

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Р.З. ДАУТОВ

**ПРАКТИКУМ ПО МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ
СИСТЕМ ОДУ**

Учебное-методическое пособие

Казань — 2010

УДК 519.3

Р.З. Даутов. Практикум по методам решения задачи Коши для систем ОДУ.
89 с.

В пособии предлагается набор заданий для практических (лабораторных) занятий по численным методам решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описываются сами методы и приемы их программной реализации. Предполагается, что студентом будет проведено самостоятельное мини-исследование при выполнении задания. Пособие рассчитано на студентов знакомых с дифференциальными уравнениями и программированием.

Научный редактор:

доктор физико-математических наук М.М. Карчевский

Рецензенты:

доктор физико-математических наук М.Р. Тимербаев

кандидат физико-математических наук Е.В. Стребков

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета факультета
ВМК Казанского университета

Оглавление

Предисловие	5
ГЛАВА 1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ	6
§ 1. Введение.	6
§ 2. Методы Рунге-Кутты.	9
§ 3. Программирование методов Рунге-Кутты при решении систем ОДУ.	17
Литература	20
Задание 1. Структура белых карликов	21
Задание 2. Реактор проточного типа с полным перемешиванием: реакция типа $A \rightarrow B \rightarrow C$	26
Задание 3. Система типа хищник - жертва. Модель Базыкина	29
Задание 4. Задача Жуковского о полете планера	32
Задание 5. Релаксационные колебания: осциллятор Ван-Дер-Поля	35
Задание 6. Ограниченная задача трех тел	38
Задание 7. Химические реакции: брюсселятор	40
Задание 8. Система типа хищник-жертва. Модель Мак-Артура	43
Задание 9. Задача о стабилизации экраноплана	46
Задание 10. Задача о форме лежащей капли	49
Задание 11. Математическая модель роста опухоли	52
Задание 12. Система хищник-жертва. Модель Холлинга-Тернера	55
Задание 13. Динамика химического реактора	58
Задание 14. Задача о полете ракеты	61
Задание 15. Задача о форме висящей капли	64
Задание 16. Реактор проточного типа с полным перемешиванием: реакция типа $A \rightarrow \text{продукты}$ с рециклом	67

Задание 17. Задача о полете ракеты	70
Задание 18. Оптимизация химической реакции	73
Задание 19. Оптимизация вертикального подъема ракеты	76
Задание 20. Задача о полете снаряда-1	78
Задание 21. Колебания связанных маятников	81
Задание 21. Система типа хищник-жертва. Модель Вольтерра . .	83
Задание 22. Задача о движении двух небесных тел	86
Задание 24. Задача о полете снаряда-2	88

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии предлагается набор заданий для практических (лабораторных) занятий по численным методам решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описываются сами методы и приемы их программной реализации. Предполагается, что студентом будет проведено самостоятельное мини-исследование при выполнении задания. Пособие рассчитано на студентов знакомых с дифференциальными уравнениями и программированием.

Рукопись была внимательно прочитана М.М. Карчевским. Автор с благодарностью учел его замечания.

Замеченные ошибки, опечатки, а также комментарии и пожелания, просьба направлять по адресу *rdautov@ksu.ru*.

ГЛАВА 1

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ

§ 1. Введение.

1. Постановка задачи. К обыкновенным дифференциальным уравнениям сводится изучение многообразных задач в математике и в различных предметных областях (в физике, химии, биологии, медицине, технике и т.д.). С рядом содержательных задач подобного рода Вы сможете ознакомиться, прочитав гл. 2 данного пособия.

Конкретная задача может приводить к дифференциальному уравнению любого порядка, или к системе уравнений различных порядков. Но известно, что уравнение n -го порядка

$$u^{(n)}(t) = f(t, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$$

при введении новых неизвестных $u_i(t) = u^{(i)}(t)$ можно свести к эквивалентной системе n уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u'_i(t) &= u_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \\ u'_{n-1}(t) &= f(t, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}), \end{aligned}$$

где $u_0(t) = u(t)$. Аналогично, произвольную систему дифференциальных уравнений любого порядка можно заменить эквивалентной системой уравнений первого порядка

$$u'_i(t) = f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

записывая их для краткости в векторной форме

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (2)$$

где u и f векторы столбцы

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Известно, что система (1) имеет множество решений, которое в общем случае зависит от n параметров $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ и может быть

записано в форме $u = u(t; c)$. Для выделения нужного решения надо наложить n дополнительных условий на функции $u_i(t)$.

Различают три типа задач для обыкновенных дифференциальных уравнений: задачи Коши, краевые задачи и задачи на собственные значения. В случае задачи Коши (задачи с начальными условиями) дополнительные условия имеют вид

$$u_i(a) = u_{ai}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

т.е. заданы значения всех функций u_i в одной и той же точке $t = a$. Решение при этом обычно требуется найти на некотором отрезке $a \leq t \leq b$ (или $b \leq t \leq a$), так что точку $t = a$ можно считать начальной точкой этого отрезка. Условия (3) в векторной записи имеют вид $u(a) = u_a$. Условия (3) можно рассматривать как задание координат начальной точки $(a, u_{a1}, \dots, u_{an})$ интегральной кривой в $n + 1$ -мерном пространстве (t, u_1, \dots, u_n) .

Хорошо известны условия, гарантирующие существование и единственность решения задачи Коши (см., напр., [1]). Предположим, что $a = 0$, все функции f_i непрерывны по всем аргументам в замкнутой области

$$D = \{ |t| \leq b, \quad |u_i - u_{ai}| \leq c, \quad i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Из непрерывности функций f_i следует их ограниченность, т.е. существование такой постоянной $M > 0$, что всюду в D выполняются неравенства $|f_i| \leq M$, $i = 1, 2, \dots, n$. Предположим, кроме того, что в D функции f_i удовлетворяют условию Липшица по аргументам u_1, u_2, \dots, u_n , т.е.

$$\begin{aligned} |f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n) - f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)| &\leq \\ &\leq L(|u_1 - y_1| + |u_2 - y_2| + \dots + |u_n - y_n|) \end{aligned}$$

для любых точек $(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$ и $(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ области D .

Если выполнены эти предположения, то существует единственное решение системы (1), определенное при $|t| \leq \min\{b, c/M\}$ и принимающее при $t = 0$ заданные значения (3). Это решение непрерывно зависит от координат начальной точки (т.е. задача корректно поставлена). Если вдобавок правые части f_i имеют непрерывные производные по всем аргументам до порядка m включительно, то решение $u(t)$ имеет $m + 1$ непрерывную производную по t .

2. Методы решения. Их можно условно разбить на точные, приближенно-аналитические и численные.

К *точным* относятся методы, позволяющие выразить решение через элементарные функции, либо представить его при помощи интегралов от элементарных функций. Эти методы изучаются в курсе ОДУ; по этому поводу можно порекомендовать также справочник [2]. Однако классы уравнений, для которых разработаны методы получения точных решений, сравнительно узки и охватывают только малую часть возникающих на практике задач. Например, доказано, что решение первого из уравнений

$$u'(t) = t^2 + u^2(t), \quad u'(t) = \frac{u(t) - t}{u(t) + t}$$

не выражается через элементарные функции, а общее решение второго имеет вид

$$0.5 \ln(t^2 + u^2) + \arctg(u/t) = c.$$

Однако для того, чтобы воспользоваться этой формулой и вычислить $u(t)$ при конкретном t , надо численно решить это трансцендентное уравнение, что несколько не проще, чем численно решить само дифференциальное уравнение.

К *приближенно-аналитическим* относятся методы, в которых решение получается как предел $u(t)$ некоторой последовательности функций $u_k(t)$, причем $u_k(t)$ выражается через элементарные функции или интегралы от них. Ограничиваясь конечным значением k , получаем приближенное выражение для $u(t)$. Примером может служить метод разложения решения в обобщенный степенной ряд, метод Пикара, метод малого параметра. Однако эти методы удобны лишь в том случае, когда большую часть промежуточных выкладок удастся провести точно. Это выполнимо для сравнительно простых задач, что сильно сужает область применения приближенно-аналитических методов.

Численные методы — это методы вычисления приближенных значений искомого решения $u(t)$ на некотором заданном или генерируемом в ходе решения задачи множестве точек t_1, t_2, \dots, t_N , называемом сеткой узлов. Решение при этом получается в виде таблицы.

Численные методы не позволяют найти общее решение системы (1); они могут дать только какое-то частное решение, например, решение задачи Коши (1), (2). Это основной недостаток численных методов; он компенсируется тем, что эти методы применимы к очень широкому классу уравнений и всем типам задач для них. Поэтому с появлением ЭВМ численные методы стали одним из основных способов решения конкретных практических задач для ОДУ.

Далее мы кратко рассмотрим одно семейство численных методов решения задачи Коши — методы Рунге-Кутты. Для простоты изложения мы ограничиваемся случаем одного уравнения первого порядка ($n = 1$). Эти алгоритмы сохраняют свой вид и для случая системы из $n > 1$ уравнений, с учетом векторной записи задачи Коши.

§ 2. Методы Рунге-Кутты.

Пусть требуется найти приближенное решение задачи

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (a, b], \quad u(a) = u_a, \quad (4)$$

на равномерной с шагом h сетке узлов

$$\omega_h = \{t_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N\}, \quad h = (b - a)/N.$$

Через $u_i = u(t_i)$, y_i будем обозначать соответственно точное и приближенное решение задачи в точке сетки с номером i .

1. Метод Эйлера. Он является простейшим представителем семейства методов Рунге-Кутты. Получается метод Эйлера, например, следующими рассуждениями.

Для каждого $i = 0, 1, \dots, N - 1$, используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим:

$$u(t_i + h) = u(t_i) + hu'(t_i) + \frac{h^2}{2} u''(t_i + \xi_i h), \quad \xi_i \in [0, 1]. \quad (5)$$

Поскольку в силу уравнения (4) справедливо равенство $u'(t_i) = f(t_i, u(t_i))$, то соотношение (5) переписывается в виде

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i) + h\psi_{i+1}, \quad \psi_{i+1} = \frac{h}{2} u''(t_i + \xi_i h). \quad (6)$$

Если решение $u(t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, то ψ_{i+1} является малой величиной, если h достаточно мало, и $\psi_{i+1} = O(h)$. Отбрасывая $h\psi_{i+1} = O(h^2)$ в первом равенстве (6), придем к методу Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad y_0 = u_a. \quad (7)$$

Эти соотношения позволяют вычислить приближенное решение в точке сетки (t_{i+1}) , зная приближенное решение лишь в предыдущей точке (t_i) . Такие численные методы называются *одношаговыми*: они позволяют шаг за шагом определить решение во всех точках сетки.

Оценим точность метода Эйлера в предположении, что функция f удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, u) - f(t, y)| \leq \lambda |u - y| \quad \forall u, y \in R, \quad t \in [a, b].$$

Пусть $e_i = u_i - y_i$; тогда $|e_i|$ представляет собой абсолютную погрешность решения в i -той точке сетки; обозначим через $\|u - y\|$ максимальную погрешность, где

$$\|y\| = \max_{i=1, \dots, N} |y_i|.$$

Величина ψ , определяемая согласно (6) формулой

$$\psi_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(t_i, u_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (8)$$

называется погрешностью аппроксимации метода Эйлера и определяет малость $\|u - y\|$. Чтобы убедиться в этом, получим уравнение для погрешности, вычитая из равенств (6) равенства (7). Имеем

$$e_{i+1} = e_i + h(f(t_i, u_i) - f(t_i, y_i)) + h\psi_{i+1}. \quad (9)$$

Воспользуемся условием Липшица и оценкой $1+x \leq e^x$, $x > 0$. Тогда, очевидно,

$$|e_{i+1}| \leq (1 + Lh)|e_i| + h|\psi_{i+1}| \leq e^{Lh}|e_i| + h|\psi_{i+1}|.$$

Эта оценка справедлива для любого $i = 0, 1, \dots, N-1$. Применяя ее при $i+1 = i$ для оценки $|e_i|$ в правой части и продолжая этот процесс,

будем иметь ($e_0 = 0$):

$$\begin{aligned}
 |e_{i+1}| &\leq e^{Lh}(e^{Lh}|e_{i-1}| + h|\psi_i|) + h|\psi_{i+1}| \leq \dots \leq \\
 &\leq e^{(i+1)Lh}|e_0| + \sum_{k=1}^{i+1} h e^{(i+1-k)Lh} |\psi_k| \leq \\
 &\leq e^{ihL}(i+1)h \max_{i=1,\dots,N} |\psi_i| \leq (b-a)e^{(b-a)\lambda} \|\psi\|.
 \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $i = 1, 2, \dots, N$, справедлива оценка $|e_i| \leq c_0 \|\psi\|$ с постоянной $c_0 = (b-a)e^{(b-a)\lambda}$, не зависящей от h . Отсюда следует искомая оценка

$$\|u - y\| \leq c_0 \|\psi\|.$$

Если ввести обозначение $C(u) = 0.5 \max_{t \in [a,b]} |u''(t)|$, то из (6) вытекает, что $\|\psi\| \leq C(u)h$. Следовательно,

$$\|u - y\| \leq c_0 C(u)h. \quad (10)$$

Эта оценка малоприспособлена для практической оценки точности метода Эйлера, но она говорит нам о том, что с уменьшением h пропорционально уменьшается максимальная погрешность решения, а также о том, что погрешность может быть сделана сколь угодно малой при соответствующем выборе h (или числа точек сетки N). Несмотря на грубость проведенных оценок, из (10) следует также, что погрешность решения больше для задач, у которых больше отрезок интегрирования и больше константа Липшица λ ; может потребоваться очень малый шаг сетки для обеспечения точности, если эти числа достаточно велики. Практика вычислений подтверждает эти выводы.

Сделаем еще два важных замечания. Представим, что мы реализовали формулы (7) в виде программы для ЭВМ. Ясно, что время работы T этой программы равно примерно $T_f N$, где T_f время, необходимое для вычисления правой части f уравнения (4). В то же время, согласно (10), $\|u - y\| \leq c/N$, где $c = c_0 C(u)(b-a)$. Отсюда можно сделать вывод, что если мы хотим, например, в 10 раз увеличить точность полученного решения, то это потребует 10-кратного увеличения времени работы программы.

Второе замечание касается качественного поведения метода, характерного для всего класса рассматриваемых задач, но которое легко пояснить и понять на следующем модельном примере:

$$u'(t) = -\lambda u, \quad t \in (0, T], \quad u(0) = u_0.$$

Он соответствует выбору $f(t, u) = -\lambda u$ в задаче (4); здесь $u_0 > 0$, а постоянная $\lambda > 0$ определяет константу Липшица. Точное решение этой задачи есть $u(t) = u_0 e^{-\lambda t}$; оно положительно и монотонно убывает с ростом t . Формулы метода Эйлера имеют вид $y_{i+1} = y_i - \lambda h y_i$ или $y_{i+1} = q y_i$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, где $q = 1 - \lambda h$. Следовательно, $y_i = q^i u_0$. Отсюда следует, что если $|q| > 1$, т.е. $h > 2/\lambda$, то $|y_i|$ возрастает с ростом i , что кардинально расходится с качественным поведением точного решения (к тому же, при $q < 0$ приближенное решение меняет знак в каждой точке сетки). В этом случае говорят, что приближенное решение ведет себя неустойчиво, поскольку нарушено условие устойчивости метода Эйлера, имеющее вид $|q| < 1$ или

$$h < h_0, \quad h_0 = 2/\lambda. \quad (11)$$

При выполнении несколько более сильного условия $0 < q < 1$ (т.е. при $h < 1/\lambda$) приближенное решение является положительным и монотонно убывающим, т.е. качественно верно воспроизводится как монотонность, так и положительность точного решения. Ясно, что условие (11) практически не является ограничительным, если λ не слишком велико (например, $\lambda = O(1)$): для обеспечения точности решения должно выбраться достаточно малое h . Условие (11) является ограничительным, если λ очень большое; в этом случае необходимо выбирать очень малое h для получения хотя бы качественно правильного решения (например, при $\lambda \sim 10^6$ должно быть $h \lesssim 10^{-6}$).

2. Определение методов Рунге-Кутты. Формулы, требующие q вычислений правой части f на одном шаге интегрирования (q -стадийные методы Рунге-Кутты), имеют следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + h(p_1 k_1 + p_2 k_2 + \dots + p_q k_q), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f(t_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} h k_1), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ k_q &= f(t_i + \alpha_q h, y_i + \beta_{q1} h k_1 + \beta_{q2} h k_2 + \dots + \beta_{q, q-1} h k_{q-1}). \end{aligned}$$

При фиксированном q конкретный метод определяется выбором коэффициентов p_j , α_j , $\beta_{\ell j}$. Всегда выполняется равенство

$$p_1 + p_2 + \dots + p_q = 1, \quad (13)$$

так что при $q = 1$ приходим к методу Эйлера.

Величины k_j , определенные выше, зависят, в частности, от h и y_i ; укажем эту зависимость в виде $k_j(h, y_i)$. Так, если $u_i = u(t_i)$ есть значение точного решения в узле сетки t_i , то $k_1(t_i, u_i) = f(t_i, u_i)$, $k_2(h, u_i) = f(t_i + \alpha_2 h, u_i + \beta_{21} h k_1(t_i, u_i))$, и т.д. Величину

$$\psi_{i+1} = \psi_{i+1}(h) = \frac{u(t_i + h) - u_i}{h} - \sum_{j=1}^q p_j k_j(h, u_i) \quad (14)$$

называют *погрешностью аппроксимации* (q -стадийного метода Рунге-Кутты) в точке сетки с номером $i+1$, и рассматривают его как функцию шага сетки h .

Разложим ψ_{i+1} в ряд Тейлора

$$\psi_{i+1}(h) = \psi_{i+1}(0) + \psi'_{i+1}(0)h + \dots + \psi_{i+1}^{(m)}(0)\frac{h^m}{m!} + o(h^m),$$

и подберем коэффициенты p_j , α_j , $\beta_{\ell j}$ так, чтобы при возможно большем m выполнялись равенства

$$\psi_{i+1}(0) = \psi'_{i+1}(0) = \dots = \psi_{i+1}^{(m-1)}(0) = 0. \quad (15)$$

Тогда

$$\psi_{i+1} = \psi_{i+1}^{(m)}(0)\frac{h^m}{m!} + o(h^m), \quad (16)$$

и говорят, что *порядок погрешности аппроксимации* метода равен m ($\psi_{i+1} = O(h^m)$), а первое слагаемое в правой части (16) называют главным членом погрешности аппроксимации.

Нетрудно видеть, что условие первого порядка аппроксимации (первое равенство $\psi_{i+1}(0) = 0$ в (15)) совпадает с условием (13), поскольку, в силу уравнения, $k_j(0, u_i) = f(t_i, u_i) = u'(t_i)$,

$$\psi_{i+1}(0) = u'(t_i) - \sum_{j=1}^q p_j k_j(0, u_i) = \left(1 - \sum_{j=1}^q p_j\right) u'(t_i).$$

Для произвольного метода Рунге-Кутты (12), аналогично методу Эйлера доказывается, что

$$\|u - y\| \leq c_0 \|\psi\|,$$

с постоянной c_0 , зависящей от $b - a$, λ , q , а также от коэффициентов метода, но не зависящей от h . Из этой оценки следует, что если порядок погрешности аппроксимации равен m , то найдется постоянная $C(u)$, зависящая от точного решения u , что

$$\|u - y\| \leq c_0 C(u) h^m.$$

В этом случае говорят, что *порядок точности метода* равен m ; как видим, порядок точности совпадает с порядком погрешности аппроксимации, чем и обусловлен способ выбора коэффициентов метода.

Доказано, что всегда $m \leq q$ и не существует m -стадийных методов с порядком $m \geq 5$. В следующей таблице указано минимальное число стадий (q_{\min}), которое необходимо для обеспечения соответствующего порядка точности метода.

m	1	2	3	4	5	6	7	8
q_{\min}	1	2	3	4	6	7	9	11

Время работы T_q программы, реализующей методы с q -стадиями, определяется величиной $qT_f N$, где T_f время, необходимое для вычисления правой части f уравнения (4). В тоже время их точность оценивается как сверху величиной C/N^m . Увеличивая число узлов, скажем, в 10 раз, мы получаем в 10^m раз более точное решение. Отсюда ясно, в чем выгода использования методов высокого порядка точности. С другой стороны, если в вычислениях не нужна очень большая точность, то методы со средним показателем m (с $m = 4$), могут оказаться предпочтительными, поскольку они требуют меньшего времени работы программы и имеют достаточную точность.

Рассмотрим, как получаются конкретные методы при небольших значениях q .

3. Методы Рунге-Кутты при $q = 2$. Формулы имеют вид

$$y_{i+1} = y_i + h(p_1 k_1 + p_2 k_2),$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f(t_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} h k_1). \end{aligned}$$

Попытаемся удовлетворить соотношениям (15) при возможно большем значении m . В данном случае

$$\psi_{i+1}(h) = \frac{u(t_i + h) - u_i}{h} - (p_1 k_1(h, u_i) + p_2 k_2(h, u_i)). \quad (17)$$

Как мы видели выше, равенство $\psi_{i+1}(0) = 0$ выполняется, если

$$p_1 + p_2 = 1.$$

Разложим $u(t_i + h)$ в ряд Тейлора в точке t_i . Тогда

$$\frac{u(t_i + h) - u_i}{h} = u'_i + \frac{h}{2!} u''_i + \frac{h^2}{3!} u'''_i + \dots \quad (18)$$

Учтем, что согласно уравнению $u'(t) = f(t, u(t))$; поэтому

$$u''(t) = f'_t(t, u(t)) + f'_u(t, u(t))u'(t) = f'_t(t, u(t)) + f'_u(t, u(t))f(t, u(t)).$$

С учетом этих формул нетрудно видеть, что равенство

$$0 = \psi'_{i+1}(0) = \{(1 - 2\alpha_2 p_2)f'_t + (1 - 2\beta_{21} p_2)f f'_u\} \big|_{t=t_i, u=u_i}$$

дает еще два уравнения для определения коэффициентов

$$1 - 2\alpha_2 p_2 = 0, \quad 1 - 2\beta_{21} p_2 = 0.$$

Вычисления показывают, что выбором коэффициентов условию $\psi''_{i+1}(0) = 0$ удовлетворить не удастся. Это легко увидеть на примере уравнения с $f(t, u) = u$. В этом случае в выражении (17) второе слагаемое линейно зависит от h и его 2-я производная по h равна нулю. Из формулы (18) легко видеть, что 2-я производная по h от первого слагаемого в (17) при $h = 0$ равна $1/3 u'''(t_i)$. Поэтому

$$\psi''_{i+1}(0) = 1/3 u'''(t_i).$$

Следовательно, $m = 2$ и 4 коэффициента метода необходимо определить из трех уравнений

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= 1, \\ 2\alpha_2 p_2 &= 1, \\ 2\beta_{21} p_2 &= 1. \end{aligned}$$

Принимая, например, α_2 за свободный параметр, $\alpha_2 \in (0, 1]$, найдем:

$$\beta_{21} = \alpha_2, \quad p_2 = \frac{1}{2\alpha_2}, \quad p_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha_2}. \quad (19)$$

Таким образом, мы получили однопараметрическое семейство форму Рунге-Кутты 2-го порядка точности. В частности, полагая $\alpha_2 = 1; 2/3; 1/2$ в (19), придем к трем конкретным формулам.

4. Методы Рунге-Кутты при $q = 3$. Формулы имеют вид

$$y_{i+1} = y_i + h(p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3),$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i), \\ k_2 &= f(t_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} h k_1), \\ k_3 &= f(t_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{31} h k_1 + \beta_{32} h k_2). \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, получается следующая система из 6 уравнений для определения для определения 8 коэффициентов метода при $m = 3$ (см., напр., [3]):

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \beta_{21} \\ \alpha_3 &= \beta_{31} + \beta_{32}, \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1, \\ 2(\alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3) &= 1, \\ 3(\alpha_2^2 p_2 + \alpha_3^2 p_3) &= 1, \\ 6\alpha_2 \beta_{32} p_3 &= 1. \end{aligned}$$

Эта система имеет два семейства решений: двухпараметрическое со свободными параметрами α_2 и α_3 , причем, $\alpha_2 \neq \alpha_3$ и $\alpha_2 \neq 2/3$, и однопараметрическое со свободным параметром β_{32} (при $\alpha_2 = \alpha_3 = 2/3$).

В качестве примера укажем коэффициенты при $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 1$: $p_1 = p_3 = 1/6$, $p_2 = 4/6$, $\beta_{21} = 1/2$, $\beta_{31} = -1$, $\beta_{32} = 2$.

§ 3. Программирование методов Рунге-Кутты при решении систем ОДУ.

Рассмотрим вопросы, связанные с программной реализацией q -стадийного метода Рунге-Кутты, предназначенного для решения произвольной задачи Коши для системы ОДУ, имея в виду рассмотренные выше методы с постоянным шагом интегрирования h ; при этом будем предполагать, что число уравнений n и число узлов N таковы, что в памяти ЭВМ свободно можно разместить матрицу размера $(N + 1) \times n$.

Выберем идентификатор RKq для обозначения имени этой программы (функции). Какие параметры мы должны передать этой программе, а какие получить в качестве результата ее выполнения? Поскольку мы ведем речь о задаче вида

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (a, b], \quad u(a) = u_a,$$

где $f : R \times R^n \rightarrow R^n$ — заданная вектор функция, $u_a \in R^n$ — заданный вектор, а a, b — заданные числа, то задача определяется только 4-мя данными

$$f, \quad a, \quad b, \quad u_a,$$

или 3-мя, если a, b упаковать, например, в массив ab , длины 2. Ясно, что эти данные надо обязательно передать каким-либо образом RKq . Кроме того метод Рунге-Кутты определяется параметром N ($h = (b - a)/N$); его тоже необходимо передать RKq . Будем считать (это общепринято), что f в свою очередь реализуется в виде программы (функции); она должна иметь 2 входных параметра (t, y) , $y \in R^n$, $t \in R$, и один выходной — значение вектор-функции f — массив длины n .¹⁾

Метод Рунге-Кутты генерирует векторы y_i длины n , которые являются приближениями к $u(t_i) = (u_1(t_i), \dots, u_n(t_i))$, $i = 0, 1, \dots, N$. Будем считать, что эти вектора сохраняются в матрице Y , размера $(N + 1) \times n$, i -тая строка которого равна y_i .²⁾ Будем считать также, что массив $T = (t_0, t_1, \dots, t_N)$ используется для хранения сетки.

¹⁾В зависимости от выбранного языка программирования, возможно как RKq , так и f , необходимо передавать также параметр n — размерность задачи. Далее мы будем предполагать, что имеется функция $numel()$, которая для одномерного массива возвращает число его элементов.

²⁾тогда j -тый столбец Y содержит приближение к j -той компоненте решения $u_j(t)$ в точках сетки.

Схематически заголовок программы *RKq* можно определить в виде

$$\text{function } [T, Y] = RKq(f, ab, ua, N).$$

Здесь в квадратных скобках указываются выходные параметры, а в круглых — входные.¹⁾

Для заданной матрицы Y под $Y(i, :)$ будем понимать i -тую строку Y , а для заданных одномерных массивов x, y , длины n , и чисел c, d , под $x = y, z = c * x + d * y, y = 0$ будем понимать реализацию покомпонентных операций

$$x_i = y_i, \quad z_i = c * x_i + d * y_i, \quad y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Будем считать также, что команда $Y = \text{zeros}(m, n)$ определяет матрицу размера $m \times n$, состоящую из одних нулей; под $x(i)$ будем понимать i -тый элемент массива (вектора строки или столбца). Ниже приведена в схематической форме реализация 3-х стадийного метода (для примера); числа типа *alpha2*, *beta21* и т.д. должны быть заменены на конкретные значения.

```
function [T,Y]=RK3(f,ab,ua,N)
T=zeros(1,N+1);
Y=zeros(N+1,n);

t=ab(1);
y=ua;
h=(ab(2)-ab(1))/N;

T(1)=t;
Y(1,:)=y;
for i=1:N
    k1=f(t,y); % in MatLab: k1=feval(f,t,y);

    yp=y+(beta21*h)*k1;
    k2=f(t+alpha2*h,yp); % in MatLab: k2=feval(f,t+alpha2*h,yp);

    yp=y+(beta31*h)*k1+(beta32*h)*k2;
    k3=f(t+alpha3*h,yp); % in MatLab: k3=feval(f,t+alpha3*h,yp);

    y=y+h*(p1*k1+p2*k2+p3*k3);

    t=t+h;
    T(i+1)=t;
    Y(i+1,:)=y;
end
```

¹⁾такой синтаксис языка программирования принят в MatLab. Мы будем его придерживаться.

Выше за символом процента указан комментарий; показано, как соответствующая команда должна выглядеть в программе MatLab (это связано со спецификой передачи в функции имен функций).

Для каждой задачи Коши должна быть написана своя программа вычисления правой части; макет этой программы выглядит следующим образом:

```
function dy=fct (t,y)
n=numel(y);
dy=zeros(1,n);

dy(1)=...;
dy(2)=...;
.....
dy(n)=...;
```

Здесь вместо многоточия в $dy(i) = \dots$; надо записать выражение функции $f_i(t, y)$ в терминах переменных $t, y(1), \dots, y(n)$. Конечно, при программировании на языках типа Си, Паскаль и т.д. часть программы, соответствующий команде $dy = \text{zeros}(1, n)$, является лишней.

Литература

1. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения — 2-е изд. — М.: Наука, 1985.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям — М.: Наука, 1971.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.

Задание 1. Структура белых карликов.

Белые карлики — это холодные объекты, состоящие в основном из тяжелых ядер и электронов. Звезды такого типа являются одним из возможных конечных результатов течения обычных ядерных процессов, в ходе которых синтезируются элементы путем связывания нуклонов в ядра. Карлики часто состоят из наиболее стабильных ядер ${}^{56}\text{Fe}$ с 26 протонами и 30 нейтронами. Однако если процесс нуклеосинтеза прерывается преждевременно, то могут преобладать ядра ${}^{12}\text{C}$. Структура такой звезды определяется балансом силы тяжести, которая ее сжимает, и давлением вырожденных электронов, которое противодействует сжатию. В этом задании Вам предлагается исследовать структуру белого карлика, решая уравнения, которыми определяется его равновесие. В частности, Вы должны получить соотношение между массой звезды и ее радиусом — величину, которую можно определить из астрономических наблюдений.

1. Уравнения равновесия [1,2]. Предположим, что звезда сферически-симметрична (т.е. состояние в ее любой точке зависит только от расстояния между этой точкой и центром звезды). Допустим далее, что вращение отсутствует и можно пренебречь влиянием магнитного поля. Если звезда находится в механическом (гидростатическом) равновесии, то гравитационная сила, приложенная к некоторому объему вещества, уравновешивается градиентом давления P . Сила тяжести, действующая на единичный объем вещества на расстоянии r от центра, равна

$$F_{grav} = -\frac{Gm}{r^2}\rho, \quad (1)$$

где G — гравитационная постоянная, $\rho(r)$ — массовая плотность, а $m(r)$ — масса звезды, заключенная внутри сферы радиуса r :

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(s)s^2 ds. \quad (2)$$

Сила, связанная с градиентом давления и действующая на единицу объема, равна $-dP/dr$. Когда звезда находится в равновесии, результирующая этих сил (гравитации и давления), приложенная к любому пробному объему вещества, должна быть равна нулю. Так что, используя (1), получаем

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r). \quad (3)$$

Соотношение между плотностью и массой получим, продифференцировав (2):

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (4)$$

Чтобы описание системы было полным, необходимо знать уравнение состояния вещества, связывающее его плотность с величиной давления, необходимого для поддержания этой плотности. Используя тождество

$$\frac{dP}{dr} = \frac{d\rho}{dr} \frac{dP}{d\rho},$$

уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{d\rho}{dr} = -\left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{-1} \frac{Gm}{r^2} \rho. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) являются системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые определяют структуру звезды совместно с заданным уравнением $P = P(\rho)$ состояния ее вещества, которое имеет следующий вид:

$$\frac{dP}{d\rho} = Y_e \frac{m_e}{M_p} \gamma \left((\rho/\rho_0)^{1/3} \right), \quad \gamma(x) = \frac{x^2}{3(1+x^2)^{1/2}}, \quad (6)$$

где Y_e — среднее число электронов, приходящихся на одно ядро, M_p и m_e — масса протона и электрона соответственно, $\rho_0 = 9.79 \cdot 10^5 Y_e^{-1} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$.¹⁾

Начальные условия задаются в виде

$$\rho(0) = \rho_c, \quad m(0) = 0. \quad (7)$$

¹⁾Все величины предполагаются заданными в системе СГС.

Радиус R звезды определяется как расстояние, на котором плотность ρ спадает до нуля (при вычислениях $\approx 10^{-5}$). Общая масса звезды тогда определяется как $M = m(R)$. Так как обе величины R и M зависят от ρ_c , изменяя этот параметр, можно изучать структуру звезд разной массы, вычисляя кривую

$$R = R(\rho_c), \quad M = M(\rho_c), \quad \rho_c \in [\rho_A, \rho_B], \quad (8)$$

в координатах (R, M) .

2. Безразмерная форма уравнений. Введем безразмерные переменные для радиуса, плотности и массы:

$$r = R_0 \bar{r}, \quad \rho = \rho_0 \bar{\rho}, \quad m = M_0 \bar{m}. \quad (9)$$

Сделав подстановки в (4) и (5) и используя (6), после некоторой перегруппировки членов получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{m}}{d\bar{r}} &= \left[\frac{4\pi R_0^3 \rho_0}{M_0} \right] \bar{r}^2 \bar{\rho}, \\ \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}} &= - \left[\frac{GM_0 M_p}{R_0 Y_e m_e} \right] \frac{\bar{m} \bar{\rho}}{\gamma(\bar{\rho}^{1/3}) \bar{r}^2}. \end{aligned}$$

Если теперь выбрать R_0 и M_0 так, чтобы множители в скобках стали равными единице, то получим

$$R_0 = \left[\frac{Y_e m_e}{4\pi G M_p \rho_0} \right]^{1/2} = 7.72 \cdot 10^8 Y_e \text{ см}, \quad M_0 = 4\pi R_0^3 \rho_0 = 5.67 \cdot 10^{33} Y_e^2 \text{ г},$$

а безразмерные уравнения запишутся в виде

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\bar{r}} = - \frac{\bar{m} \bar{\rho}}{\gamma(\bar{\rho}^{1/3}) \bar{r}^2}, \quad \frac{d\bar{m}}{d\bar{r}} = \bar{r}^2 \bar{\rho}, \quad (10)$$

$$\bar{\rho}(0) = \bar{\rho}_c, \quad \bar{m}(0) = 0. \quad (11)$$

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6. \end{aligned}$$

2. Показать, что при выборе $\gamma(x) = x^{3\sigma-3}$ искомая задача (10), (11) имеет точное решение

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_c(\sin \bar{r}/\bar{r}) \text{ при } \sigma = 2, \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_c(1 + \bar{r}^2/a)^{-5/2} \text{ при } \sigma = 6/5,$$

где $a = 15\bar{r}_c^{-4/5}$. Используйте эти решения в качестве тестового для отладки метода и ориентировочного выбора шага h .

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Поясните результаты вычислений.

4. При помощи разработанной программы рассчитайте профили плотности, полные массу и радиус звезды для ряда значений ρ_c (например, 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} , 10 , 10^2 , 10^3 , 10^4) при $Y_e = 26/56$ (это соответствует ^{56}Fe) и $Y_e = 1/2$ (это соответствует ^{12}C). Вы должны обнаружить, что масса карлика стремится при этом к некоторому пределу M_{ch} , называемому массой Чандрасекара. Определите M_{ch} .

5. Повторите шаг 4 меняя теперь ρ_c на интервале $[10^{-3}, 10^6]$. Постройте графики зависимости массы карлика M от его радиуса R при указанных Y_e (выбирая p_i равномерно на отрезке показателей $[-3, 6]$ и полагая $\rho_c = 10^{p_i}$). Из астрономических наблюдений [2] известны массы и радиусы белых карликов Сириус Б и 40 Эйри Б в единицах солнечных (\odot) массы и радиуса. Они соответственно равны

$$(1.053 \pm 0.028, 0.0074 \pm 0.0006) \text{ и } (0.48 \pm 0.02, 0.0124 \pm 0.0005).$$

Что можно сказать о составе вещества этих звезд исходя из анализа построенных на этапе 5 графиков? Можно принять, что

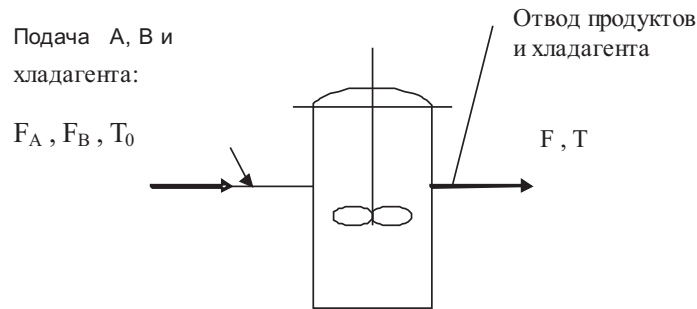
$$M_{\odot} = 1.98 \cdot 10^{33} \text{ г}, \quad R_{\odot} = 6.95 \cdot 10^{10} \text{ см}.$$

Литература

1. Кунин С. Вычислительная физика. — М.: Мир, 1992.
2. Shapiro S.L., Teukolsky S.A. Black Holes, White Dwarfs, and Neutron stars. — J. Wiley and Sons, Inc.: New York, 1983, chap. 3.
3. Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
4. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М. : Наука, 1987.

Задание 2. Реактор проточного типа с полным перемешиванием: реакция типа $A \rightarrow B \rightarrow C$.

1. Постановка задачи [1]. Рассматриваемый реактор (цилиндрический сосуд объемом V , снабженный охлаждающим кожухом) схематически представлен на рисунке. Будем предполагать, что ре-



акционная смесь полностью перемешивается и что в реакторе происходит практически необратимая реакция. Объемные расходы F_A, F_B и входные концентрации компонентов A_0 и B_0 реакционной смеси, температура на входе T_0 , коэффициент теплопередачи, площадь поверхности теплообмена и теплота реакции считаются постоянными; молярные концентрации A и B , а также температура смеси и охлаждающей среды не зависят от координат и могут быть только функциями времени t . С учетом этих предположений модель проточного реактора, в котором происходят последовательные экзотермические реакции первого порядка типа $A \rightarrow B \rightarrow C$, можно описать с помощью следующих трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} X' &= 1 - X - DaXa(\theta), \\ Y' &= -Y + DaXa(\theta) - DaSYa^k(\theta), \\ \theta' &= -\theta + DaBXa(\theta) - \beta(\theta - \theta_C) + DaB\alpha SYa^k(\theta), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$a(\theta) = \exp\left(\frac{\theta}{1 + \theta/\gamma}\right),$$

θ — безразмерная температура, X и Y — безразмерные концентрации компонентов A и B . Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$X(0) = x_0, \quad Y(0) = y_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (2)$$

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 3-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + hk_1/2), \\ k_3 &= f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_2 + k_3)/6. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^3 от выбранного шага h . Поясните результаты вычислений.

4. Решить исходную систему уравнений при помощи разработанной программы. Приведите наиболее характерные графики траекторий в фазовых координатах (x, θ) , (y, θ) и графики $x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$ на интервале интегрирования при разных значениях Da из отрезка $[0.2, 0.7]$ при следующих исходных данных

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.4, \quad y_0 = 0.5, \quad \theta_0 = 1.3, \quad k = 1, \quad \gamma = 20000, \\ \alpha &= S = 0.03, \quad \beta = 4, \quad \theta_C = 0, \quad B = 13. \end{aligned}$$

Найдите те значения Da при которых в системе существует предельный цикл (автоколебательный режим работы реактора).

Литература

1. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. — М.: Мир, 1991.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задание 3. Система типа хищник-жертва. Модель Базыкина.

1. Постановка задачи [1,2]. Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник-жертва, при наличии внутривидовой конкуренции жертв за ограниченные ресурсы и учете фактора нелинейности размножения жертв при малых плотностях популяции. Обозначим через $x = x(t)$ и $y = y(t)$ плотности популяций жертв и хищников в момент времени t . Уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{ax^2}{N+x} \frac{K-x}{K} - bxy, \\y' &= -cy + dx,\end{aligned}\tag{1}$$

где a, b, c, d, N, K — неотрицательные числа. Структура уравнений следующая

- Величина $ax^2/(N+x)(K-x)/K$ определяет скорость размножения жертв в отсутствии хищников. При малых x скорость определяется величиной ax/N и является малой (гиперболический закон). При больших плотностях (до величины K) популяция растет, при $x > K$ — уменьшается в размерах (скорость отрицательна). Таким образом, это слагаемое описывает ограниченность ресурсов: окружающая среда может обеспечивать существование только популяции плотности меньшей K .
- Слагаемое bxy описывает влияние хищников на популяцию жертв. Функция bxy характеризует количество жертв, убиваемых одним хищником в единицу времени (реакция хищника на плотность популяции жертвы). Как видим, в данной модели хищники чрезвычайно кровожадны.
- Второе уравнение определяет изменение популяции хищников. Постоянная определяется естественной нормой смертности хищников. Второе слагаемое (функция dx) характеризует прирост

хищников в зависимости от плотности жертв (в данной модели хищники еще к тому же и чрезвычайно плодовиты).

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$X = x/K, Y = \left(\frac{b}{a}\right) y, \quad \tau = at, \quad n = \frac{N}{K}, \quad m = \frac{c}{dK}, \quad \gamma = \frac{dK}{a},$$

преобразуем уравнения (1) к виду

$$\begin{aligned} X' &= \frac{(1-X)X^2}{n+X} - XY, \\ Y' &= \gamma(X-m)Y, \end{aligned} \quad (2)$$

и дополним их начальными условиями

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0. \quad (3)$$

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/4, y_n + h/4k_1), \\ k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_1 - 2hk_2 + 2hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_3 + k_4)/6. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\alpha y_1 - \beta y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \\ y_2' &= \beta y_1 - \alpha y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 4]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = y_2 = e^{-t}, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Поясните результаты вычислений.
4. Найти стационарные решения (состояния равновесия) системы (2). Как они зависят от параметров задачи?
5. Для ряда значений параметра m из интервала $[0.1, 0.35]$ решить систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Рассчитать динамику популяции при следующих исходных данных

$$n = 0.1, \gamma = 1, X_0 = 0.3, Y_0 = 0.3.$$

При каких значениях параметра m в системе появляются и исчезают автоколебания? Приведите графики наиболее характерных решений в координатах (X, Y) , $(X(t), t)$ и $(Y(t), t)$ и дайте их интерпретацию.

Литература

1. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. - М.: Мир, 1986.
2. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. - М.: Наука, 1985.
3. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1990.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.

Задание 4. Задача Жуковского о полете планера.

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим полет планера в вертикальной плоскости xOz (ось Oz направлена вверх) при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости полета;
- угол атаки планера остается постоянным независимо от режима полета.

При сделанных допущениях аэродинамические коэффициенты силы сопротивления воздуха и подъемной силы крыльев планера P будут постоянными. Уравнения движения центра масс планера в проекциях на касательную и нормаль к его траектории запишутся в виде

$$\begin{aligned}m v' &= -mg \sin(\theta) - \rho S C v^2 / 2, \\m v \theta' &= -mg \cos(\theta) + \rho S P v^2 / 2, \\z' &= v \sin(\theta), \\x' &= v \cos(\theta).\end{aligned}$$

Здесь m — масса планера, v — скорость движения, θ — угол между касательной к траектории и осью Ox , g — ускорение силы тяжести, S — площадь крыльев планера, ρ — плотность воздуха.

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$\begin{aligned}V &= v \left(\frac{\rho S P}{2mg} \right)^{1/2}, \quad X = x \left(\frac{\rho S P}{2m} \right), \quad Z = z \left(\frac{\rho S P}{2m} \right), \\ \tau &= t \left(\frac{\rho g S P}{2m} \right)^{1/2}, \quad \sigma = \frac{C}{P},\end{aligned}$$

преобразуем уравнения к виду

$$\begin{aligned} V' &= -\sin(\theta) - \sigma V^2, \\ \theta' &= (V^2 - \cos(\theta)) / V, \\ Z' &= V \sin(\theta), \\ X' &= V \cos(\theta), \end{aligned} \quad (1)$$

и дополним их начальными условиями

$$Z(0) = Z_0, \quad X(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad V(0) = V_0. \quad (2)$$

Из вида уравнений (1) следует, что динамика полета планера характеризуется одним существенным положительным параметром σ .

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 2-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + 2/3h, y_n + 2/3hk_1), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_2)/4. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\alpha y_1 - \beta y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \\ y_2' &= \beta y_1 - \alpha y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 4]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = y_2 = e^{-t}, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 10.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^2 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Решить систему уравнений (1), (2) при помощи разработанной программы. Для двух наборов начальных условий (2) и нескольких значений параметра σ показать, что если начальная скорость планера

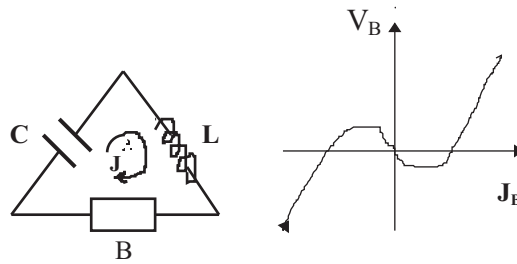
достаточно велика, то планер совершит сначала несколько мертвых петель, затем по волнообразно затухающей траектории будет приближаться к траектории прямолинейного полета. Привести графики наиболее характерных траекторий полета в координатах (X, Z) и графики функций $X(t), Z(t), \theta(t), V(t)$ на отрезке интегрирования.

Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Физматгиз, 1959.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задание 5. Релаксационные колебания: осциллятор Ван-Дер-Поля.

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим модификацию последовательной LCR цепи, показанную на рисунке. Предположим, что “черный ящик” B является элементом цепи (или объединением нескольких элементов цепи) с вольт-амперной характеристикой, изображенной на рисунке справа. Такой черный ящик называется нели-



нейным резистором с кубической вольт-амперной характеристикой: $V_B = f(j_B) = j_B(j_B^2/3 - 1)$.

Пусть V_L , V_C и V_B — разности потенциалов на элементах цепи в направлении тока J . Динамические уравнения цепи имеют вид

$$L \frac{dJ}{dt} = V_C - f(j), \quad C \frac{dV_C}{dt} = -j.$$

Здесь был использован закон Кирхгофа для напряжений и было исключено V_L . Сделаем замену $t/L \rightarrow t$, $y_1 = j$, $y_2 = V_C$, $L/C = \eta$, и получим искомые уравнения:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 - f(y_1), \quad \frac{dy_2}{dt} = -\eta y_1. \quad (1)$$

Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$y_1(0) = j_0, \quad y_2(0) = V_0. \quad (2)$$

Уравнения (1) зависят от единственного параметра η .

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + t^2 + 6t + 1, \\ y_2' &= y_1 - 3t^2 + 3t + 1, \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 3]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = 3t^2 - t - 1 + \cos(t) + \sin(t), \quad y_2 = t^2 + 2 - \cos(t) + \sin(t).$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Найти стационарные решения (особые точки) уравнения (1). Как они зависят от параметра η ?

5. Решить систему уравнений (1), (2) при помощи разработанной программы. Приведите наиболее характерные графики траекторий в фазовом пространстве (y_1, y_2) и графики $y_1(t)$, $y_2(t)$ на интервале интегрирования при разных значениях η из отрезка $[0.001, 0.2]$ для следующих начальных условий

$$j_0 = 2, \quad V_0 = 2.$$

Какие метаморфозы претерпевают фазовые траектории при изменении параметра η ? При каком его значении появляются (исчезают) автоколебания (предельный цикл)?

Литература

1. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задание 6. Ограниченная задача трех тел.

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим два тела с массами m и $M = 1 - m$ (например, Луна и Земля), участвующие в совместном круговом движении в плоскости xOy и расположенные в точках с координатами $(1, 0)$ и $(0, 0)$ соответственно. Пусть далее вблизи этих тел в той же плоскости движется третье тело пренебрежимо малой массы и $(x(t), y(t))$ — его координаты в момент времени t . Траектория движения этого тела описывается уравнениями

$$\begin{aligned}x'' &= x + 2y' - M \frac{x + m}{R_1} - m \frac{x - M}{R_2}, \\y'' &= y - 2x' - M \frac{y}{R_1} - m \frac{y}{R_2}, \\R_1 &= \left((x + m)^2 + y^2\right)^{3/2}, \quad R_2 = \left((x - M)^2 + y^2\right)^{3/2}.\end{aligned}\tag{1}$$

Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$x(0) = 0.994, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = -2.031732629557337. \tag{2}$$

При начальных условиях (2) и $m = 0.012277471$ орбита будет периодической с периодом обращения равным $T = 11.124340337$ (такие орбиты называют “орбитами Аренсторфа”).

Введением дополнительных неизвестных $v_1 = x'$, $v_2 = y'$ система (1) сводится к системе из 4-х уравнений первого порядка.

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Мерсона 5-го порядка

точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + hk_1/3), \\ k_3 &= f(t_n + h/3, y_n + hk_1/6 + hk_2/6), \\ k_4 &= f(t_n + h/2, y_n + h/8k_1 + 3/8hk_3), \\ k_5 &= f(t_n + h, y_n + h/2k_1 - 3/2hk_3 + 2hk_4), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_4 + k_5)/6. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^5 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

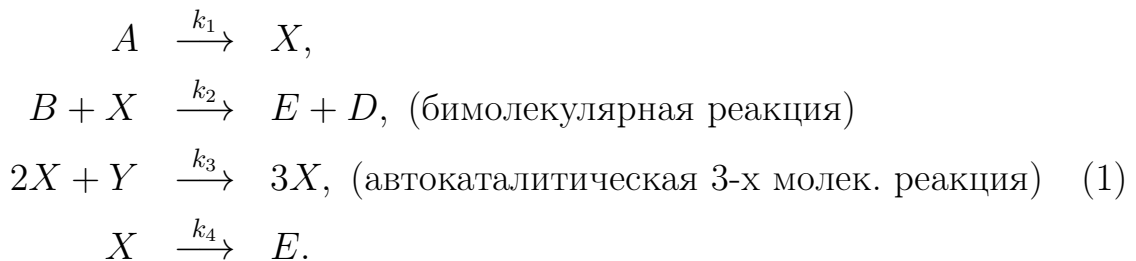
4. Решить систему уравнений (1), (2) при помощи разработанной программы. Рассчитать орбиту Аренсторфа. Учесть, что решения задачи бесконечно дифференцируемы всюду за исключение двух точек $(-m, 0)$, $(M, 0)$. Поэтому в окрестности начала и конца отрезка интегрирования необходимо выбирать существенно меньший шаг интегрирования h , чем в другие моменты времени. Построить график орбиты в координатах (x, y) , а также график скорости движения в координатах (x', y') .

Литература

1. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1990.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.

Задание 7. Химические реакции: брюсселятор.

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим модель Лефевра и Николиса (1971), так называемый “брюсселятор”: предположим, что шесть веществ, A, B, D, E, X, Y , участвуют в следующих реакциях:



Если обозначить через $A(t), B(t), \dots$, концентрации веществ A, B, \dots как функции времени t , то реакции (1), согласно закону действующих масс, описываются следующими дифференциальными уравнениями в предположении, что B добавляется к смеси с постоянной скоростью α :

$$\begin{aligned} A' &= -k_1 A, \\ B' &= -k_2 B X + \alpha, \\ D' &= k_2 B X, \\ E' &= k_4 X, \\ X' &= k_1 A - k_2 B X + k_3 X^2 Y - k_4 X, \\ Y' &= k_2 B X - k_3 X^2 Y. \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь упростим эту систему: исключим из рассмотрения уравнения для D и E , так как они не влияют на остальные; предположим также, что A поддерживается постоянным ($A = 1$) и возьмем все скорости реакций k_i равными единице. Далее, введем обозначения $y_1 = X$, $y_2 = Y$, $y_3 = B$ и в результате получим систему:

$$\begin{aligned} y_1' &= 1 + y_1^2 y_2 - (y_3 + 1) y_1, \\ y_2' &= y_1 y_3 - y_1^2 y_2, \\ y_3' &= -y_1 y_3 + \alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

которая зависит лишь от одного параметра α . Уравнения (3) дополняются начальными условиями

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1 + \alpha, \quad y_3(0) = 1 + \alpha. \quad (4)$$

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + h/3k_1), \\ k_3 &= f(t_n + 2/3h, y_n - h/3k_1 + hk_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_1 - hk_2 + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)/8. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$y'_1 = y_2, \quad y'_2 = 2y_1^2(1 - 4t^2y_1),$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = 1/(1 + t^2), \quad y_2 = -2t/(1 + t^2)^2.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Решить систему уравнений (3), (4) при помощи разработанной программы. Покажите, что стационарное решение (особая точка) уравнения (3) единственно и имеет вид $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = \alpha$ с производной

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 & -1 \\ -\alpha & -1 & 1 \\ -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы равен $\lambda^3 + (3 - \alpha)\lambda^2 + (3 - 2\alpha)\lambda + 1 = 0$ и удовлетворяет условию устойчивости (т.е. действительная часть корней многочлена строго меньше нуля) тогда и только тогда, когда $\alpha < (9 - \sqrt{17})/4 = 1.21922$. Поэтому если α больше этого значения, появляется предельный цикл, который существует

вплоть до значений α , приблизительно равного 1.5. Если α продолжает расти, то предельный цикл “взрывается” и $y_1 \rightarrow 0$, $y_2, y_3 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Приведите наиболее характерные графики траекторий в фазовом пространстве (y_1, y_2, y_3) в проекциях на плоскости (y_1, y_2) , (y_2, y_3) , (y_1, y_3) при разных значениях α .

Замечание. Раусс (1877): многочлен $z^3 + pz^2 + qz + r$ устойчив, если $r > 0$ и $pq > r$.

Литература

1. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1990.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.

Задание 8. Система типа хищник-жертва. Модель Мак-Артура.

1. Постановка задачи [1,2]. Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник-жертва, при наличии внутривидовой конкуренции жертв за ограниченные ресурсы и при учете фактора насыщения хищника. Обозначим через $x = x(t)$ и $y = y(t)$ плотности популяций жертв и хищников в момент времени t . Уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}x' &= a(1 - x/K)x - \frac{bxy}{1 + Ax}, \\y' &= -cy + \frac{d}{1 + Ax}xy,\end{aligned}\tag{1}$$

где a, b, c, d, A, K — неотрицательные числа. Структура уравнений следующая

- Слагаемое $a(1 - x/K)x$ определяет скорость размножения жертв в отсутствии хищников. При малых x скорость определяется величиной a и, т.о., a характеризует норму рождаемости при малой плотности популяции. При большей плотности (до величины K) популяция растет, при $x > K$ — уменьшается в размерах (скорость отрицательна). Т.о. это слагаемое описывает ограниченность ресурсов: окружающая среда может обеспечивать существование только популяции плотности меньшей K .
- Слагаемое $bxy/(1 + Ax)$ описывает влияние хищников на популяцию жертв. Функция $bxy/(1 + Ax)$ характеризует количество жертв, убиваемых одним хищником в единицу времени (реакция хищника на плотность популяции жертвы). Здесь учтено, что при большой плотности жертв хищник убивает лишь b/A жертв единицу времени; т.е., перестает убивать, когда насыщается.
- Второе уравнение определяет изменение популяции хищников. Постоянная определяется естественной нормой смертности хищ-

ников. Второе слагаемое характеризует прирост хищников в зависимости от плотности жертв (функция $dx/(1+Ax)$). При большой плотности жертв скорость прироста хищников определяется величиной d/A и, т.о., d/A характеризует норму рождаемости при благоприятных для хищников условиях.

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$X = \left(\frac{d}{c}\right)x, \quad Y = \left(\frac{b}{a}\right)y, \quad \tau = at, \quad \alpha = \frac{Ac}{d}, \quad \varepsilon = \frac{c}{Kd}, \quad \gamma = \frac{c}{a},$$

преобразуем уравнения (1) к виду

$$\begin{aligned} X' &= (1 - \varepsilon X)X - \frac{XY}{1 + \alpha X}, \\ Y' &= \gamma\left(\frac{X}{1 + \alpha X} - 1\right)Y, \end{aligned} \tag{2}$$

и дополним их начальными условиями

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0. \tag{3}$$

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 3-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + h/3k_1), \\ k_3 &= f(t_n + 2/3h, y_n + 2/3hk_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_3)/4. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^3 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Найти стационарные решения (состояния равновесия) системы (2). Как они зависят от параметров задачи?

5. Решить систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Для значений параметра α из интервала $[0.1, 0.9]$ рассчитайте динамику популяции при следующих исходных данных

$$\varepsilon = 0.1, \quad \gamma = 1, \quad X_0 = 3, \quad Y_0 = 1.$$

Определите те значения параметра α при которых в системе появляются и исчезают устойчивые автоколебания (предельный цикл). Приведите графики наиболее характерных решений в координатах (X, Y) , $(X(t), t)$ и $(Y(t), t)$ и дайте их интерпретацию.

Литература

1. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. - М.: Мир, 1986.
2. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. - М.: Наука, 1985.
3. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1990.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.

Задание 9. Задача о стабилизации экраноплана.

Экраноплан — летательный аппарат, использующий эффект существенного увеличения подъемной силы при движении вблизи экрана (поверхности суши или воды). При этом возникает опасность возникновения сильных колебаний по высоте полета. Таким образом, необходимо выбрать конструктивные параметры, обеспечивающие устойчивость аппарата. Уравнения движения экраноплана в вертикальной плоскости при определенных допущениях могут быть записаны в виде [1]:

$$\begin{aligned} V' &= g(n_x - \sin \theta), \\ \theta' &= \frac{g}{V}(n_y - \cos \theta), \\ \vartheta'' &= \frac{M_z}{I_z}, \\ H' &= V \sin \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t — время, g — ускорение силы тяжести, V — модуль скорости полета, θ — угол наклона траектории, ϑ — угол между продольной осью экраноплана и экраном (угол тангажа), H — отклонение высоты полета от заданной, n_x — продольная перегрузка, n_y — вертикальная перегрузка, M_z — продольный момент внешних сил, I_z — продольный момент инерции аппарата.

Для n_x , n_y , M_z принимают следующие зависимости:

$$\begin{aligned} n_x &= -a_V \frac{\rho S V^2}{2P}, \\ n_y &= (a_\alpha \alpha - a_H H) \frac{\rho V^2 S}{2P}, \\ M_z &= a_m l \alpha \frac{\rho V^2 S}{2}, \end{aligned}$$

где ρ — плотность воздуха, S — площадь крыла, P — вес аппарата, a_V — коэффициент лобового сопротивления, $\alpha = \vartheta - \theta$ — угол атаки, a_α , a_H , a_m — коэффициенты, характеризующие взаимодействие аппарата с потоком воздуха, l — плечо горизонтального оперения.

Введением новой неизвестной $V_\vartheta = \vartheta'$, система (1) сводится к системе из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 3-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + h/3k_1), \\ k_3 &= f(t_n + 2/3h, y_n + 2/3hk_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_3)/4. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^3 от шага h . Что следует из полученных графиков?

4. Решая систему уравнений движения экраноплана при помощи разработанной программы, рассчитать зависимость высоты полета от времени на интервале $t \in (0, 20]$. Результаты расчетов оформить в виде графиков $H = H(t)$. Параметры аппарата и другие исходные данные (система единиц измерения — СИ):

$$P = 5000, \quad S = 20, \quad I_z = 125000, \quad a_m = -1, \quad l = 2,$$

$$g = 9.81, \quad \rho = 1.25, \quad a_\alpha = 5, \quad a_H = 2.05, \quad a_V = 0.005.$$

Начальные условия:

$$V(0) = 50, \quad \theta(0) = 0.1, \quad \vartheta(0) = 0.2, \quad \vartheta'(0) = 0, \quad H(0) = 0.$$

Обратите внимание на то, что $H(t)$ быстро меняется в начальные моменты времени. Поэтому в окрестности начала отрезка интегрирования необходимо выбирать существенно меньший шаг интегрирования h , чем в другие моменты времени.

5. Исследовать влияние конструктивных параметров и начальных условий полета на характер устойчивости аппарата, изменяя l — плечо горизонтального оперения — в пределах $[2, 10]$, начальную скорость в интервале $[50, 100]$.

Литература

1. Иродов Р.Д. Критерии продольной устойчивости экраноплана // Ученые записки ЦАГИ, т. 1, N 4. С. 63-72.
2. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задание 10. Задача о форме лежащей капли.

1. Постановка задачи [1]. Если поверхность раздела двух сред искривлена, то вблизи нее давления в обеих средах различны. Для определения этой разности давлений (называемой поверхностным давлением) используется условие термодинамического равновесия обеих сред друг с другом известное как уравнение Лапласа

$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, R_1, R_2 — главные радиусы кривизны в данной точке поверхности. Используем это условие для определения формы капли несжимаемой жидкости объема V_0 , лежащей на плоскости и находящейся в поле тяжести, предполагая что вторая среда есть атмосфера, давление которой на протяжении размеров капли постоянно. Введем цилиндрические координаты (r, z) с началом в вершине капли Тогда $p_2 = \text{const}$, $p_1 = \text{const} - \rho g z$, (ось Oz направлена вверх). Таким образом, условие равновесия приобретает вид:

$$-Z = \alpha^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}, \quad Z = z - z_0, \quad z_0 = \text{const} > 0. \quad (1)$$

Предположим также, что капля образует с плоскостью угол ϕ_0 . Учитывая цилиндрическую симметрию капли, ее форму будем искать в виде кривой вращения вокруг оси Oz , параметрический вид которой $(r(s), Z(s), \phi(s))$, где s — длина дуги, через $\phi(s)$ обозначен угол между нормалью к кривой и осью Oz . Если учесть, что в этом случае

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\sin(\phi)}{r}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{d\phi}{ds},$$

то из (1) получим

$$\frac{d\phi}{ds} = -\frac{\sin(\phi)}{r} - \frac{Z}{\alpha^2}. \quad (2)$$

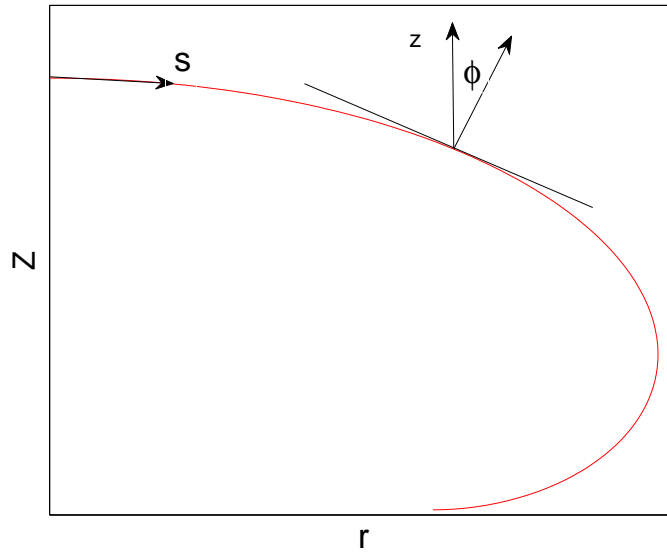


Рис. 1. Параметризация поверхности лежащей капли.

Добавив уравнения

$$\frac{dr}{ds} = \cos(\phi), \quad \frac{dZ}{ds} = -\sin(\phi), \quad (3)$$

для определения формы капли получим систему из трех уравнений (2), (3), которые дополним начальными условиями

$$r(0) = 0, \quad Z(0) = -z_0, \quad \phi(0) = \phi_0. \quad (4)$$

Из вида уравнений (2), (3) следует, что форма поверхности жидкости определяется постоянной α , называемой капиллярной постоянной. Она имеет размерность длины. Для воды $\alpha = 0.39$ см. (при 20°C). Величина z_0 определяется из условия, что капля имеет заданный объем V_0 .

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 2-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h, y_n + hk_1), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + k_2)/2. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$y_1' = y_1/(2 + 2t) - 2ty_2, \quad y_2' = y_2/(2 + 2t) + 2ty_1,$$

на отрезке $[0, 2]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t^2)\sqrt{1+t}, \quad y_2 = \sin(t^2)\sqrt{1+t}.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^2 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Решить систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Для нескольких значений z_0 и ϕ_0 рассчитать форму капли. Привести их графики в координатах (r, Z) и графики функций $r(t)$, $Z(t)$, $\phi(t)$ на отрезке интегрирования.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. 1. Обратите внимание на особенность при $s = 0$. При малых s имеем $r \approx s$, $\phi \approx ks$, $Z \approx -z_0$; из уравнения (2) получим $k = z_0/(2\alpha^2)$. Поэтому $\sin(\phi)/r \rightarrow k$ при $s \rightarrow 0$.

2. Интегрирование, очевидно, ведется до тех пор, пока функция $\phi(s)$ не станет равной $\pi - \phi_0$.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. - М.: Наука, 1986.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.

Задание 11. Математическая модель роста опухоли.

Клетки опухоли содержат особые вещества (антигены), которые вызывают резкую иммунную реакцию у больного. Эта реакция состоит в том, что производятся клетки — лимфоциты, которые атакуют и уничтожают клетки опухоли. Модель оперирует следующими переменными (имеется в виду плотность названной популяции клеток):

- L — свободные лимфоциты на поверхности опухоли;
- C — опухолевые клетки внутри опухоли и на ее поверхности;
- C_S — опухолевые клетки на поверхности опухоли;
- C_N — опухолевые клетки на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами;
- C_F — опухолевые клетки внутри и на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами;

Ясно, что $C = C_F - C_N + C_S$. Предполагается, что шарообразная форма опухоли не меняется, так что $C_S = K_1 C^{2/3}$, где K_1 — постоянная, и что взаимодействие опухолевых клеток с лимфоцитами происходит только на поверхности опухоли. Будем считать, что между количеством свободных и связанных лимфоцитами клеток опухоли выполняется соотношение $C_S - C_N = K_2 C_N L$ (правдоподобно ли это предположение?). Тогда из этих соотношений имеем

$$C_F = C - K_1 K_2 L C^{2/3} / (1 + K_2 L), \quad C_N = K_1 C^{2/3} / (1 + K_2 L),$$

т.е. переменные L и C можно взять за основные переменные модели, которая имеет следующий вид

$$\begin{aligned} L' &= (-\lambda_1 + \alpha_1 C_N (1 - L/L_M)) L, \\ C' &= \lambda_2 C_F - \alpha_2 C_N L. \end{aligned}$$

Здесь λ_1 характеризует уровень естественной смертности лимфоцитов, следующее слагаемое — их стимуляцию: когда L мало, стимуляция свободных лимфоцитов возрастает линейно с ростом C_N и что существует максимальный размер популяции L_M , при котором стимуляция обращается в нуль. Первое слагаемое во втором уравнении описывает рост опухоли, не подвергающейся атакам лимфоцитов, а второй член учитывает взаимодействие свободных лимфоцитов с опухолевыми клетками на поверхности опухоли. Подставляя в уравнения значения C_N и C_F , можно переписать их в виде

$$\begin{aligned} x' &= (-\lambda_1 + \beta_1 y^{2/3}(1 - x/c)/(1 + x)) x, \\ y' &= \lambda_2 y - \beta_2 x y^{2/3}/(1 + x), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x = K_2 L$, $c = K_2 L_M$, $y = K_1 C$, а λ_1 , λ_2 , β_1 , β_2 — положительные параметры. Так как x и y — размеры популяций, они должны быть неотрицательными, а x не может превышать c , поскольку L ограничено сверху величиной L_M . Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (2)$$

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 3-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ k_3 &= f(t_n + 3/4h, y_n + 3/4hk_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(2k_1 + 3k_2 + 4k_3)/9. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^3 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?
4. Для значений параметра $\beta_2 = 3; 3.48; 5$ при помощи разработанной процедуры рассчитать динамику популяции при различных начальных значениях размера опухоли $y_0 \in [0.5, 9]$. Привести графики наиболее характерных решений в координатах (x, y) и дать их интерпретацию. Параметры: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \beta_1 = 1, c = 3, t \in [0, 20]$.

Литература

1. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задание 12. Система типа хищник-жертва. Модель Холлинга-Тернера.

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник-жертва, при наличии внутривидовой конкуренции жертв за ограниченные ресурсы и учете фактора насыщения хищника. Обозначим через $x = x(t)$ и $y = y(t)$ плотности популяций жертв и хищников в момент времени t . Уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}x' &= r(1 - x/K)x - \frac{wxy}{D + x}, \\y' &= s(1 - J \frac{y}{x})y,\end{aligned}\tag{1}$$

где r, s, w, K, D, J — неотрицательные числа. Структура уравнений следующая

- Слагаемое $r(1 - x/K)x$ определяет скорость размножения жертв в отсутствии хищников. При малых x скорость определяется величиной r и, таким образом, r характеризует норму рождаемости при малой плотности популяции. При большей плотности (до величины K) популяция растет, при $x > K$ — уменьшается в размерах (скорость отрицательна). Таким образом, это слагаемое описывает ограниченность ресурсов: окружающая среда может обеспечивать существование только популяции плотности меньшей K .
- Слагаемое $wxy/(D + x)$ описывает влияние хищников на популяцию жертв. Функция $wx/(D + x)$ характеризует количество жертв, убиваемых одним хищником в единицу времени (реакция хищника на плотность популяции жертвы). Здесь учтено, что при большой плотности жертв хищник убивает лишь w жертв единицу времени; т.е., перестает убивать, когда насыщается.
- Второе уравнение определяет изменение популяции хищников. При большой плотности жертв и достаточно малой плотности

хищников (величина Jy/x — мала) скорость прироста хищников определяется величиной s и, т.о., s характеризует норму рождаемости при благоприятных для хищников условиях. Величина J определяется количеством жертв, необходимых для поддержания жизни одного хищника. Поскольку популяция из x жертв может поддерживать не более чем x/J хищников, то при $y > x/J$ численность хищников должна уменьшиться. Модель, т.о., ограничивает численность хищников критической величиной x/J .

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$X = x/K, \quad Y = \left(\frac{J}{K}\right)y, \quad \tau = st, \quad \alpha = \frac{w}{Js}, \quad \beta = \frac{D}{K}, \quad \gamma = \frac{r}{s},$$

преобразуем уравнения (1) к виду

$$\begin{aligned} X' &= \gamma(1 - X)X - \frac{\alpha XY}{\beta + X}, \\ Y' &= (1 - \frac{Y}{X})Y, \end{aligned} \tag{2}$$

и дополним их начальными условиями

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0. \tag{3}$$

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 3-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ k_3 &= f(t_n + 3/4h, y_n + 3/4hk_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(2k_1 + 3k_2 + 4k_3)/9. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^3 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Найти стационарные решения (состояния равновесия) системы (2). Как они зависят от параметров задачи?

5. Решить систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Для двух наборов начальных условий (3) в окрестности состояния равновесия и значений параметра α из интервала $[1, 30]$ рассчитать динамику популяции при следующих исходных данных

$$\beta = 0.13, \quad \gamma = 5, \quad X_0 = 0.5, \quad Y_0 = 0.5.$$

Определите те значения параметра α при которых в системе появляются и исчезают устойчивые автоколебания (предельный цикл). Приведите графики наиболее характерных решений в координатах (X, Y) , $(X(t), t)$ и $(Y(t), t)$ и дайте их интерпретацию.

Литература

1. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. - М.: Мир, 1986.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1990.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.

Задание 13. Динамика химического реактора.

Рассмотрим модель химического реактора, которая представляет собою открытую гомогенную систему полного перемешивания [1]. В такой системе происходит непрерывный тепло — и массообмен с окружающей средой (открытая система), а химические реакции протекают в пределах одной фазы (гомогенность). Условие идеального перемешивания позволяет описывать все процессы при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предположим, что рассматриваемый химический реактор — это емкость (цилиндрический сосуд с кожухом), в которую непрерывно подается вещество A с концентрацией c_0 и температурой T_B .¹⁾ Пусть в результате химической реакции $A \rightarrow B + Q$ образуется продукт B и выделяется тепло Q , а смесь продукта и реагента выводится из системы со скоростью, характеризуемой величиной λ . Тепло, образующееся во время реакции, отводится потоком вещества и посредством теплопередачи через стенку реактора. Последнее характеризуется температурой стенки T_{st} и коэффициентом теплообмена ω . Для составления уравнений динамики химического реактора воспользуемся законами химической кинетики, выражающими зависимость скорости химического превращения от концентраций реагирующих веществ и от температуры, законом сохранения массы, а также законом сохранения энергии (условием температурного баланса реактора).

В результате получим уравнения

$$\begin{aligned}c' &= -ce^{-1/T} + \lambda(c_0 - c), \\T' &= ce^{-1/T} + \beta(T_0 - T),\end{aligned}$$

где c — концентрация, T — температура реагента, а параметры T_0 , β связаны с введенными выше величинами при помощи соотношений

$$T_0 = \frac{\lambda T_B + \omega T_{st}}{\lambda + \omega}, \quad \beta = \lambda + \omega.$$

¹⁾Все величины предполагаются заданными в безразмерном виде.

Уравнения дополняются начальными условиями

$$c(0) = c_0, \quad T(0) = T_0.$$

Таким образом, рассматриваемая модель химического реактора имеет четыре существенных параметра: c_0 , T_0 , λ , β , которые являются положительными величинами. В соответствии с физическим смыслом неизвестные $c(t)$, $T(t)$ также положительны.

Время окончания химической реакции полагается равным $T = 15$.

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + hk_1/3), \\ k_3 &= f(t_n + h/3, y_n + hk_1/6 + hk_2/6), \\ k_4 &= f(t_n + h/2, y_n + hk_1/8 + 3hk_3/8), \\ k_5 &= f(t_n + h, y_n + hk_1/2 - 3hk_3/2 + 2hk_4), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_4 + k_5)/6. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений,

$$y_1' = y_1/(2 + 2t) - 2ty_2, \quad y_2' = y_2/(2 + 2t) + 2ty_1,$$

имеющей точное решение (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t^2)\sqrt{1+t}, \quad y_2 = \sin(t^2)\sqrt{1+t}$$

на отрезке $[0, 2]$.

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^5 от выбранного шага h . Дать интерпретацию полученных графиков.

4. Решить исходную систему уравнений при помощи разработанной процедуры для следующих данных

$$c_0 = 120, \quad T_0 = 0.23, \quad \lambda = 0.45, \quad \beta = 45.$$

Приведите график решения в фазовом пространстве (c, T) . Вы должны обнаружить устойчивый предельный цикл в решении, что свидетельствует об автоколебательном режиме работы реактора.

5. Изменяя c_0 на интервале (100, 135) определить те значения начальной концентрации c_0 , при которых в системе происходит бифуркация: устойчивый фокус \rightarrow предельный цикл \rightarrow устойчивый фокус.

Результаты расчетов представить в виде графиков в фазовой плоскости (T, c) , а также характерные расчеты в виде графиков зависимости T и c от t .

Литература

1. Вольтер В.В., Сальников И.Е. Устойчивость режимов работы химических реакторов. — М.: Химия, 1972.
2. Розенброк Х., Стори С. Вычислительные методы для инженеров химиков. — М.: Мир, 1968.
3. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
4. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М. : Наука, 1987.

Задание 14. Задача о полете ракеты-1.

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим полет ракеты, выпущенной с начальной скоростью v под углом θ_0 к горизонту, при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости ракеты;
- дальность полета ракеты не превышает 100 км;
- боковой ветер отсутствует.

При сделанных допущениях можно считать, что земля плоская и вся траектория ракеты лежит в одной плоскости xOy . Уравнения движения центра масс ракеты в проекциях на оси координат запишутся в виде

$$\begin{aligned}x'' &= (T - C\rho S v^2/2) \cos(\theta)/m - m'x'/m, \\y'' &= (T - C\rho S v^2/2) \sin(\theta)/m - m'y'/m - g,\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $m = m(t)$ — масса ракеты, $v = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$ — скорость движения, $\theta = \arctg(y'/x')$ — угол между касательной к траектории и осью Ox , g — ускорение силы тяжести, S — площадь поперечного сечения ракеты, ρ — плотность воздуха, C — коэффициент лобового сопротивления ракеты, $T = T(t)$ — сила тяги при работе двигателя ракеты.

Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0.\tag{2}$$

Введением новых неизвестных $v_1 = x'$, $v_2 = y'$ уравнения (1) сводятся к 4-м уравнениям 1-го порядка.

Задание

1. Проверить правильность вывода исходной системы уравнений. Приведите соответствующий рисунок с указанием действующих на ракету сил.

2. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 3-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + hk_1/2), \\ k_3 &= f(t_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_2 + k_3)/6. \end{aligned}$$

3. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$y_1' = e^{2t}y_2, \quad y_2' = -e^{-2t}y_1,$$

на отрезке $[0, 4]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = e^t, \quad y_2 = e^{-t}.$$

4. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^3 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

5. Решить систему уравнений (1), (2) при помощи разработанной программы. Рассчитать траектории полета ракеты при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} m(0) &= 30 \text{ кг.}, \quad C = 0.2, \quad \rho = 1.29 \text{ кг./м}^3, \\ S &= 0.25 \text{ м}^2, \quad g = 9.81, \quad v_0 = 50 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

и значениях начального угла $\theta_0 \in [30^\circ, 80^\circ]$. Начальная масса топлива равна 15 кг. Двигатель работает в течение первых 4-х сек. до полного выгорания топлива, $T = 5$, топливо выгорает с постоянной скоростью. При каком значении θ_0 дальность полета $L = L(\theta_0)$ будет максимальной. Привести графики траекторий полета в координатах (x, y) и график $L(\theta_0)$.

Литература

1. Дж.Ортега, У.Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задание 15. Задача о форме висящей капли.

1. Постановка задачи [1]. Если поверхность раздела двух сред искривлена, то вблизи нее давления в обеих средах различны. Для определения этой разности давлений (называемой поверхностным давлением) используется условие термодинамического равновесия обеих сред друг с другом известное как уравнение Лапласа

$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, R_1, R_2 — главные радиусы кривизны в данной точке поверхности. Используем это условие для определения формы капли несжимаемой жидкости объема V_0 , висящей на плоскости и находящейся в поле тяжести, предполагая что вторая среда есть атмосфера, давление которой на протяжении размеров капли постоянно. Введем цилиндрические координаты (r, z) с началом в вершине капли. Тогда $p_2 = \text{const}$, $p_1 = \text{const} - \rho g z$, (ось Oz направлена вниз). Таким образом, условие равновесия приобретает вид:

$$-Z = \alpha^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}, \quad Z = z - z_0, \quad z_0 = \text{const} > 0. \quad (1)$$

Предположим также, что капля образует с плоскостью угол $\phi_0 = 0$. Учитывая цилиндрическую симметрию капли, ее форму будем искать в виде кривой вращения вокруг оси Oz , параметрический вид которой $(r(s), Z(s), \phi(s))$, где s — длина дуги, через $\phi(s)$ обозначен угол между нормалью к кривой и осью Oz . Если учесть, что в этом случае

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\sin(\phi)}{r}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{d\phi}{ds},$$

то из (1) получим

$$\frac{d\phi}{ds} = -\frac{\sin(\phi)}{r} - \frac{Z}{\alpha^2}. \quad (2)$$

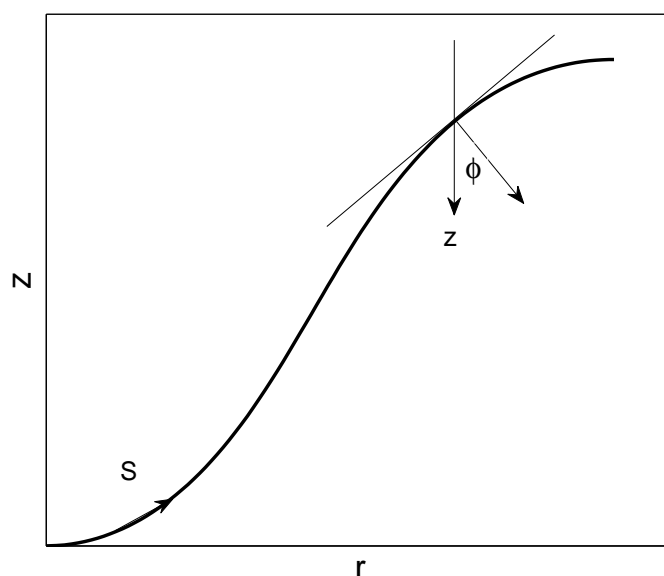


Рис. 2. Параметризация поверхности висящей капли.

Добавив уравнения

$$\frac{dr}{ds} = \cos(\phi), \quad \frac{dZ}{ds} = \sin(\phi), \quad (3)$$

для определения формы капли получим систему из трех уравнений (2), (3), которые дополним начальными условиями

$$r(0) = 0, \quad Z(0) = -z_0, \quad \phi(0) = 0. \quad (4)$$

Из вида уравнений (2),(3) следует, что форма поверхности жидкости определяется постоянной α , называемой капиллярной постоянной. Она имеет размерность длины. Для воды $\alpha = 0.39$ см. (при 20°C). Величина z_0 определяется из условия, что капля имеет заданный объем V_0 .

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 2-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ y_{n+1} &= y_n + hk_2. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned}y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1),\end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^2 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Решить систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Для нескольких значений z_0 рассчитать форму капель. Привести их графики в координатах (r, Z) и графики функций $r(t)$, $Z(t)$, $\phi(t)$ на отрезке интегрирования

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Обратите внимание на особенность при $s = 0$. При малых s имеем $r \approx s$, $\phi \approx ks$, $Z \approx -z_0$; из уравнения (2) получим $k = z_0/(2\alpha^2)$. Поэтому $\sin(\phi)/r \rightarrow k$ при $s \rightarrow 0$.

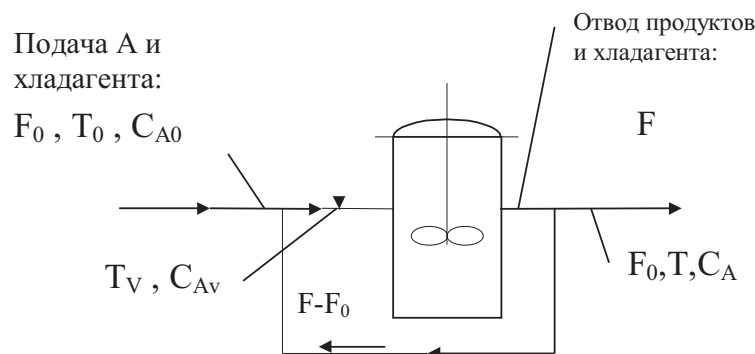
2. Интегрирование, очевидно, ведется до тех пор, пока функция $\phi(s)$ не станет равной ϕ_0 .

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. - М.: Наука, 1986.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.

Задание 16. Реактор проточного типа с полным перемешиванием: реакция типа $A \longrightarrow$ продукты с рециклом.

1. Постановка задачи [1]. Рассматриваемый реактор (цилиндрический сосуд объемом V , снабженный охлаждающим кожухом) схематически представлен на рисунке. Будем предполагать, что ре-



акционная смесь полностью перемешивается и что в реакторе происходит практически необратимая реакция. Объемный расход F_0 , входная концентрация C_{A0} , температура на входе T_0 , коэффициент теплопередачи U , площадь поверхности теплообмена S , теплоемкость на единицу объема C_p и теплота реакции H_r считаются постоянными; молярная концентрация C_A , температура смеси и охлаждающей среды T не зависят от координат и могут быть только функциями времени t . С учетом этих предположений уравнения баланса массы и энтальпии можно представить в виде

$$\begin{aligned} VC'_A &= F(C_{AV} - C_A) - r(C_A, T)V, \\ VC_P T' &= FC_P(T_V - T) + r(C_A, T)(-H_r)V - US(T - T_c), \end{aligned} \quad (1)$$

где $T_V = \Lambda T_0 + (1 - \Lambda)T$, $C_{AV} = \Lambda C_{A0} + (1 - \Lambda)C_A$, $\Lambda = F_0/F$. При этом реактор без рецикла соответствует случаю $\Lambda = 1$. Рассмотрим реакцию первого порядка, для которой $r = kC_A = k_\infty C_A \exp(-E/RT)$.

2. Безразмерная форма уравнений. Определим безразмерные величины:

$$x = \frac{C_{A0} - C_A}{C_{A0}}, \quad \theta = \frac{E}{RT_0^2} (T - T_0), \quad Da = k(T_0)V/F, \quad \tau = \frac{tF}{V},$$

$$\gamma = E/RT_0, \quad \theta_C = \frac{E}{RT_0^2} (T_C - T_0), \quad \beta = \frac{US}{FC_P}, \quad B = \frac{-H_r C_{A0}}{C_P T_0} \frac{E}{RT_0}.$$

Тогда уравнения (1) в новых переменных переписутся в виде

$$x' = -\Lambda x + Da (1 - x) \exp \left(\frac{\theta}{1 + \theta/\gamma} \right),$$

$$\theta' = -\Lambda \theta + Da B (1 - x) \exp \left(\frac{\theta}{1 + \theta/\gamma} \right) - \beta (\theta - \theta_C). \quad (2)$$

Уравнения (2) дополняются начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (3)$$

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/4, y_n + h/4k_1), \\ k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_1 - 2hk_2 + 2hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_3 + k_4)/6. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\alpha y_1 - \beta y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \\ y_2' &= \beta y_1 - \alpha y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 4]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = y_2 = e^{-t}, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Решить систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Приведите наиболее характерные графики траекторий в фазовом пространстве (x, θ) и графики $x(t), \theta(t)$ на интервале интегрирования при разных значениях Da из отрезка $[0.05, 0.11]$ при следующих исходных данных

$$x_0 = 0.6, \quad \theta_0 = 0.25, \quad \gamma = 10000, \quad \beta = 0.8, \quad \Lambda = 0.5, \quad \theta_C = 0, \quad B = 10.$$

Дайте их интерпретацию. Найдите те значения Da при которых появляется и исчезает предельный цикл, свидетельствующий об автоколебательном режиме работы реактора.

Литература

1. Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. — М.: Мир, 1991.
2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задание 17. Задача о полете ракеты-2.

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим полет ракеты, выпущенной с начальной скоростью v под углом θ_0 к горизонту, при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости ракеты;
- дальность полета ракеты не превышает 100 км;
- боковой ветер отсутствует.

При сделанных допущениях можно считать, что земля плоская и вся траектория ракеты лежит в одной плоскости xOy . Уравнения движения центра масс ракеты в проекциях на оси координат запишутся в виде

$$\begin{aligned}x'' &= (T - C\rho S v^2/2) \cos(\theta)/m - m'x'/m, \\y'' &= (T - C\rho S v^2/2) \sin(\theta)/m - m'y'/m - g,\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $m = m(t)$ — масса ракеты, $v = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$ — скорость движения, $\theta = \arctg(y'/x')$ — угол между касательной к траектории и осью Ox , g — ускорение силы тяжести, S — площадь поперечного сечения ракеты, ρ — плотность воздуха, C — коэффициент лобового сопротивления ракеты, $T = T(t)$ — сила тяги при работе двигателя ракеты.

Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0.\tag{2}$$

2. Преобразование уравнений. Для численного решения удобно преобразовать два уравнения 2-го порядка (1) к системе четырех уравнений 1-го порядка. Дифференцируя соотношения

$$x' = v \cos(\theta), \quad y' = v \sin(\theta),\tag{3}$$

имеем

$$x'' = v' \cos(\theta) - v \sin(\theta)\theta', \quad y'' = v' \sin(\theta) + v \cos(\theta)\theta'.$$

Подставляя теперь эти производные в уравнения (1) и разрешая полученные соотношения относительно v' и θ' получим

$$\begin{aligned} v' &= (T - C\rho S v^2/2)/m - m'v/m - g \sin(\theta), \\ \theta' &= -g \cos(\theta)/v. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (3), (4), вместе с начальными условиями (2), полностью описывают траекторию полета ракеты.

Задание

1. Проверить правильность вывода исходной системы уравнений. Приведите соответствующий рисунок с указанием действующих на ракету сил.
2. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 2-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + 2/3h, y_n + 2/3hk_1), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_2)/4. \end{aligned}$$

3. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\alpha y_1 - \beta y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \\ y_2' &= \beta y_1 - \alpha y_2 + (\alpha + \beta - 1)e^{-t}, \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 4]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = y_2 = e^{-t}, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 10.$$

4. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^2 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?
5. Решить систему уравнений (3), (4) при помощи разработанной программы. Рассчитать траектории полета ракеты при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} m(0) &= 50 \text{ кг.}, \quad C = 0.25, \quad \rho = 1.29 \text{ кг./м}^3, \\ S &= 0.35 \text{ м}^2, \quad g = 9.81, \quad v_0 = 60 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

и значениях начального угла $\theta_0 = [10^\circ, 80^\circ]$. Начальная масса топлива равна 15 кг. Двигатель работает в течение первых 3-х сек. до полного выгорания топлива, $T = 8$, топливо выгорает с постоянной скоростью. При каком значении θ_0 дальность полета $L = L(\theta_0)$ будет максимальной. Привести графики траекторий полета в координатах (x, y) , графики $v(t)$, $\theta(t)$, $L(\theta_0)$.

Литература

1. Дж.Ортега, У.Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задание 18. Оптимизация химической реакции.

Уравнения, описывающие поведение концентрации химических веществ в смеси, где происходит химическая реакция, имеют вид

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(y), \quad i = 1, 2 \dots n, \quad y = (y_1, \dots, y_n), \quad (1)$$

где $f_i(y)$ — однородные многочлены от y_1, \dots, y_n . Уравнения $f_i(y) = 0$ определяют равновесные концентрации компонентов смеси. Коэффициенты многочленов $f_i(y)$ связаны с константами скоростей химических реакций и могут в некоторой естественной системе единиц иметь огромные значения. Если в уравнении (1) y_1, \dots, y_{n-1} — концентрации, а y_n — температура смеси, то функции $f_i(y)$ — многочлены только от y_1, \dots, y_{n-1} , коэффициенты которых — функции от y_n , которые могут изменяться на много порядков.

Постановка задачи. Рассматривается химическая реакция, протекающая в смеси трех веществ и описываемая системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -(k_1(T) + k_2(T) + k_3(T))y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= k_1(T)y_1 - k_4(T)y_2, \\ \frac{dy_3}{dt} &= k_4(T)y_2 - k_5(T)y_3, \end{aligned}$$

где y_1 — концентрация исходного вещества (сырья), y_2 — концентрация промежуточного вещества, y_3 — концентрация окончательного продукта, $T = T(t)$ — температура, $k_i = k_i(T)$, $i = 1, 2 \dots 5$, — функции, определяемые кинетикой данной реакции, имеют следующий вид (согласно закону Аррениуса):

$$k_i(T) = C_i \exp \left(\frac{E_i}{R} \left(\frac{1}{658} - \frac{1}{T} \right) \right).$$

Параметры, определяющие функции k_i заданы:

$$C_1 = 1.02, \quad C_2 = 0.93, \quad C_3 = 0.386, \quad C_4 = 3.28, \quad C_5 = 0.084,$$

$$E_1 = 16000, E_2 = 14000, E_3 = 15000, E_4 = 10000, E_5 = 15000, \\ R = 1.9865.$$

Заданы начальные условия

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0.$$

Время окончания химической реакции полагается равным $T = 1$.
Температура меняется во времени по закону

$$T(t) = \begin{cases} 823 & 0 \leq t \leq t_0, \\ 673 & t_0 \leq t \leq t_1, \\ 580 & t_1 \leq t \leq T, \end{cases}$$

где $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T$.

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Мерсона 5-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + hk_1/3), \\ k_3 &= f(t_n + h/3, y_n + hk_1/6 + hk_2/6), \\ k_4 &= f(t_n + h/2, y_n + h/8k_1 + 3/8hk_3), \\ k_5 &= f(t_n + h, y_n + h/2k_1 - 3/2hk_3 + 2hk_4), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 4k_4 + k_5)/6. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= y_1 + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^5 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?
4. Решить исходную систему уравнений при $t_0 = 0.14$, $t_1 = 0.5$ при помощи разработанной процедуры. Результаты расчетов представить в виде графиков $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ на отрезке $[0, T]$.
5. Полагая $t_1 = 0.5$ и изменяя t_0 на интервале $(0.05, 0.5)$ максимизировать выход продукта при $T = 1$.

Литература

1. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
2. Розенброк Х., Стори С. Вычислительные методы для инженеров химиков. — М.: Мир, 1968.
3. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1990.
4. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М. : Наука, 1987.

Задание 19. Оптимизация вертикального подъема ракеты.

Уравнения вертикального подъема ракеты могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}m' &= -q(t), \\z' &= v, \\v' &= -g + \frac{1}{m}(\alpha q(t) - C\rho v^2).\end{aligned}$$

Здесь t — время, m — масса ракеты, q — расход топлива, z — вертикальная координата (высота), v — скорость ракеты, g — ускорение силы тяготения, α — постоянная, характеризующая зависимость силы тяги от расхода топлива, $C\rho v^2$ — лобовое сопротивление, $C = \text{const}$ — характеризует взаимодействие ракеты с обтекающим потоком, $\rho = \exp(-\gamma z^2)$ — плотность воздуха, $\gamma = \text{const}$ — характеризует убывание плотности атмосферы с увеличением высоты.

Начальные условия

$$m(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad v(0) = 0.$$

Предполагается выполненной следующая зависимость расхода топлива от времени:

$$q(t) = \begin{cases} m_T/t_s, & t \leq t_s, \\ 0, & t > t_s, \end{cases}$$

где m_T — масса топлива в начальный момент времени, t_s — время полного выгорания топлива.

Задание.

1. Проверить правильность вывода исходной системы уравнений. Приведите соответствующий рисунок с указанием действующих на ракету сил.

2. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 2-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h, y_n + hk_1), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + k_2)/2. \end{aligned}$$

3. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$y_1' = y_1/(2 + 2t) - 2ty_2, \quad y_2' = y_2/(2 + 2t) + 2ty_1,$$

на отрезке $[0, 2]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t^2)\sqrt{1+t}, \quad y_2 = \sin(t^2)\sqrt{1+t}.$$

4. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^2 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

5. Решая систему уравнений движения ракеты при помощи разработанной процедуры, исследовать зависимость высоты полета от времени на интервале $(0, T)$, $T = 100$ при различном выборе шага сетки h . Результаты расчетов оформить в виде графиков $z = z(t)$.

Исходные данные [1,2]:

$$g = 0.01, \quad \alpha = 2, \quad C = 0.05, \quad \gamma = 0.01, \quad m_T = 0.8, \quad t_s = 20.$$

6. Найти величину $t_s \in [3, 30]$ так, чтобы максимизировать высоту подъема ракеты за время $T = 100$.

Литература

1. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
2. Энеев Т.М. О применении градиентного метода в задачах оптимального управления // Космические исследования, 1966, IV, № 5, с. 651.
3. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задание 20. Задача о полете снаряда-1.

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим полет снаряда, выпущенной с начальной скоростью v под углом θ_0 к горизонту, при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости снаряда;
- дальность полета снаряда не превышает 10 км;
- боковой ветер отсутствует.

При сделанных допущениях можно считать, что земля плоская и вся траектория снаряда лежит в одной плоскости xOy . Уравнения движения центра масс снаряда в проекциях на оси координат запишутся в виде

$$\begin{aligned}x'' &= -C\rho S v^2 \cos(\theta)/2m, \\y'' &= -C\rho S v^2 \sin(\theta)/2m - g,\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь m — масса снаряда, $v = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$ — скорость движения, $\theta = \arctg(y'/x')$ — угол между касательной к траектории и осью Ox , g — ускорение силы тяжести, S — площадь поперечного сечения снаряда, ρ — плотность воздуха, C — коэффициент лобового сопротивления снаряда.

Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0.\tag{2}$$

2. Преобразование уравнений. Для численного решения удобно преобразовать два уравнения 2-го порядка (1) к системе четырех уравнений 1-го порядка. Дифференцируя соотношения

$$x' = v \cos(\theta), \quad y' = v \sin(\theta),\tag{3}$$

имеем

$$x'' = v' \cos(\theta) - v \sin(\theta)\theta', \quad y'' = v' \sin(\theta) + v \cos(\theta)\theta'.$$

Подставляя теперь эти производные в уравнения (1) и разрешая полученные соотношения относительно v' и θ' получим

$$\begin{aligned} v' &= -C\rho S v^2/(2m) - g \sin(\theta), \\ \theta' &= -g \cos(\theta)/v. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (3), (4), вместе с начальными условиями (2), полностью описывают траекторию полета снаряда.

Задание

1. Проверить правильность вывода исходной системы уравнений. Приведите соответствующий рисунок с указанием действующих на снаряд сил.
2. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + h/3k_1), \\ k_3 &= f(t_n + 2/3h, y_n - h/3k_1 + hk_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_1 - hk_2 + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)/8. \end{aligned}$$

3. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = 2y_1^2(1 - 4t^2y_1),$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = 1/(1 + t^2), \quad y_2 = -2t/(1 + t^2)^2.$$

4. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?
5. Решить систему уравнений (3), (4) при помощи разработанной программы. Рассчитать траектории полета снаряда при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} m &= 45 \text{ кг}, \quad C = 0.25, \quad \rho = 1.29 \text{ кг./м}^3, \\ S &= 0.35 \text{ м}^2, \quad g = 9.81, \quad v_0 = 60 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

и значениях начального угла $\theta_0 \in [20^\circ, 70^\circ]$. При каком значении θ_0 дальность полета $L = L(\theta_0)$ будет максимальной. Привести характерные графики траекторий полета в координатах (x, y) , соответствующие им графики $v(t)$, $\theta(t)$, а также $L(\theta_0)$.

Литература

1. Дж.Ортега, У.Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задание 21. Колебания связанных маятников.

Колебания двух маятников, связанных пружиной, в среде, которая оказывает сопротивление, прямо пропорциональное квадрату скорости движения, могут быть описаны системой уравнений (см., напр. [1]):

$$\begin{aligned}x_1'' &= -\omega_1^2 x_1 - \alpha(x_1 - x_2) - C_1 v_1 |v_1|, \\x_2'' &= -\omega_2^2 x_2 - \alpha(x_2 - x_1) - C_2 v_2 |v_2|,\end{aligned}$$

где t — время, x_1 — смещение от положения равновесия первого маятника, x_2 — смещение от положения равновесия второго маятника, ω_1 — частота собственных колебаний первого маятника, ω_2 — частота собственных колебаний второго маятника, α — жесткость пружины связывающей маятники, C_1 , C_2 — постоянные, характеризующие сопротивление среды для первого и второго маятников соответственно.

Введением новых неизвестных $v_1 = x_1'$, $v_2 = x_2'$ уравнения сводятся к 4-м уравнениям 1-го порядка.

Задание.

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n), \\k_2 &= f(t_n + h/3, y_n + h/3k_1), \\k_3 &= f(t_n + 2/3h, y_n - h/3k_1 + hk_2), \\k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_1 - hk_2 + hk_3), \\y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)/8.\end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = 2y_1^2(1 - 4t^2y_1),$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = 1/(1 + t^2), \quad y_2 = -2t/(1 + t^2)^2.$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h .

4. Решая исходную систему уравнений при помощи разработанной программы, исследовать колебания маятников. Результаты расчетов представить в виде графиков (x_1, x_2) , а также $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $t \in [0, T]$. Начальные условия:

$$x_1(0) = 0.1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2'(0) = 0.$$

Исходные данные:

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 1, \quad \alpha = 0.05, \quad C_1 = C_2 = 0, \quad T = 120.$$

5. Исследовать влияние на характер колебательного процесса жесткости пружины и сопротивления среды, меняя α в пределах $[0.05, 100]$, C_1 в пределах $[0, 1]$. Дайте комментарий полученным решениям.

Литература

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
2. Самарский А.А, Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.

Задание 21. Система типа хищник-жертва. Модель Вольтерра.

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник-жертва. Обозначим через $x = x(t)$ и $y = y(t)$ плотности популяций жертв и хищников в момент времени t . Предположим, что

- жертва может найти достаточно пищи для пропитания;
- при каждой встрече с хищником последний убивает жертву;
- норма рождаемости жертв x_b , нормы естественной смертности жертв x_d и хищников c являются постоянными, $a = x_b - x_d > 0$.
- число случаев, когда хищник убивает жертву, зависит от вероятности их встречи и, следовательно, пропорционально произведению xy ; в результате встреч с жертвами число хищников увеличивается.

При сделанных допущениях динамика популяции описывается следующей моделью

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy, \\y' &= -cy + dxy,\end{aligned}\tag{1}$$

известной как уравнения Лотки-Вольтерра (1925 г.).

2. Безразмерная форма уравнений. Вводя безразмерные величины

$$X = \left(\frac{d}{a}\right)x, \quad Y = \left(\frac{b}{a}\right)y, \quad \tau = at, \quad \sigma = \frac{c}{a},$$

преобразуем уравнения (1) к виду

$$\begin{aligned}X' &= X - XY, \\Y' &= -\sigma Y + XY.\end{aligned}\tag{2}$$

Дополним их начальными условиями

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0.\tag{3}$$

Из вида уравнений (2) следует, что динамика популяции характеризуется только одним существенным положительным параметром σ (равным отношению прироста жертв к естественной смертности хищников).

Задание

1. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ k_3 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_2), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3), \\ y_{n+1} &= y_n + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6. \end{aligned}$$

2. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + t^2 + 6t + 1, \\ y_2' &= y_1 - 3t^2 + 3t + 1, \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 3]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = 3t^2 - t - 1 + \cos(t) + \sin(t), \quad y_2 = t^2 + 2 - \cos(t) + \sin(t).$$

3. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^4 от выбранного шага h . Какие выводы можно сделать из полученных графиков?

4. Найти стационарные решения (состояния равновесия) системы (2). Как они зависят от параметра σ ?

5. Решить систему уравнений (2), (3) при помощи разработанной программы. Для двух наборов начальных условий (3) в окрестности состояния равновесия и нескольких значений параметра σ рассчитать динамику популяции. Какие типы решений наблюдаются? Приведите графики наиболее характерных решений в координатах (X, Y) , $(X(t), t)$ и $(Y(t), t)$ и дайте их интерпретацию.

Литература

1. Дж.Ортега, У.Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений . - М.: Наука, 1986
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.

Задание 22. Задача о движении двух небесных тел.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение двух тел под действием взаимного гравитационного притяжения. Пусть тело массой M находится в начале координатной системы xOy , радиус вектор $r = (x(t), y(t))$ определяет координаты второго тела массы m . Поскольку скорость движения $v = r' = (x', y')$, то в силу законов Ньютона

$$mv' = F, \quad F = \gamma \frac{mM}{|r|^3} r,$$

или в координатном виде

$$\begin{aligned} x'' &= -\alpha^2 \frac{x}{r^3}, \\ y'' &= -\alpha^2 \frac{y}{r^3}, \quad \alpha^2 = \gamma M, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

где γ — гравитационная постоянная. Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$x(0) = 1 - \varepsilon, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = \alpha \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}. \quad (2)$$

Задание

1. Проверить правильность вывода исходной системы уравнений. Приведите соответствующий рисунок с указанием сил, действующих на тело массой m .
2. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений второго порядка вида

$$y'' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Нюстрема 4-го по-

рядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n), \\k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2y'_n + h^2/8k_1), \\k_3 &= f(t_n + h, y_n + hy'_n + h^2/2k_2), \\y_{n+1} &= y_n + hy'_n + h^2(k_1 + 2k_2)/6, \\y'_{n+1} &= y'_n + h(k_1 + 4k_2 + k_3)/6.\end{aligned}$$

3. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned}y_1'' &= 0.5/(y_1y_2^2) + 0.5e^x, \\y_2'' &= 0.5/(y_2y_1^2) + 0.5e^{-x},\end{aligned}$$

на отрезке $[0, 3]$ с точным решением

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}.$$

4. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения ϵ и ϵ/h^4 от выбранного шага h . Пояснить результаты расчетов.

5. Решить систему уравнений (1) при помощи разработанной программы. Рассчитать орбиты для нескольких значений $\epsilon \in (0, 1)$, $\alpha = \pi/4$. Построить графики орбит в координатах (x, y) .

Литература

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.

Задание 24. Задача о полете снаряда-2.

1. Постановка задачи [1]. Рассмотрим полет снаряда, выпущенной с начальной скоростью v под углом θ_0 к горизонту, при следующих предположениях:

- сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости снаряда;
- дальность полета снаряда не превышает 10 км;
- боковой ветер отсутствует.

При сделанных допущениях можно считать, что земля плоская и вся траектория снаряда лежит в одной плоскости xOy . Уравнения движения центра масс снаряда в проекциях на оси координат запишутся в виде

$$\begin{aligned}x'' &= -C\rho S v^2 \cos(\theta)/2m, \\ y'' &= -C\rho S v^2 \sin(\theta)/2m - g,\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь m — масса снаряда, $v = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$ — скорость движения, $\theta = \arctg(y'/x')$ — угол между касательной к траектории и осью Ox , g — ускорение силы тяжести, S — площадь поперечного сечения снаряда, ρ — плотность воздуха, C — коэффициент лобового сопротивления снаряда.

Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0.\tag{2}$$

Введением новых неизвестных $v_1 = x'$, $v_2 = y'$ уравнения (1) сводятся к 4-м уравнениям 1-го порядка.

Задание

1. Проверить правильность вывода исходной системы уравнений. Приведите соответствующий рисунок с указанием действующих на снаряд сил.

2. Составить программу интегрирования задачи Коши для системы из n уравнений первого порядка вида

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad y(t) \in R^n,$$

на произвольном отрезке $[a, b]$, используя метод Рунге-Кутты 2-го порядка точности с постоянным шагом h :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + h/2k_1), \\ y_{n+1} &= y_n + hk_2. \end{aligned}$$

3. Тестировать программу на примере системы уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_1(y_1^2 + y_2^2 - 1), \\ y_2' &= \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2} + y_2(y_1^2 + y_2^2 - 1), \end{aligned}$$

на отрезке $[0, 5]$ с точным решением (проверьте!)

$$y_1 = \cos(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}, \quad y_2 = \sin(t)/(1 + e^{2t})^{1/2}.$$

4. Для тестовой задачи построить графики зависимости максимальной погрешности решения e и e/h^2 от выбранного шага h .

5. Решить систему уравнений (1) при помощи разработанной программы. Рассчитать траектории полета снаряда при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} m &= 15 \text{ кг}, \quad C = 0.2, \quad \rho = 1.29 \text{ кг./м}^3, \\ S &= 0.25 \text{ м}^2, \quad g = 9.81, \quad v_0 = 50 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

и значениях начального угла $\theta_0 = [25^\circ, 75^\circ]$. При каком значении θ_0 дальность полета $L = L(\theta_0)$ будет максимальной. Привести графики траекторий полета в координатах (x, y) , и график $L(\theta_0)$.

Литература

1. Дж.Ортега, У.Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.