Ю. Н. ДУБНИЩЕВ

ТЕОРИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Издание четвертое,
исправленное и дополненное

РЕКОМЕНДОВАНО
Учебно-методическим объединением вузов РФ
по образованию в области приборостроения
и оптотехники в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям:
200100 — «Приборостроение»
200200 — «Оптотехника»;
200600 — «Фотоника и оптоинформатика»
и специальностям:
200201 — «Лазерная техника и лазерные технологии»,
200203 — «Оптико-электронные приборы и системы»

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
МОСКВА •
КРАСНОДАР •
2011

ББК 32.86я73
Д 79

Дубнищев Ю. Н.

Д 79 Теория и преобразование сигналов в оптических системах : Учебное пособие. 4-е изд., испр. и доп. — СПб. : Издательство «Лань», 2011. — 368 с. : ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1156-6

Излагаются сведения по теории сигналов и их спектральным представлениям с физическим обоснованием применения к линейным оптическим системам. Описываются распространение и трансформация оптических сигналов в свободном пространстве, даются основы фурье-оптики, свойства гауссовых пучков, понятие о дуальности оптических систем.

Рассматриваются преобразование Ганкеля, преобразования сигналов с ограниченным спектром, случайных сигналов, дискретные преобразования оптических сигналов, теорема Котельникова в координатном и частотном пространствах, принцип неопределенности. Случайные сигналы описываются в рамках корреляционной теории. Вводятся понятия функции когерентности, оптической передаточной функции, когерентного и некогерентного импульсного отклика. Излагаются основы акустооптического преобразования световых полей и методов оптической фильтрации сигналов. Дается понятие о вейвлет-преобразовании в оптике.

Учебное пособие предназначено для студентов, магистрантов и аспирантов соответствующих специальностей, а также для всех, кто интересуется оптическими методами обработки информации и их приложениями в науке и технике.

ББК 32.86я73

Рецензенты:
П. Е. ТВЕРДОХЛЕБ — главный научный сотрудник Института автоматики и электромерии СО РАН, заслуженный деятель науки РФ, профессор, доктор технических наук; *В. А. ТАРЛЫКОВ* — профессор кафедры лазерной техники и биомедицинской оптики СПбГУ ИТМО.

Обложка
Л. А. АРНДТ

Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.

© Издательство «Лань», 2011
© Ю. Н. Дубнищев, 2011
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый читателям учебник основан на одноименном курсе лекций, который автор читал в Новосибирском государственном техническом университете студентам, специализирующимся в области оптики, оптико-электронных систем и информационных технологий. Изложение материала ведется в рамках теории линейных систем, язык которой понятен и физикам, и инженерам. Успех в науке и технике часто определяется ассоциацией идей и аналогией методов из самых различных областей знаний. В частности, из таких аналогий возникла фурье-оптика, быстро развившаяся в теорию систем и преобразований в оптике как базу современных информационных и измерительных технологий. Цель учебника состоит в адаптации этой теории для вузовского образования.

Книга написана под влиянием превосходных в методическом и научном отношении работ, указанных в списке рекомендованной литературы. Излагаются необходимые сведения о сигналах, их спектральных, энергетических и корреляционных характеристиках, основные понятия о линейных системах. Физически обосновывается применение линейных систем в оптике, рассматриваются особенности преобразования оптических сигналов. Описываются распространение и трансформация оптических сигналов в свободном пространстве, оптическое преобразование Фурье, его свойства и различные способы реализации, гауссовы пучки, дается понятие о дуальности оптических систем. Рассматривается оптическое преобразование Гильберта.

Обсуждается преобразование Ганкеля для оптических сигналов с круговой симметрией и произвольных оптических полей, принцип и соотношения неопределенностей для спектрально-ограниченных сигналов, разложение сигналов в ряд Котельникова. Преобразования случайных сигналов в оптике описываются в рамках корреляционной теории. Рассматриваются методы согласованной, избирательно-согласованной и инверсной фильтрации оптических сигналов, а также свойства фильтров с оптической обратной связью. Приводятся сведения о частотно-координатном преобразовании сигналов и вейвлет-преобразовании в оптике. Изложение сопровождается примерами и задачами. Содержание данной книги ограничивается изложением теории линейных систем и преобразований в оптике в самодостаточной форме, не требуя при изучении основных положений обращения к другим источникам учебного и справочного характера.

Учебник предназначен для студентов, магистрантов и аспирантов, обучающихся по направлениям «Оптотехника», «Фотоника и оптоинформатика», «Приборостроение», «Лазерные системы», «Радиотехника», «Инноватика», и может быть полезен всем интересующимся оптическими системами и их приложениями.

Автор глубоко признателен Р. Г. Надыровой за неоценимую помощь в подготовке рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Теория и преобразование сигналов в оптических системах появились как результат плодотворного синтеза идей и методов, развиваемых в оптике и радиотехнике. Она составляет базу для современных информационных и измерительных технологий.

Понятие «система» в оптике часто определяется как устройство, преобразующее входные сигналы в выходные. При этом свойства системы не определяются простой суммой свойств частей и элементов, ее составляющих, а характеризуются новым качеством. Под сигналом в оптике обычно понимают параметры и функции, характеризующие пространственно-временное состояние светового поля, несущего информацию об изучаемом объекте. Отличительной особенностью оптических сигналов является их преимущественно пространственный характер, поскольку информационными параметрами может служить пространственное (обычно двумерное) распределение амплитуды, фазы, частоты или интенсивности светового поля.

Оптические системы осуществляют многоканальные преобразования и параллельную обработку пространственных сигналов с очень высоким быстродействием, поскольку физическим носителем сигнала является поле, распространяющееся со скоростью света. Например, оптический анализатор спектра выполняет полное двумерное преобразование Фурье за несколько наносекунд. В оптических системах носителем информации является нейтральная

частица-фотон, тогда как в электрических перенос информации осуществляется заряженной частицей-электроном. Этим объясняется высокая устойчивость оптических информационных систем в сравнении с электронными к электромагнитным помехам. Плодотворность системного подхода при анализе оптических процессов выявляется при использовании методов, разработанных в теории линейных систем, и соответствующего аппарата интегральных преобразований. В современной оптике преобразования Фурье и Гильберта составляют методическую базу фундаментальных и прикладных исследований. Преобразования Гильберта лежат в основе традиционных и современных методов визуализации полей фазовой оптической плотности и широко используются в науке и технике. В последнее время они интегрировались в диагностику газовых и конденсированных сред как одно из направлений развития прикладной оптики.

С появлением лазеров стали интенсивно развиваться методы когерентной и некогерентной оптики, нашедшие мощные приложения в различных системах обработки информации, лазерной локации, в измерительной технике и связи. Методы теории систем и преобразований в оптике получили широкое распространение благодаря своей универсальности, которая обеспечивает единый подход в решении самых разнообразных задач, непосредственно связанных с анализом и синтезом математических моделей, подробно описывающих распространение и дальнейшую трансформацию оптических сигналов.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ СИГНАЛОВ

1.1. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ СИГНАЛОВ

Слово «сигнал» ведет свое происхождение от латинского слова *signum* — «знак», имеющего широкий смысл. В обычном понимании сигнал отражает состояние физической системы.

Сигналом называют процесс изменения во времени или в пространстве физического состояния какого-либо объекта или среды, служащий для отображения, регистрации и передачи сообщений (информации). Теоретический анализ сигналов различной физической природы возможен, если выбран способ их математического описания. Математической моделью оптического сигнала является адекватная функциональная зависимость от временно́го и пространственного аргументов. По ходу изложения, если не требуются уточнения временно́го или пространственного характера сигнала, будем пользоваться для аргумента обозначением x.

Размерность сигнала определяется числом описывающих его независимых функций.

Многомерный сигнал — упорядоченная совокупность одномерных сигналов.

В общем случае сигналы с разным порядком следования компонент не равны друг другу: $\{s_1, s_2\} \neq \{s_2, s_1\}$.

Детерминированный сигнал описывается функциональной зависимостью, позволяющей точно установить его параметры при заданном значении аргумента.

Случайный сигнал статистически связан со значением аргумента.

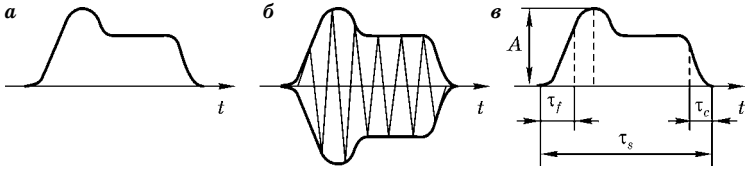


Рис. 1.1

Импульсный сигнал существует на конечном интервале значений аргумента (временно́го или пространственного). В радиотехнике различают видеоимпульсы (рис. 1.1*а*) и радиоимпульсы (рис. 1.1*б*). Если $s_v(t)$ — видеоимпульс, то ему соответствует радиоимпульс

$$s_r(t) = s_v(t)\cos(\omega t + \varphi).$$

Радиоимпульсы отличаются от видеоимпульсов высокочастотной несущей $\cos(\omega t + \varphi)$, где ω — частота; φ — фаза. Параметры, характеризующие импульсный сигнал, показаны на рис. 1.1*в*, где A — амплитуда; τ_s, τ_f, τ_c — длительность импульса, фронта и среза соответственно. Различают аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.

Аналоговый сигнал является непрерывной функцией аргумента. *Дискретный сигнал* определяется на счетном множестве значений аргумента. Интервал между соседними значениями аргумента называется *шагом дискретизации*.

Цифровой сигнал — разновидность дискретного, представленного в отсчетных точках в виде чисел.

1.2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО СИГНАЛОВ

Пусть $M = \{s_1(x), s_2(x), \ldots, s_N(x)\}$ — некоторое множество сигналов, объединенных каким-либо общим свойством. Отличительные свойства сигналов выявляются, если прослеживается взаимосвязь отдельных сигналов, входящих во множество M.

Структура линейного множества сигналов. Вещественное линейное множество сигналов должно удовлетворять следующим условиям.

1. Любой сигнал $s \in M$ при любых значениях аргумента может принимать лишь вещественные значения.

2. Для любых $s \in M$ и $v \in M$ существует их сумма $w = s + v$, причем $w \in M$. Операция суммирования коммутативна,

$$s + v = n + s,$$

и ассоциативна,

$$u + (v + s) = (u + v) + s.$$

3. Для любого сигнала $s \in M$ и любого вещественного числа α определен сигнал $\alpha s \in M$.

4. Множество M содержит нулевой элемент $\varnothing$ такой, что $s + \varnothing = s$ для всех $s \in M$.

В случае, когда математические модели сигналов допускают комплексные значения, а свойства 2–4 остаются справедливыми, можно говорить о *комплексном линейном множестве сигналов*.

Пример 1.1. Множество M образовано сигналами s_i, модули которых не превосходят s_0. Можно ли считать данное множество M линейным? Ответ отрицателен, так как $\left|\sum_i^n s_i\right|$ может быть больше s_0.

Нормированное линейное множество сигналов. Линейное пространство L является нормированным, если каждому сигналу $s \in L$ однозначно сопоставлено число $\|s\|$ — норма этого сигнала. При этом должны выполняться следующие аксиомы.

1. Норма неотрицательна, т. е. $\|s\| \geq 0$, причем $\|s\| = 0$ тогда и только тогда, когда $s = \varnothing$.

2. Для любого числа α справедливо равенство $\|\alpha s\| = |\alpha| \cdot \|s\|$.

3. Если s и p — два элемента из L, то выполняется неравенство треугольника

$$\|s + p\| \leq \|s\| + \|p\|.$$

Норма сигнала является аналогом длины вектора в векторном пространстве. Для вещественных сигналов

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(x)dx}.$$

Комплексные сигналы имеют норму

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} ss^* dx}.$$

Здесь и далее * означает комплексное сопряжение.

Энергия сигнала определяется как квадрат нормы:

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |s(x)|^2 dx.$$

Пример 1.2. Найти энергию E_s и норму сигнала $s(x)$, представляющего собой отрезок синусоиды на интервале $[0, x_0]$ (рис. 1.2):

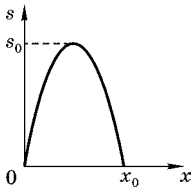


Рис. 1.2

$$s(x) = s_0 \sin\frac{\pi x}{x_0}, \quad 0 \le x \le x_0;$$

$$E_s = s_0^2 \int_0^{x_0} \sin^2 \frac{\pi x}{x_0} dx =$$

$$= \frac{s_0^2}{2} \int_0^{x_0} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{x_0}\right)\right] dx = \frac{1}{2} s_0^2 x_0;$$

$$\|s\| = s_0 \sqrt{\frac{x_0}{2}}.$$

Пример 1.3. Найти энергию радиоимпульса с прямоугольной формой огибающей (рис. 1.3):

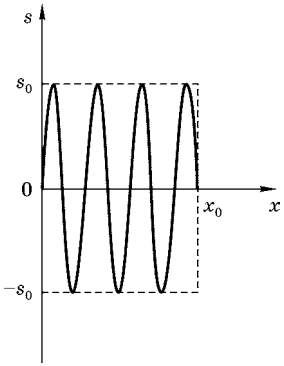


Рис. 1.3

$$s(x) = s_0 \sin(\omega_0 x) \operatorname{rect}\left(\frac{x}{x_0}\right),$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{x}{x_0}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le x_0, \\ 0, & x > x_0, x < 0; \end{cases}$$

$$E_s = s_0^2 \int_0^{x_0} \sin^2(\omega_0 x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} s_0^2 \int_0^{x_0} x1 - \cos[1 - \cos(2\omega_0 x)] dx =$$

$$= \frac{1}{2} s_0^2 x_0 + \frac{1}{4} \frac{s_0^2}{\omega_0} \sin(2\omega_0 x_0) =$$

$$= \frac{1}{2} s_0^2 x_0 \left[1 + \frac{1}{2x_0\omega_0} \sin(2\omega_0 x_0)\right].$$

Если $x_0 \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$, $x_0\omega_0 \gg 2\pi$, то $E_s \approx \frac{1}{2}s_0^2 x_0$ независимо от значений ω_0.

Из определения нормы через энергию, $\|s\| = \sqrt{E_s}$, следует, что о величине сигнала можно судить по суммарному энергетическому эффекту. Вводимая таким образом энергетическая норма оказывается «нечувствительной» к изменениям формы сигнала, временны́м или пространственным, на относительно малом интервале.

Метрическое пространство. Нормированное линейное множество сигналов является *метрическим*, если каждой паре элементов $u, v \in L$ может быть сопоставлено неотрицательное число $\rho(u, v)$, называемое метрикой. Метрика трактуется как расстояние между элементами. Поэтому множество сигналов, в котором задана метрика, приобретает геометрические свойства. Метрика подчиняется аксиомам метрического пространства: 1) $\rho(u, v) = \rho(v, u)$; 2) $\rho(u, u) = 0$ при любых $u \in L$; 3) каков бы ни был элемент $w \in L$, всегда $\rho(u, v) \le \rho(u, w) + \rho(w, v)$.

Обычно метрика определяется как *норма разности двух сигналов*: $\rho(u, v) = \|u - v\|$. Норма, в свою очередь, трактуется как расстояние между выбранным элементом пространства и нулевым элементом $\|u\| = \rho(u, \varnothing)$. Нормированное линейное множество сигналов, в котором определена метрика, получило название *метрического пространства*.

Координатный базис. Линейное пространство (по аналогии с обычным трехмерным пространством) может содержать специальную структуру, играющую роль системы координат. Совокупность векторов $\{l_1, l_2, l_3, \ldots\}$, принадлежащих M, является линейно независимым координатным базисом, если равенство $\sum_i \alpha_i l_i = 0$ возможно лишь в случае одновременного обращения в нуль всех числовых коэффициентов α_i.

Если дано разложение некоторого сигнала в виде $s = \sum_i c_i l_i$, то числа $\{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ являются проекциями сигнала s относительно выбранного базиса.

Число базисных векторов может быть неограниченно велико. Такие линейные пространства называются *бесконечномерными*.

Пример 1.4. Линейное пространство образовано сигналами, которые описываются многочленами неограниченно высокого порядка: $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n x^n$. Координатным базисом в этом пространстве служит система функций

$$\{l_0=1,\ \ l_1=x,\ \ l_2=x^2,\ \ \ldots\}.$$

В метрическом пространстве норма является аналогом длины вектора в векторном пространстве.

Скалярное произведение сигналов. Вычислим энергию суммы двух вещественных сигналов:

$$E_\Sigma=\int_{-\infty}^{\infty}(u+v)^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}u^2dx+\int_{-\infty}^{\infty}v^2dx+2\int_{-\infty}^{\infty}uvdx=E_u+E_v+E_{uv}.$$

Энергии сигналов не аддитивны — энергия суммарного сигнала содержит в себе взаимную энергию

$$E_{uv}=2\int_{-\infty}^{\infty}uvdx.$$

По аналогии с суммой векторов в линейном векторном пространстве

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|^2=|\mathbf{A}|^2+|\mathbf{B}|^2+2(\mathbf{AB})$$

скалярное произведение сигналов u и v определяется формулой

$$(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}uvdx.$$

Косинус угла между сигналами $\cos\psi_{uv}=\dfrac{(u,v)}{\|u\|\cdot\|v\|}$; аналогия $\cos(\mathbf{AB})=\dfrac{(\mathbf{AB})}{|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|}$.

Свойства скалярного произведения:

$$(u,u)\geq 0,\ \ (u,v)=(v,u),\ \ (\lambda u,v)=\lambda(u,v),$$

где λ — произвольное число,

$$(u+v,w)=(u,w)+(v,w). \qquad (1.1)$$

Линейное пространство, в котором введено скалярное произведение, называется *гильбертовым пространством*. Если сигналы принимают комплексное значение, то можно

определить *комплексное гильбертово пространство*, введя в него скалярное произведение по следующей формуле:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v^*(x)dx.$$

Отсюда следует

$$(u, v) = (v, u)^*.$$

Пример 1.5. Пусть сигналы u и v являются элементами гильбертова пространства. Доказать, что в гильбертовом пространстве справедливы неравенство Шварца и неравенство Коши–Буняковского

$$|(u, v)|^2 \le (u, u)(v, v), \tag{1.2}$$

$$|(u, v)| \le \|u\| \cdot \|v\|. \tag{1.3}$$

Воспользуемся свойствами скалярного произведения (1.1). Применим эти свойства к сигналу вида $u + \alpha v$, где α — произвольный скалярный множитель. Энергия этого сигнала выражается формулой

$$(u + \alpha v, u + \alpha v) = (u, u) + \alpha(v, u) + \alpha^*(u, v) + |\alpha|^2(v, v) \ge 0.$$

Образуем скалярное произведение

$$[(u + \alpha v)v] = (u, v) + \alpha(v, v) \ge 0.$$

Отсюда $\alpha \ge -(u, v)/(v, v)$. Подставим эту оценку α в выражение для энергии сигнала:

$$(u,u) - \frac{(u,v)(v,u)}{(v,v)} - \frac{(u,v)^*(u,v)}{(v,v)} + \frac{|(u,v)|^2}{(v,v)} \ge 0.$$

С учетом $(u, v)^* = (v, u)$ получаем

$$(u,u) - \frac{|(u,v)|^2}{(v,v)} - \frac{|(u,v)|^2}{(v,v)} + \frac{|(u,v)|^2}{(v,v)} \ge 0,$$

$$(u,u) - \frac{|(u,v)|^2}{(v,v)} \ge 0.$$

Отсюда следует неравенство Шварца (1.2). Извлекая квадратный корень из правой и левой частей неравенства Шварца, приходим к неравенству Коши–Буняковского (1.3).

Ортогональность сигналов. Два сигнала u и v называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} uv^* dx = 0.$$

Пример 1.6. Пусть u и v — сигналы в вещественном гильбертовом пространстве. Какими свойствами они должны обладать, чтобы сигналы $s_1 = u + v$ и $s_2 = u - v$ были ортогональны?

$$(s_1, s_2) = (u + v, u - v) =$$
$$= (u, u) + (v, u) - (u, v) - (v, v) = (u, u) - (v, v).$$

Сигналы s_1 и s_2 ортогональны, если энергии сигналов u и v равны:

$$(u, u) - (v, v) = 0.$$

Пример 1.7. Сохранится ли ортогональность сигналов s_1 и s_2 (см. пример 1.6) в комплексном гильбертовом пространстве?

$$(s_1, s_2) = (u + v, u - v) =$$
$$= (u, u) + (v, u) - (u, v) - (v, v) = (v, u) - (u, v).$$

Сигналы s_1 и s_2 ортогональны, если обменная энергия комплексных сигналов u и v вещественна: $(v, u) - (v, u) = 0$.

Обобщенный ряд Фурье. Пусть в гильбертовом пространстве сигналы с ограниченным значением энергии определены в интервале $[x_1, x_2]$, конечном или бесконечном. Предположим, что на этом же интервале задана бесконечная система функций $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$, попарно ортогональных друг другу и обладающих единичными нормами:

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Это означает, что в гильбертовом пространстве сигналов $s(x)$ задан *ортонормированный базис*.

Разложим произвольный сигнал в ряд

$$s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i. \qquad (1.4)$$

Это выражение является представлением сигнала обобщенным рядом Фурье в выбранном базисе.

Нахождение коэффициентов c_i. Умножим скалярно обе части равенства (1.4):

$$(s, u_k) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i, u_k\right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i (u_i, u_k) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \delta_{ik} = c_k.$$

Отсюда

$$c_k = (s, u_k).$$

Таким образом, обобщенный ряд Фурье позволяет представлять сигнал через счетное множество коэффициентов, которые определяют проекции вектора $s(x)$ в гильбертовом пространстве на базисные направления.

Пример 1.8. Записать разложение сигнала $s(t)$, заданного на интервале $[-T/2, T/2]$, в ряд Фурье по ортонормированной системе гармонических функций $u_n(t) = e^{jn\omega_1 t}$. Какой вид это разложение принимает для физического сигнала?

В соответствии с (1.4)

$$s(t)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t},$$

где $\omega_1 = 2\pi/T; c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$

Другая форма записи этого ряда:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n [\cos(n\omega_1 t) + j\sin(n\omega_1 t)] =$$

$$= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n [\cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)], \qquad (1.5)$$

где

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(n\omega_1 t) dt;$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(n\omega_1 t) dt;$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n); c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n).$$

В случае физического сигнала $s(t)$ — действительная функция. Поэтому коэффициенты разложения

$$a_n = c_n + c_{-n} \text{ и } b_n = j(c_n - c_{-n})$$

должны быть действительными числами, что имеет место при $c_{-n} = c_n^*$.

Пример 1.9. Записать разложение сигналов

$$s_1(t) = t \text{ и } s_2(t) = t^2,$$

заданных на интервале $[-T/2, T/2]$, в ряд Фурье.

Поскольку $s_1(t) = t$ — нечетная функция, $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t\sin(n\omega_1 t)dt = \frac{2}{n\omega_1}\cos(n\pi) = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\omega_1}.$$

Отсюда

$$s_1(t) = t = \frac{2}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\omega_1 t)$$

или

$$x = \omega_1 t = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

Сигнал $s_2(t) = t^2$ — четная функция. Поэтому $b_n = 0$;

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t^2\cos(n\omega_1 t)dt = \frac{4}{n^2\omega_1^2}\cos(n\pi) = \frac{4}{n^2\omega_1^2}(-1)^n;$$

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t^2 dt = \frac{T^2}{3\cdot 4}.$$

Отсюда

$$t^2 = \frac{T^2}{3\cdot 4} + \frac{4}{\omega_1^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

или

$$t^2\omega_1^2 = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Дифференцируя этот ряд по x, получаем ранее полученное разложение в ряд Фурье для сигнала $x = \omega_1 t$.

Пример 1.10. Пусть в гильбертовом пространстве сигналов задан ортонормированный базис $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Пока-

зать, что вектор $w = \xi - \sum_{i=1}^{N}(\xi, u_i)u_i$ при произвольном ξ ортогонален любому вектору из ортонормированного базиса $\{u_i\}$

$$(w, u_k) = \left(\xi - \sum_{i=1}^{N}(\xi, u_i)u_i, u_k\right) = (\xi, u_k) - \sum_{i=1}^{N}(\xi, u_i)(u_i, u_k) =$$

$$= (\xi, u_k) - \sum_{i=1}^{N}(\xi, u_i)\delta_{ik} = (\xi, u_k) - (\xi, u_k) = 0.$$

Построение ортонормированной системы базисных функций. Результаты, полученные в примере 1.10, могут служить основой для построения ортонормированного базиса из системы взаимно неортогональных функций $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$, заданных в гильбертовом пространстве. Найдем норму вектора ξ_0 и образуем новый вектор $u_0 = \frac{\xi_0}{\|\xi_0\|}$. Как показано в примере 1.10, вектор $w_1 = \xi_1 - (\xi_1, u_0)u_0$ ортогонален вектору u_0. Сформируем аналогичным способом новый вектор $w_2 = \xi_2 - (\xi_2, u_1)u_1$. Таким образом продолжая этот процесс, для n-го вектора ортогонального базиса получаем

$$w_n = \xi_n - (\xi_n, u_0)u_0 - (\xi_n, u_1)u_1 - \ldots - (\xi_n, u_{n-1})u_{n-1} =$$

$$= \xi_n - \sum_{i=0}^{n}(\xi_n, u_i)u_i = \sum_{i=0}^{n} c_{ni}\xi_i,$$

где c_{ni} — постоянные коэффициенты. Этот метод получения ортогонального базиса $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ называют процедурой Грама–Шмидта.

Энергия сигнала, представленного в виде обобщенного ряда Фурье. Пусть некоторый сигнал $s(x)$ разложен в ряд по ортонормированному базису:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i.$$

Энергия сигнала выражается формулой

$$E_s = (s, s) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_i c_k (u_i u_k) = \sum_{ik}^{\infty} c_i c_k \delta_{ik} = \sum_i c_i^2.$$

Энергия сигнала равна сумме энергий всех компонент обобщенного ряда Фурье.

Аппроксимация сигнала обобщенным рядом Фурье. Представим сигнал $s(x)$, заданный на интервале $[x_1, x_2]$, конечномерной аппроксимацией $\tilde{s}(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i u_i$ на ортонормированном базисе. Определим коэффициенты c_i из условия минимальной ошибки аппроксимации:

$$\varepsilon = \rho^2(s, \tilde{s}) = \|s - \tilde{s}\|^2 = (s - \tilde{s}, s - \tilde{s}) =$$

$$= (s, s) + (\tilde{s}, \tilde{s}) - 2(s, \tilde{s}) = E_s + \sum_{i=1}^{N} c_i (s, u_i).$$

Здесь учтено, что базисные функции u_m ортонормированы, $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$.

Условие экстремума $\partial\mu/\partial c_m = 0$ для $m = 1, 2, \ldots, N$:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial c_m} = \frac{\partial}{\partial c_m}\left\{E_s + \sum_{i=1}^{N} c_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N} c_i (s, u_i)\right\} = 0$$

или

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial c_m} = \frac{\partial}{\partial c_m}\{c_m^2 - 2c_m(s, u_m)\} = 2c_m - 2(s, u_m) = 0.$$

Для c_m получаем

$$c_m = (s, u_m),$$

что совпадает с формулой для определения коэффициента разложения в обобщенный ряд Фурье.

Вторая производная

$$\frac{\partial^2}{\partial c_m^2}[c_m^2 - 2c_m(s, u_m)] > 0.$$

Следовательно, это условие минимума ошибки аппроксимации. Поскольку разложение сигнала в обобщенный ряд Фурье обеспечивает минимальную ошибку аппроксимации, оно оптимально. Если предел суммы $s(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n u_n$ существует, то он сам является элементом гильбертова пространства. Это означает, что гильбертово пространство сигналов обладает свойством полноты.

Полученные результаты хорошо согласуются с формальной аналогией между представлением сигналов обобщенным рядом Фурье и многомерными векторами. Поэтому принято говорить о линейных векторных пространствах сигналов.

1.3. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ

Любой сигнал, заданный в пространстве или во времени, можно приближенно описать суммой определенным образом выбранных элементарных сигналов, среди которых два вида получили наибольшее распространение. В качестве одного из них принимаются ступенчатые функции, аппроксимирующие огибающую реального сигнала. Высота каждой ступеньки равна приращению сигнала на заданном интервале изменения Δx временно́го или пространственного аргумента x (рис. 1.4). Другой вид элементарного сигнала представляет собой прямоугольный импульс, высота которого аппроксимирует амплитуду сигнала на заданном интервале (рис. 1.5).

Функция включения. В качестве математической модели элементарного сигнала при ступенчатой аппроксимации используется *функция Хевисайда* или, как ее еще называют, *функция включения*. Она образуется как предел функции:

$$s_e(x) = \begin{cases} 0, & x < -\xi, \\ \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{x}{\xi}\right), & -\xi \le x \le \xi, \\ 1, & x > \xi. \end{cases}$$

Пример такой модели элементарного сигнала $s_e(x)$ представлен на рис. 1.6. Видно, что в интервале $-\xi \le x \le \xi$ функция s_e изменяется по линейному закону от нуля до

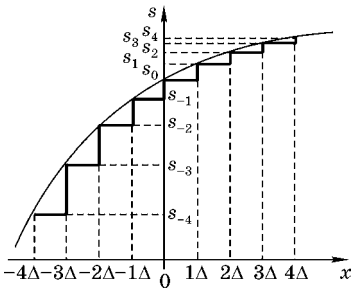


Рис. 1.4

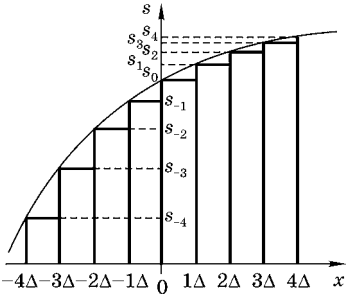


Рис. 1.5

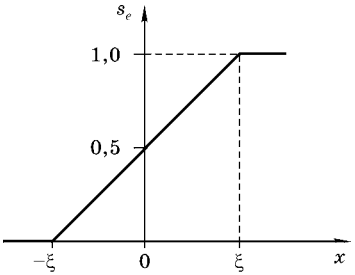


Рис. 1.6

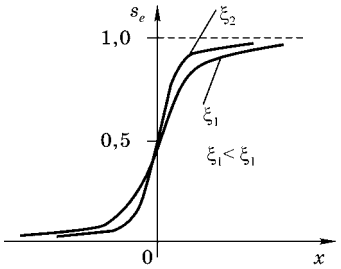


Рис. 1.7

единицы. Функция Хевисайда образуется посредством предельного перехода

$$\sigma(x) = \lim_{\xi \to 0} s_e(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Если функция смещена относительно начала отсчета по оси x на величину x_0, используется следующая форма записи:

$$\sigma(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ \dfrac{1}{2}, & x = x_0, \\ 1, & x > x_0. \end{cases}$$

Рассмотренный выше способ построения функции включения не является единственно возможным. Например, она может быть получена как предел выражения, описывающего нелинейный переход от состояния с нулевым значением к состоянию со значением, равным единице (рис. 1.7):

$$\sigma(x) = \lim_{\xi \to 0} s_e(x) = \lim_{\xi \to 0} \frac{1}{1 + \exp(-x/\xi)}.$$

Функцию включения очень удобно применять для задания интервалов значений аргумента, в которых существует сигнал. В частности, это относится к описанию импульсных сигналов.

Функция Дирака или дельта-функция определяется как производная функции включения:

$$\delta(x) = \frac{d}{dx}\sigma(x). \qquad (1.6)$$

Она образуется как предел, к которому стремится прямоугольный элементарный импульс, сохраняющий оконтуренную огибающей площадь при бесконечно малой длительности. Определим такой элементарный сигнал через разность двух функций включения (рис. 1.8):

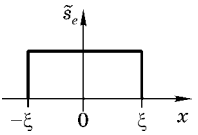


Рис. 1.8

$$\tilde{s}_e(x) = \frac{1}{2\xi}[\sigma(x+\xi) - \sigma(x-\xi)].$$

Найдем площадь такого элементарного импульса:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_e(x)dx = \frac{1}{2\xi}\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma(x+\xi) - \sigma(x-\xi)]dx = \frac{1}{2\xi}\int_{-\xi}^{\xi} dx = 1.$$

Видно, что площадь, оконтуренная огибающей импульса $\tilde{s}_e$, действительно не зависит от его длительности и равна единице. Найдем предел, к которому стремится элементарный импульс $\tilde{s}_e(x)$ при бесконечном уменьшении длительности:

$$\lim_{\xi\to 0}\tilde{s}_e(x) = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{2\xi}\sigma(x+\xi) - \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{2\xi}\sigma(x-\xi) =$$

$$= \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{2\xi}\{[\sigma(x) + \sigma'(x)\xi] - [\sigma(x) - \sigma'(x)\xi]\} =$$

$$= \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{2\xi}2\sigma'(x)\xi = \sigma'(x) = \delta(x).$$

Отсюда следует, что при бесконечно малой длительности элементарный импульс трансформируется в δ-функцию, определяемую как производная функции включения и обладающую свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1. \qquad (1.7)$$

Сохранение единичной площади элементарного прямоугольного импульса при бесконечном уменьшении длительности означает, что амплитуда его стремится к бесконечности.

Приведем ряд соотношений, полезных при использовании δ-функции в теории сигналов (читателю предлагается их доказать в качестве упражнения):

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \tag{1.8}$$

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\pi), \tag{1.9}$$

$$\varphi(x)\delta(x - x_0) = \varphi(x_0)\delta(x - x_0), \tag{1.10}$$

$$\delta(x)\delta(x - x_0) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \neq 0, \tag{1.11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - x_0)\delta(x - x_1)dx = \varphi(x_1 - x_0), \tag{1.12}$$

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_n \frac{1}{|\delta'(x_n)|}\delta(x - x_n), \tag{1.13}$$

где x_n — корни уравнения $\varphi(x) = 0$. Из уравнения (1.13) следует (1.8).

Пример 1.11. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2}e^{-n|x|}\right] = \delta(x).$$

Проверим, удовлетворяются ли основные свойства δ-функции (1.7):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{2}e^{-n|x|}dx = \frac{n}{2}\int_0^{\infty} e^{-nx}dx + \frac{n}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{nx}dx =$$

$$= \frac{n}{2}\int_0^{\infty} e^{-nx}dx - \frac{n}{2}\int_{\infty}^{0} e^{-nx}dx = n\int_0^{\infty} e^{-nx}dx = 1,$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ x\neq 0}}\left(\frac{n}{2}e^{-n|x|}\right) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ x\neq 0}}\left(\frac{n}{2e^{n|x|}}\right) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ x\neq 0}}\left(\frac{1}{2|x|e^{n|x|}}\right) = 0,$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ x\to 0}}\left(\frac{n}{2}e^{-n|x|}\right) = \infty.$$

Следовательно, функция $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}e^{-n|x|}\right)$ является δ-функцией, поскольку удовлетворяет ее свойствам.

Функции Хевисайда и Дирака являются примером так называемых *обобщенных функций*, широко применяемых в теории сигналов. Обратимся к рис. 1.5, иллюстрирующему аппроксимацию произвольного сигнала прямоугольными элементарными импульсами равной длительности Δ. Каждый отсчет сигнала s_n равен амплитуде соответст-

вующего элементарного импульса $\tilde{s}_{en}$. Для n-го отсчета сигнала имеем

$$\tilde{s}_{en}(x) = s_n\{\sigma[x - n\Delta] - \sigma[x - (n+1)\Delta]\} =$$
$$= s_n[\sigma(x - x_n) - \sigma(x - x_n - \Delta)].$$

Сигнал можно приближенно представить как сумму соответствующих элементарных импульсов

$$s(x) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{s}_{en}(x) = \sum_{n=-N_1}^{N_2} s_n[\sigma(x - x_n) - \sigma(x - x_n - \Delta)]. \qquad (1.14)$$

Здесь N_1 и N_2 — числа отсчетов соответственно в области отрицательных и положительных значений x. В этой сумме приближенное текущее значение сигнала $s(x)$ отвечает номеру n, удовлетворяющему условию $x_{n-1} < x < x_n$.

Если выбрать интервал Δ бесконечно малым, дискретная сумма (1.14) трансформируется в интеграл, поскольку Δ заменяется дифференциалом, $N_1 \to \infty$, $N_2 \to \infty$, а функцию включения $\sigma(x - x_n - \Delta)$ можно разложить в ряд Тейлора по малому параметру Δ:

$$\sigma(x - x_n - \Delta) = \sigma(x - x_n) - \sigma'(x - x_n)\Delta.$$

Подставляя это выражение в (1.14), получаем

$$s(x) = \lim_{\Delta \to 0}\left\{\sum_{n=-N_1}^{N_2} s_n[\sigma(x - x_n) - \sigma(x - x_n - \Delta)]\right\} =$$
$$= \lim_{\Delta \to 0}\left\{\sum_{n=-N_1}^{N_2} s_n[\sigma(x - x_n) - \sigma(x - x_n) + \sigma'(x - x_n)\Delta]\right\} =$$
$$= \lim_{\Delta \to 0}\sum_{n=-N_1}^{N_2} s_n\sigma'(x - x_n)\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi)\sigma'(x - \xi)d\xi.$$

Учитывая, что производная функции включения есть дельта-функция, приходим к следующей форме динамического представления сигнала:

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\xi)\delta(x - \xi)d\xi. \qquad (1.15)$$

Выражение (1.15) представляет собой интегральную операцию *свертки* сигнала с δ-импульсом и характеризует так называемое *фильтрующее свойство* δ-*функции*:

свертка сигнала с дельта-функцией определяет значение сигнала в точке, где локализован δ-импульс.

Представим функцию Дирака в (1.15) через функцию Хевисайда и выполним интегрирование по частям:

$$s(x)=\int_{-\infty}^{\infty}s(\xi)\delta(x-\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}s(\xi)\frac{d}{d\xi}\sigma(x-\xi)d\xi=$$

$$=-s(\xi)\sigma(\xi)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds(\xi)}{d\xi}\sigma(x-\xi)d\xi.$$

Первый член в этом выражении при подстановке пределов интегрирования обращается в нуль, поскольку сигнал имеет конечную энергию. Отсюда находим динамическое представление сигнала (рис. 1.4) через функцию включения:

$$s(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds(\xi)}{d\xi}\sigma(x-\xi)d\xi. \qquad (1.16)$$

Фильтрующими свойствами δ-функции и ее производных можно воспользоваться для выполнения дифференцирования сигнала:

$$\int_{-\infty}^{\infty}s(\xi)\delta^{(n)}(x-\xi)d\xi=(-1)^n s^{(n)}(x).$$

Здесь

$$\delta^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\delta(x);\quad s^n(x)=\frac{d^n}{dx^n}s(x).$$

Это выражение получено путем последовательного интегрирования по частям. Отсюда получим следующее правило для дифференцирования сигнала:

$$\frac{d^n}{dx^n}s(x)=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}s(\xi)\delta^{(n)}(x-\xi)d\xi.$$

В случае, когда сигнал является функцией двух переменных:

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{d^m}{dx^m}s(x,y)=(-1)^{n+m}\int\int_{-\infty}^{\infty}s(\xi,\eta)\delta^{(n)}(x-\xi)\delta^{(m)}(y-\eta)d\xi d\eta.$$

1.4. ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛА И ЕГО СВОЙСТВА

Разложение сигналов в ряд Фурье. В исследованиях оптических сигналов наиболее широко используются ортогональные координатные базисы, основанные на гармонических функциях. Важность гармонической модели сигналов, как будет показано в дальнейшем, обусловлена в первую очередь их инвариантностью относительно преобразований, осуществляемых линейными системами.

Математической моделью сигнала, периодически повторяющегося во времени или в пространстве, является периодическая функция вида

$$s(t) = s(t + nT), \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
$$s(x) = s(x + m\Lambda), \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

здесь T — период сигнала во времени; Λ — период сигнала в пространстве.

Обобщенную модель функции, периодической в пространстве и во времени, можно записать как $s(x, t) = s(x + m\Lambda, t + nT)$. Представление сигнала в виде суммы гармонических функций называется *спектральным разложением в ряд Фурье*. Для времязависимого сигнала разложение в ряд Фурье имеет вид

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(t),$$

здесь u_n — гармонические функции, образующие ортонормированный базис (1.5):

$$u_n = \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}} \sin n\omega_1 t \quad \text{или} \quad u_n = \sqrt{\frac{\omega_1}{\pi}} \cos n\omega_1 t,$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ — основная частота последовательности, образующей периодический сигнал; T — временной интервал, на котором задается ортонормированный базис $[-T/2, T/2]$. Легко проверить, что эти гармонические функции — ортонормированны: $(u_n, u_m) = \delta_{n,m}$. Если ортонормированный базис образован в пространственной области, переменная t заменяется на пространственную координату x, временной период T — на пространственный период Λ, а частота ω_1 — на пространственную частоту $K_1 = 2\pi/\Lambda$.

Запишем разложение сигнала $s(t)$ в ряд Фурье (для определенности сигнал выбираем зависящим от времени):

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t). \qquad (1.17)$$

Для коэффициентов разложения по определению имеем

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)dt,$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\cos(n\omega_1 t)dt,$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s(t)\sin(n\omega_1 t)dt.$$

Периодический сигнал содержит постоянную составляющую и бесконечный набор гармонических колебаний (гармоник) с частотами, кратными основной частоте.

Другая, эквивалентная, форма ряда Фурье:

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_1 t-\varphi_n),$$

где $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$; $\varphi_n=\operatorname{arctg}\dfrac{b_n}{a_n}$.

Комплексная форма ряда Фурье. Пользуясь формулами Эйлера, запишем ряд (1.17) в виде

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{1}{2}(e^{jn\omega_1 t}+e^{-jn\omega_1 t})+b_n\frac{1}{2j}(e^{jn\omega_1 t}-e^{-jn\omega_1 t})\right]=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(a_n-jb_n)e^{jn\omega_1 t}+\frac{1}{2}(a_n+jb_n)e^{-jn\omega_1 t}\right\}.$$

Введем коэффициенты

$$C_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n),\quad C_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)=C_n^*.$$

Тогда

$$s(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{jn\omega_1 t}+C_{-n}e^{-jn\omega_1 t})=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{jn\omega_1 t}+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}e^{-jn\omega_1 t}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{jn\omega_1 t}+\sum_{n=-1}^{-\infty}C_n e^{jn\omega_1 t}.$$

Распространяя суммирование на все значения n от $-\infty$ до ∞, включая $n = 0$, приходим к комплексной форме ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t},$$

где

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \qquad (1.18)$$

Спектральная плотность сигнала. Пусть интервал $[-T/2, T/2]$, на котором задан ортонормированный базис, неограниченно растет. Тогда частоты соседних спектральных компонент будут отличаться на величину $\omega_1 = 2\pi/T$, сколь угодно малую, и спектр станет непрерывным.

Введем обозначения $n\omega_1 = \omega$ и соответственно $T = 2\pi n/\omega$ в (1.18):

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\omega}{2\pi n} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Тогда равенство $\omega/2\pi n = \Delta\omega/2\pi = \Delta f$ принимает смысл частотного интервала, приходящегося на одну спектральную компоненту:

$$C_n = \Delta f \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Разделяя это равенство на Δf и переходя к пределу при неограниченном увеличении интервала T (соответственно, неограниченном уменьшении частотного интервала Δf), получаем

$$\lim_{\Delta f \to 0} \frac{C_n}{\Delta f} = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Величина $C_n/\Delta f$ имеет смысл спектральной плотности сигнала $s(\omega)$. Отсюда

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \qquad (1.19)$$

Выражение (1.19), определяющее спектральную плотность сигнала, называется *преобразованием Фурье*.

Обратное преобразование Фурье. Обратимся к задаче определения сигнала по известной спектральной плотности. Воспользуемся комплексной формой ряда Фурье

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{-\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}.$$

Умножим и разделим правую часть выражения на ω_1:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{\omega_1} e^{jn\omega_1 t} \omega_1.$$

При неограниченном увеличении временного интервала T, на котором определяется сигнал, сумма в правой части этого выражения трансформируется в интегральную сумму, где число ω_1 приобретает смысл дифференциала частоты ($n\omega_1 = \omega$, $\omega_1 = \Delta\omega = 2\pi\Delta f$ и $C_n/\Delta f = s(\omega)$):

$$s(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{-\infty} \frac{C_n}{2\pi\Delta f} e^{j\omega t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \qquad (1.20)$$

Выражение (1.20) получило название *обратного преобразования Фурье* или *формулы обращения Фурье*.

Из (1.19) и (1.20) следует, что сигнал и его спектральная плотность составляют фурье-сопряженную пару $s(t) \leftrightarrow s(\omega)$:

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} d\omega.$$

Преобразование Фурье существует только для сигналов с ограниченной энергией. Поскольку любой физический сигнал регистрируется на конечном временно́м и пространственном интервалах, преобразование Фурье для реального физического сигнала всегда существует.

При выполнении преобразования Фурье сигнала, заданного на конечном временно́м или пространственном интервале, функция, описывающая сигнал, доопределяется на всю временну́ю или пространственную ось в предположении, что вне интервалов T или Λ она равна нулю.

При представлении физического сигнала рядом Фурье функция, описывающая сигнал в интервалах T или Λ, доопределяется на всю ось в предположении, что T или Λ являются соответственно временны́м и пространственным периодами. В этом случае спектр сигнала, описывае-

мого периодической функцией, становится дискретным, определенным только для временны́х ω и пространственных K частот, разделенных промежутками, кратными соответственно $2\pi/T$ и $2\pi/\Lambda$.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Линейность. Преобразование Фурье взвешенной суммы сигналов с произвольными числовыми коэффициентами определяется суммой спектральных плотностей сигналов с теми же коэффициентами:

$$\sum_i \alpha_i s_i(t) \leftrightarrow \sum_i \alpha_i s_i(\omega).$$

Свойства вещественной и мнимой частей спектральной плотности. Реальная часть спектральной плотности вещественного (физического) сигнала есть четная, а мнимая часть — нечетная функция частоты.

Пусть $s(t)$ — сигнал, принимающий вещественные значения. Спектральная плотность такого сигнала

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin\omega t dt = A(\omega) - jB(\omega).$$

Выполним обратное преобразование Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) - jB(\omega)](\cos\omega t + j\sin\omega t) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\sin\omega t] d\omega +$$

$$+ j\int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)\sin\omega t - B(\omega)\cos\omega t] d\omega.$$

Поскольку сигнал вещественный, $A(\omega)\sin\omega t - B(\omega) \times \times \cos\omega = 0$ на всей частотной оси. Это выполняется при условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\sin\omega t d\omega = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\cos\omega t d\omega = 0.$$

Отсюда следует, что $A(\omega)$ — четная, а $B(\omega)$ — нечетная функции частоты. Для физических сигналов $s^*(\omega) = s(-\omega)$.

Теорема смещения. Пусть $s(t) \leftrightarrow s(\omega)$. Определим спектральную плотность сигнала, запаздывающего на интервал t_0, $s(t - t_0)$.

Выполним фурье-преобразование смещенного сигнала, воспользовавшись заменой переменной $t - t_0 = x$:

$$s(t-t_0) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_0)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)e^{-j\omega(x+t_0)}dx =$$

$$= e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} s(x)e^{-j\omega x}dx = s(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Следовательно,

$$s(t-t_0) \leftrightarrow s(\omega)e^{-j\omega t_0}. \qquad (1.21)$$

Спектральная плотность смещенного сигнала равна спектральной плотности несмещенного сигнала, умноженной на экспоненту, мнимый показатель которой определяется произведением частоты на величину смещения.

Если спектральная плотность сигнала смещена по шкале частот на величину ω_0, в структуре сигнала появляется экспоненциальный фазовый множитель:

$$s(\omega-\omega_0) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(x)e^{j(x+\omega_0)t}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} s(x)e^{jxt}dx = s(t)e^{j\omega_0 t},$$

$$s(\omega-\omega_0) \leftrightarrow s(t)e^{j\omega_0 t}. \qquad (1.22)$$

Из сравнения (1.21) и (1.22) следует, что при смещении сигнала и спектральной плотности показатели соответствующих экспоненциальных множителей спектральной плотности и сигнала различны по знаку.

Влияние изменения масштаба аргумента. Пусть $s(t) \leftrightarrow s(\omega)$. Изменим масштаб аргумента сигнала и найдем, как это отразится на спектральной плотности:

$$s(\alpha t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\omega \frac{x}{\alpha}} d\left(\frac{x}{\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\frac{\omega}{\alpha}x} dx = \frac{1}{\alpha} s\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Отрицательный масштабный коэффициент α соответствует инверсии оси:

$$s(-\alpha t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(-\alpha t) e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{\alpha} \int_{\infty}^{-\infty} s(x) e^{j\omega x/\alpha} dx = \frac{1}{\alpha} s\left(-\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Следовательно, $s(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} s\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$.

Отсюда $s(\alpha\omega) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} s\left(\frac{t}{\alpha}\right)$.

Сжатие сигнала ведет к растяжению его спектральной плотности в частотном пространстве при уменьшении ее амплитуды, обратно пропорциональном модулю коэффициента сжатия. Растяжение сигнала вызывает сжатие спектральной плотности в частотном пространстве и соответствующее увеличение ее амплитуды.

Если $\alpha = -1$ (обращение временно́й или пространственной оси), частотная ось инвертируется. Для сигналов, зависящих от времени, обращение временной оси — чисто математический прием, потому что физическое время однонаправленно. Однако для пространственных сигналов инверсия пространственной оси и инверсия оси пространственных частот физически реализуемы.

Спектральная плотность производной. Пусть $s(t) \leftrightarrow s(\omega)$. Найдем спектральную плотность производной сигнала $s(t)$:

$$\frac{d}{dt} s(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} s(t) e^{-j\omega t} dt =$$

$$= s(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega s(\omega).$$

Здесь выполнено интегрирование по частям. Слагаемое $s(t)e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty}$ обращается в нуль, поскольку сигнал имеет конечную энергию. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}s(t) \leftrightarrow j\omega s(\omega). \tag{1.23}$$

Спектральная плотность производной сигнала равна произведению спектральной плотности сигнала на множитель $j\omega$. Из (1.23) следует, что при дифференцировании сигнала подчеркиваются высокочастотные компоненты его спектральной плотности.

Для спектральной плотности производной n-го порядка сигнала согласно (1.23) имеем

$$\frac{d^n}{dt^n}s(t) \leftrightarrow (j\omega)^n s(\omega).$$

Мнимый множитель $(j\omega)$ в частотной области отображает дифференцирование сигнала. Если дифференцируется спектральная плотность, то

$$\frac{d}{d\omega}s(\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\omega}s(\omega)e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= s(\omega)e^{j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{jt}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s(\omega)e^{j\omega t}d\omega = -jts(t).$$

Для фурье-преобразования производной высшего порядка спектральной плотности имеем

$$\frac{d^n}{d\omega^n}s(\omega) \leftrightarrow (-jt)^n s(t). \tag{1.24}$$

При преобразованиях физических сигналов следует учитывать, что они описываются действительными функциями, а также иметь в виду однонаправленность временно́й оси. Для одномерных пространственных сигналов фурье-преобразование производной имеет вид, аналогичный (1.24) с соответствующими переобозначениями:

$$\frac{d^n}{dK^n}s(K) \leftrightarrow (-jx)^n s(x).$$

Спектральная плотность интеграла. Спектральная плотность сигнала и его неопределенный интеграл связаны фурье-преобразованием

$$\int_{-\infty}^{t} s(\xi)d\xi \leftrightarrow \frac{s(\omega)}{j\omega}. \qquad (1.25)$$

Доказательство следует из соотношения

$$s(t) = \frac{d}{dt}\int_{0}^{t} s(\xi)d\xi$$

и определения спектральной плотности производной (1.23).

Для пространственных сигналов по аналогии с (1.25) можно записать

$$\int_{-\infty}^{x} s(\xi)d\xi \leftrightarrow \frac{1}{jK}s(K).$$

Спектральная плотность произведения сигналов. Пусть $s_1(t)$ и $s_2(t)$ — сигналы, для которых известны спектральные плотности $s_1(t) \leftrightarrow s_1(\omega)$, $s_2(t) \leftrightarrow s_2(\omega)$. Найдем спектральную плотность произведения сигналов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_2(\xi)e^{j\xi t}d\xi e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\int_{-\infty}^{\infty} s_2(\xi)e^{-j(\omega-\xi)t}d\xi dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_2(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)e^{-j(\omega-\xi)t}dtd\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_2(\xi)s_1(\omega-\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi)s_2(\omega-\xi)d\xi.$$

Следовательно, спектральная плотность произведения двух сигналов с точностью до множителя $1/(2\pi)$ равна свертке спектральных плотностей сигналов,

$$s_1(t)s_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi)s_2(\omega-\xi)d\xi. \qquad (1.26)$$

При использовании для обозначения операции свертки символа $\otimes$ это выражение запишется так:

$$s_1(t)s_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}s_1(\omega)\otimes s_2(\omega).$$

Для спектральной плотности, представленной в виде двух сомножителей, сигнал описывается в виде свертки во временно́й области фурье-образов сомножителей:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega)s_2(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi)e^{-j\omega\xi}s_2(\omega)e^{j\omega t}d\omega d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} s_2(\omega)e^{j(t-\xi)\omega}d\omega d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi)s_2(t-\xi)d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\xi)s_1(t-\xi)d\xi,$$

$$s_1(\omega)s_2(\omega) \leftrightarrow s_1(t) \otimes s_2(t). \qquad (1.27)$$

В случае пространственных одномерных сигналов формулы (1.26) и (1.27) остаются справедливыми. В них достаточно ввести переобозначения $t \to x$, $\omega \to K$:

$$s_1(x)s_2(x) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}s_1(K) \otimes s_2(K),$$
$$s_1(K)s_2(K) \leftrightarrow s_1(x) \otimes s_2(x).$$

Из приведенных доказательств с очевидностью следует, что операция свертки коммутативна.

Пример 1.12. Найти спектральную плотность постоянного сигнала $s(t) = s_0$.

$$s(\omega) = s_0\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}dt = s_0\left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{t\to\infty} 2s_0\frac{\sin\omega t}{\omega}.$$

Используя обратное фурье-преобразование, имеем

$$s(t) = s_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Следовательно,

$$s(\omega) = 2\pi s_0\delta(\omega). \qquad (1.28)$$

Сравнивая полученные выражения для спектральной плотности, находим

$$\delta(\omega) = \lim_{t\to\infty}\frac{\sin\omega t}{\pi\omega}.$$

Это еще одно представление δ-функции.

Таким образом, спектральная плотность постоянного во времени сигнала имеет компоненты только на нулевой частоте.

Пример 1.13. Определить спектральную плотность комплексного экспоненциального сигнала.

Пусть $s(t) = e^{j\omega_0 t}$. Тогда, воспользовавшись теоремой смещения, из (1.28) получаем

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \qquad (1.29)$$

Следовательно, спектральная плотность комплексного экспоненциального сигнала $s(t) = e^{j\omega_0 t}$ описывается δ-функцией на частоте ω_0 и равна нулю на остальных частотах.

По аналогии для сигнала, спектральная плотность которого описывается экспоненциальной комплексной функцией, получаем

$$e^{-j\omega t_0} \leftrightarrow \delta(t - t_0).$$

Сигнал, спектральная плотность которого описывается экспоненциальной комплексной функцией $s(\omega) = e^{-j\omega t_0}$, равен нулю во всем временно́м интервале, кроме точки $t = t_0$, где он имеет δ-особенность.

Пример 1.14. Найти спектральную плотность гармонических колебаний.

Пусть $s(t) = \cos\omega_0 t = \dfrac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$. Для получения спектральной плотности достаточно воспользоваться (1.29):

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

По аналогии

$$\sin\omega_0 t \leftrightarrow -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$

Пример 1.15. Найти спектральную плотность произвольного периодического сигнала.

Пусть $s(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t}$. Это произвольный периодический сигнал, разложенный в ряд Фурье. Согласно формуле (1.29) получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_1).$$

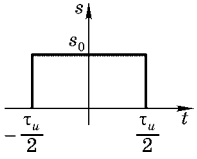


Рис. 1.9

Пример 1.16. Найти спектральную плотность прямоугольного видеоимпульса (рис. 1.9).

$$s(t) = s_0 \operatorname{rect}\left(\frac{2t}{\tau_u}\right) = s_0\left[\sigma\left(t + \frac{\tau_u}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\tau_u}{2}\right)\right].$$

$$s(\omega) = s_0 \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} e^{-j\omega t} dt = s_0 \tau_u \frac{\sin\frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}} = s_0 \tau_u \operatorname{sinc}\frac{\omega\tau_u}{2}. \quad (1.30)$$

Как видно из (1.30), максимальное значение спектральной плотности прямоугольного импульса на нулевой частоте равняется площади импульса.

Пример 1.17. Найти спектральную плотность знаковой функции (рис. 1.10).

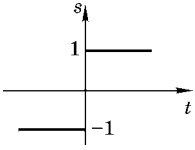


Рис. 1.10

$$s(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ -1, & t < 0; \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Обратимся к прямоугольному видеоимпульсу:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{2t}{\tau_u}\right) = \sigma\left(t + \frac{1}{2}\tau_u\right) - \sigma\left(t - \frac{1}{2}\tau_u\right).$$

Здесь амплитуда импульса выбрана единичной. Функцию включения можно представить как сумму знаковой и постоянной функций (рис. 1.11):

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} t).$$

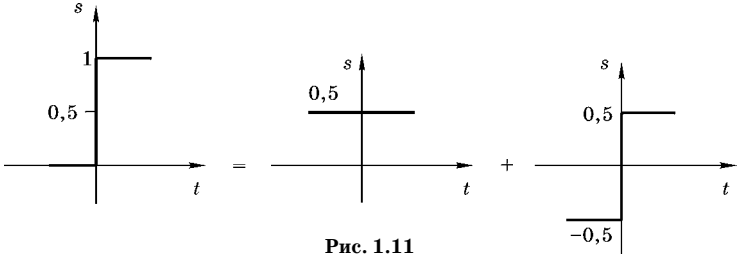


Рис. 1.11

Тогда

$$\sigma\left(t+\frac{1}{2}\tau_u\right)-\sigma\left(t-\frac{1}{2}\tau_u\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{sgn}\left(t+\frac{1}{2}\tau_u\right)\right]-\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{sgn}\left(t-\frac{1}{2}\tau_u\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t+\tau_u)-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t-\tau_u).$$

Воспользуемся выражением (1.30) для спектральной плотности такого импульса, полученным в примере 1.16:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(t+\frac{1}{2}\tau_u\right)-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(t-\frac{1}{2}\tau_u\right)\leftrightarrow\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau_u}{2}\right)$$

или

$$\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(t+\frac{1}{2}\tau_u\right)-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(t-\frac{1}{2}\tau_u\right)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega}e^{\frac{j\omega\tau_u}{2}}-\frac{1}{j\omega}e^{-\frac{j\omega\tau_u}{2}}.$$

Отсюда с учетом линейности преобразования Фурье и теоремы смещения имеем

$$\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(t+\frac{1}{2}\tau_u\right)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega}e^{\frac{j\omega\tau_u}{2}},$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\left(t-\frac{1}{2}\tau_u\right)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega}e^{-\frac{j\omega\tau_u}{2}}.$$

Полагая $\tau_u = 0$, получаем

$$\operatorname{sgn}(t)\leftrightarrow\frac{2}{j\omega}. \qquad (1.31)$$

Пример 1.18. Определить спектральную плотность функции включения.

Представим сигнал $s(t) = \sigma(t)$ в виде (см. рис. 1.11):

$$s(t)=\sigma(t)=0{,}5[1+\operatorname{sgn}(t)]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t).$$

Тогда, воспользовавшись результатами (1.28) и (1.31) и свойством линейности фурье-преобразования, для спектральной плотности функции включения получаем

$$\sigma(t)=0{,}5[1+\operatorname{sgn}(t)]\leftrightarrow 0{,}5\left(2\pi\delta(\omega)+\frac{2}{j\omega}\right)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}.$$

Пример 1.19. Найти спектральную плотность радиоимпульса.

Пусть $s(t)=A(t)\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=A(t)\frac{1}{2}[e^{j(\omega_0 t+\varphi_0)}+e^{-j(\omega_0 t+\varphi_0)}]$.

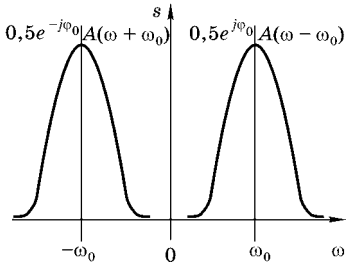


Рис. 1.12

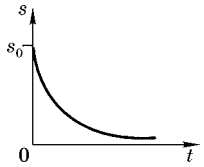


Рис. 1.13

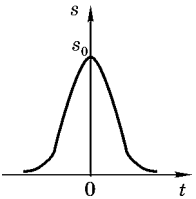


Рис. 1.14

Здесь $A(t)$ — огибающая радиоимпульса; $\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ — несущая; ω_0 и φ_0 — частота и начальная фаза несущей. Воспользовавшись теоремой смещения, находим спектральную плотность радиоимпульса:

$$A(t)\cos(\omega_0 t+\varphi_0) \leftrightarrow \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}A(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}A(\omega+\omega_0).$$

Следовательно, спектр радиоимпульса состоит из двух спектральных плотностей, разнесенных огибающей симметрично относительно нуля на частоту несущей ω_0 и имеющих половинную амплитуду (рис. 1.12).

Пример 1.20. Найти спектральную плотность экспоненциального видеоимпульса (рис. 1.13) $s(t) = s_0 e^{-\alpha t}\sigma(t)$

$$s(\omega)=s_0\int_0^\infty e^{-(\alpha+j\omega)t}dt=\frac{s_0}{\alpha+j\omega}.$$

Пример 1.21. Найти спектральную плотность гауссова видеоимпульса $s(t)=s_0e^{-\beta t^2}$ (рис. 1.14)

$$s(\omega)=s_0\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta t^2}e^{-j\omega t}dt=$$

$$=s_0\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\beta\left[t^2+j\frac{\omega}{\beta}t-\frac{\omega^2}{4\beta^2}+\frac{\omega^2}{4\beta^2}\right]\right\}dt=$$

$$=s_0\exp\left(-\frac{\omega^2}{4\beta}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\sqrt{\beta}t+j\frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}\right)^2\right\}dt.$$

Выполним замену переменной:

$$\sqrt{\beta}t+j\frac{\omega}{2\sqrt{\beta}}=u,\quad dt=\frac{du}{\sqrt{\beta}},$$

$$s(\omega) = \frac{s_0}{\sqrt{\beta}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\beta}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du = s_0 \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\beta}\right). \quad (1.32)$$

Если $\beta = j\gamma$, то в соответствии с (1.32)

$$s(t) = s_0 e^{-j\gamma t^2} \leftrightarrow s_0 \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \exp\left(j\frac{\omega^2}{4\gamma}\right) \exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right).$$

Связь между длительностью сигнала и шириной его спектра. Произведение ширины спектра сигнала на длительность равно некоторому постоянному числу, зависящему от формы сигнала и имеющему значение порядка единицы. Например, для прямоугольного импульса длительностью τ_u полуширина главного лепестка спектральной функции (1.29) равна $\frac{\omega_b \tau_u}{2} = \pi$. Отсюда с учетом $\omega_b = 2\pi f_b$ находим $2 f_b \tau_u = 1$.

Таким образом, чем меньше длительность сигнала, тем шире его спектр.

В табл. 1.1 приведены основные свойства преобразований Фурье.

Таблица 1.1

Преобразования Фурье

$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$
s(at)	$\frac{1}{\lvert a \rvert} s\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$s^*(t)$	$s(-\omega)$
sgn(t)	$\frac{2}{j\omega}$
σ(t)	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
s_0	$2\pi s_0 \delta(\omega)$
$s_1(t)s_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi) s_2(\omega - \xi) d\xi$
$\int_{-\infty}^{t} s(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} s(\omega)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$s(-t)$	$s(-\omega)$
$s(t - t_0)$	$s(\omega) e^{-j\omega t_0}$
$s(t) e^{j\omega_0 t}$	$s(\omega - \omega_0)$

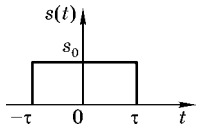
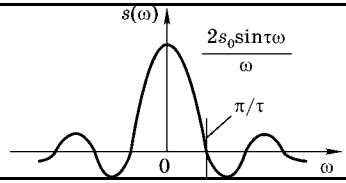
Продолжение табл. 1.1

$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt$
$s(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}[s(\omega+\omega_0)+s(\omega-\omega_0)]$
$s(t)\sin\omega_0 t$	$-\frac{j}{2}[s(\omega-\omega_0)-s(\omega+\omega_0)]$
$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n s(\omega)$
$(-jt)^n s(t)$	$\frac{d^n s(\omega)}{d\omega^n}$
$s_1(t)s_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi)s_2(\omega-\xi)d\xi$
$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau)s_2(t-\tau)d\tau$	$s_1(\omega)s_2(\omega)$
$\int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau)s^*(\tau)d\tau$	$\lvert s(\omega)\rvert^2$
$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert s(t)\rvert^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert s(\omega)\rvert^2\, d\omega$	
$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau}d\tau$	$-j\,\mathrm{sgn}(\omega)s(\omega)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{2\pi n}{T}\right)e^{j2\pi nt/T}$	

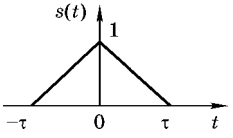
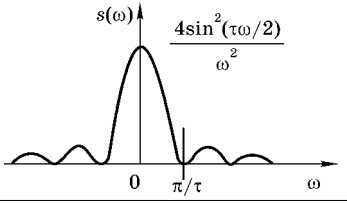
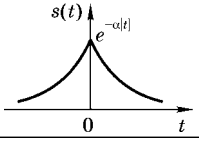
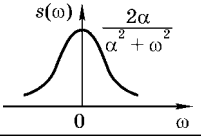
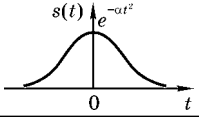
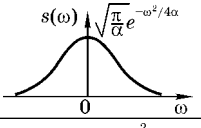
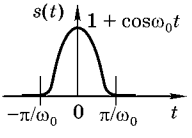
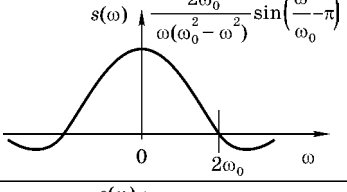
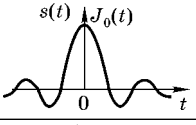
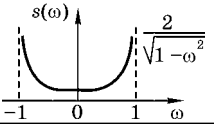
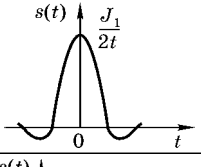
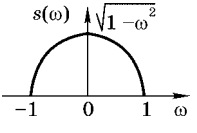
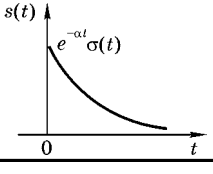
В табл. 1.2 даны примеры преобразований Фурье некоторых сигналов.

Таблица 1.2

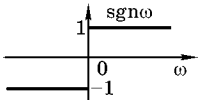
Примеры преобразований Фурье

$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt$
	

Продолжение табл. 1.2

$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt$
	
	
	
	
	
	
	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$

Продолжение табл. 1.2

$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}s(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$s(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt$
$\frac{j}{\pi t}$	
$t^{\alpha}\sigma(t)$ при $\alpha>-1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lvert\omega\rvert^{\alpha+1}}e^{\pm j\pi(\alpha+1)/2}$, «–», если $\omega>0$, «+», если $\omega<0$.
$t^{n}e^{-\alpha t}\sigma(t)$, $\alpha>0$	$\frac{n!}{(\alpha+j\omega)^{n+1}}$
$J_n(t)$	$\begin{cases}\frac{2\cos(n\arcsin\omega)}{\sqrt{1-\omega^2}}, & n=2,4,6,\ldots, \quad \lvert\omega\rvert<1,\\ \frac{-2j\cos(n\arcsin\omega)}{\sqrt{1-\omega^2}}, & n=1,3,5,\ldots, \quad \lvert\omega\rvert<1,\\ 0, & \lvert\omega\rvert>1.\end{cases}$
$\frac{J_n(t)}{t^n}$	$\begin{cases}\frac{2(1-\omega^2)^{n-1/2}}{1,3,5,\ldots,(2n-1)}, & \lvert\omega<1,\\ 0, & \lvert\omega\rvert>1.\end{cases}$
$e^{j\alpha t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{j\pi/4}e^{-j\omega^2/4\alpha}$
$\cos\alpha t^2$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\left(\frac{\omega^2}{4\alpha}-\frac{\pi}{4}\right)$,
$\sin\alpha t^2$	$-\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\left(\frac{\omega^2}{4\alpha}-\frac{\pi}{4}\right)$
0 в остальных случаях	$\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}e^{-j\omega^2/4\alpha}\left[F\left(\sqrt{\alpha}T-\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)+F\left(\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)\right]$, $F(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{jy^2}dy$

1.5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛОВ

Обобщенная формула Рэлея. Пусть имеются сигналы $s_1(t)$, $s_2(t)$ и их спектральные плотности $s_1(\omega)$, $s_2(\omega)$:

$$s_1(t) \leftrightarrow s_1(\omega), \quad s_2(t) \leftrightarrow s_2(\omega).$$

Скалярное произведение сигналов в координатном пространстве

$$(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt \qquad (1.33)$$

определяет взаимную энергию этих сигналов. Если сигналы тождественно равны, скалярное произведение есть энергия сигнала:

$$(s, s) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt.$$

Подставим в скалярное произведение (1.33) выражение сигнала $s_1(t)$ через его спектральную плотность $s_1(\omega)$,

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_2^*(t) \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega dt.$$

Изменим порядок интегрирования,

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} s_2^*(t) e^{j\omega t} dt.$$

Для внутреннего интеграла имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_2^*(t) e^{j\omega t} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = s_2^*(\omega).$$

С учетом этого скалярное произведение сигналов имеет вид

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) s_2^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} (s_1(\omega), s_2^*(\omega)). \qquad (1.34)$$

Следовательно, скалярное произведение двух сигналов пропорционально скалярному произведению их спектральных плотностей. Выражение (1.34) получило название *обобщенной формулы Рэлея*.

Формула Рэлея остается справедливой при изменении порядка следования операции комплексного сопряжения

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi}(s_1(\omega)s_2^*(\omega)) = \frac{1}{2\pi}(s_2(\omega)s_1^*(\omega)).$$

Пусть $s_1(t)$ и $s_2(t)$ — физические (вещественные) сигналы. Тогда

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega)s_2^*(\omega)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} s_1(\omega)s_2^*(\omega)d\omega + \int_{0}^{\infty} s_1(\omega)s_2^*(\omega)d\omega\right\}.$$

Сделав замену в первом интеграле $\omega \to -\omega$, получаем

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi}\left\{-\int_{\infty}^{0} s_1(-\omega)s_2^*(-\omega)d\omega + \int_{0}^{\infty} s_1(\omega)s_2^*(\omega)d\omega\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{0}^{\infty} s_1^*(\omega)s_2(\omega)d\omega + \int_{0}^{\infty} s_1(\omega)s_2^*(\omega)d\omega\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}[s_1^*(\omega)s_2(\omega) + s_1(\omega)s_2^*(\omega)]d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} 2\mathrm{Re}[s_1(\omega)s_2^*(\omega)]d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}[s_1(\omega)s_2^*(\omega)]d\omega.$$

Введем вещественную функцию $W_{12}(\omega) = \mathrm{Re}[s_1(\omega)s_2^*(\omega)]$, которая называется *взаимным энергетическим спектром сигналов* s_1 и s_2. Тогда

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} W_{12}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega)d\omega. \qquad (1.35)$$

Из формулы (1.35) следует, что в формирование обменной (взаимной) энергии (s_1, s_2) наибольший вклад дают частотные интервалы, в которых спектральные плотности сигналов перекрываются.

Энергетический спектр сигнала. Спектральное представление энергии сигнала получается из обобщенной фор-

мулы Рэлея, если в ней сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ считать тождественными:

$$E=(s,s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s(\omega)s^*(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|s(\omega)|^2\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega)d\omega.$$

Величина $W(\omega)$ называется *спектральной плотностью энергии* или энергетическим спектром сигнала.

При представлении сигналов через их энергетические спектры теряется информация, содержащаяся в фазовой компоненте спектральной плотности $s(\omega)$. Для энергетического представления сигналов важна его форма, а не положение на временно́й или пространственной оси.

Пример 1.22. Найти энергетический спектр прямоугольного импульса

$$s(t)=A\left[\sigma\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\sigma\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right].$$

$$s(\omega)=A\tau\frac{\sin\omega\tau/2}{\omega\tau/2},$$

$$W(\omega)=s^2(\omega)=A^2\tau^2\frac{\sin^2\omega\tau/2}{\omega^2\tau^2/4}.$$

Энергия сигнала

$$E=\frac{A^2\tau^2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\omega\tau/2}{\omega^2\tau^2/4}d\omega=\frac{2A^2\tau}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du=\frac{2A^2\tau}{\pi}\frac{\pi}{2}=A^2\tau,$$

$$\left[\omega\tau/2=u,\ \ d\omega=\frac{2}{\tau}du\right].$$

Пример 1.23. Определить взаимный энергетический спектр двух гауссовых видеоимпульсов

$$s_1(t)=A_1e^{-\beta_1t^2};\ \ s_2(t)=A_2e^{-\beta_2t^2}.$$

Найдем спектральные плотности сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$:

$$s_1(\omega)=A_1\sqrt{\frac{\pi}{\beta_1}}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta_1}},\ \ s_2(\omega)=A_2\sqrt{\frac{\pi}{\beta_2}}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta_2}}.$$

Откуда

$$W_{12}=s_1(\omega)s_2(\omega)=\frac{\pi A_1A_2}{\sqrt{\beta_1\beta_2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)}.$$

Пример 1.24. Найти скалярное произведение экспоненциальных видеоимпульсов $s_1 = A_1 e^{-\alpha_1 t}\sigma(t), s_2 = A_2 e^{-\alpha_2 t}\sigma(t)$, используя обобщенную формулу Рэлея.

Определим спектральные плотности

$$s_1(\omega) = \frac{A_1}{\alpha_1 + j\omega}, \quad s_2(\omega) = \frac{A_2}{\alpha_2 + j\omega}.$$

Отсюда найдем скалярное произведение сигналов:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega)s_2^*(\omega)d\omega = \frac{A_1A_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(\alpha_1 + j\omega)(\alpha_2 - j\omega)} =$$

$$= \frac{A_1A_2}{2\pi(\alpha_1 + \alpha_2)}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_1 + j\omega} + \frac{1}{\alpha_2 - j\omega}\right\}d\omega =$$

$$= \frac{A_1A_2}{2\pi(\alpha_1 + \alpha_2)}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_1 - j\omega}{\alpha_1^2 + \omega^2} + \frac{\alpha_2 + j\omega}{\alpha_2^2 + \omega^2}\right\}d\omega =$$

$$= \frac{A_1A_2}{2\pi(\alpha_1 + \alpha_2)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha_1^2}}\frac{d\omega}{\alpha_1} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha_2^2}}\frac{d\omega}{\alpha_2}\right) =$$

$$= \frac{A_1A_2 \cdot 2\pi}{2\pi(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{A_1A_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Функция корреляции. Функция корреляции равна скалярному произведению сигнала $s(t)$ и его смещенной копии $s(t - \tau)$:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t - \tau)dt.$$

Для физического сигнала

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t - \tau)dt.$$

Свойства функции корреляции. При $\tau = 0$ функция корреляции равна энергии сигнала:

$$K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\, dt.$$

Функция корреляции является четной:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t-\tau)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau + x)s^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau)s^*(t)dt = K(-\tau),$$

$$[t - \tau = x;\ t = x + \tau].$$

При любом значении сдвига τ модуль функции корреляции не превосходит энергии сигнала:

$$|K(\tau)| < K(0) = E.$$

Это следует из неравенства Коши–Буняковского (1.3):

$$(s(t), s(t-\tau)) \le \|s(t)\| \cdot \|s(t-\tau)\| = E_s.$$

Функция корреляции является симметричной кривой с центральным положительным максимумом.

Пример 1.25. Определить функцию корреляции прямоугольного импульса.

$$K(\tau) = A^2(\tau_u - |\tau|) = A^2\tau_u\left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_u}\right).$$

На рис. 1.15 показано определение свертки как площади перекрытия сигналов при взаимном смещении. Корреляционная функция представлена на рис. 1.16.

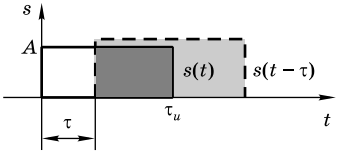


Рис. 1.15

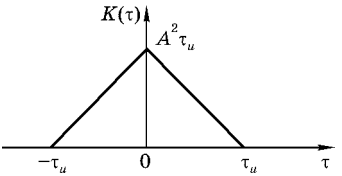


Рис. 1.16

Связь между энергетическим спектром и корреляционной функцией сигнала. Пусть имеются сигнал $s(t)$ и его смещенная копия $s_\tau(t) = s(t-\tau)$. Тогда формула для корреляционной функции принимает вид

$$K(\tau) = (s, s_\tau).$$

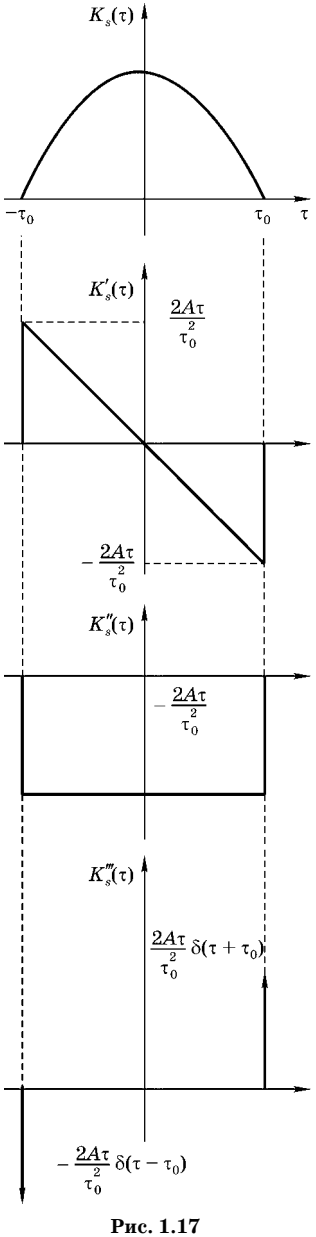


Рис. 1.17

Воспользуемся обобщенной формулой Рэлея

$$(s, s_\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)s_\tau^*(\omega)d\omega. \quad (1.36)$$

По теореме смещения

$$s_\tau(\omega) = s(\omega)e^{-j\omega\tau},$$
$$s_\tau^*(\omega) = s^*(\omega)e^{j\omega\tau}.$$

После подстановки $s_i(\omega)$ и $s_i^*(\omega)$ в (1.36) получаем

$$(s, s_\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2\, e^{j\omega\tau}d\omega.$$

Учитывая, что

$$|s(\omega)|^2 = W(\omega)$$

— энергетический спектр сигнала, приходим к выводу, что корреляционная функция и энергетический спектр сигнала образуют фурье-сопряженную пару $K(\tau) \leftrightarrow W(\omega)$:

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega,$$

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

Пример 1.25. Найти энергетический спектр сигнала, корреляционная функция которого

$$K_s(\tau) =$$
$$= A\left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right)[\sigma(\tau+\tau_0) - \sigma(\tau-\tau_0)].$$

Это есть алгебраическая сумма постоянной и параболической

составляющих на интервале $[-\tau_0, \tau_0]$. Возможна ли физическая реализация такого сигнала?

Для решения воспользуемся полезным приемом, основанным на свойствах фурье-преобразования. Последовательно дифференцируя параболическую компоненту корреляционной функции $K(\tau)$, получим (рис. 1.17)

$$K_s'(\tau) = \frac{d}{d\tau} K_s(\tau) = -\frac{2A\tau}{\tau_0^2}[\sigma(\tau+\tau_0) - \sigma(\tau-\tau_0)],$$

$$K_s''(\tau) = -\frac{2A}{\tau_0^2}[\sigma(\tau+\tau_0) - \sigma(\tau-\tau_0)],$$

$$K_s'''(\tau) = -\frac{2A}{\tau_0^2}[\delta(\tau+\tau_0) - \delta(\tau-\tau_0)].$$

Спектральная плотность третьей производной корреляционной функции находится элементарно:

$$K_s'''(\tau) \leftrightarrow -\frac{2A}{\tau_0^2}[e^{j\omega\tau_0} - e^{-j\omega\tau_0}] = -\frac{4jA}{\tau_0^2}\sin\omega\tau_0.$$

Отсюда, воспользовавшись свойством фурье-преобразования интеграла и учитывая (1.30), получаем

$$K_s(\tau) \leftrightarrow 2A\tau_0 \frac{\sin\omega\tau_0}{\omega\tau_0} - \frac{4jA}{(j\omega)^3\tau_0^2}\sin\omega\tau_0 =$$

$$= 2A\tau_0 \frac{\sin\omega\tau_0}{\omega\tau_0}\left(1 + \frac{2}{\omega^2\tau_0^2}\right).$$

Спектральная плотность функции корреляции оказывается знакопеременной. Такой сигнал физически реализовать нельзя, поскольку энергетический спектр не может принимать отрицательные значения.

Взаимно корреляционная функция. Пусть имеются два сигнала — $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Скалярное произведение одного сигнала на смещенную копию второго называется *взаимно корреляционной функцией*:

$$K_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t-\tau) dt = (s_1, s_{2\tau}).$$

Для физических сигналов

$$K_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t-\tau) dt.$$

Взаимно корреляционная функция не обладает свойством четности:

$$K_{12}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(u-\tau) s_2^*(u) du = K_{21}(\tau).$$

Из $K_{12}(\tau) \neq K_{21}(\tau)$, следует $K_{12}(-\tau) \neq K_{12}(\tau)$. Воспользуемся обобщенной формулой Рэлея:

$$K_{12}(\tau) = (s_1, s_{2\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega)_{2\tau}^*(\omega) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega)[s_2(\omega) e^{-j\omega\tau}]^* d\omega = \qquad (1.37)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega) s_2^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} W_{12} e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Здесь $W_{12}(\omega) = s_1(\omega) s_2^*(\omega)$ — взаимный энергетический спектр. Как следует из (1.37), взаимно корреляционная функция и взаимный энергетический спектр двух сигналов являются фурье-сопряженной парой:

$$K_{12}(\tau) \leftrightarrow W_{12}(\omega),$$

$$K_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

$$W_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Для ортогональных сигналов в отсутствие смещения ($\tau = 0$) взаимно корреляционная функция равна нулю:

$$K_{12}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = 0.$$

Следовательно, взаимно корреляционная функция может отражать устойчивость состояния ортогональности относительно взаимного сдвига сигналов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы основные виды сигналов?
2. Какими параметрами описываются импульсные сигналы?
3. Какими свойствами характеризуется линейное пространство сигналов?
4. Как связаны норма и энергия сигнала?
5. Что такое метрическое пространство сигналов?
6. Как определяется скалярное произведение сигналов?
7. Какими свойствами обладает гильбертово пространство сигналов?
8. Как определить ортогональность сигналов?
9. Что такое ортогональный координатный базис?
10. Как определяются коэффициенты разложения сигнала в обобщенный ряд Фурье?
11. Как определить энергию сигнала, представленного обобщенным рядом Фурье?
12. В чем заключается процедура Грама–Шмидта?
13. Какими свойствами обладает функция включения?
14. Как осуществляется динамическое представление сигнала через функцию включения?
15. Какие вы знаете свойства δ-функции?
16. Как осуществляется динамическое представление сигналов через δ-функцию?
17. В чем отличие разложения сигнала в ряд Фурье и представления его интегралом Фурье?
18. Какими свойствами характеризуется преобразование Фурье?
19. Как связаны длительность сигнала и ширина его спектра?
20. Могут ли разные сигналы иметь одинаковый энергетический спектр?
21. Как проявляется закон сохранения энергии в частотном и координатном пространствах?
22. Дайте определение корреляционной функции сигнала.
23. Как связаны корреляционная функция и энергетический спектр сигнала?
24. Что вы можете сказать о взаимном спектре ортогональных сигналов?
25. Какую информацию о фазах сигналов можно получить из взаимного спектра?
26. Какому условию должна удовлетворять спектральная плотность корреляционной функции физически реализуемого сигнала?
27. Какими свойствами обладает взаимно корреляционная функция?

ЗАДАЧИ

1. Пользуясь представлением о векторном пространстве сигналов, докажите, что неравенство Шварца превращается в равенство только при выполнении условия $u = \gamma v^*$.

2. Показать, что скалярное произведение в комплексном гильбертовом пространстве сигналов удовлетворяет так называемому *поляризационному тождеству:*

$$4(u, v) = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + j\|u + jv\|^2 - j\|u - jv\|^2.$$

3. Для гильбертова пространства сигналов выбрана норма $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. Доказать равенство параллелограмма

$$\|u + v\|^2 + \|u - \ \|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

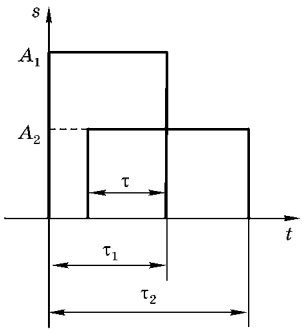


Рис. 1.18

4. Сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ — прямоугольные видео импульсы, амплитуды которых A_1 и A_2, а длительности τ_1 и τ_2 соответственно. Область перекрытия импульсов по длительности равна τ (рис. 1.18). Пользуясь представлениями гильбертова пространства, доказать, что угол между векторами, отображающими эти сигналы, не зависит от амплитуд A_1 и A_2.

5. Доказать

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}nx^2\right)\right\} = \delta(x).$$

6. Доказать справедливость соотношений (1.8)–(1.13).

7. Пусть спектральная плотность сигнала s_1

$$s_1(\omega) = s_0 T\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2},$$

а спектральная плотность сигнала s_2

$$s_2(\omega) = s_0 T\frac{\sin(\omega-\omega_0)T/2}{(\omega-\omega_0)T/2}.$$

При каких значениях ω_0 сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ ортогональны?

8. Найти спектральную плотность и энергетический спектр сигнала, показанного на рис. 1.19.

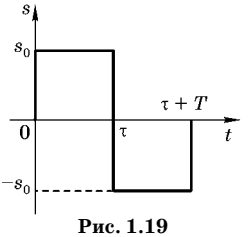


Рис. 1.19

9. Найти спектральную плотность сигнала

$$s(t) = s_0 e^{j\omega_0 t}[\sigma(t - t_0 + \tau_u) - \\ - \sigma(t - t_0 - \tau_u)].$$

10. Найти спектральную плотность одиночного синусоидального импульса

$$s(t) = s_0 \sin\frac{2\pi}{T}t, \quad 0 \le t \le \frac{T}{2},$$

показанного на рис. 1.20.

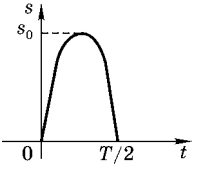


Рис. 1.20

11. Найти сигнал $s(t)$, если его спектральная плотность

$$s(\omega) = \frac{j\omega s_0}{(a + j\omega)^2}.$$

12. Найти спектр сигнала

$$s(t) = s_0 \exp\{-\beta(t - t_0)^2 + \alpha(t - t_0)\}.$$

13. Найти спектральную плотность сигнала

$$s(t) = s_0 t^2 \cos(\Omega t)[\sigma(t + t_0) - \sigma(t - t_0)].$$

14. Найти свертку сигналов

$$s_1(t) = \exp\{-\alpha(t - t_0)\}\sigma(t - t_0),$$
$$s_2(t) = \exp\{-\beta(t + t_0)\}\sigma(t + t_0).$$

15. Найти фурье-спектр сигнала (рис. 1.21)

$$s(t) = s_0(t - t_0)^3[\sigma(t) - \sigma(t - 2t_0)].$$

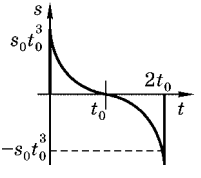


Рис. 1.21

16. Можно ли физически реализовать сигнал с корреляционной функцией

$$K_s(\tau) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right)\left[\sigma\left(\tau + \frac{T}{4}\right) - \sigma\left(\tau - \frac{T}{4}\right)\right],$$

показанной на рис. 1.22.

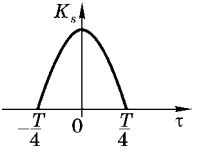


Рис. 1.22

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ОПТИКЕ

Рассмотрим основные принципы построения линейных математических моделей физических систем, преобразующих сигналы.

2.1. ПОНЯТИЕ О ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Любую систему можно представить в виде структуры, имеющей вход и выход (рис. 2.1). Входной и выходной сигналы могут зависеть от времени и пространственных координат. Выходной сигнал часто называют откликом или выходной реакцией системы. Будем считать, что сигнал является функцией обобщенной координаты x. Связь между входным и выходным сигналами можно задать, введя *системный оператор* $\hat{G}$:

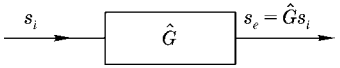


Рис. 2.1

$$s_e = \hat{G}s_i.$$

Выходной сигнал s_e является результатом действия системного оператора $\hat{G}$ на входной сигнал s_i. В общем случае сигналы могут быть многомерными (векторными). Математическая модель физической системы задается системным оператором.

Системы с постоянными во времени параметрами называются *стационарными*. Выходная реакция стационарной системы не зависит от момента времени поступления входного сигнала:

$$s_e(t \pm t_0) = \hat{G} s_i(t \pm t_0)$$

при любом значении t_0.

Если система не обладает инвариантностью относительно начала отсчета времени, она называется *нестационарной*. Среди стационарных систем выделяют *линейные* системы, системный оператор которых удовлетворяет следующим свойствам:

$$\hat{G}(s_{i1} + s_{i2}) = \hat{G} s_{i1} + \hat{G} s_{i2},$$
$$\hat{G}(\alpha s_i) = \alpha \hat{G} s_i$$

(α — произвольное число). Исследование линейных систем можно проводить, изучая реакцию на входные сигналы простейших типов.

Импульсной характеристикой системы (или импульсным откликом) называется функция $h(t)$, описывающая реакцию на короткий импульсный сигнал, $s_i = \delta(t)$:

$$h(t) = \hat{G}\delta(t). \tag{2.1}$$

Для стационарной системы

$$h(t - t_0) = \hat{G}\delta(t - t_0).$$

С физической точки зрения импульсный отклик отражает реакцию системы на короткий входной импульсный сигнал с единичной площадью, длительность которого много меньше постоянной времени системы. Используя динамическое представление сигнала через δ-функцию (1.15), для выходной реакции системы получаем

$$s_e(t) = \hat{G} s_i(t) = \hat{G} \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\xi)\delta(t - \xi)d\xi. \tag{2.2}$$

Имея в виду, что оператор $\hat{G}$ воздействует лишь на величины, зависящие от времени, запишем (2.2) в виде

$$s_{e.}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\xi)\hat{G}\delta(t - \xi)d\xi$$

или с учетом (2.1)

$$s_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(\xi)h(t - \xi)d\xi. \tag{2.3}$$

Следовательно, входной сигнал линейной стационарной системы определяется сверткой входного сигнала с импульсным откликом. Выражение (2.3) получило название *интеграла Дюамеля*.

Для физически реализуемой системы выходной сигнал, отвечающий входному импульсному воздействию, не может возникнуть до момента подачи сигнала на вход: $h(t) = 0$ при $t < 0$. С учетом этого обстоятельства верхний предел в интеграле Дюамеля может быть заменен на текущее время:

$$s_{e.}(t) = \int_{-\infty}^{t} s_i(\xi)h(t-\xi)d\xi.$$

Физически реализуемая система не оперирует с информацией, заключенной в будущих значениях входного сигнала. Она проводит операцию взвешенного суммирования всех мгновенных значений входного сигнала в прошлом, т. е. на интервале $(-\infty, t)$.

Переходной характеристикой линейной стационарной системы называется реакция на входной сигнал, отображаемый ступенчатой функцией Хевисайда:

$$g(t) = \hat{G}\sigma(t),$$
$$g(t-t_0) = \hat{G}\sigma(t-t_0). \qquad (2.4)$$

Для физически реализуемой системы $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Поскольку $\delta(t) = \dfrac{d\sigma(t)}{dt}$, запишем (2.1) в виде

$$h(t) = \hat{G}\frac{d\sigma(t)}{dt}.$$

В случае линейной системы оператор дифференцирования d/dt и системный оператор $\hat{G}$ коммутируемы и могут меняться местами:

$$h(t) = \frac{d}{dt}\hat{G}\sigma(t).$$

Отсюда с учетом (2.4) получаем

$$h(t) = \frac{d}{dt}g(t)$$

или

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t)dt.$$

Воспользуемся динамическим представлением сигнала через функцию Хевисайда. Тогда

$$s_e(t) = \widehat{G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_i(\xi)}{d\xi}\sigma(t-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_i(\xi)}{d\xi}\widehat{G}\sigma(t-\xi)d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_i(\xi)}{d\xi}g(t-\xi)d\xi.$$

Определим сигнал, реакция системы на который является собственной функцией системного оператора $\widehat{G}$:

$$s_e(t) = \widehat{G}s_i(t) = Hs_i(t).$$

Здесь H — собственное значение оператора $\widehat{G}$. Этому свойству удовлетворяют гармонические сигналы $s_i(t) = \exp(j\omega t)$. Воспользовавшись интегралом Дюамеля, получаем

$$s_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\xi}h(t-\xi)d\xi.$$

После переобозначения $t - \xi \to \tau$, $\xi \to t - \tau$ находим

$$s_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = H(\omega)e^{j\omega t}.$$

Отсюда следует, что $H(\omega)$ является собственным значением системного оператора $\widehat{G}$, а $e^{j\omega t}$ — его собственной функцией.

Комплексное число

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (2.5)$$

называется *частотным коэффициентом передачи системы*. Как следует из (2.5), частотный коэффициент передачи и импульсный отклик линейной стационарной системы являются фурье-сопряженной парой:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt,$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Представим частотный коэффициент передачи через показательную функцию

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\psi(\omega)}.$$

Модуль частотного коэффициента передачи $|H(\omega)|$ называется *амплитудно-частотной характеристикой* (АЧХ), а фаза $\psi(\omega)$ получила название *фазочастотной характеристики* (ФЧХ).

В физически реализуемой линейной стационарной системе импульсный отклик должен быть вещественной функцией. Тогда из свойств преобразования Фурье следует, что

$$H(\omega) = H^*(-\omega)$$

и амплитудно-частотная характеристика должна быть четной, а фазочастотная характеристика — нечетной функцией частоты.

Пример 2.1. Пусть частотный коэффициент передачи системы имеет вид (рис. 2.2)

$$H(\omega) = H_0 \operatorname{rect}\left[\frac{\omega}{\omega_b}\right].$$

Тогда импульсный отклик системы (рис. 2.3)

$$h(t) = \frac{H_0}{2\pi}\int_{-\omega_b}^{\omega_b} e^{j\omega t}d\omega = \frac{H_0\omega_b}{\pi}\frac{\sin\omega_b t}{\omega_b t}.$$

Физическая система с таким импульсным откликом не может быть физически реализована, поскольку нарушается принцип причинности (отклик не равен нулю еще до поступления входного сигнала).

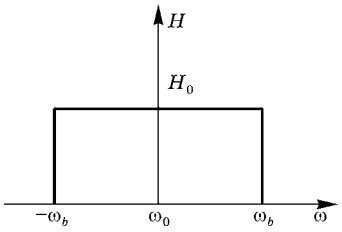


Рис. 2.2

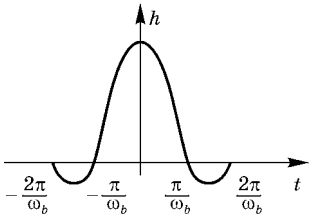


Рис. 2.3

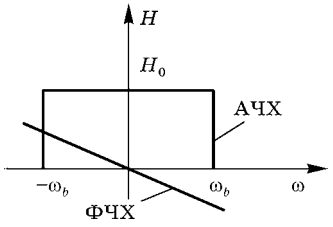


Рис. 2.4

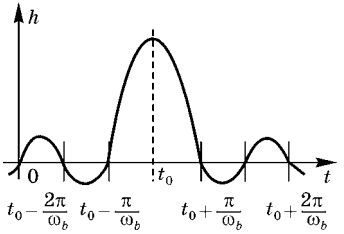


Рис. 2.5

Для физической реализации можно ввести линейно зависимую от частоты фазочастотную характеристику (рис. 2.4)

$$H(\omega)=e^{-j\omega t_0}H_0\,\mathrm{rect}\left[\frac{\omega}{\omega_b}\right].$$

Тогда на основании теоремы смещения для импульсного отклика получаем (рис. 2.5)

$$h(t)=\frac{H_0\omega_b}{\pi}\frac{\sin\omega_b(t-t_0)}{\omega_b(t-t_0)}.$$

Введение запаздывания позволяет с хорошим приближением физически реализовать систему, частотный коэффициент передачи которой соответствует идеальному низкочастотному фильтру с линейно зависящей от частоты ФЧХ.

Преобразование спектра сигнала линейной системой. Пусть входной сигнал $s_i(t)$ имеет спектральную плотность $s_i(\omega)$, тогда

$$s_i(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Воздействуем на входной сигнал системным оператором:

$$s_e=\hat{G}s_i(t)=\frac{\hat{G}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\omega)e^{j\omega t}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\omega)\hat{G}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Здесь учтено, что $e^{j\omega t}$ является собственной функцией системного оператора $\hat{G}$, а $H(\omega)$ — его собственным

значением. Тогда для спектральной плотности выходного сигнала имеем

$$s_e(\omega) = s_i(\omega)H(\omega). \qquad (2.6)$$

Спектральная плотность выходного сигнала определяется произведением спектральной плотности входного сигнала на частотный коэффициент передачи.

Выражение (2.6) следует из интеграла Дюамеля по свойству фурье-преобразования:

$$s_e(t) = s_i(t) \otimes h(t) \leftrightarrow s_i(\omega)H(\omega).$$

Многозвенные системы. Пусть линейная стационарная система представляет собой последовательное соединение отдельных звеньев с частотными коэффициентами передачи $H_n(\omega)$, где $n = 1, 2, \ldots, N$; N — общее число звеньев (рис. 2.6).

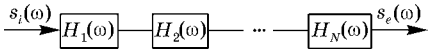


Рис. 2.6

Тогда, подведя на вход сигнал $s_i(t)$, спектральная плотность которого $s_i(\omega)$, для спектральной плотности выходного сигнала получаем

$$s_e(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega) \ldots H_N(\omega)s_i(\omega) = H(\omega)s_i(\omega).$$

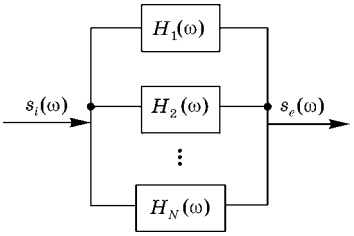


Рис. 2.7

Отсюда находим результирующий частотный коэффициент передачи

$$H(\omega) = \prod_{n=1}^{N} H_n(\omega).$$

Частотный коэффициент передачи системы, состоящей из последовательно соединенных звеньев, равен произведению частотных коэффициентов передачи звеньев.

В случае параллельного соединения звеньев при входном сигнале $s_i(t) \leftrightarrow s_i(\omega)$ спектральная плотность (рис. 2.7) выходного сигнала описывается выражением

$$s_e(\omega) = \sum_{n=1}^{N} H_n(\omega) s_i(\omega) =$$
$$= H(\omega) s_i(\omega).$$

Откуда

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N} H_n(\omega).$$

Результирующий частотный коэффициент передачи при параллельном соединении звеньев равен сумме частотных коэффициентов передачи отдельных звеньев.

Системы с обратной связью. Такая система состоит из двух ветвей (рис. 2.8). Прямая ветвь содержит звено с частотным коэффициентом передачи $H_1(\omega)$. В ветви обратной связи помещено звено с частотным коэффициентом передачи $H_{fb}(\omega)$.

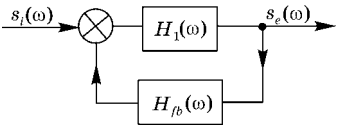


Рис. 2.8

Пусть спектральная плотность входного сигнала $s_i(\omega)$, выходного — $s_e(\omega)$. Сигнал с выхода звена $H_1(\omega)$ в прямой ветви через цепь обратной связи вновь поступает на вход. Звено в прямой ветви преобразует суперпозицию входного сигнала $s_i(\omega)$ и преобразованного в цепи обратной связи $s_e(\omega)H_{fb}(\omega)$:

$$[s_i(\omega) \pm s_e(\omega)H_{fb}(\omega)]H_1(\omega) = s_e(\omega).$$

Отсюда получаем

$$s_e(\omega)[1 \mp H_{fb}(\omega)H_1(\omega)] = s_i(\omega)H_1(\omega)$$

или

$$s_e(\omega) = \frac{H_1(\omega)s_i(\omega)}{1 \mp H_{fb}(\omega)H_1(\omega)} = H(\omega)s_i(\omega).$$

Следовательно, частотный коэффициент передачи системы с обратной связью определяется выражением

$$H(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{1 \mp H_{fb}(\omega)H_1(\omega)}.$$

Знак «−» соответствует положительной обратной связи, а знак « + » — отрицательной.

Преобразование линейной системой энергетических спектральных характеристик сигналов. Согласно формуле Рэлея энергия выходного сигнала

$$E_e = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_e(\omega)s_e^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)s_i(\omega)H^*(\omega)s_e^*(\omega)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 |s_i(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2\, W_i(\omega)d\omega.$$

Отсюда находим спектр мощности выходного сигнала

$$W_e(\omega) = |H(\omega)|^2 W_i(\omega).$$

Величина

$$H_W(\omega) = |H(\omega)|^2$$

называется *частотным коэффициентом передачи мощности системы*. Как следует из определения, коэффициент передачи мощности является вещественным.

Преобразование Фурье от коэффициента передачи мощности называется *корреляционной функцией системы*:

$$K_W(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(\tau - t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)[H(\omega)e^{-j\omega\tau}]^* d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_W(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.$$

2.2. ПРОСТРАНСТВО КАК ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА, ПРЕОБРАЗУЮЩАЯ ОПТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ

Методы теории линейных систем применимы к любым сигналам, в том числе и к оптическим. В общем случае сигналы в оптике являются функцией как времени, так и пространства $s(x, y, z, t)$. Обычно времязависимая и пространственно зависимая части в математических моделях сигналов могут быть разделены. Преобразование сигналов во времени выполняется методами, широко применяемыми в радиотехнике, связи и электронике. Очевидные ограничения здесь определяются однонаправленностью времени, различием «прошлого» и «будущего» и необхо-

димостью учитывать принцип причинности. Спецификой оптических сигналов является именно пространственная зависимость. Обработка осуществляется обычно системами с двумерным входом и выходом. Для пространственных сигналов снимаются ограничения, связанные с однонаправленностью и соответственно причинностью. Вместе с тем плодотворность теории линейных систем в оптике следует из аналогии волновых и колебательных явлений, электромагнитной природы света и общности используемого математического аппарата.

Формальное сходство между оптическими и электрическими сигналами имеет место и при многих нелинейных преобразованиях. Например, регистрация оптического сигнала на фотопленке и квадратичное детектирование, голографические методы и гетеродинные преобразования.

Распространение оптического сигнала в среде подчиняется общим закономерностям распространения волновых процессов и описывается волновым уравнением $v^2\nabla^2 s = \partial^2 s/\partial t^2$. Решением волнового уравнения является плоская монохроматическая волна вида

$$s(\mathbf{R}, t) = A(\mathbf{R})\exp\{-j(\omega t - \mathbf{kR})\}, \qquad (2.7)$$

где $A\exp\{j(\mathbf{kR})\}$ — комплексная амплитуда поля. Волновое число $|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ однозначно определяется через проекции волнового вектора $\mathbf{k}$ на ортогональные оси (см. рис. 2.9):

$$k^2 = 4\pi^2/\lambda^2 = \omega^2/v^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2,$$

где $k_x = k\sin\alpha$, $k_y = k\cos\alpha\sin\beta$, $k_z = k\cos\alpha\cos\beta$, α и β — углы, задающие направление волнового вектора; v — скорость света в среде.

Из (2.7) видно, что в описание плоской волны временны́е (ω, t) и пространственные ($\mathbf{k}$, $\mathbf{R}$) параметры входят равноправно.

В параксиальном приближении волновой вектор световой волны направлен под небольшим углом к оптической оси. Если

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad \text{и} \quad \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_z^2} \ll 1,$$

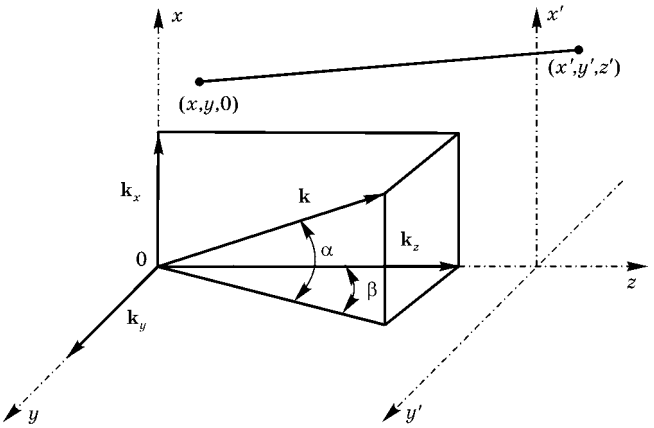


Рис. 2.9

то волновой вектор **k** является параксиальным и для его z-компоненты справедливо выражение

$$k_z = [k^2 - (k_x^2 + k_y^2)]^{1/2} \approx k - \frac{1}{2k}(k_x^2 + k_y^2).$$

Это равносильно утверждению, что функция $s(x, y, z)$, описывающая световое поле, по отношению к переменным x и y является медленной функцией в сравнении с зависимостью от координаты z. Поэтому функцию $s(x, y, z)$ можно записать в виде произведения амплитудного и фазового множителей $s(x, y, z) = A(x, y, z)\exp(jkz)$, где амплитудный множитель является медленным по сравнению с экспонентой. Подставляя это выражение для $s(x, y, z)$ в волновое уравнение, получаем

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - 2jk\frac{\partial A}{\partial z} = 0. \qquad (2.8)$$

Поскольку $\partial A/\partial z \ll kA$, можно пренебречь производной $\partial^2 A/\partial z^2$ по сравнению с $k\dfrac{\partial A}{\partial z}$. В результате (2.8) трансформируется в так называемое параксиальное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - 2jk\frac{\partial A}{\partial z} = 0.$$

Вводя обозначение $\nabla^2_{x,y} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, приходим к следующей форме этого уравнения:

$$\nabla^2_{x,y} A - 2jk\frac{\partial A}{\partial z} = 0. \qquad (2.9)$$

Переходя от дифференциалов к приращениям, из (2.9) получаем

$$\Delta A = -j\frac{\Delta z}{2k}\nabla^2_{xy} A.$$

Основным свойством параксиального волнового уравнения является его инвариантность к параллельному переносу (трансляции) системы координат в направлении оси z.

Пусть во входной плоскости заданы плоский волновой фронт светового поля и вещественная функция распределения амплитуды A. Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[A(x,y,z)e^{j\varphi(z)}] = e^{j\varphi(z)}\frac{\partial A}{\partial z} + jAe^{j\varphi(z)}\frac{\partial s}{\partial z} = 0,$$

получаем

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -j\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

После подстановки $\partial A/\partial z$ в (2.9) и замены дифференциалов на приращения получаем фазовый сдвиг, вносимый в A на расстоянии Δz:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta z}{2k}\frac{\nabla^2_{x,y} A}{A}. \qquad (2.10)$$

Если выбрать k_x и k_y независимыми переменными, то

$$k_z = \pm(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}.$$

Отсюда выражение для комплексной амплитуды поля можно записать в виде

$$s(x,y,z) = A\exp\{\pm jz(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}\}\exp\{j(k_x x + k_y y)\}.$$

Условие $k^2 \geq k_x^2 + k_y^2$ соответствует плоской волне, удовлетворяющей в качестве решения параксиальному волновому уравнению. Если же $k^2 < k_x^2 + k_y^2$, то волна получается неоднородная, экспоненциально затухающая.

Поскольку параксиальное волновое уравнение — линейное и для него справедлив принцип суперпозиции, общее решение этого уравнения можно разложить по плоским волнам в интеграл суперпозиции:

$$s(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s(k_x,k_y,0)\exp\{\pm jz(k^2-k_x^2-k_y^2)^{1/2}\}\times$$
$$\times\exp\{j(k_x x+k_y y)\}dk_x dk_y. \qquad (2.11)$$

Здесь $s(k_x, k_y, 0)$ — функция, описывающая угловой спектр поля. Название «угловой спектр» связано с тем, что функция $s(k_x, k_y, 0)$ определяет распределение амплитуд и фаз плоских волн по направлениям, которые задаются переменными k_x и k_y. В радиофизике это выражение известно как представление Рэлея.

Задавая граничные условия, можно из (2.11) получить точное решение волнового уравнения. Сведем дифракционную задачу к следующей: известно распределение поля $s(x, y, 0)$ в плоскости $z = 0$. Требуется найти поле в произвольной точке $M(x, y, z)$ в полупространстве $z > 0$. Поскольку функция (2.11) — аналитическая, она однозначно задается своими значениями на произвольной замкнутой поверхности, ограничивающей пространство $z > 0$. Рассмотрим в качестве такой поверхности плоскость $z = 0$ и полусферу бесконечного радиуса, опирающуюся на эту плоскость. Выбор граничных условий на полусфере бесконечного радиуса позволяет устранить знаковую неопределенность показателя экспоненты в интеграле суперпозиции (2.11). Граничным условием на этой полусфере является равенство нулю значений функции (2.11), что следует из конечной скорости распространения света. Эти граничные условия известны как приближение Кирхгофа. Если выбрать знак плюс в (2.11), то неоднородная волна, распространяющаяся в слабопоглощающей среде в направлении $z > 0$, будет затухать, что соответствует физической реальности.

Из (2.11) получаем разложение поля в плоскости $z = 0$:

$$s(x,y,0)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s(k_x,k_y,0)\exp\{j(k_x x+k_y y)\}dk_x dk_y.$$

Это выражение представляет собой интеграл Фурье. Угловой спектр $s(k_x, k_y, 0)$ и поле $s(x, y, 0)$ являются фурье-сопряженными функциями:

$$s(k_x, k_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0)\exp\{-j(k_x x + k_y y)\}dxdy. \quad (2.12)$$

Найдем угловой спектр поля в произвольной плоскости z. Из (2.11) и (2.12) получаем

$$s(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, z)\exp\{-j(k_x x + k_y y)\}dxdy = \\ = s(k_x, k_y, 0)H(k_x, k_y). \quad (2.13)$$

Отсюда следует, что угловой спектр поля в произвольной плоскости z определяется произведением углового спектра поля в плоскости $z = 0$ на функцию, описывающую фильтрующие свойства пространства, заключенного между плоскостями $z = 0$ и z:

$$H(k_x, k_y) = \exp\{jz(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}\}. \quad (2.14)$$

Угловой спектр поля в плоскости $z = 0$ есть фурье-образ поля в этой плоскости (2.12). Аналогично $H(k_x, k_y)$ можно определить как фурье-образ функции $h(x, y)$:

$$H(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\exp\{-j(k_x x + k_y y)\}dxdy. \quad (2.15)$$

Функции $h(x, y)$ и $H(k_x, k_y)$ составляют фурье-сопряженную пару:

$$h(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(k_x, k_y)\exp\{j(k_x x + k_y y)\}dk_x dk_y.$$

Подставляя (2.12) и (2.15) в (2.13), получаем

$$s(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0)\exp\{-j(k_x x + k_y y)\}dxdy \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta)\exp\{-j(k_x \xi + k_y \eta)\}d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0)dxdy \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta)\exp\{-j[k_x(x + \xi) + k_y(y + \eta)]\}d\xi d\eta.$$

Сделаем замену переменной: $x + \xi = x'$, $y + \eta = y'$. Тогда

$$s(k_x, k_y, z) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\{-j(k_x x' + k_y y')\}dx'dy' \int_{-\infty}^{\infty}\int s(x, y, o)h(x' - x, y' - y)dxdy. \tag{2.16}$$

Сравнивая (2.16) и (2.13), приходим к выражению для поля в произвольной плоскости z:

$$s(x', y', z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0)h(x' - x, y' - y)dxdy. \tag{2.17}$$

Из (2.17) следует, что поле в плоскости z представляется сверткой входного поля (сформированного в плоскости $z = 0$) с функцией $h(x, y)$.

Пространственные и угловые спектры оптических волновых полей. Мы установили, что распространение оптических полей в пространстве может описываться на языке теории линейных систем. Если входное поле $s(x, y, 0)$ задается в плоскости $(x, y, 0)$, а выходное поле $s(x', y', z)$ регистрируется в плоскости (x', y', z), то угловые спектры и поля в этих плоскостях составляют фурье-сопряженные пары:

$$\begin{cases} s(k_x, k_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0)\exp\{-j(k_x x + k_y y)\}dxdy, \\ s(x, y, 0) = \dfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(k_x, k_y, 0)\exp\{j(k_x x + k_y y)\}dk_x dk_y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} s(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x', y', z)\exp\{-j(k_x x' + k_y y')\}dx'dy', \\ s(x', y', z) = \dfrac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(k_x, k_y, z)\exp\{j(k_x x' + k_y y')\}dk_x dk_y. \end{cases}$$

Здесь $s(k_x, k_y, 0)$ и $s(k_x, k_y, z)$ — угловые спектры полей, заданных соответственно в плоскостях $z = 0$ и z. Угловые спектры $s(k_x, k_y, 0)$ и $s(k_x, k_y, z)$ связаны через когерентную передаточную функцию слоя пространства $H(k_x, k_y)$:

$$s(k_x, k_y, z) = s(k_x, k_y, 0)H(k_x, k_y),$$

где $H(k_x, k_y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\exp\{-j(k_x x + k_y y)\}dxdy$, $h(x, y)$ — импульсный отклик слоя пространства между плоскостями $z = 0$ и z.

Поля в плоскостях $z = 0$ и z связаны через импульсный отклик:

$$s(x', y', z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0)h(x' - x, y' - y)dxdy.$$

Когерентная передаточная функция (КПФ) и импульсный отклик слоя пространства составляют фурье-сопряженную пару:

$$H(k_x, k_y) \leftrightarrow h(x, y),$$

$$h(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(k_x, k_y)\exp\{j(k_x x + k_y y)\}dk_x dk_y.$$

Под частотой здесь понимаются пространственные частоты k_x, k_y, однозначно связанные с направляющими углами. Согласно определению пространственной частоты угловой спектр полностью описывает пространственно-частотный спектр поля при известной длине волны. Возможность применения теории линейных систем следует из линейности волнового уравнения и представления его решения интегралом суперпозиции в виде интеграла Фурье. Правомерность такого подхода следует из того, что пространственная координата $\mathbf{R}$ и волновой вектор $\mathbf{k}$ (пространственная частота) входят в аргумент плоской волны равноправно с временем t и частотой ω:

$$\exp\{-j(\omega t - \mathbf{kR})\}.$$

В общем случае оптическое поле, зависящее от $\mathbf{R}$ и t, можно представить интегралом Фурье, где спектральная плотность сигнала $s(k, \omega)$ зависит от пространственной и временно́й частот.

Импульсный отклик свободного пространства. Для нахождения этой функции в случае распространения излучения в свободном пространстве воспользуемся *принципом*

Гюйгенса–Френеля. Согласно этому принципу результирующее поле является суперпозицией когерентных сферических волн, распространяющихся от каждой точки замкнутой поверхности, окружающей действительный первичный источник. Принцип Гюйгенса–Френеля означает, что волна, сформированная источником, в дальнейшем может рассматриваться независимо от источника.

Пусть во входной плоскости $(x, y, 0)$ локализован точечный источник $\delta(x-\xi, y-\eta)$. Оптическое поле, излучаемое точечным источником, представляет собой сферическую волну. Поле в плоскости наблюдения (x', y', z) можно описать сверткой функции точечного источника с импульсным откликом пространства:

$$\frac{\exp(j\mathbf{kR})}{R} = \gamma \int\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi, y-\eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где γ — произвольный коэффициент пропорциональности. Пользуясь фильтрующим свойством δ-функции, находим

$$\frac{\exp\{j\mathbf{kR}\}}{R} = \gamma h(x, y).$$

Отсюда

$$h(x, y) = \frac{\exp\{j\mathbf{kR}\}}{\gamma R}. \qquad (2.18)$$

Радиус волнового фронта сферической волны может быть представлен как

$$R = [z^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2} = z\left[1 + \frac{(x-x')^2}{z^2} + \frac{(y-y')^2}{z^2}\right]^{1/2}.$$

Следовательно, импульсный отклик свободного пространства с точностью до коэффициента $1/\gamma$ описывается сферической волной от точечного источника. Неоднозначность определения функции $h(x, y)$ устраняется, если учесть условие взаимной фурье-сопряженности функций $h(x, y)$ и $H(K_x, K_y)$. Это условие выполняется при $k_x/k \ll 1$ и $k_y/k \ll 1$, когда выражение (2.14), описывающее H, в параксиальном приближении принимает вид

$$H(k_x, k_y) = \exp\left\{jkz\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{k_x}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{k_y}{k}\right)^2\right]\right\}. \qquad (2.19)$$

Выполняя фурье-преобразование, получаем

$$h(x'-x, y'-y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{jkz\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{k_x}{k}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{k_y}{k}\right)^2\right]\right\}\times$$
$$\times\exp\{j[k_x(x'-x)+k_y(y'-y)]\}dk_x dk_y =$$
$$=\frac{1}{j\lambda z}\times\exp\left\{jk\left[z+\frac{(x'-x)^2}{2z}+\frac{(y'-y)^2}{2z}\right]\right\}. \qquad (2.20)$$

Сравнивая (2.20) и (2.18), находим $\gamma = j\lambda$ и

$$R \approx z+\frac{(x'-x)^2}{2z}+\frac{(y'-y)^2}{2z}.$$

Следовательно, в параксиальном приближении, когда углы α и β малы, импульсный отклик $h(x'-x, y'-y)$ удовлетворяет выражениям (2.15) и (2.18).

В частотном пространстве условием применимости принципа Гюйгенса–Френеля является соотношение $k_x^2+k_y^2 \ll k^2$. Соответствующее приближение (2.20) в координатном пространстве называется приближением Френеля. Оно справедливо, если область, в которой возмущено входное поле, невелика по сравнению с расстоянием z, на котором изучается дифрагированное поле. Физически приближение Френеля соответствует замене вторичных сферических волн Гюйгенса поверхностями второго порядка. Быстрые осцилляции экспоненциальной функции с квадратичным показателем в (2.20) приводят к тому, что интеграл суперпозиции (2.17) имеет малую величину всюду, кроме области значений $x \sim x'$, $y \sim y'$, в которой скорость изменения фазы минимальна. Исследование интеграла суперпозиции методом стационарной фазы показывает, что достаточным условием приближения Френеля является соотношение $\lambda z/\pi l^2 \sim 1$, где l — характерный размер препятствия, на котором дифрагирует световая волна (например, в случае дифракции на круглом отверстии или экране l является диаметром).

Запишем интеграл суперпозиции (2.17) в приближении Френеля:

$$s(x', y', z) =$$

$$= \frac{1}{j\lambda z}\exp\{jkz\}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0)\exp\left\{j\frac{k}{2z}[(x-x')^2 + (y-y')^2]\right\}dxdy \tag{2.21}$$

или

$$s(x', y', z) = \frac{1}{j\lambda z}\exp\{jkz\}\exp\left\{j\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)\right\}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0)\exp\left\{j\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{k}{z}(xx' + yy')\right\}dxdy. \tag{2.22}$$

Из (2.22) следует, что дифрагированное поле можно представить как фурье-образ входного поля, умноженного на функцию $\exp\{jk(x^2 + y^2)/2z\}$. Выражение (2.21) описывает дифрагированное поле в приближении Френеля как свертку. Отсюда получаем, что КПФ свободного пространства при дифракции Френеля имеет вид (2.19), круговые пространственные частоты $k_x = k\sin\alpha$, $k_y = k\cos\alpha\sin\beta$ определяются при $\sin\alpha \approx \alpha \approx (x' - x)/z$, $\sin\beta \approx \beta \approx (y' - y)/z$.

Определение пространственной частоты k_x для плоской волны, распространяющейся под углом α к оси z, иллюстрирует рис. 2.10. На плоскости (x, z) параллельными эквидистантными линиями показаны последовательные положения волновых фронтов с пространственным периодом λ. Как видно из рисунка, пространственный период по оси x связан с длиной волны соотношением $\lambda_x = \lambda/\sin\alpha$. Отсюда для x-составляющей пространственной частоты получаем

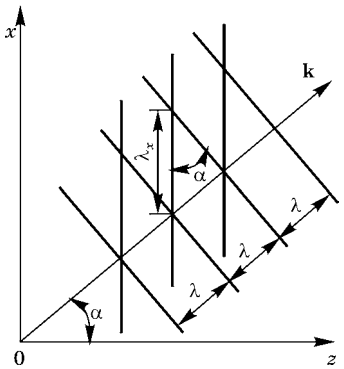


Рис. 2.10

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha = k\sin\alpha.$$

Выражение (2.19) для когерентной передаточной функции означает, что свободное пространство по отношению к угловому спектру оптическо-

го поля проявляет себя как низкочастотный пространственный фильтр с частотой среза, удовлетворяющей приближению Френеля. Первый экспоненциальный множитель в (2.22) дает общую фазовую задержку, которую получает каждая спектральная компонента при распространении от плоскости $z = 0$ до плоскости z. Вторая экспонента определяет квадратичную по пространственной частоте фазовую дисперсию. Кроме того, j в знаменателе дает общий фазовый сдвиг $-\pi/2$ для углового спектра как вклад первой зоны Френеля.

Для практических расчетов дифракционных явлений часто вполне достаточным оказывается еще более грубое приближение, чем приближение Френеля. Если в интеграле суперпозиции (2.22) выполнить условие $z \gg k(x^2 + y^2)/2$, то выходное поле можно найти непосредственно через фурье-преобразование входного поля, заданного в плоскости $z = 0$:

$$s(x', y', z) = \\ = \frac{1}{j\lambda z}\exp\{jkz\}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, 0)\exp\left\{-j\frac{k}{z}(xx' + yy')\right\}dxdy. \tag{2.23}$$

Этот случай соответствует значениям $z \gg \pi l^2/\lambda$ и описывает *дифракцию Фраунгофера*. В приближении Фраунгофера слой пространства в качестве низкочастотного фильтра по отношению к угловому спектру оптического поля имеет меньшую полосу пропускания, чем в приближении Френеля.

Рассмотрим несколько типичных примеров использования приближений Фраунгофера и Френеля, встречающихся в дифракционных задачах.

Пример 2.2. Входной сигнал представляет собой прямоугольное отверстие в экране, освещенном плоской волной (рис. 2.11).

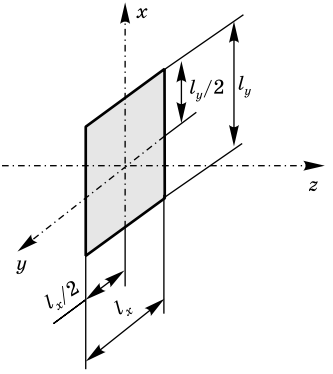


Рис. 2.11

$$s(x,y)=\begin{cases} s_0, & |x|\le\frac{l_x}{2},\ |y|\le\frac{l_y}{2}; \\ 0, & |x|>\frac{l_x}{2},\ |y|>\frac{l_y}{2}. \end{cases}$$

Найти распределение поля в плоскости (x', y', z) в приближении Фраунгофера, $\lambda z/\pi l_x^2>1, \lambda z/\pi l_y^2>1$.

Дифрагированное поле в плоскости (x', y', z) описывается выражением

$$s(x,\ y,z)=s_0\frac{e^{jkz}}{j\lambda z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}s(x,y)\exp\left\{-j\frac{k}{z}(xx'+yy')\right\}dxdy=$$

$$=s_0\frac{e^{jkz}}{j\lambda z}l_xl_y\frac{\sin\left(\frac{kx'}{2z}l_x\right)}{\frac{kx'}{2z}l_x}\frac{\sin\left(\frac{ky'}{2z}l_y\right)}{\frac{ky'}{2z}l_y}=$$

$$=s_0\frac{e^{jkz}}{j\lambda z}l_xl_y\frac{\sin\left(\frac{1}{2}K_xl_x\right)}{\frac{1}{2}K_xl_x}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}K_yl_y\right)}{\frac{1}{2}K_yl_y},$$

где $K_x=\frac{kx'}{z}, K_y=\frac{ky'}{z}$ — пространственные частоты. В случае дифракции на щели

$$s(x',z)=s_0\frac{e^{jkz}}{j\lambda z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}s(x,0)\exp\left\{-j\frac{k}{z}(xx'+yy')\right\}dxdy=$$

$$=s_0\frac{e^{jkz}}{j\lambda z}lx\frac{\sin[(1/2)K_xl_x]}{(1/2)K_xl_x}\lim_{l_y/2\to\infty}\frac{\sin[(1/2)K_yl_y]}{K_y}=$$

$$=s_0\frac{\pi e^{jkz}}{j\lambda z}l_x\delta(K_y)\frac{\sin[(1/2)K_xl_x]}{(1/2)K_xl_x},$$

где согласно примеру 1.10

$$\delta(K_y)=\lim_{(1/2)l_y\to\infty}\frac{\sin(1/2)K_yl_y}{\pi K_y}.$$

Отсюда дифрагированное поле на щели описывается формулой

$$s(x',z)=s_0\frac{\pi e^{jkz}}{j\lambda z}l_x\delta\left(\frac{ky'}{z}\right)\frac{\sin\left(\frac{kx'l_x}{2z}\right)}{\frac{kx'l_x}{2z}}.$$

Пример 2.3. Дифракция Френеля на экране с гауссовой функцией пропускания:

$$s(x, y) = A \exp\left\{-\frac{(x^2 + y^2)}{w_0^2}\right\}. \qquad (2.24)$$

Поле в плоскости (x', y'), отстоящей от плоскости (x, y) на расстояние z, выражается через интеграл суперпозиции (2.17). После подстановки (2.24) в интеграл суперпозиции и интегрирования получаем

$$s(x', y', z) = \frac{w_0}{w} \exp\left\{j\left[kz - \operatorname{arctg}\frac{z}{R_0}\right]\right\} \exp\left\{-\frac{1}{w^2}(x'^2 + y'^2)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{j\frac{k}{2R}(x'^2 + y'^2)\right\}, \qquad (2.25)$$

где w и R определяются выражениями

$$w = w_0\left[1 + \left(\frac{z}{R_0}\right)^2\right]^{1/2}, \qquad (2.26)$$

$$R = z\left[1 + \left(\frac{R_0}{z}\right)^2\right].$$

Здесь w и R — соответственно радиус сечения и радиус кривизны волнового фронта дифрагированного поля, прошедшего через слой свободного пространства толщиной z; $R_0 = kw_0^2/2$ — конфокальный параметр гауссова пучка. Как видно из (2.25), в дифрагированном поле сохраняется гауссово распределение амплитуды. При распространении в свободном пространстве гауссов пучок сохраняет форму, изменяя фазу, амплитуду, радиус сечения и кривизну волнового фронта.

2.3. ЛИНЗА КАК КВАДРАТИЧНЫЙ ФАЗОВЫЙ ФИЛЬТР

Преобразование когерентных оптических сигналов. Описание дифракционных явлений интегралом суперпозиции указывает на возможность применения элементов теории линейных систем в оптике. Это следует из общего вида волнового уравнения, описывающего распространение света в среде. Применение интеграла суперпозиции

выявляет важнейшее свойство линейной системы, состоящее в том, что она полностью определяется импульсным откликом $h(x_1, y_1; x_0, y_0)$:

$$s(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) h(x_1, y_1; x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (2.27)$$

Импульсный отклик описывает выходной сигнал в точке (x_1, y_1), когда входным сигналом является δ-функция в точке (x_0, y_0). В оптике импульсный отклик часто называют функцией рассеяния. В решениях дифференциальных уравнений импульсному отклику соответствует функция Грина.

Из линейных оптических систем особо выделяются пространственно-инвариантные (изопланарные) системы, для которых импульсный отклик зависит только от разности координат:

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = h(x_1 - x_0; y_1 - y_0).$$

Пространственно-инвариантные системы преобразуют входной сигнал вида $s(x_0 - \xi, y_0 - \eta)$ в выходной $s(x_1 - \xi_1, y_1 - \eta_1)$ для всех $s(x_0, y_0)$. Например, изображение источника, создаваемого изопланарной системой, при неизменной форме меняет только свое положение, если источник в предметной плоскости перемещается. Условие пространственной инвариантности редко выполняется для реальных оптических систем полностью по входной и выходной плоскостям. Однако пространственная инвариантность имеет место в пределах малых областей, называемых изопланарными участками. Для полного описания системы предметную плоскость достаточно разбить на изопланарные участки, определив для каждого свой импульсный отклик. Интеграл суперпозиции (2.27) в случае пространственно-инвариантных систем принимает форму свертки входного сигнала и импульсного отклика:

$$s(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) h(x_1 - x_0, y_1 - y_0) dx_0 dy_0.$$

Анализ пространственно-инвариантных систем особенно упрощается с введением понятия когерентной пе-

редаточной функции. Основным свойством таких систем является то, что свертке сигнала с импульсным откликом в координатном пространстве соответствует произведение фурье-образа входного сигнала и когерентной передаточной функции в пространственно-частотной области. При этом предполагается, что масштабы пространственных частот входного и выходного сигналов согласованы:

$$s_e(K_x, K_y) = s_i(K_x, K_y)H(K_x, K_y), \qquad (2.28)$$

здесь $s_e(K_x, K_y)$ — фурье-образ выходного сигнала $s(x_1, y_1)$; $s_i(K_x, K_y)$ — фурье-образ входного сигнала $s(x_0, y_0)$; $H(K_x, K_y)$ — когерентная передаточная функция системы; K_x, K_y — пространственные частоты.

По аналогии с (2.28) легко показать, что фурье-преобразование свертки сигналов в координатном пространстве соответствует произведению фурье-спектров сигналов в частотной плоскости:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi_0, \eta_0)s_2^*(x_0 - \xi, y_0 - \eta)d\xi_0 d\eta_0 \leftrightarrow s_1(K_x, K_y)s_2^*(K_x, K_y).$$

Отсюда для автосвертки сигнала можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(\xi_0, \eta_0)s^*(x_0 - \xi, y_0 - \eta)d\xi_0 d\eta_0 \leftrightarrow |s(K_x, K_y)|^2.$$

Импульсный отклик тонкой линзы. На рис. 2.12 изображена оптическая система, линейно преобразующая сигнал, заданный в плоскости (x_0, y_0), в выходной сигнал, формируемый в плоскости (x_1, y_1). В этой системе сигнал проходит через оптический элемент, расположенный в плоскости (x, y). В дальнейшем мы будем широко пользоваться функциями вида

$$\psi(x, y, p) = \exp\{(jk/2)p(x^2 + y^2)\}, \qquad (2.29)$$

где p — действительная или комплексная величина. Очевидно, что $\psi^*(x, y; p) = \psi(x, y; -p)$.

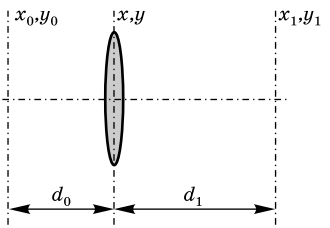


Рис. 2.12

Поместим во входную плоскость точечный источник, координаты которого (x_0, y_0). Поле точечного источника в плоскости, локализованной непосредственно перед оптическим элементом, в приближении Френеля описывается импульсным откликом слоя свободного пространства (2.20):

$$h(x, y; x_0, y_0) = (D_0/j\lambda)\psi(x - x_0; y - y_0; D_0), \quad (2.30)$$

где $D_0 = 1/d_0$. Пусть функция $\varphi(x, y)$ определяет амплитудное и фазовое пропускание исследуемого оптического элемента. Поле непосредственно за элементом можно описать выражением

$$E(x, y) = h(x, y; x_0, y_0)\varphi(x, y).$$

Импульсный отклик пространства между оптическим элементом и плоскостью анализа (x_1, y_1) представим с учетом (2.29) и (2.30) в виде

$$h(x_1, y_1; x, y) = (D_1/j\lambda)\psi(x_1 - x, y_1 - y; D_1),$$

где $D_1 = 1/d_1$. Поле в выходной плоскости определяется интегралом суперпозиции

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E(x, y)h(x_1, y_1; x, y)dxdy.$$

После подстановки $E(x, y)$ и выполнения преобразований с учетом (2.29) получаем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\left(\frac{D_0 D_1}{\lambda^2}\right)\psi(x_0, y_0; D_0)\psi(x_1, y_1; D_1)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, y)\psi(x, y; D_0 + D_1)\times$$
$$\times\exp\left\{-jkD_0\left[\left(x_0 + \frac{x_1}{\Gamma}\right)x + \left(y_0 + \frac{y_1}{\Gamma}\right)y\right]\right\}dxdy, \quad (2.31)$$

где $\Gamma = D_0/D_1$. Для установления явного вида функции $\varphi(x, y)$ необходима дополнительная информация, характеризующая свойства исследуемого оптического элемента. Таким свойством является его способность формировать изображение. Выберем в качестве выходной плос-

кости системы плоскость изображения входного сигнала. Пусть оптический элемент с неограниченной апертурой отображает с точностью до фазовых множителей $\psi(x_0, y_0; D_0)$ и $\psi(x_1, y_1; D_1)$ точку, заданную в предметной плоскости, в инвертированную относительно оптической оси точку на плоскости изображения. В этом случае можно записать

$$\psi^*(x_0, y_0; D_0)\psi^*(x_1, y_1; D_1)h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \\ = -\Gamma^{-1}\delta\left(x_0 + \frac{x_1}{\Gamma}, y_0 + \frac{y_1}{\Gamma}\right). \qquad (2.32)$$

Равенство (2.32) справедливо при $\varphi(x, y)\psi(x, y; D_0 + D_1) = 1$. Отсюда находим

$$\varphi(x, y) = \psi[x, y; -(D_0 + D_1)].$$

Следовательно, оптический элемент в рассматриваемой системе выполняет фазовое преобразование

$$\varphi(x, y) = \exp\left\{-\frac{jk}{2}\Phi(x^2 + y^2)\right\}, \qquad (2.33)$$

где Φ удовлетворяет условию

$$D_0 + D_1 - \Phi = 0. \qquad (2.34)$$

Выражение (2.34) является формулой Гаусса для тонкой линзы, оптическая сила которой $\Phi = 1/f$, где f — фокусное расстояние. Тогда Γ принимает смысл линейного коэффициента передачи (увеличения) оптической системы. Мы нашли, что тонкая линза осуществляет квадратичное фазовое преобразование сигнала. Исследуем свойства линзы как линейной системы, преобразующей комплексную амплитуду сигнала. Подставляя (2.33) в (2.31), получаем выражение для импульсного отклика тонкой линзы с неограниченной апертурой:

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\left(\frac{D_0 D_1}{\lambda^2}\right)\psi(x_0, y_0; D_0)\psi(x_1, y_1; D_1)\times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x, y; Q)\exp\{-jk[(D_0 x_0 + D_1 x_1)x + (D_0 y_0 + D_1 y_1)y]\}dxdy, \qquad (2.35)$$

где $Q = D_0 + D_1 - \Phi$. При $Q = 0$ входная и выходная плоскости являются оптически сопряженными. Импульсный отклик в этом случае

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \\ = -\Gamma^{-1}\psi(x_0, y_0; D_0)\psi(x_1, y_1; D_1)\delta\left[x_0 + \frac{x_1}{\Gamma}; y_0 + \frac{y_1}{\Gamma}\right]. \quad (2.36)$$

Пространственная инвариантность функции рассеяния (2.36) нарушается присутствием квадратичных фазовых множителей $\psi(x_0, y_0; D_0)$ и $\psi(x_1, y_1; D_1)$.

Как видно из (2.35), импульсный отклик тонкой линзы с неограниченной апертурой определяется через фурье-преобразование гауссовой функции $\psi(x, y; Q) = \exp\{(jk/2)Q(x^2 + y^2)\}$. Известно, (см. формулу (1.32)), что фурье-образ гауссовой функции имеет также гауссову форму:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\beta\xi^2\}\exp\{-jK\xi\}d\xi = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{K^2}{4\beta}\right\}.$$

Учитывая это, для импульсного отклика (2.35) получаем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{kD_0D_1}{2\pi jQ}\psi\left(x_0, y_0; D_0 - \frac{D_0^2}{Q}\right)\psi\left(x_1, y_1; D_1 - \frac{D_1^2}{Q}\right)\times \\ \times\exp\left\{-jk\frac{D_0D_1}{Q}(x_0x_1 + y_0y_1)\right\}.$$

Или, принимая во внимание (2.29),

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \\ = \frac{kD_0D_1}{2\pi jQ}\exp\left\{\left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q}\right)(x_0^2 + y_0^2)\right\}\exp\left\{\left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times \\ \times\exp\left\{-jk\frac{D_0D_1}{Q}(x_0x_1 + y_0y_1)\right\}. \quad (2.37)$$

Когерентный импульсный отклик линзы в общем случае не представляется в пространственно-инвариантной форме из-за присутствия квадратичных фазовых множителей. Если на входе системы сформирован сигнал $s(x_0, y_0)$, выходной сигнал согласно (2.27) равен

$$s(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0) h(x_1, y_1; x_0, y_0) dx_0 dy_0.$$

Обратимся снова к выражению (2.36), описывающему импульсный отклик при $Q = 0$, когда выходная плоскость совпадает с плоскостью изображения входного сигнала.

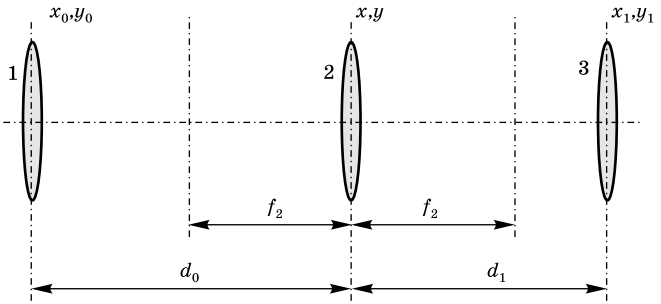


Рис. 2.13

Компенсация фазовых множителей $\psi(x_0, y_0; D_0)$ и $\psi(x_1, y_1; D_1)$ может быть осуществлена в оптической схеме, показанной на рис. 2.13. В этой схеме пространственная инвариантность достигается за счет помещения в плоскостях (x_0, y_0) и (x_1, y_1) компенсационных линз (*1* и *3*), фокусные расстояния которых выбираются соответственно равными $f_1 = 1/D_0$ и $f_3 = 1/D_1$. При этом импульсный отклик системы приводится к пространственно-инвариантному виду

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\Gamma^{-1}\delta\left(x_0 + \frac{x_1}{\partial}, y_0 + \frac{y_1}{\partial}\right). \qquad (2.38)$$

Таким образом линза в общем случае преобразует оптический сигнал как квадратичный фазовый фильтр.

2.4. ОПТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В зависимости от расположения плоскости, в которой локализован входной сигнал, и плоскости его регистрации линза может выполнять различные функции (см. рис. 2.14). При выполнении условия $D_1 = \Phi$ импульсный отклик (2.37) принимает вид

$$h(x_f, y_f; x_0, y_0) =$$
$$= \frac{k\Phi}{2\pi j}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\Phi - \frac{\Phi^2}{D_0}\right)(x_f^2 + y_f^2)\right\}\exp\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\}, \tag{2.39}$$

где $K_x = \frac{k}{f}x_f, K_y = \frac{k}{f}y_f$ — круговые пространственные частоты.

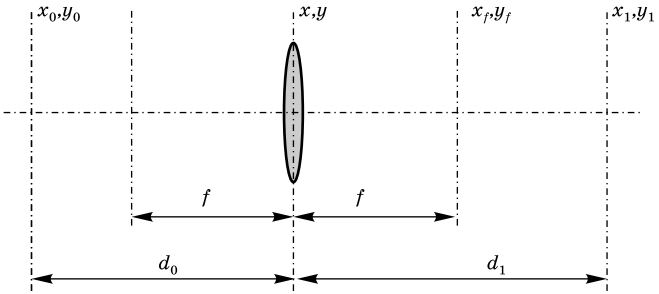


Рис. 2.14

Согласно (2.39), если выходной сигнал регистрируется в задней фокальной плоскости (рис. 2.15), он с точностью до квадратичного фазового множителя представляет собой фурье-образ входного сигнала. Из (2.27) с учетом (2.37) и (2.39) имеем

$$s(x_f, y_f) =$$
$$= \frac{k\Phi}{2\pi j}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\Phi - \frac{\Phi^2}{D_0}\right)(x_f^2 + y_f^2)\right\}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0)\exp\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\}dx_0 dy_0 =$$
$$= \frac{k\Phi}{2\pi j}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\Phi - \frac{\Phi^2}{D_0}\right)(x_f^2 + y_f^2)\right\}s(K_x, K_y). \tag{2.40}$$

Следовательно, в задней фокальной плоскости линзы формируется распределение комплексных амплитуд выходного сигнала, которое имеет вид фурье-образа входного сигнала. С точностью до квадратичного фазового множителя это распределение не зависит от положения

плоскости, в которой задается входной сигнал. Квадратичный фазовый множитель

$$\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\Phi-\frac{\Phi^2}{D_0}\right)(x_f^2+y_f^2)\right\}$$

обращается в единицу, если входной сигнал задан в передней фокальной плоскости линзы ($D_0 = \Phi$). В этом случае выходной сигнал является фурье-образом входного сигнала с точностью до постоянного множителя $k\Phi/2\pi j$:

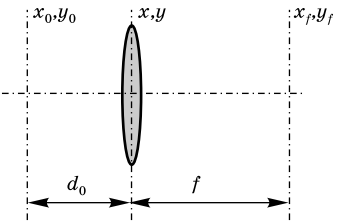


Рис. 2.15

$$s(x_f,y_f)=\frac{k\Phi}{2\pi j}\int\limits_{-\infty}^{\infty}s(x_0,y_0)\exp\{-j(K_x x_0+K_y y_0)\}dx_0dy_0=$$

$$=\frac{k\Phi}{2\pi j}s(K_x,K_y). \qquad (2.41)$$

При этом импульсный отклик имеет вид

$$h(x_f,y_f;x_0,y_0)=\frac{k\Phi}{2\pi j}\exp\{-j(K_x x_0+K_y y_0)\}.$$

Так как сигналы в передней и задней фокальных плоскостях линзы оказываются фурье-сопряженными, эти плоскости называются *фурье-плоскостями*. Если входной сигнал сформирован в произвольной плоскости, для получения точного фурье-преобразования в задней фокальной плоскости линзы следует поместить другую линзу, компенсирующую в (2.40) квадратичный фазовый множитель $\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\Phi-\frac{\Phi^2}{D_0}\right)(x_f^2+y_f^2)\right\}$. Фокусное расстояние компенсирующей линзы выбирается из условия

$$\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\Phi-\frac{\Phi^2}{D_0}\right)(x_f^2+y_f^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{k}{2f_k}(x_f^2+y_f^2)\right\}=1,$$

откуда $1/f_K = \Phi(1 - \Phi/D_0)$.

Рассмотрим ситуацию, когда входной сигнал задан в плоскости, расположенной вплотную к линзе (см. рис. 2.16). В этом случае ($D_0 \to \infty$) и импульсный отклик (2.39) принимает вид

$$h(x_f, y_f; x_0, y_0) = \frac{k\Phi}{2\pi j}\exp\left\{j\frac{k}{2f}(x_f^2 + y_f^2)\right\}\exp\{-j(K_x x + K_y y)\}. \tag{2.42}$$

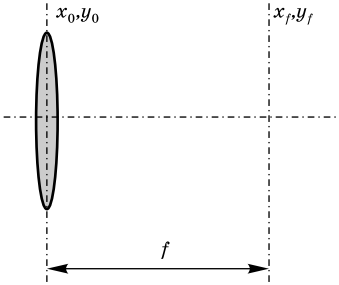


Рис. 2.16

Как видно из (2.42), линза выполняет фурье-преобразование сигнала с точностью до квадратичного фазового множителя

$$\exp\left\{j\frac{k}{2f}(x_f^2 + y_f^2)\right\}.$$

При этом существенно уменьшается влияние конечной апертуры линзы. Компенсация квадратичного фазового множителя

$$\exp\left\{j\frac{k}{2f}(x_f^2 + y_f^2)\right\}$$

осуществляется в схеме (рис. 2.16) при помещении в фокальной плоскости линзы, идентичной той, что выполняет фурье-преобразование.

Операция преобразования Фурье, реализуемая оптической системой, связывает координатную (x_0, y_0) и частотную (K_x, K_y) плоскости. Она выполняется как разложение пространственной структуры сложного светового сигнала на множество плоских волн, направляющие косинусы которых соответствуют пространственным частотам. Координатная и частотная плоскости в рассматриваемой оптической системе являются фурье-сопряженными.

Рассмотрим ситуацию, когда условие $D_1 = \Phi$ не выполняется. В этом случае импульсный отклик (2.37) описывает ядро интегрального преобразования Френеля. Выходной сигнал (2.27) с точностью до квадратичного множителя и постоянного комплексного коэффициента является френелевским образом входного сигнала, а импульсный отклик с учетом (2.29) принимает вид

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{D_0 D_1}{j\lambda Q}\exp\left\{-j\frac{kD_1\Phi}{2(D_1 - \Phi)}(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times$$
$$\times\exp\{j\gamma[x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2]\},$$

где

$$\gamma = \frac{k}{2}\left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q}\right), \quad \xi = \frac{D_1 x_1}{D_1 - \Phi}, \quad \eta = \frac{D_1 y_1}{D_1 - \Phi}.$$

Квадратичный фазовый множитель можно скомпенсировать, поместив в плоскость (x_1, y_1) тонкую линзу, выполняющую фазовое преобразование

$$\exp\left\{j\frac{kD_1\Phi}{(D_1 - \Phi)}(x_1^2 + y_1^2)\right\}.$$

Выходной сигнал в такой системе с точностью до постоянного комплексного множителя является френелевским образом входного сигнала:

$$s(\xi, \eta) = \frac{D_0 D_1}{j\lambda Q}\int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0)\exp\{j\gamma[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2]\}dx_0 dy_0.$$

Отсюда видно, что система с компенсирующей линзой пространственно-инвариантна. Фурье-спектр выходного сигнала определяется произведением фурье-спектра входного сигнала и когерентной передаточной функции, являющейся фурье-образом гауссовой комплексной функции. Согласно (1.32)

$$H(K_x, K_y) = \frac{D_0 D_1}{j\lambda Q}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{j\gamma[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2]\}\times$$
$$\times\exp\{-j[K_x(x_0 - \xi) + K_y(y_0 - \eta)]\}d(x_0 - \xi)d(y_0 - \eta) =$$
$$= \frac{\pi}{\gamma}\frac{D_0 D_1}{\lambda Q}\exp\left\{-j\frac{1}{4\gamma}(K_x^2 + K_y^2)\right\}.$$

Преобразование Френеля является обратимым. Повторное применение этого преобразования с комплексно-сопряженным ядром восстанавливает исходную функцию. Преобразование Френеля основано на явлении дифракции Френеля и имеет в оптике такое же фундаментальное значение, как и преобразование Фурье.

Рассмотрим особенности *обратного преобразования Фурье в оптике*. Обратимся к схеме, показанной на рис. 2.17. На схеме представлены последовательно расположенные вдоль оптической оси две идентичные линзы

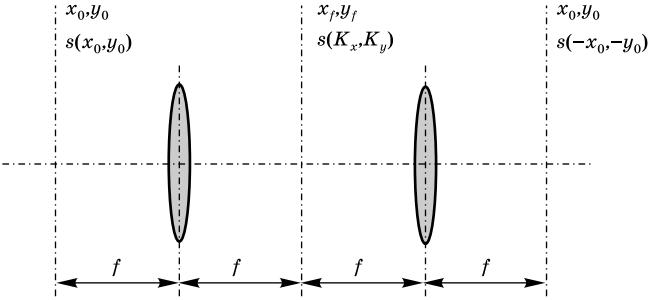


Рис. 2.17

с оптически сопряженными фурье-плоскостями. Входной сигнал $s(x_0, y_0)$ задан в передней фокальной плоскости первой линзы. Согласно (2.41) в задней фокальной плоскости формируется фурье-спектр сигнала

$$s(x_f, y_f) = \frac{k\Phi}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \int s(x_0, y_0) \exp\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\} dx_0 dy_0 =$$

$$= \frac{k\Phi}{2\pi j} s(K_x, K_y).$$

Вторая линза выполняет обратное фурье-преобразование сигнала $s(x_f, y_f)$, сформированного в ее передней фурье-плоскости:

$$\frac{k\Phi}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x_f, y_f) \exp\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\} dx_f dy_f =$$

$$= \frac{(k\Phi)^2}{(2\pi j)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) \exp\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\} dx_f dy_f =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) \exp\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\} dK_x dK_y =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int s(K_x, K_y) \exp\{j[K_x(-x_0) + K_y(-y_0)]\} dK_x dK_y =$$

$$= -s(-x_0, -y_0).$$

Отсюда следует, что обратное преобразование Фурье в оптике выполняется с инверсией координатных осей. В случае когда фокусные расстояния линз, выполняющих по-

следовательно прямое и обратное преобразования Фурье, не одинаковы, исходный сигнал восстанавливается в инвертированных осях с линейным коэффициентом увеличения Г, равным отношению фокусных расстояний:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int\int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y)\exp\left\{-j\left[K_x\left(-\frac{x_0}{\Gamma}\right)+K_y\left(-\frac{y_0}{\Gamma}\right)\right]\right\}dK_x dK_y =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma}s\left(-\frac{x_0}{\Gamma}, -\frac{y_0}{\Gamma}\right),$$

где $\Gamma = f_1/f_2$.

В разд. 1.4 обсуждались свойства одномерного преобразования Фурье. Поэтому, не повторяясь в доказательствах, приведем основные свойства оптического преобразования Фурье.

Преобразование масштабов. Сжатие сигнала ведет к растяжению его спектральной плотности в частотном пространстве. При этом амплитуда спектральной плотности уменьшается обратно пропорционально коэффициенту сжатия. Растяжение сигнала вызывает сжатие спектральной плотности в частотном пространстве и соответствующее увеличение ее амплитуды:

$$s(ax, by) \leftrightarrow |ab|^{-1}\, s\left(\frac{K_x}{a}, \frac{K_y}{b}\right).$$

Сжатие (растяжение) масштаба в координатной плоскости соответствует растяжению (сжатию) фурье-сопряженной (частотной) плоскости.

Теорема смещения. Смещение сигнала в координатной плоскости соответствует умножению его фурье-образа на фазовый множитель, являющийся линейной функцией частоты:

$$s(x-a, y-b) \leftrightarrow s(K_x, K_y)\exp\{-j(aK_x + bK_y)\},$$

а смещение фурье-спектра — умножению сигнала в координатной плоскости на фазовый множитель,

$$s(K_x - a, K_y - b) \leftrightarrow -s(-x, -y)\exp\{-j(ax + by)\}.$$

Изменение знака в фазовом множителе связано с тем, что при обратном фурье-преобразовании в оптической

системе происходит инверсия координатных осей. Инверсия координат в плоскости, где задан сигнал, соответствует инверсии пространственной частоты для фурье-образа сигнала:

$$s(-x, -y) \leftrightarrow s(-K_x, -K_y).$$

Операция комплексного сопряжения входного сигнала в координатной области отображается в частотной плоскости как комплексное сопряжение фурье-образа сигнала с одновременной инверсией пространственных частот:

$$s^*(x, y) \leftrightarrow -s^*(-K_x, -K_y).$$

Отсюда непосредственно следует, что действительной и четной функции в координатном пространстве соответствует действительный и четный фурье-образ. Свертке сигналов в координатной плоскости соответствует произведение фурье-спектров в частотном пространстве:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi, \eta) s_2(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta \leftrightarrow s_1(K_x, K_y) s_2(K_x, K_y).$$

Фурье-спектр произведения двух сигналов с точностью до множителя $1/4\pi^2$ равен свертке фурье-спектров этих сигналов:

$$s_1(x, y) s_2(x, y) \leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\xi, \eta) s_2(K_y - \xi, K_x - \eta) d\xi d\eta.$$

Дифференцирование сигнала соответствует умножению его фурье-спектра на комплексный множитель $(jK)^n$, где n — порядок производной:

$$\left\{ \frac{d^n}{dx^n} \frac{d^m}{dy^m} s(x, y) \right\} \leftrightarrow (jK_x)^n (jK_y)^m s(K_x, K_y).$$

Интегрирование оптического сигнала соответствует делению его фурье-спектра на комплексный множитель jK:

$$\left\{ \int_0^x \int_0^y s(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} \leftrightarrow \frac{1}{jK_x} \frac{1}{jK_y} s(K_x, K_y).$$

При дифференцировании подавляются спектральные компоненты на низких пространственных частотах и подчеркиваются высокочастотные компоненты, что ведет к оконтуриванию сигнала. Операция интегрирования соответствует подавлению высокочастотных спектральных компонент, в результате чего происходит сглаживание сигнала.

2.5. ОПТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ С ПЕРЕМЕННЫМ МАСШТАБОМ

Локализация входного оптического сигнала между линзой и плоскостью регистрации. Оптический фурье-анализатор, в котором входная плоскость (x_0, y_0) расположена между объективом и задней фурье-плоскостью, показан на рис. 2.18. Выходной сигнал регистрируется в задней фурье-плоскости. Линза освещается плоской волной. Оптическое поле, падающее на входную плоскость, определяется сверткой импульсного отклика непосредственно линзы с импульсным откликом слоя пространства толщиной $f - d$. В приближении Френеля и неограниченной апертуры можно записать

$$E(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda(f-d)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{j\frac{k}{2(f-d)}[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2]\right\} dxdy =$$

$$= \frac{1}{j\lambda(f-d)} \exp\left\{j\frac{k}{2(f-d)}(x_0^2+y_0^2)\right\} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{j\frac{kd}{2f(f-d)}(x^2+y^2)\right\} \exp\left\{-j\frac{k}{f-d}(x_0x+y_0y)\right\} dxdy =$$

$$= \frac{f}{d} \exp\left\{j\frac{k}{2(f-d)}(x_0^2+y_0^2)\right\} \exp\left\{-j\frac{kf}{2(f-d)d}(x_0^2+y_0^2)\right\} =$$

$$= \frac{f}{d} \exp\left\{-j\frac{k}{2d}(x_0^2+y_0^2)\right\}.$$

Учитывая полученное выражение для поля в плоскости (x_0, y_0) и импульсный отклик слоя пространства толщиной d, находим результирующий отклик

$$h(x_f, y_f; x_0, y_0) = \frac{f}{j\lambda d^2}\exp\left\{-j\frac{k}{2d}(x_0^2 + y_0^2)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2d}[(x_f - x_0)^2 + (y_f - y_0)^2]\right\} =$$

$$= \frac{f}{j\lambda d^2}\exp\left\{j\frac{k}{2d}(x_f^2 + y_f^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{k}{d}(x_f x_0 + y_f y_0)\right\}.$$

Введем обозначение $d/f = \xi$. Тогда

$$h(x_f, y_f; x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{j\lambda d\xi}\exp\left\{j\frac{k}{2f\xi}(x_f^2 + y_f^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{k}{f\xi}(x_f x_0 + y_f y_0)\right\}. \qquad (2.43)$$

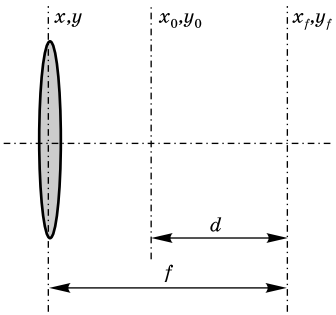


Рис. 2.18

Из (2.43) видно, что оптическая схема, показанная на рис. 2.18, выполняет фурье-преобразование сигнала с точностью до квадратичного фазового множителя

$$\exp\left\{j\frac{k}{2f\xi}(x_f^2 + y_f^2)\right\}.$$

Квадратичный фазовый множитель устраняется в плоскости (x_f, y_f) с помощью компенсирующей линзы, фокусное расстояние которой $f_k = f\xi$. Масштаб фурье-преобразования изменяется за счет выбора параметра $\xi = d/f$. Если $\xi = 1$, то $d = f$ и

$$h(x_f, y_f; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda f}\exp\left\{j\frac{k}{2f}(x_f^2 + y_f^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{k}{f}(x_f x_0 + y_f y_0)\right\}.$$

При необходимости квадратичный фазовый множитель можно устранить, если установить в выходной плоскости компенсирующую линзу, идентичную линзе, выполняющей фурье-преобразование. Поскольку $\xi \le 1$, выбор ξ определяет масштаб сжатия фурье-спектра сигнала в выходной плоскости:

$$h(x_f, y_f; x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{j\lambda d\xi}\exp\left\{j\frac{k}{f\xi}(x_f^2 + y_f^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{1}{\xi}(K_x x_0 + K_y y_0)\right\}.$$

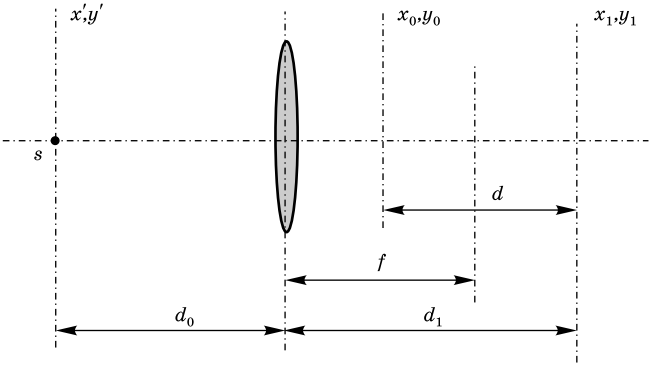


Рис. 2.19

Оптическая схема, позволяющая расширить предел изменения масштаба фурье-преобразования, представлена на рис. 2.19. Входная плоскость (x_0, y_0) расположена между линзой и плоскостью регистрации (x_1, y_1). Особенность схемы состоит в том, что поле в плоскости (x_0, y_0) формируется линзой от точечного источника $s = \delta(x', y')$, расположенного на расстоянии d_0 от линзы, в отличие от ситуации, где источник находится в бесконечности (см. рис. 2.18).

Поле в плоскости (x_0, y_0) определяется согласно (2.37) импульсным откликом

$$h(x_0, y_0; x', y') =$$
$$= \frac{D_0\tilde{D}}{j\lambda\tilde{Q}'}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q'}\right)(x'^2 + y'^2)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'}\right)(x_0^2 + y_0^2)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-j\frac{kD_0\tilde{D}}{Q'}(x_0x' + y_0y')\right\},$$

где

$$D_0 = 1/d_0;\ \tilde{D} = 1/(d_1 - d);\ Q' = D_0 + \tilde{D} - \Phi;\ \Phi = 1/f.$$

Поскольку источник расположен в точке $x' = 0$, $y' = 0$, получаем с точностью до постоянного коэффициента

$$h(x_0, y_0; 0, 0) = \exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'}\right)(x_0^2 + y_0^2)\right\}.$$

Отсюда находим выражение для результирующего импульсного отклика

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{j\lambda d} h(x_0, y_0; 0, 0) \exp\left\{ j \frac{k}{2d} [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \right\} =$$

$$= \frac{1}{j\lambda d} \exp\left\{ j \frac{k}{2} \left(\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ j \frac{k}{2d} [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \right\} =$$

$$= -\frac{1}{j\lambda d} \exp\left\{ j \frac{k}{2} \left(\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} + \frac{1}{d} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp\left\{ -j \frac{k}{2d} (x_1 x_0 + y_1 y) \right\}. \qquad (2.44)$$

Для того чтобы перейти в (2.44) от преобразования Френеля к преобразованию Фурье, необходимо условие

$$\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} + \frac{1}{d} = 0. \qquad (2.45)$$

Это условие выполняется, если $1/d_0 + 1/d_1 - 1/f = 0$, т. е. в выходной (частотной) плоскости должно формироваться изображение источника. В самом деле

$$Q' = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1 - d} - \frac{1}{f} =$$

$$= \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} - \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1 - d} = \frac{d}{d_1(d_1 - d)} = \frac{D_1 \tilde{D}}{D}.$$

После подстановки Q' в (2.45) получаем

$$\frac{1}{d_1 - d} - \frac{d_1(d_1 - d)}{d(d_1 - d)^2} + \frac{1}{d} = -\frac{1}{d} + \frac{1}{d} = 0.$$

Отсюда выражение (2.44) для результирующего импульсного отклика принимает вид

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) =$$

$$= -\frac{1}{j\lambda d} \exp\left\{ j \frac{k}{2d} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp\left\{ -j \frac{k}{d} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\} =$$

$$= \frac{1}{j\lambda d_1 \eta} \exp\left\{ j \frac{k}{2 d_1 \eta} (x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp\left\{ -j \frac{k}{d_1 \eta} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\},$$

где $\eta = d/d_1$– коэффициент, определяющий масштаб фурье-преобразования. Если перейти к коэффициенту $\xi = d/f$, как в выражении (2.43), получаем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \\ = \frac{A}{j\lambda f\xi}\exp\left\{j\frac{k}{2f\xi}(x_1^2 + y_1^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{k}{f\xi}(x_1x_0 + y_1y_0)\right\}. \quad (2.46)$$

Мы пришли к выражению, идентичному (2.43), однако теперь коэффициент ξ может принимать значения как меньше, так и больше единицы. Следовательно, схема, приведенная на рис. 2.19, позволяет выполнять преобразования Фурье не только со сжатием, но и с растяжением фурье-спектра, если за исходный пространственный масштаб выбрать значение, соответствующее $\xi = 1$.

Обратимся к более общему случаю, когда световое поле, освещающее входную плоскость, является сходящейся сферической (в параболическом приближении) волной, радиус кривизны волнового фронта которой R (рис. 2.20). Сигнал регистрируется в плоскости (x_1, y_1), расположенной на расстоянии d от входной плоскости (x_0, y_0). Запишем выражение для импульсного отклика

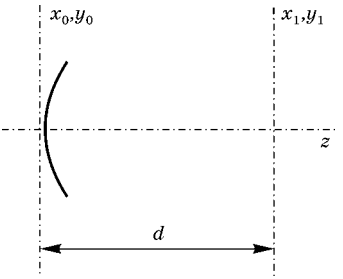


Рис. 2.20

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \\ = \frac{1}{j\lambda d}\exp\left\{-j\frac{k}{2R}(x_0^2 + y_0^2)\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2d}[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]\right\}.$$

После преобразований получим

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \\ = \frac{1}{j\lambda d}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R}\right)(x_0^2 + y_0^2)\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2d}(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times \\ \times\exp\left\{-j\frac{k}{2d}(x_1x_0 + y_1y_0)\right\}.$$

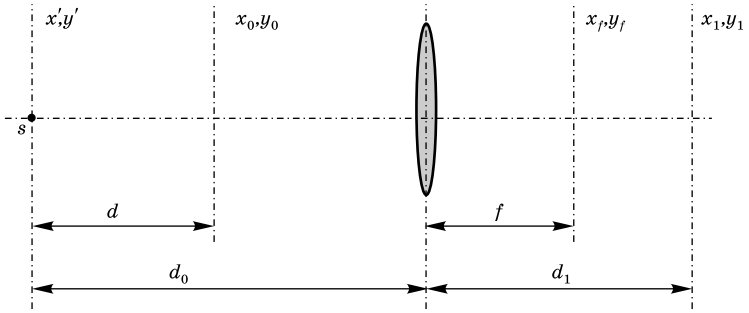


Рис. 2.21

Отсюда видно, что слой пространства толщиной d, входная плоскость которого освещена сферической сходящейся волной, выполняет преобразование Френеля, которое с точностью до квадратичного фазового множителя переходит в преобразование Фурье при условии $1/d - 1/R = 0$:

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \\ = \frac{1}{j\lambda R}\exp\left\{j\frac{k}{2R}(x_1^2 + y_1^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{k}{R}(x_1x_0 + y_1y_0)\right\}. \tag{2.47}$$

Как следует из (2.47), оптическое преобразование Фурье выполняется в сходящемся пучке, когда частотная плоскость проходит через центр кривизны волнового фронта светового поля, освещающего входную плоскость.

Рассмотрим преобразование Фурье с переменным масштабом в ситуации, когда входная плоскость (x_0, y_0) расположена между источником и линзой (рис. 2.21). В точке $x' = 0$, $y' = 0$ помещен точечный источник светового поля, освещающего входную плоскость (x_0, y_0). Источник расположен на расстоянии d от входной плоскости (x_0, y_0) и d_1 — от линзы. Выходной сигнал регистрируется в плоскости (x_1, y_1). Световое поле в плоскости (x_0, y_0), сформированное точечным источником s, описывается с точностью до постоянного коэффициента выражением

$$h(x_0, y_0; 0, 0) = \exp\left\{j\frac{k}{2d}(x_0^2 + y_0^2)\right\}.$$

С учетом этого импульсный отклик оптической системы, ограниченной плоскостями (x_0, y_0) и (x_1, y_1), имеет вид

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) =$$
$$= \frac{\tilde{D}D_1}{j\lambda\tilde{Q}} \exp\left\{ j\frac{k}{2d}(x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp\left\{ j\frac{k}{2}\left(D_1 - \frac{D_1^2}{\tilde{Q}} \right)(x_1^2 + y_1^2) \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ j\frac{k}{2}\left(\tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{\tilde{Q}} \right)(x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp\left\{ -j\frac{k\tilde{D}D_1}{\tilde{Q}}(x_1x_0 + y_1y_0) \right\},$$

где $\tilde{Q} = \tilde{D} + D_1 - \Phi; \tilde{D} = (d_0 - d)^{-1}; D_1 = 1/d_1; \Phi = 1/f.$

После преобразований получаем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{\tilde{D}D_1}{j\lambda\tilde{Q}} \exp\left\{ j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d} + \tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{\tilde{Q}} \right)(x_0^2 + y_0^2) \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ j\frac{kD_1}{2}\left(1 - \frac{D_1}{\tilde{Q}} \right)(x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp\left\{ -j\frac{k\tilde{D}D_1}{\tilde{Q}}(x_1x_0 + y_1y_0) \right\}.$$

Отсюда видно, что в схеме реализуется преобразование Френеля, которое переходит в преобразование Фурье, если выполняется условие

$$\frac{1}{d} + \tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} = 0 \qquad (2.48)$$

или

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} = 0. \qquad (2.49)$$

Действительно, с учетом (2.49) имеем

$$\tilde{Q} = \frac{1}{d_0 - d} - \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} - \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_0 - d} = \frac{d}{d_0(d_0 - d)}.$$

После подстановки этого выражения в (2.48) получаем

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d_0 - d} - \frac{d_0(d_0 - d)}{(d_0 - d)^2 d} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d} = 0.$$

Следовательно, в оптическом фурье-анализаторе частотная плоскость, согласно (2.49), является плоскостью изображения источника. С учетом (2.48) запишем

$$h(x_1y_1;x_0y_0)=$$
$$=\frac{d_0}{j\lambda d_1 d}\exp\left\{j\frac{k}{2d_1}B(x_1^2+y_1^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{kd_0}{d_1 d}(x_1x_0+y_1y_0)\right\},$$

где $B=1-\dfrac{d_0(d_0-d)}{d_1 d}$. Введя обозначение $d_1 d/d_0 f=\Gamma\xi$, где $\xi=d/f$, $\Gamma=d_1/d_0$ — линейный коэффициент увеличения при формировании изображения источника, получаем

$$h(x_1,y_1;x_0,y_0)=$$
$$=-\frac{1}{j\lambda f\Gamma\xi}\exp\left\{j\frac{k}{2d_1}B(x_1^2+y_1^2)\right\}\times\exp\left\{-j\frac{k}{f\Gamma\xi}(x_1x_0+y_1y_0)\right\}.$$

При $\Gamma=1$ имеем

$$h(x_1,y_1;x_0,y_0)=$$
$$=\frac{1}{j\lambda f\xi}\exp\left\{j\frac{k}{2d_1}B(x_1^2+y_1^2)\right\}\times\exp\left\{-j\frac{k}{f\xi}(x_1x_0+y_1y_0)\right\}.$$

Коэффициентом $\Gamma\xi$ определяется масштаб фурье-преобразования. При $\Gamma\xi<1$, $d_1 d/d_0 f<1$, $d_1/d_0<f/d$ происходит сжатие фурье-спектра. Если $\xi>1$, $d_1/d_0>f/d$ — фурье-спектр растягивается по сравнению с исходным масштабом. Если $\Gamma\xi=1$, то $d_1/d_0=f/d$.

2.6. ГАУССОВЫ ПУЧКИ И ИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ

Обратимся к рис. 2.22. Исследуем преобразование гауссова пучка в пространстве. Пусть в плоскости $z=0$ помещен транспарант, коэффициент пропускания которого описывается гауссовой функцией

$$\exp\left\{-\frac{1}{w_0^2}(x^2+y^2)\right\}. \quad (2.50)$$

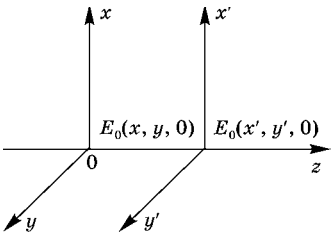


Рис. 2.22

На этот транспарант слева падает плоская световая волна, волновой вектор которой направлен по оси z. Найдем световое поле $E(x', y', z)$, сформированное в результате дифрак-

ции плоской волны на транспаранте (2.50). Дифрагированное поле определим в приближении Френеля, воспользовавшись подстановкой (2.50) в (2.22):

$$E(x',y',z)=\frac{1}{j\lambda z}\exp(ikz)\exp\left\{j\frac{k}{2z}(x'^2+y'^2)\right\}\times$$
$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{w_0^2}(x^2+y^2)\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-j\frac{k}{2z}(xx'+yy')\right\}dxdy=$$
$$=\frac{1}{j\lambda z}\exp(jkz)\exp\left\{j\frac{k}{2z}(x'^2+y'^2)\right\}\times$$
$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{zw_0^2}\left(z-j\frac{kw_0^2}{2}\right)(x^2+y^2)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-j\frac{k}{z}(x'x+y'y)\right\}dxdy=\frac{1}{j\lambda z}\exp(jkz)\exp\left\{j\frac{k}{2z}(x'^2+y'^2)\right\}\times$$
$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{q}{zw_0^2}(x^2+y^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{k}{z}(xx'+yy')\right\}dxdy. \tag{2.51}$$

Здесь $q=z-jR_0$, $R_0=\frac{1}{2}kw_0^2$ — конфокальный параметр. Интеграл в (2.51) представляет собой двумерное преобразование Фурье от гауссовой функции:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{q}{zw_0^2}(x^2+y^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{k}{z}(xx'+yy')\right\}dxdy=$$
$$=\frac{\pi zw_0^2}{q}\exp\left\{-\frac{zk^2w_0^2}{4z^2q}(x'^2+y'^2)\right\}=\frac{\pi zw_0^2}{q}\exp\left\{-\frac{kR_0}{2zq}(x'^2+y'^2)\right\}.$$

Подставляя результат интегрирования в (2.51), находим:

$$s(x',y',z)=$$
$$=\frac{\pi w_0^2}{j\lambda q}\exp(jkz)\exp\left\{j\frac{k}{2z}(x'^2+y'^2)\right\}\exp\left\{-\frac{kR_0}{2zq}(x'^2+y'^2)\right\}.$$

Переобозначим в полученном выражении переменные $x'\to x$, $y'\to y$ и выполним элементарные преобразования:

$$s(x,y,z)=\frac{\pi w_0^1}{j\lambda q}\exp(jkz)\exp\left\{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right\}\exp\left\{-\frac{kR_0}{2zq}(x^2+y^2)\right\}=$$

$$=\frac{R_0}{jq}\exp(jkz)\exp\left\{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right\}\exp\left\{-\frac{kR_0(z+jR_0)}{2z(z^2+R_0^2)}(x^2+y^2)\right\}.$$

Разделяя в аргументе экспоненциального множителя действительные и мнимые части, получаем:

$$s(x,y,z)=\frac{R_0}{jq}\exp(jkz)\exp\left\{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{kR_0}{2(z^2+R_0^2)}(x^2+y^2)\right\}\exp\left\{-\frac{jkR_0^2}{2z(z^2+R_0^2)}(x^2+y^2)\right\}=$$

$$=\frac{R_0}{jq}\exp(jkz)\exp\left\{-\frac{k}{2R_0\left(1+\frac{z^2}{R_0^2}\right)}(x^2+y^2)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2z}\left(\left[1-\frac{R_0^2}{z^2+R_0^2}\right](x^2+y^2)\right)\right\}=$$

$$=\frac{w_0}{w}\exp[j(kz-\varphi)]\exp\left\{-\frac{1}{w^2}(x^2+y^2)\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2R}(x^2+y^2)\right\}, \tag{2.52}$$

где

$$w^2=\frac{2R_0}{k}\left(1+\frac{z^2}{R_0^2}\right)=w_0^2\left(1+\frac{z^2}{R_0^2}\right);$$

$$R=z\left(1+\frac{R_0^2}{z^2}\right);\ \mathrm{tg}\,\varphi=\frac{z}{R_0}.$$

Выражения (2.52) и (2.25) совпадают. Они описывают гауссов пучок, распространяющийся в направлении z. Из (2.52) следует, что гауссов пучок с радиусом перетяжки w_0 при распространении по оси z асимптотически ограничивается углом расходимости

$$\theta\approx\frac{w}{z}\approx\frac{\lambda}{\pi w_0}.$$

Оценим фазовую скорость гауссова пучка. Восстановим в выражении (2.52) экспоненциальный множитель $\exp(jkz)$:

$$A_{00}(x,y,z)\exp(jkz).$$

Выделим в выражении (2.52) компоненту фазы, зависящую от z: $\exp[j(kz - \varphi)] = \exp(j\xi)$. Отсюда определим эффективное волновое число

$$k_0 = \frac{d\xi}{dz} = \frac{d}{dz}(kz - \varphi) = \frac{d}{dz}\left[kz - \operatorname{arctg}\frac{z}{R_0}\right] = k - \frac{R_0}{R_0^2 + z^2}.$$

Следовательно,

$$k_0 = \frac{\omega}{v} = k - \frac{R_0}{R_0^2 + z^2} = \frac{\omega}{c} - \frac{R_0}{R_0^2 + z^2} < \frac{\omega}{c}.$$

Это означает, что фазовая скорость гауссова пучка превышает скорость света

$$v = \frac{\omega}{k_0} > c.$$

В плоскости перетяжки ($z = 0$)

$$k_0 = k - \frac{1}{R_0}.$$

Легко показать, что волновое число k_0 равно компоненте волнового числа k_z. Действительно, гауссов пучок образован суперпозицией плоских волн, формирующей пучок с асимптотически ограниченным поперечным размером. Типичные значения компонент x и y волнового вектора таких волн

$$k_x = k_y \approx \frac{\sqrt{2}}{w_0}.$$

Из соотношения $k_z^2 + k_x^2 + k_y^2 = k^2$ следует

$$k_z \approx (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k} \approx k - \frac{1}{R_0},$$

что соответствует величине эффективного волнового числа.

Преобразование гауссова пучка. Мы установили, что гауссов пучок полностью характеризуется комплексным параметром $q = z - jR_0$. Вещественная часть z есть расстояние от рассматриваемого сечения пучка до плоскости локализации перетяжки. Мнимая часть — конфокальный параметр. Вещественная часть величины, обратной параметру q, есть кривизна волнового фронта,

$$q^{-1} = \frac{1}{z - jR_0} = \frac{z + jR_0}{z^2 + R_0^2} = \frac{1}{R} + j\frac{\lambda}{\pi w^2},$$

где w и R определяются выражениями, идентичными ранее полученным (2.26) и (2.52):

$$w = w_0\left(1+\frac{z^2}{R_0^2}\right)^{1/2}, \quad R = z\left(1+\frac{R_0^2}{z^2}\right).$$

Для того чтобы знать, как трансформируется гауссов пучок, достаточно выяснить, как преобразуется параметр q.

Пример 2.4. Область свободного пространства имеет толщину d (рис. 2.23).

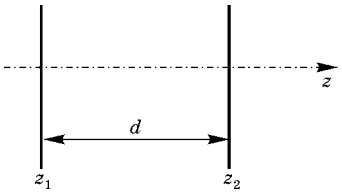


Рис. 2.23

Пусть в плоскости z_1 параметр q равен $q_1 = z_1 - jR_0$. Тогда в плоскости z_2 на расстоянии d от плоскости z_1 параметр q становится равным $q_2 = z_2 - jR_0 = z_1 + d - jR_0$, т. е. $q_2 = q_1 + d$. Отсюда выводятся все формулы (2.52) преобразования гауссова пучка при распространении в свободном пространстве для $z = z_1 + d = z_2$. Распространяясь в свободном пространстве, гауссов пучок сохраняет форму, изменяя фазу, амплитуду и кривизну волнового фронта.

Запишем выражения (2.52) в виде

$$\frac{kw^2}{2} = R_0\left(1+\frac{z^2}{R_0^2}\right), \quad R = \frac{R_0^2}{z}\left(1+\frac{z^2}{R_0^2}\right).$$

Разделив первое равенство на второе, получаем

$$\frac{2Rz}{kw^2R_0} = 1.$$

Следовательно, при распространении гауссова пучка в пространстве величина $2Rz/kw^2R_0$ инвариантна и равна единице. Хотя при малых z френелевское приближение не является справедливым, формулы (2.52) правильно описывают параметры гауссова пучка и в этом случае $w = w_0(1+z^2/2R_0^2)$, $R = R_0^2/z$, $\lim\limits_{z\to 0} w = w_0$, $\lim\limits_{z\to 0} R = \infty$. В плоскости $z = 0$ полуширина гауссова пучка имеет минимальную величину и равна радиусу перетяжки, а волновой фронт — плоский. Как следует из (2.52), на больших рас-

стояниях волновой фронт также стремится к плоскому: $\lim\limits_{z\to\pm\infty} R=\infty$.

Определим положение плоскостей, в которых радиус волнового фронта имеет минимальное значение, и найдем величину минимального радиуса из условия экстремума:

$$R'=\frac{d}{dz}\left\{z\left(1+\frac{R_0^2}{z^2}\right)\right\}=1-\frac{R_0^2}{z^2}=0,\quad z=\pm R_0.$$

Отсюда $R_{\min}=2R_0$. Следовательно, минимальный радиус кривизны волнового фронта пучка равен удвоенному конфокальному параметру. Гауссов пучок симметричен относительно плоскости перетяжки. На расстояниях $z=\pm R_0$ от плоскости перетяжки радиус кривизны волнового фронта имеет минимальное значение. Радиус соответствующих сечений пучка составляет

$$w(R_0)=\sqrt{2}w_0.$$

Угол расходимости гауссова пучка находится по формуле

$$2\theta(z)=2\operatorname{arctg}\frac{w}{R}=2\operatorname{arctg}\left[\frac{w_0 z}{R_0^2(1+z^2/R_0^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

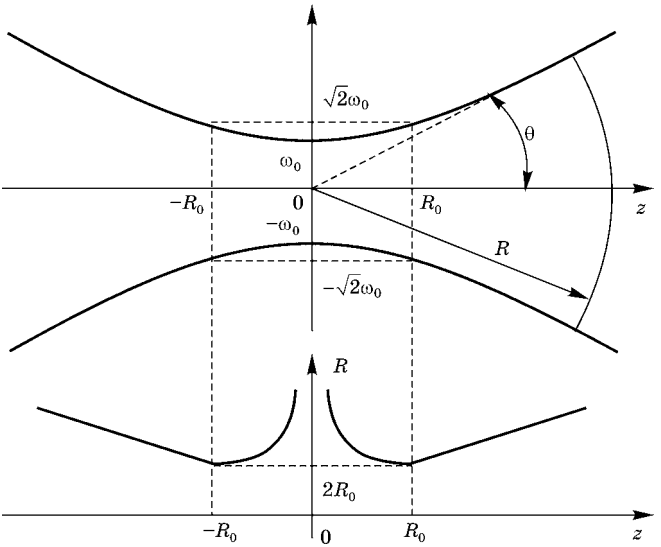


Рис. 2.24

Для фраунгоферовой зоны можно асимптотически определить половину угла расходимости гауссова пучка

$$\theta \approx \lim_{z\to\infty} \operatorname{arctg}\frac{w_0}{R_0} \approx \frac{\lambda}{\pi w_0}. \qquad (2.53)$$

Зависимость основных параметров гауссова пучка от z показана на рис. 2.24. Угол расходимости пучка $\theta = \lambda/\pi w_0$ оказывается меньше угла дифракции λ/w_0 плоской волны на отверстии радиуса w_0. Минимальная расходимость — отличительное свойство гауссова пучка, который является хорошей моделью для описания распределения поля в излучении лазера.

Пример 2.5. Тонкая линза с фокусным расстоянием f (рис. 2.25). Пусть гауссов пучок (2.52)

$$\frac{w_0}{w}\exp[j(kz-\varphi)]\left[-\frac{1}{w^2}(x^2+y^2)\right]\exp\left[j\frac{k}{2R}(x^2+y^2)\right]$$

падает слева на тонкую линзу. После прохождения линзы фаза φ светового пучка изменится:

$$j(kz-\varphi)+j\frac{k}{2R}(x^2+y^2)-j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)=j(kz-\varphi)+j\frac{k}{2R'}(x^2+y^2).$$

Здесь учтено, что линза вносит квадратичный фазовый сдвиг $-j\frac{k}{2f}(x^2+y^2)$ и, следовательно, изменяет кривизну волнового фронта пучка:

$$\frac{1}{R'}=\frac{1}{R}-\frac{1}{f}.$$

С другой стороны, для параметра q имеем

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{R}+j\frac{\lambda}{\pi w^2}.$$

Отсюда получаем выражение для преобразования параметра q линзой

$$\frac{1}{q'}=\frac{1}{R}-\frac{1}{f}+j\frac{\lambda}{\pi w^2}=\frac{1}{q}-\frac{1}{f}$$

или

$$q'=\frac{qf}{f-q}=\frac{q}{1-\frac{q}{f}}. \qquad (2.54)$$

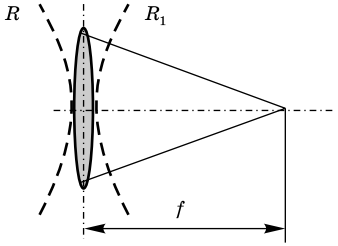


Рис. 2.25

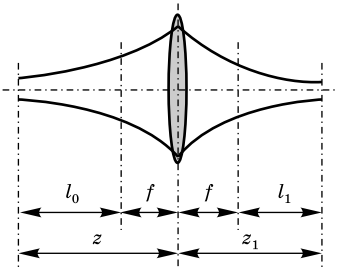


Рис. 2.26

Пусть z — расстояние между перетяжкой гауссова пучка и линзой (рис. 2.26). Тогда параметр q, характеризующий распространение гауссова пучка на пространственном интервале z, равен

$$q = z - jR_0,$$

где R_0 — конфокальный параметр. Подставляя в (2.54) значение $q = z - jR_0$, для параметра q' гауссова пучка, преобразованного линзой, получим

$$q' = \frac{(z - jR_0)f}{f - z + jR_0} = \frac{f(z - jR_0)(f - z - jR_0)}{(f - z)^2 + R_0^2}.$$

Введем обозначение $l_0 = z - f$. Поскольку l_0 — расстояние между перетяжкой и передним фокусом линзы, запишем

$$q' = -\frac{f(z - jR_0)(l_0 + jR_0)}{l_0^2 + R_0^2} = -\frac{f(l_0 + f - jR_0)(l_0 + jR_0)}{l_0^2 + R_0^2} =$$

$$= -f\frac{l_0^2 + R_0^2 + f(l_0 + jR_0)}{l_0^2 + R_0^2} = -f - \frac{f^2 l_0}{l_0^2 + R_0^2} - j\frac{f^2 R_0}{l_0^2 + R_0^2} = -z_1 - jR_0.$$

Здесь $z_1 = f + l_1$ — расстояние между линзой и перетяжкой преобразованного линзой гауссова пучка, конфокальный параметр которого равен R_{01}. Знак указывает направление отсчета относительно линзы. Отсюда следуют выражения для конфокального параметра выходного пучка и расстояния между задним фокусом линзы и перетяжкой:

$$R_{01} = \frac{f^2 R_0}{l_0^2 + R_0^2}, \quad l_1 = \frac{f^2 l_0}{l_0^2 + R_0^2}, \tag{2.55}$$

а также полезные соотношения

$$\frac{R_{01}}{R_0} = \frac{l_1}{l_0}, \quad \frac{w_{01}^2}{w_0^2} = l_1 / l_0.$$

При $R_0 \to 0$ перетяжка трансформируется в точечный источник, а соотношения (2.55) принимают вид $l_1 l_0 = f^2$. В этом случае входная и выходная плоскости оказываются оптически сопряженными.

Пример 2.6. Найти преобразование гауссова пучка зеркалом радиуса R_m. Отражение гауссова пучка от зеркала с радиусом кривизны R_m эквивалентно преобразованию линзой с фокусным расстоянием $f_m = (1/2)R_m$. Следовательно, для параметра q' отраженного пучка имеем $1/q' = 1/q - 2/R_m$.

2.7. ОПТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ С ЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Рассмотрим ситуацию, когда произвольный источник светового поля, освещающего входную плоскость (x_0, y_0) в схеме на рис. 2.27, расположен в плоскости (x', y'). Для импульсного отклика оптической системы, входная плоскость которой (x_0, y_0), а выходная (x_1, y_1), имеем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda d} \exp\left\{ j \frac{k}{2d} [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \right\} \times$$

$$\times \int\int_{-\infty}^{\infty} p(x', y') h(x_0, y_0; x', y') dx' dy'. \qquad (2.56)$$

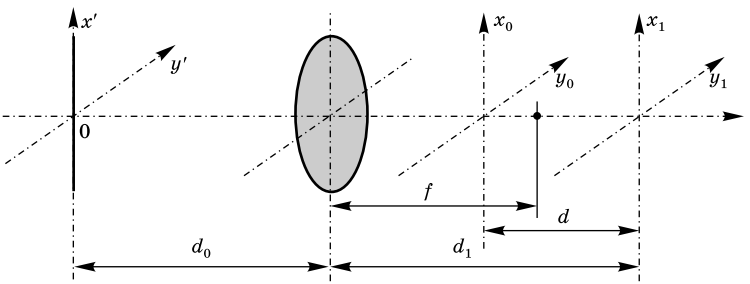


Рис. 2.27

Здесь $h(x_0, y_0; x', y')$ определяется выражением (2.37), функция $p(x', y')$ описывает форму источника. Пусть источник — линейный, ориентированный вдоль оси x', $p(x', y') = \delta(y')$. После подстановки $p(x', y') = \delta(y')$ и $h(x_0, y_0; x', y')$ из (2.37) в (2.56) получаем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) =$$
$$= \frac{1}{j\lambda d}\frac{D_0\tilde{D}}{j\lambda Q'}\exp\left\{j\frac{k}{2d}[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\tilde{D}-\frac{\tilde{D}^2}{Q'}\right)(x_0^2+y_0^2)\right\}\int\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y')\exp\{j\beta(x'^2+y'^2)\}\times$$
$$\times\exp\left\{-j\frac{kD_0\tilde{D}}{Q'}(x_0x'+y_0y')\right\}dx'dy' = -\frac{D_0\tilde{D}}{\lambda^2 dQ'}\times$$
$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2d}[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\tilde{D}-\frac{\tilde{D}^2}{Q'}\right)(x_0^2+y_0^2)\right\}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp(j\beta x'^2)\exp\left\{-j\frac{kD_0\tilde{D}}{Q'}x_0x'\right\}dx', \tag{2.57}$$

где

$$\beta = \frac{k}{2}\left(D_0-\frac{D_0^2}{Q'}\right),$$
$$Q' = D_0+\tilde{D}-\Phi,\quad \tilde{D} = \frac{1}{d_1-d}.$$

Интегрируя по y', мы воспользовались фильтрующим свойством δ-функции. Интеграл по x' представляет собой фурье-преобразование гауссовой функции. Выполняя интегрирование по x', с точностью до комплексного множителя находим

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) \approx \exp\left\{j\frac{k}{2d}[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\tilde{D}-\frac{\tilde{D}^2}{Q'}\right)(x_0^2+y_0^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{kD_0\tilde{D}^2}{2Q'(Q'-D_0)}x_0^2\right\}. \tag{2.58}$$

После элементарных преобразований приводим выражение (2.58) к виду

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) \approx \exp\left\{ j\frac{k}{2d}(x_1^2 + y_1^2) \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ j\frac{k}{2}\left[\frac{1}{d} + \tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'}\left(1 + \frac{D_0}{\tilde{D} - \Phi} \right) \right] x_0^2 \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ j\frac{k}{2}\left[\frac{1}{d} + \tilde{D} - \frac{\tilde{D}^2}{Q'} \right] y_0^2 \right\} \exp\left\{ -j\frac{k}{d}(x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}. \tag{2.59}$$

Из (2.59) видно, что схема (рис. 2.27) выполняет в общем случае преобразование Френеля.

Как показано в разд. 2.5, если выходная плоскость $(x_1,\ y_1)$ является плоскостью изображения источника, $D_0 + D_1 - \Phi = 0$ и зависящий от y_0 квадратичный фазовый множитель в (2.59) обращается в единицу (2.45). В этом случае выражение (2.59) принимает вид:

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) \approx \exp\left\{ j\frac{k}{2d}(x_1^2 + y_1^2) \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ -j\frac{kD_0\gamma}{2} x_0^2 \right\} \exp\left\{ -j\frac{k}{d}(x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}. \tag{2.60}$$

Следовательно, в выходной плоскости $(x_1,\ y_1)$, оптически сопряженной с плоскостью $(x',\ y')$, выполняется фурье-преобразование по оси y_1 и преобразование Френеля по оси x_1. Делая в (2.60) подстановку

$$\gamma = \frac{\tilde{D}^2}{Q'(\tilde{D} - \Phi)} = \frac{d_1 f}{d(f + d - d_1)},$$

окончательно получаем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) \approx$$
$$\approx \exp\left\{ j\frac{k}{2d}(x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp\left\{ -j\frac{k d_1 f x_0^2}{d d_0 (f + d - d_1)} \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ -j\frac{k}{f\xi}(x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\}, \tag{2.61}$$

где $\xi = \dfrac{d}{f}$. Отсюда видно, что фурье-преобразование по оси y_1 в анализируемой схеме реализуется с масштабным коэффициентом $\xi = \dfrac{d}{f}$. Изображение линейного источника, формируемое вдоль оси x_1, делит частотное пространство

в фурье-плоскости на область положительных и область отрицательных частот.

Определим положение выходной плоскости, в которой формируется x-составляющая фурье-спектра. Позиционирование этой плоскости следует из условия, при котором зависящий от x_0^2 квадратичный фазовый множитель в (2.59) обращается в единицу. Это условие следует из равенства

$$\frac{1}{d}+\tilde{D}-\frac{\tilde{D}^2}{Q'}\left(1+\frac{D_0}{\tilde{D}-\Phi}\right)=0\,,$$

или

$$\frac{1}{d}+\tilde{D}-\frac{\tilde{D}^2}{\tilde{D}-\Phi}=0,$$

откуда получаем

$$f=d_1. \tag{2.62}$$

Выполняя с учетом (2.62) элементарные преобразования в (2.59), находим

$$h(x_1,y_1;x_0,y_0)\approx\exp\left\{j\frac{k}{2d}(x_1^2+y_1^2)\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2d_0}\gamma y_0^2\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-j\frac{k}{f\xi}(x_1x_0+y_1y_0)\right\}. \tag{2.63}$$

Как видно из (2.63), при выполнении условий (2.62) анализируемая оптическая схема осуществляет преобразование Фурье по оси x и преобразование Френеля по оси y.

При совмещении плоскости, в которой локализован линейный источник, с передней фокальной плоскостью линзы ($d_0=f$), выражение (2.63) для импульсного отклика преобразуется к следующему виду

$$h(x_1,y_1;x_0,y_0)\approx\exp\left\{j\frac{k}{2d}(x_1^2+y_1^2)\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2d\xi}\gamma y_0^2\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-j\frac{k}{f\xi}(x_1x_0+y_1y_0)\right\}. \tag{2.64}$$

Из (2.63) и (2.64) следует, что в выходной плоскости формируется x-компонента фурье-спектра сигнала, локализованного в плоскости (x_0, y_0) с масштабным коэффициентом ξ. В этом случае фурье-спектр линейного источника, в приближении бесконечной апертуры линзы пропорциональный

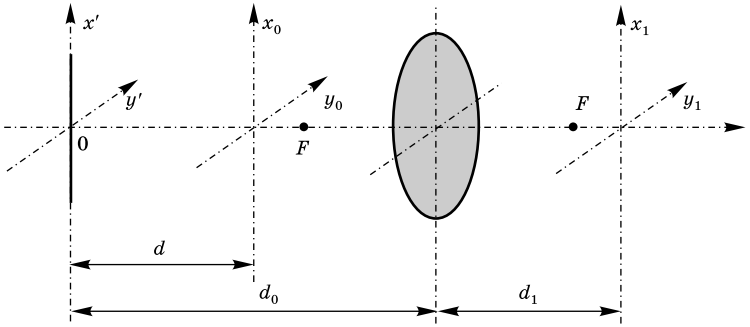


Рис. 2.28

дельта-функции $\mathrm{d}(x_1)$, делит частотное пространство в плоскости (x_1, y_1) на два полупространства, соответствующие положительным и отрицательным x-компонентам частоты.

Обратимся к схеме, показанной на рис. 2.28. Пусть в плоскости (x', y') помещен источник света. Световое поле в плоскости (x_0, y_0), сформированное этим источником, определяется импульсным откликом слоя пространства толщиной d и структурной функцией источника $p(x', y')$:

$$h(x_0, y_0; x', y') =$$

$$= \frac{1}{j\lambda d} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int p(x', y') \exp\left\{ j \frac{k}{2d} [(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2] \right\} dx' dy'. \tag{2.65}$$

Импульсный отклик оптической системы (рис. 2.28) с учетом освещающего светового поля (2.65) и в пренебрежении конечной апертурой фурье-объектива запишем в виде

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda d} \frac{\widehat{D} D_1}{j\lambda \widehat{Q}} \exp\left\{ j \frac{k}{2} \left(D_1 - \frac{D_1^2}{\widehat{Q}} \right) (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ j \frac{k}{2} \left(\widehat{D} - \frac{\widehat{D}^2}{Q'} \right) (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ -j \frac{k \widehat{D} D_1}{\widehat{Q}} (x_1 x_0 + y_1 y_0) \right\} \int\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x', y') \times$$

$$\times \exp\left\{ j \frac{k}{2d} [(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2] \right\} dx' dy', \tag{2.66}$$

где $\hat{Q} = \hat{D} + D_1 - \Phi$; $\hat{D} = \dfrac{1}{d_0 - d}$; $D_1 = \dfrac{1}{d_1}$; $\Phi = \dfrac{1}{f}$. Для линейного источника, ориентированного вдоль оси x', структурная функция $p(x', y') = \delta(y')$. Тогда интегрирование по y' в выражении (2.66) дает

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\frac{\tilde{D}D_1}{\lambda^2 dQ'}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(D_1 - \frac{D_1^2}{\hat{Q}}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\hat{D} - \frac{\hat{D}^2}{\hat{Q}}\right)(x_0^2 + y_0^2)\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2d}(x_0^2 + y_0^2)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-j\frac{k\hat{D}D_1}{\hat{Q}}(x_1x_0 + y_1y_0)\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j\frac{k}{2d}x'^2\right)\exp\left(-j\frac{k}{d}x_0x'\right)dx'.$$

После интегрирования по x' получаем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\frac{\hat{D}D_1}{j\lambda\hat{Q}}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q'}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\hat{D} - \frac{\hat{D}^2}{\hat{Q}}\right)x_0^2\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(\hat{D} - \frac{\hat{D}^2}{\hat{Q}} + \frac{1}{d}\right)y_0^2\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-j\frac{k\hat{D}D_1}{\hat{Q}}(x_1x_0 + y_1y_0)\right\}. \qquad (2.67)$$

При выполнении условия $\hat{D} - \dfrac{\hat{D}^2}{\hat{Q}} + \dfrac{1}{d} = 0$, или, что то же самое, при $D_0 + D_1 - \Phi = 0$ импульсный отклик (2.67) преобразуется к виду

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\frac{1}{j\lambda f\Gamma\xi}\exp\left\{j\frac{kD_1(\hat{D} - \Phi)}{2(\hat{D} - D_0)}(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-j\frac{k}{2d}x_0^2\right\}\exp\left\{-j\frac{k}{f\Gamma\xi}(x_1x_0 + y_1y_0)\right\}, \qquad (2.68)$$

где $\xi = \dfrac{d}{f}$; $\Gamma = \dfrac{d_1}{d_0}$ — коэффициент увеличения. Из (2.68) видно, что плоскость изображения линейного источника в схеме на рис. 2.28 является фурье-плоскостью, где реализуется одномерное фурье-преобразование по оси y и преобразование Френеля по оси x. Масштаб фурье-преобразования может изменяться выбором параметров Γ и ξ.

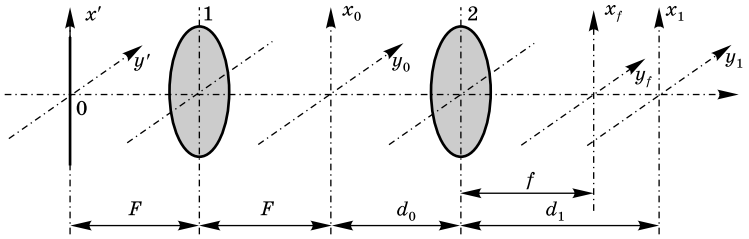


Рис. 2.29

Условием выполнения одномерного фурье-преобразования по оси x_1, как следует из (2.67), является $\widehat{D}-\dfrac{\widehat{D}^2}{\widehat{Q}}=0$, которое после элементарных преобразований трансформируется в равенство $D_1=\Phi$. В этом случае выражение для импульсного отклика принимает вид

$$h(x_1,y_1;x_0,y_0)=\frac{1}{j\lambda f}\exp\left\{j\frac{k}{2}\Phi\left(1-\frac{\Phi}{\widehat{D}}\right)(x_1^2+y_1^2)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2d}y_0^2\right\}\exp\left\{-j\frac{k}{f}(x_1x_0+y_1y_0)\right\}. \qquad (2.69)$$

Как следует из (2.69), в этом случае выполняется фурье-преобразование по оси x_0 и преобразование Френеля по оси y_0.

Обратимся к оптической схеме, показанной на рис. 2.29. Входная плоскость (x_0, y_0) освещается световым полем от линейного источника, ориентированного вдоль оси x' в передней фурье-плоскости (x', y') объектива *1*. Задняя фурье-плоскость этого объектива совмещена с плоскостью(x_0, y_0).

Определим импульсный отклик оптической схемы (рис. 2.29) с учетом структуры светового поля, освещающего входную плоскость (x_0, y_0):

$$h(x_1,y_1;x_0,y_0)=\frac{D_0D_1}{j\lambda Q}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(D_1-\frac{D_1^2}{Q}\right)(x_1^2+y_1^2)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{jk\left(D_0-\frac{D_0^2}{Q}\right)(x_0^2+y_0^2)\right\}\exp\left\{-j\frac{k}{2}\left(\frac{D_0D_1}{Q}\right)(x_0x_1+y_0y_1)\right\}\times$$
$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1',y_1')h(x',y';x_0,y_0)dx'dy', \qquad (2.70)$$

где $h(x_0, y_0; x', y') = \frac{1}{j\lambda F}\exp\left\{-j\frac{k}{F}(x'x_0 + y'y_0)\right\}$, $p(x'_1, y'_1)$ — структурная функция, описывающая источник в плоскости (x', y'). Для линейного источника, ориентированного вдоль оси x', $p(x'_1, y'_1) = \delta(y')$. Делая подстановку $h(x_0, y_0; x', y')$ и $p(x', y') = \delta(y')$ в (2.70) и выполняя интегрирование по y', получаем

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\frac{D_0 D_1}{\lambda^2 FQ}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q}\right)(x_0^2 + y_0^2)\right\}\exp\left\{-jk\frac{D_0 D_1}{Q}(x_0 x_1 + y_0 y_1)\right\}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-j\frac{k}{F}x'x_0\right\}dx'. \tag{2.71}$$

Учитывая, что $\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-j\frac{k}{F}x'x_0\right\}dx' = \lambda F\delta(x_0)$, и подставляя это значение интеграла в (2.71), находим

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = -\frac{D_0 D_1}{\lambda Q}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q}\right)(x_0^2 + y_0^2)\right\}\exp\left\{-jk\frac{D_0 D_1}{Q}(x_0 x_1 + y_0 y_1)\right\}\delta(x_0). \tag{2.72}$$

Пусть входной сигнал в виде транспаранта описывается функцией $s(x_0, y_0)$. Оптическая схема с импульсным откликом (2.72) преобразует этот сигнал в следующий

$$s(x_1, y_1) = -\frac{D_0 D_1}{\lambda Q}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times$$
$$\times\int\int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, y_0)\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q}\right)(x_0^2 + y_0^2)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-jk\frac{D_0 D_1}{Q}(x_0 x_1 + y_0 y_1)\right\}\times\delta(x_0)dx_0 dy_0 =$$
$$= -\frac{D_0 D_1}{\lambda Q}\exp\left\{j\frac{k}{2}\left(D_1 - \frac{D_1^2}{Q}\right)(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times \tag{2.73}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty} s(0, y_0)\exp\left\{-j\frac{k}{2}\left(D_0 - \frac{D_0^2}{Q}\right)y_0^2\right\}\exp\left\{-jk\frac{D_0 D_1}{Q}y_0 y_1\right\}dy_0.$$

Как видно из (2.73), в схеме с линейным источником $p(x', y') = \delta(y')$ выполняется с точностью до квадратичного множителя одномерное преобразование Френеля по оси y_1.

В случае когда плоскости (x_0, y_0) и (x_1, y_1) являются фурье-плоскостями второго объектива, выражение (2.73) трансформируется к следующему виду

$$s(x_f, y_f) = -\frac{1}{\lambda f}\int_{-\infty}^{\infty} s(0, y_0)\exp\left\{-j\frac{k}{f}y_0 y_f\right\}dy_0.$$

Отсюда следует, что в схеме с линейным источником, ориентированным вдоль оси x' при $d_0 = f$ и $d_1 = f$ выполняется одномерное фурье-преобразование по оси y_f. Применение крестообразного источника со структурной функцией $P(x', y') = \delta(x') + \delta(y')$ при тех же условиях обеспечивает выходной сигнал вида

$$s(x_f, y_f) = -\frac{1}{\lambda f}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} s(x_0, 0)\exp\left(-j\frac{k}{f}x_0 x_f\right)dx_0 + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} s(0, y_0)\exp\left(-j\frac{k}{f}y_0 y_f\right)dy_0\right\}.$$

При использовании крестообразного источника выполняется трансформация входного сигнала $s(x_0, y_0)$ в сумму одномерных фурье-преобразований по осям x_f и y_f:

$$s(x_f, y_f) = -\frac{1}{\lambda f}[s(K_x, 0) + s(0, K_y)],$$

где $K_x = \frac{k}{f}x_f, K_y = \frac{k}{f}y_f$. Вышеприведенный анализ подтверждает, что частотная плоскость является плоскостью изображения источника. При этом изображение крестообразного источника задает пространственно-частотный координатный базис.

2.8. ДУАЛЬНОСТЬ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим преобразование оптического сигнала слоем пространства (рис. 2.30*а*). Пусть оптический сигнал $s(x_0, y_0)$ задан в плоскости (x_0, y_0). Расстояние между входной (x_0, y_0) и выходной (x, y) плоскостями составляет z_0.

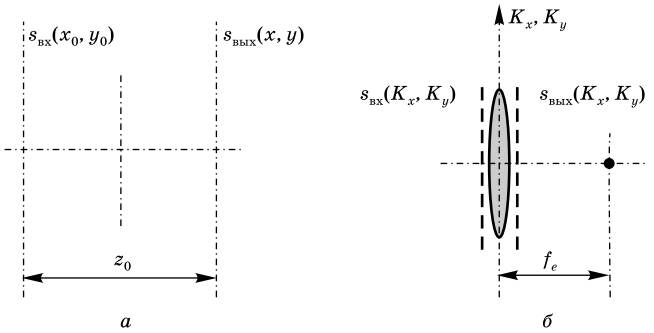


Рис. 2.30

Выходной сигнал в плоскости (x, y) определяется сверткой входного сигнала с импульсным откликом слоя пространства толщиной z_0:

$$s_{вых}(x, y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} s_{вх}(x_0, y_0) h(x, y; x_0, y_0) dx_0 dy_0,$$

где

$$h(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z_0} \exp\left\{ j \frac{k}{2z_0} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\}.$$

Выполним фурье-преобразование обеих частей этого равенства:

$$s_{вых}(K_x, K_y) = s_{вх}(K_x, K_y) H(K_x, K_y) =$$
$$= s_{вх}(K_x, K_y) \exp\left\{ -j \frac{z_0 (K_x^2 + K_y^2)}{2k} \right\} =$$
$$= s_{вх}(K_x, K_y) \exp\left\{ -j \frac{k}{2f_e} (K_x^2 + K_y^2) \right\},$$

где $f_e = k^2/z_0$.

В частотном пространстве член

$$\exp\left\{ -j \frac{k}{2f_e} (K_x^2 + K_y^2) \right\}$$

можно рассматривать как функцию пропускания линзы, фокусное расстояние которой $f_e = k^2/z_0 = 4\pi^2/\lambda^2 z_0$. Следовательно, если сигналы $s_{вх}(x_0, y_0)$ и $s_{вых}(x, y)$ описывают поля в двух плоскостях, расположенных на расстоянии z_0, то их фурье-образы представляют в частотном пространстве поля

непосредственно слева и справа от тонкой линзы с фокусным расстоянием $f_e = 4\pi^2/\lambda^2 z_0$ (рис. 2.30). Таким образом, слой координатного пространства толщиной z_0 (см. рис. 2.30*а*) в частотном пространстве отображается линзой с эквивалентным фокусным расстоянием f_e (рис. 2.30*б*).

Рассмотрим ситуацию, когда входной $s_{\text{вх}}(x, y)$ и выходной $s_{\text{вых}}(x, y)$ сигналы заданы непосредственно перед и за тонкой линзой, фокусное расстояние которой f (рис. 2.31*а*):

$$s_{\text{вых}}(x, y) = s_{\text{вх}}(x, y)\exp\left\{-j\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right\}.$$

Выходной сигнал в плоскости непосредственно за линзой определяется произведением входного сигнала на функцию, описывающую линзу как квадратичный фазовый фильтр. Выполняя фурье-преобразование выражения для выходного сигнала непосредственно за линзой, переходим в частотное пространство, где фурье-спектр выходного сигнала представляется сверткой фурье-спектра входного сигнала с фурье-спектром квадратичной фазовой функции пропускания линзы. Фурье-спектру этой функции можно сопоставить импульсный отклик слоя частотного пространства толщиной $z_e = k^2/f$ (рис. 2.31*б*):

$$s_{\text{вых}}(K_x, K_y) = s_{\text{вх}}(K_x, K_y) \otimes h(K_x, K_y),$$

где

$$h(K_x, K_y) = \frac{2\pi k}{jz_e}\exp\left\{j\frac{k}{2z_e}(K_x^2 + K_y^2)\right\} \leftrightarrow \exp\left\{j\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right\}.$$

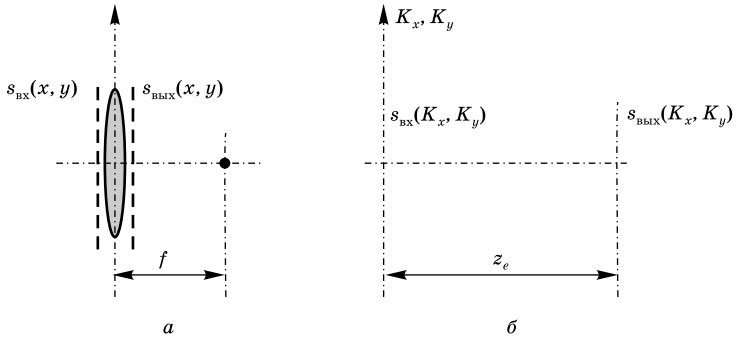


Рис. 2.31

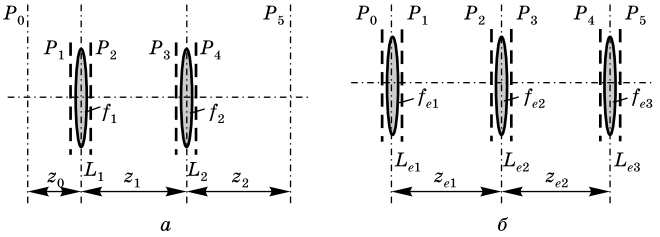


Рис. 2.32

Совершенно аналогично осуществляется переход из частотного пространства в координатное. Действие линзы с фокусным расстоянием f в частотном пространстве на фурье-спектр оптического сигнала эквивалентно воздействию на сигнал слоя с эквивалентной толщиной $z_e = k^2/f$ в координатном пространстве. Соответственно действие слоя толщиной z на фурье-спектр сигнала $s(K_x, K_y)$ в частотном пространстве эквивалентно действию на сигнал $s(x, y)$ линзы с эквивалентным фокусным расстоянием $f_e = k^2/z$ в координатном пространстве.

Показанная связь между представлениями оптических схем в координатном и частотном пространствах составляет так называемое свойство дуальности оптических систем. Проиллюстрируем это свойство на примере оптических схем. На рис. 2.32*а* показаны две линзы L_1 и L_2 с фокусными расстояниями f_1 и f_2 соответственно; P_0 и P_5 — входная и выходная плоскости системы; P_1 и P_2, P_3 и P_4 — главные плоскости тонких линз; z_0, z_1 и z_2 — расстояния между элементами схемы. Воспользовавшись свойством дуальности, перейдем от схемы на рис. 2.32*а* в координатном пространстве к эквивалентной схеме в частотном пространстве (рис. 2.32*б*). Для этого каждую область свободного пространства между плоскостями P_{2i} и P_{2i+1}, ($i = 0$, 1, 2), расположенными на расстоянии z_i друг от друга, заменим линзой с эквивалентным фокусным расстоянием $f_{ei} = k^2/z_i$, а каждую линзу L_i — на слой частотного пространства между плоскостями, расположенными на эквивалентном расстоянии $z_e = k^2/f_i$ друг от друга.

Таким образом формируется дуальная оптическая схема, показанная на рис. 2.32*б*. Если входным сигналом

в первой схеме является $s(x, y)$, а входным сигналом во второй схеме — фурье-спектр этого сигнала $s(K_x, K_y)$, то поле в каждой плоскости одной схемы является преобразованием Фурье поля в соответствующей дуальной схеме.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как определяется математическая модель физической системы?
2. Что такое стационарная система?
3. Каковы свойства линейных стационарных систем?
4. Что такое импульсный отклик системы?
5. Что такое интеграл Дюамеля?
6. В чем отличие интеграла Дюамеля для физически реализуемых систем, преобразующих времязависимые и пространственно-зависимые сигналы?
7. Что такое переходная характеристика системы и как она связана с импульсным откликом?
8. Как связаны частотный коэффициент передачи и импульсный отклик линейной стационарной системы?
9. Как спектр сигнала преобразуется линейной системой?
10. Как энергетические спектральные характеристики сигнала преобразуются линейной системой?
11. Как определяется частотный коэффициент передачи для многозвенных систем?
12. В чем состоит физическое обоснование линейной модели слоя пространства по отношению к пространственно зависимому оптическому сигналу?
13. Как связаны оптические сигналы и их угловые спектры в сечении слоя свободного пространства?
14. Как определяются импульсный отклик и когерентная передаточная функция свободного пространства?
15. Как связаны импульсный отклик и когерентная передаточная функция?
16. Чем различаются импульсные отклики слоя свободного пространства в приближениях Френеля и Фраунгофера?
17. Почему свободное пространство действует как низкочастотный фильтр на угловой спектр оптического сигнала?
18. Что такое пространственно-инвариантная линейная оптическая система?
19. Как преобразуются оптические сигналы линейными системами? В чем отличие линейного преобразования пространственно зависимых и времязависимых сигналов?
20. Как связаны импульсный отклик и когерентная передаточная функция линейной оптической системы?

21. Почему тонкая линза действует как квадратичный фазовый пространственный фильтр?
22. Каков физический смысл множителя $j^{-1} = e^{-j(\pi/2)}$ в импульсном отклике линзы?
23. Как отличаются когерентные передаточные функции линзы в приближении Френеля и Фраунгофера?
24. Как можно компенсировать квадратичные фазовые множители в функции, описывающей оптический сигнал, преобразованный тонкой линзой при произвольном расположении входной и выходной плоскостей?
25. Как преобразуется сигнал тонкой линзой, когда выходной плоскостью является задняя фурье-плоскость?
26. Как преобразуется сигнал, если входная плоскость расположена непосредственно перед или за линзой, а входной плоскостью является фурье-плоскость?
27. При каких условиях тонкая линза выполняет чистое преобразование Фурье оптического сигнала?
28. Как осуществляется линзой оптическое преобразование Фурье с переменным масштабом в случае, когда входной сигнал локализован между линзой и выходной плоскостью?
29. Как выполняется линзой оптическое преобразование Фурье с переменным масштабом в случае, когда входной сигнал локализован между источником света и линзой?
30. Как определяется положение частотной плоскости в оптическом фурье-анализаторе?
31. Как преобразуются гауссовы пучки при распространении в свободном пространстве?
32. Как преобразуется гауссов пучок тонкой линзой?
33. В чем особенность обратного преобразования Фурье пространственно зависимого сигнала в оптике?
34. Как осуществляется оптическое преобразование Фурье в схеме с линейным источником?
35. Как выполняется оптическое преобразование Фурье в схеме с крестообразным источником?
36. В чем заключается дуальность оптических систем?

ЗАДАЧИ

1. Найти импульсный отклик линейной системы, частотная передаточная функция которой имеет вид

$$H(\omega) = H_0 \exp(-j\beta^2\omega^2)\exp(-j\alpha\omega).$$

2. Найти переходную характеристику линейной системы, которая приведена в задаче 1.

3. Найти частотный коэффициент передачи линейной стационарной системы, импульсный отклик которой имеет вид

$$h(t)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\delta(t-nT), & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Здесь α_n — вещественный коэффициент.

4. Определить переходную характеристику линейной стационарной системы, приведенной в задаче 3.

5. Плоская волна с длиной волны 0,5 мкм падает на проволоку, натянутую ортогонально волновому вектору. На экране, расположенном перпендикулярно к направлению распространения падающей плоской волны, на расстоянии 1 м от проволоки наблюдаются дифракционные максимумы, расстояние между которыми 0,5 мм. Найти диаметр проволоки.

6. В передней фурье-плоскости линзы с фокусным расстоянием f помещен экран с двумя точечными отверстиями, расположенными по оси x на расстояниях $\pm a$ от оптической оси. Экран освещается параллельным пучком света с длиной волны λ. Определить распределение поля в задней фурье-плоскости линзы. Решить ту же задачу в случае, если перед одним из отверстий помещена четвертьволновая фазовая пластинка. Конечной апертурой линзы пренебречь.

7. Экран с прямоугольным отверстием $-a\leq x_0\leq a$, $-b\leq y_0\leq b$ помещен в передней фурье-плоскости тонкой положительной линзы с фокусным расстоянием f. Экран освещается плоской волной. Найти фурье-спектр светового сигнала. Определить фурье-спектр оптического сигнала для случая, когда экран с отверстием установлен за линзой на расстоянии d от задней фурье-плоскости. Чем отличаются полученные фурье-спектры сигналов?

8. Найти фурье-спектр оптического сигнала, сформированного в результате дифракции плоской световой волны на прямоугольном фазовом экране:

$$\varphi(x_0,y_0)=\begin{cases}\exp(-j\alpha kx_0), & |x_0|\leq a,\ |y_0|\leq b;\\ 0, & |x_0|>a,\ |y_0|>b.\end{cases}$$

Экран помещен в передней фурье-плоскости тонкой положительной линзы с фокусным расстоянием f и неограниченной апертурой. Длина волны излучения λ.

9. Определить фурье-спектр оптического сигнала, сформированного в результате дифракции плоской световой волны на экране с гармонически модулированным амплитудным коэффициентом пропускания

$$t(x_0, y_0) = 1 - \cos(Kx_0), \quad -\infty < x_0 < \infty, \quad -\infty < y_0 < \infty.$$

Экран помещен за линзой, имеющей неограниченную апертуру и фокусное расстояние f, на расстоянии d от задней фокальной плоскости.

10. На каком расстоянии d от задней фурье-плоскости положительной тонкой линзы следует поместить экран со щелью, параллельной оси y_0, чтобы щелевой фильтр размером $2l$, помещенный в фурье-плоскость и параллельный оси y_f, пропускал только главный лепесток фурье-спектра оптического сигнала? Ширина щели в экране $2a$.

11. В передней фурье-плоскости положительной тонкой линзы помещен транспарант с пропусканием

$$t(x_0, y_0) = \exp(-\alpha x_0^2)\sin^2(K_0 x_0), \quad -\infty < x_0 > \infty, \quad -\infty < y_0 < \infty.$$

Транспарант освещен параллельным пучком света с длиной волны λ. Определить фурье-спектр оптического сигнала. Фокусное расстояние линзы f, конечным размером апертуры можно пренебречь.

12. В передней фурье-плоскости тонкой положительной линзы помещен транспарант, пропускание которого описывается функцией

$$t(x_0, y_0) = \{\exp[-\alpha(x_0 - a)^2] + \exp[-\alpha(x_0 + a)^2]\}\exp(-\beta y_0^2).$$

Транспарант освещается параллельным световым пучком с длиной волны λ. Фокусное расстояние линзы f, апертура бесконечная. Найти фурье-спектр оптического сигнала. Определить интенсивность фурье-спектра сигнала.

13. Фурье-спектр транспаранта s_1 был получен с помощью положительной тонкой линзы с фокусным расстоянием f на длине волны излучения λ_1. Транспарант,

отображающий фурье-спектр, помещен в задней фурье-плоскости линзы. Необходимо получить фурье-спектр свертки транспарантов s_1 и s_2 на длине волны излучения $\lambda_2 > \lambda_1$. Где и на каком расстоянии от фурье-плоскости следует поместить транспарант s_2, чтобы выровнять масштабы пространственных частот фурье-спектров транспарантов s_1 и s_2?

14. В передней фурье-плоскости линзы сформирован сигнал

$$s(x, y) = \mathrm{rect}\left[\frac{x - x_0}{a}\right] + \mathrm{rect}\left[\frac{x + x_0}{a}\right], \quad |y| < \infty.$$

Определить фурье-спектр сигнала и его интенсивность.

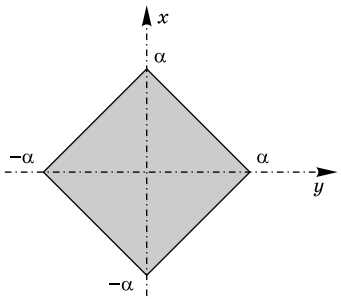


Рис. 2.33

15. В передней фурье-плоскости тонкой положительной линзы задан сигнал $s(x, y)$, представляющий собой экран, показанный на рис. 2.33. Определить сигнал в задней фурье-плоскости линзы. Фокусное расстояние линзы с неограниченной апертурой равно f.

16. Показать, что если

$$s(x, y) \leftrightarrow s(K_x, K_y),$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s\left(\frac{x}{2} + \xi, \frac{y}{2} + \eta\right) s^*\left(\frac{x}{2} - \xi, \frac{y}{2} - \eta\right) d\xi d\eta \leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2} |s(K_x, K_y)|^2 .$$

17. Выходной сигнал оптического фурье-анализатора $\frac{K_x}{K_y}\exp\{-\beta(K_x^2 + K_y^2)\}$. Определить входной сигнал.

18. Доказать:

$$s(x + x_0) + s(x - x_0) \leftrightarrow 2s(K_x)\cos(K_x x_0).$$

19. На входе оптического спектр-анализатора задан сигнал $s(x, y) = \mathrm{sgn}x \cdot \mathrm{sgn}y$. Найти фурье-спектр сигнала.

20. Доказать:

$$s(x + x_0, y) - s(x - x_0, y) \leftrightarrow 2js(K_x, K_y)\sin(K_x x_0).$$

21. Пространственно совмещенные перетяжки гауссовых пучков, длины волн которых λ_1 и λ_2, сформированы на расстоянии l_0 от переднего фокуса положительной линзы с неограниченной апертурой. Радиус перетяжек w_0. Фокусное расстояние линзы f. Определить конфокальные параметры положения перетяжек гауссовых пучков, преобразованных линзой.

22. Оптическое преобразование Фурье выполняется в схеме (см. рис. 2.29) с крестовидным источником и конфокальными линзами. Входной сигнал

$$s(x_0, y_0) = \exp[-\beta(x_0^2 + y_0^2)]\cos^2(K_0 x_0).$$

Найти фурье-спектр.

23. Выходной сигнал оптической схемы, выполняющей последовательно прямое и обратное преобразования Фурье, описывается выражением

$$s(x, y) = A x_0 \exp\left\{-\beta\left[x_0^2 + \left(\frac{y-a}{b}\right)^2\right]\right\}.$$

Найти фурье-спектр этого сигнала. Каким преобразованиям подвергся фурье-спектр входного сигнала в частотной плоскости?

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАНКЕЛЯ

3.1. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И ИХ СВОЙСТВА

Функция Бесселя определяется как коэффициент разложения в ряд Фурье функции $a(x, \theta) = \exp\{jx\sin\theta\}$:

$$a(x,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{jn\theta}. \tag{3.1}$$

Поскольку функция $a(x, \theta)$ — периодическая по переменной θ, выражение для бесселевой функции имеет вид

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a(x,\theta)\exp(-jn\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(jx\sin\theta)\exp(-jn\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp[-j(n\theta - x\sin\theta)]d\theta. \tag{3.2}$$

Индекс n получил название порядка функции Бесселя. Из (3.2) следует, что функция Бесселя $J_n(x)$ — действительная, поскольку вещественная часть подынтегрального выражения есть четная, а мнимая — нечетная функции переменной θ:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta - j\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n\theta - x\sin\theta)d\theta\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta. \tag{3.3}$$

В частности, для функции нулевого порядка $J_0(x)$ имеем

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(jx\sin\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\theta)d\theta. \quad (3.4)$$

Так как $\sin\theta$ — периодическая функция, интеграл в (3.4) не изменится, если переменную θ аддитивно изменить на произвольную величину:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(jx\sin\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(jx\cos\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp[jx\cos(\theta-\alpha)]d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\cos\theta)d\theta.$$

Из (3.3), пользуясь формулой косинуса разности двух углов, получаем

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(n\theta)\cos(x\sin\theta) + \sin(n\theta)\sin(x\sin\theta)\}d\theta.$$

Откуда находим выражения для функции Бесселя четного и нечетного порядков:

$$J_{2n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x\sin\theta)\cos(2n\theta)d\theta,$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin(x\sin\theta)\sin[(2n+1)\theta]d\theta.$$

Из полученных формул следует

$$J_0(0) = 1; \quad J_n(0) = 0, \quad n \neq 0;$$
$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x); \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (3.5)$$

Обратимся к формуле (3.1). Выделим действительную и мнимую части:

$$\exp\{jx\sin\theta\} = \cos(x\sin\theta) + j\sin(x\sin\theta) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos n\theta + j\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin n\theta.$$

Учитывая равенства (3.5), находим

$$\cos(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos n\theta = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\theta,$$

$$\sin(x\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin n\theta = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\theta.$$

Положим $\theta = \pi/2$. Тогда получаем представления тригонометрических функций через функции Бесселя:

$$\cos x = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x),$$

$$\sin x = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(x).$$

Обратимся к выражению для бесселевой функции (3.2). Продифференцируем его по x:

$$\frac{\partial}{\partial x}J_n(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp[-j(n\theta - x\sin\theta)]d\theta\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} j\sin\theta\exp\{-j(n\theta - x\sin\theta)\}d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[e^{j\theta} - e^{-j\theta}]\exp\{-j(n\theta - x\sin\theta)\}d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{-j[(n-1)\theta - x\sin\theta]\}d\theta -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{-j[(n+1)\theta - x\sin\theta]\}d\theta = \frac{1}{2}J_{n-1}(x) - \frac{1}{2}J_{n+1}(x).$$

Следовательно,

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x). \qquad (3.6)$$

Обратимся теперь к равенству (3.1) и продифференцируем его по θ:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}a(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}(e^{jx\sin\theta}) = \frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{jn\theta}$$

или

$$jx\cos\theta e^{jx\sin\theta} = j\sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)e^{jn\theta},$$

$$x\frac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{jn\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)e^{jn\theta}.$$

Это равенство справедливо при всех значениях θ. Поэтому коэффициенты при $e^{jn\theta}$ должны быть одинаковы:

$$x\frac{1}{2}[J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)] = nJ_n(x).$$

Отсюда

$$\frac{2n}{x}J_n(x) = J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x). \qquad (3.7)$$

Формулы (3.6) и (3.7) называются рекуррентными:

$$\left.\begin{aligned} 2J_n'(x) &= J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x),\\ \frac{2n}{x}J_n(x) &= J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x). \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

Складывая и вычитая (3.8), получаем

$$\left.\begin{aligned} J_{n-1}(x) &= \frac{n}{x}J_n(x)+J_n'(x),\\ J_{n+1}(x) &= \frac{n}{x}J_n(x)-J_n'(x). \end{aligned}\right\}$$

Отсюда, умножив первое уравнение и поделив второе на x^n, находим

$$\left.\begin{aligned} x^nJ_{n-1}(x) &= \frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)],\\ \frac{J_{n+1}(x)}{x^n} &= -\frac{d}{dx}\left[\frac{J_n(x)}{x^n}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

В частности,

$$xJ_0(x) = \frac{d}{dx}[xJ_1(x)],$$

$$\frac{d}{dx}J_0(x) = -J_1(x).$$

Интегрируя (3.9), получаем

$$\int x^n J_{n-1}(x)dx = x^n J_n(x),$$

$$\int \frac{J_{n+1}(x)}{x^n}dx = -\frac{J_n(x)}{x^n}.$$

Отсюда при $n = 1$

$$\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x),$$

$$\int \frac{J_2(x)}{x}dx = -\frac{J_1(x)}{x}. \qquad (3.10)$$

При $n = 0$

$$\int J_1(x)dx = -J_0(x). \qquad (3.11)$$

3.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАНКЕЛЯ В ОПТИКЕ И ЕГО СВЯЗЬ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ

Пусть двумерный сигнал $s(x, y)$ имеет круговую симметрию. Тогда в полярной системе координат $s(x, y) = s(r)$, где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Преобразование Фурье такого сигнала также имеет круговую симметрию $s(r) \leftrightarrow s(w)$, где

$$w = (K_x^2 + K_y^2)^{1/2}, K_x = w\cos\varphi, K_y = w\sin\varphi.$$

Действительно,

$$s(K_x, K_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y)e^{-j[xK_x + yK_y]}dxdy =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} s(r)e^{-j[wr\cos\theta\cos\varphi + wr\sin\theta\sin\varphi]}rdrd\theta =$$

$$= \int_0^{\infty} rs(r)dr \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jwr\cos(\theta-\varphi)}d\theta.$$

Согласно определению функций Бесселя (3.4)

$$J_0(wr) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jwr\cos(\theta-\varphi)}d\theta, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jwr\cos(\theta-\varphi)}d\theta = 2\pi J_0(wr).$$

Отсюда

$$\int_0^\infty rs(r)dr \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jwr\cos(\theta-\varphi)}d\theta = 2\pi\int_0^\infty rs(r)J_0(wr)dr.$$

Следовательно,

$$s(w) = 2\pi\bar{s}(w) = 2\pi\int_0^\infty rs(r)J_0(wr)dr. \qquad (3.12)$$

Выражение

$$\bar{s}(w) = \int_0^\infty rs(r)J_0(wr)dr$$

определяет преобразование Ганкеля сигнала $s(r)$: $s(r)\overset{h}{\leftrightarrow}\bar{s}(w)$.

Согласно (3.12) преобразование Фурье и преобразование Ганкеля сигнала $s(r)$ связаны соотношением

$$s(w) = 2\pi\bar{s}(w),$$

откуда

$$\bar{s}(w) = \frac{1}{2\pi}s(w).$$

Найдем формулу для обратного преобразования Ганкеля. Для этого воспользуемся обратным преобразованием Фурье для сигнала с круговой симметрией:

$$s(r) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} s(w)e^{jwr\cos(\theta-\varphi)}wdwd\varphi = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty 2\pi\bar{s}(w)wdw\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi} e^{jwr\cos(\theta-\varphi)}d\varphi = \int_0^\infty w\bar{s}(w)J_0(wr)dw.$$

Отсюда видно, что прямое и обратное преобразования Ганкеля симметричны:

$$\bar{s}(w) = \int_0^\infty rs(r)J_0(wr)dr,$$

$$s(r) = \int_0^\infty w\bar{s}(w)J_0(wr)dw.$$

Таким образом, для сигнала с круговой симметрией имеем

$$s(r)\leftrightarrow s(w),\ \ s(r)\overset{h}{\leftrightarrow}\bar{s}(w),\ \ \bar{s}(w) = \frac{1}{2\pi}s(w).$$

3.3. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАНКЕЛЯ

Изменение масштаба. Из преобразования Фурье имеем

$$s(ax) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} s\left(\frac{K_x}{a}\right).$$

В двумерном случае

$$s(ax, by) \leftrightarrow \frac{1}{|a||b|} s\left(\frac{K_x}{a}, \frac{K_y}{b}\right).$$

Для сигналов с круговой симметрией

$$s(ar) \leftrightarrow \frac{1}{|a|^2} s\left(\frac{w}{a}\right)$$

или, с учетом связи преобразования Фурье и преобразований Ганкеля,

$$s(ar) \leftrightarrow \frac{2\pi}{|a|^2} \bar{s}\left(\frac{w}{a}\right).$$

Отсюда следует формула для преобразования Ганкеля с изменяемым масштабом:

$$s(ar) \overset{h}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|^2} \bar{s}\left(\frac{w}{a}\right). \qquad (3.13)$$

Дифференцирование сигнала при преобразовании Ганкеля. Лапласиан в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 s(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s(r)}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left[r \frac{ds}{dr}\right].$$

Отсюда с учетом свойств преобразования Фурье следует

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left[r \frac{ds(r)}{dr}\right] \leftrightarrow (jw)^2 s(w) = 2\pi (jw)^2 \bar{s}(w).$$

Поэтому для преобразования Ганкеля второй производной сигнала с круговой симметрией имеем

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}\left[r \frac{ds(r)}{dr}\right] \overset{h}{\leftrightarrow} (jw)^2 \bar{s}(w).$$

Формула Парсеваля. Используя обобщенную формулу Рэлея, запишем равенство Парсеваля для двумерного сигнала:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|s(x,y)|^2\,dxdy=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y.$$

Формула Парсеваля утверждает, что энергия сигнала в координатном и частотном пространствах одинакова. Для сигналов, обладающих круговой симметрией, формула Парсеваля приводится к виду

$$\int_0^{\infty} r\,|s(r)|^2\,dr=\int_0^{\infty} w\,|\overline{s}(w)|^2\,dw.$$

Пример 3.1. Найти преобразование Ганкеля от сигнала в виде круга радиусом a:

$$P_a(r)=\begin{cases}1, & r\le a;\\ 0, & r>a.\end{cases}$$

$$P_a(r)\overset{h}{\leftrightarrow}\int_0^a rJ_0(wr)dr=\frac{1}{w^2}\int_0^{aw}(rw)J_0(wr)d(wr)=\frac{a}{w}J_1(aw).$$

Здесь мы воспользовались (3.10).

Пример 3.2. Доказать, что $\frac{1}{r}\overset{h}{\leftrightarrow}\frac{1}{w}$.

$$\overline{s}(w)=\int_0^{\infty} r\frac{1}{r}J_0(wr)dr=\int_0^{\infty}J_0(wr)dr=\frac{1}{w}\int_0^{\infty}J_0(x)dx,$$

$$s(r)=\int_0^{\infty} w\left[\frac{1}{w}\int_0^{\infty}J_0(x)dx\right]J_0(wr)dw=$$

$$=\int_0^{\infty}J_0(x)dx\int_0^{\infty}J_0(wr)dw=\frac{1}{r}\left[\int_0^{\infty}J_0(x)dx\right]^2=\frac{1}{r}.$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty}J_0(x)dx=1,\ \ 1/r\overset{h}{\leftrightarrow}1/w.$$

Пример 3.3. Найти преобразование Ганкеля для сигнала $s(r) = \delta(r - a)$.

$$\int_0^\infty r\delta(r-a)J_0(wr)dr = aJ_0(wa),$$

$$\delta(r-a) \overset{h}{\leftrightarrow} aJ_0(aw).$$

Пример 3.4. Преобразование Ганкеля от суммы двух сигналов:

$$s(x,y) = s(r) = s_1(r) + s_2(r) =$$
$$= P_a\left(\sqrt{(x-b)^2+y^2}\right) + P_a\left(\sqrt{(x+b)^2+y^2}\right);$$

$$P_a\left(\sqrt{(x-b)^2+y^2}\right) = \begin{cases} 1, & \left|\sqrt{(x-b)^2+y^2}\right| \le a, \\ 0, & \left|\sqrt{(x-b)^2+y^2}\right| > a, \end{cases}$$

$$P_a\left(\sqrt{(x+b)^2+y^2}\right) = \begin{cases} 1, & \left|\sqrt{(x+b)^2+y^2}\right| \le a, \\ 0, & \left|\sqrt{(x+b)^2+y^2}\right| > a, \end{cases}$$

$$s(x,y) \leftrightarrow 2\pi\bar{s}(w)\{e^{-jbx} + e^{jbx}\} = 2\pi a\frac{J_1(aw)}{w}\{e^{jbK_x} + e^{-jbK_x}\} =$$
$$= 4\pi a\frac{J_1(aw)}{w}\cos(bK_x).$$

Отсюда

$$s(r) \overset{h}{\leftrightarrow} 2a\frac{J_1(aw)}{w}\cos(bK_x).$$

Пример 3.5. Найти преобразование Ганкеля для сигнала в виде кольца:

$$s(r) = P_a(r) - P_b(r), \quad a > b.$$

$$P_a(r) = \begin{cases} 1, & r \le a; \\ 0, & r > a; \end{cases}$$

$$P_b(r) = \begin{cases} 1, & r \le b; \\ 0, & r > b; \end{cases}$$

$$s(r) \overset{h}{\leftrightarrow} \int_0^\infty r[P_a(r) - P_b(r)]J_0(wr)dr = a\frac{J_1(aw)}{w} - b\frac{J_1(bw)}{w}.$$

Исследуем на экстремум функцию $a\dfrac{J_1(aw)}{w}$. Для этого воспользуемся (3.9):

$$\frac{d}{dx}\frac{J_1(x)}{x} = -\frac{J_2(x)}{x},$$

$$\frac{d}{dw}\left[\frac{J_1(aw)}{w}\right] = a^2\frac{d}{d(aw)}\left[\frac{J_1(aw)}{w}\right] = a^2\frac{J_2(aw)}{w} = 0,$$

$$\frac{J_2(aw)}{aw} = 0.$$

Отсюда следует, что максимумы дифракционного $a\dfrac{J_1(aw)}{w}$ изображения функции $P_a(r)$ соответствуют нулям x_i функции $J_2(aw)$.

В табл. 3.1 приведены преобразования Ганкеля для наиболее распространенных функций.

Таблица 3.1

Преобразования Ганкеля

$s(r) = \int\limits_0^\infty w\bar{s}(w)J_0(rw)dw \overset{h}{\leftrightarrow} \bar{s}(w) = \int\limits_0^\infty rs(r)J_0(wr)dr$	
$s(r) \leftrightarrow 2\pi\bar{s}(w)$	
$s(r)$	$\bar{s}(w)$
$s(ar)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert^2}\bar{s}\left(\dfrac{w}{a}\right)$
$s''(r) + \dfrac{1}{r}s'(r)$	$-w^2\bar{s}(w)$
$s_1(r) \otimes s_2(r)$	$2\pi\bar{s}_1(w)\bar{s}_2(w)$
$\int\limits_0^\infty r\lvert s(r)\rvert^2\,dr = \int\limits_0^\infty r\lvert\bar{s}(w)\rvert^2\,dw$	
$m_n = \int\limits_0^\infty r^n s(r)dr$	$\bar{s}(w) = \sum\limits_{n=0}^\infty \dfrac{(-1)^n m_{2n+1}}{(n!)^2 2^{2n}}w^{2n}$

Продолжение табл. 3.1

$\int_{-\infty}^{\infty} s\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy \leftrightarrow 2\pi\bar{s}_c(K_x)$	
$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{w}$
$\delta(r-\alpha)$	$\alpha J_0(\alpha w)$
$e^{-\alpha r^2}$	$\frac{1}{2\alpha}e^{-w^2/4\alpha}$
$e^{j\alpha r^2}$	$\frac{j}{2\alpha}e^{-jw^2/4\alpha}$
$e^{-\alpha r}$	$\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+w^2)^3}}$
$\frac{e^{-\alpha r}}{r}$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+w^2}}$
$\frac{\sin\alpha r}{r}$	$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{w^2-\alpha^2}}, & w>\alpha,\\ 0, & w<\alpha.\end{cases}$
$\frac{J_n(r)}{r^n}$	$\begin{cases}\frac{(1-w^2)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}, & w<1,\\ 0, & w>1.\end{cases}$
$\left.\begin{matrix}1, & 0<r\le a,\\ 0, & r>a\end{matrix}\right\}$	$\frac{aJ_1(aw)}{w}$
$\left.\begin{matrix}J_0(br), & 0<r\le a,\\ 0, & r>a\end{matrix}\right\}$	$\frac{abJ_1(ab)J_0(aw)-awJ_0(ab)J_1(aw)}{b^2-w^2}$
$J_0^2(ar)$	$\begin{cases}\frac{2}{\pi w\sqrt{4a^2-w^2}}, & w<2a,\\ 0, & w>2a.\end{cases}$
$\frac{J_0(\alpha r)J_1(\alpha r)}{r}$	$\begin{cases}\frac{1}{a\pi}\cos^{-1}\frac{w}{2a}, & w<2a,\\ 0, & w>2a.\end{cases}$
$2\pi\frac{J_1^2(\alpha r)}{r^2}$	$\begin{cases}2\arccos\frac{w}{2a}-\frac{w}{a}\sqrt{1-w^2/4a^2}, & w<2\alpha,\\ 0, & w>2\alpha.\end{cases}$

Связь между преобразованиями Фурье и Ганкеля.

Если $s(r) \xleftrightarrow{h} \bar{s}(w)$, то

$$s(K_x, K_y) = 2\pi\bar{s}(w) = 2\pi\bar{s}\left(\sqrt{K_x^2 + K_y^2}\right).$$

Как известно, двумерное преобразование Фурье определяется выражением

$$s(K_x, K_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y)e^{-j(K_x x + K_y y)}dxdy.$$

Тогда для одномерного преобразования Фурье имеем

$$s(K_x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jK_x x}dx \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} s_c(x)e^{-jK_x x}dx = s_c(K_x).$$

Здесь $s_c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y)dy$ является сечением сигнала. В случае цилиндрической симметрии

$$s_c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)dy,$$

$$s(K_x, 0) = 2\pi\bar{s}_c(K_x) = s_c(K_x).$$

Отсюда

$$s_c(x) \leftrightarrow 2\pi\bar{s}_c(K_x).$$

Пример. 3.6. Сигнал $s(r)$ представляет собой единичный импульс радиуса r (рис. 3.1). Найти фурье-спектр сечения $s_c(x)$.

$$s(r) = \mathrm{circ}\left(\frac{r}{a}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \le r \le a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

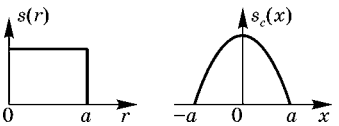


Рис. 3.1

Найдем сечение $s_c(x)$:

$$s_c(x) = \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy = 2\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{при} \quad |x| \le a.$$

Двумерное преобразование Фурье для сигнала $s(r)$:

$$\mathrm{circ}\left(\frac{r}{a}\right) \leftrightarrow 2\pi a \frac{J_1(aw)}{w}.$$

Преобразование Фурье для сечения $s_c(x)$:

$$s_c(x) = \mathrm{Re}\{2\sqrt{a^2 - x^2}\} \leftrightarrow 2\pi a \frac{J_1(aK_x)}{K_x}.$$

Отсюда

$$\mathrm{Re}\{\sqrt{a^2 - x^2}\} \leftrightarrow \pi a \frac{J_1(aK_x)}{K_x}.$$

Преобразование Ганкеля произведения сигналов. Рассмотрим преобразование Ганкеля произведения двух осесимметричных сигналов $s_1(r) \leftrightarrow s_1(w)$ и $s_2(r) \leftrightarrow s_2(w)$. Найдем фурье-спектр произведения этих сигналов:

$$s_1(r)s_2(r) \leftrightarrow \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} s_1(r)s_2(r)e^{-jrw\cos(\theta-\varphi)} r dr d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} s_2(r) r dr d\theta \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} s_1(\xi) e^{jr\xi\cos(\theta-\varphi)} e^{-jrw\cos(\theta-\varphi)} \xi d\xi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} s_1(\xi)\xi d\xi d\varphi \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} s_2(r) e^{-j(w-\xi)r\cos(\theta-\varphi)} r dr d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} s_1(\xi)\bar{s}_2(w-\xi)\xi d\xi d\varphi = 2\pi \int_0^\infty \bar{s}_1(\xi)\bar{s}_2(w-\xi)\xi d\xi.$$

Отсюда

$$s_1(r)s_2(r) \xleftrightarrow{h} \int_0^\infty \bar{s}_1(\xi)\bar{s}_2(w-\xi)\xi d\xi. \qquad (3.14)$$

Преобразование Ганкеля произведения двух сигналов с круговой симметрией определяется сверткой ганкель-образов в частотном пространстве. Рассмотрим *обратное преобразование Ганкеля от произведения ганкель-образов осесимметричных сигналов* $\bar{s}_1(w)\bar{s}_2(w)$. Для этого выполним обратное фурье-преобразование от произведения фурье-спектров осесимметричных сигналов $s_1(r) \leftrightarrow s_1(w)$ и $s_2(r) \leftrightarrow s_2(w)$:

$$s_1(w)s_2(w) \leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} s_1(w)s_2(w)e^{jwr\cos(\varphi-\theta)}wdwd\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} s_2(w)wdwd\varphi\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} s_1(\xi)e^{-j\xi w\cos(\varphi-\theta)}e^{jwr\cos(\varphi-\theta)}\xi d\xi d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} s_1(\xi)\xi d\xi d\theta\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} s_2(w)e^{jw(r-\xi)\cos(\varphi-\theta)}wdwd\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^\infty s_1(\xi)s_2(r-\xi)\xi d\xi.$$

Отсюда

$$\bar{s}_1(w)\bar{s}_2(w) \xleftrightarrow{h} \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty s_1(\xi)s_2(r-\xi)\xi d\xi. \qquad (3.15)$$

Преобразование Ганкеля для линейных систем с осевой симметрией. Пусть двумерная линейная система имеет импульсный отклик $h(r)$, где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Из свойств линейных систем следует, что выходной сигнал является сверткой входного сигнала с импульсным откликом системы:

$$s_e(r) = s_i(r) \otimes h(r).$$

Выполняя преобразование Ганкеля этого равенства, получаем

$$s_e(w) = s_i(w)h(w)$$

или

$$2\pi\bar{s}_e(w) = 4\pi^2\bar{s}_i(w)\bar{h}(w).$$

Отсюда находим

$$\bar{s}_e(w) = 2\pi\bar{s}_i(w)\bar{h}(w). \qquad (3.16)$$

Как следует из (3.16), когерентная передаточная функция линейной системы с осевой симметрией связана с импульсным откликом соотношением

$$H(w) = 2\pi\bar{h}(w). \qquad (3.17)$$

Пусть ганкель-образ входного сигнала представляет собой в частотной плоскости бесконечно тонкое кольцо:

$$\bar{s}_i(w) = A\delta(w-a).$$

Тогда для ганкель-образа выходного сигнала согласно (3.16) имеем

$$\bar{s}_e(w) = 2\pi A\delta(w-a)\bar{h}(w) = 2\pi A\bar{h}(a)\delta(w-a).$$

Здесь мы учли свойства δ-функции. Выполняя обратное преобразование Ганкеля, найдем выражение для выходного сигнала $s_e(r)$ в координатном пространстве:

$$s_e(r) = 2\pi A\bar{h}(a)\int_0^\infty w\delta(w-a)J_0(wr)dw = 2\pi aA\bar{h}(a)J_0(ar).$$

Коэффициент A определяется из преобразования Ганкеля от $s_i(r) = J_0(ar)$,

$$J_0(ar) = \int_0^\infty w\bar{s}_i(w)J_0(wr)dw.$$

Отсюда получаем, что $\bar{s}_i(w) = \frac{1}{a}\delta(w-a)$, следовательно, $A = \frac{1}{a}$ и

$$\hat{G}[J_0(ar)] = 2\pi\bar{h}(a)J_0(ar) = H(a)J_0(ar).$$

Следовательно, $J_0(ar)$ является собственной функцией системного оператора $\hat{G}$, описывающего линейную систему, а когерентная передаточная функция $H(a) = 2\pi\bar{h}(a)$ — его собственным значением.

3.4. ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАНКЕЛЯ

Если в формуле для преобразования Ганкеля заменить функцию Бесселя $J_0(wr)$ на функцию Бесселя $J_n(wr)$, то получится преобразование Ганкеля n-го порядка:

$$\bar{s}_n(w) = \int_0^\infty rs(r)J_n(wr)dr, \qquad (3.18)$$

где $J_n(wr) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n\alpha - rw\sin\alpha)}d\alpha.$

Преобразование Ганкеля n-го порядка называется обобщенным преобразованием Ганкеля. Оно связано с двумерным преобразованием Фурье:

$$s(r)e^{jn\theta} \leftrightarrow 2\pi\bar{s}_n(w)e^{-jn\varphi}. \qquad (3.19)$$

Действительно, пусть преобразование Фурье выполняется по переменным

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad w = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad u = w\sin\varphi, \quad v = w\cos\varphi.$$

Тогда

$$s(w,\varphi) = \int_0^\infty rs(r) \int_{\substack{-\pi \\ [\theta+\varphi=\alpha]}}^{\pi} e^{j[n\theta - wr\sin(\theta+\varphi)]} d\theta dr =$$

$$= e^{-jn\varphi} \int_0^\infty rs(r)dr \int_{-\pi}^{\pi} e^{j[n\alpha - wr\sin\alpha]} d\alpha =$$

$$= 2\pi e^{-jn\varphi} \int_0^\infty rs(r)J_n(wr)dr = 2\pi\bar{s}_n(w)e^{-jn\varphi}.$$

Найдем обратное преобразование Ганкеля n-го порядка. Из формулы обратного преобразования Фурье получаем

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi w\bar{s}_n(w)e^{-jn\varphi} e^{jwr\sin(\theta+\varphi)} dw d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty w\bar{s}_n(w)dw \int_{\substack{-\pi \\ [\theta+\varphi=\alpha]}}^{\pi} e^{-jn\varphi} e^{jwr\sin(\theta+\varphi)} d\varphi =$$

$$= \int_0^\infty w\bar{s}_n(w)e^{jn\theta} dw \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-j(n\alpha - wr\sin\alpha)} d\alpha =$$

$$= e^{jn\theta} \int_0^\infty w\bar{s}_n(w)J_n(wr)dw = e^{jn\theta}s(r).$$

Отсюда

$$s(r) = \int_0^\infty w\bar{s}_n(w)J_n(wr)dw. \qquad (3.20)$$

Из сравнения (3.20) и (3.18) следует, что прямое и обратное преобразования Ганкеля n-го порядка полностью симметричны.

Обобщенное преобразование Ганкеля можно применять для сигналов, не обладающих круговой симметрией. В этом случае произвольный сигнал $s(r, \theta)$ представляется разложением в ряд Фурье по полярным гармоникам $e^{jn\theta}$:

$$s(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta}. \qquad (3.21)$$

Выполним с учетом (3.18) преобразование Фурье сигнала $s(r, \theta)$, представленного рядом (3.21):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta} \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \bar{c}_{nn} e^{-jn\varphi}. \qquad (3.22)$$

Правая часть выражения (3.22) представляет собой разложение в ряд Фурье фурье-спектра преобразованного сигнала:

$$s(w,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \bar{c}_{nn} e^{-jn\varphi}.$$

Коэффициентами разложения в этом представлении фурье-спектра сигнала являются коэффициенты $2\pi\bar{c}_{nn}$.

Рассмотрим ситуацию, когда произвольный двумерный сигнал (3.22) подан на вход линейной системы, обладающей круговой симметрией. Пусть импульсный отклик такой системы $h(r)$. Согласно (3.17) когерентная передаточная функция равна $H(w) = 2\pi\bar{h}(w)$. Для входного сигнала

$$s_i(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta}$$

фурье-спектр с учетом (3.17) и (3.19) имеет вид

$$s_i(w,\varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn} e^{-jn\varphi}.$$

Отсюда находим фурье-спектр выходной реакции линейной системы:

$$s_e(w,\varphi) = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{h}(w) \bar{c}_{nn} e^{-jn\varphi} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_{nn} e^{-jn\varphi}. \qquad (3.23)$$

Из (3.23) видно, что фурье-спектр выходного сигнала представляется рядом Фурье по полярным гармоникам

$e^{-jn\varphi}$ с коэффициентом разложения $\bar{a}_{nn} = 2\pi\bar{h}(w)\bar{c}_{nn}$. Выполняя обратное преобразование Фурье и используя обобщенное преобразование Ганкеля, находим выражение, описывающее фильтрованный сигнал в координатном пространстве:

$$s_e(w, \varphi) \leftrightarrow s_e(r, \theta)$$

или, с учетом (3.20),

$$s_e(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\theta} \int_0^{\infty} w\bar{a}_{nn} J_n(rw)dw = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nn} e^{jn\theta}, \qquad (3.24)$$

где

$$a_{nn} = \int_0^{\infty} w\bar{h}(w)\bar{c}_{nn}(w)J_n(r,w)dw. \qquad (3.25)$$

Таким образом, выходной сигнал линейной оптической системы в координатном пространстве может быть представлен разложением в ряд Фурье по полярным гармоникам:

$$s(r,\theta) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nn} e^{jn\theta}, \qquad (3.26)$$

с коэффициентом разложения a_{nn}, определяемым выражением (3.25).

Обратимся теперь к произвольным оптическим сигналам $s_1(r, \theta)$ и $s_2(r, \theta)$. Воспользуемся разложением произвольного сигнала в ряд по гармоническим функциям полярного угла:

$$s_1(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r)e^{jn\theta}, \quad s_2(r,\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q_m(r)e^{jm\theta}.$$

Выполним фурье-преобразование произведения $s_1(r, \theta)s_2(r, \theta)$:

$$s_1(r,\theta)s_2(r,\theta) \leftrightarrow \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} s_1(r,\theta)s_2(r,\theta)e^{-jwr\sin(\theta+\varphi)}rdrd\theta =$$

$$= \sum_{\substack{n,m\\ n=-\infty\\ m=-\infty}}^{\infty} \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} c_n(r)q_m(r)e^{jn\theta}e^{-jm\theta}e^{-jwr\sin(\theta+\varphi)}rdrd\theta =$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{n,m\\ n=-\infty\\ m=-\infty}}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}c_n(r)e^{jn\theta}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}q_m(\xi)e^{jm\varphi}e^{j\xi r\sin(\theta+\varphi)}\times$$

$$\times e^{-jwr\sin(\theta+\varphi)}\xi r d\xi dr d\varphi d\theta\times$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{n,m\\ n=-\infty\\ m=-\infty}}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}q_m(\xi)e^{jm\varphi}\xi d\xi d\varphi\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}c_n(r)e^{jn\theta}e^{-jr(w-\xi)\sin(\theta+\varphi)}r dr d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{n,m\\ n=-\infty\\ m=-\infty}}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}q_m(\xi)e^{-j(n-m)\varphi}\xi d\xi d\varphi\int_0^{\infty}c_n(r)J_n[r(w-\xi)]r dr=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{n,m\\ n=-\infty\\ m=-\infty}}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}q_m(\xi)\overline{c}_n(w-\xi)e^{-j(n-m)\varphi}\xi d\xi d\varphi.$$

Ненулевое значение этого выражения получается при условии $n = m$. Отсюда находим

$$s_1(r,\theta)s_2(r,\theta)\leftrightarrow\sum_{n=\infty}^{\infty}q_n(\xi)\overline{c}_n(w-\xi)\xi d\xi$$

или

$$s_1(r,\theta)s_2(r,\theta)\leftrightarrow 2\pi\sum_{n=\infty}^{\infty}\overline{q}_n(\xi)\overline{c}_n(w-\xi)\xi d\xi.$$

Отсюда, учитывая связь преобразований Фурье и Ганкеля, получаем

$$s_1(r,\theta)s_2(r,\theta)\overset{h}{\longleftrightarrow}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{q}_n(\xi)\overline{c}_n(w-\xi)\xi d\xi. \qquad (3.27)$$

Следовательно, преобразование Ганкеля произведения двух произвольных сигналов определяется суммой сверток ганкель-образов коэффициентов разложения сигналов в ряд по гармоническим функциям полярного угла.

3.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАНКЕЛЯ В ОПТИЧЕСКИХ СХЕМАХ С КОЛЬЦЕВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Обратимся к рис. 3.2. Оптическая схема на рисунке содержит два конфокально расположенных объектива *1* и *2*. В передней фокальной плоскости (ρ, α) объектива *1* помещен симметрично относительно оптической оси кольцевой источник, структурная функция которого $s_u(\rho) = \delta(\rho - a)$, где a — радиус кольца, которое считаем тонким. Объектив *1* с фокусным расстоянием F выполняет функцию конденсора. Объектив *2* с фокусным расстоянием f является фурье-объективом. Световое поле в плоскости (r, θ), сформированное объективом *1*, определяется через фурье-преобразование осесимметричной функции источника $s_u(\rho)$:

$$s_u(r) = 2\pi\bar{s}_u(r) = 2\pi a J_0(ar). \qquad (3.28)$$

Здесь мы воспользовались преобразованием Ганкеля (см. пример 3.3):

$$\bar{s}_u(r) = \int_0^\infty \rho\delta(\rho - a)J_0(r\rho) = aJ_0(ar).$$

Пусть в плоскости (r, θ) помещен транспарант с осесимметричной амплитудно-фазовой функцией пропускания $s(r)$. С учетом структуры светового поля (3.28) непосредственно за транспарантом формируется оптический сигнал $2\pi\bar{s}_u(r)s(r)$. Объектив *2* выполняет фурье-преобразование этого сигнала:

$$s(w, \varphi) = 2\pi\int_0^\infty rs(r)\bar{s}_u(r)J_0(wr)dr = 2\pi a\int_0^\infty rs(r)J_0(ar)J_0(wr)dr.$$

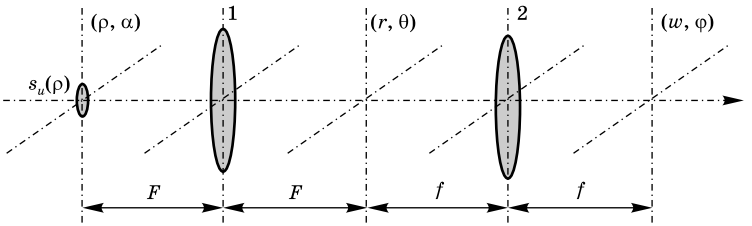


Рис. 3.2

Преобразование Ганкеля произведения двух сигналов определяется как двумерная свертка ганкель-образов (3.14):

$$a\int_0^\infty rs(r)J_0(ar)J_0(wr)dr =$$

$$= \int_0^\infty \delta\left(w - \frac{a}{\Gamma} - \xi\right)\bar{s}(\xi)\xi d\xi = \left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\bar{s}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right).$$

Отсюда

$$s(w, \varphi) = 2\pi\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\bar{s}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) = \left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \qquad (3.29)$$

или

$$\bar{s}(w, \varphi) = \left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\bar{s}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right),$$

где $\Gamma = f/F$ — коэффициент линейного увеличения оптической системы, состоящий из конфокально расположенных объективов *1* и *2*. Из выражения (3.29) следует, что в плоскости (w, φ) формируется фурье-спектр $s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)$ осесимметричного сигнала $s(r)$. Фурье-плоскость (w, φ) является плоскостью изображения кольцевого источника $s_u(\rho) = \delta(\rho - a)$, контур которого является границей, разделяющей пространства положительных и отрицательных частот.

Рассмотрим преобразование произвольного сигнала в схеме с кольцевым источником, показанной на рис. 3.2. Воспользуемся разложением произвольного сигнала $s(r, \theta)$ в ряд Фурье по гармоническим функциям полярного угла:

$$s(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r)e^{jn\theta}.$$

Для светового поля в плоскости (r, θ) непосредственно за транспарантом, отображающим сигнал $s(r, \theta)$, имеем

$$s_u(r)s(r, \theta) = 2\pi a J_0(ar)\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r)e^{jn\theta}. \qquad (3.30)$$

Второй объектив формирует в задней фокальной плоскости фурье-спектр светового поля (3.30):

$$s(w,\varphi)=2\pi\int_0^\infty r\bar{s}_u(r)s(r,\theta)e^{-jrw\sin(\theta+\varphi)}drd\theta=$$

$$=2\pi a\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}rJ_0(ar)\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(r)e^{jn\theta}e^{-jrw\sin(\theta+\varphi)}drd\theta=$$

$$=4\pi^2a\int_0^\infty rJ_0(ar)\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jn\varphi}c_n(r)J_n(wr)dr=$$

$$=4\pi^2a\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jn\varphi}\int_0^\infty rJ_0(ar)c_n(r)J_n(wr)dr. \qquad (3.31)$$

Поле в плоскости (w, φ) согласно (3.31) определяется через обобщенное преобразование Ганкеля произведения ганкель-образа кольцевого источника и коэффициента разложения сигнала $s(r)$ в ряд по полярным гармоникам $e^{jn\theta}$. Воспользовавшись теоремой о свертке (3.14), преобразуем (3.31):

$$s(w,\varphi)=4\pi^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jn\varphi}\int_0^\infty raJ_0(ar)c_n(r)J_n(wr)dr=$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-jn\varphi}\int_0^\infty\delta\left(w-\frac{a}{\Gamma}-\xi\right)\bar{c}_{nn}(\xi)\xi d\xi=$$

$$=2\pi\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{c}_{nn}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)e^{-jn\varphi}. \qquad (3.32)$$

Как следует из (3.32), световое поле в частотной плоскости представляет собой разложение в ряд фурье-спектра сигнала $s(r, \theta)$ по гармоническим функциям полярного угла φ. Коэффициенты разложения $\bar{c}_{nn}$ определяются через обобщенное преобразование Ганкеля коэффициентов разложения исходного сигнала и смещены по радиусу на a/Γ. При этом индекс коэффициента разложения совпадает с порядком обобщенного преобразования Ганкеля. Фурье-плоскость (w, φ) совмещена с плоскостью изображения источника. Изображение кольцевого источника является разграничительной линией между областями положительных и отрицательных пространственных частот в фурье-плоскости.

3.6. ДИФРАКЦИОННЫЕ ЛИНЗЫ

Пусть круглое отверстие радиусом $r = b$ в экране освещается сферической волной от точечного источника (рис. 3.3). Амплитуда волны в плоскости отверстия E_0.

Рассмотрим световое поле в плоскости (ρ, z), отстоящей на расстоянии z от отверстия и соответственно на расстоянии $a + z$ от точечного источника. Для поля, дифрагированного на отверстии, имеем

$$s(\rho, z) = \\ = \frac{k}{az\lambda} E_0 \exp\left(j\frac{k\rho^2}{2z}\right)\int_0^b r \exp\left(j\frac{kr^2}{2a}\right)\exp\left(j\frac{kr^2}{2z}\right)J_0\left(\frac{kr\rho}{z}\right)dr.$$

Здесь мы воспользовались осевой симметрией импульсного отклика слоя пространства между отверстием и плоскостью наблюдения (ρ, z). Запишем это выражение в виде

$$s(\rho, z) = \\ = \frac{k}{az\lambda} E_0 \exp\left(j\frac{k\rho^2}{2z}\right)\int_0^b r \exp\left(j\frac{kr^2}{2z_0}\right)J_0\left(\frac{kr\rho}{z}\right)dr, \quad (3.33)$$

где

$$\frac{1}{z_0} = \frac{1}{a} + \frac{1}{z}. \quad (3.34)$$

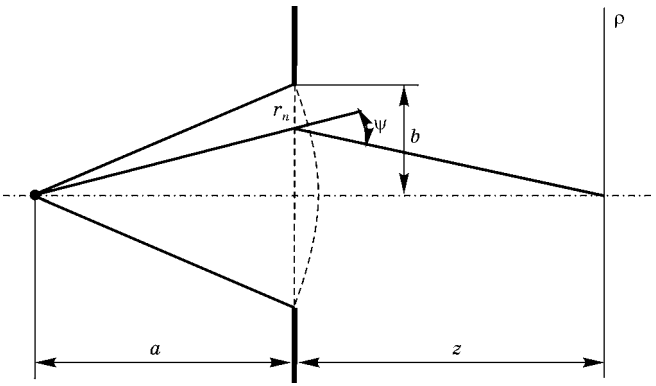


Рис. 3.3

Выражение (3.33) представляет собой с точностью до комплексных множителей преобразование Ганкеля от функции $\exp\left(j\frac{kr^2}{2z_0}\right)[\sigma(r)-\sigma(r-b)]$.

Рассмотрим распределение дифрагированного поля на оси z ($\rho = 0$):

$$s(0,z)=\frac{k}{az\lambda}E_0\int_0^b r\exp\left(j\frac{kr^2}{2z_0}\right)dr$$

или

$$s(0,z)=\frac{k}{az\lambda}E_0\int_0^b r\left[\cos\left(\frac{kr^2}{2z_0}\right)+j\sin\left(\frac{kr^2}{2z_0}\right)\right]dr.$$

Сделаем в этом выражении замену переменной

$$\frac{kr^2}{2z_0}=u, rdr=\frac{z_0}{k}du:$$

$$s(0,z)=\frac{z_0}{az\lambda}E_0\int_0^{\frac{kb^2}{2z_0}}(\cos u+j\sin u)du. \qquad (3.35)$$

Поскольку в (3.35) под знаком интеграла периодическая функция аргумента u, представим этот интеграл в виде

$$I=\int_0^{\frac{kb^2}{2z_0}}(\cos u+j\sin u)du=\sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha_n}{2}\int_{\pi\left(n-1-\frac{1}{2}\right)}^{\pi\left(n-1+\frac{1}{2}\right)}(\cos u+j\sin u)du. \qquad (3.36)$$

Область интегрирования в (3.36) разбита на интервалы (рис. 3.4), соответствующие полупериодам подынтегральной функции:

$$\pi\left(n-1-\frac{1}{2}\right)<u_n<\pi\left(n-1+\frac{1}{2}\right). \qquad (3.37)$$

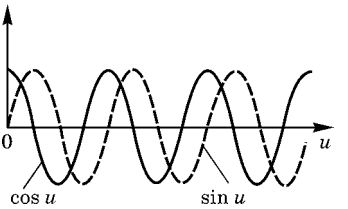


Рис. 3.4

Эти интервалы соответствуют так называемым *зонам*

Френеля, α_n определяет вклад n-й зоны Френеля в амплитуду дифрагированного поля в точке z.

Выполняя интегрирование в (3.36), получаем

$$I = \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{2} \int_{\pi\left(n-\frac{3}{2}\right)}^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} (\cos u + j \sin u) du =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{2} \left\{ \sin\left[\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)\right] - \sin\left[\pi\left(n - \frac{3}{2}\right)\right] \right\} =$$

$$= \frac{\alpha_1}{2} + \left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2}\right) + \left(\frac{\alpha_3}{2} - \alpha_4 + \frac{\alpha_5}{2}\right) + \ldots + (-1)^{N-1} \frac{\alpha_N}{2}, \quad (3.38)$$

где N — номер последней зоны. Полагая, что парциальный вклад по абсолютной величине для соседних зон мало отличается,

$$\left(\frac{\alpha_{2m-1}}{2} - \alpha_{2m} + \frac{\alpha_{2m+1}}{2}\right) = 0, \quad (3.39)$$

получаем

$$I = \frac{\alpha_1}{2} \pm \frac{\alpha_N}{2},$$

где знак «плюс» соответствует нечетному номеру последней зоны, а знак «минус» — четному номеру. Соответственно для амплитуды результирующего поля в точке z имеем

$$s(0, z) = \frac{z_0}{2za\lambda} E_0 (\alpha_1 \pm \alpha_N). \quad (3.40)$$

Как следует из (3.40), основной вклад в амплитуду результирующего поля дают первая и последняя зоны.

Из (3.37) видно, что область интегрирования разбита на зоны u_n. Определим радиус n-й зоны:

$$\frac{kb_n^2}{2z_0} = u_n = \pi n.$$

Откуда $b_n = (n\lambda z_0)^{1/2}$. Учитывая (3.34), находим для радиуса n-й зоны:

$$b_n = \left(\frac{n\lambda a z}{a + z}\right)^{1/2}. \quad (3.41)$$

Из (3.41) следует, что b_n является радиусом n-й зоны Френеля. Взаимная компенсация вклада четных и нечетных зон в (3.40) указывает на то, что поля в соседних зонах Френеля находятся в противофазе. Из (3.40) следует, что дифрагированное поле на оси в плоскости (ρ, z) при нечетном числе зон Френеля ($n = 2m + 1$) имеет максимум, а при четном числе зон Френеля ($n = 2m$) — минимум. Если блокировать все четные или нечетные зоны Френеля концентрическими кольцевыми экранами, сумма в (3.39) становится отличной от нуля и построенная таким образом амплитудная зонная пластинка приобретает по аналогии с линзой свойства концентрировать световое поле на оси z. На эту аналогию указывает равенство (3.34), имеющее вид формулы Гаусса для линзы.

Изготовим экран с концентрическими кольцевыми отверстиями, расположение которых удовлетворяет функции пропускания

$$T(u) = \frac{1}{2}[1 + \mathrm{sgn}(\cos u)]. \quad (3.42)$$

Тогда $T(u)$ является апертурной функцией в (3.36), блокирующей все четные зоны Френеля (рис. 3.5):

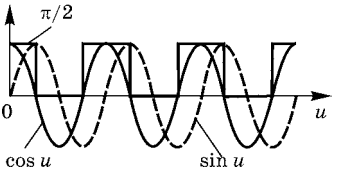


Рис. 3.5

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{kb^2/2z_0} T(u)(\cos u + j\sin u)du =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\alpha_n}{4} \int_{\pi\left(n-\frac{3}{2}\right)}^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} [1 + \mathrm{sgn}(\cos u)][\cos u + j\sin u]du =$$

$$= \sum_{m=0}^{\frac{1}{2}(N-1)} \frac{\alpha_{2m+1}}{4} \int_{\pi\left(2m+1-\frac{3}{2}\right)}^{\pi\left(2m+1-\frac{1}{2}\right)} [\cos u + j\sin u]du =$$

$$= \sum_{m=0}^{1/2(N-1)} \frac{\alpha_{2m+1}}{4} \int_{\pi\left(2m-\frac{1}{2}\right)}^{\pi\left(2m+\frac{1}{2}\right)} [\cos u + j\sin u]du =$$

$$= \sum_{m=0}^{1/2(N-1)} \frac{\alpha_{2m+1}}{4} \{\sin u - j\cos u\} \Bigg|_{\pi\left(2m-\frac{1}{2}\right)}^{\pi\left(2m+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{1/2(N-1)} \alpha_{2m+1}. \tag{3.43}$$

Как следует из (3.43), при перекрытии маской всех четных зон наблюдается многократная концентрация (фокусировка) дифрагированного поля на оси:

$$s(0, z) = \frac{z_0}{2za\lambda} E_0 \sum_{m=0}^{1/2(N-1)} \alpha_{2m+1}.$$

Такой же эффект фокусировки наблюдается при перекрытии экраном всех нечетных зон. В этом случае для функции пропускания маски имеем (рис. 3.6):

$$T(u) = \frac{1}{2}[1 - \mathrm{sgn}(\cos u)]. \tag{3.44}$$

Выражение, описывающее дифрагированное поле в точке z на оси, принимает вид

$$I = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N/2} \alpha_{2m}. \tag{3.45}$$

Отсюда для светового поля в точке z на оси получаем

$$s(0, z) = \frac{z_0}{2za\lambda} E_0 \sum_{m=1}^{N/2} \alpha_{2m}.$$

а *б*

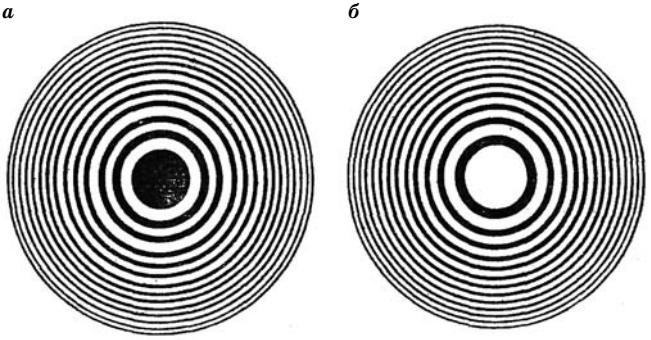


Рис. 3.6

Таким образом, блокирование всех нечетных зон Френеля также ведет к многократному усилению (фокусировке) дифрагированного поля на оси. Амплитудные маски с экранированием нечетных (рис. 3.6*а*) или четных (рис. 3.6*б*) зон Френеля называются *амплитудными зонными пластинками*.

Если поместить в отверстие фазовую маску из концентрических колец, вводящих фазовый сдвиг, равный π, для всех, например, четных зон Френеля, получается так называемая *фазовая зонная пластинка*. В фазовой зонной пластинке используется свет всех зон, четных и нечетных. В результате амплитуда поля в точке z возрастает в два раза, а интенсивность — в четыре. В фазовой зонной пластинке используется фазовая маска с функцией пропускания

$$T(u) = \mathrm{sgn}(\cos u). \tag{3.46}$$

Подстановка (3.46) в (3.38) дает

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi\left(n-\frac{3}{2}\right)}^{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)} \mathrm{sgn}(\cos u)(\cos u + j\sin u)du = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n. \tag{3.47}$$

Для светового поля, формируемого фазовой зонной пластинкой, в точке z получаем

$$s(0,z) = \frac{z_0}{2za\lambda}E_0\sum_{n=1}^{N}\alpha_n.$$

Поскольку амплитудные и фазовые зонные пластинки, подобно линзе, способны концентрировать дифрагированное световое поле, а положение источника и его изображение связаны формулой Гаусса (3.34), z_0 в выражении (3.34) принимает смысл фокусного расстояния f_p:

$$\frac{1}{f_p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{z}. \tag{3.48}$$

Следовательно, зонная пластинка эквивалентна линзе с функцией пропускания $\exp(-jkr^2/2f_p)$. Аналогичные

результаты получаются для фазовых пластинок, функция пропускания которых

$$T(u) = \mathrm{sgn}(\sin u).$$

На практике фокусное расстояние зонной пластинки определяется как и у линзы, при $a \to \infty$, когда она освещается плоской волной. Основное фокусное расстояние f_p соответствует первой открытой зоне Френеля радиуса b_1. Из формулы (3.41) получаем при $a \to \infty$ $f_p = b_1^2/\lambda = k\xi^2$, где $\xi^2 = b_1^2/2\pi$. В этом случае в фокусе формируется изображение бесконечно удаленного источника. Возможны и мнимые изображения, если $a < f_p$. При выполнении условия $a < f_p$ амплитуда расходящейся волны в структуре дифрагированного поля увеличивается по сравнению с амплитудой сходящейся волны. В этом случае расходящаяся волна как бы выходит из точки, являющейся мнимым изображением источника.

Поскольку фокусное расстояние зонной пластинки зависит от длины волны, для нее характерны хроматические аберрации. Если падающая на зонную пластинку волна монохроматическая, то дифрагированное поле имеет максимальную амплитуду в малой окрестности фокуса $f_p = k\xi^2$. Если же спектр падающей волны занимает полосу частот $[\omega_1, \omega_2]$, то дифрагированное поле концентрируется на отрезке в интервале $[k_1\xi^2, k_2\xi^2]$ или $[(\omega_1\xi^2)/c, (\omega_2\xi^2)/c]$ вдоль оси z. Зонная пластинка фокусирует полихроматическую плоскую волну в линейный отрезок, длина которого пропорциональна ширине спектра падающей волны.

В отличие от линзы, зонная пластинка дает не одно, а много изображений источника. Чтобы проиллюстрировать это, достаточно сместить точку наблюдения z на оси в такое положение z_1, чтобы в пределах каждого прозрачного кольца зонной площадки укладывалась не одна, а три зоны Френеля. Действие пары из них, четной или нечетной, будет взаимно скомпенсировано. Поэтому амплитуда колебаний в точке z_1 будет определяться только третьей зоной

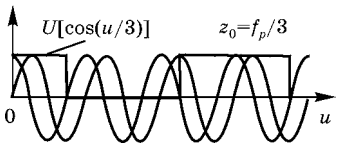


Рис. 3.7

(рис. 3.7). Разность фаз для волн от нескомпенсированных зон Френеля, находящихся в соседних прозрачных кольцах пластинки, увеличивается в три раза по сравнению с исходной точкой наблюдения z. Поэтому положение точки наблюдения z_1 определяется соотношением

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{z_1}=\frac{3}{f_p},$$

откуда следует, что, помимо фокусного расстояния f_p, фазовая пластинка обладает еще и фокусным расстоянием $\frac{1}{3}f_p$.

Рассмотренный частный случай можно обобщить и на другие точки наблюдения z_m, для которых в пределах каждого прозрачного кольца зонной пластинки укладывается нечетное число $2m + 1$ зон Френеля:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{z_m}=\frac{2m+1}{f_p}. \qquad (3.49)$$

Из соотношения (3.49) следует, что у зонной пластинки существует множество фокусных расстояний

$$f_m=\frac{f_p}{2m+1}, \quad \text{где } m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (3.50)$$

Отрицательным значениям m соответствуют расходящиеся волны. В этом случае зонная пластинка действует как отрицательная линза. В расходящемся дифрагированном поле зонная пластинка формирует мнимые изображения источника. Зонная пластинка по своим функциональным возможностям эквивалентна нескольким положительным и отрицательным линзам, вложенным в одну апертуру.

Перспективным направлением развития технологии дифракционных линз являются зонные пластинки с заданным фазовым профилированием зоны. Простейшим примером такой зонной пластинки является дифракционный аналог линзы. На рис. 3.8 показано, как дифракционная линза a с фазовыми профилями зон получается геометрическим преобразованием из плосковыпуклой линзы b. Преобразование заключается в делении

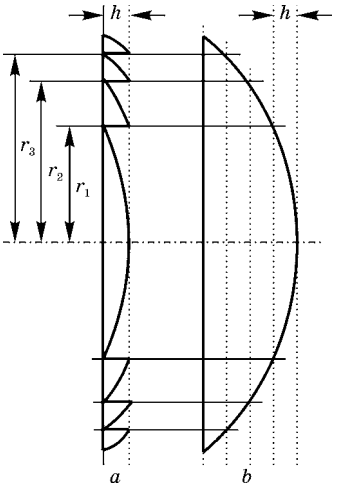


Рис. 3.8

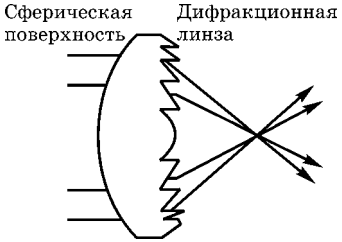


Рис. 3.9

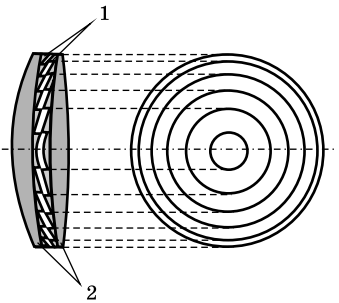


Рис. 3.10

плосковыпуклой линзы на тонкие слои одинаковой толщины $h = N\lambda/(n-1)$, где N — целое число. Число зон Френеля в дифракционной линзе, как это видно из рисунка, равно числу слоев.

Фазовый профиль зоны в современной технологии называется *киноформным*. Отсюда зонная пластинка с киноформным профилем получила название «*киноформная линза*». Дифракционная (киноформная) линза представляет собой один из примеров *дифракционных оптических элементов* (ДОЭ). В составе оптической системы дифракционные линзы могут использоваться по прямому назначению (как линзы) или в качестве коррекционных элементов. Такие элементы могут служить корректорами хроматических аберраций благодаря дисперсионным свойствам и асферизации фронта дифрагированной волны.

На рис. 3.9 показана конфигурация гибридной дифракционно-рефракционной линзы. В таких линзах дисперсия света в рефракционной и дифракционной компонентах имеет разный знак. Поэтому можно построить гиб-

ридную линзу, которая за счет взаимной компенсации дисперсий рефракционной и дифракционной компонент может работать в белом свете.

Другой пример гибридного оптического элемента, структура которого содержит двухслойную дифракционную линзу *1*, вклеенную между двумя однородными линзами *2*, представлен на рис. 3.10.

Дифракционные линзы приобретают свойства квадратичного фазового фильтра, благодаря квадратичному закону изменения пространственной частоты в зонной структуре. В случае цилиндрической симметрии этой структуры дифракционная линза получает способность фокусирования светового поля, подобно традиционной сферической линзе. Если изменение пространственной частоты симметрично в плоскости относительно оси, заданной в этой плоскости, дифракционная линза фокусирует свет, подобно цилиндрической линзе. В ситуации, когда пространственная частота изменяется в плоскости по разным законам в двух взаимно ортогональных направлениях, дифракционная линза анаморфотна, подобно двум ортогональным цилиндрическим линзам с различными оптическими силами. Дифракционные линзы с нулевой оптической силой используются как дифракционные корректоры. Пространственно-частотная структура дифракционных корректоров содержит члены более высокого порядка, чем квадратичные.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение функции Бесселя. Почему эта функция применяется для описания преобразования Ганкеля?
2. Как тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через функции Бесселя?
3. Как записываются рекуррентные формулы для функции Бесселя?
4. Как связано преобразование Фурье с преобразованием Ганкеля?
5. Как связаны прямое и обратное преобразования Ганкеля?
6. Каковы основные свойства преобразования Ганкеля?
7. Как определяется преобразование Ганкеля произведения двух сигналов с круговой симметрией?

8. Какой физический смысл отражает формула Парсеваля в случае преобразования Ганкеля?
9. Определите обобщенное преобразование Ганкеля для осесимметричных сигналов.
10. Определите обобщенное преобразование Ганкеля для произвольных сигналов.
11. Как выполняется оптическое преобразование Фурье–Бесселя в схеме с кольцевым источником?
12. Как определяется когерентная передаточная функция линейной системы с осевой симметрией?
13. Как определяется преобразование Ганкеля произведения сигналов и свертки сигналов?
14. Как определяется импульсный отклик круглого отверстия в плоском экране?
15. Что такое зона Френеля?
16. Как работает амплитудная фазовая пластинка?
17. Чем отличаются фазовая и амплитудная зонные пластинки?
18. Что такое киноформный оптический элемент?
19. Укажите области применения дифракционных линз.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что $\int_0^\infty J_n(x)dx = 1$ при $n \geq 0$.

2. Доказать, что $\int_0^\infty \frac{J_n(x)}{x} = \frac{1}{n}$.

3. Доказать, что $J_0^2(0) + J_1^2(0) = 1$.

4. Доказать, что $\frac{J_1(x)}{x} = J_0(x) - J_1'(x)$.

5. Доказать, что $2\int_0^a \frac{J_1^2(x)}{x}dx = 1 - J_0^2(a) - J_1^2(a)$.

6. Выполнить преобразование Ганкеля гауссова сигнала $s(r) = \exp(-\alpha r^2)$.

7. Найти преобразование Ганкеля оптического сигнала $s(r) = s_0\exp(j\alpha r^2)$.

8. Пользуясь решением задачи 7, получить преобразования Ганкеля сигналов $s_1 = \cos(\alpha r^2)$, $s_2 = \sin(\alpha r^2)$.

9. Показать, что

$$\frac{\sin(cr)}{r} \xleftrightarrow{h} \frac{p_c(w)}{c^2 - w^2},$$

где

$$p_c(w) = \begin{cases} 1, & |w| < c, \\ 0, & |w| > c. \end{cases}$$

10. Найти преобразование Ганкеля от сигнала

$$s(r) = \frac{J_n(r)}{r^n}.$$

11. На амплитудную зонную пластинку падает нормально плоская волна ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Максимальная интенсивность светового поля достигается в точке на расстоянии $z_m = 0{,}48$ м от пластинки. Найти радиус центральной непрозрачной зоны Френеля и положения трёх первых дополнительных фокусов.

12. Найти импульсный отклик круглого экрана и доказать существование «пятна Пуассона».

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ

4.1. ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Обратимся к неравенству Шварца

$$|(s_1, s_2)|^2 \le (s_1, s_1)(s_2, s_2).$$

Здесь $s_1(t)$ и $s_2(t)$ — зависящие от времени сигналы. При $s_1 = \gamma s_2^*$, где γ — постоянный множитель, неравенство Шварца обращается в равенство.

Запишем неравенство Шварца в виде

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}(s_1^* s_2 + s_1 s_2^*)dt\right|^2 \le 4\int_{-\infty}^{\infty}|s_1|^2\,dt\int_{-\infty}^{\infty}|s_2|^2\,dt. \qquad (4.1)$$

Пусть

$$s_1(t) = ts(t), s_2(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

Подставив $s_1(t)$ и $s_2(t)$ в (4.1), получаем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left[ts^*\frac{ds}{dt} + ts\frac{ds^*}{dt}\right]dt\right|^2 \le 4\int_{-\infty}^{\infty}|ts^*|^2\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{ds}{dt}\right|^2 dt. \qquad (4.2)$$

Выполним преобразование левой части неравенства

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(ts^*\frac{ds}{dt} + ts\frac{ds^*}{dt}\right)dt\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty}t\left(s^*\frac{ds}{dt} + s\frac{ds^*}{dt}\right)dt\right|^2 =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}t\frac{d|s|^2}{dt}dt\right|^2 = \left|t|s|^2\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}|s|^2\,dt\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty}|s|^2\,dt\right|^2 = E^2, \qquad (4.3)$$

где E — энергия сигнала. Здесь учтено, что для физического сигнала $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt{ts}(t)=0$ или, что то же самое, $\lim\limits_{(t)\to\infty} t\,|s(t)^2|=0$. После подстановки (4.3) в (4.2) запишем

$$E^2 \le 4\int_{-\infty}^{\infty}|ts(t)|^2\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{ds}{dt}\right|^2 dt. \qquad (4.4)$$

Равенство достигается при $ts(t)=\gamma\dfrac{ds^*(t)}{dt}$. Если $s(\omega)$ — спектральная плотность сигнала $s(t)$, то с учетом свойств фурье-преобразования для спектральной плотности производной сигнала имеем

$$\frac{ds}{dt}\leftrightarrow j\omega s(\omega).$$

Согласно формуле Парсеваля для энергии производной сигнала получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{ds}{dt}\right|^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\,|s(\omega)|^2\,d\omega. \qquad (4.5)$$

После подстановки (4.5) в (4.4) приходим к неравенству

$$E^2 \le 4\int_{-\infty}^{\infty}t^2\,|s(t)|^2\,dt\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\,|s(\omega)|^2\,d\omega$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^2\,|s(t)|^2\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\,|s(\omega)|^2\,d\omega \ge \frac{\pi}{2}E^2. \qquad (4.6)$$

Неравенство (4.6) обращается в равенство только для сигналов вида

$$s(t)=Ae^{-\alpha t^2}.$$

Действительно, в этом случае

$$\frac{d}{dt}[Ae^{-\alpha t^2}]=-2\alpha Ate^{-\alpha t^2}=-2\alpha Ats(t)$$

или $ts(t)=\gamma\dfrac{d}{dt}s^*(t)$, что соответствует условию обращения неравенства Шварца в равенство. Выражение (4.6) является записью так называемого принципа неопределенности.

Определим протяженность сигналов $(\Delta t)^2$ и $(\Delta\omega)^2$ в координатном и частотном пространствах как

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2\,|s(t)|^2\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2\,dt} = \frac{1}{E}\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2\,|s(t)|^2\,dt,$$

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^2\,|s(\omega)|^2\,d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2\,d\omega} = \frac{1}{2\pi E}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^2\,|s(\omega)|^2\,d\omega.$$

Подставляя

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2\,|s(t)|^2\,dt = (\Delta t)^2 E \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega^2\,|s(\omega)|^2\,d\omega = 2\pi(\Delta\omega)^2 E$$

в неравенство (4.6), получаем $(\Delta t)^2(\Delta\omega)^2 \geq 1/4$. Тогда

$$\Delta t\Delta\omega \geq \frac{1}{2}. \tag{4.7}$$

Мы получили соотношение неопределенностей, связывающее длительность сигнала и ширину его фурье-спектра. Обратимся к квантово-механическим объектам, которые можно рассматривать как сигналы в координатном и частотном пространствах, поскольку частотное пространство является аналогом пространства импульсного. Координаты импульсного пространства в квантовой механике связаны с частотным соотношением $k = \hbar\omega = \frac{h}{2\pi}\omega$, где $\hbar$ — постоянная Планка. Умножим (4.7) на постоянную Планка $\hbar$:

$$\Delta t\Delta E \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{4.8}$$

Здесь учтено, что $\Delta\omega\hbar = \Delta E$ — энергия. Мы пришли к известному из квантовой механики соотношению неопределенностей (4.8), связывающему флуктуации длительности сигнала и его энергии. Умножим и разделим левую часть неравенства (4.7) на групповую скорость v_g распространения сигнала в направлении z:

$$v_g \Delta t \frac{\Delta\omega}{v_g} \geq \frac{1}{2}.$$

Учитывая, что $v_g \Delta t = \Delta z, \frac{\Delta\omega}{v_g} = \Delta k$, где Δz — пространственный интервал, Δk — интервал в пространстве волновых чисел. Отсюда

$$\Delta z \Delta k \geq \frac{1}{2}. \tag{4.9}$$

Соотношение неопределенностей (4.9) связывает результаты измерения пространственной координаты и волнового числа для оптических полей.

Умножим (4.9) на постоянную Планка:

$$\Delta z \Delta k \hbar \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Учитывая, что $k\hbar = p$, где p — импульс, получаем известное в квантовой механике соотношение неопределенностей Гейзенберга для пространственного и импульсного интервалов:

$$\Delta z \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{4.10}$$

Все эти соотношения, известные из физики, есть следствие принципа неопределенности (4.7), связывающего локализации сигнала в координатном и частотном (импульсном) пространствах.

4.2. ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Рассмотрим двумерный пространственный оптический сигнал $s(x, y)$, фурье-спектр которого $s(K_x, K_y)$ и энергия

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |s(x, y)|^2 \, dxdy.$$

Покажем, что для этого сигнала принцип неопределенности принимает следующие формы:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, |s(x, y)|^2 \, dxdy \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_x^2 \, |s(K_x, K_y)|^2 \, dK_x dK_y \geq \pi^2 E^2, \tag{4.11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\,|s(x,y)|^2\,dxdy\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_y^2\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y \geq \pi^2E^2, \tag{4.12}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+y^2)\,|s(x,y)|^2\,dxdy\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(K_x^2+K_y^2)\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y \geq 4\pi^2E^2. \tag{4.13}$$

Равенство в выражениях (4.11)–(4.13) достигается соответственно при условиях

$$s(x,y)=A(y)e^{-\alpha x^2},\quad s(x,y)=B(x)e^{-\beta y^2},\quad s(x,y)=Ce^{-(\alpha x^2+\beta y^2)}.$$

Для доказательства соотношения (4.11) воспользуемся неравенством Шварца

$$|(s_1,\,s_2)|^2 \leq (s_1,\,s_1)(s_2,\,s_2),$$

где s_1 и s_2 — двумерные пространственные сигналы. Запишем неравенство Шварца в виде, аналогичном (4.1):

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[s_1^*s_2+s_1s_2^*]dxdy\right|^2 \leq 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|s_1|^2\,dxdy\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|s_2|^2\,dxdy. \tag{4.14}$$

Пусть

$$s_1(x,y)=xs(x,y),\quad s_2(x,y)=\frac{ds(x,y)}{dx}.$$

После подстановки выражений для $s_1(x,\,y)$ и $s_2(x,\,y)$ в (4.14) получаем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[xs^*\frac{ds(x,y)}{dx}+xs\frac{ds^*(x,y)}{dx}\right]dxdy\right|^2 \leq$$

$$\leq 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|xs(x,y)|^2\,dxdy\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{ds(x,y)}{dx}\right|^2 dxdy. \tag{4.15}$$

Преобразуем левую часть этого неравенства:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\left[s^*(x,y)\frac{ds(x,y)}{dx}+s(x,y)\frac{ds^*(x,y)}{dx}\right]dxdy\right|^2 =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d\,|s(x,y)|^2}{dx} dx dy \right|^2 =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ x\,|s(x,y)|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |s(x,y)|^2\, dx \right\} dy \right|^2 =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |s(x,y)|^2\, dx dy \right|^2 = E^2. \qquad (4.16)$$

Здесь учтено, что для сигналов с конечной энергией $\lim\limits_{x\to\infty}[x\,|s(x,y)|^2] = 0$. Поскольку $s(x,y) \leftrightarrow s(K_x, K_y)$, из свойств фурье-преобразования производной сигнала получаем

$$\frac{d}{dx} s(x,y) \leftrightarrow jK_x s(K_x, K_y),$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{ds(s,y)}{dx} \right|^2 dx dy = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_x^2\, |s(K_x, K_y)|^2\, dK_x dK_y. \qquad (4.17)$$

После подстановки (4.16) и (4.17) в (4.15) получим

$$E^2 \le 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, |s(x,y)|^2\, dx dy \cdot \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_x^2\, |s(K_x, K_y)|^2 dK_x dK_y.$$

Отсюда приходим к принципу неопределенности в форме (4.11). Совершенно аналогично доказывается выражение (4.12). Для доказательства неравенства (4.13) запишем (4.11) и (4.12) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, |s(x,y)|^2\, dx dy \ge \frac{\pi^2 E^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_x^2\, |s(K_x, K_y)|^2\, dK_x dK_y},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, |s(x,y)|^2\, dx dy \ge \frac{\pi^2 E^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_y^2\, |s(K_x, K_y)|^2\, dK_x dK_y}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+y^2)\,|s(x,y)|^2\,dxdy \geq$$

$$\geq \pi^2E^2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(K_x^2+K_y^2)\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y \Big/\right.$$

$$\left.\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_x^2\,|s(K_x,K_y)^2dK_xdK_y\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_y^2\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y\right\}. \tag{4.18}$$

Умножая (4.18) на

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(K_x^2+K_y^2)\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y,$$

приходим к выражению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+y^2)\,|s(x,y)|^2\,dxdy\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(K_x^2+K_y^2)\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y \geq \tag{4.19}$$

$$\geq \pi^2E^2\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(K_x^2+K_y^2)\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y\right\}^2 \Big/$$

$$\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_x^2\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_y^2\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y.$$

Правая часть неравенства преобразуется к виду

$$\pi^2E^2\left\{\left(\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_x^2\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y\right]^2+\right.\right.$$

$$\left.+\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_y^2\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y\right]^2\right)\Big/ \tag{4.20}$$

$$\Big/\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_x^2\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y\times\right.$$

$$\left.\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_y^2\,|s(K_x,K_y)|^2\,dK_xdK_y\right)+2\right\}=\pi^2E^2\left\{\xi+\frac{1}{\xi}+2\right\}\geq 4\pi^2E^2,$$

где

$$\xi = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_x^2 \left|s(K_x, K_y)\right|^2 dK_x dK_y}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_y^2 \left|s(K_x, K_y)\right|^2 dK_x dK_y}.$$

Равенство в (4.20) достигается при $\xi = 1$. Подставляя (4.20) в (4.19), приходим к принципу неопределенности в форме (4.13).

Определим протяженность сигналов в координатном и частотном пространствах:

$$(\Delta x)^2 = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|s(x, y)\right|^2 dxdy}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|s(x, y)\right|^2 dxdy} = \frac{1}{E}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|s(x, y)\right|^2 dxdy,$$

$$(\Delta y)^2 = \frac{1}{E}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 \left|s(x, y)\right|^2 dxdy,$$

$$(\Delta K_x)^2 = \frac{\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_x^2 \left|s(K_x, K_y)\right|^2 dK_x dK_y}{\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|s(K_x, K_y)\right|^2 dK_x dK_y} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 E}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_x^2 \left|s(K_x, K_y)\right|^2 dK_x dK_y,$$

$$(\Delta K_y)^2 = \frac{1}{4\pi^2 E}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_y^2 \left|s(K_x, K_y)\right|^2 dK_x dK_y.$$

Подставляя

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|s(x, y)\right|^2 dxdy = (\Delta x)^2 E,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 \left|s(x, y)\right|^2 dxdy = (\Delta y)^2 E,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_x^2\,|s(K_x, K_y)|^2\, dK_x dK_y = 4\pi^2(\Delta K_x)^2 E,$$

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} K_y^2\,|s(K_x, K_y)|^2\, dK_x dK_y = 4\pi^2(\Delta K_y)^2 E$$

в (4.11)–(4.12), получаем

$$(\Delta x)^2(\Delta K_x)^2 \geq \frac{1}{4};\ \ (\Delta y)^2(\Delta K_y)^2 \geq \frac{1}{4}$$

или

$$\Delta x \Delta K_x \geq \frac{1}{2},\ \ \Delta y \Delta K_y \geq \frac{1}{2}.$$

Перемножая эти неравенства, приводим к следующему виду соотношения неопределенностей:

$$\Delta x \Delta y \Delta K_x \Delta K_y \geq \frac{1}{4}. \qquad (4.21)$$

В общем случае оптический сигнал зависит от времени и пространственных координат. Тогда $s(x, y; t) \leftrightarrow s(K_x, K_y; \omega)$. Перемножая (4.7) и (4.21), получаем соотношение неопределенностей для сигнала $s(x, y; t)$:

$$\Delta t \Delta\omega \Delta x \Delta y \Delta K_x \Delta K_y \geq \frac{1}{8}. \qquad (4.22)$$

Произведение длительности Δt сигнала $s(t)$ на полосу $\Delta\omega$ получило название базы сигнала, значение которой дает число степеней свободы сигнала. Для оптического сигнала $s(x, y, t)$, зависящего от времени и пространственных координат, база равна $\Delta t \Delta\omega \Delta x \Delta y \Delta K_x \Delta K_y$. Следовательно, соотношение неопределенностей (4.22) дает ограничение снизу для базы сигнала. Учитывая, что оптический сигнал может иметь две ортогональные поляризационные составляющие, запишем общее число степеней свободы $N = 2\Delta t \Delta\omega \Delta x \Delta y \Delta K_x \Delta K_y$. Отсюда (4.22) с учетом поляризационных степеней свободы принимает вид

$$\Delta t \Delta\omega \Delta x \Delta y \Delta K_x \Delta K_y \geq \frac{1}{16}.$$

Особенностью оптического сигнала является возможность перераспределения пространственных ($\Delta x \Delta y \Delta K_x \Delta K_y$), временны́х ($\Delta t \Delta\omega$) и поляризационных степеней свободы.

Анализ оптических сигналов в частотно-координатном пространстве объясняет такие фундаментальные понятия,

как соотношение неопределенностей и эффект Доплера. Точные пространственно-временны́е образы следуют из представления движущегося физического объекта сигналом и его фурье-спектром в пространстве. Пусть движущийся в координатном пространстве физический объект описывается сигналом вида $s(x, y, z - v_g t; t)$, где v_g — скорость объекта по оси z. Определим пространственно-частотный фурье-образ сигнала:

$$s(x, y, z - v_g t; t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, z - v_g t; t) \times$$

$$\times \exp(-jK_z z)\exp(-j\omega t)dzdt = \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y, K_z; t)\exp(-jK_z v_g t) \times$$

$$\times \exp(-j\omega t)dt = s(x, y, K_z; \omega + K_z v_g) = s(x, y, K_z; \omega + \Omega). \tag{4.23}$$

Здесь $\Omega = K_z v_g$. Из (4.23) видно, что фурье-спектр смещен на частоту Ω, равную доплеровскому частотному сдвигу.

В случае произвольного направления движения:

$$s(\mathbf{r} - \mathbf{v}t; t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{K})\exp(-j\mathbf{K}\mathbf{v}t)\exp(-j\omega t)dt = s(\mathbf{K}, \omega + \Omega).$$

Здесь $\mathbf{K}$ — пространственная частота; $\mathbf{v}$ — скорость движения; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор положения объекта; $\Omega = \mathbf{K}\mathbf{v}$ — доплеровский сдвиг частоты. Пространственно-частотный образ физического сигнала реализуем. Его волновые свойства проявляются, например, в дифракционных явлениях и эффекте Доплера.

4.3. ПРИНЦИП НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАНКЕЛЯ

Обратимся к форме записи принципа неопределенности (4.13):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2)\,|s(x, y)|^2\, dxdy \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (K_x^2 + K_y^2)\,|s(K_x, K_y)|^2\, dK_x dK_y \geq 4\pi^2 E^2.$$

Для сигнала с круговой симметрией

$$r^2 = x^2 + y^2, \;\; w^2 = K_x^2 + K_y^2, \;\; s(K_x, K_y) = 2\pi\bar{s}(w),$$

$$E = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} r\,|s(r)|^2\,dr.$$

В полярной системе координат с учетом этих соотношений неравенство приводится к виду

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} r^2\,|s(r)|^2\,rdr \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} w^2\,|2\pi\bar{s}(w)|^2\,wdw \geq 4\pi^2 E^2.$$

Отсюда получаем

$$\int_0^{\infty} r^3\,|s(r)|^2\,dr \int_0^{\infty} w^3\,|\bar{s}(w)|^2\,dw \geq \frac{E^2}{4\pi^2}. \qquad (4.24)$$

Неравенство (4.24) отображает принцип неопределенности для преобразования Ганкеля. Оно обращается в равенство для гауссова сигнала:

$$s(r) = ce^{-\alpha r^2}.$$

Введем интервалы, ограничивающие сигнал в координатном и частотном пространствах:

$$(\Delta r)^2 = \frac{2\pi \int_0^{\infty} r^3\,|s(r)|^2\,dr}{2\pi \int_0^{\infty} r\,|s(r)|^2\,dr} = \frac{2\pi}{E} \int_0^{\infty} r^3\,|s(r)|^2\,dr,$$

$$(\Delta w)^2 = \frac{2\pi \int_0^{\infty} w^3\,|s(w)|^2\,dw}{2\pi \int_0^{\infty} w\,|s(w)|^2\,dw} = \frac{2\pi}{E} \int_0^{\infty} w^3\,|s(w)|^2\,dw.$$

Подставляя

$$\int_0^{\infty} r^3\,|s(r)|^2\,dr = \frac{(\Delta r)^2 E}{2\pi}, \;\; \int_0^{\infty} w^3\,|\bar{s}(w)|^2\,dw = \frac{(\Delta w)^2 E}{2\pi}$$

в (4.24), получаем

$$(\Delta r)^2 (\Delta w)^2 \geq 1$$

или

$$\Delta r \Delta w \geq 1.$$

4.4. РАЗЛОЖЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В РЯД КОТЕЛЬНИКОВА

Обратимся к сигналу, фурье-спектр которого представлен на рис. 4.1:

$$s(\omega)=\begin{cases} s_0, & |\omega|\le\omega_z; \\ 0, & |\omega|>\omega_z. \end{cases}$$

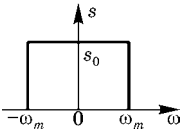


Рис. 4.1

Такому фурье-спектру соответствует сигнал, который называется *идеальным низкочастотным сигналом*:

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} s_0 e^{j\omega t}d\omega=\frac{s_0\omega_m}{\pi}\frac{\sin\omega_m t}{\omega_m t}. \qquad (4.25)$$

Рассмотрим условия, при которых сигналы с ограниченным спектром могут быть ортогональными. Для этого воспользуемся обобщенной формулой Рэлея (1.34):

$$(s_1(t), s_2(t))=\frac{1}{2\pi}(s_1(\omega), s_2^*(\omega)).$$

Из нее следует, что условием ортогональности сигналов с ограниченным спектром является равенство нулю скалярного произведения фурье-спектров. Очевидно, что это условие выполняется в частном случае, когда спектры сигналов не перекрываются в частотном пространстве.

Для идеальных низкочастотных сигналов ортогональность может быть получена за счет взаимного смещения. Пусть два таких сигнала взаимно смещены по временно́й оси на интервал t_0:

$$s_1(t)\leftrightarrow s(\omega),$$
$$s_2(t)=s_1(t-t_0)\leftrightarrow s(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Тогда согласно обобщенной формуле Рэлея имеем

$$(s_1(t), s_1(t-t_0))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|s(\omega)|^2\, e^{j\omega t_0}d\omega=\frac{s_0^2}{\pi}\omega_m\frac{\sin\omega_m t_0}{\omega_m t_0}. \qquad (4.26)$$

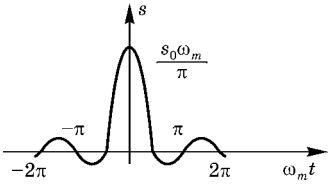


Рис. 4.2

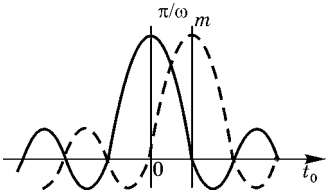


Рис. 4.3

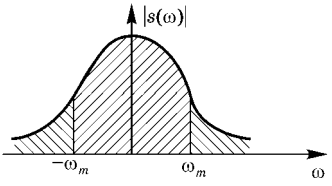


Рис. 4.4

Из (4.26) и рис. 4.2 следует условие ортогональности сигналов $s_1(t)$ и $s_1(t-t_0)$: $\omega_m t_0 = n\pi$, где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Минимально возможный сдвиг получается при $n = \pm 1$:

$$t_0 = \pm\frac{\pi}{\omega_m} = \pm\frac{1}{2f_m}. \quad (4.27)$$

Графики идеальных низкочастотных сигналов, ортогональных при выполнении условия (4.27), показаны на рис. 4.3. Из таких функций при соблюдении условия $t_0 = n\pi/\omega_m$ может быть построен ортогональный базис для разложения произвольных сигналов, спектральная полоса которых ограничена наивысшей частотой ω_m.

Пусть сигнал $s(t)$ имеет спектр, ограниченный частотой ω_m (рис. 4.4):

$$s(t) \leftrightarrow s(\omega), \quad s(\omega) = 0 \quad \text{при } |\omega| > \omega_m,$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} s(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Разложим сигнал $s(t)$ в ряд по ортогональному базису, образованному функциями вида

$$u_n(t) = A\frac{\sin[\omega_m(t - n\pi/\omega_m)]}{\omega_m(t - n\pi/\omega_m)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2. \quad (4.28)$$

Множитель A выбираем из условия, чтобы норма функции (4.28) была единичной. В этом случае ортогональный базис, образованный этими функциями, становится ортонормированным. Поскольку норма не зависит от сдвига во времени, достаточно определить значение коэффициента A для функции (4.28) при $n = 0$:

$$u_0(t) = A\frac{\sin\omega_m t}{\omega_m t},$$

$$\|u_0(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u_0^2(t)dt = \frac{A^2}{\omega_m^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\omega_m t}{t^2}dt = \frac{\pi A^2}{\omega_m} = 1.$$

Отсюда $A = \sqrt{\omega_m/\pi}$. Функции, образующие ортонормированный базис вида

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{\omega_m}{\pi}}\frac{\sin[\omega_m(t - n\pi/\omega_m)]}{\omega_m(t - n\pi/\omega_m)}, \qquad (4.29)$$

называются функциями отсчета.

Разложим сигнал $s(t)$ в ряд Фурье по функциям отсчета:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u_n(t).$$

Коэффициенты разложения, как известно, определяются скалярным произведением сигнала на соответствующую функцию (4.29) из ортонормированного базиса:

$$c_n = (s(t), u_n^*(t)).$$

Воспользовавшись представлениями сигнала через обратное фурье-преобразование спектральной функции и обобщенной формулой Рэлея, получаем

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} s(\omega)e^{j\omega t}d\omega u_n^*(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} s(\omega)d\omega\int_{-\infty}^{\infty} u_n(-t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (4.30)$$

Здесь мы учли, что функция отсчета по определению (4.29) — действительная. Применяя теорему смещения, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n(-t)e^{-j\omega t}dt = u_n(\omega) = \sqrt{\frac{\omega_m}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin[\omega_m(t + n\pi/\omega_m)]}{\omega_m(t + n\pi/\omega_m)}e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \mathrm{rect}\left[\frac{\omega}{\omega_m}\right]\sqrt{\frac{\omega_m}{\pi}}\cdot\frac{\pi}{\omega_m}e^{j\frac{n\pi}{\omega_m}\omega} = \sqrt{\frac{\omega_m}{\pi}}e^{j\frac{n\pi}{\omega_m}\omega}\,\mathrm{rect}\left[\frac{\omega}{\omega_m}\right]. \qquad (4.31)$$

После подстановки (4.31) в (4.30) находим коэффициент разложения

$$c_n = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_m}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_m}^{\omega_m} s(\omega)e^{j\frac{n\pi}{\omega_m}\omega}d\omega\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_m}}s\left(\frac{n\pi}{\omega_m}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_m}}s_n,$$

где s_n — значение сигнала $s(t)$ в n-й отсчетной точке

$$t_n = \frac{n\pi}{\omega_m} = \frac{n}{2f_m}.$$

Отсюда для разложения сигнала $s(t)$ в ряд по функциям отсчета получаем

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u_n(t - t_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \frac{\sin[\omega_m(t - n\pi/\omega_m)]}{\omega_m(t - n\pi/\omega_m)}. \qquad (4.32)$$

Это разложение образует так называемый *ряд Котельникова*. Ортонормированный базис, состоящий из функций отсчета, получил название *базиса Котельникова*. Выражение (4.32) является записью теоремы Котельникова, утверждающей, что сигнал, спектр которого ограничен наивысшей частотой ω_m, может быть полностью восстановлен по известным отсчетам этого сигнала, взятым через равные интервалы π/ω_m.

Оценим ошибку аппроксимации сигнала рядом Котельникова. Пусть $s(t)$ — сигнал с неограниченной шириной спектра $s(\omega)$ (рис. 4.4). Аппроксимируем сигнал $s(t)$ сигналом $s_{se}(t, \omega_m)$, спектрально ограниченным в полосе $[-\omega_m, \omega_m]$:

$$s(t) = s_{se}(t, \omega_m) + s_{er}(t),$$

где $s_{er}(t)$ — сигнал ошибки, занимающий бесконечную полосу частот $|\omega| > \omega_m$. Спектры сигналов $s_{se}(\omega)$ и $s_{er}(\omega)$ не перекрываются. Поэтому сигналы $s_{se}(t, \omega_m)$ и $s_{er}(t)$ ортогональны, а их энергии — аддитивны:

$$\|s\|^2 = \|s_{se}\|^2 + \|s_{er}\|^2.$$

За ошибку аппроксимации сигнала принимается норма сигнала ошибки, оценка которой следует из обобщенной формулы Рэлея:

$$\|s_{er}\| = \left[\frac{1}{\pi}\int_{\omega_m}^{\infty} W_s(\omega)d\omega\right]^{1/2},$$

где $W_s(\omega) = |s(\omega)|^2$ — энергетический спектр сигнала.

Пример 4.1. Разложить в ряд Котельникова сигнал $s(t)$, спектр которого

$$s(\omega) = \begin{cases} s_0 \cos\left(\dfrac{\pi\omega}{2\omega_m}\right), & |\omega| \le \omega_m, \\ 0, & |\omega| > \omega_m. \end{cases}$$

Выполним обратное преобразование Фурье:

$$s(t) = \frac{s_0}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_m}\right)e^{j\omega t}d\omega = \frac{s_0}{4\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\left[e^{j\frac{\pi}{2\omega_m}\omega} + e^{-j\frac{\pi}{2\omega_m}\omega}\right]e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{s_0}{4\pi}\left\{\int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega\left(t+\frac{\pi}{2\omega_m}\right)}d\omega + \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega\left(t-\frac{\pi}{2\omega_m}\right)}d\omega\right\} =$$

$$= \frac{s_0}{2\pi(t+\pi/2\omega_m)}\sin\left[\omega_m\left(t+\frac{\pi}{2\omega_m}\right)\right] +$$

$$+ \frac{s_0}{2\pi(t-\pi/2\omega_m)}\sin\left[\omega_m\left(t-\frac{\pi}{2\omega_m}\right)\right] =$$

$$= \frac{s_0\omega_m}{2\pi}\left\{\frac{\sin[\omega_m(t+\pi/2\omega_m)]}{\omega_m(t+\pi/2\omega_m)} + \frac{\sin[\omega_m(t-\pi/2\omega_m)]}{\omega_m(t-\pi/2\omega_m)}\right\}.$$

Определим отсчеты сигнала $s(t)$ в точках $(n\pi/\omega_m)$:

$$s_n\left(\frac{n\pi}{\omega_m}\right) = \frac{s_0\omega_m}{2\pi}\left\{\frac{\sin[(n+1/2)\pi]}{(n+1/2)\pi} + \frac{\sin[(n-1/2)\pi]}{(n-1/2)\pi}\right\} =$$

$$= \frac{s_0\omega_m}{2\pi}\left\{\frac{(-1)^n}{(n+1/2)\pi} - \frac{(-1)^n}{(n-1/2)\pi}\right\} =$$

$$= \frac{s_0\omega_m}{2\pi^2}(-1)^n\left[\frac{(n-1/2)-(n+1/2)}{n^2-1/4}\right] = \frac{s_0\omega_m(-1)^{n+1}}{4\pi^2(n^2-1/4)}.$$

Отсюда находим разложение сигнала в ряд Котельникова:

$$s(t) = \frac{s_0\omega_m}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1/4}\frac{\sin[\omega_m(t-n\pi/\omega_m)]}{\omega_m(t-n\pi/\omega_m)}.$$

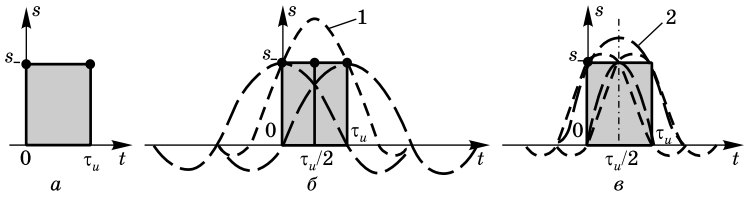


Рис. 4.5

Пример 4.2. Найти приближенное представление рядом Котельникова прямоугольного видеоимпульса (рис. 4.5*а*).

$$s(t) = s_0[\sigma(t) - \sigma(t - \tau_u)].$$

Найдем спектральную плотность сигнала

$$s(\omega) = s_0 \int_0^{\tau_u} e^{-j\omega t} dt = \frac{s_0}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\tau_u} =$$

$$= \frac{s_0}{-j\omega}(e^{-j\omega\tau_u} - 1) = \frac{s_0}{-j\omega} e^{-j\omega\tau_u/2}(e^{-j\omega\tau_u/2} - e^{j\omega\tau_u/2}) =$$

$$= \frac{2s_0}{\omega} e^{-j\omega\tau_u/2} \sin\frac{\omega\tau_u}{2} = s_0\tau_u e^{-j\omega\tau_u/2} \frac{\sin\omega\tau_u/2}{\omega\tau_u/2}.$$

Возьмем два отсчета в точках $t = 0$ и $t = \tau_u$, $\omega_m = 2\pi/\tau_u = \pi/\tau_u$ (рис. 4.5*б*):

$$s(t) = \frac{\sin[(\pi/\tau_u)t]}{(\pi/\tau_u)t} + \frac{\sin[(t - \tau_u)(\pi/\tau_u)]}{(t - \tau_u)(\pi/\tau_u)}.$$

Ограничим спектральную плотность частотным интервалом, соответствующим главному лепестку спектра $\omega_m = 2\pi/\tau_u$ (рис. 4.5*в*):

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\omega_m} = \frac{\tau_u\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}\tau_u,$$

$$s(t) = \frac{\sin[(2\pi/\tau_u)t]}{(2\pi/\tau_u)t} +$$

$$+ \frac{\sin[(2\pi/\tau_u)(t - \tau_u/2)]}{(2\pi/\tau_u)(t - \tau_u/2)} + \frac{\sin[(2\pi/\tau_u)(t - \tau_u)]}{(2\pi/\tau_u)(t - \tau_u)}.$$

С ростом частотной полосы, ограничивающей спектр, и соответственно с ростом числа отсчетов точность аппрок-

симации растет (рис. 4.5): кривая *1* — два члена ряда Котельникова, кривая *2* — три члена).

Вводя обозначение $\Delta = \pi/\omega_m = 1/2f_m$ для шага дискретизации, приходим к следующей форме записи ряда Котельникова:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \frac{\sin[\omega_m(t - n\Delta)]}{\omega_m(t - n\Delta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \operatorname{sinc}[\omega_m(t - n\Delta)].$$

Рассмотрим теорему отсчетов в частотной области. Пусть сигнал определен на временно́м интервале $2T$:

$$s(t) = s_0[\sigma(t + T) - \sigma(t - T)].$$

Для спектральной плотности имеем

$$s(\omega) = s_0 \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t} dt = 2s_0 T \frac{\sin \omega T}{\omega T}. \qquad (4.33)$$

Запишем условие ортогональности спектральной плотности (4.33) и ее копии, смещенной на частотный интервал ω_0:

$$(s(\omega), s(\omega - \omega_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) s^*(\omega - \omega_0) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} s(t)[s(t)e^{j\omega_0 t}]^* dt =$$

$$= 2\pi s_0^2 \int_{-T}^{T} e^{-j\omega_0 t} dt = 4\pi s_0^2 T \frac{\sin \omega_0 T}{\omega_0 T} = 0.$$

Отсюда

$$\omega_0 T = n\pi, \quad \omega_0 = \frac{n\pi}{T}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Как и в случае спектрально-ограниченного сигнала, можно ввести базисную функцию (функцию отсчета):

$$u_n(\omega, T) = B \frac{\sin[T(\omega - n\pi/T)]}{[T(\omega - n\pi/T)]} = B \operatorname{sinc}[T(\omega - n\Delta_\omega)],$$

где $\Delta_\omega = \pi/T$ — шаг дискретизации спектральной плотности по оси частот. Множитель B определяется из условия единичной нормы для функции отсчета:

$$\|u_n(\omega)\|^2 = B^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(T\omega)}{T^2\omega^2} d\omega =$$

$$= \frac{B^2}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(T\omega)}{\omega^2} d\omega = \frac{B^2\pi}{T} = 1, \quad B = \sqrt{\frac{T}{\pi}}.$$

Здесь учтено

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(T\omega)}{\omega^2} d\omega = \pi T.$$

Окончательно для функции отсчета в частотной области имеем

$$u_n(\omega, T) = \sqrt{\frac{T}{\pi}} \operatorname{sinc}[T(\omega - n\Delta_\omega)]. \qquad (4.34)$$

На основе функции отсчета (4.34) строится ортогональный базис Котельникова в частотной области. Разложим спектральную плотность ограниченного на временно́м интервале сигнала в ряд Фурье по ортонормированному базису Котельникова:

$$s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u_n(\omega, T).$$

Коэффициент разложения

$$c_n = (s(\omega), u_n(\omega, T)) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} s(t) u_n^*(t, T) dt. \qquad (4.35)$$

Здесь с учетом (4.33)

$$\frac{\sin[T(\omega - n\pi/T)]}{[T(\omega - n\pi/T)]} \leftrightarrow \frac{1}{2T} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{j(n\pi/T)t}.$$

После подстановки этого выражения в (4.35) получим

$$\frac{2\pi}{2T}\sqrt{\frac{T}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{j(n\pi/T)t} dt =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{T}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j(n\pi/T)t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{T}} s\left(\frac{n\pi}{T}\right). \qquad (4.36)$$

Разложение сигнала $s(\omega)$ в ряд Котельникова с учетом (4.36) и (4.34) принимает вид

$$s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n\left(\frac{n\pi}{T}\right)\operatorname{sinc}\left[T\left(\omega-\frac{n\pi}{T}\right)\right]=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n(\omega)\operatorname{sinc}[T(\omega-n\Delta_\omega)]. \qquad (4.37)$$

Выражение (4.37) представляет собой форму записи теоремы Котельникова в частотной области. Если сигнал $s(t)$ ограничен временны́м интервалом $|t|<T$, то его спектральная плотность однозначно определяется последовательностью его значений в точках на оси частот, отстоящих друг от друга на интервал $\Delta_\omega=\pi/T$ или, что то же самое, на $\Delta_f=1/2T$.

Для пространственного сигнала $s(x)$ ряд Котельникова имеет вид, аналогичный (4.32) с учетом переобозначений $t\to x$, $\omega_m\to K_m$, $x_n=n\pi/K_m$, $\Delta=\pi/K_m$:

$$s(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n\frac{\sin[K_m(x-n\pi/K_m)]}{K_m(x-n\pi/K_m)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n\operatorname{sinc}[K_m(x-n\Delta)].$$

Соответственно, введя переобозначения $T\to\Lambda$, $\omega\to K$, $\Delta_\omega\to\Delta_K$, $\Delta_K=\dfrac{\pi}{\Lambda}$ в (4.37), получаем разложение в ряд Котельникова фурье-спектра пространственного сигнала:

$$s(K)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n\left(\frac{n\pi}{\Lambda}\right)\operatorname{sinc}\left[\Lambda\left(K-\frac{n\pi}{\Lambda}\right)\right]=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n(K)\operatorname{sinc}[\Lambda(K-n\Delta_K)].$$

4.5. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Пусть сигнал в виде последовательности δ-импульсов поступает на вход линейной системы, импульсный отклик которой $h(t)$ и частотный коэффициент передачи $H(\omega)$. Тогда для выходного сигнала $s_e(t)$ имеем

$$s_e(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-nT)h(t-\tau)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(t-nT).$$

По теореме смещения

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jnT\omega} = s(\omega).$$

Рассмотрим сигнал, представленный рядом Фурье,

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t},$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$.

Для спектральной плотности имеем

$$s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta(\omega - n\omega_0). \qquad (4.38)$$

Определим коэффициент разложения сигнала $s(t)$ в ряд Фурье:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \qquad (4.39)$$

Сигнал $s(t)$ — периодический, поскольку

$$e^{jn\omega_0(t+T)} = e^{jn\omega_0 t}:$$
$$s(t+T) = s(t).$$

Выполним фурье-преобразование этого выражения:

$$s(\omega)e^{j\omega T} = s(\omega). \qquad (4.40)$$

Равенство (4.40) возможно при $s(\omega) \neq 0$ и $e^{j\omega T} = 1$, т. е. при $\omega = 2\pi n/T$. Следовательно, $s(\omega) \neq 0$, если $\omega = \dfrac{2\pi n}{T} = n\omega_0$.

Это условие выполняется только в случае, когда

$$s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\omega - n\omega_0), \qquad (4.41)$$

т. е. спектральная плотность должна представлять собой последовательность импульсов в точках $n\omega_0$. Сравнивая (4.38) и (4.41), получаем, что $2\pi c_n = \alpha_n$ и $s(\omega)$ определяется выражением (4.41).

Введем функцию вида

$$s_0(t) = \begin{cases} s(t), & |t| \le T/2, \\ 0, & |t| > T/2. \end{cases}$$

Ее фурье-образ

$$s_0(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j\omega t} dt. \qquad (4.42)$$

Из сравнения (4.39) и (4. 42) следует, что

$$s_0(n\omega_0) = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = Tc_n.$$

Отсюда находим коэффициент разложения сигнала $s(t)$ в ряд Фурье:

$$c_n = \frac{1}{T} s_0(n\omega_0). \qquad (4.43)$$

Пример 4.3. Найти разложение в ряд Фурье сигнала

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Поскольку $s_0(t) = \delta(t)$, $s_0(\omega) = 1$. Отсюда согласно (4.43) $c_n = 1/T$. Следовательно,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}. \qquad (4.44)$$

Пусть линейная система, преобразующая входной сигнал $s(t)$, характеризуется импульсным откликом $h(t)$ и соответственно частотным коэффициентом $H(\omega)$:

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega).$$

Подадим на вход системы сигнал в виде последовательности импульсов:

$$s_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Тогда для выходного сигнала с учетом фильтрующих свойств δ-функции имеем

$$s_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - nT). \qquad (4.45)$$

Поскольку согласно (4.44)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t},$$

получаем

$$s_e(t) = \frac{1}{T} H(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}, \tag{4.46}$$

так как реакция на сигнал $e^{jn\omega_0 t}$ равна $H(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$.

Из сравнения (4.46) и (4.45) следует

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}, \tag{4.47}$$

где $\omega_0 = 2\pi/T$. Это выражение называется *формулой суммирования Пуассона*. Выражение (4.47) справедливо и для реакции линейной пространственно-инвариантной системы на входное воздействие вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\Lambda)$. Формула Пуассона легко распространяется на двумерные сигналы, когда $h(x, y)$ — импульсный отклик и $H(K_x, K_y)$ — когерентная передаточная функция системы:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(x - n\Lambda_{x_0}, y - m\Lambda_{y_0}) =$$

$$= \frac{1}{\Lambda_{x_0}\Lambda_{y_0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H(nK_{x_0}, mK_{y_0}) \times$$

$$\times \exp\{j(nK_{x_0}x + mK_{x_0}y)\},$$

где

$$K_{x_0} = \frac{2\pi}{\Lambda_{x_0}}, \quad K_{x_0} = \frac{2\pi}{\Lambda_{x_0}}.$$

4.6. ИНФОРМАЦИОННАЯ СТРУКТУРА СПЕКТРАЛЬНО-ОГРАНИЧЕННОГО ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Рассмотрим сигнал $s(t)$, длительность которого τ, а спектральная плотность $s(\omega)$ ограничена максимальной частотой ω_m. На практике это ограничение определяется полосой пропускания системы, преобразующей или регистрирующей сигнал. В системе координат (ω, t) такому сигналу соответствует область существования, ограниченная прямоугольным контуром со сторонами (ω_m, τ) (рис. 4.6). Из соотношения неопределенностей $\Delta t \Delta\omega \geq 1/2$ следует, что область существования сигнала может быть

разбита на элементарные ячейки, площадь которых $\sigma_0 \sim 1$, а точнее, согласно, (4.6) $\sigma_0 = 1/2$. Это представление сигнала в плоскости ω, t получило название *информационной диаграммы*.

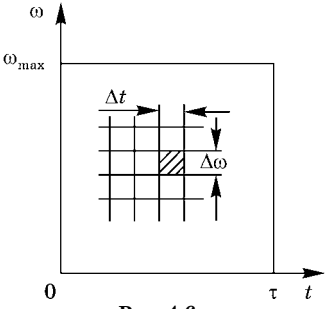


Рис. 4.6

Рассмотрим информационные диаграммы некоторых сигналов (рис. 4.7). Гармоническое колебание с частотой $\omega_0 = const$ отображается горизонтальной линией $\delta(\omega - \omega_0)$. Соответственно короткий импульс в момент $t = t_0$ представляется вертикальной линией $\delta(t - t_0)$ неограниченной длины, поскольку спектральная плотность такого импульса содержит все частоты.

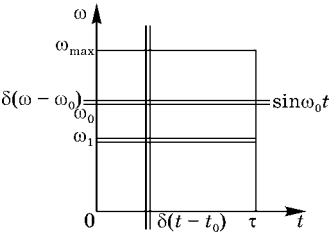


Рис. 4.7

По свойству дельта-функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) d\omega = 1 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Поэтому площадь элементарных ячеек, вырождающихся в данном случае в неограниченные линии, остается равной единице.

Информационные диаграммы реальных сигналов, ограниченных в пространстве и во времени, могут быть разбиты на элементарные ячейки различными способами. Например, в качестве элементарной ячейки может быть выбран квадрат со сторонами $\Delta t = 1$ с, $\Delta\omega = 1$ Гц. Такие ячейки получили название *ячеек Габора*. Соответствующие представления информационной диаграммы называются *разложением Габора*. Число ячеек Габора в прямоугольной области, ограничивающей сигнал на информационной диаграмме, равно

$$n_m = \tau\omega_m.$$

Для комплексного сигнала (например, при учете ортогональных компонент поляризации) число независимых параметров, описывающих сигнал, удваивается, поскольку рассматриваются ячейки, соответствующие действительной и мнимой компонентам $s(t,\omega)$:

$$2n_m = 2\tau\omega_m.$$

Кроме того, должен быть задан еще один параметр, относительно которого определяются все значения отсчетов s_i. Следовательно, полное число элементарных ячеек, характеризующее сигнал с ограниченной длительностью и частотным интервалом, равно

$$N = 2n_m + 1 = 2\tau\omega_m + 1. \qquad (4.48)$$

Это есть число информационных степеней свободы сигнала.

Рассмотрим представление на информационной диаграмме сигнала, разложенного в ряд Фурье. В этом случае прямоугольная область, определяющая сигнал на информационной диаграмме, разбивается на горизонтальные полоски длиной τ и шириной $1/\tau$ (рис. 4.8), а комплексный сигнал по-прежнему отображается совокупностью ячеек единичной площади, каждая из которых соответствует реальной и мнимой компонентам. Это представление сигнала эквивалентно разложению его в ряд Фурье:

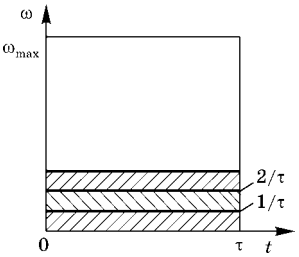


Рис. 4.8

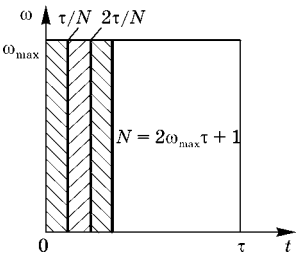


Рис. 4.9

$$s(t) = \sum_{n=-n_m}^{n_m} c_n e^{jn\omega_0 t},$$

где $\omega_0 = 1/\tau$, а коэффициент разложения определяется известной формулой:

$$c_n = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} s(t)e^{-jn\omega_0 t}dt.$$

Полное число степеней свободы совпадает с числом, получаемым при разложении Габора (4.48).

В следующем варианте представления сигнала на информационной диаграмме (рис. 4.9) элементарные ячейки можно выбрать в виде вертикальных полосок. Временно́й интервал τ разбивается на N равных интервалов, соответствующих отсчетам сигнала $s = s(n\tau/N)$, взятым в середине n-го временно́го интервала. Сигнал определяется на интервале τ совокупностью отсчетов $s_m(n = 1, 2, \ldots, 2\omega_m\tau + 1)$, где $N = 2\omega_m\tau + 1$ — число степеней свободы. Такое представление соответствует по теореме отсчетов разложению сигнала в ряд Котельникова.

4.7. АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ

Рассмотрим преобразование световых волн при распространении в среде, в которой возбуждена акустическая волна. В фотоупругой среде акустическая волна вызывает пространственно-временно́е изменение показателя преломления, которое образует фазовую решетку, движущуюся со скоростью звука. Пространственный период и амплитуда фазовой решетки определяются длиной и амплитудой акустической волны. Прохождение оптического пучка через такую фазовую структуру сопровождается дифракцией излучения на ней.

Пусть в прозрачной изотропной фотоупругой среде в направлении оси x (рис. 4.10) распространяется ограниченная по оси z размером l бегущая акустическая волна, которая из-за фотоупругости вызывает периодическое изменение показателя преломления по закону

$$n = n_0 + \Delta n \cos[\Omega t - K_a x], \tag{4.49}$$

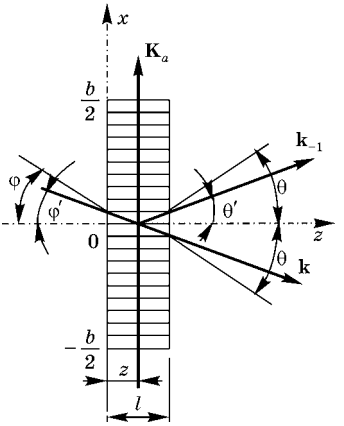


Рис. 4.10

где n_0 — показатель преломления невозмущенной среды; Ω и K_a — частота и волновое число акустической волны ($K_a = \Omega/v_a$), v_a — скорость звука в среде.

Предположим, что слева под углом φ к оси z в плоскости (x, z) падает плоская оптическая волна единичной амплитуды. Комплексная амплитуда световой волны, прошедшая через фазовую решетку, может быть описана следующим выражением:

$$E = \exp\{j\mathbf{kr}\}, \tag{4.50}$$

где $\mathbf{kr} = (-k_0 x\sin\varphi' + k_0 z\cos\varphi')n$; $\mathbf{k}_0$ — волновой вектор световой волны в вакууме. Примем допущение, что показатель преломления в фотоупругой среде влияет только на фазу оптической волны, проходящей через акустический пучок. Тогда для поля, дифрагированного в среде на фазовой решетке под углом θ', имеем

$$E(\theta) = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{0}^{l} E\exp\{jk[x\sin\theta' + (l-z)\cos\theta']\}dxdz. \tag{4.51}$$

Это преобразование означает разложение с точностью до постоянной фазы возмущенной оптической волны в интеграл Фурье по плоским волнам, распространяющимся под углом θ' к оси z. После подстановки (4.50) в (4.51) с учетом $n\sin\theta' = \sin\theta$, $n\sin\varphi' = \sin\varphi$, $\cos\varphi' \cong \cos\varphi$, $\cos\theta' \cong \cos\theta$, $k = k_0 n$ получаем

$$E(\theta) = \int_{-b/2}^{b/2}\int_{0}^{l} \exp\{jk_0 x[(\sin\theta - \sin\varphi)]\}\exp\{jkz(\cos\varphi - \cos\theta)\}\times$$
$$\times\exp[jkl\cos\theta]dxdz.$$

Выполняя интегрирование по z, находим

$$E(\theta) = l\,\mathrm{sinc}\left[\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right]\int_{-b/2}^{b/2}\exp\left\{j\frac{kl}{2}(\cos\varphi + \cos\theta)\right\}\times$$
$$\times\exp\{jk_0 x(\sin\theta - \sin\varphi)\}dx. \tag{4.52}$$

Здесь учтено, что

$$\mathrm{sinc}\left[\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right] = \frac{\sin\left[\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right]}{\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)}$$

— медленная функция x на интервале $(-b/2,\ b/2)$. Примем во внимание (4.49) и используем разложение в ряд

$$\exp\{j\xi\cos(\Omega t - K_a x)\} = \sum_{q=\infty}^{\infty} J_q(\xi)\exp\left\{jq\left(\Omega t - K_a x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}, \quad (4.53)$$

где $\xi \cong \frac{1}{2}k_0\Delta nl(\cos\varphi + \cos\theta) \cong k_0\Delta nl$; $J_q(\xi)$ — функция Бесселя. После подстановки (4.53) в (4.52) получаем

$$E(\theta) = l\exp\left\{j\frac{kl}{2}(\cos\varphi + \cos\theta)\right\}\operatorname{sinc}\left[\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right]\times$$
$$\times \sum_{q=-\infty}^{\infty}\int_{-b/2}^{b/2} J_q(\xi)\exp\left\{jq\left[\Omega t - K_a x - \frac{\pi}{2}\right]\right\}\exp\{jk_0 x(\sin\theta - \sin\varphi)\}dx$$

или

$$E(\theta) = l\exp\left\{j\frac{kl}{2}(\cos\varphi + \cos\theta)\right\}\operatorname{sinc}\left[\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right]\times$$
$$\times \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(\xi)\exp\left\{jq\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right\}\int_{-b/2}^{b/2}\exp\{jx[k_0(\sin\theta - \sin\varphi) - qK_a]\}dx. \quad (4.54)$$

После интегрирования приходим к выражению, описывающему угловой спектр дифрагированного оптического поля:

$$E(\theta) = bl\exp\left\{j\frac{kl}{2}(\cos\varphi + \cos\theta)\right\}\operatorname{sinc}\left[\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right]\times$$
$$\times \sum_{q=-\infty}^{\infty}(-j)^q e^{jq\Omega t} J_q(\xi)\operatorname{sinc}\left\{\frac{b}{2}[k_0(\sin\theta - \sin\varphi) - qK_a]\right\}. \quad (4.55)$$

Амплитуда дифракционного максимума q-го порядка определяется перекрытием главных максимумов функции

$$\operatorname{sinc}\left\{\frac{kl}{2}[k_0(\cos\varphi - \cos\theta)]\right\},$$

учитывающей объемные эффекты, и функции

$$\operatorname{sinc}\left\{\frac{b}{2}[k_0(\sin\theta - \sin\varphi) - qK_0]\right\},$$

определяющей селекцию углового спектра. Это перекрытие имеет место, если

$$\left[\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta_q)\right] < \pi,$$

$$\frac{b}{2}[k_0(\sin\theta_q - \sin\varphi) - qK_a] < \pi.$$

Амплитуда дифрагированного поля максимальна, если

$$k_0(\sin\theta_q - \sin\varphi) - qK_a = 0. \qquad (4.56)$$

Отсюда, выбирая $q = -1$ и $\varphi = -\theta_{-1}$, получаем

$$\sin\theta_{-1} = -\frac{K_a}{2k_0} = -\frac{\lambda}{2\Lambda_a}. \qquad (4.57)$$

Из (4.56) с учетом (4.57) находим угол дифракции, соответствующий дифракционному максимуму порядка q:

$$\sin\theta_q = q\frac{K_a}{k_0} - \sin\theta_{-1} = q\frac{K_a}{k_0} + \frac{K_a}{2k_0} = \left(q + \frac{1}{2}\right)\frac{K_a}{k_0}.$$

Запишем условия, при которых дифракционные максимумы порядка $q \geq 1$ оказываются пренебрежимо малыми:

$$\operatorname{sinc}\left\{\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right\} \ll 1.$$

Подставляя сюда

$$\sin\varphi = \sin(-\theta_{-1}) = \frac{K_a}{2k_0}, \quad \sin\theta_1 = \frac{3K_a}{2k_0}$$

и учитывая, что $\lambda/\Lambda_a \ll 1$, получаем

$$\operatorname{sinc}\left\{\frac{kl}{2}\left[\left(1 - \frac{K_a^2}{2\cdot 4k_0^2}\right) - \left(1 - \frac{9K_a^2}{2\cdot 4k_0^2}\right)\right]\right\} = \operatorname{sinc}\left\{\frac{kl}{2}\cdot\frac{K_a^2}{k_0^2}\right\} \ll 1.$$

Это неравенство удовлетворяется, если

$$\frac{kl}{2}\frac{K_a^2}{k_0^2} \gg 1 \quad \text{или} \quad \pi\frac{l\lambda}{\Lambda_a^2} \gg 1. \qquad (4.58)$$

При выполнении условий (4.57) и (4.58) амплитуды всех дифракционных порядков, кроме минус первого, становятся пренебрежимо малыми. Это так называемая *дифракция Брэгга*. Угол $\varphi_B = -\theta_1$ получил название *угла Брэгга*. Дифракция Брэгга имеет место в случае повышенных

частот акустической волны и выполнения условия (4.58). При этом дифракционные эффекты высших порядков исчезают и преобладающую роль играют лишь оптические пучки нулевого и минус первого порядков. Условие (4.58) означает, что отношение дифракционной расходимости светового пучка к дифракционной расходимости акустического пучка должно быть больше, чем $1/\pi$. Физически брэгговская дифракция соответствует условию отражения падающей волны от волновых фронтов акустической волны, а угол Брэгга равен углу отражения (рис. 4.10). Выражение (4.55) для дифрагированного поля принимает вид

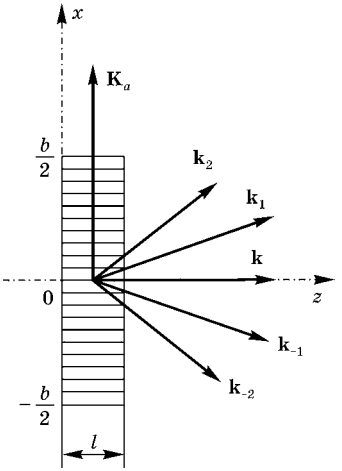


Рис. 4.11

$$E(\theta) \approx jbl\exp(jkl)\operatorname{sinc}\left[\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right]e^{-j\Omega t}J_{-1}(k_0\Delta nl)\times$$
$$\times\operatorname{sinc}\left\{\frac{b}{2}[k_0(\sin\theta - \sin\varphi) + K_a]\right\}.$$

Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 4.11, когда угол падения $\varphi = 0$. В этом случае для дифрагированного поля согласно (4.55) имеем

$$E(\theta) = bl\exp\left\{jkl\cos^2\frac{\theta}{2}\right\}\operatorname{sinc}\left\{kl\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}\times$$
$$\times\sum_{q=-\infty}^{\infty}(-j)^q e^{jq\Omega t}J_q(\xi)\operatorname{sinc}\left[\frac{b}{2}(k_0\sin\theta - qK_a)\right]. \quad (4.59)$$

Из выражения (4.59) следует, что угловая структура дифрагированного поля пространственно неоднородна и содержит максимумы излучения. Они располагаются под углами, определяемыми из условий

$$k_0\sin\theta_q - qK_a = 0.$$

Отсюда получаем значения углов, при которых наблюдаются максимумы дифракционной картины

$$\sin\theta_q = \frac{qK_a}{k_0} = \frac{q\lambda}{\Lambda_a}. \qquad (4.60)$$

Порядок дифракционного максимума соответствует индексу q. Множитель $\mathrm{sinc}\{kl\sin^2(\theta/2)\}$, описывающий объемные эффекты, при малой длине взаимодействия излучения с акустическим пучком и при малых Ω стремится к единице. Описанный случай соответствует так называемой дифракции Рамана–Ната, когда распределение энергии излучения по дифракционным максимумам симметрично относительно пучка, дифрагированного в нулевой порядок.

Критерием, определяющим особенности дифракции, служит величина

$$Q = 2\pi l\frac{\sin\varphi_B}{\Lambda_a} = \pi\frac{l\lambda}{\Lambda_a^2}, \qquad (4.61)$$

обратно пропорциональная дифракционной расходимости акустического пучка, равной Λ_a/l. Можно считать, что область дифракции Рамана–Ната определяется условием $Q \le 0{,}3$, а области брэгговской дифракции соответствует $Q > 4\pi$. Значения $0{,}3 < Q > 4\pi$ относятся к переходной области дифракции.

Если на фазовую решетку падает не плоская оптическая волна, как было рассмотрено выше, а пучок, имеющий определенную угловую расходимость, описанная теория может быть применена и в этом случае. Дифрагированное поле можно представить в виде

$$E'(\theta, \varphi) = s(\varphi)E(\theta, \varphi),$$

где $s(\varphi)$ — угловой спектр входного поля. Амплитуда и фаза дифрагированного поля находятся обратным фурье-преобразованием. В качестве оценки расходимости дифрагированного поля может быть взята наименьшая из дифракционных расходимостей взаимодействующих оптического и звукового пучков (при небольших уровнях акустической мощности, что обычно бывает на практике).

Если входной пучок — гауссов,

$$E_{\text{вх}} = \exp\left\{-\frac{x^2}{w_0^2}\right\}\exp\{j\mathbf{Kr}\},$$

структура дифрагированного оптического поля в случае бегущей ультразвуковой волны описывается по аналогии с (4.54) как

$$E(\theta) = \sqrt{\pi} w_0 l \exp\left\{j\frac{kl}{2}(\cos\varphi + \cos\theta)\right\}\operatorname{sinc}\left\{\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right\}\times$$
$$\times \sum_{q=-\infty}^{\infty}(-j)^q \exp\{jq\Omega t\} J_q(\xi)\exp\left\{\frac{w_0^2}{4}[k_0(\sin\theta - \sin\varphi) - qK_a]^2\right\}. \tag{4.62}$$

Методика анализа акустооптического взаимодействия для гауссова пучка аналогична ситуации, когда входной сигнал — плоская волна. Из (4.62) следуют условия брэгговской дифракции (4.57). Дифракции Рамана–Ната соответствует структура выходного сигнала

$$E(\theta) = \sqrt{\pi} w_0 l \exp\left\{jkl\cos^2\frac{\theta}{2}\right\}\operatorname{sinc}\left\{kl\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}\times$$
$$\times \sum_{q=-\infty}^{\infty}\exp\left\{j_q\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right\} J_q(\xi)\exp\left\{-\frac{w_0^2}{4}[k_0\sin\theta - qK_a]^2\right\}.$$

Рассмотрим дифракцию светового поля на стоячей ультразвуковой волне, которую можно представить как сумму распространяющихся навстречу друг другу когерентных бегущих волн. Воспользовавшись (4.49), запишем выражение для распределения коэффициента преломления, индуцированного стоячей волной:

$$n = n_0 + \Delta n[\cos(\Omega t - K_a x) + \cos(\Omega t + K_a x)] \approx$$
$$\approx n_0 + \Delta n \cos\Omega t \cos K_a x. \tag{4.63}$$

Для структуры поля, дифрагированного на стоячей решетке коэффициента преломления (4.63), по аналогии с (4.55) получаем

$$E(\theta) = bl\exp\left\{j\frac{kl}{2}(\cos\varphi + \cos\theta)\right\}\operatorname{sinc}\left[\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right]\times$$
$$\times \sum_{q=-\infty}^{\infty}(-j)^q I_q[\xi\cos(q\Omega t)]\operatorname{sinc}\left\{\frac{b}{2}\left[(k_0\sin\theta) - qK_a\right]\right\}. \tag{4.64}$$

Из сравнения (4.64) и (4.55) видно, что поля, дифрагированные на стоячей и бегущей волнах, имеют сходную структуру и удовлетворяют одинаковым условиям селекции дифракционных максимумов в брэгговском и рамана–натовском режимах. Отличие состоит в том, что при дифракции на стоячей волне поле, дифрагированное в q-й порядок, модулировано по амплитуде с частотой $q\Omega$, тогда как поле, дифрагированное на бегущей волне, модулировано по фазе и смещено по частоте.

Это смещение и есть доплеровский сдвиг частоты, появляющийся при дифракции оптической волны на движущейся со скоростью v_a фазовой решетке:

$$\omega_D = (\mathbf{k}_q - \mathbf{k})\mathbf{v}_a,$$

где $\mathbf{k}_q$ — волновой вектор оптического пучка, дифрагированного в q-й порядок. Знак доплеровского сдвига зависит от взаимной ориентации вектора скорости фазовой решетки и разностного вектора $\mathbf{k}_q - \mathbf{k}$. Из геометрии оптических пучков (рис. 4.12), соответствующей уравнению (4.59), получаем

$$\omega_D = 2kv_a\sin(\theta_q/2)\cos(\theta_q/2) = k_0 v_a \sin\theta_q. \qquad (4.65)$$

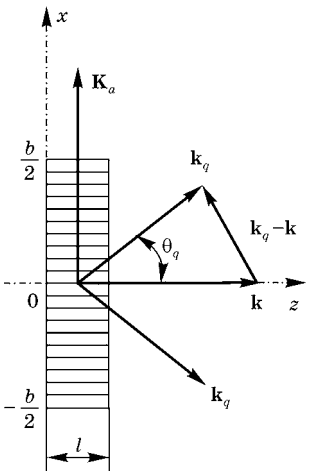


Рис. 4.12

С другой стороны, направление q-го дифракционного максимума удовлетворяет условию (4.60). Подставляя (4.60) в (4.65), получаем

$$\omega_D = qv_a K_a = q\Omega.$$

Учитывая огромную разность скоростей распространения световых и акустических полей, упругую волну при фотон-фононном взаимодействии можно считать стационарной. Отсюда следует возможность применения оптических методов обработки информации, отображенной акустическим полем.

В квантово-механической модели дифракция световых полей на акустических волнах рассматривается как рассеяние световых квантов с энергией $\hbar\omega$ на акустических фононах, энергия которых $\hbar\Omega$. В рамках квантово-механической модели импульс светового кванта $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, импульс фонона $\mathbf{p}_a = \hbar\mathbf{K}_a$. Фотон-фононное взаимодействие должно удовлетворять законам сохранения энергии и импульса.

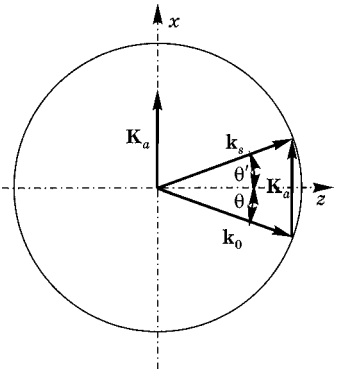


Рис. 4.13

Рассмотрим процесс рассеяния фотона на фононе. В этом процессе участвуют три частицы: фотон падающего на фонон светового поля, фонон и фотон рассеянного светового поля. Диаграмма такого трехчастичного взаимодействия показана на рис. 4.13. На этом рисунке $\mathbf{K}_a$ — волновой вектор фонона; $\mathbf{k}_0$ — волновой вектор падающего фотона; $\mathbf{k}_s$ — волновой вектор фотона, рассеянного на фононе; θ — угол падения фотона; θ' — угол, определяющий направление волнового вектора рассеянного фотона. Согласно закону сохранения энергии

$$\hbar\omega + \hbar\Omega = \hbar\omega_s$$

или

$$\omega + \Omega = \omega_s.$$

Здесь ω_s — частота рассеянного фотона.

Запишем уравнения сохранения компонент импульса по осям x и y:

$$\hbar k_0 \cos\theta = \hbar k_s \cos\theta',$$
$$-\hbar k_0 \sin\theta + \hbar k_s \sin\theta' + \hbar K_a = 0. \qquad (4.66)$$

После сокращения на $\hbar$ получаем запись уравнений сохранения компонент импульса (4.66) в пространстве волновых векторов:

$$k_0 \cos\theta = k_s \cos\theta',$$
$$-k_0 \sin\theta + k_s \sin\theta' + K_a = 0. \qquad (4.67)$$

В случае изотропной среды $|\mathbf{k}_0| = |\mathbf{k}_s| = k$ и из уравнений в (4.67) получаем

$$\theta = -\theta',$$

$$\sin\theta' = -\frac{1}{2}\frac{K_a}{k_0} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\Lambda_a}.$$

Мы нашли условие дифракции Брэгга (4.57), которое в квантово-механической модели называется «уравнением Брэгга». Идентичность условия брэгговской дифракции и уравнение Брэгга указывают на то, что постоянная фазовой решетки при дифракции равна длине волны акустического поля. Если акустический пучок имеет достаточно большую расходимость, реализуются многократные процессы фотон-фононного взаимодействия. Этой ситуации соответствует диаграмма, показанная на рис. 4.14. Многократное рассеяние имеет место, если имеются два или более фононов, распространяющихся в разных, но определенных направлениях, удовлетворяющих условию дифракции Рамана–Ната (4.60). Здесь индекс q указывает на кратность рассеяния фотонов на фононах, в результате которого возникает соответствующий q-й дифракционный порядок рассеянного светового поля. Разумеется, при этом выполняются законы сохранения импульса и энергии. Многократное рассеяние реализуется, если угловая расходимость акустического поля велика в сравнении с углом Брэгга. Граница между двумя режимами определяется соответствующей величиной параметра Q (4.61). В области значений параметра Q, удовлетворяющей дифракции Рамана–Ната ($Q \leq 0{,}3$), наблюдаются эффекты многократного рассеяния.

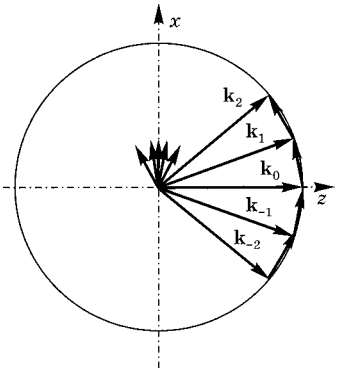


Рис. 4.14

Обсудим некоторые особенности дифракции в анизотропной среде. Рисунок 4.15 иллюстрирует закон сохранения импульса для брэгговской дифракции в изотроп-

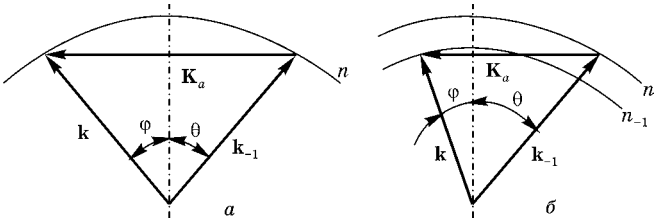


Рис. 4.15

ной (рис. 4.15*а*) и анизотропной средах (рис. 4.15*б*). В обоих случаях выполняется соотношение

$$\mathbf{k} \pm \mathbf{K}_0 = \mathbf{k}_{-1}.$$

При дифракции в изотропной среде волновые числа падающего и дифрагированного пучков остаются практически одинаковыми, а волновые векторы отличаются направлениями. Это равенство модулей волновых векторов не нарушается при изменении поляризации дифрагированных оптических пучков. В изотропной среде всегда наблюдается дифракция нормального типа.

При дифракции в анизотропной среде может иметь место дифракция как нормального, так и аномального типа. Аномальной дифракции соответствует ситуация, когда поляризации падающей и дифрагированной оптических волн ортогональны. В этом случае, как видно из рис. 4.15*б*, появляется сильная асимметрия между углами падения и дифракции

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\Lambda_a}\left[1 + \frac{\Lambda_a^2}{\lambda^2}(n^2 - n_{-1}^2)\right],$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2\pi\Lambda_a}\left[1 + \frac{\Lambda_a^2}{\lambda^2}(n_{-1}^2 - n^2)\right],$$

где n и n_{-1} — показатели преломления среды в направлениях распространения падающего и дифрагированного пучков. Отличительной особенностью аномальной дифракции является существование критической акустической частоты $\Omega_{\min}$, при которой имеет место коллинеарное взаимодействие

$$\Omega_{\min} = 2\pi|n_{-1} - n|\frac{v_a}{\lambda}.$$

Коллинеарное взаимодействие применяется в акустооптических перестраиваемых частотных фильтрах. Другой особенностью является существование области акустических частот, в пределах которой угол падения очень мало меняется при изменении акустической частоты. Эта область находится из условия $d\varphi/d\Lambda_a = 0$, откуда получаем

$$\Omega = 2\pi(n^2 - n_{-1}^2)^{1/2}\frac{v_a}{\lambda}.$$

В окрестности акустической частоты v_a изменение угла Брэгга при аномальной дифракции минимально. Это свойство используется при создании широкополосных частотных модуляторов.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем состоит принцип неопределенности и каков его физический смысл?
2. В каких формах можно представить принцип неопределенности для двумерных сигналов?
3. Как связано число степеней свободы (база) сигнала с принципом неопределенности?
4. В чем особенности принципа неопределенности для преобразования Ганкеля?
5. Что такое низкочастотный идеальный сигнал?
6. В чем заключается теорема Котельникова?
7. Как оценивается ошибка аппроксимации сигнала рядом Котельникова?
8. Как записывается формула суммирования Пуассона?
9. Как представляются сигналы на информационной диаграмме (разложение Габора)?
10. Чем отличается представление теоремы отсчетов в координатном и частотном пространствах?
11. При каких условиях реализуется дифракция Брэгга?
12. Какова структура дифрагированного поля при дифракции Рамана–Ната?

ЗАДАЧИ

1. Показать, что при любом α

$$\left|\int_a^b s(\omega)d\omega\right|^2 \le \int_a^b(\alpha^2+\omega^2)\,|s(\omega)|^2\,d\omega\int_a^b\frac{d\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

2. Представить сигнал

$$s(\omega)=\begin{cases} s_0\cos\left(\dfrac{\pi\omega}{2\omega_b}\right), & |\omega|\le\omega_b; \\ 0, & |\omega|>\omega_b \end{cases}$$

в виде суммы идеальных низкочастотных сигналов.

3. Пусть спектр одномерного пространственного сигнала $s(x)$ ограничен в полосе частот $[K_{x1}, K_{x2}]$. Показать, что

$$s(x)=e^{jK_m x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{-jn\pi}\,\mathrm{sinc}\left[K_m\left(x-\frac{n\pi}{K_m}\right)\right],$$

где

$$K_m=\frac{K_{x2}-K_{x1}}{2}.$$

4. Найти фурье-спектр сигнала

$$s(x)=\sum_{n=-N}^{N}\delta(x-nT)$$

(указание: воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии).

5. Фурье-спектр двумерного сигнала $s(x, y)$

$$s(K_x,K_y)=\begin{cases} s_0\cos\left(\dfrac{\pi K_x}{2K_{x0}}\right)\cos\left(\dfrac{\pi K_y}{2K_{y0}}\right), & |K_x|\le K_{x0}, |K_y|\le K_{y0}, \\ 0, & |K_x|>K_{x0}, \}K_y|>K_{y0}. \end{cases}$$

Восстановить сигнал по пространственно-частотному спектру $s(K_x, K_y)$.

6. Определить фурье-спектр сигнала

$$s(x)=\sum_{n=-1}^{1}\mathrm{rect}\left(\frac{x-nT}{a}\right).$$

7. На вход линейной системы с импульсным откликом $h(x)$ поступает сигнал

$$s(x)=\sum_{n=-0}^{5} e^{-\frac{n^2}{9}}\delta(x-nT).$$

Полагая $h(x) = 1 - |x|/T$, $x \le T$, найти выходной сигнал $s_e(x)$ и построить его график.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА В ОПТИКЕ

5.1. ОДНОМЕРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА

Одномерное преобразование Гильберта определяется сверткой сигнала $s(x)$ с функцией $g(x) = 1/\pi x$:

$$\hat{s}(x) = s(x) \otimes g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\xi)}{x-\xi} d\xi. \qquad (5.1)$$

Здесь интегрирование выполняется в смысле главного значения Коши:

$$\hat{s}(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{s(\xi)d\xi}{x-\xi} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{s(\xi)d\xi}{x-\xi} \right\}.$$

$\hat{s}(x)$ называется гильберт-образом сигнала $s(x)$.

Спектральная плотность гильберт-образа согласно свойствам фурье-преобразования равна произведению спектральных плотностей сигнала $s(\omega)$ и функции $g(\omega) \leftrightarrow 1/\pi x$:

$$\hat{s}(\omega) = s(\omega) g(\omega).$$

Фурье-спектр функции $1/\pi x$

$$g(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega).$$

Для доказательства воспользуемся обратным фурье-преобразованием:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{j\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-j\,\mathrm{sgn}\,\omega) e^{j\omega x} d\omega =$$

$$= -\frac{j}{2\pi} \lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}\,\omega\, e^{\omega(jx - \alpha\,\mathrm{sgn}\,\omega)} d\omega =$$

$$= -\frac{j}{2\pi}\lim_{\alpha\to 0}\left\{-\int_{-\infty}^{0} e^{\omega(jx+\alpha)}d\omega + \int_{0}^{\infty} e^{\omega(jx-\alpha)}d\omega\right\} =$$

$$= \frac{j}{2\pi}\lim_{\alpha\to 0}\left\{\left.\frac{e^{\omega(jx+\alpha)}}{(jx+\alpha)}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{\omega(jx-\alpha)}}{(jx-\alpha)}\right|_{0}^{\infty}\right\} = \frac{j}{2\pi}\lim_{\alpha\to 0}\left\{\frac{1}{jx-\alpha}+\frac{1}{jx+\alpha}\right\}\Bigg\} =$$

$$= -\frac{j}{2\pi}\lim_{\alpha\to 0}\frac{2jx}{\alpha^2+x^2} = \frac{1}{\pi x}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\pi x} \leftrightarrow -j\,\mathrm{sgn}\,\omega. \qquad (5.2)$$

Следовательно, фурье-спектр гильберт-сопряженного сигнала определяется как

$$\hat{s}(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}\,\omega\, s(\omega). \qquad (5.3)$$

Свойства преобразования Гильберта. Преобразование Гильберта обладает свойством линейности:

$$G\{\alpha_1 s_1(x) + \alpha_2 s_2(x)\} = \alpha_1\hat{s}_1(x) + \alpha_2\hat{s}_2(x)$$

при любых постоянных α_1 и α_2.

Гильберт-образ постоянного сигнала равен нулю. Действительно, при $s(x) = \mathrm{const}$

$$\hat{s}(x) = \frac{s}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{x-\xi} = 0,$$

поскольку ядро преобразования Гильберта есть нечетная функция относительно точки $\xi = x$.

Из рис. 5.1*а* видно, что в окрестности точки экстремума сигнал ведет себя как четная функция, тогда как ядро гильберт-преобразования является функцией нечетной (рис. 5.1*б*). Следовательно, гильберт-образ сигнала в точке экстремума равен нулю (рис. 5.1*в*).

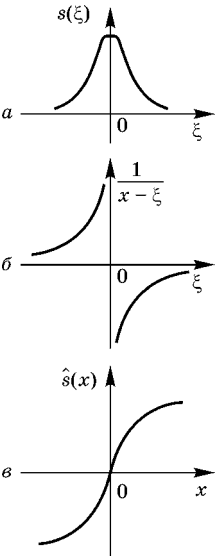


Рис. 5.1

Преобразование Гильберта имеет характер квазидифференцирования

сигнала. Это следует из структуры оператора дифференцирования в частотном пространстве:

$$\frac{d}{dx} \leftrightarrow j\omega = -|\omega|(-j\,\mathrm{sgn}\,\omega) = -|\omega|\,g(\omega).$$

Однако, в отличие от операции дифференцирования, преобразование Гильберта имеет нелокальный характер: поведение гильберт-образа в окрестности любой точки зависит от свойств сигнала на всем интервале его существования. Сигнал и его гильберт-образ ортогональны:

$$(s(x), \hat{s}(x)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)\hat{s}^*(x)d\omega = \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(\omega)\,|s(x)|^2 = 0.$$

Обратное преобразование Гильберта следует из определения прямого гильберт-преобразования в частотном пространстве:

$$\hat{s}(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega)s(\omega).$$

Отсюда

$$s(\omega) = j\,\mathrm{sgn}(\omega)\hat{s}(\omega) = -[-j\,\mathrm{sgn}(\omega)]\hat{s}(\omega).$$

Следовательно, в координатном пространстве обратное преобразование Гильберта имеет вид

$$s(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{s}(\xi)}{x-\xi}d\xi.$$

Оно отличается от прямого гильберт-преобразования только знаком и является сверткой гильберт-образа сигнала и ядра $1/\pi x$.

Изменение масштаба гильберт-преобразования. Пусть $s(x) \leftrightarrow s(\omega)$. Найдем гильберт-сопряженный сигнал для сигнала с измененным масштабом $s(ax)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(a\xi)}{x-\xi}d\xi = \frac{1}{\pi a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(u)}{x-u/a}du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(u)}{ax-u}du = \hat{s}(ax).$$

Следовательно,

$$s(ax) \xrightarrow{g} \hat{s}(ax). \qquad (5.4)$$

Теорема смещения. Найдем гильберт-сопряженный сигнал для $s(x-a)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\xi-a)}{x-\xi}d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(u)}{x-(u+a)}du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(u)}{x-a-u}du = \hat{s}(x-a).$$

Таким образом,

$$s(x-a) \xrightarrow{g} \hat{s}(x-a). \tag{5.5}$$

Гильберт-преобразование свертки двух сигналов:

$$s_1(x) \otimes s_2(x) \leftrightarrow s_1(\omega)s_2(\omega).$$

Фурье-спектр гильберт-образа свертки двух сигналов:

$$-j\operatorname{sgn}(\omega)s_1(\omega)s_2(\omega).$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем

$$-j\operatorname{sgn}(\omega)s_1(\omega)s_2(\omega) \leftrightarrow \hat{s}_1(x) \otimes s_2(x),$$
$$s_1(\omega)[-j\operatorname{sgn}(\omega)s_2(\omega)] \leftrightarrow s_1(x) \otimes \hat{s}_2(x)$$

Отсюда следует

$$s_1(x) \otimes s_2(x) \xrightarrow{g} \hat{s}_1(x) \otimes s_2(x), \tag{5.6}$$
$$s_1(x) \otimes s_2(x) \xrightarrow{g} s_1(x) \otimes \hat{s}_2(x). \tag{5.7}$$

Поскольку

$$\hat{s}_1(\omega)\hat{s}_2(\omega) = [-j\operatorname{sgn}(\omega)s_1(\omega)][-j\operatorname{sgn}(\omega)s_2(\omega)] = -s_1(\omega)s_2(\omega),$$

справедливо еще одно важное соотношение:

$$s_1(x) \otimes s_2(x) = -\hat{s}_1(x) \otimes \hat{s}_2(x). \tag{5.8}$$

Обратимся к функции корреляции сигнала

$$K_s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x+\tau)s^*(x)dx.$$

Ее фурье-спектр:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x+\tau)s^*(x)dx \leftrightarrow s(\omega)e^{j\omega\tau}s^*(\omega) = |s(\omega)|^2 e^{j\omega\tau}.$$

Фурье-спектр функции корреляции гильберт-сопряженного сигнала $\hat{s}(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(x+\tau)\hat{s}^*(x)dx \leftrightarrow [-j\operatorname{sgn}(\omega)s(\omega)]e^{j\omega\tau}[-j\operatorname{sgn}(\omega)s(\omega)]^* =$$
$$= |s(\omega)|^2 e^{j\omega\tau}.$$

Из сравнения фурье-спектров функции корреляции сигнала и функции корреляции гильберт-сопряженного сигнала следует равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x+\tau)s^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(x+\tau)\hat{s}^*(x)dx. \qquad (5.9)$$

Согласно (5.9) функции корреляции сигнала и его гильберт-образа идентичны. Полагая в (5.9) $\tau = 0$, запишем еще одно важное соотношение, получившее название теоремы Рэлея:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(x)|^2\, dx.$$

Энергия сигнала при гильберт-преобразовании сохраняется. Это легко показать. Пусть произвольный сигнал $s(x)$ задан своей спектральной плотностью $s(\omega)$. Энергетический спектр его

$$W(\omega) = |s(\omega)|^2.$$

Определим энергетический спектр гильберт-образа сигнала:

$$|\hat{s}(\omega)|^2 = |-j\,\mathrm{sgn}(\omega)s(\omega)|^2 = |s(\omega)|^2 = W(\omega).$$

Отсюда следует равенство энергий.

Приведем примеры преобразований Гильберта. Сравним скалярные произведения двух различных сигналов $(s_1(x), s_2(x))$ и $(\hat{s}_1(x), \hat{s}_2(x))$. Согласно обобщенной формуле Рэлея

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(x)s_2^*(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega)s_2^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega)d\omega,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}_1(x)\hat{s}_2^*(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [-j\,\mathrm{sgn}(\omega)s_1(\omega)][-j\,\mathrm{sgn}(\omega)s_2(\omega)]^* d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\omega)s_2^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega)d\omega.$$

Отсюда следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(x)s_2^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}_1(x)\hat{s}_2^*(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega)d\omega.$$

Полученный результат означает, что скалярные произведения двух различных сигналов и скалярные произведения гильберт-образов этих сигналов равны и определяют обменную энергию этих сигналов.

Преобразование Гильберта гармонических сигналов. Пусть $s(x) = \cos\omega_0 x$ (рис. 5.2*а*). Тогда (рис. 5.2*б*)

$$s(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

Выполняя гильберт-преобразование, получаем спектральную плотность гильберт-образа косинусоиды (рис. 5.2*в*):

$$\hat{s}(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}\,\omega\{\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\} = \\ = -j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)].$$

Посредством обратного фурье-преобразования этой спектральной плотности находим гильберт-образ косинусоиды:

$$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - (\omega + \omega_0)] \leftrightarrow \sin\omega_0 x, \qquad (5.10)$$

что отражено на рис. 5.2*г*.

Выполним гильберт-преобразование синусоиды (рис. 5.3*а*). На рис. 5.3*б* показана спектральная плотность

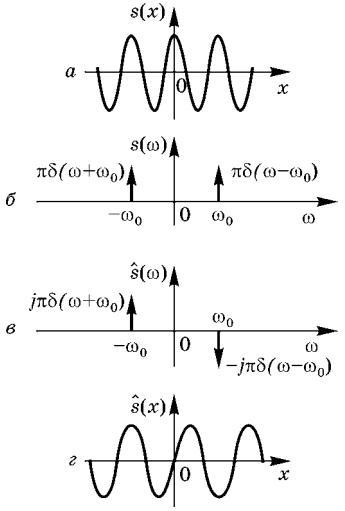


Рис. 5.2

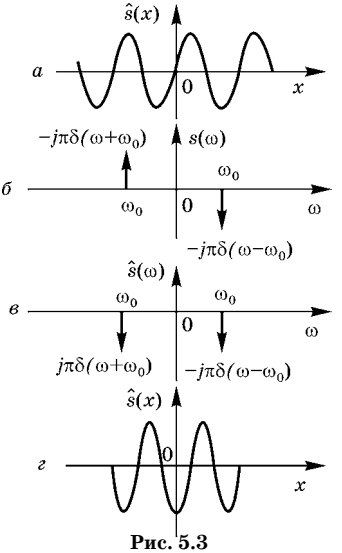


Рис. 5.3

синусоиды. Фурье-спектр гильберт-образа синусоиды $\hat{s}(\omega)$ находим как произведение спектральных плотностей гильберт-оператора и синусоиды (рис. 5.3*в*):

$$\hat{s}(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}\,\omega\{-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]\} = \\ = -\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].$$

Это есть спектральная плотность косинусоиды, взятой с обратным знаком (рис. 5.3*г*):

$$-\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)] \leftrightarrow -\cos\omega_0 x.$$

Следовательно,

$$\cos\omega_0 x \xrightarrow{g} \sin\omega_0 x;$$

$$\sin\omega_0 x \xrightarrow{g} -\cos\omega_0 x.$$

Пример 5.1. Гильберт-преобразование прямоугольного импульса (рис. 5.4*а*):

$$s(x) = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{x_0}\right) = \begin{cases} 1, & |x| < x_0; \\ 0, & |x| > x_0. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой (5.1):

$$\hat{s}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-x_0}^{x_0} \frac{d\xi}{x-\xi} = \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x-x_0}{x+x_0}\right|.$$

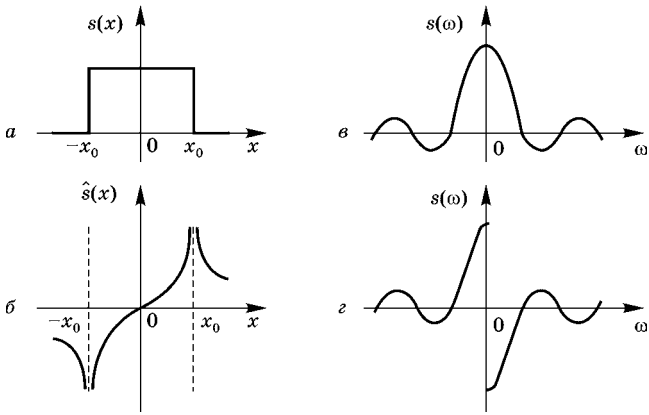


Рис. 5.4

Гильберт-образ $\hat{s}(x)$ показан на рис. 5.4*б*. Фурье-спектр прямоугольного импульса, $\hat{s}(\omega) = 2x_0 \dfrac{\sin(\omega x_0)}{\omega x_0}$, представлен на рис. 5.4*в*, а фурье-спектр гильберт-образа прямоугольного импульса, $\hat{s}(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}\,\omega \left\{ 2x_0 \dfrac{\sin(\omega x_0)}{\omega x_0} \right\}$ — на рис. 5.4*г*.

Пример 5.2. Гильберт-преобразование сигнала

$$s(x) = \frac{\sin(\omega_m x)}{\pi x}$$

(рис. 5.5*а*).

Фурье-спектр сигнала $s(\omega) = \sigma(\omega + \omega_m) - \sigma(\omega - \omega_m)$ (рис. 5.5*в*). Фурье-спектр гильберт-сопряженного сигнала $\hat{s}(\omega) = j[\sigma(\omega + \omega_m) - 2\sigma(\omega) + \sigma(\omega - \omega_m)]$ (рис. 5.5*г*). Гильберт-сопряженный сигнал (рис. 5.5*б*).

$$\hat{s}(x) = \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma(\omega + \omega_m) - 2\sigma(\omega) + \sigma(\omega - \omega_m)] e^{j\omega x} d\omega =$$

$$= \frac{j}{2\pi} \left\{ \int_{-\omega_m}^{0} e^{j\omega x} d\omega - \int_{0}^{\omega_m} e^{j\omega x} d\omega \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\omega_m} \sin(\omega x) d\omega = \frac{1}{\pi x}(1 - \cos\omega_m x).$$

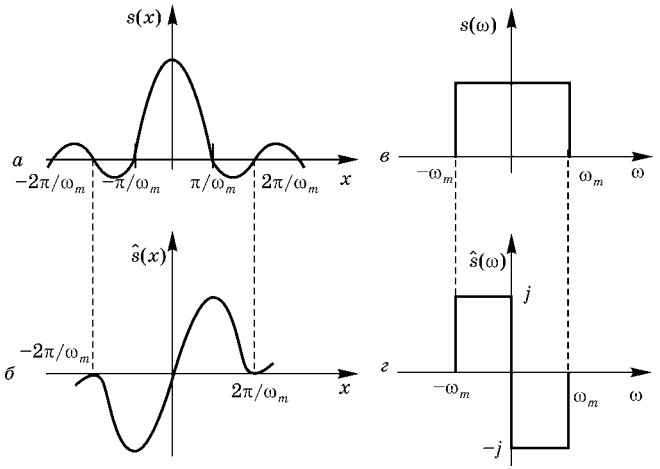


Рис. 5.5

Пример 5.3. Гильберт-образ сигнала $s(x) = \delta(x - x_0) + \delta(x + x_0)$ (рис. 5.6*а*).

Воспользуемся формулой (5.1) для непосредственного определения гильберт-образа (рис. 5.6*б*):

$$s(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(\xi - x_0) + \delta(\xi + x_0)}{x - \xi}d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{x - x_0} + \frac{1}{x + x_0}\right) = \frac{2x}{\pi(x^2 - x_0^2)}.$$

Спектральная плотность сигнала $s(\omega)$ показана на рис. 5.6*в*, а фурье-спектр $\hat{s}(\omega)$ гильберт-образа приведен на рис. 5.6*г*.

Рассмотрим случай последовательного многократного преобразования Гильберта. Пусть сигнал $s(x)$, спектральная плотность которого $s(\omega)$, последовательно n раз подвергается преобразованию Гильберта. Для фурье-спектра сопряженного сигнала имеем

$$\hat{s}^{(n)}(\omega) = (-j\,\mathrm{sgn}\,\omega)^n s(\omega),$$

при n — четном, $n = 2m$, фурье-спектр имеет вид

$$(-j\mathrm{sgn}\omega)^{2m}s(\omega) = (-1)^m s(\omega). \qquad (5.11)$$

Результатом последовательного четного числа ($n = 2m$) преобразований Гильберта является восстановленный с точностью до множителя $(-j)^m$ исходный сигнал. Сигнал восстанавливается со знаком минус при m нечетном, а при m

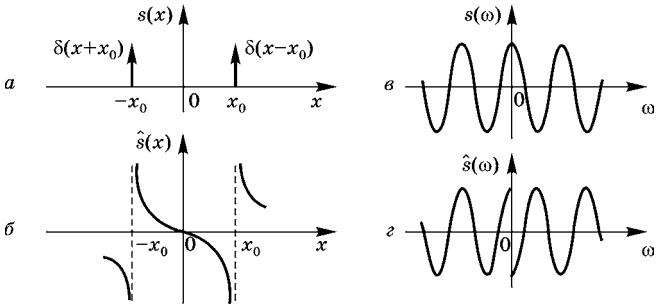


Рис. 5.6

четном — в первозданном виде, со знаком плюс. В частном случае двукратного преобразования Гильберта исходный сигнал восстанавливается инвертированным по амплитуде.

При n — нечетном, $n = 2m + 1$, для фурье-спектра гильберт-сопряженного сигнала имеем

$$(-j\,\mathrm{sgn}\,\omega)^n s(\omega) = (-j\,\mathrm{sgn}\,\omega)^{2m+1} s(\omega) = \\ = (-j\,\mathrm{sgn}\,\omega)^{2m}(-j\,\mathrm{sgn}\,\omega)s(\omega) = (-1)^m \hat{s}(\omega). \qquad (5.12)$$

В этом случае результатом является с точностью до знака гильберт-сопряженный сигнал.

Рассмотрим связь гильберт-преобразования с операциями дифференцирования и интегрирования. Для фурье-спектра производной сигнала n-го порядка имеем

$$\frac{d^n}{dx^n} s(x) \leftrightarrow (j\omega)^n s(\omega).$$

При n нечетном, $n = 2m + 1$, для фурье-спектра производной сигнала получаем

$$(j\omega)^n s(\omega) = (j\omega)^{2m+1} s(\omega) = -(j)^{2m} |\omega|^{2m+1} (-j\,\mathrm{sgn}\,\omega)s(\omega) = \\ = (-1)^{m+1} |\omega|^{2m+1} (-j\,\mathrm{sgn}\,\omega)s(\omega) = (-1)^{(n+1)/2} |\omega|^n \hat{s}(\omega). \qquad (5.13)$$

При n нечетном дифференцирование сигнала приводит в частотной области с точностью до коэффициента $(-1)^{(n+1)/2}$ к произведению фурье-спектра гильберт-сопряженного сигнала на модуль частоты в степени n.

В случае четного n, $n = 2m$, фурье-спектр производной сигнала имеет вид

$$(j\omega)^n s(\omega) = (j\omega)^{2m} s(\omega) = (j)^{2m}\omega^{2m} s(\omega) = \\ = (-1)^m \omega^{2m} s(\omega) = (-1)^{n/2}\omega^n s(\omega). \qquad (5.14)$$

Из (5.14) следует, что фурье-спектр четной производной сигнала с точностью до коэффициента $(-1)^{n/2}$ равен произведению фурье-спектра сигнала на множитель ω^n.

Рассмотрим связь операции интегрирования сигнала с его гильберт-преобразованием. Для фурье-спектра интеграла сигнала имеем

$$\int_{-\infty}^{x} s(x)dx \leftrightarrow \frac{s(\omega)}{j\omega}$$

или

$$\frac{s(\omega)}{j\omega} = \frac{1}{|\omega|}(-j\,\mathrm{sgn}\,\omega)s(\omega) = \frac{\hat{s}(\omega)}{|\omega|}. \qquad (5.15)$$

Следовательно, фурье-спектр интеграла сигнала определяется отношением спектральной плотности гильберт-сопряженного сигнала к модулю частоты.

Фурье-преобразование n-кратно интегрированного сигнала дает

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{x}\ldots\int_{-\infty}^{x}}_{n} s(x)dx \leftrightarrow \frac{s(\omega)}{(j\omega)^n}.$$

При n — четном, $n = 2m$, получаем

$$\frac{s(\omega)}{(j\omega)^n} = \frac{s(\omega)}{(j\omega)^{2m}} = (-1)^m\frac{s(\omega)}{\omega^{2m}} = \frac{(-1)^{n/2}}{\omega^n}s(\omega). \qquad (5.16)$$

В этом случае фурье-спектр n-кратного интеграла сигнала равен с точностью до коэффициента $(-1)^{n/2}$ отношению спектральной плотности сигнала к ω^m.

Положим теперь n нечетным, $n = 2m + 1$. Тогда для фурье-спектра n-кратного интеграла сигнала находим

$$\frac{s(\omega)}{(j\omega)^n} = \frac{s(\omega)}{(j\omega)^{2m+1}} = \frac{(-j\,\mathrm{sgn}\,\omega)s(\omega)}{(j)^{2m}\,|\omega|^{2m+1}} =$$

$$= (-1)^m\frac{\hat{s}(\omega)}{|\omega|^{2m+1}} = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{|\omega|^n}\hat{s}(\omega). \qquad (5.17)$$

Как следует из (5.17), фурье-спектр n-кратного интеграла сигнала при n нечетном определяется с точностью до коэффициента $(-1)^{(n-1)/2}$ отношением спектральной плотности гильберт-сопряженного сигнала к модулю частоты в степени n.

5.2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИГНАЛ

Пусть заданы сигнал $s(x)$ и его спектральная плотность $s(\omega)$. Эти величины являются фурье-сопряженными:

$$s(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s(\omega)e^{j\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}s(\omega)e^{j\omega x}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}s(\omega)e^{j\omega x}d\omega. \qquad (5.18)$$

Преобразуем первый интеграл в правой части (5.18), сделав замену переменной $\omega = -\omega$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} s(\omega)e^{j\omega x}d\omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{0} s(-\omega)e^{-j\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} s^*(\omega)e^{-j\omega x}d\omega.$$

Тогда

$$s(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega x}d\omega\right]^* + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega x}d\omega. \qquad (5.19)$$

Функция $z_s(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega x}d\omega$, определенная в области положительных частот, называется аналитическим сигналом. Согласно (5.18) и (5.19) физический сигнал $s(x)$ определяется через аналитический сигнал $z_s(x)$:

$$s(x) = \frac{1}{2}[z_s(x) + z_s^*(x)]$$

или

$$s(x) = \mathrm{Re}\, z_s(x).$$

Мнимая часть аналитического сигнала

$$\hat{s}(x) = Jm\,|[z_s(x)]|$$

получила название сопряженного сигнала по отношению к исходному $s(x)$:

$$z_s(x) = s(x) + j\hat{s}(x). \qquad (5.20)$$

Обратимся к преобразованию Фурье, связывающему аналитический сигнал и его спектральную плотность:

$$z_s(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} z_s(\omega)e^{j\omega x}d\omega.$$

С другой стороны, по определению

$$z_s(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} s_s(\omega)e^{j\omega x}d\omega.$$

Следовательно,

$$z_s(\omega) = \begin{cases} 2s(\omega), & \omega > 0; \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \qquad (5.21)$$

Спектральная плотность аналитического сигнала равна удвоенной спектральной плотности исходного физического

сигнала и отлична от нуля только в области положительных частот. Выполняя преобразование Фурье аналитического сигнала (5.20), получаем

$$z_s(\omega) = s(\omega) + j\hat{s}(\omega), \tag{5.22}$$

где $\hat{s}(\omega)$ — спектральная плотность сопряженного сигнала.

Совместимость выражений (5.21) и (5.22) достигается при выполнении условия

$$\hat{s}(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega)s(\omega).$$

Следовательно, исходный и сопряженный сигналы связаны преобразованием Гильберта в частотном пространстве:

$$\begin{aligned} \hat{s}(\omega) &= -j\,\mathrm{sgn}(\omega)s(\omega); \\ s(\omega) &= j\,\mathrm{sgn}(\omega)\hat{s}(\omega). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Соответственно в координатном пространстве:

$$\hat{s}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\xi)}{x-\xi}d\xi;$$

$$s(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{s}(\xi)}{\xi-x}d\xi.$$

Согласно (5.23) преобразование Гильберта в частотном пространстве заключается в повороте фазы спектральных компонент на угол минус 90° в области положительных частот и на угол плюс 90° в области отрицательных частот. Такая функция выполняется идеальным квадратурным фильтром.

Пусть $s(x)$ — произвольный сигнал:

$$s(x) = \mathrm{Re}\left| z_s(x) \right| e^{j\psi(x)},$$

где согласно (5.23) огибающая (модуль) сигнала равна

$$\left|s(x)\right| = [s^2(x) + \hat{s}^2(x)]^{1/2},$$

а фаза $\psi(x)$ определяется как аргумент аналитического сигнала:

$$\psi(x) = \mathrm{arctg}\frac{\hat{s}(x)}{s(x)}.$$

Мгновенная частота такого сигнала находится как производная фазы $\psi(x)$ по переменной x:

$$\frac{1}{2\pi}\omega(x)=\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{\hat{s}(x)}{s(x)}=\frac{\hat{s}'(x)s(x)-\hat{s}(x)s'(x)}{s^2(x)+\hat{s}^2(x)}. \quad (5.24)$$

Из (5.23) следует, что реальная и мнимая части аналитического сигнала взаимно ортогональны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)\hat{s}^*(\omega)d\omega = j\int_{-\infty}^{\infty}|s(\omega)|^2\,\mathrm{sgn}(\omega)d\omega = 0.$$

5.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА ДВУМЕРНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Пусть имеется оптический двумерный сигнал $s(x, y)$, фурье-спектр которого $s(K_x, K_y)$. Такой сигнал можно подвергнуть одномерному или двумерному преобразованию Гильберта, применяя фазовые и амплитудные фильтры.

Одномерное преобразование Гильберта двумерного сигнала можно выполнить в частотной плоскости, применяя соответствующие оптические фильтры, когерентные передаточные функции которых имеют вид

$$g_x(K_x, K_y) = -j\mathrm{sgn}K_x$$

или

$$g_y(K_x, K_y) = -j\mathrm{sgn}K_y.$$

Для соответствующих фурье-спектров гильберт-сопряженных сигналов имеем

$$\hat{s}_x(K_x, K_y) = -j\,\mathrm{sgn}\,K_x s(K_x, K_y) \quad (5.25)$$

или

$$\hat{s}_y(K_x, K_y) = -j\,\mathrm{sgn}\,K_y s(K_x, K_y). \quad (5.26)$$

В результате обратного фурье-преобразования в координатной плоскости формируются гильберт-сопряженные сигналы:

$$\hat{s}_x(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\xi, y)}{x-\xi}d\xi; \quad \hat{s}_y(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(x, \xi)}{y-\xi}d\xi.$$

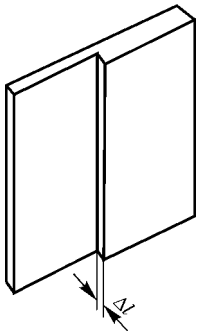


Рис. 5.7

Пространственно-частотный фильтр, реализующий одномерное фурье-преобразование в соответствии с (5.25) и (5.26), может быть выполнен в виде оптической пластинки со ступенькой Δl, создающей фазовый скачок величиной $\Delta\varphi = kn\Delta l = \pi$ (рис. 5.7), где n — коэффициент преломления.

На рис. 5.8 и 5.9 показаны примеры оптических схем, выполняющих одномерную гильберт-фильтрацию двумерных сигналов. В схеме оптического гиль-

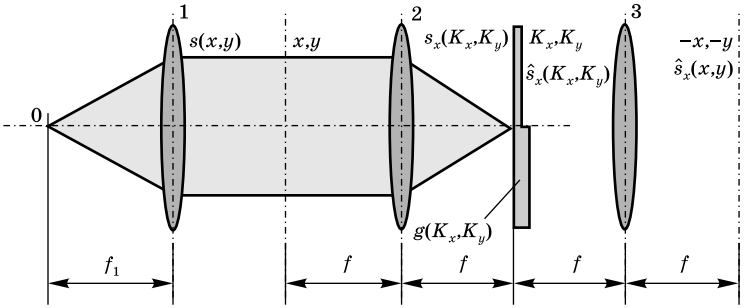


Рис. 5.8

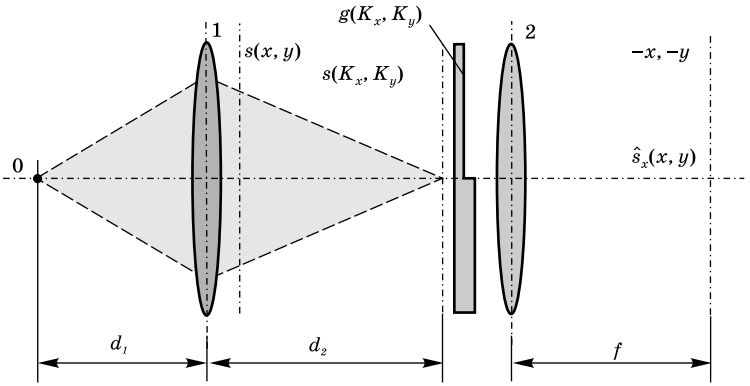


Рис. 5.9

берт-процессора (рис. 5.9) освещение входной плоскости, в которой локализуется входной сигнал (транспарант) $s(x, y)$, осуществляется световой волной, формируемой в сходящемся пучке. Входная плоскость (x, y) расположена непосредственно за объективом *1*, а частотная плоскость — перед объективом *2*.

Такая конфигурация оптического процессора снижает влияние конечной апертуры фурье-объективов *1* и *2* на выполнение прямого и обратного фурье-преобразований.

Двумерное преобразование Гильберта. Оптический сигнал $s(x, y)$, заданный в ортогональном координатном базисе, может быть подвергнут двумерному преобразованию Гильберта:

$$\hat{s}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\xi, \eta)}{(x-\xi)(y-\eta)} d\xi d\eta.$$

Это двумерная свертка сигнала $s(x, y)$ с функциями $1/\pi x$ и $1/\pi y$. В частотной плоскости когерентная передаточная функция двумерного гильберт-фильтра имеет вид

$$g(K_x, K_y) = (-j\operatorname{sgn}K_x)(-j\operatorname{sgn}K_y) = -\operatorname{sgn}K_x \operatorname{sgn}K_y \quad (5.27)$$

или

$$g(K_x, K_y) = \begin{cases} -1, & K_x > 0, K_y > 0, \\ & K_x < 0, K_y < 0; \\ 1, & K_x > 0, K_y < 0, \\ & K_x < 0, K_y > 0. \end{cases}$$

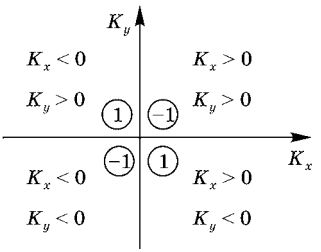


Рис. 5.10

Из рис. 5.10 видно, что двумерный фильтр является фазовым, в котором сегмент, содержащий первый и третий квадранты, вносит фазовый сдвиг π относительно сегмента, содержащего второй и четвертый квадранты.

Преобразование Фуко–Гильберта. Ортогональность сигнала и его гильберт-образа указывает на возможность использования в частотном пространстве амплитудного фильтра с когерентной передаточной функцией вида

$$H(\omega) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn}\omega] = \frac{1}{2}[1 + j(-j\operatorname{sgn}\omega)] = \frac{1}{2}[1 + jg(\omega)]. \quad (5.28)$$

Действительно, такой фильтр, получивший название фильтра Фуко–Гильберта, преобразует фурье-спектр сигнала следующим образом:

$$s(\omega)H(\omega)=\frac{1}{2}s(\omega)[1+j(-j\,\mathrm{sgn}\,\omega)]=\frac{1}{2}s(\omega)+\frac{1}{2}j\hat{s}(\omega)=\frac{1}{2}z_s(\omega). \tag{5.29}$$

Как видно из (5.29), в результате фильтрации Фуко–Гильберта фурье-спектр исходного сигнала трансформируется с точностью до коэффициента 1/2 в фурье-спектр аналитического сигнала.

Запишем выражение для когерентной передаточной функции фильтра, выполняющего комплементарное одномерное преобразование Фуко–Гильберта:

$$\tilde{H}(\omega)=\frac{1}{2}[1-\mathrm{sgn}(\omega)]=\frac{1}{2}[1-j(-j\,\mathrm{sgn}\,\omega)]=\frac{1}{2}[1-jg(\omega)]. \tag{5.30}$$

В результате фильтрации фурье-спектр исходного сигнала трансформируется в фурье-спектр комплексно сопряженного аналитического сигнала:

$$s(\omega)\tilde{H}(\omega)=\frac{1}{2}[1-jg(\omega)]=\frac{1}{2}s(\omega)-\frac{1}{2}j\hat{s}(\omega)=\frac{1}{2}z_s^*(\omega). \tag{5.31}$$

Выполняя обратное фурье-преобразование фильтрованных спектров (5.29) или (5.31), находим соответственно $\frac{1}{2}z_s(x)$ и $\frac{1}{2}z_s^*(x)$. В случае физического сигнала, регистрируя интенсивность, получаем для интенсивности аналитического сигнала:

$$|z_s(x)|^2=|s(x)|^2+|\hat{s}(x)|^2. \tag{5.32}$$

Отсюда интенсивность гильберт-образа сигнала $|\hat{s}(x)|^2$ находится как разность интенсивностей аналитического $|z_s(x)|^2$ и исходного $|s(x)|^2$ сигналов.

Двумерное преобразование Фуко–Гильберта. Когерентная передаточная функция двумерного фильтра Фуко–Гильберта (рис. 5.11) может быть представлена как

$$H_q(K_x,K_y)=\frac{1}{2}(1+\mathrm{sgn}\,K_x\,\mathrm{sgn}\,K_y) \tag{5.33}$$

или

$$H_q(K_x, K_y) = \begin{cases} 1, & \begin{matrix} K_x > 0, K_y > 0, \\ K_x < 0, K_y < 0; \end{matrix} \\ 0, & \begin{matrix} K_x > 0, K_y < 0, \\ K_x < 0, K_y > 0. \end{matrix} \end{cases}$$

Комплементарный квадрантный фильтр Фуко–Гильберта имеет когерентную передаточную функцию (рис. 5.12):

$$\tilde{H}_q(K_x, K_y) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn} K_x \operatorname{sgn} K_y)$$

или

$$\tilde{H}_q(K_x, K_y) = \begin{cases} 1, & \begin{matrix} K_x > 0, K_y < 0, \\ K_x < 0, K_y > 0, \end{matrix} \\ 0, & \begin{matrix} K_x > 0, K_y > 0, \\ K_x < 0, K_y < 0. \end{matrix} \end{cases} \qquad (5.34)$$

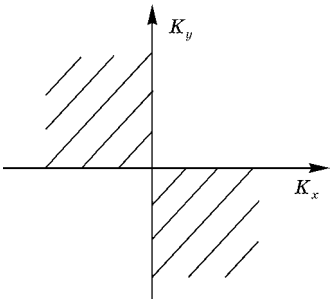


Рис. 5.11

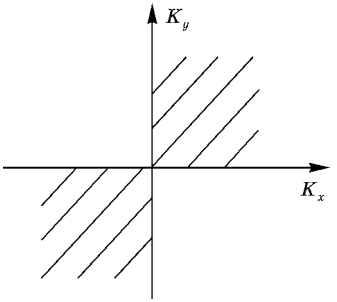


Рис. 5.12

Рассмотрим преобразование двумерного сигнала $s(x, y) \leftrightarrow s(K_x, K_y)$ с применением квадрантных фильтров Фуко–Гильберта:

$$s(K_x, K_y) H_q(K_x, K_y) =$$

$$= \frac{1}{2} s(K_x, K_y)(1 + \operatorname{sgn} K_x \operatorname{sgn} K_y) = \frac{1}{2}[s(K_x, K_y) - \hat{s}(K_x, K_y)].$$

Отсюда видно, что на выходе фильтра, с точностью до коэффициента $1/2$, формируется фурье-спектр двумерного аналитического сигнала. Выполняя обратное фурье-преобразование, получим

$$s(K_x, K_y)H_q(K_x, K_y) \leftrightarrow \frac{1}{2}[s(x,y) - \hat{s}(x,y)].$$

Переходя к интенсивности, имеем

$$\frac{1}{4}|s(x,y) - \hat{s}(x,y)|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\{|s(x,y)|^2 - s^*(x,y)\hat{s}(x,y) - s(x,y)\hat{s}^*(x,y) + |\hat{s}(x,y)|^2\}. \tag{5.35}$$

В случае фильтрации этого же сигнала с использованием комплементарного квадратичного фильтра Фуко–Гильберта (5.34) находим

$$s(K_x, K_y)\tilde{H}_g(K_x, K_y) = \frac{1}{2}[s(K_x, K_y) + \hat{s}(K_x, K_y)].$$

Выполняя обратное фурье-преобразование и переходя к интенсивности, получаем для выходного сигнала:

$$\frac{1}{4}|s(x,y) + \hat{s}(x,y)|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\{|s(x,y)|^2 + s^*(x,y)\hat{s}(x,y) + s(x,y)\hat{s}^*(x,y) + |\hat{s}(x,y)|^2\}. \tag{5.36}$$

Сумма (5.36) и (5.35) дает

$$\frac{1}{4}|s(x,y) - \hat{s}(x,y)|^2 + \frac{1}{4}|s(x,y) + \hat{s}(x,y)|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}[|s(x,y)|^2 + |\hat{s}(x,y)|^2].$$

Отсюда следует, что интенсивность результирующего сигнала равна полусумме изображений исходного сигнала и его гильберт-образа.

5.4. ИЗОТРОПНОЕ КОГЕРЕНТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА

Преобразование Гильберта сигналов с осевой симметрией. Рассмотрим оптический фильтр, когерентная передаточная функция которого в системе с осевой симметрией описывается выражением

$$H_g(w, \varphi) = e^{-j\varphi}, \tag{5.37}$$

где φ — полярный угол.

Импульсный отклик такого фильтра определяем через обратное фурье-преобразование когерентной передаточной функции (5.37):

$$h_g(r,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j\varphi}e^{jwr\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi.$$

Выполняя замену переменной $\varphi+\theta=\alpha$, получаем

$$h_g(r,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}e^{j\theta}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j[\alpha-wr\sin\alpha]}wdwd\alpha=\frac{1}{2\pi}e^{j\theta}\int_0^{\infty}wJ_1(rw)dw,$$

где $J_1(rw)$ — функция Бесселя первого порядка. Воспользовавшись свойствами функций Бесселя, сделаем подстановку:

$$J_1(rw)=-\frac{dJ_0(rw)}{d(rw)},$$

$$h_g(r,\theta)=-\frac{1}{2\pi}e^{j\theta}\int_0^{\infty}w\frac{dJ_0(rw)}{d(rw)}dw=$$

$$\left[rw=u;\ w=\frac{u}{r};\ dw=\frac{du}{r}\right]$$

$$=-\frac{1}{2\pi}e^{j\theta}\frac{1}{r^2}\int_0^{\infty}u\frac{dJ_0(u)}{du}du=-\frac{1}{2\pi r^2}e^{j\theta}\left\{uJ_0(u)\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}J_0(u)du\right\}.$$

Поскольку $uJ_0(u)\Big|_0^{\infty}=0$, а $\int_0^{\infty}J_0(u)du=1$, получаем импульсный отклик

$$h_g(r,\theta)=\frac{e^{j\theta}}{2\pi r^2}. \qquad (5.38)$$

Пример 5.4. Найти когерентную передаточную функцию фильтра, импульсный отклик которого описывается выражением (5.38).

Выполним фурье-преобразование импульсного отклика $h_g(r,\theta)$:

$$H_g(w,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{j\theta}}{r^2}e^{-jwr\sin(\theta+\varphi)}rdrd\theta=$$

$$[\theta+\varphi=\alpha]$$

$$=\frac{e^{-j\varphi}}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{r}e^{j(\alpha-wr\sin\alpha)}drd\alpha=e^{-j\varphi}\int_0^{\infty}\frac{J_1(wr)}{r}dr=e^{-j\varphi}\int_0^{\infty}\frac{J_1(u)}{u}du=$$

$$= e^{-j\varphi}\int_0^\infty\left\{J_0(u)-\frac{dJ_1(u)}{du}\right\}du = e^{-j\varphi}\left\{\int_0^\infty J_0(u)du-\int_0^\infty dJ_1(u)\right\} = e^{-j\varphi}.$$

Здесь мы воспользовались рекуррентной формулой $\frac{n}{u}J_n(u) = J_{n-1}(u) - J'_n(u)$.

Таким образом, когерентная передаточная функция фильтра (5.37) и импульсный отклик (5.38) образуют фурье-сопряженную пару

$$\frac{e^{j\theta}}{2\pi r^2} \leftrightarrow e^{-j\varphi}. \qquad (5.39)$$

В координатной плоскости преобразование (5.39) сводится к свертке сигнала с квадратичной гиперболой. Фильтр с некогерентной передаточной функцией (5.37) может применяться для оконтуривания как осесимметричных, так и произвольных двумерных оптических сигналов. Действие такого фильтра можно представить как изотропное преобразование Гильберта. Обратимся к рис. 5.13. Противоположно направленные полярные радиусы, соответствующие полярным углам φ и $\varphi + \pi$, выполняют роль нормали к прямой p, проходящей через центр системы координат под углом $\varphi + \pi/2$ к полярной оси. Эта прямая выполняет роль локальной границы раздела между положительными и отрицательными пространственными частотами. Когерентная передаточная функция $e^{-j\varphi}$ оказывается эквивалентной когерентной передаточной функции гильберт-фильтра $-j\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi-\psi\right)$. Можно сказать, что изотропность здесь достигается усреднением по углу одномерных преобразований Гильберта. В области низких пространственных частот частотный фильтр с когерентной передаточной функцией $e^{-j\varphi}$ работает плохо. В координатном пространстве действие этого фильтра сводится к свертке фильтруемого сигнала с импульсным от-

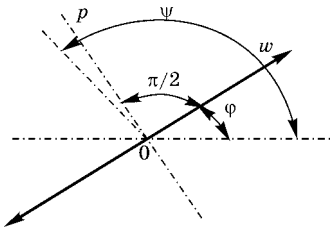


Рис. 5.13

кликом вида (5.38). При этом цель фильтрации, состоящая в изотропном оконтуривании сигнала, достигается. Чистое изотропное преобразование Гильберта, как будет показано далее, реализуется при смещении границы раздела знакопеременных пространственных частот относительно нуля в направлении нормали к этой границе, заданной полярным радиусом w.

Гильберт-фильтрация осесимметричных сигналов. Пусть $s(r) \leftrightarrow s(w)$. Тогда для фурье-спектра гильберт-сопряженного сигнала имеем

$$\hat{s}(w) = s(w)e^{-j\varphi}.$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем

$$\hat{s}(r) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}\hat{s}(w)e^{jwr\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}s(w)e^{-j\varphi}e^{jwr\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi =$$

$$[\varphi+\theta=\alpha]$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}e^{j\theta}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}s(w)e^{-j[\alpha-wr\sin\alpha]}wdwd\alpha = \frac{e^{j\theta}}{2\pi}\int_0^\infty s(w)J_1(wr)wdw.$$

Отсюда видно, что гильберт-образ осесимметричного сигнала определяется через преобразование Ганкеля первого порядка в частотной плоскости:

$$\hat{s}(r) = \frac{e^{j\theta}}{2\pi}\int_0^\infty s(w)J_1(wr)wdw. \qquad (5.40)$$

Найдем скалярное произведение сигналов $s(r)$ и $\hat{s}(r)$. Для этого воспользуемся обобщенной формулой Рэлея:

$$(s(r), \hat{s}(r)) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}s(w)\hat{s}^*(w)wdwd\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}s(w)s^*(w)e^{j\varphi}wdwd\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty|s(w)|^2\,wdw\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\varphi}d\varphi = 0.$$

Как и следовало ожидать, исходный $s(r)$ и гильберт-сопряженный $\hat{s}(r)$ сигналы ортогональны.

Пусть $s(r, \theta) = \text{const}$. Тогда, фурье-спектр сигнала $s(w, \varphi) = 4\pi^2\delta(w)$. Фурье-спектр гильберт-сопряженного сигнала равен

$$\hat{s}(w, \varphi) = 4\pi^2\delta(w)e^{-j\varphi}.$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, находим гильберт-сопряженный сигнал

$$\hat{s}(r, \theta) = 2\pi e^{j\theta}\int_0^\infty w\delta(w)J_1(rw)dw = 0.$$

Таким образом, когерентное изотропное гильберт-преобразование постоянного двумерного сигнала равно нулю. Как следствие, гильберт-сопряженный двумерный сигнал обращается в нуль и при значениях аргументов, соответствующих экстремумам исходного сигнала.

Для когерентного изотропного преобразования Гильберта остается справедливым равенство Парсеваля:

$$\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}|s(w, \varphi)|^2\, wdwd\varphi = \int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}|\hat{s}(w, \varphi)\,^2 wdwd\varphi.$$

В самом деле, для энергии сигнала, разложенного в ряд Фурье, имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty}|\hat{c}_n|^2,$$

т. е. энергия исходного и гильберт-сопряженного сигналов равны.

Пример 5.5. Найти гильберт-преобразование сигнала $s(r) = J_0(ar)$.

Из

$$\delta(r-a) \xleftrightarrow{h} \int_0^\infty r\delta(r-a)J_0(wr)dr$$

следует

$$\delta(r-a) \xleftrightarrow{h} aJ_0(aw)$$

или, поскольку преобразование Ганкеля симметрично,

$$J_0(ar) \xleftrightarrow{h} \frac{1}{a}\delta(w-a).$$

Для фурье-спектра гильберт-сопряженного сигнала имеем

$$\hat{s}(w) = \frac{2\pi}{a}\delta(w-a)e^{j\varphi}.$$

Отсюда с учетом (5.40) находим гильберт-сопряженный сигнал:

$$\hat{s}(r) = \frac{e^{j\theta}}{2\pi}\int_0^\infty ws(w)J_1(rw)dw = J_1(ar)e^{j\theta} = \frac{e^{j\theta}}{a}\frac{dJ_0(ar)}{dr}.$$

Изотропное когерентное преобразование Гильберта произвольных сигналов. Воспользуемся разложением сигнала $s(r, \theta)$ в ряд Фурье по полярным гармоникам:

$$s(r,\theta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\theta}.$$

Для фурье-спектра сигнала согласно (3.17) имеем

$$s(w,\varphi) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{c}_{nn}(w)e^{-jn\varphi},$$

где

$$\bar{c}_{nn}(w) \xleftrightarrow{h_n} c_n(r).$$

Определим фурье-спектр гильберт-сопряженного сигнала:

$$\hat{s}(w,\varphi) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{c}_{nn}(w)e^{-j(n+1)\varphi}.$$

Выполним обратное фурье-преобразование:

$$\hat{s}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}\bar{c}_{nn}(w)e^{-j(n+1)\varphi}e^{jrw\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi =$$

$$[\varphi+\theta=\alpha]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j(n+1)\theta}\int_0^\infty\bar{c}_{nn}(w)wdw\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j[(n+1)\alpha-rw\sin\alpha]}d\alpha =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j(n+1)\theta}\int_0^\infty w\bar{c}_{nn}(w)J_{n+1}(wr)dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{c}_n(r)e^{j(n+1)\theta}.$$

Отсюда следует, что гильберт-сопряженный сигнал в произвольном случае может быть представлен рядом Фурье,

коэффициенты разложения в котором являются гильберт-сопряженными коэффициентами разложения исходного сигнала:

$$\hat{s}(r,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{c}_n(r)e^{j(n+1)\theta}, \tag{5.41}$$

где

$$\hat{c}_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}w\bar{c}_{nn}(w)J_{n+1}(wr)dw. \tag{5.42}$$

Выражение (5.42) определяет правило нахождения $\hat{c}_n$: коэффициент разложения в ряд Фурье гильберт-сопряженного сигнала находится как преобразование Ганкеля порядка $n+1$ коэффициента разложения фурье-спектра исходного сигнала в ряд Фурье.

Определим скалярное произведение исходного и гильберт-сопряженного сигналов. Воспользуемся для этого обобщенной формулой Рэлея:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}s(w,\varphi)\hat{s}^*(w,\varphi)wdwd\varphi=$$

$$=\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{c}_{nn}e^{-jn\varphi}\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{c}_{mm}e^{-j(m+1)\varphi}\right]^*wdwd\varphi=$$

$$=\sum_{n,m}\int_0^{\infty}\left(\bar{c}_{nn}\bar{c}_{mm}^*\right)\delta_{nm}wdw\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j(n-m-1)\varphi}d\varphi=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left|\bar{c}_{nn}\right|^2wdw\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\varphi}d\varphi=0.$$

Следовательно, подтверждается ортогональность исходного и гильберт-сопряженного сигналов.

Гильберт-фильтр с высокочастотной полярной несущей. Когерентное изотропное преобразование Гильберта может быть выполнено в частотном пространстве с помощью фильтра, когерентная передаточная функция которого описывается выражением

$$H_g(w,\varphi)=e^{-j(2m+1)\varphi}. \tag{5.43}$$

Нормаль к полярному радиусу, соответствующему полярному углу $(2m+1)\varphi$, является локальной границей

раздела между положительными и отрицательными частотами. Эта нормаль направлена под углом $(2m+1)\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$ к полярной оси.

Импульсный отклик этого фильтра определяется через обратное фурье-преобразование когерентной передаточной функции (5.43):

$$h_g(r,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-j(2m+1)\varphi}e^{jwr\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi=$$

$$[\varphi+\theta=\alpha]$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}e^{j(2m+1)\theta}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-j[(2m+1)\alpha-wr\sin\alpha]}wdwd\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{j(2m+1)\theta}\int\limits_0^{\infty}wJ_{2m+1}(wr)dw. \qquad (5.44)$$

Сделаем в (5.44) подстановку

$$J_{2m+1}(wr)=\frac{2m}{wr}J_{2m}(wr)-\frac{dJ_{2m}(wr)}{d(wr)}:$$

$$h_g(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}e^{j(2m+1)\theta}\int\limits_0^{\infty}w\left[\frac{2m}{wr}J_{2m}(wr)-\frac{dJ_{2m}(wr)}{d(wr)}\right]dw=$$

$$[u=wr;\ w=u/r]$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{j(2m+1)\theta}\left\{\frac{2m}{r^2}\int\limits_0^{\infty}J_{2m}(u)du-\frac{1}{r^2}\int\limits_0^{\infty}u\frac{dJ_{2m}(u)}{du}du\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi r^2}e^{j(2m+1)\theta}\left\{2m\int\limits_0^{\infty}J_{2m}(u)du-uJ_{2m}(u)\Big|_0^{\infty}+\int\limits_0^{\infty}J_{2m}(u)du\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi r^2}e^{j(2m+1)\theta}(2m+1)\int\limits_0^{\infty}J_{2m}(u)du=(2m+1)\frac{e^{j(2m+1)\theta}}{2\pi r^2}. \qquad (5.45)$$

Здесь мы воспользовались интегрированием по частям. Импульсный отклик (5.45) при $m=0$ совпадает с (5.38).

Пример 5.6. Найти когерентную передаточную функцию фильтра, импульсный отклик которого (5.45).

Выполним фурье-преобразование импульсного отклика (5.45), чтобы получить когерентную передаточную функцию фильтра:

$$H_g(w,\varphi)=\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}h_g(r,\theta)e^{-jwr\sin(\theta+\varphi)}rdrd\theta=$$

$$=\frac{(2m+1)}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{r}e^{j(2m+1)\theta}e^{-jwr\sin(\theta+\varphi)}drd\theta=$$

$$[\theta+\varphi=\alpha]$$

$$=\frac{(2m+1)}{2\pi}e^{-j(2m+1)\varphi}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{r}e^{j[(2m+1)\alpha-wr\sin\alpha]}drd\alpha=$$

$$=e^{-j(2m+1)\varphi}\int_0^{\infty}\frac{(2m+1)}{r}J_{2m+1}(wr)dr=$$

$$[wr=u]$$

$$=e^{-j(2m+1)\varphi}\int_0^{\infty}\frac{(2m+1)}{u}J_{2m+1}(u)du=$$

$$=e^{-j(2m+1)\varphi}\int_0^{\infty}\left[J_{2m}(u)-\frac{dJ_{2m+1}(u)}{du}\right]du=$$

$$=e^{-j(2m+1)\varphi}\int_0^{\infty}J_{2m}(u)du=e^{-j(2m+1)\varphi}.$$

Здесь учтено, что

$$\int_0^{\infty}\frac{dJ_{2m+1}(u)}{du}du=0.$$

Таким образом, импульсный отклик (5.45) и когерентная передаточная функция фильтра (5.43) образуют фурье-сопряженную пару

$$e^{-j(2m+1)\varphi}\leftrightarrow\frac{(2m+1)}{2\pi r^2}e^{j(2m+1)\theta}. \qquad (5.46)$$

При $m=0$ выражение (5.46) трансформируется в (5.39).

Пусть имеется двумерный осесимметричный сигнал $s(r)\leftrightarrow s(w)$. Воздействуем на фурье-спектр этого сигнала фильтром с когерентно-передаточной функцией (5.43):

$$\hat{s}(w)=s(w)e^{-j(2m+1)\varphi}. \qquad (5.47)$$

Выполним обратное преобразование Фурье фильтрованного пространственно-частотного спектра (5.47):

$$\hat{s}(r) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} s(w)e^{-j(2m+1)\varphi}e^{jwr\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi =$$

$$[\varphi+\theta=\alpha]$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}e^{j(2m+1)\theta}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} s(w)e^{-j[(2m+1)\alpha-wr\sin\alpha]}wdwd\alpha =$$

$$= e^{j(2m+1)\theta}\int_0^\infty \bar{s}(w)J_{2m+1}(rw)wdw =$$

$$= \frac{1}{2\pi}e^{j(2m+1)\theta}\int_0^\infty s(w)J_{2m+1}(wr)wdw. \qquad (5.48)$$

При $m = 0$ выражение (5.48) совпадает с (5.40). Согласно (5.48) результатом фильтрации является ганкель-преобразование $(2m + 1)$-го порядка фурье-спектра сигнала.

Найдем скалярное произведение исходного $s(r)$ и фильтрованного $\hat{s}(r)$ сигналов. Для этого воспользуемся обобщенной формулой Рэлея:

$$(s(r), \hat{s}(r)) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} ws(w)\hat{s}^*(w)dwd\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} s(w)s^*(w)e^{j(2m+1)\varphi}wdwd\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty |s(w)|^2\, wdw\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(2m+1)\varphi}d\varphi = 0.$$

Отсюда следует, что исходный $s(r)$ и фильтрованный (5.48) сигналы ортогональны.

Пусть фильтруемый сигнал является постоянным. Тогда $s(w) \leftrightarrow 4\pi^2\delta(w)$. Для фурье-спектра фильтрованного сигнала имеем

$$\hat{s}(w, \varphi) = 4\pi^2\delta(w)e^{-j(2m+1)\varphi}.$$

Выполняя обратное фурье-преобразование $\hat{s}(w, \varphi)$, получаем

$$\hat{s}(r, \theta) = \int_0^\infty w\delta(w)e^{-j(2m+1)\varphi}e^{jwr\sin(\varphi+\theta)}dwd\varphi =$$

$$= 2\pi e^{j(2m+1)\theta}\int_0^\infty w\delta(w)J_{2m+1}(wr)dw = 0.$$

Таким образом, для осесимметричного сигнала, преобразованного фильтром с когерентной передаточной функцией $H_g(w, \varphi) = e^{-j(2m+1)\varphi}$, подтверждаются свойства гильберт-сопряженного сигнала. Отсюда следует, что результатом такой фильтрации является гильберт-сопряженный сигнал (5.48) на фазовой несущей $e^{-j(2m+1)\varphi}$.

Рассмотрим преобразование двумерного оптического сигнала фильтром с когерентной передаточной функцией:

$$H_g(w, \varphi) = e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2\cos\varphi. \qquad (5.49)$$

Найдем импульсный отклик этого фильтра:

$$h_g(r,\theta) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})e^{jwr\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi r^2}e^{j\theta} + \frac{1}{2\pi r^2}e^{-j\theta} = \frac{1}{\pi r^2}\cos\theta. \qquad (5.50)$$

Здесь мы учли ранее полученный результат (5.39).

Пусть сигнал имеет осевую симметрию $s(r) \leftrightarrow s(w)$. Фурье-спектр фильтрованного сигнала с учетом (5.49) имеет вид

$$\hat{s}(w) = s(w)(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}).$$

Выполним обратное фурье-преобразование:

$$\hat{s}(r) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}s(w)(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})e^{jwr\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi =$$

$$[\theta+\varphi=\alpha]$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left\{e^{-j\theta}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}s(w)e^{j(\alpha+wr\sin\alpha)}wdwd\alpha + \right.$$

$$\left. + e^{j\theta}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}s(w)e^{-j(\alpha-wr\sin\alpha)}wdwd\alpha\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{e^{-j\theta}\int_0^\infty ws(w)J_{-1}(wr)dw + e^{j\theta}\int_0^\infty ws(w)J_1(wr)dw\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{(e^{j\theta} - e^{-j\theta})\int_0^\infty ws(w)J_1(wr)dw = \frac{j}{\pi}\sin\theta\int_0^\infty ws(w)J_1(wr)dw\right\}. \qquad (5.51)$$

Здесь учтено, что $J_{-1}(wr) = -J_1(wr)$. Из сравнения (5.51) и (5.40) следует, что применение фазового фильтра с когерентно-передаточной функцией (5.49) приводит к гильберт-образу исходного сигнала на полярной несущей $\sin\theta$.

Аналогично можно показать, что применение фильтра с квадратурной по отношению к (5.49) когерентной передаточной функцией

$$H_g(w, \varphi) = e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2j\sin\varphi \qquad (5.52)$$

для фильтрации осесимметричного сигнала $s(r)$ приводит к фурье-спектру вида

$$\hat{s}(w, \varphi) = s(w)(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}).$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем

$$\hat{s}(r) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} s(w)(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})e^{jwr\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(e^{-j\theta} + e^{-j\theta})\int_0^\infty ws(w)J_1(wr)dw = \frac{1}{\pi}\cos\theta\int_0^\infty ws(w)J_1(wr)dw. \qquad (5.53)$$

Отсюда следует, что использование квадратурных фазовых фильтров с когерентной передаточной функцией (5.49) и (5.52) для фильтрации осесимметричного сигнала $s(r)$ дает соответствующие гильберт-сопряженные сигналы (5.51) и (5.53) на квадратурных полярных несущих $\sin\theta$ и $\cos\theta$.

Рассмотрим преобразование произвольных сигналов фильтром с когерентной передаточной функцией (5.49). Воспользуемся разложением сигнала в ряд Фурье

$$s(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\theta}.$$

Выполним фурье-преобразование сигнала:

$$s(w, \varphi) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(w)e^{-jn\varphi}. \qquad (5.54)$$

Фурье-спектр фильтрованного сигнала (5.54) с учетом (5.49) имеет вид

$$\hat{s}(w,\varphi) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(w) e^{jn\varphi}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}).$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем

$$\hat{s}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(w) e^{-jn\varphi}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) e^{jwr\sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}(w)(e^{-j(n-1)\varphi} + e^{-j(n+1)\varphi}) e^{jwr\sin(\varphi+\theta)} w dw d\varphi =$$

$$[\varphi+\theta=\alpha]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{j(n-1)\theta} \int_0^{\infty} w\bar{c}_{nn}(w) J_{n-1}(wr) dw + \right.$$

$$\left. + e^{j(n+1)\theta} \int_0^{\infty} w\bar{c}_{nn}(w) J_{n+1}(wr) dw \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\theta},$$

где

$$c_m = \int_0^{\infty} w[\bar{c}_{m+1,m+1}(w) + \bar{c}_{m-1,m-1}(w)] J_m(wr) dw.$$

Применим для осесимметричного сигнала $s(r)$ оптический фильтр с когерентной передаточной функцией:

$$H_g(w,\varphi) = e^{j(2m+1)\varphi} + e^{-j(2m+1)\varphi}. \qquad (5.55)$$

Фурье-спектр фильтрованного сигнала

$$\hat{s}(w,\varphi) = s(w)[e^{j(2m+1)\varphi} + e^{-j(2m+1)\varphi}].$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем

$$\hat{s}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s(w)[e^{j(2m+1)\varphi} + e^{-j(2m+1)\varphi}] e^{jwr\sin(\varphi-\theta)} w dw d\varphi =$$

$$[\varphi+\theta=\alpha]$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-j(2m+1)\theta} \int_0^{\infty} ws(w) J_{-(2m+1)}(wr) dw +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} e^{j(2m+1)\theta} \int_0^{\infty} ws(w) J_{2m+1}(wr) dw =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} e^{-j(2m+1)\theta} \int_0^{\infty} ws(w) J_{2m+1}(wr) dw +$$

$$+\frac{1}{2\pi}e^{j(2m+1)\theta}\int_0^\infty ws(w)J_{2m+1}(wr)dw=$$

$$=\frac{j}{2\pi}[e^{j(2m+1)\theta}-e^{-j(2m+1)\theta}]\int_0^\infty ws(w)J_{2m+1}(wr)dw=$$

$$=\frac{j}{\pi}\sin[(2m+1)\theta]\int_0^\infty ws(w)J_{2m+1}(wr)dw. \tag{5.56}$$

Как следует из (5.56), гильберт-сопряженный сигнал при использовании фильтра (5.55) получается с точностью до фазового множителя как произведение функции $\sin[(2m+1)\theta]$ на преобразование Ганкеля порядка $2m+1$ фурье-спектра исходного сигнала. Таким образом, в структуру гильберт-сопряженного осесимметричного сигнала введена гармоническая несущая $\sin[(2m+1)\theta]$, являющаяся функцией полярного угла.

Применение фильтра с когерентной передаточной функцией вида

$$H_g(w,\varphi)=e^{j(2m+1)\varphi}-e^{-j(2m+1)\varphi}$$

позволяет получить гильберт-сопряженный сигнал с квадратурной по фазе несущей в сравнении с (5.56):

$$\hat{s}_q(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\cos[(2m+1)\theta]\int_0^\infty ws(w)J_{2m+1}(wr)dw. \tag{5.57}$$

Выражения (5.56) и (5.57) описывают квадратурную пару изотропных гильберт-сопряженных образов исходного осесимметричного сигнала. При $m=0$ выражения (5.56) и (5.57) совпадают, как и следовало ожидать, соответственно с (5.51) и (5.53).

Преобразование произвольного сигнала оптическим фильтром с когерентной передаточной функцией (5.43). Фурье-спектр фильтрованного сигнала с учетом (5.54) имеет вид

$$\hat{s}(w,\varphi)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{c}_{nn}(w)e^{-jn\varphi}e^{j(2m+1)\varphi}. \tag{5.58}$$

Выполняя обратное фурье-преобразование, получаем

$$\hat{c}_n(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{c}_{nn}(w)e^{j(2m-n+1)\varphi}e^{jrw\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi=$$

$$[\varphi+\theta=\alpha]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j(2m-n+1)\theta}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{c}_{nn}(w)e^{j[(2m-n+1)\alpha-rw\sin\alpha]}wdwd\alpha=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j(2m-n+1)\theta}\int_0^{\infty}\bar{c}_{nn}(w)J_{2m-n+1}(rw)wdw=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\beta_n(r)e^{j(2m-n+1)\theta},$$

где

$$\beta_n(r)=\int_0^{\infty}\bar{c}_{nn}(w)J_{2m+n+1}(rw)wdw. \qquad (5.59)$$

Из (5.59) видно, что гильберт-сопряженный сигнал получается как разложение в ряд по гармонике полярного угла $e^{j(2m-n+1)\theta}$, а коэффициенты разложения находятся через обобщенное преобразование Ганкеля порядка $2m-n+1$ от соответствующих коэффициентов разложения фурье-спектра исходного сигнала.

Рассмотрим возможность гильберт-преобразования произвольного сигнала с применением амплитудно-фазового фильтра, когерентная передаточная функция которого (5.55):

$$H(w,\varphi)=2\cos[(2m+1)\varphi]=$$
$$=e^{j(2m+1)\varphi}+e^{-j(2m+1)\varphi}. \qquad (5.60)$$

Для фурье-спектра фильтрованного сигнала с учетом (5.54) имеем

$$\hat{s}(w,\varphi)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{c}_{nn}(w)e^{-jn\varphi}[e^{j(2m+1)\varphi}+e^{-j(2m+1)\varphi}]. \qquad (5.61)$$

Выполним обратное фурье-преобразование фурье-спектра (5.61):

$$\hat{s}(r,\theta)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{c}_{nn}(w)e^{-jn\varphi}[e^{j(2m+1)\varphi}+e^{-j(2m+1)\varphi}]\times$$

$$\times e^{jwr\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{c}_{nn}(w)\{e^{j(2m-n+1)\varphi}+e^{-j(2m+n+1)\varphi}\}e^{jwr\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi =$$

$$[\varphi+\theta=\alpha]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{e^{-j(2m-n+1)\theta}\int_0^{\infty}w\bar{c}_{nn}(w)J_{-(2m-n+1)}(wr)dw + \right.$$

$$\left. + e^{j(2m-n+1)\theta}\int_0^{\infty}w\bar{c}_{nn}(w)J_{2m-n+1}(rw)dw\right\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{-e^{j(2m-n+1)\theta}\int_0^{\infty}w\bar{c}_{nn}(w)J_{2m-n+1}(wr)dw + \right.$$

$$\left. + e^{-j(2m+n+1)\theta}\int_0^{\infty}w\bar{c}_{nn}(w)J_{2m+n+1}(wr)dw\right\} = \sum_{q=-\infty}^{\infty}\beta_q e^{jq\theta},$$

где

$$\beta_q = \left\{\int_0^{\infty}w[\bar{c}_{q-2m-1,q-2m-1}(w)-\bar{c}_{2m-q+1,2m-q+1}(w)]J_q(wr)dw.\right. \tag{5.62}$$

Как следует из (5.62), в случае применения фазового фильтра с когерентной передаточной функцией (5.60) результатом фильтрации произвольного сигнала является гильберт-сопряженный сигнал, разложенный в ряд по гармоническим функциям полярного угла, коэффициенты разложения которого определяются посредством гильберт-преобразования порядка $2m \pm n + 1$ коэффициентов разложения $\bar{c}_{nn}(w)$ фурье-спектра исходного сигнала.

5.5. ИЗОТРОПНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА С КОЛЬЦЕВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Применение кольцевого источника в оптическом фурье-процессоре, рассмотренном в разд. 3.5, может служить основой для реализации изотропного когерентного преобразования Гильберта. Обратимся к схеме, показанной на рис. 5.14. Оптическая схема содержит три последовательно и конфокально расположенных объектива *1*, *2* и *3*. В передней фокальной плоскости (ρ, α) объектива *1*, который

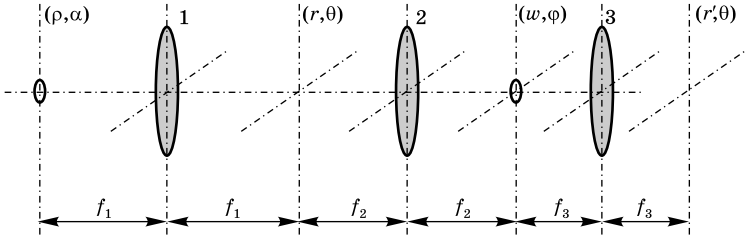


Рис. 5.14

выполняет функции конденсора, помещен кольцевой источник s_0, описываемый структурной функцией

$$s_0(\rho) = \delta(\rho - a). \tag{5.63}$$

В плоскости (r, θ) размещается транспарант с функцией пропускания $s(r, \theta)$. Объектив *2* с фокусным расстоянием f_2 выполняет фурье-преобразование сигнала $s(r, \theta)$. Как показано в разделе 3.5, в случае осесимметричного сигнала $s(r, \theta) = s(r)$ в задней фурье-плоскости объектива *2* формируется световое поле, которое представляет собой смещенный фурье-спектр сигнала $s(r)$, $s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)$, где Γ — линейный коэффициент передачи фрагмента оптической схемы, состоящего из объективов *1* и *2*, фокусное расстояние которых соответственно равно f_1 и f_2, а линейные апертуры принимаются неограниченными.

Рассмотрим Гильберт-фильтрацию осесимметричного сигнала $s(r)$. Поместим в фурье-плоскость (w, φ) оптический фильтр с когерентной передаточной функцией

$$H_g(w) = -j\,\mathrm{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right). \tag{5.64}$$

Для светового поля непосредственно за фильтром имеем с учетом (3.29) и (5.64):

$$E_f(w) = \left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) H_g(w) =$$

$$= \left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left[-j\,\mathrm{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right]. \tag{5.65}$$

Выражение (5.65) описывает фурье-спектр фильтрованного сигнала.

Объектив *3*, выполняя обратное фурье-преобразование, восстанавливает в плоскости (r', θ) фильтрованный сигнал

$$E(r',\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty w\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)s\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\left[-j\,\mathrm{sgn}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\right]J_0(wr')dw. \tag{5.66}$$

Как видно из (5.66), восстановленный сигнал в плоскости (r', θ) определяется как ганкель-преобразование произведения двух функций

$$\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\bar{s}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\left[-j\,\mathrm{sgn}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\right].$$

Поскольку ганкель-преобразование произведения двух функций равно свертке ганкель-образов этих функций, с учетом

$$\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\bar{s}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\xleftrightarrow{h}\frac{a}{\Gamma}s(r')J_0\left(\frac{a}{\Gamma}r'\right),$$

$$-j\,\mathrm{sgn}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\xleftrightarrow{h}\frac{ja}{\pi r'\Gamma}J_1\left(\frac{a}{\Gamma}r'\right)$$

получаем

$$\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)s\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\left[-j\,\mathrm{sgn}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\right]\xleftrightarrow{h}$$

$$\xleftrightarrow{h}\frac{a}{\Gamma}s(r')J_0\left(\frac{a}{\Gamma}r'\right)\otimes\frac{ja}{\pi r'\Gamma}J_1\left(\frac{a}{\Gamma}r'\right). \tag{5.67}$$

Выполним сверточное преобразование в (5.67) в приближении $\frac{a}{\Gamma}r' \ll 1$:

$$s(r')\otimes\frac{j}{\pi r}J_1\left(\frac{a}{\Gamma}r'\right)=\hat{s}(r'). \tag{5.68}$$

Здесь мы ограничились первым членом разложения в ряд $J_0\left(\frac{a}{\Gamma}r'\right)=1-\left(\frac{ar'}{2\Gamma}\right)^2+\ldots$ Как следует из (5.68), в выходной плоскости (r', θ) восстанавливается с точностью до множителя a/Γ гильберт-сопряженный сигнал $\hat{s}(r')$. Таким образом, в схеме с кольцевым источником можно реализовать когерентное изотропное преобразование Гильберта для осесимметричного сигнала.

Рассмотрим возможность изотропного гильберт-преобразования произвольного сигнала в схеме с кольцевым

источником. Разложим сигнал $s(r, \theta)$ в ряд по гармоническим функциям полярного угла:

$$s(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(r) e^{jn\theta}.$$

В частотной плоскости (w, φ) световое поле описывается согласно (3.29) выражением

$$E(w,\varphi) = 2\pi\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) e^{-jn\varphi}. \qquad (5.69)$$

Как видно из (5.69), поле в плоскости (w, φ) представляет собой смещенный фурье-спектр исходного сигнала, разложенный в ряд Фурье по полярным гармоникам. Поместим в частотную плоскость (w, φ) оптический фильтр с когерентной передаточной функцией, описываемый выражением (5.64). Для фурье-спектра фильтрованного сигнала имеем

$$E_f(w,\varphi) = 2\pi\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{nn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left[-j\,\mathrm{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right] e^{-jn\varphi}. \qquad (5.70)$$

Объектив *3* выполняет обратное фурье-преобразование, восстанавливая в плоскости (r', θ) фильтрованный сигнал (5.70). С учетом (5.68) получаем

$$E(r',\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\bar{c}_{nn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left[-j\,\mathrm{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right] \times$$

$$\times e^{-jn\varphi} e^{jwr'\sin(\varphi+\theta)} w\,dw\,d\varphi =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\theta} \int_0^{\infty} \left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\bar{c}_{nn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left[-j\,\mathrm{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right] J_n(wr')\,w\,dw =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_{nn}(r') e^{jn\theta} = \hat{s}(r',\theta). \qquad (5.71)$$

Здесь мы воспользовались теоремой о свертке для преобразования Ганкеля произведения двух функций. Как следует из (5.71), в выходной плоскости схемы с кольцевым источником гильберт-сопряженный сигнал. Гильберт-сопряженный сигнал представлен в (5.71) рядом Фурье по полярным гармоникам. Коэффициент разложения

этого ряда является гильберт-сопряженным коэффициентом разложения в ряд Фурье исходного сигнала:

$$\widehat{c}_{nn} = \int_0^\infty \left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \bar{c}_{nn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left[-j\,\mathrm{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right] J_n(wr')w\,dw.$$

Регистрация изображения фильтрованного поля дает распределение интенсивности гильберт-сопряженного сигнала в выходной плоскости.

5.6. ИЗОТРОПНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУКО–ГИЛЬБЕРТА С КОЛЬЦЕВЫМ ИСТОЧНИКОМ

На примере оптического процессора, представленного на рис. 5.14, покажем возможность реализации когерентного изотропного преобразования Фуко–Гильберта. Для этого в частотную плоскость поместим оптический фильтр с когерентной передаточной функцией

$$H_{fg}(w) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{sgn}\left(\frac{a}{\Gamma}\right)\right]. \tag{5.72}$$

Фурье-спектр фильтрованного осесимметричного сигнала с учетом (5.72) и (5.65) имеет вид

$$E_f(w) = \left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) H_{fg}(w) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left[1 + \mathrm{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right].$$

Объектив *3* выполняет обратное фурье-преобразование:

$$E(r', \theta) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty w\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left[1 + \mathrm{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right] J_0(wr')dw =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty w\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) J_0(wr')dw +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty w\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left[-j\,\mathrm{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right] J_0(wr')dw =$$

$$= \frac{1}{2}s(r') + \frac{j}{2}\widehat{s}(r'). \tag{5.73}$$

Здесь учтены выражения (5.66)–(5.68). Как следует из (5.73), в схеме с кольцевым источником при использовании фильтра с когерентно-передаточной функцией (5.72) выполняется преобразование Фуко–Гильберта осесимметричного сигнала. Результатом когерентного изотропного преобразования Фуко–Гильберта осесимметричного поля с точностью до постоянного множителя является аналитический сигнал

$$z_s(r') = \frac{1}{2}[s(r') + j\hat{s}(r')]. \tag{5.74}$$

В случае произвольного сигнала $s(r, \theta)$ воспользуемся разложением его пространственно-частотного спектра в ряд по полярным гармоникам (5.69). Тогда для фурье-спектра фильтрованного сигнала с учетом (5.72) получаем

$$E_f(w, \varphi) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \bar{c}_{nn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) e^{-jn\varphi}\left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right]. \tag{5.75}$$

Выполним обратное преобразование Фурье пространственно-частотного спектра фильтрованного сигнала (5.75):

$$\begin{aligned}
&E(r', \theta) = \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} w\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \bar{c}_{nn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \times \\
&\times \left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right] e^{-jn\varphi} e^{jwr'\sin(\varphi+0)} dw d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\theta} \int_0^{\infty} w\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \bar{c}_{nn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right] J_n(wr') dw = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\theta} \int_0^{\infty} w\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \bar{c}_{nn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) J_n(wr') dw + \\
&+ \frac{j}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\theta} \int_0^{\infty} w\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right) \bar{c}_{nn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left[-j\operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\right] J_n(wr') dw = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{nn}(r') e^{jn\theta} + \frac{j}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_{nn}(r') e^{jn\theta} = \\
&= \frac{1}{2}[s(r', \theta) + j\hat{s}(r', \theta)].
\end{aligned} \tag{5.76}$$

Выражение для восстановленного сигнала (5.76) получено с учетом (5.68) и (5.71). Отсюда следует, что результатом когерентного изотропного преобразования Фуко–Гильберта произвольного сигнала в схеме оптического процессора с кольцевым источником является аналитический сигнал (5.76).

Таким образом, в схеме с кольцевым источником реализуется когерентное изотропное преобразование Фуко–Гильберта для произвольных сигналов. Комбинируя комплементарные преобразования Фуко–Гильберта, можно получать гильберт-преобразования как осесимметричных, так и произвольных сигналов.

5.7. ГИЛЬБЕРТ-ФИЛЬТРАЦИЯ НА ОСНОВЕ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ СО СБОЕМ

В качестве гильберт-фильтра может применяться дифракционная решетка со сбоем. Дифракционная решетка со сбоем отличается от классической тем, что в ее центре две смежные бороздки разнесены на расстояние, равное $l = \frac{2n-1}{2}d$, где d — шаг решетки, n — целое число (см. рис. 5.15). Обычно n выбирается равным 1 или 2. Для гильберт-фильтрации дифракционную решетку помещают в плоскость пространственных частот (K_x, K_y). На рис. 5.16 линзы *1* и *2* выполняют соответственно прямое и обратное преобразования Фурье. В плоскости (x_0, y_0) формируется исследуемый оптический сигнал. В плоскости (x, y) регистрируется восстановленный фильтрованный сигнал.

Рассмотрим случай одномерной фильтрации. Пусть решетка со сбоем формирует периодическую структуру вдоль оси K_x в плоскости (x, y), где $K_x = \frac{k}{b}x_1$. Когерентно-передаточная функция решетки

$$H_e(K_x, K_y) = [1 + \mathrm{sgn}K_x \cos(K_x\xi)]. \qquad (5.77)$$

Линза *2* выполняет обратное фурье-преобразование фильтрованного сигнала. В плоскости регистрации (x, y) восстанавливается фильтрованный сигнал. Пренебрегая конечным размером апертуры линзы *2*, можно записать

$$s(K_x, K_y)H_e(K_x, K_y) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}[s(K_x, K_y)[1+\operatorname{sgn}K_x\cos(K_x\xi)]]e^{-j(K_x x+K_y y)}dK_x dK_y =$$

$$= s(-x,-y) +$$

$$+\frac{j}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}s(K_x, K_y)(-j\operatorname{sgn}K_x)(e^{jK_x\xi}+e^{-jK_x\xi})e^{-j(K_x x+K_y y)}dK_x dK_y =$$

$$= s(-x,-y) + j\frac{1}{2}\hat{s}_x(x-\xi, y) + j\frac{1}{2}\hat{s}_x(x+\xi, y). \tag{5.78}$$

Здесь мы воспользовались теоремой смещения. Как видно из (5.78), в выходной плоскости восстанавливается в инвертированных осях исходный сигнал, центрированный относительно начала координат, и пара одномерных

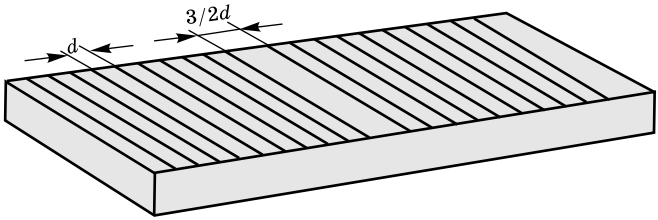


Рис. 5.15

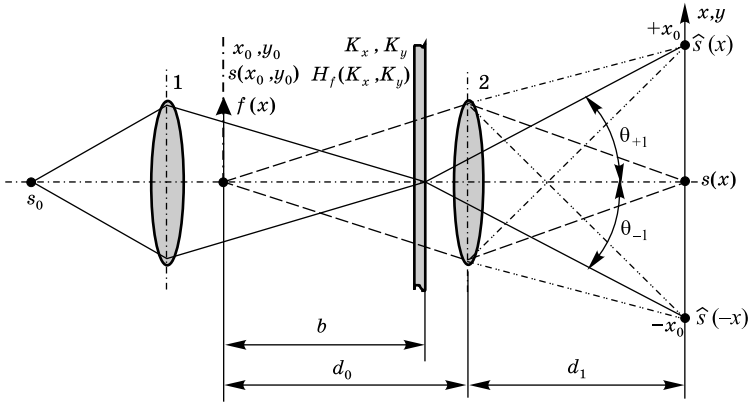


Рис. 5.16

по оси x гильберт-сопряженных сигналов, которые центрированы относительно точек (ξ, 0) и ($-\xi$, 0). Одномерные гильберт-образы сигнала $\hat{s}(x-\xi, y)$ и $\hat{s}(x+\xi, y)$ формируются в первых порядках дифракции, восстановленный исходный сигнал $s(-x, -y)$ — в нулевом порядке. Оценка смещений центрированных одномерных гильберт-образов легко получается из рис. 5.16:

$$\xi = \frac{\lambda}{d} b_1, \tag{5.79}$$

где $b_1 = d_1 + (d_0 - b)$; d_1 — расстояние от главной плоскости линзы *2* до плоскости регистрации (x, y), которая является изображением плоскости локализации входного сигнала (x_0, y_0); d_0 — расстояние между плоскостью (x_0, y_0) и второй линзой; b — расстояние между входной плоскостью (x_0, y_0) и частотной плоскостью (K_x, K_y). Расстояния d_0 и d_1 удовлетворяют условию $\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_2} = 0$, где f_2 — фокусное расстояние второй линзы. Как следует из (5.79), сдвиг первого порядка дифракции линейно зависит от длины волны λ. Поэтому, если используется двухволновое излучение, то можно реализовать гильберт-образы сигнала одновременно на двух различных длинах волн, что составляет одно из достоинств этого метода гильберт-фильтрации. Дифракционная решетка со сбоем в качестве фильтра не требует особых юстировок по фазе. При использовании дифракционной решетки со сбоем практически исключаются пограничные эффекты, которые обычно имеются в случае применения фазовых или амплитудных фильтров. К недостаткам гильберт-фильтрации на основе дифракционной решетки со сбоем следует отнести большие энергетические потери и ограниченность полосы углового спектра исследуемых световых полей. Применение двух последовательно расположенных решеток с преобразованием оптического сигнала последовательно в дифракционных порядках разного знака позволяет выполнять гильберт-преобразование в белом свете.

Использование двух ортогонально ориентированных совмещенных дифракционных решеток со сбоем (см рис. 5.17)

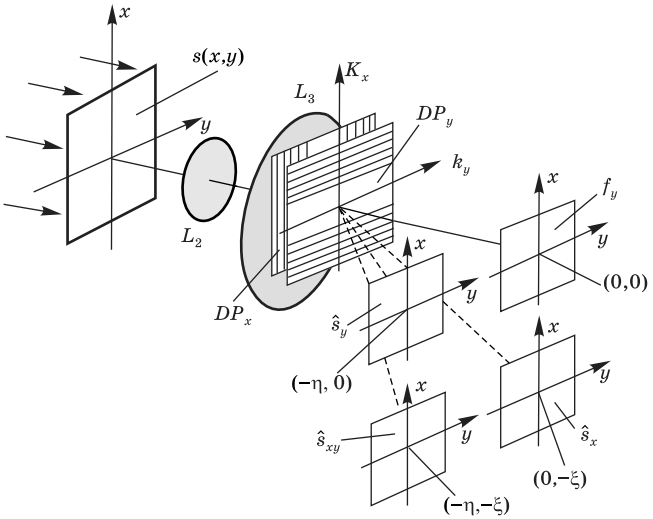


Рис. 5.17

расширяет функциональные возможности гильберт-фильтрации на одновременное получение пространственно разнесенных двух одномерных гильберт-образов сигналов по осям x и y, $\hat{s}(x-\xi, y)$ и $\hat{s}(x+\xi, y)$, двумерного гильберт-образа $\hat{s}(x+\xi, y+\eta)$ и восстановленного сигнала $s(-x, -y)$.

Одномерные гильберт-образы $\hat{s}(x-\xi, y)$ и $\hat{s}(x+\xi, y)$ реализуются в первых порядках дифракции ортогонально ориентированных решеток, двумерный гильберт-образ $\hat{s}(x+\xi, y+\eta)$ получается в перекрестном совмещенном порядке, а восстановленный сигнал $s(-x, -y)$ — в нулевом порядке дифракции.

5.8. ГИЛЬБЕРТ-ФИЛЬТРАЦИЯ НА ОСНОВЕ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКИ СО СБОЕМ В СХЕМЕ С КОЛЬЦЕВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Обратимся к схеме с кольцевым источником на рис. 5.14. Пусть входной сигнал $s(r)$ имеет осевую симметрию. В частотной плоскости согласно (3.29) формируется фурье-спектр сигнала $\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)s\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)$. Поместим в фурье-

плоскость фильтр в виде концентрической решетки со сбоем. Когерентная передаточная функция такого фильтра

$$H_g(w) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\cos(r_0 w)\right]. \qquad (5.80)$$

Фурье-спектр фильтрованного сигнала

$$E_+(w, \varphi) = \frac{1}{2}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\cos(r_0 w)\right].$$

В выходной плоскости после выполнения обратного преобразования Фурье имеем

$$E(r', \theta) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\times$$

$$\times\left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\cos(r_0 w)\right]e^{jwr\sin(\varphi+\theta)}w\,dw\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)s\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\cos(r_0 w)\right]J_0(wr')w\,dw =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\bar{s}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\left\{\left[1 + \operatorname{sgn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)\cos(r_0 w)\right]\right\}J_0(wr')w\,dw =$$

$$= \frac{1}{2}s(r')e^{-j\frac{a}{\Gamma}r} + \frac{j}{4}\hat{s}(r' - r_0) + \frac{j}{4}\hat{s}(r' + r_0). \qquad (5.81)$$

Здесь мы воспользовались свойствами преобразования Ганкеля и (5.68). Как следует из (5.81), в выходной плоскости восстанавливается в плюс (минус) первом порядке дифракции гильберт-сопряженный сигнал. В схеме с кольцевым источником применение в качестве частотного фильтра концентрической дифракционной решетки со сбоем обеспечивает выполнение изотропного когерентного преобразования Гильберта.

Рассмотрим фильтрацию произвольного сигнала в этой схеме. Разложим фурье-спектр сигнала $s(r, \theta)$ в ряд по гармоническим функциям полярного угла φ:

$$s(w, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{nn}\left(w - \frac{a}{\Gamma}\right)e^{-jn\varphi}.$$

Поместим в частотную плоскость фильтр, когерентная передаточная функция которого описывается выражением (5.80). Для фурье-спектра фильтрованного сигнала имеем

$$E_+(w,\varphi)=\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\bar{c}_{nn}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)e^{-jn\varphi}\left[1+\operatorname{sgn}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\cos(r_0w)\right].$$

После выполнения обратного фурье-преобразования для поля в выходной плоскости (r', θ) получаем

$$\begin{aligned}
&E(r',\theta)=\\
&=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\bar{c}_{nn}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\times\\
&\times\left[1+\operatorname{sgn}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\cos(r_0w)\right]e^{jn\varphi}e^{jwr'\sin(\varphi+\theta)}wdwd\varphi=\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\theta}\int_0^{\infty}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\bar{c}_{nn}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\times\\
&\times\left[1+\operatorname{sgn}\left(w-\frac{a}{\Gamma}\right)\cos(r_0w)\right]J_n(wr')wdw=\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{nn}(r')e^{jn\theta}+\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{c}_{nn}(r'-r_0)e^{jn\theta}+\\
&+\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{c}_{nn}(r'+r_0)e^{jn\theta}=\\
&=\frac{1}{2}s(r',\theta)+\frac{1}{4}\hat{s}(r'-r_0,\theta)+\frac{1}{4}\hat{s}(r'+r_0,\theta).
\end{aligned}\tag{5.82}$$

Как видно из (5.82), в выходной плоскости в нулевом порядке дифракции восстанавливается в соответствующем масштабе исходный сигнал $s(r', \theta)$. В плюс (минус) первом порядке дифракции формируются гильберт-сопряженные сигналы $\hat{s}(r'-r_0,\theta)$ и $\hat{s}(r'+r_0,\theta)$. Таким образом, и в случае произвольного сигнала в схеме с кольцевым источником и частотным фильтром в виде концентрической дифракционной решетки со сбоем выполняется изотропное когерентное преобразование Гильберта.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как определяется одномерное преобразование Гильберта в координатном и частотном пространствах?
2. В чем отличие прямого и обратного преобразований Гильберта?
3. Перечислите свойства преобразования Гильберта.
4. Чему равно скалярное произведение сигнала и его гильберт-образа?
5. Как соотносятся обменная энергия двух сигналов и обменная энергия их гильберт-образов?
6. Как связаны операции дифференцирования и гильберт-преобразования сигналов?
7. Как связаны операции интегрирования и гильберт-преобразования сигналов?
8. Как связаны преобразование Гильберта и аналитический сигнал?
9. Как связаны частота сигнала с его гильберт-образом?
10. Как реализуется одномерное преобразование Гильберта в оптике?
11. Как определяется когерентная передаточная функция фильтра, выполняющего двумерное гильберт-преобразование?
12. Как определяется преобразование Фуко–Гильберта?
13. Какие преобразования можно выполнить с использованием комплементарных фильтров Фуко–Гильберта?
14. Как выполняется изотропное гильберт-преобразование осесимметричного сигнала с применением фазового фильтра?
15. Какие амплитудные фильтры используются для выполнения когерентного изотропного преобразования Гильберта осесимметричных сигналов?
16. Как выполняется изотропное гильберт-преобразование произвольных сигналов?
17. Какие когерентно-передаточные функции имеют гильберт-фильтры, используемые в оптических схемах с кольцевым источником?
18. Как выполняется изотропное преобразование Фуко–Гильберта в оптической схеме с кольцевым источником?
19. Как осуществляется гильберт-фильтрация сигналов с применением дифракционной решетки со сбоем?
20. Как выполняется изотропное преобразование Гильберта с применением фильтра на основе концентрической дифракционной решетки со сбоем?

ЗАДАЧИ

1. Выполните гильберт-преобразование сигнала $e^{-|x|}$.

2. Найти гильберт-образ сигнала

$$s(x) = \delta(x - x_0) - \delta(y - y_0).$$

3. Найти гильберт-сопряженный сигнал для

$$s(x) = \sin(\alpha x)\sin(\beta x).$$

4. Выполнить гильберт-преобразование сигнала

$$s(x) = \cos(\alpha x)\cos(\beta x).$$

5. Найти гильберт-образ сигнала $s(x) = \cos^2(\alpha x)\sin(\beta x)$.

6. Выполнить гильберт-преобразование сигнала

$$s(x, y) = \exp[j\varphi(x, y)],$$

где

$$\varphi(x, y) = \alpha \sin(K_{x_0} x)\cos(K_{y_0} y), \alpha \ll 0.$$

7. Выполнить гильберт-преобразование сигнала

$$s(x) = \cos^2 x.$$

8. Выполнить преобразование Фуко-Гильберта для сигнала

$$s(x) = \exp[j\varphi(x)], \quad \varphi(x) \ll 1.$$

9. Найти гильберт-образ сигнала

$$s(x, y) = \sin(x - y).$$

10. Определить гильберт-образ и частоту сигнала

$$s(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}.$$

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ОПТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

6.1. СОГЛАСОВАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Пусть $s(t)$ — сигнал с ограниченным спектром

$$s(t) \leftrightarrow s(\omega),$$
$$s(\omega) = 0 \quad \text{при} \quad |\omega| > \omega_m.$$

Сигнал поступает на вход линейной системы, которая характеризуется импульсным откликом $h(t)$ и частотным коэффициентом передачи $H(\omega)$, $h(t) \leftrightarrow H(\omega)$. Определим максимальное значение выходного сигнала $s_e(t)$ при энергии входного сигнала E. Выходной сигнал определяется выражением

$$s_e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} s_e(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} s(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Воспользуемся неравенством Шварца

$$|s_e(t)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\omega_m}^{\omega_m} s(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} |s(\omega)|^2 \, d\omega \int_{-\omega_m}^{\omega_m} |H(\omega) e^{j\omega t}|^2 \, d\omega. \qquad (6.1)$$

Поскольку

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} |s(\omega)|^2 \, d\omega,$$

неравенство принимает вид

$$|s_e(t)|^2 \le \frac{E}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} |H(\omega)|^2\, d\omega \qquad (6.2)$$

или

$$|s_e(t)|^2 \le \left[\frac{E}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} |H(\omega)|^2\, d\omega\right]^{1/2}.$$

Максимум модуля выходного сигнала ограничен энергией входного сигнала и среднеквадратичным значением частотного коэффициента передачи в полосе частот входного сигнала.

Найдем сигнал $s_0(t)$, выходная реакция на который $s_e(t_0)$ в заданный момент времени t_0 является максимальной. Из выражения (6.1) следует, что такая реакция достигается при выполнении условия

$$s_0(\omega) \approx (H(\omega)e^{j\omega t_0})^*,$$

т. е. спектр входного сигнала должен быть пропорционален комплексно-сопряженной функции $H^*(\omega)e^{-j\omega t_0}$:

$$s_0(\omega) = AH^*(\omega)e^{-j\omega t_0}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right), \qquad (6.3)$$

где

$$\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_m; \\ 0, & |\omega| > \omega_m. \end{cases}$$

Постоянная A выбирается из условия, что энергия входного сигнала $s_0(t)$ равна E:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega)|^2\, d\omega = E = \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} |H(\omega)|^2\, d\omega,$$

откуда

$$A^2 = \frac{2\pi E}{\int_{-\omega_0}^{\omega_0} |H(\omega)|^2\, d\omega}.$$

Из (6.3) находим входной сигнал, соответствующий максимальной выходной реакции в момент t_0:

$$s_0(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s_0(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H^*(\omega)e^{-j\omega t_0}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)e^{j\omega t}d\omega=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H^*(\omega)e^{j\omega(t-t_0)}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)d\omega.$$

Для спектральной плотности, представленной в виде двух сомножителей, сигнал описывается сверткой фурье-образов сомножителей:

$$s_0(t)=Ah^*(t_0-t)\otimes\frac{\sin\omega_m t}{\pi t}.$$

Здесь учтено:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H^*(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{j\omega(-t)}d\omega\right]^*=h^*(-t).$$

Откуда

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}H^*(\omega)e^{j\omega(t-t_0)}=h^*(t-t_0).$$

Если на спектр входного сигнала не наложено никаких частотных ограничений, то

$$s_0(\omega)=AH^*(\omega)e^{-j\omega t_0}. \qquad (6.4)$$

Следовательно,

$$s_0(t)=Ah^*(t_0-t). \qquad (6.5)$$

Оптический времязависимый входной сигнал $s_0(t)$, соответствующий максимальной выходной реакции линейной оптической системы, пропорционален комплексно-сопряженному импульсному отклику, инвертированному по оси времени и смещенному в сторону запаздывания относительно $h(-t)$ на величину t_0. На рис. 6.1 показано нахождение оптимального сигнала $s_0(t)$ по известному импульсному отклику $h(t)$. Из неравенства (6.1) следует

$$|s_e(t)|^2\le E\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2\,dt. \qquad (6.6)$$

Равенство в (6.6) соответствует максимальной реакции линейной оптической системы и достигается при

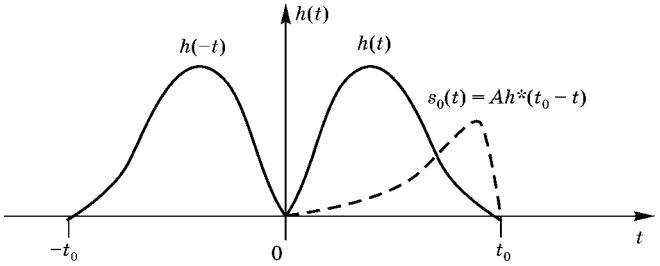


Рис. 6.1

выполнении условия *согласованной фильтрации* (6.5) в момент $t = t_0$. Предельное значение выходного сигнала согласно (6.6) для ограниченного по спектру входного сигнала имеет место при $H(\omega) = 1$:

$$|s_e(t)|^2 \le |s_e(t_0)|^2 = \frac{E\omega_m}{\pi}.$$

Пусть входной сигнал $s(t) \leftrightarrow s(\omega)$. Найдем частотный коэффициент передачи $H_0(\omega)$ и импульсный отклик $h_0(t)$, обеспечивающие оптимальную (согласованную) фильтрацию заданного входного сигнала в момент t_0. В соответствии с (6.2) запишем условие согласованной фильтрации спектрально ограниченного сигнала в виде

$$s(\omega) = AH_0^*(\omega)e^{-j\omega t_0}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right).$$

Отсюда

$$H_0^*(\omega) = Bs(\omega)e^{j\omega t_0}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)$$

или

$$H_0(\omega) = Bs^*(\omega)e^{-j\omega t_0}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right).$$

Определим импульсный отклик оптимального фильтра:

$$h_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_0(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{B}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s^*(\omega)e^{-j\omega t_0}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)e^{j\omega t}d\omega.$$

Поскольку любой вещественный сигнал обладает свойством $s^*(\omega) = s(-\omega)$, получаем

$$h_0(t) = \frac{B}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(-\omega)e^{-j\omega t_0}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{B}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)e^{j\omega(t_0-t)}d\omega = Bs(t_0-t)\otimes\frac{\sin\omega_m t}{\pi t}.$$

Таким образом, импульсный отклик оптимального фильтра представляет собой свертку смещенной в сторону запаздывания зеркально инвертированной по оси аргумента копии сигнала с идеальным низкочастотным сигналом.

В случае когда полоса частот, занимаемая спектром входного сигнала, неограниченная, оптимальный оклик принимает вид

$$h_0(t) = Bs(t_0 - t).$$

Такая линейная система является *согласованной*. Импульсный отклик согласованного фильтра представляет собой масштабную копию входного сигнала, инвертированную по оси времени и смещенную в сторону запаздывания на величину t_0 (рис. 6.2). Интервал t_0 не должен быть меньше длительности сигнала τ.

Найдем максимальную реакцию согласованного фильтра в момент t_0:

$$s_e(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)H_0(\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (6.7)$$

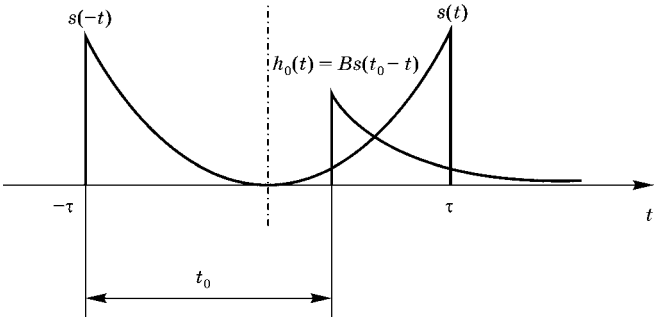


Рис. 6.2

Согласно (6.4)

$$s(\omega) = AH_0^*(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Откуда

$$H_0(\omega) = Bs^*(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Подставляя это выражение в (6.7), получаем

$$s_e(t_0) = \frac{B}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|s(\omega)|^2\, e^{j\omega(t-t_0)}d\omega = BK(t-t_0).$$

Выходной сигнал при согласованной фильтрации пропорционален корреляционной функции входного сигнала.

Рассмотрим согласованную фильтрацию двумерных оптических сигналов. Пусть на входе линейной оптической системы сформирован двумерный сигнал $s(x, y)$, фурье-спектр которого $s(K_x, K_y)$ не ограничен по пространственным частотам. Для выходного сигнала имеем

$$s_e(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(K_x,K_y)H(K_x,K_y)e^{j(K_x x+K_y y)}dK_x dK_y,$$

где $H(K_x, K_y)$ — когерентная передаточная функция системы. Согласно неравенству Шварца

$$|s_e(x,y)|^2 = \left|\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(K_x,K_y)H(K_x,K_y)e^{j(K_x x+K_y y)}dK_x dK_y\right|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{16\pi^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|s(K_x,K_y)|^2\, dK_x dK_y \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|H(K_x,K_y)|^2\, dK_x dK_y.$$

Поскольку

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|s(K_x,K_y)|^2\, dK_x dK_y$$

есть энергия входного сигнала E, модуль выходного сигнала ограничен энергией E и среднеквадратичным значением КПФ:

$$|s_e(x,y)| \le \frac{1}{2\pi}\left[E\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|H(K_x,K_y)|^2\, dK_x dK_y\right]^{1/2}. \qquad (6.8)$$

Определим когерентную передаточную функцию $H_0(K_x, K_y)$ оптимального оптического фильтра, обеспечивающего максимальный выходной сигнал в точке (x_0, y_0). Неравенство Шварца (6.8) обращается в равенство, если

$$s(K_x, K_y) = AH^*(K_x, K_y)e^{-j(K_x x_0 + K_y y_0)}. \qquad (6.9)$$

Как и в случае времязависимых сигналов, постоянная A определяется из условия

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|s(K_x, K_y)|^2\, dK_x dK_y =$$

$$= \frac{A^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|H(K_x, K_y)|^2\, dK_x dK_y = E.$$

Из (6.9) находим когерентную передаточную функцию для оптимального фильтра:

$$H_0^*(K_x, K_y) = Bs(K_x, K_y)e^{j(K_x x_0 + K_y y_0)},$$

где $B = 1/A$. Выполняя комплексное сопряжение, получаем

$$H_0(K_x, K_y) = Bs^*(K_x, K_y)e^{-j(K_x x_0 + K_y y_0)}. \qquad (6.10)$$

Когерентная передаточная функция оптимального оптического фильтра пропорциональна комплексно-сопряженному фурье-спектру входного сигнала.

Определим выходной сигнал при согласованной фильтрации:

$$s_e(x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y)H_0(K_x, K_y)e^{j(K_x x + K_y y)}dK_x dK_y. \qquad (6.11)$$

Подставляя (6.10) в (6.11), находим

$$s_e(x_0, y_0) = \frac{B}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|s(K_x, K_y)|^2\, e^{j[K_x(x-x_0)+K_y(y-y_0)]}dK_x dK_y =$$

$$= BK_s(x - x_0, y - y_0).$$

Выходной сигнал в заданной точке (x_0, y_0) при согласованной фильтрации пропорционален корреляционной функции входного сигнала.

Учитывая (6.10), найдем импульсный отклик оптимального двумерного оптического фильтра:

$$h_0(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H_0(K_x,K_y)e^{j(K_x x+K_y y)}dK_x dK_y=$$

$$=\frac{B}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s^*(K_x,K_y)e^{j[K_x(x-x_0)+K_y(y-y_0)]}dK_x dK_y=$$

$$=\frac{B}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s^*(K_x,K_y)e^{j\{K_x[-(x_0-x)]+K_y[-(y_0-y)]\}}dK_x dK_y=$$

$$=\frac{B}{4\pi^2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s(K_x,K_y)e^{j[K_x(x_0-x)+K_y(y_0-y)]}dK_x dK_y\right\}^*=$$

$$=Bs^*(x_0-x,y_0-y).$$

Импульсный отклик двумерного согласованного оптического фильтра пропорционален комплексно-сопряженному входному сигналу, инвертированному по осям x, y и смещенному на пространственные интервалы x_0, y_0.

Селекция оптических сигналов согласованным фильтром. Различные схемы согласованной оптической фильтрации приведены на рис. 6.3–6.5. На рис. 6.3 первый фурье-объектив, формирует в задней фурье-плоскости пространственно-частотный спектр $s(K_x, K_y)$ сигнала $s(x, y)$, локализованного в передней фурье-плоскости. В пространственно-частотной плоскости установлен согласованный фильтр с когерентной передаточной функцией

$$H_0(K_x,K_y)=BS^*(K_x,K_y)e^{-j(K_x x_0+K_y y_0)}.$$

Согласованный фильтр трансформирует волновой фронт пространственно-частотного спектра сигнала в плоский. Второй объектив, выполняющий обратное фурье-преобразование, формирует в выходной фурье-плоскости максимальную реакцию оптической системы в виде корреляционной функции сигнала, локализованной в окрестности точки (x_0, y_0).

На рис. 6.4 показана схема, выполняющая согласованную фильтрацию с переменным масштабом фурье-преобразования в сходящемся пучке. Первый объектив выпол-

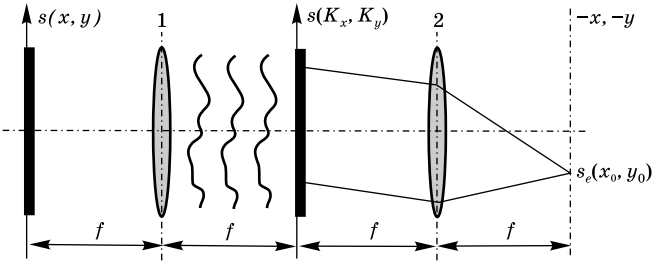


Рис. 6.3

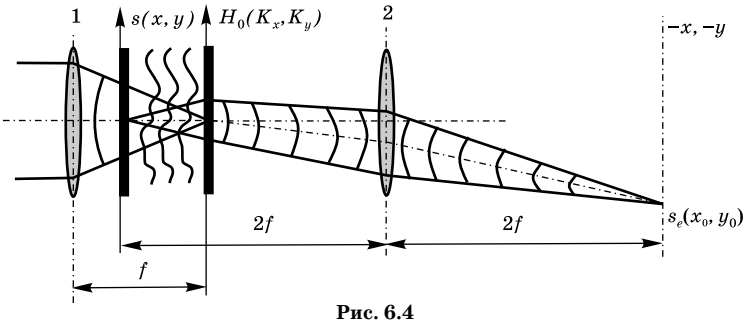


Рис. 6.4

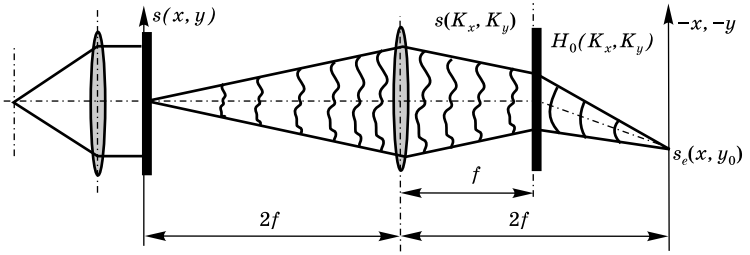


Рис. 6.5

няет фурье-преобразование сигнала $s(x, y)$ с заданным масштабом. В частотной плоскости установлен согласованный фильтр с когерентной передаточной функцией $H_0(K_x, K_y)$. Непосредственно за согласованным фильтром сложный волновой фронт, соответствующий фурье-спектру сигнала $s(K_x, K_y)$, трансформируется в сферический. Второй объектив выполняет обратное фурье-преобразование и трансформирует фильтрованный пространственно-частотный

спектр в корреляционную функцию входного сигнала с заданным смещением (x_0, y_0) в выходной плоскости.

Другая схема согласованной фильтрации с переменным масштабом фурье-преобразования показана на рис. 6.5. Согласованный фильтр трансформирует сложный волновой фронт фурье-спектра оптического сигнала в сферический, соответствующий световому пучку, сходящемуся к заданной точке (x_0, y_0) в плоскости регистрации выходной реакции системы.

Фильтр Вандер Люгта. Метод синтезирования оптических частотных фильтров для когерентных процессоров предложил Вандер Люгт в 1963 г. Отличительные свойства: фильтры формируются исключительно как амплитудные, но позволяют воздействовать как на амплитудную, так и на фазовую компоненты фурье-спектра оптического сигнала. Согласно рис. 6.6 световой пучок от точечного источника *0* линзой *1* преобразуется в параллельный и направляется на транспарант *2*. Амплитудно-фазовое пропускание транспаранта соответствует сигналу $s(x, y)$, для которого синтезируется согласованный фильтр с когерентной передаточной функцией $H_0(K_x, K_y)$. Линза *3* выполняет фурье-преобразование сигнала $s(x, y)$. На плоскость регистрации (K_x, K_y) посредством призмы *4* направляется под углом α плоская волна $r_0 e^{j\alpha f K_x} = r_0 e^{-jx_0 K_x}$. В плоскости (K_x, K_y) формируется суперпозиция оптических полей $r_0 e^{-jx_0 K_x}$ и $s(K_x, K_y)$. Фотопластинка, помещенная в эту плоскость, фиксирует распределение интенсивности результирующего поля:

$$I(K_x, K_y) = \rho\,|r_0 e^{-jx_0 K_x} + s(K_x, K_y)|^2 = \rho\{r_0^2 + |s(K_x, K_y)|^2 +$$
$$+ r_0 s^*(K_x, K_y) e^{-jx_0 K_x} + r_0 e^{jx_0 K_x} s(K_x, K_y)\} = \rho r_0^2 + \rho\,|s(K_x, K_y)|^2 +$$
$$+ \rho r_0\,|s(K_x, K_y)|\,\{e^{j[-\psi(K_x, K_y) + x_0 K_x]} + e^{-j[-\psi(K_x, K_y) + x_0 K_x]}\} =$$
$$= \rho r_0^2 + \rho\,|s(K_x, K_y)|^2 + 2\rho r_0\,|s(K_x, K_y)|\cos\{x_0 K_x - \psi(K_x, K_y)\}. \tag{6.12}$$

Здесь $x_0 = \alpha f$; ρ — коэффициент, учитывающий чувствительность и контрастность фотопластинки

$$s(K_x, K_y) = |s(K_x, K_y)|\exp\{-j\psi(K_x, K_y)\}.$$

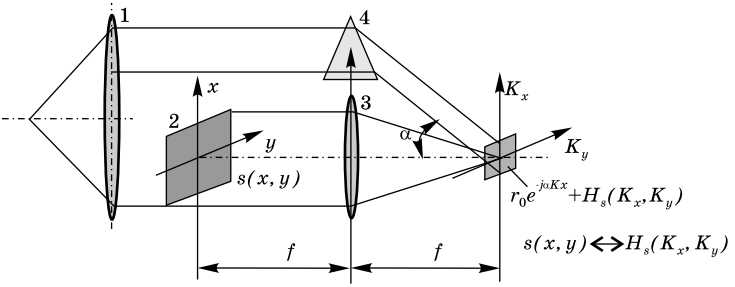


Рис. 6.6

Таким образом, с помощью голографического процесса комплексная функция $s(K_x, K_y)$ записывается на детектор, чувствительный к интенсивности, амплитудная и фазовая информация записывается как амплитудная и фазовая модуляция пространственной высокочастотной несущей. Несущей служит наклонная опорная (референтная) волна $r_0\exp(-jx_0K_x)$.

Модифицированная схема фильтра Вандер Люгта (схема Рэлея, рис. 6.7) дает также распределение интенсивности, описываемое выражением (6.12). Как и в схеме, представленной на рис. 6.6, точечный источник и линза *1* формируют плоскую световую волну. Меньшая по размеру линза *2* преобразует часть светового потока в изображение точечного источника *0* в фокальной плоскости, совмещенной с передней фурье-плоскостью линзы *3*. Эта линза трансформирует оптическое поле от изображения точечного источника в плоскую наклонную волну.

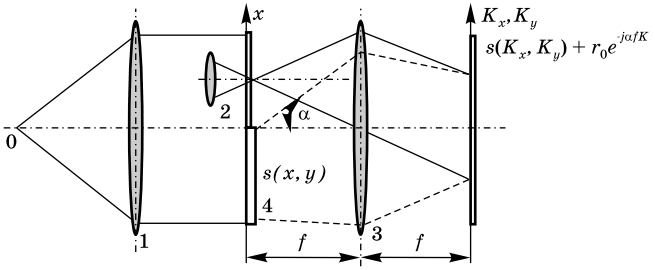


Рис. 6.7

В задней фурье-плоскости линзы *3* формируется наряду с опорной волной фурье-спектр транспаранта *4*, амплитудно-фазовое пропускание которого соответствует сигналу $s(x, y)$. Фотопластинка, помещенная в плоскость (K_x, K_y), фиксирует распределение интенсивности (6.12). После проявки экспонированной фотопластинки получается транспарант с амплитудным коэффициентом пропускания, пропорциональным распределению интенсивности светового поля (фильтр Вандер Люгта):

$$H(K_x, K_y) = \rho r_0^2 + \rho\,|s(K_x, K_y)|^2 + H_0(K_x, K_y) + H_0^*(K_x, K_y),$$

где $H_0(K_x, K_y) = Bs^*(K_x, K_y)\,e^{-jx_0K_x}$, $B = r_0\rho$.

После синтеза фильтра Вандер Люгта его устанавливают в частотной плоскости оптического процессора, обрабатывающего сигнал. Пусть на вход процессора поступает сигнал $s(x, y)$. В фурье-плоскости имеем

$$s(K_x, K_y)H(K_x, K_y).$$

Непосредственно за фильтром

$$\begin{aligned} s(K_x, K_y)H(K_x, K_y) &= s(K_x, K_y)\{\rho r_0^2 + \rho\,|s(K_x, K_y)|^2 + \\ &+ 2\,|H_0(K_x, K_y)|\cos[-\psi(K_x, K_y) + x_0K_x]\} = \\ &= s(K_x, K_y)\rho r_0^2 + s(K_x, K_y)\rho\,|s(K_x, K_y)|^2 + \\ &+ s^*(K_x, K_y)H_0(K_x, K_y) + s(K_x, K_y)H_0^*(K_x, K_y). \end{aligned}$$

После выполнения обратного фурье-преобразования получаем

$$\begin{aligned} s_e &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y)H(K_x, K_y)e^{j(K_xx+K_yy)} = \\ &= r_0^2 s(x, y) + s(x, y)\otimes[h_0(x, y)\otimes h_0(-x, -y)] + \\ &+ [s(x, y)\otimes h_0(x, y)]\otimes\delta(x - x_0, y) + \\ &+ [s(x, y)\otimes h_0(-x, -y)]\otimes\delta(x + x_0, y). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Первый член — восстановленный сигнал. Второй — свертка сигнала с корреляционной функцией импульсного отклика фильтра. Третий — свертка сигнала с импульсным откликом согласованного фильтра, являющаяся корреляционной функцией сигнала, локализованной в окре-

стности точки $(x_0, 0)$. Четвертый — автосвертка сигнала. Как видно из (6.13), восстановленный сигнал и свертка сигнала с корреляционной функцией импульсного отклика не смещены относительно начала координат. Корреляционная функция сигнала и автосвертка соответственно локализованы в окрестности точек $(x_0, 0)$ и $(-x_0, 0)$. Выбор этих точек определяется углом наклона опорной волны.

6.2. ИНВЕРСНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Пусть $s(t)$ — сигнал, спектральная плотность которого $s(\omega)$. Рассмотрим возможность распознавания сигнала $s(t)$ оптической системой, которая с этой целью формирует выходную реакцию в виде δ-функции: $\delta(t - t_0)$. Реализация такой возможности повышает надежность и точность распознавания. Выходная реакция в заданный момент времени t_0 определяется сверткой сигнала с импульсным откликом фильтра $h_i(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\xi)h_i(t-\xi)d\xi = A\delta(t-t_0).$$

Выполним фурье-преобразование этого равенства:

$$s(\omega)H_i(\omega) = Ae^{-j\omega t_0}. \qquad (6.14)$$

Здесь мы воспользовались свойством фурье-преобразования свертки двух функций и теоремой смещения. Из (6.14) получаем выражение для частотного коэффициента передачи инверсного фильтра:

$$H_i(\omega) = \frac{A}{s(\omega)}e^{-j\omega t_0}.$$

Следовательно, частотный коэффициент передачи инверсного фильтра с точностью до экспоненциального множителя обратно пропорционален спектру сигнала. Экспоненциальный множитель определяет момент появления выходной реакции.

Обратимся к двумерному пространственному сигналу $s(x, y) \leftrightarrow s(K_x, K_y)$. Запишем условие для формирования выходной реакции на сигнал $s(x, y)$ в виде δ-функции в заданной точке (x_0, y_0):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s(\xi,\eta)h_i(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta = A\delta(x-x_0,y-y_0).$$

Как и в предыдущем случае, выполним фурье-преобразование этого равенства:

$$s(K_x, K_y)H_i(K_x, K_y) = A\exp[-j(K_x x_0 + K_y y_0)].$$

Отсюда находим когерентную передаточную функцию инверсного фильтра

$$H_i(K_x, K_y) = \frac{A}{s(K_x, K_y)}\exp[-j(K_x x_0 + K_y y_0)]. \quad (6.15)$$

Когерентная передаточная функция инверсного фильтра обратно пропорциональна пространственно-частотному спектру сигнала с точностью до экспоненциального множителя, выполняющего роль адресной функции, задающей координаты выходного отклика системы.

Рассмотрим реализацию фильтра с когерентной передаточной функцией (6.15). Для этого (6.15) запишем в виде

$$H_i(K_x, K_y) = \frac{As^*(K_x, K_y)}{|s(K_x, K_y)|^2}\exp[-j(K_x x_0 + K_y y_0)] = \frac{H_0(K_x, K_y)}{|s(K_x, K_y)|^2}. \quad (6.16)$$

Здесь

$$\frac{1}{s(K_x, K_y)} = \frac{s^*(K_x, K_y)}{|s(K_x, K_y)|^2},$$

$H_0(K_x, K_y)$ — когерентная передаточная функция согласованного фильтра. Из (6.16) следует, что когерентная передаточная функция инверсного фильтра определяется отношением когерентно-передаточной функции согласованного фильтра к энергетическому спектру сигнала. Инверсный фильтр физически можно сформировать из двух установленных последовательно транспарантов, когерентные передаточные функции которых соответственно равны

$$H_{i1}(K_x, K_y) = As^*(K_x, K_y)\exp[-j(K_x x_0 + K_y y_0)],$$
$$H_{i2}(K_x, K_y) = |s(K_x, K_y)|^{-2}.$$

При этом транспарант с когерентной передаточной функцией H_{i2} выполняется с позитивной записью энергетического спектра сигнала, а транспарант с КПФ H_{i1} пред-

ставляет собой согласованный фильтр. Оба транспаранта конструктивно оформляются компактно в виде «сэндвича».

Недостатком инверсной фильтрации по сравнению с согласованной является пониженная интегральная интенсивность выходной реакции, хотя отношение пиковой интенсивности в отклике к средней в корреляционном сигнале при инверсной фильтрации выше. Это объясняется тем, что при инверсной фильтрации в формировании выходного отклика используется энергия не всего сигнала, а только высокочастотной составляющей его спектра.

6.3. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ФАЗОВЫХ ПОЛЕЙ ОПТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ ПРИ ДЕФОКУСИРОВКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Обратимся к рис. 6.8, где приведена схема с двумя конфокально расположенными фурье-объективами *1* и *2*. Плоскости (x_0, y_0), (K_x, K_y) и (x, y) являются фурье-сопряженными и соответственно плоскости (x_0, y_0) и (x_1, y_1) — оптически сопряженными. Пусть в плоскости (x_0, y_0) помещен транспарант $s(x_0, y_0)$. Объектив *1* выполняет фурье-преобразование сигнала $s(x_0, y_0)$, формируя его фурье-спектр

$$s(x_f, y_f) = \frac{1}{j\lambda f} s(K_x, K_y),$$

где $K_x = \frac{kx_f}{f}; K_y = \frac{ky_f}{f}$. Объектив *2* выполняет обратное преобразование Фурье, в результате которого в плоскости (x_1, y_1) восстанавливается исходный сигнал $s(x_1, y_1)$ в инвертированных осях.

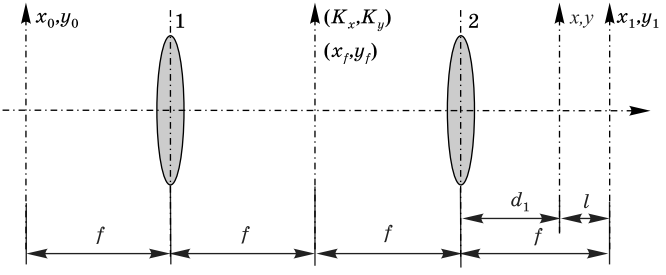


Рис. 6.8

Рассмотрим ситуацию, когда выходной сигнал регистрируется в плоскости (x, y), параллельной плоскости (x_1, y_1) и смещенной относительно нее на малое расстояние l, $l/f \ll 1$. Импульсный отклик объектива *2* описывается выражением (2.37), в котором следует поменять обозначения x_0, y_0 на x_f, y_f; x_1, y_1 на x, y:

$$h(x, y; x_f, y_f) = \frac{D_0 D_1}{j\lambda Q} \exp\left\{ j\frac{k}{2} D_0 \left(1 - \frac{D_0}{Q}\right)(x_f^2 + y_f^2) \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ j\frac{k}{2} D_1 \left(1 - \frac{D_1}{Q}\right)(x^2 + y^2) \right\} \exp\left\{ -jk\frac{D_0 D_1}{Q}(x_f x + y_f y) \right\}, \tag{6.17}$$

где

$$D_0 = \frac{1}{f} = \Phi; \quad D_1 = \frac{1}{d_1} = \frac{1}{f - l} = \frac{\Phi}{1 - l/f} \approx \Phi(1 + l\Phi);$$
$$Q = D_0 + D_1 - \Phi = D_1;$$
$$D_1\left(1 - \frac{D_1}{Q}\right) = 0; \quad D_0\left(1 - \frac{D_0}{Q}\right) = l\Phi^2; \quad \frac{D_0 D_1}{Q} = \Phi.$$

После подстановки этих параметров в (6.17) получаем

$$h(x, y; x_f, y_f) = \frac{1}{j\lambda f} \exp\left\{ j\frac{k}{2} l\Phi^2 (x_f^2 + y_f^2) \right\} \exp\{-jk\Phi(x_f x + y_f y)\} =$$
$$= \frac{1}{j\lambda f} \exp\left\{ j\frac{l}{2k}(K_x^2 + K_y^2) \right\} \exp\{-j(K_x x + K_y y)\}. \tag{6.18}$$

Выходной сигнал $\tilde{s}(x, y)$ определяется с учетом (6.18) и в пренебрежении конечной апертурой выражением

$$\tilde{s}(x, y) = \frac{1}{(j\lambda f)^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) \exp\left\{ j\frac{l}{2k}(K_x^2 + K_y^2) \right\} \times$$
$$\times \exp\{-j(K_x x + K_y y)\} dx_f dy_f =$$
$$= \frac{f^2}{(j\lambda f)^2 k^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) \exp\left\{ j\frac{l}{2k}(K_x^2 + K_y^2) \right\} \times$$
$$\times \exp\{-j(K_x x + K_y y)\} dK_x dK_y =$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} s(K_x, K_y) \exp\left\{ j\frac{l}{2k}(K_x^2 + K_y^2) \right\} \times$$
$$\times \exp\{-j(K_x x + K_y y)\} dK_x dK_y. \tag{6.19}$$

Из (6.19) видно, что объектив *2* выполняет преобразование Френеля.

Разложим экспоненциальный множитель

$$\exp\left\{j\frac{l}{2k}(K_x^2+K_y^2)\right\}$$

в ряд, воспользовавшись малостью параметра l и соответственно показателя экспоненты в пределах, заданных максимальной частотой фурье-спектра сигнала. Ограничиваясь в ряде членом первого порядка малости, получаем

$$\exp\left\{j\frac{l}{2k}(K_x^2+K_y^2)\right\}\approx 1+j\frac{l}{2k}(K_x^2+K_y^2). \qquad (6.20)$$

Подставив (6.20) в (6.19) и выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned}
&\tilde{s}(x,y)=\\
&=-\frac{1}{4\pi^2}\int\int_{-\infty}^{\infty}\left[1+j\frac{l}{2k}(K_x^2+K_y^2)\right]s(K_x,K_y)\times\\
&\times\exp\{-j(K_x x+K_y y)\}dK_x dK_y=\\
&=-s(-x,-y)+j\frac{l}{2k}\int\int_{-\infty}^{\infty}(K_x^2+K_y^2)s(K_x,K_y)\times\\
&\times\exp\{-j(K_x x+K_y y)\}dK_x dK_y=\\
&=-s(-x,-y)-j\frac{l}{2k}\nabla_{x,y}^2 s(-x,-y). \qquad (6.21)
\end{aligned}$$

Как следует из (6.21), в плоскости (x, y) восстанавливается суперпозиция исходного сигнала — $s(-x, -y)$ и, с точностью до комплексного множителя $j\frac{l}{2k}$, его второй производной по пространственным координатам (лапласиан) $\nabla_{x,y}^2 s(-x,-y)$. Здесь мы воспользовались теоремой о фурье-преобразовании производной сигнала.

В случае фазового объекта

$$s(x,y)=\exp\{j\varphi(x,y)\}. \qquad (6.22)$$

Действие оператора Лапласа на $s(x, y)$ дает

$$\nabla^2_{x,y} s(x,y) = \nabla^2_{x,y} \exp\{j\varphi(x,y)\} =$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[j\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} s(x,y)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[j\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} s(x,y)\right] =$$
$$= j\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x^2} s(x,y) - \left[\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}\right]^2 s(x,y) +$$
$$+ j\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial y^2} s(x,y) - \left[\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}\right]^2 s(x,y). \qquad (6.23)$$

С учетом (6.23) выражение (6.21) для светового поля, регистрируемого в плоскости (x, y), принимает вид

$$\tilde{s}(x,y) = -s(-x,-y) - j\frac{l}{2k}\nabla^2_{x,y} s(-x,-y) =$$
$$= -s(-x,-y)\left\{1 - \frac{l}{2k}[\nabla^2_{x,y}\varphi(-x,-y) + j(\nabla^2_{x,y}\varphi(-x,-y))^2]\right\}. \quad (6.24)$$

В случае, когда входной сигнал (6.22) описывает слабую фазовую неоднородность,

$$s(x, y) = \exp[j\varphi(x, y)] \approx 1 + j\varphi(x, y),$$

для выходного светового поля (6.24) имеем

$$\tilde{s}(x,y) = -1 - j\varphi(-x,-y) + \frac{l}{2k}\nabla^2_{x,y}\varphi(x,y). \qquad (6.25)$$

Переходя к интенсивности, получаем

$$\tilde{I}(x,y) \approx |\tilde{s}(x,y)|^2 = 1 + \varphi^2(-x,-y) - \frac{l}{k}\nabla^2_{x,y}\varphi(-x,-y). \qquad (6.26)$$

Из (6.24)–(6.26) следует, что при регистрации фазового объекта на небольшом расстоянии от плоскости изображения визуализируется лапласиан фазовой функции сигнала. При этом величина и знак контраста изображения (6.26) определяются коэффициентом $\frac{l}{k}$. Для дефокусированного изображения в плоскости, находящейся ближе к объективу относительно плоскости изображения, наблюдается «темный» контраст. Если плоскость регистрации дефокусированного изображения находится за плоскостью изображения, наблюдаемый контраст «светлый».

6.4. ОПТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

Оптическая схема, осуществляющая в приближении тонкой линзы формирование и фильтрацию двумерного сигнала, показана на рис. 6.9. Предметная плоскость (x, y) и плоскость изображения (x_1, y_1) оптически сопряжены и расположены от линзы соответственно на расстояниях d_0 и d_1, удовлетворяющих условию $D_0 + D_1 - \Phi = 0$, где $D_0 = 1/d_0$, $D_1 = 1/d_1$, $\Phi = 1/f$. Коэффициент линейного увеличения $\Gamma = d_1/d_0$. Фокусное расстояние линзы f. Фурье-плоскость (K_x, K_y) является плоскостью изображения точечного светового источника O. Условие оптического сопряжения этих плоскостей: $D_2 + D_3 - \Phi = 0$, где $D_2 = 1/d_2$, $D_3 = 1/d_3$. Принцип формирования и фильтрации фурье-спектра адекватно объясняет классические эксперименты Аббе–Портера, выполненные в свое время (1873, 1906) для обоснования созданной Аббе теории формирования изображения в микроскопе.

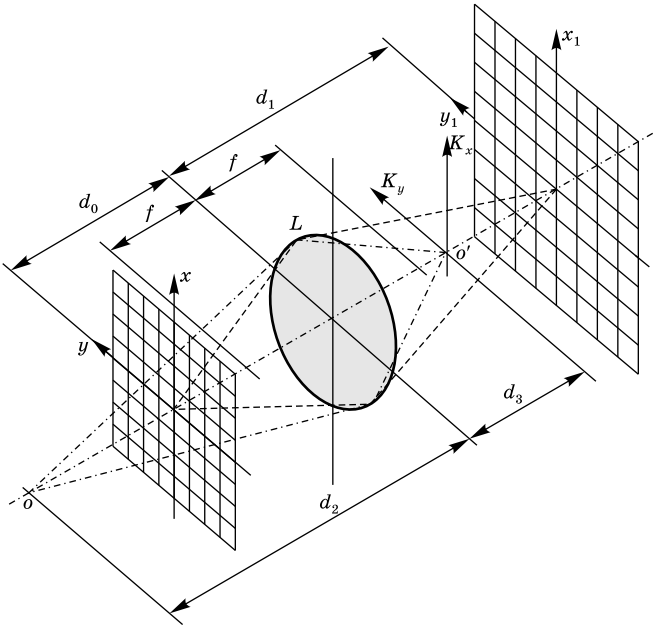


Рис. 6.9

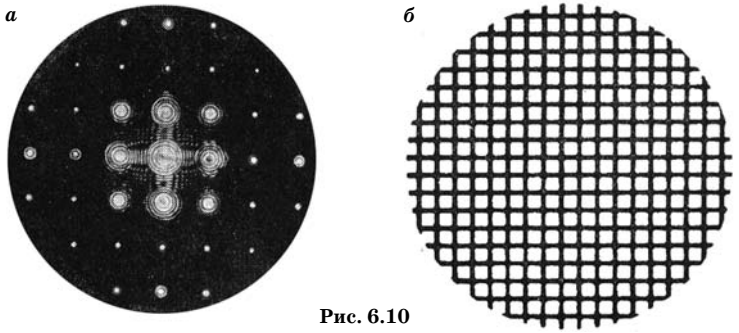


Рис. 6.10

Пусть в предметной плоскости (x, y) помещен объект в виде проволочной сетки, освещаемый источником O. Входной сигнал $s(x, y)$ можно описать как

$$s(x,y)=\sum_{n,m}\mathrm{rect}\left(\frac{x-na}{b}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y-ma}{b}\right),$$

где a — период структуры сетки; $2b$ — толщина проволоки.

Выходной сигнал в плоскости изображения имеет вид

$$s(x_1,y_1)\approx\sum_{n,m}\mathrm{rect}\left(\frac{x_1-n\Gamma a}{\Gamma b}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_1-m\Gamma a}{\Gamma b}\right). \qquad (6.27)$$

В частотной плоскости (K_x, K_y) формируется фурье-спектр сигнала $s(K_x, K_y)$, показанный на рис. 6.10*а*. Структура фурье-спектра состоит из дифракционных максимумов различных порядков, образованных из светового поля, рассеянного на сетке:

$$s(K_x,K_y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n,m}\mathrm{rect}\left(\frac{x-na}{b}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y-ma}{b}\right)e^{-j(K_xx+K_yy)}dxdy=$$

$$=4b^2\frac{\sin(K_xb)}{K_xb}\frac{\sin(K_yb)}{K_yb}\sum_{n,m}e^{-ja(nK_x+mK_y)}=$$

$$=16b^2\frac{\sin(K_xb)}{K_xb}\frac{\sin(K_yb)}{K_yb}\times$$

$$\times\sum_{n,m}\cos(nK_xa)\cos(mK_y\mathrm{a})=8b^2\frac{\sin(K_xb)}{K_xb}\frac{\sin(K_yb)}{K_yb}\times$$

$$\times\sum_{n,m}\{\cos[(nK_x+mK_y)a]+\cos[(nK_x-mK_y)a]\}. \qquad (6.28)$$

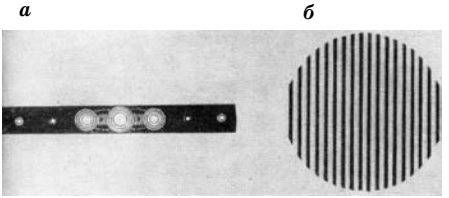


Рис. 6.11

Здесь мы воспользовались теоремой смещения. Выходной сигнал, соответствующий этому фурье-спектру, показан на рис. 6.10*б*. Восстановление сигнала осуществляется за счет обратного фурье-преобразования частотного спектра $s(K_x, K_y)$ слоем пространства толщиной $d_1 - d_3$.

Поместим в фурье-плоскость фильтр в виде узкой щели, пропускающей, например, один ряд горизонтальных спектральных компонент (рис. 6.11*а*). Фурье-спектр на выходе щели получается из (6.28) при $K_x = 0$:

$$s(K_x, K_y) = 2b^2 \frac{\sin(K_y b)}{K_y b} \sum_m e^{-jamK_y}.$$

В выходной плоскости (x_1, y_1)восстанавливается вертикальная структура сетки (рис. 6.11*б*), соответствующая фурье-спектру (6.28):

$$s_1(x_1, y_1) \approx \sum_m \mathrm{rect}\left(\frac{y_1 - m\Gamma a}{\Gamma b}\right).$$

Если же щелевой фильтр сориентировать так, чтобы он пропускал только вертикальный ряд максимумов в структуре фурье-спектра сигнала (рис. 6.12*а*), то для фильтрованного фурье-спектра из (6.28) при $K_y = 0$ получается:

$$s_2(K_x, K_y) = 2b^2 \frac{\sin(K_x b)}{K_x b} \sum_m e^{-janK_x}.$$

При этом в плоскости изображения восстанавливается лишь горизонтальная структура сигнала (рис. 6.12*б*):

$$s_2(x_2, y_2) \approx \sum_n \mathrm{rect}\left(\frac{x_1 - n\Gamma a}{\Gamma b}\right).$$

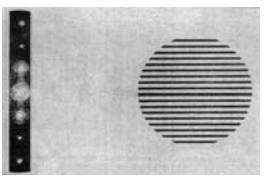


Рис. 6.12

Как следует из рис. 6.9, диафрагма, помещенная в частотную плоскость и ограничивающая фурье-спектр сигнала, является выходным зрачком оптической системы. Если в качестве выходного зрачка использовать ирисовую диафрагму, установленную так, чтобы через нее проходила только осевая фурье-компонента сигнала, то можно убедиться, что периодическая структура в восстановленном изображении сетки исчезает.

При расширении ирисовой диафрагмы последовательно прослеживается фурье-синтез изображения сетки. Если же вместо диафрагмы в фурье-плоскости поместить фильтр в виде маленького экрана, закрывающего дифракционный максимум нулевого порядка и, следовательно, вырезающего из фурье-спектра нулевую частоту, то восстанавливается изображение сетки с обращенным контрастом. При этом контраст повышается за счет подавления низкочастотного шума (фона).

Действительно, пусть входной сигнал имеет вид

$$U + s(x, y), \tag{6.29}$$

где $U = \text{const}$ — однородный фон. Для фурье-спектра такого сигнала имеем

$$4\pi^2 U\delta(K_x, K_y) + s(K_x, K_y).$$

Отсюда видно, что фоновая составляющая фурье-спектра локализована на нулевой пространственной частоте. Следовательно, однородный фон может быть исключен, если центр выходного зрачка будет перекрыт малым экраном, который выполняет роль пространственного фильтра с когерентной передаточной функцией

$$H_\Phi(K_x, K_y) = \begin{cases} 0, & |K_x| \le \varepsilon, |K_y| \le \varepsilon, \\ 1, & |K_x| > \varepsilon, |K_y| > \varepsilon. \end{cases} \tag{6.30}$$

Восстановленный сигнал находится как обратное фурье-преобразование фильтрованного сигнала:

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_\Phi(K_x, K_y)[4\pi^2 U\delta(K_x, K_y) +$$
$$+ s(K_x, K_y)] e^{j(K_x x + K_y y)} dK_x dK_y \approx s(x, y).$$

Если входной сигнал ограничен апертурой размером $2l$, фурье-спектр фона определяется дифракцией светового поля на этой апертуре и описывается функцией $\sim \dfrac{\sin K_x l}{K_x l}$. Эту функцию полностью отфильтровать нельзя, но фон можно сделать пренебрежимо малым, если экранировать главный лепесток этой функции, выбирая ε в (6.30) из условия $K_x l \ll \pi$ или $\varepsilon \ll \pi/l$.

Подобный прием оказывается полезным и при фильтрации периодического шума. Пусть во входном сигнале (6.29) присутствует аддитивный узкополосный шум на несущей пространственной частоте K_0:

$$U(x, y) = A(x, y)\cos K_0 x,$$

где частотная полоса огибающей составляет $\Delta K \ll K_0$. Воспользовавшись теоремой смещения, запишем фурье-спектр суперпозиции сигнала и шума:

$$U(K_x, K_y) + s(K_x, K_y) =$$

$$= \frac{1}{2}\{A(K_x - K_0, K_y) + A(K_x + K_0, K_y)\} + s(K_x, K_y).$$

Для подавления шума поместим в фурье-плоскость пространственно-частотный фильтр, когерентная передаточная функция которого (рис. 6.13) описывается выражением

$$H_\Phi(K_x, K_y) = \begin{cases} 0, & |K_x \pm K_0| \le \varepsilon, \\ 1, & |K_x \pm K_0| > \varepsilon, \end{cases}$$

где $2\varepsilon = \Delta K$.

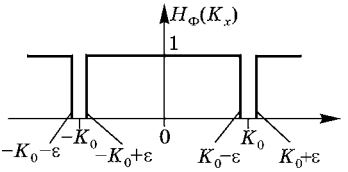


Рис. 6.13

Фурье-спектр фильтрованного сигнала:

$$H_\Phi(K_x, K_y)\left\{\frac{1}{2}[A(K_x - K_0, K_y) + A(K_x + K_0, K_y)] + s(K_x, K_y)\right\}.$$

Восстановленный в плоскости изображения фильтрованный сигнал имеет вид

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_\Phi(K_x, K_y)\left\{\frac{1}{2}[A(K_x - K_0, K_y) +\right.$$

$$\left. + A(K_x + K_0, K_y)] + s(K_x, K_y)\right\} e^{j(K_x x + K_y y)} dK_x dK_y \approx s(x, y).$$

Отсюда следует, что в восстановленном сигнале узкополосный шум на несущей пространственной частоте K_0 исключается.

Рассмотрим особенности подавления импульсного периодического шума. Выберем в качестве примера следующую его модель:

$$U(x, y) = \sum_n A_n \left(x - \frac{n2\pi}{K_0}, y \right).$$

Здесь $2\pi/K_0$ — пространственный период импульсной структуры; A_n — амплитуда n-го импульса. Запишем выражение для фурье-спектра сигнала с таким шумом:

$$U(K_x, K_y) + s(K_x, K_y) = \sum_n A_n(K_x, K_y) e^{-j\frac{n2\pi}{K_0}K_x} + s(K_x, K_y). \tag{6.31}$$

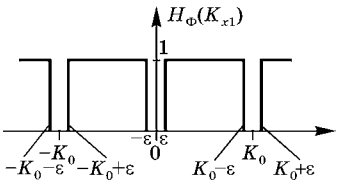


Рис. 6.14

Из (6.31) видно, что спектральные компоненты шума локализованы в окрестностях пространственных частот $K_x = 0$, $K_x = \pm K_0$. Это соответствует положению, лежащему в основе формулы суммирования Пуассона: спектр любой периодической функции дискретен. Следовательно, КПФ пространственно-частотного фильтра, подавляющего шум, должна иметь вид (рис. 6.14):

$$H_\Phi(K_x, K_y) = \begin{cases} 0, & |K_x \pm K_0| \le \varepsilon, \\ & |K_x| \le \varepsilon, \ |K_y| \le \varepsilon; \\ 1, & |K_x \pm K_0| > \varepsilon, \ |K_y| > \varepsilon. \end{cases} \tag{6.32}$$

Здесь ε — спектральная ширина функции $A(K_x, K_y)$. Как видно из (6.32) и рис. 6.14, периодический шум подавляется полосовым фильтром с основной полосой пропускания пространственных частот $|K_x \pm K_0| \le \varepsilon$, $|K_y| > \varepsilon$.

В случае когда на вход оптической системы поступает сигнал $s(x, y)$ с неоднородным фоном, для выявления сигнала используется метод согласованно-избирательной фильтрации. Этот метод основан на применении фильтров,

согласованных с наиболее информативной частью пространственно-частотного спектра сигнала таким образом, что влияние шумовых свойств фона минимизируется.

Из результатов многочисленных экспериментальных исследований характеристик различных изображений, получаемых, например, при аэрофотосъемке, одномерные корреляционные характеристики наиболее типичных фонов описываются экспоненциальными функциями вида

$$K_p(x) = Ae^{-\alpha|x|}.$$

Отсюда для энергетического спектра фона имеем

$$W_p(K_x) = \frac{2\alpha A}{\alpha^2 + K_x^2}.$$

Модель статистических характеристик фонов может быть полностью перенесена на двумерные поля, обладающие свойством изотропности. В этом случае α принимает смысл радиуса корреляции, а энергетический спектр имеет вид

$$W_p(K_x, K_y) \approx \frac{A}{\alpha^2 + K_x^2 + K_y^2}. \qquad (6.33)$$

При рассмотрении процессов фильтрации двумерных полей допустима замена исходных асимметричных характеристик параметрами соответствующего усредненного фона. Тогда для спектральной мощности любого двумерного фона, усредненной по различным направлениям, в каждом из которых энергетический спектр на высоких частотах убывает по закону квадратичной гиперболы, можно записать

$$W_p(K_x, K_y) = \frac{R_m(0)\alpha_m}{(K_x^2 + K_y^2)},$$

где $R_m(0)$ и α_m — соответственно дисперсия и радиус корреляции флуктуаций фона, усредненные по всем направлениям. Очевидно, что для подавления фона с таким энергетическим спектром необходим фильтр, передаточная функция которого

$$\tilde{H}_\Phi(K_x, K_y) = B(K_x^2 + K_y^2), \qquad (6.34)$$

где B — постоянная, зависящая от $R_m(0)$ и α_m.

Осуществить согласованную фильтрацию с подавлением фонового шума можно, установив в частотной плоскости последовательно два фильтра: один — согласованный, передаточная функция которого пропорциональна комплексно-сопряженному фурье-спектру сигнала; другой — фоноподавляющий с передаточной функцией (6.34). Такой комплексный фильтр, имеющий когерентную передаточную функцию

$$H_{\Phi}(\omega_x, \omega_y) = B(K_x^2 + K_y^2)s^*(K_x, K_y)e^{-j(K_x x_0 + K_y y_0)}, \qquad (6.35)$$

называется *согласованно-избирательным фильтром первого рода*. Применение этого фильтра обеспечивает согласованную фильтрацию на высоких пространственных частотах с оконтуриванием изображения. Это хорошо видно из импульсного отклика согласованно-избирательного фильтра, который легко получить как фурье-образ $H_{\Phi}(K_x, K_y)$ (6.35):

$$h_{\Phi}(x, y) = -B\nabla^2 s(x_0 - x, y_0 - y),$$

где $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа, действие которого приводит к оконтуриванию изображений посредством двойного дифференцирования. Таким образом, выходной сигнал при согласованно-избирательной фильтрации первого рода является функцией корреляции сигнала с его контурным эталоном, синтезированным в полосе высоких пространственных частот.

Применение так называемого *согласованно-избирательного фильтра второго рода*, когерентно-передаточная функция которого

$$H_{\Phi 2}(K_x, K_y) = B(\alpha_m^2 + K_x^2 + K_y^2)s^*(K_x, K_y)e^{-j(K_x x_0 + K_y y_0)}, \qquad (6.36)$$

позволяет выполнять фильтрацию во всем диапазоне пространственных частот, поскольку фоноподавляющая часть $B(\alpha_m^2 + K_x^2 + K_y^2)$ в (6.36) синтезируется в полном соответствии с энергетическим спектром фона (6.33). Импульсный отклик согласованно-избирательного фильтра второго рода, получаемый как фурье-образ выражения (6.36), имеет вид

$$h_{\Phi 2}(x,y) = B[\alpha_m^2 s(x_0 - x, y_0 - y) - \nabla^2 s(x_0 - x, y_0 - y)]. \tag{6.37}$$

Отсюда следует, что согласованно-избирательный фильтр второго рода осуществляет подчеркивание контура эталонного сигнала при корреляции сравниваемых изображений. При согласованно-избирательной фильтрации подавляется фон с квадратично-гиперболическим спектром. Как видно из формул (6.35) и (6.36) для передаточной функции фильтра, конкретные статистические параметры энергетического спектра учитываются константой B, которая задается выбором порогового уровня регистрации выходного сигнала.

Из сравнения согласованно-избирательной и инверсной фильтрации следует схожесть, а для определенного вида сигналов — идентичность используемых фильтров. Этот вид сигналов легко определяется, если приравнять передаточные функции согласованно-избирательного и инверсного фильтров:

$$\frac{s^*(K_x, K_y)}{|s(K_x, K_y)|^2} e^{-j(K_x x_0 + K_y y_0)} = B(K_x^2 + K_y^2) s^*(K_x, K_y) e^{-j(K_x x_0 + K_y y_0)}.$$

Отсюда находим

$$|s(K_x, K_y)|^2 = \frac{B^{-1}}{K_x^2 + K_y^2}.$$

Следовательно, когерентные передаточные функции согласованно-избирательного и инверсного фильтров совпадают, когда энергетический спектр распознаваемого сигнала зависит от частоты по закону квадратичной гиперболы, которая хорошо описывает энергетический спектр типичных фонов.

Рассмотренные принципы фильтрации изображений имеют не только технические приложения. В зрительном анализаторе человека и многих животных также реализуются операции селекции и подчеркивания контуров изображений, за счет чего исключается избыточная информация в процессе распознавания образов.

Последовательная комбинация схем, показанных на рис. 2.19 и 2.21, позволяет выполнять преобразование Фурье с заданным масштабом и осуществлять обратное

фурье-преобразование, восстанавливая сигнал с линейным коэффициентом передачи — $d_1/(d + d_0)$. Такая конфигурация, широко используемая в системах оптической фильтрации сигналов, показана на рис. 6.15, где точечный источник s_0 и объектив L_0 формируют световое поле, направляемое на объектив L_1. Входной сигнал $s(x_0, y_0)$ задается в плоскости I. В плоскости II формируется фурье-спектр этого сигнала $s(K_x, K_y)$. В этой же плоскости может помещаться пространственный фильтр с комплексной функцией пропускания $H_ф(K_x, K_y)$. На выходе фильтра получаем сигнал $s(K_x, K_y)H_Ф(K_x, K_y)$. Линза L_2 выполняет обратное фурье-преобразование. В плоскости III отображается сигнал, представляющий собой свертку входного сигнала с импульсным откликом фильтра:

$$s(x, y) = s(x, y) \otimes h_ф(x, y).$$

Здесь $h_ф(x, y) \leftrightarrow H_ф(K_x, K_y)$.

В задачах оптической фильтрации хорошо проявляются различия между пространственными и временны́ми фурье-спектрами. Основное различие состоит в том, что временны́е спектры удовлетворяют условию эрмитовости

$$s(\omega) = s^*(-\omega),$$

чего нельзя сказать о пространственных спектрах. Во временны́х спектрах составляющие с отрицательными частотами представляют собой просто комплексно-сопряженные отображения компонент с положительными частота-

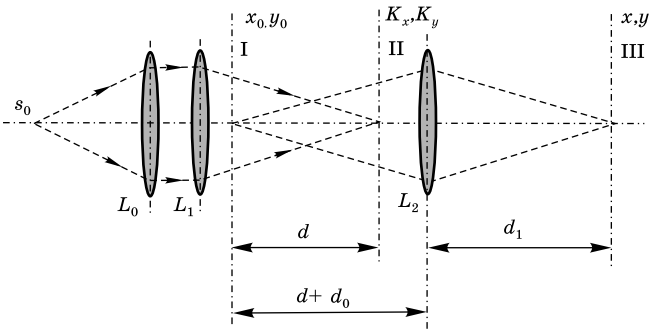


Рис. 6.15

ми и не имеют самостоятельного смысла, поскольку не содержат дополнительной информации. В пространственных фурье-спектрах компоненты с положительными и отрицательными частотами физически реально существуют. Им соответствуют составляющие углового спектра с различными направлениями распространения. Амплитуды и фазы компонент пространственного спектра в области положительных и отрицательных частот не связаны друг с другом и могут быть подвержены произвольным изменениям. Поэтому фильтрация пространственных спектров в положительных и отрицательных частотных полуплоскостях осуществляется независимо.

6.5. ОПТИЧЕСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ С КОГЕРЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

На рис. 6.16 показана схема линейной оптической системы с когерентной обратной связью. Здесь $H_1(K_x, K_y)$ и $H_2(K_x, K_y)$ — когерентные передаточные функции прямой ветви и ветви обратной связи. Если $s_1(K_x, K_y)$ и $s_2(K_x, K_y)$ — пространственно-частотные спектры соответственно входного и выходного оптических сигналов, они связаны зависимостью

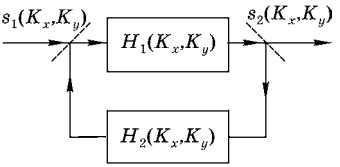


Рис. 6.16

$$s_2(K_x, K_y) = H_1(K_x, K_y)[s_1(K_x, K_y) \pm H_2(K_x, K_y)s_2(K_x, K_y)].$$

Отсюда легко получается известное выражение для передаточной функции линейной системы с обратной связью:

$$H_{12}(K_x, K_y) = \frac{s_2(K_x, K_y)}{s_1(K_x, K_y)} = \frac{H_1(K_x, K_y)}{1 \mp H_1(K_x, K_y)H_2(K_x, K_y)}. \tag{6.38}$$

Знак «плюс» в (6.38) соответствует отрицательной обратной связи, знак «минус» — положительный. Оптические системы с обратной связью бывают двух типов: пассивные и активные. В активных системах используется усилитель оптических сигналов.

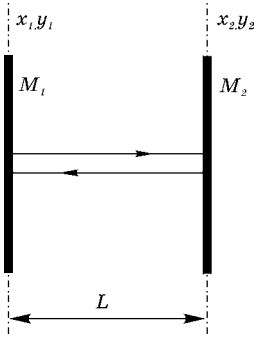


Рис. 6.17

На рис. 6.17 в качестве примера приведена упрощенная схема оптической системы с обратной связью на базе резонатора с плоскими зеркалами M_1 и M_2 (интерферометр Фабри–Перо). Расстояние между зеркалами L. Структурная схема этой оптической системы соответствует рис. 6.16. Прямая ветвь оптической системы с когерентной обратной связью образована слоем пространства между плоскостями x_1, y_1 и x_2, y_2. Коэффициенты отражения зеркал равны r. Импульсный отклик прямой ветви в приближении Френеля имеет вид

$$h_1(x_2, y_2; x_1, y_1) = \frac{e^{jkL}}{jkL} \exp\left\{ j \frac{k}{2L} (x_{21}^2 + y_{21}^2) \right\},$$

где $x_{21} = x_2 - x_1$, $y_{21} = y_2 - y_1$. Когерентная передаточная функция прямой ветви определяется фурье-преобразованием импульсного отклика $h_1(x_2, y_2; x_1, y_1)$:

$$H_1(K_x, K_y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} h_1(x_2, y_2; x_1, y_1) \times$$
$$\times \exp\{-j(K_x x_{21} + K_y y_{21})\} dx_{21} dy_{21} =$$
$$= \exp(jkL) \exp\left\{ -j \frac{L}{k} (K_x^2 + K_y^2) \right\}. \qquad (6.39)$$

Импульсный отклик ветви обратной связи

$$h_2(x_1, y_1; x_2, y_2) = r^2 \frac{e^{jkL}}{jkL} \exp\left\{ -j \frac{k}{2L} (x_{12}^2 + y_{12}^2) \right\}. \qquad (6.40)$$

Знак минус показателя экспоненты в (6.40) указывает на изменение знака кривизны волнового фронта световой волны при распространении ее от зеркала M_2 к зеркалу M_1. Соответственно для когерентной передаточной функции ветви обратной связи имеем

$$H_2(K_x, K_y) = r^2 \exp(jkL) \exp\left\{ j \frac{L}{k} (K_x^2 + K_y^2) \right\}. \qquad (6.41)$$

Когерентная передаточная функция $H_2(K_x, K_y)$ является фурье-сопряженной импульсному отклику $h_2(x_1, y_1; x_2, y_2)$. Показатели квадратичных фазовых множителей в когерентных передаточных функциях $H_2(K_x, K_y)$ и $H_1(K_x, K_y)$ имеют противоположные знаки, поскольку кривизна волновых фронтов для световых полей в прямой и обратной ветвях так же отличается по знаку.

Оптические схемы на рис. 6.16 и 6.17 являются примерами дуальных систем. Когерентная передаточная функция оптической системы с обратной связью, показанной на рис. 6.17, определяется формулой (6.38). После подстановки (6.39) и (6.41) в (6.38) находим

$$H_{12}(K_x, K_y) = \frac{\tau^2 e^{jkL}}{1 - r^2 e^{j2kL}} \exp\left\{-j\frac{L}{k}(K_x^2, K_y^2)\right\}. \quad (6.42)$$

Здесь $\tau^2 = 1 - r^2$ — коэффициент пропускания по мощности для зеркала. Выполняя обратное фурье-преобразование выражения (6.42), получаем импульсный отклик оптической системы с когерентной обратной связью, образованный плоскими зеркалами:

$$h(x_2, y_2; x_1, y_1) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} H_{12}(K_x, K_y) \exp\{-j(K_x x_{21} + K_y y_{21})\} =$$

$$= \frac{\tau^2 e^{jkL}}{1 - r^2 e^{j2kL}} \exp\left\{j\frac{k}{L}(x_{21} + y_{21})\right\}. \quad (6.43)$$

Воспользовавшись (6.41), найдем частотный коэффициент передачи мощности:

$$H_W^{\tau} = |H_{12}(K_x, K_y)|^2 = \frac{\tau^4}{(1 - r^2 e^{j2kL})(1 - r^2 e^{-j2kL})} =$$

$$= \frac{\tau^4}{1 + r^4 - 2r^2 \cos 2kL} = \frac{(1 - r^2)^2}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 kL} =$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \sin^2 kL}. \quad (6.44)$$

В многолучевой интерферометрии выражение (6.44) получило название *формулы Эйри*. Как видно из (6.44),

при $kL = m\pi$ частотный коэффициент передачи мощности H_W^{τ} имеет максимальное значение, $H_{W\max}^{\tau} = 1$, а при $kL = (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$ — минимальное, $H_{W\min}^{\tau} = \dfrac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2}$. Следовательно, частотный коэффициент передачи по мощности для оптического резонатора с плоскими зеркалами имеет вид гребенчатой функции, как это показано на рис. 6.18.

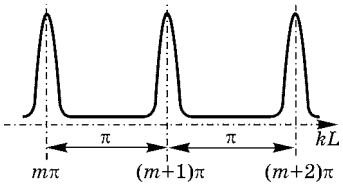


Рис. 6.18

Оценим частотный интервал между соседними максимумами. Этот интервал называется дисперсионным. Для соседних максимумов имеем

$$k_1L = m\pi, \quad k_2L = (m+1)\pi$$

или

$$\frac{2L}{\lambda_1} = m, \quad \frac{2L}{\lambda_2} = 2m+1,$$

откуда

$$2L\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) = 1. \qquad (6.45)$$

Поскольку

$$\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1\lambda_2} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2},$$

получаем для (6.45):

$$\frac{2L\Delta\lambda}{\lambda^2} = 1. \qquad (6.46)$$

В многолучевой интерферометрии величину $\Delta\lambda$, определяемую из (6.46) как $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda^2}{2L}$, называют *областью свободной дисперсии*. Принимая во внимание

$$\Delta\nu = c\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

и подставляя $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \dfrac{\Delta\nu}{c}$ в (6.46), находим частотный дисперсионный интервал оптического резонатора с плоскими зеркалами:

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L}. \qquad (6.47)$$

Из (6.47) видно, что дисперсионный интервал является величиной, обратной времени запаздывания оптического сигнала τ_0 в ветви обратной связи:

$$\tau_0 = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{2L}{c}.$$

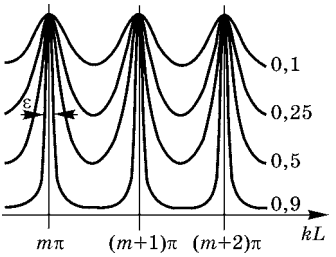


Рис. 6.19

На рис. 6.19 показана функция пропускания фильтра на основе оптического резонатора с плоскими зеркалами при различных значениях коэффициента отражения r^2.

Оптический резонатор с плоскими зеркалами может служить фильтром с гребенчатой функцией пропускания, показанной на рисунках 6.18 и 6.19. С учетом

$$kL = \frac{\omega}{c}L = \pi\nu\frac{2L}{c} = \pi\frac{\nu}{\Delta\nu} = \pi\frac{m\Delta\nu + \delta\nu}{\Delta\nu} = m\pi + \frac{\nu}{\Delta\nu}$$

на рис. 6.18 и 6.19 отображается зависимость функции пропускания фильтра от частоты, нормированной на частотный дисперсионный интервал. Максимум пропускания такой фильтр имеет на разных частотах, которые отличаются друг от друга на величину, кратную дисперсионному интервалу (6.47), имеющему смысл межмодового интервала. Резонансные частоты являются частотами нормальных мод колебаний, возбужденных в оптических системах с когерентной обратной связью как в осцилляторе. Оценим полосу пропускания оптического фильтра с когерентной обратной связью в окрестности резонансной частоты:

$$kL = m\pi + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (6.48)$$

где $\varepsilon \ll 1$. Подставляя (6.48) в (6.44), получаем

$$H_W^{\tau}(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \dfrac{4r^2}{(1-r^2)^2}\sin^2\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)} \approx \frac{1}{1 + \dfrac{r^2\varepsilon^2}{(1-r^2)^2}}.$$

Ширина контура пропускания оценивается на уровне $1/2\ \varepsilon$ из условия:

$$H_W^{\tau}(\varepsilon) = \frac{1}{2}H_{W\max}^{\tau} = \frac{1}{2}$$

или

$$\frac{1}{1+\dfrac{r^2\varepsilon^2}{(1-r^2)}}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда находим для ширины контура пропускания:

$$\varepsilon=\frac{1-r^2}{r}.$$

Определим параметр F, называемый резкостью, как отношение дисперсионного интервала к ширине контура пропускания в окрестности резонансной частоты:

$$F=\frac{\pi}{\varepsilon}=\frac{r\pi}{1-r^2}. \qquad (6.49)$$

Подставляя (6.49) в (6.44), получаем

$$H_W^{\tau}=\frac{1}{1+\dfrac{4F^2}{\pi^2}\sin^2 kL}=\frac{1}{1+\dfrac{4F^2}{\pi^2}\sin^2\varphi}=\frac{1}{1+\dfrac{4F^2}{\pi^2}\sin^2(\alpha\pi)},$$

где $kL = m\pi + \varphi = (m + \alpha)\pi$, $\alpha=\dfrac{\varphi}{\pi}$. При $\alpha\pi \ll 1$ H_W^{τ} описывает когерентную передаточную функцию в окрестности максимума пропускания:

$$H_W^{\tau}\approx\frac{1}{1+4F^2\alpha^2}. \qquad (6.50)$$

Рассмотрим контур пропускания фильтра с когерентной обратной связью как функцию частоты светового поля. Для этого запишем (6.48) в виде

$$kL=\frac{(\omega_m+\delta\omega)L}{c}=(m+\alpha)\pi$$

или, учитывая, что $\dfrac{\omega_m L}{c}=m\pi$,

$$\frac{\delta\omega L}{c}=(\omega-\omega_m)\frac{L}{c}=\alpha\pi.$$

Отсюда

$$\alpha=(\omega-\omega_m)\frac{L}{\pi c}=(\nu-\nu_m)\frac{2L}{c}=\frac{(\nu-\nu_m)}{\Delta\nu}=\frac{\delta\nu}{\Delta\nu}.$$

Пример такого контура пропускания показан на рис. 6.20. Склоны его могут служить дискриминационной кривой при частотной демодуляции светового сигнала. При

этом изменение частоты светового поля на выходе фильтра трансформируется в соответствующее изменение интенсивности. Следовательно, оптическая система с когерентной обратной связью может выполнять функцию частотного демодулятора светового сигнала.

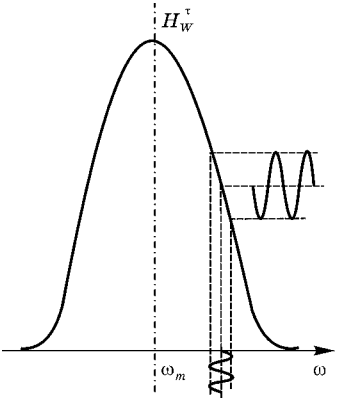


Рис. 6.20

Мы исследовали фильтрующие свойства оптического резонатора с плоскими зеркалами в проходящем свете. Исследуем эту оптическую систему в отраженном свете. Запишем выражение для коэффициента передачи по мощности в отраженном свете H_W^r, учитывая соотношения $H_W^r + H_W^\tau = 1$ и $r^2 + \tau^2 = 1$:

$$H_W^r = 1 - H_W^\tau = 1 - \frac{1}{1 + \dfrac{4r^2}{(1-r^2)^2}\sin^2 kL} =$$

$$= \frac{4r^2 \sin^2 kL}{(1-r^2)^2\left[1 + \dfrac{4r^2}{(1-r^2)^2}\sin^2 kL\right]}. \qquad (6.51)$$

Здесь мы воспользовались формулой (6.44) для коэффициента передачи по мощности в проходящем свете.

Очевидно, что при $2kL = 2m\pi$ $H_{W\max}^r = 0$. Максимальное значение коэффициент передачи по мощности имеет при $kL = \left(m + \dfrac{1}{2}\right)\pi$:

$$H_{W\max}^r = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2}.$$

Частотный коэффициент передачи по мощности в отраженном свете имеет вид гребенчатой функции (см. рис. 6.21), связанной с соответствующей функцией для резонатора в проходящем свете соотношением $H_W^r = 1 - H_W^r$.

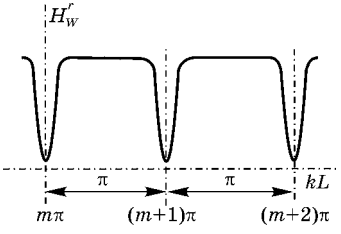


Рис. 6.21

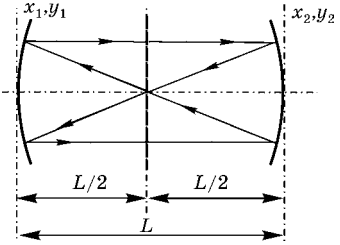


Рис. 6.22

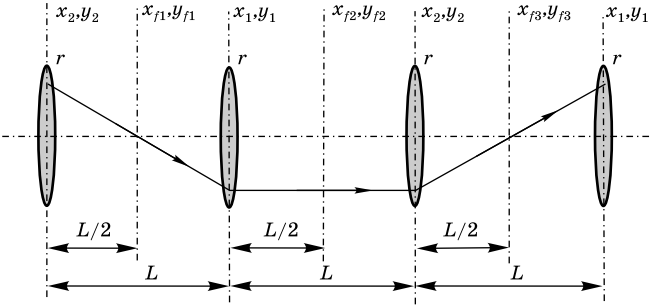


Рис. 6.23

Фильтр с когерентной обратной связью, работающий в отраженном свете, можно так же, как и в проходящем свете, использовать для частотной фильтрации и частотной демодуляции световых сигналов.

Рассмотрим оптическую схему с когерентной обратной связью, выполненную на основе оптического конфокального резонатора со сферическими зеркалами, упрощенная схема которого показана на рис. 6.22.

Структурная схема этой оптической системы эквивалентна схеме, показанной на рис. 6.16. Радиус кривизны каждого сферического зеркала равен L, фокусное расстояние $L/2$. Фокальные плоскости сферических зеркал, образующих конфокальный резонатор, совмещены. Прямая ветвь оптической системы с обратной связью образована слоем пространства между плоскостями x_1, y_1 и x_2, y_2, коэффициенты отражения сферических зеркал соответственно равны $r_1 = r_2 = r$. Когерентная передаточная функция прямой ветви в конфокальной схеме описывается выра-

жением (6.39). Структура ветви обратной связи показана на рис. 6.23.

Импульсный отклик ветви обратной связи в приближении неограниченной апертуры:

$$h_2(x_2, y_2; x_1, y_1) = \frac{2^4 r^4 e^{j3kL}}{(j\lambda L)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int \exp\left\{ j\frac{k}{L}(x_{f1}^2 + y_{f1}^2) \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ -j\frac{2k}{L}(x_{f1}x_2 + y_{f1}y_2) \right\} \exp\left\{ -j\frac{2k}{L}(x_{f1}x_{f2} + y_{f1}y_{f2}) \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ -j\frac{2k}{L}(x_{f2}x_{f3} + y_{f2}y_{f3}) \right\} \exp\left\{ -j\frac{2k}{L}(x_{f3}x_1 + y_{f3}y_1) \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ j\frac{k}{L}(x_{f3}^2 + y_{f3}^2) \right\} dx_{f1} dy_{f1} dx_{f2} dy_{f2} dx_{f3} dy_{f3}.$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$h_2(x_1, y_1; x_2, y_2) =$$
$$= \frac{r^4}{j\lambda L} \exp(j3kL) \exp\left\{ -j\frac{k}{2L}(x_{21}^2 + y_{21}^2) \right\}.$$

Когерентная передаточная функция ветви обратной связи

$$H_2(K_x, K_y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} h_2(x_2, y_2; x_1, y_1) \times$$
$$\times \exp\{-j(K_x x_{21} + K_y y_{21})\} dx_{21} dy_{21} =$$
$$= r^4 \exp(j3kL) \exp\left\{ j\frac{L}{2k}(K_x^2 + K_y^2) \right\}. \qquad (6.52)$$

После подстановки (6.39) и (6.52) в (6.38) находим когерентную передаточную функцию конфокального оптического резонатора:

$$H_{12}(K_x K_y) = \frac{\tau^2 e^{j2kL}}{1 - r^4 e^{j4kL}} \exp\left\{ -j\frac{L}{k}(K_x^2 + K_y^2) \right\}. \qquad (6.53)$$

Здесь $\tau^2 = 1 - r^2$ — коэффициент пропускания по мощности для сферического зеркала.

Воспользовавшись (6.53), найдем частотный коэффициент передачи мощности $H_{Wc}^{\tau}(K_x, K_y)$ для конфокального оптического резонатора:

$$H_{Wc}(K_x,K_y)=|H_{12}(K_x,K_y)|^2=\frac{\tau^4}{(1-r^4e^{j4kL})(1-r^4e^{-j4kL})}=$$

$$=\frac{1}{(1+r^2)^2\left[1+\dfrac{4r^4}{(1-r^4)^2}\sin^2 2kL\right]}. \qquad (6.54)$$

Характеристики оптического фильтра на основе конфокального резонатора в проходящем и отраженном свете находятся так же, как и при анализе фильтра на базе резонатора с плоскими зеркалами. Из сравнения (6.54) и (6.44) следует, что дисперсионный интервал для конфокального оптического резонатора равен $c/4L$. Рассмотренные оптические фильтры с когерентной обратной связью являются частным случаем линейных систем с когерентной обратной связью. Общим свойством таких систем является гребенчатая функция пропускания, в которой частотный дисперсионный интервал определяется как величина, обратная временно́му интервалу запаздывания сигнала в цепи обратной связи. На рис. 6.24 показана упрощенная оптическая схема с обратной связью, в которой прямая ветвь и ветвь обратной связи пространственно разнесены. Если КПФ прямой ветви единица, а КПФ обратной связи $H_{oc}(K_x, K_y)$, то для когерентной передаточной функции системы имеем

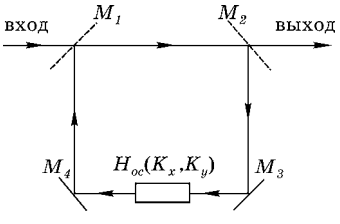


Рис. 6.24

$$H_{\text{ф}}(K_x,K_y)=\frac{\tau_1\tau_2}{1-r_1r_2H_{oc}(K_x,K_y)},$$

где r_1r_2, $\tau_1\tau_2$ — соответственно коэффициенты отражения и пропускания зеркал M_1 и M_2 (для зеркал M_3 и M_4 полагаем $r_3 = r_4 = 1$). Пусть сигнал, поступающий на вход фильтра с когерентной обратной связью, имеет фурье-спектр $s(K_x, K_y)H(K_x, K_y)$, где $H(K_x, K_y)$ — известная когерентная передаточная функция системы или среды, трансформировавшей этот сигнал до посту-

пления в фильтр. Установим в ветви обратной связи фильтр с КПФ $H_{oc}(K_x, K_y) = 1 - H(K_x, K_y)$. Тогда

$$H_{\text{ф}}(K_x, K_y) = \frac{\tau_1 \tau_2}{1 - r_1 r_2 [1 - H(K_x, K_y)]}. \qquad (6.55)$$

Если зеркала имеют высокий коэффициент отражения, выражение (6.55) принимает вид

$$H_{\text{ф}}(K_x, K_y) \sim \frac{1}{H(K_x, K_y)}. \qquad (6.56)$$

Из (6.56) видно, что КПФ оптической системы с обратной связью оказывается пропорциональной передаточной функции инверсного фильтра, восстанавливающего фурье-спектр исходного сигнала $s(K_x, K_y)$.

Для выполнения инверсной фильтрации сигнала выбирают $H(K_x, K_y)$ пропорциональной фурье-спектру фильтруемого сигнала. В этом случае оптический фильтр с обратной связью осуществляет инверсную фильтрацию:

$$H_{\text{ф}}(K_x, K_y) \sim \frac{1}{s(K_x, K_y)}.$$

Здесь инверсная фильтрация выполняется при помещении в ветвь обратной связи фильтров, когерентная передаточная функция которых $H_{oc} = 1 - H(K_x, K_y)$ или $H_{oc} = 1 - s(K_x, K_y)$. Такие фильтры более просты в реализации, чем фильтры с когерентной передаточной функцией вида $H_i(K_x, K_y) \sim \frac{1}{H(K_x, K_y)}$ или $H_i(K_x, K_y) \sim \frac{1}{s(K_x, K_y)}$, которые используются в разомкнутых оптических системах инверсной фильтрации.

Основным недостатком пассивных оптических систем с обратной связью является сильное ослабление сигнала в процессе фильтрации. От этого недостатка свободны активные оптические системы с обратной связью. Активными элементами в таких системах обычно служат лазерные усилители световых полей и динамические транспаранты, осуществляющие пространственно-временну́ю модуляцию оптических сигналов. На рис. 6.25 показана упрощенная схема активного оптического фильтра с обратной

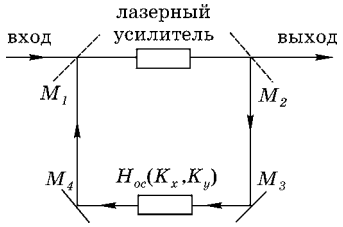


Рис. 6.25

связью. Устойчивость действия такого фильтра обеспечивается только при отрицательной обратной связи. Если лазерный усилитель имеет большой коэффициент усиления A, передаточная функция активного фильтра с обратной связью имеет вид

$$H_{\text{ф}}(K_x, K_y)\big|_{A \gg 1} = \left.\frac{A}{1 + AH_{\text{ос}}(K_x, K_y)}\right|_{A \gg 1} \sim \frac{1}{H_{\text{ос}}(K_x, K_y)}$$

и система работает как инверсный фильтр. В общем случае активная оптическая система с обратной связью при большом коэффициенте усиления в прямой ветви может выполнять функции оптического операционного усилителя.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что означает согласованная фильтрация?
2. Какова выходная реакция системы при согласованной фильтрации?
3. Как определяется импульсный отклик согласованного фильтра?
4. Как определяется когерентная передаточная функция согласованного фильтра?
5. В чем особенность согласованной фильтрации оптических двумерных сигналов?
6. Как осуществляется согласованная фильтрация в оптических схемах с переменным масштабом фурье-преобразования?
7. Как синтезируется оптический фильтр Вандер Люгта?
8. Как применяется фильтр Вандер Люгта для согласованной фильтрации оптических сигналов?
9. В чем заключается метод инверсной фильтрации и его отличие от согласованной фильтрации?
10. Как выполняется визуализация фазовых полей оптической плотности при дефокусировке изображения?
11. Как на языке фурье-оптики интерпретируется эксперимент Аббе–Портера?
12. Как осуществляется фильтрация однородного фона в оптической системе, формирующей изображения?

13. Как осуществляется фильтрация периодического шума при формировании изображения?
14. В чем сходство и отличие согласованной, согласованно-избирательной и инверсной фильтраций?
15. Какими фильтрующими свойствами характеризуются пассивные оптические системы с обратной связью?
16. В чем отличие оптических систем с обратной связью, работающих в проходящем и отраженном свете?
17. Как осуществляется инверсная фильтрация оптическими системами с обратной связью?

ЗАДАЧИ

1. Дифференцирующий фильтр имеет когерентную передаточную функцию $H(K_x) = (jK_x)^n$. Оценить энергию на выходе фильтра с ограниченной полосой пропускания $-K_{x0} \le K_x \le K_{x0}$, если энергия входного сигнала E.

2. Система имеет импульсный отклик $h(t) = e^{-\alpha t}$. На вход подан сигнал $s(t)[\sigma(0) - \sigma(T)]$. Энергия сигнала E. Определить форму сигнала $s(t)$, при которой достигается максимальная выходная реакция в момент t_0.

3. Пусть входной сигнал оптической системы $s(x, y) = s_0 \exp\{-j(\alpha x^2 + \beta y_2)\}$. Определить когерентную передаточную функцию системы, при которой выполняется согласованная фильтрация сигнала с максимальной реакцией в точке (x_0, y_0).

4. Определить выходные сигналы при согласованной фильтрации в задачах 2 и 3.

5. Найти когерентную передаточную функцию согласованного фильтра для сигнала $s(x, y) = \cos(K_0 x)[\sigma(x - a) - \sigma(x + a)]e^{-j\alpha x}$.

6. Найти энергетический спектр фона, одномерная корреляционная функция которого $K_p(x) = Ae^{-\alpha|x|}$.

7. Найти частотный коэффициент передачи мощности, дисперсионный интервал и контур пропускания фильтра на основе полуконфокального оптического резонатора.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ

7.1. ПОНЯТИЕ О СЛУЧАЙНОМ ОПТИЧЕСКОМ СИГНАЛЕ

Случайные сигналы в оптике в общем случае являются *случайными процессами*, зависящими от времени и пространственных координат. Если случайным оптическим сигналом является изображение, то говорят о *случайном поле*. Случайный процесс характеризуется функцией, значения которой при любых значениях аргумента — случайные величины.

Одномерный случайный процесс можно представить совокупностью (теоретически бесконечной) случайных реализаций, образующих *статистический ансамбль*. На рис. 7.1 показан пример ансамбля таких случайных реализаций $\{s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x)\}$, представляющий сигнал $s(x)$. Если зафиксировать значения каждой из случайных реализаций при определенном значении аргумента x, $\{s_1(x_1), s_2(x_1), \ldots, s_n(x_1)\}$, можно говорить о сечении данного *случайного процесса*. Оно характеризуется случайной величиной $s(x_1)$ при значении координаты x_1. Плотность вероятности этой случайной величины $p(s, x_1)$ называется *одномерной плотностью вероятности* сигнала $s(x)$ в сечении x_1. Тогда $dp = p(s, x_1)ds$ есть вероятность того, что реализации случайного процесса в сечении x_1 примут значения, лежащие в интервале $(s, s + ds)$.

Более полную информацию о случайном сигнале можно получить, если выделить два сечения процесса при фиксированных значениях координат x_1 и x_2. Двумерное сечение случайного процесса характеризуется двумерной плотностью вероятности $p(s_1, s_2, x_1, x_2)$, которая позволя-

ет вычислить вероятность того, что реализация случайного процесса при x_1 и x_2 характеризуется значением, находящимся в интервале $(s_1 + ds, s_2 + ds)$. Чем выше размерность сечения, тем бóльшую информацию оно дает об исследуемом сигнале. Возникающая при n-мерном сечении случайная величина $\{s_1(x_1), s_2(x_2), \ldots, s_n(x_n)\}$ характеризуется n-мерной плотностью вероятности $p(s_1, s_2, \ldots, s_n, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Хотя многомерные сечения дают более полное описание случайных процессов, нахождение многомерной плотности вероятности — обычно математически сложная и далеко не всегда выполнимая операция.

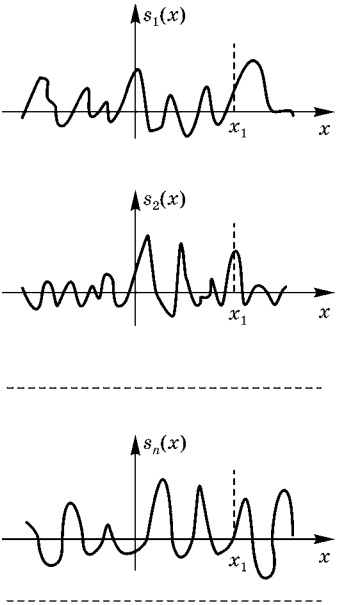


Рис. 7.1

На практике для статистических оценок сигналов часто оказывается возможным ограничиться размерностью сечений случайных сигналов, не превышающей двух, используя *моментные функции* случайного процесса. Моментные функции определяются как зависимость моментов случайных величин в сечениях случайного процесса от пространственных или временны́х координат, определяющих эти сечения. Теория случайных сигналов, основанная на использовании моментных функций порядка не выше второго, называется *корреляционной теорией*. Как следует из определения, корреляционная теория основывается на трех моментных функциях случайного процесса: математическом ожидании, дисперсии и корреляционной функции. *Математическое ожидание* есть среднее значение процесса $s(x)$, усредненное по всему ансамблю реализаций:

$$m(x) = \overline{s(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,p(s, x)\,ds.$$

Дисперсия случайного процесса определяется как усредненный по ансамблю квадрат разности текущего значения процесса и его математического ожидания:

$$\sigma^2(x) = \overline{[s(x) - m(x)]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [s(x) - m(x)]^2 p(s, x) ds. \quad (7.1)$$

Двумерный центральный момент случайного процесса получил название *корреляционной функции*:

$$K(x) = \overline{[s_1(x_1) - m(x_1)][s_2(x_2) - m(x_2)]} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [s_1(x_1) - m(x_1)][s_2(x_2) - m(x_2)] p(s_1, s_2, x_1, x_2) ds_1 ds_2. \quad (7.2)$$

Из (7.1) и (7.2) видно, что корреляционная функция случайного сигнала при совмещении сечений ($x_1 = x_2 = x$) равна дисперсии.

Стационарные случайные сигналы. Случайные сигналы, статистические характеристики которых неизменны во времени, называются стационарными. Понятие стационарности часто распространяют на сигналы, зависящие от пространственных координат, понимая под стационарностью постоянство статистических характеристик на всем интервале значений аргумента, в котором существует сигнал.

Случайный процесс стационарен в узком смысле, если его любая n-мерная плотность вероятности инвариантна относительно сдвига значений аргумента:

$$p(s_1, s_2, \ldots, s_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= p(s_1, s_2, \ldots, s_n, x_1 + \tau, x_2 + \tau, \ldots, x_n + \tau).$$

Случайный процесс считается стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия постоянны на всем интервале значений аргумента, в котором существует сигнал, а функция корреляции зависит только от разности значений аргумента, соответствующих двумерному сечению процесса:

$$K(x_1, x_2) = K(\tau),$$

где $\tau = |x_1 - x_2|$. Отсюда следует свойство четности функции корреляции стационарного сигнала. Другим важным

свойством корреляционной функции стационарного сигнала является то, что ее значения при любых τ не превосходят дисперсии. Действительно:

$$\overline{\{[s(x)-m][s(x+\tau)-m]\}^2} =$$
$$= \overline{[s(x)-m]^2} - 2\overline{[s(x)-m][s(x+\tau)-m]} + \overline{[s(x+\tau)-m]^2} =$$
$$= 2\sigma^2 - 2K(\tau) \geq 0,$$

отсюда

$$\sigma^2 \geq K(\tau).$$

Наряду с корреляционной функцией часто пользуются *коэффициентом корреляции*

$$R(\tau) = K(\tau)/\sigma^2.$$

Очевидно, что $R(0) = 1$.

Эргодичность случайных стационарных сигналов. Случайный сигнал называется эргодическим, если для определения любых статистических характеристик усреднение по ансамблю реализаций можно заменить усреднением по аргументу во всем интервале существования сигнала. Процедура усреднения осуществляется над единственной реализацией $s(x)$, интервал существования которой по аргументу стремится к бесконечности. Необходимым условием эргодичности случайного процесса является его стационарность в широком смысле. Операция усреднения эргодического процесса обозначается обычно угловыми скобками. Для математического ожидания эргодического случайного сигнала имеем

$$m = \langle s(x) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T s(x)dx.$$

Математическое ожидание эргодического процесса равно постоянной составляющей усредняемой реализации. Дисперсия случайного эргодического сигнала

$$\sigma^2 = \langle [s(x)-m]^2 \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [s(x)-m]^2 dx = \langle s^2(x) \rangle - m^2.$$

Дисперсия имеет наглядный смысл мощности флуктуационной составляющей сигнала, поскольку $\langle s^2(x) \rangle$

определяет среднюю мощность реализации, а m^2 — мощность постоянной составляющей.

Корреляционная функция эргодического сигнала

$$K(\tau) = \langle [s(x) - m][s(x+\tau) - m] \rangle =$$
$$= \langle s(x)s(x+\tau) \rangle - \langle ms(x) \rangle - \langle ms(x+\tau) \rangle + m^2 =$$
$$= \langle s(x)s(x+\tau) \rangle - m^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T s(x)s(x+\tau)dx - m^2.$$

Достаточным условием эргодичности сигнала является условие $\lim_{\tau\to\infty} K(\tau) = 0$, которое означает, что функция корреляции при неограниченном росте τ стремится к нулю.

7.2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Пусть стационарный случайный сигнал имеет нулевое математическое ожидание: $\overline{s}(x) = 0$. Предположение о нулевом математическом ожидании не нарушает общности подхода, поскольку в случае ненулевого математического ожидания всегда можно перейти к центральному моменту. Любая отдельно взятая реализация сигнала является детерминированной функцией. Представим такую реализацию через интеграл Фурье:

$$s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{j\omega x} d\omega, \qquad (7.3)$$

где $s(\omega)$ — детерминированная спектральная плотность сигнала. Переходя к ансамблю реализаций, описывающих случайный стационарный сигнал $s(x)$, следует принять, что в частотном пространстве ему соответствует ансамбль спектральных плотностей $s(\omega)$, являющихся случайными функциями частоты ω.

Определим моменты стационарного случайного сигнала в частотном пространстве. Выполняя усреднение левой и правой частей выражения (7.3) по ансамблю, получаем

$$\overline{s(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{s(\omega)}e^{j\omega x}d\omega = 0.$$

Отсюда следует, что математическое ожидание спектральной плотности стационарного случайного процесса с нулевым математическим ожиданием равно нулю, $\overline{s(\omega)} = 0$.

Рассмотрим, как проявляется в частотном пространстве другое свойство стационарного сигнала, состоящее в том, что корреляционная функция зависит от сдвига между сечениями. Имея в виду, что физический сигнал $s(x)$ — вещественный, можно записать

$$s(x) = s^*(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s^*(\omega)e^{j\omega x}d\omega. \qquad (7.4)$$

Используя (7.3) и (7.4), найдем представление корреляционной функции в частотном пространстве:

$$K(\tau) = \overline{s(x)s(x+\tau)} = \overline{s^*(x)s(x+\tau)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{s^*(\omega)s(\omega')}e^{j\omega\tau}e^{j(\omega-\omega')x}d\omega d\omega' =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\tau}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\overline{s^*(\omega)s(\omega')}e^{j(\omega-\omega')x}d\omega'. \qquad (7.5)$$

Условие стационарности состоит в том, чтобы корреляционная функция сигнала не зависела от значения аргумента, а определялась только разностью аргументов, соответствующих сечениям процесса. Это требование выполняется, если в выражении (7.5) подынтегральный множитель $\overline{s^*(\omega)s(\omega')}$, имеющий смысл корреляционной функции сигнала в частотном пространстве, удовлетворяет следующему условию:

$$\overline{s^*(\omega)s(\omega')} \sim \delta(\omega-\omega'). \qquad (7.6)$$

Выражение (7.6) означает, что корреляционная функция стационарного сигнала в частотном пространстве описывает *дельта-коррелированную связь* спектров, соответствующих разным сечениям по оси частот. При несовпадении этих сечений ($\omega \neq \omega'$) спектральные плотности,

отвечающие им, не коррелированы между собой, тогда как дисперсия сигнала в частотном пространстве неограниченно велика. Введем в (7.6) коэффициент пропорциональности:

$$\overline{s^*(\omega)s(\omega')} = 2\pi W(\omega)\delta(\omega - \omega'). \qquad (7.7)$$

Выражение (7.5) имеет структуру интеграла Фурье, в котором подынтегральный множитель

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{s^*(\omega')s(\omega)}e^{j(\omega-\omega')x}d\omega'$$

определяет спектральную плотность корреляционной функции сигнала или, другими словами, его энергетический спектр:

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{s^*(\omega')s(\omega)}e^{j(\omega-\omega')x}d\omega'.$$

Это выражение является справедливым, если выполняется условие дельта-коррелированности (7.6), представленном в виде равенства.

Подставляя (7.7) в (7.5), получаем

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \qquad (7.8)$$

Как следует из (7.8), функция корреляции и энергетический спектр стационарного случайного сигнала, имеющего нулевое математическое ожидание, являются *фурье-сопряженной парой*. Эта теорема, имеющая фундаментальное значение в теории сигналов, называется теоремой Винера–Хинчина. Энергетический спектр согласно (7.8) определяется как спектральная плотность корреляционной функции:

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}K(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

Полагая в (7.8) $\tau = 0$, получаем выражение для дисперсии стационарного случайного сигнала

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega)d\omega. \qquad (7.9)$$

Из (7.9) видно, что дисперсия равна средней мощности стационарного случайного сигнала, а энергетический спектр имеет смысл плотности мощности, приходящейся на единичный в окрестности частоты ω интервал. Отсюда следует, что энергетический спектр является вещественной и неотрицательной функцией частоты, $W(\omega) \geq 0$. Из четности корреляционной функции $K(\tau)$ следует четность фурье-сопряженного с ней энергетического спектра $W(\omega)$.

Пример 7.1. Белый шум. Так называется стационарный процесс, энергетический спектр которого постоянный во всей полосе частот, $W(\omega) = W_0 = \text{const}$. Определим корреляционную функцию белого шума, воспользовавшись теоремой Винера–Хинчина:

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = W_0\delta(\tau). \qquad (7.10)$$

Как следует из (7.10), белый шум является дельта-коррелированным случайным процессом.

7.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Пусть $s(x)$ — реализация стационарного случайного процесса с математическим ожиданием m. Выполним дифференцирование реализации $s(x)$:

$$\frac{d}{dx}s(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{s(x+\Delta x) - s(x)}{\Delta x} = s'(x).$$

Совокупность реализаций $s'(x)$ также образует случайный процесс. Найдем математическое ожидание производной $s'(x)$, выполняя усреднение по ансамблю:

$$\overline{s'(x)} = \overline{\frac{d}{dx}s(x)} = \frac{d}{dx}\overline{s(x)} = \frac{d}{dx}m = 0.$$

Следовательно, результатом дифференцирования стационарного случайного сигнала является новый случайный сигнал с нулевым математическим ожиданием.

Определим функцию корреляции производной стационарного центрированного случайного сигнала:

$$K_{s'}(\tau)=\overline{s'(x)s'(x+\tau)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\overline{\frac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x}\frac{s(x+\tau+\Delta x)-s(x+\tau)}{\Delta x}}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^2}\left\{\overline{s(x+\Delta x)s(x+\Delta x+\tau)}-\overline{s(x+\Delta x)s(x+\tau)}-\right.$$

$$\left.-\overline{s(x)s(x+\Delta x+\tau)}+\overline{s(x)s(x+\tau)}\right\}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^2}[2K_s(\tau)-K_s(\tau-\Delta x)-K_s(\tau+\Delta x)]=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{[2K_s(\tau+\Delta x)-K_s(\tau)]}{\Delta x}-\frac{[K_s(\tau)-K_s(\tau-\Delta x)]}{\Delta x}\right\}=$$

$$=-\frac{d^2}{d\tau^2}K_s(\tau).$$

Результирующее выражение является конечно-разностным представлением второй производной корреляционной функции исходного сигнала:

$$K_{s'}(\tau)=-K_s''(\tau)=-\sigma_s^2R_s''(\tau). \qquad (7.11)$$

Учитывая, что $K_{s'}(\tau)=\sigma_{s'}^2R_{s'}(\tau)$, получаем связь коэффициентов корреляции и дисперсий для случайного стационарного сигнала и его производной:

$$R_{s'}(\tau)=-\frac{\sigma_s^2}{\sigma_{s'}^2}R_s''(\tau). \qquad (7.12)$$

Таким образом, корреляционная функция производной стационарного случайного сигнала равна второй производной функции корреляции этого сигнала, взятой со знаком минус.

Из (7.11) и (7.12) получим выражение для дисперсии производной

$$\sigma_{s'}^2=-K_s''(0)=-\sigma_s^2R''(0). \qquad (7.13)$$

Признаком дифференцируемости случайного сигнала является конечная величина дисперсии его производной.

Найдем энергетический спектр производной стационарного случайного процесса. По теореме Винера–Хинчина

$$K_s(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W_s(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.$$

Дважды дифференцируя это выражение, воспользовавшись (7.11), получаем корреляционную функцию производной

$$K_{s'}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 W_s(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W_{s'}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.$$

Отсюда находим энергетический спектр производной случайного стационарного сигнала

$$W_{s'}(\omega)=\omega^2 W(\omega). \qquad (7.14)$$

Соответственно дисперсия производной определяется как средняя мощность производной сигнала:

$$\sigma_{s'}^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 W_s(\omega)d\omega. \qquad (7.15)$$

Из (7.14) видно, что в спектре мощности производной стационарного сигнала подчеркиваются высокочастотные компоненты и подавляются низкочастотные.

Рассмотрим корреляционную связь между случайным стационарным сигналом и его производной:

$$K_{ss'}(\tau)=\overline{s(x)s'(x+\tau)}=$$
$$=\overline{s(x)\frac{d}{d\tau}s(x+\tau)}=\frac{d}{d\tau}\overline{s(x)s(x+\tau)}=\frac{d}{d\tau}K_s(\tau). \qquad (7.16)$$

Поскольку корреляционная функция $K_s(\tau)$ — четная, производная $\frac{d}{d\tau}K_s(\tau)$ в точке $\tau=0$ обращается в нуль. Следовательно, мгновенные значения случайного стационарного сигнала и его производной, взятые в одном и том же сечении, являются некоррелированными случайными величинами.

Интегрирование случайного сигнала. Пусть $s(x)$ — случайный стационарный сигнал с математическим ожиданием m_s. Запишем неопределенный интеграл от отдельно взятой реализации сигнала $s(x)$:

$$\tilde{s}(x)=\int_0^x s(\xi)d\xi. \qquad (7.17)$$

Интеграл от случайных реализаций сигнала $s(\xi)$ образует случайный сигнал, являющийся результатом интегрирования исходного сигнала. Выполним усреднение (7.17) по ансамблю:

$$\overline{\tilde{s}(x)} = \int_0^x \overline{s(\xi)}\, d\xi = m_s x.$$

Отсюда видно, что интеграл от исходного процесса нестационарен, т. е. операция интегрирования нарушает стационарность сигнала. Физический смысл возникновения нестационарности при интегрировании стационарного случайного сигнала состоит в неограниченном нарастании флуктуаций за счет их накопления.

7.4. КВАЗИПЕРИОДИЧНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ГАУССОВА СИГНАЛА

Пусть реализация случайного сигнала $s(x)$ представляется достаточно гладкой функцией. Зададим некоторый фиксированный уровень s_0 (рис. 7.2). Реализация $s(x)$ пересекает уровень s_0. Событие, состоящее в факте пересечения реализацией заданного уровня, называют *выбросом*. Будем различать положительный и отрицательный выбросы. *Положительным выбросом* называют событие, когда реализация $s(x)$ пересекает уровень s_0 снизу вверх. Соответственно *отрицательным выбросом* называют пересечение реализацией $s(x)$ уровня s_0 сверху вниз. Определим среднюю частоту выбросов. Под частотой здесь понимается среднее число выбросов, приходящихся на единичный интервал аргумента (если x — время, то частота временна́я, если же x — пространственная координата, то определяется частота пространственная). Для стационарного непрерывного процесса всегда можно выбрать столь малый интервал между сечениями x и $x + \Delta x$, что в пределах этого

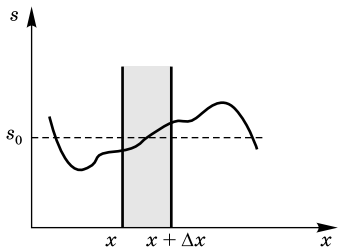


Рис. 7.2

интервала может иметь место не более одного положительного выброса. Как видно из рис. 7.2, положительный выброс возникает, если $s(x) < s_0$ и $s(x + \Delta x) > s_0$. Поскольку интервал малый, $\Delta x/x \ll 1$, $s(x + \Delta x) \approx s(x) + \Delta x s'(x)$. Тогда второе условие можно записать в виде $s(x) + \Delta x s'(x) > s_0$ или $s(x) > s_0 - \Delta x s'(x)$. Следовательно, условием существования на интервале $(x,\ x + \Delta x)$ положительного выброса является неравенство $s_0 - \Delta x s'(x) < s(x) < s_0$ при положительной производной реализации.

Вероятность возникновения положительного выброса на интервале Δx определяется, если известна двумерная плотность вероятности, относящаяся к одному и тому же сечению:

$$p = \int_0^\infty ds' \int_{s_0 - \Delta x s'}^{s_0} p(s, s')ds = \Delta x \int_0^\infty p(s_0, s')s'ds'.$$

Поскольку вероятность появления положительного выброса за уровень s_0 оказывается пропорциональной интервалу Δx, величина $\int_0^\infty p(s_0, s')s'ds'$ определяет среднее число положительных выбросов $n(s_0)$, приходящихся на единичный интервал:

$$n(s_0) = \int_0^\infty p(s_0, s')s'ds'. \tag{7.18}$$

Найдем среднее число положительных выбросов для гауссова стационарного случайного процесса. Как известно, плотность вероятности гауссова (или, как его еще называют, нормального) процесса имеет вид

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{7.19}$$

Пусть корреляционная функция исходного процесса $K_s(\tau) = \sigma_s^2 R(\tau)$. Тогда дисперсия производной согласно (7.13) равна

$$\sigma_{s'}^2 = -\sigma_s^2 R''(0).$$

Отдельно взятая реализация случайного процесса $s = s(x)$ есть функция, зависящая от аргумента x. Поэтому

попадание случайной точки x в интервал dx и попадание случайной точки s в соответствующий ему интервал $ds = |s'(x)|dx$ являются событиями с одинаковой вероятностью $p_x(x)dx = |p_s(s)ds|$. Отсюда получаем

$$p_s(s) = p_x(x)\left|\frac{dx}{ds}\right| = p_x[g(s)]\left|\frac{dg(s)}{ds}\right|, \qquad (7.20)$$

где $g(s) = x$ — функция, обратная к $s(x) = s$.

Гауссов характер стационарного случайного процесса сохраняется при линейном его преобразовании. Покажем это на примере преобразования $\psi = as + b$, где $s(x)$ — гауссов процесс с плотностью вероятности

$$p_s(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(s-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Поскольку $\left|\frac{ds}{d\psi}\right| = \left|\frac{1}{a}\right|$, с учетом (7.20) получаем

$$p_\psi(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a}\exp\left\{-\frac{\left(\frac{\psi-b}{a}-m\right)^2}{2\sigma^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a}\exp\left\{-\frac{(\psi-b-ma)^2}{2\sigma^2 a^2}\right\},$$

что и требовалось доказать.Отсюда следует, что производная гауссова процесса сохраняет нормальное распределение. Подставляя дисперсию

$$\sigma_{s'}^2 = -\sigma_s^2 R''(0)$$

в формулу для плотности вероятности (7.19) гауссова процесса s, получаем нормальное распределение для производной этого процесса:

$$p(s') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s\sqrt{-R''(0)}}\exp\left[-\frac{s'^2}{2\sigma_s^2[-R''(0)]}\right].$$

Согласно (7.16) мгновенное значение реализации процесса и ее производной статистически независимы. Поэтому выражение для средней частоты выбросов (7.18) можно записать в виде

$$n(s_0) = p(s_0)\int_0^\infty p(s')s'ds'. \qquad (7.21)$$

Учитывая (7.21), получаем

$$\int_0^\infty p(s')s'ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}\frac{1}{\sqrt{-R^*(0)}}\int_0^\infty \exp\left[-\frac{s'^2}{2\sigma_s^2[-R''(0)]}\right]s'ds' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma_s\sqrt{-R''(0)}. \qquad (7.22)$$

Подставляя (7.22) в (7.21) и учитывая, что

$$p(s_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s}\exp\left(-\frac{s_0^2}{2\sigma_s^2}\right),$$

находим среднюю частоту положительных выбросов за уровень s_0 стационарного случайного сигнала:

$$n(s_0) = \frac{\sqrt{-R''(0)}}{2\pi}\exp\left(-\frac{s_0^2}{2\sigma_s^2}\right). \qquad (7.23)$$

Квазичастота случайного стационарного гауссова процесса определяется как среднее число положительных выбросов за нулевой уровень. Полагая в (7.23) $s_0 = 0$, получаем выражение для квазичастоты:

$$n(0) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-R''(0)}. \qquad (7.24)$$

Отсюда следует, что квазичастота гауссова стационарного процесса полностью описывается поведением корреляционной функции в нуле. Поскольку вторая производная коэффициента корреляции в нуле определяется отношением дисперсии производной к дисперсии исходного стационарного процесса ($-R''(0) = \sigma_{s'}^2/\sigma_s^2$), выражение для квазичастоты принимает вид

$$n(0) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma_{s'}^2}{\sigma_s^2}} \qquad (7.25)$$

или с учетом

$$\sigma_{s'}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 W_s(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \omega^2 W_s(\omega)d\omega$$

получаем

$$n(0)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}\sigma_s}\left[\int_0^\infty \omega^2 W(\omega)d\omega\right]^{1/2}. \qquad (7.26)$$

Пример 7.2. Определить квазичастоту стационарного гауссова процесса с ограниченным низкочастотным спектром:

$$W(\omega)=\begin{cases} W_0, & |\omega|\le\omega_b; \\ 0, & |\omega|>\omega_b; \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \omega^2 W(\omega)d\omega = W_0\int_0^{\omega_b}\omega^2 d\omega = \frac{W_0\omega_b^2}{3}.$$

После подстановки последнего выражения в (7.26) получаем

$$n(0)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{W_0\omega_b^3}{3W_0\omega_b}}=\frac{\omega_b}{2\pi\sqrt{3}}=\frac{f_b}{\sqrt{3}}.$$

Пример 7.3. Оценить квазичастоту сигнала в корреляционном лазерном локаторе.

На рис. 7.3 показана упрощенная функциональная схема, поясняющая действие локатора. Когерентные лазерные гауссовы пучки пересекаются в области локализации перетяжек под углом 2α, образуя зондирующее поле E:

$$E=\frac{1}{2}\left\{\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)e^{-j\alpha kx}+\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)e^{j\alpha kx}\right\}=$$

$$=\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)\cos(\alpha kx).$$

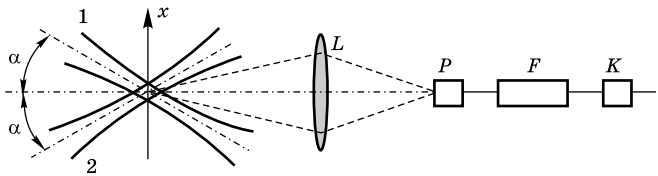


Рис. 7.3

Вдоль оси x в плоскости пересечения перетяжек движется исследуемый объект, который имитируется случайным пуассоновским потоком точечных рассеивателей

$$\sum_{i=1}^{N} A_i \delta[x - v(t - t_i)],$$

где v — скорость движения. Световое поле E_+ непосредственно за потоком

$$E_+ = E\sum_{i=1}^{N} A_i \delta[x - v(t - t_i)] =$$

$$= \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)\cos(\alpha k x)\sum_{n=1}^{N} A_i \delta[x - v(t - t_i)].$$

Здесь A_i — случайная амплитуда рассеяния i-й частицы; t_i — момент вхождения i-го рассеивателя в зондирующее поле; w_0 — радиус перетяжки.

Объектив L формирует в рассеянном свете в плоскости фотоприемника P изображение E_p поля E_+ с коэффициентом линейного увеличения Γ, который для простоты положим равным единице ($\Gamma = 1$):

$$E_p = \exp\left(-\frac{x^2}{\Gamma w_0^2}\right)\cos\left(\frac{\alpha k x}{\Gamma}\right)\sum_{n=1}^{N} A_i \delta\left\{\frac{1}{\Gamma}[x - v(t - t_i)]\right\} =$$

$$= \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)\cos(\alpha k x)\sum_{n=1}^{N} A_i \delta\left\{\frac{1}{\Gamma}[x - v(t - t_i)]\right\}.$$

Фотоприемник P выполняет фотоэлектрическое преобразование интенсивности оптического сигнала в электрический ток:

$$i = \rho\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2x^2}{w_0^2}\right)\cos^2(\alpha k x)\sum_{n=1}^{N} A_i \delta\left\{\frac{1}{\Gamma}[x - v(t - t_i)]\right\},$$

где ρ — коэффициент, учитывающий чувствительность и усиление фотоприемника. Интегрирование ведется по апертуре фотоприемника. Пределы интегрирования выбраны бесконечными в предположении, что изображение поля меньше размера апертуры. Выполняя интегрирование, получаем с точностью до постоянного множителя:

$$i = \sum_{i=1}^{N} |A_i|^2 \exp\left\{-\frac{2v^2(t-t_i)^2}{w_0^2}\right\} \cos^2[\alpha k v(t-t_i)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} |A_i|^2 \exp\left\{-\frac{2v^2(t-t_i)^2}{w_0^2}\right\} \{1+\cos^2[\alpha k v(t-t_i)]\}. \quad (7.27)$$

Здесь выполнены элементарные тригонометрические преобразования, а постоянный коэффициент $\rho/2$ опущен. Выражение (7.27), нормированное на постоянный множитель, описывает случайную импульсную последовательность, каждый импульс в которой состоит из пьедестала и высокочастотной составляющей (рис. 7.4). Фильтр F выделяет высокочастотную компоненту i_D. Сигнал на выходе фильтра представляет собой случайную пуассоновскую последовательность радиоимпульсов

$$i_D = \sum_{i=1}^{N} |A_i|^2 \exp\left\{-\frac{2v^2(t-t_i)^2}{w_0^2}\right\} \cos[2\alpha k v(t-t_i)].$$

Требуется найти квазичастоту этого сигнала.

Для определения корреляционной функции сигнала можно воспользоваться теоремой Кэмпбела, согласно которой корреляционная функция пуассоновской импульсной последовательности совпадает с корреляционной функцией отдельного импульса:

$$s = A \exp\left\{-\frac{2v^2t^2}{w_0^2}\right\}.$$

Вводя обозначения $\beta = 2v^2/w_0^2$, $\omega_D = 2\alpha k v$, перепишем выражение для отдельного импульса с точностью до постоянного коэффициента A:

$$s = \exp(-\beta t^2)\cos(\omega_D t).$$

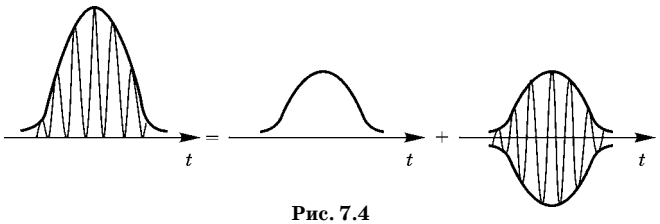


Рис. 7.4

Здесь ω_D — доплеровский сдвиг частоты, пропорциональный скорости движения оптической неоднородности. Корреляционная функция сигнала s определяется коррелятором K (см. рис. 7.3):

$$K_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta t^2)\exp[-\beta(t+\tau)^2]\cos(\omega_D t)\cos[\omega_D(t+\tau)]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\exp(-\beta\tau^2)\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-2\beta(t^2+t\tau)]\{\cos[\omega_D(2t+\tau)]+\cos(\omega_D\tau)\}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left(-\beta\frac{\tau^2}{2}\right)\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-2\beta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)^2\right]\left\{\cos\left[2\omega_D\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right]+\cos(\omega_D\tau)\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left(-\beta\frac{\tau^2}{2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\left\{\exp\left(-\frac{\omega_D^2}{2\beta}\right)+\cos(\omega_D\tau)\right\}.$$

Отсюда находим дисперсию

$$\sigma_s^2 = K_s(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\exp\left\{\exp\left(-\frac{\omega_D^2}{2\beta}\right)+1\right\}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\omega_D^2}{2\beta} = \frac{(2\alpha k v)^2}{2v^2}w_0^2 = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{2\alpha}{\lambda}\right)^2(4w_0)^2 = \pi^2\left(\frac{w_0}{\Lambda}\right)^2 = \pi^2 M^2 \gg 1$$

и

$$\exp\left(-\frac{\omega_D^2}{2\beta}\right) = \exp(-\pi^2 M^2) \ll 1$$

(здесь $\Lambda = \lambda/2\alpha$ — размер пространственного периода зондирующего интерференционного поля, $2M$ — число пространственных периодов в зондирующем поле, $M = 2w_0/\Lambda$), получаем

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}.$$

Коэффициент корреляции

$$R_s(\tau) = \frac{K_s(\tau)}{\sigma_s^2} = \exp\left(-\beta\frac{\tau^2}{2}\right)\left\{\exp(-\pi^2 M^2)+\cos\omega_D\tau\right\}.$$

Найдем вторую производную коэффициента корреляции:

$$R_s'(\tau)=\frac{d}{d\tau}\left\{\exp\left(-\beta\frac{\tau^2}{2}\right)\left[\exp\left(-\pi^2M^2\right)+\cos\omega_0\tau\right]\right\}=$$

$$=-\exp\left(-\beta\frac{\tau^2}{2}\right)\left[\beta\tau\left(\exp\left(-\pi^2M^2\right)+\cos\omega_D\tau\right)+\omega_D\sin\omega_D\tau\right],$$

$$R_s''(\tau)=-\frac{d}{d\tau}\left\{\exp\left(-\beta\frac{\tau^2}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\beta\tau\left(\exp\left(-\pi^2M^2\right)+\cos\omega_D\tau\right)+\omega_D\sin\omega_D\tau\right]\right\}=$$

$$=-\exp\left(-\beta\frac{\tau^2}{2}\right)\left\{-\beta\tau\left[\beta\tau\left(\exp\left(-\pi^2M^2\right)+\cos\omega_D\tau\right)+2\omega_D\sin\omega_D\tau\right]+\right.$$

$$\left.+\beta\left[\exp\left(-\pi^2M^2\right)+\cos\omega_D\tau\right]+\omega_D^2\cos\omega_D\tau\right\}.$$

Полагая $\tau=0$, находим

$$-R_s''(0)=\beta\left[\exp\left(-\pi^2M^2\right)+1\right]+\omega_D^2\approx\beta+\omega_D^2=\omega_D^2\left(1+\frac{\beta}{\omega_D^2}\right).$$

Здесь учтено $\exp\left(-\pi^2M^2\right)\ll 1$.

Квазичастота сигнала согласно (7.24) равна

$$n(0)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{-R_s''(0)}=\frac{1}{2\pi}\omega_D\left(1+\frac{\beta}{\omega_D^2}\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{\omega_D}{2\pi}\left(1+\frac{1}{2\pi^2M^2}\right)^{1/2}=\frac{\omega_D}{2\pi}\left(1+\frac{1}{4\pi^2M^2}\right).$$

Отсюда видно, что квазичастота сигнала в корреляционном лазерном локаторе является однозначной функцией скорости и при числе пространственных периодов M, удовлетворяющем условию $4\pi^2M^2\gg 1$, совпадает с $\omega_D=2\alpha kv$.

Пример 7.4. Оценить пороговый уровень s_0, при котором квазичастота белого шума на выходе оптической системы не превышает заданной n_r.

Пусть $H(K)$ — когерентная передаточная функция оптической системы. Если на входе системы белый шум

с энергетическим спектром W_0, дисперсия выходного шума равна

$$\sigma_s^2 = \frac{W_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(K)|^2\,dK.$$

Дисперсия производной шума на выходе оптической системы

$$\sigma_{s'}^2 = \frac{W_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K^2|H(K)|^2\,dK.$$

Квазичастота выбросов за уровень s_0 определяется из формул (7.23) и (7.25):

$$n(s_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{s'}}{\sigma_s}\exp\left\{-\frac{s_0^2}{2\sigma_s^2}\right\}.$$

Порог выбирается из условия

$$n(s_0) \le n_r$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{s'}}{\sigma_s}\exp\left\{-\frac{s_0^2}{2\sigma_s^2}\right\} \le n_r.$$

Отсюда

$$s_0^2 \ge 2\sigma_s^2 \ln\left[\frac{2\pi n_r \sigma_s}{\sigma_{s'}}\right].$$

С учетом $n(0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{s'}}{\sigma_s}$ получим

$$s_0^2 \ge 2\sigma_s^2 \ln\left[\frac{n_r}{n(0)}\right].$$

7.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ЛИНЕЙНЫМИ ОПТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Пусть на входе линейной системы, частотный коэффициент передачи которой $H(\omega)$, сформирован стационарный (в широком смысле) случайный сигнал $s(x)$ с известными статистическими характеристиками. Математическое ожидание входного сигнала положим равным нулю,

что упрощает формализм, не меняя общности подхода. Исследуем характеристики сигнала на выходе оптической линейной системы.

Для отдельно взятой реализации входного сигнала $s(x)$, имеющей спектральную плотность $s(\omega)$:

$$s(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega x}d\omega.$$

Преобразование конкретной реализации случайного сигнала осуществляется линейной системой так же, как и преобразование сигнала детерминированного:

$$s_e(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)H(\omega)e^{j\omega x}d\omega. \qquad (7.28)$$

Переходя от конкретной реализации к случайному сигналу, мы должны принять, что спектр сигнала также является случайным. Выполняя в (7.28) статистическое усреднение реализаций сигнала и спектра, получаем

$$\overline{s_e(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{s(\omega)}H(\omega)e^{j\omega x}dx = 0.$$

Здесь мы воспользовались уже доказанным положением, что для стационарного сигнала с нулевым математическим ожиданием среднее значение спектральной плотности равно нулю. Найдем корреляционную функцию выходного сигнала

$$K_e(\tau) = \overline{s_e(x)s_e(x+\tau)}.$$

Для получения корреляционной функции воспользуемся представлением реализаций выходного сигнала $s_e(x)$ и $s_e(x+\tau)$ через интеграл Фурье:

$$s_e(x+\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)H(\omega)e^{j\omega\tau}e^{j\omega x}d\omega. \qquad (7.29)$$

$$s_e(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)H(\omega)e^{j\omega x}d\omega. \qquad (7.30)$$

Учитывая уравнения (7.29) и (7.30), находим выражение для функции корреляции

$$K(\tau) = \overline{s_e(x)s_e(x+\tau)} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{s(\omega)s^*(\omega')}H(\omega)H^*(\omega')e^{j\omega\tau}e^{j(\omega-\omega')x}d\omega d\omega'. \qquad (7.31)$$

Поскольку выходной случайный сигнал стационарен, его корреляционная функция не должна зависеть от текущего значения аргумента x. Из этого условия следует, что корреляционная функция спектральной плотности $\overline{s(\omega)s^*(\omega')}$ должна обладать свойствами дельта-коррелированности:

$$\overline{s(\omega)s^*(\omega')} = 2\pi W_s(\omega)\delta(\omega-\omega'), \qquad (7.32)$$

где $W_s(\omega)$ — энергетический спектр выходного сигнала. Выражение (7.32) означает, что случайные спектральные плотности $s(\omega)$ и $s(\omega')$ в несовпадающих сечениях ($\omega \neq \omega'$) некоррелированы.

Подставляя (7.32) в (7.31), получаем выражение, определяющее корреляционную функцию выходного сигнала через энергетический спектр входного сигнала и частотную передаточную функцию линейной системы:

$$K_e(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega)\,|H(\omega)|^2\, e^{j\omega\tau}d\omega.$$

Отсюда находим связь энергетических спектров входного и выходного сигналов:

$$W_e(\omega) = W_s(\omega)|H(\omega)|^2.$$

7.6. ФУНКЦИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ

Оптический сигнал, распространяющийся в пространстве, может описываться комплексной амплитудой, фазовая компонента которой определяется волновым фронтом. Наблюдаемой величиной при формировании изображения или прямом фотодетектировании является не амплитуда оптического поля, а его интенсивность. Важнейшей характеристикой оптического стационарного поля является его функция когерентности

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle s_1(x+\tau)s_2^*(x)\rangle.$$

Она определяется корреляционной функцией комплексных полей в двух точках пространства, x_1 и x_2, для моментов времени, разделенных интервалом τ. Усреднение по времени <...> для стационарных сигналов можно заменять усреднением по ансамблю $\overline{(\ldots)}$.

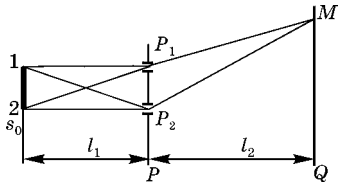


Рис. 7.5

Обратимся к рис. 7.5, где изображен протяженный частично когерентный источник s_0, освещающий непрозрачный экран, в котором имеются два точечных отверстия — P_1 и P_2. На экране Q формируется суперпозиция световых волн, дифрагированных на отверстиях P_1 и P_2. Интенсивность поля в любой точке M на экране описывается выражением

$$I = |E_1 + E_2|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + \langle E_1 E_2^* + E_1^* E_2 \rangle = \\ = I_1 + I_2 + 2\mathrm{Re}[\langle E_1 E_2^* \rangle]. \qquad (7.33)$$

Компонента результирующей интенсивности

$$2\mathrm{Re}[\langle E_1 E_2^* \rangle]$$

представляет собой взаимно корреляционную функцию полей от дифракционных источников P_1 и P_2. Операция усреднения дает разные результаты в случае частичной и полной когерентности. Это проявляется в видности полос V:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

При $I_1 = I_2$ видность V имеет максимальные значения, равные единице, что соответствует полной когерентности.

Усредненное значение интерференционного члена $\langle E_1 E_2^* + E_1^* E_2 \rangle$ можно выразить через функцию когерентности $\Gamma_{12}(\tau)$. Функция когерентности связывает поля в точках P_1 и P_2 с усредненным по времени интерференционным членом $2\mathrm{Re}[\langle E_1 E_2^* \rangle]$ в точке M.

Свойства функции когерентности. Фурье-преобразование функции $\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma(P_1,\ P_2;\ \tau)$ определяет взаимный энергетический спектр

$$W_{1,2}(\omega) = W(P_1, P_2; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Поскольку $\Gamma_{12}(\tau) = \Gamma_{21}^*(\tau)$, то $W_{12}(\tau) = W_{21}^*(\tau)$ для любого действительного или комплексного сигнала. Энергетический спектр $W(P,\ P;\ \omega)$ является действительной величиной. Коэффициент корреляции между полями, сформированными в точках P_1 и P_2, называется комплексной степенью когерентности:

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma(P_1, P_2; \tau) =$$
$$= \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{[\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)]^{1/2}} = \frac{\Gamma(P_1, P_2; \tau)}{[\Gamma(P_1, P_1; 0)\Gamma(P_2, P_2; 0)]^{1/2}}.$$

Обращаясь к рис. 7.5, для комплексной степени когерентности можно записать

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\langle E_1(t+\tau) E_2(t) \rangle}{[\langle E_1(t) E_1^*(t) \rangle \langle E_2(t) E_2^*(t) \rangle]^{1/2}}.$$

Связь между γ_{12} и $2\mathrm{Re}\langle E_1 E_2^* \rangle$:

$$2\mathrm{Re}\langle E_1 E_2^* \rangle = 2(I_1 I_2)^{1/2}\, \mathrm{Re}[\gamma_{12}(\tau)] =$$
$$= 2(I_1 I_2)^{1/2}\, \mathrm{Re}[\gamma_{12}(\tau)] \cos\beta_{12}(\tau), \qquad (7.34)$$

где I_1 и I_2 — интенсивности света, приходящего в точку M от отверстий P_1 и P_2 соответственно; τ — разность во времени прохождения света в точку M от источников P_1 и P_2; β_{12} — фаза комплексной степени когерентности $\gamma_{12}(\tau)$. Комплексная степень когерентности $\gamma_{12}(\tau)$ есть мера взаимной когерентности света в точках P_1 и P_2. Она заключает в себе как предельные случаи и временну́ю, и пространственную когерентности.

Подстановкой (7.34) в (7.33) определяем максимальное и минимальное значения интенсивности в точке M:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2(I_1, I_2)^{1/2} |\gamma_{12}|, \quad \cos\beta_{12} = 1,$$
$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2(I_1, I_2)^{1/2} |\gamma_{12}|, \quad \cos\beta_{12} = -1.$$

Функция когерентности разбивается на два сомножителя, соответственно зависящие от пространственного и временно́го интервалов:

$$(\Gamma(P_1, P_2; \tau)\Gamma(P_1, P_2)\rho(\tau)).$$

Поскольку $\rho(\tau)$ определяется с точностью до постоянного множителя, можно положить, что $\rho(0) = 1$. Для спектрально чистого поля комплексная степень когерентности принимает вид

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma(P_1, P_2)\rho(\tau)}{[\Gamma(P_1, P_1)\Gamma(P_2, P_2)]^{1/2}} = \frac{\Gamma_{12}(0)\rho(\tau)}{[\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)]^{1/2}}.$$

При $\rho(\tau) = e^{j\omega_0\tau}$ поле является монохроматическим:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(0)e^{j\omega_0\tau}}{[\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)]^{1/2}}.$$

Поле полностью некогерентно, если $\gamma_{12}(0) = \gamma(P_1, P_2) = 0$ для $P_1 \neq P_2$. Полная когерентность имеет место, если $|\gamma_{12}(0)| = |\gamma(P_1, P_2)| = 1$ для каждой точки P_1 и P_2. Если поле не является полностью когерентным или некогерентным, оно называется частично когерентным.

Распространение функций когерентности описывается волновым уравнением. Запишем волновое уравнение для поля, источником которого является P_1:

$$\nabla^2 E(P_1; t_1) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E(P_1; t_1)}{\partial t_1^2}.$$

Умножим это уравнение на поле, источником которого является P_2, $E^*(P_2; t_2)$, и усредним результат, учитывая, что поля стационарны и потому функция когерентности зависит только от разности времен $t_1 - t_2 = \tau$:

$$\nabla^2\langle E(P_1; t_1)E^*(P_2; t_2)\rangle = \frac{1}{v^2}\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} E(P_1; t_1)E^*(P_2; t_2)\right\rangle,$$

$$\nabla^2\Gamma(P_1, P_2; \tau) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\Gamma(P_1, P_2; \tau).$$

Отсюда следует, что нахождение функции когерентности $\Gamma(P_1, P_2; \tau)$ сводится к решению волнового уравнения полей от источников P_1 и P_2.

7.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕКОГЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Рассмотрим ситуацию, когда на входе оптической системы формируется некогерентный сигнал $s_0(x_0, y_0)$. Некогерентность оптического сигнала означает, что в каждой точке входной плоскости (x_0, y_0) амплитуда и фаза являются случайными, следовательно, амплитуда и фаза импульсного отклика, соответствующего каждой такой точке, также будут случайными. Отсюда статистические свойства оптического сигнала в различных точках входной плоскости будут определять статистические свойства импульсных откликов в выходной плоскости (x_i, y_i) системы.

Как уже обсуждалось в гл. 2, при когерентном входном сигнале выходная реакция линейной системы описывается суперпозицией комплексных амплитуд импульсных откликов, соответствующих полям в заданных точках входной плоскости. В этом случае когерентная система преобразования изображения является линейной для комплексных амплитуд сигнала:

$$s(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s_0(x_0, y_0) h(x_i - x_0, y_i - y_0) dx_0 dy_0.$$

Действительно, интенсивность выходной реакции оптической системы на сигнал, заданный в точке (x_0, y_0), может быть представлена в виде

$$\overline{|s(x,y)|}^2 = \overline{|s_0(x_0, y_0) h(x_1 - x_0, y_1 - y_0)|}^2 =$$
$$= \overline{|s(x_0, y_0)|^2}\, |h(x_i - x_0, y_i - y_0)|^2 = I(x_0, y_0)\, |h(x_i - x_0, y_i - y_0)|^2 =$$
$$= I(x_0, y_0) \tilde{h}(x_i - x_0, y_i - y_0).$$

Здесь введено усреднение по параметрам, определяющим входной сигнал (например, по длинам волн). Отсюда для интенсивности выходного сигнала имеем

$$I_i(x_i, y_i) = \overline{|s(x_i, y_i)|^2} =$$
$$= \gamma \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I_0(x_0, y_0) \tilde{h}(x_i - x_0, y_i - y_0) dx_0 dy_0. \qquad (7.35)$$

Таким образом, интенсивность выходного сигнала $I(x_0, y_0)$ некогерентной системы определяется сверткой интенсивности входного сигнала $I(x_0, y_0)$ и некогерентного импульсного отклика $\tilde{h}(x_i - x_0, y_i - y) = |h(x_i - x_0, y_i - y)|^2$. Некогерентная оптическая система осуществляет линейное преобразование интенсивности.

Введем нормированные пространственно-частотные спектры распределений $I(x_0, y_0)$ и $I(x_i, y_i)$:

$$I_0(K_x, K_y) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(x_0, y_0)\exp\{-j(K_x x_0 + K_y y_0)\}dx_0 dy_0}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(x_0, y_0)dx_0 dy_0},$$

$$I_i(K_x, K_y) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(x_i, y_i)\exp\{-j(K_x x_i + K_y y_i)\}dx_i dy_i}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(x_i, y_i)dx_i dy_i}.$$

Спектры нормированы на «постоянную» составляющую спектра мощности сигнала, представляющую собой «постоянный» фон на нулевой частоте. Визуальное качество сигнала зависит от контраста, т. е. от относительной интенсивности несущих информацию участков изображения и всегда присутствующего фона.

Нормированная передаточная функция некогерентной оптической системы определяется таким же образом:

$$\tilde{H}(K_x, K_y) =$$

$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \begin{array}{l}\tilde{h}(x_i - x_0; y_i - y_0)\times \\ \times\exp\{-j[K_x(x_i - x_0) + K_y(y_i - y_0)]\}d(x_i - x_0)d(y_i - y_0)\end{array}}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(x_i - x_0; y_i - y_0)d(x_i - x_0)d(y_i - y_0)}.$$

Из теоремы о фурье-преобразовании свертки и (7.35) следует

$$I_i(K_x, K_y) = I_0(K_x, K_y)\tilde{H}(K_x, K_y).$$

Функция $\tilde{H}(K_x, K_y)$ называется *оптической передаточной функцией* (ОПФ). Ее модуль получил название модуляционной передаточной функции (МПФ). Оптическая передаточная функция определяет вводимый системой комплексный весовой множитель к частотной составляющей спектра мощности сигнала, отнесенный к весовому множителю составляющей нулевой частоты.

Между оптической передаточной функцией $\tilde{H}(K_x, K_y)$ и когерентной передаточной функцией существует очевидная связь:

$$\tilde{H}(K_x, K_y) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\xi,\eta)H^*(K_x+\xi, K_y+\eta)d\xi d\eta}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(K_x, K_y)|^2\, dK_x dK_y}.$$

Это выражение определяет основную связь между свойствами когерентных и некогерентных систем.

Основные свойства оптической передаточной функции.

1. $\tilde{H}(0,0) = 1$.
2. $\tilde{H}(-K_x, -K_y) = \tilde{H}^*(K_x, K_y)$. (7.36)
3. $|\tilde{H}(K_x, K_y)| \le \tilde{H}(0,0)$.

В случае некогерентного сигнала для интенсивности выходного сигнала имеем

$$I_i = |h|^2 \otimes I_0 = \tilde{h} \otimes I_0 = |h|^2 \otimes |s_0|^2 .$$

Интенсивность выходного сигнала при когерентном освещении

$$I_i = |h \otimes s_0|^2.$$

Учитывая, что ОПФ определяется как коэффициент корреляции когерентной передаточной функции,

$$\tilde{H}_i(K_x, K_y) = R_H(K_x, K_y) =$$

$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\xi,\eta)H^*(\xi+K_x, \eta+K_y)d\xi d\eta}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |H(\xi,\eta)|^2\, d\xi d\eta},$$

можно записать

$$I_i(K_x, K_y) = R_H(K_x, K_y) R_{s_0}(K_x, K_y),$$

где R_{s_0} — коэффициент корреляции фурье-спектра входного сигнала.

В случае когерентного освещения

$$I_i(K_x, K_y) =$$

$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} [H(\xi,\eta)s_0(\xi,\eta)][H(\xi+K_x,\eta+K_y)s_0(\xi+K_x,\eta+K_y)]^* d\xi d\eta}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} [H(\xi,\eta)s_0(\xi,\eta)] d\xi d\eta}.$$

Отсюда видно, что частотные спектры интенсивности выходного сигнала для некогерентной и когерентной систем различаются.

Пример 7.5. Сравнить изображения сигнала

$$s(x_0) = \cos K_0 x_0,$$

формируемого оптической системой в когерентном и некогерентном свете. Решение иллюстрирует рис. 7.6.

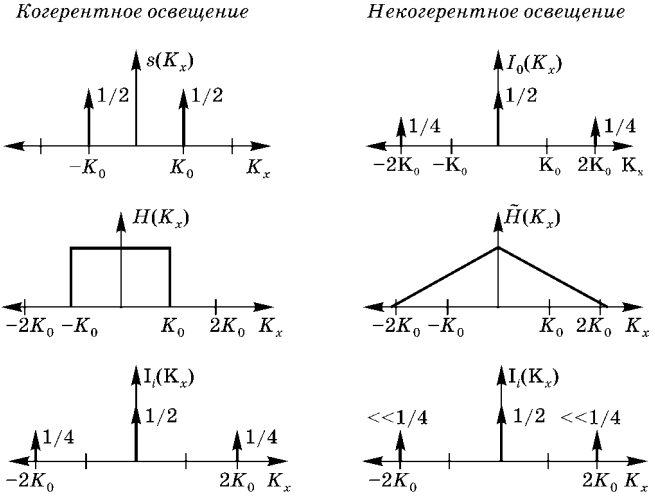


Рис. 7.6

Пример 7.6. Определить когерентный и некогерентный импульсные отклики, КПФ и ОПФ линзы с квадратной апертурой.

Рассмотрим когерентные и некогерентные характеристики линзы с квадратной апертурой. Импульсный отклик линзы с конечной апертурой согласно (2.35) имеет вид

$$h(x, y; x_0, y_0) =$$
$$= -\frac{D_0 D_1}{\lambda^2} \exp\left\{ j\frac{k}{2} D_0 (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp\left\{ j\frac{k}{2} D_1 (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \exp\left\{ j\frac{k}{2} Q(x^2 + y^2) \right\} \times$$
$$\times \exp\{-jk[(D_0 x_0 + D_1 x_1)x + (D_0 y_0 + D_1 y_1)]\} dx dy.$$

Пусть плоскость (x_1, y_1) является изображением плоскости (x_0, y_0): $Q = D_{0+} D_1 - \Phi = 0$. Для оптически сопряженных плоскостей

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) =$$
$$= -\frac{D_0 D_1}{\lambda^2} \exp\left\{ j\frac{k}{2} D_0 (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp\left\{ j\frac{k}{2} D_1 (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \exp\{-jk[(D_0 x_0 + D_1 x_1)x + (D_0 y_0 + D_1 y_1)y]\} dx dy.$$

Здесь $p(x, y)$ — апертурная функция линзы. Пусть линза имеет квадратную апертуру $-a \le x \le a$, $-a \le y \le a$. Импульсный отклик для линзы с квадратной апертурой:

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) =$$
$$= -\frac{D_0 D_1}{\lambda^2} \exp\left\{ j\frac{k}{2} D_0 (x_0^2 + y_0^2) \right\} \exp\left\{ j\frac{k}{2} D_1 (x_1^2 + y_1^2) \right\} \times$$
$$\times \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} \exp\{-jk[(D_0 x_0 + D_1 x_1)x + (D_0 y_0 + D_1 y_1)y]\} dx dy =$$
$$= -\frac{D_0 D_1}{\lambda^2} \exp\left\{ j\frac{k}{2} D_0 (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times$$
$$\times \exp\left\{ j\frac{k}{2} D_1 (x_1^2 + y_1^2) \right\} \int_{-a}^{a} \exp\left\{ -jkD_0 \left(x_0 + \frac{1}{\Gamma} x_1 \right) x \right\} dx \times$$
$$\times \int_{-a}^{a} \exp\left\{ -jkD_0 \left(y_0 + \frac{1}{\Gamma} y_1 \right) y \right\} dy.$$

Здесь $\Gamma = D_0/D_1$ — коэффициент линейного увеличения системы. Введем обозначения $x_0 + \frac{1}{\Gamma}x_1 = \rho_x$, $y_0 + \frac{1}{\Gamma}y_1 = \rho_y$. Тогда

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) = h(\rho_x, \rho_y) =$$

$$= -\frac{D_0 D_1}{\lambda^2}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_0(x_0^2 + y_0^2)\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_1(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times$$

$$\times\int_{-a}^{a}\exp\{-jkD_0\rho_x x\}dx\int_{-a}^{a}\exp\{-jkD_0\rho_y y\}dy =$$

$$= -\frac{D_0 D_1}{\lambda^2}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_0(x_0^2 + y_0^2)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2}D_1(x_1^2 + y_1^2)\right\}2a\frac{\sin(kD_0 a\rho_x)}{kD_0 a\rho_x}\cdot 2a\frac{\sin(kD_0 a\rho_y)}{kD_0 a\rho_y} =$$

$$= -\frac{D_0 D_1}{\lambda^2}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_0(x_0^2 + y_0^2)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2}D_1(x_1^2 + y_1^2)\right\}2a\frac{\sin(K_0\rho_x)}{K_0\rho_x}\cdot 2a\frac{\sin(K_0\rho_y)}{K_0\rho_y}.$$

Здесь $K_0 = kD_0 a$.

Выполним преобразования:

$$h(x_1, y_1; x_0, y_0) =$$

$$= -\frac{4D_0 D_1}{\lambda^2(kD_0)^2}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_0(x_0^2 + y_0^2)\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_1(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times$$

$$\times\frac{\sin(K_0\rho_x)}{\rho_x}\cdot\frac{\sin(K_0\rho_y)}{\rho_y} = \frac{1}{\pi^2\Gamma}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_0(x_0^2 + y_0^2)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2}D_1(x_1^2 + y_1^2)\right\}\frac{\sin(K_0\rho_x)}{\rho_x}\cdot\frac{\sin(K_0\rho_y)}{\rho_y}.$$

Определим когерентную передаточную функцию:

$$H(K_x, K_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\rho_x, \rho_y)\exp\{-j(\rho_x K_x + \rho_y K_y)\}d\rho_x d\rho_y =$$

$$= \frac{1}{\Gamma}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_0(x_0^2 + y_0^2)\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_1(x_1^2 + y_1^2)\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(K_0\rho_x)}{\rho_x}\exp\{-j\rho_x K_x\}d\rho_x\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(K_0\rho_y)}{\rho_y}\times$$

$$\times \exp\{-j\rho_y K_y\} d\rho_y = \frac{1}{\Gamma} \exp\left\{ j\frac{k}{2} D_0 (x_0^2 + y_0^2) \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ j\frac{k}{2} D_1 (x_1^2 + y_1^2) \right\} \mathrm{rect}\left(\frac{K_x}{K_0}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{K_y}{K_0}\right).$$

Таким образом, когерентная передаточная функция линзы, имеющей квадратную апертуру, с точностью до квадратичных фазовых множителей определяется формулой

$$H(K_x, K_y) = -\frac{1}{\Gamma} \mathrm{rect}\left(\frac{K_x}{K_0}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{K_y}{K_0}\right).$$

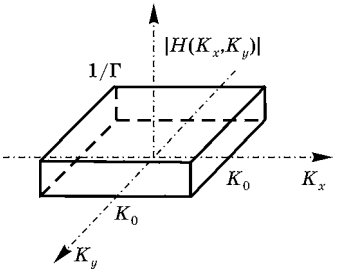


Рис. 7.7

Эта формула для КПФ соответствует рис. 7.7.

Определим некогерентный импульсный отклик линзы с квадратной апертурой:

$$\tilde{h}(x_1, y_1; x_0, y_0) = \tilde{h}(\rho_x, \rho_y) = |h(\rho_x, \rho_y)|^2 = \frac{1}{\pi^4 \Gamma^2} = \frac{\sin^2(K_0 \rho_x)}{\rho_x^2} \cdot \frac{\sin^2(K_0 \rho_y)}{\rho_y^2}.$$

Из полученного уравнения находим выражение оптической передаточной функции линзы с квадратной апертурой:

$$\tilde{H}(K_x, K_y) = H(K_x, K_y) \otimes H^*(K_x, K_y) = [H(K_x) \otimes H^*(K_x)] \times [H(K_y) \otimes H^*(K_y)] = -\frac{1}{\Gamma}\left(1 - \left|\frac{K_x}{2K_0}\right|\right)\left(1 - \left|\frac{K_y}{2K_0}\right|\right). \quad (7.37)$$

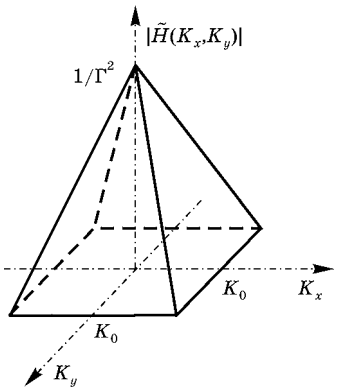


Рис. 7.8

На рис. 7.8 изображена ОПФ линзы с квадратной апертурой, соответствующая выражению (7.37).

7.8. ОПТИЧЕСКАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЛИНЗЫ, ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГЛОЙ АПЕРТУРОЙ

Рассмотрим характеристики линзы, ограниченной круглой апертурой радиуса a. В системе с осевой симметрией выражение для импульсного отклика (2.37) сводится к преобразованию Ганкеля:

$$h(r_1; r_0) = -\frac{kD_0D_1}{\lambda}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_0r_0^2\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_1r_1^2\right\}\times$$

$$\times\int_0^a r\exp\left(j\frac{k}{2}Qr^2\right)J_0\{kD_0\rho r\}dr.$$

Здесь

$$\rho = \left[\left(x_0 + \frac{1}{\Gamma}x_1\right)^2 + \left(y_0 + \frac{1}{\Gamma}y_1\right)^2\right]^{1/2}.$$

В случае оптически сопряженных входной и выходной плоскостей ($Q = 0$)

$$h(\rho) = -\frac{kD_0D_1}{\lambda}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_0r_0^2\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_1r_1^2\right\}\int_0^a rJ_0\{kD_0\rho_r\}dr =$$

$$= -\frac{kD_0D_1}{\lambda(kD_0)^2}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_0r_0^2\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_1r_1^2\right\}w_0\frac{J_1(w_0\rho)}{\rho},$$

где $w_0 = akD_0$. Окончательно для импульсного отклика имеем

$$h(\rho) = -\frac{1}{2\pi\Gamma}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_0r_0^2\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_1r_1^2\right\}w_0\frac{J_1(w_0\rho)}{\rho}. \quad (7.38)$$

Определим когерентную передаточную функцию, используя связь между преобразованием Фурье и преобразованием Ганкеля:

$$H(w) = 2\pi\int_0^a \rho h(\rho)J_0(w\rho)d\rho = -\frac{1}{\Gamma}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_0r_0^2\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_1r_1^2\right\}\times$$

$$\times\int_0^a \rho w_0\frac{J_1(w_0\rho)}{\rho}J_0(w\rho)d\rho =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_0r_0^2\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}D_1r_1^2\right\}\mathrm{circ}\left(\frac{w}{w_0}\right). \quad (7.39)$$

Из (7.38) найдем некогерентный импульсный отклик

$$\tilde{h}(\rho)=|h(\rho)|^2=\frac{w_0^2}{4\pi^2\Gamma^2}\frac{J_1^2(w_0\rho)}{\rho^2}.$$

Воспользовавшись (7.39), определим оптическую передаточную функцию линзы с круглой апертурой:

$$\tilde{H}(w)=H(w)\otimes H^*(w)=\frac{1}{\Gamma^2}\operatorname{circ}\left(\frac{w}{w_0}\right)\otimes\operatorname{circ}\left(\frac{w}{w_0}\right).$$

$\tilde{H}(w)$ находится как свертка двух кругов радиуса w_0. Из рис. 7.9 видно, что оптическая передаточная функция $\tilde{H}(w)$ пропорциональна заштрихованной площади перекрытия:

$$\tilde{H}(w)\sim 2\left\{\theta w_0^2-\frac{1}{2}(AB)(OC)\right\}=2\left[\theta w_0^2-\frac{1}{2}(2w_0\sin\theta)\frac{w}{2}\right]=$$

$$=2\left(\theta w_0^2-\frac{w_0 w}{2}\sin\theta\right)=2\left[\theta-\frac{w}{2w_0}\sin\theta\right]w_0^2=$$

$$=\begin{cases}2w_0^2\left[\arccos\left(\dfrac{w}{2w_0}\right)-\dfrac{w}{2w_0}\left(1-\dfrac{w^2}{2w_0^2}\right)^{1/2}\right], & w\le 2w_0,\\ 0, & w>2w_0.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\tilde{H}(w)=\frac{2w_0^2}{\Gamma^2}\begin{cases}\left[\arccos\left(\dfrac{w}{2w_0}\right)-\dfrac{w}{2w_0}\left(1-\dfrac{w^2}{2w_0^2}\right)^{1/2}\right], & w\le 2w_0,\\ 0, & w>2w_0.\end{cases}$$

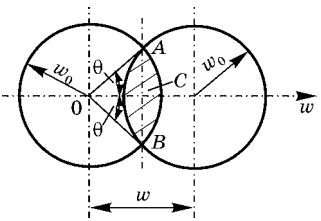


Рис. 7.9

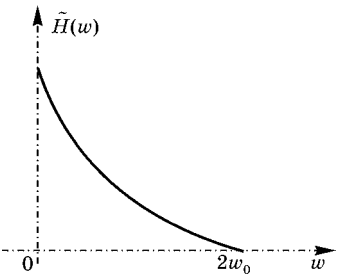


Рис. 7.10

На рис. 7.10 показано нормированное на максимум сечение ОПФ для линзы с круглой апертурой. Как видно из рис. 7.10, оптическая передаточная функция линзы с круглой апертурой определяет полосу пропускания пространственных частот $4w_0$.

7.9. ГЕТЕРОДИННОЕ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ

Гетеродинное фотоэлектрическое преобразование сигнала широко применяется в когерентных оптических системах. На светочувствительную поверхность фотоприемника направляются сигнальный и референтный световые пучки. Результирующее поле является суперпозицией сигнального E_s и опорного E_r полей, частоты которых соответственно ω_1 и ω_2. В случае плоских волн имеем

$$E = E_r + E_s = A_r e^{j(\omega_2 t - \mathbf{k}_r \mathbf{r})} + A_s e^{j[\omega_1 t - \mathbf{k}_s \mathbf{r}]}.$$

Фотоэлектрический ток пропорционален интенсивности светового поля:

$$i = \rho \left| A_r e^{j(\omega_2 t - \mathbf{k}_r \mathbf{r})} + A_s e^{j(\omega_1 t - \mathbf{k}_s \mathbf{r})} \right|^2 .$$

Здесь ρ — коэффициент, учитывающий чувствительность и усиление фотоприемника в частотной полосе, много меньшей ω_1 и ω_2. Выполняя элементарные преобразования, приходим к результату

$$i = \rho\{I_p + I_D \cos[\omega_{12} t - (\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_r)\mathbf{r} - \varphi]\}, \qquad (7.40)$$

где $I_p = |A_r|^2 + |A_s|^2$ — низкочастотный пьедестал; $I_D = 2|A_r||A_s|$ — амплитуда компоненты, изменяющейся с разностной частотой $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$; $\varphi = \varphi_s - \varphi_r$ — разность фаз комплексных амплитуд A_s и A_r. Как следует из выражения для i, фаза высокочастотной компоненты фотоэлектрического сигнала зависит от углового спектра сигнального и референтного световых полей.

Рассмотрим пространственные условия гетеродинного фотоэлектрического преобразования, часто называемого оптическим смешением сигнального и референтного световых полей. Для этого обратимся к рис. 7.11, где показана

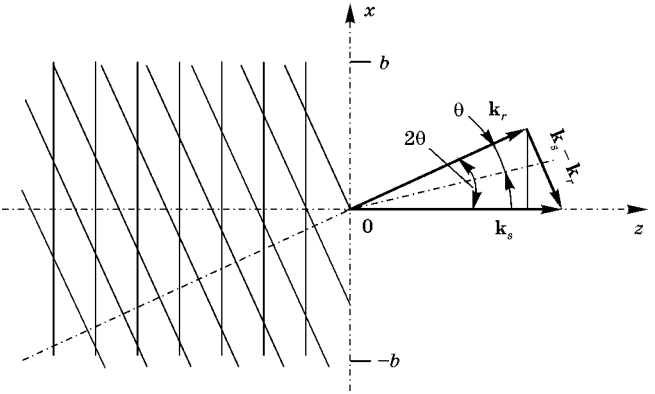


Рис. 7.11

конфигурация волновых фронтов сигнального и референтного пучков, падающих на светочувствительную поверхность фотоприемника. Ось $0x$ лежит в плоскости фотоприемника. Волновой вектор сигнальной волны ортогонален светочувствительной поверхности и направлен по оси z. Волновой вектор референтной волны $\mathbf{k}_r$ составляет с волновым вектором $\mathbf{k}_s$ угол 2θ. Размер линейной апертуры фотоприемника $2b$. Как следует из рисунка, x-компонента фазового члена $(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_r)\,\mathbf{r}$ равна

$$|\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_r| r\cos\theta = 2kx\sin\theta\cos\theta = kx\sin 2\theta. \qquad (7.41)$$

Здесь учтено, что $|\mathbf{k}_s| \approx |\mathbf{k}_s| \approx k$, $r\cos\theta = x$. Подставляя (7.41) в выражение (7.40), получаем

$$i = \rho\{I_p + I_D\cos[\omega_{12}t - kx\sin 2\theta - \varphi]\}.$$

Интегрируя по апертуре, находим результирующий фототок:

$$I_\Phi = \int_{-b}^{b} i\,dx = \rho\left\{2bI_p + I_D\int_{-b}^{b}\cos[\omega_{12}t - kx\sin 2\theta - \varphi]dx\right\} =$$

$$= \rho\left\{2bI_p + I_D\cos(\omega_{12}t - \varphi)\int_{-b}^{b}\cos(kx\sin 2\theta)dx\right\} =$$

$$= \rho 2b\left\{I_p + I_D\frac{\sin(kb\sin 2\theta)}{kb\sin 2\theta}\cos(\omega_{12}t - \varphi)\right\}. \qquad (7.42)$$

Как следует из (7.42), высокочастотная или, как ее иногда называют, корреляционная компонента фотоэлектрического тока максимальна при выполнении условия

$$kb\sin 2\theta < \pi, \quad 2b < \frac{\lambda}{\sin 2\theta}. \qquad (7.43)$$

В соответствии с рис. 7.11 $\lambda/\sin 2\theta = \Lambda_ф$ — пространственный период интерференционного поля в плоскости фотоприемника. При малом угле θ $\Lambda_ф = \lambda/2\theta$. Следовательно, линейная апертура фотоприемника при фотосмешении не должна превышать пространственного периода интерференционного поля, образованного суперпозицией сигнального и референтного световых полей.

Пространственные условия оптического смешения сигналов необходимо учитывать при построении фотоприемной системы. Пример такой системы показан на рис. 7.12. Здесь сигнальный и опорный пучки ограничены пространственно совмещенными осесимметричными телесными углами. Пусть O_1 — источник сигнального пучка $P_s(a)\exp[j(\omega_1)t]$, расположенный на расстоянии d_{O1} от линзы L_1; O_2 — источник референтного пучка $P_r(b)\exp(j\omega_2 t)$,

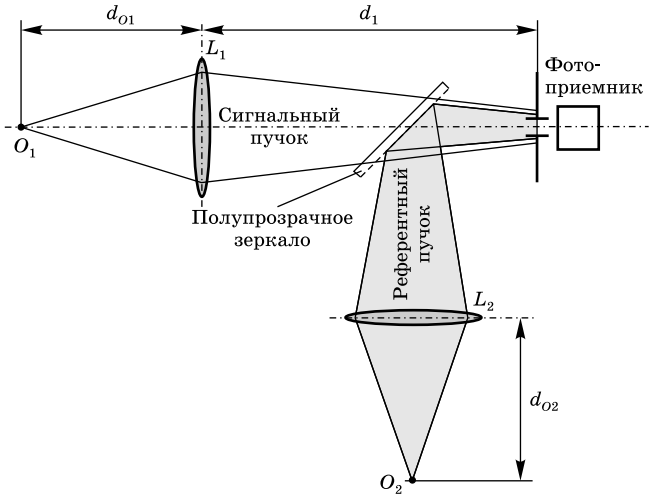


Рис. 7.12

помещенный на расстоянии d_{O2} от линзы L_2. Согласно (7.42) для импульсных откликов линз, преобразующих соответственно сигнальный и опорный пучки, в цилиндрически симметричной системе можно записать

$$h_1(w,r)=\frac{kD_{01}D_1}{2\pi jQ_1}\exp\left\{j\frac{k}{2}\alpha_1 w^2\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2}\alpha_2 r^2\right\}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{-jk\frac{D_{01}D_1}{Q_1}rw\cos(\theta-\varphi)\right\}d\theta=$$

$$=\frac{kD_{01}D_1}{jQ_1}\exp\left\{j\frac{k}{2}\alpha_1 w^2\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}\alpha_2 r^2\right\}J_0\left\{k\frac{D_{01}D_1}{Q_1}rw\right\},$$

$$h_2(w,r)=\frac{kD_{02}D_2}{2\pi jQ_2}\exp\left\{j\frac{k}{2}\beta_1 w^2\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{j\frac{k}{2}\beta_2 r^2\right\}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left\{-jk\frac{D_{02}D_1}{Q_2}rw\cos(\theta-\varphi)\right\}d\theta=$$

$$=\frac{kD_{02}D_1}{jQ_2}\exp\left\{j\frac{k}{2}\beta_1 w^2\right\}\exp\left\{j\frac{k}{2}\beta_2 r^2\right\}J_0\left\{k\frac{D_{02}D_1}{Q_2}rw\right\}.$$

Здесь учтено:

$$\alpha_1=D_1-D_1^2/Q_1;\ \alpha_2=D_{01}-D_{01}^2/Q_1;$$

$$\beta_1=D_2-D_2^2/Q_2;\ \beta_2=D_{02}-D_{02}^2/Q_2;$$

$Q_1=D_{01}+D_1-\Phi_1$; $Q_2=D_{02}+D_2-\Phi_2$; $x_0=r\cos\theta$; $y_0=r\sin\theta$; $x_1=w\cos\varphi$; $y_1=w\sin\varphi$; $r^2=x_0^2+y_0^2$; $w^2=x_1^2+y_1^2$; $\mathbf{rw}=rw(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)=rw\cos(\theta-\varphi)$. Сигнальный и опорный световые пучки определим как свертку функций источника и соответствующего импульсного отклика. Пусть функция источника сигнального пучка $P_s(a)=\mathrm{circ}(r/a)$, опорного — $P_r(b)=\mathrm{circ}(r/b)$, где a и b — малые радиусы. Тогда

$$E_x=\frac{kD_{01}D_1}{2\pi jQ_1}\exp\{j\omega_1 t\}\exp\left\{j\frac{k}{2}\alpha_1 w^2\right\}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}P_s(a)\exp\left\{j\frac{k}{2}\alpha_2 r^2\right\}J_0\left\{k\frac{D_{01}D_1}{Q_1}rw\right\}rdrd\theta=$$

$$=A_s\exp\{j\omega_1 t\}\exp\left\{j\frac{k}{2}\alpha_1 w^2\right\}.$$

$$E_r = \frac{kD_{02}D_2}{2\pi jQ_2}\exp\{j\omega_2 t\}\exp\left\{j\frac{k}{2}\beta_1 w^2\right\}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty}P_r(b)\exp\left\{j\frac{k}{2}\beta_2 r^2\right\}J_0\left\{k\frac{D_{02}D_2}{Q_2}rw\right\}rdrd\theta =$$

$$= A_r\exp\{j\omega_2 t\}\exp\left\{j\frac{k}{2}\beta_1 w^2\right\}.$$

где

$$A_s = \frac{a}{jw}J_1\left(k\frac{D_{01}D_1}{Q_1}aw\right),\quad A_s = \frac{b}{jw}J_1\left(\frac{kD_{02}D_2}{Q_2}bw\right).$$

При интегрировании учтено: $\frac{k}{2}\alpha_2 a^2 \ll 1$, $\frac{k}{2}\beta_2 b^2 \ll 1$.

На светочувствительной поверхности фотоприемника формируется суперпозиция сигнального и референтного полей. Определим интенсивность результирующего поля:

$$I(w) = |E_s + E_r|^2 =$$

$$= \left|A_s\exp\{j\omega_1 t\}\exp\left\{j\frac{k}{2}\alpha_1 w^2\right\} + A_r\exp\{j\omega_2 t\}\exp\left\{j\frac{k}{2}\beta_1 w^2\right\}\right|^2 =$$

$$= |A_s|^2 + |A_r|^2 + 2|A_s||A_r|\cos\left\{\omega_{12}t + \frac{k}{2}(\alpha_1 - \beta_1)w^2\right\}.$$

Отсюда интенсивность высокочастотной компоненты равна

$$I_D = 2|A_s||A_r|\cos\left\{\omega_{12}t + \frac{k}{2}(\alpha_1 - \beta_1)w^2\right\}.$$

Здесь $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$.

Пусть фотоприемник имеет круглую апертуру радиуса w_0. Высокочастотная компонента фотоэлектрического тока пропорциональна интегралу соответствующей компоненты интенсивности поля по апертуре фотоприемника:

$$i_D \sim \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{w_0}\cos\left\{\omega_{12}t + \frac{k}{2}(\alpha_1 - \beta_1)w^2\right\}wdwd\alpha \sim$$

$$\sim 2\pi\cos(\omega_{12}t)\cos\left[\frac{k}{2}(\alpha_1 - \beta_1)w^2\right] \sim$$

$$\sim \pi w_0^2\frac{\sin\left[\frac{k}{2}(\alpha_1 - \beta_1)w_0^2\right]}{\frac{k}{2}(\alpha_1 - \beta_1)w_0^2}\cos(\omega_{12}t)$$

или с точностью до постоянного коэффициента

$$i_D \sim \pi w_0^2 \frac{\sin \frac{k}{2R_э} w_0^2}{\frac{k}{2R_э} w_0^2} \cos \omega_{12} t, \qquad (7.44)$$

где $R_э = (\alpha_1 - \beta_1)^{-1}$ — эквивалентный радиус кривизны волнового фронта.

Амплитуда высокочастотной компоненты фотоэлектрического тока максимальна, если выполняется условие $\frac{k}{2R_э} w_0^2 < \pi$ или $w_0/R_э < \lambda/w_0$. Возводя в квадрат правую и левую части этого неравенства и умножая результирующее неравенство на π, получим

$$\frac{\pi w_0^2}{R_э^2} < \frac{\pi \lambda^2}{w_0^2}. \qquad (7.45)$$

Левая часть неравенства (7.45) представляет собой пространственный угол, зависящий от разности радиусов волновых фронтов сигнального и референтного пучков, падающих на фотоприемник. Правая часть неравенства — предельная величина этого угла, определяющая дифракционный угловой размер апертуры фотоприемника. Она пропорциональна отношению площадки когерентности $\pi\lambda^2$ к квадрату радиуса апертуры. Неравенство (7.45) — математическая запись так называемой «антенной теоремы» в радиотехнике. Условия (7.43) и (7.45) означают, что на светочувствительной поверхности фотоприемника референтное и сигнальное световые поля должны быть пространственно совмещены. Это накладывает ограничения на допустимые размеры апертуры фотоприемника.

Фотосмешение является формой когерентного детектирования, в отличие от фотодетектирования, которое может рассматриваться как некогерентное фотоэлектрическое преобразование оптического сигнала. При некогерентном детектировании отсутствует отрицательный сигнал на выходе фотоприемника, который функционирует как квадратичный по амплитуде светового поля элемент:

$$s_{вых} + n_{вых} = \rho \left| s_{вх} + n_{вх} \right|^2 = \rho (s_{вх}^2 + 2 \left| s_{вх} n_{вх} \right| + n_{вх}^2).$$

Здесь $s_{\text{вых}}$ и $s_{\text{вх}}$ — сигнал на выходе и входе; $n_{\text{вых}}$ и $n_{\text{вх}}$ — шум на выходе и входе. Отсюда для отношения сигнал/шум имеем

$$\left(\frac{s}{n}\right)_{\text{вых}} = \frac{s_{\text{вх}}^2}{(2|s_{\text{вх}} n_{\text{вх}}| + n_{\text{вх}}^2)}.$$

Если $(s/n)_{\text{вх}} \ll 1$, то $n_{\text{вх}}^2 \gg 2s_{\text{вх}} n_{\text{вх}}$ и

$$s_{\text{вых}} \approx \rho s_{\text{вх}}^2, n_{\text{вых}} \approx \rho n_{\text{вх}}^2.$$

В этом случае отношение сигнал/шум на выходе и входе связаны выражением

$$\left(\frac{s}{n}\right)_{\text{вых}} \approx \left(\frac{s}{n}\right)_{\text{вх}}^2.$$

Следовательно, отношение сигнал/шум на выходе существенно снижается, если на входе оно меньше единицы. В оптическом диапазоне отношение сигнал/шум на входе может оказаться меньше единицы только из-за воздействия фоновой засветки, поскольку флуктуационный шум сигнала всегда меньше самого сигнала, а внутренний шум фотоприемника исключается из входной шумовой мощности.

Пусть этот фотодетектор работает в режиме фотосмешения. При когерентном фотодетектировании на вход фотоприемника поступает суперпозиция сигнального, шумового и референтного полей:

$$s_{\text{вх}} + n_{\text{вх}} + r.$$

Выходной сигнал пропорционален интенсивности входного поля:

$$s_{\text{вых}} = \rho|s_{\text{вх}} + n_{\text{вх}} + r|^2 = \rho|s_{\text{вх}} + n_{\text{вх}}|^2 + 2\rho|r(s_{\text{вх}} + n_{\text{вх}})| + \rho|r|^2.$$

Если амплитуда референтного поля много больше сигнального, то, учитывая, что $\rho|r|^2$ для гармонического референтного поля является константой, выражение для выходного сигнала можно представить в виде

$$s_{\text{вых}} = 2\rho|r(s_{\text{вх}} + n_{\text{вх}})|.$$

Отсюда получаем связь для отношений сигнал/шум на выходе и входе:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_{\text{вых}} = \frac{2\rho|rs_{\text{вх}}|}{2\rho|rn_{\text{вх}}|} = \left(\frac{s}{n}\right)_{\text{вх}}.$$

Следовательно, при когерентном детектировании отношение сигнал/шум на выходе оказывается близким входному отношению сигнал/шум. Хотя отношение сигнал/шум при фотоэлектрическом преобразовании сохраняется, абсолютная величина сигнала и шума линейно растет с коэффициентом усиления $2\rho|r| > 1$. За счет этого исключается влияние внутренних шумов, поскольку он при фотосмешении остается таким же, как и при прямом детектировании.

Если в референтном поле имеется шум n_r, то выражение для отношения сигнал/шум принимает вид

$$\left(\frac{s}{n}\right)_{\text{вых}} \approx \frac{|s_{\text{вх}}|}{|n_{\text{вх}} + n_r|}.$$

Отсюда следует, что чувствительность, которая может быть достигнута при фотосмешении, ограничивается шумом референтного поля. Влияние шума референтного поля существенно снижается при использовании балансного фотоприемника.

Фотосмешение обеспечивает эффективную спектральную и пространственную фильтрацию фона. Спектральная фильтрация состоит в том, что усиливаются только шумы в заданной промежуточной полосе, в которой существует фоновый шум. Пространственная фильтрация фона обеспечивается нарушением пространственных условий фотосмешения референтного поля и фонового излучения.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какими моментными функциями описывается случайный сигнал в рамках корреляционной теории?
2. В чем отличие определений стационарности случайного сигнала в узком и широком смысле?
3. Какой сигнал называется эргодическим?
4. В чем смысл теоремы Винера–Хинчина?
5. Как определяется дисперсия стационарного случайного сигнала?

6. Каковы статистические свойства белого шума?
7. Как связаны корреляционные функции сигнала и его производной?
8. Как определяется корреляционная связь между случайным стационарным сигналом и его производной?
9. Как изменяются свойства стационарного случайного сигнала при его интегрировании?
10. Как определяется квазичастота стационарного гауссова сигнала?
11. Как преобразуется энергетический спектр случайного сигнала линейной оптической системой?
12. Как определяется когерентность оптического сигнала?
13. Каковы свойства функции когерентности?
14. В чем особенности преобразования некогерентных сигналов линейной оптической системой?
15. Как определяется оптическая передаточная функция и каковы ее свойства?
16. Чем отличаются преобразования когерентных и некогерентных сигналов линейными оптическими системами?
17. Как определяется импульсный отклик линзы с круглой апертурой?
18. Как определяется когерентная передаточная функция линзы, ограниченной круглой апертурой?
19. Как связаны когерентный и некогерентный импульсные отклики линзы с круглой апертурой?
20. Как определяется оптическая передаточная функция линзы, ограниченной круглой апертурой? Каковы фильтрующие свойства такой линзы?
21. В чем заключаются пространственные условия гетеродинного фотодетектирования?
22. Чем отличаются оптическое смешение и прямое детектирование сигналов?

ЗАДАЧИ

1. Случайный процесс имеет реализации вида $s(x) = A\cos(K_0 x) + B\sin(K_0 x)$ с фиксированной частотой K_0 и случайными амплитудами A и B. Показать, что достаточным условием стационарности этого процесса в широком смысле являются $\overline{A} = \overline{B} = 0$, $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ и $\overline{AB} = 0$.

2. Найти энергетический спектр $W_s(\omega)$ стационарного случайного процесса $s(t)$, математическое ожидание которого $m_s = 0$ и коэффициент корреляции $R(\tau) = \exp\{-\gamma|\tau|\}\cos\omega_0\tau$.

3. Определить математическое ожидание m_s и корреляционную функцию производной $s(t)$ сигнала $s'(t)$. Для

этого представить $s'(t)$ как выходную реакцию дифференцирующего фильтра на входной сигнал $s(t)$.

4. Имеются эргодические случайные сигналы

$$s_1(t) = Ae^{j\omega_1 t} \text{ и } s_2(t) = Be^{j\omega_2 t}.$$

Найти математические ожидания, корреляционные функции и взаимно корреляционную функцию.

5. Доказать основные свойства оптической передаточной функции (7.36).

6. Определить функцию когерентности поля, сформированного круглым объективом в зоне Фраунгофера.

7. Круглое отверстие радиуса a освещается плоской волной, амплитуда которой является случайным сигналом $s(t)$, функция когерентности равна $\Gamma(\tau)$, а энергетический спектр $W_s(\omega)$. Определить среднюю интенсивность поля в дальней зоне.

8. Сигнал $s(x, y) = \frac{1}{2}(1 + \cos K_0 x)$ сформирован на входе когерентной оптической системы. Полагая, что частота K_0 достаточно мала, чтобы быть пропущенной системой, найти распределение интенсивности выходного сигнала в плоскости изображения для идеальной системы.

9. Сигнал сформирован в виде транспаранта с коэффициентом пропускания $\tau(x, y) = \frac{1}{2}(1 + \cos K_0 x)$. Выходной сигнал формируется в плоскости изображения линзой диаметром $2r$ и фокусным расстоянием f с коэффициентом увеличения, равным единице. Сравнить максимальные пространственные частоты, пропущенные системой при когерентном и некогерентном освещении.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ЧАСТОТНО-КООРДИНАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ

8.1. ОКОННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Классическое преобразование Фурье имеет свои ограничения. Достоверная физическая интерпретация фурье-спектра сигнала, локализованного в координатном и частотном пространствах, в ряде случаев оказывается затруднительной либо невозможной. Так, для получения информации о спектральной плотности на заданной частоте согласно интегралу Фурье необходимо иметь и прошлую, и будущую информацию о сигнале на временно́й оси. Проблемными являются ситуации, когда частота сигнала изменяется во времени (или в пространстве при пространственно-частотном фурье-анализе). Например, фурье-спектры двух сигналов, один из которых содержит сумму двух синусоид с различными частотами, а другой — последовательность следующих друг за другом тех же синусоид, выглядят практически одинаково. Они содержат два спектральных пика на фиксированных частотах, соответствующих частотам синусоид, и не несут информации о временны́х или пространственных интервалах, в которых существуют эти синусоиды.

Обычное преобразование Фурье не позволяет сопоставлять фурье-спектры интервалам реализации сигнала. Из фурье-спектра можно сделать заключение о наличии тех или иных спектральных компонент в реализации сигнала без информации о положении на временно́й или пространственной координатной оси.

Оконное преобразование Фурье $s(\omega, \tau)$ определяется как скалярное произведение сигнала $s(t)$ и базисной функции $p(t - \tau)e^{j\omega t}$:

$$s(\omega,\tau)=(s(t),\,p(t-\tau)e^{-j\omega t})=\int_{-\infty}^{\infty}p(t-\tau)s(t)e^{j\omega t}dt. \qquad (8.1)$$

Как видно из (8.1), локальность фурье-преобразования достигается путем вычисления интеграла Фурье в пределах скользящего по оси координат окна. Воспользовавшись обобщенной формулой Рэлея, преобразуем (8.1):

$$s(\omega,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s(\omega-\omega')p^{*}(\omega')e^{j\omega' t}d\omega', \qquad (8.2)$$

где $p(\omega')$ — фурье-спектр оконной функции.

В случае, когда оконная функция равна единице на всей координатной оси, $p(\omega)=2\pi\delta(\omega)$ и оконное фурье-преобразование (8.2) переходит в классическое преобразование Фурье:

$$s(\omega,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}s(\omega-\omega')2\pi\delta(\omega')e^{j\omega' t}d\omega'=s(\omega).$$

На рис. 8.1 показана информационная диаграмма на плоскости время–частота, иллюстрирующая оконное преобразование Фурье. Как видно из рисунка, ширина скользящего окна $\Delta\tau$ при выполнении оконного преобразования Фурье остается неизменной.

При оконном преобразовании Фурье разрешение по оси координат определяется шириной окна Δ_τ, а разрешение по частотной оси — величиной, обратной ширине окна, $\Delta_\omega \sim 1/\Delta_\tau$. Это следует из соотношения неопределенностей

$$\Delta_\tau\Delta_\omega \geq \frac{1}{2}.$$

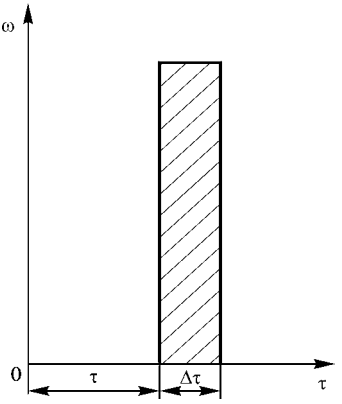


Рис. 8.1

Как показано в разделах 4.1 и 4.2, соотношение неопределенностей обращается в равенство, если окно описывается функцией Гаусса. Преобразование Фурье с оконной

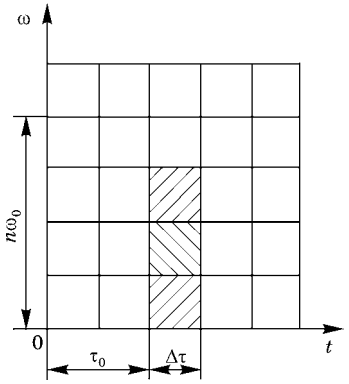


Рис. 8.2

функцией гауссова вида получило название преобразования Габора. При преобразовании Габора базисная функция имеет вид

$$p(t-\tau)e^{j\omega t} = e^{-\alpha t^2} e^{j\omega t}.$$

Если шаг сдвига оконной функции равен τ_0, то $\omega = n\omega_0$, где $\omega_0 = 2\pi/\tau_0$. В этом случае для базисной функции Габора имеем

$$p(t-\tau)e^{j\omega t} = p(t-n\tau_0)e^{jn\omega_0 t}$$

и информационная диаграмма на рис. 8.1 принимает вид, показанный на рис. 8.2.

Из принципа неопределенности следуют ограничения на применение оконного преобразования Фурье для частотно-координатного анализа сигналов. Действительно, при малой ширине окна Δ_τ получается высокое разрешение по координатной оси и низкое — по частотной. Увеличение ширины окна ведет к снижению разрешения по координате и увеличению разрешения по частоте. Таким образом оконное преобразование Фурье имеет высокое разрешение по частоте в низкочастотной области и низкое — в области высоких частот. Соответственно высокое разрешение по координате сопряжено с низкой чувствительностью по частоте, а уменьшение разрешения по координате сопровождается ростом разрешения по частоте. В отличие от обычного преобразования Фурье оконное фурье-преобразование обеспечивает двумерную развертку исследуемого одномерного сигнала на плоскости координата — частота (в случае времязависимого сигнала это плоскость время — частота, для пространственного сигнала анализ осуществляется на плоскости координата — пространственная частота, или координата — импульс).

В обычном преобразовании Фурье разрешение по частоте наилучшее, поскольку ширина окна, по крайней мере теоретически, бесконечна. Аналогично при представлении

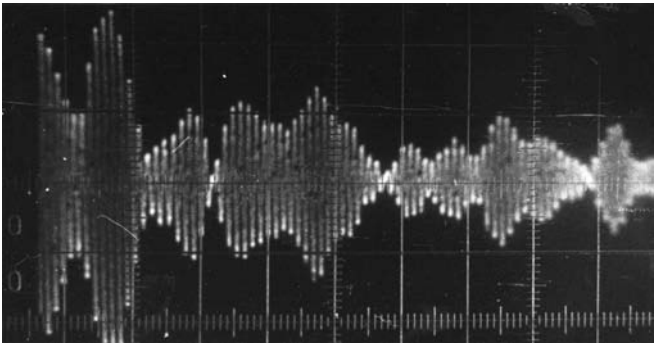


Рис. 8.3

реализации сигнала с неограниченным спектром в координатном пространстве разрешение наибольшее, поскольку ширина частотного окна, в котором выполняется обратное преобразование Фурье, максимальна.

Частным случаем оконного преобразования является кратномасштабное преобразование Фурье (или, как его еще называют, *кратномасштабный анализ*). В этом случае сигнал анализируется на разных частотах при различных разрешениях. Кратномасштабный анализ позволяет получить хорошее разрешение по координате при плохом по частоте на высоких частотах и хорошее разрешение по частоте при плохом разрешении по времени на низких частотах. Кратномасштабный анализ особенно эффективен в ситуациях, когда сигнал представляет собой совокупность высокочастотных компонент короткой длительности и протяженных низкочастотных компонент. В инженерной практике сигналы такого типа, как временны́е, так и пространственные, встречаются часто. На рис. 8.3 приведен пример такого сигнала.

8.2. ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

В отличие от обычного (классического) и оконного преобразований Фурье, вейвлет-преобразование обеспечивает двумерное представление сигнала на плоскости частота — координата, где частота и координата являются

независимыми переменными. Вейвлет-анализ иногда называют «*математическим микроскопом*», тем самым подчеркивая свойство вейвлет-преобразования сохранять хорошее разрешение на различных частотных и координатных масштабах.

Для определенности будем рассматривать принципы Вейвлет-анализа на примере времязависимых сигналов. Переход к пространственным сигналам совершается путем замены временно́й оси на пространственную и соответственно частотной оси на ось пространственных частот (или волновых чисел).

Обратимся к рис. 8.4, где в виде прямоугольника изображена базисная функция $p(t-\tau)e^{j\omega t}$, которая используется в оконном преобразовании Фурье. Прямоугольник условно ограничивает область, в которой содержится 90% энергии в окрестности центра тяжести. Смещение оконной функции $p(t-\tau)$ на τ соответствует смещению прямоугольника параллельно оси t. Модуляция оконной функции комплексной экспонентой $e^{j\omega_0 t}$ согласно теореме смещения сдвигает прямоугольник параллельно оси ω.

Подвергнем оконную функцию $p(t)$ масштабированию: $\varphi(at)$. На рис. 8.5 проиллюстрированы эффекты масштабирования функции $p(at)$ на плоскости время — частота при условии $a > 1$. Проекции прямоугольника, соответствующего функции $p(t, \omega)$, на оси t и ω обозначены как $\Delta_t p(t)$ и $\Delta_\omega p(t)$. Пользуясь свойствами фурье-преобразования, для масштабированной функции $p\left(at, \frac{\omega}{a}\right)$ имеем $\frac{1}{a}\Delta_t p(t)$ и $a\Delta_\omega p(t)$. Отсюда видно, что преобразование базисной функ-

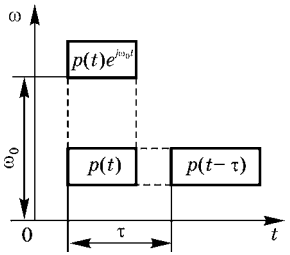


Рис. 8.4

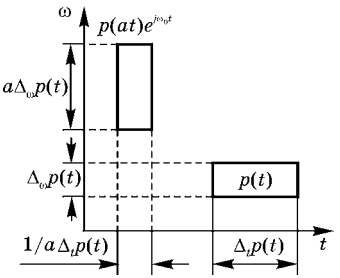


Рис. 8.5

ции $p(t)e^{j\omega t}$ меняет ее локализацию на плоскости частота — время.

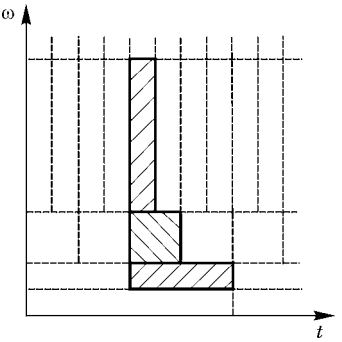


Рис. 8.6

Для выявления частотно-временны́х возмущений сигнала выбор базисной функции должен обеспечивать необходимое разрешение по всей плоскости частота — время. Поэтому базисная функция при локализации по всей плоскости частота — время должна обладать свойством самоподобия. Требованию самоподобия удовлетворяет следующий вид базисной функции:

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right),$$

где масштабный коэффициент a введен в аргумент как делитель разности t и сдвига b. Величина, обратная масштабному коэффициенту a, является аналогом частоты. Самоподобие базисной функции $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ обеспечивается за счет поддерживания постоянным отношения коэффициентов a и b: $b/a = \text{const}$ (рис. 8.6). Такая базовая функция получила название *вейвлет*, что означает «*маленькая волна*». Слово «*волна*» указывает на тот факт, что *вейвлет* осциллирует. Слово «*маленькая*» отражает конечную ширину вейвлета.

Определим свойства, которыми должен обладать вейвлет как базисная функция частотно-временно́го преобразования.

Ограниченность. Это свойство означает, что вейвлет должен обладать конечной энергией

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2\, dt < \infty.$$

Локализация. Вейвлет-преобразование, в отличие от преобразования Фурье, использует локализованную в координатном и частотном пространствах солитоноподобную базисную функцию (*солитон* означает «*уединенная волна*»).

Нулевое среднее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0.$$

Иногда для различных приложений требуется, чтобы нулю равнялись первые моменты вейвлета:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t)dt = 0.$$

В этом случае говорят о вейвлете m-го порядка. Вейвлет высшего порядка позволяет анализировать мелкомасштабные особенности сигнала.

Автомодельность (самоподобие). Это свойство означает, что при масштабных преобразованиях и сдвигах вейвлет сохраняет свою форму.

Базисная функция, отвечающая перечисленным свойствам, может быть записана в виде

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \tag{8.3}$$

где множитель $1/\sqrt{|a|}$ определяется из условия сохранения нормы при масштабных и сдвиговых преобразованиях

$$\| \psi_{ab}(t) \| = \| \psi(t) \|.$$

На рис. 8.7 показаны примеры некоторых широко используемых вейвлетов и их фурье-спектров. Поскольку функция Гаусса хорошо локализуется в координатном и частотном пространствах, наибольшее распространение получили вейвлеты на основе производных гауссовой функции:

$$\psi_n(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right). \tag{8.4}$$

При $n = 1$ из (8.4) получается так называемый *WAVE-вейвлет* (рис. 8.7*а*). Он обладает нулевым средним значением. На рис. 8.7 слева показан вейвлет, справа — его фурье-спектр. Другой материнский вейвлет под названием *MHAT-вейвлет* (мексиканская шляпа) имеет вид

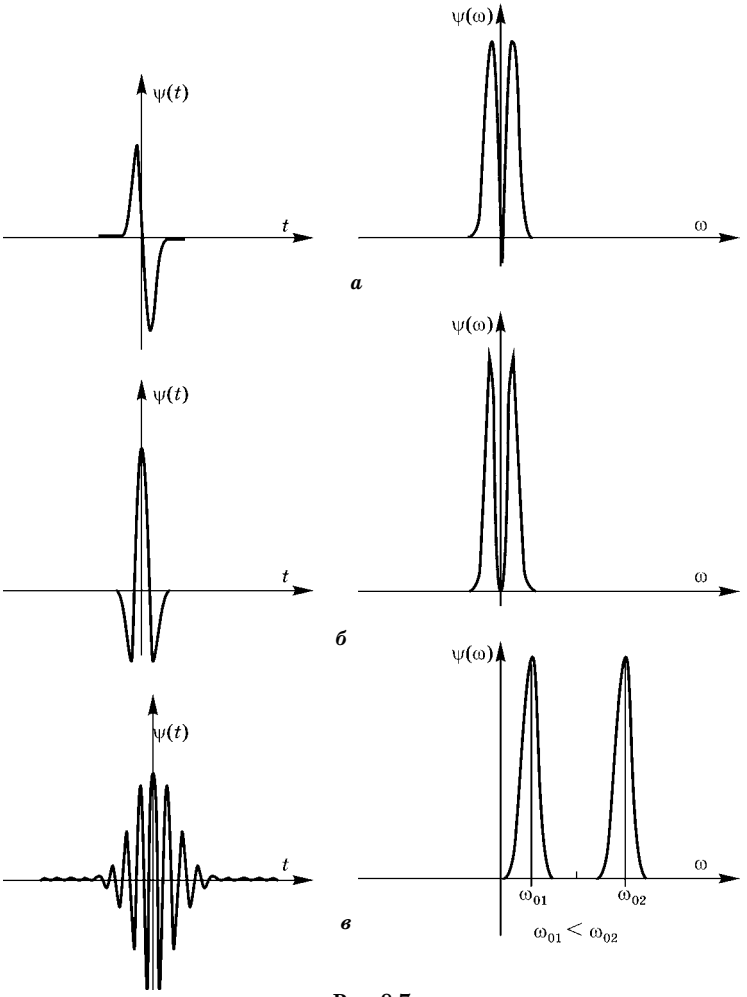


Рис. 8.7

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-t^2)e^{-1/2t^2}. \qquad (8.5)$$

Среднее значение и первый момент этого вейвлета равны нулю. Фурье-спектр вейвлета «*мексиканская шляпа*» более узкий, чем у WAVE-вейвлета. Поэтому MHAT-вейвлет имеет лучшее разрешение (рис. 8.7*б*).

Широко используется *DOG-вейвлет*. Он образуется как разность двух функций Гаусса:

$$\psi_n(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) - 0{,}5\exp\frac{d^n}{dt^n}\exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right).$$

Хорошей локализацией в координатном и частотном пространствах обладает вейвлет Морле (Morlet):

$$\psi(t) = \exp(j\omega_0 t)\exp\left(-\frac{f^2}{2}t^2\right), \qquad (8.6)$$

где $f = 1/T$. Это — плоская волна, модулированная гауссовой функцией единичной ширины (рис. 8.7*в*). С увеличением ω_0 возрастает избирательность Морле-базиса в частотном пространстве, но ухудшается — в координатном.

Преобразование сигналов с базисной функцией (8.3) получило название *непрерывного* вейвлет-преобразования. Оно обозначается как $CWT_s(a, b)$ и определяется скалярным произведением сигнала на базисную функцию (8.3):

$$CWT_s(a,b) = (s(t), \psi_{a,b}(t)) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt. \qquad (8.7)$$

Непрерывное вейвлет-преобразование является обратимым. Формула обращения для непрерывного вейвлет-преобразования имеет вид

$$s(t) = C_\psi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{da}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} CWT_s(ab)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)db, \qquad (8.8)$$

где C_ψ — нормализующий коэффициент.

Из сравнения (8.8) с формулой для обратного преобразования Фурье видно, что роль функции $e^{j\omega t}$ здесь выполняет функция $\psi_{a,\,b}(t)$, а коэффициенту C_ψ^{-1} можно сопоставить множитель $1/2\pi$. Масштабный коэффициент $1/a$ имеет смысл частоты. Для определения коэффициента C_ψ воспользуемся обобщенной формулой Рэлея:

$$CWT_s(a,b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)\psi_{a,b}^*(\omega)d\omega =$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)\psi^*(a,\omega)e^{jb\omega}d\omega, \qquad (8.9)$$

где $s(\omega)$ — фурье-спектр сигнала, $\psi(a, \omega)e^{-jb\omega}$ — фурье-спектр базисной функции $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$. Записывая фурье-спектр базисной функции $\psi(a, \omega)e^{jb\omega}$ в (8.9), мы воспользовались теоремой смещения и правилами масштабирования при выполнении преобразования Фурье.

Выделим в (8.8) интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} CWT_s(a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)db$$

и подставим в него выражение для $CWT_s(a, b)$ из (8.9):

$$\frac{\sqrt{a}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)\psi^*(a\omega)e^{jb\omega}d\omega\right\}\psi_{a,b}(t)db =$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)\psi^*(a\omega)d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{a,b}(t)e^{jb\omega}db. \qquad (8.10)$$

Учитывая, что в (8.10)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{a,b}(t)e^{jb\omega}db = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)e^{jb\omega}db =$$

$$\left[x=\frac{1}{a}(t-b)\right]$$

$$= \sqrt{a}e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-j\omega x}dx = \sqrt{a}e^{j\omega t}\psi(a\omega),$$

после подстановки полученного выражения в (8.10):

$$\frac{|a|}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(a,\omega)|^2\, s(\omega)e^{j\omega t}d\omega = B(a).$$

Выполним интегрирование по a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(a)\frac{da}{a^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int s(\omega)\frac{|\psi(a\omega)|^2}{|a|}e^{j\omega t}d\omega da =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega t}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\psi(a\omega)|^2}{|a|}da =$$

$$\left[a\omega=u;\ da=\frac{du}{\omega}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega t}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\psi(u)|^2}{u}du = \frac{1}{2\pi}C_\psi\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{j\omega t}d\omega = C_\psi s(t),$$

где

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(u)|^2}{u} du. \qquad (8.11)$$

Отсюда следует справедливость формулы обращения (8.8) для непрерывного вейвлет-преобразования.

Рассмотрим основные свойства непрерывного вейвлет-преобразования.

Линейность. Поскольку непрерывное вейвлет-преобразование определяется как скалярное произведение сигнала и базисной функции, оно обладает свойством линейности:

если

$$s(t) = \sum_n \beta_n s_n(t),$$

то

$$CWT_s(a,b) = \sum_n \beta_n CWT_{s_n}(a,b).$$

Смещение сигнала на величину τ ведет к смещению вейвлет-образа на ту же величину. Действительно, пусть $s_\tau = s(t-\tau)$. Тогда

$$CWT_{s_\tau}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt =$$
$$[t-\tau=u]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(u)\psi\left(\frac{u+\tau-b}{a}\right)du = CWT_s(a, b-\tau).$$

Масштабирование сигнала приводит к масштабированию его вейвлет-образа. Пусть сигнал $s(t)$ подвергнут масштабному преобразованию, $s_\gamma(t) = s(\gamma t)$. Тогда

$$CWT_{s_\gamma}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(\gamma t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt =$$
$$[\gamma t=u]$$

$$= \frac{1}{\gamma\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(u)\psi\left(\frac{u-\gamma b}{\gamma a}\right)du = CWT_s(\gamma a, \gamma b).$$

Отсюда следует, что при масштабном преобразовании аргумента сигнала параметры a и b его вейвлет-образа под-

вергаются такому же масштабированию: γa, γb. При этом вейвлет-образ делится на коэффициент масштабного преобразования.

Дифференцирование. Пусть вейвлет-образ сигнала $s(t)$ есть $CWT_s(a, b)$. Найти вейвлет-преобразование производной сигнала $s^{(n)}(t) = \dfrac{d^n}{dt^n} s(t)$:

$$CWT_{s^{(n)}}(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^n}{dt^n} s(t) \right] \psi\left(\frac{t-b}{a} \right) dt =$$

$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{d^n}{dt^n} \psi\left(\frac{t-b}{a} \right) dt. \qquad (8.12)$$

Формула (8.12) легко доказывается последовательным выполнением интегрирования по частям. Из (8.12) следует, что для выявления особенностей сигнала, связанных с его производной соответствующего порядка, можно воспользоваться дифференцированием вейвлета. При этом не имеет значения, что дифференцировать: вейвлет или сам сигнал. Кроме того, из (8.12) и инвариантности вейвлет-преобразования относительно смещения сигнала следует коммутативность дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} CWT_s(a,b) = CWT_{s'}(a,b),$$

где $s' = ds/dt$.

Теорема Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 \, dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{1}{a^2} |CWT_s(a,b)|^2 \, da db. \qquad (8.13)$$

Теорема Парсеваля отражает закон сохранения энергии. Для доказательства выполним преобразование в правой части равенства (8.13):

$$\frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{1}{a^2} |CWT_s(a,b)|^2 \, da db =$$

$$= \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(a\omega) s(\omega) e^{jb\omega} d\omega \right|^2 db \right\} \frac{da}{a^2}.$$

Введем обозначение $U(\omega) = \psi^*(a\omega)s(\omega)$. Тогда

$$\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(\omega)e^{jb\omega}d\omega\right|^2 db\right\}\frac{da}{|a|} =$$

$$= \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|U(b)|^2\,db\right\}\frac{da}{|a|} = \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|U(\omega)|^2\,d\omega\right\}\frac{da}{|a|}.$$

Здесь мы воспользовались обобщенной формулой Рэлея и ввели переобозначение $b \to \omega$. Подставляя в полученное выражение $U(\omega)$ и учитывая (8.13), находим

$$\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi^*(a\omega)|^2|s(\omega)|^2\,d\omega\right\}\frac{da}{|a|} =$$

$$= \frac{1}{2\pi C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}|s(\omega)|^2\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\psi^*(a\omega)|^2}{|a|}da = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|s(\omega)|^2\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|^2\,dt,$$

что и требовалось доказать.

Локальность базисной функции $\psi_{a,\,b}(t)$ вейвлет-преобразования отражает концентрацию ее энергии в координатном и частотном пространствах. Это свойство оценивается вторыми центральными моментами функций $|\psi_{a,\,b}(t)|^2$ и $|\psi(\omega)|^2$. Корень квадратный из этих величин характеризует область наибольшей энергии этих функций.

Пусть m_t и σ_t^2 — первый и второй центральные моменты функции $|\psi(t)|^2$:

$$t_0 = \frac{1}{\|\psi\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}t\,|\psi_{a,b}(t)|^2\,dt; \quad \sigma_t^2 = \frac{1}{\|\psi\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}(t-m_t)^2\,|\psi_{a,b}(t)|^2\,dt.$$

Для первого момента m_t базисной функции получаем

$$m_t = \frac{1}{a\,\|\psi\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}t\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|^2 dt =$$

$$\left[\frac{t-b}{a}=u\right]$$

$$= \frac{a}{\|\psi\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}u\,|\psi(u)|^2\,du + b\frac{1}{\|\psi\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(u)|^2\,du = b + at_0. \qquad (8.14)$$

Из (8.14) следует, что первый момент (центр тяжести) базисной функции $|\psi_{a,\,b}(t)|^2$ зависит от масштаба a. Растяжение базисной функции (увеличение a) ведет к увеличению расстояния между центрами тяжести базисных функций при заданном смещении b.

Найдем второй центральный момент базисной функции $|\psi_{a,\,b}(t)|^2$:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|\psi\|^2}\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}(t-b-at_0)^2\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|^2 dt =$$

$$= \frac{a}{\|\psi\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{t-b}{a}-t_0\right)^2\left|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right|^2 dt =$$

$$\left[\frac{t-b}{a}=u\right]$$

$$= \frac{a^2}{\|\psi\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}(u-t_0)^2\,|\psi(u)|^2\,du = a^2\sigma_t^2.$$

Следовательно, базисная функция $|\psi_{a,\,b}(t)|^2$ в координатной (временно́й) области локализована в окне, радиус которого равен $a\sigma_t$ и соответственно ширина $2a\sigma_t$. Таким образом, функция $|\psi_{a,\,b}(t)|^2$ локализована во временно́м окне, ограниченном интервалом

$$[b + at_0 - a\sigma_t,\, b + at_0 + a\sigma_t]$$

в окрестности точки $\tilde{t} = b + at_0$.

Отсюда можно сделать вывод, что значение сигнала $s(t)$ в точке t_0 влияет на значение коэффициента $CWT_s(a,\,b)$ в большем временно́м диапазоне с ростом масштаба a. Область этого влияния ограничена в плоскости $(a,\,b)$ так называемым углом влияния, как это показано на рис. 8.8. Соответственно коэффициент $CWT_s(a,\,b)$ в точке $(a_0,\,b_0)$ будет определяться значением сигнала $s(t)$ в окрестности точки b_0, ограниченный таким же углом влияния (рис. 8.8*б*). Для вейвлет-анализа сигнала

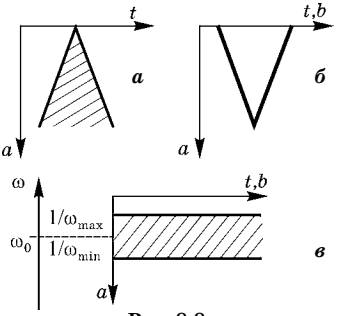


Рис. 8.8

это означает, что мелкомасштабные особенности сигнала $s(t)$ проявляются при малых значениях масштаба a. С ростом a мелкомасштабные вариации сигнала $s(t)$ сглаживаются, но при этом подчеркиваются крупномасштабные особенности.

Рассмотрим реализацию базовой функции $\psi(t)$ в частотном пространстве. Пусть ω_0 и σ_ω^2 соответственно первый и второй центральные моменты фурье-спектра вейвлета $\psi(\omega)$. Функция $\psi(\omega)$ принимает смысл частотного коэффициента передачи полосового фильтра с центральной частотой ω_0 (рис. 8.8*в*). Введем базовую функцию в частотном пространстве $\psi(a\omega - \omega_0)$, имеющую нулевое среднее значение и полуширину σ_ω. Тогда вейвлет-преобразование в частотном пространстве можно представить по аналогии с (8.9) как

$$CWT_s(a,b) = \frac{a\sqrt{a}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)\psi^*\left[a\left(\omega - \frac{\omega_0}{a}\right)\right]e^{jb\omega}d\omega. \qquad (8.15)$$

Фурье-спектр вейвлета $\psi(a\omega - \omega_0) = \psi(a\omega)$ имеет ширину ω_0/a. Следовательно, вейвлет-преобразование в частотном пространстве (8.15) дает информацию о спектре сигнала $s(\omega)$, локализованную в окрестности точки ω_0/a в частотном интервале

$$\left[\frac{\omega_0}{a} - \frac{\sigma_\omega}{a},\ \frac{\omega_0}{a} + \frac{\sigma_\omega}{a}\right].$$

В этом интервале отношение центральной частоты ω_0/a к ширине окна $2\omega_0/a$ остается инвариантным при любых значениях масштаба a, равным $\omega_0/2\sigma_\omega$.

Площадь частотно-временно́го окна при вейвлет-анализе определяется произведением ширины окна в координатном пространстве на ширину окна в частотном пространстве и не зависит от параметра a:

$$2a\sigma_t\frac{2\sigma_\omega}{a} = 4\sigma_t\sigma_\omega.$$

Постоянство площадей частотно-временно́го окна, составляющего элементарную ячейку на информационной диаграмме, есть отличительная особенность вейвлет-пре-

образования, отражающая самоподобие базовой функции при изменениях параметров масштаба и сдвига. При этом форма окна зависит от a. Увеличение масштаба ведет к растяжению окна по временно́й шкале, что эквивалентно увеличению разрешения по частотной оси и снижению — по координатной. При уменьшении частотного коэффициента a происходит сжатие окна по координатной оси и растяжение — по частотной. Это приводит к снижению разрешения по частоте и увеличению по временно́й шкале. Вейвлет-преобразование обладает адаптивным частотно-временны́м (частотно-координатным) окном, сжатым на малых масштабах и растянутым на больших. На рис. 8.9 показана локализация окон в частотно-временно́м пространстве при вейвлет-анализе в зависимости от изменения параметра a.

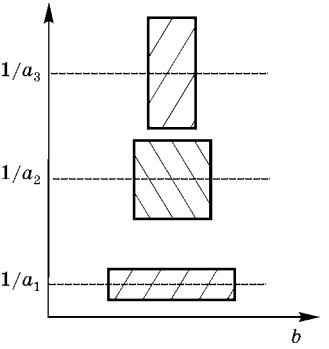


Рис. 8.9

Требование самоподобия базисной функции является ключевым для вейвлет-анализа. Например, широко используемая при оконном преобразовании Фурье функция Габора этому требованию не удовлетворяет. Действительно, функция Габора

$$\psi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[j\omega_0(t-\tau)] \exp\left[-\frac{(t-\tau)^2}{2\sigma^2}\right]$$

представляет собой модифицированную функцию Гаусса, характеризуемую параметрами τ, ω_0 и σ^2. Разложение по функциям Габора является разложением по модифицированным фрагментам синусоид, длина которых для всех частот постоянна. Это дает различное число осцилляций для разных гармоник. Следовательно, построенный на основе функции Габора базис не обладает свойством самоподобия и не может применяться при вейвлет-анализе сигналов.

Рассмотрим примеры применения вейвлет-анализа к некоторым простейшим сигналам. Вейвлет-анализ

энергетических характеристик сигнала основывается на равенстве Парсевала (8.13). Согласно этому равенству для энергии физического сигнала можно записать

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int W^2(a,b)\frac{dadb}{a^2}. \qquad (8.16)$$

Здесь $W^2(a, b)$ имеет смысл энергетического вейвлет-спектра сигнала. Зная энергетический вейвлет-спектр сигнала (вейвлет-спектральную плотность энергии) можно получить локализованные энергетические характеристики. Например, локальный энергетический спектр $W(a, t_0)$ определяется как

$$W_s^2(a,t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_s^2(a,t_0)\delta\left(\frac{b-t_0}{a}\right)db.$$

Здесь используется фильтрующее свойство δ-функции.

Распределение энергии сигнала по масштабам определяется через энергетический вейвлет-спектр:

$$E_{sW}(a) = \int W_s^2(a,b)db.$$

Распределение энергии сигнала по масштабам получило название *глобальный спектр энергии*. Его также называют *скейлограммой* или *дисперсией вейвлет-преобразования*.

Рассмотрим примеры применения вейвлет-преобразования к некоторым простейшим сигналам. На рис. 8.10 показан сигнал $s(t) = \sin(0{,}08\pi t)$, его образ и линии локальных максимумов. Сигнал представляет собой синусоиду, период которой $T = 25$ и длительность 20 периодов (рис. 8.10*а*). Вейвлет-коэффициенты $CWT_s(a, b)$ показаны в виде проекций на плоскость (a, b). По оси абсцисс отложено время (b), по оси ординат — временно́й масштаб (a), который линейно растет вниз. Светлые области соответствуют положительным, а темные — отрицательным значениям $CWT_s(a, b)$. Оттенками серого цвета в каждой области выделены диапазоны значений $CWT_s(a, b)$. Картины линий локальных экстремумов представлены в тех же координатах. Результаты получены с применением MHAT-вейвлета («мексиканская шляпа»). На картинках локальных

максимумов показан так называемый «*треугольник достоверности*», ограниченный углом влияния.

Верхняя часть вейвлет-спектра (рис. 8.10*б*) отображает периодический характер сигнала. Ниже введены темные и светлые крупномасштабные детали, связанные с граничными эффектами. На рис. 8.10*в* представлены линии локальных экстремумов (максимумов). Они расположены внутри треугольника достоверности. Периодичность появления локальных максимумов указывает на одночастотность сигнала, ограниченного анализируемым временны́м интервалом. Об этом же свидетельствует штриховая структура скейлограммы в нижней части треугольника достоверности. Более наглядно вейвлет-образ сигнала выглядит в трехмерном пространстве, где две оси отражают соответственно частотную (*а*) и временну́ю (*в*) шкалы, а третья — амплитуду (или интенсивность) компоненты вейвлет-спектра.

На рис. 8.11*а* и 8.12*а* показаны различные комбинации сигналов $s_1(t) = \sin(0{,}04\pi t)$ и $s_2(t) = \sin(0{,}08\pi t)$. Сигнал на рис. 8.11 представляет собой сумму сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

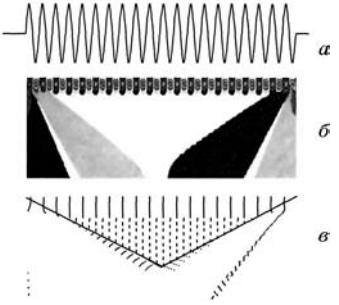


Рис. 8.10

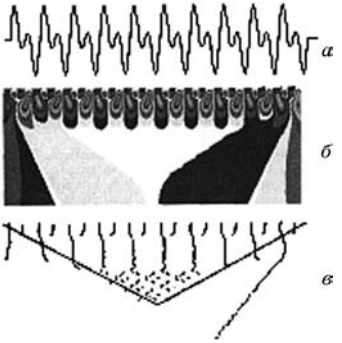


Рис. 8.11

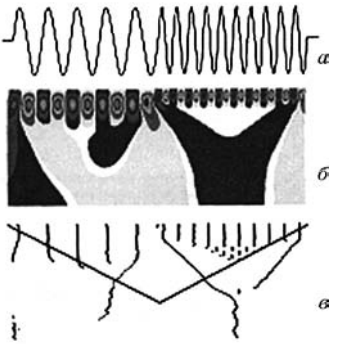


Рис. 8.12

Сигнал на рис. 8.12 является последовательной комбинацией сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$:

$$s_1(t)[1 - \sigma(t - \tau)] + s_2(t)\sigma(t - \tau).$$

Фурье-спектры суммарной и последовательной комбинаций $s_1(t)$ и $s_2(t)$, полученные с помощью обычного преобразования Фурье, неразличимы, а вейвлет-спектры оказываются очень разными. Это различие хорошо видно из рис. 8.11 и 8.12. На рис. 8.11*б*, *в* показано вейвлет-преобразование суммы $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Вейвлет-преобразование последовательно включенных $s_1(t)$ и $s_2(t)$ представлено на рис. 8.12*б*, *в*.

8.3. ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ОПТИКЕ

Обычный путь вейвлет-преобразования сигнала в оптике заключается в записи сигнала и последующей компьютерной обработке. Проблема реализации оптического процессора, работающего в реальном времени, заключается в синтезе подходящего вейвлета для анализа пространственного сигнала.

Впервые реализация оптического вейвлет-преобразования в реальном времени была описана в [19]. В качестве базисной функции был выбран вейвлет Морле

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\Lambda^2}\right)\exp(jKx), \tag{8.17}$$

где $K = 2\pi/\Lambda$. Пространственный период Λ высокочастотной несущей вейвлета здесь выполняет роль масштаба a. Примерный вид такой базисной функции показан на рис. 8.13, где реальная и мнимая части вейвлета Морле показаны соответственно сплошной и пунктирной линиями. В описываемом процессоре для формирования вейвлета Морле используются методы акустооптики.

На рис. 8.14 показана упрощенная схема вейвлет-процессора, предназначенного для анализа амплитудно-фазовой структуры различных фазовых сред. Лазерный луч, преобразованный с помощью анаморфотной системы в сходящийся клиновидный пучок s_i, направляется в зону

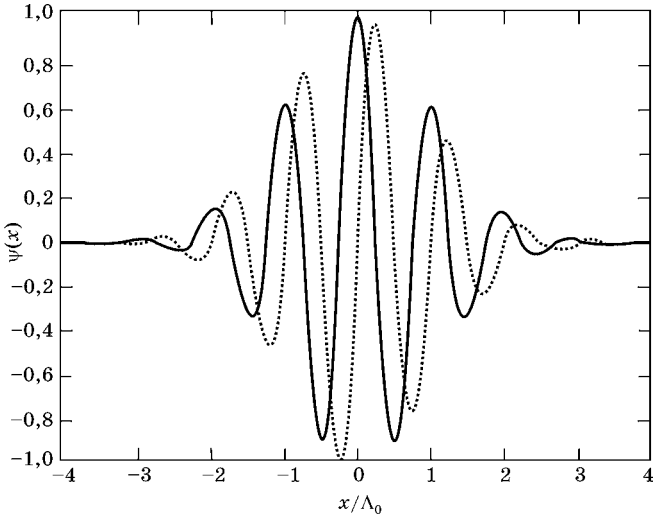


Рис. 8.13

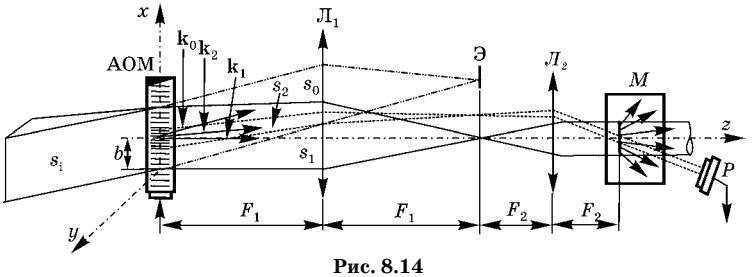


Рис. 8.14

акустооптического взаимодействия модулятора *АОМ*. Акустическое поле в модуляторе трансформируется в фазовую дифракционную решетку. Вектор этой решетки направлен по оси x. Поперечный размер перетяжки (в направлении оси y) клиновидного светового пучка выбирается равным минимальному значению масштаба a базисной функции вейвлета, ориентированного по оси x.

В результате дифракции клиновидного светового пучка s_i на динамической фазовой решетке формируется дифракционное поле. В структуре этого поля содержатся несколько пучков. Один из них, пучок s_1 с волновым вектором $\mathbf{k}_1$, получается в результате дифракции на ультразвуковой

волне, которая генерируется в *АОМ* непрерывно и имеет частоту Ω_1. Другой световой пучок s_2 с волновым вектором $\mathbf{k}_2$ образуется при дифракции светового поля на движущемся в *АОМ* ультразвуковом цуге W. На базе светового пучка s_2 формируется оптический вейвлет Морле. Частота Ω_2 ультразвукового цуга W выбирается из условия $\Omega_2 = \Omega_1 - \Omega_W$, где Ω_W — частота несущей вейвлета Морле. Нулевой порядок дифракции s_0 светового пучка s_i с волновым вектором k_0 блокируется экраном Э.

Оптическая система, состоящая из объективов $Л_1$ и $Л_2$, формирует в исследуемой среде «оптический зонд», состоящий из уменьшенных в $\Gamma = F_1/F_2$ раз изображений перетяжки пучка s_1 и изображения сканирующего вейвлета. Пучок s_1 рассеивается в исследуемой среде M. На светочувствительной поверхности фотоприемника P формируется суперпозиция рассеянного светового поля, ограниченного угловой апертурой фотоприемника и светового пучка s_2. Фотоприемник выполняет оптическое смешение рассеянного поля и вейвлета Морле, в результате чего в фотоэлектрическом токе появляется составляющая, отображающая вейвлет-преобразование рассеянного поля. Согласно пространственным условиям гетеродинирования, оптическое смешение выполняется в области, ограниченной площадкой когерентности. В свою очередь эта площадка равна сечению преобразованного линзами $Л_1$ и $Л_2$ светового пучка s_2, выполняющего функцию опорного пучка при оптическом гетеродинировании, являющегося к тому же коллинеарным. Коллинеарность оптического гетеродинирования следует из совмещения опорного пучка с рассеянным в пространстве, ограниченном площадкой когерентности и расходимостью светового поля s_2.

Рассмотрим подробнее акустооптический способ формирования вейвлета Морле. На рис. 8.15*а* приведена схема формирования светового зонда, содержащего световые пучки s_1 и s_2 в пространстве волновых векторов. Здесь $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_0$ — волновой вектор клиновидного светового пучка s_i, взаимодействующего с ультразвуковым полем в акустооптическом модуляторе; $\mathbf{K}_1$ — вектор ультразвуковой фазовой решетки, индуцированной в светозвукопроводе *АОМ* ультразву-

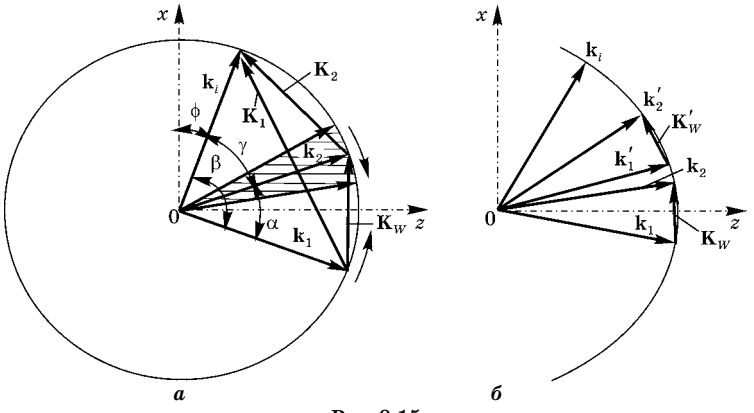


Рис. 8.15

ковой волной с частотой Ω_1, $K_1 = 2\pi/\Lambda = = \Omega_1/V$, где Ω_1 и V — круговая частота и скорость непрерывного ультразвукового поля; $\mathbf{k}_1$ — волновой вектор светового пучка, образованного в результате брэгговской дифракции на непрерывной ультразвуковой волне с частотой Ω_1, $k_1 = k_i = k = 2\pi/\lambda$; $\mathbf{K}_2$ — волновой вектор ультразвукового цуга с гауссовой огибающей, задающей структуру вейвлета Морле, $K_2 = 2\pi/\Lambda_2 = = \Omega_2/V$, $\mathbf{K}_W$ — вектор звуковой решетки, соответствующей разности векторов непрерывной звуковой решетки и решетки, соответствующей несущей ультразвукового цуга,

$$\mathbf{K}_W = \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2 = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, \quad K_W \approx \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)}{V},$$

где $\mathbf{k}_2$ — волновой вектор световой волны, дифрагированной на ультразвуковом цуге с вектором решетки $\mathbf{K}_2$, $k_2 = k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, $\beta \ll 1$, $\phi = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$ $\varphi \ll 1$.

Частотный сдвиг в световом пучке, дифрагированном на бегущей ультразвуковой волне, возникает из-за эффекта Доплера. Доплеровский сдвиг частоты в свете, рассеянном на движущейся со скоростью V оптической неоднородности, определяется скалярным произведением вектора скорости на разность волновых векторов рассеянного и падающего световых пучков. Отсюда для световых пучков с волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, входящих в структуру «оптического зонда», имеем

$$\mathbf{V}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_1) = \mathbf{v}\mathbf{K}_1 = \Omega_1,$$
$$\mathbf{V}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_2) = \mathbf{v}\mathbf{K}_2 = \Omega_2.$$

Здесь $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_i + \mathbf{K}_1$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_i + \mathbf{K}_2$; Ω_1 — частота непрерывной ультразвуковой волны с волновым вектором $\mathbf{K}_1$, Ω_2 — частота несущей ультразвукового вейвлет-цуга с волновым вектором $\mathbf{K}_1$. Отсюда $\mathbf{v}(\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2) = \Omega_1 - \Omega_2$.

Обратимся к материнскому вейвлету Морле (8.17) и представим его в виде

$$\psi(x) = \exp\left(-\frac{1}{8\pi^2} K_W^2 x^2\right)\exp(jK_W x). \qquad (8.18)$$

Двухпараметрическая функция, следующая из (8.17), имеет вид

$$\psi_{a,b}(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right]\exp\left[j2\pi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right], \qquad (8.19)$$

где $a = \Lambda$, $b = Vt$. Подстановка в (8.19) $a = 2\pi/K_W$ и $b = Vt$ дает

$$\psi_{a,b}(x) = \exp\left\{-\frac{1}{8\pi^2}[K_W^2(x-Vt)^2]\right\}\exp[jK_W(x-Vt)] =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{8\pi^2}[K_W^2(x-Vt)^2]\right\}\exp[j(K_W x - \Omega t)], \qquad (8.20)$$

где $K_W = K_1 - K_2$ и $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$. Фазовая решетка, индуцированная в светозвукопроводе ультразвуковым цугом W, описывается выражением, аналогичным (4.49):

$$n = n_0 + \Delta n\cos(K_2 x - \Omega_2 t), \qquad (8.21)$$

где $\Omega_2 = K_2 V$.

На этой решетке с апертурой, определяемой огибающей цуга, дифрагирует клиновидный световой пучок, перетяжка которого вытянута по направлению бегущей ультразвуковой волны. Для описания дифрагированного на решетке светового поля воспользуемся выражением (4.52), введя в него апертурную функцию

$$\exp\left[-\frac{1}{8\pi^2} K_W^2 (x-Vt)^2\right]:$$

$$E_2(\gamma) = l\sin c\left[\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right]\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{8\pi^2}K_W^2(x-Vt)^2\right]\times$$
$$\times\exp\left[j\frac{kl}{2}(\cos\varphi + \cos\theta)\right]\exp[jk_0x(\sin\theta - \sin\varphi)]dx. \tag{8.22}$$

Здесь $\theta = \varphi + \gamma$. Воспользуемся разложением в ряд:

$$\exp[j\xi\cos(K_2x - \Omega_2t)] = \exp\left[j\xi\sin\left(\frac{\pi}{2} + K_2x - \Omega_2t\right)\right] =$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty}J_q(\xi)\exp\left[jq\left(K_2x - \Omega_2t + \frac{\pi}{2}\right)\right]. \tag{8.23}$$

После подстановки в интегральное выражение (8.22) $k = k_0n$ с учетом (8.21) и (8.23), $\varphi \ll 1$ и $\theta \ll 1$, получаем

$$E_2(\gamma) = l\exp\left[j\frac{kl}{2}(\cos\varphi + \cos\theta)\right]\sin c\left[\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right]\times$$
$$\times\sum_{-\infty}^{\infty}J_q(\xi)\exp\left[jq\left(K_2x - \Omega_2t + \frac{\pi}{2}\right)\right]\exp\left[-\frac{1}{8\pi^2}K_W^2(x-Vt)^2\right]\times$$
$$\times\exp[jk_0x(\sin\theta - \sin\varphi)] =$$
$$= l\exp(jkl)\sum_{-\infty}^{\infty}j^qJ_q(\xi)\exp(-jq\Omega_2t)\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{8\pi^2}K_W^2(x-Vt)^2\right]\exp\{jx[k_0\gamma + qK_2]\}, \tag{8.24}$$

где $\xi = k_0\Delta nl$. Поскольку выполняется брэгговский режим дифракции ($q = -1$), $K_2 - \gamma k_0 = 0$, выражение (8.24) для дифрагированного поля принимает вид

$$E_2(\gamma) = jl\exp[jkl]J_1(\xi)\exp\left[-\frac{1}{8\pi^2}K_W^2(x-Vt)^2\right]\exp(j\Omega_2t). \tag{8.25}$$

Дифрагированное на ультразвуковом волновом цуге поле (8.25) переносится оптической системой в исследуемую среду с коэффициентом уменьшения $\Gamma = F_1/F_2$. Подстановка x/Γ, K_W/Γ и V/Γ оставляет выражение (8.25) с точностью до постоянного комплексного коэффициента в неизменном виде:

$$E_2(\gamma) = J_1(\xi)\exp\left[-\frac{1}{8\pi^2}K_W^2(x-Vt)^2\right]\exp(j\Omega_2t). \tag{8.26}$$

Световое поле (8.26) является одной из составляющих вейвлет-зонда (8.20).

Другая составляющая оптического вейвлета образуется в модуляторе при дифракции клиновидного лазерного пучка на непрерывной ультразвуковой волне с частотой Ω_1.

Выражение для фазовой решетки, индуцированной ультразвуковой волной в светозвукопроводе, аналогично по структуре выражению (8.21):

$$n = n_0 + \Delta n \cos(K_1 x - \Omega_1 t).$$

На этой решетке дифрагирует гауссов пучок с перетяжкой, ориентированный вдоль ультразвуковой волны с частотой Ω_1. Радиус перетяжки в направлении вектора фазовой решетки $\mathbf{K}_1$ равен w_0. По аналогии с (8.22) запишем выражение для дифрагированного поля $E_1(\beta)$, в котором профиль сечения гауссова пучка в плоскости перетяжки выполняет роль апертурной функции:

$$E_1(\beta) = j\,\mathrm{sinc}\left[\frac{kl}{2}(\cos\varphi - \cos\theta)\right]\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)\times$$

$$\times\exp\left[j\frac{kl}{2}(\cos\varphi + \cos\theta')\right]\exp[jk_0 x(\sin\theta' - \sin\varphi)], \qquad (8.27)$$

где $\theta' = \varphi + \beta$. Используя разложение в ряд (8.23)

$$\exp[j\xi\cos(K_1 x - \Omega_1 t)] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(\xi)\exp\left[jq\left(K_1 x - \Omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

преобразуем (8.27) по аналогии с (8.24) к виду

$$E_1(\beta) \approx l\exp(jkl)\sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(\xi)\exp\left[jq\left(-\Omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right)\exp\{jx[k_0\beta + qK_1]\}. \qquad (8.28)$$

В брэгговском пределе дифракции, делая подстановку $q = -1$, $k_0\beta - K_1 = 0$ в (8.28), имеем

$$E_1(\beta) = jl\exp(jkl)J_1(\xi)\exp(j\Omega_1 t)\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right). \qquad (8.29)$$

Выбирая размер перетяжки w_0 лазерного пучка много большей апертуры модулятора по оси x, получаем

$$E_1(\beta) = jl\exp(jkl)J_1(\xi)\exp(j\Omega_1 t). \qquad (8.30)$$

Поле (8.30), дифрагированное на непрерывной ультразвуковой волне с частотой Ω_1, переносится оптической системой в исследуемую среду с коэффициентом уменьшения $\Gamma = F_1/F_2$. Масштабное преобразование светового поля (8.30) с коэффициентом Γ оставляет выражение (8.30) с точностью до постоянного комплексного коэффициента в неизменном виде:

$$E_1(\beta) = J_1(\xi)\exp(j\Omega_1 t). \qquad (8.31)$$

Световое поле (8.31), как и световое поле (8.26), является компонентой оптического вейвлет-зонда, сформированного в исследуемой среде.

На рис. 8.15*а* заштрихована область, в пределах которой может изменяться волновой вектор $\mathbf{k}_2$ при изменении светового пучка s_2, дифрагированного на ультразвуковом цуге. Как видно из рис. 8.15*а*:

$$K_W = 2k\sin(\alpha/2).$$

В приближении малого угла α

$$K_W \approx k\alpha.$$

Соответственно

$$K_1 = 2k\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\right] \approx k(\alpha+\gamma);$$

$$K_2 = 2k\sin\frac{\gamma}{2} \approx k\gamma.$$

Отсюда получаем (в приближении малых углов):

$$\alpha = \frac{K_1}{k} - \gamma = \frac{1}{k}(K_1 - K_2) = \frac{1}{kV}(\Omega_1 - \Omega_2).$$

Изменяя частоты ультразвуковой решетки Ω_1 и ультразвукового цуга Ω_2, можно изменять частоту несущей светового вейвлет-зонда. В зависимости от способа такого изменения можно осуществлять сканирование составляющих

пространственной частоты по оси x либо по осям x и z одновременно.

При сканировании зонда только по x-составляющей пространственной частоты изменения частот Ω_1 и ультразвукового цуга Ω_2 должны иметь разный знак, причем необходимым условием изменений частот Ω_1 и Ω_2 должно быть

$$(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_1) \| 0Z \quad \text{при} \quad (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1)(\mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_1) = 0.$$

Для реализации режима одновременного сканирования по осям x и z необходимо вектор решетки $\mathbf{K}_W$, соответствующий пространственной частоте оптического зонда, повернуть вокруг центра вращения 0, как это показано на рис. 8.15*б*. Поворот достигается путем изменения частот Ω_1 и Ω_2 таким образом, чтобы выполнялось условие $\Omega_1 - \Omega_2 = \text{const}$, что соответствует условию сохранения угла α. При этом вектор $\mathbf{K}_W$ перемещается в положение $\mathbf{K}'_W$, и у него появляется составляющая по оси z. Этой составляющей можно управлять, изменяя положение волновых векторов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ в диапазоне рабочих частот акустооптического модулятора.

На рис. 8.16 показана конфигурация световых пучков в исследуемой среде. Конфигурация представлена в пространстве волновых векторов. Исследуемая среда освещается лазерной плоскостью, волновой вектор которой $\mathbf{k}_1$. Световое поле, рассеянное в этой среде, несет информацию о ее структуре. Рассеянное поле сканируется оптическим вейвлетом с волновым вектором $\mathbf{k}_2$. Угловой диапазон сканирования заштрихован. Этот диапазон не превышает угловой апертуры фотоприемника, выполняющего коллинеарное оптическое гетеродинирование рассеянного света, в котором оптический вейвлет используется в качестве опорного пучка. Разность волновых векторов

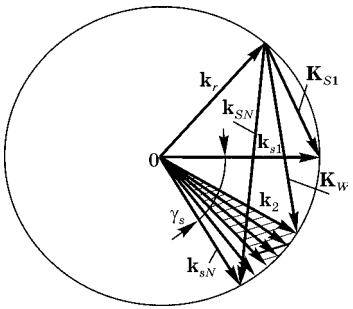


Рис. 8.16

$\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 = \mathbf{K}_W$ представляет собой вектор сканирующей решетки оптического зонда, спроектированной в исследуемую среду. Световое поле, рассеянное исследуемой средой от падающего пучка с волновым вектором $\mathbf{k}_1$, является сигналом, структура которого в координатно-частотном пространстве анализируется с помощью вейвлет-преобразования.

Световые пучки $E_2(\gamma)$ и $E_1(\beta)$ оптической системой, состоящей из линз Л$_1$ и Л$_{21}$, проецируются в исследуемую среду с коэффициентом передачи $\Gamma = F_1/F_2$ и описываются согласно (8.26) и (8.31) выражениями:

$$E_2(x,t) = A_2 \exp\left[-\frac{1}{8\pi^2} K_W^2 (x - Vt)^2\right] \exp(j\Omega_2 t);$$

$$E_1(t) = A_1 \exp(j\Omega_1 t). \qquad (8.32)$$

Световой пучок $E_1(t)$ рассеивается исследуемой средой. Световое поле, рассеянное в телесном угле, совмещенном с $E_2(x, t)$, представим в виде

$$s(x, t)E_1 = s(x, t)A_1 \exp(-j\Omega_1 t), \qquad (8.33)$$

где $s(x, t)$ — функция рассеяния.

На светочувствительной поверхности фотоприемника формируется суперпозиция двух пространственно-совмещенных пучков $E_2(x, t)$ и $s(x, t)$. Фотоприемник выполняет оптическое смешение световых полей $E_2(x, t)$ и $s(x, t)$. Площадка когерентности определяется угловой расходимостью пучка $E_2(x, t)$. Фототок пропорционален интенсивности результирующего светового поля на светочувствительной поверхности фотоприемника

$$i(t) = \rho |s(x, t)E_1(t) + s_2(x, t)|^2. \qquad (8.34)$$

Здесь ρ — коэффициент, учитывающий чувствительность и усиление фотоприемника. Выражение (8.34) записано в одномерном приближении, поскольку световые пучки $E_2(x, t)$ и $s(x, t)$ локализованы в одной плоскости. Структура фототока содержит низкочастотный пьедестал $i_p(t)$ и переменную составляющую i_W, частота которой равна разности частот Ω_1 и Ω_2:

$$i_W(x,t) = \frac{1}{2}\rho[s(x,t)E_1(t)s_2^*(x,t) + \text{К.С.}] =$$
$$= Bs(x,t)\exp\left[-\frac{1}{8\pi^2}K_W^2(x-Vt)^2\right]\cos[(\Omega_1-\Omega_2)t] =$$
$$= Bs(x,t)\exp\left[-\frac{1}{8\pi^2}K_W^2(x-Vt)^2\right]\cos\left(K_W Vt\right), \tag{8.35}$$

где К.С. — комплексное сопряжение; $B = \rho A_1 A_2$.

Выполним фурье-преобразование выражения (8.35):

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_W(x,t)\cos(K_W x)dx =$$
$$= B\int_{-\infty}^{\infty} s(x,t)\exp\left[-\frac{1}{8\pi^2}K_W^2(x-Vt)^2\right]\cos(K_W Vt)\cos(K_W x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}B\int_{-\infty}^{\infty} s(x,t)\exp\left[-\frac{1}{8\pi^2}K_W^2(x-Vt)^2\right]\cos[K_W(x-Vt)]dx +$$
$$+\frac{1}{2}B\int_{-\infty}^{\infty} s(x,t)\exp\left[-\frac{1}{8\pi^2}K_W^2(x-Vt)^2\right]\cos[K_W(x+Vt)]dx. \tag{8.36}$$

В (8.36) учитывается только первый интеграл, поскольку второй имеет несущую на частоте $2(\Omega_1 - \Omega_2)$ и отфильтровывается. Действительно,

$$\cos[K_W(x+Vt)] = \cos[K_W(x-Vt) + 2K_W Vt] =$$
$$= \cos[K_W(x-Vt) + 2(\Omega_1 - \Omega_1)t] =$$
$$= \cos[K_W(x-Vt)]\cos[2(\Omega_1-\Omega_1)t] -$$
$$- \sin[K_W(x-Vt)]\sin[2(\Omega_1-\Omega_1)t].$$

Первый интеграл в (8.36) представляет собой скалярное произведение функции $s(x)$ на вейвлет Морле. Следовательно, он описывает вейвлет-преобразование функции рассеяния исследуемой среды в заданной области:

$$CWT_s(a,b) = B\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx, \tag{8.37}$$

где, учитывая

$$Vt = b,\ (\Omega_1 - \Omega_2)t = K_W Vt = K_W b,\ K_W = 2\pi/\Lambda = 2\pi/a,$$

$$\psi_{a,b}(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right]\cos\left[2\pi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right].$$

Отсюда следует, что структура составляющей фототока несет полную информацию о вейвлет-спектре исследуемой среды в пределах сканируемой вейвлет-зондом области.

В рассматриваемой оптической системе диапазон масштабирования и быстродействия вейвлет-анализатора определяется в основном параметрами акустооптического модулятора. На рис. 8.17 показано на оси частот положение спектров основных сигналов, формирующих световой зонд с максимальной разрешающей способностью по пространственной координате. Введены обозначения: $\Delta\Omega_m$ — максимальная полоса частот управляющего напряжения *AOM*; Ω_{21m} — полоса частот, соответствующая максимальной частоте несущей вейвлета Морле; Ω_1 — частота напряжения, формирующего опорный световой пучок; Ω_2 — средняя частота спектра напряжения, формирующего огибающую вейвлета Морле; $2\Delta\Omega_W$ — ширина спектра огибающей вейвлета Морле по уровню e^{-2}.

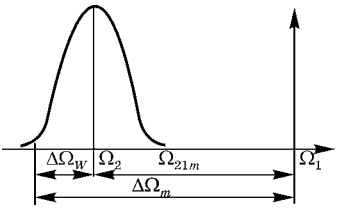


Рис. 8.17

Запишем выражение для вейвлета Морле в частотно-временно́й области:

$$\psi(t) = \exp\left[-\frac{1}{8\pi^2}\Omega_W^2 t^2\right]\exp(j\Omega_W t), \qquad (8.38)$$

где $\Omega_W = \Omega_{12} = \Omega_1 - \Omega_2$. Здесь учтено, что $\Lambda = V/\Omega_W$. Спектр огибающей вейвлета, соответствующий его максимальной частоте Ω_{Wm}, получается как фурье-преобразование огибающей в (8.38):

$$S_m(\omega) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\Omega_{Wm}}\exp\left[-2\pi^2\frac{\omega^2}{\Omega_{Wm}^2}\right].$$

Отсюда $\Delta\Omega_{Wm} = \frac{1}{\pi}\Omega_{Wm}$. С учетом этого для максимальной полосы частот управляющего напряжения *AOM*

$$\Delta\Omega_m = \Omega_{Wm} + \Delta\Omega_{Wm} = \Omega_{Wm} + \frac{1}{4}\Omega_{Wm} = \Omega_{Wm}\frac{(\pi+1)}{\pi}.$$

Длительность вейвлета Марле (8.38) по уровню e^{-2} амплитуды огибающей равна $\Delta t = 4\pi/\Omega_W$, наименьшее значение

$$\Delta t_{\min} = \frac{4\pi}{\Omega_{Wm}} = \frac{4(\pi+1)}{\Delta\Omega_{Wm}}.$$

Пусть t_a — апертурное время AOM, равное времени пробега ультразвуковой волны через световую апертуру модулятора. Тогда для максимального числа разрешаемых элементов получаем

$$N_{\max} = \frac{t_a}{\Delta t_{\min}} = \frac{t_a\Omega_{Wm}}{4(\pi+1)} = \frac{t_a 2\pi\Delta f_m}{4(\pi+1)} = \frac{t_a\pi\Delta f_m}{2(\pi+1)} = \frac{N_p\pi}{2(\pi+1)} = 0{,}4N_p, \tag{8.39}$$

где $N_p = t_a\Delta f_m$ — количество элементов сканирования (отклонения) оптического пучка, разрешаемых по критерию Рэлея. Поскольку $N_{min} = 1$, выражение (8.39) определяет диапазон масштабирования вейвлета Морле.

Быстродействие вейвлет-анализатора определяется максимальным числом пространственно разрешаемых элементов, сканируемых в единицу времени. Из (8.39) получаем

$$\xi = N_{max}/t_a = \Delta f_m\pi/4(\pi + 1) = 0{,}19\Delta f_m.$$

Здесь учтено, что для получения информации об амплитуде и фазе вейвлет-преобразования Марле, сканирование необходимо выполнять дважды.

Таким образом, оптическая схема, рассмотренная в этом разделе, реализует вейвлет-анализ структуры исследуемой среды посредством выполнения последовательности ряда операций, включая:

- генерацию в исследуемой области светового зонда, распределение амплитуды и фазы которого соответствует базисной функции Морле. Огибающая зонда определяется гауссовой огибающей ультразвукового волнового цуга, формируемого в AOM. Частота несущей зонда равна разности частот $\Omega_1 - \Omega_2 = \Omega_W$ световых пучков, дифрагированных на фазовых решетках, индуцирован-

ных в светозвукопроводе непрерывной ультразвуковой волной с частотой Ω_1 и волновым цугом с частотой Ω_2;
- смещение b зонда за счет смещения в светозвукопроводе ультразвукового цуга;
- масштабирование (сжатие-растяжение) вейвлет-зонда a за счет управления длительностью ультразвукового цуга W;
- оптическое смешение сканируемого светового зонда и светового поля, рассеянного в исследуемой среде посредством коллинеарного гетеродинирования;
- трансформацию пространственного вейвлет-спектра исследуемой среды в частотно-временно́й вейвлет-спектр фототока в процессе фотосмешения световых полей.

Применение методов акустооптического и гетеродинного фотоэлектрического преобразования световых полей в рассмотренной схеме позволяет синтезировать оптический вейвлет Морле, выполнять его масштабирование и сдвиг, осуществлять свертку вейвлета с исследуемым световым сигналом, несущим информацию о структуре исследуемой среды.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем отличается оконное преобразование Фурье от классического?
2. Каковы особенности преобразования Габора как частного случая оконного преобразования Фурье?
3. В чем заключается вейвлет-преобразование сигнала?
4. Чем отличаются прямое и обратное вейвлет-преобразования?
5. Какие основные свойства вейвлетов вы знаете?
6. Какую основную информацию о структуре сигнала дает вейвлет-анализ по сравнению с преобразованием Фурье?
7. Как реализуется вейвлет-преобразование в оптике с использованием акустооптических технологий?

ЗАДАЧИ

1. Выполните преобразование Габора сигнала

$$s(x) = \exp(-\alpha x^2) + \exp[-\beta(x - \xi)^2].$$

2. Найти преобразование Габора для сигнала

$$s(x) = \exp(-\alpha x^2) - \exp[-\beta(x - \xi)^2].$$

3. Найти вейвлет-спектр сигнала, указанного в задаче 1, используя вейвлет Морле.

4. Найти вейвлет-спектр сигнала, указанного в задаче 2, используя вейвлет Морле.

5. Сравнить преобразование Габора и вейвлет-спектры сигналов, полученные в задачах 1–4.

6. Используя вейвлет Морле, выполнить вейвлет-преобразование сигнала

$$s(x) = \exp(-\alpha x^2)\cos^2(K_0 x).$$

7. Используя вейвлет Морле, выполнить вейвлет-преобразование сигнала

$$s(x) = \exp(-\alpha x^2)\sin(2K_0 x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анго*, *А*. Математика для электро- и радиоинженеров. — М. : Наука, 1964. — 772 с.
2. *Арбузов*, *В. А*. Методы гильберт-оптики в измерительных технологиях / В. А. Арбузов, Ю. Н. Дубнищев. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. — 316 с.
3. *Астафьева*, *Н. М*. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физ. наук. — 1996. — Т. 166.
4. *Баскаков*, *С. И*. Радиотехнические цепи и сигналы. — М. : Высшая школа, 1981. — 536 с.
5. *Василенко*, *Г. И*. Голографические распознающие устройства / Г. И. Василенко, Л. М. Цибулькин. — М. : Радио и связь, 1985. — 310 с.
6. *Гудмен*, *Дж*. Введение в фурье-оптику. — М. : Мир, 1978. — 341 с.
7. *Джеррард*, *А*. Введение в матричную оптику / А. Джеррард, Дж. М. Бери. — М. : Мир, 1978. — 341 с.
8. *Дубнищев*, *Ю. Н*. Лазерные доплеровские измерительные технологии. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. — 414 с.
9. *Дубнищев*, *Ю. Н*. Колебания и волны. — Новосибирск : Сиб. универ. изд-во, 2004. — 328 с.
10. E:/вейвлет/ Основы вейвлет-анализа сигналов. — Л. В. Новиков.files/163/htm.
11. *Евтихеев*, *Н. Н*. Информационная оптика / Н. Н. Евтихеев, О. А. Евтихеева, И. Н. Компанеец [и др.] / под ред. Н. Н. Евтихеева. — М. : Изд-во МЭИ, 2000. — 611 с.
12. *Кольер*, *Р*. Оптическая голография / Р. Кольер, К. Беркхард, Л. Лин. — М. : Мир, 1973. — 686 с.
13. *Макс*, *Ж*. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях : В 2 т. — М. : Мир, 1983.
14. *Папулис*, *А*. Теория систем и преобразований в оптике. — М. : Мир, 1971. — 495 с.
15. *Поль*, *Р. В*. Оптика и атомная физика. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. — 552 с.
16. *Смоктий*, *О. И*. Методы теории систем и преобразований в оптике / О. И. Смоктий, В. А. Фабриков. — Л. : Наука, 1989. — 311 с.
17. *Сороко*, *Л. М*. Основы голографии и когерентной оптики. — М. : Наука, 1971. — 616 с.
18. *Сороко*, *Л. М*. Гильберт-оптика. — М. : Наука, 1981. — 160 с.
19. *Твердохлеб*, *П. Е*. Вейвлет-анализ оптических фазовых неоднородностей с использованием коллинеарного гетеродинирования / / Автометрия / П. Е. Твердохлеб, Ю. А. Щепеткин. — 2002. — № 1. — С. 58–69.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автомодельность *332*
Акустооптическое преобразование сигналов *181*
Апертура *314*
Анализ кратномасштабный *329*
Амплитуда *5*, *8*
Ансамбль статистический *282*

База сигнала *164*
Базис координатный *11*
— Котельникова *170*
— ортонормированный *14*

Вейвлет *331*, *333*, *338*, *341*
— преобразование *334*, *336*, *337*
— — оптическое *344*, *345*, *354*, *356*
— спектр *342*, *343*
Вектор волновой *63*
— решетки *181*, *345*, *352*
Взаимодействие фотон-фононное *188*, *190*
Видеоимпульс *8*
Видность *304*
Визуализация оптической плотности *255*
Волна плоская *63*
— сферическая *70*, *93*, *144*
Выброс положительный *292*
— отрицательный *292*
Выбросы случайного процесса *292*, *293*

Гауссов пучок *75*, *96*, *101*
— преобразование линзой *103*
— распространение *96*, *100*
— свойства *75*, *96*, *102*
Гильберт-фильтрация *215*, *233*, *237*
Гюйгенса–Френеля принцип *70*

Диаграмма информационная *179*
Дельта-коррелированность *287*, *303*
Дельта-функция *20*, *23*, *108*, *179*
Динамическое преобразование сигналов *18*
Дисперсия случайного сигнала *284*, *288*
— производной *290*, *293*
— вейвлет-преобразования *342*
Дифракция Брэгга *184*, *190*, *347*
— Рамана–Ната *186*, *187*, *190*
— Френеля *72*, *75*, *85*, *98*
— Фраунгофера *73*
Дифференцирование детерминированного сигнала *128*, *290*, *337*
— случайного процесса *289*
— фурье-спектра *77*, *85*, *88*
Доплеровский сдвиг частоты *165*, *188*, *299*, *347*
Дуальность оптических систем *112*

Зона Френеля *73*, *146*, *152*

Интеграл Дюамеля *56*
— Фурье *27*, *28*, *67*, *182*, *302*, *327*
Импульс *19*, *35*, *37*, *38*
Импульсный отклик *55*, *58*
— когерентный *80*
— некогерентный *308*, *313*, *315*
— свободного пространства *69*
— линзы *77*, *80*

Квазичастота *295*
Когерентность *303*, *305*, *306*
Корреляция *46*, *47*
Коэффициент корреляции *285*

Линза *77*, *79*
— дифракционная *144*, *151*
— дифракционно-рефракционная *152*
— киноформная *152*
Локатор лазерный корреляционный *296*, *300*

Математическое ожидание *283*
Микроскоп математический *330*
Модель математическая сигнала *7*, *9*, *24*, *62*
— системы *54*
Модулятор акустооптический *345*, *352*, *355*
Моментные функции случайного процесса *283*

Неравенство Коши–Буняковского *13*, *47*
— Шварца *13*, *156*, *160*, *241*
Норма сигнала *9*, *170*

Обратная связь *61*, *269*, *278*
Область свободной дисперсии *272*
Оператор системный *54*, *136*
— дифференцирования *32*, *56*, *196*
— Лапласа *257*, *266*
Оптическое смешение *316*, *346*, *353*

Параметр конфокальный *75*, *103*
Пластинка зонная *147*
— амплитудная *149*
— фазовая *149*
Плотность вероятности *282*
— гауссова (нормального) процесса *293*
— случайного сигнала *282*
— спектральная *26*, *28*
— видеоимпульса *38*
— знаковой функции *36*
— интеграла *32*
— периодического сигнала *35*, *37*
— произведения сигналов *33*
— производной сигнала *31*
— постоянного сигнала *34*
— радиоимпульса *37*
— функции включения *37*
— экспоненциального сигнала *34*, *38*
Плоскость Фурье *83*, *86*, *93*, *95*, *268*
— частотная *77*
Подавление фона *265*
Поле случайное *282*
Преобразование сигналов *5*
— акустооптическое *181*
— Ганкеля (Фурье–Бесселя) *126*, *133*, *136*, *140*, *165*
— — обобщенное *136*, *138*
— Гильберта *194*, *195*, *198*
— — двумерное *207*, *209*
— — одномерное *194*, *207*, *210*, *214*
— — изотропное *214*, *218*, *222*, *227*, *237*
— оптическое *81*, *89*, *104*, *344*
— — свойства *87*
— — с переменным масштабом *89*
— свойства *28*, *39*
— фотоэлектрическое *316*, *321*
— — гетеродинное *316*, *357*
— Фуко–Гильберта *209*
— — двумерное *211*
— — изотропное *231*
— Френеля *84*
— Фурье *27*, *68*
— — оконное *326*
Приближение параксиальное *63*
Принцип неопределенности *156*
— для двумерных сигналов *159*
Произведение скалярное *12*, *43*
Пространство сигналов *8*
— гильбертово *12*, *18*
Процедура Грама–Шмидта *17*
Процесс случайный *282*
— стационарный *289*
— эргодический *285*
Пятно Пуассона *155*

Равенство Парсеваля *129*, *216*
Радиоимпульс *8*
Радиус перетяжки *97*, *98*, *103*, *297*, *350*
Разложение Габора *179*
Распределение гауссово *96*
Решетка дифракционная *181*, *233*, *237*
Ряд *15*
— Котельникова *167*, *170*, *175*, *181*
— Фурье *17*, *24*
— — комплексный *26*
— — обобщенный *14*

Свертка *23*, *34*
Сигнал *7*
— аналитический *204*, *233*
— гармонический *15*, *57*
— детерминированный *7*
— дискретный *8*
— аналоговый *8*
— идеальный низкочастотный *167*, *245*
— импульсный *8*, *20*
— периодический *25*, *343*

— многомерный *7*
— оптический *62*, *159*,*164*, *207*
— случайный *7*, *282*, *301*
— сопряженный *195*, *205*
— цифровой *8*
Система линейная *54*
— многозвенная *60*
— оптическая *62*,*76*
— с обратной связью *61*
— согласованная *245*
— стационарная *55*
— — пространственно-инвариантная *76*
— — с линейным источником *104*, *112*
— — с когерентной обратной связью *269*, *278*
— — с кольцевым источником *141*, *227*, *230*, *237*
Солитон *331*
Соотношение неопределенностей *4*, *158*, *164*, *165*, *327*
Спектр *28*
— взаимный *44*, *50*
— угловой *66*, *68*, *69*, *73*, *183*, *186*, *236*, *269*, *316*
— Фурье *77*, *86*, *88*, *90*, *107*, *114*, *133*, *138*, *142*, *158*, *167*, *175*, *194*, *197*, *200*, *201*, *207*, *210*, *215*, *218*, *230*, *237*, *246*, *252*, *260*, *268*, *278*, *326*, *340*, *344*
— энергетический *44*, *47*, *50*, *62*, *198*, *254*, *265*, *267*, *288*, *303*, *342*
Степень когерентности *305*, *306*
Структура инормационная сигнала *178*

Теорема Винера–Хинчина *288–290*
— Котельникова *170*, *175*
— смещения *29*, *34*, *37*, *59*, *87*, *169*, *196*, *235*, *253*, *261*, *263*, *330*, *335*

Угол Брэгга *184*, *185*, *186*
Уравнение волновое
— взаимной корреляции *49*, *50*
— параксиальное *64–66*, *97*, *98*

Физическая реализуемость сигнала *31*,*49*,*165*
— системы *56*, *58*, *59*
Фильтр *261*
— Вандер Люгта *250*, *252*
— Гильберта *207*, *209*, *215*, *218*
— инверсный *253*, *254*, *267*, *279*, *280*
— согласованный *247*, *250*
— согласованно-избирательный *266*
— Фуко–Гильберта *210*, *212*
Фильтрация оптическая *259*
— инверсная *253*, *255*, *267*, *279*
— с когерентной обратной связью *269–271*, *274*, *276*, *278*
— согласованная *241*, *244*, *248*, *250*, *266*
— согласованно-избирательная *264*, *266*, *267*
Формула обобщенная Рэлея *43*
— Парсеваля *129*
— суммирования Пуассона *175*, *178*, *264*
— Эйри *271*
Фокусное расстояние *79*, *81*, *141*, *151*
— зонной пластинки *150*
— линзы *86*, *259*
Фонон *189*, *190*
Фотон *189*
Фотосмешение *318*, *321–323*
Функция знаковая *36*
— Бесселя *122*
— включения *19*
— корреляционная *46*, *49*
— корреляционная системы *62*
— когерентности *303*, *305*
— моментная *283*
— обобщенная *22*
— — оптическая передаточная *309*, *314*, *315*
— передаточная когерентная *68*, *77*, *85*, *135*, *207*, *209*, *214*, *222*, *224*, *234*, *237*, *246*, *250*, *254*, *262*, *266*, *269*, *271*

Характеристика амплитудно-частотная *58*
— переходная *56*
— фазочастотная *58*, *59*

Частота *69*
— пространственная *25*, *31*, *69*, *72*, *77*, *352*
Частотный коэффициент передачи *57*, *60*, *61*, *253*, *271*
— мощности *62*, *271*, *272*, *275*, *278*

Шаг дискретизации *8*
Шум белый *289*

Элемент дифракционный оптический *152*
Эргодичность *285*

Ячейка Габора *179*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 5

Глава первая
Основные понятия и способы описания сигналов 7
1.1. Основные виды сигналов 7
1.2. Линейное пространство сигналов 8
1.3. Динамическое представление сигналов 18
1.4. Фурье-преобразование сигнала и его свойства 25
1.5. Энергетические и корреляционные характеристики сигналов 43

Глава вторая
Элементы теории линейных систем в оптике 54
2.1. Понятие о линейных системах 54
2.2. Пространство как линейная система, преобразующая оптический сигнал 62
2.3. Линза как квадратичный фазовый фильтр 75
2.4. Оптическое преобразование Фурье 81
2.5. Оптическое преобразование Фурье с переменным масштабом 89
2.6. Гауссовы пучки и их распространение 96
2.7. Оптическое преобразование Фурье с линейным источником 104
2.8. Дуальность оптических систем 112

Глава третья
Преобразование Ганкеля 122
3.1. Функции Бесселя и их свойства 122
3.2. Преобразование Ганкеля в оптике и его связь с преобразованием Фурье 126
3.3. Свойства преобразования Ганкеля 128
3.4. Обобщенное преобразование Ганкеля 136
3.5. Преобразование Ганкеля в оптических схемах с кольцевым источником 141
3.6. Дифракционные линзы 144

Глава четвертая
Преобразование сигналов с ограниченным спектром 156
4.1. Принцип неопределенности 156
4.2. Принцип неопределенности для двумерных оптических сигналов 159

4.3. Принцип неопределенности и преобразование Ганкеля . . . 165
4.4. Разложение оптических сигналов в ряд Котельникова 167
4.5. Формула Пуассона 175
4.6. Информационная структура спектрально-ограниченного оптического сигнала 178
4.7. Акустооптическое преобразование сигналов 181

Глава пятая
Преобразование Гильберта в оптике 194
5.1. Одномерное преобразование Гильберта 194
5.2. Аналитический сигнал 204
5.3. Преобразование Гильберта двумерных оптических сигналов 207
5.4. Изотропное когерентное преобразование Гильберта 212
5.5. Изотропное преобразование Гильберта с кольцевым источником 227
5.6. Изотропное преобразование Фуко–Гильберта с кольцевым источником 231
5.7. Гильберт-фильтрация на основе дифракционной решетки со сбоем 233
5.8. Гильберт-фильтрация на основе дифракционной решетки со сбоем в схеме с кольцевым источником 236

Глава шестая
Оптическая фильтрация сигналов 241
6.1. Согласованная фильтрация 241
6.2. Инверсная фильтрация 253
6.3. Визуализация фазовых полей оптической плотности при дефокусировке изображений 255
6.4. Оптическая фильтрация сигналов 259
6.5. Оптическая фильтрация с когерентной обратной связью 269

Глава седьмая
Случайные оптические сигналы 282
7.1. Понятие о случайном оптическом сигнале 282
7.2. Корреляционные и спектральные свойства стационарных случайных сигналов 286
7.3. Дифференциальные и интегральные преобразования стационарных случайных процессов 289
7.4. Квазипериодичность стационарного гауссова сигнала . . 292
7.5. Преобразование случайных сигналов линейными оптическими системами 301
7.6. Функция когерентности 303
7.7. Преобразование некогерентных сигналов линейной оптической системой 307
7.8. Оптическая передаточная функция линзы, ограниченной круглой апертурой 314
7.9. Гетеродинное фотоэлектрическое преобразование сигналов 316

Глава восьмая
Частотно-координатное преобразование сигналов 326
8.1. Оконное преобразование Фурье 326
8.2. Вейвлет-преобразование 329
8.3. Вейвлет-преобразование в оптике 344

Литература 359
Предметный указатель 360

Юрий Николаевич ДУБНИЩЕВ

ТЕОРИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Учебное пособие

Издание четвертое, исправленное и дополненное

Заведующий редакцией
инженерно-технической литературы *К. Е. Житков*
Художественный редактор *С. Ю. Малахов*
Корректоры *Т. А. Кошелева, А. М. Плетнева*
Подготовка иллюстраций *М. О. Мотыгина*
Верстка *М. И. Хетерели*
Выпускающие *Д. А. Щепелева, Ю. Г. Бакшанова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 31.03.11.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 19, 32. Тираж 000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru