

УДК 533.6  
ББК 22.253.3  
Г 49



*Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 08-01-07081*

Гиневский А.С., Желанников А.И. **Вихревые следы самолетов.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 172 с. — ISBN 978-5-9221-1019-8.

Излагаются методы математического моделирования вихревых следов самолетов при их полетах на больших высотах и вблизи земли на взлетно-посадочных режимах. Моделирование базируется на широком использовании метода дискретных вихрей при полетах самолета на больших высотах и на сочетании этого метода с интегральным методом расчета турбулентного пограничного слоя, образующегося при вторичном пристеночном поперечном течении, которое индуцируется вихревой системой самолета на взлетно-посадочных режимах. В последнем случае учитывается взаимодействие вихревого следа самолета и вторичных вихрей, образующихся при отрывах пограничного слоя.

Отдельно рассмотрены методы моделирования ближнего и дальнего вихревых следов самолетов с турбореактивными двигателями и воздушными винтами. Приведены результаты расчета вихревых следов ряда отечественных и зарубежных самолетов. При этом учитывается влияние турбулентности и стратификации атмосферы, наличие бокового ветра на взлетно-посадочных режимах.

Затраты машинного времени при моделировании вихревых следов предлагаемым способом на 3–4 порядка меньше по сравнению с известными численными методами.

Представлена нелинейная нестационарная математическая модель движения легких самолетов при их попадании в вихревой след тяжелого самолета с описанием возможных катастрофических последствий для легкого самолета. Приводится сопоставление данных расчетов и экспериментов.

Книга предназначена научным работникам и инженерам, а также преподавателям, аспирантам и студентам соответствующих вузов.

© ФИЗМАТЛИТ, 2008

ISBN 978-5-9221-1019-8

© А. С. Гиневский, А. И. Желанников, 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
Введение . . . . .	8
Глава 1. <b>Основные сведения</b> . . . . .	13
1.1. Атмосферная турбулентность . . . . .	13
1.2. Вихревой след самолетов . . . . .	16
1.3. Турбулентные характеристики вихревого следа . . . . .	21
1.4. Современные методы численного моделирования вихревых следов магистральных самолетов . . . . .	22
Глава 2. <b>Метод дискретных вихрей</b> . . . . .	25
2.1. Постановка задачи . . . . .	25
2.2. Основные положения метода дискретных вихрей . . . . .	29
2.3. Точечный вихрь . . . . .	30
2.4. Вихревой отрезок . . . . .	31
2.5. Замкнутая вихревая рамка . . . . .	32
2.6. Моделирование свободной турбулентности в отрывных и струйных течениях в рамках метода дискретных вихрей . . . . .	33
Глава 3. <b>Ближний вихревой след за одиночным самолетом</b> . . . . .	46
3.1. Схематизация самолета . . . . .	46
3.2. Вихревые схемы . . . . .	47
3.3. Особенности моделирования обтекания магистральных самолетов . . . . .	47
3.4. Характеристики ближнего следа за некоторыми самолетами . . . . .	49
Глава 4. <b>Дальний вихревой след самолета с ТРД</b> . . . . .	52
4.1. Алгоритм расчета дальнего вихревого следа за самолетами . . . . .	52
4.2. Математическая модель дальнего спутного следа . . . . .	54

4.3. Проверка существования и единственности решения . . . . .	55
4.4. О подобию течения в дальнем вихревом следе. . . . .	60
4.5. Универсальный блок перехода к математической модели дальнего вихревого следа. . . . .	63
4.6. Учет состояния атмосферы . . . . .	66
4.7. Проверка работоспособности метода и достоверности получаемых результатов. . . . .	68
4.8. Характеристики вихревого следа самолета Ил-76 . . . . .	69
4.9. Характеристики вихревого следа самолетов Ан-124, В-747 и А-380 . . . . .	76
<b>Глава 5. Вихревой след самолета с воздушными винтами. . . . .</b>	<b>83</b>
5.1. Постановка задачи . . . . .	83
5.2. Учет влияния воздушных винтов на характеристики дальнего вихревого следа . . . . .	84
5.3. Выбор количества вихрей для моделирования воздушного винта . . . . .	89
5.4. Примеры расчета характеристик дальнего вихревого следа самолетов с воздушными винтами в сравнении с экспериментальными данными. . . . .	90
5.5. Характеристики вихревого следа за самолетом Ан-26 . . . . .	91
5.6. Характеристики вихревого следа за самолетом Ан-12 . . . . .	97
5.7. Характеристики вихревого следа за самолетом С-130. . . . .	103
<b>Глава 6. Ветровой поток около рельефа местности . . . . .</b>	<b>110</b>
6.1. Основные условия . . . . .	110
6.2. Постановка задачи . . . . .	110
6.3. Метод решения. Схематизация участка местности. . . . .	111
6.4. Примеры расчета характеристик воздушного потока . . . . .	112
<b>Глава 7. Моделирование дальнего вихревого следа самолета при взлете и посадке . . . . .</b>	<b>116</b>
7.1. Постановка задачи . . . . .	116
7.2. Моделирование ближнего вихревого следа самолета. Линейная теория . . . . .	119
7.3. Приближенный расчет дальнего вихревого следа самолета . . . . .	126
7.4. Генерация поперечного течения вихревыми жгутами, расчет турбулентного пограничного слоя. . . . .	127
7.5. Расчет дальнего вихревого следа с учетом влияния пограничного слоя на поверхности аэродрома для самолета В-727. Сравнение расчета с летным экспериментом . . . . .	130
7.6. Расчет дальнего вихревого следа отечественных магистральных самолетов Ту-204 и Ил-96 при посадке . . . . .	133

---

7.7. Численная визуализация дальнего вихревого следа самолета вблизи земли. . . . .	134
7.8. Выводы и перспективы . . . . .	139
 <b>Глава 8. Аэродинамические характеристики самолетов в вихревом следе . . . . .</b>	<b>141</b>
8.1. Постановка задача . . . . .	141
8.2. Метод решения . . . . .	142
8.3. Проверка работоспособности метода и достоверности получаемых результатов. . . . .	143
8.4. Аэродинамические характеристики самолетов в дальнем вихревом следе от других самолетов. . . . .	146
8.5. Расчет влияния ветрового потока, обусловленного рельефом местности, на аэродинамические характеристики самолета . . . . .	150
8.6. Расчет характеристик динамики движения самолета в вихревом следе . . . . .	154
 Библиографический список . . . . .	161
Vortex wakes of aircraft . . . . .	167

## Предисловие

Исследования вихревых следов за различными самолетами, особенно за магистральными и тяжелыми транспортными, представляют научный и практический интерес. Сходящие с задних кромок крыла вихревые следы являются долго живущими и затухают на расстоянии 10–12 км от самолета. Попадание других самолетов, особенно легких, в вихревой след тяжелого самолета чревато катастрофическими последствиями. Особую актуальность приобретает процесс заправки в воздухе из-за опасности попадания заправляемого самолета в ближний вихревой след самолета-заправщика.

Очень важны исследования вихревых следов самолетов на режимах взлета и посадки, когда следы распространяются вблизи поверхности аэродрома и потенциально опасны для самолетов, которые выполняют взлет или посадку и могут попасть в вихревой след уже совершившего взлет или посадку самолета. Изучение вихревых следов особенно важно для аэропортов, в которых совершается большое число взлетов и посадок и указанная опасность служит причиной ограничения их пропускной способности.

Теоретические исследования вихревых следов самолетов интенсивно развиваются в ведущих авиационных державах. Для этого используют разнообразные методы математического моделирования турбулентных течений: прямое численное моделирование на основе уравнений Навье–Стокса, а также моделирование крупных вихрей на основе уравнений Навье–Стокса в сочетании с учетом подсеточных масштабов, моделирование на основе уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью какой-либо дифференциальной модели турбулентности. Указанные подходы использованы в работах отечественных и зарубежных ученых.

Следует также подчеркнуть важность экспериментальных исследований в аэродинамических трубах и натурных летных исследований вихревых следов за тяжелыми и легкими самолетами.

Родоначальником теоретических исследований вихревых следов самолетов в нашей стране является профессор С. М. Белоцерковский. Он показал, что эта проблема с успехом может быть решена на основе развитого им метода дискретных вихрей.

Предлагаемая вниманию читателей монография посвящена развитию этих идей применительно к моделированию вихревых следов в трудах учеников и последователей Сергея Михайловича в двух организациях — Военно-воздушной инженерной академии имени Н. Е. Жуковского и Центральном аэрогидродинамическом

институте имени Н.Е. Жуковского. Метод дискретных вихрей оказался наиболее простым и требующим для своей реализации существенно меньших затрат машинного времени по сравнению с перечисленными выше подходами. При этом метод дискретных вихрей используется для вычисления аэродинамических характеристик самолета и изучения процесса зарождения вихревых следов, их развития за самолетами и другими объектами (авианесущими кораблями, рельефом местности, городскими застройками).

Метод дискретных вихрей оказался весьма результативным при изучении стационарного и нестационарного течений идеальной жидкости, когда учет вязкости несущественен, при замкнутом описании свободных турбулентных течений с  $Re \rightarrow \infty$  в струях, следах и слоях смешения.

При решении ряда задач авторы используют дополнительную эмпирическую информацию, а при расчете вихревых следов вблизи земли — взаимодействие вихревых следов с индуцируемым им поперечным пристенным течением, порождающим турбулентный пограничный слой. Именно взаимодействие этого пограничного слоя при его отрыве с вихревым следом позволило рассчитать так называемый отскок вихревого следа, когда последний поднимается на высоту 20–50 м от поверхности взлетной полосы.

Считаю, что издание монографии явится серьезным вкладом в изучение этой важной и сложной проблемы.

Академик О. М. Белоцерковский

## Введение

Предлагаемая вниманию читателя монография посвящена численному моделированию вихревых следов за самолетами.

В настоящее время перед авиационными специалистами многих развитых стран стоит весьма актуальная проблема: как обеспечить в будущем необходимую пропускную способность аэропортов при прогнозируемом увеличении объема воздушных перевозок самолетами гражданской авиации к 2015 г. в 2,5–3 раза и одновременно снизить аварийность воздушного транспорта не менее чем в 3 раза. Одна из главных трудностей реализации подобных планов — обеспечение вихревой безопасности полетов. Суть проблемы вихревой безопасности полетов заключается в том, что любой летящий самолет оставляет в атмосфере долгоживущий вихревой след, представляющий опасность для попадающих в него других самолетов. Протяженность такого опасного следа для магистральных самолетов в зависимости от состояния атмосферы достигает 10–12 км, а иногда и 15 км. На больших расстояниях след исчезает. Это связано с его затуханием за счет естественной диссипации вихрей и других явлений. Благодаря эффекту конденсации водяного пара вихревой след иногда становится видимым для земного наблюдателя.

Вихревой след зависит от компоновки самолета, полетной массы, полетной конфигурации, состояния атмосферы, высоты и скорости полета. Под действием естественных сил вихревой след опускается ниже траектории самолета на 50–300 м, а также смещается в горизонтальном направлении в результате действия ветра и влияния земли. При полете на большой высоте дальний вихревой след самолета представляет собой два параллельных опускающихся вихревых жгута противоположного вращения. Уменьшение циркуляции каждого из них со временем обусловлено взаимным проникновением (диффузией) завихренностей разного знака. При полете самолета в турбулентной атмосфере повышенная турбулентность усиливает диффузию завихренности во внешней области вихревых жгутов, что приводит к дополнительной потере циркуляции каждого из жгутов. В настоящее время известны различные эмпирические формулы для расчета потери циркуляции при низких и высоких уровнях турбулентности атмосферы.

Возникает также проблема взаимодействия вихревого следа самолета с поверхностью аэродрома на режимах взлета и посадки. Особенно большое значение она имеет из-за непрерывного роста загруженности аэропортов. Этим обеспокоены многие страны ЕС, США и Россия, а также Китай и Индия. Учет взаимодействия вихревого следа

с поверхностью земли в невязком приближении приводит к известному результату, согласно которому вихревая система самолета (два вихря противоположного вращения вблизи экрана и два их зеркальных отражения относительно экрана, образующие квадруполь) нестационарна: оба вихря опускаются и при этом двигаются в обе стороны в поперечном направлении. Уже первые экспериментальные исследования вихревой системы крыла вблизи экрана в аэродинамической трубе показали, что происходит не только опускание концевых вихрей и увеличение расстояния между ними, как это следует из теории в невязком приближении, но и подъем обоих вихрей до некоторого уровня (так называемый отскок) с последующим их движением по петлеобразной траектории. На основе экспериментов было показано, что наличие петлеобразной траектории движения вихрей обусловлено отрывом пограничного слоя, который образуется на экране при поперечном (вдоль размаха) течении, индуцированном на поверхности экрана вихревой системой крыла. Сходящие в поток при отрыве пограничного слоя вторичные вихри взаимодействуют с первичными, следствием чего и является петлеобразная траектория движения первичных вихрей и отскок вихря.

В настоящее время на практике действуют правила ИКАО, определяющие минимальные расстояния между летящими в одном направлении самолетами (горизонтальное эшелонирование) по условиям непопадания самолетов в вихревые следы. Согласно этим правилам минимальные расстояния определяются типами самолетов. Все самолеты условно разделены на три класса: легкие (масса до 7 т), средние (от 7 т до 136 т) и тяжелые (свыше 136 т). Таким образом, минимальные расстояния зафиксированы и составляют, например, 4 морские мили (7,4 км) для тяжелого самолета, летящего за тяжелым самолетом, и 6 морских миль (11 км) — для легкого самолета, летящего за тяжелым (рис. 1.1 в работе [1]). С появлением новых тяжелых самолетов типа А-380 возникает необходимость увеличения безопасных интервалов между самолетами. Согласно рекомендациям ИКАО (ICAO Report «Wake Vortex aspects of the Airbus A-380 aircraft» 11/10/2005: Т 13/3-05-0661.SLG) для самолетов, следующих за А-380, интервалы горизонтального эшелонирования равны интервалам для соответствующих самолетов, следующих за тяжелым самолетом, увеличенным на 2 морские мили (3,7 км), если следующий самолет тяжелый, и на 4 морские мили (7,4 км), если следующий самолет средний или легкий.

Нормы ИКАО также определяют вертикальное эшелонирование самолетов на маршруте. Необходимость увеличения пропускной способности воздушных трасс уже привела к введению шести дополнительных эшелонов полета (программа RVSM) и введению на некоторых высотах полета минимума вертикального эшелонирования 1000 футов (300 м) вместо традиционных 2000 футов (610 м).



При взлете и посадке на одну взлетно-посадочную полосу (ВПП) или на параллельные близко расположенные ВПП допустимый временной интервал составляет 2–3 мин. На практике же часто при взлете или посадке вихревой след за самолетом под влиянием внешних условий быстро уходит от ВПП и не мешает другим самолетам. В этом случае уже через 20–30 с можно посадить другой самолет или дать разрешение на его взлет. При других условиях вихревой след может долго оставаться над ВПП и представлять опасность для других самолетов. Например, при боковом ветре 1–2 м/с вихревой след может зависнуть над ВПП на несколько минут.

Специалисты многих стран пытаются координировать свои действия по созданию специальных систем вихревой безопасности, собираясь на специальные научно-практические конференции. В феврале 2007 г. в Брюсселе прошла очередная такая конференция. Понимая, что дальнейшее повышение эффективности управления воздушным движением и безопасности полетов требует решения проблемы вихревых следов, ИКАО сформулировало требования к перспективным системам предупреждения о вихревой опасности. Эти требования изложены в Руководстве по обслуживанию воздушного движения (ICAO Doc 9426, Part II, Chapter 3, Appendix A). Системы предупреждения о вихревой опасности должны иметь наземную и бортовую компоненты. При этом фиксированные минимумы эшелонирования по вихревой безопасности должны быть заменены на минимумы, соответствующие конкретным метеорологическим условиям и конкретным парам самолетов. Кроме того, система должна обнаруживать опасные зоны вихревых следов, а также не создавать дополнительной нагрузки на диспетчеров управления воздушным движением и экипажи самолетов.

Наиболее полно этим требованиям удовлетворяет российская система вихревой безопасности полетов на основе технологий CNS/ATM ИКАО [10, 12, 13]. Технологии CNS/ATM ИКАО являются перспективным средством обеспечения эффективности систем организации воздушного движения и согласно глобальному плану ИКАО подлежат внедрению во всем мире к 2010–2020 гг как обязательная технологическая компонента обслуживания воздушного движения.

Для моделирования и изучения вихревых следов самолетов используют разнообразные методы теоретических исследований: прямое численное моделирование турбулентного движения (DNS) на базе уравнений Навье–Стокса, моделирование крупных вихрей (LES) с использованием уравнений Навье–Стокса и подсеточной модели турбулентности, а также численное решение уравнений Рейнольдса (RANS), замкнутых с помощью дифференциальной модели турбулентности [33, 34]. В работах С. М. Белоцерковского было предложено использовать метод дискретных вихрей [7, 20] для моделирования вихревого следа самолета [8].

Наиболее информативными из перечисленных являются методы DNS и LES, которые позволяют изучать ближний и дальний вихревые

следы самолета на больших и малых расстояниях от земли. Они, в частности, позволяют исследовать влияние атмосферной турбулентности, стратификации атмосферы, сдвигового ветра, а также взаимодействие вихревого следа самолета и реактивных струй двигателей. Методы RANS эффективны при решении модельных задач о взаимодействии двух вихревых жгутов противоположного вращения с поверхностью экрана. Это позволяет моделировать эффекты взаимодействия дальнего вихревого следа самолета с поверхностью земли.

Экспериментальное изучение вихревых следов самолетов выполняется на моделях в аэродинамических трубах или в летных исследованиях с помощью лазерных методов (лидарные измерения) [49].

В последние годы опубликованы три фундаментальные монографии, посвященные моделированию вихревых следов самолетов [8, 33, 34]. Первые две [33, 34] основаны на применении различных численных методов для решения широкого круга задач, для этого в книге [33] используются данные трубных и летных экспериментов. Изложенные в них методы математического моделирования позволяют решить весь комплекс задач о развитии вихревого следа самолета при полете на больших высотах и вблизи земли на режимах взлета и посадки. Используя методы численного моделирования, авторы дали ответ на ряд принципиальных вопросов.

Третья монография [8] посвящена созданию математических моделей вихревых следов на базе метода дискретных вихрей. Этот метод наиболее простой и эффективный при исследовании вихревого следа самолета и в сочетании с некоторыми эмпирическими закономерностями позволяет получать простые решения соответствующих задач как при полете самолета на больших высотах, так и вблизи земли на взлетно-посадочных режимах.

Метод дискретных вихрей при расчете отрывного обтекания тел успешно сочетается с методами теории настационарного ламинарного и турбулентного пограничного слоя [29]. На режимах взлета и посадки самолета вихревая система самолета индуцирует вблизи поверхности аэродрома поперечное течение, сопровождающееся образованием турбулентного пограничного слоя. Возникающие при отрыве этого слоя вихри взаимодействуют с вихревой системой самолета, вследствие чего последняя существенно деформируется.

Важная особенность метода дискретных вихрей применительно к моделированию вихревого следа самолета состоит в том, что он в равной степени пригоден для расчета аэродинамических характеристик самолета вплоть до формирования вихревого следа самолета и последующей деформации этого следа в двухвихревую систему. При таком подходе к решению задачи нет необходимости в задании диаметра, координат центра и геометрии самолета с включенной механизацией крыла.

Кроме того, важным преимуществом математических моделей на базе метода дискретных вихрей является их оперативность

и быстрота расчета. Это обстоятельство привлекло и зарубежных исследователей к применению метода дискретных вихрей для моделирования и исследования характеристик дальнего вихревого следа [85, 87, 88].

Настоящая монография отличается тем, что в ней впервые описаны исследования вихревых следов самолетов с воздушными винтами и при предлагаемых подходах время расчета одного варианта на 3–4 порядка меньше по сравнению с методами, основанными на численном решении уравнений Навье–Стокса. В монографии представлено развитие методов, описанных в книге [8], и дано их обобщение для ряда новых задач.

Монография состоит из введения и 8 глав.

Гл. 1 содержит основные сведения об атмосферной турбулентности, вихревом следе самолетов и анализирует современные численные методы расчета характеристик вихревых следов.

В гл. 2 описан метод дискретных вихрей, а также моделирование на его базе свободной турбулентности в отрывных и струйных течениях.

В гл. 3 представлены результаты моделирования ближнего вихревого следа за некоторыми самолетами.

В гл. 4 описана математическая модель дальнего вихревого следа и приведены характеристики вихревого следа за самолетами с турбореактивными двигателями Ил-76, Ан-124, В-747 и А-380.

В гл. 5 представлена математическая модель дальнего вихревого следа за самолетами с воздушными винтами и даны характеристики вихревого следа за самолетами Ан-26, Ан-12 и С-130.

В гл. 6 описана математическая модель для расчета характеристик ветрового потока около рельефа местности и представлены результаты расчета характеристик воздушного потока вблизи гор и ущелий.

В гл. 7 представлена математическая модель вихревого следа самолета на режиме взлета и посадки, приведены результаты расчета характеристик вихревых следов на этих режимах для самолетов В-727, Ту-204 и Ил-96.

В гл. 8 изложена математическая модель расчета аэродинамических характеристик самолетов в вихревом следе. Даны аэродинамические характеристики самолета Як-40 в вихревом следе от самолетов Ил-76, Ан-124, В-747 и А-380, самолета Су-25 в вихревом следе от рельефа местности, а также самолета МиГ-31 при заправке в воздухе от Ил-78.

Авторы выражают признательность коллегам и ученикам, позволившим использовать свои материалы: Б. С. Крицкому, С. И. Некрахе, С. М. Еременко, С. А. Ушакову, А. В. Головневу, А. С. Дзюбе, Н. Н. Копылову. Фотографии на обложке получены на сайте: <http://www.raa-st.ru>

## ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

### 1.1. Атмосферная турбулентность

Турбулентность — нерегулярные течения среды с сильным перемешиванием и хаотическим изменением параметров. Это одно из сложнейших явлений природы, и его изучение часто смыкается с философским проникновением в суть вещей. Знаменитый ученый Т. Карман образно охарактеризовал это, сказав, что, когда предстанет перед Создателем, первое откровение, о котором будет просить, — раскрыть тайны турбулентности.

Атмосфера турбулентна по своей природе. Обычно в ней присутствует слабая и умеренная турбулентность, реже встречается сильная, которая характеризуется длиной волн более 200 м и вертикальными порывами свыше 15 м/с.

Течения жидких и газообразных сред бывают двух типов: спокойные (плавные) и нерегулярные — со значительным перемешиванием объемов среды и хаотическим изменением скоростей и других параметров. Первые называют ламинарными, а для вторых английский физик У. Томсон предложил термин турбулентные (от англ. *turbulent* — бурный, беспорядочный). Большинство течений в природе и технике относятся именно ко второй, менее изученной группе. В этом случае применяют статистические (связанные с осреднением по времени и пространству) способы описания. Так поступают потому, что практически невозможно уследить за пульсациями в каждой точке течения; эти данные нельзя использовать в конкретных приложениях.

Наибольший практический интерес представляют такие течения, которые соответствуют весьма большим числам Рейнольдса  $Re = U_0 b / \nu$ . В эту безразмерную величину входят основная скорость  $U_0$  (в струе скорость истечения, для самолета скорость полета), характерный линейный размер  $b$  (диаметр сопла или хорда крыла) и вязкость среды  $\nu$ . Число Рейнольдса определяет соотношение инерционных сил и сил трения (вязкости). Типичные значения этого числа в авиации  $Re = 10^5 - 10^7$ .

За последние десятилетия достигнут значительный прогресс в изучении фундаментальных проблем турбулентности, чем мы обязаны прежде всего А. Н. Колмогорову и А. М. Обухову, их ученикам и последователям, а также их предшественникам Л. Ричардсону и Д. Тейлору.

При больших числах  $Re$  общепринятым стало понимание турбулентности как иерархии вихрей разных размеров, когда имеют место пульсации скорости потока от больших до самых малых значений. Крупномасштабная турбулентность определяется формой обтекаемого тела и состоянием внешней среды. Здесь силы вязкости при формировании вихревых следов можно не учитывать. При описании маломасштабных турбулентных течений на определенном этапе следует вводить в рассмотрение механизм молекулярной вязкости.

Согласно теории Колмогорова–Обухова, локальное строение маломасштабной развитой турбулентности в значительной степени подчиняется универсальным закономерностям. Доказано, что в области достаточно малых масштабов должен господствовать статистический универсальный режим, практически стационарный и однородный.

Обосновано также существование некоторого промежуточного режима турбулентности — инерционного, возникающего в масштабах малых по сравнению с характерным размером течения в целом, но больше того микромасштаба, при котором уже существенны явления вязкости. Таким образом, в этом интервале, как и в начальной стадии турбулентности, вязкость среды можно не учитывать.

Однако общая теория турбулентности, которая содержала бы не только качественное описание основных процессов, но и количественные соотношения, позволяющие определять турбулентные характеристики, еще не создана. Построение строгой в математическом смысле теории затруднено тем, что едва ли возможно дать исчерпывающее определение самой турбулентности. С другой стороны, на вопросы, возникающие в связи с разнообразными техническими приложениями, требовались оперативные ответы хотя бы и приближенные, но научно обоснованные. В результате стала интенсивно развиваться так называемая полуэмпирическая теория турбулентности, в которой наряду с теоретическими закономерностями и расчетами используют экспериментальные данные. Вклад в становление этого направления внесли такие ученые, как Д. Тейлор, Л. Прандтль и Т. Карман.

В полуэмпирической теории турбулентности проблема рассматривается упрощенно, поскольку изучаются не все статистические характеристики, а только самые важные для практики — в первую очередь средние скорости и средние значения квадратов и произведений пульсационных скоростей (моменты первого и второго порядков). Недостаток такого подхода — необходимость получать из эксперимента данные для каждой группы конкретных условий: для тел разных форм при изучении вихревых следов, для различных конфигураций сопл, из которых истекают струи, и т. д. Кроме того, эта теория основана на стационарных подходах (развитие процесса во времени не рассматривается), что сужает ее возможности.

В работах С. М. Белоцерковского и А. С. Гиневского [23, 24] развивается вихревая компьютерная концепция турбулентных следов и струй. Она представляет собой замкнутую конструктивную

математическую модель (ММ) и основана на использовании всех достижений вихревой аэродинамики, полученных в результате применения метода дискретных вихрей (МДВ), для реализации рассмотренных выше современных представлений о турбулентности. Построение ММ проводится для больших чисел  $Re$  и базируется на трактовке свободной турбулентности как иерархии вихрей разного масштаба. При этом турбулентное движение рассматривается в общем случае как трехмерное и нестационарное.

Практическая реализация моделирования нестационарных струйных течений осуществляется методом дискретных вихрей. При этом непрерывная по пространству и времени модель заменяется ее дискретным аналогом. Дискретизация по времени состоит в том, что процесс считают изменяющимся скачкообразно в моменты времени  $t_n = n \Delta t$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Дискретизация по пространству — замена непрерывных вихревых слоев гидродинамически замкнутыми системами вихревых элементов (вихревых нитей или рамок). Важен также учет в ММ того обстоятельства, что свободные вихри движутся со скоростями жидких частиц, причем число их со временем возрастает.

Указанный подход к моделированию течений позволяет без привлечения дополнительной эмпирической информации исследовать общий характер развития процесса во времени. Математические модели, созданные на базе МДВ, описывают все главные черты развития турбулентных следов, струй и отрывных течений, включая переход от детерминированных процессов к хаосу. Они также позволяют рассчитывать статистические характеристики турбулентности (моменты первого и второго порядков). Главное внимание уделено компьютерному расчету обтекания тел, построению ближних участков вихревых следов. Накоплен большой материал, который включает не только прямые сопоставления расчета с экспериментом, но и проверку ММ на выполнение универсальных законов развитой турбулентности Колмогорова–Обухова, которые, таким образом, играют роль независимых тестов. Численный эксперимент в сочетании с физическим и комплексный анализ результатов позволяют сделать следующие выводы.

Основные черты и макроэффекты отрывного обтекания тел при больших числах  $Re$ , в том числе ближний след и его характеристики, при известных местах отрыва потока (на острых кромках, изломах, срезах тел и т. д.), а также в струях не зависят от вязкости среды; они определяются инерционным взаимодействием в жидкостях и газах, которые описывают нестационарные уравнения идеальной среды. Показано также, что в ряде задач необходимо учитывать и вязкие отрывы, особенно на поверхности гладких тел (например круговых и эллиптических цилиндров). Поэтому следующий шаг в развитии данной концепции состоял в том, что нестационарные модели идеальной среды были дополнены нестационарными уравнениями пограничного слоя для определения места отрыва.

Таким образом, была обоснована и осуществлена смена приоритетов: на первый план вышла не вязкость среды, а нестационарные явления.

Основополагающая работа Н. Е. Жуковского «О присоединенных вихрях» была опубликована в 1906 г. Современность выдвинула новые проблемы, а компьютерные технологии расширили области применимости теоретических методов. Классические идеи Н. Е. Жуковского переживают ныне вторую молодость, открывая новые возможности теории идеальной среды и вихревых методов.

Важно подчеркнуть, что в природе вихревые течения и хаос живут бок о бок, становясь прародителями турбулентности. Вращение жидких объемов порождает неустойчивость, а также появление и распад регулярных структур, что ведет к образованию новых вихрей и развитию хаоса.

## 1.2. Вихревой след самолетов

Рассмотрим область возмущенного вихревого потока за летательными аппаратами, образующуюся при их обтекании, отличающуюся от окружающего воздушного пространства значениями скоростей, давлений, температуры и т. п. и получившую название вихревого следа. Здесь и далее, кроме специально оговоренных случаев, под летательными аппаратами будем понимать самолеты и вертолеты. Следует различать понятия «спутный след» и «вихревой след». Спутные следы образуются при безотрывном обтекании тела в вязкой среде и обусловлены лобовым сопротивлением тела. Спутные следы представляют область пониженной средней скорости и повышенного уровня турбулентности. Вихревые следы образуются при обтекании тела в вязкой среде вследствие возникновения подъемной силы и, соответственно, при реализации индуктивного сопротивления сопровождаются образованием на некотором расстоянии позади тела системы из двух продольных вихрей противоположенного вращения.

Вихревой след за ЛА является неограниченным потоком, который движется со средней скоростью невозмущенного потока. Длина вихревого следа составляет 10-12 км, иногда больше, и зависит от состояния атмосферы, аэродинамической компоновки и полетной конфигурации ЛА, полетной массы, скорости и высоты полета. Вихревой след за ЛА характеризуется полем возмущенных скоростей  $W$ , а также формой и положением концевых жгутов в пространстве. Возмущенные скорости обычно представляют в виде следующих составляющих:  $W_x$  — осевые скорости;  $W_R$  — радиальные скорости;  $W_t$  — окружные (тангенциальные) скорости, которые в свою очередь делятся на вертикальные  $W_y$  и горизонтальные скорости  $W_z$ , т. е.

$$W_t = \sqrt{W_y^2 + W_z^2}.$$

По длине вихревого следа условно можно выделить зоны (рис. 1.1): формирования; устойчивого следа; неустойчивого следа; разрушенного следа.

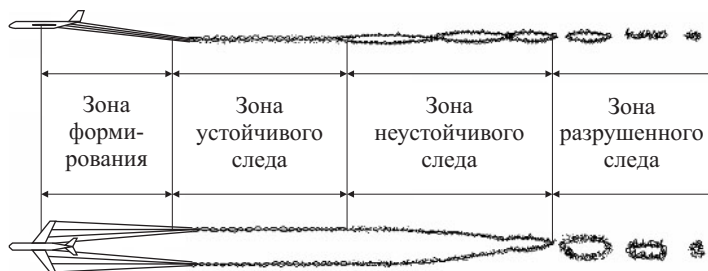


Рис. 1.1. Структура вихревого следа самолета

В **зоне формирования вихревого следа** происходит сворачивание всей вихревой структуры самолета, пограничного слоя и струй двигателей в два вихревых жгута (см. фотографию на передней странице обложки). Стекающий с поверхности планера пограничный слой не вносит больших возмущений в воздушный поток и на удалении 50–150 м от ЛА практически исчезает.

Струи выхлопных газов, хотя и обладают большой кинетической энергией, представляют собой узкие потоки газов, расширяющиеся под углами  $3\text{--}4^\circ$ , их температура и скорость быстро падают.

Пограничный слой и выхлопные газы оказывают влияние на начальные параметры концевых жгутов, которое может выражаться в повышении температур и скоростей в вихре.

Наибольший вклад в формирование спутного следа за летательным аппаратом и его результирующие характеристики вносят вихри, которые сходят с крыла, стабилизатора, других несущих и управляющих поверхностей, а также с фюзеляжа. Эту вихревую поверхность в главном приближении можно рассматривать как поверхность разрыва тангенциальной компоненты скорости. Толщина этой поверхности соизмерима с толщиной турбулентного пограничного слоя, который является продолжением пограничного слоя, сошедшего с острой задней кромки и торцевых кромок поверхностей летательного аппарата. В результате сразу же за задней кромкой крыла наблюдается турбулентное вихревое ядро конечного размера, это — центр, вокруг которого формируется концевой жгут. Под радиусом вихревого ядра понимают расстояние от оси жгута до точки в поперечном его сечении, где значение окружной скорости максимальное. Зона формирования спутного следа заканчивается образованием устойчивых концевых жгутов и имеет протяженность 2–3 размаха крыла.



В **зоне устойчивого вихревого следа** происходит устойчивое движение и опускание концевых жгутов вниз с постепенным их затуханием. Концевые жгуты в этой зоне — устойчивые формирования, имеющие противоположное вращение вовнутрь. При симметричной нагрузке на несущих поверхностях летательного аппарата интенсивность концевых жгутов одинакова. Типичное распределение вертикальных скоростей в зоне устойчивого вихревого следа в ядрах концевых жгутов представлено на рис. 1.2 для самолета Ил-76, летящего на высоте  $H = 400$  м со скоростью  $V = 550$  км/ч.

Расстояние между осями концевых жгутов зависит от нагрузки на несущих поверхностях ЛА. При симметричной нагрузке расстояние между осями концевых жгутов составляет  $0,8L$ , где  $L$  — размах крыла самолета.

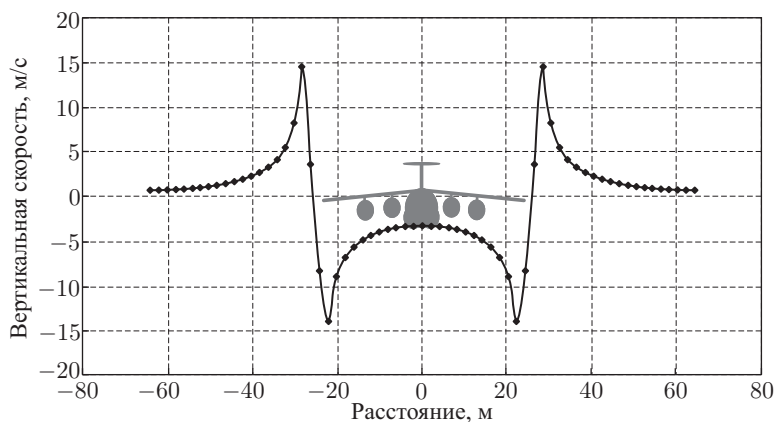


Рис. 1.2. К постановке задачи

Начиная с этой зоны, спутный след за летательным аппаратом имеет тенденцию к снижению. Скорость опускания концевых жгутов обусловлена их взаимным влиянием и примерно равна скорости, индуцируемой одним концевым жгутом на оси другого. Перемещение спутного следа подчиняется общим законам движения вихрей в атмосфере. Поле скоростей в зоне спутного следа существенно неоднородно. Скорость возмущенного движения воздуха определяется интенсивностью концевых жгутов и временем существования следа. Течение характеризуется наличием тангенциальных составляющих возмущенной скорости и составляющих скорости вдоль оси концевых жгутов, которые могут либо совпадать со скоростью набегающего потока, либо превышать ее, либо быть направленными против набегающего потока. Поле тангенциальных скоростей образует скос потока вниз в области между вихрями и скос потока вверх в наружной области (см. рис. 1.2).

Максимальные значения окружных скоростей в отдельных случаях могут достигать половины скорости полета самолета-генератора.

Распределение осевых скоростей имеет знакопеременный характер. В районе границы ядра осевое течение имеет противоположное направление относительно осевых скоростей в районе оси вихря.

Режим течения в концевых жгутах является, как правило, турбулентным. Турбулентность проявляется в наложении на осредненные скорости в зоне спутного следа пульсационных составляющих, которые приводят к перемешиванию слоев воздуха и способствуют затуханию и размыванию концевых жгутов. Турбулентность в основном ограничена областью вихревого ядра.

Анализ результатов, полученных в летном эксперименте, показывает, что по мере увеличения длины спутного следа подсосывание потока в область вихревого ядра, как правило, не происходит.

**В зоне неустойчивого вихревого следа** вихри начинают разрушаться. Основными видами начала разрушения концевых жгутов в зоне неустойчивого вихревого следа можно считать:

- естественное затухание за счет диссипации и диффузии вихрей;
- волновую неустойчивость вихревых жгутов, связанную с турбулентностью атмосферы (см. фотографию на задней странице обложки);
- интенсивную турбулизацию вихревого ядра (взрыв вихря), механизм которой еще мало изучен.

Преобладание одного из факторов определяет не только интенсивность разрушения концевых жгутов, но и положение их в пространстве относительно самолета. С течением времени изменяется структура и пространственное положение следа. Система концевых жгутов в этой зоне продолжает существовать относительно долго, постепенно затухая или разрушаясь.

Иногда система концевых жгутов совершает симметричное и приблизительно гармоническое движение. Причина этого явления заключается в следующем. Сформированный спутный след представляет собой два концевых жгута с осями, располагающимися в пространстве примерно параллельно одна другой. Вихревые линии в каждом жгуте имеют форму спирали, закрученной вокруг оси жгута. В зоне устойчивого спутного следа осевые возмущенные скорости, которые направлены вдоль оси жгута и обусловлены движением ЛА, влияют на положение вихрей в пространстве и деформируют вихревые линии. Система вихрей движется в своем собственном индуцированном поле. Атмосферная турбулентность, порывы ветра или беспорядочные отклонения от траектории полета незначительно деформируют вихревые линии. За счет взаимной индукции и влияния осевых скоростей концевой жгут деформируется так, что его ось приобретает волны длиной  $\lambda$  и амплитудой  $\delta$ . При определенных соотношениях  $\lambda$  и  $\delta$  волновой характер оси концевого жгута, а соответственно и самого жгута, является наиболее быстро нарастающим видом неустойчивого

колебания. Оси концевых жгутов волнообразно сходятся и расходятся до тех пор пока не соединятся в более близких точках и не образуют цепочку изолированных вихревых колец.

**В зоне разрушенного вихревого следа** наблюдается цепочка изолированных вихревых колец. Процесс разрушения спутного следа в виде волновой неустойчивости и течение в этой зоне спутного следа нестационарные. Зона разрушенного спутного следа по протяженности существенно меньше зоны неустойчивого следа. Исследования показывают, что волновой неустойчивости подвержены в большей степени вихревые следы за самолетами сложной компоновки, которые имеют крылья малого удлинения, сложной формы в плане, а также за вертолетами.

Необходимо отметить, что под разрушением концевых жгутов либо вихревого следа надо понимать такой процесс изменения состояния спутного следа, в результате которого наблюдаются: перестройка картины течения в концевых жгутах затухание возмущенных скоростей в концевых жгутах и в окрестности их до величин, соизмеримых с пульсациями скорости в атмосфере изменения пространственного положения концевых жгутов и связанное с ними изменение кинематических параметров течения.

Разрушение вихря может наблюдаться и вследствие «взрыва» его ядра. Под этим понимают резкое увеличение радиуса вихря и уменьшение максимальных значений окружных скоростей. Физическая природа этого явления предположительно связана с определенным уровнем осевых скоростей, их изменением во времени и соотношением осевых и тангенциальных скоростей в концевом жгуте. В результате «взрыва» ядра вихря могут образоваться тороидальные вторичные вихри и появляться обратные течения. «Взрыв» ядра характерен для одного из концевых жгутов и является локальным. Другой концевой жгут может длительное время существовать в атмосфере.

Изменение характеристик вихревого следа происходит при интерференции вихревых потоков с различными постройками, складками местности, холмами, лесными участками. В районе аэродрома благоприятные условия для образования локальных вихревых потоков создают большие строения, здания, сооружения, поверхность земли со сложным рельефом местности. Хотя высоты построек вблизи взлетно-посадочных полос ограничены, в совокупности они создают выраженную локальную неоднородность в виде барьера к натекающему потоку. Воздух обтекает строения сбоку и сверху, способствуя образованию локальных вихревых потоков, в том числе сдвига ветра. Изменение характеристик вихревого следа происходит интенсивнее, стирается различие между зонами неустойчивого и разрушенного следа, структура следа и течение в нем носят ярко выраженный нестационарный характер. Интерференция вихревого следа и вихревых потоков от зданий, сооружений и участков местности со сложным рельефом и переменной шероховатостью поверхности приводит к появлению на аэродроме зон

со сложной структурой течения, сдвигом ветра, роторами и скоростями потока, представляющими опасность для летательных аппаратов.

Приведенные сведения о вихревых следах и потоках и тенденциях их распространения в пространстве позволяют сделать вывод о нестационарном течении в зоне вихревого следа. Нестационарность течения обусловлена временной зависимостью изменения скоростей в поперечном сечении следа и пространственных характеристик следа. Следует отметить, что изменение пространственного положения следа носит ярко выраженный нестационарный характер в случае появления волновой неустойчивости.

Указанные особенности формирования и распространения вихревого следа позволили наметить два подхода к моделированию. При первом подходе спутный след представляется в виде осей концевых жгутов и положением этого следа считается положение осей. Возмущенные скорости в области спутного следа задаются либо вычисляются на основе эмпирических и полуэмпирических моделей, что влияет на точность моделирования. При втором подходе вихревой след моделируется в виде вихревой пелены, образующейся при моделировании обтекания ЛА. В этом случае положение вихревого следа получается непосредственно, а возмущенные скорости определяются особенностями обтекания.

### 1.3. Турбулентные характеристики вихревого следа

Как было показано в разд. 1.2, вихревой след самолета характеризуется возмущенными скоростями  $W$  и их составляющими  $W_{y,z}$ , а также полями возмущенных давлений  $p$ .

Среди характеристик вихревого следа в первую очередь интересны мгновенные скорости  $W_{y,z}$  в заданной точке  $(\bar{y}, \bar{z})$  в заданный момент времени  $\tau$ .

Практический интерес представляют осредненные скорости, которые определяются интегралом

$$\bar{W}_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\tau_n - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_n} W_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}, \tau) d\tau, \quad (1.1)$$

где  $\tau_0$  — момент безразмерного времени, соответствующий началу осреднения;  $\tau_n$  — момент безразмерного времени, соответствующий концу осреднения.

Пульсационные составляющие скорости описывает выражение

$$W'_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}, \tau) = W_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}, \tau) - \bar{W}_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}), \quad (1.2)$$

а их среднеквадратичные величины, представляющие собой нормальные рейнольдсовы напряжения, определяет интеграл

$$\overline{W_{y,z}'^2}(\bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\tau_n - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_n} W_{y,z}'^2(\bar{y}, \bar{z}, \tau) d\tau, \quad (1.3)$$

Важной с практической точки зрения характеристикой вихревой обстановки является интенсивность турбулентности

$$\bar{\sigma}_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}) = \sqrt{\frac{1}{\tau_n - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_n} [W_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}, \tau) - \overline{W}_{y,z}(\bar{y}, \bar{z})]^2 d\tau}. \quad (1.4)$$

Кроме того, для дальнейшего расчета воздействия на аэродинамику ЛА, летящего в этих возмущениях, важно знать осредненные значения угла скоса потока

$$\Delta\varepsilon = \arctg \frac{\overline{W}_y}{V_0} = \frac{1}{\tau_n - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_n} \arctg \frac{W_y}{V_0}(\bar{y}, \bar{z}, \tau) d\tau \quad (1.5)$$

и его пульсаций

$$\bar{\sigma}_\varepsilon(\bar{y}, \bar{z}) = \sqrt{\frac{1}{\tau_n - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_n} \left[ \arctg \frac{W_y}{V_0}(\bar{y}, \bar{z}, \tau) - \arctg \frac{\overline{W}_y}{V_0}(\bar{y}, \bar{z}) \right]^2 d\tau}. \quad (1.6)$$

В выражениях(1.5) и (1.6)  $V_0$  — скорость невозмущенного потока.

#### 1.4. Современные методы численного моделирования вихревых следов магистральных самолетов

Вихревые турбулентные следы образуются за телами, обтекание которых сопровождается возникновением подъемной силы. Это отличает их от турбулентных следов, образующихся при обтекании тел в отсутствие подъемной силы и при возникновении силы лобового сопротивления.

При численном моделировании вихревых следов самолетов используют различные методы, основные из них:

- 1) прямое численное моделирование (DNS) турбулентного движения на базе полных уравнений Навье–Стокса [19, 63, 68, 71, 74];
- 2) моделирование крупных вихрей (LES) с использованием уравнений Навье–Стокса и подсеточных моделей турбулентности [33, 69, 75, 78, 81, 83];
- 3) численные решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, замкнутых с помощью какой-либо дифференциальной модели турбулентности, методы RANS [24, 25, 51, 77].

Наиболее информативными из перечисленных методов моделирования являются методы DNS и LES, с помощью которых можно изучать поведение ближних и дальних вихревых следов самолета на больших и малых расстояниях от земли. Они, в частности, позволяют исследовать влияние атмосферной турбулентности, стратификации атмосферы, а также взаимодействие вихревых следов самолета с реактивными струями двигателей.

Недостатком методов DNS следует признать, помимо их трудоемкости, то обстоятельство, что они эффективны только при сравнительно малых числах Рейнольдса и требуют для своего использования суперкомпьютеров. Методы LES существенно проще методов DNS. Они позволяют исследовать взаимодействие вихревого следа самолета и реактивных струй двигателей [33, 81].

Несколько экономичнее методы RANS. Они эффективны при решении задач о взаимодействии двух вихревых жгутов противоположного вращения с поверхностью земли при отсутствии и наличии бокового ветра, при моделировании взаимодействия реактивных струй двигателей с вихревыми следами, при расчете скорости закрутки вихревого жгута [33, 51, 58, 59, 77].

В ряде случаев методы LES и RANS используют для моделирования трехмерного турбулентного движения, например, в задаче о вырождении двухвихревой системы вихревого следа самолета и образовании последовательности вихревых колец (так называемая синусоидальная неустойчивость) [33, 34] и влияния на этот процесс атмосферной турбулентности.

При полете самолета образующийся за ним дальний вихревой след представляет собой два параллельных опускающихся вихревых жгута противоположного вращения. При этом уменьшение циркуляции каждого из них со временем обусловлено проникновением (диффузией) завихренностей разного знака (так называемая потеря циркуляции). Упомянутые методы математического моделирования в принципе позволяют вычислить потерю циркуляции. При этом увеличение потери циркуляции с ростом уровня турбулентности атмосферы объясняется увеличением диффузии завихренности с ростом уровня турбулентности в атмосфере.

При моделировании вихревого следа самолета на основе методов DNS, LES, RANS начальное положение вихревого следа и его циркуляцию обычно задают и исследуют его изменение вдоль по потоку.

Наиболее простым и эффективным по сравнению с перечисленными методами [8, 63, 64] следует признать метод дискретных вихрей применительно к исследованию вихревых следов самолетов при больших числах Рейнольдса. Постановка таких исследований принадлежит С. М. Белоцерковскому [64, 65]. Указанный подход получил дальнейшее развитие в ряде работ его последователей [8, 14, 15, 17, 21, 22]. Подход базируется на широком использовании МДВ для моделирования вихревых следов в сочетании с данными натурных экспериментов.

В частности, в этом методе используют эмпирические данные для потери циркуляции и ее зависимости от степени турбулентности атмосферы [10, 72, 80], а также установленный в рамках метода RANS вывод теории о слабом влиянии струй реактивных двигателей на структуру вихревых следов.

Метод дискретных вихрей используют не только для изучения вихревых следов, но и для расчета обтекания крыла и самолета в целом, т. е. для описания процесса зарождения вихревого следа, его расположения в пространстве и развития вдоль потока.

При исследовании дальних вихревых следов (первичных вихрей) вблизи поверхности земли на взлетно-посадочных режимах на базе метода дискретных вихрей задачу удастся замкнуть только при учете вязких эффектов, т. е. образования вторичных вихрей, индуцированных первичными, при использовании методов теории турбулентного пограничного слоя [14, 53, 62], что позволяет описать так называемый отскок вихря. Следующий пример иллюстрирует эффективность МДВ при исследовании развития вихревого следа самолета вблизи земли при посадке [14, 33]. Расчет вихревого следа при фиксированной высоте полета занимает около 2 мин машинного времени на ПК средней мощности, в то время как при использовании метода LES — около 1000 ч.

Настоящая монография обобщает возможности МДВ применительно к моделированию вихревых следов магистральных самолетов.

## МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

В данной главе представлены постановка задачи и основные положения метода дискретных вихрей (МДВ). Впервые наиболее полно и подробно идеи этого метода изложены в книге С. М. Белоцерковского и М. И. Ништа [20]. В дальнейшем метод дискретных вихрей развивали их ученики и последователи [3–6, 20, 21, 26–29].

### 2.1. Постановка задачи

Рассматривается нестационарное обтекание летательного аппарата (ЛА) потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью  $W_\infty$  (рис. 2.1). Движение ЛА, а также отклонение органов управления и механизации совершаются по произвольным законам. Поверхность летательного аппарата считается непроницаемой. Течение жидкости является потенциальным всюду вне летательного аппарата и вихревых следов, возникающих при отрыве потока с заданных линий. Вихревые следы представляют собой тонкие вихревые пелены, т. е. поверхности, на которых имеется разрыв касательной составляющей скорости. При этом линии отрыва потока задаются.

Обозначим  $\sigma$  несущие и управляющие жесткие поверхности самолета, в том числе гондолу двигателя,  $\sigma_1$  — свободную вихревую пелену, сходящую с несущих и управляющих поверхностей,  $\sigma_2$  — поверхность струи. Линии схода пелены обозначим  $L$ .

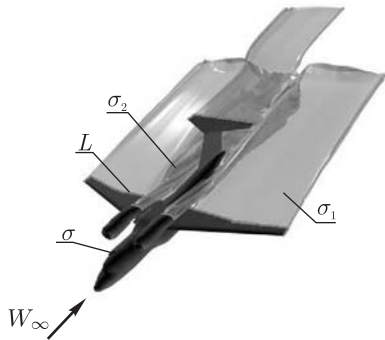


Рис. 2.1. К постановке задачи

С математической точки зрения поставленная задача сводится к отысканию нестационарных полей скоростей  $\vec{W}(\vec{r}, t)$  и давлений  $p(\vec{r}, t)$  в принятой системе координат, которые должны удовлетворять следующим условиям и уравнениям.

- Потенциал возмущенных скоростей  $U(\vec{r}, t)$  в каждый момент времени вне поверхностей  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  должен удовлетворять



уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0. \quad (2.1)$$

- На поверхности  $\sigma$  должно выполняться условие непротекания

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\vec{W}_\infty \vec{n}. \quad (2.2)$$

- На поверхностях вихревого следа  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , являющихся поверхностями тангенциального разрыва, должно выполняться условие отсутствия перепада давления и отсутствия потока жидкости через эту поверхность

$$p^+ = p^-, \quad W_n^+ = W_n^- = V_n, \quad (2.3)$$

где  $V_n$  — нормальная составляющая скорости на поверхности  $\sigma_1$ .

- На линиях отрыва должно соблюдаться условие Чаплыгина–Жуковского о конечности скорости

$$\vec{W}_n(\vec{r}, t) \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

- На бесконечности возмущения затухают:

$$\Delta U \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \vec{r} \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

- Для связи скорости и давления используем уравнение Бернулли

$$p = p_\infty + \frac{\rho W_\infty^2}{2} - \frac{\rho W^2}{2} - \rho \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (2.6)$$

При решении поставленной задачи потенциал  $U(\vec{r}, t)$  или  $U(M, t)$  будем искать в виде потенциала двойного слоя:

$$U(M_0) = \vec{W}_\infty(t) + \sum_{i=1,2} \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left( \frac{1}{MM_0} \right) g_i(M, t) d\sigma_M, \quad (2.7)$$

где  $g_i(M, t)$  — плотность потенциала двойного слоя, расположенного на поверхности  $\sigma$ . При этом скорость жидкости в каждой точке, не лежащей на поверхностях  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , определяется формулой

$$\vec{W}(M_0, t) = \vec{W}_\infty + \sum_{i=1,2} \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_i} \nabla_{M_0} \left( \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) \right) g_i(M, t) d\sigma_M. \quad (2.8)$$

Выражение (2.8) справедливо и на поверхностях  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , если входящие в него интегралы понимать как гиперсингулярные в смысле конечного значения по Адамару. Напомним, что потенциал двойного слоя претерпевает скачок на поверхностях, где он размещен, а его нормальная производная непрерывна. Соответственно поле скоростей имеет скачок тангенциальной составляющей на поверхностях летательного аппарата и его следа, а нормальная составляющая на этих поверхностях непрерывна.

Для удовлетворения условия (2.3) будем искать такое решение, в котором поверхности  $\sigma_1(t)$  и  $\sigma_2(t)$  состоят из точек, движущихся вместе с жидкостью, и плотность потенциала двойного слоя  $g_i(M, t)$  в каждой такой точке не зависит от времени. Предположим, что в каждый момент  $\tau \leq t$  с каждой точки линии схода пелены  $M(s)$ , где  $s$  — длина дуги на этой линии, сходит в поток частица жидкости, которая в момент времени  $t$  занимает положение  $M(s, \tau, t)$ , и что в каждый момент  $t$  совокупность всех точек  $M(s, \tau, t)$  образует поверхность вихревых следов  $\sigma_1(t)$  и  $\sigma_2(t)$ . При этом уравнение движения этих поверхностей принимает вид

$$\frac{\partial \vec{r}(s, \tau, t)}{\partial t} = \vec{W}(M(s, \tau, t), t), \tau \leq t, s : M(s) \in L \quad (2.9)$$

при начальных условиях

$$\vec{r}(s, \tau, t) \big|_{t=\tau} = \vec{r}_{M(s)}, \quad (2.10)$$

где  $\vec{r}(s, \tau, t)$  и  $\vec{r}_{M(s)}$  — радиус-векторы точек  $M(s, \tau, t)$  и  $M(s)$  соответственно, а для функции  $g_2(M, t)$  справедливо соотношение

$$g_2(M(s, \tau, t), t) \equiv g_2(s, \tau), \tau \leq t, s : M(s) \in L. \quad (2.11)$$

Условие (2.2) эквивалентно уравнению

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^2 \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_{M_0}} \frac{\partial}{\partial \vec{n}_M} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) g_i(M, t) d\sigma_{i,M} = f(M_0), M_0 \in \sigma_1, \quad (2.12)$$

где  $f(M_0) = -\vec{W}_\infty \vec{n}(M_0)$ .

Наконец, взаимосвязь функций  $g_1(M, t)$  и  $g_2(s, t)$  описывается следующим соотношением, вытекающим из требования интегрируемости поля скоростей:

$$g_2(s, t) = g_1(M(s), t), s : M(s) \in L. \quad (2.13)$$

Таким образом, задача нестационарного отрывного обтекания ЛА идеальной несжимаемой жидкостью свелась к решению замкнутой системы уравнений (2.9)–(2.13) для функций  $\vec{r}(s, \tau, t)$ ,  $g_1(M, t)$ ,  $g_2(s, \tau)$ . При этом, если эти функции являются решением указанных уравнений, потенциал  $U(M, t)$ , определяемый формулой (2.7), соответствующее ему поле скоростей  $\vec{W}(M, t)$ , определяемое выражением (2.8), и давление  $p(M, t)$ , определяемое из интеграла (2.6), удовлетворяют условиям (2.1)–(2.6).

Схематизацию самолетов осуществляли тонкими пластинами и объемными элементами. Крыло и другие несущие поверхности схематизировали тонкими пластинами, изогнутыми по средней линии профилей, а фюзеляж и мотогондолы двигателей — объемными элементами. Пластины и элементы моделируются непрерывно распределенным двойным слоем особенностей с дискретизацией замкнутыми вихревыми

рамками. В данном случае используются замкнутые вихревые рамки (ячейки) четырехугольной формы. По контуру каждой ячейки  $i$  размещены вихревые нити, интенсивность которых полагается неизвестной. Вихревые нити индуцируют скорости в соответствии с законом Био–Савара. Общее поле скоростей отыскивают в виде суммы скоростей, индуцируемых всеми вихревыми рамками, моделирующими поверхность тела и его след, и скорости набегающего потока:

$$\vec{W}(\vec{r}, t_k) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t_k) \vec{W}_i(\vec{r}) + \sum_{m,l} \Gamma_{m,l}^1 \vec{W}_{mlk}(\vec{r}) + \vec{W}_\infty, \quad (2.14)$$

$$\vec{W}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\vec{r} \in \partial\sigma_i} \frac{[\vec{r} - \vec{r}_0] \times \vec{dl}}{[\vec{r} - \vec{r}_0]^3}.$$

После этого задача сводится к определению неизвестных интенсивностей вихревых рамок, моделирующих тело  $\Gamma_i$  и вихревой след  $\Gamma_{m,l}$ , а также координат угловых точек вихревых рамок  $\vec{r}_{m,l}$ . Для определения интенсивностей  $\Gamma_i$  в каждой вихревой рамке специальным образом выбирается контрольная точка (точка коллокации), для которой записывается условие непротекания тела в этой точке. При этом возникает система линейных алгебраических уравнений, относительно  $\Gamma_i$ :

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i(t_k) \omega_{i,j} = f_j^k, \quad j = 1 \dots N, \quad (2.15)$$

$$\omega_{i,j} = \vec{W}_i(\vec{r}_j) \vec{n}_j, \quad f_j^k = \left[ - \sum_{m,l} \Gamma_{m,l}^1 \vec{W}_{mlk}(\vec{r}_j) - \vec{W}_\infty \right] \vec{n}_j. \quad (2.16)$$

При моделировании вихревого следа предполагается, что вихревые рамки с течением времени движутся вместе с жидкими частицами, а их интенсивности  $\Gamma_{m,l}$  при этом остаются постоянными:

$$\vec{r}_{m,l}(t_k) = \vec{r}_{m,l}(t_{k-1}) + \vec{W}(\vec{r}_{m,l}(t_{k-1}), t_{k-1}) \Delta t, \quad l < k. \quad (2.17)$$

В каждый момент времени образуется новая вихревая ячейка, две вершины которой лежат на линии отрыва:

$$\vec{r}_{kl}(t_k) = \vec{r}_l^L, \quad (2.18)$$

а интенсивность вихревой нити на вновь сошедшей рамке определяется через интенсивности вихревых нитей, лежащих на поверхности тела и имеющих с ней общую сторону:

$$\Gamma_{m,l} = \Gamma_{i+}(t_m) - \Gamma_{i-}(t_m). \quad (2.19)$$

В формулах (2.14)–(2.19)  $l$  – номер отрезка на линии отрыва, с которого сошла рамка  $b_{m,l}$ ,  $m$  – время схода рамки в поток.

Таким образом, задача решается по временным шагам до заданного конечного расчетного шага. На каждом расчетном шаге с использованием интеграла Коши–Лагранжа вычисляются нагрузки.

## 2.2. Основные положения метода дискретных вихрей

Поставленная задача решается методом дискретных вихрей, в соответствии с которым обтекаемое тело и его след заменяются системами присоединенных и свободных вихрей (рис. 2.2) В данном случае в качестве гидродинамических особенностей используются замкнутые вихревые рамки (ячейки) четырехугольной формы (рис. 2.3).

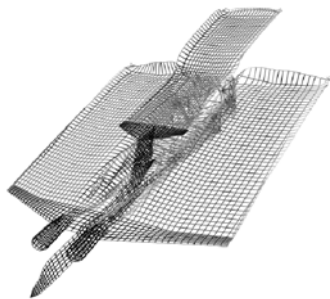


Рис. 2.2. Вихревая схема

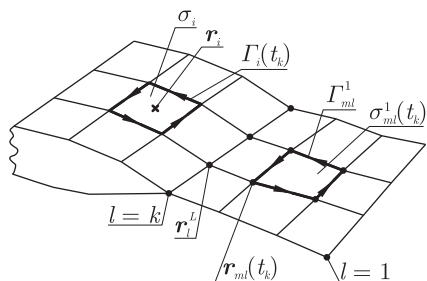


Рис. 2.3. Замкнутая вихревая рамка

По контуру каждой ячейки  $i$  размещены вихревые нити, интенсивность которых считается неизвестной. Вихревые нити индуцируют скорости в соответствии с законом Био–Савара. Общее поле скоростей отыскивается в виде суммы скоростей, индуцируемых всеми вихревыми рамками, моделирующими поверхность тела и его след, и скорости набегающего потока:

$$\vec{W}(\vec{r}, t_k) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t_k) \vec{W}_i(\vec{r}) + \sum_{m,l} \Gamma_{m,l}^1 \vec{W}_{mlk}(\vec{r}) + \vec{W}_\infty, \quad (2.20)$$

$$\vec{W}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\vec{r} \in \partial\sigma_i} \frac{[\vec{r} - \vec{r}_0] \times \vec{dl}}{[\vec{r} - \vec{r}_0]^3}.$$

После этого задача сводится к определению неизвестных интенсивностей вихревых рамок, моделирующих тело  $\Gamma_i$  и вихревой след  $\Gamma_{m,l}$ , а также координат угловых точек вихревых рамок  $\vec{r}_{m,l}$ . Для определения интенсивностей  $\Gamma_i$  в каждой вихревой рамке специальным образом выбирается контрольная точка (точка коллокации), для которой

записывается условие непротекания тела в этой точке. При этом возникает система линейных алгебраических уравнений относительно  $\Gamma_i$ :

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i(t_k) \omega_{ij} = f_j^k, \quad j = 1, N, \quad (2.21)$$

$$\omega_{ij} = \vec{W}_i(\vec{r}_j) \vec{n}_j, \quad f_j^k = \left[ - \sum_{m,l} \Gamma_{m,l}^1 \vec{W}_{mlk}(\vec{r}_j) - \vec{W}_\infty \right] \vec{n}_j. \quad (2.22)$$

При моделировании вихревого следа предполагается, что вихревые рамки с течением времени движутся вместе с жидкими частицами, а их интенсивности  $\Gamma_{m,l}$  при этом остаются постоянными:

$$\vec{r}_{m,l}(t_k) = \vec{r}_{m,l}(t_{k-1}) + \vec{W}(\vec{r}_{m,l}(t_{k-1}), t_{k-1}) \Delta t, \quad l < k. \quad (2.23)$$

В каждый момент времени образуется новая вихревая ячейка, две вершины которой лежат на линии отрыва (2.24):

$$\vec{r}_{kl}(t_k) = \vec{r}_l^L, \quad (2.24)$$

а интенсивность вихревой нити на вновь сошедшей рамке определяется через интенсивности вихревых нитей, лежащих на поверхности тела и имеющих с ней общую сторону:

$$\Gamma_{m,l} = \Gamma_{i+}(t_m) - \Gamma_{i-}(t_m). \quad (2.25)$$

В формулах (2.20–2.25)  $l$  — номер отрезка на линии отрыва, с которого сошла рамка  $b_{m,l}$ ,  $m$  — время схода рамки в поток.

Таким образом, задача решается по временным шагам до заданного конечного расчетного шага. На каждом расчетном шаге с использованием интеграла Коши–Лагранжа вычисляются нагрузки. При необходимости производится их осреднение по времени.

### 2.3. Точечный вихрь

Для моделирования в аэрогидродинамике плоскопараллельного течения методом дискретных вихрей в качестве гидродинамических особенностей используются точечные вихри или вихри бесконечной длины. Рассмотрим точечный вихрь в точке  $x_0, y_0$  с циркуляцией  $\Gamma$  (рис. 2.4). Скорость, индуцируемая этим вихрем в любой точке  $x, y$  рассматриваемой плоскости, будет определяться в соответствии с формулой Био–Савара:

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (2.26)$$

где  $r$  — расстояние от точечного вихря до произвольной точки, или для проекций скорости  $W$  на оси принятой системы координат

$$W_x = \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{y_0 - y}{r^2} \right), \quad W_y = \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{x - x_0}{r^2} \right), \quad (2.27)$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Таким образом, для моделирования вихревых следов при плоско-параллельном течении расчет возмущенных скоростей можно вести, пользуясь формулами (2.27).

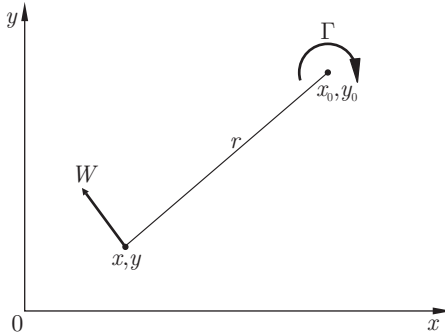


Рис. 2.4. Точечный вихрь

## 2.4. Вихревой отрезок

Вихревой отрезок является основным составным элементом при моделировании методом дискретных вихрей пространственных вихревых следов. Рассмотрим поле скоростей от вихревого отрезка (рис. 2.5).

Пусть вихревой отрезок с циркуляцией  $\Gamma$  имеет координаты начала  $A(x_1, y_1, z_1)$  и конца  $B(x_2, y_2, z_2)$ . Тогда скорость, индуцируемая этим вихрем в любой точке  $C(x, y, z)$  рассматриваемого пространства, будет определяться в соответствии с формулой Био–Савара:

$$W = \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2), \quad (2.28)$$

где  $r$  — кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от произвольной точки до вихревого отрезка или его продолжения (см. рис. 2.5), или для проекций скорости  $W$  на оси принятой системы координат

$$W_x = \frac{\Gamma}{4\pi} ca_x, \quad W_y = \frac{\Gamma}{4\pi} ca_y, \quad W_z = \frac{\Gamma}{4\pi} ca_z, \quad (2.29)$$



ства, будет определяться как сумма скоростей от четырех вихревых отрезков, из которых состоит вихревая рамка:

$$W = \sum_{i=1}^4 W_i, \quad (2.31)$$

или для проекций скорости  $W$  на оси принятой системы координат

$$W_x = \sum_{i=1}^4 W_{xi}, \quad W_y = \sum_{i=1}^4 W_{yi}, \quad W_z = \sum_{i=1}^4 W_{zi}. \quad (2.32)$$

Таким образом, при моделировании пространственных вихревых следов для расчета возмущенных скоростей можно использовать формулы (2.31).

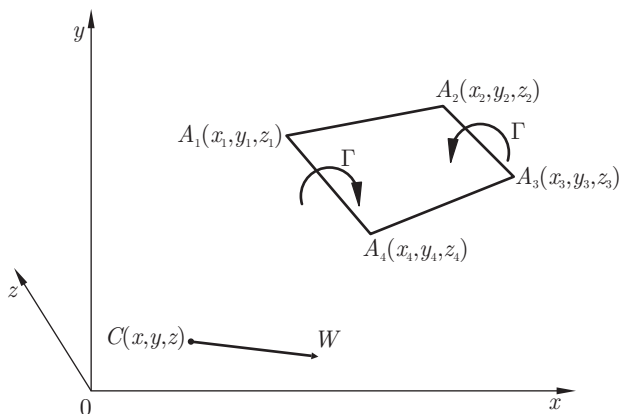


Рис. 2.6. Замкнутая вихревая рамка

## 2.6. Моделирование свободной турбулентности в отрывных и струйных течениях в рамках метода дискретных вихрей

Построение математических моделей сдвигового турбулентного течения несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса в рамках метода дискретных вихрей базируется на трактовке свободной турбулентности как иерархии вихрей разного масштаба. При этом крупномасштабное турбулентное движение рассматривается в общем случае как трехмерное и существенно нестационарное, оно порождается потерей устойчивости и распадом упорядоченных вихревых образований, превращением их в вихревые ансамбли. Последние, двигаясь вместе со средой, деформируются, захватывают друг друга и образуют как новые макроструктуры, так и мелкие вихри.



Существенно, что вихревые движения содержат органически присущий им механизм потери устойчивости и перехода от порядка к хаосу. Полученные с помощью метода дискретных вихрей (МДВ) решения позволяют без использования эмпирических констант определять поля средней скорости и давления, нормальных и сдвиговых рейнольдсовых напряжений, пульсаций давления, корреляции пульсаций скорости и давления, соответствующие масштабы турбулентности и спектры.

Основное в данной концепции — дискретное описание явления как по пространству, так и по времени. Можно утверждать, что вихревые движения жидкой среды содержат органически присущий им механизм потери устойчивости и перехода от порядка к хаосу. Данный подход позволил подтвердить важную роль крупномасштабных когерентных структур в турбулентном перемешивании в слоях смешения, струях, следах и отрывных течениях, которые были ранее обнаружены экспериментально. Когерентные, упорядоченные структуры — сгустки завихренности локализованы в пространстве и отличаются значительным временем существования. Для описываемой методологии очень важно установление факта слабой зависимости этих явлений от вязкости среды, т. е. в первом приближении вязкая диссипация не учитывается.

Расчет вихревой структуры турбулентности следа, струи, слоя смешения и отрывного течения выполняется путем решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\tau} = \frac{u_i}{u_o}, \quad \frac{d\bar{y}_i}{d\tau} = \frac{v_i}{u_o}, \quad \frac{d\bar{z}_i}{d\tau} = \frac{w_i}{u_o}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.33)$$

где  $i$  — номер свободного вихря,  $N$  — число вихрей,  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$  — скорости в вершинах вихревой рамки, найденные с учетом влияния всех вихрей;  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{y}_i$ ,  $\bar{z}_i$  — безразмерные координаты,  $\tau$  — безразмерное время. Полное решение задачи содержит два взаимосвязанных этапа: решение системы линейных уравнений для циркуляции суммарных вихрей на поверхности тела, которые соответствуют граничным условиям о непротекании, и определение положений свободных вихрей. То и другое следует осуществить совместно, однако обычно это делается последовательно, с повторяющейся задержкой на один временной шаг  $\Delta\tau$ .

Все алгоритмы в том или ином виде содержат неявные источники возмущений, например рост числа свободных вихрей при развитии течения. Поэтому даже если картина обтекания тела в целом периодична, начальные условия не будут строго повторяться в соответствующие моменты времени. Кроме того, в задачах с симметричными условиями своеобразным источником возмущений оказывается разная последовательность расчетов скоростей или циркуляций в симметричных точках.

В правой части уравнений (2.33) стоят безразмерные скорости, получающиеся в результате суммирования средних скоростей набегающего потока и их пульсаций, а также вызванные вихрями на теле и свободными вихрями следа или струи. Для вихрей учитываются

граничные условия о непротекании поверхности тела или сопла. Основным источником возникновения турбулентности при больших числах Рейнольдса является движение большого числа свободных дискретных вихрей. Процесс разрушения регулярных вихревых структур имеет трехмерный характер, причем решающую роль в нем играют силы инерционной природы.

В МДВ реализуются два механизма диссипации энергии (диффузии вихрей).

1. Как было отмечено, движение свободных вихрей описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (2.33). В МДВ нельзя обычным образом вычислять скорости вблизи вихрей в зоне «дискретности» ввиду сингулярности формулы Био–Савара ( $u_i = \Gamma_i/2\pi r$ ), а если свободный вихрь  $\Gamma_i$  попадает в «зону дискретности»  $\Gamma_j$ , необходимо «сглаживание» скоростей, что эквивалентно соответствующему уменьшению  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_j$ . Это ведет к срезанию пиков в скоростях, что можно трактовать как «численную диффузию» в МДВ.

2. При численном интегрировании уравнений (2.33) на каждом шаге  $\Delta\tau$  вместо формулы

$$\bar{x}_i^{s+1} = \bar{x}_i^s + \int_{\tau_s}^{\tau_s + \Delta\tau} u_i(\tau_1) d\tau_1, \dots$$

в методе Эйлера используется ее упрощенное представление

$$\bar{x}_i^{s+1} = \bar{x}_i^s + \bar{u}_i^s \Delta\tau, \dots,$$

т. е. решаются уравнения типа

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\tau} = \bar{u}_i + \varepsilon_x, \quad \frac{d\bar{y}_i}{d\tau} = \bar{v}_i + \varepsilon_y, \quad \frac{d\bar{z}_i}{d\tau} = \bar{w}_i + \varepsilon_z,$$

где  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  — малые случайные функции.

Как было указано, излагаемая методология позволяет реализовать замкнутое описание сдвиговой турбулентности без использования эмпирических констант благодаря тому, что в рамках МДВ удастся моделировать диссипацию турбулентной энергии. При этом не требуется, чтобы количественные параметры диссипации совпадали с истинными. Здесь важно, что в построенном методе моделирования турбулентного движения реализуется сток энергии.

Для расчета статистических характеристик турбулентности прежде всего следует определить средние значения компонент скорости  $\langle u_i \rangle$ , среднего давления  $\langle p \rangle$  и их пульсаций  $u'_i(\tau)$  и  $p'(\tau)$ :

$$\begin{aligned} \langle u_i \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_i(t+\tau) d\tau, & \langle p \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t+\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, 3; \\ u'_i(\tau) &= u_i - \langle u_i \rangle, & p'(\tau) &= p - \langle p \rangle, \end{aligned}$$

после чего определяются и другие характеристики: нормальные и сдвиговые рейнольдсовы напряжения, коэффициенты корреляции и спектры. Нормальные рейнольдсовы напряжения:

$$\begin{aligned} \langle u'^2 \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} u'^2(\tau) d\tau, \\ \langle v'^2 \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} v'^2(\tau) d\tau, \\ \langle w'^2 \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} w'^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются рейнольдсовы напряжения сдвига  $\langle u'v' \rangle$ ,  $\langle u'w' \rangle$ ,  $\langle v'w' \rangle$ .

Коэффициенты пространственной корреляции пульсаций скорости:

$$R_{uu} = \frac{\langle u'(x)u'(x+r) \rangle}{\left[ \langle u'^2 \rangle(x) \right]^{1/2} \left[ \langle u'^2 \rangle(x+r) \right]^{1/2}},$$

пульсаций скорости и давления:

$$R_{up} = \frac{\langle u'(x)p'(x+r) \rangle}{\left[ \langle u'^2 \rangle(x) \right]^{1/2} \left[ \langle p'^2 \rangle(x+r) \right]^{1/2}},$$

соответствующий интегральный масштаб:

$$L = \int_0^{\infty} R_{uu} dr,$$

коэффициент временной корреляции или автокорреляции:

$$R(\tau) = \frac{\langle u'(\tau)u'(\tau+\tau) \rangle}{\left[ \langle u'^2 \rangle(\tau) \right]^{1/2}}.$$

Коэффициент автокорреляции  $R(\tau)$  и энергетический спектр  $E(f)$  связаны соотношением

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{\langle u'^2 \rangle} \int_0^{\infty} E(f) \cos 2\pi f \tau df, \\ E(f) &= 4 \langle u'^2 \rangle \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в отличие от методов расчета турбулентных струй и следов, основанных на использовании алгебраических или дифференциальных моделей турбулентности и содержащих несколько эмпирических констант, излагаемый в настоящем разделе метод расчета, кроме отсутствия эмпирических констант, обладает еще одним преимуществом. Он позволяет, помимо поля средних скоростей, определить три компонента нормальных и сдвиговых рейнольдсовых напряжений, коэффициенты пространственной, временной и пространственно-временной корреляции, корреляции пульсаций скорости и давления, а также спектры.

В качестве иллюстраций возможностей указанного подхода к моделированию свободных сдвиговых турбулентных течений рассмотрим результаты расчета для ряда примеров.

**Плоский турбулентный след** за поперечно обтекаемой пластиной [23, 25]. Расчеты показывают, что здесь возможны два режима обтекания: симметричный и несимметричный. Первый из них оказывается неустойчивым, в нем отсутствует поперечное перемешивание вихревых сгустков с положительной и отрицательной циркуляцией. Несимметричная вихревая структура плоского следа за пластиной в фиксированный момент времени показана на рис. 2.7, там же представлены осредненные картины течения за пластиной при несимметричном (1) и симметричном (2) режимах. В первом случае зона обратных токов за пластиной намного короче. Изменение расчетных и опытных значений средних скорости и давления, а также двух компонент пульсаций скорости вдоль оси следа за пластиной показано на рис. 2.8.

**Отрывное обтекание интерцептора** [31, 61]. Сравниваются расчетные [61] и экспериментальные [31] профили скорости  $<u>$ , пульсаций скорости  $\varepsilon_u$ , среднего давления  $<c_p>$  и интенсивности его пульсаций  $\varepsilon_p = (<c_p'>)^{1/2}$  на пластине (рис. 2.9). На рис. 2.10 приведено изменение коэффициента пространственной корреляции пристеночных пульсаций давления вдоль по потоку  $R_{pp}(\dot{x}_0\Delta x)$  при трех значениях  $x_o/h$ .

**Плоские затопленные турбулентные струи** [1, 23, 24] и слой смешения двух полубесконечных потоков [56]. Как и в случае плоского следа за пластиной, расчеты показывают возможность реализации двух режимов истечения плоской струи из сопла — симметричного и несимметричного. Соответствующие вихревые структуры в фиксированный момент времени  $\tau = t u_o/h = u$  представлены на рис. 2.11. В действительности реализуется несимметричная вихревая структура струи, соответствующая поперечному перемешиванию сгустков завихренности разного знака. Из представленного на рис. 2.12 сравнения расчета и эксперимента для средней скорости вдоль оси плоской струи видно, что только в случае реализации несимметричной вихревой структуры обеспечивается удовлетворительное согласие расчета с экспериментом.

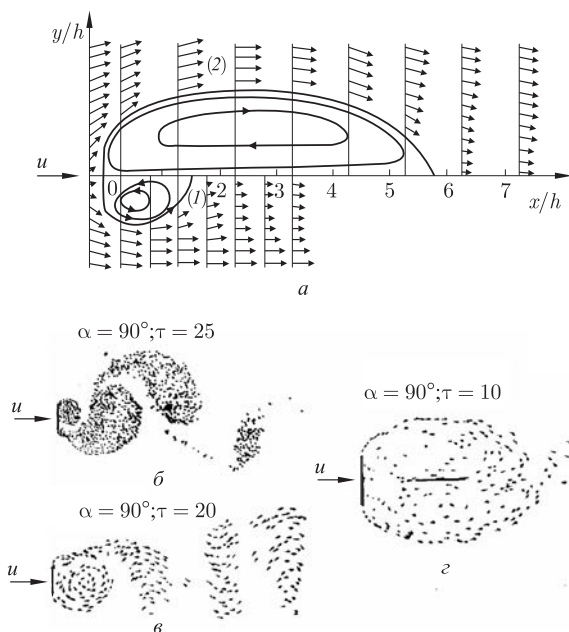


Рис. 2.7. Вихревая структура в следе за поперечно-обтекаемой пластиной (а). Осредненные картины отрывного течения при несимметричном (1) и симметричном (2) режимах (б):  $\tau$  — безразмерное время,  $u_\infty$  — скорость набегающего потока,  $h$  — хорда пластины,  $\alpha$  — угол атаки

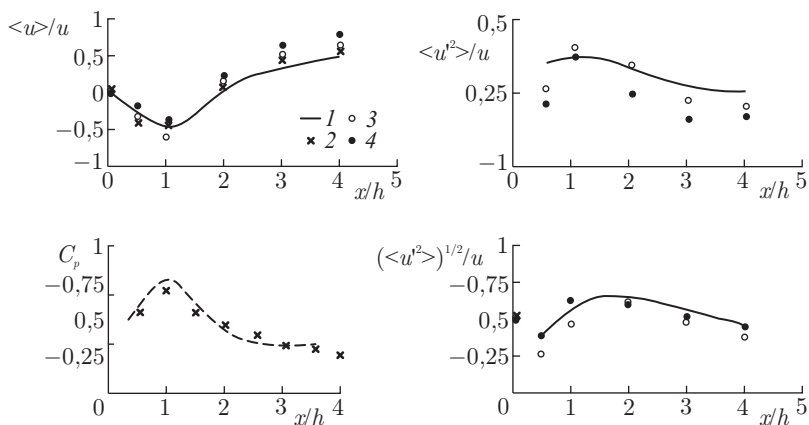


Рис. 2.8. Изменение вдоль оси следа за пластиной средней скорости  $\langle u \rangle / u_\infty$ , давления  $C_p = \langle p \rangle / (0,5 \rho u_\infty^2)$ , продольных  $(\langle u'^2 \rangle)^{1/2} / u_\infty$  и поперечных  $(\langle v'^2 \rangle)^{1/2} / u_\infty$  пульсаций скорости на участке протяженностью  $x/h = 0 - 4$ : 1 — эксперименты, 2-4 — расчеты

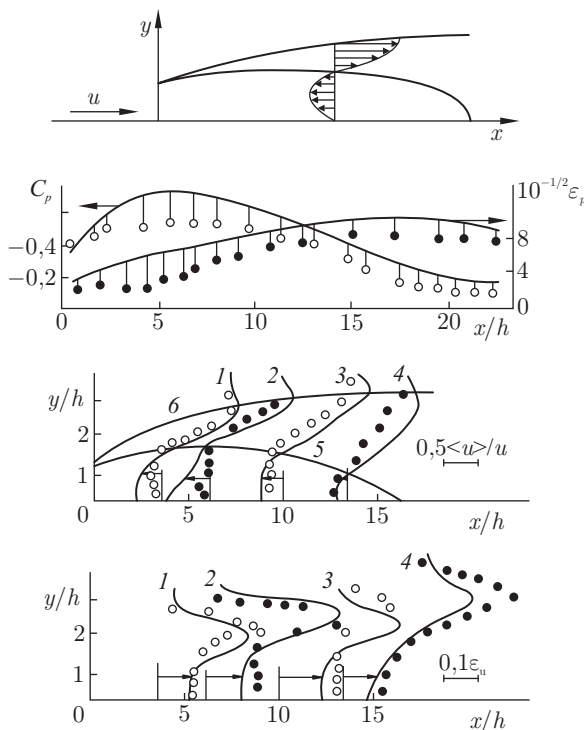


Рис. 2.9. Сравнение расчетных и опытных данных средних значений давления  $\langle c_p \rangle$  и пульсаций давления  $\varepsilon_p = (\langle p'^2 \rangle)^{1/2} / 0,5\rho u_\infty^2$  на стенке в отрывной зоне за интерцептором, а также профилей средней скорости  $\langle u \rangle / u_\infty$  и продольных пульсаций скорости  $\varepsilon_u = (\langle u'^2 \rangle)^{1/2} / u_\infty$ : 1–4 – сечения, 5 – линия нулевых продольных скоростей, 6 – граница циркуляционной зоны

**Круглые турбулентные струи** [23–25]. В качестве базового вихревого элемента было использовано вихревое кольцо. Однако жесткое условие осевой симметрии имело следствием очень слабое расширение струи. Поэтому было рассмотрено решение задачи в трехмерной постановке, т. е. расчеты круглой струи были выполнены при отказе от условия осевой симметрии. В качестве основного модуля использованы вихревые многоугольники, границы струи моделировались вихревыми рамками и по мере растяжения вихревых отрезков, составляющих эти рамки, производилось их дробление на более мелкие.

Расчеты показали (рис. 2.13), что сходящие с кромки сопла почти круглые вихри (вихревые многоугольники) сохраняют свою азимутальную однородность на первых трех калибрах  $x/d = 0 - 3$ , после чего вихревые кольца приобретают звездообразную и пространственную структуру,  $x/d = 3,5 - 6,0$ ; далее при  $x/d > 6,0$  происходит стохастизация течения. При этом в отличие от осесимметричного

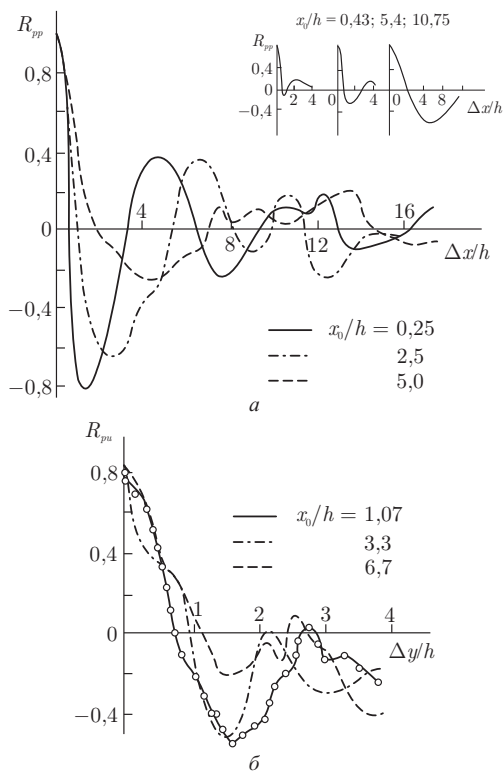


Рис. 2.10. Изменение коэффициентов корреляции пристеночных пульсаций давления вдоль по потоку  $R_{pp}(x_0, \Delta x)$ . В верхнем правом углу данные экспериментов [5]

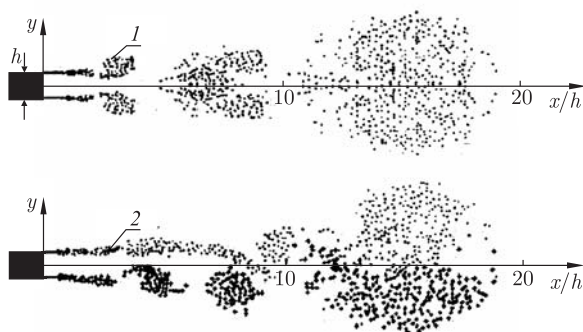


Рис. 2.11. Симметричное (1) и несимметричное (2) расположение вихревых структур в плоской турбулентной струе в момент времени  $\tau = tu_o/h = 45$

приближения, моделируется расширение струи и уменьшение средней скорости (рис. 2.14) вдоль оси струи, заметно улучшается совпадение расчета с экспериментом для продольных и радиальных пульсаций скорости и, кроме того, рассчитываются азимутальные пульсации скорости (см. рис. 2.14).

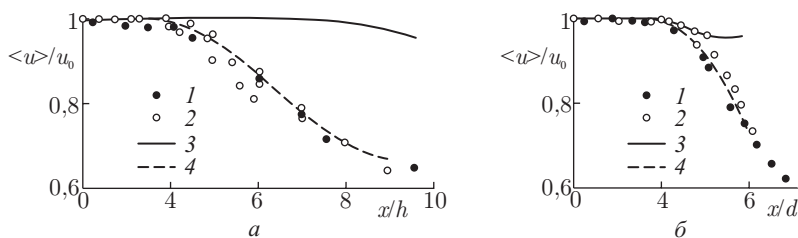


Рис. 2.12. Изменение скорости вдоль оси плоской струи (а) (1 и 2 — эксперименты, 3 и 4 — соответственно расчеты при симметричной и несимметричной вихревых структурах) и круглой турбулентной струи (б) (1 и 2 — эксперименты, 3 и 4 — расчеты при симметричной и трехмерной несимметричной вихревых структурах)

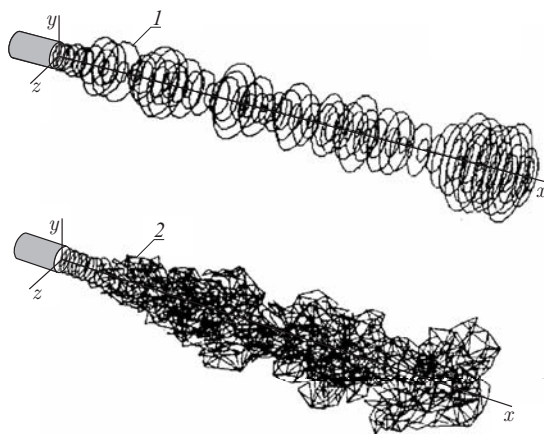


Рис. 2.13. Вихревая структура круглой струи при решении задачи в осесимметричной (1) и трехмерной (2) постановках для фиксированных моментов времени  $\tau_1 = tu_0/d = 52$  и  $\tau_2 = 44,4$

Описанный в настоящем разделе подход используется далее (см. гл. 6) в расчете турбулентного течения при обтекании рельефа местности. Этот подход позволяет, в частности, рассчитать лобовое сопротивление обтекаемых двумерных и трехмерных тел (пластина, призма, диск и др.).



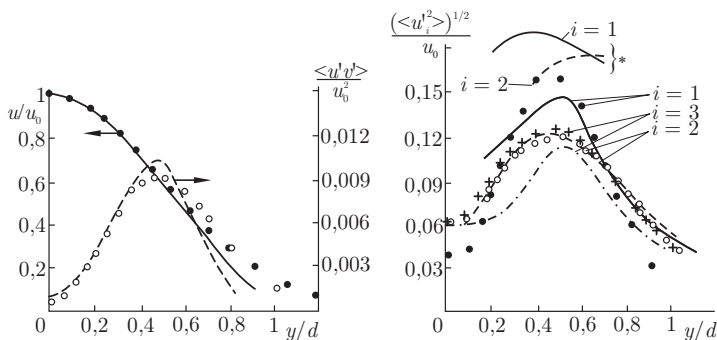


Рис. 2.14. Сравнение расчетных и экспериментальных профилей средней скорости  $\langle u \rangle / u_0$ , трех составляющих пульсационной скорости  $(\langle u_i'^2 \rangle)^{1/2} / u_0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и реинольдсова напряжения сдвига  $\langle u'v' \rangle / u_0^2$  в сечении  $x/d = 4$  при расчете струи в трехмерной постановке (точки — эксперимент, кривые — расчет;  $u'_1 = u'$ ,  $u'_2 = v'$ ,  $u'_3 = w'$ )

В последнее время опубликованы результаты исследования структуры турбулентности в затопленной круглой струе [66] на основе расчетов, выполненных на суперкомпьютере (рис. 2.15). Рассматривается турбулентное течение в струе невязкой жидкости и исследуются его статистические свойства. Поле скоростей взаимодействующих вихревых трубок определено на основе закона Био-Савара. Показано, что в рамках данного подхода описываются характеристики турбулентности, согласующиеся с физическими экспериментами и данными прямого численного моделирования, структурные функции, энергетические спектры, логнормальное распределение завихренности и двухточечные корреляционные функции.

**Закрученное турбулентное течение в цилиндрическом вихре** [23]. Рассмотрим расчет закрученного течения в цилиндрическом вихре для случая идеальной жидкости в рамках МДВ (рис. 2.16, а). Для такого течения, как известно, существует точное решение: внутри цилиндра радиуса  $R$  равномерно распределенная завихренность  $\omega = \text{const}$ .

В дискретном аналоге вихревого цилиндра вихревой объем заполнялся дискретными вихрями одинаковой циркуляции  $\Gamma_i$ , равномерно распределенными по угловым координатам на каждой окружности (рис. 2.16, б). Безразмерные величины вводились следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x}{R}; \quad \bar{y} = \frac{y}{R}; \quad \bar{u} = \frac{uR}{\sum_{i=1}^N \Gamma_i}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho} \left[ \left( \sum_{i=1}^N \Gamma_i \right) \cdot \frac{1}{R} \right]^{-2}.$$



Рис. 2.15. Когерентные вихревые структуры в начальном участке круглой турбулентной струи [66]

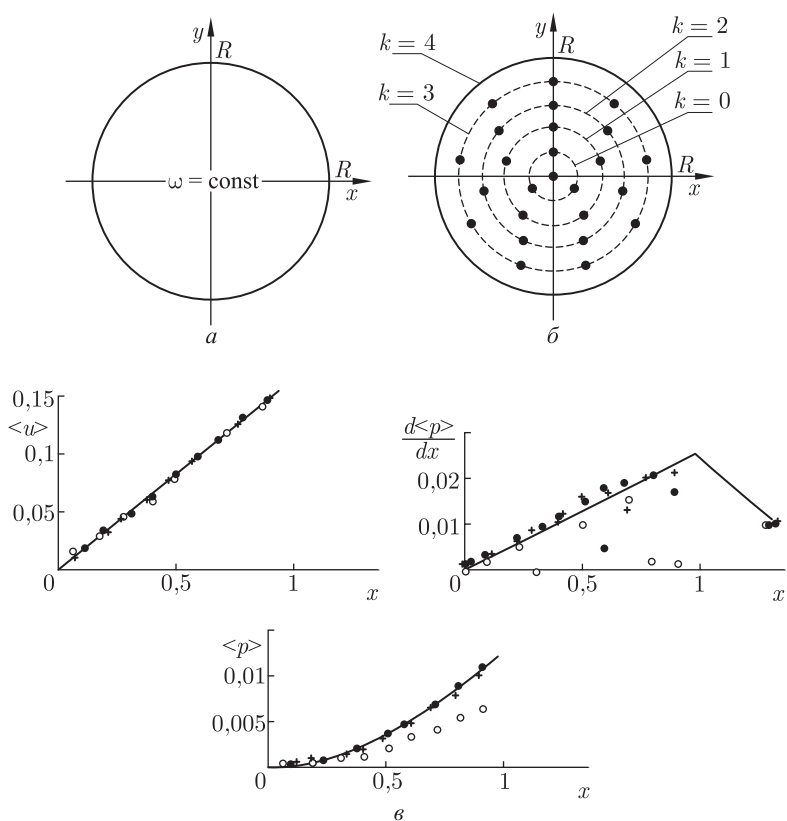


Рис. 2.16. Результаты расчета модельного течения: а — вихревой цилиндр, б — дискретный аналог вихревого цилиндра, в — сравнение приближенных и точных решений для окружной скорости  $\langle u \rangle$ , давления  $\langle p \rangle$  и градиента давления  $d\langle p \rangle/dx$ : 1 — точное решение, 2 —  $\Delta = 0,05$ ,  $N = 400$ , 3 —  $\Delta = 0,1$ ,  $N = 400$ , 4 —  $\Delta = 0,2$ ,  $N = 400$

Пример сопоставления рассчитанных значений скорости, давления и его радиального градиента с точным решением для цилиндрического вихря (рис. 2.16, в) свидетельствует об удовлетворительной точности при числе вихрей  $N = 400$  и радиусе дискретности  $\Delta = 0,2$  (невязкое приближение).

Для рассмотрения в рамках МДВ завихренного течения были выполнены расчеты характеристик турбулентного течения — пульсаций скорости в окружных и радиальных направлениях, энергия турбулентности и ее спектральные характеристики.

**Взаимодействие вихревой пары с параллельным плоским экраном.** В заключение данного раздела рассмотрим плоскую нестационарную задачу о взаимодействии двух параллельных вихревых жгутов разного знака, распространяющихся параллельно плоскому экрану<sup>1)</sup>. При этом исследуются вторичные течения, обусловленные вязкостью среды и образованием на экране турбулентного пограничного слоя при больших числах Рейнольдса.

Итак, два параллельных вихревых жгута с циркуляциями  $\Gamma_0$  и  $-\Gamma_0$  расположены параллельно плоскому экрану на расстоянии  $H_0$  от него, расстояние между их осями  $2z_0/H_0 = 1$  (рис. 2.17, а). Для выполнения на экране условия непротекания на расстоянии  $y = -H_0$  от него располагались два зеркально отраженных вихревых жгута с циркуляциями, знак которых противоположен знаку исходных вихревых жгутов при  $y = H_0$ . Исходные вихревые жгуты и их зеркальные напарники заменялись системой 19 прямолинейных вихревых нитей с одинаковыми циркуляциями. При этом круговое ядро заменялось центральным линейным вихрем и двумя концентрическими слоями, состоящими из 6 и 12 таких же вихрей.

Указанные вихревые жгуты индуцируют у экрана пристенное поперечное течение, сопровождающееся при больших числах Рейнольдса образованием турбулентного пограничного слоя. Число Рейнольдса определяется по формуле  $Re = V_0 H_0 / \nu$ , где  $V_0$  — скорость, индуцированная одним из вихревых жгутов в центре второго в начальный момент времени. При отрыве этого слоя на участке положительного градиента давления в поперечном направлении образуются вихри с циркуляцией противоположного знака. Эти вторичные вихри индуцируют поперечное смещение первичных вихрей, которые движутся по петлеобразной траектории. Данная задача решалась в квазистационарном приближении.

При этом интегральный метод расчета пограничного слоя используется только для определения параметров вторичных вихрей, образующихся при отрыве слоя. Далее уже в рамках идеальной среды

---

<sup>1)</sup> Гиневский А. С., Погребная Т. В., Шипилов С. Д. О взаимодействии вихревой пары и вихревого кольца с плоским экраном. Инженерно-физический журнал, 2009, в печати.

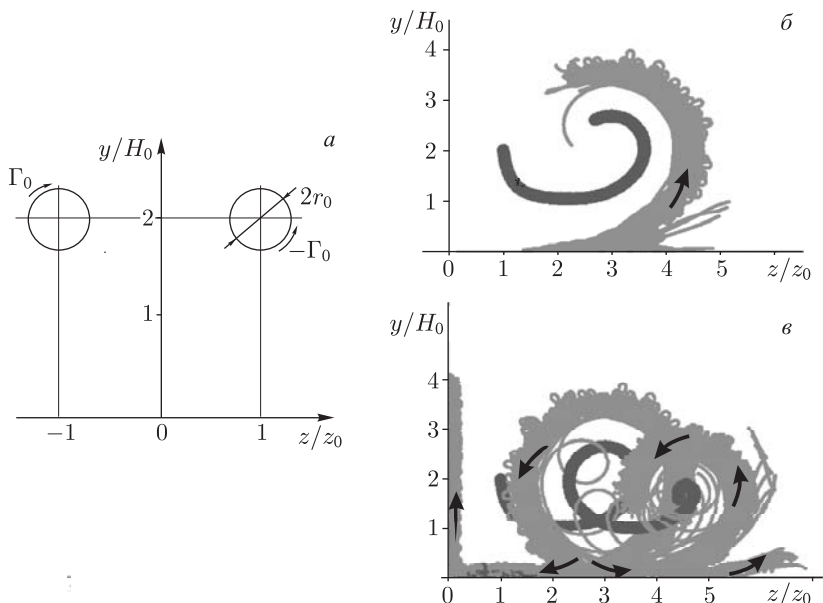


Рис. 2.17. Взаимодействие вихревой пары с параллельным плоским экраном. Геометрия потока в начальный момент времени (а). Траектории движения первичных (черный цвет) и вторичных (серый цвет) вихрей в моменты времени  $tV_0/H_0 = 75$  (б) и  $tV_0/H_0 = 150$  (в)

рассматривается взаимодействие вторичных и первичных вихрей. Результаты соответствующего решения показаны на рис. 2.17, б и в. Здесь представлены траектории первичных и вторичных вихрей в два момента времени и проиллюстрированы развитие вторичных вихрей и их воздействие на поперечное смещение первичных вихрей с образованием петлеобразной траектории их движения. Важно отметить, что вторичные вихри взаимодействуют с первичными вихрями, не смешиваясь с ними. В других случаях, например при натекании кольцевого вихревого жгута на плоский экран, происходит перемешивание вторичных и первичных вихрей.

Данная задача представляет интерес применительно к исследованию взаимодействия вихревого следа самолета с поверхностью аэродрома на взлетно-посадочных режимах. Более подробно детали решения описаны в гл. 7 настоящей книги.

## БЛИЖНИЙ ВИХРЕВОЙ СЛЕД ЗА ОДИНОЧНЫМ САМОЛЕТОМ

### 3.1. Схематизация самолета

Схематизация самолета является важным моментом моделирования обтекания самолета и вихревых следов. В монографии обобщен опыт многих исследователей, занимающихся методом дискретных вихрей. Разработаны и успешно используются в основном три вида схематизации самолетов: пластинчатая, телесная и смешанная.

При пластинчатой схематизации самолет представляют тонкими пластинами. Объемные элементы (фюзеляж, мотогондолы) схематизируются двумя взаимно перпендикулярными пластинами (схема «крест»). Такая схематизация наиболее простая и дает хорошие результаты во многих случаях, в том числе при расчете аэродинамических характеристик самолета в вихревом следе другого самолета. На рис. 3.1 в качестве примера приведена пластинчатая схематизация самолета МиГ-29, разработанная С. М. Еременко и А. В. Головневым.

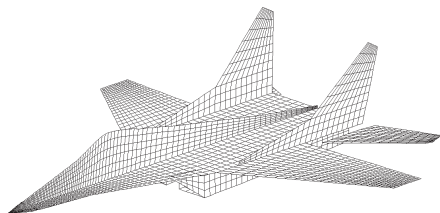


Рис. 3.1. Пластинчатая схематизация самолета МиГ-29

При телесной схематизации все части самолета (фюзеляж, мотогондолы, крыло, стабилизатор, киль) представляют объемными элементами. Это самая сложная схематизация, но она практически всегда дает хороший результат, особенно при расчете распределенных аэродинамических характеристик.

В настоящее время наиболее распространенной является смешанная схематизация. В этом случае фюзеляж и мотогондолы представлены объемными элементами, а крыло, стабилизатор, киль и другие несущие и управляющие поверхности — тонкими пластинами. Опыт показал, что наилучшие результаты получаются, если при этом крыло будет изогнуто по средней линии хорд. На рис. 3.2 показана смешанная

схематизация самолета МиГ-29, также разработанная С. М. Еременко и А. В. Головневым.

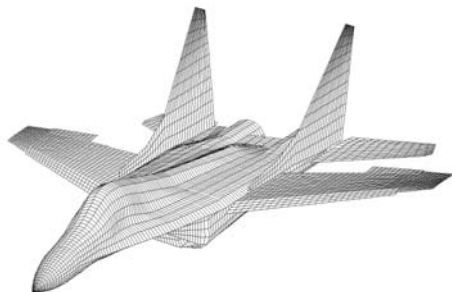


Рис. 3.2. Смешанная схематизация самолета МиГ-29

### 3.2. Вихревые схемы

На основе принятой схематизации строятся вихревые схемы для расчета характеристик ближнего вихревого следа и аэродинамических характеристик самолета в вихревом следе от другого самолета или от рельефа местности. В данной монографии для моделирования вихревых следов использована смешанная схематизация, а для расчета влияния вихревого следа на аэродинамические характеристики — пластинчатая схематизация. На схематизированных поверхностях располагались замкнутые вихревые рамки. Места отрыва фиксировались; как правило, это были острые кромки крыла, стабилизатора и других несущих и управляющих поверхностей. Моделировался сход вихревой пелены с этих мест. Расчет производился по дискретным временным шагам до момента, при котором аэродинамические нагрузки самолета «выходили на полку», т. е. с течением времени не изменялись.

### 3.3. Особенности моделирования обтекания магистральных самолетов

При моделировании обтекания магистральных самолетов и вихревых следов за ними необходимо учитывать некоторые особенности. Современные магистральные самолеты, как правило, имеют широкий фюзеляж и толстые ( $\bar{c} > 8-10\%$ ), хорошо механизированные крылья. Поэтому для получения достоверных данных при расчете характеристик вихревого следа необходимо применять смешанную схематизацию и моделировать фюзеляж и мотогондолы объемными элементами, а крыло и другие несущие и управляющие поверхности — тонкими пластинами, изогнутыми по средней линии хорд. В качестве примера на рис. 3.3 представлена вихревая схема для расчета характеристик

вихревого следа за самолетом А-320, на рис. 3.4 — за самолетом А-380, а на рис. 3.5 — за самолетом Ил-76. Схемы на рисунках 3.3 — 3.5 разработаны С. М. Еременко.

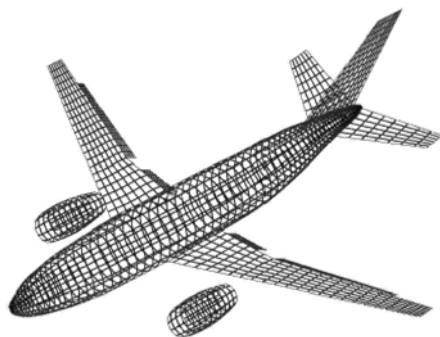


Рис. 3.3. Вихревая схема самолета А-320

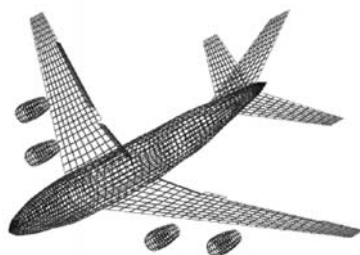


Рис. 3.4. Вихревая схема самолета А-380



Рис. 3.5. Вихревая схема самолета Ил-76

### 3.4. Характеристики ближнего следа за некоторыми самолетами

Для расчета обтекания самолетов и получения характеристик ближнего вихревого следа использовалась нелинейная нестационарная теория [2, 20, 26], базирующаяся на методе дискретных вихрей. Результаты расчета характеристик ближнего следа за самолетами с помощью линейной и нелинейной стационарных теорий приводятся в других книгах [2, 20, 26, 27]. В данной монографии представлены результаты расчета ближнего вихревого следа с использованием нелинейной нестационарной теории как наиболее общей и универсальной. На рис. 3.6 показан полученный расчетом ближний вихревой след за самолетом Ан-72; угол атаки  $\alpha = 5^\circ$ . Схематизация несущих и управляющих поверхностей, а также фюзеляжа самолета осуществлялась тонкими пластинами, а мотогондол двигателя — объемными элементами.

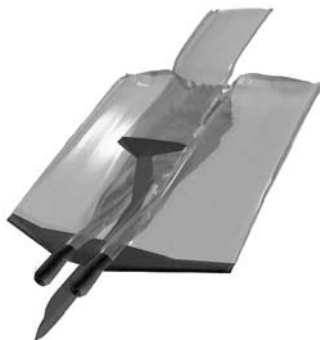


Рис. 3.6. Ближний след за самолетом Ан-72

На рис. 3.7 показан ближний вихревой след за самолетом Ил-76; угол атаки  $\alpha = 7^\circ$ . Несущие и управляющие поверхности самолета схематизировали тонкими пластинами, а фюзеляж и мотогондолы двигателя — объемными элементами. Механизация крыла соответствовала посадочному положению.

На рис. 3.8 представлен ближний вихревой след за самолетом Ту-204; угол атаки  $\alpha = 7^\circ$ . Схематизация несущих и управляющих поверхностей самолета осуществлялась тонкими пластинами, а фюзеляжа и мотогондол двигателя — объемными элементами. Механизация крыла соответствовала посадочному положению.

Рис. 3.9 показывает ближний вихревой след за самолетом А-340; угол атаки  $\alpha = 7^\circ$ , несущие и управляющие поверхности схематизированы тонкими пластинами, фюзеляж и мотогондолы двигателя — объемными элементами. Механизация крыла соответствовала взлетному положению.



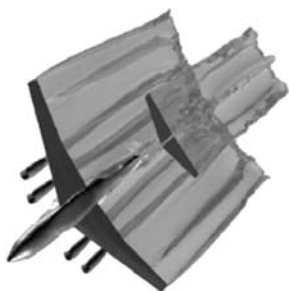


Рис. 3.7. Ближний след за самолетом Ил-76

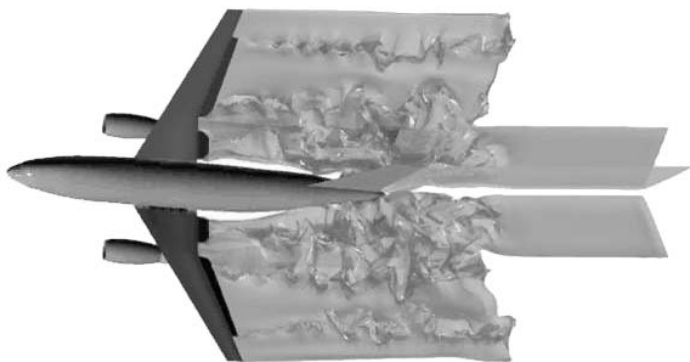


Рис. 3.8. Ближний след за самолетом Ту-204



Рис. 3.9. Ближний след за самолетом А-340

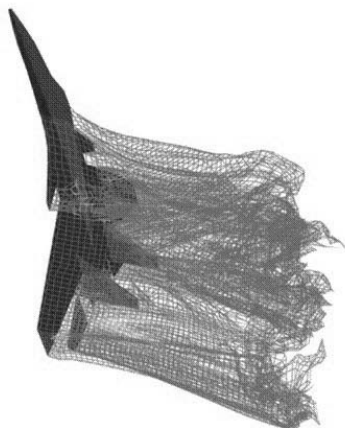


Рис. 3.10. Ближний след за самолетом Су-30

На рис. 3.10 представлен ближний вихревой след за самолетом Су-30; угол атаки  $\alpha = 76^\circ$ ; схематизация несущих и управляющих поверхностей, а также фюзеляжа самолета осуществлена тонкими пластинами.

# ДАЛЬНИЙ ВИХРЕВОЙ СЛЕД САМОЛЕТА С ТРД

## 4.1. Алгоритм расчета дальнего вихревого следа за самолетами

Алгоритм расчета дальнего вихревого следа за самолетами с турбореактивными двигателями (ТРД) представлен в виде блок-схемы на рис. 4.1. В основе алгоритма лежит математическая модель дальнего вихревого следа, описанная ниже. Эта модель наполняется исходными данными из математической модели ближнего вихревого следа через контрольную плоскость (КП), которая располагается за самолетом перпендикулярно вектору скорости полета на расстоянии  $0,5 L$ , где  $L$  — длина самолета (рис. 4.2).

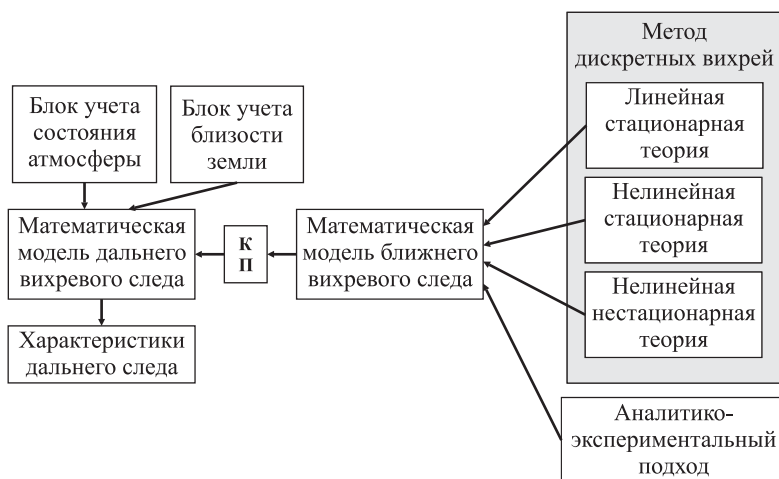


Рис. 4.1. Блок-схема алгоритма расчета дальнего вихревого следа

Все попавшие в нее вихри заменяются вихрями бесконечной длины, проходящими через те же точки и имеющими те же циркуляции, что и начальные вихри. Это дает возможность в дальнейшем перейти к решению плоскопараллельной задачи, к которой сводится математическая модель дальнего вихревого следа. Математическая модель ближнего вихревого следа строится на базе линейной стационар-

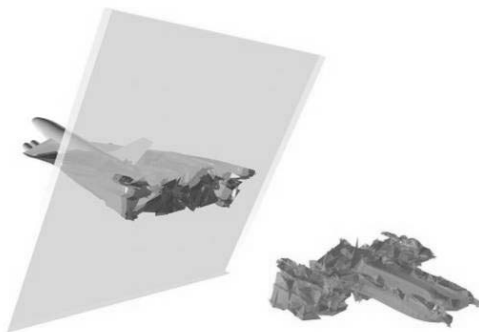


Рис. 4.2. Пример расположения контрольной плоскости

ной, нелинейной стационарной и нелинейной нестационарной теории. Указанные теории базируются на методе дискретных вихрей.

Возможно наполнение математической модели ближнего вихревого следа с использованием аналитико-экспериментального подхода, основанного на теореме Н.Е. Жуковского для подъемной силы. В этом случае самолет заменяют П-образным вихрем и, приравняв подъемную силу самолета его весу, вычисляют циркуляцию концевых вихрей. Затем найденная циркуляция перераспределяется между крылом и горизонтальным оперением пропорционально их площадям. В результате получают четыре концевых вихря за самолетом с координатами концов крыла и горизонтального оперения. Если самолет имеет взлетную или посадочную конфигурацию, то моделируется сход с крыла шести вихрей (два с концов крыла и по два с концов каждого закрылка). При этом циркуляция крыльевых вихрей распределяется между всеми шестью вихрями пропорционально длине закрылка. В работе [47] показано, что такой подход хорошо работает при расчете дальнего вихревого следа за транспортными и магистральными самолетами.

Учет влияния струи от ТРД осуществляется так же, как и в работах [7, 24, 28, 37]. Режим работы двигателя задается с помощью активного сечения, а струя моделируется путем выстраивания вихревой пелены, сходящей с обечайки двигателя. Состояние атмосферы учитывается через число Ричардсона (см. ниже). В данной книге вводится балльная система учета состояния атмосферы (см. разд. 4.6). Близость земли учитывается так же, как в работах [8, 20]. При приближении вихрей к земле на ее поверхности генерируется пристенное течение, сопровождающиеся отрывом пограничного слоя и образованием вторичных вихрей. Их взаимодействие с первичными вихрями приводит к изменению траекторий последних и к образованию так называемого отскока. Учет этих вихрей также возможен (см. методику учета в гл. 7). На выходе получают характеристики дальнего вихревого следа.

## 4.2. Математическая модель дальнего спутного следа

Математическая модель дальнего спутного следа строится в предположении, что методом дискретных вихрей [8, 20] решена задача о ближнем следе и при этом вычислены циркуляции присоединенных и свободных вихрей. В основе математической модели дальнего спутного следа лежит точное решение уравнения Гельмгольца, которое для плоскопараллельного течения имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial t} + W_y \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + W_z \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial z^2} \right), \quad (4.1)$$

где  $\Omega_x$  — компонента вектора угловой скорости  $\vec{\Omega}$ ;  $W_y$  и  $W_z$  — компоненты вектора линейной скорости движения жидкости  $\vec{W}$ ;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости. Уравнение (4.1) описывает процесс диффузии вихря в вязкой несжимаемой жидкости.

Если в начальный момент времени  $t = 0$  вихрь с циркуляцией  $\Gamma_{+i}$  расположен в точке  $(y_i, z_i)$  параллельно оси  $Ox$ , то в соответствии с точным решением уравнения (4.1) для любой произвольной точки на плоскости  $zOx$  имеем

$$\Omega_{x(i)}(y, z, t) = \frac{\Gamma_{+i}}{8\pi\nu} \frac{1}{t} e^{-\frac{(y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}{4\nu t}}. \quad (4.2)$$

В соответствии с теоремой Стокса и с учетом начального условия  $\Gamma_{+i}(y, z, 0) = \text{const}$ , выражение для циркуляции, определяемой в точке  $(x, z)$  в произвольный момент времени  $t$  запишется в виде

$$\Gamma_{+i}(y, z, t) = \Gamma_{+i}(y, z, 0) \left[ 1 - e^{-\frac{(y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}{4\nu t}} \right]. \quad (4.3)$$

Компоненты вектора скорости для этой точки в произвольный момент времени определяются выражениями

$$\begin{aligned} W_{y(i)} &= \frac{\Gamma_{+i}}{2\pi} \frac{z - z_i}{(y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \left[ 1 - e^{-\frac{(y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}{4\nu t}} \right], \\ W_{z(i)} &= \frac{\Gamma_{+i}}{2\pi} \frac{y - y_i}{(y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \left[ 1 - e^{-\frac{(y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}{4\nu t}} \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

или в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \bar{W}_{y(i)} &= \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{\bar{z} - \bar{z}_i}{(\bar{y} - \bar{y}_i)^2 + (\bar{z} - \bar{z}_i)^2} \left[ 1 - e^{-\text{Re} \frac{(\bar{y} - \bar{y}_i)^2 + (\bar{z} - \bar{z}_i)^2}{4\tau}} \right], \\ \bar{W}_{z(i)} &= \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{\bar{y} - \bar{y}_i}{(\bar{y} - \bar{y}_i)^2 + (\bar{z} - \bar{z}_i)^2} \left[ 1 - e^{-\text{Re} \frac{(\bar{y} - \bar{y}_i)^2 + (\bar{z} - \bar{z}_i)^2}{4\tau}} \right]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В выражениях (4.5)  $\Gamma_i = \Gamma_{+i}/U_0 b$ ,  $\bar{y} = y/b$ ,  $\bar{z} = z/b$ ,  $\tau = U_0 t/b$ ,  $\text{Re} = U_0 b/\nu$ ,  $U_0$  — скорость невозмущенного потока.

Таким образом, в основу математической модели положены формулы (4.5), в которые вместо числа Рейнольдса  $Re$  вводится его приведенное значение  $Re^*$  с приведенным коэффициентом  $\nu^*$  вместо коэффициента  $\nu$ . В гл. 7 будет описан способ получения этого коэффициента. Значение коэффициента  $\nu^*$  можно также получить путем обработки экспериментальных данных. Если известно положение вихревого следа за самолетом, то коэффициент  $\nu^*$  можно вычислить по формуле, полученной путем обработки экспериментальных данных с применением теоремы Н. Е. Жуковского о подъемной силе [8]

$$\nu^* = -\frac{U_0 l_0^2}{4} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \ln \left( 1 - \frac{16 l_0^2 \operatorname{tg} \varphi_i}{C_{ya} S} \right) \right]^{-1}, \quad (4.6)$$

где  $U_0$  — скорость полета самолета,  $l_0 = \pi l/4$ ;  $l$  — размах крыла самолета,  $C_{ya}$  — коэффициент подъемной силы самолета, определяемый как  $C_{ya} = C_{ya}^\alpha \alpha$ , ( $\alpha$  — угол атаки;  $S$  — площадь крыла самолета;  $x_i$  — расстояние от самолета до  $i$ -го места замера (сечения) высоты опускания следа;  $\varphi_i$  — угол между линией полета самолета и высотой опускания следа в  $i$ -м сечении;  $N$  — число сечений, в которых измерялась высота опускания следа.

### 4.3. Проверка существования и единственности решения

Пусть профиль движется в несжимаемой вязкой среде с постоянной скоростью  $U_0$  под углом атаки  $\alpha$ ;  $\nu$  — кинематическая вязкость среды.

Выберем систему координат  $Oxyz$ , связанную с профилем. В рассматриваемом случае циркуляция потока на профиле изменяется, поэтому в силу теоремы о неизменности циркуляции по жидкому контуру, не пересекающему особенностей, с контура будут сходиться и двигаться по потоку свободные вихри, циркуляция которых в данной математической модели останется постоянной. При этом свободные вихри будут параллельны присоединенным вихрям на профиле, т.е. оси  $Oz$ . Вязкость среды будем учитывать через скорость, индуцируемую в ней вихрем единичной интенсивности, что позволит точнее учесть условие постоянства циркуляции в пространстве.

Так как задачу рассматриваем в линейной постановке при малых углах атаки, предположим, что свободные вихри движутся в плоскости  $Oxy$  со скоростью  $U_0$ .

Пусть профиль занимает отрезок  $[-1, 1]$  оси  $Ox$ . В силу того, что с задней кромки профиля сходится пелена свободных вихрей, скорости на ней должны быть конечными и, следовательно, к задней кромке ближайшей должна быть расчетная точка, а к передней — дискретный вихрь.

Дискретные вихри и расчетные точки расположим таким образом, чтобы дискретные вихри размещались в точках

$$x_i = -1 + \left(i - \frac{3}{4}\right)h, \quad h = \frac{2}{n}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.7)$$

а расчетные точки были

$$x_{0i} = x_i + \frac{h}{2} = -1 + \left(i - \frac{1}{4}\right)h, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.8)$$

Изменения всего вихревого слоя будем наблюдать через промежутки времени  $\Delta t = h/U_0$ . Для простоты положим  $U_0 = 1$ . Координата свободного вихря, сошедшего с профиля в момент  $t_s$ , в расчетный момент  $t_r$  будет равна  $\xi_{sr} = x_n + (r - s + 1)\Delta t$ . Пусть циркуляция дискретного вихря в точке  $x_i$  в расчетный момент времени  $t_r$  равна  $\Gamma_{ir}$ , а циркуляции свободных вихрей, сошедших к этому времени с профиля, равны  $\Lambda_s^r$ ,  $s = 1, \dots, r$  и постоянны во времени. Выполняя условие непротекания профиля в расчетных точках  $x_{0i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_{ir} \omega_{ij} + \sum_{s=1}^r \Lambda_s^r \omega_{sjr} = -V_j^*, \quad j = \overline{1, n}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (4.9)$$

где  $V_j^*$  — нормальная составляющая скорости набегающего потока в расчетной точке  $x_{0j}$ ;  $\omega_{ij}$  — нормальная составляющая скорости в расчетной точке  $x_{0j}$ , индуцируемая вихрем единичной интенсивности, находящимся в точке  $x_i$ ;  $\omega_{sjr}$  — нормальная составляющая скорости в точке  $x_{0j}$ , индуцируемая вихрем единичной интенсивности, находящимся в точке  $\xi_{sr}$  в вязкой среде, причем из [26] следует, что

$$\omega_{sjr} = \frac{1 - e^{-(t_r - t_s)^2 / 4\nu t_r}}{x_{0j} - x_n - (t_r - t_s + \Delta t)}. \quad (4.10)$$

Дополним рассматриваемую систему уравнением, являющимся дискретным аналогом неизменности циркуляции во всем пространстве. Если профиль начал движение из состояния покоя, это уравнение будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_{ir} + \sum_{s=1}^r \Lambda_s^r = 0, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (4.11)$$

Таким образом, имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Gamma_{ir} \omega_{ij} + \sum_{s=1}^r \Lambda_s^r \omega_{sjr} &= -V_j^*, & j = \overline{1, n}, \quad r = 1, 2, \dots, \\ \sum_{i=1}^n \Gamma_{ir} + \sum_{s=1}^r \Lambda_s^r &= 0, & r = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.12)$$

Полагая  $\Gamma_{ir} = \gamma(x_i, t_r) h$ ,  $\Lambda_s^r = \delta(t_s) \Delta t$ , перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma(x_i, t_r) h}{x_{0j} - x_i} + \sum_{s=1}^r \frac{\delta(t_s) \left(1 - e^{-(t_r - t_s)^2 / 4\nu t_r}\right)}{x_{0j} - x_n - (t_r - t_s + \Delta t)} \Delta t &= 2\pi f(t_r), \\ j &= \overline{1, n}, \quad r = 1, 2, 3, \dots, \\ \sum_{i=1}^n \gamma(x_i, t_r) h + \sum_{s=1}^r \delta(t_s) \Delta t &= 0, \quad r = 1, 2, 3, \dots, \quad f(t_r) = -V_j^*. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Матрица этой системы не вырождена и, следовательно, система разрешима [26]. С другой стороны, согласно результатам работы [28], предположим, что функции  $\gamma(x, t)$  и  $\delta(t)$  принадлежат классу  $H^*$  на соответствующих множествах, и получим, что предыдущая система аппроксимирует следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(x, t)}{x_0 - x} dx + \int_0^t \frac{\delta(\tau) \left(1 - e^{-(t-\tau)^2 / 4\nu t}\right)}{x_0 - 1 - (t - \tau)} d\tau &= 2\pi f(t), \quad x_0 \in [-1, 1], \quad t \geq 0 \\ \int_{-1}^1 \gamma(x, t) dx + \int_0^t \delta(\tau) d\tau &= 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где для класса функций  $H^*$  при  $\varphi(t) \in H^*$ ,  $t \in [a, b]$

$$\varphi(t) = \frac{\varphi(t)}{(t-a)^\alpha (b-t)^\mu}, \quad \varphi(t) \in H \text{ на } [a, b], \quad 0 \leq \alpha, \mu \leq 1 \quad (4.15)$$

Покажем, что система (4.14) имеет единственное решение и оно удовлетворяет требуемым граничным условиям. Из физических соображений первое уравнение системы (4.14) будем рассматривать относительно неограниченной в точке  $x = -1$  функции  $\gamma(x, t)$  как сингулярное интегральное уравнение на отрезке  $[-1, 1]$  индекса  $k = 0$ .

Разрешая это уравнение относительно  $\gamma(x, t)$ , получаем

$$\begin{aligned} \gamma(x, t) &= 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(t) + \frac{1}{\pi^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_0^t \delta(\tau) \left(1 - e^{-(t-\tau)^2 / 4\nu t}\right) d\tau \times \\ &\times \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \frac{dx_0}{(x-x_0)(x_0-1-(t-\tau))}. \end{aligned} \quad (4.16)$$



Воспользуемся формулами [26]:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \frac{dx}{x_0 - x} &\equiv -\pi, \quad \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} \frac{dx}{x_0 - x} \equiv \pi, \quad |x_0| \leq 1, \\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-b)\sqrt{1-x^2}} &= \pm \frac{\pi}{\sqrt{b^2-1}}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где знак «-» для  $b > 1$ , а знак «+» для  $b < 1$ .

Из последнего интеграла находим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \frac{dx_0}{b-x_0} &= -\pi + \pi \sqrt{\frac{b+1}{b-1}}, \quad b \geq 1, \\ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{b-x} &= \pi - \pi \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}, \quad b \geq 1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Используя формулы (4.17) и (4.18), находим

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x_0}{1-x_0}} \frac{dx_0}{(x-x_0)(x_0-1-(t-\tau))} = \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \frac{\pi}{1+(t-\tau)-x}. \quad (4.19)$$

Тогда соотношение (4.16) приобретет вид

$$\begin{aligned} \gamma(x, t) &= 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(t) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \frac{(1 - e^{-(t-\tau)^2/4\nu t})}{1+t-\tau-x} \delta(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Подставим выражение (4.20) во второе уравнение системы (4.8). В результате это уравнение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \delta(\tau) d\tau + \int_0^t \left(1 - \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}}\right) \times \\ \times e^{-(t-\tau)^2/4\nu t} \delta(\tau) d\tau = 2\pi f(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Предположим, что  $f \in C_1[0, T]$  и  $f(0) = 0$ . Тогда всякое непрерывное

при  $0 < t \leq T$  решение уравнения (4.20) удовлетворяет интегральному уравнению

$$\delta(t) + \int_0^t k(t, \tau) \delta(\tau) d\tau = 2\pi f'(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (4.22)$$

$$k(t, \tau) = (e^{-(t-\tau)^2/4\nu t} - 1) \frac{1}{\sqrt{2+t-\tau} (t-\tau)^{3/4}} + \\ + e^{-(t-\tau)^2/4\nu t} \frac{\sqrt{t-\tau} (t+\tau)}{2\nu t^2 (\sqrt{2+t-\tau} + \sqrt{t-\tau})},$$

которое получено из (4.21) почленным дифференцированием по  $t$ . Легко видеть, что справедливо и обратное: всякое непрерывное при  $0 < t \leq T$  решение уравнения (4.22) удовлетворяет также уравнению (4.21).

Умножим обе части уравнения (4.22) на  $\sqrt{t}$  и введем в рассмотрение новую неизвестную функцию  $y(t) = \delta(t)\sqrt{t}$ . Получим

$$y(t) + 2 \int_0^{\sqrt{t}} \sqrt{t} k(t, x^2) y(x^2) dx = 2\pi f'(t) \sqrt{t}. \quad (4.23)$$

В силу того, что имеют место следующие два неравенства:

$$|2\sqrt{t} k(t, x^2)| \leq M, \quad 0 \leq x^2 \leq t \leq T \quad \text{и} \quad |2\pi f'(t) \sqrt{t}| \leq N, \quad (4.24)$$

решение уравнения (4.23) существует и единственно. Его можно записать в виде суммы такого ряда:

$$y(t) = y_0(t) - y_1(t) + y_2(t) - \dots, \quad y_0(t) = 2\pi f'(t) \sqrt{t}, \\ y_{k+1}(t) = \int_0^{\sqrt{t}} 2\sqrt{t} k(t, \tau^2) y_k(\tau^2) d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

Поскольку уравнение (4.23) является следствием (4.21), решение исходного уравнения существует и имеет вид

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i y^i(t). \quad (4.26)$$

Отсюда вытекает существование и единственность решения системы уравнений (4.20) и (4.21), т. е. справедлива следующая теорема.

**Теорема** *Решение системы уравнений*

$$\gamma(x, t) = 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}f(t) + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \frac{(1 - e^{-\frac{(t-\tau)^2}{4\nu t}})}{1+t-\tau-x} \delta(\tau) d\tau,$$

$$\int_0^t \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}} \delta(\tau) d\tau + \int_0^t \left(1 - \sqrt{\frac{2+t-\tau}{t-\tau}}\right) e^{-\frac{(t-\tau)^2}{4\nu t}} \delta(\tau) d\tau = 2\pi f(t),$$

$$t \in [0, T], \quad f(0) = 0, \quad f(t) \in C_1[0, T] \quad (4.27)$$

*существует и единственно.*

Из этой теоремы следует правомочность рассмотренной выше модели обтекания тонкого профиля.

#### 4.4. О подобии течения в дальнем вихревом следе

Многообразие конструкций самолетов делает задачу изучения дальних спутных следов трудной и многовариантной. В процессе исследования характеристик дальнего спутного следа за самолетами было замечено, что вихревые следы имеют много общих закономерностей. Оказалось, что если соблюдать определенные условия, можно добиться подобия течения в дальнем спутном следе. Получим эти критерии подобия.

Рассмотрим процесс формирования вихревого следа за тонким прямоугольным крылом умеренного удлинения. Пусть передняя кромка крыла обтекается плавно без отрыва потока. Вихревая пелена, сбегаящая с боковых и задней кромок, со временем сворачивается в два вихревых жгута и, распространяясь за крылом, опускается вниз. Особый интерес представляет расстояние от задней кромки крыла, на котором пелену можно считать полностью свернувшейся. Процесс трансформации следа идет на всем протяжении за крылом, поэтому понятие «полностью свернувшаяся пелена» имеет асимптотический смысл и для определения расстояния, на котором происходит сворачивание пелены, необходимо использовать дополнительные частные критерии, базирующиеся, например, на оценках точности вычислений или заданного уровня погрешностей определения параметров потока. Оценка расстояния может быть проведена на основе подходов теории тонкого тела. Исходя из теории подобия расстояние  $L$ , на котором пелена полностью сворачивается, может быть определено по формуле

$$L = k \frac{bV_0}{V'}, \quad (4.28)$$

где  $k$  — поправочный коэффициент,  $b$  — характерный размер (хорда крыла),  $V_0$  — скорость невозмущенного потока,  $V'$  — скорость, индуцируемая вихревой системой крыла.

Скорость  $V'$  определяется величиной циркуляции скорости  $\Gamma_0$  вокруг сечения крыла, поэтому

$$L \approx \frac{bb_L V_0}{\Gamma_0}, \quad (4.29)$$

где  $b_L$  — длина вихря с циркуляцией  $\Gamma_0$ , которая связана с подъемной силой крыла  $Y_a$  соотношением

$$Y_a = \rho_0 V_0 \Gamma_0 b_L. \quad (4.30)$$

Из (4.29) и (4.30) следует, что

$$L \approx \frac{bb_L^2 \rho_0 V_0}{Y_a} \approx b \frac{\lambda}{C_{ya}}, \quad (4.31)$$

где  $\lambda$  — удлинение крыла. Так как характерный линейный размер  $b$  для следа за крылом пропорционален его размаху  $l$ , из (4.31) имеем

$$\frac{L}{l} = k \frac{\lambda}{C_{ya}}. \quad (4.32)$$

Коэффициент  $k$  в (4.32) определяется с учетом сворачивания вихревой пелены.

Очевидно, что при сворачивании пелены в два вихревых жгута циркуляция  $\Gamma_0$  каждого жгута равна циркуляции в корневом сечении крыла и в соответствии с теоремой Н. Е. Жуковского связана с коэффициентом подъемной силы этого сечения  $C_{ya}$  и хордой корневого сечения  $b$  соотношением

$$\Gamma_0 = \frac{V_0}{2} (C'_{ya} b). \quad (4.33)$$

Для определения расстояния между вихревыми жгутами  $l_0$  представим систему присоединенных вихрей, моделирующих крыло, в виде совокупности П-образных вихрей, у которых один из продольных вихрей проходит через корневое сечение. При таком представлении вихревой системы крыла его подъемная сила может быть определена соотношением

$$Y_a = \rho_0 V_0 \sum_{i=1}^n \Gamma_i z_i, \quad (4.34)$$

где  $z_i$  — расстояние от корневой хорды крыла до вихревых шнуров, моделирующих вихревую пелену,  $n$  — число вихревых шнуров с циркуляциями  $\Gamma_i$ .

Из выражения (4.34) следует, что при постоянстве подъемной силы и отсутствии скольжения постоянна также координата «центра тяжести» вихрей для каждой консоли крыла

$$z_{цв} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_0} \Gamma_i} \sum_{i=1}^{n_0} \Gamma_i z_i, \quad (4.35)$$

где  $n_0$  — число вихрей, моделирующих консоль крыла.

При отсутствии влияния земли величина  $z_{цв} = \text{const}$  в каждом сечении следа и, следовательно, совпадает с боковой координатой вихревого жгута, т. е.

$$z_{цв} = \frac{l_0}{2}. \quad (4.36)$$

С учетом того, что

$$\sum_{i=1}^{n_0} \Gamma_i = \Gamma_0 \sum_{i=1}^{n_0} \Gamma_i z_i = \frac{Y_a}{2\rho V_0}, \quad (4.37)$$

выражение (4.36) преобразуется к виду

$$l_0 = \frac{Y_a}{\rho_0 V_0 \Gamma_0}. \quad (4.38)$$

Используя соотношение (4.33), находим

$$l_0 = \frac{Y_a}{\frac{\rho_0 V_0^2}{2} C'_{ya} b} = \frac{C_{ya}}{C'_{ya}} \frac{S}{b}. \quad (4.39)$$

Соотношения (4.39) выведены в рамках допущений линейной теории крыла, в частности это касается определения подъемной силы крыла. Из теории тонкого тела для  $l_0$  можно получить простую формулу

$$l_0 = \frac{\pi}{4} l. \quad (4.40)$$

Следует заметить, что соотношение (4.40) может быть получено и в рамках линейной теории с использованием дополнительного предположения об эллиптическом распределении циркуляции по размаху крыла  $l$ . С помощью выражений (4.34), (4.35) и (4.39) можно найти критерии эквивалентности крыльев с точки зрения подобия возмущений, вносимых в поток крылом:

$$(C'_{ya} b)_1 = (C'_{ya} (C_{ya} b)_1 = (C_{ya} b)_2, \quad (4.41)$$

где индексы 1 и 2 обозначают принадлежность соответствующих величин к характеристикам двух сопоставляемых крыльев.

Очевидно, что приведенные выше соотношения справедливы и для системы несущих поверхностей, симметричных относительно плоскости, проходящей через вектор скорости невозмущенного потока. Применительно к системе  $m$  несущих поверхностей формулы (4.23) и (4.39) приобретают вид

$$\Gamma_0 = \frac{V_0}{2} \sum_{i=1}^m (C'_{ya} b)_i \quad l_0 = \frac{\sum_{i=1}^m (C_{ya} S)_i}{\sum_{i=1}^m (C'_{ya} b)_i}, \quad (4.42)$$

где  $i$  — номер несущей поверхности.

Из соотношений (4.33), (4.39) и (4.42) следует, что вихревые следы с совпадающими основными параметрами могут быть созданы различными крыльями и несущими системами. Следовательно,  $l_0$  и  $\Gamma_0$  можно считать параметрами подобия аэродинамических поверхностей по характеристикам спутного следа. Для плоских монопланов крыльев простой формы в плане, характеризуемой удлинением  $\lambda$ , углом стреловидности по передней кромке  $\chi$  и сужением  $\eta$ , условия эквивалентности по параметрам следа, т.е. соотношения подобия, могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{l_k}{l} &= \frac{C_{ya}^\alpha C_{yk}^{\prime\alpha}}{C_{yak}^\alpha C_y^{\prime\alpha}} \left[ \frac{1 + \eta^{-1}}{1 + \eta_k^{-1}} \right]^2; \\ \frac{b_k}{b} &= \frac{C_{ya}^\alpha C_{yk}^{\prime\alpha} \lambda}{C_{yak}^\alpha C_y^{\prime\alpha} \lambda_k} \left[ \frac{1 + \eta^{-1}}{1 + \eta_k^{-1}} \right]^2; \\ \frac{\alpha_k}{\alpha} &= \frac{C_{yak}^\alpha \lambda_k}{C_{ya}^\alpha \lambda} \left[ \frac{C_y^{\prime\alpha}}{C_{yk}^{\prime\alpha}} \right] \left[ \frac{1 + \eta^{-1}}{1 + \eta_k^{-1}} \right]^2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Величины без индекса, входящие в (4.43), относятся к некоторому базовому крылу, а индексом  $k = 1, 2, \dots$  отмечены величины, относящиеся к семейству эквивалентных крыльев.

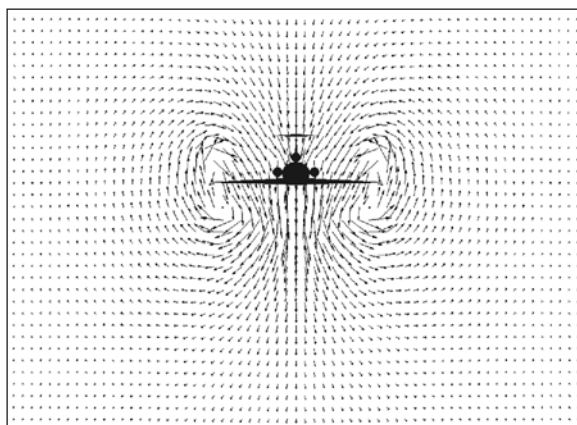
Таким образом, при изучении характеристик вихревого следа за самолетами можно, используя критерии подобия (4.41), свести задачу к рассмотрению характеристик и возмущений, создаваемых эквивалентным крылом. Такой подход позволяет заметно упростить проведение исследований, например, по воздействию дальнего вихревого следа на аэродинамику и динамику полета летательных аппаратов, так как учет и использование критериев подобия по характеристикам вихревого следа обеспечивает сокращение рассматриваемых вариантов.

На рис. 4.3 в качестве примера приведены поля возмущенных скоростей за самолетом Ту-154М (а) и эквивалентным ему крылом (б) на расстояниях  $X = 153$  м. Наблюдается заметное различие полей возмущенных скоростей.

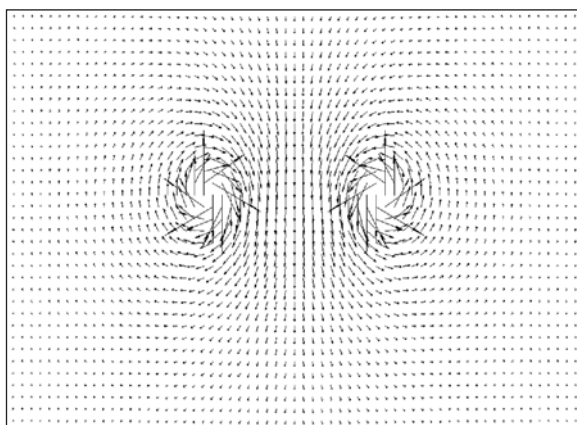
Рис. 4.4 представляет поля возмущенных скоростей на расстояниях  $X = 4132$  м. В этом случае вихревые следы за самолетом Ту-154М (а) и эквивалентным ему крылом (б) полностью идентичны.

## 4.5. Универсальный блок перехода к математической модели дальнего вихревого следа

Чтобы осуществить переход к моделированию дальнего вихревого следа за различными летательными аппаратами, используя в качестве исходных данных поля возмущенных скоростей за ними, разработан специальный универсальный блок. Поля возмущенных скоростей в контрольной плоскости за исследуемым самолетом получаем путем



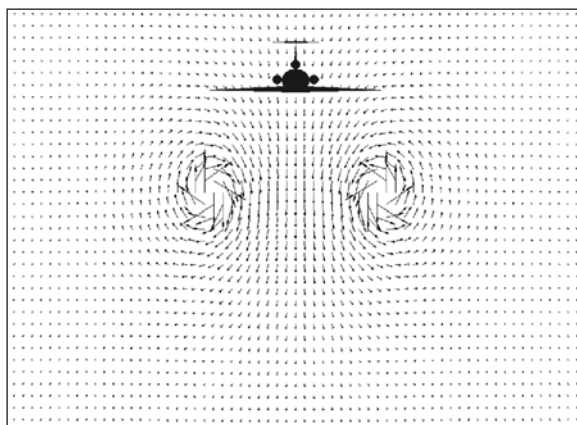
а



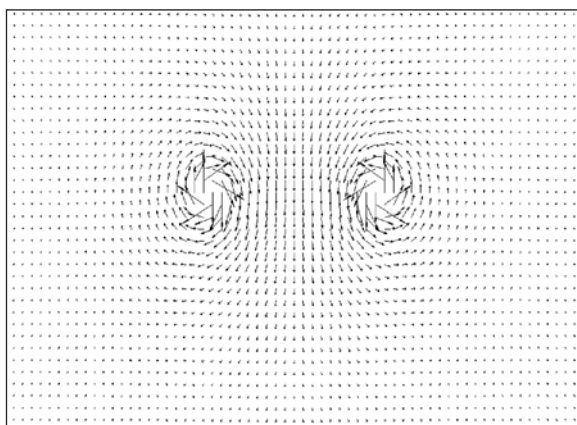
б

Рис. 4.3. Поля возмущенных скоростей за самолетом Ту-154М и эквивалентным крылом на удалении  $X = 153$  м

математического моделирования обтекания самолета по нелинейной нестационарной теории. В качестве исходных данных для блока перехода используются координаты точек и составляющие возмущенных скоростей в них в контрольной плоскости. При этом составляющие скоростей являются граничными условиями для определения неизвестных циркуляций новых прямолинейных бесконечных вихревых шнуров, расположенных в этой же плоскости. Напряженности указанных вихревых шнуров должны быть такими, чтобы индуцируемые ими возмущенные скорости в расчетных точках были равны скоростям, возмущенным в тех же точках летательным аппаратом. Задача сводится



а



б

Рис. 4.4. Поля возмущенных скоростей за самолетом Ту-154М и эквивалентным крылом на удалении  $X = 4132$  м

к решению системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{\mu=1}^{2n} \Gamma_{\mu} \alpha_{z,y\nu\mu} = 2\pi w_{z,y\nu}; \quad \nu = 1, n, \quad (4.44)$$

где известными величинами являются составляющие возмущенной скорости  $w_{z,y}$  и безразмерные коэффициенты  $\alpha_{z,y}$ , а искомыми — напряжения прямолинейных бесконечных вихревых шнуров  $\Gamma_{\mu}$ .

Число последних  $\mu$  в (4.44) должно быть в два раза больше количества точек  $\nu$  (рис. 4.5), в которых были определены поля скоростей, что необходимо для регуляризации системы линейных алгебраических



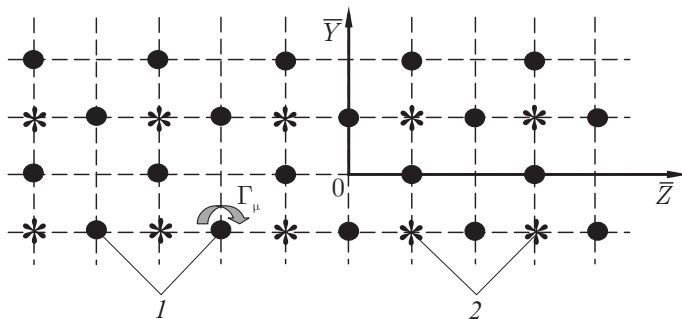


Рис. 4.5. Сетка контрольных точек и вихрей для перехода к математической модели дальнего вихревого следа

уравнений. Отыскав таким образом напряженности прямолинейных бесконечных вихревых шнуров и зная координаты их центров в заданной плоскости, можно перейти к математической модели дальнего вихревого следа. Для проверки работоспособности универсального блока были рассчитаны вихревые структуры за самолетом Ан-26 по нелинейной нестационарной теории. В качестве гидродинамических особенностей использовали вихревые рамки.

На рис. 4.6 показаны поля скоростей за самолетом Ан-26 в контрольном сечении (на расстоянии длины корпуса самолета). В верхней части представлено исходное поле скоростей, полученное по нелинейной нестационарной теории, а в нижней — поле скоростей после замены вихревых рамок на прямолинейные вихри бесконечной длины. Видим, что эти поля полностью идентичны. Значит, такая замена правомочна.

## 4.6. Учет состояния атмосферы

Для оценки состояния атмосферы удобно использовать число Ричардсона

$$\text{Ri} = \frac{g}{\bar{T}} \frac{\Delta \bar{T} / \Delta z}{(\Delta \bar{N} / \Delta z)^2}. \quad (4.45)$$

В формуле (4.45)  $g$  — ускорение свободного падения;  $\bar{T}$  — средняя температура слоя толщиной  $\Delta z$ ;  $\Delta \bar{T} / \Delta z$  и  $\Delta \bar{N} / \Delta z$  — соответственно средние градиенты температуры и горизонтальной скорости ветра в слое толщиной  $\Delta z$ .

Число Ричардсона характеризует отношение сил плавучести (числитель) и динамического фактора (знаменатель), т. е. вкладов свободной и вынужденной конвекции в формировании турбулентности атмосферы. Так, увеличение модуля градиента температуры соответствует состоянию, при котором доминируют силы плавучести. Увеличение градиента скорости соответствует увеличению динамического фактора и характеризует атмосферу как неустойчивую. Состояние атмосферы считается

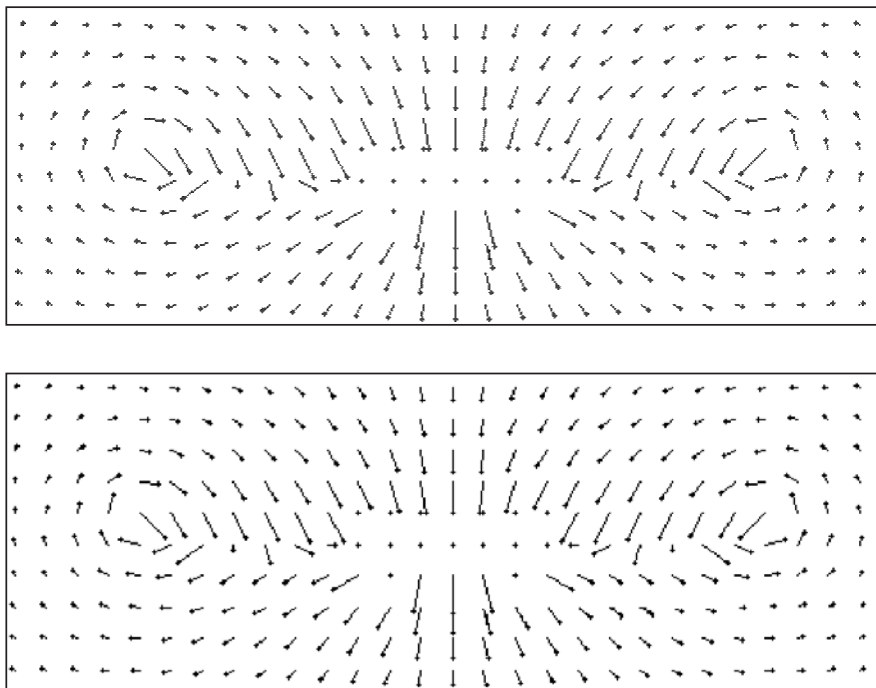


Рис. 4.6. Поле скоростей за самолетом Ан-26

нейтральным при  $-0,01 \leq Ri \leq 0,01$ ; в этом случае термическое влияние минимальное и может существовать только вынужденная конвекция. При уменьшении числа  $Ri < -0,01$  больше начинают проявляться силы плавучести, возникает смешанная конвекция и при  $Ri < -1,0$  устанавливается режим свободной конвекции. Наоборот, при увеличении  $Ri > 0,01$  силы плавучести начинают препятствовать развитию турбулентности. При  $Ri > 0,25$  течение становится почти ламинарным, турбулентное перемешивание почти отсутствует. Таким образом, все выше приведенные рассуждения можно свести в следующую таблицу, для удобства пользования которой введены оценки состояния атмосферы в баллах. Сильно неустойчивая атмосфера оценена пятью баллами, а весьма устойчивая одним баллом. Таблица дает оценки и других состояний атмосферы.

Как показали летные эксперименты, положение вихревых следов за самолетами сильно зависит от состояния атмосферы. В спокойной атмосфере вихревые следы живут очень долго, тогда как в неустойчивой атмосфере быстро разрушаются. В математической модели дальнего вихревого следа используется полученное на основе обработки экспериментальных данных соотношение между указанными баллами

Число Ричардсона $Ri$	Состояние атмосферы	Оценка в баллах
$Ri < -1,0$	Весьма неустойчивое	5
$-0,01 > Ri \geq -1,0$	Неустойчивое	4
$0,01 \geq Ri \geq -0,01$	Нейтральное	3
$2,5 \geq Ri > 0,01$	Устойчивое	2
$Ri > 0,25$	Весьма устойчивое	1

и приведенным числом Рейнольдса, что позволяет влиять на время жизни вихревых следов.

Таблица согласуется с работой [33], в которой дана аналогичная градация состояний атмосферы.

#### 4.7. Проверка работоспособности метода и достоверности получаемых результатов

Для подтверждения работоспособности разработанной методики и достоверности получаемых с ее помощью результатов были выполнены расчеты, которые затем сравнивали с результатами летного эксперимента. В данном разделе приведены примеры для самолетов без воздушных винтов. На рис. 4.7 показаны результаты расчета вихревого следа за самолетом Ан-124 (ромбы) и летного эксперимента (квадраты), полученные в ОКБ им. О. К. Антонова и предоставленные В. Комовым. Видно удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных.

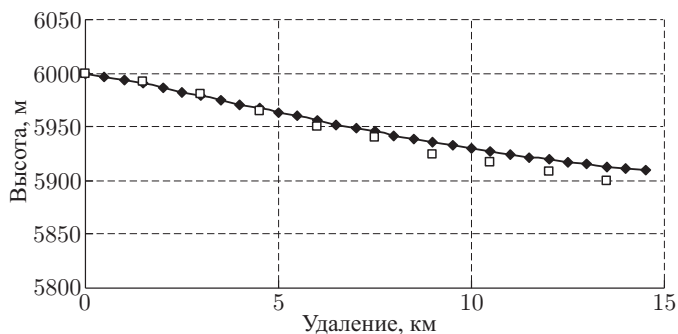


Рис. 4.7. Вихревой след за самолетом Ан-124,

На рис. 4.8 представлены результаты расчета центров вихревых жгутов за самолетом Ил-76. Здесь воспроизведены условия [8], при которых произошла катастрофа самолета Як-40 16 января 1987 г. в Ташкенте. По материалам расследования было установлено, что причиной катастрофы Як-40 стал правый концевой вихрь, который под действием

бокового ветра 0,5 – 1,5 м/с справа сместился к центру взлетно-посадочной полосы и завис над ней на высоте 20 м.

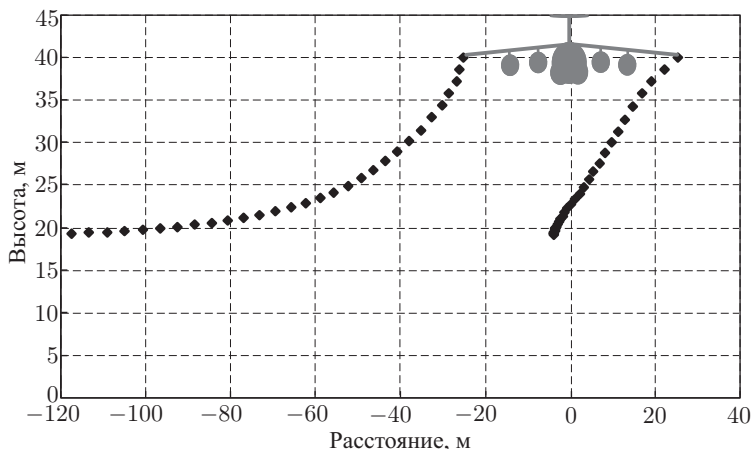


Рис. 4.8. Вихревой след за самолетом Ил-76 при наличии бокового ветра

При этом Ил-76 пролетел место катастрофы на высоте 40 м. Расчеты по предлагаемой методике показывают, что при данных условиях полета правый концевой вихрь действительно зависает на высоте 20 м почти над центром взлетно-посадочной полосы, что также подтверждает работоспособность данной методики.

На рис. 4.9 показано распределение тангенциальной скорости в ядре вихря самолета Ил-76 через 60 с после пролета места замера скорости на высоте 100 м (ромбы — расчет, квадраты — эксперимент ЛИИ). Видим удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных.

На рис. 4.10 представлено распределение тангенциальных скоростей в ядре самолета В-747 через 10 с после пролета места замера скоростей на высоте 100 м (ромбы — расчет, квадраты — эксперимент, Department of Transportation USA). Также видно удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных.

Таким образом, о работоспособности разработанной методики можно судить по достоверности получаемых с ее помощью результатов.

## 4.8. Характеристики вихревого следа самолета Ил-76

С помощью рассмотренной методики исследованы характеристики вихревого следа за различными самолетами при различных условиях полета.

В данном разделе приводятся результаты исследования характеристик дальнего вихревого следа за самолетом Ил-76, при котором

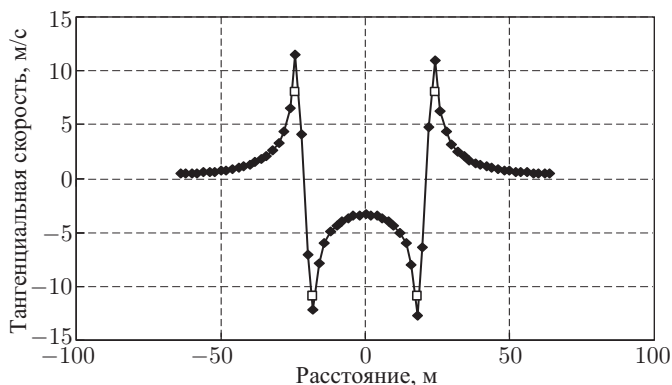


Рис. 4.9. Распределение тангенциальной скорости в ядре вихря самолета Ил-76

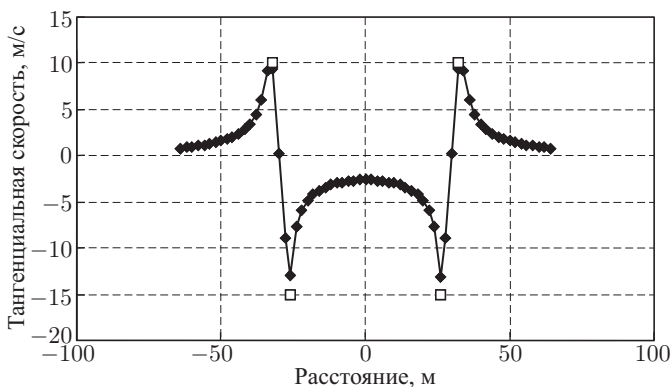


Рис. 4.10. Распределение тангенциальной скорости в ядре вихря самолета В-747

было выявлено влияние скорости и высоты полета на положение вихревого следа, а также влияние состояния атмосферы в соответствии с разд. 4.6.

На рис. 4.11 приведены результаты расчета положения центров вихревых жгутов за самолетом Ил-76, летящим на высоте  $H = 1000$  м со скоростью  $V = 300$  км/ч при различных состояниях атмосферы: очень устойчивом ( $CA = 1$ ), нейтральном ( $CA = 3$ ) и очень неустойчивом ( $CA = 5$ ). Видим, что в очень спокойной атмосфере вихревой след на удалении  $X = 15$  км опустился уже на  $\Delta H = -110$  м. В очень неустойчивой атмосфере ( $CA = 5$ ) вихревой след быстро затухает за счет диффузии вихрей, высота опускания вихревых жгутов составила всего  $\Delta H = -30$  м.

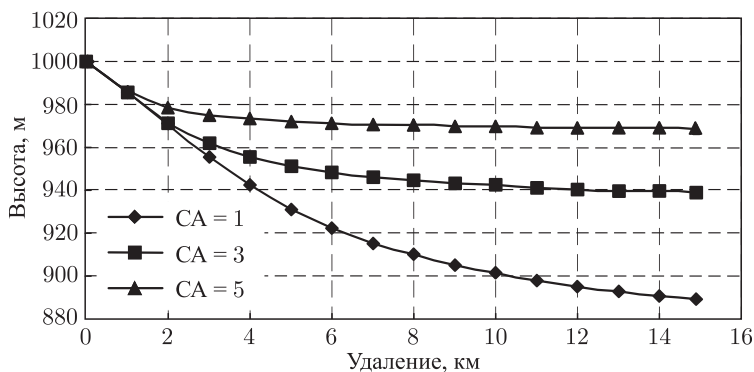


Рис. 4.11. Положение центров вихревых жгутов за самолетом Ил-76 ( $V = 300$  км/ч,  $H = 1000$  м) при разных состояниях атмосферы

На рис. 4.12 аналогичные результаты представлены для самолета Ил-76, летящего на высоте  $H = 1000$  м со скоростью  $V = 500$  км/ч при тех же состояниях атмосферы. Видим, что теперь в очень спокойной атмосфере ( $CA = 1$ ) вихревой след на удалении  $X = 15$  км опустился на  $\Delta H = -55$  м. В очень неустойчивой атмосфере ( $CA = 5$ ) высота опускания вихревых жгутов составила  $\Delta H = -15$  м.

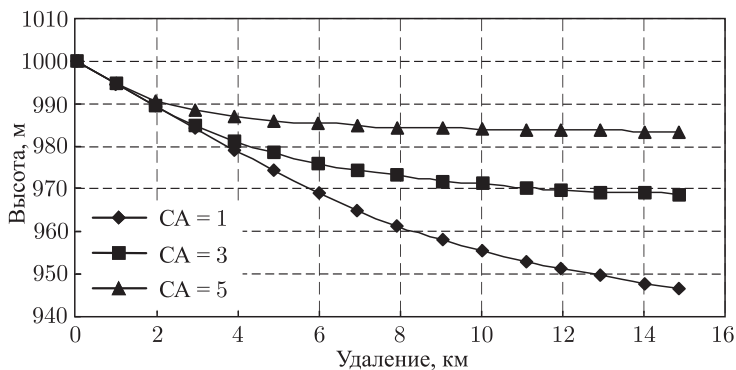


Рис. 4.12. Положение центров вихревых жгутов за самолетом Ил-76 ( $V = 500$  км/ч,  $H = 1000$  м) при разных состояниях атмосферы

На рис. 4.13 результаты приведены для самолета Ил-76, летящего на высоте  $H = 1000$  м со скоростью  $V = 700$  км/ч при тех же состояниях атмосферы. Видим, что в очень спокойной атмосфере ( $CA = 1$ ) вихревой след на удалении  $X = 15$  км на этот раз опустился на  $\Delta H = -35$  м. В очень неустойчивой атмосфере ( $CA = 5$ ) высота опускания вихревых жгутов составила  $\Delta H = -12$  м.

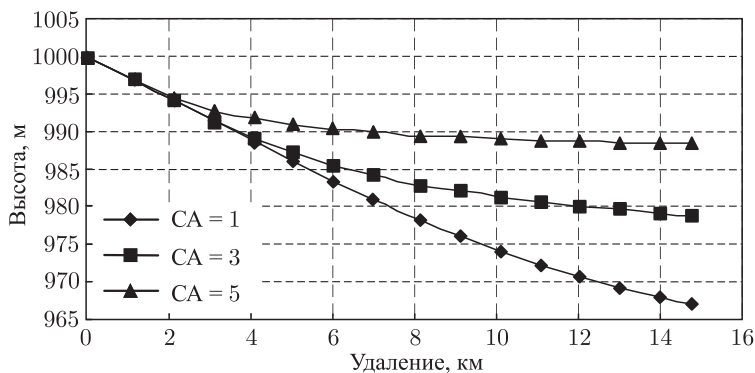


Рис. 4.13. Положение центров вихревых жгутов за самолетом Ил-76 ( $V = 700$  км/ч,  $H = 1000$  м) при разных состояниях атмосферы

Таким образом, установлено, что с увеличением скорости полета на одной и той же высоте за счет уменьшения циркуляции вихревых жгутов уменьшается высота опускания центров вихревых жгутов.

С увеличением высоты полета картина меняется. На рис. 4.14 приведены результаты расчета положения центров вихревых жгутов за самолетом Ил-76, летящим на высоте  $H = 5000$  м со скоростью  $V = 300$  км/ч при состояниях атмосферы: очень устойчивом ( $CA = 1$ ), нейтральном ( $CA = 3$ ) и очень неустойчивом ( $CA = 5$ ).

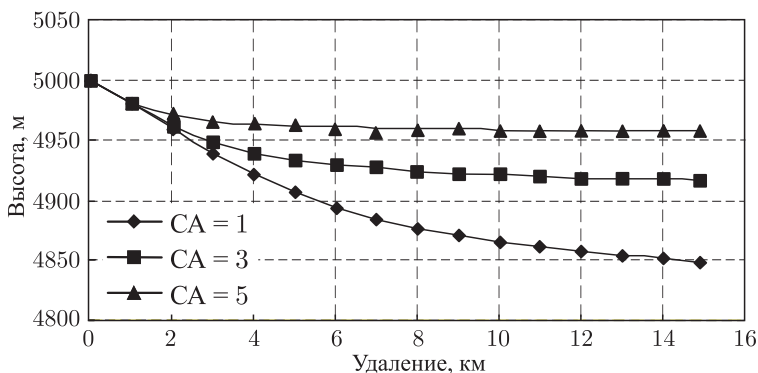


Рис. 4.14. Положение центров вихревых жгутов за самолетом Ил-76 ( $V = 300$  км/ч,  $H = 5000$  м) при разных состояниях атмосферы

Видим, что в очень спокойной атмосфере ( $CA = 1$ ) вихревой след на удалении  $X = 15$  км опустился на  $\Delta H = -150$  м. В очень неустойчивой атмосфере ( $CA = 5$ ) высота опускания вихревых жгутов составила  $\Delta H = -40$  м. Сравним: при  $CA = 1$  на высоте  $H = 1000$  м  $\Delta H = -110$  м, а при  $CA = 5$   $\Delta H = -30$  м (см. рис. 4.11), т. е. с увели-

чением высоты полета при прочих равных условиях высота опускания вихрей увеличивается. Аналогичная картина наблюдается и при других скоростях полета (см. рис. 4.13 и рис. 4.14).

На рис. 4.15 приведены результаты расчета положения центров вихревых жгутов за самолетом Ил-76, летящим на высоте  $H = 5000$  м со скоростью  $V = 500$  км/ч при состояниях атмосферы: очень устойчивом ( $CA = 1$ ), нейтральном ( $CA = 3$ ) и очень неустойчивом ( $CA = 5$ ). В очень спокойной атмосфере ( $CA = 1$ ) вихревой след на удалении  $X = 15$  км опустился на  $\Delta H = -70$  м. В очень неустойчивой атмосфере ( $CA = 5$ ) высота опускания вихревых жгутов составила  $\Delta H = -25$  м. Сравним: на высоте  $H = 1000$  м при  $CA = 1$   $\Delta H = -55$  м, а при  $CA = 5$   $\Delta H = -15$  м (см. рис. 4.12).

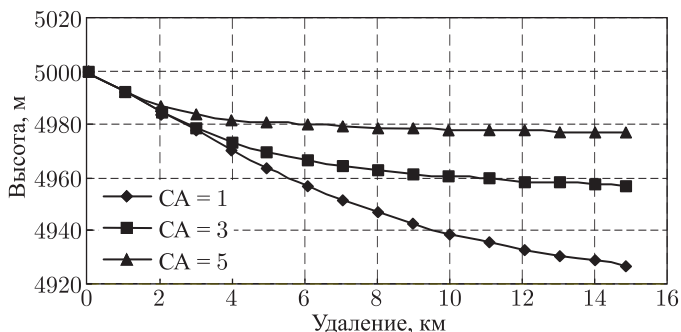


Рис. 4.15. Положение центров вихревых жгутов за самолетом Ил-76 ( $V = 500$  км/ч,  $H = 5000$  м) при разных состояниях атмосферы

Рис. 4.16 представляет результаты расчета положения центров вихревых жгутов за самолетом Ил-76, летящим на высоте  $H = 5000$  м со скоростью  $V = 700$  км/ч при тех же состояниях атмосферы.

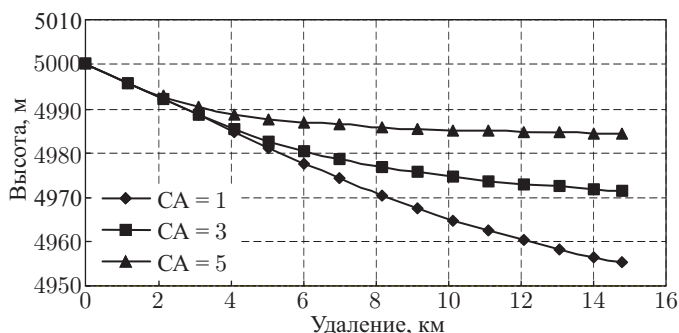


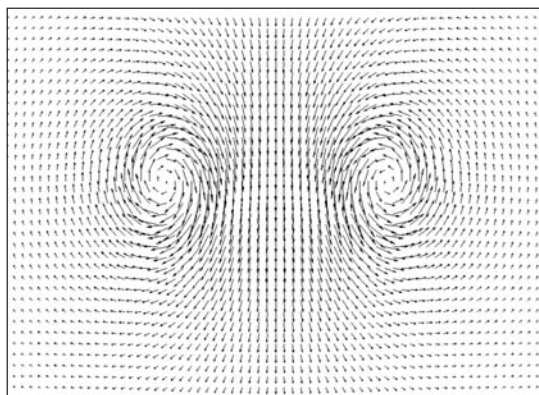
Рис. 4.16. Положение центров вихревых жгутов за самолетом Ил-76 ( $V = 700$  км/ч,  $H = 5000$  м) при разных состояниях атмосферы



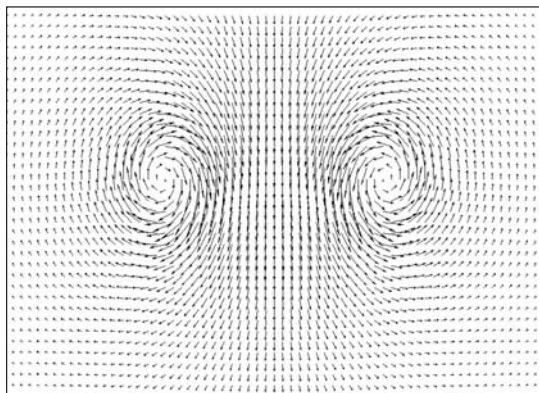
В очень спокойной атмосфере ( $CA = 1$ ) вихревой след на удалении  $X = 15$  км опустился на  $\Delta H = -45$  м. В очень неустойчивой атмосфере ( $CA = 5$ ) высота опускания вихревых жгутов составила  $\Delta H = -15$  м. Сравним: на высоте  $H = 1000$  м при  $CA = 1$   $\Delta H = -35$  м, а при  $CA = 5$   $\Delta H = -12$  м (см. рис. 4.13).

Таким образом, установлено, что с увеличением высоты при одной и той же скорости полета за счет увеличения циркуляции вихревых жгутов увеличивается высота опускания центров вихревых жгутов, (см. рис. 4.14 — рис. 4.16).

Влияние состояния атмосферы на затухание вихрей можно проследить на рис. 4.17 — рис. 4.21.



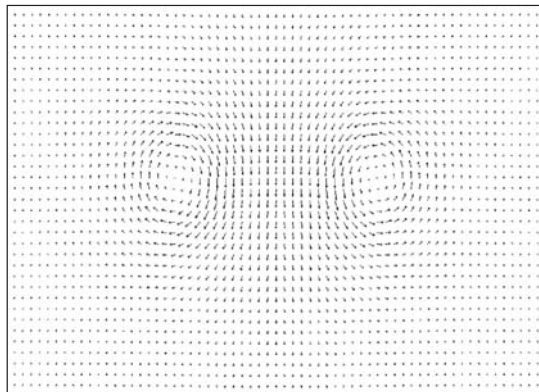
а



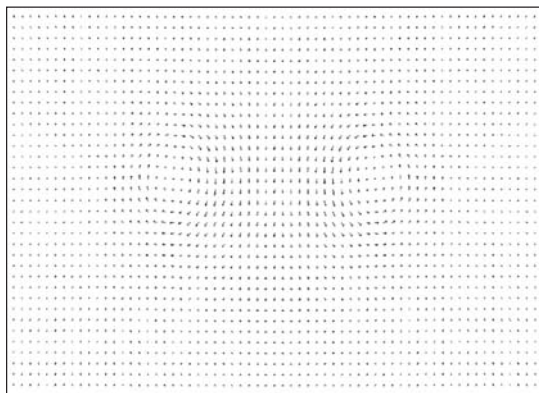
б

Рис. 4.17. Поля возмущенных скоростей за самолетом Ил-76 при  $t = 0$  с (а) и  $t = 11$  с (б) ( $V = 500$  км/ч,  $H = 5000$  м,  $CA = 5$ )

На рисунках 4.17 и 4.18 показаны результаты расчета полей возмущенных скоростей за самолетом Ил-76, летящим на высоте  $H = 5000$  м со скоростью  $V = 500$  км/ч в очень неустойчивой атмосфере ( $CA = 5$ ) на различных удалениях от самолета:  $X = 0$ ; 1,53; 3,06 и 4,58 км. Видим, что при этих условиях полета уже на удалении 4–5 км вихревые жгуты затухают и перестают быть опасными для других самолетов.



а



б

Рис. 4.18. Поля возмущенных скоростей за самолетом Ил-76 при  $t = 22$  с (а) и  $t = 33$  с (б) ( $V = 500$  км/ч,  $H = 5000$  м,  $CA = 5$ )

В спокойной атмосфере картина меняется. На рис. 4.19–4.21 представлены результаты расчета полей возмущенных скоростей за самолетом Ил-76, летящим на высоте  $H = 5000$  м со скоростью  $V = 500$  км/ч в очень устойчивой атмосфере ( $CA = 1$ ) на удалениях  $X = 0$ ; 1,53; 3,06; 4,58; 12,5 и 14,86 км. При этих условиях полета вихревые жгуты также

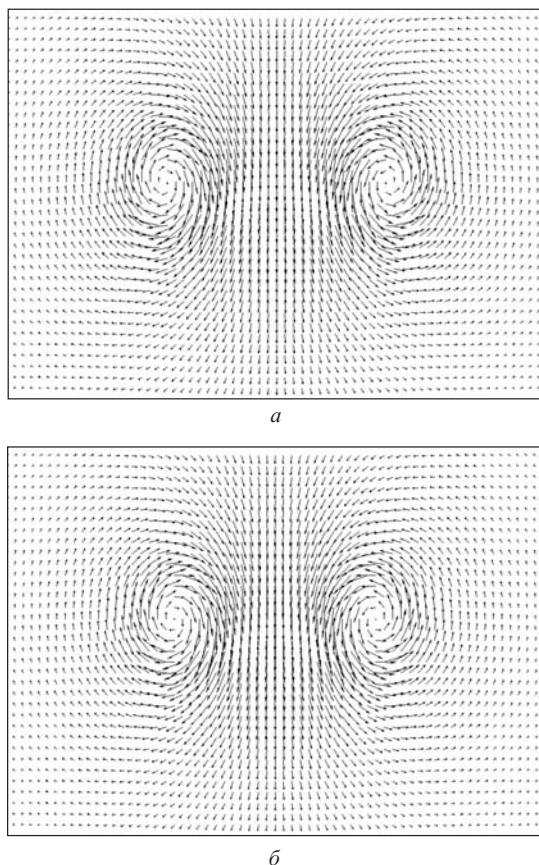
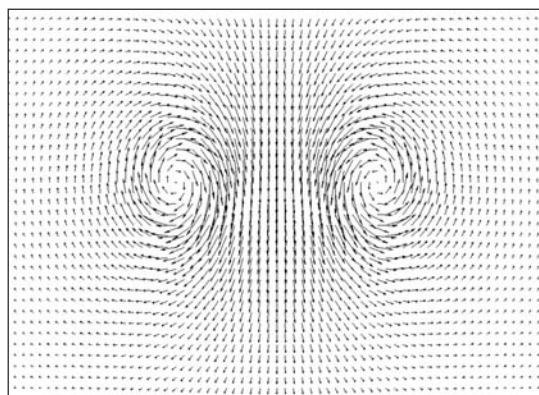


Рис. 4.19. Поля возмущенных скоростей за самолетом Ил-76 при  $t = 0$  с (*a*) и  $t = 11$  с (*б*) ( $V = 500$  км/ч,  $H = 5000$  м,  $CA = 1$ )

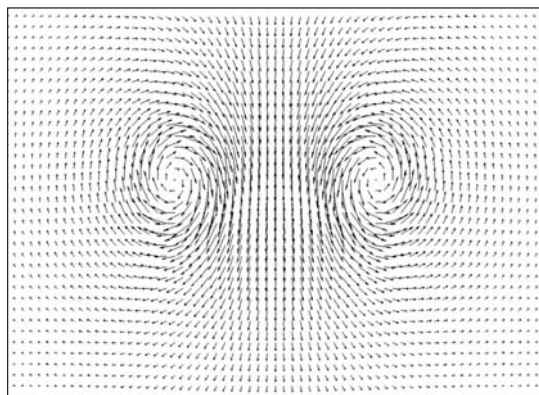
затухают, но это происходит уже на значительно больших удалениях (примерно 12–14 км).

#### 4.9. Характеристики вихревого следа самолетов Ан-124, В-747 и А-380

В данном разделе приводятся результаты исследования характеристик дальнего вихревого следа за самолетами Ан-124 (размах крыла  $L = 73,6$  м, взлетная масса  $G = 405$  т), В-747 (размах крыла  $L = 59,64$  м, взлетная масса  $G = 365$  т) и А-380 (размах крыла  $L = 79,8$  м, взлетная масса  $G = 560$  т). Это три самых больших (не считая Ан-225 «Мрия») самолета в мире. Характеристики вихревого следа этих самолетов приводятся в сравнении.



а

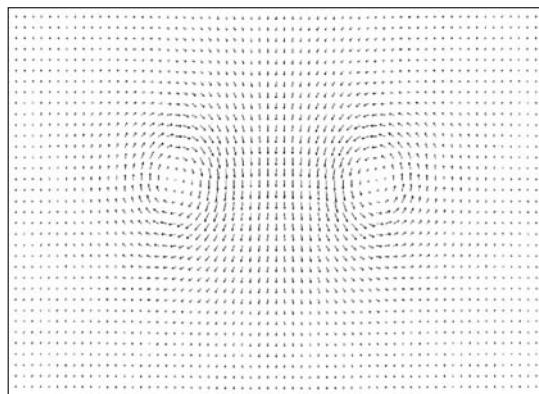


б

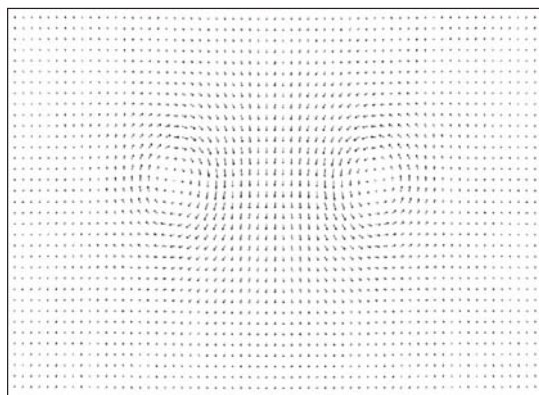
Рис. 4.20. Поля возмущенных скоростей за самолетом Ил-76 при  $t = 22$  с (а) и  $t = 33$  с (б) ( $V = 500$  км/ч,  $H = 5000$  м,  $CA = 1$ )

Рис. 4.22 показывает результаты расчета положения центров вихревых жгутов за самолетами Ан-124, В-747 и А-380, летящими на высоте  $H = 1000$  м со скоростью  $V = 300$  км/ч при очень устойчивом состоянии атмосферы ( $CA=1$ ). Расчеты показали, что в очень спокойной атмосфере вихревой след за самолетами В-747 и А-380 на удалении  $X = 15$  км опустился на  $\Delta H = -200$  м. За самолетом Ан-124 на этом же удалении вихревой след опустился на  $\Delta H = -160$  м.

Были рассчитаны вертикальные скорости в ядре концевых крыльевых вихрей. На рис. 4.23 — рис. 4.25 показаны графики распределения вертикальной скорости за самолетами Ан-124, В-747 и А-380, летящими на высоте  $H = 1000$  м со скоростью  $V = 300$  км/ч при  $CA = 1$  на удалении от самолетов  $X = 50$  м,  $2000$  м и  $10000$  м. В этом случае вертикальные скорости в ядре вихрей самолетов Ан-124, В-747 и А-380



а



б

Рис. 4.21. Поля возмущенных скоростей за самолетом Ил-76 при  $t = 90$  с (а) и  $t = 107$  с (б) ( $V = 500$  км/ч,  $H = 5000$  м,  $CA = 1$ )

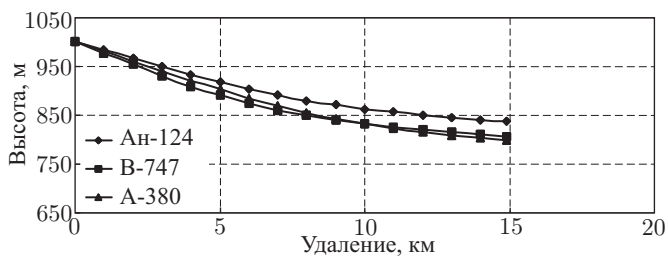


Рис. 4.22. Положение центров вихревых жгутов за самолетами Ан-124, В-747 и А-380 ( $V = 300$  км/ч,  $H = 1000$  м,  $CA = 1$ )



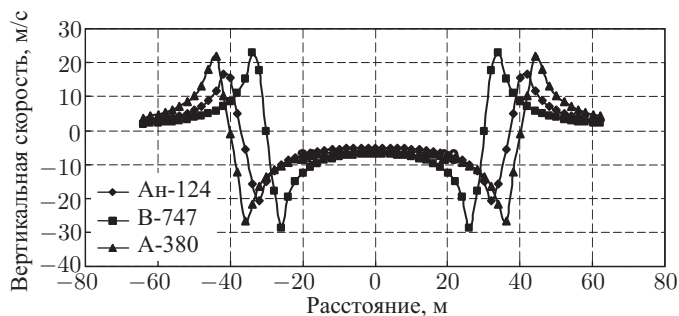


Рис. 4.23. Распределение тангенциальной скорости в ядре вихря самолетов Ан-124, В-747 и А-380 ( $V = 300$  км/ч,  $H = 1000$  м,  $CA = 1$ ,  $X = 50$  м)

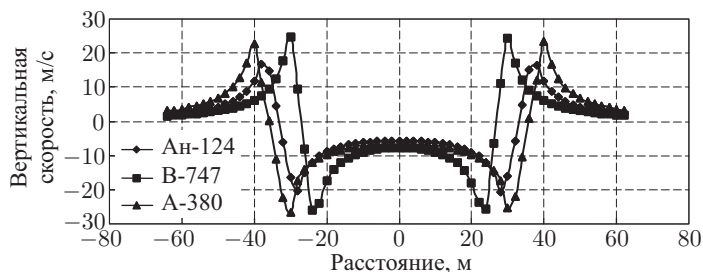


Рис. 4.24. Распределение тангенциальной скорости в ядре вихря самолетов Ан-124, В-747 и А-380 ( $V = 300$  км/ч,  $H = 1000$  м,  $CA = 1$ ,  $X = 2000$  м)

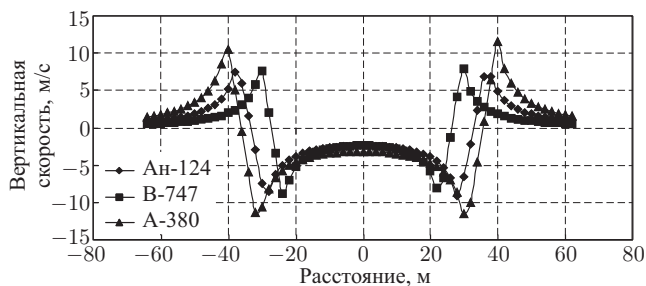


Рис. 4.25. Распределение тангенциальной скорости в ядре вихря самолетов Ан-124, В-747 и А-380 ( $V = 300$  км/ч,  $H = 1000$  м,  $CA = 1$ ,  $X = 10000$  м)

на удалении до 2000 м не превышают  $(+25) - (-30)$  м/с. С увеличением  $X$  вертикальные скорости уменьшаются и на удалении  $X = 10000$  м не превышают  $\pm 12$  м/с.

С увеличением скорости полета картина меняется. На рис. 4.26 приведены результаты расчета положения центров вихревых жгутов за самолетами Ан-124, В-747 и А-380, летящими на высоте  $H = 1000$  м со скоростью  $V = 500$  км/ч при  $CA = 1$ . Расчеты показали, что в очень

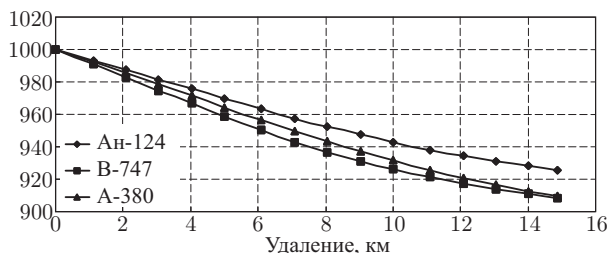


Рис. 4.26. Положение центров вихревых жгутов за самолетами Ан-124, В-747 и А-380 ( $V = 500$  км/ч,  $H = 1000$  м,  $CA = 1$ )

спокойной атмосфере ( $CA = 1$ ) вихревой след за самолетами В-747 и А-380 на удалении  $X = 15$  км опустился на  $\Delta H = -90$  м (при  $V = 300$  км/ч,  $\Delta H = -200$  м). За самолетом Ан-124 на этом же удалении вихревой след опустился на  $\Delta H = -70$  м (при  $V = 300$  км/ч,  $\Delta H = -160$  м). Таким образом, скорость полета самолета заметно влияет на положение вихревого следа.

На рисунках 4.27–4.29 представлены графики распределения вертикальной скорости за самолетами Ан-124, В-747 и А-380, летящими на высоте  $H = 1000$  м со скоростью  $V = 500$  км/ч при  $CA = 1$  на удалении от самолетов  $X = 50$  м, 2000 м и 10000 м. В этом случае вертикальные скорости в ядре вихрей самолетов Ан-124, В-747 и А-380 на удалении до 2000 м не превышают  $(+20) - (-20)$  м/с. С увеличением  $X$  вертикальные скорости уменьшаются и на удалении  $X = 10000$  м не превышают  $\pm 10$  м/с.

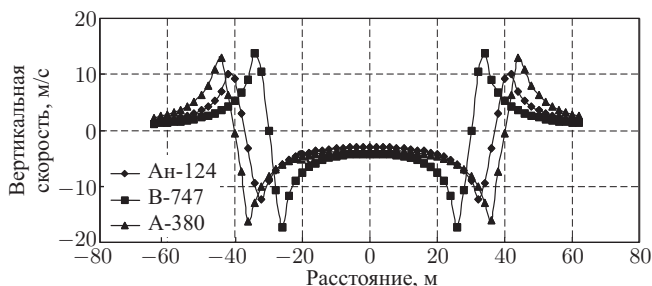


Рис. 4.27. Распределение тангенциальной скорости в ядре вихря самолетов Ан-124, В-747 и А-380 ( $V = 500$  км/ч,  $H = 1000$  м,  $CA = 1$ ,  $X = 50$  м)

На рисунках 4.30–4.32 приведены графики распределения вертикальной скорости за самолетами Ан-124, В-747 и А-380, летящими на высоте  $H = 1000$  м со скоростью  $V = 500$  км/ч при  $CA = 1$  на удалении от самолетов  $X = 50$  м, 2000 м и 10000 м, теперь для каждого конкретного самолета. В этом случае можно проследить как происходит затухание вихрей с увеличением удаления  $X$ .

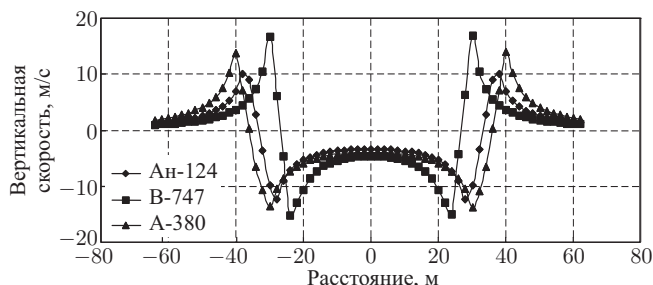


Рис. 4.28. Распределение тангенциальной скорости в ядре вихря самолетов Ан-124, В-747 и А-380 ( $V = 500$  км/ч,  $H = 1000$  м,  $CA = 1$ ,  $X = 2000$  м)

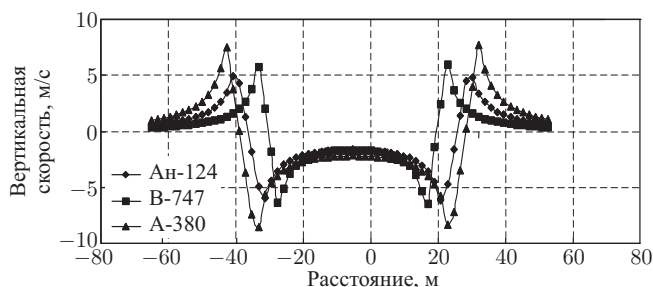


Рис. 4.29. Распределение тангенциальной скорости в ядре вихря самолетов Ан-124, В-747 и А-380 ( $V = 500$  км/ч,  $H = 1000$  м,  $CA = 1$ ,  $X = 10000$  м)

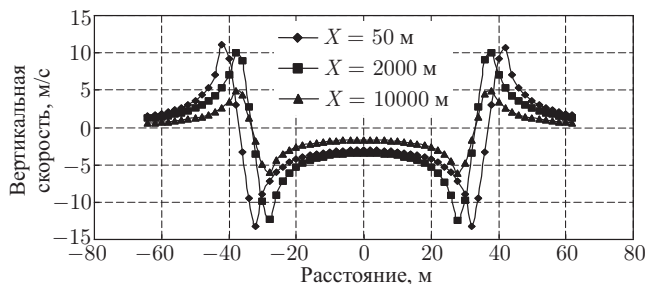


Рис. 4.30. Распределение тангенциальной скорости в ядре вихря самолета Ан-124 ( $V = 500$  км/ч,  $H = 1000$  м,  $CA = 1$ ) на различных удалениях от самолета

Рис. 4.33 показывает графики распределения вертикальной скорости за самолетами Ан-124, В-747 и А-380, летящими на высоте  $H = 50$  м со скоростью  $V = 250$  км/ч при  $CA = 1$  на удалении от самолетов  $X = 50$  м. Закрылки были выпущены в посадочное положение. Таковы условия при заходе на посадку. Видно, что за самолетами В-747 и А-380 возникают вертикальные скорости до  $\pm 30$  м/с, а за самолетом Ан-124 до  $\pm 25$  м/с.



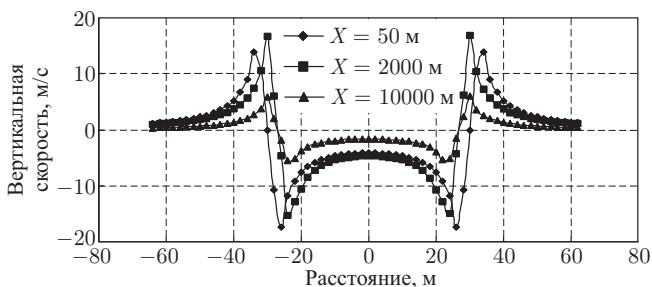


Рис. 4.31. Распределение тангенциальной скорости в ядре вихря В-747 ( $V = 500$  км/ч,  $H = 1000$  м,  $CA = 1$ ) на различных удалениях от самолета

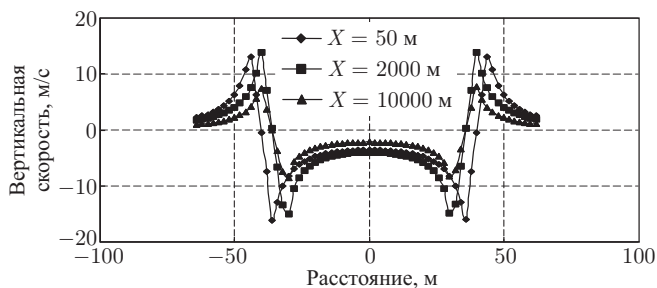


Рис. 4.32. Распределение тангенциальной скорости в ядре вихря А-380 ( $V = 500$  км/ч,  $H = 1000$  м,  $CA = 1$ ) на различных удалениях от самолета

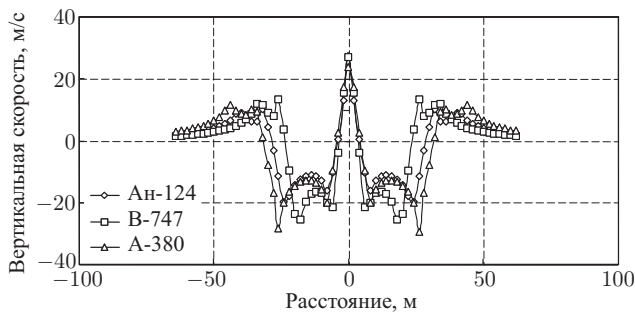


Рис. 4.33. Распределение тангенциальной скорости в ядре вихря самолетов Ан-124, В-747 и А-380 ( $V = 250$  км/ч,  $H = 50$  м,  $CA = 1$ ,  $X = 50$  м), посадочный режим

# ВИХРЕВОЙ СЛЕД САМОЛЕТА С ВОЗДУШНЫМИ ВИНТАМИ

## 5.1. Постановка задачи

Теперь рассмотрим движение летательного аппарата (ЛА) с воздушными винтами. ЛА имеет заданную полетную конфигурацию и движется с дозвуковой скоростью  $\vec{W}$  на произвольной высоте  $H$  (рис. 5.1).

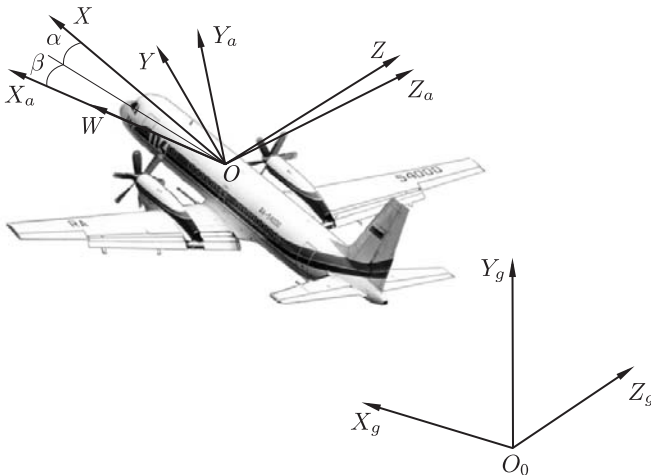


Рис. 5.1. К постановке задачи

Вводим следующие системы координат: связанную с самолетом  $Oxyz$ , скоростную  $Ox_a y_a z_a$  и земную  $Ox_g y_g z_g$ .

Среда, в которой движется ЛА, рассматривается как идеальная несжимаемая жидкость, поверхности ЛА предполагаются непроницаемыми [49]. Течение является потенциальным всюду вне ЛА и его вихревого следа. Вихревой след представляет собой тонкую вихревую пелену, т. е. поверхность, на которой имеется разрыв касательной составляющей поля скоростей. Линии отрыва потока заданы на острых кромках поверхностей ЛА.

Задача сводится к отысканию потенциальных полей скоростей  $\vec{W}(M, t) = \text{grad } U(M, t)$  и давлений  $p(M, t)$ , определенных всюду вне поверхности крыла  $\sigma_1$  и поверхности  $\sigma_2$ , моделирующей вихревой след.

Поверхность вихревого следа  $\sigma_2$  подвижная, закон ее движения заранее не известен. Здесь  $M(x, y, z)$  — точки пространства,  $t$  — время. При расчете потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости условие несжимаемости равносильно требованию гармоничности потенциала поля

$$\Delta U(M, t) = 0 \quad (5.1)$$

во всех точках пространства вне поверхностей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , а для удовлетворения уравнения импульса достаточно потребовать выполнения условия Коши–Лагранжа

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_\infty}{\rho} - \frac{\overline{W}_\infty^2}{2} - \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (5.2)$$

где  $P_\infty$  — давление жидкости на бесконечности,  $\rho$  — плотность жидкости.

На поверхностях ЛА соблюдается условие непротекания

$$\frac{\partial U^\pm}{\partial \bar{n}} = 0, \quad M \in \sigma_1, \quad (5.3)$$

где  $\bar{n}$  — орт нормали к поверхности  $\sigma_1$  в точке  $M$ . На вихревой пелене в каждый момент времени  $t$  соблюдено условие отсутствия перепада давления

$$p^+(M, t) = p^-(M, t). \quad (5.4)$$

На бесконечности соблюдается условие затухания возмущенных скоростей

$$\left| \nabla U(M, t) - \overrightarrow{W}_\infty \right| \rightarrow 0. \quad (5.5)$$

## 5.2. Учет влияния воздушных винтов на характеристики дальнего вихревого следа

Введем следующие обозначения:

$d$  — диаметр винта;  $\omega$  — угловая скорость вращения винта;  $V_0$  — скорость набегающего потока;

$V_1 = V_0 + v_1$  — осевая скорость в плоскости диска винта ( $v_1$  — соответствующая индуктивная скорость);

$V_2 = V_0 + v_2$  — осевая скорость в струе за винтом ( $v_2$  — соответствующая индуктивная скорость),  $v_2 = 2v_1$ ;

$r_0$  — радиус втулки винта;

$\xi = \frac{r_0}{R}$  — относительный радиус втулки винта, где  $R = \frac{d}{2}$ ;

$P$  — тяга винта;  $M$  — крутящий момент на валу винта.

Тогда  $dP = dmV_2 - dmV_1 = dv_2$ , где  $dP$  — элемент тяги на радиусе  $r$ ,  $dm = 2\pi r dr \rho$ ,  $V_1$  — массовый расход на радиусе  $r$ . Таким образом,

$$dP = 2\pi \rho V_1 v_2 r dr.$$

Предположив, что распределение индуктивных осевых скоростей по диску винта равномерно, получим

$$P = 2\pi\rho V_1 v_2 \int_{r_0}^R r dr = 2\pi\rho V_1 v_2 \frac{1}{2} (R^2 - r_0^2) = \pi\rho V_1 v_2 R^2 (1 - \xi^2).$$

С учетом равенств  $V_1 = V_0 + v_1$  и  $v_2 = 2v_1$  получим

$$P = \pi R^2 \rho (1 - \xi^2) (V_0 + v_1) 2v_1 = 2\pi R^2 \rho (1 - \xi^2) (V_0 v_1 + v_1^2).$$

Введем относительную индуктивную осевую скорость  $\bar{V} = \frac{v_1}{\omega R}$ , тогда

$$P = 2\pi R^2 \rho (1 - \xi^2) (V_0 \omega R \bar{V} + \omega^2 R^2 \bar{V}^2).$$

Поскольку  $P = \bar{\alpha} \rho n^2 d^4$ ,  $\omega = 2\pi n$  ( $\bar{\alpha}$  — коэффициент тяги винта,  $n$  — обороты винта),

$$\bar{\alpha} \rho n^2 d^4 = 2\pi \frac{d^4}{4} \rho (1 - \xi^2) \left( V_0 2\pi n \frac{d}{2} \bar{V} + 4\pi^2 n^2 \frac{d^2}{4} \bar{V}^2 \right),$$

или, после сокращения на  $\rho d^2$ ,

$$\bar{\alpha} n^2 d^2 = \frac{\pi}{2} (1 - \xi^2) (V_0 \pi n d \bar{V} + \pi^2 n^2 d^2 \bar{V}^2).$$

Отсюда

$$\bar{\alpha} = \frac{\pi}{2} (1 - \xi^2) \left( \frac{V_0 \pi n d}{n^2 d^2} \bar{V} + \frac{\pi^2 n^2 d^2}{n^2 d^2} \bar{V}^2 \right).$$

Выполнив сокращения и имея в виду, что  $V_0 / nd = \lambda$  — коэффициент скорости винта, получим

$$\bar{\alpha} = \frac{\pi}{2} (1 - \xi^2) (\pi \lambda \bar{V} + \pi^2 \bar{V}^2).$$

Из этого выражения найдем  $\bar{V}$ :

$$\pi^2 \bar{V}^2 + \pi \lambda \bar{V} - \frac{2\bar{\alpha}}{\pi (1 - \xi^2)} = 0,$$

$$\bar{V}^2 + \frac{\lambda}{\pi} \bar{V} - \frac{2\bar{\alpha}}{\pi^3 (1 - \xi^2)} = 0,$$

$$D = \frac{\lambda^2}{\pi^2} + \frac{8\bar{\alpha}}{\pi^3 (1 - \xi^2)},$$

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\lambda}{\pi} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{\pi^2} + \frac{8\bar{\alpha}}{\pi^3 (1 - \xi^2)}} \right] / 2, \quad \text{или}$$

$$\bar{V} = -\frac{\lambda}{2\pi} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi^2} + \frac{2\bar{\alpha}}{\pi^3 (1 - \xi^2)}}.$$

Из двух корней квадратного уравнения выбран положительный.

Выражение для крутящего момента  $dM = dm u_2 r$ , где  $u_2(r)$  — распределение окружной индуктивной скорости по диску винта далеко за ним.

С учетом соотношения  $dm = 2\pi r dr \rho V_1$  получим  $dM = 2\pi \rho V_1 u_2 r^2 dr$ . Отсюда

$$M = 2\pi \rho V_1 \int_{r_0}^R u_2(r) r^2 dr.$$

Потребляемая винтом мощность  $N = M\omega$ , т. е.

$$N = M\omega = 2\pi \rho \omega V_1 \int_{r_0}^R u_2(r) r^2 dr.$$

В силу принятой вихревой схематизации винта можно считать, что  $u_2(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ , где  $\Gamma$  — циркуляция порожденного винтом осевого вихря. Тогда

$$\int_{r_0}^R u_2(r) r^2 dr = \int_{r_0}^R \frac{\Gamma}{2\pi r} r^2 dr = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{r_0}^R r dr = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{2} (R^2 - r_0^2) = \frac{\Gamma}{4\pi} R^2 (1 - \xi^2).$$

Таким образом,

$$N = M\omega = 2\pi \rho \omega V_1 \frac{\Gamma}{4\pi} R^2 (1 - \xi^2) = \frac{1}{2} \rho \omega V_1 \Gamma R^2 (1 - \xi^2).$$

Поскольку  $N = M\omega = \bar{\beta} \rho n^3 d^5$ , где  $\bar{\beta}$  — коэффициент мощности винта, найдем

$$\bar{\beta} \rho n^3 d^5 = \frac{1}{2} \rho (1 - \xi^2) \omega V_1 \Gamma R^2.$$

С учетом  $\omega = 2\pi n$ ,  $V_1 = V_0 + v_1$ ,  $v_1 = \bar{V} \omega R = 2\pi n R \bar{V}$ ,  $R = d/2$  получим

$$\bar{\beta} \rho n^3 d^5 = \frac{1}{2} \rho (1 - \xi^2) 2\pi n \left( V_0 + 2\pi n \frac{d}{2} \bar{V} \right) \Gamma \frac{d^2}{4}.$$

После сокращения на  $\rho n d^2$

$$\bar{\beta} n^2 d^3 = \frac{\pi}{4} (1 - \xi^2) (V_0 + \pi n d \bar{V}) \Gamma.$$

Введем безразмерную циркуляцию  $\bar{\Gamma} = \Gamma / \omega R d$ , тогда

$$\bar{\beta} n^2 d^3 = \frac{\pi}{4} (1 - \xi^2) (V_0 + \pi n d \bar{V}) \bar{\Gamma} 2\pi n \frac{d^2}{2}.$$

Сокращая на  $n d^2$ , получаем

$$\bar{\beta} n d = \frac{\pi^2}{4} (1 - \xi^2) (V_0 + \pi n d \bar{V}) \bar{\Gamma}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \frac{\pi^2}{4} (1 - \xi^2) \left( \frac{V_0}{n d} + \pi \bar{V} \right) \bar{\Gamma}, \quad \text{или} \\ \bar{\beta} &= \frac{\pi^2}{4} (1 - \xi^2) (\lambda + \pi \bar{V}) \bar{\Gamma}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &= \frac{4\bar{\beta}}{\pi^2 (1 - \xi^2) (\lambda + \pi \bar{V})}, \quad \text{или} \\ \bar{\Gamma} &= \frac{4\bar{\beta}}{\pi^3 (1 - \xi^2) \left( \frac{\lambda}{\pi} + \bar{V} \right)}. \end{aligned}$$

Используя выражение, полученное для  $\bar{V}$ , найдем

$$\frac{\lambda}{\pi} + \bar{V} = \frac{\lambda}{\pi} - \frac{\lambda}{2\pi} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi^2} + \frac{2\bar{\alpha}}{\pi^3 (1 - \xi^2)}} = \frac{\lambda}{2\pi} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi^2} + \frac{2\bar{\alpha}}{\pi^3 (1 - \xi^2)}}.$$

Тогда окончательно

$$\bar{\Gamma} = \frac{4\bar{\beta}}{\pi^3 (1 - \xi^2) \left[ \frac{\lambda}{2\pi} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\pi^2} + \frac{2\bar{\alpha}}{\pi^3 (1 - \xi^2)}} \right]}. \quad (5.6)$$

Если задан режим работы винта —  $\lambda$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  и известен относительный диаметр втулки  $\xi$ , то определить интенсивность генерируемого винтом осевого вихря можно по формуле (5.6).

Если ввести в рассмотрение безразмерную циркуляцию осевого вихря по формулам, принятым для ЛА в целом,  $\Gamma^* = \Gamma / V_0 L$ , где  $L$  — некоторый характерный размер, то  $\bar{\Gamma}$  и  $\Gamma^*$  будут связаны соотношением  $\bar{\Gamma} \omega R d = \Gamma^* V_0 L$ , т. е.

$$\begin{aligned} \Gamma^* &= \bar{\Gamma} \frac{\omega R d}{V_0 L} = \bar{\Gamma} \frac{2\pi n d}{V_0} \frac{d}{2L}; \\ \Gamma^* &= \bar{\Gamma} \frac{\pi}{\lambda} \bar{d}, \end{aligned}$$

где  $\bar{d} = d/L$  — относительный диаметр винта.

Вихревая схема струи винта будет иметь вид, показанный на рис. 5.2:  $n$  вихрей, расположенных равномерно по окружности, диаметр которой равен диаметру винта, моделируют поверхность струи винта.

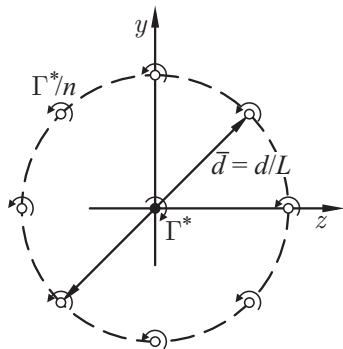


Рис. 5.2. Вихревая схема струи винта

Циркуляция каждого из этих вихрей равна  $\Gamma^*/n$ , а направление вращения противоположно направлению вращения осевого вихря. Осевой вихрь при этом создает вращение, совпадающее по направлению с вращением винта.

Таким образом, формула (5.6) является основной для расчета циркуляции осевого вихря. Вопрос о том, сколько нужно брать П-образных вихрей для моделирования работы воздушного винта, рассмотрен в следующем разделе.

Для задания режима работы винта можно воспользоваться серийной диаграммой винта. Для точки, соответствующей заданному режиму по диаграмме, определяются:  $\bar{\beta}$  — коэффициент мощности винта,  $\lambda$  — коэффициент скорости винта,  $\bar{\alpha}$  — коэффициент тяги винта и  $\eta$  — коэффициент полезного действия.

Для учета осевой скорости в струе от винта применен следующий прием. Известно, что силу тяги двигателя  $P$  можно определить по формуле

$$P = G_v(C_c - V),$$

где  $G_v$  — расход воздуха через двигатель,  $C_c$  — скорость истечения струи,  $V$  — скорость полета. Задав режим работы двигателя или предположив равенство тяги и лобового сопротивления самолета, легко определяем осевую скорость  $C_c$ . Затем вычисляем во сколько раз осевая скорость превышает скорость полета. Строим треугольник скоростей, из которого и определяем перемещение осевого вихря в следующем расчетном сечении.

### 5.3. Выбор количества вихрей для моделирования воздушного винта

Для выбора количества П-образных вихрей (рис. 5.3) при моделировании воздушного винта были выполнены следующие методические исследования. За самолетами Ан-26 и Ан-12 рассчитывали траектории осевых вихрей от воздушных винтов при одинаковых условиях полета, но при разном числе П-образных вихрей  $n$ . При этом определяли ошибку прихода вихря в конечный расчетный момент времени по абсолютной величине. Считалось, что истинным положение вихрей в конечный расчетный момент времени будет при  $n \rightarrow \infty$ . Результаты исследований представлены на рис. 5.3 и рис. 5.4.

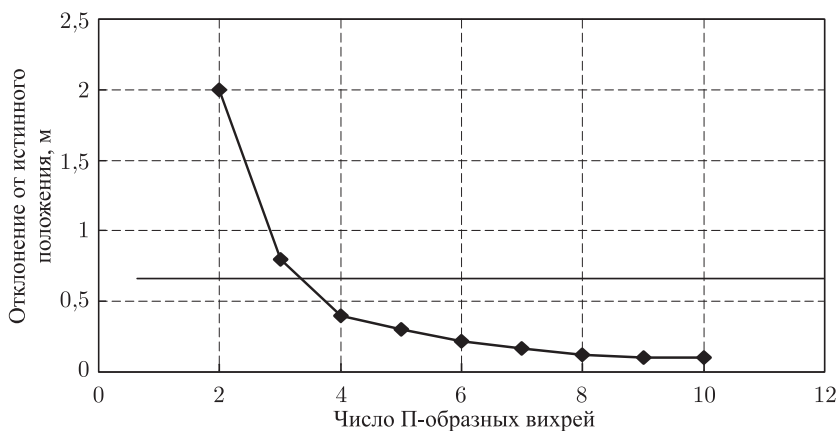


Рис. 5.3. К выбору числа П-образных вихрей для моделирования работы воздушного винта

На рис. 5.3 представлены результаты расчета положения осевого вихря, моделирующего работу воздушного винта самолета Ан-26, летящего на высоте 500 м со скоростью 450 км/ч. Видим, что при  $n > 4$  отклонение от истинного значения не превышает 0,5 м. На рис. 5.4 приведены аналогичные результаты расчета положения осевого вихря, моделирующего работу воздушного винта самолета Ан-12, также летящего на высоте 500 м со скоростью 450 км/ч. Видим, что и для этого самолета при  $n > 4$  отклонение от истинного значения не превышает 0,5 м. Таким образом, было установлено, что для моделирования работы воздушного винта необходимо минимум четыре П-образных вихря.



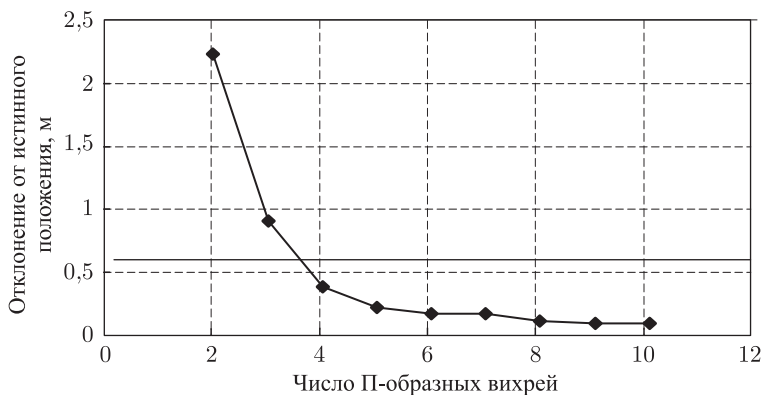


Рис. 5.4. К выбору числа П-образных вихрей для моделирования работы воздушного винта

#### 5.4. Примеры расчета характеристик дальнего вихревого следа самолетов с воздушными винтами в сравнении с экспериментальными данными

Для подтверждения работоспособности методики и достоверности получаемых с ее помощью результатов для самолетов с воздушными винтами были выполнены расчеты вихревого следа за самолетом С-130, которые затем сравнили с результатами летного эксперимента. На рис. 5.5 показано распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета С-130 на удалении 0 и 1,4 км на высоте 1000 м. Ромбы и квадраты — расчет при  $X = 0$  и  $X = 1,4$  км, треугольники — эксперимент при  $X = 1,4$  км [32]. Видим удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных.

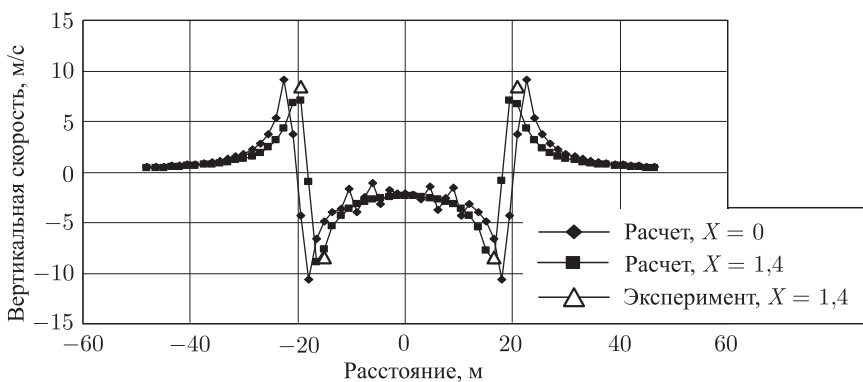


Рис. 5.5. Распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета С-130

На рис. 5.6 представлены результаты расчета положения центров вихревых жгутов за самолетом С-130, полученные по разработанной методике в сравнении с экспериментом [33]. Здесь также наблюдается удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных данных. Это является свидетельством работоспособности разработанной методики и достоверности получаемых результатов.

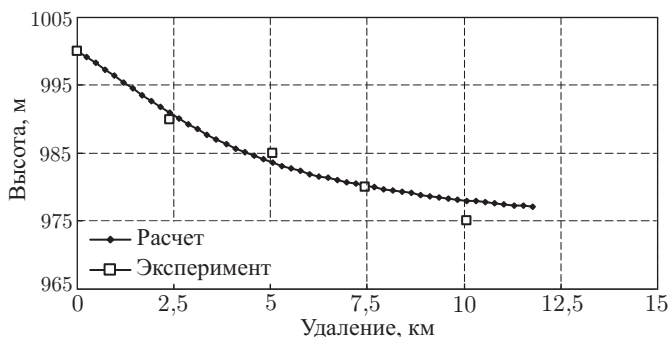


Рис. 5.6. Положение центров вихревых жгутов за самолетом С-130

## 5.5. Характеристики вихревого следа за самолетом Ан-26

На первом этапе исследований характеристик вихревого следа за самолетом Ан-26 рассматривались следующие режимы полета:

- высота полета 500 м, скорость полета 420 км/ч, состояние атмосферы 2 балла;
- высота полета 5000 м, скорость полета 420 км/ч, состояние атмосферы 2 балла;

Выбор этих режимов обусловлен практическими соображениями.

На рис. 5.7 показано распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета Ан-26 на удалении  $X = 10$  м, 250 м и 500 м, летящего на высоте  $H = 5000$  м со скоростью  $V = 420$  км/ч. Видно, что воздушные винты оказывают заметное влияние на характеристики вихревого следа при  $X = 10$  м. При увеличении расстояния  $X$  влияние воздушных винтов уменьшается и затем исчезает вообще. При этом скорости в ядре вихря при  $X = 10$  м достигают по абсолютной величине 6 м/с. С увеличением  $X$  вертикальная скорость в ядре вихря уменьшается.

Рис. 5.8 показывает распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета Ан-26 на удалении  $X = 10$  м, 250 м и 500 м, летящего на высоте  $H = 5000$  м со скоростью  $V = 420$  км/ч. И в этом случае воздушные винты оказывают заметное влияние на характеристики вихревого следа только при  $X = 10$  м. При увеличении расстояния  $X$  влияние воздушных винтов уменьшается и затем также совсем

исчезает. Скорости в ядре вихря при  $X = 10$  м теперь достигают по абсолютной величине 8 м/с. Затем вертикальная скорость в ядре вихря также уменьшается.

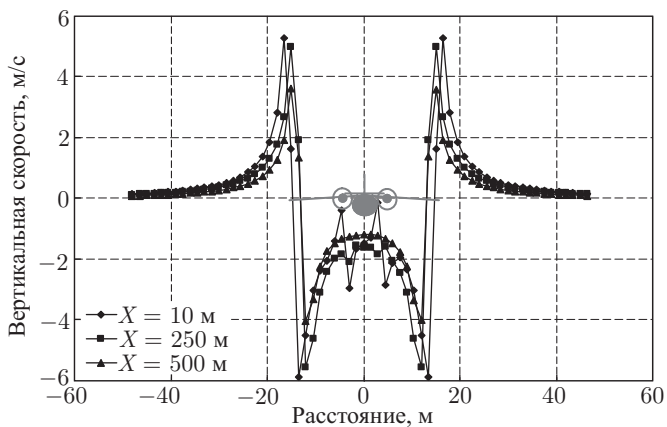


Рис. 5.7. Распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета Ан-26

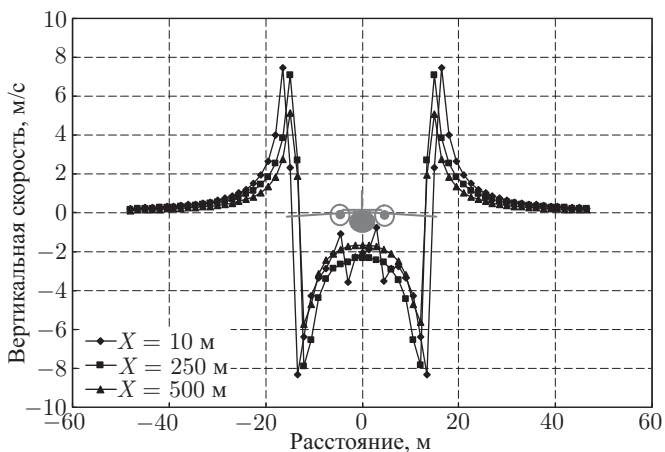


Рис. 5.8. Распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета Ан-26

На втором этапе были выполнены исследования дальнего вихревого следа за самолетом Ан-26 до удаления 12,5 км. Результаты этих исследований представлены ниже.

На рис. 5.9 показано положение вихревого следа за самолетом Ан-26 при различных состояниях атмосферы (СА) в баллах: СА = 1 — состояние атмосферы весьма устойчивое, СА = 3 — нейтральное и СА = 5 — весьма неустойчивое. Видим, что в устойчивой

атмосфере вихревой след опускается на наибольшую высоту. Это связано с тем, что в такой атмосфере интенсивность (циркуляция) концевых вихря сохраняется дольше, о чем свидетельствует рис. 5.10 — временная зависимость циркуляции концевых крыльевых вихря ( $\text{м}^2/\text{с}$ ). В очень неустойчивой атмосфере концевые крыльевые вихри разрушаются быстрее. Это известно из экспериментальных и летных исследований [8, 14–18] и подтверждают данные настоящего расчета.

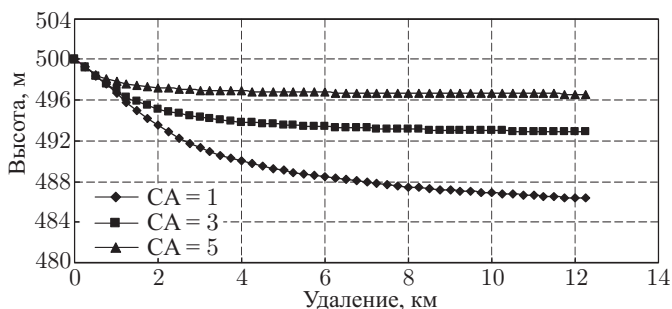


Рис. 5.9. Положение вихревого следа за самолетом Ан-26

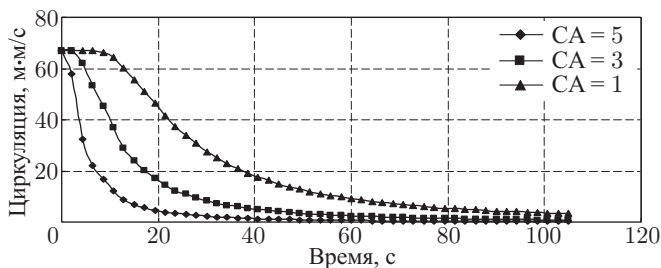


Рис. 5.10. Изменение циркуляции концевых вихрей самолета Ан-26

На рис. 5.11 представлено распределение вертикальной скорости в ядре вихря на удалении  $X = 10 \text{ м}$ ,  $1000 \text{ м}$ ,  $5000 \text{ м}$  и  $12500 \text{ м}$ , от самолета Ан-26, летящего на высоте  $H = 5000 \text{ м}$  со скоростью  $V = 420 \text{ км/ч}$  при  $CA = 1$ . В этом случае с увеличением удаления  $X$  вертикальные скорости в ядре концевых крыльевых вихрей уменьшаются. На удалении  $X = 1000 \text{ м}$  они еще заметны ( $5\text{--}6 \text{ м/с}$ ), а на удалении  $X = 5000 \text{ м}$  не превышают  $2 \text{ м/с}$ . Аналогичные результаты представлены для других состояний атмосферы. На рис. 5.12 показано распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета Ан-26 для  $CA = 3$ , а на рис. 5.13 — для  $CA = 5$ . Видно, что при неустойчивой атмосфере затухание возмущений воздушного потока происходит быстрее.

Рассмотрим взлетно-посадочные режимы. Выпуск механизации заметно влияет на положение вихрей с конца крыла и закрылка

(рис. 5.14) Кроме того, с закрылка сходят вихри, интенсивность которых несколько больше интенсивности вихрей, сходящих с конца крыла (рис. 5.15). В результате взаимодействия этих вихрей, а также влияния вихрей от воздушных винтов нарушается симметрия положения правых и левых вихревых систем (см. рис. 5.14). Также наблюдается схождение вихрей с концов крыла на расстояние 8–10 м и появление петель в траекториях вихрей с закрылков.

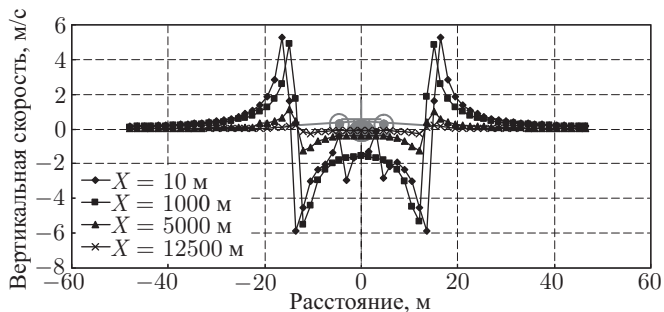


Рис. 5.11. Распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета Ан-26

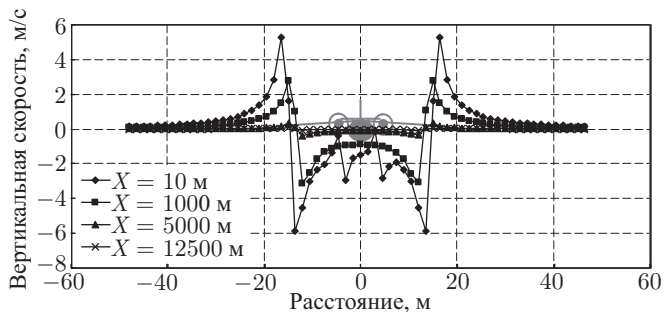


Рис. 5.12. Распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета Ан-26

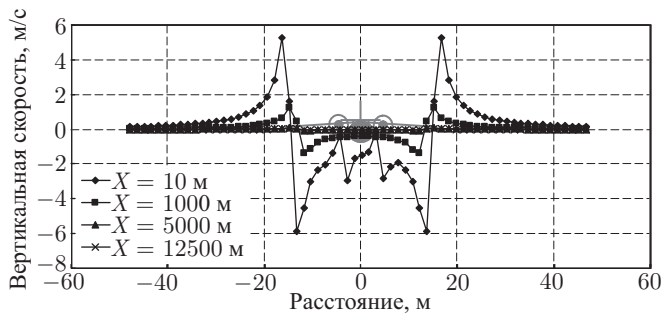


Рис. 5.13. Распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета Ан-26

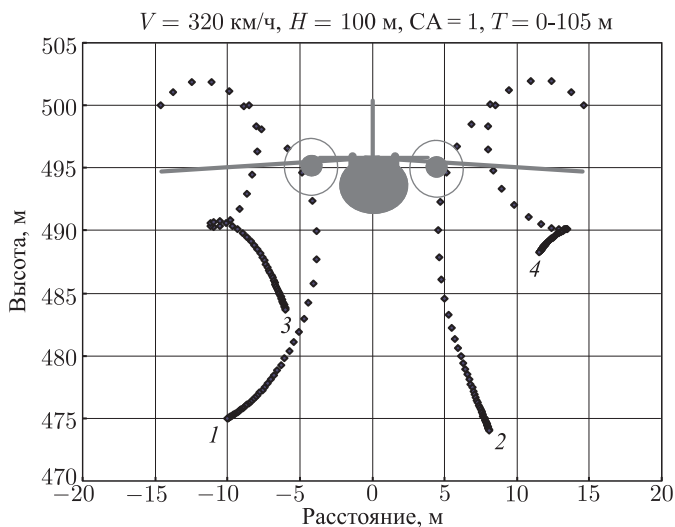


Рис. 5.14. Положение крылевых вихрей (1, 2) и вихрей с закрылка (3, 4) за самолетом Ан-26

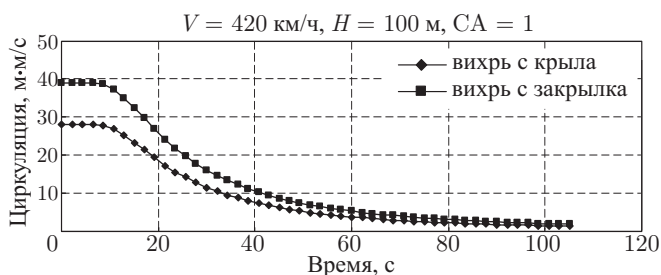


Рис. 5.15. Изменение во времени циркуляции вихрей самолета Ан-26

При уменьшении высоты и скорости полета интенсивность вихрей увеличивается (рис. 5.16). Это в свою очередь приводит к изменению траекторий вихрей (рис. 5.17). На рис. 5.17 показаны траектории вихрей с конца крыла и закрылков в расчетном сечении при  $V = 180 \text{ км/ч}$ ,  $H = 50 \text{ м}$ ,  $CA = 1$  и в моменты времени  $T = 0 - 150 \text{ с}$ . Каждая точка на рис. 5.17 соответствует  $\Delta T = 1 \text{ с}$ . Режим работы двигателей взлетный. В этом случае воздушные винты не оказывают большого влияния на положение вихрей в этом сечении.

При переводе двигателей на малый газ картина меняется — рис. 5.18. Через это сечение самолет Ан-26 прошел на высоте  $H = 25 \text{ м}$ , при скорости  $V = 180 \text{ км/ч}$ . Траектории вихрей показаны для периода времени  $T = 0 - 150 \text{ с}$ . Каждая точка на рис. 5.18 соответствует  $\Delta T = 1 \text{ с}$ .

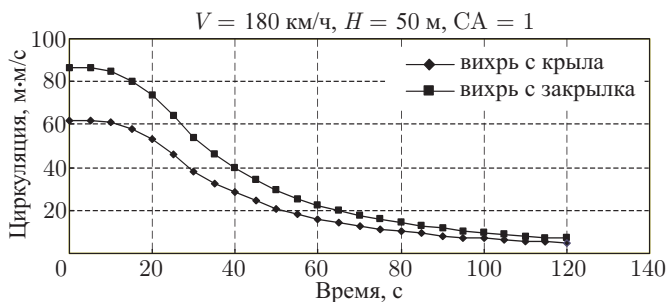


Рис. 5.16. Изменение во времени циркуляции вихрей самолета Ан-26

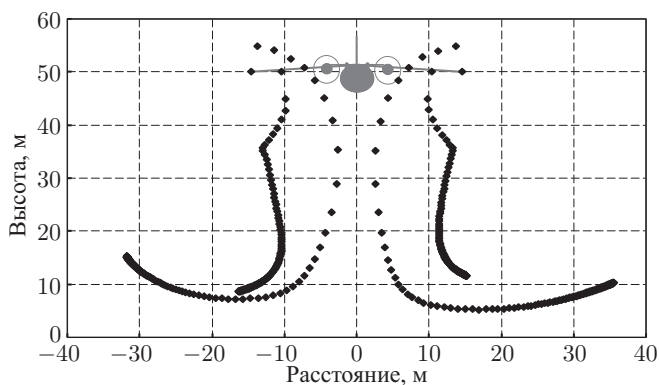


Рис. 5.17. Положение крыльевых вихрей и вихрей с закрылка за самолетом Ан-26 (взлетный режим)

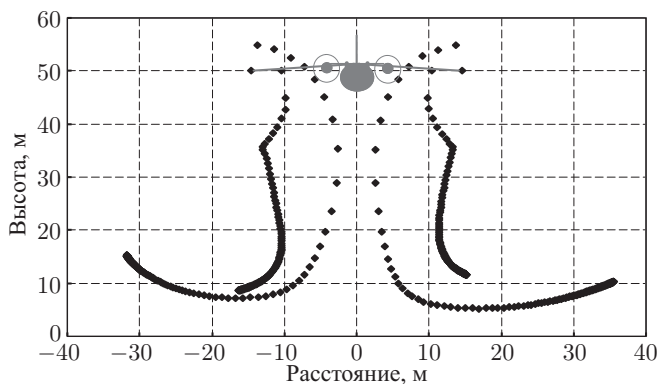


Рис. 5.18. Положение крыльевых вихрей и вихрей с закрылка за самолетом Ан-26 (малый газ)

Расчетами выявлен заброс вихрей с конца крыла вверх при выпуске механизации (см. рисунки 5.14, 5.17, 5.18). Причиной этого является взаимодействие вихрей крыльевых и с закрылка, которые для самолета Ан-26 на посадочных режимах различаются не намного (см. рис. 5.16).

Разработанная методика позволяет выполнить расчет вихревого следа за самолетами с воздушными винтами и при других условиях полета.

Таким образом, исследования вихревого следа за самолетом Ан-26 показали, что воздушные винты оказывают заметное влияние на характеристики следа только на небольших удалениях (до 500 м). При больших удалениях (до 12,5 км) влияние винтов не существенно. На взлетно-посадочных режимах, при выпуске механизации, влияние винтов проявляется через асимметрию правой и левой вихревых систем самолета.

## 5.6. Характеристики вихревого следа за самолетом Ан-12

В данном разделе приведены результаты исследования характеристик дальнего вихревого следа за самолетом Ан-12. Эти исследования также разделены на два этапа: первый — детальное изучение вихревого следа до удаления 500 м, второй — менее подробные исследования до удаления 12,5 км.

На первом этапе исследований характеристик вихревого следа за самолетом Ан-12 рассматривались следующие режимы:

- высота полета 500 м, скорость полета 420 км/ч, состояние атмосферы 1 балл;
- высота полета 5000 м, скорость полета 420 км/ч, состояние атмосферы 1 балл.

Выбор этих режимов был обусловлен практическими соображениями. На рис. 5.19 показано распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета Ан-12 на удалении  $X = 10$  м, 150 м, 300 м и 500 м, летящего на высоте  $H = 500$  м со скоростью  $v = 420$  км/ч;  $CA = 1$ . В этом расчете влияние воздушных винтов не учитывалось.

На рис. 5.20 аналогичные расчеты выполнены с учетом влияния воздушных винтов на характеристики следа. Видим, что воздушные винты оказывают заметное влияние на характеристики вихревого следа на удалении до  $X = 150$  м. При увеличении расстояния  $X$  влияние воздушных винтов уменьшается и затем вообще исчезает. При этом скорости в ядре вихря при  $X = 10$  м достигают по абсолютной величине 10–12 м/с. С увеличением  $X$  вертикальная скорость в ядре вихря уменьшается.

На втором этапе были выполнены исследования дальнего вихревого следа за самолетом Ан-12 до удаления 12,5 км. Результаты этих исследований представлены ниже.



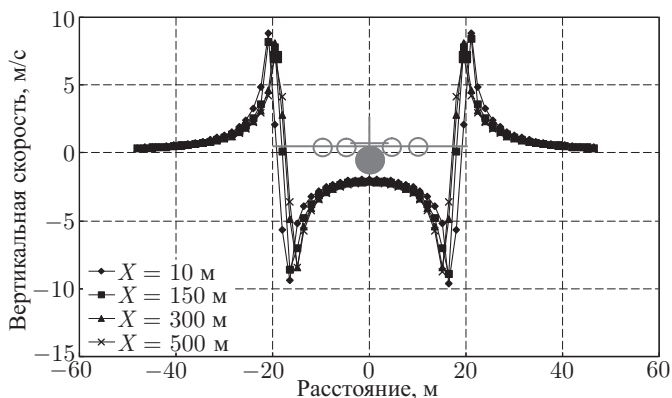


Рис. 5.19. Распределение вертикальных скоростей в ядре вихря самолета Ан-12 (без воздушных винтов)

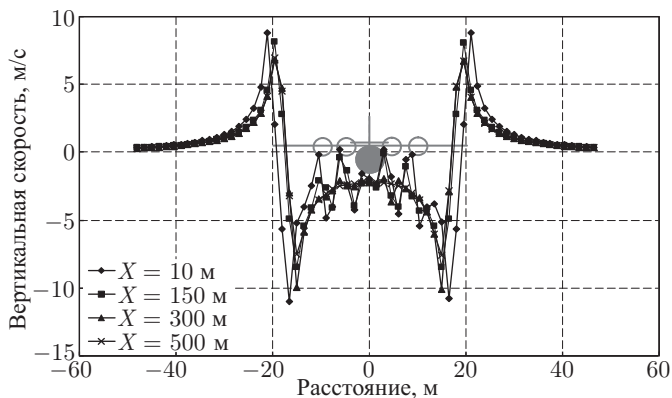


Рис. 5.20. Распределение вертикальных скоростей в ядре вихря самолета Ан-12 (с воздушными винтами)

На рис. 5.21 показано положение вихревого следа за самолетом Ан-12 при различных состояниях атмосферы:  $CA = 1$  — весьма устойчивое,  $CA = 3$  — нейтральное и  $CA = 5$  — сильно неустойчивое;  $V = 420$  км/ч,  $H = 50$  м. Видим, что в устойчивой атмосфере вихревой след опускается на наибольшую высоту, которая достигает 25–27 м. Это связано с тем, что в устойчивой атмосфере интенсивность (циркуляция) концевых вихря сохраняется дольше. На рис. 5.22 показана зависимость циркуляции концевых крыльевых вихря ( $m^2/c$ ) от времени при той же скорости и высоте. В сильно неустойчивой атмосфере концевые крыльевые вихри разрушаются быстрее. Это, как было отмечено выше, известно из экспериментальных и летных исследований [8, 14–18] и подтверждается данными настоящего расчета.

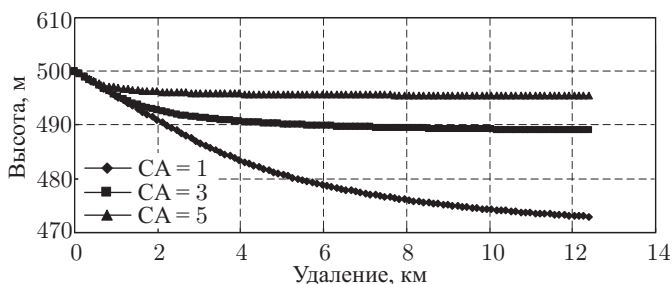


Рис. 5.21. Положение вихревого следа за самолетом Ан-12 при различных состояниях атмосферы

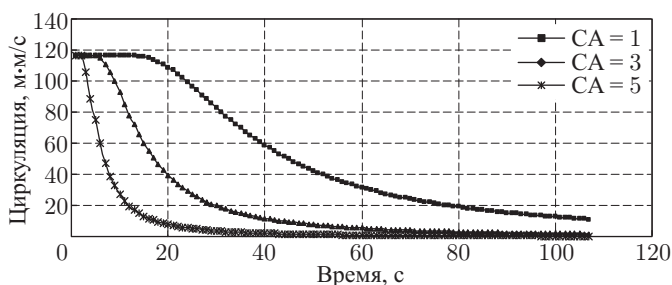


Рис. 5.22. Положение вихревого следа за самолетом Ан-12

Чтобы показать влияние работы воздушных винтов на положение вихревого следа на рис. 5.23 представлены траектории левого и правого концевых вихрей с крыла самолета Ан-12. Двигатели работали в крейсерском режиме. Видно, что правый концевой вихрь опустился ниже левого, что связано с совпадением направления вращения воздушных винтов и левого вихря.

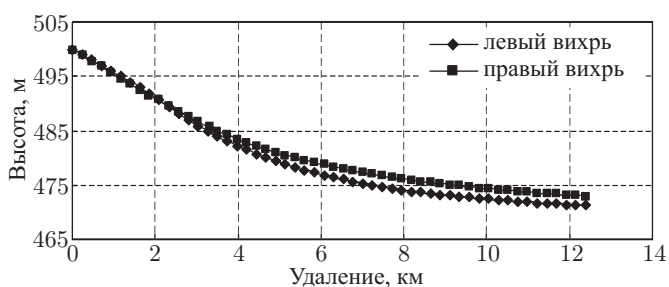


Рис. 5.23. Положение левого и правого концевых вихрей с крыла самолета Ан-12

На рис. 5.24 показано распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета Ан-12 на удалении  $X = 10$  м, 1000 м, 5000 м и 12500 м,

летящего на высоте  $H = 500$  м со скоростью  $V = 420$  км/ч при  $CA = 1$ . С увеличением удаления  $X$  вертикальные скорости в ядре концевых крыльевых вихрей уменьшаются, но на удалении 5000 м они еще равны 3–4 м/с.

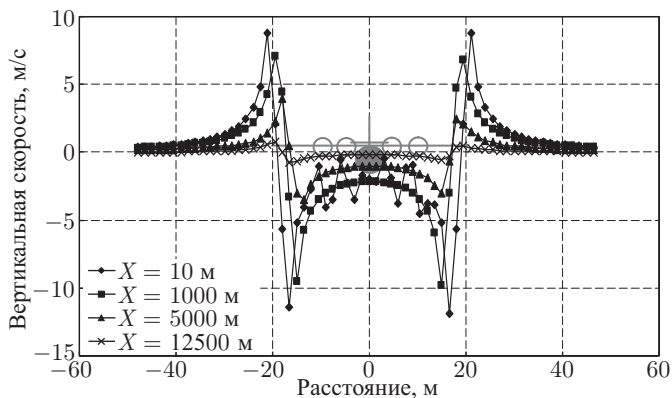


Рис. 5.24. Распределение вертикальных скоростей в ядре вихря самолета Ан-12

Рассмотрим взлетно-посадочные режимы. Выпуск механизации заметно влияет на положение вихрей с конца крыла и закрылка (рис. 5.25). С закрылка сходят вихри, интенсивность которых более чем в два раза больше интенсивности вихрей, сходящих с конца крыла (рис. 5.26). В результате взаимодействия этих вихрей, а также влияния вихрей от воздушных винтов нарушается симметрия положения правых и левых вихревых систем (см. рис. 5.25). Также наблюдается схождение вихрей с концов крыла на расстояние 10–12 м и появление петель в траекториях вихрей с закрылков.

При уменьшении высоты и скорости полета интенсивность вихрей увеличивается (рис. 5.27). Это в свою очередь приводит к изменению траекторий вихрей (рис. 5.28). На рис. 5.28 показаны траектории вихрей с конца крыла и закрылков в расчетном сечении при  $V = 180$  км/ч,  $H = 50$  м,  $CA = 1$  и в моменты времени  $T = 0 - 150$  с. Каждая точка на рис. 5.28 соответствует  $\Delta T = 1$  с. Режим работы двигателей крейсерский. В этом случае воздушные винты оказывают заметное влияние на положение вихрей в этом сечении.

При переводе двигателей на взлетный режим картина меняется еще сильнее, как показывает рис. 5.29. Через это сечение Ан-12 прошел также на высоте  $H = 50$  м при скорости  $V = 180$  км/ч. Траектории вихрей даны для периода времени  $T = 0 - 150$  с. Каждая точка на рис. 5.29 также соответствует  $\Delta T = 1$  с.

Расчетами выявлен заброс вихрей с конца крыла Ан-12 вверх при выпуске механизации (см. рисунки 5.25, 5.28, 5.29). Причиной этого

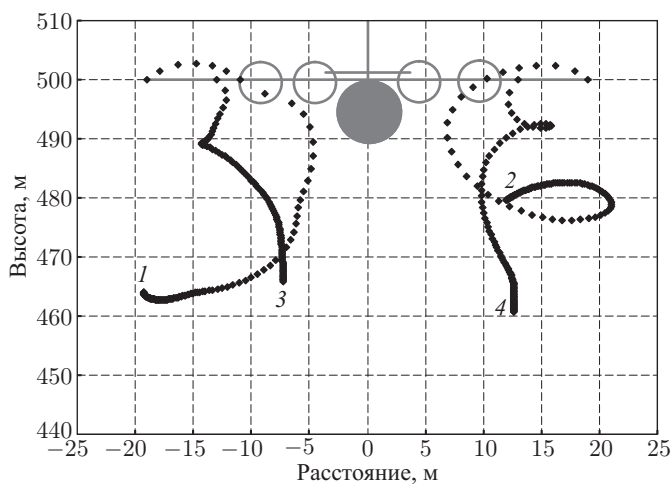


Рис. 5.25. Положение крыльевых вихрей (1, 2) и вихрей с закрылка (3, 4) за самолетом Ан-12

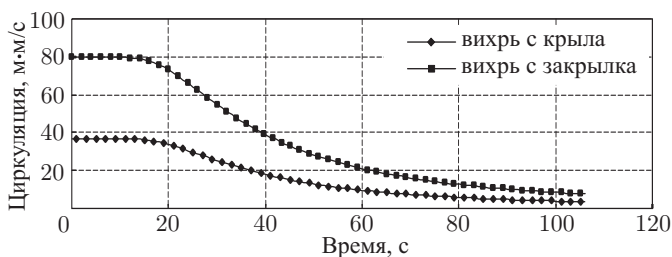


Рис. 5.26. Изменение циркуляции Ан-12 во времени ( $H = 500$  м,  $V = 180$  км/ч)

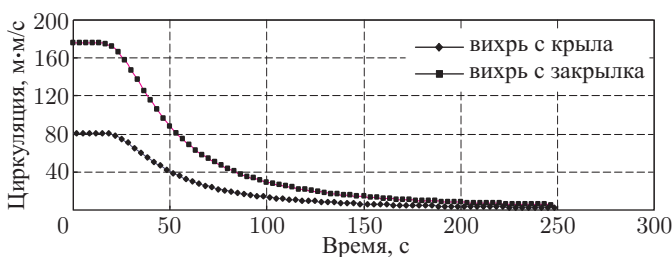


Рис. 5.27. Изменение циркуляции вихрей Ан-12 во времени ( $H = 50$  м)

является взаимодействие вихрей крыльевых и с закрылка, которые для самолета Ан-12 на посадочных и взлетных режимах различаются более чем в два раза (см. рисунки 5.26 и 5.27).

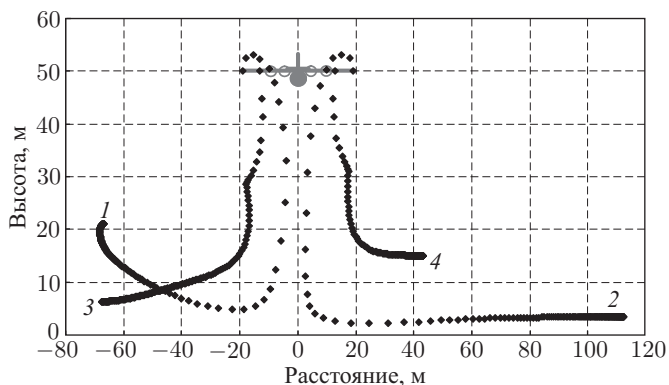


Рис. 5.28. Положение крыльевых вихрей (1, 2) и вихрей с закрылка (3, 4) за самолетом Ан-12 (крейсерский режим полета)

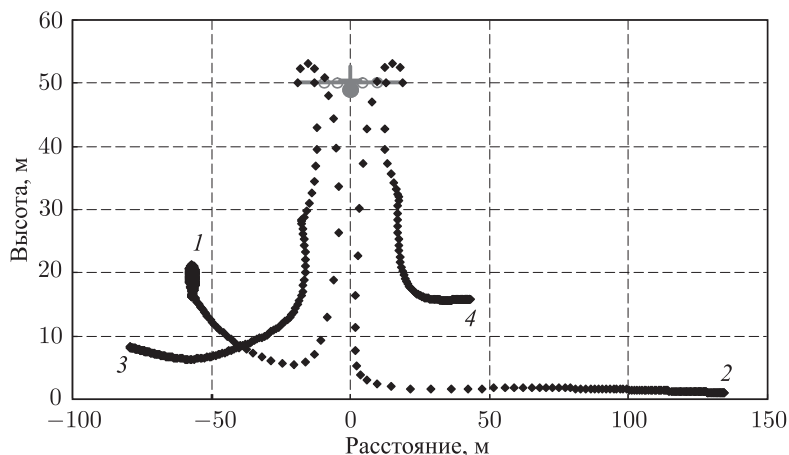


Рис. 5.29. Положение крыльевых вихрей (1, 2) и вихрей с закрылка (3, 4) за самолетом Ан-12 (взлетный режим)

Разработанная методика позволяет выполнить расчет вихревого следа за самолетами с четырьмя воздушными винтами и при других условиях полета.

Таким образом, исследования вихревого следа за самолетом Ан-12 показали, что воздушные винты оказывают заметное влияние на характеристики вихревого следа как на крейсерских, так и на взлетно-посадочных режимах полета. Влияние винтов проявляется через асимметрию правой и левой вихревых систем самолета. Особенно заметное влияние воздушные винты оказывают на вихревой след на взлетно-посадочных режимах при отклоненной механизации.

На рис. 5.30 показано распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета Ан-12 на взлетном режиме работы воздушных винтов:  $V = 220$  км/ч,  $H = 50$  м,  $CA = 1$ . Видим, что выпуск механизации и работа воздушных винтов приводят к заметным колебаниям вертикальной скорости вдоль координаты  $z$ .

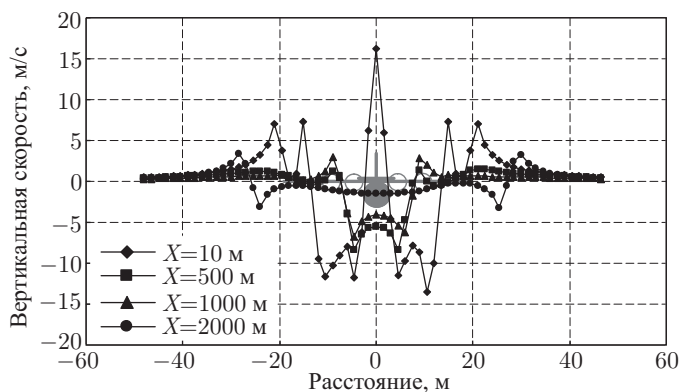


Рис. 5.30. Распределение вертикальных скоростей в ядре вихря Ан-12 при выпуске механизации

## 5.7. Характеристики вихревого следа за самолетом С-130

Исследование характеристик вихревого следа за самолетом С-130 представляет интерес в том числе и с точки зрения сравнения с самолетом Ан-12. Взлетная масса самолета С-130 равна 80 т, Ан-12 — 60 т. Размах крыла С-130 и Ан-12 примерно равный: 40 м и 39 м соответственно. Как и в случае самолета Ан-12, для исследования характеристик вихревого следа за самолетом С-130 рассматривали следующие режимы:

- высота полета 500 м, скорость полета 420 км/ч, состояние атмосферы 1 балл;
- высота полета 5000 м, скорость полета 420 км/ч, состояние атмосферы 1 балл.

Выбор этих режимов также был обусловлен практическими соображениями. На рис. 5.31. показано распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета С-130 на удалении  $X = 10$  м, 150 м, 300 м и 500 м, летящего на высоте  $H = 500$  м со скоростью  $V = 420$  км/ч. В этом расчете влияние воздушных винтов не учитывалось.

На рис. 5.32. представлены результаты аналогичных расчетов для случая, когда влияние воздушных винтов на характеристики вихревого следа учитывалось. Видим, что воздушные винты оказывают заметное

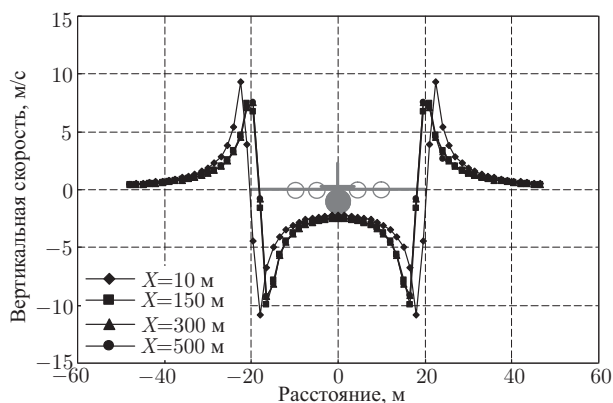


Рис. 5.31. Распределение вертикальных скоростей в ядре вихря самолета С-130 (без воздушных винтов)

влияние на характеристики вихревого следа на удалении до  $X = 150$  м. При увеличении расстояния  $X$  влияние воздушных винтов уменьшается и затем исчезает вообще. При этом скорости в ядре вихря при  $X = 10$  м достигают по абсолютной величине 10–12 м/с. С увеличением  $X$  вертикальная скорость в ядре вихря уменьшается, снижается также влияние воздушных винтов.

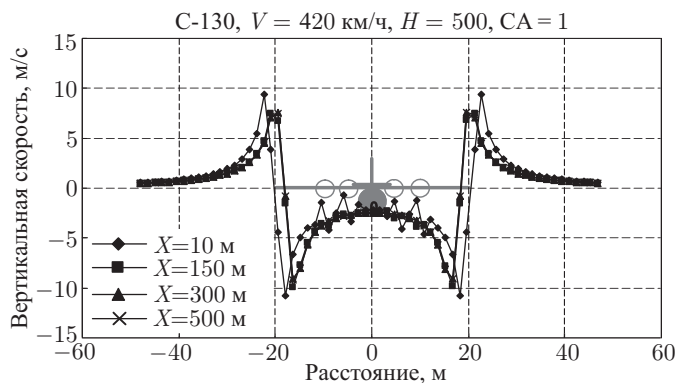


Рис. 5.32. Распределение вертикальных скоростей в ядре вихря самолета С-130 (с воздушными винтами),  $H = 500$  м

На рис. 5.33 показано распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета С-130 на удалении  $X = 10$  м, 250 м и 500 м, летящего на высоте  $H = 5000$  м со скоростью  $V = 420$  км/ч. Видим, что и в этом случае воздушные винты оказывают заметное влияние на характеристики вихревого следа только при небольших удалениях от самолета. При увеличении расстояния  $X$  влияние воздушных винтов

уменьшается и затем исчезает совсем. При этом скорости в ядре вихря при  $X = 10$  увеличиваются и достигают по абсолютной величине 14–16 м/с. Затем вертикальная скорость в ядре вихря также уменьшается.

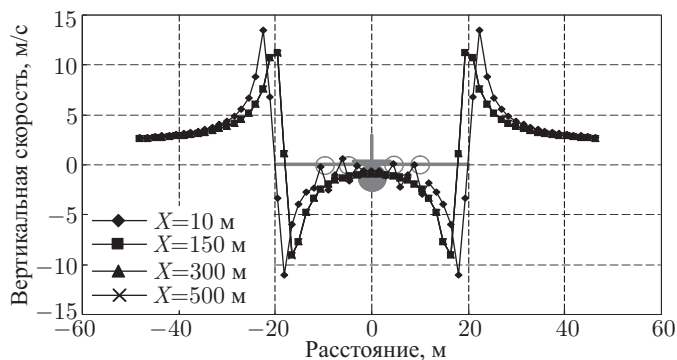


Рис. 5.33. Распределение вертикальных скоростей в ядре вихря самолета С-130 (с воздушными винтами),  $H = 500$  м

На втором этапе были выполнены исследования дальнего вихревого следа за самолетом С-130 до удаления 12,5 км. Результаты этих исследований представлены ниже. На рис. 5.34 показано положение вихревого следа за самолетом С-130 при различных состояниях атмосферы:  $CA = 1$  — весьма устойчивое,  $CA = 3$  — нейтральное и  $CA = 5$  — сильно неустойчивое. Видим, что в устойчивой атмосфере вихревой след опускается до наибольшей высоты примерно на 40 м. Это связано с тем, что в устойчивой атмосфере интенсивность (циркуляция) концевых вихря сохраняется дольше — рис. 5.35. Здесь показана зависимость циркуляции концевых крыльевых вихря ( $m^2/c$ ) от времени. В сильно неустойчивой атмосфере концевые крыльевые вихри самолета разрушаются быстрее.

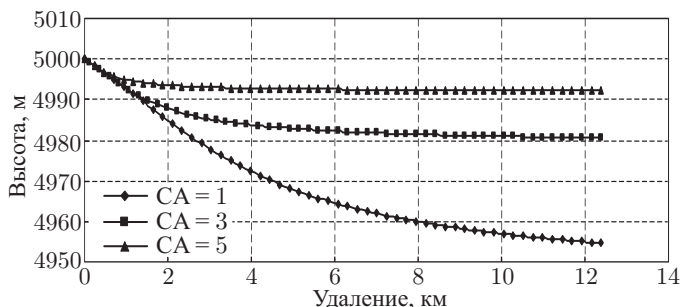


Рис. 5.34. Положение вихревого следа за самолетом С-130 при различных состояниях атмосферы



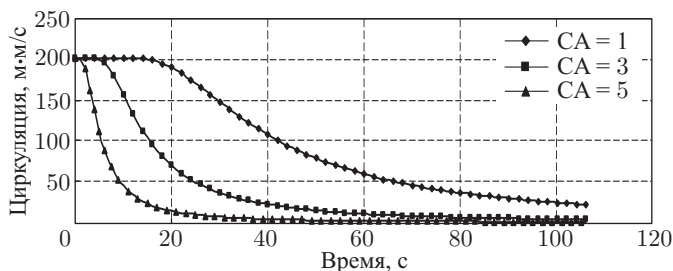


Рис. 5.35. Изменение циркуляции концевых вихрей с крыла самолета С-130

На рис. 5.36 показано распределение вертикальной скорости в ядре вихря самолета С-130 на удалении  $X = 10$  м, 1000 м, 5000 м и 12500 м, летящего на высоте  $H = 5000$  м со скоростью  $V = 420$  км/ч при  $CA = 1$ . При  $X = 10$  м вертикальные скорости составляют 13–15 м/с. С увеличением удаления  $X$  вертикальные скорости в ядре концевых крыльевых вихрей уменьшаются. На удалении  $X = 1000$  м они еще заметные (11–13 м/с), на удалении  $X = 5000$  м не превышают 5–6 м/с, а на удалении  $X = 12500$  м не больше 2 м/с.

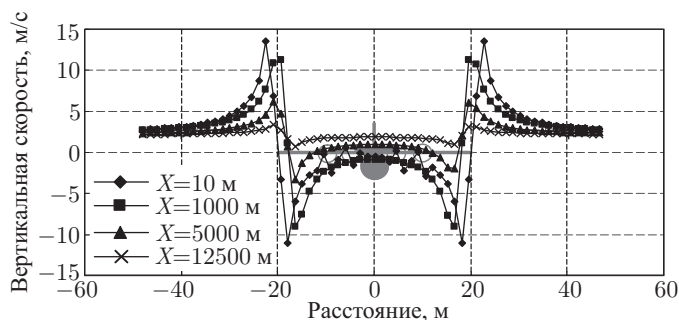


Рис. 5.36. Распределение вертикальных скоростей в ядре вихря самолета С-130

Выпуск механизации также заметно влияет на положение вихрей, сходящих с конца крыла и закрылка самолета С-130 (рис. 5.37). На самолете С-130 интенсивности вихрей, сходящих с конца крыла и с закрылка, разнятся почти в два с половиной раза (рис. 5.38). Работа двигателей даже на крейсерском режиме не вносит заметного влияния на положение вихрей (рис. 5.37). На рис. 5.37 представлено положение вихрей в сечении, которое самолет С-130 проходит на высоте  $H = 100$  м со скоростью  $V = 320$  км/ч. При переводе двигателей во взлетное положение картина меняется. В результате взаимодействия вихрей, сходящих с конца крыла и с закрылка, а также влияния вихрей от воздушных винтов нарушается симметрия положения правых

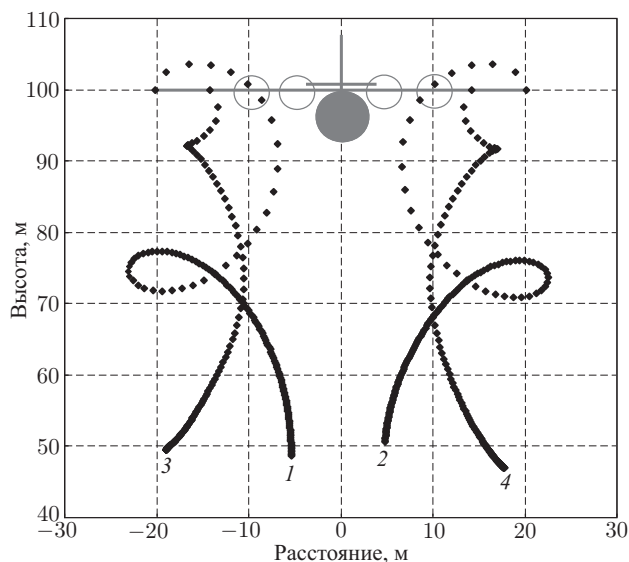


Рис. 5.37. Положение крыльевых вихрей (1, 2) и вихрей с закрылка (3, 4) за самолетом С-130

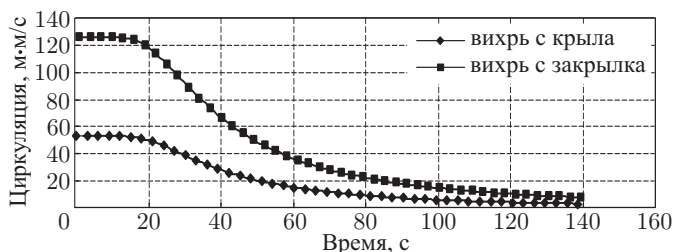


Рис. 5.38. Изменение циркуляции вихрей по времени самолета С-130 (крейсерский режим)

и левых вихревых систем — рис. 5.39. Здесь также представлено положение вихрей в сечении, которое самолет С-130 проходит на высоте  $H = 100$  м со скоростью  $V = 320$  км/ч, но при этом двигатели работают на взлетном режиме. Наблюдается петлеобразное движение вихрей с концов крыла и закрылка.

На рис. 5.39 расчетное время 0–150 с. Каждая точка соответствует  $\Delta T = 1$  с.

На рис. 5.40 показано положение вихрей за самолетом С-130 (вид сбоку) при тех же условиях полета, что и на рис. 5.39.

При уменьшении высоты и скорости полета интенсивность вихрей увеличивается. Это в свою очередь приводит к изменению траекторий вихрей. На рис. 5.41 показаны траектории вихрей, сходящих с конца

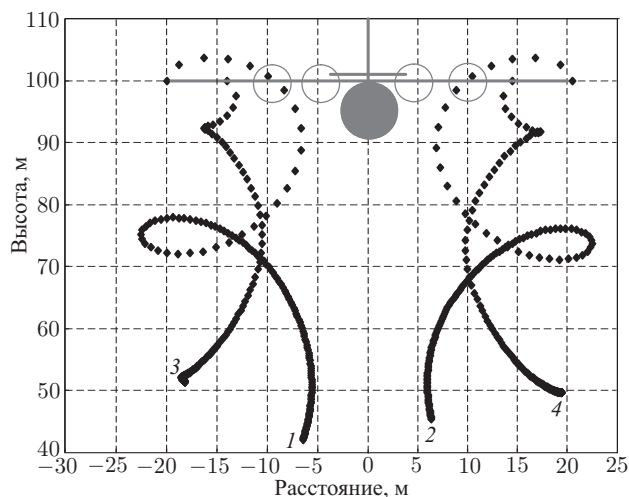


Рис. 5.39. Положение крыльевых вихрей (1, 2) и вихрей с закрылка (3, 4) за самолетом С-130 (взлетный режим)

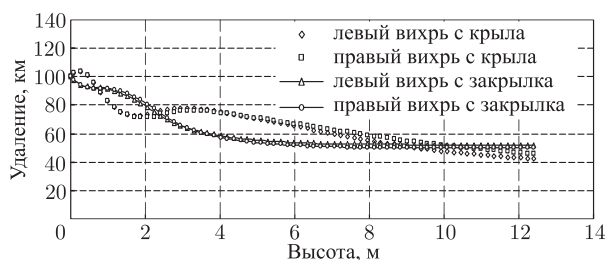


Рис. 5.40. Положение вихрей за самолетом С-130

крыла и закрылков в расчетном сечении при  $V = 180$  км/ч,  $H = 50$  м,  $SA = 1$  и в моменты времени  $T = 0–150$  с. Каждая точка на рис. 5.41 соответствует  $\Delta T = 1$  с. Двигатели работают на взлетном режиме. Видно, что в этом сечении с течением времени вихри, сходящие с крыла, вначале поднимаются вверх, затем начинают опускаться вниз и сходить друг с другом. При приближении к земле вихри двигаются вдоль нее и даже поднимаются вверх. Траектории вихрей, сходящих с закрылков, расходятся в результате взаимного влияния всех вихрей. Также видим, что работа воздушных винтов слабо влияет на положение вихрей с конца крыла и закрылка самолета С-130 в отличие от самолета Ан-12 (см. рис. 5.29). Таким образом, исследования вихревого следа за самолетом С-130 показали, что воздушные винты оказывают заметное влияние на характеристики следа только на небольших удалениях (до 500 м). При больших удалениях (до 12,5 км) влияние винтов несущественно. На взлетно-посадочных режимах, при выпуске

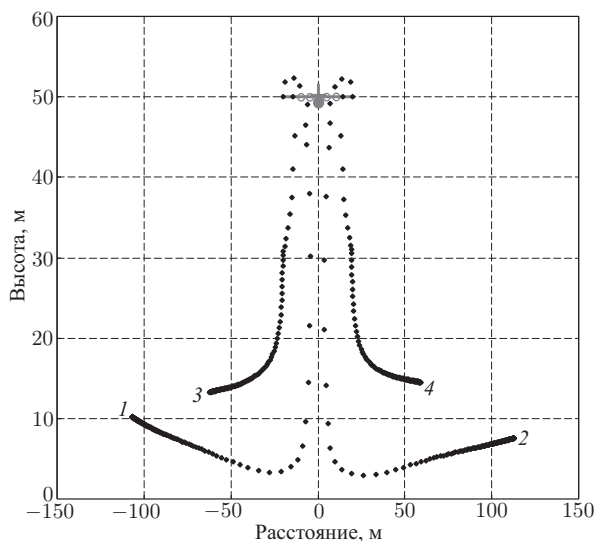


Рис. 5.41. Положение крыльевых вихрей (1, 2) и вихрей с закрылка (3, 4) за самолетом С-130 (взлетный режим)

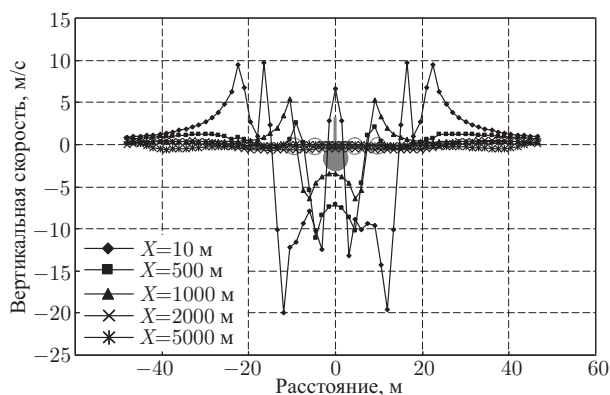


Рис. 5.42. Распределение вертикальных скоростей в ядре вихря самолета С-130 (взлетный режим)

механизации, влияние винтов проявляется через асимметрию правой и левой вихревых систем самолета.

На рис. 5.42 представлено распределение вертикальных скоростей в ядре вихрей самолета С-130 при следующих условиях полета:  $V = 180$  км/ч,  $H = 50$  м и  $CA = 1$ . Видим, что вертикальные скорости в ядре вихря самолета С-130 с выпущенной механизацией и работающими воздушными винтами на удалении 10 м достигают 20 м/с, на удалении  $X = 500$  м — 10–12 м/с, а на удалении  $X = 1000$  м — 5–7 м/с.

## ВЕТРОВОЙ ПОТОК ОКОЛО РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ

### 6.1. Основные условия

При полетах на малых высотах, в том числе на режимах взлета и посадки возможно попадание самолета в спутный след от рельефа местности, гор и т.п. В данной главе показано, как в рамках метода дискретных вихрей можно моделировать воздушный поток, обусловленный рельефом местности. Аналогичные задачи возникают при взлете и посадке летательных аппаратов на палубы авианесущих кораблей. Этот вопрос подробно рассмотрен в монографии [8] и здесь не обсуждается.

### 6.2. Постановка задачи

Рассматривается обтекание участка рельефа местности с постоянной дозвуковой скоростью  $V$  под произвольным углом (рис. 6.1). Требуется определить поле скоростей и давлений вблизи рельефа местности в любой произвольной точке пространства. При этом принимаются

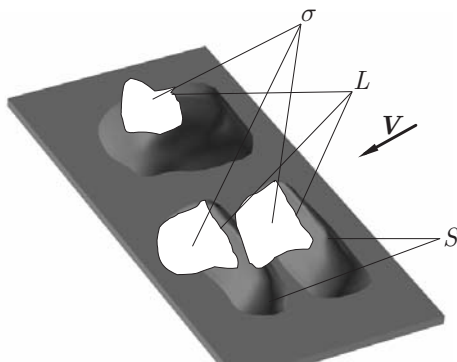


Рис. 6.1. К постановке задачи

следующие условия и допущения. Среда — идеальная несжимаемая жидкость. Течение потенциальное везде, кроме поверхностей  $\sigma$  и  $S$ . На поверхностях  $S$  выполняется условие непротекания  $(\vec{\nabla} \varphi, \vec{n}) = 0$ ,

$\vec{r}_g \in S$ , на поверхностях  $\sigma$  — условие отсутствия перепада давления:  $(\vec{\nabla} \varphi, \vec{n})_+ = (\vec{\nabla} \varphi, \vec{n})_-$ ,  $p_+ = p_-$ ,  $\vec{r}_g \in \sigma$ , на краях схода вихревой пелены  $L$  — гипотеза Чаплыгина-Жуковского о конечности скоростей на этих краях. На бесконечном удалении от моделируемого участка местности и следа возмущения воздушного потока затухают:  $|\nabla \varphi| \rightarrow \vec{V}_\infty$ ,  $|\varphi| \rightarrow (\vec{V}_\infty, \vec{r}_g)$ ,  $|\vec{r}_g| \rightarrow \infty$ . Линии отрыва потока с поверхностями в задаче задаются. Поле скоростей определяется по формуле Био-Савара, а поле давлений через интеграл Коши-Лагранжа:  $P/\rho = P_\infty/\rho - \vec{W}_\infty^2/2 - \partial U/\partial t$ .

### 6.3. Метод решения. Схематизация участка местности

Поставленная задача решается методом дискретных вихрей, в соответствии с которым реальный участок местности заменяется схематизированной моделью, полностью повторяющей контуры реального участка (рис. 6.2). На поверхностях располагаются замкнутые вихревые рамки. Задача решается в нелинейной нестационарной по-

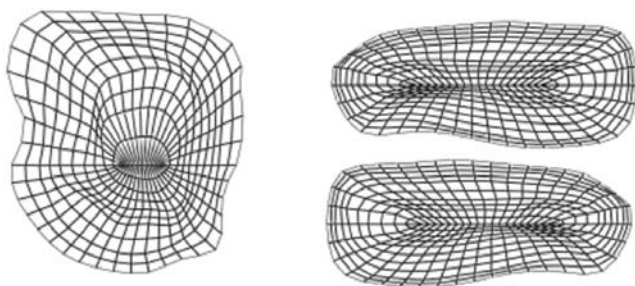


Рис. 6.2. Пример схематизации участка местности

становке [4, 7]. Пример решения задачи представлен на рис. 6.3. Здесь показана вихревая пелена, образующаяся при обтекании трех гор одинаковой высоты. Стрелкой обозначено направление воздушного потока, натекающего на эти горы. Вихревая пелена на рис. 6.3 соответствует моменту безразмерного времени  $\tau = Vt/h = 3,3$ , где  $V$  — скорость ветра,  $t$  — время,  $h$  — характерный линейный размер (высота горы). При этом в любой точке исследуемого пространства и в любом произвольном сечении можно получить нужные характеристики воздушного потока.

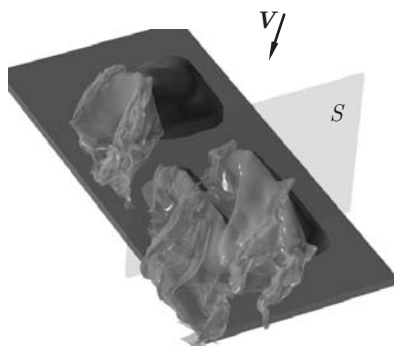


Рис. 6.3. Вихревая пелена при обтекании трех гор,  $\tau = 3,3$

#### 6.4. Примеры расчета характеристик воздушного потока

На рис. 6.4 приведены поля возмущенных скоростей в сечении  $S$  в момент безразмерного времени  $\tau = 0,15$ , а на рис. 6.5 — при  $\tau = 3,3$ . Видно, как с течением времени происходит зарождение и развитие вихрей вблизи данного рельефа местности.

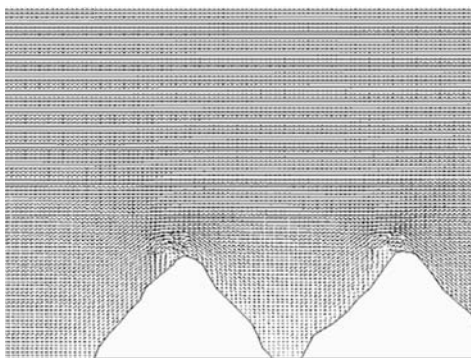


Рис. 6.4. Поле скоростей в вертикальной плоскости при  $\tau = 0,15$

На рис. 6.6 представлены скосы потока в сечении  $S$  в момент безразмерного времени  $\tau = 0,15$ , а на рис. 6.7 при  $\tau = 3,3$ . В верхней части рис. 6.6 и рис. 6.7 имеется шкала, позволяющая судить о величине угла скоса потока.

На рис. 6.8 приведены поля возмущенных скоростей в горизонтальном сечении в момент безразмерного времени  $\tau = 0,15$ , а на рис. 6.9 — в момент  $\tau = 3,3$ . Горизонтальное сечение располагалось на высоте  $(1/3)h$  от поверхности земли,  $h$  — высота горы. Процесс зарождения

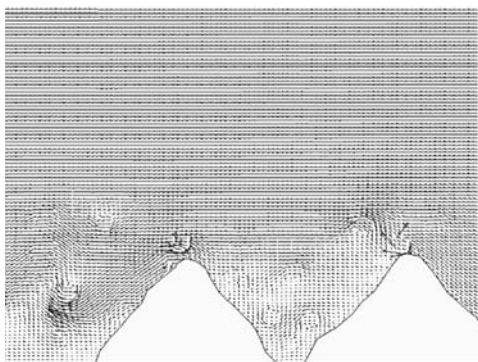


Рис. 6.5. Поле скоростей в вертикальной плоскости при  $\tau = 3,3$

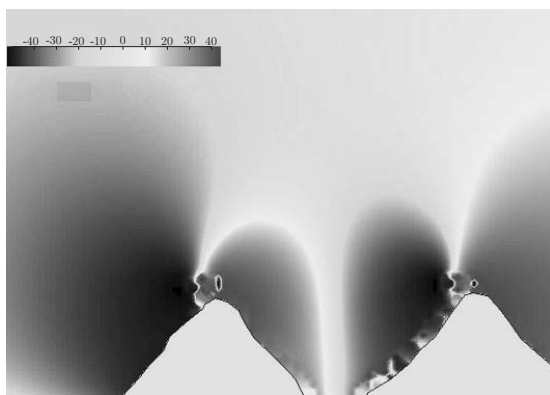


Рис. 6.6. Скосы потока в вертикальной плоскости при  $\tau = 0,15$

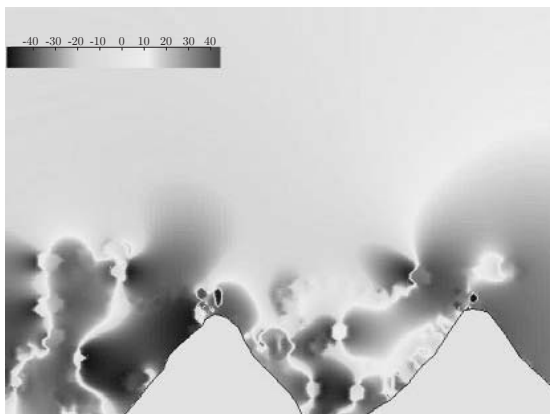


Рис. 6.7. Скосы потока в вертикальной плоскости при  $\tau = 3,3$



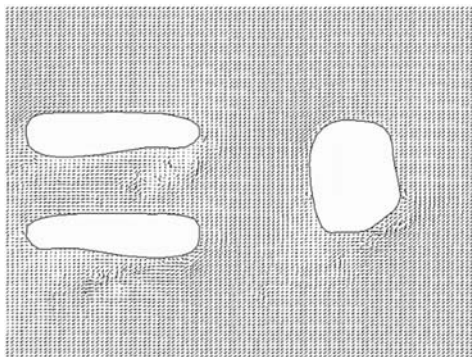


Рис. 6.8. Поле скоростей в горизонтальной плоскости при  $\tau = 0,15$

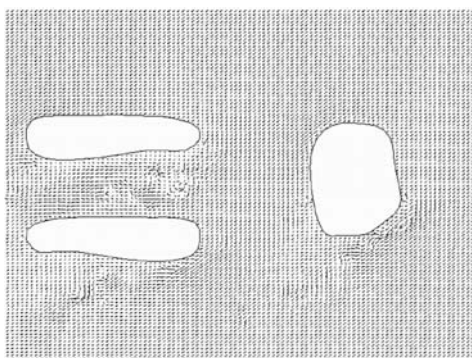


Рис. 6.9. Поле скоростей в горизонтальной плоскости при  $\tau = 3,3$

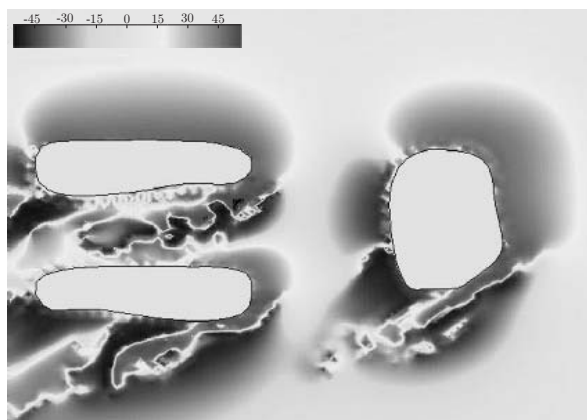


Рис. 6.10. Скосы потока в горизонтальной плоскости при  $\tau = 0,15$

и распространения вихрей с течением времени виден уже в другой плоскости.

На рис. 6.10 представлены скосы потока в горизонтальном сечении в момент безразмерного времени  $\tau = 0,15$ , а на рис. 6.11  $\tau = 3,3$ . В верхней части рис. 6.10 и рис. 6.11 также имеется шкала, позволяющая судить о величине угла скоса потока.

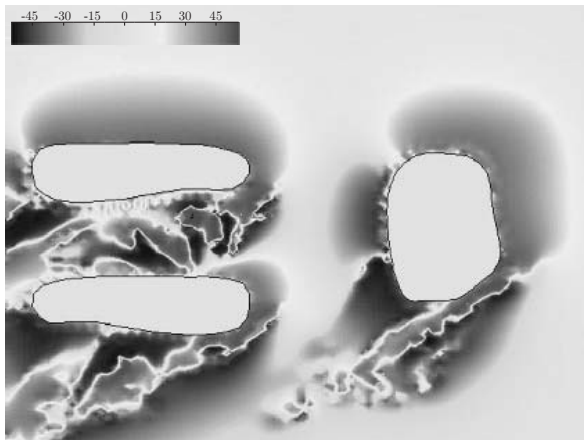


Рис. 6.11. Скосы потока в горизонтальной плоскости при  $\tau = 3,3$

Таким образом, метод дискретных вихрей позволяет моделировать и такие необычные объекты, как рельеф местности. Это важно с точки зрения вихревой безопасности при полетах на малых высотах. В гл. 8 будет показано, как можно учесть влияние вихревого следа на аэродинамические характеристики.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДАЛЬНОГО ВИХРЕВОГО СЛЕДА САМОЛЕТА ПРИ ВЗЛЕТЕ И ПОСАДКЕ

### 7.1. Постановка задачи

При полете на большой высоте дальний вихревой след представляет собой два параллельных опускающихся вихревых жгута противоположного вращения. При этом уменьшение циркуляции каждого из них со временем обусловлено взаимным проникновением (диффузией) завихренностей разного знака. При полете самолета в турбулентной атмосфере повышенная турбулентность усиливает диффузию завихренности во внешней области вихревых жгутов, что приводит к дополнительной потере циркуляции каждого из жгутов. В настоящее время известны различные эмпирические формулы для расчета потери циркуляции при низких и высоких уровнях турбулентности атмосферы [11, 72, 80].

Учет взаимодействия вихревого следа с поверхностью земли в невязком приближении приводит к известному результату, согласно которому вихревая система самолета (два вихря противоположного вращения вблизи экрана и два их зеркальных отражения относительно экрана, образующие квадруполь [54]) нестационарна и оба вихря опускаются и раздвигаются в обе стороны в поперечном направлении.

В рамках теории идеальной жидкости при решении соответствующей двумерной задачи реализуется гиперболическая траектория  $y^2 + z^2 = y^2 z^2 (0,5b_0)^2$ , где  $z$  — расстояние от центра вихря до плоскости симметрии вихревой пары,  $y$  — высота вихря над поверхностью,  $b_0$  — начальное расстояние между центрами вихрей.

Уже первые экспериментальные исследования вихревой системы крыла вблизи экрана в аэродинамической трубе показали [70], что происходит не только опускание концевых вихрей и увеличение расстояния между ними, как это следует из теории в невязком приближении, но и подъем обоих вихрей до некоторого уровня с последующим их движением по петлеобразной траектории. В работе [73] на основе экспериментов было показано, что наличие петлеобразной траектории движения вихрей обусловлено отрывом пограничного слоя, который образуется на экране при поперечном (вдоль размаха) течении, индуцированном на поверхности экрана вихревой системой крыла. Сходящие в поток при отрыве пограничного слоя вторичные вихри взаимодействуют с первичными вихрями, следствием чего и является петлеобразная траектория движения первичных вихрей (см. также [53]).

Образование петлеобразной траектории движения первичных вихревых жгутов противоположного знака вблизи экрана описывается в рамках RANS при наличии и отсутствии бокового сносящего потока [59, 77].

Расчеты были выполнены на основе уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью дифференциальной модели турбулентности [59, 77], а также методом дискретных вихрей с привлечением методов теории турбулентного пограничного слоя [36]. В первом случае два вихревых жгута были вязкими (турбулентными), во втором случае задача решалась в рамках идеальной жидкости, причем учитывалось индуцированное идеальными вихрями пристенное поперечное течение, которое сопровождается образованием и последующим отрывом турбулентного пограничного слоя.

На рис. 7.1 представлены геометрические параметры течения около вихревой пары вблизи плоского экрана применительно к расчету на основе уравнений Рейнольдса (см. рис. 7.1, *а*) и по методу дискретных вихрей (см. рис. 7.1, *б*).

На рис. 7.2 представлены результаты расчета траекторий движения первичных вихрей на основе численного решения уравнений Рейнольдса с моделью турбулентности по методу [59]. На рис. 7.2, *а* соответствует ламинарному режиму (решение получено на основе уравнений Навье–Стокса), *т* — турбулентному режиму (решались уравнения Рейнольдса по методу [77]). Штриховая кривая соответствует точному решению для вихревой нити, кружки — решению для невязкого вихревого жгута (оба решения — для случая идеальной жидкости), сплошная кривая — турбулентному режиму (рис. 7.2, *б*).

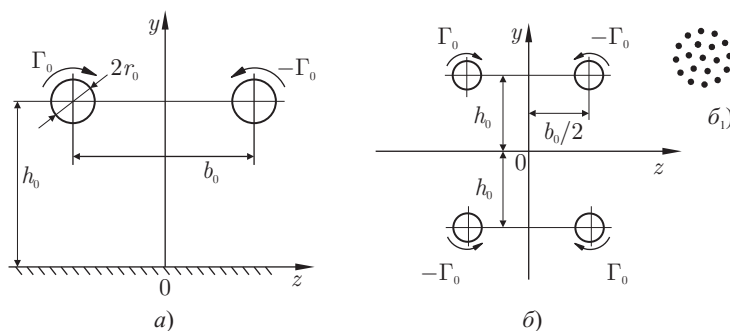


Рис. 7.1. Геометрические параметры вихревой пары вблизи плоского экрана при решении задачи на основе уравнений Рейнольдса (*а*) и метода дискретных вихрей (*б*);  $b_1$  — моделирование вихревого жгута

На рис. 7.3 показаны соответствующие траектории движения первичных вихрей (сплошные кривые) и положение вторичных вихрей в конечный момент времени с учетом затухания первичных и вторичных вихрей. Расчеты выполнены в рамках метода дискретных вихрей

совместно с методами теории турбулентного пограничного слоя [36]. Оба метода расчета позволяют удовлетворительно описать петлеобразные траектории движения первичных вихрей.

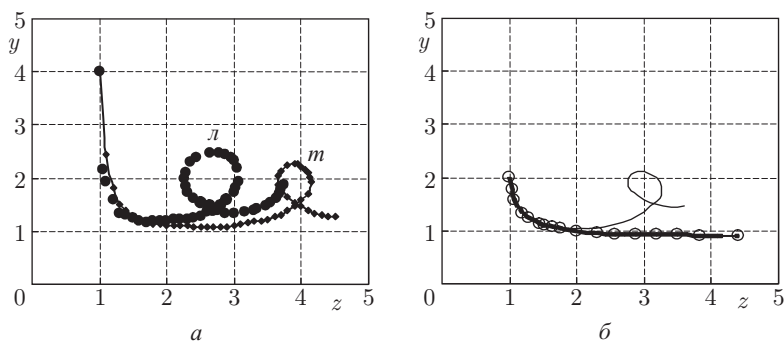


Рис. 7.2. Траектории петлеобразного движения первичных вихрей. Расчеты по методам [59, 77]. Вертикальная координата  $y$  отнесена к  $h_0$ , горизонтальная  $z$  к  $b_0/2$  (см. рис. 7.1)

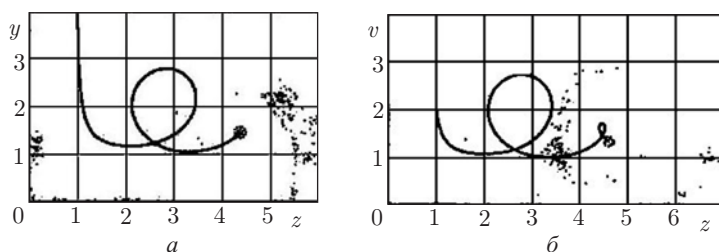


Рис. 7.3. Траектории движения первичных вихрей, рассчитанные в рамках метода дискретных вихрей [36]. Начальные положения первичных вихрей ( $a$  и  $б$ ) соответствуют данным расчета рис. 7.2

Для больших чисел Рейнольдса, характерных для рассматриваемой задачи, моделирование дальнего вихревого следа самолета вблизи поверхности земли может быть выполнено на основе метода дискретных вихрей в совокупности с методами теории турбулентного пограничного слоя. Это, в частности, обусловлено тем, что здесь течение содержит области концентрированной завихренности (вихревые жгуты и пограничный слой) и потенциального течения.

На этой основе был разработан простой приближенный метод расчета дальнего вихревого следа самолета вблизи поверхности земли на режимах взлета и посадки. Метод включает в себя расчет ближнего вихревого следа самолета с отклоненной механизацией крыла; расчет сворачивания ближнего следа в два вихревых жгута и поперечного течения, индуцированного этими вихревыми жгутами; расчет отрыва

турбулентного пограничного слоя с образованием продольных (вторичных) вихрей и взаимодействия первичных и вторичных вихрей. При такой постановке задачи нет необходимости в задании диаметра, координат центра и циркуляции вихревых жгутов — они определяются в процессе решения для известной геометрии самолета с включенной механизацией крыла. При этом учитываются влияние высоты полета, скорости бокового ветра и турбулентности атмосферы [14–16, 18]<sup>1)</sup>, а также дополнительный источник диффузии, который обусловлен вязкими эффектами, сопровождающими образование вторичных вихрей при отрыве турбулентного пограничного слоя. В данном случае учитывается потеря циркуляции вторичных вихрей.

Излагаемый расчет параметров дальнего вихревого следа самолета основан на предположении, согласно которому реактивные струи двигателей быстро затухают по сравнению с долго живущими вихревыми следами и при расчете вихревых следов влиянием реактивных струй можно пренебречь [71, 74]. Выполненные в последнее время расчеты самолетных струйно-вихревых следов при различном числе и расположении двигателей показали, что струи от двигателей практически не влияют на развитие дальнего вихревого следа самолета [34, 51].

## 7.2. Моделирование ближнего вихревого следа самолета. Линейная теория

Рассматривается установившееся безотрывное дозвуковое обтекание самолета идеальным газом. Возмущения, вносимые самолетом в поток, считаются малыми по сравнению со скоростью полета  $V_\infty$ . Предполагается, что течение вне самолета и следа за ним безвихревое. Потенциал возмущенного движения  $\varphi$  должен удовлетворять уравнению Прандтля–Глауэрта

$$(1 - M^2)\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0. \quad (7.1)$$

Здесь  $M = V_\infty/a_\infty$  — число Маха,  $a_\infty$  — скорость звука в невозмущенной среде. Давление с линейной точностью удовлетворяет уравнению Коши–Лагранжа

$$p - p_\infty = -\rho_\infty V_\infty \partial\varphi/\partial x.$$

Уравнение (7.1) решается при следующих граничных условиях:

- а) непроницаемость поверхности летательного аппарата для газа;
- б) отсутствие перепада давления на вихревой пелене;
- в) конечность скорости (условие Чаплыгина–Жуковского) на задних кромках несущих элементов;

---

<sup>1)</sup> См. также: Белоцерковский Ал. С., Гиневский А. С. Взаимодействие дальнего вихревого следа самолета с поверхностью земли на взлетно-посадочных режимах. ЦАГИ, Препринт № 123, 1999, 20 с.

г) затухание возмущений на бесконечности.

Учет влияния поверхности земли на взлетно-посадочных режимах производится с помощью зеркального отражения компоновки от поверхности земли.

Поставленная задача решается методом дискретных вихрей [21], который сводится к следующему. Обтекание летательного аппарата моделируется с помощью газодинамических особенностей, располагаемых на плоских базовых элементах [8]. На несущих поверхностях базовые элементы размещаются таким образом, чтобы соответствующая часть поверхности аппарата была близка к ним. Тела вращения (фюзеляж, мотогондолы) моделируются двумя взаимно перпендикулярными элементами, представляющими собой проекции тела на вертикальную и горизонтальную плоскости. Такое моделирование позволяет учесть несущие свойства удлиненных тел и упростить задание геометрии элемента (см. гл. 3). Вихревые пелены сходят с задних кромок крыла, горизонтального оперения, горизонтальных и вертикальных плоскостей мотогондол при продольном движении и с вертикальных плоскостей фюзеляжа, вертикального оперения при боковом движении, т. е. при наличии бокового ветра.

При численном решении задач выполняется переход от непрерывного вихревого слоя к дискретным вихрям. Каждый базовый элемент разбивается на панели, на которых располагаются вихри и контрольные точки. Граничные условия удовлетворяются в контрольных точках, лежащих между вихрями по потоку и по размаху базовых элементов.

Таким образом, решение задачи сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно неизвестных интенсивностей присоединенных вихрей (нагрузок) на самолете. По известным нагрузкам определяются аэродинамические производные коэффициентов сил  $c_y^{\varepsilon_i}, c_z^{\varepsilon_i}$  и безразмерных циркуляций присоединенных вихрей  $\Gamma^{\varepsilon_i}$ . Здесь  $\varepsilon_i$  — безразмерные кинематические параметры,  $\alpha$  (угол атаки) и  $\omega_z$  (безразмерная скорость вращения относительно оси  $Oz$ ) — для продольного движения;  $\beta$  (угол скольжения),  $\omega_x$  (безразмерная скорость вращения относительно оси  $Ox$ ),  $\omega_y$  (безразмерная скорость вращения относительно оси  $Oy$ ) — для бокового движения;  $\delta$  соответствует углу отклонения элементов механизации [21]. Безразмерные циркуляции свободных вихрей определяли путем суммирования (с учетом направления вращения) свободных вихрей и сходящихся с крыла присоединенных вихрей.

В расчетах вихревых следов за разными самолетами число свободных вихревых нитей находилось в пределах от 60 до 90. Для определения интенсивности вихрей при заданном режиме полета коэффициент подъемной силы определяли из условия равенства силы тяжести подъемной силе:

$$c_y = \frac{2mg}{\rho S V_\infty^2}. \quad (7.2)$$

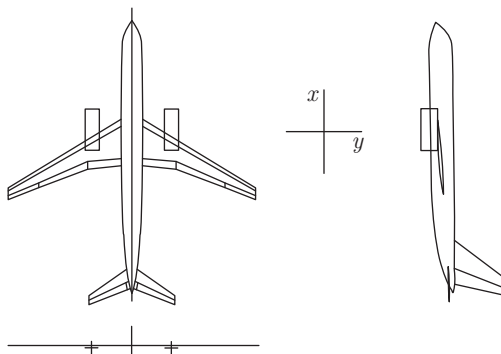


Рис. 7.4. Пластиночная схематизация самолета Ту-204

Поскольку при больших углах отклонения закрылка правомерность расчетов в рамках линейной теории не очевидна, было выполнено сравнение результатов расчета и летного эксперимента [9] для самолета Ту-204 при полете вдали от земли (высота  $H = 6000$  м, число Маха  $M = 0,35$ ). На рис. 7.4 представлены две проекции пластиночной схематизации этого самолета. Его натурные размеры: размах крыла  $l = 40,88$  м; средняя аэродинамическая хорда  $b = 4,11$  м; площадь крыла с подфюзеляжной частью  $S = 168,63$  м<sup>2</sup>; угол стреловидности  $\chi = 28^\circ$  и удлинение  $\lambda = 10$ . Крыло самолета снабжено предкрылком, расположенным вдоль всей его передней кромки, и двухзвенным закрылком, разделенным мотогондолой на две секции. На взлетно-посадочных режимах предкрылок отклоняется на угол  $27^\circ$ , закрылки на угол  $18^\circ$  (взлет) и  $37^\circ$  (посадка) и выдвигается на 12% хорды.

Расчеты продольных и боковых аэродинамических характеристик и циркуляций вихрей в ближнем вихревом следе за самолетом проводили для трех конфигураций: крейсерской, взлетной и посадочной. Расчетное число Маха  $M_\infty = 0,3$ ; высота полета  $H = 6000$  м. Поскольку углы отклонения элементов механизации не очень малы, для вычисления коэффициента подъемной силы использовали соотношение

$$c_y = c_y^\alpha \sin \alpha \cos \alpha + c_y^{\delta_{\text{пр}}} \sin \delta_{\text{пр}} + c_y^{\delta_3} \sin \delta_3 \cos \delta_3, \quad (7.3)$$

где  $\delta_{\text{пр}}$  — угол отклонения предкрылка,  $\delta_3$  — угол отклонения закрылки.

На рис. 7.5 показаны в сравнении расчетные (штриховые линии) и экспериментальные данные, полученные в трубном (сплошные кривые) и летном (точки) экспериментах [23] для крейсерской (1), взлетной (2) и посадочной (3) конфигураций. Удовлетворительное соответствие данных расчета и экспериментов наблюдается в диапазоне углов атаки  $\alpha = 0-12^\circ$  для базовой конфигурации и  $\alpha = 0-20^\circ$  — с отклоненной механизацией, что, по-видимому, связано с задержкой наступления отрывных режимов. В летном эксперименте  $H = 6000$  м,  $M_\infty = 0,28-0,45$ . В трубном эксперименте  $Re = (1-4) \cdot 10^6$ ,  $M_\infty =$



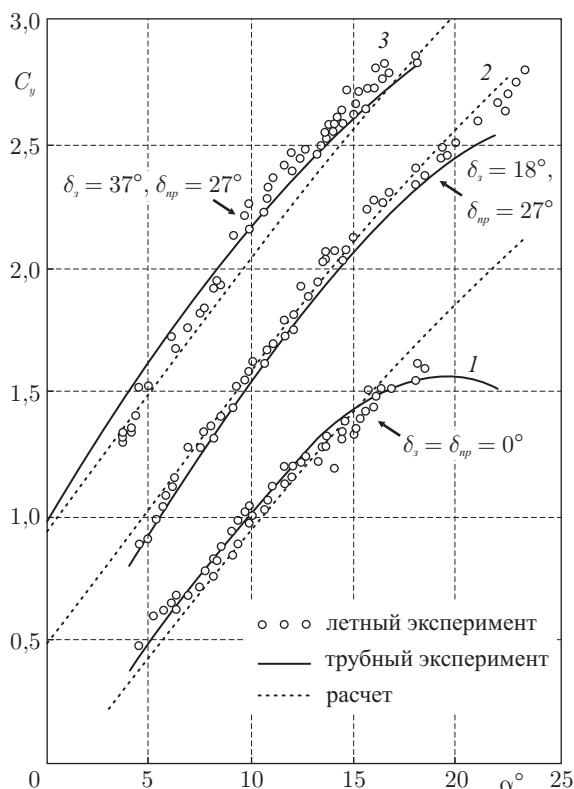


Рис. 7.5. Сравнение расчетных и экспериментальных зависимостей  $C_y(\alpha)$  для самолета Ту-204 при крейсерской (а), взлетной (б) и посадочной (в) конфигурациях

$= 0,15-0,4$  (Т-106) и  $Re = (5 - 6) \cdot 10^6$ ,  $M = 0,15$  (Т-101). Приведенные на рис. 7.5 данные трубных испытаний пересчитаны на условия летного эксперимента [9] по числам Маха и Рейнольдса. В проведенных расчетах отклоненный предкрылок и элементы многозвенного закрылка заменялись плоскими пластинами с соответствующими наклоном и хордой. При этом учитывалось продольное выдвижение предкрылка и закрылка, сопровождающееся увеличением площади крыла в плане.

Сравнение данных расчета с трубным и летным экспериментами дает основание полагать, что циркуляции, полученные в расчете, будут близки к реальным. Косвенным подтверждением этому служат результаты расчета [22] для самолета В-737. Размах крыла самолета  $l = 28,9$  м, площадь крыла  $S = 105$  м<sup>2</sup>, скорость полета  $V_\infty = 73$  м/с, масса  $m = 46000$  кг; крыло имеет трехзвенный выдвижной закрылок. В работе [22] показано, что оценки, полученные на основе анализа экспериментальных данных, дают значение циркуляции скорости

на посадочном режиме ( $H = 60$  м)  $\Gamma_o = 225 \text{ м}^2/\text{с}$ ; расчетные данные в зависимости от углов отклонения механизации находятся в диапазоне  $\Gamma_o = 195\text{--}267 \text{ м}^2/\text{с}$ . Это подтверждает правильность расчета циркуляций в ближнем вихревом следе.

Расчет обтекания схематизированной модели самолета заданной геометрии (крыло, горизонтальное и вертикальное оперение) в линейной постановке с помощью МДВ [7, 20] выполняется с учетом отклонения или выдвижения закрылков на взлетно-посадочных режимах. В итоге находят распределение циркуляции по размаху крыла с учетом вклада вихревой системы горизонтального оперения, а при наличии бокового ветра — вклада вихревой системы вертикального оперения. Специальные исследования показали, что полученные таким образом значения циркуляции мало зависят от высоты полета; заметный эффект влияния земли проявляется лишь при значениях высоты меньше полуразмаха крыла самолета.

Для определения положения дальнего вихревого следа самолета применяли метод дискретных вихрей [20, 22]. Расчет производился по известным формулам, полученным из закона Био–Савара:

$$\begin{aligned} u_{yi} &= \sum_{j \neq i} \Gamma_j \frac{z_i - z_j}{2\pi r_{ij}^2}, \\ u_{zi} &= - \sum_{j \neq i} \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{2\pi r_{ij}^2}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где  $u_{yi}$  и  $u_{zi}$  — компоненты скорости для  $i$ -го вихря,  $y_i, z_i, y_j, z_j$  — соответственно координаты  $i$ -го и  $j$ -го вихрей,  $r_{ij}^2 = (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$ ,  $\Gamma_j$  — циркуляция  $j$ -го вихря.

Рассмотрим модель вихревого жгута в виде области в форме окружности с равномерной завихренностью внутри нее. Это достигается распределением внутри области большого числа вихрей с одинаковой циркуляцией. Рассчитаем индуцированную данным жгутом вихревую скорость  $u_{yz}$  на горизонтальной прямой, проходящей через центр жгута. В соответствии с зависимостями (7.4) можно получить вертикальную  $u_{yi}$  и горизонтальную  $u_{zi}$  компоненты скорости в точках, расположенных на этой прямой. В этом случае суммирование проводится по всем вихрям, соответственно  $y_i, z_i$ , — координаты точек прямой,  $r_{ij}^2$  — квадрат расстояния от  $i$ -ой точки до  $j$ -го вихря. В результате получим полную скорость  $u_i$  в  $i$ -ой точке прямой:

$$u_i = \sqrt{u_{yi}^2 + u_{zi}^2}. \quad (7.5)$$

Выражение (7.5) определяет модуль индуцированной скорости. Хотя в данном случае горизонтальная составляющая скорости близка к нулю, использование выражения (7.5) оправдано, поскольку при расчете реальных полетов это условие не всегда выполняется. Полученный в результате расчета график представлен на рис. 7.6. Отметим, что

максимум модуля скорости наблюдается на границах области завихренности, а минимум — в ее центре, т.е. по графику скорости можно определить положение и размеры вихревого жгута.

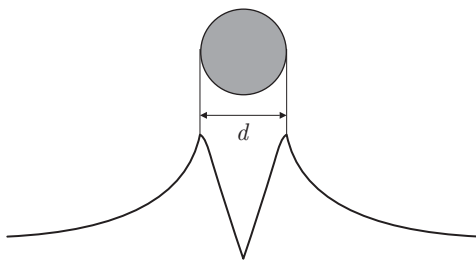


Рис. 7.6. Распределение модуля скорости в вихревом жгуте и вне его

Рассмотрим теперь вихревую схему ближнего следа схематизированной модели самолета в линейном приближении. Воспользуемся при этом заранее вычисленной базой данных, которая содержит значения безразмерных производных циркуляций вихрей и их координаты. Для различных типов самолетов общее число вихрей в базе данных может составлять от 60 до 100. Циркуляции вихрей вычисляются в зависимости от условий полета. В данном случае будет рассмотрен ближний след самолета Боинг-727, находящегося на высоте 150 м (для исключения влияния земли), при скорости полета 72 м/с, отклонении закрылков на  $25^\circ$  и угле атаки  $8,1^\circ$ . Вихревая схема ближнего следа показана на верхней части рис. 7.7, а. В дальнейшем происходит сворачивание следа в два жгута — на правой половине самолета (все величины — с индексом 1) и левой (индекс 2). Вихри, образующиеся на вертикальном оперении, отметим индексом 0.

Для определения индуцированной скорости необходимо знать положение двух центров вихревой системы, координаты которых вычисляли как отношение суммы произведений на соответствующие координаты циркуляций каждого из вихрей, входящих в жгут, к сумме этих циркуляций. Вихри, образующиеся при наличии бокового ветра на вертикальном оперении, в одинаковой степени могут быть отнесены к обоим жгутам, поэтому при расчете координат каждого из центров учитывалась поправка, равная половине вклада этих вихрей. Таким образом получаем следующие соотношения для правого жгута:

$$y_{1c} = \frac{\sum_i \Gamma_{li} y_{li}}{\sum_i \Gamma_{li}} + 0,5 \frac{\sum_i \Gamma_{0i} y_{0i}}{\sum_i \Gamma_{0i}}; \quad (7.6)$$

$$z_{1c} = \frac{\sum_i \Gamma_{li} z_{li}}{\sum_i \Gamma_{li}} + 0,5 \frac{\sum_i \Gamma_{0i} z_{0i}}{\sum_i \Gamma_{0i}}$$

и аналогичные зависимости для левого жгута. Для выполнения условия непротекания на поверхности земли в расчет включается система отраженных вихрей. Эти вихри расположены симметрично основным относительно поверхности земли и имеют противоположные знаки.

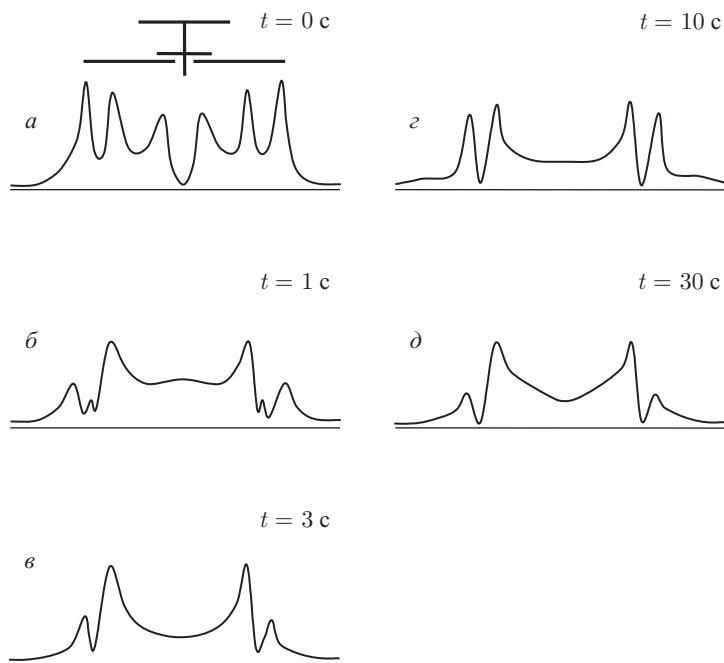


Рис. 7.7. Схема ближнего вихревого следа самолета Боинг 727 и профиля модуля скорости в начальный момент времени (а), при  $t = 1$  с (б),  $t = 3$  с (в),  $t = 10$  с (г) и  $t = 30$  с (д)

Индукционная скорость, график которой — на рис. 7.7, а, получена по соотношениям (7.4) и (7.5) аналогично предыдущему случаю. Видим, что скорость на графике имеет несколько максимумов и минимумов; это объясняется наличием вихревого следа не только за крылом, но и за отклоненными закрылками, а также тем, что вихревой след в начале расчета ( $t = 0$ ) не свернут в жгуты.

Проследим за дальнейшим поведением следа. Картина изменяется уже через 1 с (рис. 7.7, б). На графике скорости отчетливо наблюдаются четыре максимума (по два справа и слева) и два небольших промежуточных максимума, что обусловлено отклонением закрылков

и неполным сворачиванием следа. Необходимо отметить, что все вихри имеют различную циркуляцию, причем в данном случае восемь вихрей, расположенных сверху справа и симметрично им слева, обладают наибольшей циркуляцией и во многом определяют поведение вихревой системы в целом.

Через 3 с после начала сворачивания промежуточные максимумы почти исчезают (рис. 7.7, в), а к десятой секунде развития вихревого следа можно говорить о его полной сворачиваемости (рис. 7.7, г). В дальнейшем на протяжении всего расчета не наблюдается существенного качественного изменения распределения скорости, индуцированной вихревым следом самолета. На рис. 7.7, д показан вихревой след самолета и распределение скорости на тридцатой секунде расчета.

### 7.3. Приближенный расчет дальнего вихревого следа самолета

Образовавшийся при полете вихревой след неустойчив, он сворачивается в два вихревых жгута противоположного вращения. Данная задача не может быть решена в рамках линейной теории. Для ее решения используем приближенный прием [8, 84], который состоит в том, что сходящая с самолета вихревая пелена полагается двумерной, т. е. неизменной вдоль продольной координаты  $-\infty < x < \infty$  (см. гл. 3). Тогда ее сворачивание в два вихревых жгута может быть рассчитано в рамках двумерной нестационарной задачи. В итоге получаем развитие во времени вихревых жгутов дальнего вихревого следа. Кроме того, определяем параметры этих вихревых жгутов: их форму, распределение скоростей  $u_y$  и  $u_z$  внутри них.

Таким образом, установившийся процесс сворачивания трехмерной вихревой пелены за самолетом полагается эквивалентным установившемуся процессу сворачивания двумерной вихревой пелены во времени  $t$ , причем  $t = x/V_\infty$  [84]. Для определения индуцированной скорости вихревого жгута на больших по отношению к его диаметру расстояниях необходимо определить положение двух центров вихревой системы (1.1), (2.1), координаты которых вычисляются как отношение суммы произведений на соответствующие координаты циркуляций каждой из вихревых нитей, образующих жгут, к сумме этих циркуляций (аналогично для второго жгута):

$$y_{1c} = \frac{\sum_i \Gamma_{li} y_{li}}{\sum_i \Gamma_{li}}, \quad z_{1c} = \frac{\sum_i \Gamma_{li} z_{li}}{\sum_i \Gamma_{li}}. \quad (7.7)$$

Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования свидетельствуют о том, что циркуляции вихревых жгутов несколько уменьшаются со временем. Эта так называемая потеря циркуляции,

обусловленная, как указано во введении, диффузией завихренности из двух вихревых жгутов противоположного вращения. Для определения зависимости циркуляции от времени можно воспользоваться эмпирическими формулами [72, 73, 80]

$$\frac{\Gamma_1(t)}{\Gamma_0} = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r_i^2}{4\nu_{i1}t}\right) \right] \exp\left(-c\frac{qt}{b_1}\right), \quad (7.8)$$

где  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_0$  — соответственно текущие и начальные значения циркуляции первичных вихрей;  $t$  — время;  $q$  — среднеквадратичное значение пульсаций скорости в атмосфере;  $b_1(t)$  — расстояние между центрами первичных вихрей 1 и 2 вдоль оси  $z$ ;  $r_i = \left[(z - z_i)^2 + (y - y_i)^2\right]^{1/2}$  — модуль радиуса-вектора точки с координатами  $z, y$  относительно вихря с координатами  $z_i, y_i$ ;  $\nu_{i1}$  — коэффициент турбулентной вязкости;  $C = 0,41$  — эмпирический множитель [80].

Первый множитель в выражении (7.8) учитывает уменьшение циркуляции при низкой турбулентности атмосферы, второй множитель — дополнительную потерю циркуляции, вызванную повышенной турбулентностью атмосферы. Среднее значение  $\nu_i$  для вихревого жгута, согласно данным расчета и обработки натурного эксперимента [10], составляет  $\nu_i \approx 0,25$  м<sup>2</sup>/с. Индекс  $i$  соответствует номеру вихревых нитей, образующих вихревой жгут.

Первый множитель в формуле (7.8) может быть использован и для случая полета самолета вблизи земли, однако по мере приближения к земле первичные жгуты раздвигаются, т. е. расстояние между ними  $b_1$  вдоль оси  $z$  увеличивается, и это следует учитывать при расчете.

#### 7.4. Генерация поперечного течения вихревыми жгутами, расчет турбулентного пограничного слоя

При полете самолета на малых высотах  $H < 100$  м вихревые жгуты индуцируют поперечное течение около аэродрома вдоль размаха крыла (конфузорное и затем диффузорное), которое используется далее для расчета параметров пограничного слоя и его отрыва как при отсутствии, так и при наличии слабого бокового ветра. Учитывая шероховатость поверхности взлетно-посадочной полосы и большую протяженность области развития пограничного слоя, достигающего 10–20 м, этот слой можно с большим основанием считать полностью турбулентным.

В отсутствие бокового ветра распределение индуцированной первичными вихрями скорости  $u_z(z)$  вблизи поверхности аэродрома симметрично относительно плоскости. При наличии бокового ветра картина становится асимметричной и расчет пограничного слоя выполняется по обе стороны от критической точки, в которой  $u_z = 0$ . В первом приближении при расчете полагают  $u_{z\delta}(z) = u_z(z)$ . Скорость ветра счи-

тают постоянной по вертикальной координате, и его влияние сводится к сносу вихревой системы в направлении ветра.

Для определения циркуляции вторичных вихрей и их положения требуется выполнить расчет параметров пограничного слоя в сечении отрыва  $z_{\text{отр}}$ . Для этого можно воспользоваться одним из интегральных методов, например [62], основанным на полиномиальном представлении профиля касательных напряжений и использовании формулы Прандтля  $\tau = \rho l_o^2 (\partial u / \partial y)^2$ , где  $l_o$  — длина пути смешения. Процедура расчета заключается в численном интегрировании интегрального соотношения количества движения и двух замыкающих интерполяционных выражений для коэффициента поверхностного трения  $c_f = 2\tau_w / \rho u_{z\delta}^2$  и формпараметра  $H = \delta_1 / \delta_2$  пограничного слоя;  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — соответственно толщина вытеснения и толщина потери импульса;  $u$  — скорость в пограничном слое;  $\tau_w$  — касательное напряжение поверхностного трения. Входящая в приведенную систему уравнений зависимость  $u_z(z)$  может быть рассчитана по известным параметрам вихревых жгутов в дальнем вихревом следе самолета для заданной высоты полета.

Расчет сводится к численному интегрированию интегрального соотношения количества движения и двух замыкающих интерполяционных выражений для коэффициента поверхностного трения  $c_f = 2\tau_w / \rho u_{z\delta}^2$  и формпараметра  $H = \delta_1 / \delta_2$  пограничного слоя ( $\tau_w$  — касательное напряжение на стенке).

Итак, исходные формулы:

$$\frac{dR_2}{dz} = \frac{1}{2} \text{Re} \bar{u}_{z\delta} c_f - \frac{\bar{u}'_{z\delta}}{\bar{u}_{z\delta}} (H + 1) R_2; \quad (7.9)$$

$$c_f = c_{fo} [1 + \lambda_1 f + \lambda_2 (e^{\lambda_3 f} - 1)]; \quad (7.10)$$

$$H = H_o (1 - \lambda_4 f) - 0,019 f e^f \xi. \quad (7.11)$$

Здесь

$$\lambda_1 = 0,2814 - 0,036\xi + 3,6\xi^{-4,5};$$

$$\lambda_2 = 0,1185\xi - 0,262;$$

$$\lambda_3 = 0,585 - 0,125\xi + 20,4\xi^{-1,75};$$

$$\lambda_4 = 0,28 - 0,034\xi + (0,1\xi)^9;$$

$$c_{fo} = 2ce^{-0,391\xi};$$

$$H_o = 1,251 - 0,0131\xi + 5,35\xi^{-2,85};$$

$$c = 0,001[6,55 - 0,0685(\xi - 4,4) + 0,256(\xi - 4,4)^2];$$

$$\text{Re} = \frac{V_\infty l}{\nu}; \quad R_2 = \frac{u_{z\delta} \delta_2}{\nu}; \quad c_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_{z\delta}^2};$$

$$\xi = \lg R_2; \quad f = \frac{e^{2,694\xi} \bar{u}'_{z\delta}}{c \text{Re} \bar{u}_{z\delta}^2}; \quad \bar{u}'_{z\delta} = \frac{d\bar{u}_{z\delta}}{dz};$$

$l$  — полуразмах крыла;  $V_\infty$  — скорость полета;  $\bar{u}_{z\delta} = u_{z\delta}/V_\infty$ ;  $\bar{z} = z/l$ ;  $\delta_1 = \int_0^\delta (1 - u/u_{z\delta}) dy$  и  $\delta_2 = \int_0^\delta (u/u_{z\delta})(1 - u/u_{z\delta}) dy$  — соответственно толщина вытеснения и толщина потери импульса;  $u$  — скорость в пограничном слое.

Для определения толщин пограничного слоя  $\delta$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  в отрывном сечении ( $c_f = 0$ ) можно воспользоваться приближенными формулами

$$\frac{u_z}{u_{z\delta}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{H-1}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{H-1}{H(H+1)}; \quad \frac{\delta_1}{\delta} = \frac{H-1}{H+1}. \quad (7.12)$$

Скорость сноса центра завихренности оторвавшегося пограничного слоя на расстоянии  $y = \delta_1$  от стенки:

$$\frac{u_z(\delta_1)}{u_{z\delta}} = \left(\frac{H-1}{H+1}\right)^{\frac{H-1}{2}}.$$

Полагая, что в сечении отрыва  $H \approx 2$ , получаем

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{1}{6}; \quad \frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1}{3}; \quad \frac{u_z(\delta_1)}{u_{z\delta}} = 0,577.$$

Завихренность оторвавшегося пограничного слоя определяется из известного выражения

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_0^\delta \frac{\partial u_z}{\partial y} u_z dy = \frac{1}{2} u_{z\delta}^2,$$

откуда циркуляция

$$\Gamma_i = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_i + \Delta_i} u_{z\delta}^2 dt. \quad (7.13)$$

Продольная скорость сноса завихренности равна местной скорости в пограничном слое в отрывном течении  $y = \delta_1$ , и коэффициент турбулентной вязкости

$$u_{z\delta(y=\delta_1)} = 0,577(u_{z\delta})_{\text{отр}}; \quad \nu_i = l_o^2 \frac{\partial u}{\partial y} = k(\delta_2 u_{z\delta}); \quad k = 1,24 \cdot 10^{-3}. \quad (7.14)$$

Примем, что аналогичное (7.7) по структуре выражение может быть представлено и для отрывного сечения турбулентного пограничного слоя с той лишь разницей, что в него войдет значение характерной турбулентной вязкости в точке схода завихренности (7.14). Тогда вместо формулы (7.7) получим

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2} (u_{z\delta}^2)_{\text{отр}} K \Delta t; \quad K(t) = 1 - \exp \left[ -\frac{y^2 + (z - z_{\text{отр}})}{4(\nu_i)_{\text{нст}} t} \right]. \quad (7.15)$$



При этом потеря циркуляции вторичных вихрей обусловлена вязкими эффектами, сопровождающими образование этих вихрей.

### 7.5. Расчет дальнего вихревого следа с учетом влияния пограничного слоя на поверхности аэродрома для самолета В-727. Сравнение расчета с летным экспериментом

Для решения поставленной задачи в программу расчета была включена процедура, численно реализующая метод, приведенный в разд. 7.4. На каждом шаге интегрирования определялось положение центров вихревых жгутов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  самолета, а затем вычислялось распределение скорости  $u_{z\delta}$  вдоль поверхности земли (вдоль оси  $Oz$  на рис. 7.8). При этом полагалось, что  $u_{z\delta} = u_z$  ( $y = 0$ ).

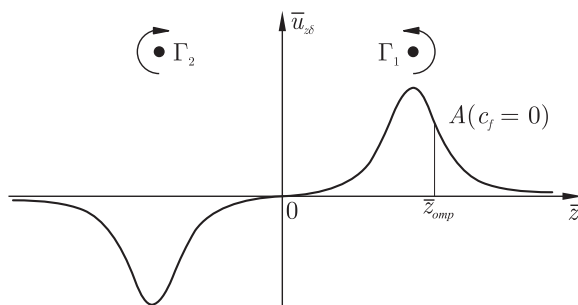


Рис. 7.8. Распределение скорости  $u_{z\delta}(z)$

Для обеспечения условия непротекания, как уже отмечалось, в систему добавляли фиктивные отраженные вихри как для основных вихрей самолета  $\Gamma'_1$ ,  $\Gamma'_2$ , так и для дополнительных вихрей  $\Gamma'_3$ ,  $\Gamma'_4$ . Полная расчетная схема вихревой системы приведена на рис. 7.9. Число основных вихрей при расчете составляло 62, число вторичных к концу расчета достигало 120.

В соответствии с изложенной методикой был выполнен расчет дальнего вихревого следа самолета В-727 с учетом влияния пограничного слоя земли при высоте полета  $H = 40$  м, 60 м и 80 м. Один вариант расчета на персональном компьютере ближнего и дальнего вихревых следов самолета в течение первых 120 с полета при фиксированных высоте, скорости бокового ветра и степени турбулентности атмосферы занимает около одной минуты. Аналогичные расчеты на основе моделирования крупных вихрей (уравнения Навье–Стокса и подсеточная модель турбулентности) для заданных геометрии вихревых жгутов и циркуляции требуют использования суперкомпьютера [9]. С применением для этой цели кластера высокопроизводительных ПК время расчета превышает 1000 ч [33].

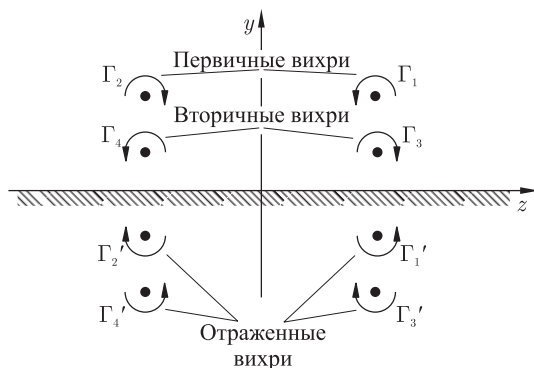


Рис. 7.9. Расчетная схема вихревой системы: первичные, вторичные и отраженные вихри

На рис. 7.10 представлены результаты расчета дальнего вихревого следа самолета В-727 при полете с посадочной скоростью 79 м/с на высоте 40 м в функции времени  $t$  при наличии (а) и отсутствии (б) слабого бокового ветра со скоростью  $V_w = 1$  м/с (угол отклонения закрылков  $\delta_3 = 25^\circ$ , угол атаки  $\alpha = 5,6^\circ$ ).

Здесь приведены зависимости от времени высоты первичных вихрей  $y(t)$ , а также их координат  $z(t)$  в течение 120 с полета. В верхней части показано положение первичных вихрей (вид сзади) в разные моменты времени, а также вторичных вихрей, под действием которых происходит деформация первичных вихрей. При этом высота подскока на 80-й секунде достигает 20 м. Тонкими линиями на графиках  $y(t)$  и  $z(t)$  показаны изменения этих координат для невязкого газа, когда вторичные вихри отсутствуют. Аналогичные расчеты были выполнены также для высот полета 60 м и 80 м, где высота подскока составляла примерно 30 м на 95-й и 120-й секундах.

Представляют интерес также аналогичные расчеты для того же самолета при высокой степени турбулентности атмосферы  $\varepsilon = q/V_\infty = 1,5\%$ . На рис. 7.11 приведены расчетные результаты для высоты  $H = 40$  м, из которых следует, что повышенная турбулентность приводит к существенному уменьшению высоты подскока и поперечного расстояния между вихревыми жгутами.

Весьма интересно сопоставление данных расчета с результатами летного эксперимента по измерению параметров вихревого следа на режимах взлета и посадки. Воспользуемся данными летного эксперимента, проводившегося в 1995 г. в аэропорту Мемфис (США) с самолетом В-727 [67]. К сожалению, для малой высоты полета удалось отобрать лишь один эксперимент с удовлетворительными результатами измерений. Приведем параметры этого полета, в соответствии с которыми был проведен расчет по изложенной в настоящей работе методике: масса

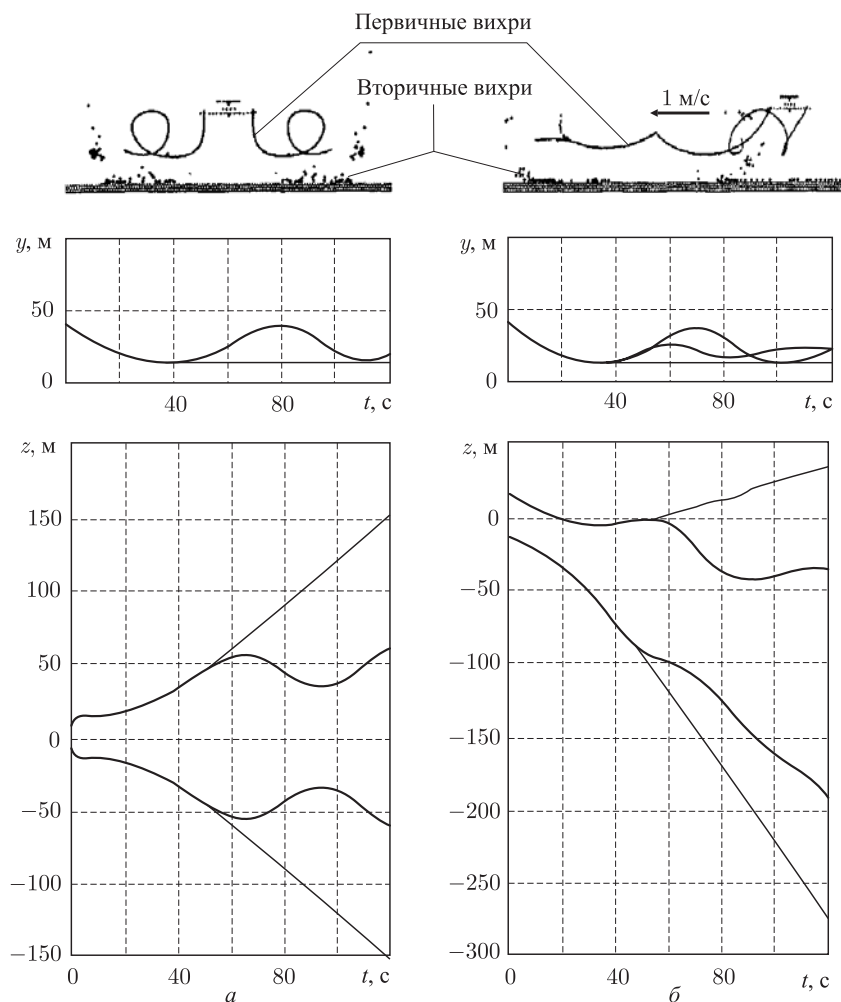


Рис. 7.10. Результаты расчета дальнего вихревого следа самолета В-727 на режиме посадки при  $H = 40$  м и отсутствии (а) и наличии (б) бокового ветра (скорость ветра 1 м/с)

63950 кг, высота полета 34,8 м, скорость полета 79,2 м/с, скорость ветра 1,3 м/с, угол отклонения закрылков  $25^\circ$ , угол атаки  $5,6^\circ$ .

Результаты расчета в сравнении с данными эксперимента приведены на рис. 7.12. Следует отметить удовлетворительное совпадение эксперимента и расчета. На основе такого подхода были рассчитаны вихревые следы при малых высотах полета ( $H = 20\text{--}80$  м) для самолетов В-727, В-747, В-777, А-300, а также для отечественных магистральных самолетов Ту-204 и Ил-96.

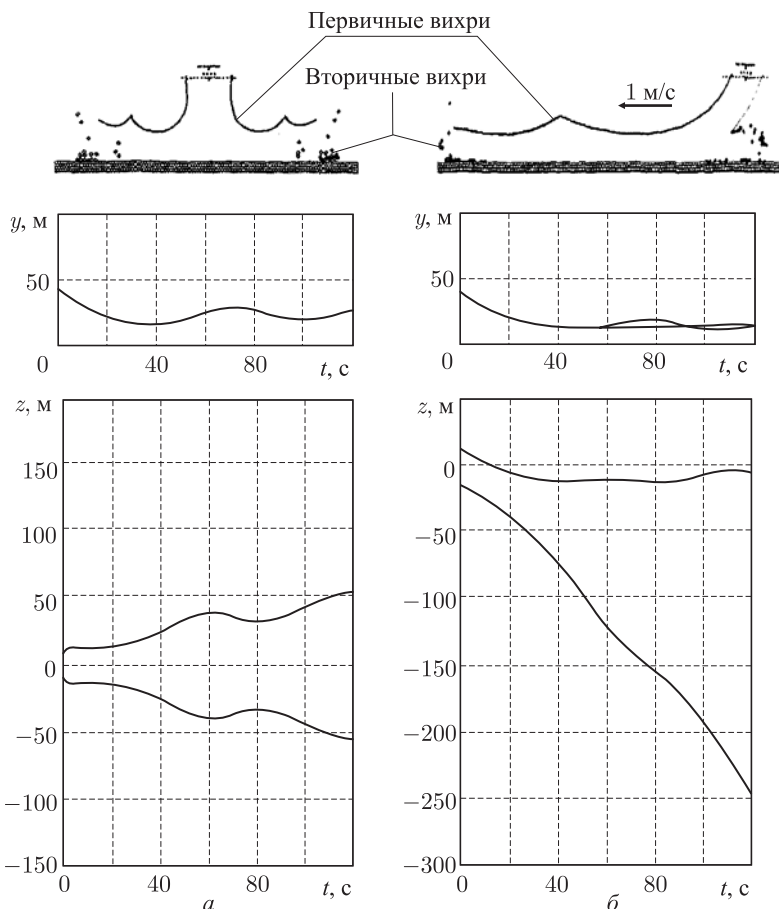


Рис. 7.11. Результаты расчета дальнего вихревого следа самолета В-727 на режиме посадки при  $H = 40$  м и отсутствии (а) и наличии (б) бокового ветра (скорость ветра 1 м/с) и повышенной турбулентности атмосферы  $\varepsilon = 1,5\%$

## 7.6. Расчет дальнего вихревого следа отечественных магистральных самолетов Ту-204 и Ил-96 при посадке

Расчет вихревой системы самолетов Ту-204 и Ил-96 на режимах посадки имел целью проиллюстрировать влияние высоты полета ( $H = 20\text{--}80$  м) и наличия бокового ветра на характер деформации осей вихревых жгутов (первичных вихрей).

По известным значениям массы самолета и рассчитанной зависимости  $c_y(\alpha) = c_y^\alpha \alpha$  при заданных углах отклонения предкрылка и закрылка определяли начальное значение циркуляции вихревого жгута  $\Gamma_0$ ,

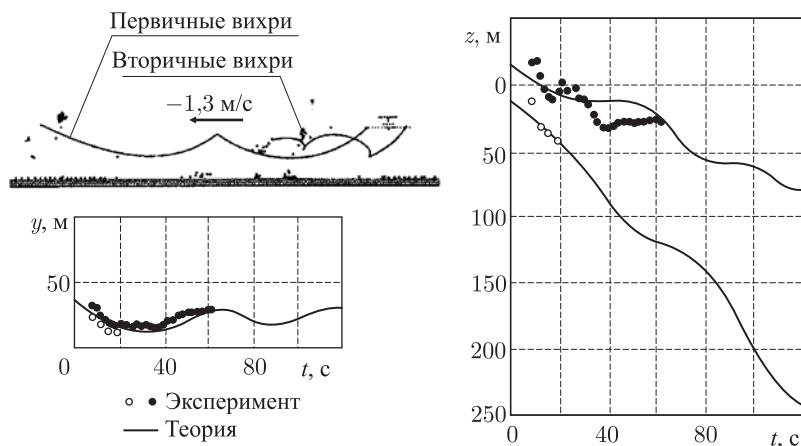


Рис. 7.12. Сравнение данных расчета и летного эксперимента для самолета В-727 ( $H = 34,8$  м,  $V_w = -1,3$  м/с)

угол атаки крыла  $\alpha$  и посадочную скорость  $V_\infty$ . Для самолета Ту-204: масса 100 т, угол атаки крыла  $8^\circ$ , циркуляция  $\Gamma_0 = 282 \text{ м}^2/\text{с}$  и посадочная скорость  $V_\infty = 70 \text{ м/с}$ ; для самолета Ил-96: масса 200 т, угол атаки крыла  $\alpha = 8^\circ$ , циркуляция  $\Gamma_0 = 422 \text{ м}^2/\text{с}$ , посадочная скорость  $V_\infty = 85 \text{ м/с}$ .

На рис. 7.13 представлены соответствующие зависимости координат осей вихревых жгутов  $y(t)$  и  $z(t)$  Ту-204 при отсутствии бокового ветра (а) и его наличии (б) при  $H = 60$  м для первых 120 с полета. В верхней части показана траектория вихревого жгута (вид сзади). На рис. 7.14 приведены аналогичные зависимости для самолета Ил-96.

Полученные результаты дают качественное и, в известной мере, количественное представление о развитии вихревого следа за современными магистральными самолетами Ту-204 и Ил-96 на посадочных режимах [15].

## 7.7. Численная визуализация дальнего вихревого следа самолета вблизи земли

Большой практический интерес представляет визуализация дальнего вихревого следа самолета. Это позволило бы пилотам на режимах взлета и посадки получать представление о конфигурации первичных вихревых жгутов, их подскоке и боковом сносе при наличии ветра. Такого рода визуализация может быть реализована введением в ближний вихревой след мелких твердых частиц. Соответственно при расчете по разработанному ранее алгоритму в ближний вихревой след вводят твердые частицы и прослеживают их движение в процессе

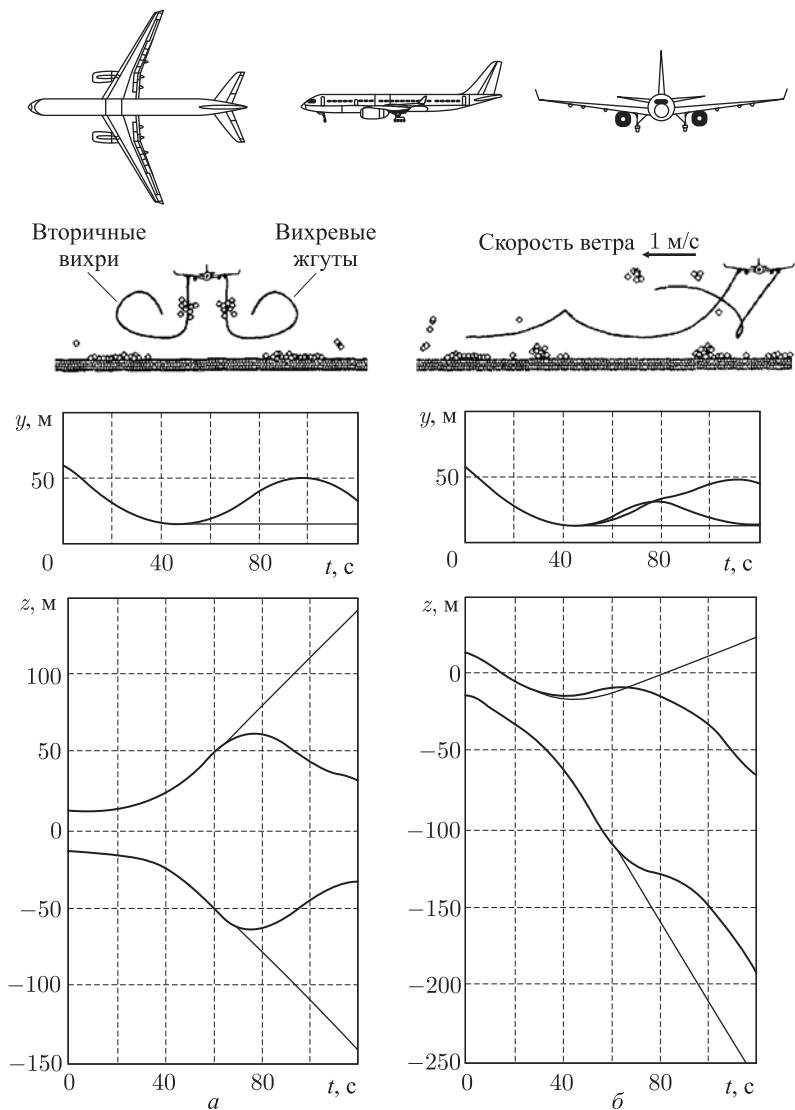


Рис. 7.13. Расчет дальнего вихревого следа самолета Ту-204 при посадке ( $H = 60$  м,  $V_w = 0$  и  $1$  м/с)

сворачивания ближнего следа в два вихревых жгута дальнего вихревого следа.

Предполагается, что частицы не взаимодействуют одна с другой и не оказывают влияния на поток, параметры которого известны в каждый момент времени, а уравнение движения частиц

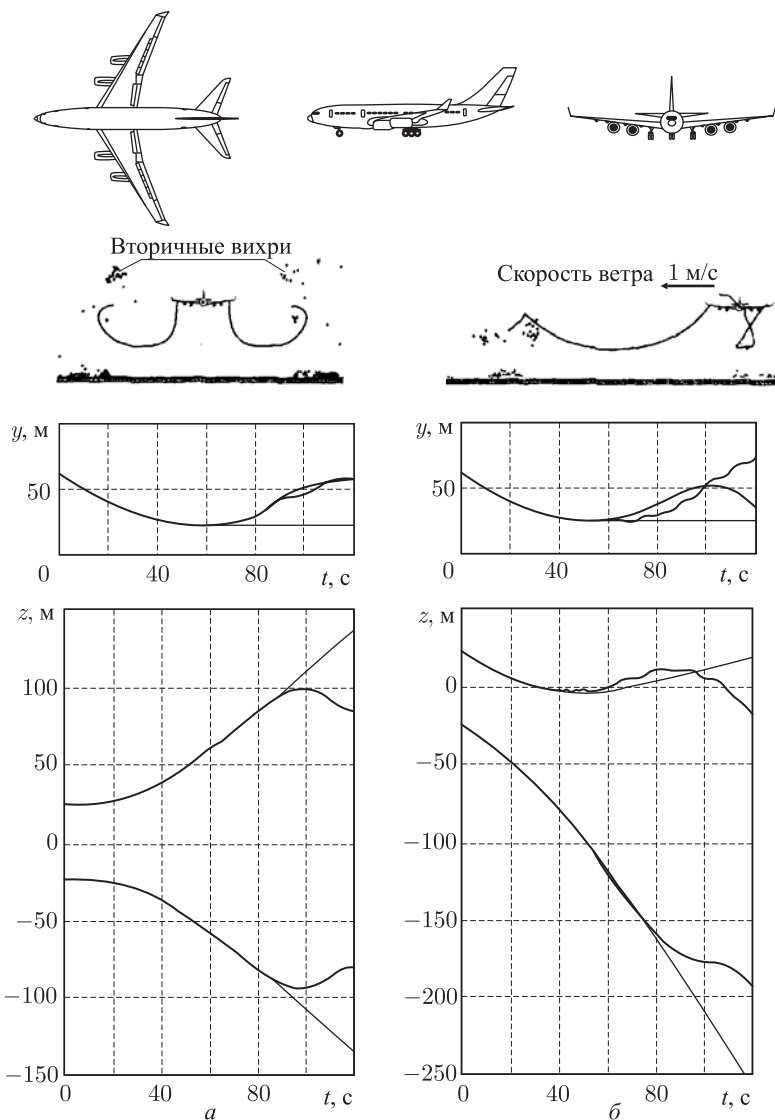


Рис. 7.14. Расчет дальнего вихревого следа самолета Ил-96 при посадке ( $H = 60$  м,  $V_w = 0$  и  $1$  м/с)

выводится с учетом действующих на них аэродинамического сопротивления и силы тяжести. Коэффициент сопротивления сферической частицы выражается простой одночленной зависимостью [58]  $c_R = a\text{Re}^{-n}$ . Здесь число Рейнольдса  $\text{Re} = \rho_1 u d / m_1$ , где

$u = \left[ (V_{1z} - V_{2z})^2 + (V_{1y} - V_{2y})^2 \right]^{1/2}$  — модуль вектора скорости, индексы 1 и 2 соответствуют скорости потока и скорости частиц,  $\rho_1$  и  $m_1$  — плотность и коэффициент вязкости воздуха,  $d$  — диаметр частиц, коэффициенты  $a$  и  $n$  — известные эмпирические функции числа Re. В рассматриваемой задаче плотность частиц существенно превышает плотность воздуха, т. е.  $\rho_2 \gg \rho_1$ .

Уравнения движения частиц в проекции на оси координат  $Oy$ ,  $Oz$  можно записать в виде

$$\frac{dV_{2y}}{dt} = \frac{3c_R\rho_1}{4d\rho_2} (V_{1y} - V_{2y}) \left[ (V_{1z} - V_{2z})^2 + (V_{1y} - V_{2y})^2 \right]^{1/2} - g,$$

$$\frac{dV_{2z}}{dt} = \frac{3c_R\rho_1}{4d\rho_2} (V_{1z} - V_{2z}) \left[ (V_{1z} - V_{2z})^2 + (V_{1y} - V_{2y})^2 \right]^{1/2}.$$

где  $g$  — ускорение свободного падения.

В начальный момент времени в программу расчета вводили координаты частиц заданного диаметра  $d$ , которые равномерно располагались вдоль задней кромки крыла, и задавали их скорости  $V_{2z}$  и  $V_{2y}$ , а затем прослеживая движение этих частиц в процессе сворачивания вихревого следа самолета в два вихревых жгута. В каждый момент времени определялись координаты центров масс облака твердых частиц, а также центры вихревых жгутов, которые вычислялись как отношение суммы произведений циркуляций  $\Gamma_i$  каждого из продольных вихрей внутри жгута на соответствующие координаты  $y_i$  и  $z_i$ , к сумме этих циркуляций  $\sum \Gamma_i$ . Число вихревых нитей с циркуляцией  $\Gamma_i$  за каждым полукрылом составляло от 60 до 90. При расчете нестационарного процесса их сворачивания два вихревых жгута в качестве временного шага принималась величина  $\Delta t_b = 0,2$  с. При расчете переноса твердых частиц принимался временной шаг  $\Delta t_c = 0,2$  с/(25–40), причем с уменьшением диаметра частиц этот шаг уменьшался.

Были выполнены расчеты по численной визуализации дальнего вихревого следа самолета Ту-204 для высот полета  $H = 20$ –80 м при отсутствии ( $V_w = 0$ ) и наличии ( $V_w = 1$  м/с) слабого бокового ветра для разных диаметров частиц ( $d = 10$ –50 мкм) и значений их плотности  $\rho_2$ . Время расчета одного варианта при заданных значениях  $H$ ,  $V_w$ ,  $\rho_2$  и  $d$  составляет 120–150 с на компьютере PIY-1700.

Сравнивались зависимости от времени координат  $y$  и  $z$  центров первичных вихревых жгутов и центров масс облака твердых частиц при  $H = 20$ –80 м,  $V_w = 0$  и 1 м/с и диаметре частиц  $d = 10$ –50 мкм (рис. 7.15). В верхней части рис. 7.15 показаны траектории центров первичных вихревых жгутов, вторичных вихрей и центров масс облака твердых частиц при  $t = 0$ –20 с (вид сзади).

Рассмотрим теперь влияние диаметра частиц  $d$  и их плотности  $\rho_2$  на возможность визуализации дальнего вихревого следа самолета для высоты полета  $H = 80$  м, скорости бокового ветра  $V_w = 0$  и 1 м/с и диаметров частиц  $d = 10$  мкм, 30 мкм и 50 мкм при  $\rho_2 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>



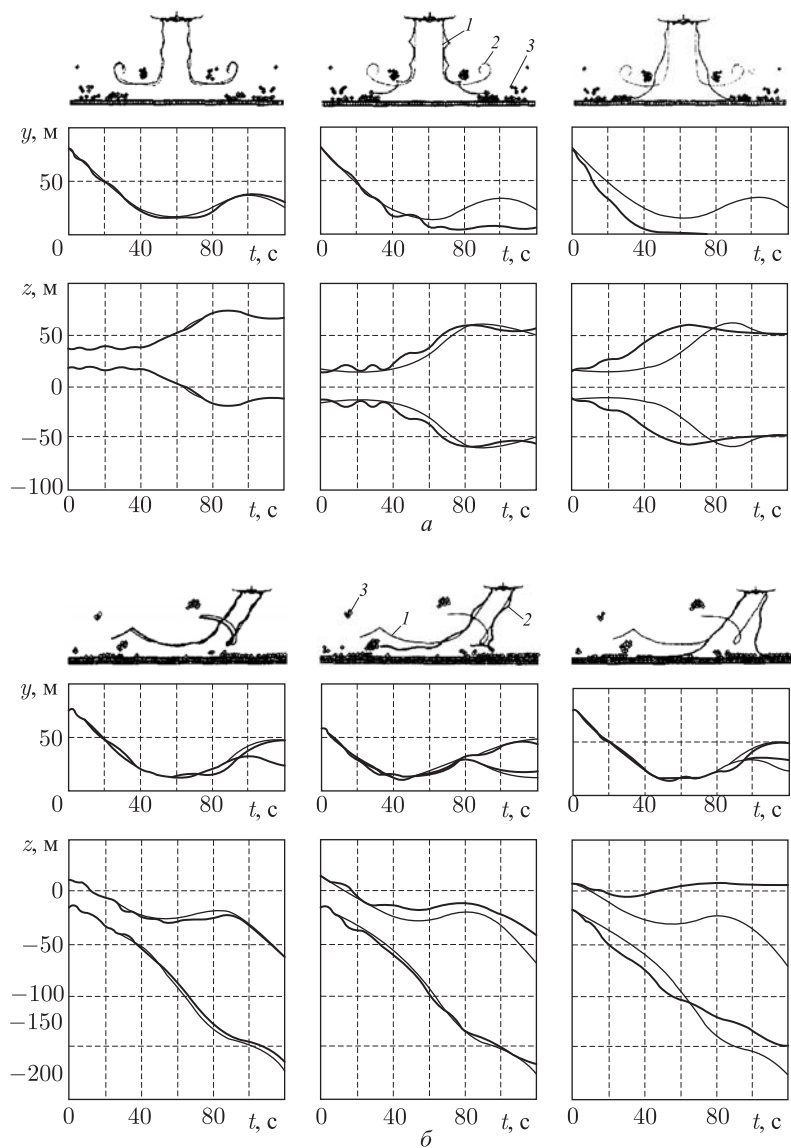


Рис. 7.15. Траектории центров вихревых жгутов и центров масс облака твердых частиц применительно к самолету Ту-204 ( $H = 80 \text{ м}$ ,  $V_w = 0$  и  $1 \text{ м/с}$ ,  $\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$ , диаметр частиц  $d = 10,3$  и  $50 \text{ мкм}$ ): 1 — центры вихревых жгутов, 2 — центры масс облака твердых частиц, 3 — вторичные вихри

(см. рис. 7.15, а, б). При  $d > 25$  мкм центр масс облака частиц заметно отклоняется от центра вихревых жгутов (б), что обусловлено влиянием силы тяжести. Аналогичные расчеты при  $d = 10$  мкм и  $\rho_2 = 1000\text{--}4500$  кг/м<sup>3</sup> (а) показали, что в этом случае влияние силы тяжести проявляется слабо.

Таким образом, для визуализации вихревого следа самолета целесообразно выбирать твердые частицы малого диаметра  $d \leq 10\text{--}15$  мкм. Этот вывод согласуется с полученной ранее оценкой [50], согласно которой для визуализации течения в вихре Лэмба при наличии силы тяжести могут быть использованы частицы диаметром  $d = 10\text{--}20$  мкм. При этом остается открытым вопрос о физико-химических свойствах частиц, которые обеспечивают визуализацию вихревого следа [39].

## 7.8. Выводы и перспективы

Представлен эффективный приближенный метод моделирования дальнего вихревого следа тяжелых самолетов на режимах взлета и посадки, основанный на сочетании метода дискретных вихрей и интегрального метода расчета турбулентного пограничного слоя. Важным достоинством предложенного метода моделирования является учет индивидуальных особенностей самолета, в частности, механизации крыла при расчете ближнего вихревого следа самолета и сворачивания этого следа в два вихревых жгута дальнего вихревого следа. Расчеты выполнены для ряда отечественных и зарубежных магистральных самолетов при различной высоте горизонтального полета, скорости бокового ветра, турбулентности атмосферы. Результаты расчета коэффициента подъемной силы, начальной циркуляции вихревых жгутов и их траекторий удовлетворительно согласуются с известными данными трубных и летных экспериментов.

В рамках метода дискретных вихрей можно, в частности, исследовать взаимодействие вихревого следа самолета на режимах взлета и посадки в случае, когда скорость ветра по вертикали не является постоянной, а изменяется в соответствии с теорией Монина–Обухова или с результатами эксперимента для приземного слоя атмосферы при устойчивой, нейтральной и неустойчивой стратификации [30, 57]. Для этого следует моделировать двумерное течение, неизменное вдоль оси  $Ox$  и направленное вдоль оси  $Oz$ .

Это течение при  $y > 0$  может быть представлено системой нескольких (4–5) параллельных цепочек вихрей, расстояние между которыми  $\Delta y$  выбирается так, чтобы профиль скорости  $u_z(y)$  совпадал с профилем скорости ветра в приземном слое атмосферы ( $-\infty < z < \infty$ ). Такой подход был использован при моделировании периодического возбуждения плоского турбулентного слоя смешения [76], а также взаимодействия вихревого следа самолета с поперечным ветровым потоком, причем вихревой след задавали в виде двух вихревых нитей противоположного вращения [33, 89]. При указанном

моделировании для выполнения условия непротекания на поверхности земли ( $y = 0$ ) при  $y < 0$  следует задать систему зеркально отраженных вихревых цепочек с циркуляцией противоположного знака.

Наличие бокового сносящего потока с постоянной по высоте скоростью, как указано выше (см., например, рис. 7.10 — рис. 7.15), приводит к асимметрии течения: оба вихревых жгута следа смещаются в горизонтальном (вдоль оси  $z$ ) и вертикальном (вдоль оси  $y$ ) направлениях.

# АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САМОЛЕТОВ В ВИХРЕВОМ СЛЕДЕ

## 8.1. Постановка задачи

Рассматривается движение летательного аппарата заданной полетной конфигурации в возмущенном воздушном потоке  $W$  с дозвуковой скоростью  $V_k$  на произвольной высоте  $H$  (рис. 8.1).

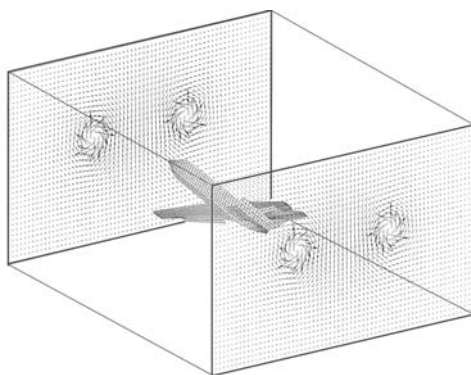


Рис. 8.1. К постановке задачи

Вводятся следующие системы координат: связанная с самолетом  $Oxyz$ , скоростная  $Ox_a y_a z_a$  и земная  $Ox_g y_g z_g$ .

Среда, в которой движется ЛА, рассматривается как идеальная несжимаемая жидкость, поверхности ЛА предполагаются непроницаемыми. Течение является потенциальным всюду вне ЛА и его вихревого следа. Вихревой след представляет собой тонкую вихревую пелену, т. е. поверхность, на которой имеется разрыв касательной составляющей поля скоростей. Линии отрыва потока заданы на острых кромках поверхностей ЛА.

Задача сводится к отысканию потенциального поля скоростей  $\vec{W}(M, t) = \text{grad } U(M, t)$  и поля давлений  $p(M, t)$ , определенных всюду вне поверхности крыла  $\sigma_1$  и поверхности  $\sigma_2$ , моделирующей вихревой след. Поверхность вихревого следа  $\sigma_2$  является подвижной, закон ее движения заранее неизвестен. Здесь  $M(x, y, z)$  — точки пространства,  $t$  — время. При расчете потенциальных течений идеальной несжимае-

мой жидкости условие несжимаемости равносильно требованию гармоничности потенциала поля скоростей

$$\Delta U(Mt) = 0 \quad (8.1)$$

во всех точках пространства вне поверхностей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , а для удовлетворения уравнения импульса достаточно потребовать выполнения условия Коши–Лагранжа

$$\frac{P}{\rho} = \frac{P_\infty}{\rho} - \frac{W_\infty^2}{2} - \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (8.2)$$

где  $P_\infty$  — давление жидкости на бесконечности,  $\rho$  — плотность жидкости.

На поверхностях ЛА выполняется условие непротекания

$$\frac{\partial U^\pm}{\partial \bar{n}} = 0, \quad M \in \sigma_1, \quad (8.3)$$

где  $\bar{n}$  — орт нормали к поверхности  $\sigma_1$  в точке  $M$ . На вихревой пелене в каждый момент времени  $t$  выполняется условие отсутствия перепада давления

$$p^+(M, t) = p^-(M, t). \quad (8.4)$$

На бесконечности выполняется условие затухания возмущенных скоростей

$$|\nabla U(M, t) - \vec{W}_\infty| \rightarrow 0, \quad (8.5)$$

Таким образом, постановка данной задачи отличается от постановки аналогичных задач в этой книге тем, что движение самолета рассматривается в возмущенном воздушном потоке, причем эти возмущения могут быть созданы как другим самолетом, так и различными объектами, в том числе рельефом местности.

## 8.2. Метод решения

Поставленная задача решается методом дискретных вихрей в нелинейной нестационарной постановке, для этого реальный летательный аппарат заменяется схематизированной моделью. Для решения данной задачи была использована пластинчатая схематизация самолета. В ряде работ, например [8, 44, 47, 49], показано, что такая схематизация достаточна для получения приемлемых характеристик. На пластинах располагались замкнутые вихревые рамки. Схематизированный самолет помещался в заданную область вихревого следа между двумя сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , в которых заранее были рассчитаны возмущенные скорости (рис. 8.2). При этом сечения  $S_1$  и  $S_2$  располагали таким образом, чтобы исследуемый самолет и его след находились внутри некоторого условного параллелепипеда, образованного этими сечениями.

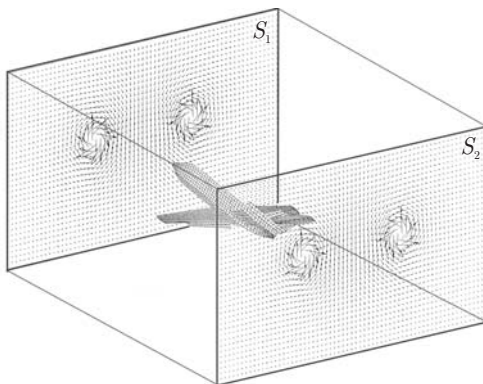


Рис. 8.2. К методу решения

При выполнении граничных условий (8.1)–(8.5) задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_i a_i = H_i - W_{ni}. \quad (8.6)$$

Здесь в правой части наряду с традиционной функцией  $H_i$  [7, 20] стоит нормальная составляющая возмущенной скорости  $W_{ni}$  в  $i$ -й контрольной точке, причем  $W_{ni}$  вычисляется интерполяцией возмущенных скоростей из сечений  $S_1$  и  $S_2$  в контрольную точку  $i$ . Использована линейная интерполяция. Кроме того, вихревая пелена выстраивалась также с учетом возмущенных скоростей. Нагрузки вычисляли через интеграл Коши–Лагранжа (8.2), в котором наряду с невозмущенной скоростью учитывалась и скорость возмущенного потока.

### 8.3. Проверка работоспособности метода и достоверности получаемых результатов

Для проверки работоспособности метода и достоверности получаемых с его помощью результатов были выполнены расчеты, которые затем сравнивались с данными трубных экспериментов.

В качестве примера приведены результаты, полученные в голландской аэродинамической трубе при исследовании аэродинамических характеристик летательного аппарата, вошедшего в спутный след крыла-генератора [33]. Аэродинамическая компоновка и геометрические параметры исследуемого самолета изображены на рис. 8.3.

На рис. 8.4 показаны вихревые схемы крыла — генератора вихревого следа и модели исследуемого самолета. В ходе расчетов были сопоставлены экспериментальные (рис. 8.5) и расчетные (рис. 8.6) поля возмущенных скоростей, изображенные в виде линий равных скоро-



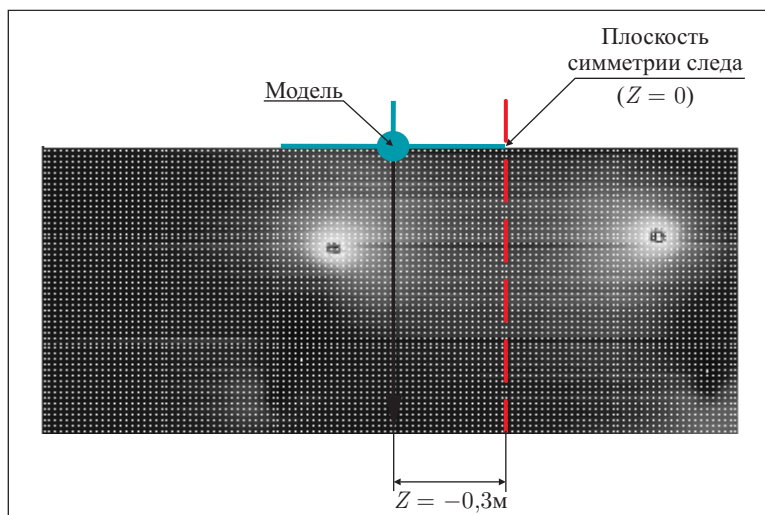


Рис. 8.5. Поле возмущенных скоростей, полученное в эксперименте [1, 19]

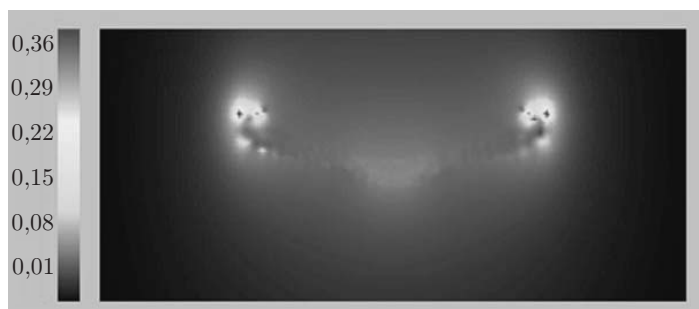


Рис. 8.6. Поле возмущенных скоростей, полученное в расчете

экспериментальными данными (рисунки 8.8 — 8.11). На рис. 8.8 приведены зависимости коэффициента подъемной силы  $C_{ya}$  вдоль координаты  $Y$ , на рис. 8.9 — зависимости коэффициента боковой силы  $C_{za}$  вдоль координаты  $Y$ , на рис. 8.10 — зависимости коэффициента момента рыскания  $m_y$  вдоль координаты  $Y$ , на рис. 8.11 — зависимости коэффициента момента крена  $m_x$  вдоль координаты  $Y$  (сплошная линия — эксперимент [33], линия с точками — расчет). Видна хорошая согласованность эксперимента с расчетом.



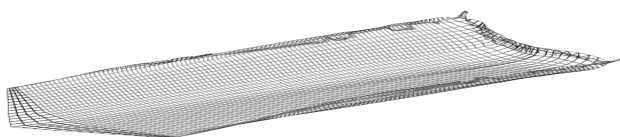
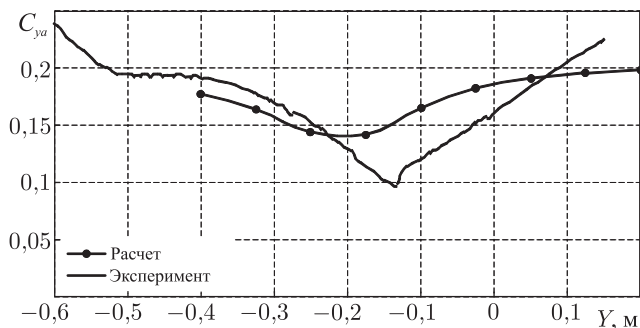
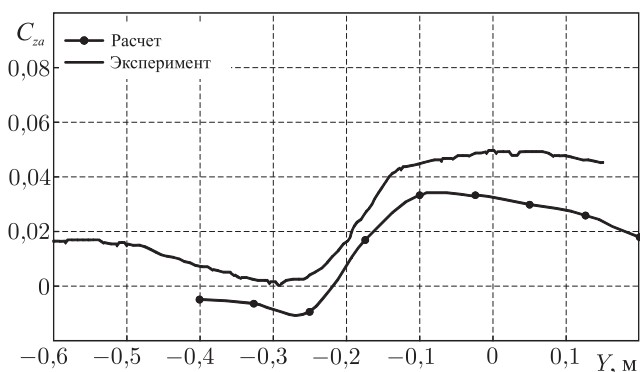


Рис. 8.7. Вихревой след за крылом - генератором вихрей (расчет)

Рис. 8.8. Зависимости коэффициента подъемной силы  $C_{ya}$  вдоль координаты  $Y$ Рис. 8.9. Зависимости коэффициента боковой силы  $C_{za}$  вдоль координаты  $Y$ 

#### 8.4. Аэродинамические характеристики самолетов в дальнем вихревом следе от других самолетов

Исследования аэродинамических характеристик самолетов в дальнем вихревом следе от других самолетов показывают, что вихревой след может представлять для самолетов реальную опасность. На рис. 8.12 представлена зависимость коэффициента момента крена самолета Як-40 вдоль координаты  $Oz$ , проходящей через центр правого концевых вихря от самолета Ил-76. Видим, что значения

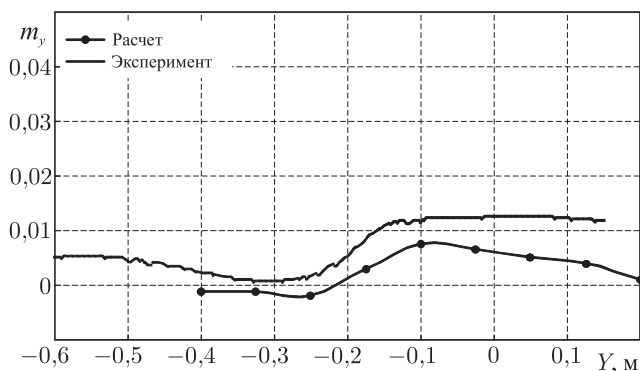


Рис. 8.10. Зависимости коэффициента момента рыскания  $m_y$  вдоль координаты  $Y$

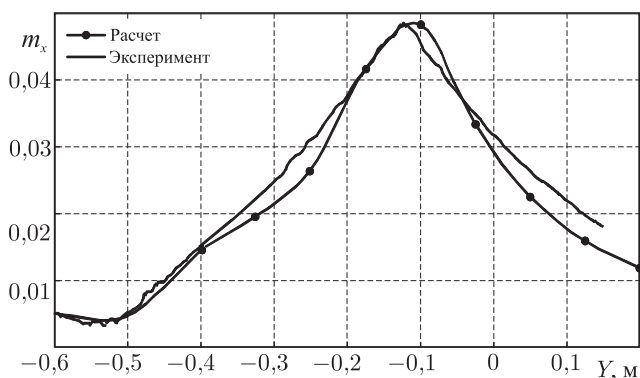


Рис. 8.11. Зависимости коэффициента момента крена  $m_x$  вдоль координаты  $Y$

коэффициента момента крена по абсолютной величине достигают 0,06, что значительно превышает располагаемый  $m_x$  от элеронов ( $m_{x \text{ расп}} = 0,027$ ). На рис. 8.12 показано положение правого концевго вихря через 65 с после пролета этого сечения самолетом Ил-76 на высоте  $H = 40$  м со скоростью  $V = 340$  км/ч при скорости бокового ветра справа  $W = -1$  м/с. Вихрь находится на высоте  $H = 20$  м над центром взлетно-посадочной полосы. Скорость самолета Як-40 в расчете принималась равной  $V = 230$  км/ч. На рис. 8.13 представлены зависимости коэффициентов подъемной силы  $C_{ya}$  и момента тангажа  $m_z$  самолета Як-40 для тех же условий полета. Коэффициент момента тангажа рассчитан относительно центра масс самолета Як-40. На рис. 8.14 представлены зависимости коэффициентов боковой силы  $C_{za}$  и момента рыскания  $m_y$ . Видим заметное изменение этих коэффициентов самолета Як-40 вдоль координаты  $Oz$ , проходящей через центр правого концевго вихря от самолета Ил-76.

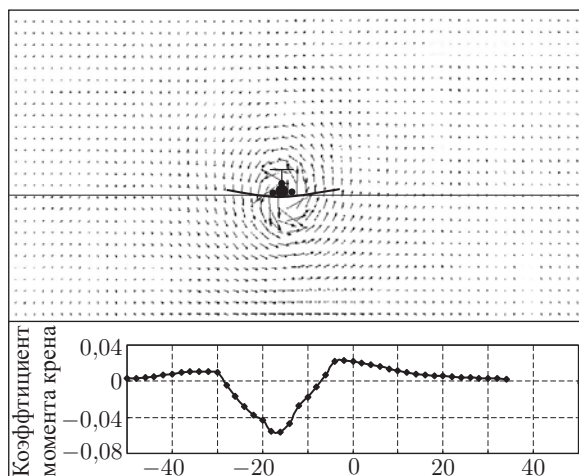


Рис. 8.12. Изменение коэффициента момента крена самолета Як-40 в вихревом следе самолета Ил-76,  $t = 65$  с

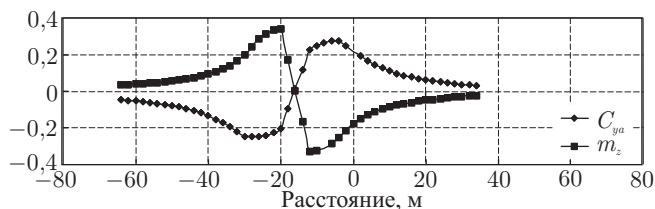


Рис. 8.13. Зависимости коэффициента подъемной силы  $C_{y\alpha}$  и коэффициента момента тангажа  $m_z$  самолета Як-40 в вихревом следе самолета Ил-76,  $t = 65$  с

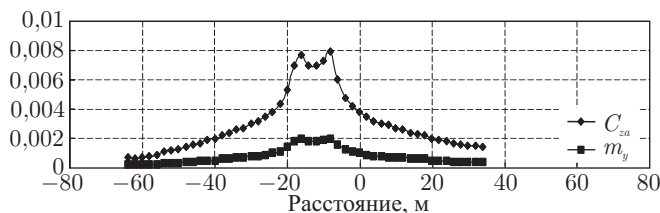


Рис. 8.14. Зависимости коэффициента боковой силы  $C_{za}$  и коэффициента момента рыскания  $m_y$  самолета Як-40 в вихревом следе самолета Ил-76,  $t = 65$  с

Рис. 8.15 представляет зависимости коэффициентов моментов крена, рыскания и тангажа самолета Як-40 вдоль координаты  $Oz$ , проходящей через центр правого концевго вихря от самолетов Ил-76, Ан-124, В-747 и А-380. Скорость самолетов — генераторов вихрей была одина-

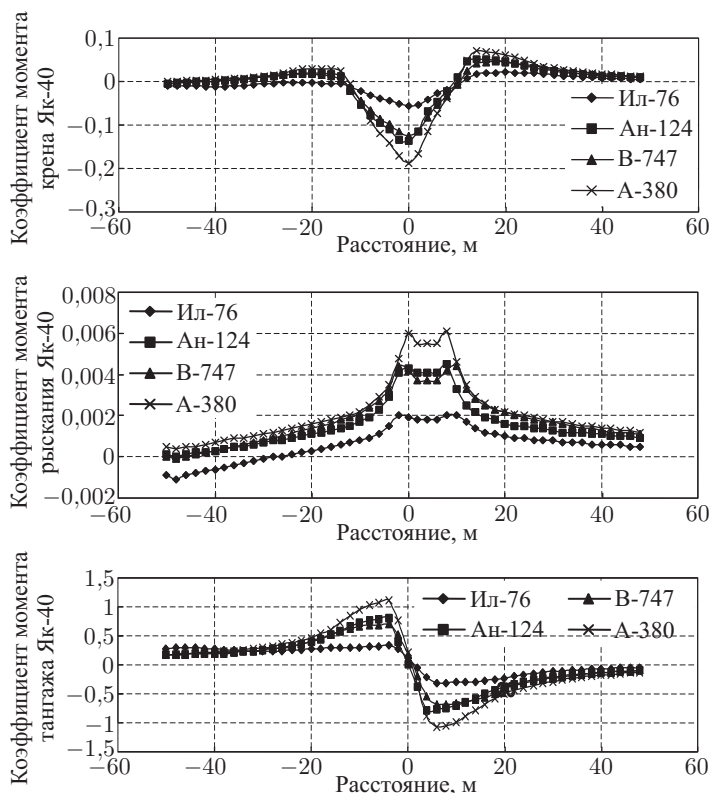


Рис. 8.15. Изменение коэффициентов момента крена, рыскания и тангажа самолета Як-40 в вихревом следе самолетов Ил-76, Ан-124, В-747 и А-380

ковая и составляла  $V = 300$  км/ч, высота полета  $H = 40$  м. Самолет Як-40 входил в вихревой след через 25 с после пролета самолетов-генераторов вихрей данного сечения, что соответствовало удалению  $X = 2,1$  км. При этом состояние атмосферы принималось как весьма устойчивое ( $CA = 1$ ). Видим, что при этих условиях вихревые следы от всех самолетов представляют для Як-40 реальную опасность особенно по моменту крена. Например, вихревой след от самолета А-380 создает момент крена ( $m_x = -0,2$ ) почти на порядок превышающий располагаемый от элеронов ( $m_{x \text{ расп}} = -0,027$ ).

На рис. 8.16 представлены зависимости коэффициентов подъемной и боковой сил самолета Як-40 вдоль координаты  $Oz$ , проходящей через центр правого концевой вихря от самолетов Ил-76, Ан-124, В-747 и А-380. При этом скорость самолетов — генераторов вихрей также была одинаковая и составляла  $V = 300$  км/ч, высота полета  $H = 40$  м. Самолет Як-40 входил в вихревой след также через 25 с после пролета

самолетов — генераторов вихрей данного сечения. Для оценки приведенного силового воздействия концевых вихрей от самолетов-генераторов на рис. 8.17 представлены поля возмущенных скоростей за самолетами Ил-76, Ан-124, В-747 и А-380 в момент времени  $t = 25,2$  с на удалении 2,1 км. В нижней части показан масштаб скоростей.

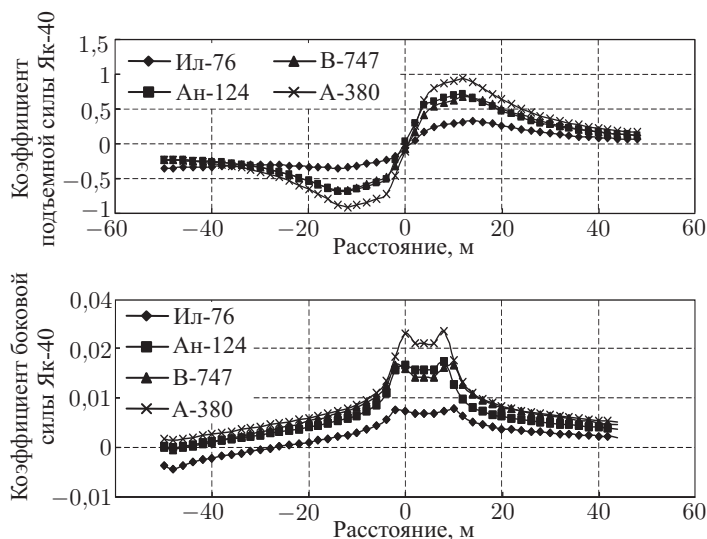


Рис. 8.16. Изменение коэффициентов подъемной и боковой силы самолета Як-40 в вихревом следе самолетов Ил-76, Ан-124, В-747 и А-380

## 8.5. Расчет влияния ветрового потока, обусловленного рельефом местности, на аэродинамические характеристики самолета

Исследования аэродинамических характеристик самолетов в ветровых потоках от рельефа местности показывают, что эти потоки также могут представлять для самолетов реальную опасность. В качестве примера приводим результаты расчета аэродинамических характеристик самолета Су-25 в ветровом потоке от конкретного участка горной местности. На рис. 8.18 представлена траектория движения самолета вблизи горного массива с развитой вихревой структурой, соответствующей рис. 6.3. Самолет Су-25 помещался в точки этой траектории на высотах пролета  $H = 125$  м, 250 м и 375 м. При этом по методике разд. 8.2 рассчитывались аэродинамические характеристики с выстраиванием вихревого следа самолета. Пример расчета вихревого следа самолета Су-25 в вихревом потоке, обусловленном рельефом местности, показан на рис. 8.19.

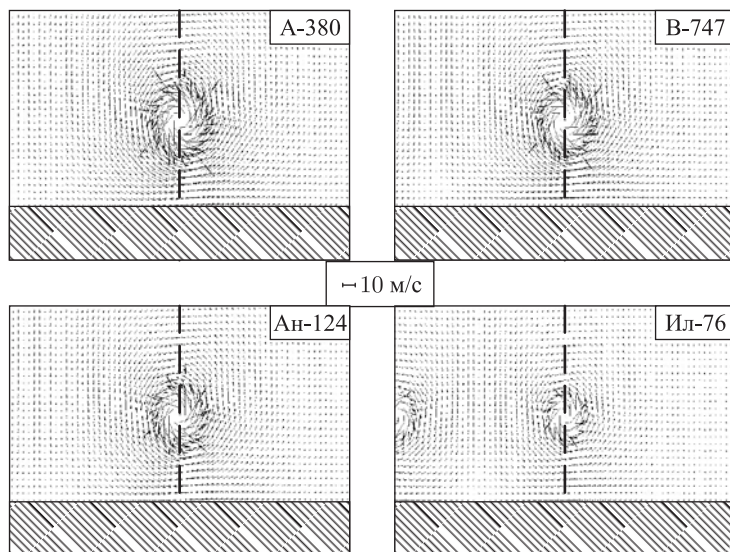


Рис. 8.17. Правый концевой вихрь за самолетами А-380, В-747, Ан-124, Ил-76;  
 $t = 25,2$  с; удаление 2,1 км

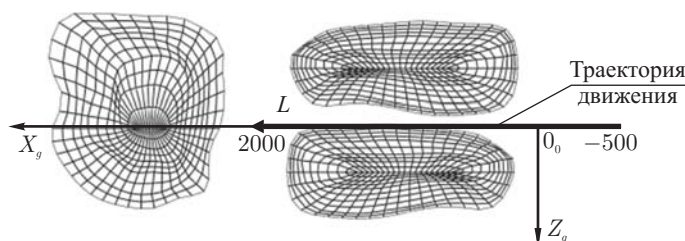


Рис. 8.18. Траектория движения самолета Су-25

На рис. 8.20 представлены зависимости коэффициентов подъемной силы  $C_{ya}$  самолета Су-25 вдоль показанной на рис. 8.18 траектории на высотах  $H = 125$  м, 250 м и 375 м. Видим, что для данных условий полета наиболее сильное влияние ветрового потока оказывает на самолет на высоте  $H = 250$  м. На рис. 8.21 представлены зависимости коэффициентов боковой силы  $C_{za}$  для тех же высот полета. Изменение коэффициента боковой силы также наиболее заметно на высоте  $H = 250$  м.

На рисунках 8.22–8.24 показаны зависимости коэффициентов моментов крена  $m_x$ , рыскания  $m_y$  и тангажа  $m_z$  вдоль той же самой траектории на высотах  $H = 125$  м, 250 м и 375 м.

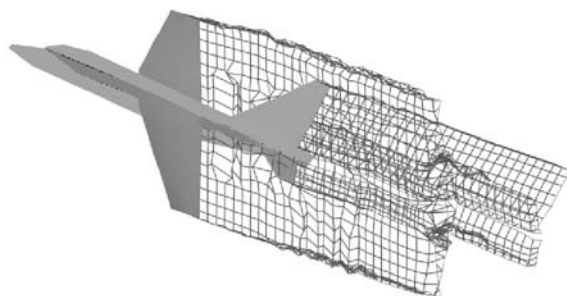


Рис. 8.19. Вихревой след самолета Су-25 с учетом ветрового воздействия от рельефа местности, полученный расчетом

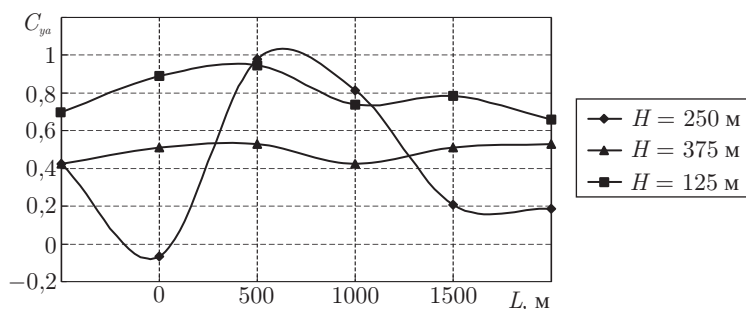


Рис. 8.20. Зависимость коэффициента подъемной силы вдоль траектории полета на разных высотах

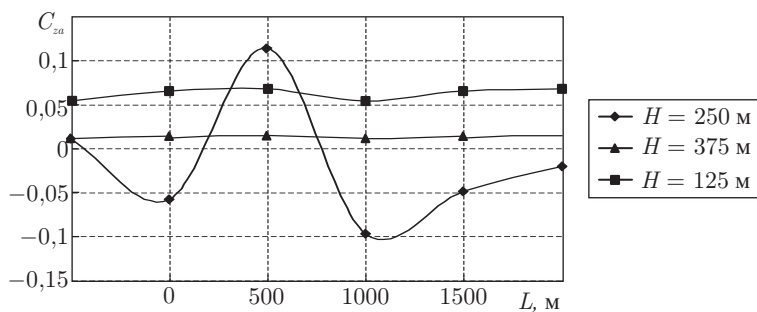


Рис. 8.21. Зависимость коэффициента боковой силы вдоль траектории полета на разных высотах

На графиках светлыми штрихами отмечено балансировочное значение коэффициента момента тангажа. Штрихпунктиром показаны значения коэффициентов моментов, для парирования которых необходимо

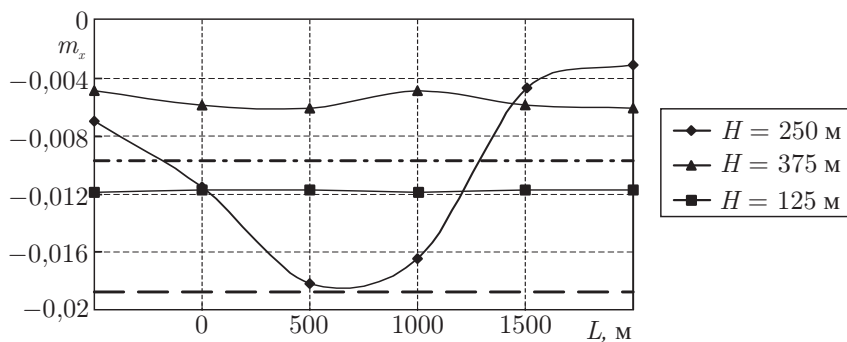


Рис. 8.22. Зависимость коэффициента момента крена вдоль траектории полета на разных высотах

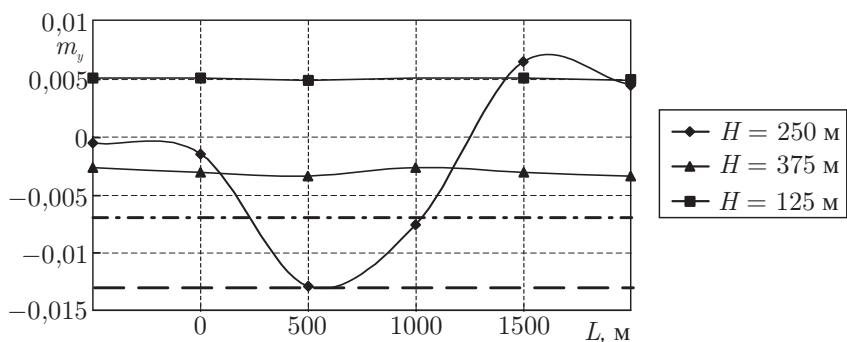


Рис. 8.23. Зависимость коэффициента момента рыскания вдоль траектории полета на разных высотах

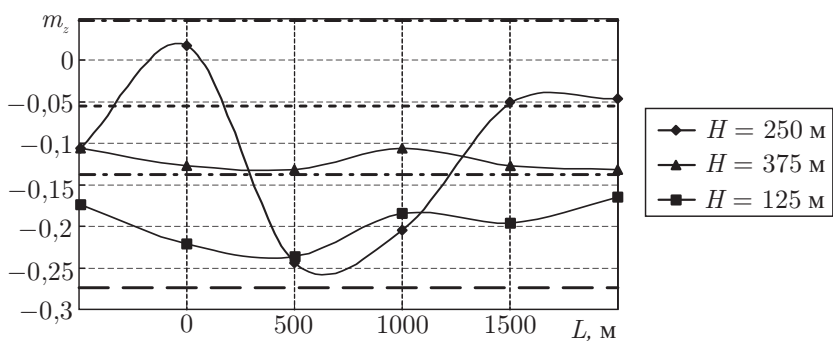


Рис. 8.24. Зависимость коэффициента момента тангажа вдоль траектории полета на разных высотах



25 %-ное отклонение соответствующих рулей. Жирными штрихами показаны значения коэффициентов моментов, для парирования которых необходимо 50 %-ное отклонение соответствующих рулей. Видим, что для рассматриваемых условий при полете на высоте  $H = 250$  м моментные характеристики самолета Су-25 изменяются так, что для их парирования необходимо отклонение рулей до 50 % от их хода.

### 8.6. Расчет характеристик динамики движения самолета в вихревом следе

Для расчета характеристик движения летательного аппарата (ЛА) под действием сил и моментов от воздействия вихревого следа запишем систему уравнений динамики движения твердого тела в связанной системе координат. Будем считать, что масса и моменты инерции ЛА на рассматриваемых интервалах времени неизменны и соответствуют исходным. При условии, что оси связанной системы координат совпадают с главными осями инерции ЛА, система уравнений движения центра масс ЛА имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} m \left( \frac{dV_x}{dt} + \Omega_y V_z - \Omega_z V_y \right) &= X + P_x - G \sin \vartheta; \\ m \left( \frac{dV_y}{dt} + \Omega_z V_x - \Omega_x V_z \right) &= Y + P_y - G \cos \vartheta \cos \gamma; \\ m \left( \frac{dV_z}{dt} + \Omega_x V_y - \Omega_y V_x \right) &= Z + P_z + G \cos \vartheta \sin \gamma, \end{aligned} \quad (8.7)$$

где  $V_x, V_y, V_z$  — проекции вектора скорости  $\vec{V}_k$ ;  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  — проекции вектора угловой скорости  $\vec{\Omega}$ ;  $X, Y, Z$  — проекции аэродинамической силы  $\vec{R}_{\text{тeктA}}(t)$ ;  $P_x, P_y, P_z$  — проекции тяги двигателя  $\vec{P}(t)$ .

При принятых допущениях угловое движение ЛА описывается уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\Omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \Omega_y \Omega_z &= M_x + M_{Px} + M_{\Gamma x}; \\ I_y \frac{d\Omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \Omega_x \Omega_z &= M_y + M_{Py} + M_{\Gamma y}; \\ I_z \frac{d\Omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \Omega_x \Omega_y &= M_z + M_{Pz} + M_{\Gamma z}, \end{aligned} \quad (8.8)$$

где  $I_x, I_y, I_z$  — моменты инерции ЛА относительно осей связанной системы координат;  $M_x, M_y, M_z, M_{Px}, M_{Py}, M_{Pz}, M_{\Gamma x}, M_{\Gamma y}, M_{\Gamma z}$  — проекции моментов  $\vec{M}(t), \vec{M}_P(t)$  и  $\vec{M}_\Gamma(t)$ .

Система уравнений (8.7) и (8.8) позволяет найти проекции поступательной и угловой скоростей. Для определения координат центра тяжести ЛА и положения связанной системы координат относительно

неподвижной необходимо использовать шесть кинематических дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \Omega_y \sin \gamma + \Omega_z \cos \gamma; \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \Omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\Omega_y \cos \gamma - \Omega_z \sin \gamma); \\
 \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\Omega_y \cos \gamma - \Omega_z \sin \gamma}{\cos \vartheta}; \\
 \frac{dx_0}{dt} &= V_x \cos \vartheta \cos \psi + V_y (\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \cos \psi \sin \vartheta) + \\
 &\quad + V_z (\cos \gamma \sin \psi + \sin \vartheta \sin \gamma \cos \psi) \\
 \frac{dy_0}{dt} &= V_x \sin \vartheta + V_y \cos \gamma \cos \vartheta - V_z \sin \gamma \cos \vartheta; \\
 \frac{dz_0}{dt} &= -V_x \cos \vartheta \sin \psi + V_y (\sin \gamma \cos \psi + \cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi) + \\
 &\quad + V_z (\cos \gamma \cos \psi - \sin \gamma \sin \vartheta \sin \psi).
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Системы уравнений (8.7)–(8.9) при заданных начальных условиях однозначно определяют движение летательных аппаратов. Однако для решения системы уравнений (8.7) и (8.8) необходимо в каждый момент времени знать величины аэродинамической силы  $\vec{R}_A(t)$  и момента  $\vec{M}(t)$ , действующих на ЛА (при этом считаем, что все остальные величины  $\vec{P}(t)$ ,  $\vec{M}_P(t)$  и  $\vec{M}_\Gamma(t)$  известны). Таким образом, для решения системы уравнений (8.7)–(8.9) в каждый момент времени будем определять аэродинамическую силу  $\vec{R}_A(t)$  и аэродинамический момент  $\vec{M}(t)$ , действующие на ЛА, по методу, описанному в разд. 8.2.

При необходимости можно учесть и работу летчика. Углы отклонения органов управления определяются законами управления ЛА, динамическими свойствами систем управления и летчика. Для моделирования системы управления ЛА введем следующие допущения:

- проводка управления абсолютно жесткая;
- распределенные массы и жесткости проводки управления заменим сосредоточенными;
- люфты и силы сухого трения в проводке отсутствуют;
- силы вязкого трения будем считать пропорциональными скорости отклонения ручки управления самолетом (РУС) и руля;
- жесткость загрузочного механизма постоянна.

При указанных допущениях в области рабочих частот от летчика  $f = 1 - 3$  Гц звенья системы управления можно считать усилительными. Тогда передаточная функция системы управления будет иметь вид

$$W_{\text{СУ}} = \frac{K_{\text{в}}}{C_{\text{в}}}, \tag{8.10}$$

где  $K_{\text{в}}$  — передаточное число проводки управления от РУС к рулю;  $C_{\text{в}}$  — жесткость загрузки РУС.

Летчик является наиболее сложным звеном в контуре управления. Его свойства изменяются в широких пределах и в зависимости от состояния могут быть различными, т. е. на них влияет множество факторов. Однако можно выделить следующие общие свойства.

- Летчик формирует управляющие воздействия в зависимости от величины и направления внешнего возмущения или в зависимости от величины сигнала рассогласования.
- Ответная реакция летчика на внешнее возмущение наступает не сразу, а с некоторым запаздыванием, которое зависит от направления и интенсивности возмущения, от количества параметров, контролируемых летчиком и от его психофизиологического состояния. На интенсивные акселерационные воздействия летчик реагирует рефлекторно, с запаздыванием 0,13–0,6 с.
- Летчик имеет зону нечувствительности. Если интенсивность раздражителя ниже порога чувствительности, летчик не реагирует на него.
- Зная о своем запаздывании, летчик стремится компенсировать его упреждением.

Единой модели действий летчика для всех случаев не существует. Для каждой конкретной задачи разрабатываются свои дискретные или непрерывные модели действий летчика. Для управления или стабилизации какого-либо одного параметра  $x_i$  установлен следующий вид передаточной функции летчика:

$$W_{\text{л}}(P) = W_{\frac{\Delta P}{\Delta x_i}}(P) = \frac{K_{\text{л}} e^{-\tau P} (T_{\text{л1}} P + 1)}{(T_{\text{л2}} P + 1) (T_{\text{л3}} P + 1)}, \quad (8.11)$$

где  $\Delta x_i = x_i - x_{i\text{зад}}$ ;  $K_{\text{л}} = \Delta P / \Delta x_i$  — коэффициент усиления летчика;  $\tau = 0,13\text{--}0,3\text{ с}$  — запаздывание летчика;  $1/T_{\text{л2}} P + 1$  — инерционность летчика по приему и распознаванию информации,  $T_{\text{л2}} \leq 2\text{ с}$ ;  $1/T_{\text{л3}} P + 1$  — нервно-мышечное запаздывание летчика,  $T_{\text{л3}} = 0,1\text{--}0,3\text{ с}$ ;  $T_{\text{л1}} P + 1$  — способность летчика работать с упреждением,  $T_{\text{л1}} \leq 2,5\text{ с}$ .

Таким образом, нелинейная математическая модель динамики пространственного движения ЛА с учетом управляющих воздействий описывается в общем случае системой уравнений (8.7)–(8.11). Как видно из этих уравнений, существует сложная взаимосвязь входящих в них параметров. Так, движение летательных аппаратов зависит от действующей на них аэродинамической нагрузки. В свою очередь величина аэродинамических сил и моментов зависит от характера движения ЛА. В процессе движения изменяется положение рулевых поверхностей, что также влияет на аэродинамические характеристики ЛА и характер его перемещения. Следовательно, необходимо совместное решение уравнений динамики движения, нелинейной нестационарной аэродинамики и уравнений, описывающих функционирование контура управления. Практически это осуществляется последовательным решением этих уравнений шаг за шагом по времени.

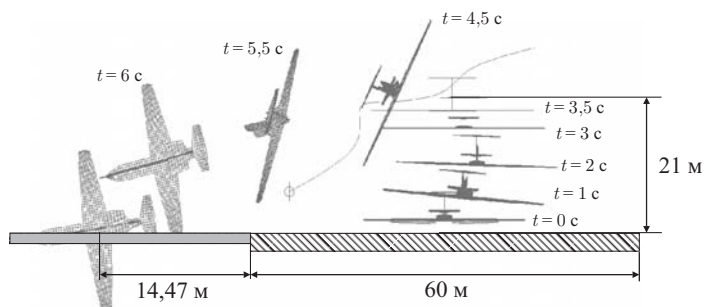


Рис. 8.25. Траектория движения самолета Як-40 в вихревом следе самолета Ил-76, полученная расчетом. Вид сзади

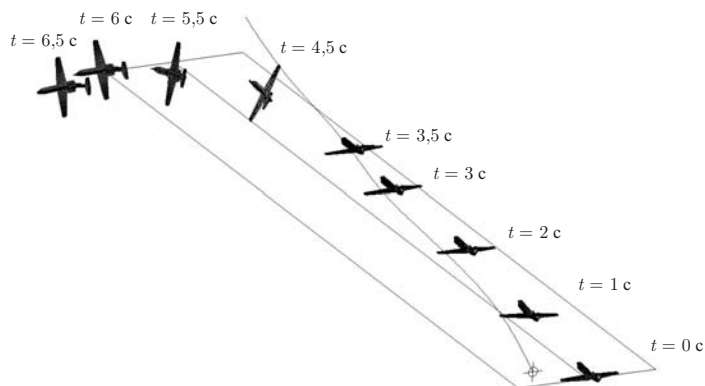


Рис. 8.26. Траектория движения самолета Як-40 в вихревом следе самолета Ил-76. Вид сбоку

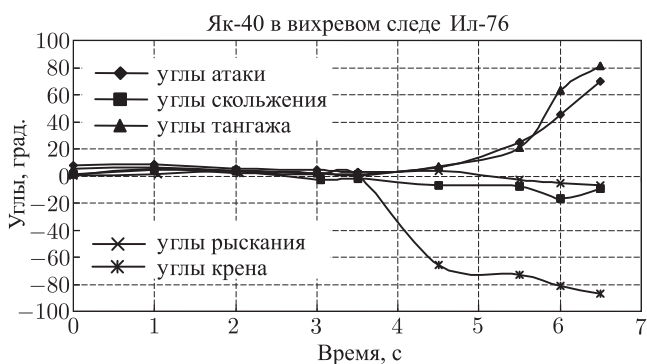


Рис. 8.27. Зависимости от времени углов атаки, скольжения, тангажа, рыскания и крена самолета Як-40

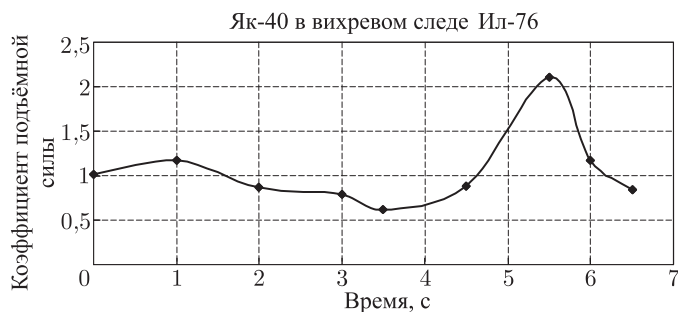


Рис. 8.28. Зависимость от времени коэффициента подъемной силы самолета Як-40

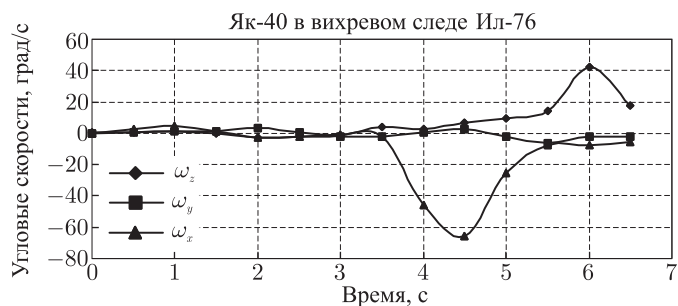


Рис. 8.29. Зависимости от времени угловых скоростей  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$  самолета Як-40

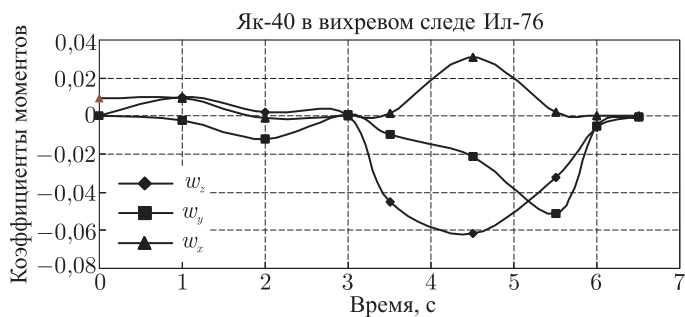


Рис. 8.30. Зависимости от времени коэффициентов моментов крена  $m_x$ , рыскания  $m_y$  и тангажа  $m_z$  самолета Як-40

В качестве примера расчета по данному алгоритму на рис. 8.25 и рис. 8.26 показаны траектории движения самолета Як-40, полученные расчетом, в вихревом следе самолета Ил-76, соответствующему рис. 4.8, т.е. при катастрофе самолета Як-40 в Ташкенте

16 января 1987 г. Видим, что траектория самолета Як-40 в этом случае повторяет его реальное падение.

Кроме траектории движения самолета расчетом можно получать другие характеристики. Например, на рис. 8.27 представлены зависимости углов атаки, скольжения, тангажа, рыскания и крена от времени при катастрофе самолета Як-40 (см. рисунки 8.25 и 8.26). Для этого же случая на рис. 8.28 представлена зависимость коэффициента подъемной силы от времени, на рис. 8.29 — значения угловых скоростей  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$  в зависимости от времени, а на рис. 8.30 — временные зависимости коэффициентов моментов крена  $m_x$ , рыскания  $m_y$  и тангажа  $m_z$ . Видно заметное изменение этих коэффициентов на заключительной стадии полета.

По данной методике можно исследовать характеристики самолетов при их заправке в воздухе. В качестве примера такого исследования на рис. 8.31 представлены взаимные положения самолета-заправщика Ил-78 и заправляемого самолета МиГ-31 в моменты времени полета  $t = 0,4$  с;  $0,8$  с;  $1,2$  с;  $1,6$  с;  $2,0$  с и  $2,4$  с для случая, когда летчик не вмешивается в управление. Заправка происходит от правого крыльевого унифицированного агрегата заправки (УПАЗ). Видим, что

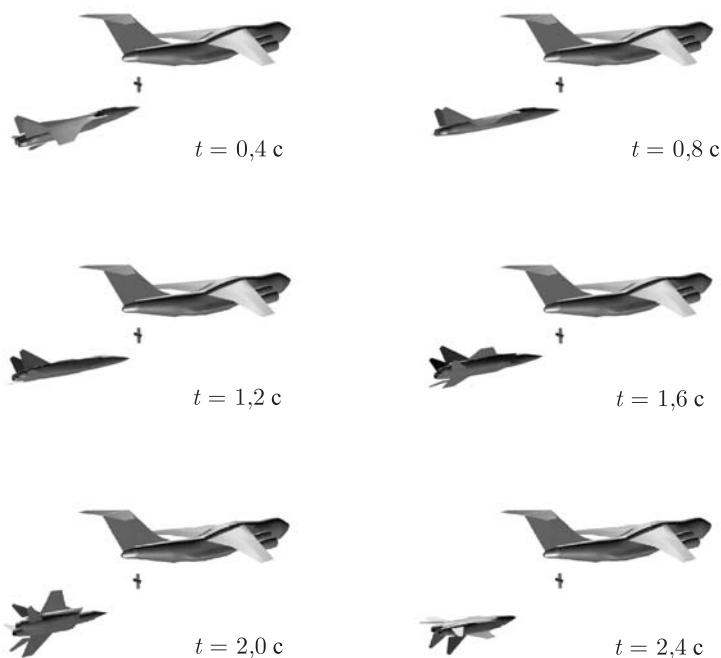


Рис. 8.31. Взаимное положение самолета-заправщика Ил-78 и заправляемого самолета МиГ-31 в различные моменты времени (без летчика)

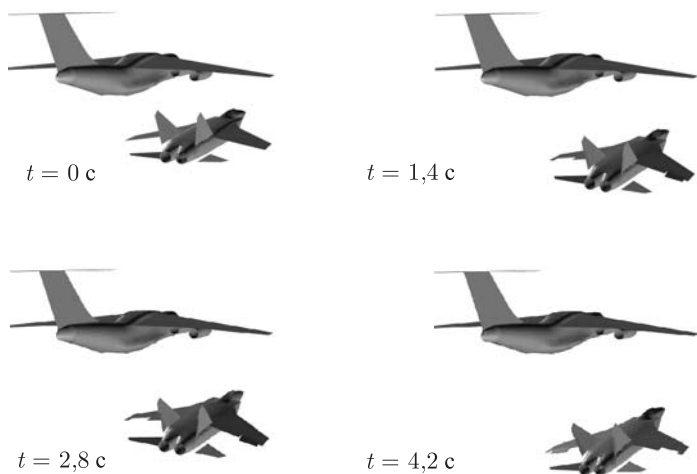


Рис. 8.32. Взаимное положение самолета-заправщика Ил-78 и заправляемого самолета МиГ-31 в различные моменты времени (с летчиком)

под действием вихревого следа заправляемый самолет переворачивается на спину. В случае вмешательства летчика самолет сохраняет свое нормальное положение в течение всего процесса заправки (рис. 8.32).

## Библиографический список

1. Айрапетов А. Б. О статических свойствах системы дискретных вихрей, моделирующей турбулентное струйное течение // В сб: Турбулентные течения. — Москва Наука, 1977. С. 188–195.
2. Анашкин А. Г. Бондаренко В. М. Желанников А. И. Исследование аэродинамических характеристик самолета Як-40 в дальнем аэродинамическом следе за самолетом Ил-76НММ по аэродинамике летательных аппаратов. — М.: ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1989.
3. Апаринов В. А. Расчет нелинейных аэродинамических характеристик крыла сложной формы в плане с учетом носовой вихревой пелены // Изв. АН СССР, МЖГ. 1977. № 2.
4. Апаринов В. А. Моделирование на ЭВМ сложного пространственного движения несущих поверхностей с развитием нестационарного вихревого следа. // В кн.: Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов. М.: Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского. 1986. Вып. 1313, С. 200–222.
5. Апаринов В. А. Белоцерковский С. М.: Лифанов И. К., Михайлов А. А. Расчет нестационарных аэродинамических характеристик тел при отрывном обтекании // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 28, С. 1558–1566.
6. Апаринов В. А., Дворак А. В. Метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками // В кн.: Применение ЭВМ для исследования аэродинамических характеристик летательных аппаратов. Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского. 1986. Вып. 1313. С. 424–432
7. Аубакиров Т. О., Белоцерковский С. М.: Желанников А. И., Ништ М. И. Нелинейная теория крыла и ее приложения. — Алматы: Гылым. 1997. — 448 с.
8. Аубакиров Т. О., Желанников А. И., Иванов П. Е., Ништ М. И. Спутные следы и их воздействие на летательные аппараты. Моделирование на ЭВМ. Алматы, 1999 — 230 с.
9. Аэродинамика и динамика полета магистральных самолетов. Под ред. акад. Г. С. Бюшгенса. Москва-Пекин: Изд. отдел ЦАГИ. Авиаиздательство КНР, 1995. — 772 с.
10. Бабкин В. И., Белоцерковский А. С., Турчак Л. И. и др. Система обеспечения вихревой безопасности полетов летательных аппаратов. — М.: Наука, 2008. — 374 с.
11. Баранов Н. А., Белоцерковский С. М.: Белоцерковский Ал. С., Гиневский А. С. Расчет турбулентной вязкости в спутном вихревом следе за самолетом // Препринт ЦАГИ. № 109, 1997. — 16 с.



12. Белоцерковский А. С., Пасекунов И. В. Интегрированная система обеспечения вихревой безопасности полетов. Аэрокосмическое обозрение. 2005. № 1.
13. Белоцерковский А. С., Журицкий Г. И., Каневский М. И., Пасекунов И. В. Вихревая безопасность полетов в реальных очертаниях // Авиасалоны мира. 2007. № 3. С. 40–45.
14. Белоцерковский Ал. С., Гиневский А. С. Численное моделирование дальнего вихревого следа на взлетно–посадочных режимах // Доклады РАН. 2002. Т. 380. № 6. С. 761–764.
15. Белоцерковский Ал. С., Гиневский А. С., Погребная Т. В., Шипилов С. Д. Моделирование дальнего вихревого следа магистральных самолетов Ту-204 и Ил-96 на взлетно-посадочных режимах // Техника воздушного флота, 2000. Т. LXXVI, № 6, С. 12–20.
16. Белоцерковский Ал. С., Гиневский А. С. Развитие дальнего вихревого следа самолета вблизи поверхности земли с учетом турбулентности атмосферы // Труды ЦАГИ 2003. Вып. 2643, С. 9–27.
17. Белоцерковский Ал. С., Гиневский А. С., Погребная Т. В., Шипилов С. Д. Моделирование дальнего вихревого следа магистральных самолетов при взлете и посадке // Успехи механики, 2003. Т. 2. № 4. С. 106–127.
18. Белоцерковский Ал. С., Гиневский А. С., Погребная Т. В. Численная визуализация дальнего вихревого следа самолетов на режимах взлета и посадки // Техника воздушного флота, 2004. Т. LXXVII, № 1. С. 32–36.
19. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994. — 442 с.
20. Белоцерковский С. М.: Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. — М.: Наука, 1978.
21. Белоцерковский С. М.: Шипилов С. Д., Погребная Т. В. Исследование аэродинамических производных самолетов на ЭВМ // Доклады РАН. 1995. Т. 341.
22. Белоцерковский С. М.: Медведев Р. Е., Погребная Т. В., Шипилов С. Д. Моделирование ближнего вихревого следа самолета с учетом выдвигания и отклонения секционных закрылков // Труды ЦАГИ. 2001. Вып. 2643. С. 28–35.
23. Белоцерковский С. М.: Гиневский А. С. Компьютерная концепция вихревой турбулентности // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995., Т. 3., № 2. С. 72–93.
24. Белоцерковский С. М.: Гиневский А. С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. — М.: Физматлит, 1995. 368 с.
25. Белоцерковский С. М.: Гиневский А. С., Хлапов Н. В. Моделирование круглой турбулентной струи методом дискретных вихрей // Доклады РАН. 1995. Т. 345. № 4. С. 479–482.
26. Белоцерковский С. М.: Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. — М.: Наука, 1985.

27. Белоцерковский С. М.: Локтев Б. Е., Ништ М. И. Исследование на ЭВМ аэродинамических и аэроупругих характеристик винтов вертолетов. — М.: Машиностроение, 1992.
28. Белоцерковский С. М.: Дворак А. В., Желанников А. И., Котовский В. Н. Моделирование на ЭВМ турбулентных струй и следов//В кн.: Проблемы турбулентных течений. — М.: Наука, 1987.
29. Белоцерковский С. М. Котовский В. Н., Ништ М. И., Федоров Р. М. Математическое моделирование отрывного обтекания тел. — М.: Наука, 1988. 232 с.
30. Бызова Н. Л., Гаргер Е. К., Иванов В. Н. Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси. — Гидрометео-издат, 1991. 280 с.
31. Власов Е. В., Гиневский А. С., Каравосов Р. К., Франкфурт М. О. Пристеночные пульсации давления в зоне отрыва за двумерными препятствиям // Труды ЦАГИ. 1982. Вып. 2137, Гл. 2.
32. Вышинский В. В. Исследования эволюции вихревого следа за самолетами и безопасность полета // Труды ЦАГИ. Вып. 2622. 1976. — С. 5–21.
33. Вышинский В. В., Судаков Г. Г., Вихревой след самолета в турбулентной атмосфере // Труды ЦАГИ. Вып. 2667. 2006. — 155 с.
34. Гайфуллин А. М.: Исследование вихревых структур, образующихся при обтекании тел жидкостью или газом. — М.: Изд. ЦАГИ. 2006. — 138 с.
35. Гайфуллин А. М.: Звонова Ю. С., Свириденко Ю. Н. Расчет интерференции турбулентной струи двигателя с планером самолета // Труды ЦАГИ. 2002. Вып. 2655. С. 160–166.
36. Гиневский А. С., Погребная Т. В., Шипилов С. Д., Моделирование движения вихревой пары вблизи плоского экрана в рамках МДВ// Труды Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» — Харьков. 2007. С. 105–109.
37. Головнев А. В., Желанников А. И., Еременко С. М.: Некрах С. И., Учет земли при расчете нестационарного обтекания летательных аппаратов // Материалы XVI школы-семинара «Аэродинамика летательных аппаратов». ЦАГИ. 2005.
38. Головнев А. В., Гуляев В. В., Икрянников Е. Д., Маслов В. П., Смелтер В. В., Рахматуллин Р. Ш. Использование метода дискретных вихрей при решении задач аэродинамического проектирования авиационных средств поражения. Вооружение. — М. 2005.
39. Гринац Э. С., Кашеваров А. В., Стасенко А. Л. Численное исследование струйно-вихревого следа тяжелого самолета у земли// Труды ЦАГИ. 1996. Вып. 2622. С. 137–145.
40. Желанников А. И., Система «Прогноз вихревой обстановки». Вестник академии наук авиации и воздухоплавания 2002. № 2. С. 8–14.
41. Желанников А. И., Вихревая опасность.// Вестник академии наук авиации и воздухоплавания. 2003. № 2. С. 17–21.

42. Желанников А. И., Вышинский В. В., Исследование характеристик спутного следа за самолетом Ан-124// Научный вестник МГТУ ГА № 81 (1,1), Серия «Аэромеханика и прочность». 2005. № 81(1.1). С. 19–24.
43. Желанников А. И., Некрах С. И., Еременко С. М.: Методика и результаты расчета аэродинамических характеристик самолета с учетом влияния вихрей от рельефа местности// Труды международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Орел, 2005. Вып. 4. С. 56–62.
44. Желанников А. И., Некрах С. И., Еременко С. М.: Методика расчета аэродинамических характеристик самолета с учетом вихревого воздействия, обусловленного рельефом местности // Научный вестник МГТУ ГА. Серия «Аэромеханика и прочность», Москва, 2006. № 97. С. 6–12.
45. Желанников А. И., Невидимая опасность // Полет. 2006. № 3 С. 17–20.
46. Желанников А. И., Метод дискретных вихрей и сингулярные интегральные уравнения в аэродинамике//Integral Equations and Modeling of Applied Problems (IEMAP–2005). Chisinau, Republic of Moldova, 2006. С. 68–75.
47. Желанников А. И., Упрощенная методика расчета дальнего вихревого следа за магистральными самолетами. //Научный вестник МГТУ ГА «Аэромеханика и прочность». 2007. № 111. С. 16–21.
48. Желанников А. И., Гуляев В. В., Морошкин Д. В., Ушаков С. А. Математическая модель дальнего вихревого следа за самолетами с воздушными винтами. Научный вестник МГТУ ГА серия Аэромеханика и прочность. 2007. № 111. С. 16–27.
49. Замятин А. Н., Завершинев Ю. А. Натурные исследования структуры и развития вихревого следа среднемагистрального самолета в приземном слое атмосферы // Научно-технический сборник ЛИИ, № 163, 1984.
50. Знаменская И. Л. Требования к размерам частиц, используемых для визуализации вихревого следа за самолетом // Труды ЦАГИ. 1996. Вып. 2622. С. 146–150.
51. Козлов В. Е., Лебедев А. Б., Любимов Д. А., Секундов А. Н. Некоторые особенности турбулентного течения в кромочном следе// Механика жидкости и газа, 2004. № 1. С. 78–86.
52. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. — М.: Гос. изд. физико-математической литературы, 1963.
53. Кюхеман Д. Аэродинамическое проектирование самолетов. — М.: Машиностроение, 1999. — 656 с.
54. Ламб Г. Гидродинамика. — М.-Л.: ГТТИ, 1947. — 928 с.
55. Монин А. С., Яглом А. М.: Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. — М.: Наука, 1965.
56. Неймотин Л. И. О турбулентном смешении двух безграничных потоков идеальной жидкости // В сб: Прикладная и теоретическая физика. — Алма-Ата, 1972. Вып. 4, С. 284–289.

57. *Обухов А. М.*: Турбулентность в температурно-неоднородной атмосфере // Труды Института теоретической геофизики АН СССР. 1946. № 1, С. 95–115.
58. *Островский Г. М.* Прикладная механика неоднородных сред. — СПб.: Наука, 2000. — 360 с.
59. *Спаларт Ф. Р., Стрелец М. Х., Травин А. К., Шур М. П.* Моделирование турбулентного вихревого следа за механизированным крылом // Механика жидкости и газа. 2001. № 5. С. 64–72.
60. *Спаларт Ф. Р., Стрелец М. Х., Травин А. К., Шур М. П.* Моделирование взаимодействия вихревой пары с поверхностью земли // Механика жидкости и газа. 2001. № 6. С. 52–63.
61. *Смирных Е. А.* Численное исследование методом дискретных вихрей структуры отрывного течения за интерцептором // Труды ЦАГИ. 1989. Вып. 2420. С. 78–86.
62. *Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В.*, Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости Л.: Судостроение, 1973. — 256 с.
63. *Belotserkovskii O. M.* Turbulence and instabilities. Moscow Institute of Physics and Technology, 1999. — 348 pp.
64. *Belotserkovskii S. M.* Wake vortex research in the USSR // Proc. Aircraft Wake Vortices Conf. Washington, 1991. V. 1. P. 7–1 — 7–25.
65. *Belotserkovskii S. M.* Computerized study of vortex aerohydrodynamics of aircraft and helicopters. Ibid Hp. 20–1 — 20–33.
66. *Bernard P. S.* Turbulent flow properties of large-scale vortex systems // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2006. 103, № 276. P. 10174–10179.
67. *Campbell S. D., Dasay T. J., Freehart R. E.* et al. Wake vortex field measurement program of Memphis // T.N. Data Guide. — Lincoln Laboratory, Lexington, Massachusetts. Project Report ATS-240, 1996. — 93 pp.
68. *Corjon A. Q., Risso F., Stoessel F., Poinot T.* Tree-dimensional direct numerical simulations of wake vortices: atmosphere turbulence effect and rebound with crosswind // AGARD Conf. Proc. 1996. V. 584. p. 28-1 — 28-21.
69. *Darracq D., Corjon A., Dueros F.* Simulation of wake vortex detection of airborne Doppler lidar J. Aircraf. 2000. V. 37. № 6.
70. *Dee J. K., Nicholas O. P.* Flight measurement of wing tip vortex motion near the ground // Techn. Rep. 68007. RAE. 1968.
71. *Ferreira Gago, Brunet S., Garnier F.* Numerical investigation of turbulent mixing in a jet/wake vortex interaction // AIAA J. 2002. V. 40. P. 276–285.
72. *Greene G.* An approximate model of vortex decay in the atmosphere // J. Aircraft. 1986. V. 23, P. 566–573.
73. *Harvey J. K., Perry F. T.* Flow field produced by trailing vortices in the vicinity of the ground // AIAA J. 1971. V. 9. P. 1659–1661.
74. *Jacquin L., Garnier F.* On the dynamics of engine jets behind a transport aircraft // AGARD-CP-584. P. 37–1 — 37–8.

75. Moin P. Progress in large eddy simulation of turbulent flows. AIAA.1997. Paper 97-0749.
76. Nallasamy M., Hussain A.K.M.F. Numerical study of the phenomenon of turbulence suppression in plane shear layer // In: Turbulent Shear Flows 4. — Springer, 1985. P. 8.6–8.11.
77. Pakin A.N. Application of modified  $q-\omega$  turbulent model to simulation of dimensional gas motion // Trudy TsAGI. 1997. №2627, P. 79–92.
78. Paoli R., Lapote F., Cnenot B. Dynamics and mixing in a jet/wake vortex interactions// Physics of Fluids. 2003. V. 15. №7. P. 1843–1860.
79. Quinn W.R. Turbulent free flows issuing from sharp-edged rectangular slots: The influence of slot aspect ratio // Experimental Thermal and Fluid Science 1992. V. 5. P. 203.
80. Sarpkaya T. New model of vortex decay in the atmosphere// J. Aircraft. 2000. V.37, № 1. P. 53–61.
81. Numerical modeling studies of wake vortex real case simulation, Shen S. Ding F., Han J, Lin Y.-L., Arya C.P., Proctor F.H. // AIAA J., Paper 99-0755. 16 pp.
82. Shur M., Strelets M., Travin A, Spalart P.R. Two numerical studies of trailing vortices // AIAA-98-595 — 25 pp.
83. Smagorinsky J. General Circulation experiments with the primitive equations // Monthly Weather Review. 1963. V. 91.
84. Widnall S.E. The structure and dynamics of vortex filaments // Ann. Review of Fluid Mechanics, 1975, V. 7, P. 141–166.
85. Winckelmans G., Cocle R., Dufresne L., Capart R. Vortex methods and their application to trailing wake vortex simulations Comptes Rendus Physique (2005)6 (4/5), Special issue on Aircraft trailing vortices, 467–486 P.
86. Direct numerical simulation and large-eddy simulation of wake vortices: going from laboratory conditions to flight conditions Winckelmans G., Cocle R., Dufresne L., Capart R., Bricteux L., Daeninck G., Lonfils T. Duponcheel M., Desenfans O., Georges L. // European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECCOMAS CFD 2006), 5–8 Sept. 2006. Egmond aan Zee, The Netherlands.
87. Winckelmans G., Cottin C., Daeninck G., Leweke T Experimental and numerical study of counter-rotating vortex pair dynamics in ground defect//18e Congrès Français de Mécanique, 27–31 August 2007, Grenoble, France.Paper CFM2007-1131.
88. Winckelmans, G., Bricteux, L., Cocle, R., Duponcheel, M., Georges, L. Assessment of multiscale models for LES: spectral behaviour in very high Reynolds number turbulence and cases with aircraft wakes vortices // Proc. 5th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP-5), 27-29 August 2007, Garching, Germany. Vol. 1. P. 327–331.
89. Zheng Z.C., Lim S.H. Validation and operation of a wake vortex/shear interaction model // Journal of Aircraft, 2000. V. 37. № 6. P. 1037–1078.

# Vortex wakes of aircraft

*A.S. Ginevsky, A.I. Zhelannikov*

Preface . . . . .	6
Introduction . . . . .	8
<b>Chapter 1. Background information . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1. Atmospheric turbulence . . . . .	13
1.2. Aircraft vortex wakes . . . . .	16
1.3. Turbulent characteristics of vortex wake . . . . .	21
1.4. Modern methods of simulation for vortex wakes of middle — range aircraft . . . . .	22
<b>Chapter 2. Simulation method of discrete vortices . . . . .</b>	<b>25</b>
2.1. Statement of the problem. . . . .	25
2.2. Principal regulations of the method of discrete vortices. . . . .	29
2.3. Discrete vortex. . . . .	30
2.4. Vortex line segment . . . . .	31
2.5. Closed vortex frame . . . . .	32
2.6. Simulation of free turbulence in separated flows and in jet flows within the limits of the method of discrete vortices . . . . .	33
<b>Chapter 3. Near vortex wake of aircraft . . . . .</b>	<b>46</b>
3.1. Aircraft schematization . . . . .	46
3.2. Vortex schemes . . . . .	47
3.3. Peculiarities of modeling the middle-range aircraft stream line . . . . .	47
3.4. Characteristics of the near wake behind certain aircrafts . . . . .	49
<b>Chapter 4. Far vortex wake of turbojet aircraft . . . . .</b>	<b>52</b>
4.1. Calculation algorithm of the far vortex wake behind aircrafts . . . . .	52
4.2. Mathematic model of far vortex wake . . . . .	54
4.3. Verification for existence and singularity of the solution . . . . .	55
4.4. Flow similarity in the far vortex wake . . . . .	60

4.5. Universal transition block for the mathematic model of the far vortex wake . . . . .	63
4.6. Account for atmosphere conditions . . . . .	66
4.7. Verification for the work capacity of the mathematic model of the far vortex wake and for the reliability of the results obtained . . . . .	68
4.8. Vortex wake characteristics behind aircraft Il-76 . . . . .	69
4.9. Vortex wake characteristics behind aircrafts An-124, B-747 and A-380 . . . . .	76
<b>Chapter 5. Far vortex wake of aircraft with air propellers. . . . .</b>	<b>83</b>
5.1. Statement of the problem . . . . .	83
5.2. Account for the air propeller effect on the far vortex wake characteristics . . . . .	84
5.3. Selection of vortices number for simulation the air propeller work . . . . .	89
5.4. Examples of predicting the far vortex wake characteristics of aircrafts with air propellers in comparison with the experimental data . . . . .	90
5.5. Aircraft An-26 vortex wake characteristics . . . . .	91
5.6. Aircraft An-12 vortex wake characteristics . . . . .	97
5.7. Aircraft C-130 vortex wake characteristics . . . . .	103
<b>Chapter 6. Windy flows near the locality relief . . . . .</b>	<b>110</b>
6.1. Statement of the problem . . . . .	110
6.2. Method of solution. Schematization of the locality suface. . . . .	110
6.3. Examples of air flow characteristics prediction . . . . .	112
<b>Chapter 7. Simulation of the far vortex wake for an aircraft at take - off and landing . . . . .</b>	<b>116</b>
7.1. Statement of the problem . . . . .	116
7.2. Simulation for the near vortex wake. Linear theory . . . . .	119
7.3. Approximate prediction of the far vortex wake of aircraft. . . . .	126
7.4. Generation of the transversal flow with vortex clusters and prediction of the turbulent boundary layer . . . . .	127
7.5. Prediction of the far vortex wake with account for the airfield surface boundary layer effect for aircraft B-727. A comparison with the flight experiment. . . . .	130
7.6. Prediction of the far vortex wake of russian middle-range aircrafts Tu-204 and Il-96 at landing. . . . .	133

---

7.7. Numerical visualization of the far vortex wake near the ground . . . . .	134
7.8. Conclusions and prospects . . . . .	139
<b>Chapter 8. Aerodynamic characteristics of aircraft in the vortex wake . . . . .</b>	<b>141</b>
8.1. Statement of the problem . . . . .	141
8.2. Solution method . . . . .	142
8.3. Verification for the method — capacity of work and the obtained results reliability . . . . .	143
8.4. Aerodynamic characteristics of aircraft in the far vortex wake of other aircrafts . . . . .	146
8.5. Prediction of the windy flow effect due to the locality relief on the aerodynamic characteristics of aircraft . . . . .	150
8.6. Prediction of the dynamics characteristics of aircraft moving in the vortex wake . . . . .	154
References . . . . .	161



Ginevsky A.S., Zhelannikov A.I. **Vortex wakes of aircraft**

Methods of mathematical modeling of vortex wakes of aircraft in flights at high altitudes and close to the ground at take-off-landing regimes are presented. The modeling indicated is based on an extensive application of the method of discrete vortices in aircraft flights at high altitudes and on a conjugation of this method with the integral method of predicting the turbulent boundary layer which is produced at the secondary wall transversal flow induced by the aircraft vertex system at take-off-landing regimes. In this latter case an interaction between the vortex wake of aircraft and the secondary vortices generated at boundary layer separations is taken into account.

Methods of modeling the near and far vortex wakes of aircrafts with turbojets and air propellers are considered separately. The results of predicting vortex wakes of a series of domestic and foreign aircrafts are presented. The effect of number of factors is taken into account in this case: turbulence and atmosphere stratification, presence of side wind at take-off-landing regimes.

The computer time consumption while modeling the vortex wakes according to the proposed method is 3–4 orders less than in the case of using the well-known numerical methods.

The non-linear non-stationary mathematical model of light aircraft movement when they enter the vortex wake of a heavy aircraft with a description of possible catastrophic consequences for the light aircraft is considered separately. A comparison between the prediction data and the experimental results is given.

The book is intended for scientific specialists and engineers as well as for teachers, post-graduates and students of the respective higher school.