\cos(\omega_{\text{вн}}\, t - \varphi + \pi/2) = \frac{F_0}{m}\cos\omega_{\text{вн}} t.$$

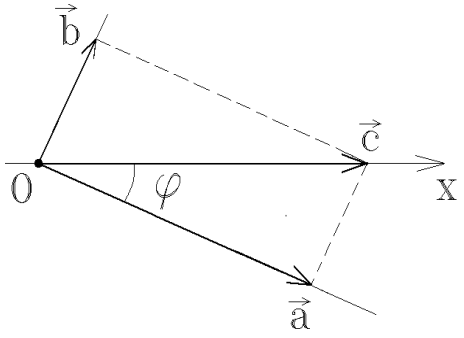

Рис.9.19

Полученное равенство означает, что сумма двух колебаний одинаковой частоты в его левой части равна колебанию той же частоты в правой части. Сложим колебания на векторной диаграмме (рис.9.19).

Вектор в правой части равенства длины $c = \dfrac{F_0}{m}$ имеет начальную фазу, равную нулю, и поэтому направлен по оси x; первый вектор слева длины $a = A(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)$ **отстает** от него по фазе на φ; зато второй вектор слева длины $b = 2\beta A\omega_{\text{вн}}$ опережает первый на $\pi/2$ – поэтому три этих вектора образуют прямоугольный треугольник! Следовательно, согласно теореме Пифагора, $a^2 + b^2 = c^2$ или $A^2(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)^2 + (2\beta A\,\omega_{\text{вн}})^2 = \left(F_0/m\right)^2$, откуда находим амплитуду установившихся вынужденных колебаний:

$$\boxed{A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2)^2 + 4\beta^2\omega_{\text{вн}}^2}}}. \qquad (9.17)$$

Из того же рис.9.19 следует, что $\operatorname{tg}\varphi = b/a$, т.е. установившиеся вынужденные колебания отстают по фазе от колебаний внешней вынуждающей силы на

$$\boxed{\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega_{\text{вн}}}{\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2}}. \qquad (9.18)$$

Заметим, что при $\omega_{вн} > \omega_0$ получается $\varphi < 0$, т.е. вынужденные колебания будут опережать по фазе колебания внешней силы.

Итак: установившиеся вынужденные колебания происходят с постоянной, не зависящей от времени амплитудой, т.е. не затухают, несмотря на сопротивление среды. Это объясняется тем, что работа внешней силы $\int F_0 \cos\omega_{вн} t \cdot dx$ идет на увеличение механической энергии осциллятора и полностью компенсирует ее убывание, происходящее из-за действия диссипативной силы сопротивления среды.

7. Резонанс

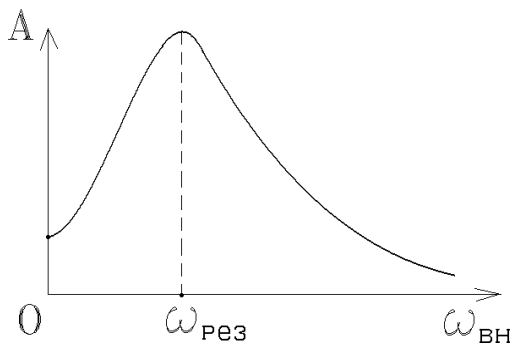

Рис.9.20

Как видно из формулы (9.17), амплитуда вынужденных колебаний A зависит от частоты внешней вынуждающей силы $\omega_{вн}$. График этой зависимости называется резонансной кривой или амплитудно-частотной характеристикой осциллятора (рис.9.20).

То значение частоты внешней силы, при котором амплитуда колебаний становится максимальной, называется резонансной частотой $\omega_{рез}$, а резкое возрастание амплитуды при $\omega_{вн} = \omega_{рез}$ – резонансом.

Условием резонанса будет условие экстремума функции $A(\omega_{вн})$:

$$\left.\frac{dA}{d\omega_{вн}}\right|_{\omega_{рез}} = 0 .$$

Так как числитель в формуле (9.17) – постоянная величина, то достаточно исследовать на экстремум подкоренное выражение в знаменателе. Поэтому из уравнения $\frac{d}{d\omega_{вн}}\left((\omega_0^2 - \omega_{вн}^2)^2 + 4\beta^2\omega_{вн}^2\right) = 0$ находим

$2(\omega_0^2 - \omega_{вн}^2)\cdot(-2\omega_{вн}) + 4\beta^2 \cdot 2\omega_{вн} = 0$ или $\omega_{вн}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$.

Итак, резонансная частота для амплитуды смещения осциллятора определяется выражением

$$\boxed{\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.} \qquad (9.19)$$

При этом резонансным значением амплитуды вынужденных колебаний будет

$$A_{\max} = \frac{F_0/m}{\sqrt{4\beta^4 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Заметим, что при достаточно большом сопротивлении среды $\beta \geq \omega_0 / \sqrt{2}$ **резонанс отсутствует**, и амплитуда $A(\omega_{\text{вн}})$ монотонно убывает с увеличением частоты $\omega_{\text{вн}}$ (рис.9.21). Если же $\beta = 0$, то $A_{\max} \to \infty$ (рис.9.21), что физически бессмысленно. Поэтому **в реальных условиях силы сопротивления среды обязательно действуют на осциллятор.**

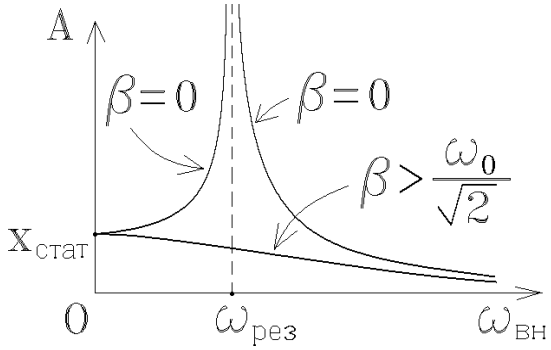

Рис.9.21

На практике чаще интересуются вынужденными колебаниями в случае малого сопротивления среды $\boxed{\beta << \omega_0}$. В этом случае $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$, и резонансная амплитуда вынужденных колебаний может намного (на несколько порядков!) превосходить так называемое <u>статическое смещение</u> осциллятора $x_{\text{стат}} = A\,\big|_{\omega_{\text{вн}} \to 0} = \dfrac{F_0}{m\omega_0}$.

Объясним такое резкое возрастание амплитуды. Для этого найдем величину силы сопротивления при частоте резонанса, т.е. при $\omega_{\text{вн}} \approx \omega_0$:

$$F_{\text{сопр}} = -\eta \frac{d}{dt}\left(A\cos(\omega_{\text{вн}} t - \varphi)\right)\Big|_{\omega_{\text{вн}} = \omega_0} =$$

$$= 2m\,\beta A_{\max}\omega_{\text{вн}} \sin\left(\omega_{\text{вн}}\, t - \varphi\right)\Big|_{\omega_{\text{вн}} = \omega_0} \approx$$

$$\approx -2m\beta\omega_0 \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}\cos\omega_{\text{вн}} t = -F_0 \cos\omega_{\text{вн}} t = -F_{\text{вн}}$$

(с учетом того, что при резонансе, согласно формуле (9.18),

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{2\beta^2} \approx \operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{\beta} \approx \operatorname{arctg}\infty = \pi/2\ ).$$

В случае малого сопротивления β внешняя сила компенсирует в точке резонанса силу сопротивления среды, в результате чего осциллятор раскачивается до очень больших амплитуд

$$A_{\max} \approx \frac{F_0}{2m\beta\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} x_{\text{стат}} = \mathbb{Q}\, x_{\text{стат}}.$$

Величина $\mathbb{Q} = \dfrac{\omega_0}{2\beta}$, характеризующая величину резонанса, называется <u>добротностью осциллятора.</u>

Отметим также, что резонанс существует не только для амплитуды смещения, но и для амплитуд скорости и ускорения. Так, скорость вынужденных колебаний $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega_{\text{вн}}\sin\left(\omega_{\text{вн}}\, t - \varphi\right) = v_0 \cos\left(\omega_{\text{вн}}\, t - \varphi + \dfrac{\pi}{2}\right)$ опережает колебания смещения по фазе на $\pi/2$, а ее амплитуда

$$v_0 = \frac{\omega_{\text{вн}} F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_{\text{вн}}^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_{\text{вн}}^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega_{\text{вн}}} - \omega_{\text{вн}}\right)^2 + 4\beta^2}}$$

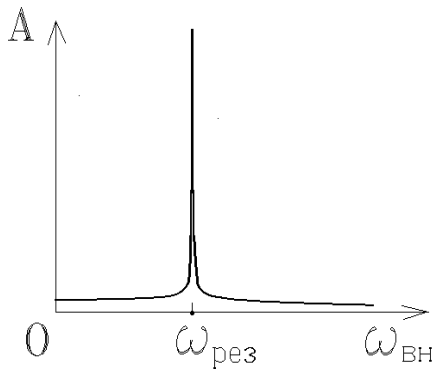

Рис.9.22

всегда имеет резонанс $v_{0\,\max} = \dfrac{F_0}{2m\beta}$ при выполнении условия $\dfrac{\omega_0^2}{\omega_{\text{вн}}} - \omega_{\text{вн}} = 0$, т.е. резонансная частота для скорости

$$\boxed{\omega_{\text{рез}\ v} = \omega_0} \qquad (9.20)$$

не совпадает с резонансной частотой (9.19) для смещения!

На практике явление резонанса используют для выделения и усиления гармонического колебания с определенной частотой. Такие осциллирующие системы **с малым коэффициентом затухания** β называют <u>резонаторами</u>. Их амплитудно-частотная характеристика имеет вид очень узкого пика (рис.9.22).

Любую внешнюю силу (периодическую и даже не периодическую) можно представить в виде ряда или интеграла Фурье (смотри §9.1), т.е. в виде суперпозиции гармонических сил с разными частотами. В резонаторе, согласно рис.9.22, будет усилено только гармоническое колебание с частотой $\omega = \omega_{\text{рез}}$.

Примером может служить простейший акустический резонатор, стенки (мембраны) которого колеблются совместно и заставляют смещаться слои воздуха между ними (рис.9.23). При этом создаются колебания плотности ρ воздуха (стоячие звуковые волны). Эти колебания должны происходить **согласованно** с движением мембран, т.е. в резонаторе могут устано-

виться только звуковые колебания с кратными частотами $\omega_{рез} = \pi\, v_{зв}\, n/l$, где $n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ (l – расстояние между мембранами, $v_{зв}$ – скорость звука). На рис.9.23 показано несколько таких колебаний.

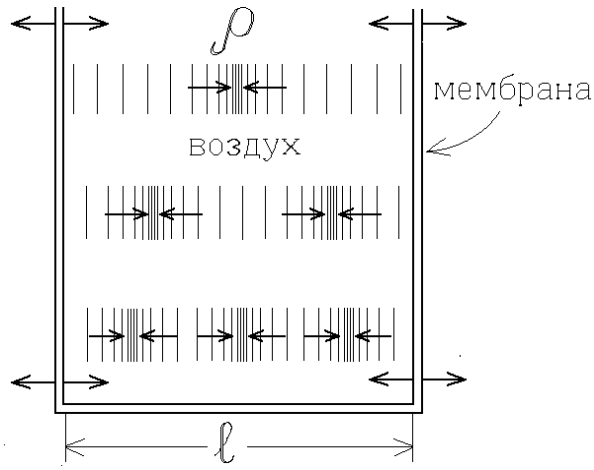

Рис.9.23

Подобной системой будет хрустальный бокал, пустой или заполненный **однородной** жидкостью. При ударе о стенки бокала возникает долгий мелодичный звук, соответствующий аккорду из усиленных звуковых волн кратных частот. Если заполнить бокал шампанским, то при колебаниях плотности содержащийся в нем углекислый газ выделяется в виде пузырьков, на что тратится значительная часть энергии колебаний. Кроме того, среда становится неоднородной, и резонанс сильно ослабевает – при ударе такой бокал издает глухой звук.

Для сравнения: мембраны барабана колеблются независимо друг от друга, и резонанс не возникает (колебания будут связанными – энергия передается через воздух в полости барабана, и поочередно усиливаются колебания то одной, то другой мембраны).

8. Вычисление периода негармонических колебаний

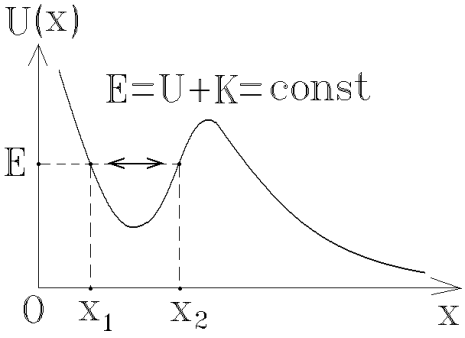

Рис.9.24

Так как механическая энергия E любой частицы или механической системы не должна превышать ее потенциальной энергии U, то она не может покинуть пределы области (x_1, x_2), указанные на рис.9.24. Частица будет совершать колебания между точками поворота x_1 и x_2.

В §9.1 мы уже отметили, что колебания будут гармоническими только для потенциальной кривой, имеющей форму параболы. В случае произвольной функции $U(x)$ колебания будут периодическими, но не гармоническими. Используя закон сохранения энергии, можно найти период колебаний. Из равенства $\dfrac{mv^2}{2} + U(x) = E$ получаем:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}\ .$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим время, в течение которого частица долетит от точки x_1 до точки x_2:

$$t = \int dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}}\ .$$

Очевидно, что это время равно половине периода. Следовательно,

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{2m}\ dx}{\sqrt{E - U(x)}}\ ,$$

т.е. по заданной функции $U(x)$ можно найти (хотя бы в квадратурах) период колебаний любой системы.

Пример: для математического маятника, совершающего колебания с произвольной (не малой) амплитудой (рис.9.25)

$$E = \frac{I_0\omega^2}{2} + mgh = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mgl(1 - \cos\varphi)\ ,\ \text{откуда}$$

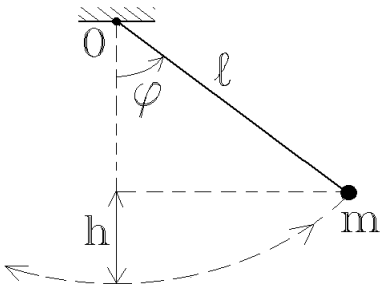

Рис.9.25

$$T = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{\sqrt{2ml^2}\,d\varphi}{\sqrt{E - mgl(1 - \cos\varphi)}}\ ,$$

где φ_0 – наибольший угол отклонения (амплитуда) маятника. Полученный интеграл не выражается в элементарных функциях и является эллиптическим интегралом 1-го рода. Найденный период колебаний не совпадает с простой формулой (9.8) и зависит не только от длины l, но и от массы m, и от амплитуды φ_0 маятника!

Если при измерении времени используются формулы (9.7) или (9.8), то колебания маятников обязаны быть малыми, с амплитудой $\varphi_0 < 5^0$.

9. Параметрические колебания и автоколебания

Колебания в системе с меняющимися со временем параметрами называются параметрическими.

Примером такой системы является математический маятник с перекинутой через блок нитью (рис.9.26), длину l которой можно менять,

подтягивая и отпуская нить. Уравнение малых колебаний такой системы имеет вид:

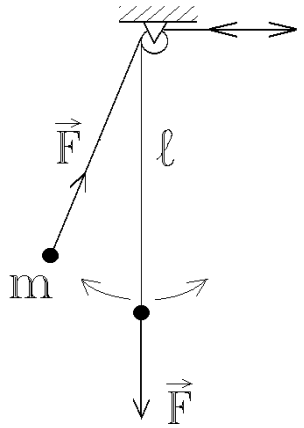

Рис.9.26

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2(t)\,\varphi = 0\,, \qquad \text{где} \quad \omega_0^2(t) = \frac{g}{l(t)}\,.$$

Если изменение параметров производить периодически с периодом, кратным собственному периоду колебаний самой системы, то можно раскачать систему до больших амплитуд – это явление называется параметрическим резонансом. Конечно, для такой раскачки необходимо приложить к осциллятору внешнюю периодическую силу F (рис.9.26).

Подобное параметрическое усиление амплитуды колебаний происходит при раскачивании качелей (рис.9.27). Стоящий на качелях человек в верхней точке траектории распрямляется, совершая работу по поднятию центра масс С и увеличению потенциальной энергии, а в нижней точке – приседает, увеличивая кинетическую энергию движения.

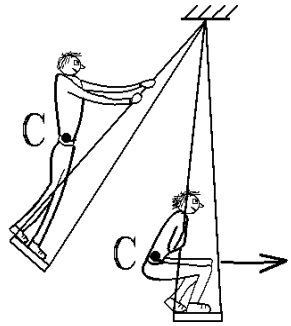

Рис.9.27

Автоколебания – это незатухающие колебания в нелинейной диссипативной системе, поддерживаемые за счет энергии внешнего источника, параметры которого (амплитуда, частота, фаза) определяются свойствами самой осциллирующей системы.

При этом, в отличие от рассмотренных выше вынужденных колебаний, не требуется периодического воздействия извне; потери энергии (диссипация) в точности компенсируются поступлением энергии от **постоянного** внешнего источника.

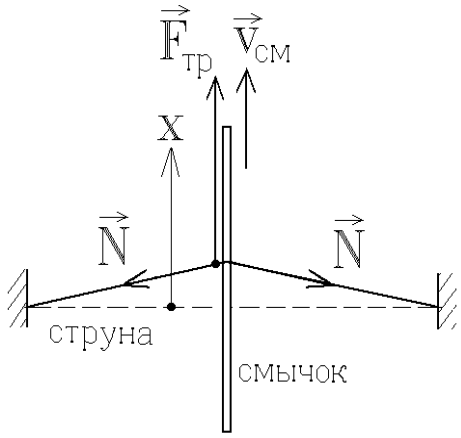

Рис.9.28

Примерами таких систем являются: скрипичная струна, маятник в механических часах, ламповый (или транзисторный) генератор радиоволн. Например, в механических часах энергия сжатой пружины с помощью так называемого анкерного механизма порциями поступает к колеблющемуся маятнику, поддерживая незатухающие колебания.

Рассмотрим подробнее автоколебания скрипичной струны.

Двигаясь с постоянной скоростью

$v_{\text{см}}$, смычок захватывает струну (рис.9.28). Напомним, что перед игрой смычок обязательно канифолят, чтобы увеличить силу сцепления его со струной.

С ростом смещения струны x растет и сила ее натяжения N (участок "а" на рис. 9.29). Когда проекция силы натяжения на направление смещения превысит силу трения покоя $F_{\text{тр. пок.}}$, смычок начинает скользить по струне. Так как сила трения скольжения всегда меньше силы трения покоя, то скорость струны сначала падает (участок "б"), а затем под действием сил натяжения N струна движется в обратном направлении (участок "в"), тормозится и снова начинает двигаться в ту же сторону, что и смычок (участок "г"). Заметим, что амплитуда при отрицательных смещениях меньше, чем при положительных, по причине действия силы трения скольжения. Когда скорость струны сравняется с $v_{\text{см}}$, смычок снова "захватывает" струну, и процесс повторяется.

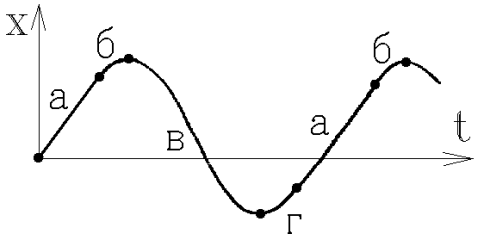

Рис.9.29

Подобные автоколебания возникают при скрипе отворяемой двери или в скрипучей обуви – при смещении (деформации) тела начинает вибрировать небольшой его участок. Неприятный звук связан с тем, что периодическая кривая на рис.9.29 лишь отдаленно похожа на график гармонической функции. Разложив функцию $x(t)$ в ряд или интеграл Фурье, получим совместное звучание множества гармоник с близкими частотами.

Для выделения из этой смеси мелодичного звука с одной частотой рядом со струной располагают акустический резонатор (полый корпус скрипки). Чем чище выделяемый звук, тем дороже скрипка.

Глава 10

Лагранжев метод в механике

1. Обобщённые координаты. Лагранжиан

Числом степеней свободы системы называется минимальное число **независимых** координат, необходимых для полного описания положения (состояния) системы.

Примеры. 1) Свободная частица имеет три степени свободы – её положение определяется тремя координатами, в качестве которых можно взять, например, декартовы координаты x, y, z (рис.10.1).

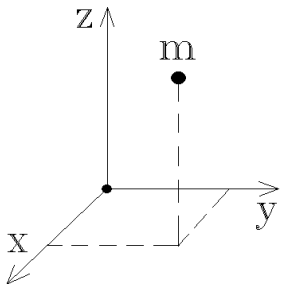

Рис.10.1

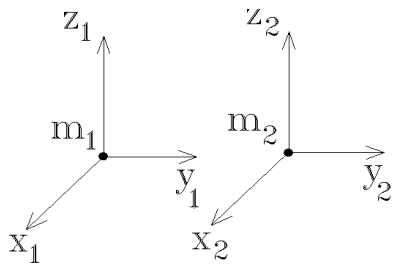

Рис.10.2

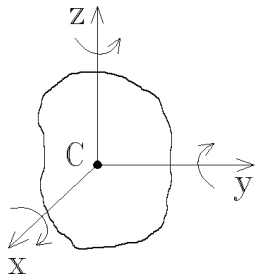

Рис.10.3

2) Две частицы, которые движутся независимо, имеют шесть степеней свободы (рис.10.2). Точно так же система из N частиц (газ) имеет, вообще говоря, $3N$ степеней свободы.

3) Но если эти N частиц образуют абсолютно твёрдое тело, т.е. расстояния между частицами в процессе движения не меняются, то число независимых координат уменьшается до шести, так как положение такого тела задается, например, координатами центра масс x_C, y_C, z_C и углами поворота вокруг координатных осей. Иначе говоря, абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы (рис.10.3).

И вообще, ограничивая свободу движения частицы (тела), т.е. фиксируя какую-либо координату, мы тем самым уменьшаем число степеней свободы рассматриваемой системы.

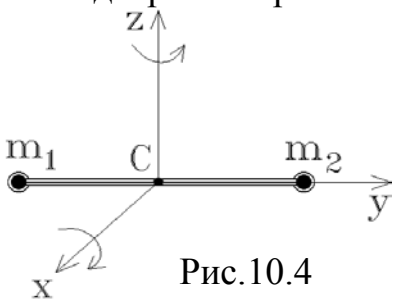

Рис.10.4

Например, частица, движущаяся по заданной кривой (бусинка на жесткой произвольно изогнутой проволоке), имеет всего одну степень свободы (например – длина кривой линии от некоторой фиксированной точки до частицы). Другой пример – двухатомная молекула (т.е. две жестко связанные частицы), которая имеет всего пять степеней свободы x_C, y_C, z_C, φ_x, φ_z (рис.10.4).

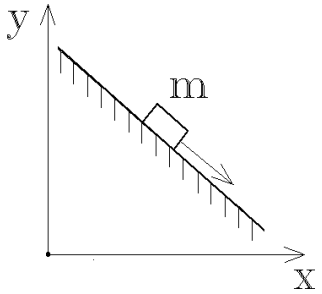

Рис.10.5

Вопрос: сколько степеней свободы у "кирпича", скользящего по наклонной плоскости (рис.10.5)?

Назовём все **независимые** координаты системы с N степенями свободы её <u>обобщёнными координатами</u> и обозначим их буквами q_i, $i = 1,\ 2, \ldots\ , N$.

В число обобщенных координат входят как линейные координаты, так и угловые. Например, для твердого тела (рис.10.3) $q_1 = x_C$, $q_2 = y_C$, $q_3 = z_C$, $q_4 = \varphi_x$, $q_5 = \varphi_y$, $q_6 = \varphi_z$.

Производные от обобщенных координат по времени называются <u>обобщенными скоростями</u>: $\dot{q}_i \equiv \dfrac{dq_i}{dt}$. В число обобщенных скоростей также входят как линейные $\vec{v}_i$, так и угловые скорости $\vec{\omega}_i$.

Вспомним, что для всех изучавшихся нами систем кинетическая энергия K зависела только от обобщенных скоростей (например, в случае плоского движения $K = mv_C^2/2 + I\omega^2/2$), а потенциальная U – только от обобщенных координат.

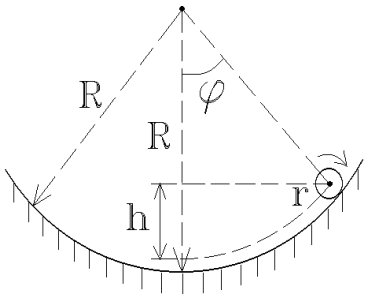

Рис.10.6

Пример: сплошной цилиндр радиуса r, катающийся по дну цилиндрической поверхности радиуса R без проскальзывания (рис.10.6). Это – система с одной степенью свободы, в качестве которой удобно взять угол φ на рис.10.6. Тогда кинетическая энергия будет равна $K = mv_C^2/2 + I\omega^2/2 = \ = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2$, так как $I = mr^2/2$ и $v_C = \omega\, r = \ = \dot{\varphi}(R-r)$, а потенциальная энергия зависит от угловой переменной φ:

$$U = mgh = mg(R-r)(1-\cos\varphi)\ .$$

<u>Функцией Лагранжа</u> или просто <u>лагранжианом</u> системы называется разность её кинетической и потенциальной энергий, т.е.

$$\boxed{\mathsf{L} = K - U = K(\dot{q}_i) - U(q_i)}.$$

Из этого определения следует, что лагранжиан является функцией обобщенных координат и скоростей: $\mathsf{L} = \mathsf{L}\left(q_i,\ \dot{q}_i\right)$.

Пример: для частицы в центральном поле (задача Кеплера)

$\mathsf{L} = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{GMm}{r}$, где $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2$ (r, φ – полярные координаты).

2. Принцип наименьшего действия

Определим ещё одно понятие – <u>действие</u> S:

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} \mathsf{L}\left(q_i(t), \dot{q}_i(t)\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathsf{L} dt.}$$

Чрезвычайно важно, что **действие зависит от вида траектории.**

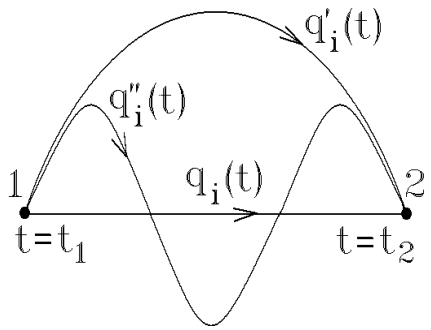

Рис.10.7

Поясним это. В начальный момент система имела координаты $q_i(t_1)$, а в конечный – $q_i(t_2)$. Но прийти в конечное состояние она могла **по разным траекториям** (рис.10.7), и действие S тоже было бы разным. Выражение f, зависящее от независимой переменной x, называется функцией $f(x)$, а выражение F, зависящее **от вида функции**, называется <u>функционалом</u>. Итак, действие – это функционал, зависящий от траектории системы.

При бесконечно малом изменении независимой переменной dx функция получает приращение $df = \dfrac{\partial f(x, \ ...)}{\partial x} dx$. Аналогично, при бесконечно малом изменении **вида функции** $\delta f(x)$ функционал получает приращение

$$\boxed{\delta F = \frac{\partial F\left(f(x), \ ...\right)}{\partial f(x)} \delta f(x).}$$

Это приращение функционала называется <u>вариацией</u>.

В нашем случае немного изменив траекторию движения, т.е. каждую из обобщенных координат, на величину $\delta q_i(t)$, получим изменение действия S на величину вариации $\delta S = \sum_i \left(\dfrac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \dfrac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right)$.

Эта формула аналогична правилу дифференцирования функции нескольких переменных.

Теперь мы можем сформулировать основной принцип, из которого

следуют все законы механики, и не только механики. Он лежит в основе всей теоретической физики и применяется в различных её областях, включая классическую и квантовую теорию поля. По сути дела, это единственный принцип, позволяющий получать результаты в аналитической форме.

Принцип наименьшего действия:
система всегда движется по такой траектории $q_i(t)$, для которой функционал действия минимален. Иначе говоря, действие S всегда остается наименьшим.

3. Уравнения Лагранжа-Эйлера

В точке минимума (экстремума) приращение функции равно нулю, т.е. $df = 0$. Аналогично минимум действия означает, что его вариация $\delta S = 0$.

Для простоты будем считать, что лагранжиан L зависит только от одной обобщенной координаты q. Тогда

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathsf{L} dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 .$$

Учтем, что $\delta \dot{q} = \delta \left(\frac{dq}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta q$.

Для вычисления второго слагаемого воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}}}_{f} \frac{d}{dt} \underbrace{(\delta q)}_{g} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right)}_{fg} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}} \right)}_{f} \underbrace{\delta q}_{g} dt$$

Тогда вариация действия принимает вид:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \, dt + \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \qquad (10.1)$$

По условию задачи начальное и конечное положения системы фиксированы, поэтому начальные и конечные координаты меняться не могут, т.е. $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Следовательно, последнее слагаемое в (10.1) обращается в нуль.

Если же лагранжиан L зависит от многих обобщенных координат и скоростей, то он дифференцируется как функция многих переменных, и в выражении (10.1) производится суммирование, т.е.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \, dt = 0 .$$

Но q_i – независимые координаты и их изменения δq_i могут быть любыми функциями t. Поэтому для того чтобы интеграл был равен нулю, необходимо равенство нулю всех множителей при δq_i:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial q_i} = 0, \quad \text{где} \quad \mathrm{i} = 1,\ 2, \ldots,\ \mathrm{N}.}$$

Это –- уравнения Лагранжа – Эйлера.

Их выполнение эквивалентно выполнению принципа наименьшего действия $\delta S = 0$.

Для того чтобы понять, в чем суть уравнений Лагранжа–Эйлера, рассмотрим конкретный пример, а именно: запишем эти уравнения для одной частицы, движущейся в поле с потенциальной энергией $U(x, y, z)$.

В этом случае $\mathsf{L} = K - U = \dfrac{m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)}{2} - U(x, y, z)$, а

$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z, \quad \dot{q}_1 = v_x, \quad \dot{q}_2 = v_y, \quad \dot{q}_3 = v_z$ и, например, для координаты q_1 получаем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(m v_x\right) + \frac{\partial U}{\partial x} = m\frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Но так как $F_x = -\left(\mathrm{grad}\, U\right)_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$ – проекция силы на ось x, то в итоге имеем:

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x .$$

Вывод: **уравнения Лагранжа–Эйлера – это уравнения динамики (законы Ньютона), которые действительно приводят к минимальности действия.**

Возникает вопрос: зачем же использовать лагранжев метод вместо решения уравнений движения ньютоновской механики?

Дело в том, что в случае **сложных** систем практичнее и значительно проще записав L, затем получить уравнения Лагранжа–Эйлера и проинтегрировать их.

Пример. Найти закон колебаний двух грузиков на пружинках с коэффициентами упругости k_1 и k_2, изображенных на рис.10.8, которые могут двигаться только вдоль оси x. Данная система имеет две степени свободы, соответствующие двум координатам x_1 и x_2 – смещениям каждого из грузиков от положения равновесия. Поэтому лагранжиан системы

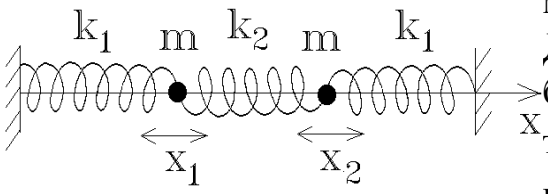

Рис.10.8

$$\mathsf{L} = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} - \frac{k_1 x_1^2}{2} - \frac{k_1 x_2^2}{2} - \frac{k_2\left(x_1 - x_2\right)^2}{2}.$$

а уравнения Лагранжа–Эйлера $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathsf{L}}{\partial \dot{x}_{1,2}} - \dfrac{\partial \mathsf{L}}{\partial x_{1,2}} = 0$ принимают вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(m\dot{x}_1\right) + k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left(m\dot{x}_2\right) + k_1 x_2 - k_2\left(x_1 - x_2\right) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + \left(k_1 + k_2\right)x_1 - k_2 x_2 = 0, \\ m\ddot{x}_2 + \left(k_1 + k_2\right)x_2 - k_2 x_1 = 0. \end{cases}$$

Введем две новые переменные: $u = x_1 + x_2$ и $v = x_1 - x_2$ – так называемые нормальные колебания. Тогда, складывая и вычитая полученные уравнения, найдем:

$$\begin{cases} m\ddot{u} + k_1 u = 0, \\ m\ddot{v} + \left(k_1 + 2k_2\right)v = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dt^2} + \dfrac{k_1}{m}u = 0, \\ \dfrac{d^2 v}{dt^2} + \dfrac{\left(k_1 + 2k_2\right)}{m}v = 0. \end{cases}$$

Последние уравнения есть не что иное, как уравнения свободных гармонических колебаний, поэтому

$$u = A\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{m}}t + \varphi_1\right), \quad v = B\cos\left(\sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}t + \varphi_2\right)$$

и окончательно:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(u \pm v\right) = \frac{1}{2}\left[A\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{m}}t + \varphi_1\right) \pm B\cos\left(\sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}t + \varphi_2\right)\right].$$

Это – ответ (попробуйте получить его, интегрируя обычные уравнения движения!).

4. Инвариантность и законы сохранения. Теорема Нётер

Физические законы называются инвариантными относительно некоторых преобразований, если их форма не меняется при этих преобразованиях.

Пример. Законы классической механики инвариантны относительно преобразований Галилея: $t' = t$; $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}_0 t$; При переходе в любую другую инерциальную систему отсчёта не меняются законы Ньютона (а также лагранжиан L , и действие S).

В 1918 г. немецкий математик Эмми Нётер сформулировала фундаментальную теорему теоретической физики, названную впоследствии первой теоремой Нётер.

Теорема Нётер: каждой инвариантности теории (или действия S) соответствует некоторая сохраняющаяся величина (закон сохранения). И наоборот, если некоторая физическая величина сохраняется, то физические законы не меняются при каком-то преобразовании. Число сохраняющихся величин равно числу параметров преобразования.

Проиллюстрируем теорему Нётер на конкретных примерах.

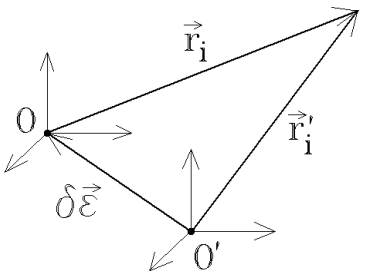

Рис.10.9

1) Однородность пространства – **законы физики не меняются при смещении начала координат** (прибор можно перенести из одной точки пространства в другую – результаты измерений не изменятся, если прочие физические условия в этих точках одинаковы). Сместим радиус-векторы всех точек одинаково на бесконечно малый **постоянный** вектор $\delta\vec{r}_i = \delta\vec{\varepsilon}$, т.е. $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \delta\vec{\varepsilon}$. Это равносильно смещению начала координат из точки O в точку O' (рис.10.9). При этом скорости частиц не изменяются: $\vec{v}_i' = \vec{v}_i$.

Вследствие инвариантности действие S и лагранжиан L не должны измениться. Так как $q_i = x_i,\ y_i,\ z_i$, то

$$\delta\mathsf{L} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial z_i}\delta z_i \right) \equiv \sum_i \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{r}_i}\delta\vec{r}_i = 0 .$$

Здесь символом частной производной по вектору $\vec{r}$ обозначен градиент: $\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial z}\vec{k}$. Аналогично. $\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial v_x}\vec{i} + \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial v_y}\vec{j} + \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial v_z}\vec{k}$.

Используя уравнения Лагранжа – Эйлера в виде

$$\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i} = 0,\ i = 1, 2, ..., N, \qquad (10.2)$$

получим

$$\delta \mathsf{L} = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i} \right) \delta\vec{\varepsilon} = 0.$$

Так как $\delta\vec{\varepsilon}$ – произвольно, то $\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i} \right) = 0$, и поэтому $\sum_i \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i} = \text{const}$.

Но из выражения $\mathsf{L} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} - U(\vec{r}_i)$ следует, что $\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i} = m_i \vec{v}_i$.

Следовательно $\boxed{\sum m_i \vec{v}_i = \text{const}.}$

Вывод: **из однородности пространства следует закон сохранения импульса**.

Замечание: используемое преобразование содержит три независимых параметра $\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y$ и $\delta\varepsilon_z$, следовательно, ему соответствуют три сохраняющиеся проекции импульса: p_x, , p_y и p_z.

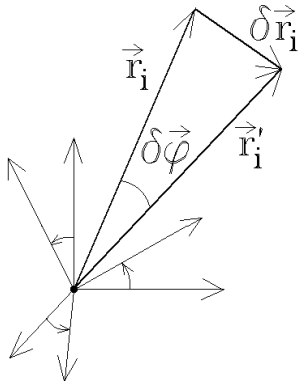

Рис.10.10.

2) <u>Изотропность пространства</u> – **законы физики не меняются при повороте системы отсчета на постоянный угол** $\delta\vec{\varphi}$ (измерительный прибор можно повернуть без изменения результатов измерения, если при этом не меняются прочие физические условия).

При повороте системы отсчета на угол $\delta\vec{\varphi}$ радиус-вектор i-ой частицы изменится на величину (рис.10.10) $\delta\vec{r}_i = \left[\delta\vec{\varphi},\ \vec{r}_i\right]$, а ее скорость – на величину $\delta\vec{v}_i = \left[\delta\vec{\varphi},\ \vec{v}_i\right] = \frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i$. Тогда, используя уравнения (10.2), получаем:

$$\delta \mathsf{L} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{r}_i}\delta\vec{r}_i + \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i}\delta\vec{v}_i \right) = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i}\delta\vec{r}_i + \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i}\frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i \right) = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i}\delta\vec{r}_i \right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i}\left[\delta\vec{\varphi},\ \vec{r}_i\right] \right) = 0,$$ и, следовательно, $\sum_i \left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i}\left[\delta\vec{\varphi},\ \vec{r}_i\right] \right) = \text{const}$.

Подставляя сюда $\partial \mathsf{L}/\partial \vec{v}_i = m_i \vec{v}_i$ и совершая циклическую перестановку векторов, находим: $\sum_i \delta\vec{\varphi}\left[\vec{r}_i,\ m_i \vec{v}_i\right] = \text{const}$, откуда окончательно получаем

$$\sum_i \left[\vec{r}_i,\ m_i\vec{v}_i\right] = \text{const}.$$

Вывод: **из изотропности пространства следует закон сохранения момента импульса.**

Замечание: используемое преобразование также содержит три независимых параметра $\delta\varphi_x$, $\delta\varphi_y$ и $\delta\varphi_z$, следовательно, ему соответствуют три сохраняющиеся проекции: L_x, L_y и L_z.

3) Однородность времени – **законы физики не меняются, если сдвинуть начальный момент времени** (измерения, проведенные вечером, дадут тот же результат, что и проведенные утром, при одинаковых прочих условиях).

Соответствующее преобразование имеет вид: $t' = t + \delta t$.

Но ни в K, ни в U время явно не входит. Поэтому, чтобы найти отвечающий этой инвариантности закон сохранения, возьмем полную производную от лагранжиана, опять-таки используя уравнения (10.2):

$$\frac{d\mathsf{L}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{r}_i}\frac{d\vec{r}_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i}\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i}\vec{v}_i + \sum_i \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i}\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i}\vec{v}_i\right).$$

Перенесем $\frac{d\mathsf{L}}{dt}$ в правую часть последнего равенства. Тогда получим:

$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial \vec{v}_i}\vec{v}_i - \mathsf{L}\right) = 0$, т.е. $\sum m_i\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i - \mathsf{L} \equiv \sum m_i\vec{v}_i^2 - K + U = \text{const}$ или

$$\boxed{K + U = \text{const}}$$

Вывод: **из однородности времени следует закон сохранения полной механической энергии.**

Замечание: используемое преобразование содержит всего один параметр t, поэтому ему соответствует одна сохраняющаяся величина – энергия системы.

Пример. Пусть физические величины (например, K, U) явно зависят от времени. Допустим, что ускорение свободного падения g меняется в течение суток, скажем: $g_{\text{утром}} < g_{\text{вечером}}$. Так как $U = mgh$, то, поднимая тело вверх утром и опуская его вниз вечером, мы сможем получать механическую энергию – это невозможный вечный двигатель!

Закон сохранения энергии при этом не выполняется.

Итак: законы сохранения и динамика того мира, в котором мы живем, определяются свойствами пространства и времени.

Глава 11.

Основы специальной теории относительности

1. Опыты Майкельсона – Морли

В предыдущей главе мы убедились, что законы механики определяются свойствами инвариантности пространства – времени. Так, инвариантность относительно преобразований Галилея приводит к классическим законам сохранения импульса, момента импульса и энергии.

В действительности пространство и время того мира, в котором мы живем, преобразуются по другим законам, не совпадающим с преобразованиями Галилея (2.2). Первым это экспериментально показал в 1881 г. американский физик Альберт Майкельсон в опытах по определению скорости Земли. В 1887 г. совместно с Эдвардом Морли эти опыты были повторены с более высокой точностью.

В течение 19 века свет или электромагнитные волны считались колебаниями особой **неподвижной** среды – эфира, заполняющего всё космическое пространство. Скорость распространения световых волн относительно неподвижного эфира должна была совпадать со скоростью света c в вакууме и быть одинаковой во всех направлениях.

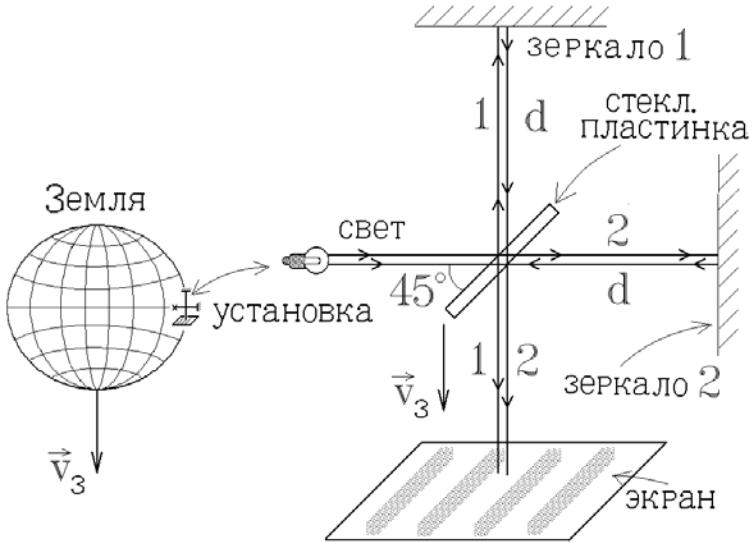

Рис.11.1

Майкельсон и Морли пытались измерить скорость движения Земли $v_З$ относительно эфира. Схема их опыта показана на рис.11.1. Прибор, изображенный на этом рисунке, называется интерферометром Майкельсона. Лучи света от источника частично отражаются от верхней плоскости тонкой стеклянной пластинки, ориентированной под углом 45^0 (луч 1), а частично проходят сквозь неё (луч 2). Затем, отразившись от плоских зеркал, луч 1 проходит сквозь пластинку, а луч 2 отражается от её нижней плоскости и вместе с лучом 1 попадает на экран. По смещению интерференционных полос на экране можно очень точно определить разность хода лучей 1 и 2, т.е. измерить разность времени движе-

ния $t_1 - t_2$ этих лучей. Такой прибор служит своеобразными часами.

Пусть расстояния от пластинки до плоских зеркал одинаковы и равны d. Так как установка движется вместе с Землёй со скоростью $v_З$, то согласно классической теореме сложения скоростей луч 1 приближается к движущемуся с скоростью $v_З$ зеркалу 1 со скоростью $c + v_З$, а удаляется от него со скоростью $c - v_З$. В результате луч 1 должен пройти расстояние d до зеркала 1 и обратно за время $t_1 = \dfrac{d}{c+v_З} + \dfrac{d}{c-v_З} = \dfrac{2cd}{c^2 - v_З^2}$.

Луч 2 должен двигаться в перпендикулярном направлении со скоростью c, но за время его движения зеркало 2 успевает сместиться на очень малое расстояние $v_З t_2$, поэтому $\left(\dfrac{ct_2}{2}\right)^2 = d^2 + \left(\dfrac{v_З t_2^2}{2}\right)^2$ (рис.11.2), откуда $t_2 = 2d \Big/ \sqrt{c^2 - v_З^2}$.

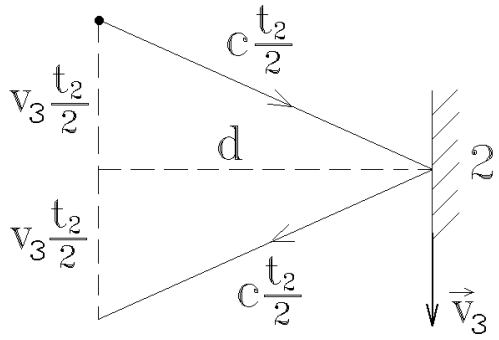

Рис.11.2

Очевидно, что $t_1 \neq t_2$.

Но во всех проведенных опытах измерения показывали $t_1 = t_2$!

Следовательно, для световых лучей классическая теорема сложения скоростей, а вместе с ней и преобразования Галилея приводят к неверным результатам, т.е. классическая механика оказывается не применимой.

Замечание. Измерения Майкельсона – Морли не могли быть результатом случайного совпадения скорости Земли и скорости эфира (через полгода Земля движется по орбите в обратном направлении, а измерения по-прежнему дают $t_1 = t_2$). Если же предположить, что Земля при движении "захватывает" часть эфира, то при переходе от неподвижного эфира вдали от Земли к эфиру, движущемуся вблизи неё, лучи света должны отклоняться (аберрация света). **Видимое** положение звёзд на небе при этом смещается – звёзды начнут описывать замкнутые траектории. Всё это не наблюдается, и поэтому гипотеза эфира, как светоносной среды, оказалась неверной и была отброшена.

2. Постулаты специальной теории относительности

Объяснить без видимых противоречий результаты опытов Майкельсона—Морли первыми смогли Джордж Фицджеральд и Хенрик Лоренц.

Они предложили гипотезу о том, что при переходе из неподвижной в движущуюся со скоростью $\vec{v}$ инерциальную систему отсчета все продольные размеры (в направлении скорости $\vec{v}$) должны уменьшиться в $\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^{-1}$ раз, а поперечные размеры меняться не должны (из расчетов предыдущего параграфа видно, что при добавлении дополнительного множителя $\sqrt{c^2-v^2}/c$ всегда окажется $t_1 = t_2$). Лоренц также вывел новые преобразования координат, заменяющие преобразования Галилея (2.3), и приводящие к сокращению продольных размеров. Аналогичные преобразования получили позже Анри Пуанкаре и другие.

Однако эта гипотеза не объясняла главного – причин лоренцева сокращения продольных размеров. Кроме того, она по-прежнему предполагала существование абсолютной (связанной ранее с неподвижным эфиром) системы отсчёта, т.е. нарушала принцип относительности всех инерциальных систем.

Удовлетворительное объяснение было дано только в 1905 г. Альбертом Эйнштейном (1879–1955), служившим в то время техническим экспертом третьего класса в Швейцарском патентном бюро в Берне.

Эйнштейн сформулировал два постулата (принципа), которые и лежат в основе специальной теории относительности (СТО).

1) Принцип относительности Эйнштейна: **все** законы физики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета (т.е. инвариантны при переходе от одной ИСО к другой). Иначе говоря, **никакими** опытами нельзя установить покоится ли ИСО или движется неускоренно.

2) Принцип постоянства скорости света: скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от скорости и направления движения источника света.

Из этих постулатов следует, что скорость света в вакууме является предельной скоростью, и ни одно тело, ни одно взаимодействие не может иметь скорость большую, чем $c = 2{,}9997 \cdot 10^8$ м/с.

В отличие от этого утверждения классическая механика Ньютона предполагает дальнодействие, т.е. мгновенную передачу взаимодействия (с бесконечной скоростью).

3. Одновременность и синхронизация часов

Постулат о независимости скорости света c от скорости системы отсчёта требует отказа от некоторых понятий, **казавшихся очевидными** в

ньютоновской механике. Так, оказывается неверным утверждение о том, что время меняется одинаково во всех ИСО $t' = t$, лежащее в основе преобразований Галилея (2.3).

Два события, происходящие **одновременно** $(t_1 = t_2)$ в одной ИСО, будут **неодновременными** $(t_1' \neq t_2')$ в другой системе отсчета. Иначе говоря, события, одновременные для неподвижного наблюдателя, будут неодновременны для движущегося наблюдателя. Покоящиеся и движущиеся часы идут по-разному!

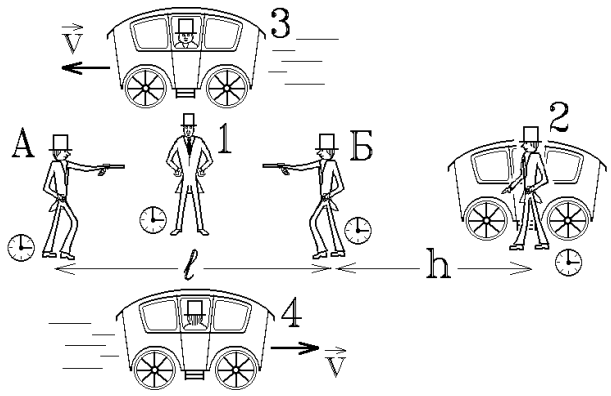

Рис.11.3

Этот факт не связан с конечностью скорости света. Рассмотрим следующий пример, изображенный на рис.11.3. Пусть дуэлянты A и $Б$ на рис.11.4 выстрелили одновременно. Секундант 1, стоящий на одинаковом удалении от них, также увидит моменты выстрелов одновременно. Для наблюдателя 2, покоящегося относительно дуэлянтов и находящегося в одной системе отсчета с ними, эти события (моменты выстрелов) также одновременны. Но **увидит** он их уже не одновременно.

В обыденной жизни мы привыкли считать, что все видимые в данный момент события происходят одновременно. В действительности мы наблюдаем картину событий, происходящих в разные моменты времени: чем дальше предмет, тем более удаленное по времени состояние предмета наблюдается. Так свет от дуэлянта $Б$ дойдёт до наблюдателя 2 за время h/c, а от дуэлянта A – за время $(l+h)/c$ (рис.11.3). Два события, одновременные в некоторой системе отсчета, **наблюдаются** в этой же системе неодновременно, что связано с конечностью скорости света.

Неодновременными моменты выстрелов будут для наблюдателей в движущихся каретах 3 и 4, находящихся **в другой инерциальной системе отсчета**. Для наблюдателя 3 раньше выстрелит дуэлянт A, а для наблюдателя 4 – сначала дуэлянт $Б$, а потом A. Однако для любого из наблюдателей пуля не может попасть в одного из дуэлянтов, прежде чем выстрелит другой. Это означало бы, что пуля движется быстрее скорости света.

Объяснение этого факта будет дано в следующем разделе. Но надо учесть, что, говоря об одновременности событий, происходящих в разных точках системы, приходится сравнивать показания часов, находящихся в

этих точках. Поэтому все часы во всех точках одной и той же ИСО должны быть синхронизованы, т.е. должны одновременно показывать одно и то же время (рис.11.3). Но если переносить часы из одной точки в другую, то какое-то время они будут **двигаться**, ход времени в них по сравнению с неподвижными часами изменится, а синхронизация нарушится.

Синхронизовать можно только часы, неподвижные друг относительно друга.

Пользуясь постулатом постоянства скорости света c, Эйнштейн предложил следующую процедуру синхронизации часов, позволяющую избежать их перемещения: от эталонных часов посылается световой сигнал ко всем другим часам, удалённым на расстояние l. Если на эталонных часах в момент отправления сигнала было время t_0, то на всех прочих часах в момент приёма сигнала следует установить время $t_0 + l/c$.

4. Следствия постулатов Эйнштейна

Рассмотрим более детально выводы, следующие из постулатов СТО. Будем считать, что система K покоится, а другая инерциальная система K' движется относительно неё со скоростью $\vec{v}_0$. Для удобства всегда будем направлять оси Ox и $O'x'$ этих систем вдоль постоянного вектора $\vec{v}_0$ вдоль одной линии (рис.11.4).

4.1. Неизменность поперечных размеров

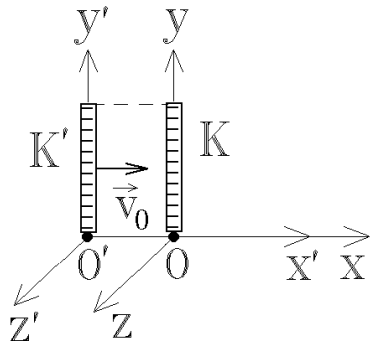

Рис.11.4

Пусть вдоль осей Oy и $O'y'$ установлены одинаковые линейки. В тот момент, когда движущаяся линейка проходит мимо неподвижной, сравниваются координаты их верхних концов (рис.11.4).

Очевидно, что $y = y'$, иначе можно было бы **отличить** движущуюся систему отсчета от неподвижной, что противоречит принципу относительности.

Вывод: поперечные размеры тел при движении не меняются, т.е. $y' = y, \quad z' = z.$

4.2. Релятивистское замедление времени

Пусть теперь в системе K' покоятся предложенные А.Эйнштейном и П.Ланжевеном "световые часы" (рис.11.5,а). Луч света в них отражается от зеркала А, доходит до зеркала В и возвращается обратно в А за время

$\Delta t' = 2d/c$ – это и будет периодом "световых часов".

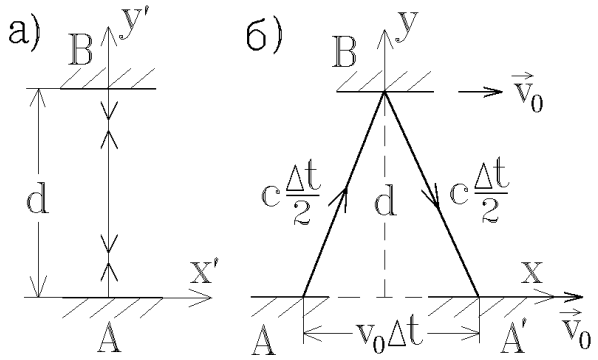

Рис.11.5

Но в системе K эти часы движутся со скоростью v_0, и за время $\Delta t/2$, пока луч проходит расстояние между зеркалами, они успевают сместиться на расстояние $v_0\,\Delta t/2$ (рис.11.5,б). Поэтому

$$d^2 = \left(c\frac{\Delta t}{2}\right)^2 - \left(v_0\frac{\Delta t}{2}\right)^2,$$

откуда $(\Delta t)^2 = \dfrac{4d^2}{c^2 - v_0^2}$ и $\Delta t = \dfrac{2d}{c\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$. Итак:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} > \Delta t'}. \qquad (11.1)$$

Вывод: время течет по-разному в движущихся относительно друг друга системах отсчета. Более того, для движущихся часов период оказывается большим, чем для неподвижных, или иначе: движущиеся часы всегда отстают по сравнению с неподвижными!

Темп времени определяет продолжительность любых процессов. Например, пока читатель прочтёт эту страницу, его сердце совершит определенное число ударов, **одинаковое для любого наблюдателя**, и неподвижного, и движущегося. Но **длительность** физического процесса (биения сердца) будет для разных наблюдателей различной.

Если какая-либо система движется относительно наблюдателя со скоростью v_0, то для этого наблюдателя все процессы в движущейся системе замедляются в $\left(\sqrt{1 - v_0^2/c^2}\right)^{-1}$ раз. Этот эффект называется релятивистским замедлением времени.

Собственная или истинная длительность процесса определяется по часам, **неподвижным относительно системы, в которой протекает процесс**. Такие часы называются собственными и показывают они собственное время τ. Именно по этому времени, отсчитанному по своим собственным часам, живет любой наблюдатель, и именно оно замедляется для другого, движущегося наблюдателя.

Рассмотрим теперь систему, движущуюся с ускорением. Её собст-

венные часы идут в прежнем темпе, так как в этой системе они покоятся. Важно, что это **идеальные** часы, показывающие истинную длительность всех процессов. В реальных часах, например, в маятниковых, ускорение системы изменит период колебаний маятника!

Собственное время τ течёт с одной скоростью во всех системах отсчета, и инерциальных, и неинерциальных.

Эйнштейн предположил, что для находящегося **в инерциальной системе** неподвижного наблюдателя замедление времени ускоренных часов зависит не от их ускорения, а только от мгновенного значения скорости (это предположение называется гипотезой часов).

Тогда можно считать, что в течение бесконечно малого промежутка времени dt скорость часов v практически постоянна, и применить формулу (11.1):

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Проинтегрировав последнее выражение, находим, что движущиеся часы всегда покажут бóльшую длительность процесса Δt, чем неподвижные (собственные):

$$\Delta\tau = \int_0^{\Delta t} \sqrt{1 - v^2(t)/c^2}\, dt < \Delta t\,. \qquad (11.2)$$

Пример: μ – мезоны образуются в атмосфере на высоте $20 \div 30$ км при бомбардировке атомов атмосферы космическими лучами. Их собственное время жизни $\Delta\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ с (спустя это время они распадаются), и, казалось бы, что μ–мезоны могут пролететь расстояние не больше, чем $v_0\,\Delta\tau < c\Delta\tau = 3 \cdot 10^8$ м/с $\cdot\, 2 \cdot 10^{-6}$с $= 600$ м. Но часть образовавшихся μ–мезонов движется со скоростью $v_0 \approx 0{,}9997$с, и поэтому **для нас** они живут $\Delta t = \dfrac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$ и, проходя расстояние $\Delta t \cdot v_0 \approx 30$ км, достигают поверхности Земли.

4.3. Парадокс близнецов и его объяснение

В 1971 – 1972 г. релятивистское замедление времени измерили в США непосредственно. Для этого синхронизовали атомные часы, измеряющие время с огромной точностью. Одни часы оставляли в лаборатории 1, а другие помещали в реактивный самолет 2, облетавший вокруг Земли

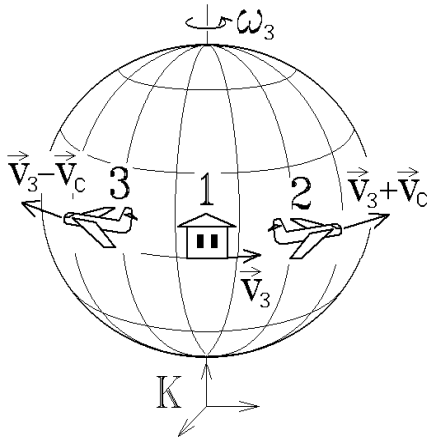

Рис.11.6

(рис.11.6). После облёта оказалось, что часы на самолёте 2 (движущиеся часы) отстали от лабораторных часов приблизительно на $0,2$ мкс.

Однако с точки зрения пилота этот результат кажется странным: для него часы 2 покоились, а часы 1 в лаборатории двигались относительно самолёта. Поэтому с точки зрения летчика отстать должны были наоборот лабораторные часы.

Это **кажущееся** противоречие называется парадоксом близнецов. Пусть один из близнецов (Ваня) остается на Земле, а другой (Вася) улетает на ракете, движущейся с околосветовой скоростью $v_0 \approx c$ (рис.11.7). С точки зрения Вани движущийся Вася живет "медленнее" и после возвращения должен казаться моложе. Но Вася может сказать, что это он покоится, а Ваня вместе с Землей движется со скоростью $-\vec{v}_0$, и после возвращения именно Ваня будет более молодым. Возникает типичный парадокс.

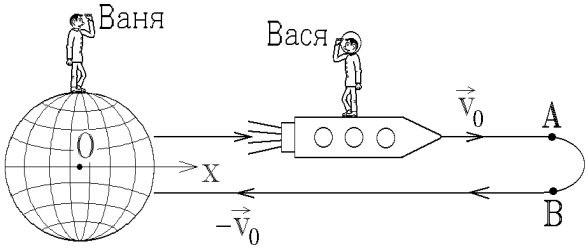

Рис.11.7

Объяснить парадокс близнецов достаточно просто: формула (11.1) связывает интервалы времени **в инерциальных системах отсчёта**, для которых $\vec{v}_0 = \text{const}$. В таких системах и Ваня, и Вася живут по своему собственному времени τ, каждому из них кажется, что другой близнец живёт медленнее (системы равноправны), но встретиться и сравнить свой возраст они не смогут **никогда**, так как удаляются друг от друга с постоянной скоростью v_0!

В примере на рис.11.7 системы не равноправны. Если считать, что Земля покоится в некоторой ИСО, то ракета для возвращения на Землю должна участок пути двигаться с ускорением, т.е. **система ракеты неинерциальна!**

На рис.11.8,а изображена зависимость расстояния x между ракетой и Землёй от времени (на прямолинейных участках ОА и ВС ракета движется с постоянной скоростью v_0). Пусть по собственным часам космонавта время движения на отрезках ОА и ВС равно $\Delta\tau$, а время ускоренного движения на отрезке АВ равно $\Delta\tau_y$, т.е. к моменту возвращения на

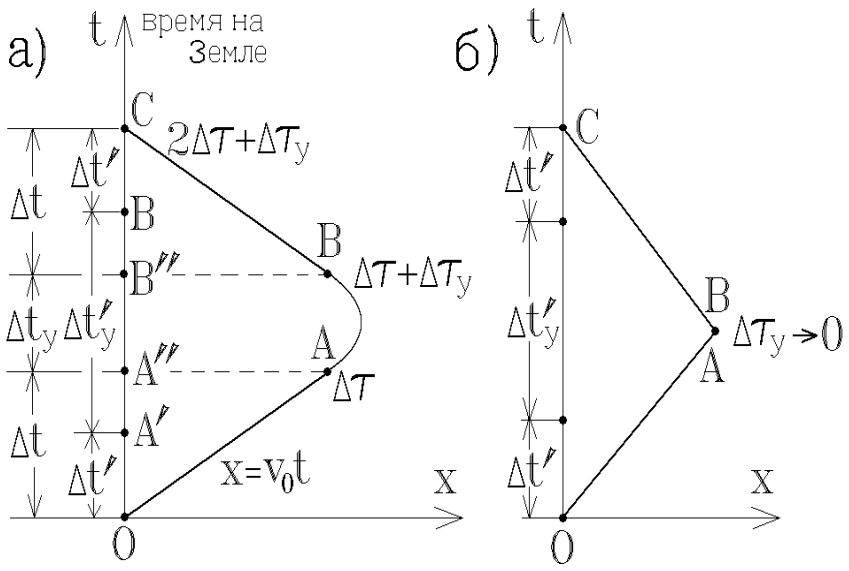

Рис.11.8

Землю космонавт постареет на время $2\Delta\tau + \Delta\tau_y$.

В инерциальной системе Земли можно использовать формулы (11.1) и (11.2), т.е. для жителя Земли к моменту возвращения пройдет большее время

$$2\Delta t + \Delta t_y > \frac{2\Delta\tau}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} + \Delta\tau_y .$$

Теперь рассмотрим показания земных часов с точки зрения космонавта. Формулу (11.1) можно использовать только при его равномерном движении (на отрезках ОА и ВС). При этом время на Земле для космонавта замедлится, и когда он за время $\Delta\tau$ по своим часам достигнет точки А, по собственным часам жителя Земли, движущимся относительно космонавта, должно пройти мѐньшее время $\Delta t' = \Delta\tau \cdot \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$.

Два события, одновременные в одной ИСО, не будут одновременными в другой!

Для жителя Земли одновременными будут события A и A'' (B и B''), а для космонавта – A и A' (B и B') (рис.11.8,а).

При ускоренном движении на отрезке АВ пользоваться формулами СТО (11.1) и (11.2) космонавт уже не может! В неинерциальных системах надо использовать соотношения общей теории относительности (ОТО). Но один из основных результатов ОТО очевиден из рис.11.8,а: пока космонавт движется с ускорением, на его часах проходит время $\Delta\tau_y$, а на часах жителя Земли должно пройти значительно бо̀льшее время $\Delta t_y'$.

Это особенно заметно при очень быстром изменении скорости (рис. 11.8,б). Практически космонавт все время остается в инерциальной системе, быстро "перескакивая" из удаляющейся в приближающуюся к Земле с постоянной скоростью ракету. Но в этот момент его ускорение огромно, и на Земле проходит большой интервал времени $\Delta t_y'$.

Получили вывод, строго доказываемый в ОТО:

все процессы в инерциальной системе отсчета убыстряются для наблюдателя, движущегося с ускорением, и наоборот, все процессы в неинерциальных, ускоренных системах замедляются для наблюдателя, находящегося в ИСО.

Тем самым решается парадокс близнецов: при встрече более молодым окажется тот из них, кто двигался с бо̀льшим ускорением, т.е. находившийся в ракете.

Следствие. В §3 главы 8 было показано, что движение с ускорением эквивалентно нахождению системы в поле тяготения. Поэтому **в сильном гравитационном поле все физические процессы должны замедлиться!**

Пример. Для очень массивной звезды силы тяготения становятся настолько большими, что могут сжать её в точку (сингулярность), называемую черной дырой. Гравитационное поле вблизи сингулярности, а вместе с ним и замедление времени стремится к бесконечности. Пусть приближающаяся к черной дыре ракета ежесекундно посылает световой сигнал. На Землю эти сигналы будут приходить все с большим запаздыванием, пока не прекратятся совсем. Для наблюдателя на Земле ракета никогда не упадет в чёрную дыру!

Наблюдатель на ракете очень быстро попадет в область сильного поля и будет разорван на куски за счет приливного эффекта. Но к этому моменту время на Земле для него сильно ускорится, и пославшие его в полет земляне уже скончаются от старости.

Совет: если хотите прожить дольше, чем окружающие Вас люди, старайтесь побольше двигаться с ускорением (увы, из-за малой величины ускорения эффект замедления Ваших часов для окружающих окажется очень мал!).

В заключение, вернемся к эксперименту на рис.11.6. Лабораторные часы 1 тоже движутся, вращаясь вместе с Землей со скоростью $v_З = R_З \omega_З \approx 1670$ км/ч (на экваторе). Поэтому когда самолет 3 облетал Землю против ее вращения (рис.11.6), то в неподвижной системе К его скорость была $|v_С - v_З| < v_З$, и уже часы 1 отстали от часов в самолете 3. К тому же надо учесть ускорение самолета и влияние на часы гравитационного поля (оно зависит от высоты полета). Опыты проводились для самолетов, облетающих Землю в разных направлениях и на разной высоте. Все полученные рассогласования часов совпали с предсказаниями СТО и ОТО.

Релятивистское замедление времени проверялось и было подтверждено во многих экспериментах (эффект Мёссбауэра, пучки частиц в ускорителях и т.п.).

4.4. Релятивистское сокращение длины

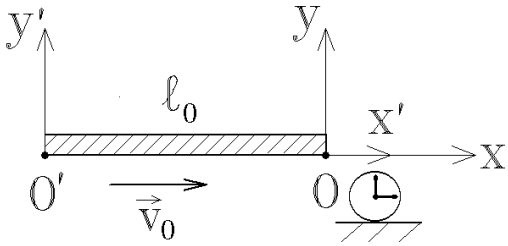

Рис.11.9

Пусть стержень длиной $l_0 = \Delta x'$ покоится в системе K' и вместе с ней пролетает со скоростью v_0 мимо начала координат системы К, где находятся часы (рис.11.9). Двумя событиями будут моменты пролета концов стержня мимо часов. Покоящиеся часы покажут следующий интервал времени между этими событиями: $\Delta t = \Delta\tau = l/v_0$. Здесь l – неизвестная длина стержня в системе К.

Но в системе K' часы движутся, и, согласно (11.1), интервал времени между двумя событиями будет $\Delta t' = \dfrac{l_0}{v_0} = \dfrac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \dfrac{l/v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$.

Отсюда

$$\boxed{l = l_0\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \qquad (11.3)$$

Вывод: **все движущиеся тела сокращаются в размерах в направлении движения в** $\left(\sqrt{1 - v_0^2/c^2}\right)^{-1}$ **раз.** Этот эффект называется релятивистским или <u>лоренцевым сокращением</u> <u>длины</u>.

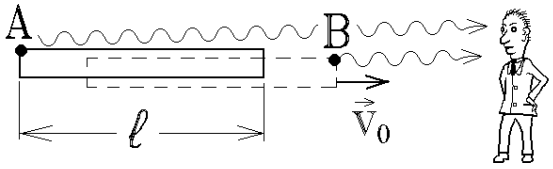

Рис.11.10

Замечание: продольный размер стержня, который **увидит** неподвижный наблюдатель, будет другим. Действительно, формула (11.3) даёт **мгновенно измеренную** длину движущегося предмета (координаты обоих концов стержня определены в один момент времени). Но свет от удаленной точки А стержня придет к наблюдателю одновременно со светом от ближней точки В сдвинувшегося стержня (рис.11.10) (глаз зафиксирует такое положение точек предмета, свет от которых приходит одновременно). Поэтому **видимый** размер АВ движущегося предмета увеличится по сравнению с выражением (11.3).

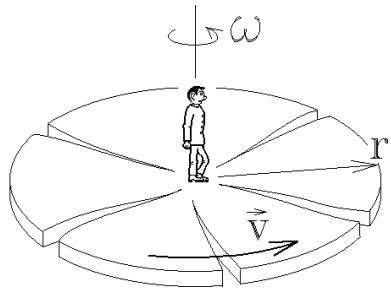

Рис.11.11

Заметим также, что СТО не позволяет пользоваться таким понятием классической механики, как абсолютно твердое тело. На рис.11.11 показано, что если раскрутить твердый диск до

угловой скорости ω, то с удалением от оси растет линейная скорость его вращения $v = \omega r$, и при достаточно большой скорости ω или расстоянии r окажется $v > c$, что невозможно. Кроме того, для неподвижного наблюдателя на оси диска согласно формуле (11.3) происходит сокращение длины окружности $l = 2\pi r\sqrt{1-(\omega r)^2/c^2} < 2\pi r$, т.е. должна измениться геометрическая форма любого протяженного вращающегося тела. Поэтому, строго говоря, **результаты СТО следует применять только к системе отдельных материальных частиц.**

С эффектом лоренцева сокращения длины тоже связан ряд парадоксов. Приведем один из них ("парадокс шеста и сарая").

Пусть шест длины $l_0 = 4$ м летит со скоростью $v_0 > \sqrt{3}c/2$ и влетает в неподвижный сарай длины $L_0 = 2$ м.

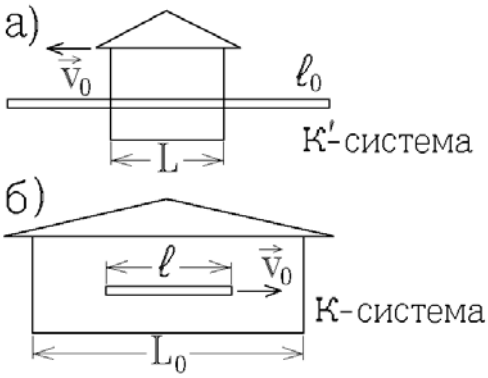

Рис.11.12

Вопрос: скроется ли шест в сарае? Ведь в K'-системе, где неподвижен шест, размер сарая сократится, и шест явно не поместится в сарай (рис.11.12,а). А в К-системе, где неподвижен сарай, длина шеста $l = l_0\sqrt{1-v_0^2/c^2} < L_0$, и шест целиком помещается в сарай (рис.11.12,б).

Ответ: конечно шест не может поместиться в сарае. Следует учитывать не только эффект сокращения длины, но и нарушение одновременности событий при переходе в другую систему отсчета. Картинка на рис.11.12,б не верна в том смысле, что левый и правый концы шеста оказываются внутри сарая **в разные моменты времени**.

Чтобы показать это, надо использовать законы преобразования координат и времени, которые будут получены в следующем разделе.

5. Преобразования Лоренца

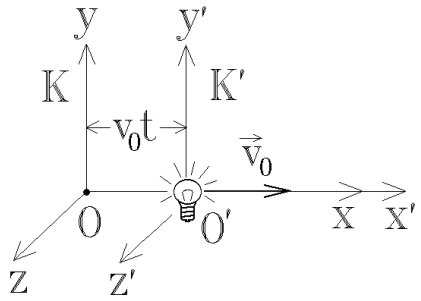

Рис.11.13

Пусть система K' движется вдоль оси Ox относительно неподвижной системы К со скоростью v_0 (рис.11.13). Пусть в начале координат O' движущейся системы находится лампочка, вспыхивающая в тот момент, когда она пролетает мимо начала координат О неподвижной системы. Выберем начало отсчёта времени

в каждой системе так, что это событие происходит в момент $t = t' = 0$.

В системе K' свет от вспышки распространяется во все стороны со скоростью c, и волновой фронт расходящейся световой волны образует сферу

$$x'^2 + y'^2 + x'^2 = c^2 t'^2 . \qquad (11.4)$$

Но, согласно постулату Эйнштейна, скорость света в другой инерциальной системе К такая же, и в этой системе волновой фронт также должен иметь вид сферы:

$$x^2 + y^2 + x^2 = c^2 t^2 . \qquad (11.5)$$

Легко проверить, что уравнение (11.5) невозможно привести к виду (11.4) подстановкой преобразований Галилея (2.3) (в нашем случае они запишутся как $x = x' + v_0 t'$, $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$). Эти преобразования надо заменить более общими **линейными** преобразованиями:

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta t', \\ t = \gamma x' + \varepsilon t', \\ y = y', \quad z = z'. \end{cases} \qquad (11.6)$$

(поперечные размеры в СТО не меняются).

Подставляя связи (11.6) в уравнение (11.5), получаем:

$$\left(\alpha^2 - c^2\gamma^2\right)x'^2 + y'^2 + z'^2 = \left(c^2\varepsilon^2 - \beta^2\right)t'^2 + 2\left(\gamma\varepsilon c^2 - \alpha\beta\right)x't'.$$

Это уравнение приводится к виду (11.4), если

$$\alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1; \qquad c^2\varepsilon^2 - \beta^2 = c^2 \quad \text{и} \quad \gamma\varepsilon c^2 - \alpha\beta = 0 \qquad (11.7)$$

Кроме того, учтем, что лампочка, покоящаяся в K – системе ($x' = 0$), в системе К движется по закону $x = v_0 t$, откуда, с учетом преобразований (11.6),

$$x - v_0 t = \left(\alpha - \gamma v_0\right)\underbrace{x'}_{=0} + \underbrace{\left(\beta - v_0\varepsilon\right)}_{=0}t' = 0 \quad \text{и} \quad \beta = v_0\varepsilon \qquad (11.8)$$

Решая совместно уравнения (11.7) и (11.8), находим:

$$\alpha = \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}; \quad \beta = \frac{v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}; \quad \gamma = \frac{v_0}{c^2\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

В итоге получены преобразования Лоренца, связывающие координаты и моменты времени одного и того же события в разных инерциальных системах отсчета (они аналогичны преобразованиям Галилея в классической теории). Запишем их в окончательном виде.

Прямые преобразования Лоренца:	Обратные преобразования Лоренца:
$x=\dfrac{x'+v_0t'}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}},\quad (11.9)$	$x'=\dfrac{x-v_0t}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}},\quad (11.11)$
$y=y',\ z=z',$	$y'=y,\ z'=z,$
$t=\dfrac{t'+\dfrac{v_0}{c^2}x'}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}.\quad (11.10)$	$t'=\dfrac{t-\dfrac{v_0}{c^2}x}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}.\quad (11.12)$

Обратим внимание на некоторые особенности полученных выражений:

1) Если считать K'– систему покоящейся, то K – система будет двигаться со скоростью $-\vec{v}_0$ (рис.11.13). Поэтому обратные преобразования Лоренца получаются простой заменой v_0 на $-v_0$.

2) При $c\to\infty$ эти преобразования переходят в преобразования Галилея: $x=x'+v_0t,\ \ y=y',\ \ z=z',\ \ t=t'$. Иначе говоря,

классическая механика является предельным случаем релятивистской (как того и требует принцип соответствия), если предположить возможность мгновенной передачи взаимодействий на любые расстояния, т.е. с бесконечной скоростью $c\to\infty$.

3) Координаты и моменты времени в физических системах должны быть вещественными величинами. Поэтому

скорости физических объектов не могут превышать скорость света в вакууме: $v_0\le c$.

6. Кинематические следствия преобразований Лоренца

Для получения любых кинематических соотношений достаточно использовать полученные выше преобразования Лоренца.

6.1. Одновременность

Вернемся к примеру, рассмотренному на рис.11.3. В К-системе, где неподвижны дуэлянты и наблюдатели 1 и 2, выстрелы происходят одновременно ($t_1=t_2$), но в разных точках: $x_2-x_1=l$ – это расстояние между дуэлянтами. В системе же K', связанной с движущейся каретой 3, согласно (11.12), $t_2'-t_1'=\dfrac{(t_2-t_1)-\dfrac{v_0}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}=-\dfrac{v_0l}{c^2\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\ne 0$,

т.е. события неодновременны! Знак $\Delta t'$ показывает, что $t_1' > t_2'$, т.е. для наблюдателя 3 дуэлянт А выстрелит раньше дуэлянта Б. Для наблюдателя 4, движущегося в противоположном направлении, порядок событий изменится на противоположный.

6.2. Релятивистское замедление времени

В K'-системе часы покоятся в одной точке ($x'_1 = x'_2$) и показывают собственное время $t_2' - t_1' = \Delta\tau$ (рис.11.14). В системе К они движутся и, согласно (11.10), показывают время

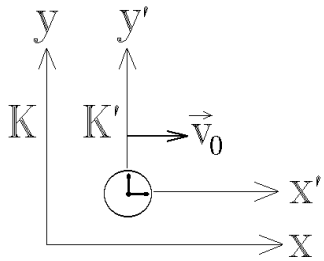

Рис.11.14

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\left(t_2' - t_1'\right) - \frac{v_0}{c^2}\left(x_2' - x_1'\right)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Получается известная формула релятивистского замедления времени.

6.3. Лоренцево сокращение длины

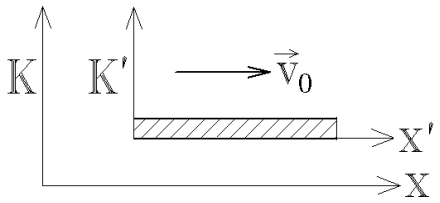

Рис.11.15

В K'-системе линейка покоится и имеет длину $x_2' - x_1' = l_0$ (рис.11.15). Если одновременно ($t_1 = t_2$) измерить координаты ее концов x_1 и x_2 в К-системе, то, согласно (11.11), получается

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{\left(x_2 - x_1\right) - v_0\left(t_2 - t_1\right)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \text{ или}$$

$$l = x_2 - x_1 = l_0\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \text{ (формула лоренцева сокращения длины).}$$

Пример: объясним парадокс "шеста и сарая" (рис.11.12,б).

Наблюдатель, движущийся с шестом, одновременно измеряет положения его концов: $t_1' - t_2'$, $x_2' - x_1' = l_0$. Но в системе сарая, согласно (11.10), это происходит неодновременно: $t_2 - t_1 = \dfrac{v_0 l_0/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} > 0$.

За время $t_2 - t_1$ правый конец шеста успеет сместиться на расстояние $v_0\left(t_2 - t_1\right)$ (рис.11.16), и те же измерения положений концов шеста в системе сарая происходят на расстоянии

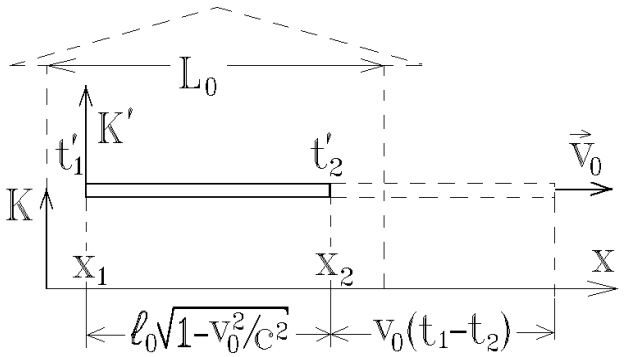

Рис.11.16

$$l + v_0\left(t_2 - t_1\right) = l_0\sqrt{1 - v_0^2/c^2} + \frac{v_0^2\, l_0/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \frac{l_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} > L_0.$$

Оба конца шеста одновременно не помещаются в сарай!

6.4. Релятивистская теорема сложения скоростей

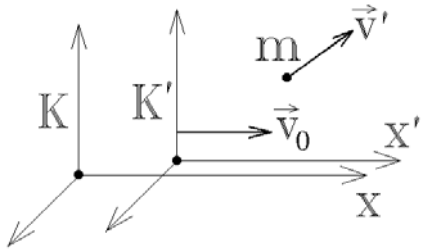

Рис.11.17

Пусть K'-система движется с постоянной скоростью v_0 вдоль оси Ox К-системы (рис.11.17). По определению скорость частицы m в К-системе: $v_x = \dfrac{dx}{dt}$., $v_y = \dfrac{dy}{dt}$, $v_z = \dfrac{dz}{dt}$.

Отсюда $v_x' = \dfrac{dx'}{dt'} = \dfrac{dx'/dt}{dt'/dt}$. Подставим в это выражение x' и t' из формул (11.11) и (11.12) преобразований Лоренца и продифференцируем их по времени. Это дает:

$$v_x' = \frac{d}{dt}\left(\frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}\right) \Bigg/ \frac{d}{dt}\left(\frac{t - \dfrac{v_0}{c^2}x}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}\right) = \frac{\dfrac{dx}{dt} - v_0}{1 - \dfrac{v_0}{c^2}\dfrac{dx}{dt}} = \frac{v_x - v_0}{1 - \dfrac{v_0}{c^2}v_x}.$$

Далее:

$$v_y' = \frac{dy'/dt}{dt'/dt} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{d}{dt}\left(\left(t - \dfrac{v_0}{c^2}x\right)\Big/\sqrt{1 - v_0^2/c^2}\right)} = \frac{v_y\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 - \dfrac{v_0}{c^2}v_x}$$

и аналогичное выражение для v_z'.

Итак, получена релятивистская теорема сложения скоростей, т.е. закон преобразования проекций скорости при переходе из одной ИСО в другую:

$$\boxed{v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - v_x v_0 / c^2},\ v_y' = \frac{v_y\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 - v_x v_0/c^2},\ v_z' = \frac{v_z\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 - v_x v_0/c^2}.} \qquad (11.13)$$

Для получения обратных преобразований надо заменить v_0 на $-v_0$:

$$v_x = \frac{v_x' + v_0}{1 + v_x' v_0/c^2},\ v_y = \frac{v_y'\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v_x' v_0/c^2},\ v_z = \frac{v_z'\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + v_x' v_0/c^2} \qquad (11.14)$$

При $c \to \infty$ эти выражения переходят в классическую теорему сложения скоростей: $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0$.

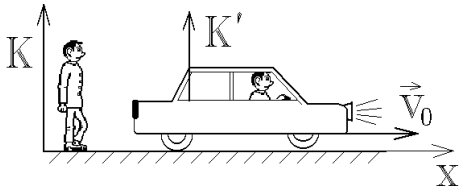

Рис.11.18

Примеры. 1) Для водителя автомобиля, движущегося со скоростью $\vec{v}_0$, свет фар имеет скорость $v_x' = c$ (рис.11.18). Для неподвижного пешехода, согласно (11.14), эта скорость имеет ту же величину $v_x = \dfrac{c + v_0}{1 + c v_0/c^2} = c$! Релятивистская теорема сложения скоростей согласуется с постулатом Эйнштейна.

2) В покоящейся воде (или другой прозрачной среде) скорость света $v_x' = c/n$, где n – показатель преломления среды. Если же вода движется со скоростью v_0 (рис.11.19), то скорость света в ней для неподвижного наблюдателя имеет, согласно (11.14), величину $v_{\text{света}} = v_x = \dfrac{c/n + v_0}{1 + v_0/cn}$.

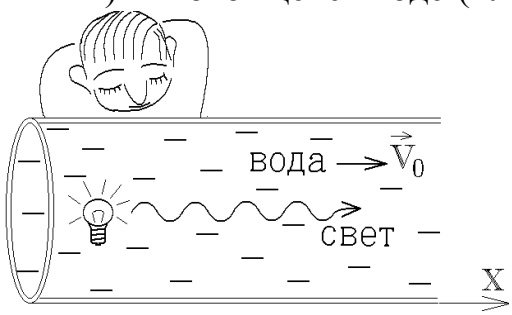

Рис.11.19

Так как $v_0/c << 1$, то с точностью до членов первого порядка малости по v_0/c находим: $\boxed{v_{\text{света}} = \dfrac{c}{n} + v_0\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)}$ – это формула Физò для скорости света в движущейся среде, полученная опытным путём еще в 1851 г.

6.5. Ускоренное движение в СТО

Пусть ракета удаляется от Земли с ускорением и достигает скорости, **почти равной скорости света**: $v \sim c$. С точки зрения экипажа ракеты её

состояние ничем не отличается от состояния сразу после старта, за исключением потери части топлива. Ракета становится легче и, включив двигатель посильнее, можно добиться бо̀льшего ускорения, увеличить скорость и, казалось бы, превысить скорость света c .

Покажем, что это невозможно. Для этого еще раз продифференцируем по времени первую формулу (11.14):

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{dv_x/dt'}{dt/dt'}=\frac{d\left(\dfrac{v_x'+v_0}{1+v_x'v_0/c^2}\right)\Big/dt'}{d\left(\dfrac{t'+v_0x'/c^2}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\right)\Big/dt'}$$

После несложных вычислений находим релятивистскую связь ускорений в разных инерциальных системах:

$$\boxed{\frac{dv_x}{dt}=\frac{dv_x'}{dt'}\frac{\left(1-v_0^2/c^2\right)^{3/2}}{\left(1+v_x'v_0/c^2\right)^3}.} \qquad (11.15)$$

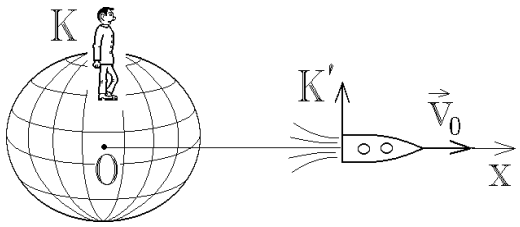

Рис.11.20

Свяжем теперь систему K' с движущейся ракетой (рис.11.20). Согласно гипотезе Эйнштейна, можно использовать формулы СТО, если в качестве скорости v_0 брать мгновенную скорость K'-системы в каждый момент времени: $v_0=v_x=v$.

Пусть для простоты ракета движется с постоянным ускорением. Тогда в K'-системе её скорость и ускорение: $v_x'=0$, $a=\dfrac{dv_x'}{dt'}=\text{const}$.

Подставляя в формулу (11.15), находим: $\dfrac{dv}{dt}=a\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}$.

Разделяя переменные и вычисляя интеграл $c^3\displaystyle\int_0^v\frac{dv}{\left(c^2-v^2\right)^{3/2}}=\int_0^t adt$,

получим $\dfrac{cv}{\sqrt{c^2-v^2}}=at$, откуда $v=\dfrac{cat}{\sqrt{c^2+a^2t^2}}$ –это скорость ракеты,

движущейся с постоянным ускорением в инерциальной системе отсчета.

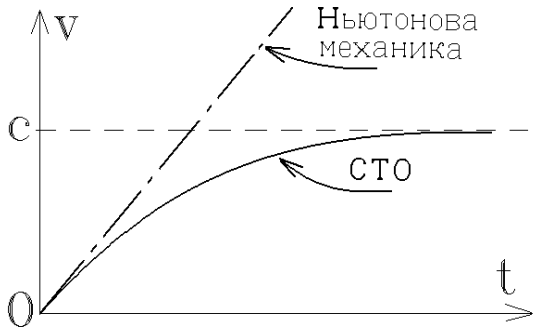

Рис.11.21

Как видно из рис.11.21, **она никогда не превысит скорость света** c **!**

Вывод: результаты СТО должны совпадать с результатами ньютоновской классической механики в случае малых скоростей ($v << c$), но отличны от них при скоростях, сравнимых со скоростью света $(v \sim c)$.

Глава 12

Свойства пространства-времени

1. Четырехмерное пространство Минковского

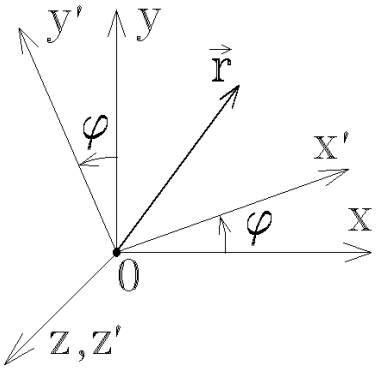

Рис.12.1

Координаты классического трехмерного пространства преобразуются сами через себя. Например, при повороте декартовых осей в плоскости xy на угол φ (рис.12.1) закон преобразования координат имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \\ z &= z'. \end{aligned}\right\} \qquad (12.1)$$

Время в формулы (12.1) не входит и вообще не преобразуется: $t = t'$.

Преобразования Лоренца (11.9) – (11.12) похожи на преобразования (12.1), но связывают координаты пространства и моменты времени.

Анри Пуанкаре (1854–1912) и чуть позже, в 1908 г. Герман Минковский (1864–1909) показали, что:

> преобразования Лоренца можно рассматривать, как повороты осей координат в четырехмерном пространстве, в котором к трем пространственным координатам x, y, z добавляется "временная" координата ct (размерность всех координат одинакова). Такое пространство называется <u>четырехмерным пространством-временем</u> или <u>4-мерным пространством Минковского.</u>

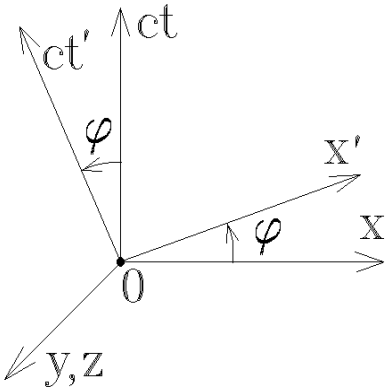

Рис.12.2

Действительно, обозначив

$$\mathrm{ch}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad s\,\mathrm{h}\,\varphi = \frac{v_0/c}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$$

с учетом $ch^2\varphi - sh^2\varphi = 1$, приводим преобразования Лоренца (11.9) – (11.10) к виду:

$$\left.\begin{aligned} ct &= ct'\mathrm{ch}\,\varphi + x'\mathrm{sh}\,\varphi, \\ x &= ct'\mathrm{sh}\varphi + x'\mathrm{ch}\varphi, \\ y &= y', \quad z = z' \ . \end{aligned}\right\} \qquad (12.2)$$

Преобразования (12.2) похожи на формулы (12.1) и могли бы рас-

сматриваться, как поворот на некоторый угол φ в плоскости ct, x (рис.12.2), если бы не существенная разница: тригонометрические функции в формулах (12.1) заменены гиперболическими функциями в выражениях (12.2)! Это означает, что

свойства 4-мерного пространства Минковского отличны от свойств обычного эвклидова 3-мерного пространства.

Чтобы понять суть такого отличия, вспомним, что при повороте осей координат меняются проекции любого вектора, но не изменяется скалярная величина – длина этого вектора. Так, с помощью преобразований (12.1) легко убедиться, что при повороте декартовых осей не изменится длина радиус-вектора: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$.

Однако преобразования Лоренца меняют эту величину (в другой ИСО имеет место эффект релятивистского сокращения длины). Поэтому обычные 3-мерные векторы не могут быть векторами пространства Минковского.

С другой стороны нетрудно проверить, что единственной комбинацией, построенной из координат x, y, z и ct, и не меняющейся при преобразованиях Лоренца (12.2), будет

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \qquad (12.3)$$

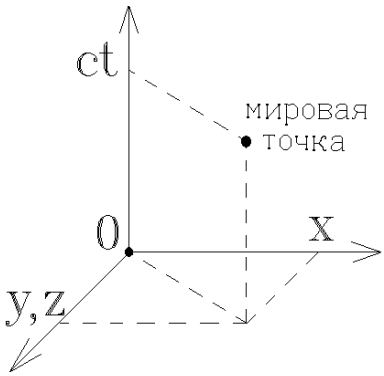

Рис.12.3

Эта величина является квадратом длины 4-мерного радиус-вектора в пространстве Минковского. Проекции такого вектора ct, x, y и z показывают пространственные координаты некоторого события и момент времени, в который оно произошло. В пространстве Минковского каждое событие обозначается <u>мировой точкой</u> (рис.12.3).

Вспомним теперь, что квадрат вектора в любом конечномерном пространстве может быть записан с помощью некоторой симметричной матрицы $\|g\|$, которая называется <u>метрикой</u> <u>пространства</u> и полностью определяет все его геометрические свойства:

$$s^2 = (ct,\ x,\ y,\ z)\begin{pmatrix} g_{ct\ ct} & g_{ct\ x} & g_{ct\ y} & g_{ct\ z} \\ g_{x\ ct} & g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{y\ ct} & g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{z\ ct} & g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \qquad (12.4)$$

Матрицу $\|g\|$ можно диагонализовать подходящим выбором осей координат. Если после диагонализации она примет вид $g_{ik} = \delta_{ik}$, где δ_{ik} – символ Кронекера, то пространство называется плоским и эвклидовым. Таким является ньютоново 3-мерное пространство.

Если после диагонализации компоненты матрицы, стоящие на диагонали, различны, то пространство будет искривленным.

Из сравнения выражений (12.3) и (12.4) видно, что

$$\|g\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (12.5)$$

Пространство с такой метрикой, т.е. пространство Минковского, называется псевдоэвклидовым. Разные знаки компонентов метрики (12.5) приводят к непривычному виду преобразований (12.2) при повороте осей координат в **псевдоэвклидовом** пространстве. При повороте в плоскостях xy, xz или yz сохраняются преобразования (12.1), так как соответствующие компоненты метрики имеют одинаковый знак.

Вывод: в СТО время и 3-мерное пространство не существуют и не преобразуются независимо друг от друга, а образуют единое 4-мерное пространство-время Минковского с метрикой (12.5).

2. Свойства пространства Минковского. Интервал

Изображая процесс движения частицы, как последовательность событий – мировых точек, получим траекторию движения в пространстве Минковского (рис.12.4). Она называется мировой линией и показывает пространственные координаты частицы в любой момент времени, т.е. представляет всю историю существования частицы. На рис.12.4 линия I изображает мировую линию покоящейся частицы, а линия II – движущейся (причем в начальный момент частица находилась в начале координат). Следует заметить, что так как $\Delta x/\Delta t = v_x < c$, то тангенс угла наклона мировой линии к любой из осей Ox, Oy и Oz не может быть меньше 1 (иначе частица будет двигаться со сверхсветовой скоростью).

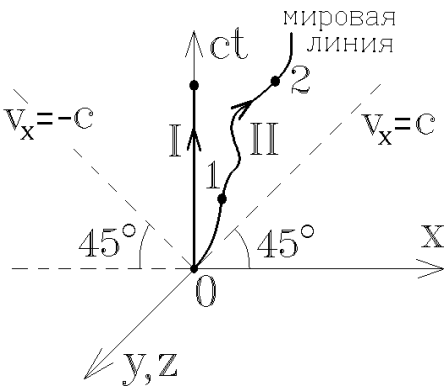

Рис.12.4

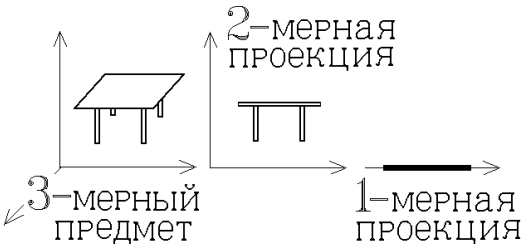

Рис.12.5

Изобразить на плоском листе бумаги движение протяженного тела в 4-мерном пространстве невозможно. Рис. 12.5 иллюстрирует попытку воспроизвести трехмерный предмет (стол) на одномерной оси (с потерей двух измерений). Полученная одномерная "картина" может изображать как стол, так и любой другой предмет соответствующего размера.

На плоском двумерном листе не удаётся показать даже 4 взаимно перпендикулярные оси координат ct, x, y и z. Приходится две из них схематически совмещать, как показано на всех рисунках.

"Расстоянием" между двумя событиями (двумя мировыми точками) в 4-мерном пространстве Минковского будет величина (модуль) разности 4-мерных радиус-векторов этих событий, называемая <u>интервалом</u>. Согласно формуле (12.3) квадрат интервала определяется как

$$s_{12}^2 = c^2\left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 - \left(y_2 - y_1\right)^2 - \left(z_2 - z_1\right)^2, \qquad (12.6)$$

или $s_{12}^2 = c^2\left(t_2 - t_1\right)^2 - l_{12}^2$, где $l_{12} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$.

Воспользовавшись преобразованиями Лоренца легко проверить, что **интервал является инвариантом**, т.е. не изменяется при переходе от одной ИСО к другой, или при повороте осей координат 4-мерного пространства:

$$s_{12}^2 = c^2 \left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 - \left(y_2 - y_1\right)^2 - \left(z_2 - z_1\right)^2 =$$
$$= s'^2_{12} = c^2\left(t'_2 - t'_1\right)^2 - \left(x'_2 - x'_1\right)^2 - \left(y'_2 - y'_1\right)^2 - \left(z'_2 - z'_1\right)^2$$

(предлагается проделать самостоятельно в качестве полезного упражнения).

Если квадрат интервала между двумя событиями положителен $\left(s_{12}^2 > 0\right)$, то такой интервал называется <u>времениподобным</u>. Всегда можно найти такую инерциальную систему отсчета K', в которой оба события 1 и 2, разделенные времениподобным интервалом, происходят в одной пространственной точке $\left(x'_1 = x'_2,\ y'_1 = y'_2,\ z'_1 = z'_2\right)$!

Действительно, перенесем часы из мировой точки 1 в мировую точку 2 вдоль прямолинейной мировой линии I, соединяющей эти точки (на рис.12.6,а такая линия соответствует движению с постоянной скоростью). Свяжем систему K' с переносимыми часами. В такой системе часы поко-

ятся и показывают собственное время $t' = \tau$. Следовательно, оба события 1 и 2 произойдут в одной точке K'-системы (рис.12.6,б).

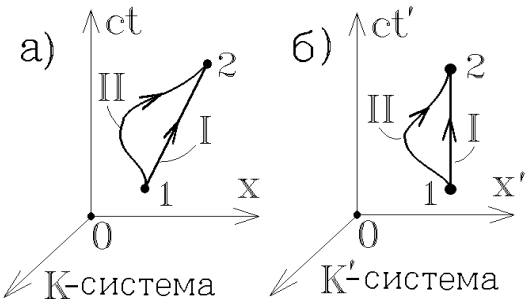

Рис.12.6

Из положительности выражения (12.6) следует, что скорость переноса часов (скорость инерциальной K'-системы) меньше скорости света: $v_0 = l_{12}/(t_1 - t_2) < c$! Информация о первом событии может быть перенесена в точку, где происходит второе, и послужить его причиной.

Два события, разделенные времениподобным интервалом, могут быть причинно связаны.

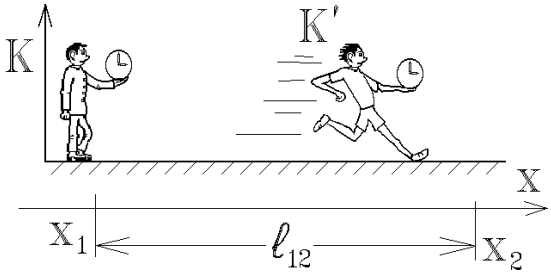

Рис.12.7

Пример: двумя событиями являются старт и финиш спортсмена, пробегающего дистанцию $l_{12} = x_2 - x_1 = 100\,\text{м}$ с постоянной скоростью (рис. 12.7). Пусть по часам судей это происходит за время $t_2 - t_1 = 10$ с .

Воспользовавшись инвариантностью интервала (12.6), находим:

$$s_{12}^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - l_{12}^2 = c^2 (\tau_2 - \tau_1)^2 .$$

Часы спортсмена покажут мѐньший промежуток времени, чем часы судей:

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 - l_{12}^2 / c^2} < 10\,\text{с} \; !$$

Часы можно переносить из точки 1 в точку 2 вдоль другой, не прямолинейной мировой линии (кривая II на рис.12.6). Система K', связанная с часами, будет при этом неинерциальной, но за бесконечно малый промежуток времени dt её скорость можно считать практически постоянной, и использовать инвариантность интервала (12.6):

$$(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = c^2 (d\tau)^2 .$$

Легко убедиться, что последнее соотношение приводит к формуле (11.2), и сделать следующее заключение:

длина любой мировой линии в 4-мерном пространстве Минковского определяется собственным временем по часам наблюдателя, перемещающегося вдоль такой линии, и равна $\boxed{\int_1^2 ds = c(\tau_2 - \tau_1)}$. Наибольшую

длину будет иметь прямая мировая линия I (рис.12.6), соответствующая движению с постоянной скоростью! Эта наибольшая длина будет времениподобным интервалом между двумя событиями: $\boxed{s_{12} = c\left(\tau_2 - \tau_1\right)_{\max}}$.

Последний вывод следует хотя бы из обсуждения парадокса близнецов (§ 4 гл.11): меньшее собственное время отсчитают часы II (рис.12.6), двигавшиеся с ускорением.

Интервал между двумя событиями называется пространственноподобным, если его квадрат отрицателен $\left(s_{12}^2 < 0\right)$. Два события, разделенные пространственноподобным интервалом, не могут быть соединены мировой линией, и одно такое событие не может быть причиной другого (это потребовало бы передачи информации со сверхсветовой скоростью: $v = l_{12} / \left(t_2 - t_1\right) > c$.

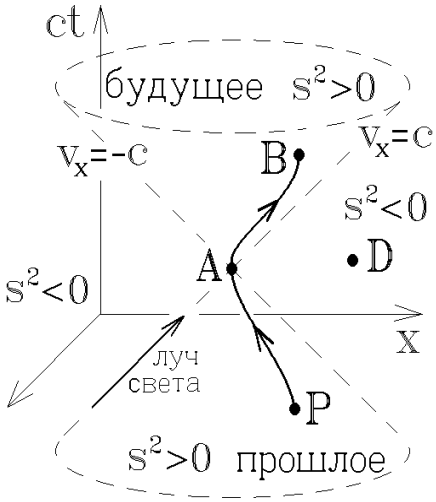

Рис.12.8

Всегда можно найти ИСО, в которой два таких события происходят в один момент времени, но ни в одной ИСО они не могут произойти в одной пространственной точке. Наконец, интервал $s_{12}^2 = 0$ разделяет два события, лежащие на световом конусе – это поверхность, образованная мировыми линиями всех световых лучей, приходящих в точку А и испускаемых из неё (рис.12.8). Любые события, лежащие **внутри** светового конуса, можно связать мировой линией, так как они разделены времениподобным интервалом. Наблюдатель в точке А может повлиять на событие в точке В $\left(s_{AB}^2 > 0\right)$, а событие, произошедшее в точке Р, может повлиять на состояние наблюдателя А $\left(s_{PA}^2 > 0\right)$. Поэтому все события в верхней полости светового конуса образуют **будущее** наблюдателя А, а в нижней полости – его **прошлое**.

Все события D **вне** светового конуса (рис.12.8) отделены от наблюдателя в точке А пространственноподобным интервалом $\left(s_{DA}^2 < 0\right)$ и не могли на него повлиять. Наблюдатель А не может знать о том, какие реальные события происходят в данный момент времени вне светового конуса! Но это не означает, что он не узнает о них в будущем.

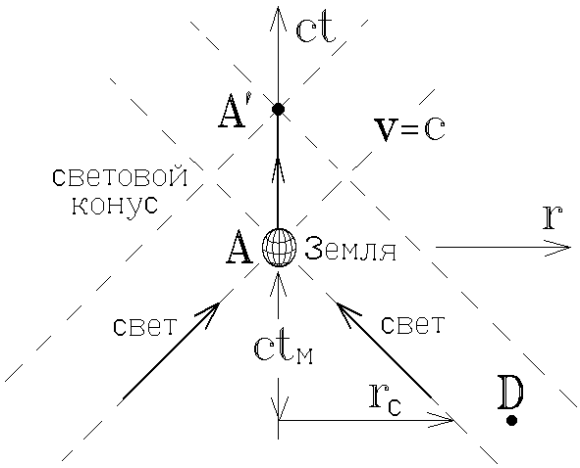

Рис.12.9

Пример: возраст нашей Метагалактики $t_{\text{м}} \approx 13$ млрд.лет . За это время на Землю успеет дойти свет от галактик, удаленных на максимальное расстояние $r_{\text{С}} = ct_{\text{м}} \approx 10^{26}$ м . Сфера с радиусом r_C называется <u>световым горизонтом</u>. Любая точка D за пределами светового горизонта лежит вне светового конуса и ненаблюдаема для обитателя Земли (рис.12.9). Однако со временем Земля окажется в точке A', и точка D попадёт внутрь нового светового конуса (луч света от D дойдет до Земли). Радиус светового горизонта все время растет.

3. Четырехмерные векторы. Релятивистские инварианты

Любой вектор в пространстве Минковского имеет 4 проекции, которые будем обозначать греческим символом: $A_\mu \left(A_{ct},\ A_x,\ A_y,\ A_z\right)$. Такие векторы называются четырехмерными или <u>4-векторами</u>.

Примером будет 4-мерный радиус-вектор пространства Минковского $r_\mu\left(ct,\ x,\ y,\ z\right)$. А так как все 4-векторы преобразуются при повороте осей координат одинаково, то компоненты любого из них изменяются по тому же закону (12.2), что и 4-вектор r_μ .

При переходе от неподвижной системы К к новой инерциальной системе K', движущейся вдоль оси Ox со скоростью $\vec{v}_0$, компоненты 4-вектора A_μ преобразуются по закону:

Прямые преобразования:	Обратные преобразования:
$A_x = \dfrac{A'_x + \dfrac{v_0}{c} A'_{ct}}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$,	$A'_x = \dfrac{A_x - \dfrac{v_0}{c} A_{ct}}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$,
$A_y = A'_y,\ A_z = A'_z,\ (12.7)$	$A'_y = A_y,\ A'_z = A_z,\ (12.8)$
$A_{ct} = \dfrac{A'_{ct} + \dfrac{v_0}{c} A'_x}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$.	$A'_{ct} = \dfrac{A_{ct} - \dfrac{v_0}{c} A_x}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$.

Эти преобразования полностью аналогичны преобразованиям Лоренца (11.9) – (11.12).

При повороте осей пространства Минковского (что эквивалентно переходу в другую ИСО) проекции 4-векторов будут меняться, но квадраты 4-векторов остаются неизменными, т.е. являются **релятивистскими инвариантами**. Примером такого инварианта является квадрат интервала (12.6).

Квадрат 4-вектора определяется по правилу (12.4). Можно записать его в компактном виде:

$$A^2 = \sum_{\mu,\nu} A_\mu \, g_{\mu\nu} \, A_\nu .$$

В дальнейшем будем опускать знак суммы и считать, что если в одной формуле встречаются два одинаковых индекса, то по ним подразумевается суммирование.

Подставив метрику пространства Минковского (12.5), получим выражение релятивистского инварианта – скалярную величину, одинаковую во всех ИСО:

$$\boxed{A^2 = A_{ct}^2 - A_x^2 - A_y^2 - A_z^2 = -A'^2_{ct} - A'^2_x - A'^2_y - A'^2_z .} \qquad (12.9)$$

Аналогично формуле (12.9) определяется скалярное произведение двух 4-векторов:

$$A \cdot B = A_\mu \, g_{\mu\nu} \, B_\nu = A_{ct} \, B_{ct} - A_x B_x - A_y B_y - A_z B_z \qquad (12.10)$$

Заметим, что обычные 3-мерные векторы классической механики не будут 4-векторами, и, как правило, даже не являются пространственными компонентами 4-векторов.

Так, обычный вектор скорости $\vec{v}$ преобразуется при переходе в другую K'-систему по правилу (11.14), что совсем не похоже на правило преобразования 4-вектора (12.8).

4. Четырехмерные векторы скорости и ускорения

Чтобы получить 4-вектор скорости, надо взять производную от 4-радиус-вектора по некоторой **скалярной** величине, выполняющей в пространстве Минковского роль времени. В §2 определили такой скаляр – интервал $ds = c d\tau$, который не изменяется при переходе в другую ИСО. Поэтому <u>4-вектор скорости</u>

$$\boxed{u_\mu = \frac{d\, r_\mu}{d\, s}} \qquad (12.11)$$

преобразуется по тому же закону (12.2) или (12.7), что и 4-вектор r_μ, т.е.

действительно является 4-вектором.

Подставляя в определение (12.11) компоненты $r_\mu\left(ct,x,y,z\right)$ и формулу (11.2) $ds = cd\tau = c\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt$, находим компоненты (проекции) 4-вектора u_μ:

$$u_{ct} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ u_x = \frac{dx/dt}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{v_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},$$
$$u_y = \frac{v_y}{c\sqrt{1-v^2/c^2}},\ u_z = \frac{v_z}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (12.12)$$

Важная особенность этих выражений: компоненты u_μ не независимы. Элементарное вычисление даёт: $u^2 = u_\mu\, g_{\mu\nu}\, u_\nu = 1$. Следовательно, с геометрической точки зрения u_μ является единичным безразмерным 4-вектором касательной к мировой линии.

По тому же правилу определяется и 4-вектор ускорения:

$$\boxed{w_\mu = \frac{d\,u_\mu}{d\,s}.}$$

Вычисление компонент этого вектора и его квадрата полезно провести в качестве самостоятельного упражнения. Укажем лишь на одно примечательное свойство: скалярное произведение (12.10) 4-вектора ускорения и 4-вектора скорости всегда обращается в нуль. Для доказательства достаточно взять производную от постоянной величины:

$$\frac{d}{ds}\left(\underbrace{u^2}_{=1}\right) = 2u_\mu\, g_{\mu\nu}\,\frac{d\,u_\nu}{d\,s} = 2\left(u\cdot w\right) \equiv 0\,.$$

5. Релятивистский эффект Доплера и аберрация светового луча

При $v \to c$ пользоваться 4-вектором скорости (12.12) нельзя. Поэтому для описания движения светового луча вводят 4-мерный волновой вектор k_μ. Его "временная" компонента $k_{ct} = \dfrac{\omega}{c}$, а "пространственные" компоненты образуют обычный волновой вектор $\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_v$. Здесь ω –

циклическая частота, λ – длина волны света, а $\vec{e}_v$ – единичный вектор, показывающий направление светового луча в пространстве.

Учитывая связь $\lambda = 2\pi c/\omega$, нетрудно определить релятивистский инвариант (12.9): $k^2 = k_{ct}^2 - \vec{k}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = 0$, т.е. 4-вектор k_μ имеет нулевую длину.

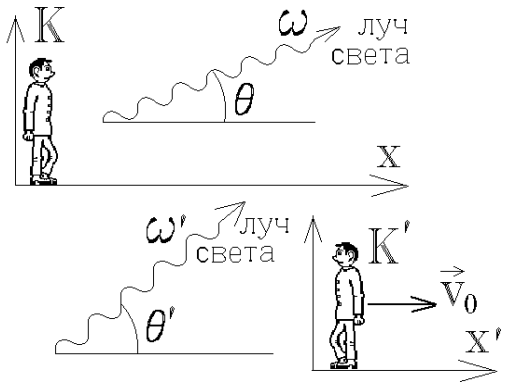

Рис.12.10

Пусть луч света с частотой ω движется в неподвижной системе К под углом θ к оси Ox (рис.12.10). Для наблюдателя в другой, движущейся вдоль оси Ox со скоростью $\vec{v}_0$ системе K', **этот же луч изменит и частоту, и направление движения** (но не изменит величину скорости c)! Действительно, пользуясь преобразованиями (12.8), перейдем к компонентам вектора k'_μ в движущейся системе:

$$k'_x = \frac{k_x - \frac{v_0}{c}k_{ct}}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad k'_{ct} = \frac{k_{ct} - \frac{v_0}{c}k_x}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \qquad (12.13)$$

Подставляя сюда величины проекций

$$k_x = \left|\vec{k}\right|\cos\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta,$$
$$k'_x = \frac{\omega'}{c}\cos\theta', \quad k_{ct} = \frac{\omega}{c}, \quad k'_{ct} = \frac{\omega'}{c}, \qquad (12.14)$$

из второй формулы (12.13) получим:

$$\boxed{\omega' = \frac{\omega\left(1 - \frac{v_0}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}} \qquad (12.15)$$

– это <u>формула релятивистского эффекта Доплера</u>.

Если наблюдатель удаляется от неподвижного источника света $\theta = 0$, или приближается к нему $\theta = \pi$ со скоростью v_0, то эффект Доплера называется <u>продольным</u>. Частота света при этом уменьшается в пер-

вом случае и увеличивается во втором: $\omega' = \omega\left(1 \mp \frac{v_0}{c}\right) \Big/ \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$. То же самое происходит при движении источника света относительно неподвижного наблюдателя. Аналогичный эффект имеет место в классической физике, когда можно пренебречь членами второго порядка малости $(v_0/c)^2 \to 0$:

$$\boxed{\omega' = \omega\left(1 \mp \frac{v_0}{c}\right) \text{ – это формула классического эффекта Доплера.}}$$

Пример: свет, приходящий на Землю от удаленных галактик сдвинут в область мѐньших частот. Это означает, что галактики удаляются от Земли, т.е. мы живем в расширяющейся Вселенной.

Если же наблюдатель движется перпендикулярно к направлению на источник света $\theta = \frac{\pi}{2}$, то из формулы (12.15) получим:

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$ – это формула <u>поперечного</u> эффекта Доплера, не имеющая классического аналога.

Первая формула (12.13) после подстановки (12.14) и (12.15) даёт:

$$\boxed{\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v_0}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}\cos\theta}} \quad – \qquad (12.16)$$

направление светового луча меняется при переходе от неподвижной системы к движущейся. Это явление называется <u>аберрацией светового луча</u>.

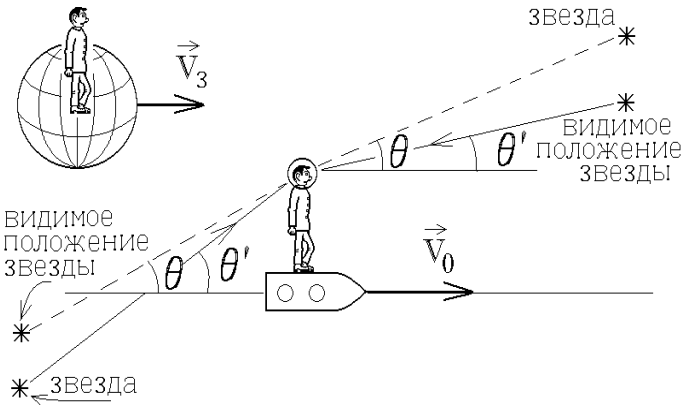

Рис.12.11

Поэтому видимые положения звезд для движущегося наблюдателя не совпадают с истинными (рис.12.11). В частности, это происходит из-за движения Земли и самих звезд. При достижении околосветовой скорости видимое впереди от движущегося наблюдателя звездное небо должно стягиваться к направлению движения

Глава 13.

Динамика релятивистских частиц

1. Четырехмерный вектор энергии-импульса

Уравнения и основные величины классической динамики должны измениться при переходе к скоростям, сравнимым со скоростью света. При таких скоростях невозможно использовать даже классическое определение импульса частицы $\vec{p} = m\vec{v}$.

Действительно, хотя скорости $\vec{v}_i$ **замкнутой** системы частиц могут изменяться, но полный импульс такой системы меняться не должен: $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$. Преобразуя скорости в соответствии с правилом (11.13), видим, что в другой инерциальной системе отсчета классический импульс уже не сохраняется: $\vec{P}' = \sum_i m_i \vec{v}'_i \neq \text{const}$, что противоречит основному постулату об эквивалентности всех ИСО.

Больше того, эти преобразования не совпадают с преобразованиями (12.8), т.е. классический импульс $\vec{p} = m\vec{v}$ не является компонентой какого-либо 4-вектора пространства Минковского.

<u>Релятивистской</u> называют частицу, скорость которой не мала по сравнению со скоростью света c , и для которой нельзя считать, что $v^2/c^2 \to 0$. Для любой релятивистской частицы легко определить 4-вектор импульса, умножая безразмерный 4-вектор скорости u_μ на постоянный множитель:

$$p_\mu = m c u_\mu , \qquad (13.1)$$

где m – масса частицы (она совпадает с массой покоящейся частицы, и поэтому её часто называют <u>массой покоя</u> или <u>собственной массой</u> частицы). Постоянная скорость света c добавлена в определение (13.1) для получения правильной размерности. После подстановки компонент 4-скорости (12.12), находим:

$$\boxed{\vec{p} = \vec{i}p_x + \vec{j}p_y + \vec{k}\, p_z = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \qquad (13.2)$$

Это – вектор импульса релятивистской частицы. Нетрудно видеть, что при $v^2/c^2 \to 0$ он совпадет с классическим импульсом (2.2).

Остается выяснить смысл "временной" компоненты p_{ct}. В классической механике, с учетом формулы (3.4) и уравнения движения $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, получали $dK = \vec{F}\,d\,\vec{r} = \dfrac{d\,\vec{p}}{dt}\vec{v}\,d\,t = \vec{v}\,d\,\vec{p}$. Изменение кинетической энергии релятивистской частицы определяется тем же соотношением, и, после подстановки выражения (13.2), вычисления дифференциала $d\vec{p}$ и замены $2\vec{v}d\vec{v} = d\left(v^2\right)$, имеем: $dK = \vec{v}d\vec{p} =$

$$= \frac{m\vec{v}d\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mv^2 d\left(v^2\right)}{2c^2\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} = \frac{md\left(v^2\right)}{2\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} = d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Покоящаяся частица кинетической энергии не имеет, и поэтому

$$K = \int_0^v d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \quad \text{или} \quad \boxed{K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2}. \qquad (13.3)$$

– это кинетическая энергия релятивистской частицы.

Из формулы (13.3) немедленно следует, что ни одна частица с массой, отличной от нуля, не может двигаться со скоростью света! Для разгона такой частицы до световой скорости надо совершить бесконечную работу. И наоборот, безмассовые частицы, такие как фотон ($m = 0$), имеющие конечную, не равную нулю энергию, могут существовать, только двигаясь со скоростью света c!

При малых скоростях ($v \ll c$)

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \quad \text{и} \quad K \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{mv^2}{2},$$

т.е. формула (13.3) приводит к хорошо известному классическому выражению для кинетической энергии частицы.

Кинетическая энергия равна разности энергий движущейся и покоящейся частицы. Такая энергия называется полной энергией свободной частицы и определяется формулой

$$\boxed{\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}. \qquad (13.4)$$

Отсюда следует, что любая покоящаяся частица ($v = 0$) с ненулевой массой должна обладать энергией, которую Эйнштейн назвал энергией покоя:

$$\boxed{\varepsilon_{\text{п}} = mc^2.} \qquad (13.5)$$

Далее мы убедимся, что энергия покоя действительно существует и может переходить в другие виды энергии.

Полную энергию свободной частицы можно представить, как сумму энергии покоя и кинетической энергии:

$$\varepsilon = mc^2 + K .$$

"Временная" компонента 4-вектора (13.1) связана с полной энергией:

$p_{ct} = mcu_{ct} = mc\Big/\sqrt{1 - v^2/c^2} = \varepsilon/c$ . .Иначе говоря,

динамические характеристики **релятивистской частицы** определяет 4-вектор p_μ, объединяющий энергию и импульс частицы:

$$p_\mu = \left(\frac{\varepsilon}{c}, p_x, p_y, p_z\right). \qquad (13.6)$$

Он называется 4-вектором энергии-импульса.

Из правил преобразования 4-вектора (12.8) следуют формулы преобразования полной энергии и импульса частицы при переходе от одной ИСО к другой:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon - v_0 p_x}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \; p'_x = \frac{p_x - \varepsilon v_0/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \; p'_y = p_y, \; p'_z = p_z ,$$

т.е. энергия и импульс связаны и преобразуются друг через друга! Не меняется релятивистский инвариант (12.9) – квадрат этого вектора:

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \frac{\varepsilon'^2}{c^2} - p'^2_x - p'^2_y - p'^2_z = \text{inv} .$$

Непосредственной подстановкой величин (13.2) и (13.4) находим,

что $\dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 - \left(\dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 = m^2c^2$, откуда

$$\boxed{\varepsilon^2 - p^2c^2 = m^2c^4} \qquad (13.7)$$

– это формула связи энергии и импульса релятивистской частицы.

Из тех же формул (13.2) и (13.4) нетрудно увидеть, что полная энергия и импульс свободной релятивистской частицы связаны соотношением

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}\vec{v}}{c^2}. \qquad (13.8)$$

Для **безмассовых частиц**, например, для фотона, связь (13.7) примет вид: $\boxed{\mathcal{E}_{\text{ф}} = p_{\text{ф}}\, c.}$.

2. Уравнение движения релятивистской частицы

По аналогии с классическим уравнением движения частицы (2.7) запишем релятивистский закон движения:

$$\boxed{\frac{dp_\mu}{ds} = \mathsf{F}_\mu} \quad \text{или} \quad \boxed{mc\frac{du_\mu}{ds} = mcw_\mu = \mathsf{F}_\mu}. \qquad (13.9)$$

Это – уравнение Минковского, которое заменяет закон (2.7), предложенный Ньютоном.

4-вектор силы $\vec{\mathsf{F}}_\mu$ имеет название силы Минковского и не совпадает с обычной силой. Чтобы определить его компоненты, подставим проекции 4-вектора энергии-импульса (13.6) и выражение интервала $ds = cd\tau = c\sqrt{1 - v^2/c^2}\,dt$. Тогда, с учетом закона Ньютона $d\vec{p}/dt = \vec{F}$, имеем:

$$\mathsf{F}_x = \frac{1}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{d\,p_x}{d\,t} = \frac{F_x}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
$$\mathsf{F}_y = \frac{F_y}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathsf{F}_z = \frac{F_z}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (13.10)$$

Пространственные компоненты уравнения Минковского совпадают с известным уравнением движения:

$$\boxed{\frac{d\,\vec{p}}{d\,t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)}, \qquad (13.11)$$

где $\vec{F}$ – результирующая всех сил.

При $v^2/c^2 \to 0$ это уравнение совпадёт с классическим уравнением движения (2.7). Но для релятивистской частицы оно приводит к интересным особенностям.

Вычисляя производную, находим, что в проекции на направление, касательное к траектории частицы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\frac{m}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}=\frac{m}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}a_\tau=F_\tau .$$

С другой стороны, нормальная к траектории составляющая силы работу не совершает и не меняет величину скорости частицы: $v^2=\text{const}$.

Поэтому $$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}a_n=F_n .$$

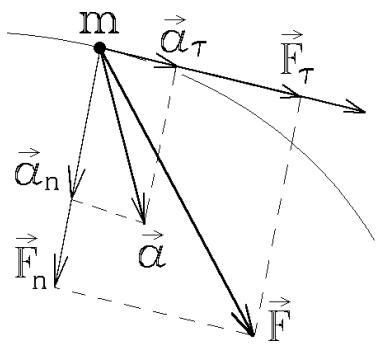

Рис.13.1

Вывод: направление ускорения релятивистской частицы не совпадает с направлением результирующей силы (рис.13.1)! А так как отношение силы и ускорения частицы определяют величину её инерции, то инерция релятивистской частицы будет бо̀льшей при действии касательной к траектории силы и мѐньшей – при действии нормальной силы!

Пример: ракета с массой m (массой покоя) ускоряется постоянной силой тяги F (рис.11.21).

Разделяя переменные в уравнении движения $\dfrac{m}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}\dfrac{dv}{dt}=F$ и,

интегрируя, получим $\displaystyle\int_0^v\frac{dv}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}=\frac{F}{m}t$, откуда $\dfrac{v}{\sqrt{\left(1-v^2/c^2\right)}}=\dfrac{F}{m}t$.

Скорость ракеты меняется со временем по закону $v=\dfrac{cFt}{\sqrt{m^2c^2+F^2t^2}}$.

Этот результат показан на рис.11.22. Скорость света недостижима.

Наконец определим "временную" компоненту F_{ct} 4-вектора силы. Согласно уравнению (13.9) 4-вектор силы пропорционален 4-вектору ускорения w_μ, и поэтому его скалярное произведение с 4-вектором скорости всегда обращается в нуль: $\left(\mathsf{F}\cdot u\right)=0$. После подстановки формул (12.10), (12.12) и (13.10) получим:

$$\mathsf{F}_{ct} = \frac{\mathsf{F}_x u_x + \mathsf{F}_y u_y + \mathsf{F}_z u_z}{u_{ct}} = \frac{\vec{F}\vec{v}}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

А так как обычное скалярное произведение $\vec{F}\vec{v}$ – это мощность силы, то "временная" компонента уравнения Минковского (13.9) связана с уже найденным изменением полной энергии частицы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \vec{F}\vec{v}.$$

3. Система частиц в СТО и законы сохранения

В системе из N релятивистских частиц к сумме их полных энергий следует добавить потенциальную энергию взаимодействия частиц между собой и с внешними полями. Полная энергия системы примет вид:

$$\varepsilon_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} + U. \qquad (13.12)$$

Однако использовать эту формулу надо с большой осторожностью по следующим причинам.

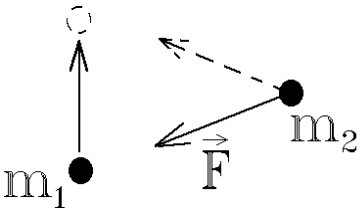

Рис.13.2

1) Не удаётся получить простое выражение для U, используя связь $\vec{F}_{\text{конс}} = -\vec{\nabla}U$. Если сдвинуть одну из взаимодействующих частиц (рис.13.2), то скачком изменится потенциальная энергия их взаимодействия, зависящая от взаимного расположения частиц. В результате **мгновенно** изменится сила $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, действующая на другую частицу. Этого быть не должно, так как скорость передачи любого взаимодействия не превышает скорости света c!

Классическая механика Ньютона основана на принципе дальнодействия – мгновенной передаче взаимодействия на любые расстояния. Результаты теории относительности указывают на то, что в действительности взаимодействие передается **с помощью полей**, с конечной скоростью, не превышающей скорость света (принцип близкодействия).

Поэтому взаимодействие частиц надо записывать с помощью характеристик поля, таких, как потенциал, изменяя его классическое выражение (8.7) так, чтобы учесть **запаздывание** из-за конечной скорости передачи взаимодействия.

2) Частицы и создаваемое ими поле образуют одну физическую систему. Следовательно, в формулу (13.12) надо добавить и энергию поля, и энергию излучения частиц. К тому же физические релятивистские частицы обладают достаточно большой энергией, чтобы между ними происходили реакции распада и синтеза. Поэтому необходимо учитывать изменение числа и состава частиц системы.

3) Потенциальная энергия U не является компонентой 4-вектора, и остается неясным, как она преобразуется при переходе в другую ИСО. Приходится определять U в каждой системе отсчета.

Всё сказанное приводит к тому, что определить полную энергию системы релятивистских частиц можно только в некоторых простейших случаях. В первую очередь – это система **невзаимодействующих** частиц, для которой

$$\varepsilon_{\text{сист}} = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2 / c^2}} = \text{const}, \quad \vec{p}_{\text{сист}} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2 / c^2}} = \text{const}.$$

В Ц–системе (системе центра масс) полный импульс системы частиц равен нулю: $\tilde{\vec{p}}_{\text{сист}} = 0$. Из формулы (13.8) следует, что скорость Ц–системы (скорость центра масс)

$$\boxed{\vec{v}_{\text{C}} = c^2 \, \vec{p}_{\text{сист}} / \varepsilon_{\text{сист}}}. \qquad (13.13)$$

В Ц–системе находим массу всей системы частиц, покоящейся как целое: $m_{\text{сист}} = \sum \tilde{\varepsilon}_i / c^2$. Эта масса определяет величину релятивистского инварианта (12.9):

$$\boxed{\varepsilon_{\text{сист}}^2 - p_{\text{сист}}^2 c^2 = m_{\text{сист}}^2 c^4.} \qquad (13.14)$$

Из последнего соотношения видно, что $m_{\text{сист}} \neq \sum m_i$, т.е. в теории относительности масса системы не равна сумме масс её частей и уже не может служить мерой количества вещества!

4. Столкновения и распад релятивистских частиц

Другой физической системой, для которой можно использовать закон сохранения полной энергии, будет система сталкивающихся релятивистских частиц. Скорость таких частиц настолько велика, что их сближение и взаимодействие происходит за очень короткий промежуток времени, **практически мгновенно**. За это время $\Delta t \to 0$ частицы не успевают изменить энергию, а все остальное время они свободны.

Для простоты рассмотрим столкновение релятивистской частицы 1 с

массой m_1 и покоящейся частицы-мишени 2 с массой m_2. Энергии и импульсы частиц, соответственно, ε_1, $\vec{p}_1$, и $\varepsilon_2 = m_2c^2$, $\vec{p}_2 = 0$. Если после столкновения разлетаются те же частицы 1 и 2, то столкновение называется упругим (рис.13.3). Если же состав частиц меняется, то столкновение – неупругое.

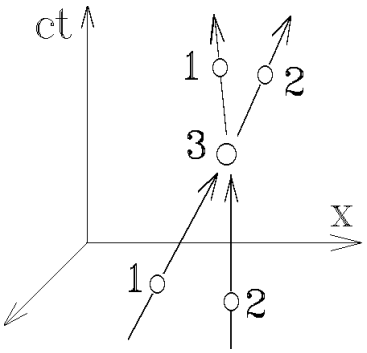

Рис.13.3

Разделим задачу упругого соударения на две. Будем считать, что в момент соударения на короткий момент времени образуется некоторая промежуточная частица 3 (рис.13.3), движущаяся со скоростью центра масс $\vec{v}_C$ и имеющая массу $m_{сист}$. Это – задача о неупругом слиянии частиц: $1+2 \to 3$. Затем промежуточная частица распадается в исходные. Это – задача о распаде частицы: $3 \to 1+2$. Из формулы (13.7) находим квадрат импульса налетающей свободной частицы $p_1^2 = \varepsilon_1^2 / c^2 - m_1^2c^2$ и подставляем в соотношение (13.14): , $\left(\varepsilon_1 + m_2c^2\right)^2 - (\vec{p}_1 + 0)^2 c^2 = m_{сист}^2 c^4$, откуда следует, что $m_{сист}^2 = m_1^2 + m_2^2 + \dfrac{2\varepsilon_1 m_2}{c^2}$. А так как $\varepsilon_1 > m_1c^2$, то

$$\boxed{m_{сист} > m_1 + m_2}.$$

В процессе слияния масса покоя образующейся частицы 3 должна возрасти. И, наоборот, при распаде частицы 3 суммарная масса образующихся частиц снова должна уменьшиться.

Вывод: движущаяся или покоящаяся частица с массой M не может распасться в частицы с бо̀льшей суммарной массой покоя. Обязательно $\sum m_i < M$ после распада. Поэтому ядерные реакции распада происходят с уменьшением массы.

Величина $\Delta m = M - \sum m_i$ называется дефектом масс реакции распада. Если $\Delta m > 0$, то реакция распада **энергетически выгодна** и может произойти. При этом суммарная энергия покоя уменьшится на величину $\Delta\mathcal{E}_п = \Delta mc^2$, которая называется энергетическим выходом реакции распада. Энергия покоя $\Delta\mathcal{E}_п$ превращается в другие виды энергии – кинетическую энергию разлетающихся осколков, энергию образующихся γ – квантов излучения и т.д.

Пример: при взрыве мегатонной термоядерной бомбы (эквивалент 10^6 тонн тротила) выделяется $\Delta\mathcal{E}_1 = 4{,}18\cdot 10^{15}$ Дж энергии за счет потери массы $\Delta m = \Delta\mathcal{E}_1 / c^2 \approx 0{,}046$ кг .

При столкновении частицы и античастицы (или вещества и антивещества) происходит аннигиляция: вся их энергия превращается в энергию излучения. Нетрудно подсчитать, что человек или метеорит с массой $m = 60$ кг , попав в антимир, немедленно произведёт взрыв, эквивалентный взрыву $2mc^2 / \Delta\mathcal{E}_1 = 2600$ мегатонных бомб.

Последний пример нельзя рассматривать, как процесс "исчезновения материи". Материя существует в разных формах: в виде вещества, в виде излучения (поля). Происходит переход материи из одной формы в другую, из вещества – в излучение в виде безмассовых фотонов.

Возможен и обратный переход. Для образования частицы 3 с массой $M = m_{\text{сист}}$ в процессе, изображенном на рис.13.3, налетающая частица должна иметь полную энергию $\mathcal{E}_1 = \dfrac{\left(M^2 - m_1^2 - m_2^2\right)c^2}{2m_2}$ и кинетическую энергию $K_1 = \mathcal{E}_1 - m_1c^2 = \dfrac{M^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2}c^2$. Эта энергия называется пороговой энергией реакции образования частицы с массой M .

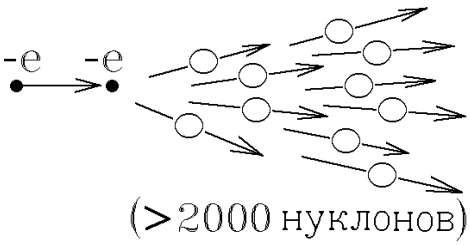

Рис.13.4

Но если кинетическая энергия налетающей частицы значительно превосходит пороговую энергию, то может образоваться не одна, а множество более массивных частиц! В современных ускорителях, разгоняя сталкивающиеся электроны до околосветовых скоростей, получают "ливни" из тысяч образующихся нуклонов, каждый из которых в тысячи раз массивнее электрона (рис.13.4).

В очень сильных электромагнитных полях наблюдается процесс образования пар частица–античастица, обратный процессу аннигиляции (это происходит, когда энергия квантов поля превышает суммарную энергию покоя $2mc^2$).

В заключение отметим, что для решения любой задачи столкновения релятивистских частиц достаточно использовать релятивистский инвариант (13.14) и закон сохранения энергии-импульса системы.

Предметный указатель

Аберрация светового луча 166
Автоколебания 126
Амплитуда 106
Амплитудно-частотная характеристика 121
Биения 119
Вектор
— аксиальный 17
— полярный 17
Внутренняя механическая энергия 60
Волчок асимметричный 80
Гипотеза часов 143
Гироскоп (симметричный волчок) 81
— нутация 86
— прецессия 85
Гироскопический компас 83
Гироскопический эффект 82
Главные оси инерции 79
Гравитационное поле 89
— вектор напряженности $\vec{E}_{гр}$ 89
— потенциал $\varphi_{гр}$ 89
— связь $\vec{E}_{гр}$ и $\varphi_{гр}$ 90
— силовые линии 90
Градиент 38
Движение апериодическое 113
— плоское 75
— реактивное 50
— финитное и инфинитное 103
Действие 130
Дефект масс 174
Динамическое уравнение
— вынужденных колебаний 119
— затухающих колебаний 111
Добротность осциллятора 122
Закон
— всемирного тяготения 87
— Гука 21
— Ньютона первый 25
— второй 27
— третий 28
Законы Кеплера 98
Изотропность пространства 135
Импульс частицы 24
— релятивистской частицы 167
Инвариантность 133
Инертность 23,70
Интервал 159
— времениподобный 159
— пространственноподобный 161
Кинетическая энергия частицы 34
— релятивистской частицы 168
— системы частиц 59
Колебания
— вынужденные 119
— гармонические 106
— затухающие 108
— параметрические 125
— связанные 116
— собственные 106
Коэффициент
— жесткости 21
— затухания колебаний 112
Лагранжиан 129
Логарифмический декремент затухания 113
Масса 23
— гравитационная 24
— инертная 23
— приведенная 59
— собственная (масса покоя) 167
Материальная точка (частица) 7
Маятник
— математический 111
— физический 110
Метод векторных диаграмм 117
Метрика пространства 157
Мировая линия 158

Мировая точка 157
Момент импульса
— закон сохранения 56
— относительно оси 44
— системы частиц 54,62
— частицы 42
Момент инерции
— главный 79
— тела относительно оси 70
— частицы 44
Момент силы 43
Мощность силы 34
Обобщенные координаты (скорости) 129
Общая теория относительности (ОТО) 145
Однородность времени 136
Однородность пространства 134
Орбита
— геостационарная 100
— перигелий и афелий 105
Осциллятор 106
Ось вращения
— закрепленная 69
— мгновенная 68
Пара сил 61
Парадокс близнецов 144
Перемещение 8
Период колебаний 106
Плечо силы 43
Поле сил 23,89
— потенциальное 89
Полная механическая энергия 40
— закон сохранения 40
— осциллятора 114
— системы частиц 53
— частицы 40
Полная энергия свободной частицы 168
Полный импульс системы и закон его сохранения 46
Потенциальная энергия 35
— собственная 52
Потенциальная яма (барьер) 103
Потенциальные кривые 102
Поток вектора 94
Приливной эффект 92
Преобразования
— координат Галилея 26
— Лоренца 150
— четырехмерных векторов 155
Принцип
— близкодействия 172
— дальнодействия 139,172
— наименьшего действия 131
— постоянства скорости света 139
— эквивалентности 24,92
Принцип относительности
— классический (Галилея) 28
— Эйнштейна 139
Пространство
— Минковского 156
— псевдоэвклидово 158
— эвклидово 158
Путь 8
Работа силы 33
Радиус кривизны траектории 12
Резонанс 121
— параметрический 126
Резонансная кривая (АЧХ) 121
Резонаторы 123
Релаксации время 112
Релятивистская частица 167
— связь энергии и импульса 169
Релятивистский инвариант 163
Релятивистский эффект Доплера
— продольный 165
— поперечный 156
Релятивистское замедление времени 142,151
Релятивистское (лоренцево) сокращение длины 147, 151
Световой горизонт 162
Световой конус 161

Сила 20
— веса 21
— вязкого трения 22
— гравитационная 20
— диссипативная 41
— инерции 29
— квазиупругая 21,106
— консервативная 35
— кориолисова 30
— Минковского 170
— неконсервативная 40
— реактивная 50
— трения покоя 22
— трения скольжения 22
— тяги 51
— упругости 21,37
— центральная 36
— центробежная 30
Синхронизация часов 8,141
Система
— замкнутая 46
— консервативная 53
— лабораторная (Л-система) 58
— центра масс (Ц-система) 58
Система отсчета
— инерциальная (ИСО) 25
— неинерциальная 29,58
Скорость 8
— вторая космическая 101
— относительная 59
— первая космическая 99
— секториальная 98
— третья космическая 101
— угловая 14
Собственное время 142
Специальная теория относительности (СТО) 139
Столкновение
— абсолютно неупругое 65,174
— упругое 66, 174
Тензор момента инерции 77
Теорема
— Гаусса для гравитац. поля 95
— Нётер 134
— Штейнера 74
Теорема сложения скоростей
— классическая 26
— релятивистская 153
Траектория частицы 8
Уравнение
— вращательного движения 70
— Мещерского 50
— Минковского 170
— моментов 54,63
Уравнения Лагранжа-Эйлера 132
Ускорение 9
— кориолисово 19
— нормальное 12
— тангенциальное 11
— угловое 14
— центростремительное 12,19
Фаза 106
Фигуры Лиссажу 115
Центр масс системы 47
Циркуляция вектора 35
Частота
— резонансная 121
— для скорости 123
— для смещения 121
— собственная 106
— собственных затухающих колебаний 113
— циклическая 106
Число степеней свободы 128
Эквипотенциальная поверхность 39
Энергетический выход реакции 174
Энергия покоя 169
4-вектор 162
— скорости 163
— ускорения 164
— энергии-импульса 169

Библиографический список

1. Иродов И.Е. Основные законы механики.-4-е изд.- М.: Высшая школа, 1997.- 239 с.

2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности.-2-е изд.- М.: Высшая школа, 1986.- 320 с.

3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика.- 2-е изд.- М.: Наука, 1979.- 552 с.

4. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика.- М.: Наука, 1971.- 479 с.

5. Савельев И.В. Курс физики.Т.1: Механика. Молекулярная физика. - М.: Наука, 1989.- 352 с.

6. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Выпуски 1, 2.- М.: Мир, 1969.- 435 с.

7. Тейлор Э. и Уилер Дж. Физика пространства-времени.- 2-е изд.- М.: Мир, 1971.- 319 с.

8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика.- 4-е изд.- М.: Наука, 1988.- 736 с.

9. Зоммерфельд А. Механика.- М.: ИЛ, 1955.- 480 с.

10. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1968.- 720 с.

Колмаков Юрий Николаевич

Пекар Юрий Александрович

Лагун Ирина Марселиевна

Лежнева Лидия Сергеевна

МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Лекции по физике

Редактор И.А.Есаян

Подписано в печать 6.02.02. Формат бумаги $60\times841/16$. Бумага типограф.№ 2. Офсетная печать. Усл.печ.л. 10,5. Уч.-изд.л. 9,0.
Тираж 300 экз. Заказ
Тульский государственный университет. 300600, Тула, просп. Ленина, 92.
Редакционно-издательский центр Тульского государственного университета. 300600 Тула, ул.Болдина, 151.