

---

Карманный справочник

**ФИЗИКА.  
ОТ ТЕОРИИ К ПРАКТИКЕ**

Книга 2

**Электричество,  
магнетизм.  
Теория,  
методы расчета,  
практические устройства**



**МОСКВА**  
Издательский дом «Додэка-XXI»

---

**J o h n   B i r d**

**N e w n e s**

# **Engineering Science**

**P o c k e t   B o o k**

**Third edition**



---

Д ж о н Б ё р д

К а р м а н н ы й с п р а в о ч н и к

**Физика.**

**От теории  
к практике**

**Книга 2**

**Электричество,  
магнетизм.**

**Теория,  
методы расчета,  
практические устройства**



**ОДЭКА**

---

УДК 53(035)

ББК 22.3я2

Б48

**Бёрд Дж.**

**Б48** Физика. От теории к практике. В 2 кн. Кн. 2: Электричество, магнетизм. Теория, методы расчета, практические устройства: Карманный справочник/Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Додэка-XXI». — 560 с.: ил. (Серия «Карманный справочник»)

ISBN 978-5-94120-088-7

В популярном справочнике «Физика. От теории к практике» (перевод британского справочника «Newnes Engineering Science», выдержавшего три издания) представлены методы, формулы, диаграммы и справочные данные основных разделов физики.

Для удобства читателей в русском варианте справочник издаётся в двух книгах. Первая содержит сведения по механике (с элементами сопротивления материалов, деталей машин и механизмов), оптике, термо- и гидродинамике. Вторая посвящена электричеству и магнетизму (с элементами электротехники, электроники и радиотехники). Справочник уникален, его характерной особенностью является нечасто встречающееся в популярной отечественной литературе сочетание теоретических положений с их практическим применением.

Вторая книга справочника насыщена описаниями электротехнических устройств — от элементарных конденсаторов, электромеханических реле и электрических звонков до мощных электродвигателей и электрогенераторов. Уделено внимание устройству полупроводниковых приборов и расчетам схем, содержащих такие приборы. Подробно изложены методы расчетов электрических схем постоянного и переменного тока, в том числе с привлечением комплексных чисел. Не забыты принципы работы и применение операционных усилителей, цифро-аналоговых и аналого-цифровых преобразователей. Кратко рассмотрены способы передачи и особенности прохождения электрических сигналов по каналам связи.

Справочник адресован широкому кругу читателей — студентам, учащимся технических колледжей, инженерам и всем, интересующимся техникой. Он особенно полезен практикам, желающим повысить уровень теоретических знаний, а также позволяет в необходимых случаях освежить свой научный багаж и вспомнить полузабытые формулы.

УДК 53(035)

ББК 22.3я2

Все права защищены. Никакая часть этого издания не может быть воспроизведена в любой форме или любыми средствами, электронными или механическими, включая фотографирование, ксерокопирование или иные средства копирования или сохранения информации, без письменного разрешения издательства.

This edition of Newnes Engineering Science Pocket Book by John Bird is published by arrangement with Elsevier Ltd, The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, OX5 1GB, England.

© John Bird

ISBN 0-7506-4991-7 (англ.)

© Издательский дом «Додэка-XXI»

ISBN 978-5-94120-088-7 (рус.)

® Серия «Карманный справочник»

---

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть третья. ОТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ И МАГНИТОВ К ЭЛЕКТРОГЕНЕРАТОРАМ, ТРАНЗИСТОРАМ И КАНАЛАМ СВЯЗИ .....	19
<b>40. Введение в электрические цепи.....</b>	<b>20</b>
Символьные обозначения электрических компонентов .....	20
Блок-схемы электрических/электронных систем .....	20
Электрический ток и количество электричества .....	22
Электрический потенциал и ЭДС .....	23
Сопротивление и проводимость.....	24
Основные электроизмерительные приборы .....	25
Линейные и нелинейные компоненты электрических схем ....	25
Закон Ома .....	26
Множители и делители .....	27
Проводники и изоляторы .....	27
Электрическая мощность .....	28
Электроэнергия .....	28
Основные эффекты электрического тока .....	29
Предохранители .....	29
<b>41. Электрическое сопротивление материалов.....</b>	<b>31</b>
Сопротивление и удельное сопротивление.....	31
Температурный коэффициент сопротивления .....	32
Цветовое кодирование резисторов и их омические значения .....	34
Цветовой код для постоянных резисторов .....	34
Буквенный и цифровой код для резисторов .....	35
<b>42. Химические эффекты электричества .....</b>	<b>36</b>
Электролиз .....	36
Электролитическое осаждение .....	36
Гальванический элемент .....	37
Поляризация.....	38
Саморазряд .....	38
Свойства электродных пар.....	38
Коррозия.....	39
ЭДС и внутреннее сопротивление гальванического элемента. ....	39
Первичные элементы .....	41
Элемент Лекланше .....	42
Ртутный элемент.....	42

Вторичные элементы.....	42
Кислотный аккумулятор .....	43
Щелочной аккумулятор .....	44
Ёмкость гальванического элемента.....	45
<b>43. Последовательные и параллельные цепи .....</b>	<b>47</b>
Последовательные цепи .....	47
Делитель напряжения .....	48
Параллельные цепи .....	49
Распределение тока .....	50
Лампы накаливания в последовательном и параллельном включении .....	52
Последовательное соединение.....	52
Параллельное соединение.....	53
<b>44. Ёмкость и конденсаторы .....</b>	<b>54</b>
Электростатическое поле .....	54
Напряжённость электрического поля .....	55
Ёмкость.....	56
Конденсаторы.....	57
Плотность электрического потока .....	57
Диэлектрическая проницаемость .....	58
Плоский конденсатор .....	59
Последовательно и параллельно соединённые конденсаторы .....	60
Конденсаторы, соединённые параллельно .....	60
Конденсаторы, соединённые последовательно .....	62
Электрическая прочность .....	64
Энергия заряженного конденсатора.....	65
Конструкции конденсаторов .....	65
Разрядка конденсаторов.....	68
<b>45. Магнитные цепи .....</b>	<b>69</b>
Магнитные поля .....	69
Магнитный поток и плотность потока .....	70
Магнитодвижущая сила и напряжённость магнитного поля ...	71
Магнитная проницаемость и кривые намагничивания.....	72
Магнитное сопротивление.....	74
Комбинированные последовательные магнитные цепи .....	74
Аналогия между электрическими и магнитными величинами .....	75
Гистерезис и потери на гистерезис .....	75
Гистерезисная петля .....	75
Потери на гистерезис .....	76
Потери на вихревые токи .....	79
Графический метод определения потерь на гистерезис и вихревые токи .....	81

<b>46. Магнитные материалы.....</b>	<b>83</b>
Магнитные свойства материалов .....	83
Диамагнетизм и парамагнетизм.....	83
Ферромагнетизм и ферромагнитные материалы .....	84
Непостоянные магнитные материалы.....	86
Сплав кремний—железо.....	86
Железоникелевый сплав .....	88
Порошковый сердечник.....	88
Ферриты.....	89
Постоянные магнитные материалы .....	89
<b>47. Электромагнетизм .....</b>	<b>91</b>
Магнитное поле электрического тока .....	91
Электромагниты.....	93
Электрический звонок .....	94
Реле .....	94
Подъёмные магниты .....	95
Телефонный аппарат .....	96
Проводник с током в магнитном поле .....	96
Сила, действующая на проводник .....	96
Громкоговоритель.....	97
Правило левой руки .....	98
Принцип работы простейшего электродвигателя постоянного тока.....	99
Принцип работы магнитоэлектрических измерительных приборов.....	100
Сила, действующая на заряд.....	101
<b>48. Электромагнитная индукция и индуктивность.....</b>	<b>103</b>
Электромагнитная индукция.....	103
Законы электромагнитной индукции .....	104
Индуктивность .....	106
Катушки индуктивности.....	107
Энергия, запасённая катушкой индуктивности .....	108
Индуктивность катушки .....	109
<b>49. Магнитосвязанные контуры .....</b>	<b>110</b>
Взаимная индуктивность .....	110
Коэффициент связи .....	111
Катушки индуктивности, соединённые последовательно .....	112
Связанные контуры.....	113
Вторичная обмотка без нагрузки .....	114
Вторичная обмотка с нагрузкой.....	115
Резонанс с подстроечным конденсатором .....	117
Правило точки для связанных контуров .....	118

<b>50. Электрические измерительные приборы и измерения .....</b>	<b>121</b>
Аналоговые измерительные приборы .....	121
Электромагнитные измерительные приборы.....	122
Выпрямительные детекторные приборы.....	123
Магнитоэлектрические измерительные приборы.....	123
Сравнение измерительных приборов .....	124
Шунтирующие и балластные резисторы .....	125
Электронные измерительные приборы.....	126
Омметр .....	127
Универсальные измерительные приборы.....	128
Ваттметры .....	128
Эффект «нагрузки» .....	129
Электронно-лучевой осциллограф .....	129
Децибелы (отношения логарифмов) .....	132
Нулевой метод измерений .....	134
Мост сопротивлений Уитстона.....	135
Потенциометр постоянного тока .....	135
Куметр (измеритель добротности).....	136
Ошибки измерений .....	137
Ошибки в пределах применимости прибора.....	137
Ошибки оператора.....	137
Ошибки из-за вносящего помехи измерительного прибора .....	138
<b>51. Полупроводниковые диоды.....</b>	<b>139</b>
Проводники, полупроводники, изоляторы.....	139
Кремний и германий.....	140
Материалы <i>n</i> - и <i>p</i> -типа .....	140
<i>p-n</i> -переход .....	141
Прямое и обратное смещение.....	143
Полупроводниковые диоды .....	145
Выпрямитель переменного тока .....	146
<b>52. Транзисторы.....</b>	<b>148</b>
Биполярный транзистор .....	148
Принцип работы транзистора.....	150
Обозначения транзисторов в схемах .....	152
Схемы включения транзисторов.....	152
Рабочие характеристики транзисторов .....	153
Схема с общей базой.....	153
Схема с общим эмиттером .....	154
Методика получения характеристик транзистора .....	155
Транзистор как усилитель .....	156
Усилитель с общей базой.....	156



Усилитель с общим эмиттером.....	157
Линия нагрузки .....	160
Коэффициенты усиления по току и напряжению .....	163
Тепловой проб'ой и способы его предотвращения .....	164
Способ первый .....	165
Способ второй .....	166
<b>53. Теория цепей постоянного тока.....</b>	<b>167</b>
Введение .....	167
Законы Кирхгофа .....	167
Принцип суперпозиции .....	170
Предварительный анализ цепей постоянного тока .....	172
Теорема Тевенина—Гельмгольца.....	176
Генератор неизменяющегося постоянного тока .....	178
Теорема Нортона .....	179
Эквивалентные схемы Тевенина и Нортона .....	180
Теорема о максимуме отдаваемой мощности.....	182
<b>54. Переменный ток и напряжение переменного тока.....</b>	<b>184</b>
Введение .....	184
Генератор переменного тока .....	184
Форма сигналов переменного тока .....	185
Величины переменного тока .....	186
Уравнение гармонической волны.....	189
Сложение и вычитание синусоидальных величин.....	191
Выпрямление переменного тока .....	193
<b>55. Однофазные последовательные цепи переменного тока .....</b>	<b>194</b>
Цепь переменного тока с чисто активным сопротивлением .....	194
Цепь переменного тока с чисто индуктивным сопротивлением .....	194
Цепь переменного тока с чисто ёмкостным сопротивлением .....	195
Последовательные $R-L$ цепи переменного тока .....	196
Последовательные $R-C$ цепи переменного тока .....	198
Последовательные $R-L-C$ цепи переменного тока.....	200
Последовательно соединённые импедансы .....	201
Резонанс последовательного контура.....	202
Добротность.....	204
Полоса частот .....	205
Избирательность резонансного контура .....	206
Мощность цепей переменного тока .....	206
Треугольник мощностей и коэффициент мощности.....	208
<b>56. Однофазные параллельные цепи переменного тока .....</b>	<b>210</b>
Введение .....	210

<i>R-L</i> параллельная цепь переменного тока .....	210
<i>R-C</i> параллельная цепь переменного тока.....	212
<i>L-C</i> параллельная цепь .....	213
<i>L-R-C</i> параллельная цепь переменного тока.....	214
Параллельный резонанс и добротность .....	218
Параллельный резонанс .....	218
Резонансная частота .....	218
Резонансное сопротивление .....	219
Заграждающий фильтр .....	219
Добротность.....	219
<b>57. Переходные процессы в цепях постоянного тока</b> .....	221
Введение .....	221
Зарядка конденсатора .....	221
Постоянная времени для <i>R-C</i> цепи.....	223
Кривые переходного процесса <i>R-C</i> цепи.....	223
Разрядка конденсатора.....	226
Рост силы тока в <i>L-R</i> цепи .....	228
Постоянная времени <i>L-R</i> цепи .....	230
Кривые переходного процесса <i>L-R</i> цепи.....	230
Спад тока в <i>L-R</i> цепи.....	231
Переключаемые индуктивные цепи .....	233
Влияние постоянной времени на сигнал прямоугольной формы .....	234
Интегрирующая цепь .....	234
Дифференцирующая цепь.....	235
<b>58. Операционные усилители</b> .....	236
Введение .....	236
Передающая характеристика .....	237
Отрицательная обратная связь.....	238
Ширина полосы частот .....	238
Некоторые параметры ОУ .....	239
Входной ток .....	239
Разность входных токов .....	239
Входное напряжение смещения.....	239
Коэффициент ослабления синфазного сигнала .....	239
Скорость нарастания выходного напряжения .....	240
ОУ в качестве инвертирующего усилителя.....	240
Коэффициент усиления .....	241
Входной импеданс .....	242
ОУ в качестве неинвертирующего усилителя .....	243
Коэффициент усиления .....	243
Входной импеданс .....	244
ОУ в качестве повторителя напряжения .....	244

ОУ в качестве сумматора .....	245
ОУ в качестве компаратора напряжений .....	247
Светочувствительная схема сигнализации .....	248
ОУ в качестве интегратора .....	249
ОУ в качестве дифференциального усилителя .....	251
Цифро-аналоговое преобразование .....	252
Аналогово-цифровое преобразование .....	255
<b>59. Трёхфазные системы</b> .....	257
Введение .....	257
Трёхфазные источники тока .....	257
Соединение звездой .....	259
Соединение треугольником .....	261
Соединение звездой .....	264
Соединение треугольником .....	264
Мощность в трёхфазных системах .....	263
Измерение мощности в трёхфазных системах .....	265
Метод с одним ваттметром для симметричной нагрузки .....	265
Метод с двумя ваттметрами для симметричных и несимметричных нагрузок .....	265
Метод с тремя ваттметрами для трёхфазной четырёхпроводной системы для симметричной и несимметричной нагрузки .....	266
Сравнение соединений нагрузок звездой и треугольником .....	267
Преимущества трёхфазных систем .....	267
<b>60. Трансформаторы</b> .....	268
Введение .....	268
Принцип работы трансформатора .....	268
Векторная диаграмма ненагруженного трансформатора .....	270
Уравнение ЭДС трансформатора .....	271
Векторная диаграмма трансформатора под нагрузкой .....	272
Конструкции трансформаторов .....	273
Эквивалентная схема трансформатора .....	274
Изменение выходного напряжения трансформатора .....	276
Потери и коэффициент полезного действия трансформаторов .....	277
Потери мощности в трансформаторах .....	277
Коэффициент полезного действия трансформатора .....	278
Максимальный коэффициент полезного действия .....	279
Согласование сопротивлений источника питания и нагрузки .....	279
Автотрансформаторы .....	280
Экономия меди при изготовлении автотрансформаторов .....	282
Преимущества автотрансформаторов .....	282

Недостатки автотрансформаторов.....	282
Применение автотрансформаторов.....	283
Изолирующие трансформаторы .....	283
Трёхфазные трансформаторы .....	283
Токовые трансформаторы .....	284
Трансформаторы напряжения .....	286
<b>61. Машины постоянного тока .....</b>	<b>287</b>
Введение .....	287
Механическое действие электрического тока.....	287
Устройство машины постоянного тока .....	289
Параллельные, последовательные и смешанные обмотки.....	290
ЭДС, генерируемая обмотками якоря .....	291
Генераторы постоянного тока .....	292
Типы генераторов постоянного тока и их характеристики.....	292
Генератор с независимым возбуждением .....	292
Генератор параллельного возбуждения.....	293
Генератор последовательного возбуждения.....	295
Генератор смешанного возбуждения .....	296
Потери мощности в машинах постоянного тока .....	298
Коэффициент полезного действия генератора постоянного тока.....	298
Электродвигатель постоянного тока .....	300
Противо-ЭДС и полная электрическая мощность .....	300
Вращающий момент электродвигателя .....	301
Типы электродвигателей и их характеристики.....	302
Электродвигатель параллельного возбуждения .....	302
Электродвигатель последовательного возбуждения .....	304
Электродвигатель смешанного возбуждения .....	306
Коэффициент полезного действия электродвигателей постоянного тока .....	308
Стартер электродвигателя постоянного тока .....	309
Управление скоростью электродвигателя постоянного тока.....	310
Электродвигатель с параллельным возбуждением.....	310
Электродвигатель с последовательным возбуждением.....	311
Охлаждение электродвигателя.....	312
<b>62. Электродвигатели переменного тока.....</b>	<b>313</b>
Введение .....	313
Создание вращающегося магнитного поля.....	313
Скорость синхронизации.....	316
Устройство трёхфазного асинхронного двигателя .....	318
Принцип работы трёхфазного асимметричного двигателя ....	319

Скольжение .....	320
ЭДС и частота вращения ротора.....	321
ЭДС ротора .....	321
Частота ротора .....	321
Импеданс и ток ротора.....	322
Активное сопротивление ротора .....	322
Реактивное сопротивление ротора .....	322
Импеданс ротора .....	322
Ток ротора .....	323
Потери на медь .....	323
Потери асинхронного двигателя и коэффициент полезного действия .....	324
Уравнение вращающего момента для асинхронного двигателя.....	326
Характеристики «вращающий момент/скорость» .....	327
Методы запуска асинхронных двигателей .....	329
Короткозамкнутый ротор .....	329
Фазный ротор .....	331
Достоинства асинхронных двигателей с короткозамкнутым ротором .....	331
Достоинства асинхронных двигателей с фазным ротором.....	332
Двухклеточный асинхронный двигатель.....	332
Применение трехфазных асинхронных двигателей.....	333
Однофазный асинхронный двигатель .....	333
Трёхфазный синхронный двигатель .....	333
Однофазные синхронные двигатели .....	334
<b>63. Комплексные числа и операции над ними .....</b>	<b>335</b>
Понятие комплексных чисел.....	335
Операции с использованием декартовых комплексных чисел .....	337
Сложение и вычитание .....	337
Умножение.....	337
Сопряжённые комплексные числа .....	338
Деление .....	338
Комплексные уравнения .....	339
Комплексное число в тригонометрической форме .....	339
Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме .....	341
Умножение.....	341
Деление .....	341
Возведение в степень комплексных чисел и извлечение корней из них (теорема Муавра).....	342

<b>64. Анализ последовательных цепей переменного тока с применением комплексных чисел</b> .....	344
Введение .....	344
Цепь переменного тока с чисто активным сопротивлением.....	344
Чисто индуктивная цепь переменного тока.....	345
Чисто ёмкостная цепь переменного тока.....	345
$R$ - $L$ последовательная цепь.....	346
$R$ - $C$ последовательная цепь.....	348
$R$ - $L$ - $C$ последовательная цепь.....	350
<b>65. Анализ параллельных цепей переменного тока с применением комплексных чисел</b> .....	353
Введение .....	353
Проводимость активная, реактивная и полная.....	353
Параллельные цепи переменного тока.....	354
Распределение тока в цепях переменного тока.....	356
<b>66. Мощность и коэффициент мощности в цепях переменного тока</b> .....	360
Мощность в цепях переменного тока.....	360
Треугольник мощностей и коэффициент мощности.....	362
Определение мощности с применением комплексных чисел.....	364
Увеличение коэффициента мощности .....	365
<b>67. Мосты переменного тока</b> .....	369
Введение .....	369
Состояние равновесия в измерительных мостах переменного тока .....	369
Процедура определения уравнений равновесия для любого моста переменного тока.....	371
Типы индикаторов.....	371
Разновидности мостовых схем переменного тока .....	372
Простой мост Максвелла .....	372
Мост Хэя .....	374
Мост Оуэна .....	375
Мост Максвелла—Вина.....	375
Мост Саути.....	376
Мост Шеринга .....	376
Мост Вина.....	377
<b>68. Последовательный резонанс и добротность</b> .....	379
Введение .....	379
Последовательный резонанс.....	379
Добротность.....	382
Повышение напряжения.....	386
Добротность компонентов последовательной цепи и полная добротность .....	388

Ширина полосы частот .....	388
Избирательность .....	390
Небольшие отклонения от резонансной частоты .....	392
<b>69. Параллельный резонанс и добротность .....</b>	<b>395</b>
Общие понятия о параллельном резонансе .....	395
Параллельная $L$ - $R$ - $C$ цепь .....	397
Динамическое сопротивление .....	399
Добротность параллельной $R$ - $L$ - $C$ цепи .....	399
Частота свободных колебаний и резонансная частота вынужденных колебаний .....	401
Параллельная $LR$ - $CR$ цепь .....	402
Добротность компонентов параллельной цепи и полная добротность .....	404
Небольшие отклонения от резонансной частоты .....	404
<b>70. Анализ цепей с помощью определителей .....</b>	<b>406</b>
Введение .....	406
Решение систем уравнений с помощью определителей .....	407
Система уравнений с двумя неизвестными .....	407
Система уравнений с тремя неизвестными .....	408
Применение законов Кирхгофа к теории цепей .....	410
<b>71. Анализ цепей методами контурных токов и узловых потенциалов .....</b>	<b>415</b>
Метод контурных токов .....	415
Метод узловых потенциалов .....	417
<b>72. Принцип суперпозиции .....</b>	<b>422</b>
Введение .....	422
Применение принципа суперпозиции для цепи постоянного тока .....	422
Применение принципа суперпозиции для цепи переменного тока .....	425
<b>73. Теорема Тевенина и теорема Нортонa .....</b>	<b>429</b>
Введение .....	429
Теорема Тевенина .....	429
Теорема Нортонa .....	434
Эквивалентность цепей Тевенина и Нортонa .....	438
<b>74. Преобразования «треугольник—звезда» и «звезда—треугольник» .....</b>	<b>442</b>
Введение .....	442
Соединения «треугольник» и «звезда» .....	442
Преобразование «треугольник—звезда» .....	443
Преобразование «звезда—треугольник» .....	446
<b>75. Теоремы о максимуме отдаваемой мощности и согласование импедансов .....</b>	<b>449</b>
Теоремы о максимуме отдаваемой мощности .....	449

Согласование импедансов .....	452
<b>76. Периодические сигналы сложной формы .....</b>	<b>456</b>
Введение .....	456
Основное уравнение периодических сигналов сложной формы .....	457
Гармонический синтез.....	458
Действующее и среднее значения величин и коэффициент формы сложного сигнала .....	460
Действующее значение величин .....	460
Среднее значение .....	460
Коэффициент формы .....	461
Мощность периодического сложного сигнала .....	461
Коэффициент мощности .....	462
Гармоники в однофазной цепи .....	463
«Чистое» сопротивление .....	464
«Чистая» индуктивность.....	464
«Чистая» ёмкость .....	465
Селективный резонанс.....	468
Источники гармоник .....	470
<b>77. Численные методы гармонического анализа .....</b>	<b>477</b>
Введение .....	477
Гармонический анализ на основе данных, представленных в виде таблицы или графика .....	477
Оценка сложных сигналов .....	483
<b>78. Диэлектрики и диэлектрические потери .....</b>	<b>484</b>
Электрические поля, ёмкость и диэлектрическая проницаемость .....	484
Поляризация.....	485
Электрическая прочность диэлектрика.....	486
Тепловые эффекты .....	489
Механические свойства .....	489
Типы конденсаторов, применяемых на практике.....	489
Жидкие диэлектрики и газовая изоляция .....	490
Диэлектрические потери и угол потерь.....	490
Последовательное соединение.....	490
Параллельное соединение.....	492
Потери мощности.....	493
<b>79. Эффекты электрического поля в электротехнических устройствах .....</b>	<b>495</b>
Введение .....	495
Ёмкость между концентрическими цилиндрами.....	496
Напряжённость электрического поля в диэлектрике .....	498
Размеры самого экономичного кабеля .....	499



Ёмкость изолированной двухпроводной линии .....	500
Энергия, накопленная в электрическом поле.....	500
Скин-эффект.....	501
Индуктивность концентрического цилиндра (или коаксиального кабеля).....	502
Индуктивность изолированной двухпроводной линии .....	502
Энергия, накопленная в магнитном поле .....	503
<b>80. Атенюаторы.....</b>	<b>504</b>
Введение .....	504
Четырёхполюсники .....	504
Характеристический импеданс.....	505
Логарифм отношения двух мощностей .....	505
Симметричный $T$ -образный аттенюатор .....	507
Расчёт симметричного $T$ -образного аттенюатора.....	507
Симметричный $\pi$ -образный аттенюатор.....	508
Расчёт симметричного $\pi$ -образного аттенюатора .....	509
Вносимые потери .....	510
Асимметричные $T$ - и $\pi$ -образные аттенюаторы.....	512
$G$ -образный аттенюатор.....	516
Каскадное соединение четырёхполюсников .....	516
<b>81. Фильтры .....</b>	<b>519</b>
Введение .....	519
Фильтры нижних частот.....	519
Фильтры верхних частот .....	521
Полосовые фильтры .....	523
Заграждающие фильтры.....	524
<b>82. Модуляция.....</b>	<b>526</b>
Введение .....	526
Амплитудная модуляция.....	526
Частотная модуляция .....	527
Девияция частоты, диапазон изменения частоты и модулирующий индекс .....	528
Фазовая модуляция .....	529
Импульсная модуляция .....	529
Импульсно-кодовая модуляция .....	530
<b>83. Двухпроводные линии связи (длинные линии).....</b>	<b>532</b>
Введение .....	532
Первичные параметры линий связи.....	532
Задержка по фазе, длина волны и скорость распространения .....	534
Задержка по фазе .....	535
Длина волны .....	535
Скорость распространения .....	536

Вторичные параметры линий связи .....	537
Связь характеристического импеданса и коэффициента распространения волны с первичными параметрами линии .....	538
Искажения в линиях связи .....	540
Отражение волны и коэффициент отражения .....	541
Энергия, связанная с распространяющейся волной.....	541
Коэффициент отражения.....	542
Стоячие волны и коэффициент стоячей волны .....	543
Коэффициент стоячей волны .....	548
<b>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ .....</b>	<b>550</b>

---

## Часть третья

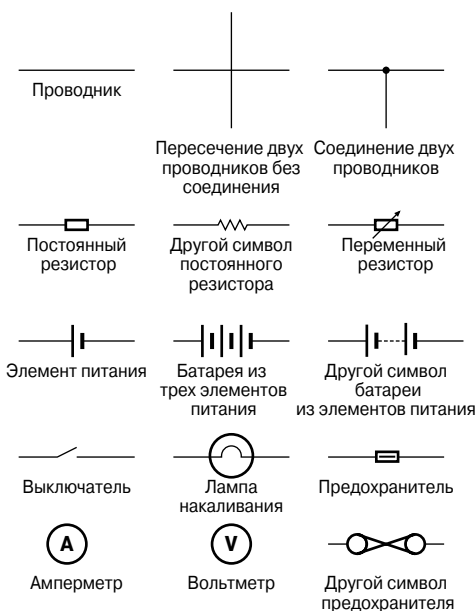
От электрических  
зарядов и магнитов  
к электро-  
генераторам,  
транзисторам  
и каналам связи

## 40. ВВЕДЕНИЕ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

### Символьные обозначения электрических компонентов

Разветвлённые электрические цепи часто называют *электрическими схемами*. Для их отображения на бумаге или на экране дисплея используют чертежи, на которых с помощью условных знаков (символов) и линий обозначены отдельные компоненты и проводники, соединяющие их.

На **Рис. 40.1** представлены наиболее распространённые символы компонентов, образующих электрические цепи.



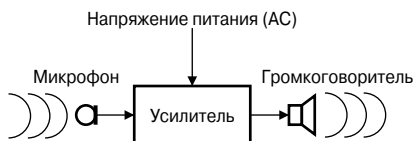
**Рис. 40.1**

О других компонентах электрических схем (конденсаторах, транзисторах и т.п.) и их назначении речь пойдёт в последующих главах.

### Блок-схемы электрических/электронных систем

Электрическая/электронная блок-схема — это группа компонентов, соединение которых выполняет предписанную функцию. На **Рис. 40.2** показана простейшая система оповещения по трансляционной сети, где микрофон используется как прибор, принимающий акустическую энергию в форме волн звукового

давления и преобразующий её в электрическую энергию в форме небольших напряжений и токов, называемых *электрическими сигналами*.



**Рис. 40.2**

Затем сигнал, поступивший от микрофона, усиливается с помощью электронного устройства, содержащего транзисторы и интегральные схемы, после чего поступает на громкоговоритель.

*Подсистема* — это часть системы, выполняющая определённую функцию в системе. Усилитель, показанный на **Рис. 40.2**, — пример такой подсистемы.

*Компонент*, или *элемент*, — это, как правило, наименьшая часть системы, у которой есть определённая и чётко обозначенная функция. На **Рис. 40.2**, например, таким элементом является микрофон.

В целом **Рис. 40.1** отображает то, что называют *блок-схемой*.

Работу электрических/электронных систем, которые часто бывают очень сложными, легче понять, если их представить в виде такой блок-схемы. Для того чтобы понять, как работает вся система, совсем не обязательно досконально знать, что происходит в каждой подсистеме.

Другой пример технической системы представлен на **Рис. 40.3**, где показана система контроля температуры, включающая источник тепла (например, газовый нагреватель), блок управления подачей топлива (например, электромагнитный клапан), термореле и источник электроэнергии.

Эта система может быть представлена в виде блок-схемы (**Рис. 40.4**); термореле сравнивает температуру в помещении с заданной желаемой температурой и регулирует выключение/включение переключателя.

Существует много типов технических систем. *Система связи* — один из примеров, где локальная сеть могла бы включать в себя сервер, коаксиальный кабель, сеть адаптеров, несколько компьютеров и лазерный принтер. *Электромеханическая система* — ещё один пример, где электрическая система автомобиля могла бы содержать батарею, двигатель, стартёр, катушку зажигания, прерыватель контакта и распределительный элемент. Все подобные системы могут быть представлены блок-схемами.

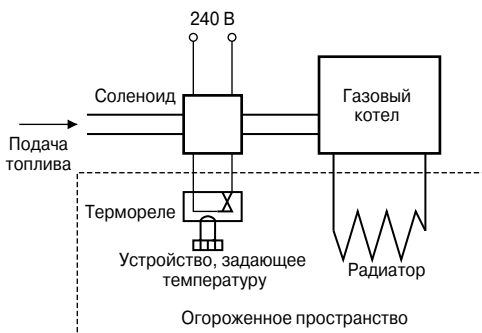


Рис. 40.3

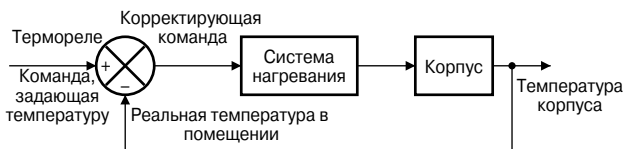


Рис. 40.4

## Электрический ток и количество электричества

Все *атомы* состоят из *протонов*, *нейтронов* и *электронов*. Протоны, положительно заряженные частицы, и нейтроны, частицы, не имеющие заряда, входят в состав *атомного ядра*. Вне ядра находятся микроскопические отрицательно заряженные частицы, называемые *электронами*. Атомы различных материалов отличаются друг от друга тем, что обладают разным числом протонов, нейтронов и электронов. В атоме существует равное число протонов и электронов, и они, как говорится, находятся в электрическом равновесии, так как заряды положительных и отрицательных частиц уравнивают друг друга.

Если в атоме больше двух электронов, они образуют *электронные оболочки*, находящиеся на некоторых определённых расстояниях от атомных ядер.

Все атомы притягиваются друг к другу благодаря мощной силе притяжения, существующей между ядрами и электронами. Однако электроны на внешней оболочке атома притягиваются ядром меньше, чем электроны, находящиеся на более близких к нему оболочках.

Атом может потерять электрон, и тогда он превращается в положительно заряженный *ион*, который уже не находится в электрическом равновесии, а следовательно, может притягивать к себе электрон другого атома. Электроны, движущиеся от од-

ного атома к другому, называются *свободными электронами*. Такое хаотичное движение может существовать само по себе. Однако если к материалу приложить *электрическое напряжение*, то электроны, как правило, начинают двигаться в определённом направлении. Такое движение свободных электронов, называемое *дрейфом*, создаёт электрический поток, или ток. Следовательно, *ток — это разновидность движения заряженных частиц*.

*Проводники* — это твёрдые тела, содержащие электроны, слабо связанные с ядром, и поэтому имеющие возможность легко перемещаться по материалу от одного атома к другому. *Изоляторы* — это материалы, электроны которых имеют сильные связи со своими атомами.

Единицу *электрического заряда*  $Q$  называют *кулоном* [Кл] (1 кулон равен заряду  $6.24 \times 10^{18}$  электронов).

Если в проводнике дрейф электронов происходит со скоростью 1 кулон в секунду, то говорят, что протекающий в результате ток равен одному *амперу* [А].

Следовательно, 1 ампер = 1 кулон в секунду, или  $1 \text{ А} = 1 \text{ Кл/с}$ .

Соответственно 1 кулон = 1 ампер-секунда, или  $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А}\cdot\text{с}$ .

Обобщая, можно сказать, что, если  $I$  — ток, измеряемый в амперах, а  $t$  — время в секундах, в течение которого течёт ток, то  $I \times t$  характеризует количество электрического заряда в кулонах, то есть количество перемещённого электрического заряда

$$Q = Q \times t$$

**Например**, если ток силой 10 ампер течёт в течение четырёх минут, количество перемещённого электричества

$$Q = It = 10 \times 240 = 2\,400 \text{ Кл.}$$

## Электрический потенциал и ЭДС

Единица *электрического потенциала* — *вольт* [В]. Один вольт — это один джоуль на кулон [Дж/Кл]. Один вольт определяют как разность потенциалов между двумя точками проводника, который, при токе в один ампер, рассеивает мощность в один ватт, то есть

$$\begin{aligned} \text{вольт} &= \frac{\text{ватт}}{\text{ампер}} = \frac{\text{джоуль/секунда}}{\text{ампер}} = \\ &= \frac{\text{джоуль}}{\text{ампер-секунда}} = \frac{\text{джоуль}}{\text{кулон}}. \end{aligned}$$

Изменение электрического потенциала между двумя точками электрической цепи называют *разностью потенциалов*.

*Электродвижущая сила (ЭДС)*, обеспечиваемая источником энергии, например батареей или генератором, также измеряется в вольтах.

Для того чтобы между двумя точками цепи протекал постоянный ток, необходимо, чтобы между ними существовала разность потенциалов, или *электрическое напряжение*  $V$ . Если требуется, чтобы в цепи протекал ток, цепь, включающая источник электроэнергии, должна быть замкнута.

На **Рис. 40.5** показан элемент питания, подсоединённый к лампе накаливания. Принято считать, что ток течёт от положительного электрода элемента по цепи к отрицательному электроду.

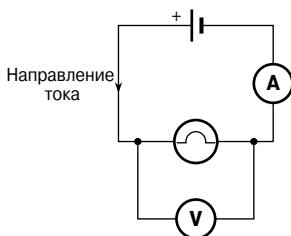


Рис. 40.5

## Сопротивление и проводимость

Электрический ток подвержен трению. Это трение, или противодействие, называется электрическим *сопротивлением*  $R$  и является свойством проводника, которое ограничивает ток. Единица электрического сопротивления — *ом* [Ом]. Один ом определяют как сопротивление току силой один ампер, протекающему через это сопротивление, когда к нему подсоединено напряжение в один вольт.

$$\text{Сопротивление} = \frac{\text{разность потенциалов}}{\text{сила тока}},$$

то есть

$$R = \frac{V}{I}$$

где  $V$  — разность потенциалов в вольтах между двумя точками,  $I$  — ток, текущий между этими точками, в амперах.

Компоненты электрических цепей, обладающие сопротивлением электрическому току, называют *резисторами*. С их помощью создаётся требуемая разность потенциалов, ограничивается ток и т.д. Резисторы могут быть постоянными (их сопротивление не может быть изменено) и переменными, имеющими регулятор подстройки сопротивления.



Величину, обратную сопротивлению, называют *проводимостью*. Следовательно, проводимость

$$G = \frac{1}{R}$$

Единица проводимости — *сименс* [См].

## Основные электроизмерительные приборы

*Амперметр* — это прибор для измерения силы тока; в цепь он включается последовательно с элементами, через которые протекает ток. На **Рис. 40.5** показан соединённый последовательно с лампой амперметр, который измеряет ток, протекающий через эту лампу. Чтобы влияние самого амперметра на величину тока, протекающего в цепи, было минимальным, он должен обладать очень низким сопротивлением.

*Вольтметр* — это прибор для измерения разности потенциалов. Его следует подсоединять параллельно к той части цепи, разность потенциалов которой необходимо измерить. Чтобы через вольтметр не протекал слишком большой ток, он должен иметь очень высокое сопротивление.

*Омметр* — это прибор для измерения сопротивлений.

*Мультиметр*, или универсальный измерительный прибор, можно использовать для измерения и напряжения, и силы тока, и сопротивления. Типичный пример такого прибора — *ампер-вольтметр*.

*Электронный осциллограф* можно использовать как для наблюдения за формой сигнала, так и для измерения напряжения и силы тока. На экране прибора виднодвигающееся пятно света. То, насколько пятно отклонилось от своего первоначального положения, зависит от разности потенциалов, приложенной к выводам осциллографа, и от выбранного диапазона напряжений. Это смещение откалибровано в «вольтах на сантиметр». Например, если пятно сместилось на 3 см и масштаб составляет 10 В/см, то величина ЭДС равна 3 см × 10 В/см, то есть 30 В.

(Более подробно описание приборов для измерения электрических величин см. в гл. 50.)

## Линейные и нелинейные компоненты электрических схем

На **Рис. 40.6** показана электрическая цепь, где ток  $I$  может быть изменён с помощью резистора переменного сопротивления  $R_2$ .

При различных значениях  $R_2$  с помощью амперметра измеряют ток, протекающий в резисторе  $R_1$ , и разность потенциалов на концах  $R_1$ , показанную вольтметром. По результатам замеров строят показанную на **Рис. 40.7а** зависимость разности потенциалов от тока.

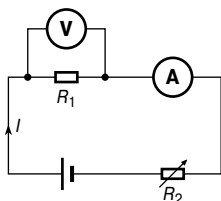


Рис. 40.6

График зависимости в виде прямой, проходящей через начало координат, показывает, что ток прямо пропорционален разности потенциалов.



Рис. 40.7

Так как градиент, то есть  $\frac{\text{разность потенциалов}}{\text{сила тока}}$ , — это величина постоянная, то и сопротивление  $R_1$  постоянно. Следовательно, резистор — это пример *линейного компонента*.

Если резистор  $R_1$  на Рис. 40.6 заменить таким компонентом, как лампа, и снимать показания вольтметра для разных токов, то получится кривая, показанная на Рис. 40.7б. Так как градиент в данном случае изменяется, лампа — это пример *нелинейного компонента*.

## Закон Ома

*Закон Ома* гласит, что ток  $I$ , протекающий по цепи, прямо пропорционален приложенному напряжению  $V$  и обратно пропорционален сопротивлению  $R$  при постоянной температуре. Следовательно,

$$\boxed{I = \frac{V}{R}} \quad \text{или} \quad \boxed{V = IR} \quad \text{или} \quad \boxed{R = \frac{V}{I}}$$

**Например,** ток, протекающий через резистор, равен 0.8 А. Если разность потенциалов составляет 20 В, то по закону Ома

$$R = \frac{V}{I} = \frac{20}{0.8} = \frac{200}{8} = 25 \text{ Ом.}$$

## Множители и делители

Ток, напряжение и сопротивление зачастую бывают очень большими или очень маленькими. Поэтому часто для сокращения записи применяют множители или делители единиц, о чём рассказывалось в гл. 1 кн 1. Наиболее распространённые из них представлены в **Табл. 40.1**.

Таблица 40.1

Приставка	Наименование	Значение действия	Пример
М	мега	умножить на 1 000 000 (то есть $\times 10^6$ )	2 МОм = = $2 \times 1\,000\,000\text{ Ом}$ = = 2 000 000 Ом
к	кило	умножить на 1 000 (то есть $\times 10^3$ )	10 кВ = $10 \times 1\,000\text{ В}$ = 10 000 вольт
м	мили	разделить на 1 000 (то есть $\times 10^{-3}$ )	$25\text{ мА} = \frac{25}{1\,000}\text{ А} =$ = 0.025 ампер
мк	микро	разделить на 1 000 000 (то есть $\times 10^{-6}$ )	$50\text{ мкВ} = \frac{50}{1\,000\,000}\text{ В} =$ = 0.000005 вольт

**Например,** батарея 100 В подсоединена к резистору и создаёт ток силой 5 мА. Сопротивление резистора в этом случае равно

$$R = \frac{V}{I} = \frac{100}{5 \times 10^{-3}} = \frac{100 \times 10^3}{5} = 20 \times 10^3 = \mathbf{20\text{ кОм.}}$$

Если напряжение уменьшить, к примеру, до 25 В, то потечёт ток, равный

$$I = \frac{V}{R} = \frac{25}{20 \times 10^3} = \frac{25}{20} \times 10^{-3} = \mathbf{1.25\text{ мА.}}$$

## Проводники и изоляторы

*Проводник* — это материал, обладающий низким сопротивлением, что позволяет току течь через него без больших потерь. Все металлы являются проводниками, в их числе медь, алюминий, бронза, платина, серебро, золото. Графит также является проводником.

*Изолятор* — это материал, обладающий высоким сопротивлением, которое не даёт току возможность течь через него. К изоляторам относятся пластмасса, резина, стекло, фарфор, воздух, бумага, пробка, слюда, керамика и некоторые масла.

## Электрическая мощность

Произведение разности потенциалов  $V$  и силы тока  $I$  определяет *мощность*  $P$ , рассеиваемую электрической цепью. Единица мощности — *ватт* [Вт].

Следовательно,

$$P = V \times I$$

Применяя закон Ома, можно показать, что мощность можно также выразить как произведение сопротивления квадрата тока, протекающего через это сопротивление, то есть

$$P = I^2 R$$

или

отношение квадрата разности потенциалов на сопротивлении к этому сопротивлению, то есть

$$P = \frac{V^2}{R}$$

Таким образом, существуют три формулы, по которым можно подсчитать мощность.

**Например**, если через резистор с сопротивлением 5 кОм течёт ток силой 4 мА, то рассеиваемая на резисторе мощность равна

$$\begin{aligned} P &= I^2 R = (4 \times 10^{-3})^2 (5 \times 10^3) = 16 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^3 = \\ &= 80 \times 10^{-3} = \mathbf{0.08 \text{ Вт}}, \text{ или } \mathbf{80 \text{ мВт}}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

так как  $I = 4 \times 10^{-3}$  и  $R = 5 \times 10^3$ , то по закону Ома напряжение

$$V = IR = 4 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^3 = \mathbf{20 \text{ В}}.$$

Следовательно, мощность

$$P = V \times I = 20 \times 4 \times 10^{-3} = \mathbf{80 \text{ мВт}}.$$

## Электроэнергия

$$\text{Электрическая энергия} = \text{мощность} \times \text{время}$$

Если мощность измерять в ваттах, а время — в секундах, то тогда единица *электрической энергии* — ватт-секунда, или *джоуль* [Дж].

Если мощность измерять в киловаттах, а время в часах, то единица энергии — *киловатт-час* [кВт·час], который в быту зачастую называют «единицей электричества». «Счётчик электроэнергии», который устанавливают в домах, регистрирует количество использованных киловатт-часов, а следовательно, является счётчиком энергии.

$$\begin{aligned} 1 \text{ киловатт-час} &= 1\,000 \text{ ватт-час} = 1\,000 \times 60 \times 60 = \\ &= 3\,600\,000 \text{ ватт-секунд, или джоулей.} \end{aligned}$$

**Например,** электрическое оборудование в офисе потребляет ток 13 А от источника питания 240 В. Оборудование работает в течение 30 часов каждую неделю, а 1 кВт энергии стоит 7 пенсов. Определим еженедельные затраты на электроэнергию.

$$\text{Мощность} = VI \text{ ватт} = 240 \times 13 = 3\,120 \text{ Вт} = \mathbf{3.12 \text{ кВт.}}$$

$$\begin{aligned} \text{Затраченная энергия} &= \text{мощность} \times \text{время} = (3.12 \text{ кВт}) \times (30 \text{ ч.}) = \\ &= \mathbf{93.6 \text{ кВт}\cdot\text{ч.}} \end{aligned}$$

При стоимости 7 пенсов за 1 киловатт-час вся затраченная электроэнергия стоит

$$93.6 \times 7 = 655.2 \text{ пенса.}$$

$$\text{Итого, еженедельная стоимость электричества} = \mathbf{\pounds 6.55.}$$

## Основные эффекты электрического тока

К трём основным последствиям работы электрической цепи при протекании в ней тока относят: эффект магнитного поля, химический и тепловой эффекты.

Эффекты электрического тока находят применение во многих приборах и технологических процессах.

**Магнитный эффект:** звонки, реле, моторы, генераторы, трансформаторы, телефоны, зажигание в автомобиле, подъёмные магниты и др. (см. гл. 47).

**Химический эффект:** первичные и вторичные элементы питания и гальваническое покрытие (см. гл. 42).

**Тепловой эффект:** электроплиты, водные нагреватели, электрические камины, утюги, топки, чайники, паяльники и т. п.

## Предохранители

*Предохранитель* применяют для того, чтобы предотвратить перегрузку электрической цепи. Предохранитель на основе проволоки из материала с низкой температурой плавления использует тепловой эффект электрического тока. Предохранитель вставляют в электрическую цепь, и если ток становится слишком большим, то проволока предохранителя плавится, и цепь

размыкается. На электрических схемах предохранитель обозначают символом, показанным на **Рис. 40.1**.

**Например**, мощность электрического тостера, подсоединённого к источнику питания 240 В, равна 1 кВт.

Рассеиваемая мощность равна  $P = VI$ ,  
откуда сила тока

$$I = \frac{P}{V} = \frac{1\,000}{240} = \frac{100}{24} = 4.17 \text{ А.}$$

Следовательно, для тостера следует ставить **предохранитель на 5 А**.

## 41. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### Сопротивление и удельное сопротивление

Четыре фактора определяют электрическое сопротивление проводника: длина проводника, площадь поперечного сечения проводника, тип материала и температура материала.

*Сопротивление*  $R$  прямо пропорционально длине проводника  $l$ , то есть  $R \sim l$ . Это значит, что если длина отрезка провода, например, удваивается, то сопротивление тоже увеличивается в 2 раза.

Сопротивление  $R$  обратно пропорционально площади поперечного сечения проводника  $A$ , то есть  $R \sim \frac{1}{A}$ . Это значит, что если, например, удвоить площадь поперечного сечения отрезка провода, то сопротивление уменьшится в 2 раза.

Поскольку  $R \sim l$  и  $R \sim \frac{1}{A}$ , то можно записать  $R \sim \frac{l}{A}$ . Если ввести в это соотношение коэффициент пропорциональности, то можно делать поправки на применяемый материал.

Коэффициент пропорциональности называют *удельным сопротивлением* материала и обозначают символом  $\rho$  (греческая буква ро).

Тогда сопротивление можно определить отношением

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

Единица удельного сопротивления  $\rho$  — *ом-метр* [ $\text{Ом} \cdot \text{м}$ ].

Величина удельного сопротивления любого материала равна сопротивлению единичного куба этого материала, измеренному между его противоположными гранями.

Величина удельного сопротивления зависит от температуры; ниже приведены значения удельного сопротивления некоторых материалов, полученные при комнатной температуре.

Серебро	$1.46 \times 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ (или $0.0146 \text{ мкОм} \cdot \text{м}$ )	Графит	$10 \times 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ (или $0.10 \text{ мкОм} \cdot \text{м}$ )
Медь	$1.7 \times 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ (или $0.017 \text{ мкОм} \cdot \text{м}$ ),	Стекло	$1 \times 10^{10} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ (или $10^4 \text{ мкОм} \cdot \text{м}$ )
Алюминий	$2.6 \times 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ (или $0.026 \text{ мкОм} \cdot \text{м}$ )	Слюда	$1 \times 10^{13} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ (или $10^7 \text{ мкОм} \cdot \text{м}$ )

Стоит обратить внимание на то, что хорошие проводники электричества обладают низким удельным сопротивлением, а хорошие изоляторы — очень высоким.

**Например,** сопротивление силового кабеля из алюминия длиной 2 км, при площади поперечного сечения кабеля  $100 \text{ мм}^2$ , равно

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{(2.6 \times 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м})(2\,000 \text{ м})}{(100 \times 10^{-6} \text{ м}^2)} = \\ = \frac{0.0026 \times 2\,000}{100} \text{ Ом} = \mathbf{052 \text{ Ом}}.$$

### Температурный коэффициент сопротивления

Как правило, с ростом температуры материала сопротивление проводников увеличивается, а изоляторов — уменьшается, однако сопротивление некоторых особых сплавов остаётся почти постоянным.

*Температурный коэффициент сопротивления* материала равен изменению величины сопротивления резистора в один ом, изготовленного из этого материала, при увеличении температуры на  $1^\circ\text{C}$ .

Температурный коэффициент сопротивления обозначают символом  $\alpha$  (греческая буква альфа).

Следовательно, если медный провод, сопротивление которого 1 Ом, нагреть на  $1^\circ\text{C}$ , то сопротивление станет равным 1.0043 Ом. Это означает, что для меди  $\alpha = 0.0043 \text{ Ом/Ом} \cdot ^\circ\text{C} = 0.0043/^\circ\text{C}$ . То есть единица температурного коэффициента сопротивления —  $1/^\circ\text{C}$ , или  $^\circ\text{C}^{-1}$ .

Если медный провод сопротивлением 1 Ом нагреть до  $100^\circ\text{C}$ , то его сопротивление при  $100^\circ\text{C}$  станет равным  $1 + 100 \times 0.0043 = 1.43 \text{ Ом}$ .

Ниже приводятся некоторые типичные значения температурного коэффициента сопротивления для некоторых материалов при  $0^\circ\text{C}$ .

Медь	$0.0043/^\circ\text{C}$	Алюминий	$0.0038/^\circ\text{C}$
Никель	$0.0062/^\circ\text{C}$	Графит	$-0.0048/^\circ\text{C}$
Константан	0	Нихром	$0.0001/^\circ\text{C}$

(Отрицательный знак у температурного коэффициента сопротивления графита означает, что с ростом температуры сопротивление падает.)

Если сопротивление материала при  $0^\circ\text{C}$  известно, то сопротивление при любой другой температуре можно определить по формуле



$$R_{\theta} = R_0(1 + \alpha_0 \theta)$$

где  $R_0$  — сопротивление при  $0^{\circ}\text{C}$ ,

$R_{\theta}$  — сопротивление при температуре  $\theta^{\circ}\text{C}$ ,

$\alpha_0$  — температурный коэффициент сопротивления при  $0^{\circ}\text{C}$ .

**Например**, катушка медного провода обладает сопротивлением 100 Ом, когда её температура равна  $0^{\circ}\text{C}$ . Определим сопротивление этой же катушки при  $70^{\circ}\text{C}$  (величина температурного коэффициента сопротивления меди  $0.0043/^{\circ}\text{C}$  при  $0^{\circ}\text{C}$ ).

$$\begin{aligned} R_{70} &= R_0(1 + \alpha_0 \theta) = 100[1 + (0.0043)(70)] = \\ &= 100[1 + (0.301)] = \mathbf{130.1 \text{ Ом}}. \end{aligned}$$

Если сопротивление материала при комнатной температуре (примерно  $20^{\circ}\text{C}$ )  $R_{20}$  и температурный коэффициент сопротивления при  $20^{\circ}\text{C}$   $\alpha_{20}$  известны, то сопротивление  $R_{\theta}$  при температуре  $\theta^{\circ}\text{C}$  равно

$$R_{\theta} = R_{20}[1 + \alpha_{20}(\theta - 20)]$$

**Например**, катушка медного провода имеет сопротивление 10 Ом при температуре  $20^{\circ}\text{C}$ . Определим сопротивление катушки после её нагрева до температуры  $100^{\circ}\text{C}$ , если температурный коэффициент сопротивления меди при  $20^{\circ}\text{C}$  равен  $0.004/^{\circ}\text{C}$ .

$$\begin{aligned} R_{100} &= 10[1 + (0.004)(100 - 20)] = \\ &= 10[1 + 0.32] = 10(1.32) = \mathbf{13.2 \text{ Ом}}. \end{aligned}$$

Если сопротивление при  $0^{\circ}\text{C}$  неизвестно, но известно при некоей другой температуре  $\theta_1$ , тогда сопротивление при любой температуре можно вычислить по формулам

$$R_1 = R_0(1 + \alpha_0 \theta_1)$$

и

$$R_2 = R_0(1 + \alpha_0 \theta_2).$$

Делением одного уравнения на другое получаем

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1 + \alpha_0 \theta_1}{1 + \alpha_0 \theta_2}$$

где  $R_2$  — сопротивление при температуре  $\theta_2$ .

**Например**, медный провод обладает сопротивлением 200 Ом при температуре  $20^{\circ}\text{C}$ . Через провод течёт ток, нагревая его до  $90^{\circ}\text{C}$ . Определим сопротивление провода при  $90^{\circ}\text{C}$ , полагая, что

температурный коэффициент сопротивления равен  $0.004/^{\circ}\text{C}$  при  $0^{\circ}\text{C}$ .

$$R_{90} = \frac{R_{20}[1 + 90\alpha_0]}{[1 + 20\alpha_0]} = \frac{200[1 + 90(0.004)]}{[1 + 20(0.004)]} = \frac{200[1 + 0.36]}{[1 + 0.08]} =$$

$$= \frac{200(1.36)}{(1.08)} = 251.85 \text{ Ом}.$$

## Цветовое кодирование резисторов и их омические значения

### Цветовой код для постоянных резисторов

Цветовой код для постоянных резисторов дан в **Табл. 41.1**.

**Таблица 41.1**

Цвет	Обозначение	Множитель	Допуск
Серебряный	—	$10^{-2}$	$\pm 10\%$
Золотой	—	$10^{-1}$	$\pm 5\%$
Черный	0	1	—
Коричневый	1	10	$\pm 1\%$
Красный	2	$10^2$	$\pm 2\%$
Оранжевый	3	$10^3$	—
Жёлтый	4	$10^4$	—
Зелёный	5	$10^5$	$\pm 0.5\%$
Голубой	6	$10^6$	$\pm 0.25\%$
Фиолетовый	7	$10^7$	$\pm 0.1\%$
Серый	8	$10^8$	—
Белый	9	$10^9$	—
Цвет отсутствует	—	—	$\pm 20\%$

Резисторы с двумя значащими цифрами номинала сопротивления маркируют четырьмя полосами.

Например, жёлто-фиолетово-оранжево-красная индикация обозначает 47 кОм с допуском  $\pm 2\%$ . (Следует иметь в виду, что первой полосой считают полосу, ближайшую к выводу резистора.)

Резисторы с тремя значащими цифрами номинала сопротивления маркируют пятью полосами.

Например, красно-жёлто-оранжево-коричневая индикация обозначает 249 Ом с погрешностью  $\pm 1\%$ . (Следует иметь в виду, что пятая полоса в 1.5...2 раза шире, чем остальные полосы.)

### **Буквенный и цифровой код для резисторов**

Другой способ обозначения номиналов сопротивлений резисторов — это буквенный или цифровой код, показанный в Табл. 41.2.

**Таблица 41.2**

Величина сопротивления	Маркировка
0.47 Ом	R47
1 Ом	1R0
4.7 Ом	4R7
47 Ом	47R
100 Ом	100R
1 кОм	1K0
10 кОм	10K
10 МОм	10M

Допуск обозначают прописными буквами, как это показано ниже.

Допуск	Маркировка
$\pm 1\%$	F
$\pm 2\%$	G
$\pm 5\%$	J
$\pm 10\%$	K
$\pm 20\%$	M

Например, R33M = 0.33 Ом  $\pm 20\%$ ;

4R7K = 4.7 Ом  $\pm 10\%$ ;

390RJ = 390 Ом  $\pm 5\%$ .

## 42. ХИМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА

Чтобы проводить электрический ток, материал должен содержать *заряженные частицы*. В *твёрдых веществах* ток переносят электроны. Медь, свинец, алюминий, железо и графит — вот некоторые примеры твёрдых проводников. В *жидкостях и газах* ток переносится той частью атома или молекулы, которая приобретает электрический заряд и которая называется *ионом*. Ионы могут быть заряжены как положительно, так и отрицательно; например, ион водорода —  $\text{H}^+$ , ион меди —  $\text{Cu}^{++}$ , ион гидроксидов —  $\text{OH}^-$ . Дистиллированная вода не содержит ионов и плохо проводит электричество, а вот солёная вода содержит ионы и поэтому является достаточно хорошим проводником.

### Электролиз

*Электролиз* — это расщепление молекул, образующих жидкость при прохождении через неё электрического тока. Электролиз находит практическое применение при нанесении слоя одного металла на поверхность другого гальваническим способом, при очистке меди, при выделении алюминия из руды и т.д.

*Электролит* — это компонент, который может быть подвергнут электролизу. К электролитам относятся солёная вода, раствор сульфата меди, серная кислота и др.

*Электроды* — это два проводника, подводящие ток к электролиту. Электрод, подсоединяемый к положительному полюсу, называется *анодом*, а к отрицательному — *катодом*.

Когда два медных провода, подсоединённых к батарее, помещают в мензурку, наполненную солёной водой, через этот раствор начинает течь ток. В результате электролиза вода будет разделяться на водород и кислород, а вокруг обоих проводов появятся пузырьки соответствующих газов.

### Электролитическое осаждение

*Электролитическим осаждением* называют электролиз, с помощью которого тонкий слой одного металла наносят на другой. На практике это находит применение, например, в лужении стали, в серебрении никелевых сплавов, в хромировании стали. Если два медных электрода, соединённых с батареей, поместить в сосуд с сульфатом меди в качестве электролита, то на катоде (то есть на электроде, подсоединённом к отрицательному выводу батареи) медь будет нарастать, а анод её потеряет.

## Гальванический элемент

Гальванические элементы применяют для преобразования химической энергии в электрическую.

Гальванический элемент содержит два разнородных проводника (электрода), помещённых в электролит. Такая единичная ячейка, содержащая медный и цинковый электроды, показана на Рис. 42.1.

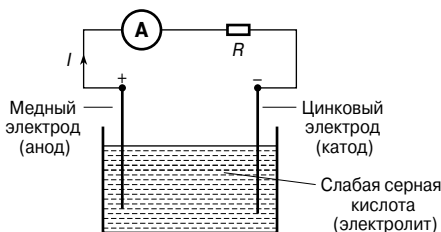


Рис. 42.1

Ток между электродами течёт как по внешней цепи, так и в электролите. Помимо приведённой существуют и многие другие электродные пары, например цинк—свинец и цинк—железо. Разность потенциалов, измеренная между электродами, для каждой пары металлов своя. Зная ЭДС каждого металла относительно некоторого стандартного электрода (эту ЭДС называют *нормальным электродным потенциалом*), можно определить ЭДС любой пары металлов.

В качестве стандарта принят водородный электрод. Например, для гальванической пары цинк—медь ЭДС равна

$$E = (+0.34 \text{ В}) - (-0.76 \text{ В}) = 1.10 \text{ В}.$$

*Электрохимический ряд* активности металлов — это последовательность элементов, построенная исходя из значений их электрохимического потенциала относительно водорода. В Табл. 42.1 приведены некоторые элементы из этого ряда.

Таблица 42.1

Металл	Электродный потенциал	Металл	Электродный потенциал
Калий	−2.92	Свинец	−0.12
Натрий	−2.71	Водород	0
Алюминий	−1.66	Медь	+0.34
Цинк	−0.76	Серебро	+0.799
Железо	−0.44	Графит	+1.42

Гальваническому элементу присущи два недостатка: *поляризация* и *саморазряд*.

## Поляризация

Если показанный на **Рис. 42.1** гальванический элемент оставить подсоединённым к внешней цепи в течение некоторого времени, то ток начнёт достаточно быстро спадать.

Это происходит из-за формирования плёнки пузырьков водорода на медном аноде. Этот эффект называют *поляризацией* элемента. Водород препятствует полноценному контакту между медным электродом и электролитом, и поэтому внутреннее сопротивление элемента увеличивается.

Этот эффект можно предотвратить, используя химическое деполаризирующее вещество, или *деполаризатор*, например дихромат калия, ликвидирующий пузырьки водорода, как только они появляются. Это позволяет гальванической ячейке быть проводником постоянного тока. Более подробно процесс поляризации обсуждается в гл. 78.

## Саморазряд

Когда технический цинк помещают в разбавленную серную кислоту, начинается выделение водорода и растворение цинка. Причиной служат присутствующие в цинке примеси, такие, как следы железа, образующие с цинком небольшие гальванические элементы. Электролит замыкает эти миниатюрные пары, в результате чего ток локализуется и происходит локальная коррозия. Такой процесс называют *саморазрядом*. Его можно предотвратить, покрывая цинковую поверхность небольшим количеством ртути, отчего на поверхности электрода образуется защитный слой.

## Свойства электродных пар

В гальваническом элементе в качестве электродов используются два различных металла, и для предсказания свойств элемента следует рассмотреть положение этих металлов в электрохимическом ряду.

- Из двух металлов электрохимического ряда стоящий выше становится отрицательно заряженным электродом (то есть катодом), и наоборот. Например, цинковый электрод в гальваническом элементе, показанном на **Рис. 42.1**, заряжен отрицательно, а электрод меди — положительно.
- Чем дальше в ряду отстоят друг от друга металлы, тем больше ЭДС элемента.

По электрохимическому ряду можно определять характер активности металлов и их соединений.

- Чем выше стоит металл в ряду, тем быстрее он вступает в реакцию с кислородом, и наоборот.
- Из двух металлических электродов, используемых в гальваническом элементе, тот, который в электрохимическом ряду стоит выше, более склонен к растворению в электролите.

## Коррозия

*Коррозия* — это постепенное разрушение металла во влажной атмосфере в результате процессов, аналогичных происходящим в гальваническом элементе. Для образования ржавчины, являющейся следствием коррозии, кроме влаги и воздуха необходимо ещё наличие анода, катода и электролита. Часто корродируют металлы, далеко отстоящие друг от друга в электрохимическом ряду, но находящиеся в близком контакте при наличии электролита. Например, если латунный клапан установить в нагревательную систему, изготовленную из стали, то коррозия возникнет неизбежно.

Следствием коррозии является ослабление конструкций, сокращение времени жизни деталей и материалов, изнашивание материалов и затраты на ремонт.

Коррозию можно предотвратить, если покрыть металл слоем краски, смазки, пластиком, эмалью или нанести тонкий слой олова или хрома. Также на элементы конструкций, содержащих железо, с помощью гальванотехники можно нанести тонкий слой цинка, который поможет избежать появления в металле ржавчины.

## ЭДС и внутреннее сопротивление гальванического элемента

*Электродвижущая сила (ЭДС)* гальванического элемента — это разность потенциалов между его выводами в то время, когда он не подсоединён к нагрузке (то есть элемент находится «под нулевой нагрузкой»).

ЭДС элемента измеряют с помощью вольтметра с высоким сопротивлением, параллельно подсоединённого к элементу. Вольтметр должен иметь большое сопротивление, в противном случае через него потечёт ток, и условие нулевой нагрузки элемента не будет соблюдено. Например, если сопротивление элемента составляет 1 Ом, а сопротивление вольтметра равно 1 МОм, то полное сопротивление цепи составит (1 МОм + 1 Ом), то есть примерно 1 МОм. Практически ток в цепи не появится, и элемент будет находиться «под нулевой нагрузкой».

При подключении нагрузки напряжение на выводах элемента падает. Причиной этому служит *внутреннее сопротивление* элемента, то есть материал элемента оказывает сопротивление току. Внутреннее сопротивление действует совместно с другими сопротивлениями, образующими замкнутую цепь. На **Рис. 42.2** показан элемент с ЭДС, равной  $E$  вольтам, и внутренним сопротивлением  $r$ . Точки  $X$  и  $Y$  обозначают выводы элемента.

Когда нагрузка (показанная как сопротивление  $R$ ) не подсоединена, то ток отсутствует и разность потенциалов между выводами  $X$  и  $Y$  равна  $E$ . Когда подключают нагрузку  $R$ , появляется

ся ток  $I$ , который создаёт падение напряжения  $Ir$  в элементе. Разность потенциалов, доступная измерению на выводах элемента, оказывается меньше, чем ЭДС элемента на эту величину, то есть

$$V = E - Ir$$

**Например**, если батарея с ЭДС, равной 12 вольтам и внутренним сопротивлением 0.01 Ом, создаёт ток 100 А, то разность потенциалов между выводами равна

$$V = 12 - (100)(0.01) = 12 - 1 = 11 \text{ В.}$$

Если измерять разность потенциалов  $V$  на элементе или другом источнике питания при разных значениях тока  $I$  (ток можно изменять, меняя сопротивление нагрузки  $R$ ), то можно построить график, показанный на **Рис. 42.3**.

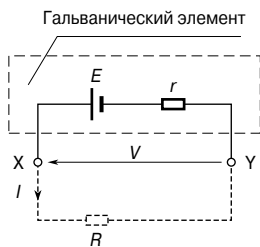


Рис. 42.2

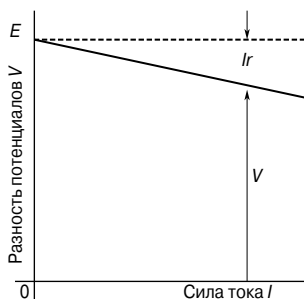


Рис. 42.3

ЭДС элемента  $E$  или источника питания — это разность потенциалов на его выводах с нулевой нагрузкой (то есть при  $I = 0$ ), и на рисунке величина  $E$  показана в виде пунктирной линии.

Так как  $V = E - Ir$ , то из этого уравнения можно подсчитать внутреннее сопротивление:

$$r = \frac{E - V}{I}$$

Когда ток течёт в направлении, показанном на **Рис. 42.2**, говорят, что элемент *разряжается* ( $E > V$ ).

Когда ток течёт в направлении, противоположном показанному на **Рис. 42.2**, говорят, что элемент *заряжается* ( $V > E$ ).



*Батарея* — это комбинация гальванических элементов. Элементы в батарее могут быть соединены как последовательно, так и параллельно.

- Для элементов, соединённых *последовательно*:  
суммарная ЭДС равна сумме ЭДС отдельных элементов;  
суммарное внутреннее сопротивление равно сумме внутренних сопротивлений элементов.
- Для элементов, соединённых *параллельно* (при условии, что каждый элемент обладает одинаковой ЭДС и внутренним сопротивлением):  
суммарная ЭДС равна ЭДС одного элемента;  
суммарное внутреннее сопротивление батареи из  $n$  элементов равно  $\frac{1}{n} \times$  внутреннее сопротивление одного элемента.

**Например**, найдём ЭДС и внутреннее сопротивление батареи из восьми элементов, каждый из которых имеет внутреннее сопротивление 0.2 ома и ЭДС 2.2 вольта в случаях, когда элементы соединены а) последовательно, б) параллельно.

а) При последовательном соединении:

суммарная ЭДС равна сумме ЭДС элементов, то есть

$$2.2 \times 8 = \mathbf{17.6 \text{ В}};$$

суммарное внутреннее сопротивление равно сумме внутренних сопротивлений элементов, или

$$0.2 \times 8 = \mathbf{1.6 \text{ Ом}}.$$

б) При параллельном соединении:

суммарная ЭДС равна ЭДС одного элемента, то есть **2.2 В**;  
суммарное внутреннее сопротивление 8 элементов равно

$$\frac{1}{8} \times \text{внутреннее сопротивление одного элемента},$$

или

$$\frac{1}{8} \times 0.2 = \mathbf{0.025 \text{ Ом}}.$$

## Первичные элементы

*Первичные элементы* не могут быть перезаряжены, то есть преобразование химической энергии в электрическую необратимо, и элемент нельзя использовать после того, как способность к химическому взаимодействию иссякнет. К первичным элементам относятся элемент Лекланше и ртутный элемент.

### Элемент Лекланше

На Рис. 42.4 показан в разрезе типичный гальванический элемент Лекланше.

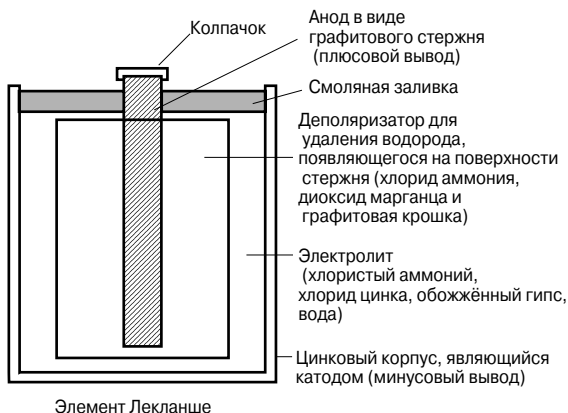


Рис. 42.4

В первичном состоянии такой элемент обладает ЭДС около 1.5 В, но при постоянном использовании ЭДС быстро уменьшается из-за поляризации. Водородный слой можно удалить с помощью деполаризатора. Элемент Лекланше пригоден только для использования в течение непродолжительного времени и находит применение в паяльных лампах, транзисторных радиоприёмниках, звонках, индикаторных цепях, газовых зажигалках, переключающих устройствах и т. д. Этот элемент является наиболее распространённым в быту первичным элементом, так как он дешёв, не требует значительной профилактики и его срок годности составляет около двух лет.

### Ртутный элемент

На Рис. 42.5 показан типичный *ртутный элемент*.

У такого элемента ЭДС равна 1.3 В. Это напряжение остаётся постоянным достаточно продолжительное время. Основное его преимущество по сравнению с элементом Лекланше — небольшие габаритные размеры и большой срок годности. Ртутные элементы находят применение в слуховых аппаратах, медицинских электронных приборах, камерах и управляемых ракетах.

### Вторичные элементы

*Вторичные элементы*, после того как они отработали, можно перезаряжать, то есть возможно преобразование химической энергии в электрическую и обратно, и элемент можно исполь-

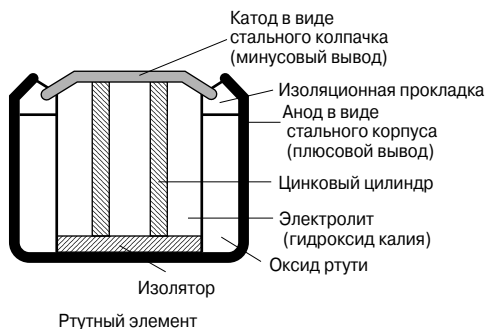


Рис. 42.5

зовать многократно. К вторичным элементам относятся *кислотный* и *щелочной аккумуляторы*. Такие элементы находят применение в электрооборудовании автомобилей, телефонных сетях и там, где нужна тяга, например в электрокарах и в грузоподъемниках.

### ***Кислотный аккумулятор***

Типичный кислотный аккумулятор состоит из:

- контейнера из стекла, эбонита или пластика;
- свинцовых пластин, включающих:

минусовую пластину (катод), выполненную из губчатого свинца,

плюсовую пластину (анод), сформированную прессованием окиси свинца в виде аккумуляторной решётки.

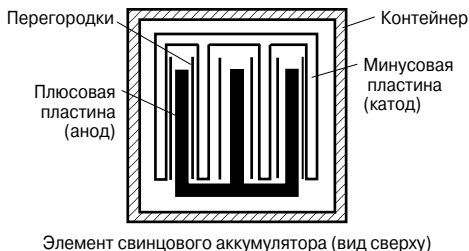


Рис. 42.6

(Как видно на **Рис. 42.6**, пластины изготовлены послойно с целью увеличения их эффективной площади и для минимизации внутреннего сопротивления);

- перегородки, сделанной из стекла, целлюлозы или дерева;
- электролита, представляющего собой разбавленную в дистиллированной воде серную кислоту.

Относительная плотность (или относительный удельный вес) кислотного аккумулятора, которую можно измерить с помощью ареометра, колеблется в диапазоне от 1.26, когда элемент полностью заряжен, до 1.19, когда он разряжен. Напряжение на зажимах заряженного кислотного аккумулятора равно примерно 2 В.

Когда элемент подаёт ток в нагрузку, то говорят, что он разряжается. Во время разрядки:

- оксид свинца (плюсовая пластина) и губчатый свинец (минусовая пластина) преобразуются в сульфат свинца;
- в электролите кислород из оксида свинца соединяется с водородом и образуется вода. Электролит разбавляется, и относительная плотность падает.

Напряжение на зажимах кислотного аккумулятора при полной разрядке равно примерно 1.8 В. Элемент можно зарядить, подсоединив источник постоянного тока к его выводам.

Плюсовой вывод соединяется с плюсовым выводом источника. Зарядный ток течёт в обратном направлении по сравнению с разрядным током, и процесс химического взаимодействия веществ в электролите изменяется на обратный. Во время зарядки:

- сульфат свинца на плюсовой и минусовой пластинах преобразуется обратно, соответственно в оксид свинца и в свинец;
- водная составляющая электролита уменьшается по мере того, как из электролита высвобождается кислород, вступая в реакцию со свинцом на плюсовой пластине. Соответственно относительная плотность электролита растёт.

При полной зарядке пластина имеет тёмно-коричневый цвет, а при разрядке — светло-коричневый. Цвет минусовой пластины при полной зарядке — серый, а при разрядке — светло-серый.

### ***Щелочной аккумулятор***

Существует два основных типа щелочных аккумуляторов: *железо-никелевый элемент* и *никель-кадмиевый элемент*. У обоих плюсовая пластина выполнена из гидроксида никеля, заключённого в мелко перфорированные стальные трубочки. Внутреннее сопротивление уменьшается в результате добавки в электролит чистого никеля или графита. Трубочки собираются в пластинки никелированной стали.

В железо-никелевом элементе (иногда его называют *элементом Эдисона* или *элементом нифе*) минусовая пластина выполнена из оксида железа, а сопротивление уменьшает небольшая добавка оксида ртути. Всё это заключают в перфорированные

стальные трубочки и собирают в стальные пластины. В никель-кадмиевом элементе минусовую пластину формируют из кадмия. Электролитом в каждом из этих элементов служит раствор гидроксида калия, который не подвержен химическим изменениям, и, следовательно, количество раствора изменяется незначительно. Пластины разделяются изолирующими штангами и собираются в стальные ёмкости, которые затем заключают в неметаллический контейнер, чтобы изолировать элементы один от другого. Среднее напряжение после разрядки в щелочном аккумуляторе составляет примерно 1.2 В.

К достоинствам щелочного аккумулятора (например, железо-никелевого или никель-кадмиевого) в сравнении с кислотным аккумулятором относятся:

- более прочная конструкция;
- возможность выдерживать без повреждений большие разрядные и зарядные токи;
- более длительный срок службы;
- меньший вес в условиях заданного объёма;
- возможность оставить на неограниченное время на любой стадии разрядки или зарядки;
- отсутствие процесса саморазрядки.

К недостаткам щелочного аккумулятора по сравнению с кислотным можно отнести:

- относительно высокую стоимость;
- *большее* количество элементов для заданной ЭДС;
- *большее* внутреннее сопротивление;
- необходимость хранения в герметичной упаковке;
- более низкую производительность.

Щелочные элементы можно использовать при очень высоких и низких температурах, в условиях, где имеет место вибрация, или где необходимо соблюдать длительные периоды выключенного состояния, или в случаях больших разрядных токов.

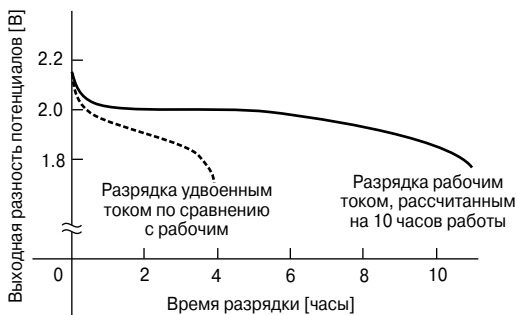
Щелочные аккумуляторы находят применение при грузоподъёмных работах и работах на море, для освещения вагонов поезда, в военных рациях и для запуска дизельных или бензиновых двигателей.

Однако на практике кислотные аккумуляторы всё-таки применяются чаще.

## Ёмкость гальванического элемента

Ёмкость гальванического элемента измеряют в ампер-часах [А·ч]. Полностью заряженную батарею, рассчитанную на 10 часов работы, можно разрядить при токе неизменной

амплитуды 5 А за 10 часов, но если ток нагрузки увеличится до 10 А, то батарея разрядится за 3...4 часа, так как, чем больше разрядный ток, тем ниже эффективная ёмкость батареи. Типичные характеристики разрядки кислотного аккумулятора показаны на **Рис. 42.7**



**Рис. 42.7**

## 43. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ

### Последовательные цепи

На Рис. 43.1 изображены три резистора —  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , и батарея с напряжением  $V$  вольт, соединённые «друг за другом» (такое соединение резисторов называют *последовательным*). Так как цепь замкнута, через резисторы течёт ток  $I$ , а разность потенциалов на каждом резисторе можно определить по показаниям вольтметров  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$ .

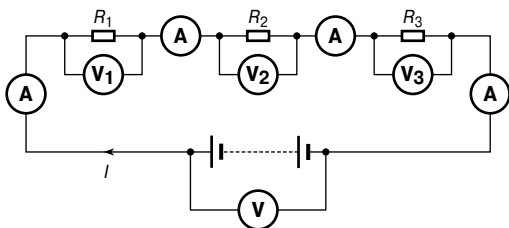


Рис. 43.1

В последовательной цепи:

- ток  $I$  одинаков во всех частях цепи, и, следовательно, все амперметры покажут одинаковые значения тока;
- сумма напряжений  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  равна полному приложенному напряжению  $V$ , то есть

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

В соответствии с законом Ома

$$V_1 = IR_1, \quad V_2 = IR_2, \quad V_3 = IR_3, \quad V = IR,$$

где  $R$  — полное сопротивление цепи.

Так как  $V = V_1 + V_2 + V_3$ , то

$$IR = IR_1 + IR_2 + IR_3.$$

Разделив обе части последнего равенства на  $I$ , получаем

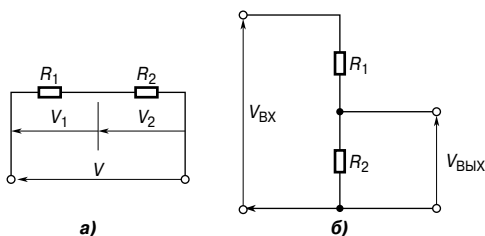
$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

Таким образом, полное сопротивление последовательной цепи равно сумме сопротивлений отдельно взятых элементов этой цепи.

## Делитель напряжения

Распределение напряжений между резисторами  $R_1$  и  $R_2$  в цепи, показанной на **Рис. 43.2а**, определяется уравнениями

$$V_1 = \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) V \quad \text{и} \quad V_2 = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V$$



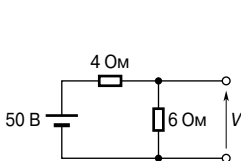
**Рис. 43.2**

Электрическую цепь, показанную на **Рис. 43.2б**, часто называют *делителем напряжения*.

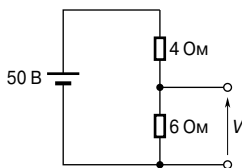
Такая цепь может состоять из нескольких одинаковых элементов, соединённых последовательно с источником напряжения, при этом напряжение снимается с соединений между элементами. Часто делитель состоит из двух резисторов, как это показано на **Рис. 43.2б**, где

$$V_{\text{ВЫХ}} = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_{\text{ВХ}}$$

**Например**, определим значение напряжения  $V$  на резисторе схемы, показанной на **Рис. 43.3**.



**Рис. 43.3**



**Рис. 43.4**

Эту схему можно преобразовать в цепь, изображённую на **Рис. 43.4**.

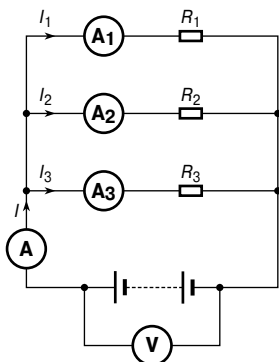
Тогда получаем

$$V = \left( \frac{6}{6 + 4} \right) (50) = 30 \text{ В.}$$



## Параллельные цепи

На **Рис. 43.5** показаны три резистора —  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , выводы которых соответственно соединены в узлы (такое соединение резисторов называют *параллельным*) и подключены к батарее  $V$ .



**Рис. 43.5**

В параллельной цепи:

- сумма токов  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  равна полному току цепи  $I$ , то есть

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

- разность потенциалов источника питания  $V$  подаётся на каждый резистор.

В соответствии с законом Ома

$$I_1 = \frac{V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V}{R_2}, \quad I_3 = \frac{V}{R_3}, \quad I = \frac{V}{R},$$

где  $R$  — полное сопротивление цепи.

Так как  $I = I_1 + I_2 + I_3$ , то

$$\frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}.$$

Разделив обе части последнего равенства на  $V$ , получаем

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Это уравнение применяют при вычислении полного сопротивления  $R$  параллельной цепи.

Если параллельно соединены два резистора, то

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2},$$

откуда

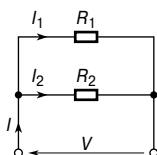
$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

то есть для двух резервуаров

$$R = \frac{\text{произведение сопротивлений}}{\text{сумма сопротивлений}}.$$

## Распределение тока

Для цепи, показанной на **Рис. 43.6**,



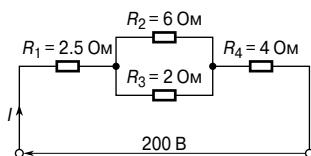
**Рис. 43.6**

$$I_1 = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) I$$

и

$$I_2 = \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) I.$$

**Например**, определим напряжения и токи для элементов цепи с параллельно-последовательным соединением резисторов, показанной на **Рис. 43.7**.



**Рис. 43.7**

Сначала определим сопротивление  $R_x$ , эквивалентное сопротивлениям  $R_2$  и  $R_3$  при их параллельном соединении:

$$R_x = \frac{6 \times 2}{6 + 2} = 1.5 \text{ Ом}.$$

Затем определим сопротивление  $R_T$ , эквивалентное сопротивлениям  $R_1$ ,  $R_x$  и  $R_4$  при их последовательном соединении:

$$R_T = 2.5 + 1.5 + 4 = 8 \text{ Ом.}$$

Тогда ток в цепи питания

$$I = \frac{V}{R_T} = \frac{200}{8} = 25 \text{ А.}$$

Ток, текущий через резисторы  $R_1$  и  $R_4$ , равен току в цепи питания, то есть **25 А**.

Ток, текущий через резистор  $R_2$

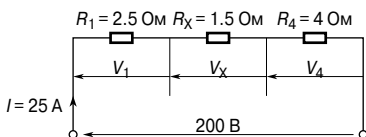
$$I_{R2} = \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) I = \left( \frac{2}{6 + 2} \right) 25 = 6.25 \text{ А.}$$

Ток, текущий через резистор  $R_3$

$$I_{R3} = \left( \frac{R_2}{R_2 + R_3} \right) I = \left( \frac{6}{6 + 2} \right) 25 = 18.75 \text{ А.}$$

(Заметим, что токи через  $R_2$  и  $R_3$  в сумме должны быть равны общему току, то есть 25 А).

Заменяя резисторы  $R_2$  и  $R_3$  резистором  $R_x$ , получим схему **Рис. 43.8**, являющуюся эквивалентной схеме **Рис. 43.7**.



**Рис. 43.8**

На этой схеме:

разность потенциалов на резисторе  $R_1$ :

$$V_1 = IR_1 = (25)(2.5) = 62.5 \text{ В;}$$

разность потенциалов на резисторе  $R_x$ :

$$V_x = IR_x = (25)(1.5) = 37.5 \text{ В;}$$

разность потенциалов на резисторе  $R_4$ :

$$V_4 = IR_4 = (25)(4) = 100 \text{ В;}$$

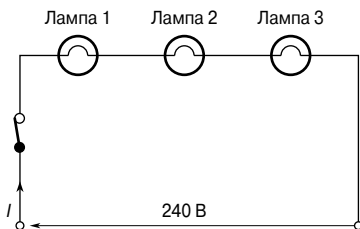
Разность потенциалов на резисторах  $R_2$  и  $R_3$  (для **Рис. 43.7**) та же, что и на резисторе  $R_x$ :

$$V_2 = V_3 = V_x = 37.5 \text{ В.}$$

## Лампы накаливания в последовательном и параллельном включении

### Последовательное соединение

На **Рис. 43.9** показана электрическая схема с тремя последовательно соединёнными лампами, подключёнными к источнику питания с напряжением 240 В. Каждая из ламп рассчитана на работу при 240 В.



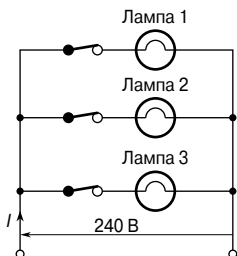
**Рис. 43.9**

На каждую лампу приходится только часть общего напряжения, то есть  $\frac{240}{3} = 80 \text{ В}$ , и, следовательно, лампы горят тускло.

- Если к уже имеющимся лампам последовательно подсоединить ещё одну с такими же характеристиками, то на каждую лампу будет приходиться уже  $\frac{240}{4} \text{ В}$ , то есть 60 В, и каждая из них будет светить ещё более тускло.
- Если же из цепи удалить одну лампу, или если одна лампа перегорит, или если у переключателя разведены контакты, то цепь разомкнётся, ток в цепи прервётся, и оставшиеся лампы светить не будут.
- Для последовательного соединения ламп требуется меньше соединительных проводов, чем для параллельного соединения.
- Последовательное соединение ламп применяют не часто, обычно ограничиваются декоративными целями, например украшением новогодней ёлки.

### Параллельное соединение

На **Рис. 43.10** показаны три одинаковые параллельно соединенные лампы, каждая из которых рассчитана на работу при напряжении 240 В. Схема подключена к источнику 240 В.



**Рис. 43.10**

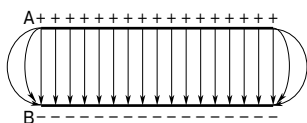
- Каждая лампа находится под напряжением 240 В, и, следовательно, все они будут светить максимально ярко.
- Если одну лампу удалить, или если одна лампа перегорит (цепь разомкнута), или если у одного переключателя разведены контакты, то на остальные лампы это никак не повлияет.
- Если в цепь параллельно к остальным подключить ещё одну лампу, то на яркость остальных это не повлияет.
- Для параллельного соединения ламп требуется больше проводов, чем для последовательного соединения.

Наиболее широко параллельное соединение ламп применяют в электрооборудовании.

## 44. ЁМКОСТЬ И КОНДЕНСАТОРЫ

### Электростатическое поле

На **Рис. 44.1** показаны две параллельные пластины, А и В, с противоположными зарядами на поверхности.

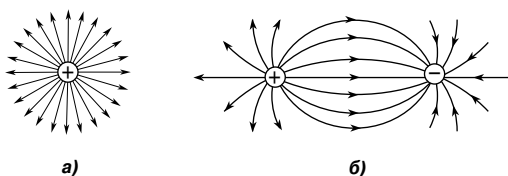


**Рис. 44.1**

Если свободный отрицательный заряд (электрон) поместить между пластинами, то на него будет действовать сила, стремящаяся оттолкнуть его от отрицательно заряженной пластины В и направить к положительно заряженной пластине А.

Точно так же положительно заряженная частица будет выталкиваться силой по направлению к отрицательно заряженной пластине. Область между двумя заряженными пластинами, в которой электрический заряд испытывает действие силы, называется *электростатическим полем*. Направление поля определяется как направление силы, действующей на положительный заряд, помещённый в это поле. На **Рис. 44.1** поле направлено от положительной пластины к отрицательной. Такое поле можно охарактеризовать величиной и направлением. Графически его показывают с помощью *линий напряжённости электрического поля*, которые размещают между заряженными поверхностями. Чем сильнее электрическое поле, тем выше плотность изображённых линий.

Вокруг изолированного точечного заряда поле существует всегда. Когда между двумя точечными зарядами возникает разность потенциалов, между ними также всегда образуется поле. На **Рис. 44.2** показано поле вокруг единичного положительного заряда (**Рис. 44.2а**) и поле, образованное двумя рядом расположенными зарядами разной полярности (**Рис. 44.2б**).



**Рис. 44.2**

Линии напряжённости электрического поля (часто называемые *силовыми линиями*) непрерывны, начинаются и заканчиваются на точечных зарядах. Эти линии не могут пересекаться.

Когда заряженное тело помещают близко к незаряженному, на поверхности незаряженного тела возникает индуцированный заряд противоположного знака. Это происходит потому, что линии поля, идущие от заряженного тела, обрываются на поверхности незаряженного.

Понятие силовых линий используют для иллюстрации свойств электрического поля. Однако нельзя забывать, что они являются лишь моделью действительного поля, помогающей нам представить явление.

*Сила притяжения* или *отталкивания* между двумя электрически заряженными телами пропорциональна величине их зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, то есть

$$\text{сила} \sim \frac{q_1 q_2}{d^2},$$

или

$$\text{сила} = k \frac{q_1 q_2}{d^2}$$

где постоянная  $k \cong 9 \times 10^9$ .

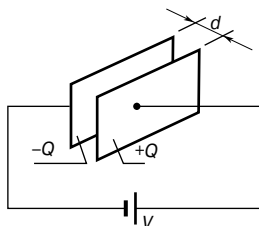
Это соотношение известно как *закон Кулона*.

**Например,** определим силу между двумя находящимися в воздухе заряженными сферами, каждая из которых несёт заряд  $+1.6$  мкКл и расстояние между центрами которых составляет  $16$  мм.

$$\text{сила} = k \frac{q_1 q_2}{d^2} \approx (9 \times 10^9) \frac{(1.6 \times 10^{-6})^2}{(16 \times 10^{-3})^2} = 90 \text{ Н}.$$

## Напряжённость электрического поля

На **Рис. 44.3** показаны две параллельные токопроводящие пластины, между которыми находится воздух.



**Рис. 44.3**

Пластины подсоединены к противоположным выводам батареи с напряжением  $V$  вольт. Следовательно, в пространстве меж-

ду пластинами возникает электрическое поле. Если пластины расположены близко друг к другу, то силовые линии будут прямыми и параллельными. Расстояние между линиями одинаково (то есть плотность линий постоянна), кроме краёв пластин, где возникают краевые искажения (см. **Рис. 44.1**). Если пренебречь краевыми эффектами, то напряжённость электрического поля  $E$  можно определить выражением

$$E = \frac{V}{d}$$

где  $d$  — расстояние между пластинами.

*Напряжённость электрического поля* называют также *градиентом электрического потенциала*.

## Ёмкость

Статические электрические поля создаются *электрическими зарядами*, причём силовые линии электрического поля начинаются и заканчиваются на этих зарядах. Следовательно, наличие поля между двумя пластинами означает наличие равного количества положительных и отрицательных электрических зарядов на этих пластинах, как это показано на **Рис. 44.3**. Пусть на одной пластине имеется положительный заряд  $(+Q)$ , а на другой — отрицательный  $(-Q)$ . Свойство этой пары пластин, определяющее величину заряда, соответствующего заданной разности потенциалов между пластинами, называют их *ёмкостью*, то есть

$$C = \frac{Q}{V}$$

Единица ёмкости — *фарад* [Ф] (на практике чаще пользуются дольными единицами — микрофарадами ( $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ ) или пикофарадами ( $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ )). Один фарад определяют как величину ёмкости двух пластин, на которых заряд в один кулон создаёт разность потенциалов в один вольт.

**Например**, определим разность потенциалов на конденсаторе ёмкостью 4 мкФ, заряженном до величины 5 мКл.

Так как

$$C = \frac{Q}{V}, \text{ то}$$

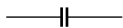
$$V = \frac{Q}{C} = \frac{5 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-6}} = \frac{5 \times 10^6}{4 \times 10^3} = \frac{5\,000}{4} = \\ = 1\,250 \text{ В, или } 1.25 \text{ кВ.}$$



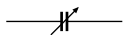
## Конденсаторы

Каждая система электрических проводников обладает ёмкостью. Например, ёмкость существует между проводами высоковольтных линий электропередачи и между проводами в телефонном кабеле. В этих случаях ёмкость — негативный фактор, но с ним приходится мириться, и искать пути, позволяющие либо минимизировать, либо компенсировать его. Однако существуют ситуации, когда ёмкость — это позитивный фактор.

Приборы, обладающие ёмкостью и называемые *конденсаторами*, разработаны специально для удержания зарядов. Простейший вариант конденсатора состоит из двух пластин, называемых *обкладками конденсатора* и разделённых изолирующим материалом, называемым *диэлектриком*. Конденсатор обладает свойством сохра-



Постоянный конденсатор



Переменный конденсатор

**Рис. 44.4**

нить определённое количество статического электричества, то есть электрические заряды. На **Рис. 44.4** показаны символы, применяемые для графического изображения постоянного конденсатора и конденсатора с переменной ёмкостью.

*Заряд  $Q$* , запасённый в конденсаторе, равен

$$Q = I \times t \text{ Кл},$$

где  $I$  — ток в амперах,  
 $t$  — время в секундах.

## Плотность электрического потока

Единичный поток определяют как истечение положительного заряда в один кулон. Следовательно, поток электрической индукции  $\psi$  измеряется в кулонах, и для заряда, равного  $Q$  кулонов,

$$\psi = Q \text{ Кл}.$$

*Плотность электрического потока  $D$*  — это количество потока, проходящее через заданную площадь  $A$ , перпендикулярную относительно направления движения потока, то есть

$$D = \frac{Q}{A}$$

Плотность электрического потока называют также *поверхностной плотностью электрического заряда* и обозначают греческой буквой  $\sigma$  (сигма).

**Например**, две параллельные прямоугольные пластины размером  $20 \times 40$  см содержат электрический заряд  $0.2$  мкКл.

Следовательно, плотность электрического потока

$$D = \frac{Q}{A} = \frac{0.2 \times 10^{-6}}{800 \times 10^{-4}} = \frac{0.2 \times 10^4}{800 \times 10^6} = 2.5 \text{ мкКл/м}^2.$$

## Диэлектрическая проницаемость

В любой точке электрического поля напряжённость электрического поля  $E$  поддерживает электрический поток и производит определённую величину плотности электрического потока  $D$  в данной точке. Для поля, созданного в *вакууме* (или для практических задач — в воздухе), отношение  $D/E$  является постоянной величиной  $\epsilon_0$ , то есть

$$\frac{D}{E} = \epsilon_0$$

где  $\epsilon_0$  — *диэлектрическая проницаемость свободного пространства*, или *электрическая постоянная*.

Величина  $\epsilon_0$  равна  $8.85 \times 10^{-12}$  Ф/м.

Когда изоляторы, например слюда, бумага, пластик или керамика, попадают в область электрического поля, отношение  $D/E$  изменяется и принимает вид

$$\frac{D}{E} = \epsilon_0 \epsilon_r$$

где  $\epsilon_r$  — *относительная диэлектрическая проницаемость* изоляционного материала.

Эта величина отражает изолирующую способность материала по сравнению с вакуумом, то есть

$$\epsilon_r = \frac{\text{плотность потока в веществе}}{\text{плотность потока в вакууме}},$$

где  $\epsilon_r$  — безразмерная величина.

Ниже в таблице показана относительная диэлектрическая проницаемость материалов, часто применяемых в технических устройствах.

Воздух	1.00	Стекло	5...10
Полиэтилен	2.3	Вода	80
Слюда	3...7	Керамика	6...1 000

Произведение  $\varepsilon_0 \varepsilon_r$  называют *абсолютной диэлектрической проницаемостью*  $\varepsilon$ , то есть

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r.$$

Изоляционную среду, разделяющую заряженные поверхности, называют *диэлектриком*. В отличие от проводников диэлектрические материалы обладают очень высоким удельным сопротивлением. Поэтому их используют там, где требуется отделить друг от друга проводники, находящиеся под разными потенциалами, например обкладки конденсаторов или электрические силовые линии.

**Например**, если расстояние между двумя параллельными пластинами 0.8 мм, а разность потенциалов составляет 200 В, то напряженность электрического поля

$$E = \frac{V}{d} = \frac{200}{0.8 \times 10^{-3}} = 250 \text{ кВ/м.}$$

Если между пластинами расположен полиэтилен с относительной диэлектрической проницаемостью 2.3, то из соотношения

$$\frac{D}{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

можно определить *плотность электрического потока*  $D$ :

$$D = E \varepsilon_0 \varepsilon_r = (250 \times 10^3 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 2.3) = \mathbf{5.089 \text{ мкКл/м}^2}.$$

## Плоский конденсатор

Для *плоского конденсатора*, показанного на **Рис. 44.5а**, ёмкость

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} \Phi,$$

где  $\varepsilon_0$  —  $8.85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$  (постоянная),

$\varepsilon_r$  — относительная диэлектрическая проницаемость,

$A$  — площадь одной пластины в квадратных метрах,

$d$  — толщина диэлектрика в метрах.

Чтобы увеличить ёмкость плоского конденсатора, следует либо увеличивать размеры пластин, либо уменьшать расстояние между ними.

Другой метод увеличения ёмкости заключается в создании слоёв из нескольких пластин, как показано на **Рис. 44.5б**. Изображённые десять пластин образуют девять конденсаторов с ёмкостью, в 9 раз большей, чем ёмкость одной пары пластин.

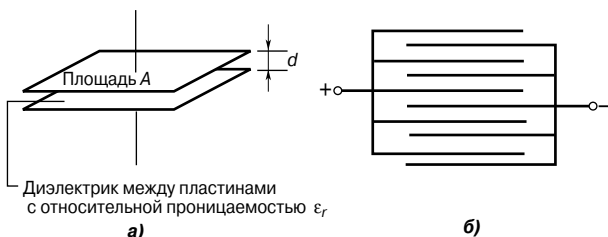


Рис. 44.5

Если такая конструкция конденсатора имеет  $n$  пластин, то ёмкость  $C$  увеличивается в  $(n - 1)$  раз. Тогда ёмкость

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A (n - 1)}{d} \Phi.$$

**Например,** плоский конденсатор состоит из 19 пластин, каждая из которых имеет размеры  $75 \times 75$  мм и отделяется от соседних листом слюды толщиной 0.2 мм. Полагая, что относительная диэлектрическая проницаемость слюды равна 5, определим ёмкость конденсатора.

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A (n - 1)}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 5 \times 75^2 \times 10^{-6} \times (19 - 1)}{0.2 \times 10^{-3}} = 0.0224 \text{ мкФ, или } 22.4 \text{ пФ.}$$

## Последовательно и параллельно соединённые конденсаторы

### Конденсаторы, соединённые параллельно

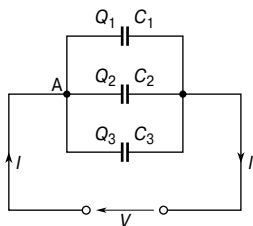


Рис. 44.6

На Рис. 44.6 показаны три конденсатора,  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , соединённые параллельно с источником напряжения  $V$ .

Когда зарядный ток  $I$  достигает точки А, он разветвляется, и часть его течёт к конденсатору  $C_1$ , часть — к  $C_2$ , а третья часть — к  $C_3$ . Следовательно, суммарный заряд  $Q_T (= I \times t)$  делится между тремя конденсатора-

ми. Заряды находятся в каждом из трёх конденсаторах (на рисунке это  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$  соответственно).

Следовательно,

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Однако известно, что

$$Q_T = CV, \quad Q_1 = C_1V, \quad Q_2 = C_2V, \quad Q_3 = C_3V.$$

Следовательно,

$$CV = C_1V + C_2V + C_3V,$$

где  $C$  — суммарная эквивалентная ёмкость цепи.

Разделив левую и правую части уравнения на  $V$ , получаем

$$C = C_1 + C_2 + C_3.$$

Из этого следует, что ёмкость  $n$  параллельно соединённых конденсаторов равна

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n.$$

(Следует обратить внимание на то, что эта формула похожа на формулу для резисторов, соединённых последовательно.)

**Например,** конденсаторы, ёмкости которых равны 1 мФ, 3 мФ, 5 мФ и 6 мФ, соединены параллельно с источником постоянного напряжения 100 В.

Тогда эквивалентная ёмкость

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 1 + 3 + 5 + 6 = \mathbf{15 \text{ мкФ}}.$$

Так как суммарный заряд

$$Q_T = CV,$$

где  $C$  — эквивалентная ёмкость цепи, то

$$Q_T = 15 \times 10^{-6} \times 100 = 1.5 \times 10^{-3} = \mathbf{1.5 \text{ мКл}}.$$

Заряд конденсатора ёмкостью 1 мкФ

$$Q_1 = C_1V = 1 \times 10^{-6} \times 100 = \mathbf{0.1 \text{ мКл}}.$$

Заряд конденсатора ёмкостью 3 мкФ

$$Q_2 = C_2V = 3 \times 10^{-6} \times 100 = \mathbf{0.3 \text{ мКл}}.$$

Заряд конденсатора ёмкостью 5 мкФ

$$Q_3 = C_3 V = 5 \times 10^{-6} \times 100 = \mathbf{0.5 \text{ мКл.}}$$

Заряд конденсатора ёмкостью 6 мкФ

$$Q_4 = C_4 V = 6 \times 10^{-6} \times 100 = \mathbf{0.6 \text{ мКл.}}$$

### Конденсаторы, соединённые последовательно

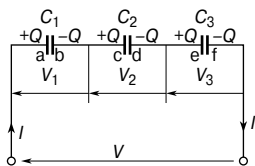


Рис. 44.7

На Рис. 44.7 показаны три конденсатора —  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , соединённых *последовательно* с источником напряжения  $V$ .

Пусть разность потенциалов на каждом конденсаторе соответственно  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$ .

Пусть заряд на пластине «а» конденсатора  $C_1$  —  $+Q$ . Тогда этот заряд индуцирует на пластине «b» равный по величине, но противоположный по знаку заряд  $-Q$ . Проводник между пластинами «b» и «с» электрически изолирован от остальной цепи так, что на пластине «с» должен появиться равный по величине, но противоположный по знаку заряд  $+Q$ , который в свою очередь индуцирует противоположный по знаку заряд  $-Q$  на пластине «d», и т. д.

Следовательно, если конденсаторы соединены последовательно, заряд на каждом из них одинаков.

Для последовательной цепи справедливо соотношение

$$V = V_1 + V_2 + V_3.$$

Так как

$$V = \frac{Q}{C},$$

то

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3},$$

где  $C$  — суммарная эквивалентная ёмкость цепи, то есть

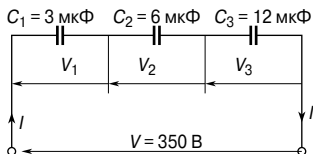
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Из этого следует, что для  $n$  последовательно соединённых конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

(Следует обратить внимание на то, что эта формула похожа на формулу для резисторов, соединённых параллельно.)

**Например,** конденсаторы, ёмкости которых равны 3 мкФ, 6 мкФ и 12 мкФ, соединены последовательно с источником 350 В. Электрическая схема этой цепи показана на **Рис. 44.8**. Определим величину заряда и напряжение на каждом конденсаторе.



**Рис. 44.8**

Эквивалентную ёмкость цепи  $C$  для трёх последовательно соединённых конденсаторов определим из соотношения

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{4+2+1}{12} = \frac{7}{12},$$

откуда эквивалентная ёмкость цепи

$$C = \frac{12}{7} = 1.714 \text{ мкФ}.$$

Суммарный заряд  $Q_T = CV$ , следовательно,

$$Q_T = \frac{12}{7} \times 10^{-6} \times 350 = 600 \text{ мкКл, или } 0.6 \text{ мКл}.$$

Так как конденсаторы соединены последовательно, заряд на каждом из этих конденсаторов равен **0.6 мКл**.

Тогда:

напряжение на конденсаторе ёмкостью 3 мкФ

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{0.6 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-6}} = 200 \text{ В};$$

напряжение на конденсаторе ёмкостью 6 мкФ

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{0.6 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{-6}} = 100 \text{ В};$$

напряжение на конденсаторе ёмкостью 12 мкФ

$$V_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{0.6 \times 10^{-3}}{12 \times 10^{-6}} = 50 \text{ В.}$$

На практике конденсаторы редко соединяют последовательно, если только они не имеют одинаковую ёмкость. Причину этого можно увидеть в приведенном выше примере: конденсатор с самой низкой ёмкостью (то есть 3 мкФ) имеет самую большую разность потенциалов (то есть 200 В). Это значит, что, если конденсаторы имеют одинаковую конструкцию, все они должны быть рассчитаны на самое высокое напряжение.

Для особого случая двух последовательно соединённых конденсаторов справедливо соотношение

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

то есть

$$C = \frac{\text{произведение двух ёмкостей}}{\text{сумма двух ёмкостей}}.$$

**Например,** эквивалентная ёмкость двух конденсаторов, 6 мкФ и 4 мкФ, соединённых последовательно, равна

$$C = \frac{6 \times 4}{6 + 4} = \frac{24}{10} = 2.4 \text{ мкФ.}$$

## Электрическая прочность

Максимальная напряжённость поля, которую без разрушения может выдержать диэлектрик конденсатора, называют *электрической прочностью*  $E_m$  материала. Электрическую прочность определяют как отношение максимально возможного напряжения, подаваемого на конденсатор, к расстоянию между его обкладками, то есть

$$E_m = \frac{V_m}{d}$$



## Энергия заряженного конденсатора

Энергия  $W$ , накопленная в заряженном конденсаторе, определяется его ёмкостью и приложенным напряжением в соответствии с уравнением

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$

Например, энергия, накопленная в конденсаторе ёмкостью 3 мкФ, заряженном до 400 В, равна

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 10^{-6} \times 400^2 = 0.24 \text{ Дж}.$$

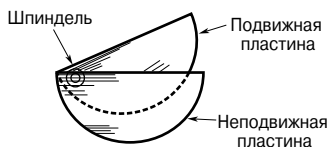
## Конструкции конденсаторов

Применяемые на практике конденсаторы в значительной степени характеризуются используемым диэлектриком. К основным *типам конденсаторов* относятся: переменные воздушные, слюдяные, бумажные, керамические, пластмассовые, с оксидом титана и с электролитом в качестве диэлектрика.

### Переменные воздушные конденсаторы

*Переменные воздушные конденсаторы* обычно состоят из двух наборов металлических пластин (обычно алюминиевых), одна из которых зафиксирована, а другая подвижна. Набор подвижных пластин, закреплённых на шпинделе, вращается относительно неподвижных, как это показано на **Рис. 44.9**.

Когда подвижный блок пластин проходит пол-оборота, число пластин и их суммарная площадь, а следовательно, и ёмкость изменяются от минимума до максимума. Воздушные переменные конденсаторы применяют в радио- и электронных схемах, где требуется



**Рис. 44.9**

обеспечить очень малые потери или где необходимо изменение ёмкости в процессе работы. Максимальное значение ёмкости таких конденсаторов колеблется от 500 до 1 000 пФ.

### Слюдяные конденсаторы

Типичное устройство *слюдяного конденсатора* (устаревшего к настоящему времени) показано на **Рис. 44.10**.

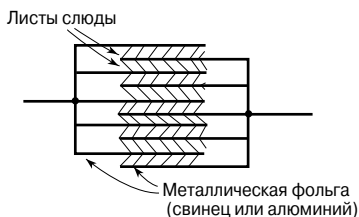


Рис. 44.10

ёмкостью более 0.2 мкФ. Модифицированная форма слюдяного конденсатора — это посеребрённый слюдяной конденсатор. Слюда покрывается с обеих сторон тонким слоем серебра, образующим обкладки конденсатора. Ёмкость такого конденсатора постоянна и со временем изменяется незначительно. При изменении температуры эти конденсаторы сохраняют постоянную ёмкость, рассчитаны на работу при высоком напряжении и имеют продолжительный срок службы. Их применяют в высокочастотных цепях с фиксированными значениями ёмкости вплоть до 1 000 пФ.

#### Бумажные конденсаторы.

Типичный бумажный конденсатор показан на Рис. 44.11, где длина фольги и бумаги, свёрнутых в валик, определяет требуемое значение ёмкости.

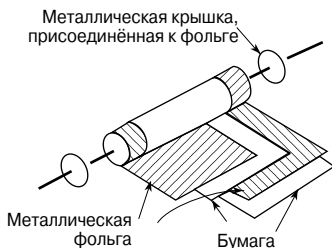
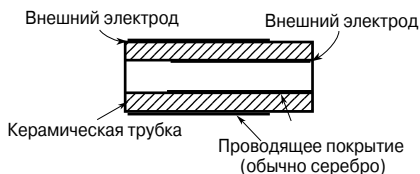


Рис. 44.11

Всю конструкцию обычно пропитывают маслом или воском, для того чтобы исключить попадание воды, а затем помещают в пластмассовый или алюминиевый контейнер. Бумажные конденсаторы рассчитаны на различные напряжения, вплоть до 150 кВ, и применяются там, где потери не очень важны. Их максимальное значение ёмкости колеблется от 500 пФ до 10 мкФ. К недостаткам таких конденсаторов относят зависимость ёмкости от температуры и непродолжительный срок службы по сравнению с другими видами конденсаторов.

### Керамические конденсаторы

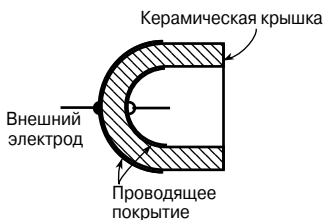
Конструкции *керамических конденсаторов* весьма разнообразны. Они определяются напряжением, на которое рассчитан тот или иной тип конденсатора. Для высоких напряжений используется трубка из керамического материала, показанная в поперечном сечении на **Рис. 44.12**.



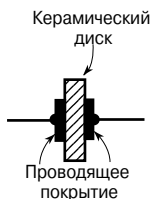
**Рис. 44.12**

Для более низких напряжений используют показанную на **Рис. 44.13** конструкцию в виде чаши.

Для ещё меньших напряжений применяют показанную на **Рис. 44.14** конструкцию в виде диска.



**Рис. 44.13**



**Рис. 44.14**

Некоторые керамические материалы обладают очень большой диэлектрической проницаемостью. Это позволяет делать конденсаторы большой ёмкости, но малого размера, рассчитанные на высокие напряжения. Ёмкости керамических конденсаторов лежат в диапазоне от 1 пФ до 0.1 мкФ. Их можно применять в высокочастотных электронных схемах, предназначенных для работы в широком диапазоне температур.

### Пластмассовые конденсаторы

Некоторые пластмассовые материалы, такие, как полиэтилен и фторопласт, также могут использоваться в качестве диэлектриков конденсатора. Конструкция таких *пластмассовых конденсаторов* похожа на конструкцию бумажных конденса-

ров, только вместо бумажной прослойки используют пластмассу. Пластмассовые конденсаторы хорошо работают при высокой температуре, обеспечивают точную величину ёмкости, имеют продолжительный срок службы при высокой надёжности.

### Конденсаторы на основе оксида титана

*Конденсаторы с оксидом титана* в качестве диэлектрика при малых размерах обладают очень высокой ёмкостью, когда используются при низкой температуре.

### Электролитические конденсаторы

Конструкция *электролитических конденсаторов* схожа с конструкцией бумажных конденсаторов. В качестве обкладок конденсатора применяют алюминиевую фольгу, а толстый абсорбирующий материал, такой, как бумага, пропитанный электролитом (боратом аммония), служит в качестве разделителя обкладок. Готовую арматуру обычно собирают в алюминиевый контейнер и герметично закрывают. Работа такого устройства зависит от образования в результате действия электролита тонкого слоя оксида алюминия на положительно заряженной пластине, когда между пластинами поддерживается подходящий потенциал в прямом направлении. Этот слой оксида очень тонок, и именно он является разделительным диэлектрическим слоем. (Абсорбирующая бумага между обкладками в данном случае работает как проводник, а не как диэлектрик.) Такой конденсатор *должен применяться только в цепях постоянного тока* и должен быть правильно соединён с учётом полярности; если этого не сделать, то конденсатор будет испорчен, так как будет уничтожен слой оксида. Электролитические конденсаторы производят для работы при напряжении от 6 до 600 В, хотя их точность обычно не очень высока. Эти конденсаторы обладают гораздо большей ёмкостью по сравнению с другими видами конденсаторов таких же размеров благодаря оксидной плёнке толщиной всего несколько микрон. Тот факт, что их можно использовать только в цепях постоянного тока, ограничивает область их применения.

## **Разрядка конденсаторов**

Когда конденсатор отключают от источника питания, он всё равно может оставаться заряженным и сохранять этот заряд довольно длительное время. Поэтому необходимо принимать определённые меры, с тем чтобы гарантировать автоматическую *разрядку конденсатора* после отключения питания. Это достигается подсоединением параллельно с конденсатором резистора с высоким сопротивлением.

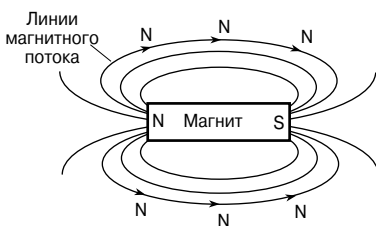
## 45. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

### Магнитные поля

*Постоянный магнит* — это фрагмент ферромагнитного материала (например, железа, никеля или кобальта), который обладает свойством притягивать другие фрагменты этих материалов. В свободном положении, будучи, например, подвешен к нити, постоянный магнит всегда разворачивается в направлении север—юг. Тот конец магнита, который направлен на север, называют *северным полюсом*  $N$ , а противоположный, устремлённый на юг, — *южным полюсом*  $S$ .

Область, окружающую магнит, называют *магнитным полем*, и именно здесь проявляются силовые эффекты магнитного поля, производимые магнитом. Магнитное поле нельзя увидеть, почувствовать или услышать, и поэтому его трудно каким-то образом отразить. Майкл Фарадей (английский учёный XIX в.) предложил изображать его в виде *линий магнитного потока*, позволяющих изучать плотность и распространение магнитного поля.

Распространение магнитного поля можно исследовать с помощью железных опилок. Брусек магнитного материала помещают на плоскую поверхность, например на кусок картона с насыпанными на него железными опилками. Если по картону слегка постучать, то опилки распределятся в виде рисунка, похожего на тот, что показан на **Рис. 45.1**.



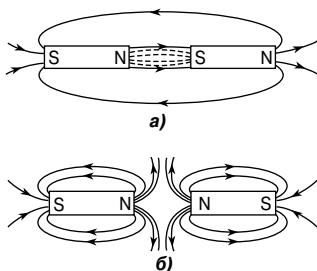
**Рис. 45.1**

Если использовать несколько различных магнитов, то выяснится, что каждый из них создаёт поле с различной плотностью линий магнитного потока, что в данном случае показано на примере перемещения железных опилок. Следовательно, магнитное поле оказывает силовое воздействие, называемое *напряжённостью магнитного поля*. Напряжённость магнитного поля уменьшается с увеличением расстояния от магнита. Важно понимать, что магнитное поле действует в трёх измерениях, а не в одной плоскости, как может показаться на первый взгляд, судя по эксперименту с железными опилками.

Если в магнитное поле поместить компас, то направление линий потока можно определить, обратив внимание на направление стрелки компаса. За направление магнитного поля в любой точке пространства принимают направление, указанное стрелкой северного полюса свободно подвешенного компаса. Линии потока вне магнита направлены от северного полюса к южному, как показано на **Рис. 45.1**, затем они как бы продолжают в магните, замыкаясь в точке, из которой они возникли на северном полюсе магнита.

Следовательно, линии потока образуют полные замкнутые петли, никогда не пересекаются и всегда имеют определённое направление.

Законы притяжения и отталкивания в магнитном поле можно продемонстрировать на примере двух брусков магнита. На **Рис. 45.2а** показано притяжение двух магнитов, причём соседними являются полюса противоположных знаков.



**Рис. 45.2**

Мысленно представим, как линии потока уплотняются и магниты стараются притянуться друг к другу. Самое сильное магнитное поле возникает в промежутке между этими двумя магнитами, что показано близко расположенными друг к другу линиями. На **Рис. 45.2б** имеет место сопротивление сближению магнитов, при этом соседними являются концы одинаковых полюсов. Линии магнитного

потока идут бок о бок в одном направлении, как бы отталкиваясь друг от друга, и два северных полюса пытаются оттолкнуть друг друга.

## Магнитный поток и плотность потока

*Магнитный поток* — это количественная характеристика магнитного поля (число силовых линий), создаваемого магнитным источником. Магнитный поток обозначают буквой  $\Phi$  (греческая фи). Единица магнитного потока — *вебер* [Вб].

Магнитный поток образует замкнутую систему, называемую *магнитной цепью*.

*Плотность магнитного потока* — это поток, проходящий через определённую площадь, перпендикулярную направлению потока, поэтому

$$\text{плотность магнитного потока} = \frac{\text{магнитный поток}}{\text{площадь}}.$$

Плотность магнитного потока обозначают буквой  $B$ . Единица магнитного потока — *тесла* [Тл].  $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Вб/м}^2$ .

Следовательно,

$$B = \frac{\Phi}{A}$$

где  $A$  — площадь в квадратных метрах [ $\text{м}^2$ ].

Плотность магнитного потока называют также *магнитной индукцией*.

**Например**, лицевая поверхность полюса магнита имеет прямоугольное сечение размером  $200 \times 100$  мм. Если суммарное поле, возникающее от полюса, равно 150 мкВб, то плотность потока

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{150 \times 10^{-6}}{200 \times 100 \times 10^{-6}} = 0.0075 \text{ Тл, или } 7.5 \text{ мТл.}$$

## Магнитодвижущая сила и напряжённость магнитного поля

*Магнитодвижущая сила* (МДС), обозначаемая символом  $F_m$ , является первопричиной возникновения магнитного потока в магнитной цепи,

$$F_m = NI$$

где  $N$  — число проводников (или витков),

$I$  — ток, измеренный в амперах.

Единицу магнитодвижущей силы иногда определяют как «ампер-виток». Но поскольку «витки» не являются физической величиной, единицей измерения МДС в системе СИ является *ампер* [А].

*Напряжённость магнитного поля* (или намагничивающая сила) определяется потоком, возникшим в результате повышения тока.

$$H = \frac{NI}{l}$$

где  $l$  — средняя длина пути магнитного потока, измеренная в метрах.

Следовательно,

$$F_m = NI = Hl$$

**Например**, в круговой магнитной цепи, средний диаметр которой равен 30 см, существует намагничивающая сила в 8 000 А/м, созданная током, проходящим через намотанную на цепь катушку. Катушка вокруг цепи намотана равномерно, и число витков равно 750. Определим ток в катушке.

Так как  $H = \frac{NI}{l}$ , то

$$I = \frac{Hl}{N} = \frac{8\,000 \times \pi \times 30 \times 10^{-2}}{750} = 10.05 \text{ А.}$$

## Магнитная проницаемость и кривые намагничивания

Для воздуха или любой немагнитной среды отношение плотности магнитного потока к намагничивающей силе является постоянной величиной, то есть  $B/H = \text{const}$ . Эту постоянную называют *проницаемостью вакуума*  $\mu_0$ , (другое название — *магнитная постоянная*), и она равна  $4\pi \times 10^{-7} \text{ Н/м}$ , то есть для воздуха или любой немагнитной среды

$$\frac{B}{H} = \mu_0$$

(Хотя все немагнитные материалы, в том числе воздух, проявляют слабые магнитные свойства, на практике ими благополучно можно пренебречь.)

Для всех сред, кроме вакуума,

$$\frac{B}{H} = \mu_0 \mu_r$$

где  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость.

*Относительная магнитная проницаемость* определяется соотношением плотности магнитного потока в материале и в вакууме, то есть

$$\mu_r = \frac{\text{плотность потока в материале}}{\text{плотность потока в вакууме}}$$

Этот параметр определяется свойствами магнитного материала и является безразмерной величиной, так как это отношение плотностей двух потоков. Из этой формулы следует, что для вакуума  $\mu_r$  равна 1.

Величину  $\mu_0 \mu_r = \mu$  называют *абсолютной магнитной проницаемостью*.

Представляя графически зависимость плотности потока  $B$  от напряжённости магнитного поля  $H$ , получаем *кривую намагничивания* (или  $B$ - $H$  кривую). Для немагнитных материалов эта кривая представляет собой прямую линию. Для магнитных материалов типичные примеры кривой намагничивания представлены на **Рис. 45.3**.



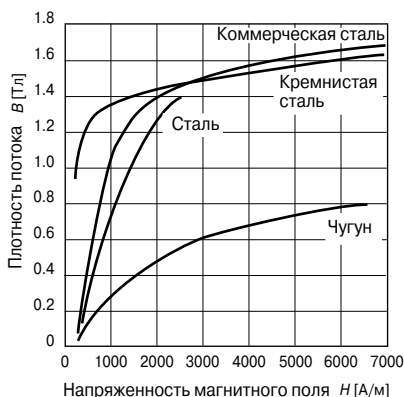


Рис. 45.3

В зависимости от величины  $\mu$  различают три группы материалов:

- 1)  $\mu \gg 1$  (ферромагнетики), например, железо, никель;
- 2)  $\mu > 1$  (парамагнетики), например, платина, алюминий;
- 3)  $\mu < 1$  (диамагнетики), например, серебро, медь. (Подробнее см. гл. 46.)

**Например,** определим магнитодвижущую силу (МДС), необходимую для получения магнитного потока 0.3 мВб в чугунном однородном кольце, поперечное сечение и средняя длина окружности которого составляет 10 см<sup>2</sup> и 20 см соответственно. Сначала определим плотность потока  $B$ :

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0.3 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-4}} = 0.3 \text{ Тл.}$$

Из кривой намагничивания чугуна, для  $B = 0.3$  Тл, находим, что  $H = 1\,000$  А/м. Следовательно,

$$F_m = HI = 1\,000 \times 0.2 = \mathbf{200 \text{ А.}}$$

Относительная проницаемость ферромагнитных материалов пропорциональна наклону кривой намагничивания, а следовательно, зависит от напряжённости магнитного поля. Ниже приведён приблизительный диапазон значений относительной проницаемости  $\mu_r$  для наиболее распространённых магнитных материалов.

Чугун	$\mu_r = 100 \dots 250$	Малоуглеродистая сталь	$\mu_r = 200 \dots 800$
Кремнистая сталь	$\mu_r = 1\,000 \dots 5\,000$	Коммерческая сталь	$\mu_r = 300 \dots 900$
Мю-металл	$\mu_r = 200 \dots 5\,000$	Листовая электротехническая сталь	$\mu_r = 500 \dots 6\,000$

**Например**, магнитное поле 1 250 А/м создаёт в бруске чугуна плотность потока 1.2 Тл. Относительная проницаемость чугуна в данных условиях определяется с помощью формулы  $B = \mu_0 \mu_r H$ , откуда

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{1.2}{(4\pi \times 10^{-7})(1\,250)} = 764.$$

## Магнитное сопротивление

*Магнитное сопротивление*  $S$  (или  $R_M$ ) — это «сопротивление» магнитной цепи существующему магнитному потоку.

$$\text{Магнитное сопротивление } S = \frac{F_m}{\Phi} = \frac{NI}{\Phi} = \frac{Hl}{BA} = \frac{l}{\frac{B}{H}A} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r A}.$$

Единица магнитного сопротивления — генри в минус первой степени, или ампер на вебер [1/Гн] (или [Гн<sup>-1</sup>]), или [А/Вб].

**Например**, магнитное сопротивление бруска мю-металла длиной 150 мм и поперечным сечением 1 800 мм<sup>2</sup> с относительной проницаемостью 4 000, равно

$$S = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} = \frac{150 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})(4\,000)(1\,800 \times 10^{-6})} = 16\,580 \text{ Гн}^{-1}.$$

Низкое магнитное сопротивление имеют *ферромагнитные материалы*, которые могут использоваться в качестве *магнитных экранов*, с тем чтобы магнитные поля не влияли на материалы и приборы, находящиеся за этими экранами.

## Комбинированные последовательные магнитные цепи

Для последовательной *магнитной цепи* с  $n$  элементами полное магнитное сопротивление  $S$  равно сумме магнитных сопротивлений элементов, образующих эту цепь:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n.$$

(Эта формула аналогична формуле, определяющей сопротивление электрической цепи с последовательно соединёнными резисторами.)

**Например**, определим плотность потока в замкнутой магнитной цепи, состоящей из двух чугунных брусков: длиной 6 см, с поперечным сечением 1 см<sup>2</sup>, и длиной 2 см, с поперечным сечением 0.5 см<sup>2</sup>. Магнитная цепь создана катушкой с 200 витками, навитыми на брус длиной 6 см, ток в которой — 0.4 А.

Если относительная проницаемость чугуна равна 750, то для бруска длиной 6 см магнитное сопротивление

$$S_1 = \frac{I_1}{\mu_0 \mu_r A_1} = \frac{6 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(750)(1 \times 10^{-4})} = 6.336 \times 10^5 \text{ Гн}^{-1},$$

для бруска длиной 2 см магнитное сопротивление

$$S_2 = \frac{I_2}{\mu_0 \mu_r A_2} = \frac{2 \times 10^{-2}}{(4\pi \times 10^{-7})(750)(0.5 \times 10^{-4})} = 4.244 \times 10^5 \text{ Гн}^{-1}.$$

Суммарное магнитное сопротивление цепи:

$$S = S_1 + S_2 = (6.366 + 4.244) \times 10^5 = 10.61 \times 10^5 \text{ Гн}^{-1};$$

$$S = \frac{F_m}{\Phi},$$

откуда

$$\Phi = \frac{F_m}{S} = \frac{NI}{S} = \frac{200 \times 0.4}{10.61 \times 10^5} = 7.54 \times 10^{-5} \text{ Вб}.$$

Следовательно, плотность потока на длине 2 см

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{7.54 \times 10^{-5}}{0.5 \times 10^{-4}} = \mathbf{1.51 \text{ Тл}}.$$

## Аналогия между электрическими и магнитными величинами

Электрическая цепь	Магнитная цепь
ЭДС, $E$ [В]	МДС, $F_m$ [А]
Электрический ток, $I$ [А]	Магнитный поток, $\Phi$ [Вб]
Электрическое сопротивление, $R$ [Ом]	Магнитное сопротивление, $S$ [Гн <sup>-1</sup> ]
$I = \frac{E}{R}$	$\Phi = \frac{F_m}{S}$
$R = \frac{\rho l}{A}$	$S = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A}$

## Гистерезис и потери на гистерезис

### Гистерезисная петля

Пусть полностью размагниченный (то есть  $B = H = 0$ ) ферромагнитный материал подвергается действию возрастающей напряжённости магнитного поля  $H$  и в это время измеряется соответствующее значение плотности потока. Получившееся в результате соотношение между  $B$  и  $H$  показано на **Рис. 45.4** с помощью кривой  $Oab$ .

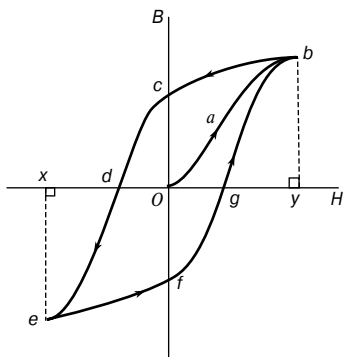


Рис. 45.4

При определённом значении  $H$ , показанном как  $Oy$ ,  $B$  достигает величины  $by$  и дальнейшее увеличение плотности потока становится затруднительным. В таком случае говорят, что наступает насыщение материала. Следовательно, величина  $by$  — магнитная индукция насыщения.

Если, начиная с этого момента, напряжённость поля  $H$  уменьшать, то окажется, что плотность потока соответствует кривой  $bc$ . Когда  $H$  снизится до нуля, в материале

сохранится некоторая плотность потока.

Эта *остаточная магнитная индукция*, или *остаточный магнетизм*, на Рис. 45.4 соответствует ординате  $Oc$ . Когда  $H$  начинает увеличиваться в противоположном направлении, плотность потока уменьшается до тех пор, пока при значении  $Od$  плотность потока не уменьшится до нуля. Напряжённость магнитного поля  $Od$ , необходимая для удаления остаточной магнитной индукции, то есть снижения  $B$  до нуля, называется *коэрцитивной силой*.

Дальнейший рост  $H$  в обратном направлении вызывает рост плотности потока в обратном направлении до тех пор, пока не наступает насыщение, что соответствует кривой  $de$ . Если  $H$  изменяется обратно от  $Ox$  до  $Oy$ , плотность потока соответствует кривой  $efgb$ , схожей с кривой  $bcde$ .

Из Рис. 45.4 видно, что плотность потока следует за изменениями напряжённости магнитного поля.

Этот эффект называется *гистерезисом*. Замкнутая фигура  $bcdefgb$  называется *гистерезисной петлёй* (или петлёй  $B/H$ ).

### Потери на гистерезис

Гистерезисная петля является внешним проявлением перераспределения доменов (то есть групп атомов) в ферромагнитном материале, сопровождаемого расходом энергии на это перераспределение в каждом цикле намагничивания. Эта энергия выделяется в виде нагрева образца, и её называют *потерями на гистерезис*.

|| Энергетические потери, связанные с гистерезисом, пропорциональны площади гистерезисной петли.

Если гистерезисную петлю изобразить в масштабе  $1 \text{ см} : \alpha$  (ампер/метр) вдоль горизонтальной оси координатной

сетки и 1 см : ( $\beta$  тесл) по вертикальной оси и если площадь петли в квадратных сантиметрах представлена величиной  $A$ , то

$$\frac{\text{потери на гистерезис}}{\text{цикл}} = A\alpha\beta \text{ Дж/м}^3 \quad (1)$$

**Например,** определим гистерезисные потери на частоте 50 Гц для случая, когда площадь гистерезисной петли ферромагнитного материала равна  $12.5 \text{ см}^2$  (в масштабе 1 см по горизонтальной оси : 500 А/м; 1 см по вертикальной оси : 0.2 Тл).

Из уравнения (1) следует, что гистерезисные потери на цикл равны

$$A\alpha\beta = (12.5)(500)(0.2) = 1\,250 \text{ Дж/м}^3.$$

(Так как  $\alpha = 500 \text{ А/м}$  на сантиметр, а  $\beta = 0.2 \text{ Тл}$  на сантиметр, то  $1 \text{ см}^2$  петли соответствует

$$500 \frac{\text{А}}{\text{м}} \times 0.2 \text{ Тл} = 100 \frac{\text{А}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = 100 \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^3} = 100 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}^3} = 100 \text{ Дж/м}^3.$$

Следовательно,  $12.5 \text{ см}^2$  соответствует

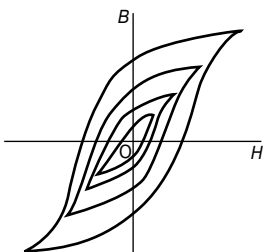
$$12.5 \times 100 = 1\,250 \text{ Дж/м}^3.)$$

Тогда на частоте 50 Гц

$$\text{гистерезисные потери} = (1\,250 \text{ Дж/м}^3) (50 \text{ с}^{-1}) = 62\,500 \text{ Вт/м}^3.$$

Если гистерезисные петли для данного ферромагнитного материала устанавливаются для различных максимальных значений  $H$ , то выясняется, что они расположены одна в другой, как показано на **Рис. 45.5**.

Максимального размера петля достигает при насыщении. Если максимальную плотность потока уменьшить на половину от её значения при насыщении, то площадь полученной в результате петли будет значительно меньше, чем площадь петли при насыщении. Как выяснил американский электротехник Штейнмец, из площадей нескольких таких петель, как показано на **Рис. 45.5**, гистерезисные потери на цикл оказались пропорциональны  $(B_m)^n$ . Показатель степени  $n$ , названный *индексом Штейнмеца*, может принимать значение от 1.6 до 3.0 в зависимости от качества ферромагнитного материала и диапазона плотности потока, в пределах которого выполняются измерения.



**Рис. 45.5**

Выяснилось, что потери на гистерезис равны

$$P_h = k_h \nu f (B_m)^n \text{ Вт} \quad (2)$$

где  $\nu$  — объём в кубических метрах,

$f$  — частота в герцах,

$k_h$  — постоянная для данного образца и заданного диапазона  $B$ .

**Например,** определим гистерезисные потери на  $1 \text{ м}^3$  на частоте 25 Гц при минимальной плотности потока 1.1 Тл для образца из ферромагнитного материала, который имеет гистерезисные потери 62 500 Вб/м<sup>3</sup> при максимальной плотности потока 1.5 Тл и частоте 50 Гц (индекс Штейнмеца равен 1.6).

Как следует из уравнения (2), гистерезисные потери

$$P_h = k_h \nu f (B_m)^n.$$

Следовательно,  $62\,500 = k_h (1)(50)(1.5)^{1.6}$ ,  
откуда

$$k_h = \frac{62\,500}{(50)(1.5)^{1.6}} = 653.4.$$

При  $f = 25$  Гц и  $B_m = 1.1$  Тл гистерезисные потери

$$P_h = k_h \nu f (B_m)^n = (653.4)(1)(25)(1.1)^{1.6} = 19\,026 \text{ Вт/м}^3.$$

Величина гистерезисных потерь зависит от состава образца, а также от термической и механической обработки, которой был подвергнут данный образец.

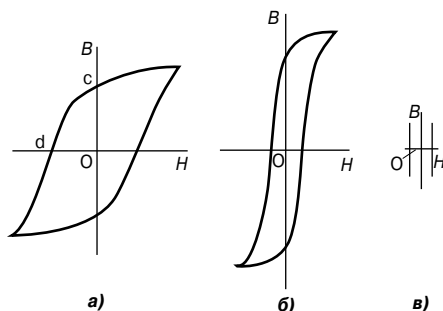


Рис. 45.6

На **Рис. 45.6** показаны типичные гистерезисные петли для закалённой стали (**Рис. 45.6а**), имеющей высокую остаточную магнитную индукцию  $O_s$  и большую коэрцитивную силу  $O_d$ , мягкой стали (**Рис. 45.6б**), с большой остаточной индукцией и

небольшой коэрцитивной силой и феррита (**Рис. 45.6в**), представляющего собой магнитный материал наподобие керамики, в составе которого оксид железа, никель, кобальт, магний, алюминий и марганец. Гистерезис феррита очень мал.

Для приборов, работающих от источника переменного тока, гистерезисная петля повторяется в каждом цикле переменного тока. Следовательно, гистерезисная петля большой площади (как для закалённой стали) зачастую нежелательна из-за значительных энергетических потерь.

Кремнистая сталь имеет узкую гистерезисную петлю и, следовательно, малые гистерезисные потери, поэтому она больше подходит для сердечников трансформаторов и вращающихся частей различных механизмов.

## Потери на вихревые токи

Если катушка представляет собой ферромагнитный сердечник (такой, например, как в трансформаторе) и через неё течёт переменный ток, то в сердечнике устанавливается переменный магнитный поток. Переменный поток индуцирует в катушке ЭДС:  $e = N \frac{d\Phi}{dt}$ . Однако в дополнение к желаемому эффекту

возникновения ЭДС в катушке переменный поток индуцирует нежелательные электрические потенциалы в железном сердечнике, и в нём появляются локальные циркулирующие токи, которые называют *вихревыми токами*. Так как сердечник обладает сопротивлением, вихревые токи нагревают его, что в конечном счете является нежелательно потраченной энергией.

Вихревые токи можно уменьшить «расслаиванием» сердечника, то есть разделением его на тонкие пластины, и размещением между ними тончайших слоёв изоляционного материала (этого можно добиться, покрыв лаком одну сторону пластины или проложив бумагу между ними). Изоляция даёт высокое сопротивление, благодаря чему вихревые токи уменьшаются. *Потери на вихревые токи равны*

$$P_e = k_e (B_m)^2 f^2 t^3 \text{ Вт} \quad (3)$$

где  $k_e$  — постоянная,  
 $t$  — толщина слоя.

Потери на вихревые токи, приходящиеся на 1 м<sup>3</sup>, можно подсчитать иначе:

$$P_e = k_e (B_m)^2 f^2 t^2 \text{ Вт/м}^3 \quad (4)$$

Из уравнения (4) видно, что потери на вихревые токи пропорциональны квадрату толщины железных пластин сердечни-

ка. Следовательно, желательно, чтобы пластины (то есть слои) были бы как можно тоньше. Однако для работы на высоких частотах, когда делать очень тонкие слои непрактично, потери сердечника могут быть сокращены за счёт использования ферритового или порошкового сердечника. Порошковые сердечники состоят из мелких частиц карбонильного железа или пермаллоя (сплав никеля и железа), каждая частица которых изолирована от соседней с помощью связующего материала. Такие материалы обладают очень высоким удельным сопротивлением.

**Например**, у сердечника трансформатора, работающего на частоте 50 Гц, имеются потери на вихревые токи  $100 \text{ Вт/м}^3$ , а пластины сердечника имеют толщину 0.50 мм. Сердечник переделан так, чтобы работать с теми же потерями на вихревые токи, но при другом напряжении и другой частоте, равной 250 Гц. Полагая, что при новом напряжении максимальная плотность потока составляет одну треть от её первоначального значения, а удельное сопротивление сердечника остаётся неизменным, под считаем толщину пластин.

Из уравнения (4)

$$P_e = k_e (B_m)^2 f^2 t^3 \text{ Вт/м}^3.$$

Следовательно, при частоте 50 Гц имеем

$$100 = k_e (B_m)^2 (50)^2 (0.50 \times 10^{-3})^2,$$

откуда

$$k_e = \frac{100}{(B_m)^2 (50)^2 (0.50 \times 10^{-3})^2}.$$

На частоте 250 Гц

$$100 = k_e \left( \frac{B_m}{3} \right)^2 (250)^2 (t)^2,$$

то есть

$$\begin{aligned} 100 &= \left( \frac{100}{(B_m)^2 (50)^2 (0.50 \times 10^{-3})^2} \right) \left( \frac{B_m}{3} \right)^2 (250)^2 (t)^2 = \\ &= \frac{100 (250)^2 (t)^2}{(3)^2 (50)^2 (0.50 \times 10^{-3})^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$t^2 = \frac{(100)(3)^2 (50)^2 (0.50 \times 10^{-3})}{(100)(250)^2},$$

то есть толщина пластин

$$t = \frac{(3)(50)(0.50 \times 10^{-3})}{250} = 0.3 \times 10^{-3} \text{ м, или } \mathbf{0.30 \text{ мм}}.$$



## Графический метод определения потерь на гистерезис и вихревые токи

Из уравнения (2) гистерезисные потери:

$$P_h = k_h \nu f (B_m)^n.$$

Из уравнения (3) потери на вихревые токи:

$$P_e = k_e (B_m)^2 f^2 t^3.$$

Тогда суммарные потери в сердечнике  $P_c$ :

$$P_c = P_h + P_e.$$

Если для данного соленоида или трансформатора, значение плотности потока в сердечнике поддерживается постоянным, то

$$P_h = k_1 f,$$

где постоянная  $k_1 = k_h \nu (B_m)^n$ , и

$$P_e = k_2 f^2,$$

где постоянная  $k_2 = k_e (B_m)^2 t^3$ .

Следовательно, суммарные потери на сердечнике:

$$P_c = k_1 f + k_2 f^2,$$

откуда

$$\frac{P_c}{f} = k_1 + k_2 f,$$

что сводится к уравнению прямой  $y = mx + c$ .

Следовательно, если  $P_c / f$  изображено на графике по вертикали,  $af$  — по горизонтали, то получаем график прямой с градиентом  $k_2$  и отрезок, отсекаемый на вертикальной оси  $k_1$ .

Если суммарные потери в сердечнике  $P_c$  измерять во всём диапазоне частот, тогда  $k_1$  и  $k_2$  можно определить по графику  $P_c/f$  относительно  $f$ . Тогда для заданной частоты можно определить гистерезисные потери  $P_h (= k_1 f)$  и потери на вихревые токи  $P_e (= k_2 f^2)$ .

Приведённый выше метод выделения потерь носит приближенный характер, так как индекс Штейнмеца  $n$  не имеет постоянного значения, но стремится вырасти с ростом частоты. Однако он позволяет получить разумное показание относительной величины гистерезиса и потерь на вихревые токи в железном сердечнике.

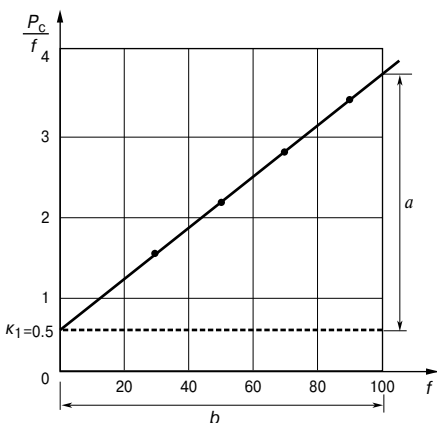
**Например,** в таблице показаны суммарные потери в трансформаторе с ферромагнитным сердечником, измеренные на различных частотах.

Общие потери магнитного сердечника $P_c$ [Вт]	45	105	190	305
Частота $f$ [Гц]	30	50	70	90

Чтобы получить график в виде прямой, значения  $P_c/f$  наносятся относительно  $f$ .

$f[\text{Гц}]$	45	10...5	190	305
$P_c/f$	30	50	70	90

График зависимости  $P_c/f$  относительно  $f$  показан на **Рис. 45.7**.



**Рис. 45.7**

Он представляет собой прямую линию вида  $P_c/f = k_1 + k_2 f$ , где отрезок на вертикальной оси при  $f = 0$ ,  $k_1 = 0.5$ .

Градиент графика

$$k_2 = \frac{a}{b} = \frac{3.7 - 0.5}{100} = 0.032.$$

Так как  $P_c/f = k_1 + k_2 f$ , то  $P = k_1 f + k_2 f^2$ ,  
то есть суммарные потери в сердечнике = гистерезисные потери + потери на вихревые токи.

На частоте, к примеру, 50 Гц

$$\text{гистерезисные потери} = k_1 f = (0.5)(50) = 25 \text{ Вт},$$

$$\text{потери на вихревые токи} = k_2 f^2 = (0.032)(50)^2 = 80 \text{ Вт}.$$

А на частоте 60 Гц

$$\text{гистерезисные потери} = k_1 f = (0.5)(60) = 30 \text{ Вт},$$

$$\text{потери на вихревые токи} = k_2 f^2 = (0.032)(60)^2 = 115.2 \text{ Вт}.$$

## 46. МАГНИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

### Магнитные свойства материалов

Полная теория магнетизма — одна из самых сложных тем, изучаемых физикой. Однако само явление магнетизма можно достаточно хорошо объяснить с помощью простой модели. В начале XX в. Бор и Резерфорд предложили модель структуры атома, в соответствии с которой электроны движутся вокруг ядра в пределах некоей плоскости, подобно планетам, движущимся вокруг Солнца. Ещё лучше предположить, что каждый электрон перемещается по поверхности, которая может быть сферической, эллиптической или даже более сложной конфигурации.

Магнитные эффекты в материалах возникают благодаря электронам, содержащимся в них. Электроны создают магнетизм за счёт:

- вращения вокруг ядра;
- вращательного момента (момента импульса) относительно их собственной оси, называемого *спином*.

В каждом из этих случаев можно считать, что заряженный электрон вращается по замкнутой петле и, следовательно, действует так же, как рамка с током.

Основная измеряемая величина атомной модели — *магнитный момент*. Применяя это понятие к петле провода, по которому течёт ток, можно утверждать, что

$\text{магнитный момент} = \text{ток} \times \text{площадь петли}$
--

Электроны, связанные с атомами, также обладают магнитным моментом, который даёт начало их *магнитным свойствам*.

### *Диамагнетизм и парамагнетизм*

*Диамагнетизм* — это явление, характерное для материалов, у которых относительная магнитная проницаемость меньше единицы. Когда электроны движутся вокруг ядер по орбите, близкой к сферической, магнитный момент равен нулю, при этом весь ток из-за движущихся электронов считается в среднем равным нулю. Если результирующий магнитный момент спинов электрона также равен нулю, то у электронов отсутствует причина выстраиваться в линию при наличии магнитного поля. Однако, когда возникает поле, поток через электронные орбиты усиливается. Следовательно, считая орбиту окружностью, по закону Фарадея там возникнет ЭДС, что изменит ток в цепи. Изменение потока ускорит вращение электронов по орбитам, вызывая индуцированный магнитный момент. По закону Ленца из-за этого момента поток будет направлен так, чтобы оказаться

противоположно приложенному потоку. В итоге результирующий поток через материал станет меньше, чем в вакууме. Так как относительная магнитная проницаемость определяется как  $\frac{\text{плотность потока в веществе}}{\text{плотность потока в вакууме}}$  в диамагнитных материалах, относительная магнитная проницаемость меньше единицы.

**Парамагнетизм** — явление, характерное для материалов, у которых относительная проницаемость больше единицы. Парамагнетизм возникает в веществах, атомы которых обладают постоянным магнитным моментом. Это может быть вызвано тем, что орбиты имеют сферическую форму, или спином электрона. Спины электронов стремятся сгруппировать их парами и нейтрализовать друг друга. Однако существует множество веществ, имеющих атомы с нечётным числом электронов или у которых спаривание незавершённое. Такие атомы обладают так называемым *постоянным моментом диполя*. Когда к ним прикладывают поле, они стремятся выровняться под действием поля, как это происходит со стрелками компаса, и таким образом усилить поле в этой области.

(Диамагнитные материалы не могут выравниваться таким образом.) Когда этот эффект усиливается, то диамагнитный эффект, эффект общего воздействия делает **относительную магнитную проницаемость больше единицы**. Такие материалы называются парамагнитными.

### Ферромагнетизм и ферромагнитные материалы

**Ферромагнетизм** — это явление, характерное для материалов, обладающих относительной проницаемостью, значительно больше единицы и изменяющейся в зависимости от плотности потока. Железо, кобальт и никель — это единственные простые вещества, проявляющие ферромагнитные свойства при обычной температуре, однако существует несколько сплавов, включающих в свой состав один или несколько металлов, которые изменяют ферромагнитные свойства в широких пределах.

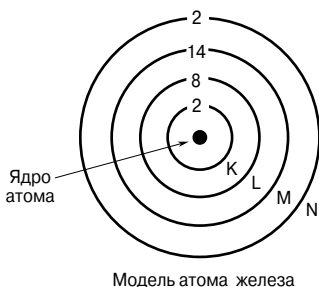


Рис. 46.1

Рассмотрим простейшую модель одиночного атома железа, показанного на **Рис. 46.1**.

Атом состоит из небольшого тяжёлого ядра, окружённого 26 электронами. Каждый электрон движется по орбите вокруг ядра в ограниченной зоне, или оболочке. На рисунке оболочки обозначены буквами K, L, M и N. Числа на рисунке обозначают число электронов на

каждой оболочке. Внешняя оболочка N содержит два слабо удерживаемых электрона, и именно эти электроны переносят электрический заряд, создавая ток и делая железо проводником. На оболочке M насчитывается 14 электронов, и именно эта группа ответственна за магнетизм. Электрон — это отрицательно заряженная частица, и движение зарядов создаёт электрический ток, с которым и связано магнитное поле. Следовательно, магнетизм — это результат орбитального движения каждого электрона в атоме. Однако результаты экспериментов показывают, что результирующий магнитный эффект из-за движений по всем орбитам в твёрдом металле равен нулю. Следовательно, орбитальным током можно пренебречь.

В дополнение к орбитальному движению каждый электрон вращается вокруг собственной оси. Вращающийся заряд создаёт циркулирующий ток и вызывает образование магнитного поля. В любом атоме все оси, вокруг которых вращаются электроны, параллельны, но вращение может происходить в любом направлении. В отдельном атоме, показанном на **Рис. 46.1**, на каждой из оболочек K, L и N по часовой и против часовой стрелки вращается равное количество электронов, и, следовательно, эти оболочки магнитно нейтральны. Однако на оболочке M девять электронов вращаются в одном направлении, а пять — в противоположном. Следовательно, результирующий эффект наблюдается из-за четырёх электронов.

Атом кобальта имеет 15 электронов на оболочке M, девять из которых вращаются в одном направлении, а шесть — в другом. Следовательно, в случае с кобальтом результирующий эффект возникает из-за трёх электронов. Атом никеля имеет результирующий эффект из-за двух электронов. Атомы парамагнитных элементов, таких, как марганец, хром или алюминий, также обладают результирующим эффектом по тем же причинам, что и железо, кобальт и никель. Однако у диамагнитных материалов есть точное равенство между спинами по часовой стрелке и против неё.

Суммарное магнитное поле результирующего эффекта, возникающего из-за четырёх электронов в атоме железа, достаточно велико, чтобы повлиять на другие атомы. Следовательно, ориентация одного атома стремится распространиться по всему материалу, при этом атомы действуют не по отдельности, а совместно — группами. Эти группы атомов, называемые *доменами* (стремящиеся оставаться постоянно намагниченными), действуют, как единое целое. Следовательно, когда к бруску железа прикладывают магнитное поле, эти домены все вместе стремятся выровняться, и тем самым возникает большая плотность потока. Это означает, что относительная проницаемость таких материалов намного больше единицы. С увеличением прикладываемого поля выстраивается всё больше и больше доменов, и индуцируемый поток усиливается.

Магнитные свойства железосодержащих сплавов и материалов, таких, как феррит (феррит — это смесь оксида железа с другими оксидами, магнитный железняк — это тоже феррит), зависят от структуры и состава материала. Однако наличие железа гарантирует, что такой материал хотя бы в некоторой степени обладает отмеченными магнитными свойствами. Ферромагнитные эффекты уменьшаются с температурой. Потери в ферромагнетизме из-за температуры происходят резко; температура, при которой все эти эффекты исчезают, называется *точкой Кюри*. Ферромагнитные свойства появляются вновь при охлаждении, но часть этих свойств исчезнет безвозвратно. Следовательно, постоянный магнит будет размагничен, если его нагреть выше точки Кюри (1 040 К для железа), но снова станет магнитом после охлаждения. При температуре выше точки Кюри ферромагнетики ведут себя как парамагнетики.

## Непостоянные магнитные материалы

*Непостоянные магнитные материалы* — это материалы, в которых можно индуцировать магнитные свойства. В случае магнитных цепей электромашин, трансформаторов и других устройств с большим током желательно высокое значение плотности потока  $B$ , для того чтобы ограничить площадь поперечного сечения  $A$  ( $\Phi = BA$ ), а следовательно, массу агрегатов и издержки. В то же время напряжённость магнитного поля

$H = \frac{NI}{l}$  должна быть как можно меньше, чтобы ограничить

омические потери ( $I^2 R$ ) в катушках возбуждения. Относительная проницаемость  $\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$  и магнитная индукция насыщения должны быть высоки. Когда поток постоянно меняется, как это происходит в трансформаторах, катушках индуктивности и якорных сердечниках, необходимо, чтобы гистерезис и потери на вихревые токи были как можно меньше.

### Сплав кремний—железо

В первых электромашинах для создания магнитных цепей использовали железо с низким содержанием углерода и других примесей. Однако позже было обнаружено, что магнитные свойства материала существенно усиливаются при добавлении к железу кремния. Пластины, используемые в наши дни в электромашинах и трансформаторах на частотах питающей сети, сделаны из *сплава кремний—железо* (кремнистой стали) (количество кремния в разных сортах материала колеблется от 0.5 до 4.5%). Добавленный к железу кремний увеличивает удельное со-

противление. В свою очередь это увеличивает сопротивление  $R = \frac{\rho l}{A}$  и, следовательно, помогает уменьшить потери на вихревые токи. Гистерезисные потери также сокращаются, однако в то же время кремний снижает плотность магнитного потока насыщения.

На практике ограничение количества добавляемого кремния обусловлено механическими свойствами материала, так как его увеличение делает сплав хрупким. К тому же хрупкость сплава кремний—железо зависит от температуры. Установлено, что около 4.5% кремния в сплаве является предельным уровнем для листов кремнистой стали. Лохис (Lohys) — это типичный пример сплава кремния и железа. Он применяется для изготовления якорей в машинах постоянного тока и роторов и статоров машин переменного тока. Листовая электротехническая сталь отличается большим содержанием кремния, меньшими потерями и используется в сердечниках трансформаторов.

Листы кремнистой стали зачастую производят, применяя процесс горячей прокатки. В готовом материале образующие кристаллы не сгруппированы в какой-то определённый порядок, например относительно направления прокатки или плоскости листа. Если же кремнистая сталь становится тоньше в результате холодной прокатки и материал затем закаляется, то можно получить готовый лист, где все кристаллы расположены практически параллельно друг другу. Такой материал обладает строго направленными магнитными свойствами, при этом в направлении проката относительная проницаемость самая высокая. Это направление является также направлением минимальных гистерезисных потерь. Такой материал подходит для трансформаторов, так как ось сердечника может быть сделана совпадающей с направлением проката листа, а следовательно, иметь высокую проницаемость и малые потери.

У сплавов кремний—железо максимальная величина плотности магнитного потока может быть равной 2 Тл. У кремнистой стали холодной прокатки, применяемой в машиностроении, максимальная плотность магнитного потока может достигать 2.5 Тл, в то время как при горячей прокатке максимально достижимое значение равно 1.8 Тл. (На практике у любых материалов значение плотности потока 3 Тл может быть достигнуто только специальными методами.)

Следует заметить, что термин «железный сердечник», казалось бы, подразумевает, что сердечник сделан из железа; на самом деле он почти наверняка сделан из стали, так как чистое железо получить очень сложно. Точно так же сплав железа обычно представляет собой сталь, поэтому правильное описание сердечника определением «стальной», а не железный.

### *Железоникелевый сплав*

Никель и железо относятся к ферромагнитным веществам, и, когда их объединяют в одном *железоникелевом сплаве*, но в разных пропорциях, можно получить несколько различных сплавов с очень полезными магнитными свойствами. Сплав железа с 25...30% никеля обычно бывает очень твёрдым и почти не намагниченным при обычной комнатной температуре. Однако, когда содержание никеля увеличивают до 75...80% (с добавлением небольшого количества меди и молибдена), можно добиться очень высоких значений первоначальной и максимальной проницаемости и очень малых гистерезисных потерь, при условии, что сплав получает необходимую термообработку. Например, *пермаллой*, в состав которого входит 78% никеля, 3% молибдена, а остальное приходится на железо, обладает начальной проницаемостью 20 000, а максимальной — 100 000 по сравнению с проницаемостью железа, равной соответственно 250 и 5 000.

Максимальная плотность магнитного потока в пермаллое равна примерно 0.8 Тл. Мю-металл (76% никеля, 5% меди и 2% хрома) обладает такими же характеристиками. Из таких материалов готовят сердечники тока, низкочастотные трансформаторы, магнитные усилители, а также магнитные экраны. Однако сплавы никель—железо имеют ограничения, так как обладают низкой величиной насыщения по сравнению с железом. Следовательно, там, где необходимо работать с высокой плотностью магнитного потока, железоникелевые сплавы менее предпочтительны, чем железо и кремнистый чугун.

Потери на вихревые токи пропорциональны квадрату толщины пластин, поэтому применение как можно более тонких пластин сократит потери. Применение находит закрученная в спираль полоска железоникелевого сплава, толщина которой составляет всего 0.004 мм.

### *Порошковый сердечник*

Во многих схемах вовсе не нужна высокая проницаемость; может оказаться, что в некоторых случаях важнее высокое удельное сопротивление. Там, где необходимы такие требования, используют порошковые или ферритовые сердечники на частотах вплоть до 150 МГц. Они состоят из частиц смеси никеля—железа—молибдена для работы на низких частотах и из железа для работы на высоких частотах. Частицы, каждая из которых покрыта изолирующей плёнкой, перемешивают с непроводящим, смолистым вязущим веществом и спрессовывают в форму.



## Ферриты

Магнитный железняк, или магнетит, — это соединение оксида железа и других железосодержащих минералов. Его магнитные свойства схожи с магнитными свойствами железа, однако, будучи полупроводником, он обладает очень высоким удельным сопротивлением. Полученные промышленным способом *ферриты* — это соединения оксида железа и оксида другого металла, например марганца, никеля или цинка. Ферриты свободны от потерь на вихревые токи, кроме случая очень высоких частот ( $> 100$  МГц), но обладают намного более низкой проницаемостью по сравнению с железоникелевыми сплавами и кремнистым чугуном. Обычно максимальная плотность потока у ферритов равна  $0.4$  Тл. Сердечники из ферритов применяют в трансформаторах звуковой частоты и катушках индуктивности.

## Постоянные магнитные материалы

*Постоянным магнитом* называют магнит, созданный из вещества, проявляющего магнитные свойства без намагничивания с помощью катушки с током. Рассмотренные ранее железоникелевый сплав и кремнистый чугун относятся к «мягким» магнитным материалам, обладающим высокой проницаемостью и, следовательно, малыми гистерезисными потерями. Для производства постоянных магнитов применяют «твёрдые» материалы, имеющие противоположные характеристики.

Для предотвращения размагничивания постоянных магнитов от материалов требуются такие качества, как высокая остаточная магнитная индукция и большая коэрцитивная сила после намагничивания до насыщения. Гистерезисная петля должна охватывать максимально возможную площадь. Возможно, лучший критерий качества постоянного магнита — это его максимальное энергетическое произведение  $(BH)_m$ , то есть максимальное значение произведения плотности потока  $B$  и напряжённости магнитного поля  $H$  вдоль кривой размагничивания (показанной как  $cd$  на **Рис. 45.4**). Оценочным критерием является произведение коэрцитивной силы и остаточной магнитной индукции, то есть  $(Od)(Oc)$  (**Рис. 45.4**).

Ранее для постоянных магнитов применяли вольфрамовую и хромовую сталь. Позже их сменила кобальтовая сталь разных марок, обеспечивающая как высокую остаточную магнитную индукцию, так и высокое значение  $(BH)_m$ .

Материал торговой марки *Ални* был первым из алюминиево-никелево-железных сплавов. С добавлением кобальта, титана и ниобия были разработаны магниты серии *Алنيко*, свойства которых зависели от соотношения компонентов. Это очень твёрдые и хрупкие материалы. На рынке существует много сплавов других торговых марок с иными составляющими.

Значительный вклад в разработку постоянных магнитов был сделан чуть позже, когда обнаружилось, что управляемые магнитные свойства могут возникать в сплавах подходящего состава, если их нагревать в сильном магнитном поле. Это открытие привело к созданию мощных магнитов серии *Алкомекс* и *Хайкомекс*. Применяв специальные технологии розлива для получения гранулированной структуры, можно получить даже лучшие параметры, при условии, что поле, прикладываемое во время термообработки, параллельно столбчатым кристаллам в магните. Значения коэрцитивности, остаточной магнитной индукции, а следовательно,  $(BH)_m$  у таких сплавов очень высокие.

Новые мощные постоянные магниты готовят с помощью технологий металлокерамики, в основу которой положено интерметаллическое соединение кобальта и самария. Однако это очень дорогостоящие материалы, имеющие к тому же небольшие размеры.

## 47. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

### Магнитное поле электрического тока

Магнитные поля могут возникать не только от постоянных магнитов, как это показано в гл. 45, но также в результате протекания электрических токов (то есть движения электрических зарядов).

Пусть через расположенный горизонтально лист картона вертикально продёрнут провод, а сам картон посыпан сверху железными опилками, как это показано на **Рис. 47.1а**. Если теперь через провод пустить ток и слегка постучать по картону, то опилки выстроятся в форме круга, в центре которого будет провод. Перемещая компас из одного места в другое, можно заметить, что линии магнитного потока имеют определённое направление, как это показано на **Рис. 47.1б**. Если ток пустить в обратном направлении, то линии потока тоже пойдут в обратном направлении. Эффект со стружкой и со стрелкой компаса исчезнет, как только перестанет течь ток. Следовательно, электрический ток производит магнитное поле. Полученный магнитный поток обладает теми же свойствами, что и поток, полученный от постоянных магнитов. Если ток увеличить, то напряжённость поля тоже увеличится, и, как и в случае с постоянным магнитом, напряжённость поля начнёт уменьшаться с уменьшением расстояния от проводника с током.

На **Рис. 47.1** показан эффект лишь малой части магнитного поля.

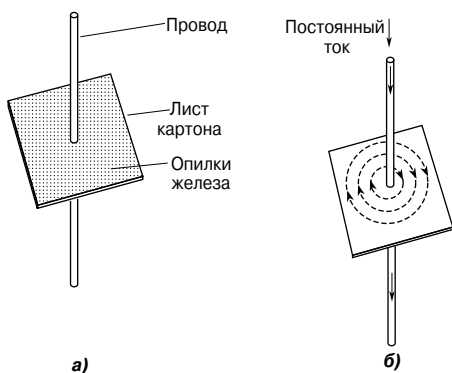


Рис. 47.1

Если исследовать всю длину проводника, то выяснится, что магнитное поле вокруг прямого проводника примет форму концентрических цилиндров, как показано на **Рис. 47.2**, при этом направление поля зависит от направления тока.

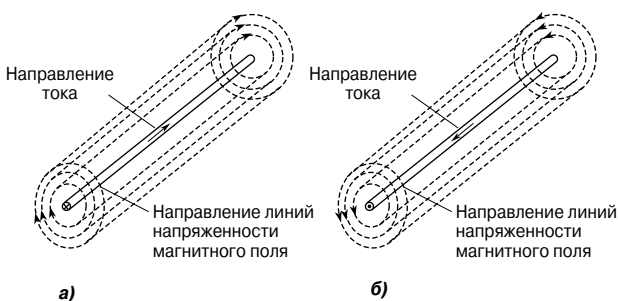


Рис. 47.2

Когда мы имеем дело с магнитными полями, образованными электрическим током, то получаемый эффект обычно иллюстрируют картинкой, показанной на Рис. 47.3. Приняты следующие соглашения:

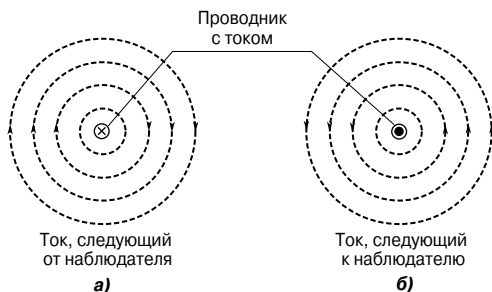


Рис. 47.3

Ток, текущий от наблюдателя, то есть внутрь листа бумаги, обозначается как  $\otimes$ . Этот значок напоминает конец стрелы с оперением (Рис. 47.3а).

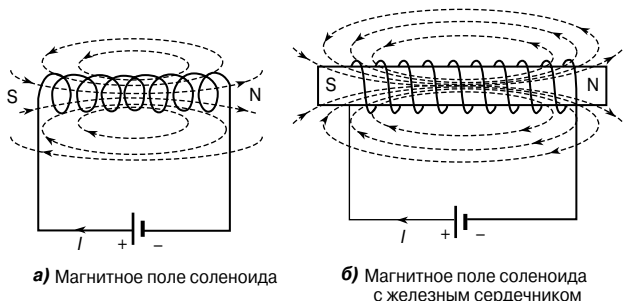
Ток, текущий к наблюдателю, то есть из листа бумаги, обозначается как  $\odot$ . Этот значок можно принять за заострённый конец стрелы (Рис. 47.3б).

Направление линий магнитного потока лучше всего запомнить с помощью правила буравчика, которое гласит:

|| *Если буравчик ввёртывается в направлении тока, то направление его вращения определяет направление силовых линий.*

Например, если ток течёт от наблюдателя (Рис. 47.3а), буравчик, ввернутый в лист бумаги, должен вкручиваться по часовой стрелке. Следовательно, магнитное поле направлено по часовой стрелке.

На **Рис. 47.4а** показано магнитное поле, созданное катушкой, называемой *соленоидом*.



**Рис. 47.4**

Как видно, оно схоже с тем, что образует магнит в виде бруска. Если провод навит на железный брус, как показано на **Рис. 47.4б**, возникает ещё более сильное магнитное поле, при этом железо становится магнитом и ведёт себя как постоянный магнит. Направление магнитного поля, произведённого током  $I$  в соленоиде, можно выяснить любым из двух методов: либо с помощью правила буравчика, либо с помощью правила большого пальца.

а) *Правило буравчика* гласит:

|| *если буравчик поместить вдоль оси соленоида и повернуть его по направлению тока, то он начнёт двигаться так, как распространяется магнитное поле внутри соленоида.*

Магнитное поле внутри соленоида направлено с юга на север. Следовательно, на **Рис. 47.4а** и **Рис. 47.4б** северный полюс находится справа.

б) *Правило большого пальца* гласит:

|| *если катушку сжать правой рукой, причём пальцы будут указывать по направлению тока, то большой палец, отведённый параллельно оси соленоида, будет указывать направление магнитного поля внутри соленоида.*

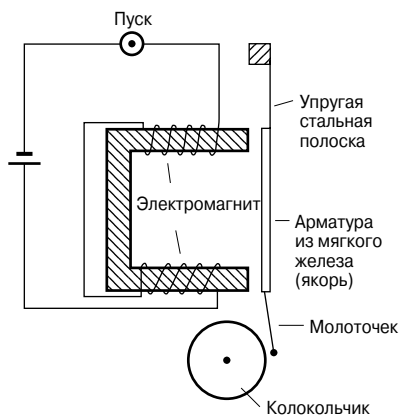
## Электромагниты

Соленоид играет важную роль в теории электромагнетизма, так как магнитное поле внутри его практически однородно при определённом токе и в то же время может сильно изменяться, так как изменение величины тока может изменять напряжён-

ность магнитного поля. *Электромагнит*, в основе которого лежит соленоид, в свою очередь является основой для многих устройств с электропитанием, в число которых входят электрические звонки, реле, подъёмные магниты, телефонные аппараты и др.

### *Электрический звонок*

Существует много видов *электрических звонков*, в том числе одноударный звонок, звонок постоянного тока, зуммер и постоянно звонящий звонок, но все они зависят от притяжения, которым электромагнит воздействует на якорь из лёгкой стали. На **Рис. 47.5** показана схема типичного одноударного звонка.



**Рис. 47.5**

Когда нажимают на кнопку, через катушку начинает течь ток, создавая магнитное поле в железном сердечнике, и якорь из лёгкой стали притягивается к электромагниту. Якорь несёт на себе молоточек, который ударяет по колокольчику. Когда цепь разомкнута, катушка становится размагниченной и упругая стальная полоска оттягивает якорь назад в его первоначальное положение. Молоточек сработает снова лишь тогда, когда будет нажата кнопка.

### *Реле*

*Реле* похоже на электрический звонок, за исключением того, что в результате операции замыкаются или размыкаются контакты, а не совершаются удары по колокольчику.

На **Рис. 47.6** показано простейшее реле, состоящее из катушки, намотанной на сердечник из мягкой стали.

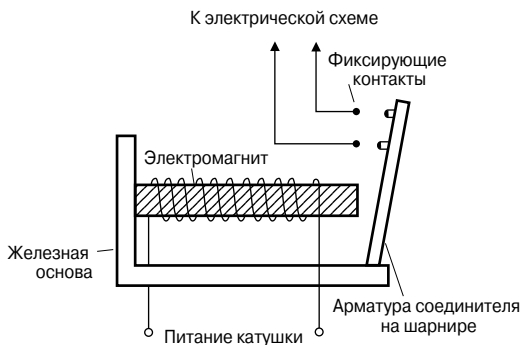


Рис. 47.6

Когда катушка приводится в действие, откидной якорь из мягкой стали притягивается к электромагниту и наталкивается на два фиксирующих контакта так, что они соединяются и, следовательно, замыкают другую электрическую цепь.

### **Подъёмные магниты**

*Подъёмные магниты*, состоящие из больших электромагнитов, применяют для подъёма металлолома большого объёма.

На Рис. 47.7 показаны разрез и вид сверху типичного мощного подъёмного магнита, способного создавать большую силу притяжения.

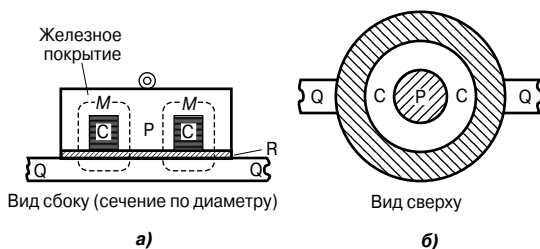
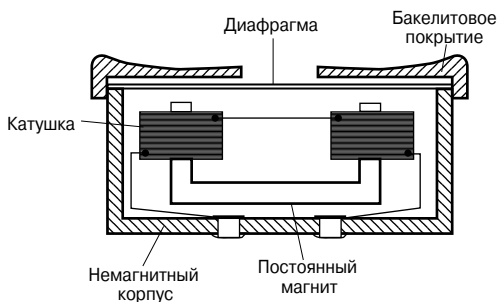


Рис. 47.7

В данном случае катушка С намотана вокруг центрального сердечника Р, сделанного из чугуна. На лицевую часть электромагнита помещён защитный лист материала R, не обладающий магнитными свойствами. Нагрузка Q, которая представляет собой магнитный материал, поднимается электромагнитом, когда катушки приводятся в действие. Пунктирными линиями показаны линии магнитного потока M.

### Телефонный аппарат

Если передатчик или микрофон преобразует звуковые волны в электрические сигналы, то *телефонный аппарат* выполняет обратную процедуру, превращая электрические волны в звуковые. На **Рис. 47.8** показан типичный телефонный аппарат, состоящий из постоянного магнита с катушками, навитыми на его полюсы.



**Рис. 47.8**

Тонкая и гибкая диафрагма из магнитного материала размещена вблизи магнитных полюсов, но не соприкасается с ними. Колебания тока, идущего от передатчика, изменяют магнитное поле, что приводит к вибрации диафрагмы. Вибрация создаёт звуковые колебания, соответствующие тем, что были переданы.

### Проводник с током в магнитном поле

#### Сила, действующая на проводник

Если проводник с током поместить в магнитное поле, созданное постоянными магнитами, то поля, возникшие от проводника и постоянного магнита, будут воздействовать друг на друга и возникнет *сила*, влияющая на проводник. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, зависит от:

- плотности магнитного потока  $B$ , измеряемого в теслах [Тл];
- силы тока  $I$ , измеряемой в амперах [А];
- длины проводника  $l$ , перпендикулярного магнитному полю, измеряемой в метрах [м];
- направлений полей и тока.

Если магнитное поле, ток и проводник находятся под прямыми углами друг к другу, то сила

$$F = BIl \text{ Н.}$$



Когда проводник и поле расположены друг к другу под углом  $\theta^\circ$ , то сила

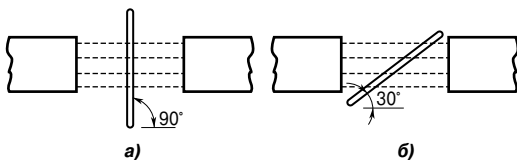
$$F = BIl \sin \theta \text{ Н.}$$

Если между магнитным полем, током и проводником углы прямые, то  $F = BIl$ , и плотность магнитного потока  $B$  можно определить как  $B = \frac{F}{Il}$ , то есть, плотность потока равна 1 Тл, если сила, действующая на 1 м проводника, когда в проводнике течет ток 1 А, равна 1 Н.

**Например**, проводник проводит ток 20 А и находится под прямым углом к магнитному полю, при этом плотность потока равна 0.9 Тл. Если длина проводника в поле равна 30 см, то сила, действующая на проводник, равна

$$F = BIl = (0.9)(20)(0.30) = 5.4 \text{ Н,}$$

когда проводник находится под прямыми углами к полю, как показано на **Рис. 47.9а**.



**Рис. 47.9**

Когда проводник расположен под углом  $30^\circ$  к полю, как показано на **Рис. 47.9б**, то

$$F = BIl \sin \theta = (0.9)(20)(0.30) \sin \theta = 2.7 \text{ Н.}$$

### **Громкоговоритель**

Простейшее применение описанной выше силы — это движение катушки громкоговорителя. *Громкоговоритель* нужен для того, чтобы преобразовывать электрические сигналы в звуковые волны.

На **Рис. 47.10** показан типичный громкоговоритель, в состав магнитной цепи которого входит постоянный магнит и полюсные наконечники из мягкой стали.

Всё сделано так, что сильное магнитное поле сосредоточено в небольшом воздушном зазоре цилиндрической формы. Двигающаяся катушка, называемая голосовой (или речевой) катушкой, подвешивается на конце бумажного или пластикового конуса так, чтобы попадать в зазор. Когда через катушку течёт электрический ток, она производит силу, стремящуюся сдви-

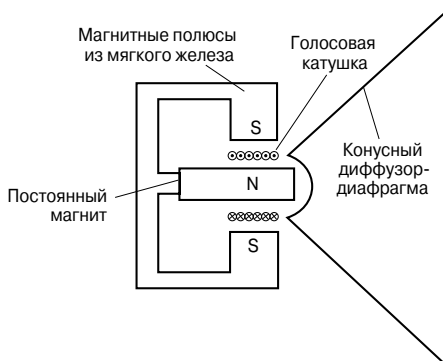


Рис. 47.10

нуть катушку назад или вперёд в зависимости от направления тока. Конус работает, как поршень, передавая эту силу в воздух, от чего возникают нужные звуковые волны.

### **Правило левой руки**

Если проводник с током, показанный на **Рис. 47.11а**, помещён в магнитное поле, то два поля начинают влиять друг на друга, в результате чего возникает сила, действующая на проводник, как это показано на **Рис. 47.11б**.

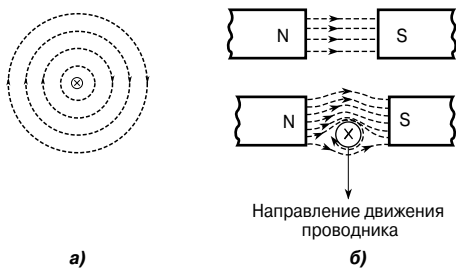


Рис. 47.11

Поле усиливается над проводником и ослабляется под ним, следовательно, это приводит к движению проводника вниз. Это основной принцип работы электрического мотора или прибора с подвижной катушкой.

Направление силы, действующей на проводник, может быть установлено с помощью *правила левой руки* (в Англии его называют *правилом левой руки Флеминга* или *правилом мотора*. — Прим. переводчика).

Правило левой руки гласит:

*Установить большой, указательный и средний пальцы левой руки так, чтобы они образовали прямые углы по отношению друг к другу (Рис. 47.12).*

*Если указательный палец направить вдоль силовых линий магнитного поля, средний — по направлению тока в проводнике, то большой палец укажет на направление движения проводника (то есть направление силы, действующей на проводник).*

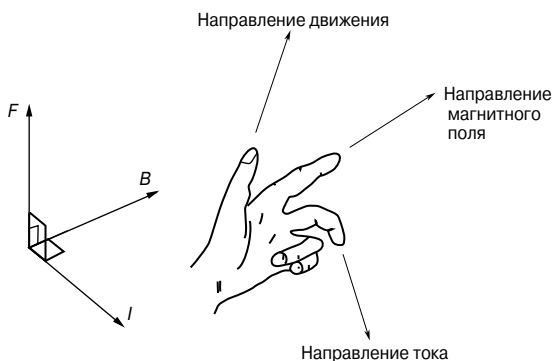


Рис. 47.12

## Принцип работы простейшего электродвигателя постоянного тока

На Рис. 47.13 показана прямоугольная рамка, свободно вращающаяся вокруг фиксированной оси и помещённая в магнитное поле постоянных магнитов. Постоянный ток поступает в рамку через графитовые щётки, соприкасающиеся с коллектором, который состоит из металлического кольца, расщеплённого на две половинки, разделённые изоляционным материалом. Когда в рамке течёт ток, вокруг неё образуется магнитное поле, взаимодействующее с магнитным полем, генерируемым магнитами. Это приводит к тому, что на токопроводящий проводник действует сила  $F$ . Для данного направления тока по правилу левой руки она направлена вниз между точками А и В и вверх — между точками С и D. Возникает вращающий момент, и катушка начинает вращаться против часовой стрелки. Когда катушка поворачивается на  $90^\circ$  от положения, показанного на Рис. 47.13, щётки, соединённые ранее с положительными и отрицательными выводами источника, перемещаются на другие половинки кольца коллектора, что меняет направление тока в проводнике.

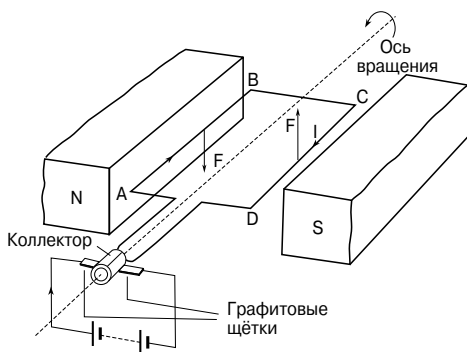


Рис. 47.13

Если бы ток не менял направление и рамка продолжала бы вращаться за пределами вертикального положения, то действующие на неё силы изменили бы направление и она начала бы вращение в противоположном направлении. Однако направление тока меняется на обратное каждый раз, когда рамка проходит через вертикальное положение, и, следовательно, рамка вращается против часовой стрелки всё время, пока течёт ток. По такому принципу работает электродвигатель постоянного тока, который представляет собой устройство по преобразованию электрической энергии в механическую.

## Принцип работы магнитоэлектрических измерительных приборов

Магнитоэлектрические измерительные приборы используют воздействие магнитного поля постоянных магнитов на подвижную катушку с током.

*Прибор с подвижной катушкой* работает по принципу электродвигателя. Когда токопроводящий проводник помещают в магнитное поле, на него начинает действовать сила  $F$ , равная  $F = BIl$ . Если плотность потока  $B$  постоянна (благодаря использованию постоянных магнитов), а проводник имеет фиксированную длину (допустим, это катушка), то сила, действующая на катушку, зависит только от текущего в ней тока.

В магнитоэлектрических измерительных приборах катушка размещается по центру зазора между полюсными наконечниками, как это показано на **Рис. 47.14а**.

(Воздушный зазор делают как можно более маленьким, хотя для ясности происходящего он изображён сильно увеличенным.) Стальные оси, закреплённые в опорных подушках на цилиндрическом железном сердечнике, поддерживают катуш-

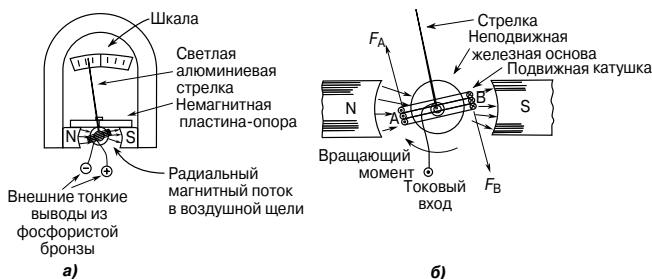


Рис. 47.14

ку. Ток попадает в катушку и выходит из неё через две спиральные волосковые фосфористобронзовые пружины, закрученные в противоположных направлениях, с тем чтобы минимизировать эффект температурных колебаний и ограничить раскачивание катушки (то есть контролировать движение), а также вернуть катушку в нулевое положение, когда ток перестаёт течь.

Как видно на **Рис. 47.14б** ток в катушке вызывает силы, направление которых можно определить с помощью правила левой руки. Две силы —  $F_A$  и  $F_B$  создают вращающий момент,двигающий катушку по часовой стрелке, сдвигая стрелку слева направо. Так как сила пропорциональна току, зависимость силы от тока линейная.

Когда алюминиевый каркас, на который намотана катушка, вращается между полюсами магнита, в каркасе индуцируется небольшой ток (называемый вихревым). Это автоматически влечёт необходимое *затухание* движения системы из-за «нежелания» последней двигаться внутри магнитного поля.

Прибор с подвижной катушкой измеряет только постоянный ток или постоянное напряжение. Выводы помечены как «положительный» и «отрицательный», с тем чтобы гарантировать, что ток проходит через катушку в правильном направлении и отклоняет стрелку на верхней шкале. Диапазон этого чувствительного прибора можно расширить с помощью ответвлений и добавочных сопротивлений (см. гл. 50).

## Сила, действующая на заряд

Когда заряд  $Q$  кулонов движется со скоростью  $v$  м/с в магнитном поле, плотность потока которого равна  $B$  тесл, а сам заряд движется перпендикулярно полю, то *сила*  $F$ , действующая на заряд, равна

$$F = QvB H.$$

**Например,** электрон в телевизионной трубке обладает зарядом  $1.6 \times 10^{-19}$  кулонов и движется со скоростью  $3 \times 10^7$  м/с перпендикулярно полю, плотность потока которого равна 18.5 мТл. Сила  $F$ , действующая на электрон в этом поле, равна

$$\begin{aligned} F &= QvB = 1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^7 \times 18.5 \times 10^{-6} = \\ &= 1.6 \times 3 \times 18.5 \times 10^{-18} = 88.8 \times 10^{-18} = \\ &= \mathbf{8.88 \times 10^{-17} \text{ Н.}} \end{aligned}$$

## 48. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ И ИНДУКТИВНОСТЬ

### Электромагнитная индукция

Когда проводник движется поперёк магнитного поля, как бы «разрезая» силовые линии (или магнитный поток), в проводнике возникает электродвижущая сила (ЭДС). Если проводник образует часть замкнутой цепи, то возникшая ЭДС заставляет ток течь по цепи. ЭДС (а следовательно, и ток) индуцируется в проводнике именно в результате его движения поперёк магнитного поля. Этот эффект называют «*электромагнитной индукцией*».

На **Рис. 48.1** показана проволочная катушка, соединённая с гальванометром с нулевым положением стрелки в середине шкалы.

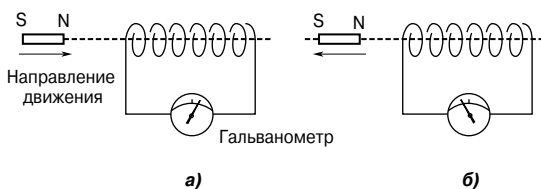


Рис. 48.1

- Когда магнит движется с постоянной скоростью по направлению к катушке (**Рис. 48.1а**), отклонение стрелки гальванометра показывает, что в катушке течёт ток.
- Когда магнит движется с той же скоростью, но удаляясь от катушки, то отклонение стрелки такое же, но в противоположном направлении (**Рис. 48.1б**).
- Когда магнит неподвижен, даже внутри катушки, то отклонение стрелки отсутствует.
- Когда катушка движется с прежней скоростью, а магнит неподвижен, то имеет место такое же отклонение стрелки гальванометра.
- Когда относительная скорость, допустим, удваивается, то отклонение тоже удваивается.
- Когда используют более сильный магнит, то имеет место большее отклонение.
- Когда количество витков провода катушки больше, то имеет место большее отклонение.

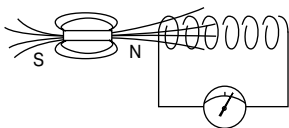


Рис. 48.2

На Рис. 48.2 показано магнитное поле, связанное с магнитом. Когда магнит движется по направлению к катушке, магнитный поток магнита движется поперёк витков, как бы «разрезая» катушку. Это относительное движение маг-

нитного потока и катушки вызывает ЭДС, а следовательно, в катушке индуцируется ток. Этот эффект называют *электромагнитной индукцией*. Законы электромагнитной индукции были выявлены в результате экспериментов английским учёным Фарадеем.

## Законы электромагнитной индукции

Законы электромагнитной индукции Фарадея гласят:

*Наведённая в цепи ЭДС возникает всегда, когда магнитное поле, подключающее эту цепь, изменяется.*

*Величина наведённой ЭДС в любой цепи пропорциональна скорости изменения магнитного потока, подключающего эту цепь.*

Правило Ленца гласит:

*Направление индуцируемой ЭДС везде таково, что она стремится установить ток, противоположный движению или изменению потока, индуцировавшему эту ЭДС.*

Другой приём, альтернативный правилу Ленца и определяющий относительные направления, задаётся с помощью *правила правой руки*, сформулированного Флемингом (в Англии его ещё называют *правилом генератора*. — Прим. переводчика). Оно гласит:

*Установить большой, указательный и средний пальцы правой руки так, чтобы они образовали прямые углы по отношению друг к другу (Рис. 48.3). Если указательный палец направить в направлении магнитного поля, а большой палец — в направлении движения проводника, то средний палец покажет направление индуцированной ЭДС.*

По закону Фарадея ЭДС наводится в проводниках, перемещающихся в магнитном поле. Следовательно, таким способом можно создать источник ЭДС. Такое устройство, называемое *генератором переменного тока*, преобразовывает механическую энергию в электрическую. (Действие простейшего генератора переменного тока описано в гл. 54.)



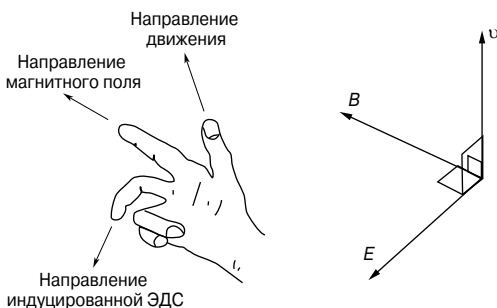


Рис. 48.3

Наведённая ЭДС  $E$  между концами проводника, изображённого на Рис. 48.4, определяется в соответствии с формулой

$$E = Blv$$

где  $B$  — плотность магнитного потока, измеряемая в теслах [Тл],

$l$  — длина проводника в магнитном поле, измеряемая в метрах [м],

$v$  — скорость проводника, измеряемая в метрах в секунду [м/с].

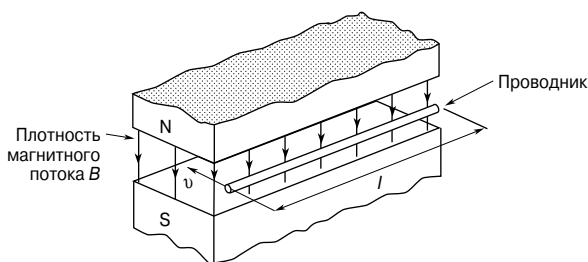


Рис. 48.4

Если проводник движется под углом  $\theta^\circ$  к магнитному полю (а не под углом  $90^\circ$ , как предполагалось ранее), то

$$E = Blv \sin \theta.$$

**Например,** проводник движется со скоростью 15 м/с под углом  $90^\circ$  к магнитному полю, возникшему между двумя полюсами с квадратными лицевыми сторонами, каждая из которых

равна 2 см. Если магнитный поток между полюсами равен 5 мкВб, величина наведённого ЭДС равна

$$E_{90} = Blv \sin 90^\circ = \left( \frac{\Phi}{A} \right) l v \sin 90^\circ = \left( \frac{5 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-4}} \right) (0.02)(15)(1) = \\ = 3.75 \text{ мВ.}$$

Если проводник движется под углом, предположим,  $30^\circ$ , то

$$E_{30} = Blv \sin 30^\circ = E_{90} \sin 30^\circ = 3.75 \sin 30^\circ = 1.875 \text{ мВ.}$$

## Индуктивность

*Индуктивностью* называют свойство цепи наводить ЭДС благодаря индуктивным связям, возникающим в результате изменения тока.

Когда ЭДС наводится в той же цепи, в которой меняется ток, это свойство называют *собственной индуктивностью*  $L$ .

Когда ЭДС наводится в цепи благодаря изменению потока, вызванного изменением тока в соседней цепи, это свойство называют *взаимной индуктивностью*  $M$  (см. гл. 49). Единица индуктивности — *генри* [Гн].

Цепь обладает индуктивностью 1 генри, когда ЭДС в 1 вольт наводится в ней благодаря изменению тока со скоростью 1 ампер в секунду.

Наведённая в катушке с  $N$  витками ЭДС равна

$$E = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

где  $d\Phi$  — изменение потока, измеряемое в веберах [Вб],

$dt$  — время, затраченное на изменение потока, измеряемое в секундах [с]

(то есть  $\frac{d\Phi}{dt}$  — скорость изменения потока).

Знак минус в уравнении напоминает о направлении наведённой ЭДС (по закону Ленца).

**Например**, ЭДС  $E$ , наведённая в катушке с 200 витками, когда имеет место изменение потока 25 мВб в течение 50 мс, равна

$$E = -N \frac{d\Phi}{dt} = -(200) \left( \frac{25 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-3}} \right) = -100 \text{ В.}$$

ЭДС, наводимая в катушке, индуктивность которой  $L$  генри, равна

$$E = -L \frac{dI}{dt}$$

где  $dI$  — изменение тока, измеряемое в амперах [А],  
 $dt$  — время, затраченное на изменение тока, измеряемое в секундах [с]

(то есть  $\frac{dI}{dt}$  — скорость изменения тока).

Например, ЭДС  $E$ , наведённая в катушке с индуктивностью 12 Гн благодаря изменению тока, произошедшему со скоростью 4 А/с, равна

$$E = -L \frac{dI}{dt} = -(12)(4) = -48 \text{ В.}$$

## Катушки индуктивности

Компонент, называемый *катушкой индуктивности*, используется тогда, когда в цепи необходимо наличие свойства индукции. Обычно катушки индуктивности изготавливают просто в форме катушки с навитым проводом.

К факторам, влияющим на индуктивность катушки, относятся:

- число витков провода — чем больше витков, тем выше индуктивность;
- площадь поперечного сечения катушки — чем больше площадь, тем выше индуктивность;
- наличие магнитного сердечника — когда катушка накручена на железный сердечник, тот же ток создаёт более «насыщенное» магнитное поле, и индуктивность возрастает;
- способ закрутки витков — короткая толстая проволоочная катушка обладает большей индуктивностью, чем длинная и тонкая.

На **Рис. 48.5** показаны две катушки индуктивности, применяемые на практике.

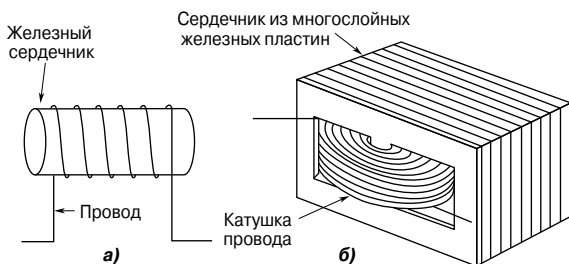


Рис. 48.5

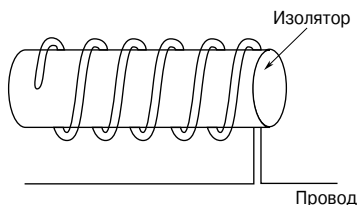
На **Рис. 48.6** показано символическое обозначение катушки индуктивности с воздушным и железным сердечниками в электрической схеме.



**Рис. 48.6**

Катушку с железным сердечником часто называют *дросселем*, так как в случае переменного тока такая катушка обладает дроссельным эффектом, ограничивающим проходящий через него ток.

Во многих случаях появление индуктивности в электрической цепи нежелательно. Для сведения индуктивности к минимуму провод может быть навит в противоположных направлениях, как это показано на **Рис. 48.7**, так, чтобы эффект намагничивания одной части проводника был нейтрализован таким же эффектом другой его части.



**Рис. 48.7**

Для снижения индуктивности провод можно навит на изолятор, как видно на **Рис. 48.7**.

Таким же способом изготавливают стандартные безындуктивные резисторы.

## Энергия, запасённая катушкой индуктивности

Катушка индуктивности обладает способностью сохранять энергию. Накопленная в магнитном поле катушки индуктивности энергия  $W$  определяется выражением

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

**Например**, энергия, накопленная магнитным полем катушки с индуктивностью 8 Гн, в которой течёт ток 3 А, равна

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} (8)(3)^2 = 36 \text{ Дж}.$$

## Индуктивность катушки

*Индуктивность катушки  $L$  определяется выражением*

$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

**Например,** если в катушке с 800 витками течёт ток 4 А и образует поток 5 мВб, соединённый с катушкой, индуктивность катушки равна

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{(800)(5 \times 10^{-3})}{4} = 1 \text{ Гн.}$$

## 49. МАГНИТОСВЯЗАННЫЕ КОНТУРЫ

Когда взаимодействие двух электрических цепей происходит через магнитные поля, а не через электрические компоненты, говорят, что цепи индуктивно или магнитно связаны. Например, обмотки трансформатора образуют *магнитосвязанный контур* (см. гл. 60).

### Взаимная индуктивность

Когда меняющийся ток в одной цепи наводит благодаря электромагнитной индукции ЭДС в другой цепи, говорят, что между двумя цепями (контурами) существует *взаимная индуктивность*. На **Рис. 49.1** показана идеальная эквивалентная схема *радиотехнического вариометра* с регулировкой взаимной индукции.

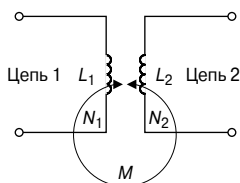


Рис. 49.1

$L_1$  и  $L_2$  — это собственные индуктивности двух цепей, а  $M$  — их взаимная индуктивность. Взаимная индуктивность  $M$  определяется отношением

$$E_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \text{или} \quad E_1 = -M \frac{dI_2}{dt}, \quad (1)$$

где  $E_2$  — ЭДС во второй цепи, возникшей в результате тока  $I_1$  в первой цепи,

$E_1$  — ЭДС в первой цепи, возникшей из-за тока  $I_2$  во второй цепи.

Единица взаимной индуктивности  $M$  — *генри* [Гн].

**Например,** две катушки обладают взаимной индуктивностью 0.2 Гн; ток в одной цепи изменяется от 10 до 4 А за 10 мс.

Средняя наведённая ЭДС во второй цепи в таком случае равна

$$E_2 = -M \frac{dI_1}{dt} = (0.2) \left( \frac{10 - 4}{10 \times 10^{-3}} \right) = -120 \text{ В.}$$

Связь между контурами можно выразить по-другому:

$$M = N_2 \frac{d\Phi_1}{dI_1} \quad \text{и} \quad M = N_1 \frac{d\Phi_2}{dI_2}. \quad (2)$$

Если средой между контурами является воздух, то отношение поток/ток линейно, и уравнение (2) можно записать

$$M = \frac{N_2 \Phi_2}{I_1} \quad \text{и} \quad M = \frac{N_1 \Phi_1}{I_2}. \quad (3)$$

**Например,** А и В — две близко расположенные катушки. А имеет 1 200 витков, а В — 1 000. Когда в катушке течёт ток 0.8 А, поток 100 мкВб соединён с катушкой А, а 75% этого потока соединяется с катушкой В. Тогда (из гл. 48) половина индуктивности катушки А равна

$$L_A = \frac{N_A \Phi_A}{I_A} = \frac{(1\,200)(100 \times 10^{-6})}{0.80} = 0.15 \text{ Гн},$$

а взаимная индуктивность равна

$$M = \frac{N_B \Phi_B}{I_A} = \frac{(1\,000)(0.75 \times 100 \times 10^{-6})}{0.80} = 93.75 \text{ мГн}.$$

## Коэффициент связи

*Коэффициент связи*  $k$  — это степень или часть индуктивной связи, возникающей между контурами, то есть

$$k = \frac{\text{поток двух взаимосвязанных контуров}}{\text{произведенный общий поток}}.$$

Когда нет индуктивной связи,  $k = 0$ . Если индуктивная связь идеальна, то есть все потоки, произведённые в первичной цепи, соединены со вторичной, то  $k = 1$ . Коэффициент связи используют при разработке средств связи, для того чтобы обозначить степень связи между двумя катушками. Если катушки расположены близко друг к другу, большая часть потока, произведённого током в одной катушке, проходит через другую катушку, тогда катушки называют *сильносвязанными*. Если катушки разведены, то есть только часть потока соединяется со второй катушкой, тогда катушки называются *слабосвязанными*.

Эту связь можно показать уравнением

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (4)$$

или

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (5)$$

**Например,** если собственная индуктивность двух катушек соответственно 250 и 400 мГн, и если их взаимная индуктивность 80 мГн, то коэффициент взаимоиндукции равен

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{80 \times 10^{-3}}{\sqrt{(250 \times 10^{-3})(400 \times 10^{-3})}} = \frac{80 \times 10^{-3}}{\sqrt{0.1}} = \mathbf{0.253}.$$

### Катушки индуктивности, соединённые последовательно

На **Рис. 49.2** показаны катушки 1 и 2, намотанные на сердечник из диэлектрика с объединёнными выводами В и С.

В каждой катушке магнитные потоки, производимые током  $i$ , имеют одинаковое направление. Такие катушки называют *кумулятивно связанными*.

Пусть  $L_1$  — собственная индуктивность катушки 1, а  $L_2$  — катушки 2,  $M$  — взаимная индуктивность.

Если обмотку между выводами А и D считать за единый контур, собственная индуктивность которого равна  $L_A$ , то

$$L_A = L_1 + L_2 + 2M. \quad (6)$$

Если выводы В и D объединены, как это показано на **Рис. 49.3**, то направление тока в катушке 2 противоположно, и в этом случае катушки называют *дифференцированно связанными*.

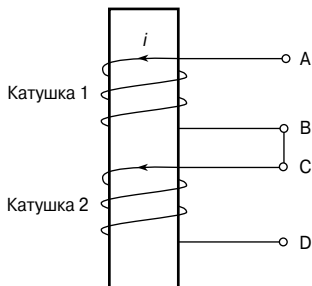


Рис. 49.2

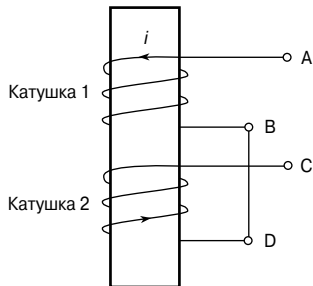


Рис. 49.3

Если  $L_B$  — собственная индуктивность всей цепи между выводами А и С, как видно из **Рис. 49.3**, то

$$L_B = L_1 + L_2 - 2M. \quad (7)$$

Следовательно, полная индуктивность  $L$  индуктивно связанных контуров в зависимости от способа их соединения равна

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M \quad (8)$$



**Например,** собственная индуктивность двух последовательно соединённых катушек равна соответственно 40 и 10 мГн. Выясняется, что общая индуктивность цепи равна 60 мГн. Определим взаимную индуктивность катушек.

Известно, что полная индуктивность двух катушек

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M.$$

Тогда

$$60 = 40 + 10 \pm 2M.$$

Так как  $(L_1 + L_2) < L$ , то

$$60 = 40 + 10 + 2M,$$

откуда

$$2M = 60 - 40 - 10 = 10,$$

и, следовательно, взаимная индуктивность

$$M = \frac{10}{2} = 5 \text{ мГн.}$$

Из уравнений (6) и (7) имеем

$$L_A - L_B = (L_1 + L_2 + 2M) - (L_1 + L_2 - 2M),$$

то есть

$$L_A - L_B = 2M - (-2M) = 4M,$$

откуда взаимная индуктивность

$$\boxed{M = \frac{L_A - L_B}{4}} \quad (9)$$

Уравнение (9) является основой экспериментального метода определения взаимной индуктивности. Следует последовательно соединить катушки с двух сторон и определить эквивалентные индуктивности  $L_A$  и  $L_B$ , используя измерительный мост переменного тока. Тогда взаимная индуктивность выражается четвёртой частью разности между двумя значениями индуктивности.

## Связанные контуры

Величина ЭДС второго контура на **Рис. 49.4**, как следует из уравнения (1), равна

$$E_2 = -M \frac{dI_1}{dt}.$$

Если ток  $I_1$  — синусоидальный, то есть  $I_1 = I_{1m} \sin \omega t$ , тогда

$$E_2 = -M \frac{d}{dt}(I_{1m} \sin \omega t) = M \omega I_{1m} \cos \omega t.$$

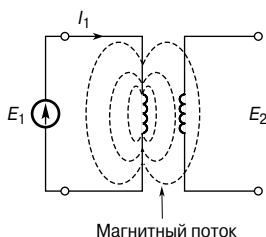


Рис. 49.4

Так как  $\cos \omega t = \sin(\omega t + 90^\circ)$ , то в комплексной форме  $\cos \omega t = j \sin \omega t$ .

Следовательно,

$$E_2 = M \omega I_{1m} (j \sin \omega t) = j \omega M (I_{1m} \sin \omega t),$$

то есть

$$E_2 = j \omega M I_1 \quad (10)$$

Если  $L_1$  — собственная индуктивность первичной обмотки, как видно из Рис. 49.4, то в этой первичной обмотке будет наведена ЭДС, равная  $j \omega L_1 I_1$ , так как поток, установленный током первичной обмотки, также связан и с первичной обмоткой.

### Вторичная обмотка без нагрузки

Для контура на Рис. 49.5:

$$E_2 = \frac{j \omega M E_1}{R_1 + j \omega L_1} \quad (11)$$

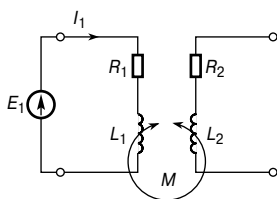


Рис. 49.5

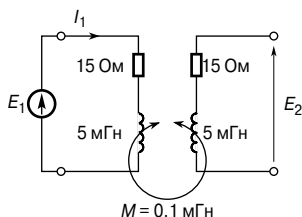


Рис. 49.6

Например, определим ЭДС  $E_2$ , возникающей во вторичной разомкнутой обмотке, для контура, показанного на Рис. 49.6, при условии, что  $E_1 = 8 \sin 2500t$ .

Импеданс первичной обмотки:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R_1 + j \omega L_1 = 15 + j(2500)(5 \times 10^{-3}) = \\ &= (15 + j12.5) \text{ Ом, или } 19.53 \angle 39.81^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Ток первичной обмотки  $I_1$

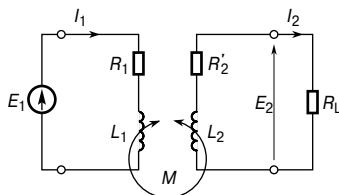
$$I_1 = \frac{E_1}{Z_1} = \frac{8 \angle 0^\circ}{19.53 \angle 39.81^\circ} \text{ A}.$$

В соответствии с уравнением (10) имеем

$$\begin{aligned} E_2 = j\omega M I_1 &= \frac{j\omega M E_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{j(2\,500)(0.1 \times 10^{-3})(8 \angle 0^\circ)}{19.53 \angle 39.81^\circ} = \\ &= \frac{2 \angle 90^\circ}{19.53 \angle 39.81^\circ} = \mathbf{0.102 \angle 50.19^\circ \text{ В.}} \end{aligned}$$

### Вторичная обмотка с нагрузкой

В контуре, показанном на **Рис. 49.7**, нагрузочный резистор  $R_L$  соединён параллельно с выводами вторичной обмотки (резистор  $R'_2$  на схеме — это собственное сопротивление катушки).



**Рис. 49.7**

Пусть  $R'_2 + R_L = R_2$ .

Когда во вторичной обмотке наводится ЭДС, начинает течь ток  $I_2$ , и это является причиной наведения ЭДС в первичной обмотке.

Эффективный импеданс первичной обмотки  $Z_{1(\text{eff})}$  равен

$$Z_{1(\text{eff})} = \frac{E_1}{I_1} = R_1 + \frac{\omega^2 M^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} + j \left( \omega L_1 - \frac{\omega^3 M^2 L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \right) \quad (12)$$

В уравнении (12) первичный импеданс равен  $(R_1 + j\omega L_1)$ . Остаток, то есть  $\left( \frac{\omega^2 M^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} - j \frac{\omega^3 M^2 L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \right)$ , называется *вносимый импеданс*, так как он характеризует импеданс, внесённый обратно в первичную обмотку благодаря влиянию тока вторичной обмотки.

Следовательно,

$$\begin{aligned}\text{вносимый импеданс} &= \frac{\omega^2 M^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} - j \frac{\omega^3 M^2 L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} = \\ &= \omega^2 M^2 \left( \frac{R_2 - j\omega L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \right) = \omega^2 M^2 \left( \frac{R_2 - j\omega L_2}{(R_2 + j\omega L_2)(R_2 - j\omega L_2)} \right) = \\ &= \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + j\omega L_2)},\end{aligned}$$

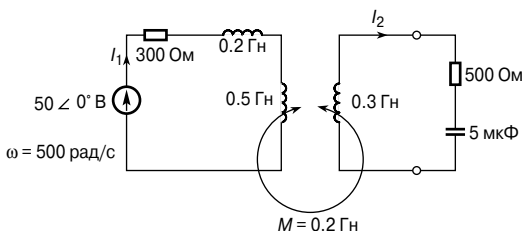
то есть вносимый импеданс

$$\boxed{Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2}} \quad (13)$$

(индекс *r* от английского *reflect* — отражение. — Прим. переводчика).

**Например,** для связанного контура, показанного на **Рис. 49.8**, собственный импеданс первичного контура  $Z_1 = 300 + j(500)(0.2 + 0.5)$ , то есть

$$Z_1 = (300 + j350) \text{ Ом.}$$



**Рис. 49.8**

Собственный импеданс вторичного контура

$$\begin{aligned}Z_2 &= 500 + j \left[ (500)(0.3) - \frac{1}{(500)(5 \times 10^{-6})} \right] = \\ &= 500 + j(150 - 400),\end{aligned}$$

то есть

$$Z_2 = (500 - j250) \text{ Ом.}$$

В соответствии с уравнением (13) вносимый импеданс

$$Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{Z_2} = \frac{(500)^2 (0.2)^2}{500 - j250} = \frac{10^4 (500 + j250)}{500^2 + 250^2} = (16 + j8) \text{ Ом.}$$

Эффективный импеданс первичной обмотки

$$Z_{1(\text{eff})} = Z_1 + Z_2,$$

что эквивалентно уравнению (12).

Тогда

$$Z_{1(\text{eff})} = (300 + j350) + (16 + j8),$$

то есть

$$Z_{1(\text{eff})} = \mathbf{(316 + j358) \text{ Ом.}}$$

Ток первичной обмотки

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{E_1}{Z_{1(\text{eff})}} = \frac{50 \angle 0^\circ}{316 + j358} = \frac{50 \angle 0^\circ}{477.51 \angle 48.57^\circ} = \\ &= \mathbf{0.105 \angle -48.57^\circ \text{ А.}} \end{aligned}$$

Ток вторичной обмотки

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2},$$

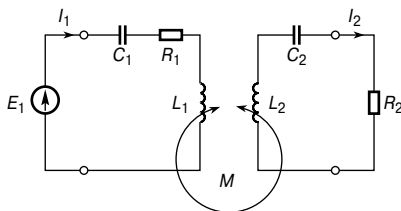
где  $E_2 = j\omega MI_1$  в соответствии с уравнением (10).

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{j\omega MI_1}{Z_2} = \frac{j(500)(0.2)(0.105 \angle -48.57^\circ)}{500 - j250} = \\ &= \frac{(100 \angle 90^\circ)(0.105 \angle -48.57^\circ)}{559.02 \angle -26.57^\circ} = \mathbf{0.0188 \angle 68^\circ \text{ А.}} \end{aligned}$$

### **Резонанс с подстроечным конденсатором**

Для того чтобы добиться резонанса на определённых частотах, к первичным и/или вторичным контурам можно добавлять *подстроечные конденсаторы*. Их можно подключать к обмоткам как последовательно, так и параллельно. На **Рис. 49.9** показано, как настроена каждая обмотка с последовательно подключёнными конденсаторами  $C_1$  и  $C_2$ .



**Рис. 49.9**

Для вычисления их ёмкостей применимо выражение эффективного первичного импеданса,  $Z_{1(eff)}$ , то есть уравнение (12), с той лишь разницей, что  $\omega L_1$  замещается на  $\frac{1}{\omega C_1}$ , а  $\omega L_2$  замещается на  $\frac{1}{\omega C_2}$ .

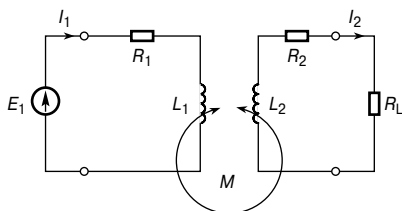
## Правило точки для связанных контуров

Применяя закон Кирхгофа к каждому контуру в составе цепи, показанной на **Рис. 49.10**, получаем

$$E_1 = I_1 (R_1 + j\omega L_1) \pm j\omega M I_2$$

и

$$0 = I_2 (R_2 + R_L + j\omega L_2) \pm j\omega M I_1$$



**Рис. 49.10**

В этих уравнениях члены, содержащие взаимную индуктивность  $M$ , записаны со знаком  $\pm$ , так как не определено, что нужно делать с магнитодвижущими силами, возникающими из-за токов  $I_1$  и  $I_2$ , — прибавлять или вычитать.

Чтобы это прояснить, на чертеже используют обозначение в виде точки. Полярность наведённой в результате взаимной индуктивности ЭДС определяется с помощью точки, которую ставят на чертеже рядом с тем концом эквивалентной обмотки, которая поддерживает такую же связь с магнитным потоком.

*Правило точки* определяет знак напряжения взаимной индуктивности в приведённых выше уравнениях Кирхгофа. Это правило гласит:

|| *когда оба тока входят (или выходят) из пары связанных катушек на отмеченных точками выводах, знак у «М» такой же, как у «L»*

или

|| *когда один ток входит в отмеченный вывод, а другой выходит через отмеченный вывод, знак у «М» противоположен знаку у «L».*

Следовательно, на **Рис. 49.11** показаны два случая, где знаки  $M$  и  $L$  одинаковы, а на **Рис. 49.12** показаны два случая, где их знаки противоположны.

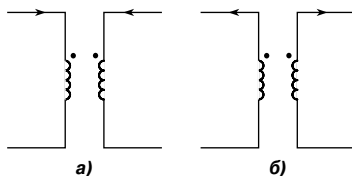


Рис. 49.11

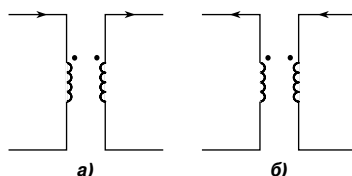


Рис. 49.12

Следовательно, если бы на **Рис. 49.10** точки были бы поставлены у верхних концов катушек  $L_1$  и  $L_2$ , то выражения  $j\omega MI_2$  и  $j\omega MI_1$  в уравнениях Кирхгофа имели бы знак минус (так как направления тока такие же, как на **Рис. 49.12а**).

**Например**, определим значения токов  $I_1$  и  $I_2$  для случая связанного контура, показанного на **Рис. 49.13**.

Положение точек и направления токов совпадают с **Рис. 49.12а**, и, следовательно, знаки  $M$  и  $L$  противоположны.

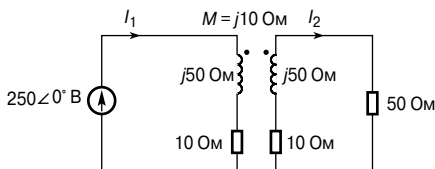


Рис. 49.13

Применяя закон Кирхгофа к первичной цепи, получаем

$$250\angle 0^\circ = (10 + j50)I_1 - j10I_2. \quad (14)$$

Применяя закон Кирхгофа для напряжения к вторичной цепи, получаем

$$0 = (10 + 50 + j50)I_2 - j10I_1. \quad (15)$$

Преобразуя уравнение (15), получаем

$$j10I_1 = (60 + j50)I_2,$$

откуда

$$I_1 = \frac{(60 + j50)I_2}{j10} = \left( \frac{60}{j10} + \frac{j50}{j10} \right) I_2 = (-j6 + 5)I_2,$$

то есть

$$I_1 = (5 - j6)I_2. \quad (16)$$

Делая замену для  $I_1$  в уравнении (14), получаем

$$\begin{aligned} 250 \angle 0^\circ &= (10 + j50)(5 - j6)I_2 - j10I_2 = \\ &= (50 - j60 + j250 + 300 - j10)I_2 = (350 + j180)I_2, \end{aligned}$$

откуда

$$I_2 = \frac{250 \angle 0^\circ}{350 + j180} = \frac{250 \angle 0^\circ}{397.57 \angle 27.22^\circ} = \mathbf{0.635 \angle -27.22^\circ \text{ A.}}$$

Из уравнения (16) имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= (5 - j6)I_2 = (5 - j6)(0.635 \angle -27.22^\circ) = \\ &= (7.810 \angle -50.19^\circ)(0.635 \angle -27.22^\circ), \end{aligned}$$

то есть

$$I_2 = \mathbf{4.951 \angle -77.41^\circ \text{ A.}}$$



## 50. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И ИЗМЕРЕНИЯ

Измерения играют важную роль в разработке, оценке и обслуживании электрических цепей и электрооборудования. Для определения электрических параметров, таких, как сила тока, напряжение, сопротивление или мощность, необходимо преобразовать электрический параметр (или состояние) в визуальную форму. Это делается с помощью приборов (или счётчиков), показывающих значение параметра либо с помощью стрелки,двигающейся по шкале (аналоговые приборы), либо с помощью десятичных чисел (цифровые устройства).

### Аналоговые измерительные приборы

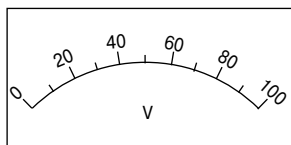
Все *аналоговые измерительные приборы*, предназначенные для определения электрических параметров, состоят из нескольких устройств.

*Управляющее устройство.* Сила тока или напряжение создают механическую силу, которая отклоняет стрелку от нулевого положения.

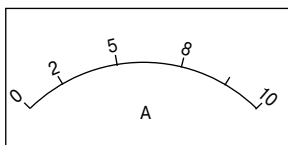
*Регулирующее устройство.* Регулирующая сила действует противоположно отклоняющей силе и гарантирует совпадение показания стрелки на шкале со значением измеряемой величины. Она же препятствует стремлению стрелки всегда отклоняться до максимума. Существует два основных типа регулирующих устройств: регулирование с помощью пружинного механизма и регулирование с использованием силы тяжести.

*Демпфирующее устройство.* Демпфирующая сила обеспечивает быстрое затухание механических колебаний стрелки, достигшей окончательного положения. Существует три основных фактора демпфирования: вихревые токи, сопротивление воздуха и трение текучей среды.

В аналоговых измерительных приборах применяют два основных типа шкал: линейную и нелинейную.



а)



б)

Рис. 50.1

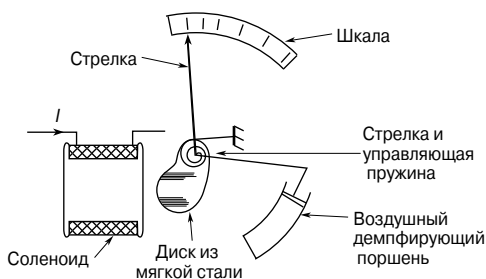
*Линейная шкала* показана на **Рис. 50.1а**. Здесь шкала размечена через равные промежутки. Показанный вольтметр имеет диапазон  $0 \dots 100 \text{ В}$ , то есть отклонение на полную шкалу равно  $100 \text{ В}$ .

*Нелинейная шкала* показана на **Рис. 50.1б**, где шкала сужена в начале, а промежутки между делениями неравномерные. У показанного амперметра отклонение на полную шкалу равно  $10 \text{ А}$ .

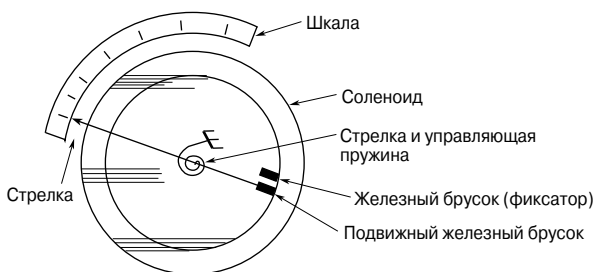
### Электромагнитные измерительные приборы

Электромагнитные измерительные приборы используют воздействие магнитного поля тока неподвижной катушки на подвижную железную пластину, которая намагничивается и перемещается относительно катушки.

На **Рис. 50.2а** схематично показан электромагнитный измерительный прибор с соленоидом в виде *плоской катушки*. Когда в соленоиде протекает ток, имеющий осевое крепление, диск из мягкой стали притягивается к соленоиду и это движение «вынуждает» стрелку двигаться по шкале.



**а)** Прибор, использующий силу притяжения



**б)** Прибор, использующий силу отталкивания

**Рис. 50.2**

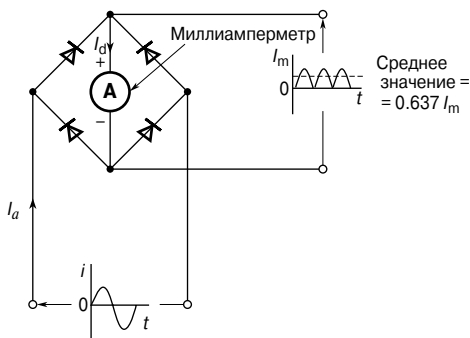
На **Рис. 50.2б** схематично показан электромагнитный измерительный прибор с *круглой катушкой*, где два железных бруска помещены внутрь соленоида, причём один закреплён, а другой

соединён с валом, на котором крепится стрелка. Когда через соленоид течёт ток, два бруска намагничиваются одинаково (в одном направлении) и, следовательно, отталкиваются друг друга, а стрелка движется по шкале.

Сила,двигающая стрелку, в каждом из этих устройств пропорциональна квадрату измеряемой силы тока  $I^2$ , и поэтому направление тока не имеет значения. Электромагнитные измерительные приборы можно использовать при постоянном и переменном токе, однако шкала у таких приборов нелинейная.

### **Выпрямительные детекторные приборы**

Магнитоэлектрический прибор с подвижной катушкой, измеряющий только постоянный ток, можно использовать в соединении с мостовой схемой выпрямителя, как видно на **Рис. 50.3**, для того, чтобы обеспечить измерение переменного тока и напряжения (см. гл. 54).



**Рис. 50.3**

Среднее значение двухполупериодного выпрямляемого тока равно  $0.637 I_m$ . Однако используемый для замера переменного тока прибор обычно прокалиброван в эффективных значениях.

Для синусоидальных величин показание равно  $\frac{0.707 I_m}{0.637 I_m}$ , то есть

имеет коэффициент 1.11 от среднего значения. Шкала выпрямляющего прибора прокалибрована в эффективных значениях измеряемых величин, и производитель предполагает, что измеряемый переменный ток — синусоидальный.

### **Магнитоэлектрические измерительные приборы**

Принцип работы магнитоэлектрических приборов изложен в гл. 47.

### Сравнение измерительных приборов

Тип измерительного прибора	Магнитоэлектрический	Электромагнитный	Выпрямительный
Измеряемая величина	Постоянный ток и постоянное напряжение	Постоянные и переменные токи и напряжения (считываются в г.м.с величинах)	Переменный ток и напряжение (считываются в средних величинах, но шкала скорректирована в г.м.с величинах для синусоидальных токов и напряжений)
Шкала	Линейная	Нелинейная	Линейная
Способ управления	Тонкая пружинка	Тонкая пружинка	Тонкая пружинка
Способ демпфирования	Вихревой ток	Воздух	Вихревой ток
Рабочий диапазон частот	—	20...200 Гц	20...100 кГц
Достоинства	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Линейная шкала.</li> <li>2. Высокая чувствительность.</li> <li>3. Хорошо защищён от влияния случайных магнитных полей.</li> <li>4. Низкая потребляемая мощность</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Надёжная конструкция.</li> <li>2. Невысокая стоимость.</li> <li>3. Способность измерять величины как переменного, так и постоянного тока.</li> <li>4. В диапазоне частот 20...100 Гц показывает среднеквадратическое (гмс) значение измеряемой величины независимо от её формы</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Линейная шкала.</li> <li>2. Высокая чувствительность.</li> <li>3. Хорошо защищён от влияния случайных магнитных полей.</li> <li>4. Низкая потребляемая мощность.</li> <li>5. Большой частотный диапазон</li> </ol>
Недостатки	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Измеряет величины только постоянного тока.</li> <li>2. Более дорогостоящий, чем приборы с подвижным сердечником.</li> <li>3. Требуется бережного обращения (легко повреждается)</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Нелинейная шкала.</li> <li>2. Возможно влияние случайных магнитных полей.</li> <li>3. Возможные ошибки при измерении величин постоянного тока из-за гистерезиса.</li> <li>4. Подвержен ошибкам из-за колебаний температуры.</li> <li>5. Из-за влияния соленоида показания могут быть искажены при измерениях на разных частотах</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Более дорогостоящий, чем приборы с подвижным сердечником.</li> <li>2. Вероятные ошибки при искажении формы измеряемого сигнала</li> </ol>

## Шунтирующие и балластные резисторы

*Амперметр*, измеряющий силу тока, имеет небольшое сопротивление (в идеале — нулевое) и должен быть подсоединён к цепи последовательно.

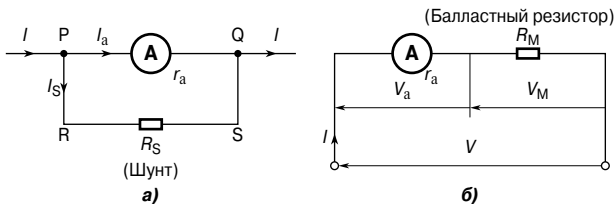
*Вольтметр*, измеряющий разность потенциалов, имеет высокое сопротивление (в идеале — бесконечно большое) и должен быть подсоединён к той части цепи, где необходимо измерить разность потенциалов.

Основные приборы, используемые для измерения силы тока и напряжения, не отличаются друг от друга, так как основной их частью является миллиамперметр. Это чувствительный прибор, отклонение на полную шкалу которого для тока всего несколько миллиампер. Когда нужно, чтобы амперметр измерил большие токи, пропорциональная часть тока отводится с помощью небольшого сопротивления, соединённого параллельно со счётчиком. Такой отводящий резистор называют шунтирующим резистором или *шунтом*.

Из **Рис. 50.4а** получаем  $V_{PQ} = V_{RS}$ .

Следовательно,  $I_a r_a = I_S R_S$ , откуда сопротивление шунта

$$R_S = \frac{I_a r_a}{I_S}$$



**Рис. 50.4**

Миллиамперметр превращается в вольтметр благодаря тому, что его соединяют последовательно с резистором, имеющим большое сопротивление (называемым *балластным резистором*), как показано на **Рис. 50.4б**.

Из схемы на **Рис. 50.4б** следует, что

$$V = V_a + V_M = I_a r_a + I R_M,$$

откуда сопротивление балластного регистра

$$R_M = \frac{V - I_a r_a}{I}$$

**Например**, пусть стрелка магнитоэлектрического измерительного прибора отклоняется на полную шкалу при токе 20 мА,

а его сопротивление 25 Ом. Чтобы прибор можно было использовать как амперметр в диапазоне токов 0...10 А, шунтирующий резистор  $R_S$  следует соединить параллельно с прибором. На **Рис. 50.4а** видно, что если

$$I = 10 \text{ А},$$

то

$$I_S = I - 0.020 = 9.98 \text{ А}.$$

Отсюда следует, что сопротивление шунтирующего резистора

$$R_S = \frac{I_a r_a}{I_S} = \frac{(0.020)(25)}{9.98} = \mathbf{50.10 \text{ мОм}}.$$

Для того чтобы прибор можно было применять как вольтметр, работающий в диапазоне 0...100 В, к нему следует последовательно подсоединить балластный резистор  $R_M$ .

Величина  $R_M$  равна

$$R_M = \frac{V - I_a r_a}{I} = \frac{100 - (0.020)(25)}{0.020} = \mathbf{4.975 \text{ кОм}}.$$

## Электронные измерительные приборы

*Электронные измерительные приборы* обладают преимуществом над такими приборами, как электромагнитные измерительные приборы и измерительные приборы с подвижной катушкой. У них гораздо большее входное сопротивление (иногда достигающее до 1 000 МОм), и они могут работать в гораздо большем диапазоне частот (от постоянного тока до МГц).

*Цифровой вольтметр* (ЦВ) даёт показания измеряемого напряжения в цифровом отображении. К преимуществам цифровых приборов перед аналоговыми относятся более высокая точность и разрешение, отсутствие ошибок при снятии показаний и погрешности от параллакса (см. далее), а также очень высокое входное сопротивление, постоянное на всех диапазонах.

*Цифровой многофункциональный измерительный прибор*, получивший название *мультиметра*, — это цифровой вольтметр с дополнительной схемой, которая позволяет измерять напряжение переменного тока, силу переменного и постоянного токов и величину сопротивлений.

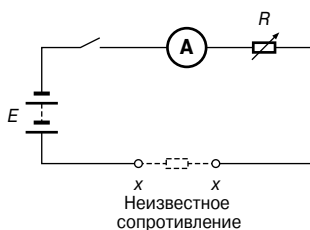
Обычно приборы для измерения переменного тока калибруются при помощи синусоидального сигнала для определения эффективных значений измеряемых величин, когда к прибору прикладывается синусоидальный сигнал. Некоторые типы измерительных приборов, таких, как электромагнитные и электродинамические, дают действительные эффективные значения. Что касается других, то их показания либо превышают среднее

значение (как в выпрямительном приборе с подвижным магнитом), либо занижают относительно пикового значения.

Иногда сигналы, которые нужно измерить, отличаются сложными волновыми характеристиками (см. гл. 76), и, когда сигнал несинусоидальный, могут возникать ошибки при снятии показаний, в случае если прибор был прокалиброван только для гармонических волн. Применение электронных измерительных приборов может значительно уменьшить появление таких ошибок.

## Омметр

*Омметр* — это прибор для измерения электрического сопротивления. Электрическая схема простейшего омметра приведена на **Рис. 50.5**.



**Рис. 50.5**

В отличие от амперметра или вольтметра омметр не использует энергию, необходимую для его работы от измеряемого объекта. В омметре необходимая для измерения энергия подаётся от автономного источника напряжения, например от гальванической батареи. Для начала выводы  $XX$  закорочены, а сопротивление подстроечного резистора  $R$  устанавливают так, чтобы отклонение стрелки на миллиамперметре было максимальным (на полную шкалу). Если ток  $I$  максимален, а напряжение  $E$  постоянно, то сопротивление  $R = E/I$  минимально. Следовательно, отклонение на полную шкалу на миллиамперметре соответствует нулю на шкале сопротивления.

Когда выводы  $XX$  разомкнуты, то никакого тока в цепи нет и  $R (= E/0)$  очень велико (на шкале сопротивлений эту точку обозначают символом бесконечности —  $\infty$ ).

Следовательно, миллиамперметр может быть прокалиброван непосредственно в омах. В результате получается суженная (нелинейная) шкала, читаемая справа налево, как видно на **Рис. 50.6**.

Когда прибор откалиброван, резистор с неизвестным сопротивлением помещают между выводами  $XX$ , и его величину определяют по положению стрелки на шкале. Омметр, рассчитанный

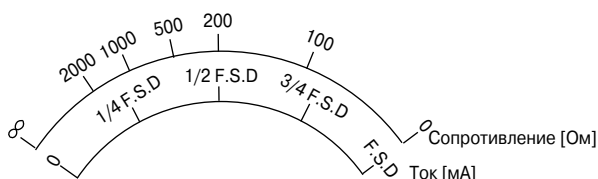


Рис. 50.6

на измерение малых сопротивлений, называют *прибором для контроля целостности цепей*. Омметр, рассчитанный на измерение больших сопротивлений (мегаомы и больше), называют прибором для проверки сопротивления изоляции (то есть *мегомметр*).

## Универсальные измерительные приборы

Есть такие приборы, которые содержат магнитоэлектрический измерительный прибор с несколькими переключателями и последовательно соединёнными умножителями. Широкий спектр показаний можно отразить на единой шкале, проградуированной так, чтобы считывать значения как тока, так и напряжения. Если в прибор встроена гальваническая батарея, то можно измерять и сопротивление. Такие приборы называются *универсальными измерительными приборами*, или *мультиметрами*, или *многошкальными электроизмерительными приборами*.

К типичным примерам относится «авометр». Определённый диапазон можно выбрать либо с помощью отдельных выводов, либо с помощью селекторного переключателя. За один раз можно показать измерение только одного параметра. Зачастую такие приборы используются для цепей с переменным и постоянным током, для чего в прибор встроены выпрямитель.

## Ваттметры

*Ваттметр* — это прибор для измерения электрической мощности в цепи. На Рис. 50.7 показано типичное включение ваттметра, применяемого для измерения мощности, прикладываемой к нагрузке.

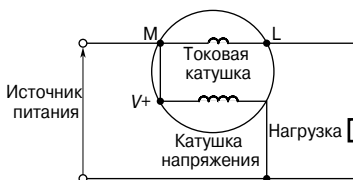


Рис. 50.7



В приборе имеется две катушки:

- токовая катушка, последовательно соединённая с нагрузкой, наподобие амперметра;
- катушка напряжения, параллельно соединённая с нагрузкой, наподобие вольтметра.

## Эффект «нагрузки»

Работа некоторых измерительных приборов зависит от мощности, взятой от цепи, в которой производятся измерения. В зависимости от эффекта «нагрузки» прибора (то есть от тока, взятого для того, чтобы прибор работал) условия в цепи могут измениться.

Сопротивление вольтметров можно подсчитать, так как каждый из них обладает установленной чувствительностью (или «показателем качества»), зачастую установленной в «кОм на вольт» отклонения на полную шкалу. Вольтметр должен обладать как можно более высоким сопротивлением (в идеале — бесконечно большим). На переменном токе импеданс прибора изменяется в зависимости от частоты, и, следовательно, эффект нагрузки прибора может изменяться.

## Электронно-лучевой осциллограф

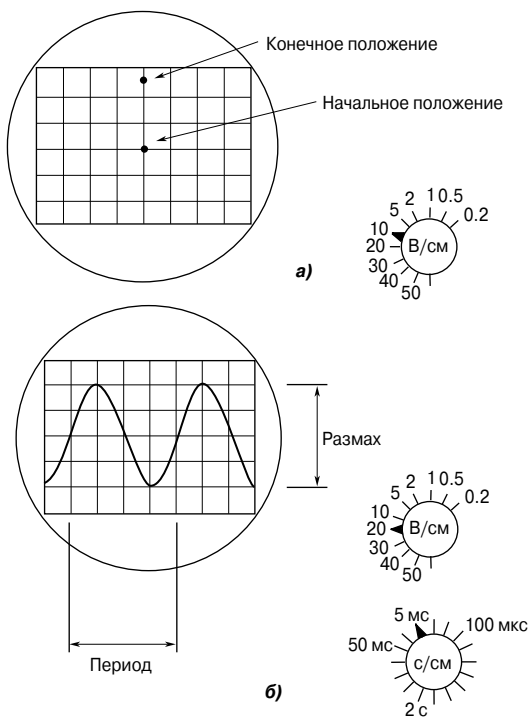
*Электронно-лучевой осциллограф (ЭЛО)* применяется для исследования формы сигнала и измерения напряжения, тока, частоты, фазы и периода сигнала. Для изучения периодических колебаний генератор пилообразных импульсов отклоняет по горизонтали (то есть по оси X) пучок электронов, действуя как генератор развёртки. Сигнал, который необходимо исследовать, прикладывается к системе вертикального отражения (ось Y), как правило, после усиления.

Напротив экрана у осциллографов обычно имеется целлулоидная координатная сетка площадью 10 на 10 мм, которая называется *градуировочной сеткой*. Среди элементов управления генератором развёртки есть «переменный» переключатель, показывающий скорость развёртки в масштабе «время на сантиметр». Это может быть выражено символами «с/см», «мс/см» или «мкс/см». Выбор положения переключателя велик. На передней панели ЭО имеется также переключатель усилителя Y с большим числом возможных положений, помеченный знаком «вольт/см».

- При замере *постоянного напряжения* на ЭО используется только Y переключатель усилителя «вольт/см». Когда к пластинам Y не приложено напряжение, на экране наблюдается горизонтальное положение развёртки. Когда к пластинам Y приложено напряжение постоянного тока, новое (сдвинутое

вверх) горизонтальное положение развёртки показывает значение напряжения относительно предыдущего.

**Например, на Рис. 50.8а**, где к пластинам  $Y$  не приложено напряжение, развёртка находится в центре экрана (первоначальная позиция), а затем, в результате воздействия напряжения постоянного тока, она передвигается на 2.5 см и занимает окончательное положение, как это видно на «экране». При положении переключателя «вольт/см» на позиции 10 вольт/см значение постоянного напряжения равно  $2.5 \text{ см} \times 10 \text{ вольт/см}$ , то есть 25 вольт.



**Рис. 50.8**

- Для замера *переменного напряжения* рассмотрим случай сигнала синусоидальной формы, который появляется на экране ЭО, как видно на **Рис. 50.8б**. Если переключатель «время/см» занимает позицию, скажем, 5 мс/см, то период  $T$  синусоидального сигнала составит  $5 \text{ мс/см} \times 4 \text{ см}$ , то есть **20 мс**, или **0.02 с**.

Так как *частота*  $f = \frac{1}{T}$ , то  $f = \frac{1}{0.02} = 50 \text{ Гц}$ .

Если переключатель «вольт/см» установлен, допустим, на от-

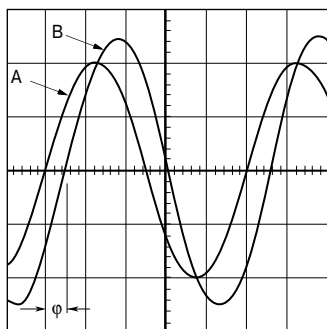
метке 20 вольт/см, тогда *амплитуда*, или *пиковое значение*, изображённого синусоидального сигнала равна  $20 \text{ В/см} \times 2 \text{ см}$ , то есть **40 В**.

Так как  $\frac{\text{действующее значение}}{\text{значение}} = \frac{\text{пиковое значение}}{\sqrt{2}}$  (см. гл. 54),

то  $\frac{\text{действующее значение напряжения}}{\text{значение}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = \mathbf{28.28 \text{ В}}$ .

В случае когда требуется сравнить два сигнала, применяют *двухлучевой осциллограф*.

**Например**, у двухлучевого осциллографа, показанного на **Рис. 50.9**, переключатель «время/см» установлен на отметке 100 мкс/см, а переключатель «вольт/см» — 2 В/см.



**Рис. 50.9**

Ширина каждого полного цикла на экране равна 5 см для обоих периодических сигналов.

Следовательно, период  $T$  каждого сигнала

$$5 \text{ см} \times 100 \text{ мкс/см} = \mathbf{0.5 \text{ мс}}.$$

Частота каждого сигнала

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5 \times 10^{-3}} = \mathbf{2 \text{ кГц}}.$$

Пиковое значение сигнала A равно  $2 \text{ см} \times 2 \text{ В/см} = \mathbf{4 \text{ В}}$ .

Следовательно, эффективное значение сигнала A

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \mathbf{2.83 \text{ В}}.$$

Пиковое значение сигнала B равно  $2.5 \text{ см} \times 2 \text{ В/см} = \mathbf{5 \text{ В}}$ .

Следовательно, эффективное значение сигнала B

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \mathbf{3.54 \text{ В}}.$$

Так как 5 см на экране характеризуют 1 цикл, значит, это соответствует  $360^\circ$ , то есть 1 см соответствует  $\frac{360}{5} = 72^\circ$ .

Фазовый угол  $\varphi$  на экране соответствует 0.5 см, поэтому  $0.5 \text{ см} \times 72^\circ / \text{см} = 36^\circ$ .

Следовательно, колебание А опережает колебание В на  $36^\circ$ .

Для наладки и использования ЭО требуются соответствующие навыки. Однако большим его преимуществом является возможность наблюдения за формой сигнала — качество, которого нет у других измерительных приборов.

## Децибелы (отношения логарифмов)

В электронных системах отношение двух одинаковых величин, измеренных в разных точках системы, зачастую выражается в логарифмических единицах. По определению, если отношение мощностей  $P_1$  и  $P_2$  надо выразить в децибелах (дБ), то число децибелов  $X$  равняется

$$X = 10 \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ дБ} \quad (1)$$

Следовательно, когда отношение мощностей  $\frac{P_2}{P_1} = 1$ , то в децибелах коэффициент мощности  $= 10 \lg 1 = 0$ ;

когда отношение мощностей  $\frac{P_2}{P_1} = 100$ ,

то в децибелах коэффициент мощности  $= 10 \lg 100 = +20$  (то есть имеет место усиление мощности);

когда отношение мощностей  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{100}$ ,

то в децибелах коэффициент мощности  $= 10 \lg \frac{1}{100} = -20$  (то есть имеет место потеря мощности или ослабление).

**Например,** коэффициент усиления усилителя равен 14 дБ, входная мощность — 8 мВт. Определим выходную мощность этого усилителя.

Коэффициент мощности в децибелах  $= 10 \lg \left( \frac{P_2}{P_1} \right)$ ,

то есть

$$14 = 10 \lg \left( \frac{P_2}{8} \right),$$

откуда

$$1.4 = \lg\left(\frac{P_2}{8}\right)$$

и по определению логарифмов

$$10^{1.4} = \left(\frac{P_2}{8}\right),$$

то есть

$$25.12 = \frac{P_2}{8},$$

отсюда выходная мощность  $P_2 = (25.12)(8) = \mathbf{201 \text{ мВт}}$ , или **0.201 Вт**.

Аналогично с помощью отношения логарифмов можно вычислять коэффициенты усиления по току и напряжению. Коэффициент усиления (в децибелах) равен

$$X = 20 \lg\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \text{ дБ}$$

или

$$X = 20 \lg\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \text{ дБ}$$

Из уравнения (1) получаем, что  $X$  децибел — это отношение логарифмов одинаковых величин, не являющееся абсолютной единицей измерения. Следовательно, необходимо установить *исходный уровень*, для того чтобы измерять число децибел выше или ниже этого уровня. Наиболее широко распространённый уровень отсчёта для мощности — 1 мВт. Когда уровни мощности выражаются в децибелах, оказавшихся выше или ниже этого исходного уровня, то единицей измерения этого нового уровня мощности является дБ<sub>м</sub>.

Шкала вольтметра может быть скорректирована так, чтобы отображать уровень мощности непосредственно в децибелах. Обычно её калибруют, принимая за начальный уровень 0 дБ, когда мощность 1 мВт рассеивается на резисторе 600 Ом (это естественный импеданс простейшей линии связи). Исходное напряжение  $V$  получают из соотношения

$$P = \frac{V^2}{R},$$

то есть

$$1 \times 10^{-3} = \frac{V^2}{600},$$

откуда

$$V = 0.775 \text{ В.}$$

$$\text{В общем случае число дБ}_m X = 20 \lg\left(\frac{V}{0.775}\right).$$

Следовательно,

$$V = 0.20 \text{ В соотносится с } 20 \lg\left(\frac{0.20}{0.775}\right) = -11.77 \text{ дБ}_m,$$

и

$$V = 0.90 \text{ В соотносится с } 20 \lg\left(\frac{0.90}{0.775}\right) = +1.3 \text{ дБ}_m \text{ и т. д.}$$

На **Рис. 50.10** показана шкала типичного *децибелметра*, или дБ метра.



**Рис. 50.10**

Децибелметр вносит ошибки, когда импеданс цепи не равен 600 Ом.

## Нулевой метод измерений

*Нулевой метод измерений* — это простой, точный и широко распространённый метод, зависящий от показаний прибора, скорректированных так, чтобы считывался только нулевой ток. Метод подразумевает что

- если есть хоть какое-то отклонение от нулевого, то начинает течь ток;
- если отклонения нет, то ток не течёт (то есть нулевое состояние).

Для реализации нулевого метода применяют чувствительный миллиамперметр или микроамперметр с нулём в середине шкалы, называемый *гальванометром*. Этот метод применяется в мосте сопротивлений, в потенциометре постоянного тока и в мосте переменного тока (см. гл. 67).

## Мост сопротивлений Уитстона

На **Рис. 50.11** показан *мост сопротивлений*, который сравнивает неизвестное сопротивление  $R_x$  с другими известными, то есть с сопротивлениями резисторов  $R_1$  и  $R_2$ , имеющих фиксированные значения, и с сопротивлением резистора  $R_3$ , имеющим переменные значения.  $R_3$  подбирают до тех пор, пока на гальванометре  $G$  отклонение стрелки не станет нулевым. Это значит, что между точками А и В тока нет,  $V_A = V_B$ , и мост сопротивления становится «сбалансированным».

В этом случае справедливо соотношение  $R_1 R_x = R_2 R_3$ , откуда

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

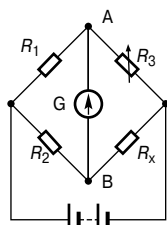


Рис. 50.11

## Потенциометр постоянного тока

*Потенциометр* постоянного тока — это компенсационный прибор, используемый для определения величины ЭДС и напряжения сравнением с уже известными значениями ЭДС или разности потенциалов. На **Рис. 50.12а** показано, как, используя стандартный элемент известного ЭДС  $E_1$ , скользящий контакт  $S$  движется вдоль провода до тех пор, пока на длине  $l_1$  не будет достигнуто равновесие (то есть отклонение стрелки гальванометра равно нулю).

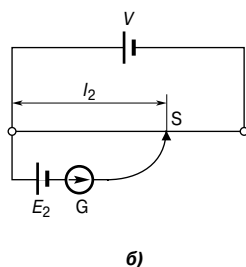
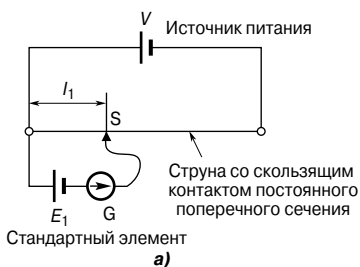


Рис. 50.12

Стандартный элемент теперь заменяется элементом с неизвестной ЭДС  $E_2$  (**Рис. 50.12б**), и снова достигается равновесие (показано как  $l_2$ ).

Так как

$$E_1 \sim l_1 \text{ и } E_2 \sim l_2, \text{ то}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{l_1}{l_2},$$

откуда

$$E_2 = E_1 \left( \frac{l_2}{l_1} \right)$$

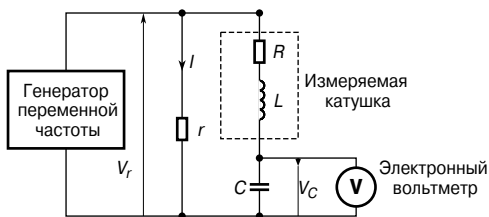
Потенциометр может быть выполнен в виде резистивного двухэлементного потенциального делителя, в котором коэффициент деления скорректирован так, чтобы давать простейшее переменное питание постоянным током. Такие приборы выпускаются в виде резистивного элемента со скользящим контактом, регулируемым вращательным или линейным движением рукоятки управления.

### Куметр (измеритель добротности)

*Добротность  $Q$*  последовательной  $L$ - $C$ - $R$  цепи — это повышение напряжения при резонансе, то есть

$$Q = \frac{\text{напряжение на конденсаторе}}{\text{приложенное напряжение}} = \frac{V_c}{V} \text{ (см. гл. 68).}$$

На **Рис. 50.13** показана упрощённая схема *куметра*, используемая для измерения добротности.



**Рис. 50.13**

Ток, текущий от генератора переменной частоты через очень низкое сопротивление  $r$ , создаёт напряжение переменной частоты  $V_r$ , которое прикладывается к последовательной цепи  $L$ - $C$ - $R$ . Частота изменяется до тех пор, пока резонанс не увеличивает напряжение  $V_C$  до максимального значения. При наступлении резонанса фиксируются  $V_r$  и  $V_C$ .

Тогда

$$Q = \frac{V_C}{V_r} = \frac{V_C}{Ir}.$$

В применяемом на практике куметре напряжение  $V_r$  поддерживают постоянным, и электронный вольтметр может быть прокалиброван так, чтобы показывать непосредственно величину доб-



ротности. При использовании переменного конденсатора  $C$  осциллограф настроен на определённую частоту, и тогда  $C$  может быть откорректирован до достижения резонанса. В этом случае можно подсчитать индуктивность  $L$  с помощью формулы

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Так как  $Q = \frac{2\pi fL}{R}$ , то можно подсчитать  $R$ .

Куметры работают на разных частотах, и выпускаются приборы с частотными диапазонами от 1 кГц до 50 МГц. Точность куметров составляет примерно  $\pm 5\%$  и ограничена эффективной параллельной ёмкостью, которой обладает катушка из-за ёмкости между витками.

## Ошибки измерений

Использование приборов, измеряющих электрические величины, всегда сопровождается *ошибками*. Наибольшая вероятность появления ошибок при измерении возникает из-за

- ограничений возможностей прибора;
- ошибок оператора;
- приборов, вносящих помехи в измеряемую цепь.

### *Ошибки в пределах применимости прибора*

*Точность градуировки* прибора зависит от точности его конструкции. Каждый прибор имеет допустимый предел ошибок, который выражается в значениях отклонения от полной шкалы в процентах. Например, промышленные приборы имеют точность  $\pm 2\%$  от значений отклонения к полной шкале. Следовательно, если у вольтметра отклонение полной шкалы равно 100 В, а он показывает, скажем, 40 В, то реальное значение напряжения находится между  $40 \pm (2\% \text{ от } 100)$ , или  $40 \pm 2$ , то есть между 38 и 42 В.

Когда прибор калибруют, его показания сравнивают с эталонным прибором и составляют график зависимости «ошибки» от «отклонений прибора». На **Рис. 50.14** показан типичный график, по которому видно, что точность зависит от длины шкалы (цены деления).

Следовательно, прибор с точностью отклонения полной шкалы  $\pm 2\%$  скорее всего будет иметь точность, большую, чем  $\pm 2\%$  отклонения относительно полной шкалы в пределах рабочего диапазона.

### *Ошибки оператора*

Оператор может легко ошибиться, снимая показания прибора. При линейной шкале значения измеряемых величин определить довольно легко; при нелинейной шкале сделать это слож-

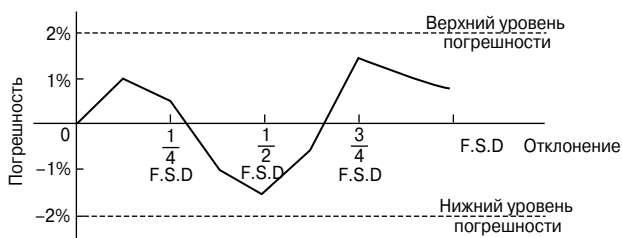


Рис. 50.14

нее. К тому же шкалы отличаются в зависимости от прибора, и некоторые приборы имеют больше одной шкалы (например, мультиметры), поэтому при снятии показаний легко ошибиться. Снимая показания с прибора, смотреть на поверхность шкалы следует под прямым углом в точке, куда указывает стрелка; на шкалу прибора нельзя смотреть «под углом».

### *Ошибки из-за вносящего помехи измерительного прибора*

Любой измерительный прибор, подсоединённый к цепи, в той или иной степени влияет на эту цепь. Для работы приборов требуется некоторая мощность, но если эта мощность мала по сравнению с мощностью цепи, то ошибки будут незначительны. Причиной ошибок может стать неправильное размещение прибора в цепи. Например, пусть сопротивление измеряется методом «вольтметр-амперметр», как показано на **Рис. 50.15**. Полагая, что у нас «идеальные» измерительные приборы, сопротивление должно быть равно показанию вольтметра, делённому на показания амперметра (то есть  $R = V/I$ ).

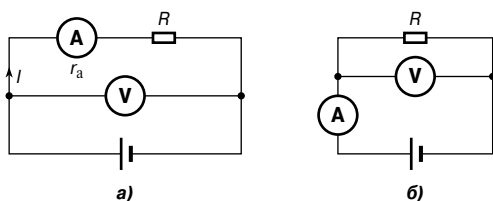


Рис. 50.15

Однако на схеме, показанной на **Рис. 50.14а**,  $V/I = R + r_a$ , а на схеме, показанной на **Рис. 50.14б**, ток, протекающий через амперметр, равен сумме токов, протекающих через резистор и вольтметр. Следовательно, показания вольтметра, делённые на показания амперметра, не дадут точного значения сопротивления  $R$  при любом виде соединения.

## 51. ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ДИОДЫ

### Проводники, полупроводники, изоляторы

По величине удельного сопротивления материалы можно условно разделить на три типа: *проводники*, *полупроводники* и *изоляторы*. К хорошим проводникам относятся металлы, имеющие удельное сопротивление порядка ( $10^{-7} \dots 10^{-8}$ ) Ом·м. Удельное сопротивление полупроводников находится в диапазоне ( $10^{-3} \dots 3 \times 10^3$ ) Ом·м. Изоляторы имеют удельное сопротивление порядка ( $10^4 \dots 10^{14}$ ) Ом·м.

Ниже приведены некоторые типичные значения удельных сопротивлений различных материалов при комнатной температуре.

Проводники	
Алюминий	$2.7 \times 10^{-8}$ Ом·м
Латунь (70 Cu/30 Zn)	$8 \times 10^{-8}$ Ом·м
Медь (чистая прокатанная)	$1.7 \times 10^{-8}$ Ом·м
Сталь (мягкая)	$15 \times 10^{-8}$ Ом·м
Полупроводники (при 27°C)	
Кремний	$2.3 \times 10^3$ Ом·м
Германий	0.45 Ом·м
Изоляторы	
Стекло	$\geq 10^{10}$ Ом·м
Слюда	$\geq 10^{11}$ Ом·м
Полихлорвинил	$\geq 10^{13}$ Ом·м
Резина (без примесей)	( $10^{12} \dots 10^{14}$ ) Ом·м

За пределами определённого температурного диапазона с ростом температуры сопротивление проводника увеличивается. Сопротивление изоляторов в этих же условиях остаётся примерно одинаковым. Сопротивление полупроводников с ростом температуры уменьшается. На **Рис. 51.1** показано, как изменяется сопротивление материалов каждого из этих типов, имевших при температуре  $+15^\circ\text{C}$  одинаковое сопротивление (и, следовательно, совершенно разные размеры).

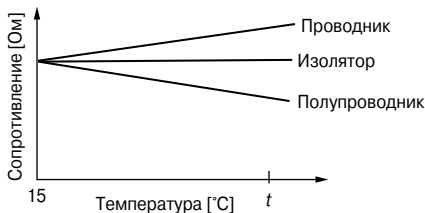


Рис. 51.1

## Кремний и германий

В электронике самыми значимыми полупроводниками являются *кремний* и *германий*. С ростом температуры этих материалов их удельное сопротивление уменьшается и в конце концов доходит до той точки, когда они становятся проводниками. По этой причине кремниевые приборы нельзя использовать, если рабочая температура превышает  $+(150...200)^{\circ}\text{C}$  (конкретная величина предельной температуры зависит от концентрации и типа примесей), а германиевые приборы нельзя использовать в условиях, когда температура выше, чем  $+(75...90)^{\circ}\text{C}$ , в зависимости от примесей. Когда температура полупроводника падает ниже нормальной комнатной температуры, удельное сопротивление возрастает до тех пор, пока при очень низкой температуре полупроводник не станет изолятором.

## Материалы *n*- и *p*-типа

Добавление чрезвычайно малых доз примесей к чистому полупроводнику называется *легированием*. Сурьма, мышьяк и фосфор называют примесями *n*-типа, и когда любая из этих примесей добавляется к кремнию или германию, то образуется *материал n-типа*. Количество добавляемых примесей обычно колеблется в диапазоне от 1 части примеси на  $10^5$  частей полупроводникового материала, до 1 части примеси на  $10^8$  частей полупроводника в зависимости от требуемого удельного сопротивления. Индий, алюминий и бор называют примесями *p*-типа, и при их добавлении к чистому полупроводниковому материалу образуется *материал p-типа*.

В полупроводниковых материалах на единицу объёма приходится очень мало свободных *носителей заряда*, обеспечивающих его проводимость. Это объясняется тем, что «структура с четырьмя электронами» во внешней оболочке атома (называемыми валентными электронами) образует сильные ковалентные связи с соседними атомами, в результате чего появляется тетрагональная структура с *электронами*, довольно прочно удерживаемыми на своих местах. **Рис. 51.2** иллюстрирует это явление на примере двухмерного изображения решётки германия.

Мышьяк, сурьма и фосфор пятивалентны, и, когда в полупроводник добавляют одно из этих веществ, некоторые из атомов примесей объединяются в тетрагональную структуру. «Пятый» валентный электрон не закреплён в решётке и поэтому может свободно перемещаться, участвуя в создании проводимости. На **Рис. 51.3**, представленном в двухмерном изображении, атом фосфора заменяет один из атомов германия и отдаёт носитель заряда.

В результате материал, содержащий свободные электроны, стал называться материалом *n*-типа.

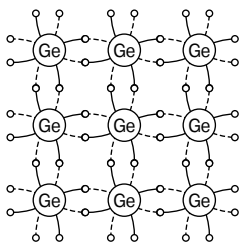


Рис. 51.2

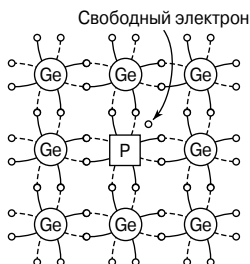


Рис. 51.3

Индий, алюминий и бор имеют трёхвалентные электроны, и поэтому, когда в проводник добавляют одно из этих веществ, атомы примеси встают на место некоторых атомов полупроводника. Для образования четырёх связей, характерных для полупроводникового материала, не хватает одного электрона, и этот дефицит называют *дыркой*.

Из-за движения электронов от одной недостающей связи к другой возникает разность потенциалов, и создаётся впечатление, что перемещаются дырки, создавая эффект проводимости. На Рис. 51.4 показано, как электрон движется от А к В, при этом возникает ощущение, что это от В к А движется дырка.

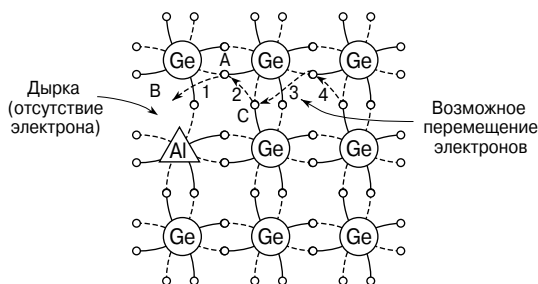


Рис. 51.4

Затем электрон движется от С к А, а кажется, что дырка перемещается от А к С, и т. д. В результате реализуется проводимость в материале *p*-типа.

## ***p-n*-переход**

*p-n-переход* — это брусок полупроводникового материала, одна часть которого относится к *p*-типу, а другая — к *n*-типу. Для того чтобы понять, что происходит с зарядами, представим себе, что бруски *p*- и *n*-типа плотно соединили вместе. Представим также, что дырка — это носитель положительного заряда, а электрон — носитель отрицательного заряда.

В месте контакта двух материалов (называемом *p-n-переходом*) добавленные к материалу *n*-типа электроны, называемые *основными носителями*, переходят в материал *p*-типа (диффузия происходит из области с высокой концентрацией в область с более низкой концентрацией), а дырки из материала *p*-типа переходят в материал *n*-типа, как это показано стрелками на **Рис. 51.5**.

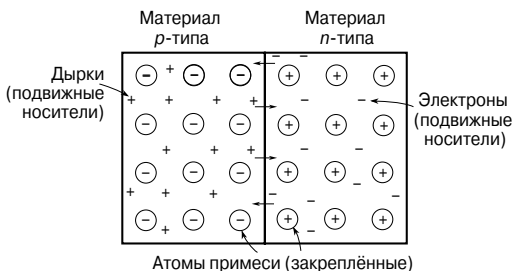


Рис. 51.5

Так как материал *n*-типа потерял электроны, он приобретает положительный потенциал по отношению к материалу *p*-типа. Следовательно, он стремится помешать дальнейшему движению электронов. Материал *p*-типа получил электроны и становится отрицательно заряженным по отношению к материалу *n*-типа, а следовательно, стремится сохранить дырки. Через ка-

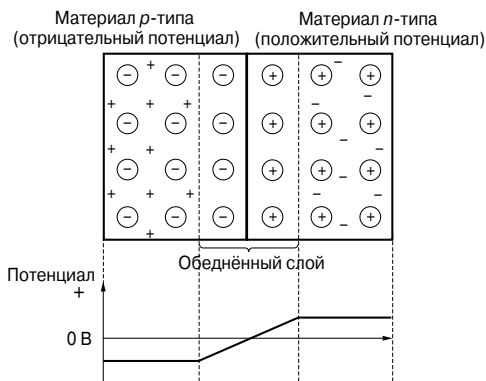


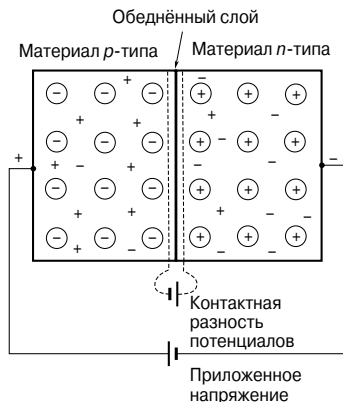
Рис. 51.6

кой-то непродолжительный период движение дырок и электронов прекращается из-за возникшей разности потенциалов на переходе, называемой *контактной разностью потенциалов*.

В области перехода недостаёт дырок и электронов в результате электронно-дырочных рекомбинаций, и эта область называется *обеднённым слоем* или *областью пространственного заряда*, что и показано на **Рис. 51.6**.

## Прямое и обратное смещение

Когда к  $p$ - $n$ -переходу прикладывают напряжение, показанное на **Рис. 51.7**, материал  $p$ -типа становится положительно заряженным по отношению к материалу  $n$ -типа, а  $p$ - $n$ -переход становится *прямосмещённым*.

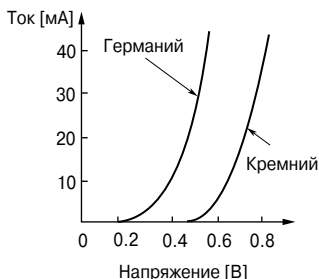


**Рис. 51.7**

Приложенное напряжение противостоит контактной разности потенциалов и в результате сужает запирающий слой. Теперь дырки и электроны могут пересечь переход, и начинает течь ток.

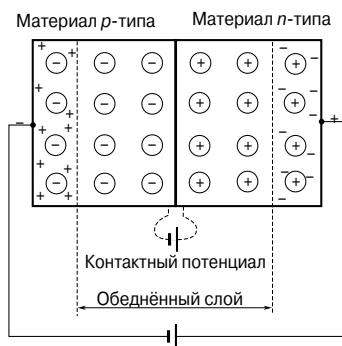
Рост напряжения свыше значения, необходимого для преодоления запирающего слоя (примерно 0.2 В для германия и 0.6 В для кремния), приводит к быстрому росту тока. На **Рис. 51.8** показан график, отображающий зависимость «ток/напряжение» для германиевого и кремниевого  $p$ - $n$ -переходов с прямым смещением.

Такую зависимость называют *вольт-амперной характеристикой* при прямом смещении.



**Рис. 51.8**

Когда к  $p$ - $n$ -переходу прикладывают напряжение, как показано на **Рис. 51.9**, материал  $p$ -типа становится отрицательно заряженным по отношению к материалу  $n$ -типа, и  $p$ - $n$ -переход в этом случае называется *обратносмещённым*.



**Рис. 51.9**

Приложенное напряжение теперь имеет то же направление, что и контактная разность потенциалов, и противостоит движению дырок и электронов из-за расширения запирающего слоя. Следовательно, теоретически ток не должен течь. Однако при комнатной температуре некоторые электроны в кристаллической решётке приобретают достаточно энергии, чтобы покинуть решётку, создавая тем самым перемещающиеся дырки и электроны. Этот процесс называют *электронно-дырочной генерацией* вследствие теплового возбуждения.

Электроны в материале  $p$ -типа и дырки в материале  $n$ -типа, возникшие благодаря тепловому возбуждению, называют *неосновными носителями*, и они притягиваются прикладываемым напряжением. Следовательно, на практике при комнатной температуре в условиях смещения в обратном направлении потечёт небольшой ток: несколько микроампер — в случае германия и менее чем 1 микроампер — в случае кремния. На **Рис. 51.10** представлены типичные характеристики германиевых и кремниевых  $p$ - $n$ -переходов при обратном смещении.

При увеличении обратного напряжения весь процесс дойдёт до точки, когда неожиданно начнёт течь большой ток. Напряжение, при котором это произойдёт, называется *пробивным напряжением*. Этот ток возникает в результате двух явлений:

- *эффекта Зенера*, возникающего из-за того, что прикладываемое напряжение достаточно для того, чтобы разорвать некоторые ковалентные связи;
- *лавинного эффекта*, возникающего из-за того, что носители зарядов начинают двигаться со скоростью, достаточной для разрыва ковалентных связей в результате столкновений.



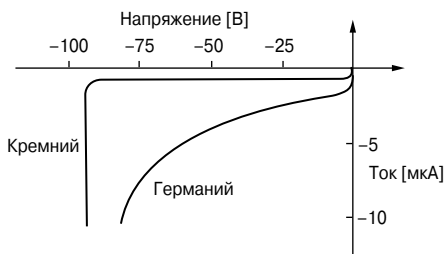


Рис. 51.10

Эффект Зенера реализуют в приборе, названном *диодом Зенера* (другое название — стабилитрон).

Диод Зенера используют для создания образцовых источников напряжения и для стабилизации напряжения. На **Рис. 51.11** показаны два символических обозначения диода Зенера.



Рис. 51.11

## Полупроводниковые диоды

*Полупроводниковый диод* — это прибор, у которого *p-n*-переход встроен в корпус, пригодный для проводимости и рассеивания тепла, образующегося при работе, и у которого есть внешние соединительные выводы, соединяющиеся внутри корпуса с областями *n*- и *p*-типа. На **Рис. 51.8** и **Рис 51.10** представлены рабочие характеристики полупроводникового диода. На схемах и чертежах полупроводниковые диоды обозначают символами, показанными на **Рис. 51.12**. Иногда эти обозначения помещают в кружок, как показано на **Рис. 51.13**.



Рис. 51.12

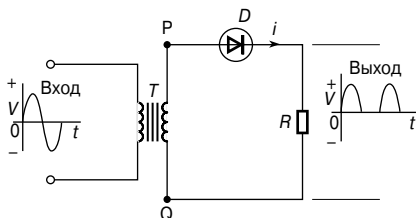


Рис. 51.13

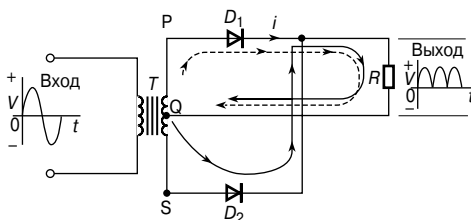
## Выпрямитель переменного тока

Процесс получения однонаправленного тока и напряжения из переменного тока и напряжения называется *выпрямлением*. Автоматическое переключение полярности в выпрямляющей схеме выполняется с помощью диодов.

Используя один диод, как это показано на **Рис. 51.13**, можно получить *однополупериодное выпрямление*.

Когда в точке Р по отношению к точке Q имеется положительное напряжение достаточной величины, включается диод  $D$ , и начинает течь ток  $i$ . Когда же потенциал Р отрицателен по отношению к Q, диод  $D$  запирается. Трансформатор  $T$  препятствует непосредственному контакту выпрямителя с источником питания и в то же время передаёт изменения напряжения в сети.

Для получения *двухполупериодного выпрямления* используют два диода, как показано на **Рис. 51.14**.



**Рис. 51.14**

В этой схеме применяют трансформатор с выведенной средней точкой Q. Когда положительный потенциал в точке Р достаточен по отношению к Q, диод  $D_1$  начинает проводить ток (на **Рис. 51.14** это показано пунктирной линией). Когда по отношению к Q достаточно положителен потенциал точки S, способен проводить ток диод  $D_2$  (на **Рис. 51.14** это показано сплошной линией). Ток через резистор  $R$  течёт в одном и том же направлении для обоих входных полуциклов. Здесь же показан волновой характер напряжения на выходе выпрямителя.

Для получения двухполупериодного выпрямления используют также *мостовой выпрямитель*, построенный на четырех диодах, как это видно на **Рис. 51.15**.

Чтобы сгладить сигнал на выходе описанных выше выпрямителей, параллельно к нагрузочному резистору  $R$  подсоединяют конденсаторы с большой ёмкостью. На **Рис. 51.16** показан результат такого соединения.

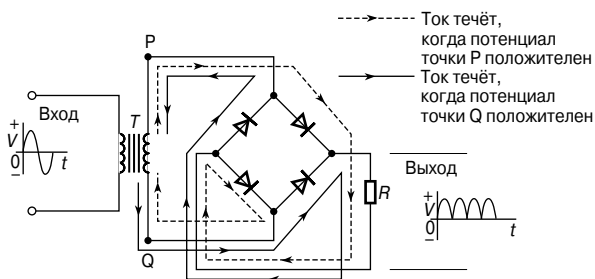


Рис. 51.15

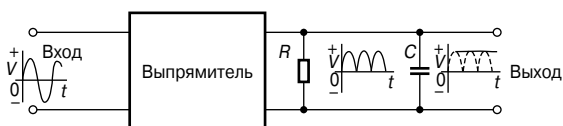
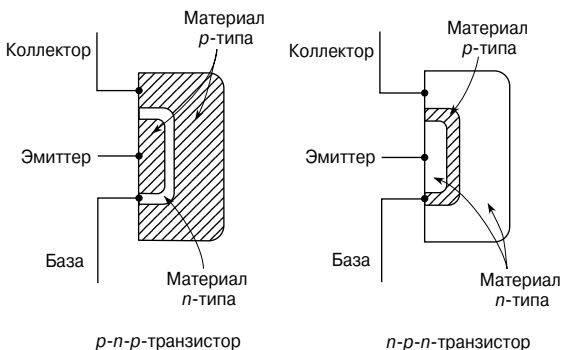


Рис. 51.16

## 52. ТРАНЗИСТОРЫ

### Биполярный транзистор

*Биполярный транзистор* состоит из трёх областей полупроводникового материала. Транзистор, у которого между двумя областями материала *p*-типа находится очень тонкий слой материала *n*-типа, называют *p-n-p-транзистором*. Транзистор другого типа, у которого между двумя областями материала *n*-типа находится очень тонкий слой материала *p*-типа, называют *n-p-n-транзистором*. Транзисторы обоих типов состоят из двух *p-n*-переходов, расположенных очень близко друг к другу тыльными сторонами на одном блоке полупроводникового материала. На **Рис. 52.1** схематично изображены транзисторы этих двух типов в разрезе.



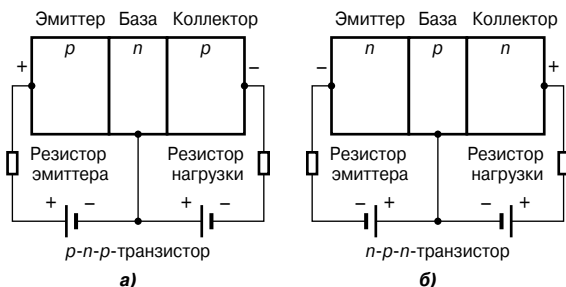
**Рис. 52.1**

Две области материала *p*-типа *p-n-p*-транзистора называют *эмиттером* и *коллектором*, а материал *n*-типа называют *базой*. Аналогично эмиттером и коллектором называют две области материала *n*-типа *n-p-n*-транзистора, а область материала *p*-типа — базой. Это показано на **Рис. 52.1**.

Транзисторы имеют три внешних соединительных вывода. В практической работе электрический вход одной пары выводов, допустим, эмиттера и базы может управлять выходом другой пары, в данном случае — выходом коллектор-эмиттер. Это управление выполняется с помощью соответствующего электрического смещения двух *p-n*-переходов. Когда к *p-n-p*-транзистору подсоединены батареи и резисторы, как показано на **Рис. 52.2а**, переход база-эмиттер имеет *прямое смещение*, а переход база-коллектор — *обратное*.

Точно так же *n-p-n*-транзистор имеет прямосмещённый переход база-эмиттер и обратносмещённый переход база-коллек-

тор, когда к нему подсоединены батареи, как показано на **Рис. 52.2б**.



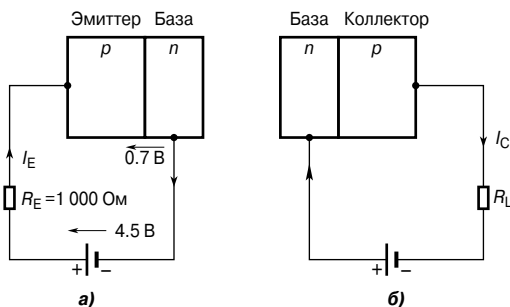
**Рис. 52.2**

Для кремниевого **p-n-p**-транзистора со смещением, показанного на **Рис. 52.2а**, переход база-эмиттер прямосмещенный, и если переход рассматривать самостоятельно, то через него потечёт ток.

Это показано на **Рис. 52.3а**.

**Например**, если  $R_E$  равно 1 000 Ом, ЭДС батареи — 4.5 В, а падение напряжения на переходе — 0.7 В, то ток равен

$$\frac{4.5 - 0.7}{1\,000} = 3.8 \text{ мА}.$$



**Рис. 52.3**

Если переход база-коллектор рассматривать самостоятельно, то, как видно на **Рис. 52.3б**, это обратносмещенный переход, и ток, текущий через коллектор в этом случае, меньше 1 мкА.

Однако, когда обе внешние цепи объединены в транзисторе, большая часть тока, равного 3.8 мА, текущего в эмиттере и до этого прошедшего через соединение с базой, теперь вытекает из коллектора. Эти особенности работы транзистора рассмотрены ниже.

## Принцип работы транзистора

Работа *p-n-p-транзистора*, подсоединённого к источникам питания по схеме, показанной на **Рис. 52.2а**, объясняется следующим образом.

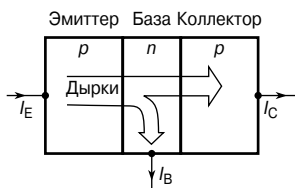
1. В транзисторе этого типа эмиттер является материалом *p*-типа, и, следовательно, основные носители заряда в эмиттере — дырки.

2. Эмиттерный переход смещён в прямом направлении для основных носителей, и дырки пересекают *p-n*-переход и появляются в области базы.

3. Область базы очень тонкая, и в ней совсем немного электронов, поэтому, несмотря на образование электронно-дырочных пар, в области базы остаётся достаточно много дырок, перешедших из эмиттера.

4. Коллекторный переход смещён в обратном направлении для электронов в области базы и для дырок в области коллектора, но для дырок, находящихся в области базы, он смещён в прямом направлении, поэтому дырки, находящиеся в базе, притягиваются отрицательным потенциалом коллектора.

5. Большая часть дырок в области базы пересекает коллекторный переход и попадает в область коллектора, создавая коллекторный ток (условно принято, что направление тока совпадает с направлением движения дырок).



**Рис. 52.4**

Схематично перемещение дырок в *p-n-p*-транзисторе показано на **Рис. 52.4**.

В транзисторах, имеющих очень тонкие области базы, до 99.5% дырок из эмиттера, пересекая базу, попадают на коллекторный переход.

В *n-p-n-транзисторе*, подсоединённом к источникам питания по схеме, показанной

на **Рис. 52.2б**, действие транзистора объясняется следующим образом.

1. Основные носители заряда в эмиттере, являющемся материалом *n*-типа, — электроны.

2. Эмиттерный переход прямо смещён по отношению к этим основным носителям, и электроны пересекают переход и появляются в области базы.

3. Область базы очень тонкая, и дырок здесь совсем немного, поэтому рекомбинация дырок и электронов невелика и большинство электронов остаётся в области базы.

4. Коллекторный переход обратно смещён по отношению к дыркам в области базы и к электронам в области коллектора, но

прямо смещён для электронов в области базы, поэтому эти электроны притягиваются положительным потенциалом коллектора.

5. Большая часть электронов в области базы переходит через коллекторный переход в область коллектора, создавая коллекторный ток.

На Рис. 52.5 схематично показана работа  $n-p-n$ -транзистора. Как уже говорилось, условно принято считать, что ток течёт в направлении движения дырок, то есть в направлении, обратном движению электронов. Следовательно, на Рис. 52.5 показаны направления движения условного тока.

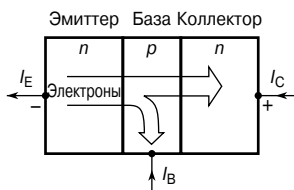


Рис. 52.5

В случае  $p-n-p$ -транзистора коллекторный переход обратно смещён для основных носителей. Однако имеет место небольшой ток утечки,  $I_{CBO}$ , текущий из базы в коллектор вследствие термически генерируемых неосновных носителей (электроны — в коллекторе и дырки — в базе).

Коллекторный переход прямо смещён по отношению к неосновным носителям. Если  $\alpha$  — коэффициент передачи для дырок, проходящих из эмиттера в коллектор (величина которого достигает 0.995 в современных транзисторах), то в трёх областях транзистора текут токи, показанные на Рис. 52.6а.

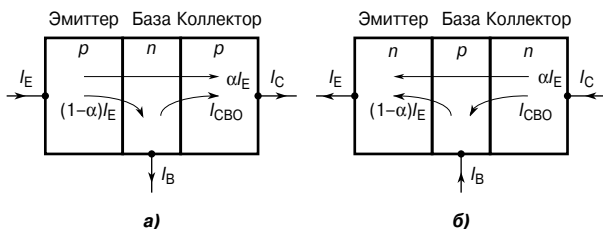


Рис. 52.6

Схожим образом в случае  $n-p-n$ -транзистора коллекторный переход обратно смещён для основных носителей, однако имеет место небольшой ток утечки  $I_{CBO}$ , текущий от коллектора к базе вследствие термически генерируемых неосновных носителей (дырок — в коллекторе и электронов — в базе). Коллекторный переход прямо смещён по отношению к неосновным носителям. Если большая часть электронов, проходящих через эмиттерный переход, проходит в коллектор, тогда в  $n-p-n$ -транзисторе текут токи, как это показано на Рис. 52.6б.

## Обозначения транзисторов в схемах

На Рис. 52.7 показаны символы, используемые для обозначения в схемах  $p$ - $n$ - $p$ - и  $n$ - $p$ - $n$ -транзисторов.

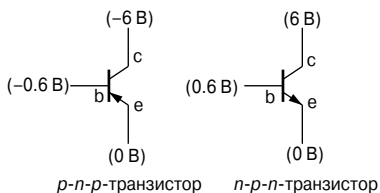


Рис. 52.7

Смотрящая вверх стрелка на эмиттере показывает направление условного эмиттерного тока (потока дырок). Потенциалы, отмеченные на коллекторе, базе и эмиттере, — это типичные значения для кремниевого транзистора с разностью потенциалов  $6\text{ В}$  между коллектором и эмиттером.

Напряжение  $0.6\text{ В}$  на переходе база-эмиттер необходимо для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер. Если его поднять, скажем, до  $0.62\text{ В}$ , то скорее всего значение коллекторного тока увеличится вдвое и составит примерно  $2\text{ мА}$ . Следовательно, небольшая перемена напряжения между эмиттером и базой может привести к относительно большому изменению тока в коллекторной цепи; поэтому транзисторы можно использовать в качестве усилителей.

Напряжение  $0.6\text{ В}$  на переходе база-эмиттер необходимо для того, чтобы преодолеть потенциальный барьер. Если его поднять, скажем, до  $0.62\text{ В}$ , то скорее всего значение коллекторного тока увеличится вдвое и составит примерно  $2\text{ мА}$ . Следовательно, небольшая перемена напряжения между эмиттером и базой может привести к относительно большому изменению тока в коллекторной цепи; поэтому транзисторы можно использовать в качестве усилителей.

## Схемы включения транзисторов

Существует три способа включения транзисторов. Всё зависит от того, как именно его собираются использовать. Эти способы классифицируются с ссылкой на электрод, являющийся общим как для входа, так и для выхода. Эти схемы включения называются:

- схема с общей базой (Рис. 52.8а);
- схема с общим эмиттером (Рис. 52.8б);
- схема с общим коллектором (Рис. 52.8в).

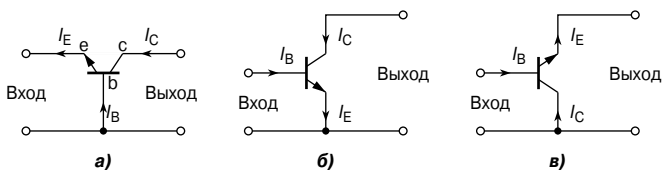


Рис. 52.8

Эти конфигурации показаны для  $n$ - $p$ - $n$ -транзистора. Для  $p$ - $n$ - $p$ -транзистора все показанные токи имеют обратное направление.



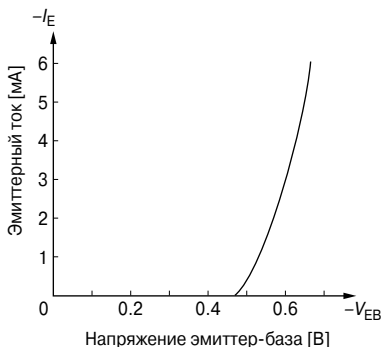
## Рабочие характеристики транзисторов

Эффект от изменений напряжений и токов в транзисторной цепи можно изобразить графически, и такие графики называют *характеристиками транзистора*. Таких переменных величин пять (коллекторный, базовый и эмиттерный токи, а также напряжения между коллектором и базой и между эмиттером и базой), да к тому же существуют ещё три схемы включения, следовательно, возможно наличие многих характеристик. Ниже приводятся некоторые из них.

### Схема с общей базой

#### Входная характеристика

Глядя на **Рис. 52.8а** видно, что на входе транзистора с общей базой имеется эмиттерный ток  $I_E$ , который можно изменять, изменяя напряжение база-эмиттер  $V_{EB}$ . Эмиттерный переход фактически является диодом с прямо смещённым переходом, как это видно на **Рис. 52.9**, где приведена характеристика кремниевого транзистора.



**Рис. 52.9**

Эту характеристику называют *входной характеристикой  $n$ - $p$ - $n$ -транзистора* в схеме с общей базой. Изменения напряжения коллекторного перехода  $V_{CB}$  мало влияют на эту характеристику. Для  $p$ - $n$ - $p$ -транзистора может быть получена схожая характеристика, но при обратной полярности напряжений.

#### Выходные характеристики

Значение коллекторного тока  $I_C$  очень часто определяется эмиттерным током  $I_E$ . Для заданного значения  $I_E$  напряжение коллекторного перехода  $V_{CB}$  может изменяться и мало влиять на величину коллекторного тока  $I_C$ . Если  $V_{CB}$  сделать немного отрицательным, коллектор не будет притягивать основные носители, исходящие от эмиттера, и  $I_C$  быстро упадёт до нуля. На **Рис. 52.10** показаны некоторые из возможных кривых для различных значений  $I_E$ . Этот график называют *выходными характе-*

ристикami  $n$ - $p$ - $n$ -транзистора в схеме с общей базой. Для  $p$ - $n$ - $p$ -транзистора могут быть получены схожие характеристики, но с противоположной полярностью напряжений.

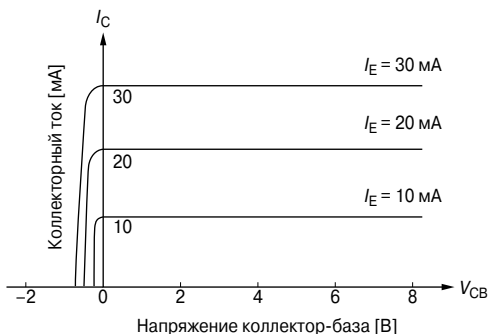


Рис. 52.10

### Схема с общим эмиттером

#### Входная характеристика

В схеме с общим эмиттером (Рис. 52.86) базовый ток является входным током. Когда  $V_{EB}$  изменяется, полученные характеристики по форме напоминают входную характеристику для схемы с общей базой, показанной на Рис. 52.9, но значения тока намного меньше. Как показано на Рис. 52.6а, пока переход является прямосмещённым, три тока —  $I_E$ ,  $I_C$ , и  $I_B$  сохраняют отношение  $1: \alpha: (1 - \alpha)$ , какую бы схему ни применяли. Следовательно, базовый ток изменяется намного меньше, чем соответствующий эмиттерный ток, и на Рис. 52.11 показана входная характеристика для  $n$ - $p$ - $n$ -транзистора.

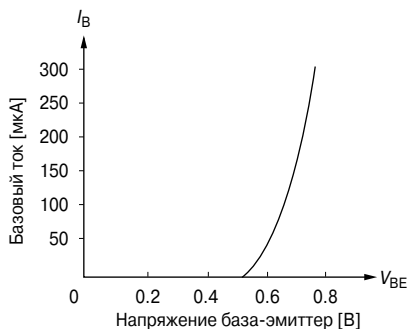
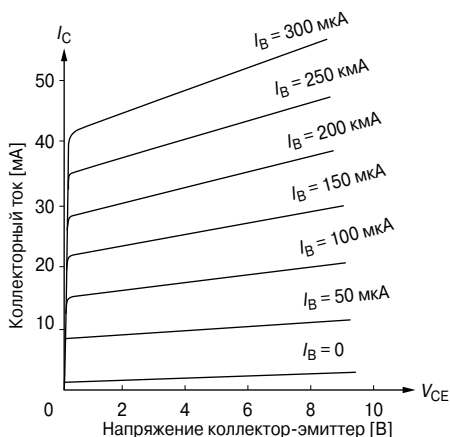


Рис. 52.11

Для  $p$ - $n$ - $p$ -транзистора может быть получена схожая характеристика, но с противоположной полярностью напряжений.

### Выходные характеристики

На **Рис. 52.12** показаны некоторые из возможных кривых для  $n$ - $p$ - $n$ -транзистора, которые получены при разных значениях базового тока  $I_B$ .



**Рис. 52.12**

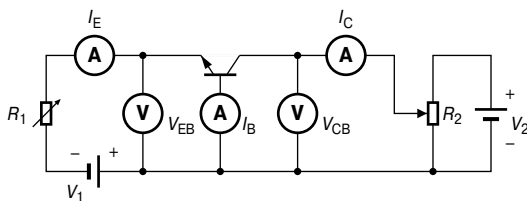
Схожий набор характеристик может быть получен и для  $p$ - $n$ - $p$ -транзистора, но только при противоположной полярности напряжений. Эти характеристики отличаются от выходных характеристик схемы с общей базой:

а) чтобы коллекторный ток упал до нуля, не нужно менять напряжение и делать его обратным,

б) наклон кривой характеристик направлен вверх, указывая на более низкое выходное сопротивление (для схемы с общим эмиттером это обычно килоомы, а для схемы с общей базой — мегаомы).

### Методика получения характеристик транзистора

На **Рис. 52.13** показана электрическая схема для снятия входных и выходных характеристик  $n$ - $p$ - $n$ -транзистора, включённого по схеме с общей базой.



**Рис. 52.13**

Входная характеристика может быть получена с помощью изменения  $R_1$ , что в свою очередь изменяет  $V_{EB}$ , и надо при этом отметить соответствующее значение  $I_E$ . Это повторяется для разных значений  $V_{CB}$ . Выясняется, что входная характеристика практически не зависит от  $V_{CB}$ , и обычно достаточно дать только одну характеристику, как показано на **Рис. 52.9**.

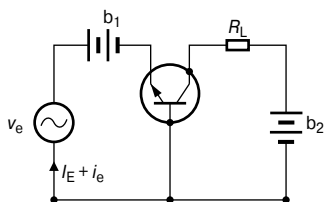
Как показано на **Рис. 52.10**, выходные характеристики  $I_E$  подходящих значений получают, изменяя сопротивление резистора  $R_1$ . Для получения различных значений  $V_{CB}$  следует фиксировать изменения  $R_1$ , корректируя при этом  $R_2$  и  $I_C$ . Эта процедура повторяется для различных значений  $I_E$ . Для получения полных характеристик полярность батареи  $V_2$  должна быть обратной, для того чтобы ток  $I_C$  упал до нуля. Делать это нужно очень осторожно, иначе ток  $I_C$  резко возрастёт в обратном направлении и выведет транзистор из строя.

## Транзистор как усилитель

Возможность усиления в транзисторе определяется тем фактом, что ток, текущий в цепи с малым сопротивлением, переводится в цепь с высоким сопротивлением при незначительном изменении по величине. Ток, текущий через сопротивление нагрузки, создаёт на нём напряжение. Это напряжение может быть во много раз больше, чем входное напряжение, являющееся причиной появления тока.

### Усилитель с общей базой

Основная схема для транзистора показана на **Рис. 52.14**, где смещение  $n$ - $p$ - $n$ -транзистора осуществляется батареями  $b_1$  и  $b_2$ .



**Рис. 52.14**

Синусоидальный переменный сигнал на входе  $v_e$  подаётся последовательно с входным напряжением смещения, а сопротивление нагрузки  $R_L$  подключено последовательно к коллекторной батарее  $b_2$ .

Следовательно, входной сигнал — это синусоидальный ток  $i_e$ , который возникает благодаря синусоидальному напряжению  $v_e$ , добавленному к установленному постоянному напряжению база-эмиттер  $V_{BE}$ .

Пусть напряжение сигнала  $v_e$  равно 100 мВ и сопротивление база-эмиттер составляет 50 Ом.

Тогда эмиттерный ток сигнала окажется равным  $\frac{100}{50} = 2$  мА.

Пусть сопротивление нагрузки  $R_L = 2.5$  кОм, через которую течёт около 0.99 эмиттерного тока.

Следовательно, коллекторный ток сигнала равен  $0.99 \times 2 = 1.98$  мА, а напряжение сигнала на нагрузке равно  $2\,500 \times 1.98 \times 10^{-3} = 4.95$  В.

Следовательно, напряжение сигнала 100 мВ на эмиттере создаёт напряжение 4 950 мВ на нагрузке.

Коэффициент усиления по напряжению равен в этом случае  $4\,950/100 = 49.5$ .

Этот пример иллюстрирует работу усилителя с общей базой, в котором входной сигнал прикладывается между эмиттером и базой, а выходной снимают между коллектором и базой.

### Усилитель с общим эмиттером

На Рис. 52.15 показана основная схема усилителя с общим эмиттером.

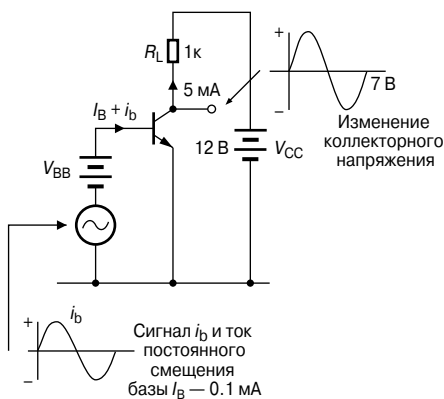


Рис. 52.15

Хотя на ней изображены две батареи, чаще бывает, что используется только одна, обеспечивающая все необходимые смещения. Входной сигнал прикладывается между базой и эмиттером, а нагрузка  $R_L$  подсоединяется между коллектором и эмиттером. Пусть батарея смещения базы даёт напряжение, вызывающее базовый ток  $I_B$ , равный 0.1 мА. Это значение базового тока определяет средний уровень постоянного тока, на который наложен входной сигнал переменного тока. Это *рабочая точка* постоянного базового тока.

Пусть коэффициент усиления по току покоя (статического тока) транзистора  $\alpha_E$  равен 50.

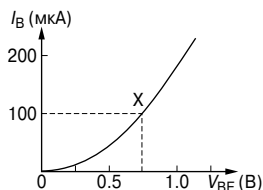
Так как  $0.1 \text{ мА}$  — это статический базовый ток, коллекторный ток  $I_C$  равен  $\alpha_E \times I_B = 50 \times 0.1 = 5 \text{ мА}$ .

Этот ток течёт через сопротивление нагрузки  $R_L (= 1 \text{ кОм})$ , и на  $R_L$  наблюдается падение статического напряжения, полученное как  $I_C R_L = 5 \times 10^{-3} \times 1\,000 = 5 \text{ В}$ .

Напряжение на коллекторе  $V_{CE}$  равно  $V_{CC} - I_C R_L = 12 - 5 = 7 \text{ В}$ .

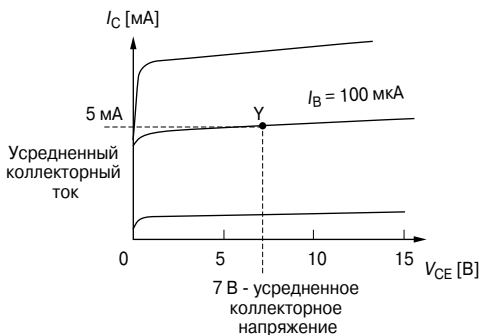
Это значение  $V_{CE}$  — средний (или находящийся в состоянии покоя) уровень, относительно которого выходной сигнал и будет «крутиться», меняя полярность. Его называют *рабочей точкой* коллекторного напряжения переменного тока. Рабочие точки можно увидеть на входных и выходных характеристиках транзистора.

На **Рис. 52.16** показана  $I_B/V_{BE}$  характеристика с рабочей точкой X, координаты которой установлены при  $I_B = 0.1 \text{ мА}$ ,  $V_{BE} = 0.75 \text{ В}$ .



**Рис. 52.16**

На **Рис. 52.17** показаны  $I_C/V_{CE}$  характеристики, где рабочая точка Y установлена при  $I_C = 5 \text{ мА}$ ,  $V_{CE} = 7 \text{ В}$ .



**Рис. 52.17**

Обычно рабочую точку Y выбирают недалеко от центра графика.

Батарей  $V_{BB}$  можно удалить и получать смещение базы за счёт коллекторной батареи питания  $V_{CC}$ . Самый простой способ

сделать это — соединить резистор цепи смещения  $R_B$  между положительным выводом источника  $V_{CC}$  и базой, как это показано на **Рис. 52.18**.

Резистор должен иметь сопротивление такой величины, чтобы в переходе база-эмиттер появлялся ток 0.1 мА.

У кремниевого транзистора падение напряжения на переходе в условиях прямого смещения равно 0.6 В. Напряжение на  $R_B$  должно тогда равняться  $12 - 0.6 = 11.4$  В.

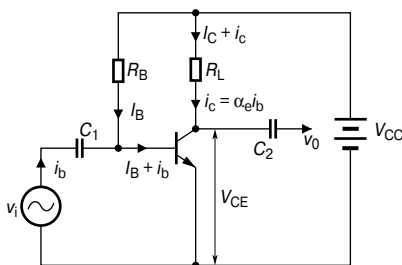
Следовательно, величина  $R_B$  должна быть такой, чтобы  $I_B \times R_B = 11.4$  В, то есть

$$R_B = \frac{11.4}{I_B} = \frac{11.4}{0.1 \times 10^{-3}} = 114 \text{ кОм.}$$

Учитывая сопротивление нагрузки  $R_L$  в 1 кОм, статический коллекторный ток 5 мА, и напряжение коллектор-эмиттер 7 В, устанавливают режим постоянного тока.

Теперь можно подавать входной сигнал переменного тока ( $v_i$ ).

Чтобы не изменять условия смещения на базе, надо подвести входной сигнал к базе с помощью конденсатора  $C_1$ . Это даст возможность сигналу переменного тока дойти до базы, но остановит постоянный ток. Реактивное сопротивление этой ёмкости должно быть очень небольшим по сравнению с входным сопротивлением транзистора. На **Рис. 52.19** показана схема такого усилителя. Теперь можно определять условия переменного тока.



**Рис. 52.19**

Когда к базе через конденсатор  $C_1$  подают напряжение сигнала переменного тока  $v_i$ , ток  $i_b$  изменяется.

Когда входной сигнал становится положительным, ток базы увеличивается; когда сигнал становится отрицательным, ток базы уменьшается.

Ток базы состоит из двух составляющих:

$I_B$  — ток статического базового смещения, установленного с помощью  $R_B$ ,

$i_b$  — ток сигнала.

Изменение тока  $i_b$  в свою очередь изменяет коллекторный ток  $i_c$ .

Связь между  $i_c$  и  $i_b$  определяется уравнением

$$i_c = \alpha_e i_b,$$

где  $\alpha_e$  — динамический коэффициент усиления транзистора по току.

Это не совсем то же самое, что статический коэффициент усиления по току  $\alpha_E$ , хотя различие обычно достаточно мало, и им можно пренебречь.

Ток, текущий через резистор нагрузки  $R_L$ , тоже состоит из двух составляющих:  $I_C$ , статического коллекторного тока, и  $i_c$ , тока сигнала. Когда  $i_b$  растёт, то же самое происходит и с  $i_c$ , а на  $R_L$  падает напряжение.

Следовательно, из схемы получаем

$$V_{CE} = V_{CC} - (I_C + i_c)R_L.$$

Члены этого уравнения с постоянным током, хотя и необходимы для работы усилителя, могут не приниматься во внимание, когда рассматриваются условия для сигнала переменного тока.

Однако отношение изменения напряжения сигнала равно

$$v_{ce} = -\alpha_e \times i_b \times R_L = i_c R_L.$$

Знак минус добавляется потому, что  $v_{ce}$  падает тогда, когда растёт  $i_b$ , и наоборот. Напряжения сигнала на выходе и входе имеют разные полярности, то есть имеет место сдвиг фазы, равный  $180^\circ$ .

Чтобы коллекторный потенциал постоянного тока не переходил в следующий каскад, добавляют второй конденсатор  $C_2$ , как это видно из **Рис. 52.19**. Это удаляет постоянную составляющую тока, но не мешает напряжению сигнала  $v_c = i_c R_L$  попасть на внешний вывод.

## Линия нагрузки

Отношение между напряжением коллектор-эмиттер ( $V_{CE}$ ) и коллекторным током ( $I_C$ ) получают из уравнения

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_L,$$

исходя из условий постоянного тока.

Так как  $V_{CC}$  и  $R_L$  постоянны в любой цепи, это уравнение характеризует уравнение прямой линии, которое можно записать в форме  $y = mx + c$ .



Преобразовывая уравнение  $V_{CE} = V_{CC} - I_C R_L$ , получаем

$$I_C = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{R_L} = \frac{V_{CC}}{R_L} - \frac{V_{CE}}{R_L} = -\left(\frac{1}{R_L}\right) V_{CE} + \frac{V_{CC}}{R_L},$$

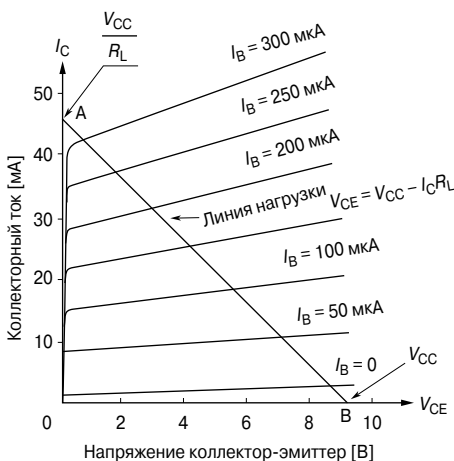
то есть

$$I_C = -\left(\frac{1}{R_L}\right) V_{CE} + \frac{V_{CC}}{R_L},$$

что и является уравнением прямой  $y = mx + c$ .

Следовательно, если  $I_C$  отложить по вертикальной оси, а  $V_{CE}$  — по горизонтальной, то градиент кривой равен  $-\left(\frac{1}{R_L}\right)$ , а отрезок, отсекаемый на оси X равен  $\frac{V_{CC}}{R_L}$ .

На **Рис. 52.12** изображено семейство коллекторных статических характеристик. На них может быть наложена полученная прямая, как видно из **Рис. 52.20**.



**Рис. 52.20**

Эта прямая полезна, так как позволяет получить значения  $I_C$  и  $V_{CE}$  для нескольких фиксированных значений  $I_B$ . Когда на базу транзистора подают сигнал, ток базы изменяется и может мгновенно принять любое из значений в показанном диапазоне.

Для того чтобы изобразить прямую, нужно всего две точки, и их можно легко получить, если рассматривать условия экстремумов в уравнении

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_L.$$

Когда

$$I_C = 0, \text{ то}$$

$$V_{CE} = V_{CC};$$

когда

$$V_{CE} = 0, \text{ то}$$

$$I_C = \frac{V_{CC}}{R_L}.$$

Следовательно, точки А и В соответственно расположены на осях  $I_C/V_{CE}$ . Эта прямая называется *нагрузочной прямой*, и положение её зависит от значения  $V_{CC}$ , а градиент зависит от  $R_L$ . Так как градиент равен  $-\frac{1}{R_L}$ , наклон прямой отрицательный.

Для каждого значения, определённого для  $R_L$  в каждой определённой схеме, есть соответствующая ей нагрузочная прямая. Если  $V_{CC}$  поддерживать постоянной, все возможные варианты прямой будут начинаться в одной и той же точке (В), но будут пересекать ось  $I_C$  в разных точках (то есть точка А будет перемещаться). Увеличение  $R_L$  приведёт к уменьшению градиента прямой, и наоборот. Вполне очевидно, что коллекторное напряжение никогда не превысит  $V_{CC}$  (точка В), и точно так же коллекторный ток никогда не будет больше, чем ток, который мог бы снизить  $V_{CE}$  до нуля (точка А).

Используя схему, изображённую на **Рис. 52.15**, имеем

$$V_{CE} = V_{CC} = 12 \text{ В, когда } I_C = 0,$$

$$I_C = \frac{V_{CC}}{R_L} = \frac{12}{1\,000} = 12 \text{ мА, когда } V_{CE} = 0.$$

Нагрузочная прямая изображена на характеристиках, показанных на **Рис. 52.21**, которые можно считать характеристиками транзистора, применяемого в схеме, изображённой на **Рис. 52.15**.

Заметим, что нагрузочная прямая проходит через рабочую точку Х так, как и положено, так как каждое положение на прямой характеризует соотношение между  $V_{CE}$  и  $I_C$  для определённых заданных значений  $V_{CC}$  и  $R_L$ .

Предположим, что ток базы «вынужден» колебаться в районе (плюс-минус) 0.1 мА, около смещения базы при постоянном токе 0.1 мА. В результате  $I_B$  меняется с 0 до 0.2 мА и обратно до 0 во время каждого цикла на входе.

Следовательно, рабочая точка двигается вверх-вниз по линии нагрузки в одной фазе с входным током, а значит, и с входным напряжением. На **Рис. 52.21** показан синусоидальный входной цикл.

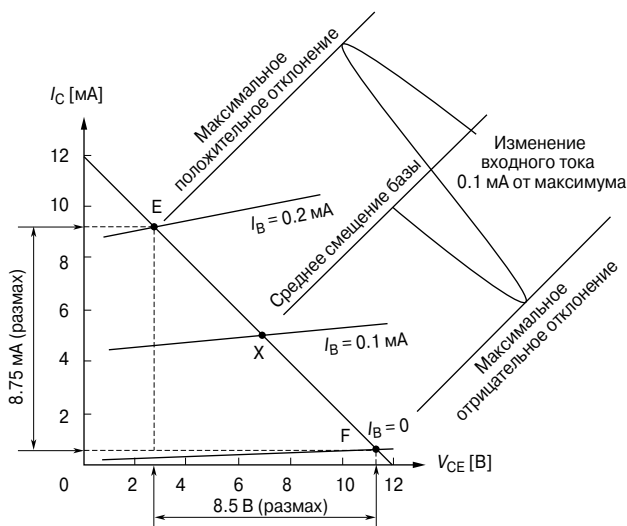


Рис. 52.21

## Коэффициенты усиления по току и напряжению

Напряжение выходного сигнала ( $v_{ce}$ ) и ток выходного сигнала ( $i_c$ ) можно получить, если отметить проекцию прямой нагрузки на вертикальную ось  $V_{CE}$  и на горизонтальную ось  $I_C$ . Когда входной ток  $i_b$  изменяется по синусоиде, как показано на **Рис. 52.21**, то  $v_{ce}$  изменяется тоже по синусоиде, если точки E и F на крайних точках входных сигналов равномерно распределены на обеих сторонах X.

Размах выходного напряжения, как видно, равняется 8.5 В, что даёт эффективное значение 3 В (то есть  $0.707 \times \frac{8.5}{2}$ ). Ток удвоенной амплитуды равен 8.75 мА, что обеспечивает эффективное значение 3.1 мА. Исходя из этих значений можно получить коэффициенты усиления напряжения и тока.

Динамический коэффициент усиления по току  $A_i (= \alpha_c)$  в отличие от статического коэффициента  $\alpha_E$  равен

$$A_i = \frac{\text{изменение коллекторного тока}}{\text{изменение базового тока}}$$

Это всегда ведёт к иному значению, нежели полученному непосредственно от отношения  $\frac{I_C}{I_B}$ , что предполагает, что резистор нагрузки равен нулю.

Из **Рис. 52.21** видно, что пиковый входной ток равен 0.1 мА, а пиковый выходной ток равен 4.375 мА. Отсюда

$$A_i = \frac{4.375 \times 10^{-3}}{0.1 \times 10^{-3}} = 43.75 .$$

*Коэффициент усиления по напряжению  $A_v$*  равен

$$A_v = \frac{\text{изменение коллекторного напряжения}}{\text{изменение базового напряжения}} .$$

Этот коэффициент нельзя подсчитать с помощью имеющихся данных, но если предположить, что во входном резисторе течёт ток базы, то можно определить базовое напряжение. Входное сопротивление можно выявить по входной характеристике, как это было показано ранее.

Тогда

$$R_i = \frac{\text{изменение } V_{BC}}{\text{изменение } I_B}$$

и

$$v_i = i_b R_C \quad \text{и} \quad v_o = i_C R_L,$$

тогда

$$A_v = \frac{i_C R_L}{I_b R_i} = a_c \frac{R_L}{R_i} .$$

Для резистивной нагрузки *коэффициент усиления по мощности  $A_p$*  равен

$$A_p = A_v \times A_i .$$

## Тепловой пробой и способы его предотвращения

Когда транзистор используют в качестве усилителя, необходимо убедиться в том, что он не перегрет. Перегрев может возникать по внешним независимым от транзистора причинам, таким, как близость радиаторов или нагретых резисторов, или же причина в самом транзисторе, например это результат рассеивания мощности при протекании через него большого тока.

Мощность, рассеиваемая в транзисторе, примерно равная произведению  $I_C$  и  $V_{CE}$ , — это потерянная мощность; она ничего не даёт мощности выходного сигнала, а лишь повышает температуру транзистора. Такой перегрев может привести к очень нежелательным результатам.

Рост температуры транзистора повышает генерацию электронно-дырочных пар, а появление дополнительных неоснов-

ных носителей заряда повышает ток утечки. В свою очередь рост этого тока ведёт к росту коллекторного тока, что увеличивает величину произведения  $I_C$  и  $V_{CE}$ . Этот эффект может продолжаться очень долго и закончиться *тепловым пробоем* и разрушением транзистора.

Существуют два основных способа предотвращения теплового пробоя, и в каждой определённой ситуации можно использовать как один, так и оба способа одновременно.

### Способ первый

Использование одного резистора цепи смещения  $R_B$ , как ранее было показано на **Рис. 52.18**, не совсем удачный пример для практического применения. Если температура транзистора растёт, то ток утечки тоже растёт. Коллекторный ток, коллекторное напряжение и ток базы изменяются, а ток базы уменьшается с ростом  $I_C$ .

На **Рис. 52.22** показан другой вариант. Здесь резистор  $R_B$  присоединён не к точке  $V_{CC}$ , а непосредственно к самому коллектору.

Если коллекторный ток по какой-либо причине растёт, коллекторное напряжение  $V_{CE}$  будет падать. Следовательно, постоянный базовый ток  $I_B$  упадёт, так как  $I_B = \frac{V_{CE}}{R_B}$ . Следовательно, коллекторный ток  $I_C = \alpha_E I_B$  будет также падать и компенсирует первоначальный рост.

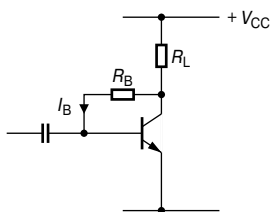


Рис. 52.22

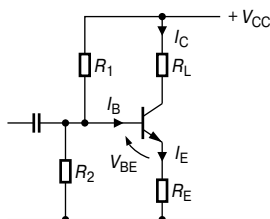
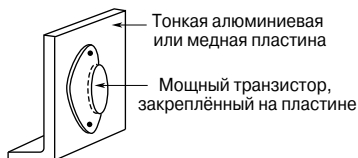


Рис. 52.23

На **Рис. 52.23** показан наиболее часто используемый способ смещения. Если значение суммарного сопротивления резисторов  $R_1$  и  $R_2$  такое, что ток, текущий через делитель, имеет большую величину по сравнению с постоянным током смещения  $I_B$ , тогда базовое напряжение  $V_{BE}$  будет оставаться в основном постоянным, несмотря на изменения коллекторного тока. Резистор  $R_E$  в свою очередь определяет величину эмиттерного тока, текущего при заданном базовом напряжении в точке соединения резисторов  $R_1$  и  $R_2$ . Любое увеличение  $I_C$  приводит к росту  $I_E$ , а следовательно, к росту напряжения на  $R_E$ . Это уменьшает напряжение прямого смещения  $V_{BE}$  и приводит к компенсации  $I_C$ .

### Способ второй

Этот метод связан с некоторыми средствами, удерживающими невысокую температуру транзистора с помощью внутреннего охлаждения. Для этой цели применяется поглотитель тепла, как это показано на **Рис. 52.24**.



**Рис. 52.24.**

Если транзистор прикреплён к токопроводящему материалу большой площади, например к алюминиевой или медной пластине (которые могут иметь рёбра теплоотвода), охлаждение достигается с помощью конвекции или излучения.

Поглотитель тепла обычно бывает тёмного цвета, чтобы способствовать излучению. Как правило, его применяют там, где имеет место большое рассеивание мощности. Для небольших транзисторов поглотители тепла необязательны. В частности, у кремниевых транзисторов ток утечки невелик, и поэтому проблемы с перегревом возникают редко.

## 53. ТЕОРИЯ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### Введение

К законам, определяющим поведение тока и напряжения в сетях постоянного тока, относятся:

- закон Ома (гл. 40),
- законы для резисторов в цепях с последовательным и параллельным соединением (гл. 43),
- правила Кирхгофа.

Кроме того, существует несколько теорем, которые были сформулированы для решения некоторых других проблем электрических цепей. К ним относятся:

- теорема суперпозиции,
- теорема Тевенина—Гельмгольца,
- теорема Нортона,
- теорема о максимуме отдаваемой мощности.

### Законы Кирхгофа

Два закона Кирхгофа гласят:  
закон токов:

*в любом разветвлении электрической цепи суммарный ток, текущий к этому разветвлению, равен суммарному току, текущему от этого разветвления, то есть  $\sum I = 0$ .*

Следовательно, глядя на Рис. 53.1, можно сказать, что

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$$

или

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

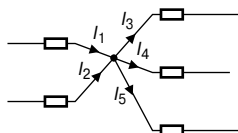


Рис. 53.1

закон напряжений:

*в любом замкнутом контуре сети алгебраическая сумма падений напряжений (то есть произведения силы тока и сопротивления), зафиксированных в этом контуре, равна результирующей ЭДС, действующей в этом контуре.*

Следовательно, глядя на Рис. 53.2, можно сказать, что

$$E_1 - E_2 = IR_1 + IR_2 + IR_3.$$

(Заметим, что если ток течёт от положительного вывода источника, то

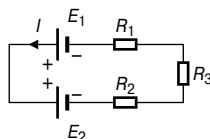


Рис. 53.2

источник принято считать положительным. Следовательно, направление тока против часовой стрелки в замкнутом контуре, показанном на **Рис. 53.2**, положительно, а величина  $E_2$  соответственно отрицательна.)

**Например**, определение токов, текущих в каждом ответвлении схемы, показанной на **Рис. 53.3**, с помощью законов Кирхгофа реализуют в последовательности, представленной ниже.

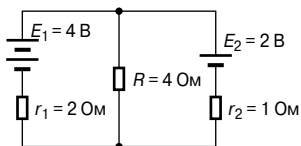


Рис. 53.3

1. С помощью закона Кирхгофа для токов отмечаем направления токов на имеющейся схеме. Направления выбираем произвольно, но, как правило, в качестве отправной точки предполагается, что ток течёт от положительных выводов батарей. Это показано на **Рис. 53.4**, где три тока в ответвлениях показаны только как  $I_1$  и  $I_2$ , так как ток, текущий через  $R$ , равен  $(I_1 + I_2)$ .

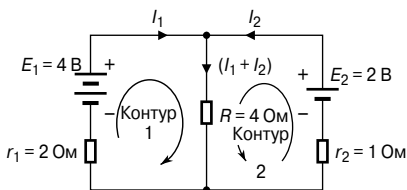


Рис. 53.4

2. Разделим цепь на два замкнутых контура и применим к каждому из них закон Кирхгофа для напряжений. Для первого контура, показанного на **Рис. 53.4**, выбираем движение по часовой стрелке (направление не имеет значения) и получаем

$$E_1 = I_1 r_1 + (I_1 + I_2) R,$$

то есть

$$4 = 2I_1 + 4(I_1 + I_2)$$

или

$$6I_1 + 4I_2 = 4. \quad (1)$$

3. Для второго контура, показанного на **Рис. 53.4**, выбираем движение против часовой стрелки (и снова направление движения не важно; оно не обязательно должно идти в том же направлении, как и в первом контуре) и получаем



$$E_2 = I_2 r_2 + (I_1 + I_2)R,$$

то есть

$$2 = I_2 + 4(I_1 + I_2)$$

или

$$4I_1 + 5I_2 = 2. \quad (2)$$

Решаем уравнения (1) и (2) относительно  $I_1$  и  $I_2$ .

$$2 \times (1) \text{ и получаем: } 121I_1 + 8I_2 = 8, \quad (3)$$

$$3 \times (2) \text{ и получаем: } 121I_1 + 15I_2 = 6, \quad (4)$$

$$(3) - (4) \text{ и получаем: } -7I_2 = 2,$$

откуда

$$I_2 = -\frac{2}{7} = -0.286 \text{ A}$$

(то есть  $I_2$  течёт в направлении, противоположном направлению, показанному на **Рис. 53.4**).

Подставим значение  $I_2$  в уравнение (1):

$$6I_1 + 4(-0.286) = 4,$$

$$6I_1 = 4 + 1.144,$$

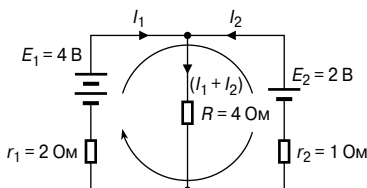
откуда

$$I_1 = \frac{5.144}{6} = 0.857 \text{ A}.$$

Ток, текущий через сопротивление  $R$ , равен

$$(I_1 + I_2) = 0.857 + (-0.286) = 0.571 \text{ A}.$$

Заметим, что третий контур тоже возможен, как это видно из **Рис. 53.5**, и тогда получается третье уравнение, которое можно использовать для проверки:



**Рис. 53.5**

$$E_1 - E_2 = I_1 r_1 + I_2 r_2,$$

$$4 - 2 = 2I_1 - I_2,$$

$$2 = 2I_1 - I_2.$$

Проверим, подставив вместо  $I_1$  и  $I_2$  найденные ранее их значения:

$$2I_1 - I_2 = 2(0.857) - (-0.286) = 2.$$

Как применять законы Кирхгофа для цепей переменного тока, см. в гл. 70.

## Принцип суперпозиции

Принцип суперпозиции гласит:

*В любой сети, состоящей из линейных сопротивлений и соединяющей более одного источника ЭДС, результирующий ток, текущий в любом ответвлении, равен алгебраической сумме токов, которые бы текли в этом ответвлении, если бы каждый источник был бы отделён от остальных источников, которые в это время были бы заменены на соответствующие им внутренние сопротивления.*

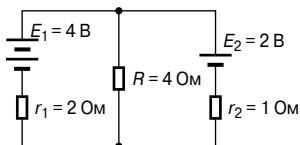


Рис. 53.6

Например, определение тока, текущего в каждом ответвлении сети, показанной на Рис. 53.6, с помощью принципа суперпозиции реализуют в следующей последовательности.

1. Изобразим первоначальную схему так, чтобы не было источника  $E_2$ , который заменим сопротивлением  $r_2$ , как показано на Рис. 53.7а.

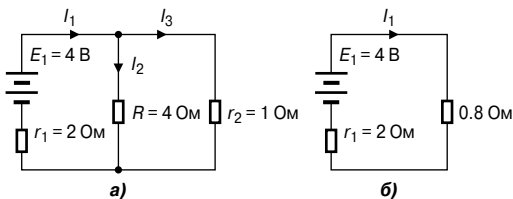


Рис. 53.7

2. Отметим токи, текущие в каждом ответвлении, и их направления, как это показано на Рис. 53.7а, и определим их значения. (Заметим, что выбор направления тока зависит от полярности батареи. Принято считать, что ток течёт от положительного вывода батареи, то есть так, как это показано на рисунке.)

Резистор  $R$  включён параллельно с  $r_2$ , и поэтому эквивалентное сопротивление равно

$$\frac{4 \times 1}{4 + 1} = 0.8 \text{ Ом.}$$

Из **Рис. 53.7б** получаем

$$I_1 = \frac{E_1}{r_1 + 0.8} = \frac{4}{2 + 0.8} = 1.429 \text{ А.}$$

Возвращаясь к **Рис. 53.7а** имеем следующее распределение токов:

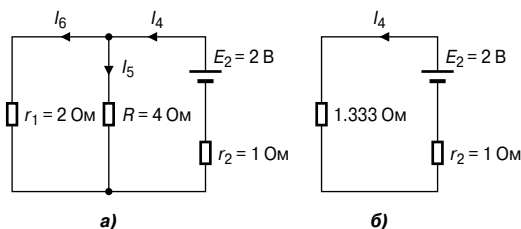
$$I_2 = \left(\frac{1}{4+1}\right)I_1 = \frac{1}{5}(1.429) = 0.286 \text{ А}$$

и

$$I_3 = \left(\frac{4}{4+1}\right)I_1 = \frac{4}{5}(1.429) = 1.143 \text{ А.}$$

3. Изобразим первоначальную схему так, чтобы вместо источника  $E_1$  оставалось только сопротивление  $r_1$ , как это показано на **Рис. 53.8а**.

4. Отметим токи, текущие в каждом ответвлении, и их направление, как это сделано на **Рис. 53.8а**, и определим их значения. Сопротивление  $r_1$  параллельно соединено с  $R$ , поэтому эквивалентное сопротивление равно  $\frac{2 \times 4}{2 + 4} = \frac{8}{6} = 1.333 \text{ Ом}$ .



**Рис. 53.8**

Из эквивалентной схемы на **Рис. 53.8б** получаем

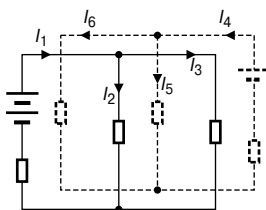
$$I_4 = \frac{E_2}{1.333 + r_2} = \frac{2}{1.333 + 1} = 0.857 \text{ А.}$$

Из **Рис. 53.8а** следует:

$$I_5 = \left(\frac{2}{2+4}\right)I_4 = \frac{2}{6}(0.857) = 0.286 \text{ А,}$$

$$I_6 = \left(\frac{4}{2+4}\right)I_4 = \frac{4}{6}(0.857) = 0.571 \text{ А.}$$

5. Накладываем **Рис. 53.8а** на **Рис. 53.7а**, как это показано на **Рис. 53.9**.



**Рис. 53.9**

6. Подсчитываем алгебраическую сумму токов, текущих в каждом ответвлении:

результатирующий ток через первый источник:

$$I_1 - I_6 = 1.429 - 0.571 = \mathbf{0.858 \text{ A}},$$

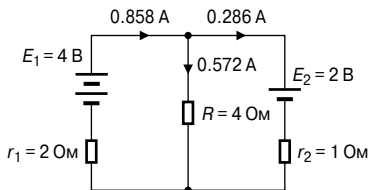
результатирующий ток через второй источник:

$$I_4 - I_3 = 0.857 - 1.143 = \mathbf{-0.286 \text{ A}},$$

результатирующий ток через резистор  $R$ :

$$I_2 + I_5 = 0.286 + 0.286 = \mathbf{0.572 \text{ A}}.$$

Результатирующие токи и их направления показаны на **Рис. 53.10**. Принцип суперпозиции для цепей переменного тока рассматривается в гл. 72.



**Рис. 53.10**

## Предварительный анализ цепей постоянного тока

Перед тем как решать проблемы с помощью теорем Тевенина и Нортон, необходимо сначала оценить указанные ниже ситуации, включающие анализ цепи постоянного тока.

- Напряжение в разомкнутой цепи  $E$  на выводах АВ, как показано на **Рис. 53.11**, равно 10 В, так как через сопротивление 2 Ом ток не течёт, а следовательно, падение напряжения отсутствует.

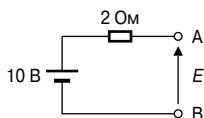


Рис. 53.11

- Напряжение в разомкнутой цепи  $E$  на выводах АВ (Рис. 53.12а) равно напряжению на резисторе с сопротивлением 6 Ом.

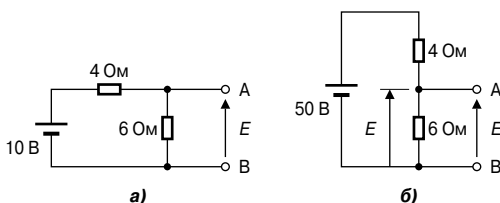


Рис. 53.12

Эту схему можно изобразить так, как показано на Рис. 53.12б. Тогда из распределения напряжения в последовательной цепи следует, что

$$E = \left( \frac{6}{6 + 4} \right) \times 50 = 30 \text{ В.}$$

- Для схемы, показанной на Рис. 53.13а (характеризующей источник питания, используемый на практике),  $V = E - Ir$ , где  $E$  — батарея ЭДС,  $V$  — напряжение на выводах батареи, а  $r$  — внутреннее сопротивление батареи (как показано в гл. 42).

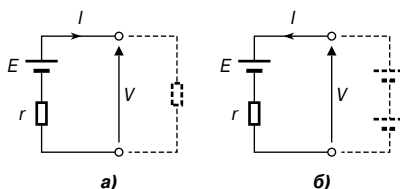


Рис. 53.13

В случае схемы, показанной на Рис. 53.13б, получаем

$$V = E - (-I)r = E + Ir.$$

- Сопротивление, «выходящее» на выводы АВ (**Рис. 53.14а**), получено благодаря уменьшению цепи на стадиях, показанных на схемах от **Рис. 53.14б** до **Рис. 53.14г**.

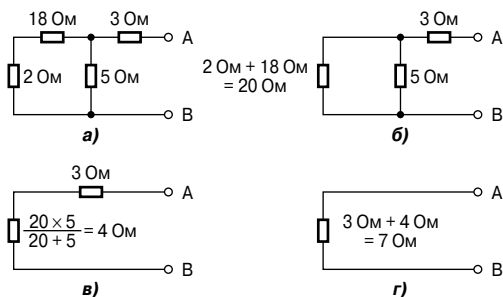


Рис. 53.14

Следовательно, эквивалентное сопротивление на АВ равно  $7\ \text{Ом}$ .

- Для схемы, показанной на **Рис. 53.15а**, резистор  $3\ \text{Ом}$  не несёт никакого тока, и разность потенциалов на резисторе с сопротивлением  $20\ \text{Ом}$  равняется  $10\ \text{В}$ .

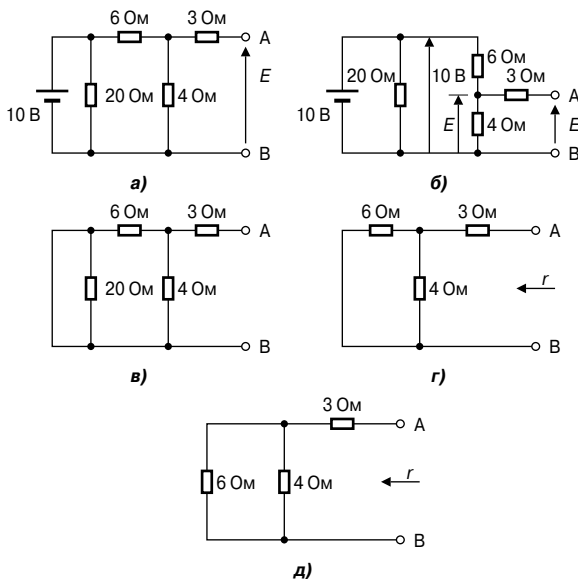


Рис. 53.15

Перестроив схему, получаем эквивалентную ей, показанную на **Рис. 53.15б**, откуда

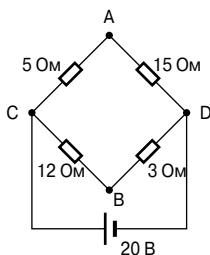
$$E = \frac{4}{4+6} \times 10 = 4 \text{ В.}$$

- Если из цепи удалить батарею 10 В (**Рис. 53.15а**) и поставить на её место короткозамкнутую цепь, как видно из **Рис. 53.15в**, тогда можно убрать резистор 20 Ом. Это делается потому, что в цепи короткого замыкания сопротивление равно нулю, а зашунтированный резистор 20 Ом даёт эквивалентное сопротивление, равное  $\frac{20 \times 0}{20 + 0}$ , то есть 0 Ом.

Тогда получается цепь, показанная на **Рис. 53.15г**, которая преобразуется в цепь на **Рис. 53.15д**. Глядя на **Рис. 53.15д** ясно, что эквивалентное сопротивление  $r$  на выводах АВ равно

$$r = \frac{6 \times 4}{6 + 4} + 3 = 2.4 + 3 = 5.4 \text{ Ом.}$$

- Подсчитываем напряжение на выводах АВ (**Рис. 53.16**):



**Рис. 53.16**

Так как источник питания 20 В последовательно соединён с резисторами 5 Ом и 15 Ом, то благодаря распределению напряжения падение напряжения на AC равно

$$V_{AC} = \left( \frac{5}{5 + 15} \right) (20) = 5 \text{ В.}$$

Точно так же

$$V_{CB} = \left( \frac{12}{12 + 3} \right) (20) = 16 \text{ В.}$$

$V_C$  имеет потенциал, равный  $+20$  В.

$$V_A = V_C - V_{AC} = +20 - 5 = 15 \text{ В},$$

$$V_B = V_C - V_{BC} = +20 - 16 = 4 \text{ В}.$$

Отсюда напряжение между А и В равно

$$V_A - V_B = 15 - 4 = 11 \text{ В},$$

и ток потечёт от А к В, так как А обладает более высоким потенциалом, чем В.

- Если требуется найти эквивалентное сопротивление АВ, то схема, показанная на **Рис. 53.17а**, может быть преобразована в схемы, показанные на **Рис. 53.17б** и **Рис. 53.17в**.

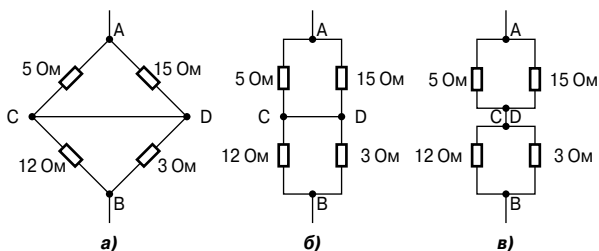


Рис. 53.17

Например, из **Рис. 53.17в** получаем, что эквивалентное сопротивление

$$R_{AB} = \frac{5 \times 15}{5 + 15} + \frac{12 \times 3}{12 + 3} = 3.75 + 2.4 = 6.15 \text{ Ом}.$$

## Теорема Тевенина—Гельмгольца

Теорема Тевенина—Гельмгольца гласит:

*Ток в любом ответвлении сети равен току, который получится в случае, если ЭДС, равная разности потенциалов на разрыве, сделанном в ответвлении, была бы введена в это ответвление и при этом все остальные ЭДС были бы удалены из цепи и представлены в виде внутренних сопротивлений источника.*

Ниже описана процедура, которую следует проводить, если необходимо применить теорему Тевенина—Гельмгольца для определения силы тока в любом из ответвлений активной цепи (то есть цепи, которая содержит источник ЭДС).



1. Удалить из ответвления сопротивление  $R$ .
2. Определить напряжение разомкнутой цепи  $E$  на разрыве.
3. Удалить все источники ЭДС и поставить вместо них их внутренние сопротивления, а затем определить сопротивление  $r$ , «выходящее» на разрыв.

4. Определить значение силы тока в эквивалентной цепи, показанной на **Рис. 53.18**, то есть воспользоваться уравнением

$$I = \frac{E}{R + r}.$$

**Например**, используя теорему Тевенина, определим силу тока, проходящего через резистор 4 Ом, показанный на **Рис. 53.19**, с помощью приведённой выше процедуры.

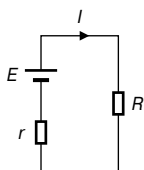


Рис. 53.18

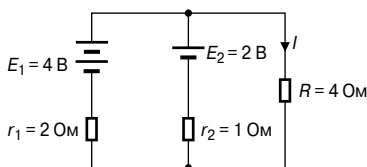


Рис. 53.19

1. Резистор с сопротивлением 4 Ом удаляется из цепи, как показано на **Рис. 53.20а**.

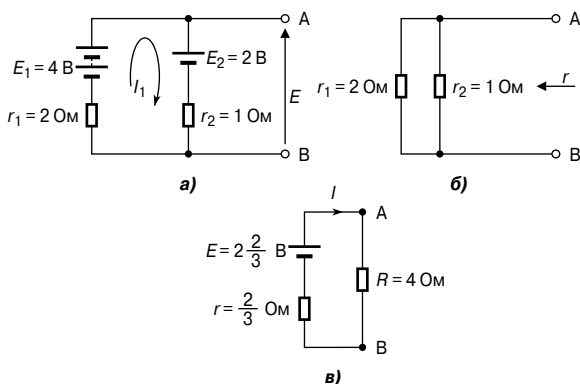


Рис. 53.20

2. Ток  $I_1 = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2} = \frac{4 - 2}{2 + 1} = \frac{2}{3} \text{ A}.$

Разность потенциалов на выводах АВ

$$E = E_1 - I_1 r_1 = 4 - \frac{2}{3}(2) = 2\frac{2}{3} \text{ В.}$$

(Другой вариант нахождения разности потенциалов на АВ

$$E = E_2 + I_1 r_2 = 2 + \frac{2}{3}(1) = 2\frac{2}{3} \text{ В.})$$

3. Удалив источники ЭДС, получаем цепь, показанную на **Рис. 53.20б**, откуда

$$r = \frac{2 \times 1}{2 + 1} = \frac{2}{3} \text{ Ом.}$$

Эквивалентная цепь Тевенина показана на **Рис. 53.20в**. Отсюда получаем, что сила тока равна

$$I = \frac{E}{r + R} = \frac{2\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 4} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{14}{3}} = \frac{8}{14} = 0.571 \text{ А.}$$

О применении теоремы Тевенина для цепей переменного тока см. в гл. 73.

## Генератор неизменяющегося постоянного тока

При расчетах электрических схем в качестве источника электроэнергии может выступать источник ЭДС, последовательно соединённый с сопротивлением. В предыдущем разделе источник неизменяющегося постоянного напряжения состоял из неизменяющейся ЭДС  $E$ , последовательно соединённой с внутренним сопротивлением  $r$ . Однако это не единственная возможная форма представления источника электроэнергии. В этом качестве может также выступать источник неизменяющегося постоянного тока с запараллеленным внутренним сопротивлением. Можно показать, что эти формы представления эквивалентны.

Идеальный *генератор постоянного напряжения* — это генератор с нулевым внутренним сопротивлением, подающий одинаковое напряжение на любую нагрузку.

Идеальный *генератор постоянного тока* имеет бесконечное внутреннее сопротивление, поэтому в любой нагрузке ток будет одинаков.

На **Рис. 53.21** показано символическое изображение эквивалентной схемы идеального источника тока.

(На практике генератором напряжения считают источник электроэнергии, внутреннее сопротивление которого много меньше сопротивления нагрузки, а генератором тока — источник электроэнергии, внутреннее сопротивление которого много больше сопротивления нагрузки. — *Прим. редактора перевода.*)

## Теорема Нортонa

Теорема Нортонa гласит:

*ток, текущий в любом ответвлении сети, равен току, который бы протекал в этом ответвлении, если бы оно было последовательно соединено с источником электроэнергии, ток короткого замыкания которого равен току, который бы протекал в цепи короткого замыкания, соединённой последовательно с ответвлением, и внутреннее сопротивление которого равнялось бы сопротивлению, которое возникает на разомкнутых выводах ответвления.*

Ниже описана процедура, которую следует провести, если необходимо применить теорему Нортонa для определения тока, текущего через резистор  $R$  в ответвлении АВ активной цепи.

1. Закоротить выводы А и В.
2. Определить ток короткого замыкания  $I_{SC}$ , протекающий в ответвлении.
3. Удалить все источники ЭДС и заменить их внутренними сопротивлениями (или, если существует источник тока, заменить его разомкнутой цепью), затем определить сопротивление  $r$ , «выходящее» на разрыв, сделанный между А и В.

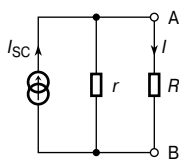


Рис. 53.21

4. Определить ток  $I$ , текущий в резисторе  $R$  эквивалентной схемы Нортонa, показанной на Рис. 53.21, то есть

$$I = \left( \frac{r}{r + R} \right) I_{SC}.$$

**Например,** по теореме Нортонa определим ток через резистор с сопротивлением 4 Ом (Рис. 53.22), используя приведённую выше процедуру.

1. Ответвление с сопротивлением 4 Ом короткозамкнуто, а сам резистор удалён, как показано на Рис. 53.23a

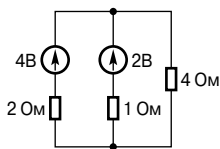


Рис. 53.22

2. Из Рис. 53.23a следует, что

$$I_{SC} = I_1 + I_2 = \frac{4}{2} + \frac{2}{1} = 4 \text{ А.}$$

3. Если удалить источники ЭДС, то сопротивление, «выходящее» на ответвление между А и В, равно

$$r = \frac{2 \times 1}{2 + 1} = \frac{2}{3} \text{ Ом.}$$

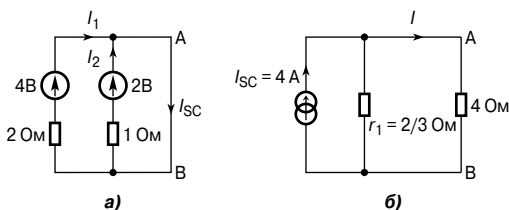


Рис. 53.23

4. Из эквивалентной схемы Нортона, показанной на **Рис. 53.23б**, следует, что ток через резистор с сопротивлением 4 Ом равен

$$I = \left( \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 4} \right) (4) = 0.571 \text{ A.}$$

(О применении теоремы Нортона для цепей переменного тока см. гл. 73.)

### Эквивалентные схемы Тевенина и Нортона

Показанные на **Рис. 53.24** эквивалентные схемы Тевенина и Нортона равнозначны по отношению друг к другу.

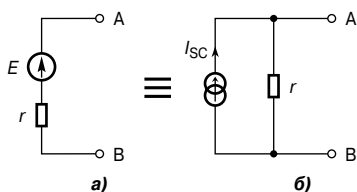


Рис. 53.24

Сопротивление, «выходящее» на выводы АВ, одинаково в каждой из схем, то есть равно  $r$ .

Если выводы АВ на **Рис. 53.24а** короткозамкнуты, то ток короткого замыкания равняется  $\frac{E}{r}$ .

Если замкнуты выводы АВ, показанные на **Рис. 53.24б**, то ток короткого замыкания равен  $I_{SC}$ .

Чтобы схема, показанная на **Рис. 53.24а**, была эквивалентна схеме, показанной на **Рис. 53.24б**, ток короткого замыкания должен быть одинаковым. Следовательно,  $I_{SC} = \frac{E}{r}$ .

Например, схема на **Рис. 53.25а** эквивалентна схеме на **Рис. 53.25б**.

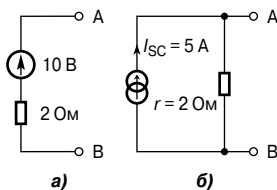


Рис. 53.25

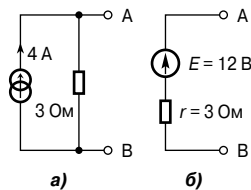


Рис. 53.26

Точно так же схема на **Рис. 53.26а** эквивалентна схеме на **Рис. 53.26б**.

**Другой пример.** Схему слева от выводов АВ (**Рис. 53.27**) преобразуем в эквивалентную ей схему Тевенина.

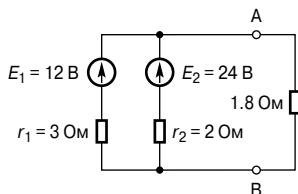


Рис. 53.27

Для ответвления, состоящего из источника напряжения 12 В, превращение в эквивалентную схему Нортон даёт

$$I_{SC} = \frac{12}{3} = 4 \text{ A} \quad \text{и} \quad r_1 = 3 \text{ Ом.}$$

Для ответвления, содержащего источник 24 В, превращение в эквивалентную схему Нортон даёт

$$I_{SC2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ A} \quad \text{и} \quad r_2 = 2 \text{ Ом.}$$

Следовательно, на **Рис. 53.28а** показана схема, эквивалентная схеме, изображённой на **Рис. 53.27**.

Из **Рис. 53.28а** получаем, что суммарный ток короткого замыкания равен

$$4 + 12 = 16 \text{ A,}$$

а суммарное сопротивление равно

$$\frac{3 \times 2}{3 + 2} = 1.2 \text{ Ом.}$$

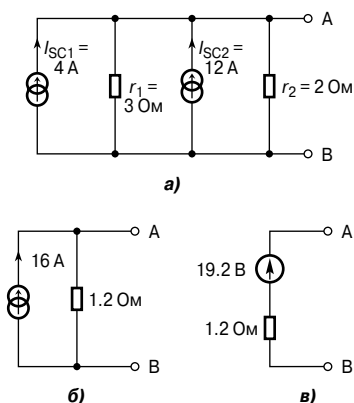


Рис. 53.28

Следовательно, **Рис. 53.28б** упрощает **Рис. 53.28а**.  
 Напряжение разомкнутой цепи на АВ (**Рис. 53.28б**)

$$E = 16 \times 1.2 = 19.2 \text{ В},$$

а сопротивление, «выходящее» на АВ, равно  $1.2 \text{ Ом}$ .

Тогда эквивалентная схема Тевенина примет вид, показанный на **Рис. 53.28в**.

Когда сопротивление  $1.8 \text{ Ом}$  подсоединено между выводами А и В (**Рис. 53.28в**), сила тока равна

$$I = \left( \frac{19.2}{1.2 + 1.8} \right) = 6.4 \text{ А}.$$

## Теорема о максимуме отдаваемой мощности

Теорема о максимуме отдаваемой мощности гласит:

|| *мощность, отдаваемая источником питания нагрузке, максимальна, если сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника.*

То есть мощность, отдаваемая нагрузке (**Рис. 53.29**), максимальна, если  $R = r$ .

**Например**, имеется источник постоянного тока. Его напряжение разомкнутой цепи равно  $30 \text{ В}$ , а внутреннее сопротивление равно  $1.5 \text{ Ом}$ , как показано на **Рис. 53.30**.

Из теоремы о максимуме отдаваемой мощности следует, что при максимальной рассеиваемой мощности

$$R_L = r = 1.5 \text{ Ом}.$$

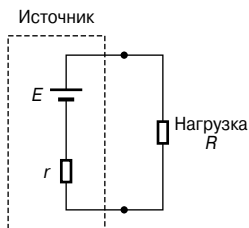


Рис. 53.29

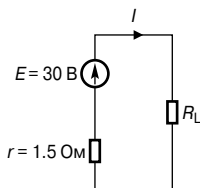


Рис. 53.30

Сила тока, текущего в цепи, показанной на **Рис. 53.30**, равна

$$I = \frac{E}{r + R_L} = \frac{30}{1.5 + 1.5} = 10 \text{ A},$$

а максимальная рассеиваемая мощность равна

$$P = I^2 R_L = (10)^2 (1.5) = \mathbf{150 \text{ Вт}}.$$

Применение теоремы о максимуме рассеиваемой мощности для цепей переменного тока рассмотрено в гл. 75.

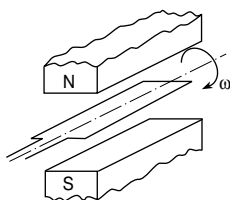
## 54. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК И НАПРЯЖЕНИЕ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### Введение

Электричество производят генераторы на электростанциях, а затем оно передаётся по высоковольтным линиям электропередачи (в Великобритании это единая государственная энергетическая система — National Grid sistem) на многочисленные объекты для удовлетворения промышленных и бытовых нужд. Легче и дешевле генерировать *переменный ток*, а не постоянный. Его удобнее передавать, так как *напряжение переменного тока* легко можно изменить с помощью трансформатора. В тех случаях, когда необходим постоянный ток, используют специальные устройства, называемые *преобразователями напряжения* (см. гл. 51).

### Генератор переменного тока

Пусть катушка с одним витком свободно вращается с постоянной угловой скоростью между полюсами системы магнитов, как это показано на **Рис. 54.1**.



**Рис. 54.1**

В катушке (по закону электромагнитной индукции Фарадея) генерируется ЭДС, которая изменяется по величине, и меняет направление на обратное с одинаковым интервалом. Причины этого изменения показаны на **Рис. 54.2**.

В положении (а), (д) и (и) проводники, образующие петлю, движутся вдоль магнитного поля, и ни одна силовая линия магнитного потока не прерывается рамкой, а следовательно, ЭДС не индуцируется.

В положении (в) и (ж) прерывается максимальное количество линий потока, и следовательно, индуцируется максимальная ЭДС. Однако, используя правило правой руки, в случае (ж) индуцируемая ЭДС имеет направление, противоположное направлению в токе (в), и её поэтому изображают как  $-E$ . В положении (б), (г), (е) и (з) прерывается часть линий магнитного потока, а следовательно, индуцируется какая-то часть от максимальной ЭДС. Если рассматривать все такие положения



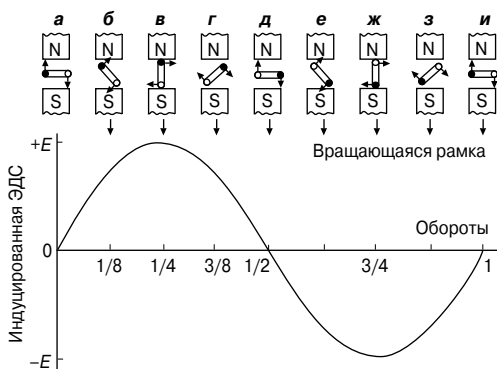


Рис. 54.2

катушки за один оборот её вращения, то можно воспроизвести один цикл изменения ЭДС, что и показано. Таков принцип действия *генератора переменного тока*.

### Форма сигналов переменного тока

Если значения физических величин, зависящих от времени  $t$ , нанести на временную ось, то в результате получится график, который называют *формой сигнала*. На Рис. 54.3 показаны некоторые часто встречающиеся формы сигналов.

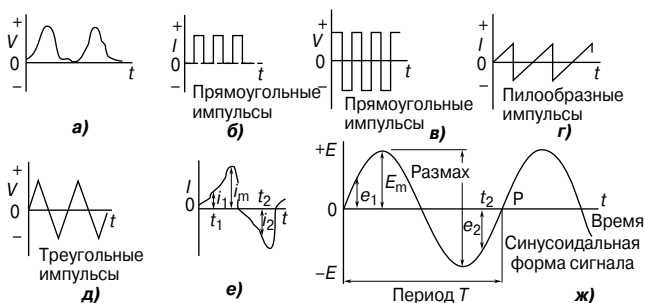


Рис. 54.3

Сигналы (а) и (б) — это *однонаправленные сигналы*, потому что, несмотря на то, что они изменяются со временем, они сохраняют только одну полярность (то есть они не пересекают временную ось и не принимают отрицательных значений). Сигналы от (в) до (ж) называют *переменными сигналами*, так как их величины постоянно меняют полярность (то есть становятся то положительными, то отрицательными).

Сигнал, показанный на **Рис. 54.3ж**, называют *синусоидальной (гармонической) волной*. Такую волну ЭДС производит генератор переменного тока, и, следовательно, электричество в энергосетях подаётся в синусоидальной форме.

Одна полная серия величин называется *циклом* (то есть время от точки О до точки Р на **Рис. 54.3ж**).

Время, необходимое для того, чтобы переменная величина завершила полный цикл, называется *периодом*  $T$  переменного сигнала или *временем прохождения* цикла сигналом.

Число полных циклов за одну секунду называется *частотой* распространения сигнала  $f$  и измеряется в *герцах* [Гц].

$$\boxed{T = \frac{1}{f}} \quad \text{или} \quad \boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Стандартная частота источников электроэнергии в Великобритании равна 50 Гц. (В России номинальное напряжение и частота переменного тока низковольтных сетей — 220 В, 50 Гц. — *Прим. редактора перевода.*)

**Например**, если, предположим, переменный ток проходит 5 циклов за 8 мс, то время одного цикла (то есть период)

$$T = \frac{8}{5} \text{ мс} = 1.6 \text{ мс},$$

а частота

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.6 \times 10^{-3}} = \frac{1\,000}{1.6} = \frac{10\,000}{16} = 625 \text{ Гц}.$$

## Величины переменного тока

*Мгновенные значения переменных величин* — это значения переменных величин в текущий момент времени. Они выражаются строчными буквами:  $i$ ,  $v$ ,  $e$  и т. д. (**Рис. 54.3е** и **Рис. 54.3ж**).

Самое большое значение, достигнутое за половину цикла, называется *пиковым значением*, *максимальным значением*, *предельным значением*, или *амплитудой* волны. Такие значения выражаются прописными буквами:  $V_m$ ,  $I_m$ ,  $E_m$  и т. д. (**Рис. 54.3е** и **Рис. 54.3ж**). На **Рис. 54.3ж** показан *полный размах* (двойная амплитуда) ЭДС, который представляет собой разность между максимальным и минимальным значением за один цикл.

*Среднее значение* симметричной изменяющейся величины (такой, например, как синусоидальное колебание) — это среднее значение за половину цикла (так как за полный цикл среднее значение равно нулю).

$$\boxed{\text{среднее значение} = \frac{\text{площадь под кривой}}{\text{длина основания}}}$$

Площадь под кривой вычисляется с помощью методов аппроксимации, таких, как формула трапеции, метод средней линии или формула Симпсона. Средние значения обозначаются символами:  $V_{AV}$ ,  $I_{AV}$ ,  $E_{AV}$  и т. д.

Для синусоидальной волны

$$\begin{aligned} \text{среднее значение} &= \frac{2}{\pi} \times \text{максимальное значение} = \\ &= 0.637 \times \text{максимальное значение} \end{aligned}$$

**Например,** если пиковое значение синусоидального сигнала равно 200 В, то среднее значение равняется  $0.637 \times 200 = 127.4$  В.

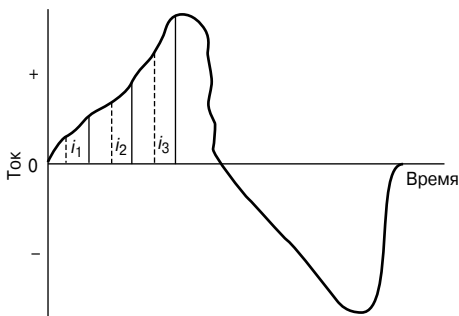
*Действующая (эффективная) величина* переменного тока — это ток, который производит тепловой эффект, равный тепловому эффекту эквивалентного постоянного тока. Действующее значение величины называют также *среднеквадратическим значением (rms)*, и условно считается, что в любой момент времени переменная величина равна среднеквадратическому значению.

**Например,** напряжение в энергосети Великобритании равно 240 В, и считается, что это значит «240 В (rms)».

Обозначаются среднеквадратические величины как  $I$ ,  $V$ ,  $E$  и т. д. Для сигнала несинусоидального вида, например, такого, как показанный на **Рис. 54.4**, среднеквадратическая величина вычисляется по формуле

$$I = \sqrt{\left( \frac{i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_n^2}{n} \right)},$$

где  $n$  — число использованных интервалов.



**Рис. 54.4**

Для синусоидального сигнала:

$$\begin{aligned}\text{Действующая величина} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \text{максимальное значение} = \\ &= 0.707 \times \text{максимальное значение}\end{aligned}$$

**Например**, если пиковое значение синусоидального сигнала равно 200 В, то rms величина равна  $0.707 \times 200 = \mathbf{141.4 \text{ В}}$ .

$$\text{Коэффициент формы} = \frac{\text{действующая величина}}{\text{средняя величина}}$$

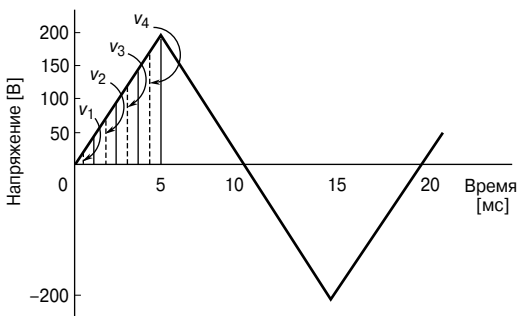
Для синусоидального сигнала коэффициент формы равен 1.11.

$$\text{Коэффициент амплитуды} = \frac{\text{максимальная величина}}{\text{действующая величина}}$$

Для синусоидального сигнала коэффициент амплитуды равен 1.41.

Значения коэффициента формы и коэффициента амплитуды дают представление о форме сигнала.

**Например**, определим периметры сигнала треугольной формы, показанного на **Рис. 54.5**.



**Рис. 54.5**

Время полного цикла (то есть период  $T$ ) = 20 мс.  
Отсюда частота равна

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \times 10^{-3}} = \frac{1\,000}{20} = \mathbf{50 \text{ Гц}}.$$

Площадь под графиком сигнала для половины цикла равна

$$\frac{1}{2} \times \text{основание} \times \text{высота} = \frac{1}{2} \times (10 \times 10^{-3} \times 200) = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{среднее значение напряжения} &= \frac{\text{площадь под кривой}}{\text{«длина» основания}} = \\ &= \frac{1 \text{ вольт-секунда}}{10 \times 10^{-3} \text{ секунда}} = \frac{1\,000}{10} = \mathbf{100 \text{ В.}} \end{aligned}$$

На **Рис. 54.5** первая четверть цикла поделена на 4 интервала. Следовательно,

$$\begin{aligned} V(\text{rms}) &= \sqrt{\left( \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}{4} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{25^2 + 75^2 + 125^2 + 175^2}{4}} = \mathbf{114.6 \text{ В.}} \end{aligned}$$

Заметим, что, чем больше интервалов, тем выше точность результата.

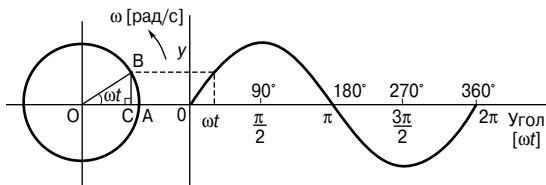
**Например**, если использовать в 2 раза больше ординат, чем это показано выше, выясняется, что  $V(\text{rms})$  равно 115.6 В.

$$\begin{aligned} \text{Коэффициент формы} &= \frac{\text{действующая величина}}{\text{средняя величина}} = \frac{114.6}{100} = \\ &= \mathbf{1.15.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Коэффициент амплитуды} &= \frac{\text{максимальная величина}}{\text{действующая величина}} = \\ &= \frac{200}{114.6} = \mathbf{1.75.} \end{aligned}$$

## Уравнение гармонической волны

На **Рис. 54.6** ОА характеризует вектор, который свободно вращается против часовой стрелки вокруг точки О с угловой скоростью  $\omega$  рад/с.



**Рис. 54.6**

Вращающийся вектор называется *фазовым вектором*.

Спустя  $t$  секунд вектор  $OA$  поворачивается на угол  $\omega t$ . Если прямая  $BC$  отложена перпендикулярно к  $OA$ , как это показано на **Рис. 54.6**, то

$$\sin \omega t = \frac{BC}{OB}, \text{ то есть } BC = OB \sin \omega t.$$

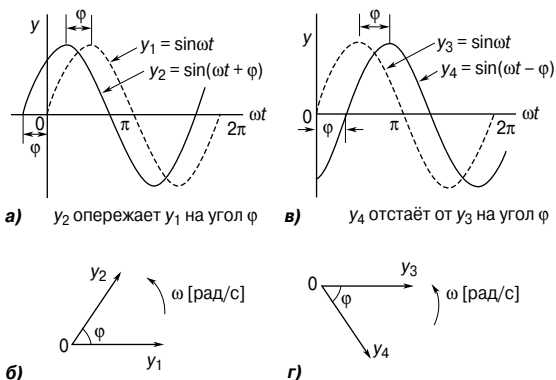
Если все такие вертикальные составляющие отложить на графике зависимости  $y$  от  $\omega t$  (в радианах), то получится синусоида, амплитуда которой равна  $OB$ . Следовательно, через фазовый вектор можно выразить любую величину, изменяющуюся по синусоиде.

Синусоида не всегда начинается с  $0^\circ$ . Чтобы это доказать, возьмём периодическую функцию, выраженную уравнением

$$y = \sin(\omega t \pm \varphi),$$

где  $\varphi$  — фазовая (или угловая) разность, сравнимая с  $y = \sin \omega t$ .

На **Рис. 54.7а** кривая  $y_2 = \sin(\omega t \pm \varphi)$  достигает  $\varphi$  радиан раньше, чем кривая  $y_1 = \sin \omega t$ , и поэтому говорят, что  $y_2$  *опережает*  $y_1$  на  $\varphi$  радиан. На **Рис. 54.7б** показаны фазовые векторы  $y_1$  и  $y_2$ , когда  $t = 0$ .



**Рис. 54.7**

На **Рис. 54.7в** кривая  $y_4 = \sin(\omega t - \varphi)$  достигает  $\varphi$  радиан позже, чем кривая  $y_3 = \sin \omega t$ , и поэтому говорят, что  $y_4$  *запаздывает* (отстает) от  $y_3$  на  $\varphi$  радиан. На **Рис. 54.7г** показаны фазовые векторы  $y_3$  и  $y_4$ , когда  $t = 0$ .

Обычное синусоидальное напряжение  $v = V_m \sin(\omega t \pm \varphi)$  характеризуется приведёнными ниже параметрами:

- амплитудой, или максимальным значением,  $V_m$ ;
- полным размахом,  $2V_m$ ;
- угловой скоростью,  $\omega$  [рад/с];

- продолжительностью цикла (периодом),  $T = 2\pi/\omega$  с;
- частотой,  $f = \omega/2\pi$  [Гц] (так как  $\omega = 2\pi f$ );
- углом отставания или углом опережения (по сравнению с  $V_m \sin \omega t$ ),  $\varphi$ .

**Например,** переменное напряжение задано уравнением

$$v = 75 \sin(200 \pi t - 0.25) \text{ В.}$$

Сравнивая с уравнением для синусоидальной волны

$$v = V_m \sin(\omega t \pm \varphi),$$

получим параметры заданного уравнения.

1. Амплитуда, или максимальное значение  $V_m = 75 \text{ В}$ .

2. Размах  $2V_m = 2 \times 75 = 150 \text{ В}$ .

3. Напряжение rms  $V = 0.707 \times \text{амплитуда} = 0.707 \times 75 = 53 \text{ В}$ .

4. Угловая скорость  $\omega = 200\pi \text{ рад/с}$ .

5. Период  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{200\pi} = \frac{1}{100} = 0.01 \text{ с}$ , или **10 мс**.

6. Частота  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.01} = 100 \text{ Гц}$ .

7. Сдвиг по фазе  $\varphi = 0.25$  радиан с отставанием от синусоиды  $y = 75 \sin 200\pi t$ .

Так как  $0.25$  радиан  $= 0.25 \times \frac{180^\circ}{\pi} = 14.32^\circ$ , то сдвиг по фазе равен  **$14.32^\circ$  с отставанием**.

## Сложение и вычитание синусоидальных величин

Результат сложения (или вычитания) двух синусоидальных величин можно определить следующими двумя способами:

- с помощью графического изображения периодических функций;
- с помощью геометрического сложения или вычитания фазовых векторов или расчётом.

**Например,** на **Рис. 54.8** графически показаны токи

$$i_1 = 20 \sin \omega t \quad \text{и} \quad i_2 = 10 \sin \omega t + \frac{\pi}{3}.$$

Чтобы определить результирующий ток  $(i_1 + i_2)$ , ординаты  $i_1$  и  $i_2$  складывают через интервалы, предположим,  $15^\circ$ . Тогда

при  $30^\circ$  —  $(i_1 + i_2) = 10 + 10 = 20 \text{ А}$ ,

при  $60^\circ$  —  $(i_1 + i_2) = 17.3 + 8.7 = 26 \text{ А}$ ,

при  $150^\circ$  —  $(i_1 + i_2) = 10 + (-5) = 5 \text{ А}$  и т. д.

На **Рис. 54.8** результирующая кривая  $(i_1 + i_2)$  показана пунктирной линией.

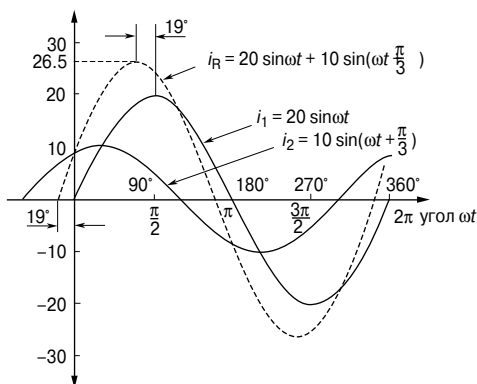


Рис. 54.8

У неё тот же период, а следовательно, и частота такая же, как в случае  $i_2$  и  $i_1$ .

Амплитуда, или пиковое значение, равна 26.5 А.

Результирующая волна опережает кривую  $i_1 = 20 \sin \omega t$  на  $19^\circ$ , то есть  $\left(19 \times \frac{\pi}{180}\right)$  рад = 0.33 радиан.

Следовательно, выражение для синусоиды, полученной в результате сложения  $(i_1 + i_2)$ , равно

$$i_R = i_1 + i_2 = 26.5 \sin(\omega t + 0.33) \text{ А.}$$

На Рис. 54.9а относительное положение  $i_1$  и  $i_2$  в момент времени  $t = 0$  показано с помощью фазовых векторов.

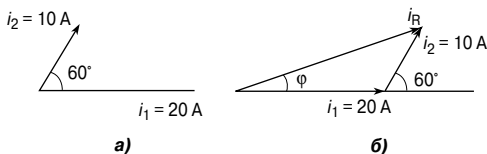


Рис. 54.9

На Рис. 54.9б показан результирующий вектор  $i_R$ , полученный геометрическим сложением векторов  $i_1$  и  $i_2$ . Модуль вектора равен 26 А, а угол  $\varphi$  равен  $19^\circ$ , или 0.33 радиана, с опережением  $i_1$ .

Отсюда, после построения получаем

$$i_R = 26.5 \sin(\omega t + 0.33) \text{ А.}$$

Такой же результат получаем, проводя несложный расчёт.



Из треугольника на **Рис. 54.9б** по теореме косинусов получаем

$$i_R^2 = 20^2 + 10^2 - 2(20)(10)(\cos 120^\circ),$$

откуда  $i_R = \mathbf{26.46\ A}$ .

По теореме синусов имеем

$$\frac{10}{\sin \varphi} = \frac{26.46}{\sin 120^\circ},$$

откуда

$$\varphi = 19.10^\circ = 0.33 \text{ рад.}$$

Следовательно, проведя вычисления, получаем

$$i_R = \mathbf{26.46 \sin(\omega t + 0.33) \ A}.$$

## Выпрямление переменного тока

Процесс получения однонаправленного тока и напряжения из переменного тока и напряжения называется *выпрямлением*. Автоматическое переключение полярности в цепи выполняется приборами, называемыми диодами. (Принципы действия однополупериодного и двухполупериодного выпрямителей см. в гл. 51.)

## 55. ОДНОФАЗНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### Цепь переменного тока

#### с чисто активным сопротивлением

В такой цепи ток  $I_R$  и прикладываемое напряжение  $V_R$  совпадают по фазе (Рис. 55.1).

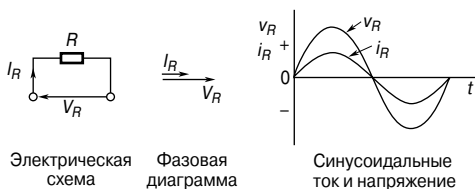


Рис. 55.1

### Цепь переменного тока

#### с чисто индуктивным сопротивлением

В такой цепи ток  $I_L$  отстаёт от приложенного напряжения  $V_L$  на  $90^\circ$ , то есть  $\frac{\pi}{2}$  рад (Рис. 55.2).

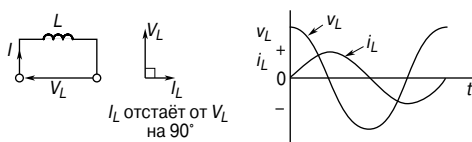


Рис. 55.2

В индуктивной цепи переменного тока противостояние переменному току называется *индуктивным сопротивлением*  $X_L$ .

$$X_L = \frac{V_L}{I_L} = 2\pi fL \text{ Ом}$$

где  $f$  — частота источника питания, измеряемая в герцах [Гц],  
 $L$  — индуктивность, измеряемая в генри [Гн].

Индуктивное сопротивление  $X_L$  пропорционально частоте  $f$ , что показано на **Рис. 55.3**.

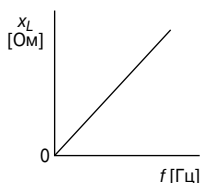


Рис. 55.3

**Например**, если индуктивность катушки равна 40 мГн, а её сопротивление так незначительно, что им можно пренебречь, и катушка подсоединена к источнику 240 В, 50 Гц, то индуктивное сопротивление равно

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(50)(40 \times 10^{-3}) = \mathbf{12.57 \text{ Ом}},$$

а ток

$$I = \frac{V}{X_L} = \frac{240}{12.57} = \mathbf{19.09 \text{ А}}.$$

### Цепь переменного тока с чисто ёмкостным сопротивлением

В такой цепи ток  $I_C$  опережает приложенное напряжение  $V_C$  на  $90^\circ$ , то есть  $\frac{\pi}{2}$  рад (**Рис. 55.4**).

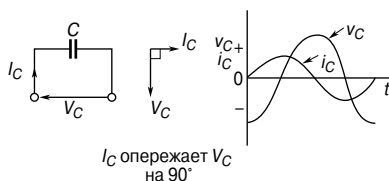


Рис. 55.4

В ёмкостной цепи переменного тока противостояние переменному току называется *ёмкостным сопротивлением*  $X_C$ .

$$X_C = \frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{2\pi fC} \text{ Ом}$$

где  $C$  — ёмкость, измеряемая в фарадах [Ф].

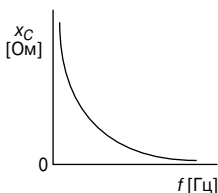
**Например,** ёмкостное сопротивление конденсатора ёмкостью 10 мкФ при подключении к цепи с частотой 50 Гц равно

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(50)(10 \times 10^{-6})} = \frac{10^6}{2\pi(50)(10)} = 318.3 \text{ Ом.}$$

Если частота, допустим, равна 20 кГц, то

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(20 \times 10^3)(10 \times 10^{-6})} = \frac{10^6}{2\pi(20 \times 10^3)(10)} = 0.796 \text{ Ом.}$$

$X_C$  изменяется в обратной пропорции к частоте  $f$ , как показано на **Рис. 55.5**.

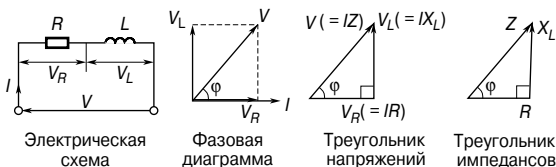


**Рис. 55.5**

## Последовательные $R$ - $L$ цепи переменного тока

В цепи переменного тока с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$  прикладываемое напряжение  $V$  равно сумме фазовых векторов  $V_R$  и  $V_L$  (**Рис. 55.6**), и, следовательно, ток  $I$  отстаёт от прикладываемого напряжения  $V$  на угол  $\varphi$ , находящийся между  $0^\circ$  и  $90^\circ$  (в зависимости от соотношения значений  $V_R$  и  $V_L$ ). В любой последовательной цепи переменного тока для всех составляющих цепи ток один и, следовательно, принимается за фазовый вектор.

На **Рис. 55.6** схематично показано, как получается «треугольник напряжений».



**Рис. 55.6**

Для  $R$ - $L$  цепи по теореме Пифагора

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_L^2},$$

а по определению тангенса

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_L}{V_R}.$$

**Например**, в последовательной  $R$ - $L$  цепи разность потенциалов на сопротивлении  $R$  равна 12 В, а разность потенциалов на индуктивности  $L$  равна 5 В.

Из треугольника напряжений (**Рис. 55.6**) получаем

$$V = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ В.}$$

(Заметим, что в цепях переменного тока прикладываемое напряжение — это не арифметическая сумма разностей потенциалов на составляющих элементах цепи, а *сумма фазовых векторов*.)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_L}{V_R} = \frac{5}{12},$$

откуда фазовый угол цепи

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{5}{12} \right) = 22.62^\circ \text{ с отставанием.}$$

(«Отставание» означает, что ток находится «позади» напряжения, так как фазовые векторы вращаются против часовой стрелки.)

В цепи переменного тока отношение приложенного напряжения  $V$  к току  $I$  называют *импедансом* —  $Z$ , то есть

$$Z = \frac{V}{I}$$

Если каждое напряжение в треугольнике напряжений на **Рис. 55.6** поделить на ток  $I$ , то получится «*треугольник импедансов*» (треугольник полного сопротивления).

Для  $R$ - $L$  цепи из треугольника импедансов следует

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L}{R}, \sin \varphi = \frac{X_L}{Z}, \cos \varphi = \frac{R}{Z}.$$

**Например**, в катушке протекает ток 2 А от источника постоянного тока 12 В. При подсоединении к источнику с напряжением 240 В и частотой 50 Гц ток становится равным 20 А. Определим индуктивность катушки.

Активное сопротивление катушки

$$R = \frac{\text{постоянное напряжение}}{\text{постоянный ток}} = \frac{12}{2} = 6 \text{ Ом},$$

а импеданс

$$Z = \frac{\text{переменное напряжение}}{\text{переменный ток}} = \frac{240}{20} = 12 \text{ Ом}.$$

Так как

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

то индуктивное сопротивление

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10.39 \text{ Ом}.$$

Так как  $X_L = 2\pi fL$ , то индуктивность

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{10.39}{2\pi(50)} = 33.1 \text{ мГн}.$$

Фазовый угол

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_L}{R} = \operatorname{arctg} \frac{10.39}{6} = 60^\circ \text{ с отставанием}.$$

Этот пример иллюстрирует простой метод нахождения индуктивности катушки, для чего сначала следует измерить ток, когда катушка соединена с источником постоянного тока известного напряжения, а затем повторить то же самое, но уже с источником переменного тока.

## Последовательные $R$ - $C$ цепи переменного тока

В последовательной цепи переменного тока с ёмкостью  $C$  и сопротивлением  $R$  прикладываемое напряжение  $V$  — это сумма фазовых векторов  $V_R$  и  $V_C$  (Рис. 55.7). Следовательно, ток  $I$  опережает приложенное напряжение  $V$  на угол, находящийся между  $0^\circ$  и  $90^\circ$  (в зависимости от соотношения значений  $V_R$  и  $V_C$ ).

На Рис. 55.7 приведена схема получения «треугольника напряжений».

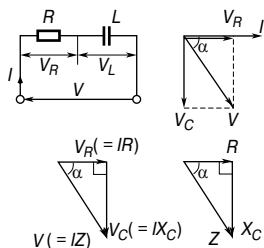


Рис. 55.7

Для  $R$ - $C$  цепи по теореме Пифагора

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_C^2}$$

и по определению тангенса

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_C}{V_R}.$$

Как говорилось выше, в сети переменного тока отношение приложенного напряжения  $V$  к току  $I$  называется *импедансом*  $Z$ , то есть

$$Z = \frac{V}{I} \text{ Ом.}$$

Если каждое напряжение в треугольнике напряжений на **Рис. 55.7** поделить на ток  $I$ , то получится «*треугольник импедансов*». Для  $R$ - $C$  цепи из треугольника импедансов следует

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{X_C}{R}, \sin \alpha = \frac{X_C}{Z}, \cos \alpha = \frac{R}{Z}.$$

**Например**, если резистор сопротивлением 25 Ом соединён последовательно с конденсатором ёмкостью 45 мкФ и источником питания 240 В, 50 Гц, то ёмкостное сопротивление равно

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(50)(45 \times 10^{-6})} = 70.74 \text{ Ом.}$$

Следовательно, импеданс

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{25^2 + 70.74^2} = 75.03 \text{ Ом.}$$

Тогда ток в цепи равен

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{240}{75.03} = 3.20 \text{ А.}$$

Фазовый угол между напряжением и током

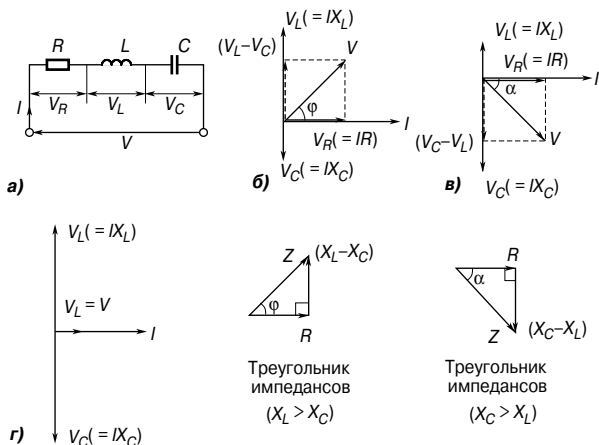
$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{X_C}{R}\right), \text{ следовательно,}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{70.74}{25} = 70.54^\circ \text{ с опережением.}$$

(«Опережение» означает, что ток находится «впереди» напряжения, так как фазовые векторы вращаются против часовой стрелки.)

## Последовательные $R$ - $L$ - $C$ цепи переменного тока

В цепи, содержащей сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и ёмкость  $C$ , приложенное напряжение  $V$  — это сумма фазовых векторов  $V_R$ ,  $V_L$  и  $V_C$  (**Рис. 55.8**).



**Рис. 55.8**

$V_L$  и  $V_C$  находятся в противофазе, то есть разность между ними составляет  $180^\circ$ , и существует три возможных варианта графика, — каждый зависит от соотношения между значениями  $V_L$  и  $V_C$ .

- Когда  $X_L > X_C$  (**Рис. 55.8б**):

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}.$$

- Когда  $X_C > X_L$  (**Рис. 55.8в**):

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_C - X_L}{R}.$$

- Когда  $X_L = X_C$  (**Рис. 55.8г**), приложенное напряжение  $V$  и ток  $I$  совпадают по фазе. Этот эффект называют *последовательным резонансом*.



### Последовательно соединённые импедансы

Для последовательно соединённых нескольких импедансов суммарный импеданс цепи может быть представлен в виде одноконтурной  $L$ - $C$ - $R$  цепи, полученной объединением всех значений сопротивлений, всех значений индуктивностей и всех значений ёмкостей.

(Нельзя забывать, что для последовательного соединения конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots)$$

**Например,** три компонента с соответствующими импедансами присоединены последовательно к источнику напряжением 40 В, 20 кГц: 1-й импеданс — сопротивление 8 Ом, 2-й импеданс — катушка индуктивности 130 мкГн и сопротивление 5 Ом и 3-й импеданс — конденсатор, ёмкость которого 0.25 мкФ и сопротивление 10 Ом. Схема цепи показана на **Рис. 55.9а**. Определим величину тока в цепи и напряжение на каждом импедансе.

Так как суммарное сопротивление цепи равно  $8 + 5 + 10$ , то есть 23 Ом, электрическая схема эквивалентной цепи может быть такой, как показано на **Рис. 55.9б**.

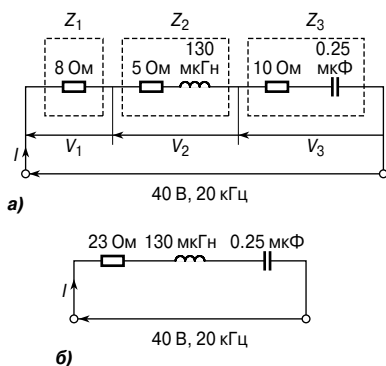


Рис. 55.9

Индуктивное сопротивление

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(20 \times 10^3)(130 \times 10^{-6}) = 16.34 \text{ Ом.}$$

Ёмкостное сопротивление

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(20 \times 10^3)(0.25 \times 10^{-6})} = 31.83 \text{ Ом.}$$

Так как  $X_C > X_L$ , цепь ёмкостная (см. диаграмму фазовых векторов на **Рис. 55.8б**).

$$X_C - X_L = 31.83 - 16.34 = 15.49 \text{ Ом.}$$

Импеданс цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2} = \sqrt{23^2 + 15.49^2} = 27.73 \text{ Ом.}$$

Ток цепи

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{40}{27.73} = 1.442 \text{ А.}$$

Из **Рис. 55.8б** фазовый угол цепи

$$\alpha = \arctg\left(\frac{X_C - X_L}{R}\right), \text{ то есть}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{15.49}{23}\right) = 33.96^\circ \text{ (опережение).}$$

Из **Рис. 55.9а**

$$V_1 = IR_1 = (1.442)(8) = 11.54 \text{ В.}$$

$$V_2 = IZ_2 = I\sqrt{5^2 + 16.34^2} = (1.442)(17.09) = 24.64 \text{ В.}$$

$$V_3 = IZ_3 = I\sqrt{10^2 + 31.83^2} = (1.442)(33.36) = 48.11 \text{ В.}$$

Приложенное напряжение 40 В — это векторная сумма фазовых векторов  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$ .

### ***Резонанс последовательного контура***

Как утверждалось ранее, для последовательной  $R$ - $L$ - $C$  цепи, когда  $X_L = X_C$  (**Рис. 55.8г**), приложенное напряжение  $V$  и ток  $I$  совпадают по фазе.

Этот эффект называют *последовательным резонансом*. При резонансе:

- $V_L = V_C$ ;
- $Z = R$  (минимально возможный импеданс в  $L$ - $C$ - $R$  цепи);
- $I = \frac{V}{R}$  (максимально возможный ток в  $L$ - $C$ - $R$  цепи);
- $X_L = X_C$ , или

$$2\pi f_r L = \frac{1}{2\pi f_r C},$$

откуда

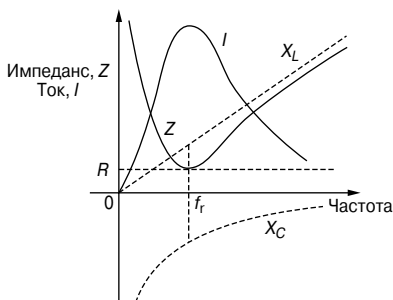
$$f_r^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 LC}$$

и

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

где  $f_r$  — резонансная частота

- Последовательную резонансную цепь часто описывают как резонансный контур, так как у неё минимальный импеданс, и, следовательно, максимальный ток на резонансной частоте
- На **Рис. 55.10** показаны графики зависимости тока  $I$  и импеданса  $Z$  от частоты.



**Рис. 55.10**

**Например,** катушка с сопротивлением 10 Ом и индуктивностью 125 мГн последовательно соединена с конденсатором 60 мкФ к источнику напряжения 120 В. Определим резонансную частоту и ток контура при резонансе.

Резонансная частота

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left[\left(\frac{125}{10^3}\right)\left(\frac{60}{10^6}\right)\right]}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left(\frac{125 \times 6}{10^8}\right)}} = \\ &= \frac{1}{2\pi\left(\frac{\sqrt{(125)(6)}}{10^4}\right)} = \frac{10^4}{2\pi\sqrt{(125)(6)}} = \mathbf{58.12 \text{ Гц.}} \end{aligned}$$

При резонансе  $X_L = X_C$ , а импеданс  $Z = R$ , следовательно, ток контура

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120}{10} = \mathbf{12 \text{ А.}}$$

### Добротность

Если при резонансе  $R$  мало по сравнению с  $X_L$  и  $X_C$ , для  $V_L$  и  $V_C$  возможен вариант, когда их напряжения будут во много раз больше, чем подаваемое напряжение (**Рис. 55.8г**).

$$\begin{aligned} \text{Усиление напряжения при резонансе} &= \\ &= \frac{\text{напряжение на } L \text{ или } C}{\text{приложенное напряжение } V} . \end{aligned}$$

Этим отношением, называемым *добротностью*, измеряют количество тока (в качестве резонатора или настроенного устройства). Его можно выразить следующим уравнением:

$$Q = \frac{2\pi f_r}{R} = \frac{1}{2\pi f_r C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} .$$

**Например**, катушка индуктивности 80 мГн с незначительным сопротивлением последовательно соединена с конденсатором, ёмкость которого 0.25 мкФ, и резистором с сопротивлением 12.5 Ом. Источник питания переменной частоты имеет напряжение 100 В. Следовательно, резонансная частота

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{\left[\left(\frac{80}{10^3}\right)\left(\frac{0.25}{10^6}\right)\right]}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\left[\frac{(8)(0.25)}{10^8}\right]}} = \mathbf{1.1254 \text{ кГц}}$$

и ток при резонансе

$$I = \frac{V}{R} = \frac{100}{12.5} = \mathbf{8 \text{ А}} .$$

Напряжение на катушке индуктивности при резонансе

$$V_L = IX_L = (I)(2\pi fL) = (8)(2\pi(1125.4))(80 \times 10^{-3}) = \mathbf{4\,525.5 \text{ В}} .$$

(Напряжение на конденсаторе такое же, то есть

$$V_C = IX_C = \frac{I}{2\pi fC} = \frac{8}{2\pi(1\,125.4)(0.25 \times 10^{-6})} = \mathbf{4\,525.5 \text{ В}} .)$$

$$\begin{aligned} \text{Повышение напряжения при резонансе} &= \frac{V_L}{V} \left( \text{или } \frac{V_C}{V} \right) = \\ &= \frac{4\,525.5}{100} = \mathbf{45.255 \text{ В}} , \end{aligned}$$

то есть при резонансе напряжение на реактивном сопротивлении в 45.255 раза выше, чем напряжение источника питания.

Следовательно, **добротность цепи равна 45.255**.

Такой же результат даёт другой способ расчёта:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{12.5} \sqrt{\left( \frac{80 \times 10^{-3}}{0.25 \times 10^{-6}} \right)} = 45.255.$$

### Полоса частот

На **Рис. 55.11** показано, как ток  $I$  изменяется в зависимости от частоты в последовательной  $R$ - $L$ - $C$  цепи.



**Рис. 55.11**

На резонансной частоте  $f_r$  ток принимает максимальное значение, показанное как  $I_r$ . Так же отмечены точки A и B, в которых ток на частотах  $f_1$  и  $f_2$  равен 0.707 от максимального значения.

Мощность, выделяемая цепью, равна  $I^2 R$ .

При  $I = 0.707 I_r$  мощность равна  $(0.707 I_r)^2 R = 0.5 I_r^2 R$ , то есть половина мощности, выделяемой при частоте  $f_r$ .

Точки, соответствующие  $f_1$  и  $f_2$ , называют *точками половинной мощности*. Расстояние между ними, то есть  $(f_2 - f_1)$ , называют *полосой частот*.

Полосу частот можно определить из уравнения

$$Q = \frac{f_r}{(f_2 - f_1)}$$

откуда

$$(f_2 - f_1) = \frac{f_r}{Q}$$

**Например**, фильтр в виде последовательной  $L$ - $R$ - $C$  цепи сконструирован для работы на резонансной частоте 5 кГц и включает в себя катушку индуктивностью 20 мГн и резистор сопротивлением 10 Ом. Определим добротность и полосу частот.

$$Q_r = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{(2\pi \times 5\,000)(20 \times 10^{-3})}{10} = 62.83.$$

Так как

$$Q_r = \frac{f_r}{(f_2 - f_1)},$$

то полоса частот:

$$(f_2 - f_1) = \frac{f_r}{Q} = \frac{5\,000}{62.83} = 79.6 \text{ Гц.}$$

### **Избирательность резонансного контура**

*Избирательность* — это свойство цепи «сильнее» отзываться на сигналы определённой частоты, на которую она настроена, чем на сигналы других частот. Отклик становится значительно слабее по мере того, как частота отличается от резонансной частоты. Чем выше добротность, тем уже полоса частот и тем более избирателен контур. Следовательно, цепи, обладающие более высокой добротностью (допустим, в диапазоне 100 ... 300), хорошо использовать в технике связи.

Высокая добротность в последовательном силовом контуре может иметь серьёзные недостатки, а именно возможно возникновение опасно высоких напряжений на изоляции, что может привести к её электрическому пробое.

Более подробно о добротности, полосе частот и избирательности см. гл. 68.

### **Мощность цепей переменного тока**

На **Рис. 55.12** видно, что значение мощности в любой момент времени определяется произведением напряжения и тока в данный момент времени, то есть мгновенная мощность  $p = vi$ , как показано пунктирными линиями, ограничивающими заштрихованные области.

Для цепи переменного тока, включающей только активное сопротивление (**Рис. 55.12а**), средняя рассеиваемая мощность  $P$  определяется уравнением

$$P = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

( $V$  и  $I$  — эффективные значения).

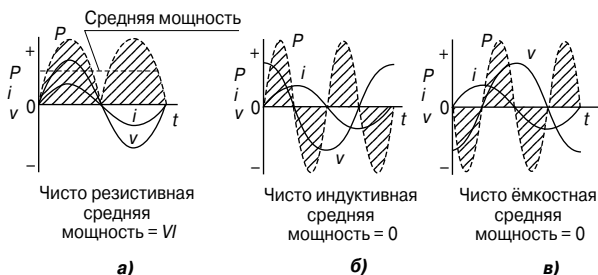


Рис. 55.12

Для цепи переменного тока, включающей только индуктивность, средняя мощность равна нулю (Рис. 55.12б).

Для цепи переменного тока, включающей только ёмкость, средняя мощность равна нулю (Рис. 55.12в).

На Рис. 55.13 показаны изменения тока и напряжения в случае  $R$ - $L$  цепи, в которой ток отстаёт от напряжения на угол  $\varphi$ .

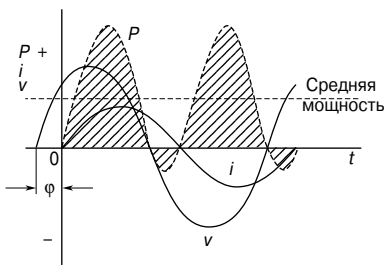


Рис. 55.13

Форма изменения мощности (где  $p = vi$ ) показана пунктирной линией, ограничивающей заштрихованную область, и эта форма, а следовательно, и средняя мощность зависят от величины угла  $\varphi$ .

Для  $R$ - $L$ ,  $R$ - $C$  или  $R$ - $L$ - $C$  последовательной цепи переменного тока среднее значение мощности  $P$  определяется формулами

$$P = VI \cos \varphi$$

или

$$P = I^2 R \cos \varphi$$

( $V$  и  $I$  — эффективные значения).

**Например,** последовательная цепь с сопротивлением 60 ом и индуктивностью 75 мГн соединена с источником питания с напряжением 110 В и частотой 60 Гц. Определим мощность цепи.

Индуктивное сопротивление цепи равно

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(60)(75 \times 10^{-3}) = 28.27 \text{ Ом},$$

а импеданс

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{60^2 + 28.27^2} = 66.33 \text{ Ом}.$$

Ток в цепи равен

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{110}{66.33} = 1.658 \text{ А}.$$

Следовательно, рассеиваемая мощность равна

$$P = I^2 R = (1.658)^2 (60) = 165 \text{ Вт},$$

либо

$$P = IV \cos\varphi,$$

где

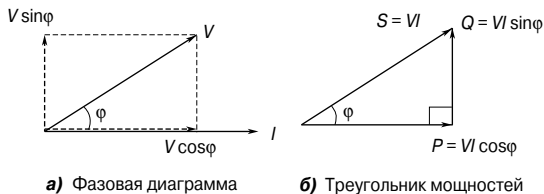
$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{60}{66.33} = 0.9046.$$

Тогда

$$P = (110)(1.658)(0.9046) = 165 \text{ Вт}.$$

### Треугольник мощностей и коэффициент мощности

На **Рис. 55.14а** показана векторная диаграмма, где ток  $I$  отстаёт от подаваемого напряжения  $V$  на угол  $\varphi$ . Горизонтальная составляющая  $V$  равна  $V \cos\varphi$ , а вертикальная составляющая  $V$  —  $V \sin\varphi$ .



**Рис. 55.14**

Если каждый вектор напряжения умножить на  $I$ , то получится диаграмма, показанная на **Рис. 55.14б**, называемая *треугольником мощностей*.

Кажущаяся мощность

$$S = VI \text{ В} \cdot \text{А}$$



Реальная или активная мощность

$$P = VI \cos \varphi \text{ Вт}$$

Реактивная мощность

$$Q = VI \sin \varphi \text{ вар}$$

$$\text{Коэффициент мощности} = \frac{\text{активная мощность}}{\text{кажущаяся мощность}} = \frac{P}{S}$$

Подробнее о треугольнике мощностей см. гл. 66.

Для синусоидальных напряжений и токов

$$\text{коэффициент мощности} = \frac{P}{S} = \frac{VI \cos \varphi}{VI}, \text{ то есть}$$

$$\text{Коэффициент мощности} = \cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

Установленные выше соотношения также верны для случая, когда ток  $I$  опережает напряжение  $V$ .

**Например.** Номинальная выходная мощность трансформатора равна 200 кВ·А при коэффициенте мощности 0.8.

Тогда кажущаяся мощность

$$VI = 200 \text{ кВ} \cdot \text{А} = 200 \times 10^3 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Выходная (активная) мощность

$$P = VI \cos \varphi = (200 \times 10^3)(0.8) = \mathbf{160 \text{ кВт.}}$$

Реактивная мощность

$$Q = VI \sin \varphi.$$

Поскольку  $\cos \varphi = 0.8$ , то  $\varphi = \arccos 0.8 = 36.87^\circ$ , следовательно,  $\sin \varphi = \sin 36.87^\circ = 0.6$ .

Тогда реактивная мощность

$$Q = (200 \times 10^3)(0.6) = \mathbf{120 \text{ квар.}}$$

## 56. ОДНОФАЗНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### Введение

В параллельных цепях, подобных тем, что показаны на **Рис. 56.1** и **Рис. 56.2**, для каждого ответвления цепи напряжение одинаковое, и, следовательно, именно оно принимается за основу при построении векторной диаграммы.

Для любой параллельной цепи переменного тока справедливы соотношения, приведённые ниже.

Активная мощность

$$P = VI \cos \varphi \text{ Вт}$$

или

$$P = I_R^2 R \text{ Вт.}$$

Кажущаяся мощность

$$S = VI \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Реактивная мощность

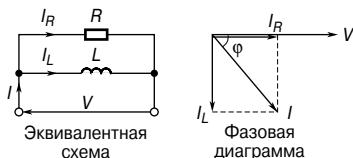
$$Q = VI \sin \varphi \text{ вар.}$$

$$\text{Коэффициент мощности} = \frac{\text{активная мощность}}{\text{кажущаяся мощность}} = \frac{P}{S} = \cos \varphi.$$

Эти формулы действуют и в случае последовательных цепей переменного тока (см. гл. 55).

### R-L параллельная цепь переменного тока

В параллельной цепи с двумя ответвлениями, в состав которой входят сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$  (**Рис. 56.1**), ток сопротивления  $I_R$  находится в одной фазе с источником напряжения  $V$ , а ток индуктивности  $I_L$  отстаёт на  $90^\circ$ .



**Рис. 56.1**

Ток  $I$  — это векторная сумма токов  $I_R$  и  $I_L$ , и, следовательно, ток  $I$  отстаёт от подаваемого напряжения  $V$  на угол между  $0^\circ$  и  $90^\circ$  (в зависимости от соотношения значений  $I_R$  и  $I_L$ ), что пока-

зано на векторной диаграмме как угол  $\varphi$ . По теореме Пифагора (см. векторную диаграмму на **Рис. 56.1**)

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2},$$

где  $I_R = \frac{V}{R},$

$$I_L = \frac{V}{X_L}.$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_L}{I_R}, \quad \sin \varphi = \frac{I_L}{I}, \quad \cos \varphi = \frac{I_R}{I}$$

(по определению тригонометрических функций).

Импеданс цепи  $Z = \frac{V}{I}.$

**Например,** резистор сопротивлением 20 Ом соединён параллельно с катушкой индуктивности 2.387 мГн. Напряжение источника питания 60 В, 1 кГц. Определим параметры цепи.

Ток, текущий в резисторе

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{60}{20} = 3 \text{ А.}$$

Ток, текущий в катушке индуктивности

$$I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{V}{2\pi fL} = \frac{60}{2\pi(1\,000)(2.387 \times 10^{-3})} = 4 \text{ А.}$$

Из векторной диаграммы следует, что ток питания

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ А.}$$

Угол между векторами токов

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{I_L}{I_R} = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 53.13^\circ \text{ с отставанием.}$$

Импеданс цепи

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{60}{5} = 12 \text{ Ом.}$$

Потребляемая мощность

$$P = VI \cos \varphi = (60)(5)(\cos 53.13^\circ) = 180 \text{ Вт.}$$

(Тот же результат можно получить другим путём:

$$P = I_R^2 R = (3)^2 (20) = 180 \text{ Вт.})$$

### ***R-C* параллельная цепь переменного тока**

В параллельной цепи с двумя ответвлениями, в состав которой входят резистор  $R$  и конденсатор  $C$  (Рис. 56.2), ток  $I_R$  находится в одной фазе с напряжением источника питания  $V$ , а ток, текущий в конденсаторе  $I_C$ , опережает  $V$  на  $90^\circ$ .

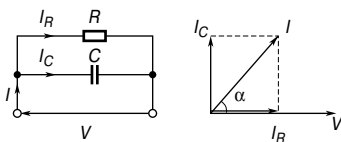


Рис. 56.2

Ток  $I$  — это векторная сумма токов  $I_R$  и  $I_C$ . Следовательно, ток  $I$  опережает подаваемое напряжение на угол, лежащий между  $0^\circ$  и  $90^\circ$  (в зависимости от соотношения значений  $I_R$  и  $I_C$ ), который на векторной диаграмме обозначен буквой  $\alpha$ . По теореме Пифагора (см. векторную диаграмму на Рис. 56.2)

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2},$$

где  $I_R = \frac{V}{R}$ ,

$$I_C = \frac{V}{X_C}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_C}{I_R}, \quad \sin \alpha = \frac{I_C}{I}, \quad \cos \alpha = \frac{I_R}{I}$$

(по определению тригонометрических функций).

Импеданс цепи  $Z = \frac{V}{I}$ .

**Например**, конденсатор ёмкостью 30 мкФ параллельно соединён с резистором сопротивлением 80 Ом. Напряжение источника питания 240 В, частота 50 Гц. Определим параметры цепи.

Ток, текущий в резисторе

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{240}{80} = 3 \text{ А.}$$

Ток, текущий в конденсаторе

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{V}{X_C} = \frac{V}{\left(\frac{1}{2\pi fC}\right)} = 2\pi fCV = \\ &= 2\pi(50)(30 \times 10^{-6})(240) = 2.262 \text{ А.} \end{aligned}$$

Ток питания

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{3^2 + 2.262^2} = 3.757 \text{ А.}$$

Угол сдвига фаз цепи

$$\alpha = \arctg \frac{I_C}{I_R} = \arctg \frac{2.262}{3} = 37.02^\circ \text{ с опережением.}$$

Импеданс цепи

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{240}{3.757} = 63.88 \text{ Ом.}$$

Активная рассеиваемая мощность

$$P = VI \cos \alpha = (240)(3.757)(\cos 37.02^\circ) = 720 \text{ Вт.}$$

(Тот же результат можно получить другим путём:

$$P = I_R^2 R = (3)^2 (80) = 720 \text{ Вт.})$$

Кажущаяся мощность

$$S = VI = (240)(3.757) = 901.7 \text{ В·А.}$$

### ***L-C* параллельная цепь**

В параллельной цепи с двумя ответвлениями, в состав которой входит катушка индуктивности  $L$  и конденсатор  $C$  (Рис. 56.3), ток  $I_L$  отстаёт от напряжения  $V$  на  $90^\circ$ , а ток  $I_C$  опережает  $V$  на  $90^\circ$ .

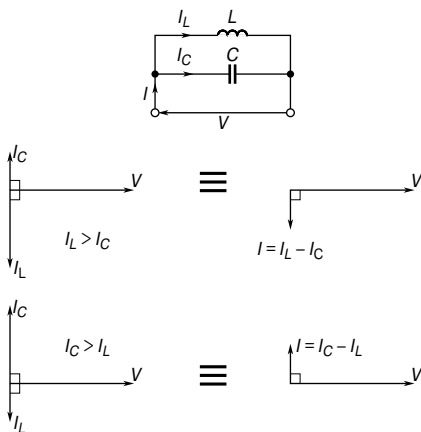


Рис. 56.3

Теоретически возможно существование трёх векторных диаграмм, каждая из которых зависит от соотношения значений  $I_L$  и  $I_C$ .

- $I_L > I_C$  (общий ток  $I = I_L - I_C$ , отставая от  $V$  на  $90^\circ$ );
- $I_C > I_L$  (общий ток  $I = I_C - I_L$ , опережая  $V$  на  $90^\circ$ );
- $I_C = I_L$  (общий ток  $I = 0$ ).

Последнее условие на практике выполнить невозможно, так как в цепи неизбежно присутствует активное сопротивление.

Для  $L$ - $C$  параллельной цепи:

$$I_L = \frac{V}{X_L}, I_C = \frac{V}{X_C}, Z = \frac{V}{I}.$$

Ток  $I$  определяют как разность векторов между  $I_L$  и  $I_C$ .

- Когда  $X_L < X_C$ ,  
 $I_L > I_C$ , и  $I$  отстает от  $V$  на  $90^\circ$ .
- Когда  $X_L > X_C$ ,  
 $I_L < I_C$ , и  $I$  опережает  $V$  на  $90^\circ$ .

В параллельной цепи, не имеющей активного сопротивления, поглощаемая мощность равна нулю.

### $L$ - $R$ - $C$ параллельная цепь переменного тока

На Рис. 56.4а показана цепь с двумя ответвлениями, включающая конденсатор  $C$ , включённый параллельно с катушкой индуктивности  $L$  и резистором  $R$ , которые соединены последовательно (такая ситуация отражает реальную картину, когда катушка индуктивности представляет собой витую проволоку, обладающую не только индуктивностью, но и активным сопротивлением).

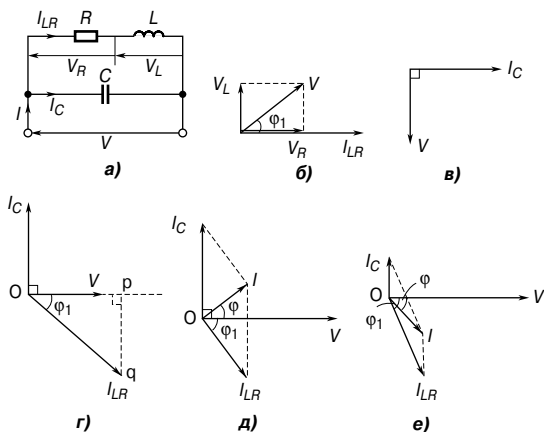


Рис. 56.4

На **Рис. 56.4б** показана векторная диаграмма только  $LR$  ветви, а на **Рис. 56.4в** — векторная диаграмма  $C$  ветви. Расположив вектор  $V$  горизонтально и наложив одну диаграмму на другую, получаем полную векторную диаграмму, показанную на **Рис. 56.4г**.

Ток  $I_{LR}$  на **Рис. 56.4г** можно разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие. Горизонтальная составляющая, показанная как **ор**, равна  $I_{LR} \cos \varphi_1$ , а вертикальная составляющая **рq** равна  $I_{LR} \sin \varphi_1$ . Для такой цепи существует три возможных соотношения между токами  $I_C$  и  $I_{LR}$ :

- $I_C > I_{LR} \sin \varphi_1$  (если ток  $I$  опережает напряжение  $V$  на угол  $\varphi$ , как показано на **Рис. 56.4д**);
- $I_{LR} \sin \varphi_1 > I_C$  (если ток  $I$  отстаёт от  $V$  на угол  $\varphi$ , как показано на **Рис. 56.4е**);
- $I_C = I_{LR} \sin \varphi_1$  (такое соотношение называют параллельным резонансом. См. стр. 218).

Существуют два метода нахождения векторной суммы токов  $I_{LR}$  и  $I_C$ , показанных на **Рис. 56.4д** и **Рис. 56.4е**, а именно:

- точное построение векторной диаграммы и измерение длины вектора  $I$  и фазового угла  $\varphi$  или
- разложение каждого тока на их «совпадающие по фазе» (то есть горизонтальную) и «сдвинутую по фазе» (то есть вертикальную) компоненты.

Из векторных диаграмм на **Рис. 56.4** имеем:  
импеданс  $LR$  ветви

$$Z_{LR} = \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

токи  $I_{LR}$  и  $I_C$

$$I_{LR} = \frac{V}{Z_{LR}}, \quad I_C = \frac{V}{X_C}.$$

Ток  $I$  равен векторной сумме токов  $I_{LR}$  и  $I_C$ , то есть

$$I = \sqrt{(I_{LR} \cos \varphi_1)^2 + (I_C - I_{LR} \sin \varphi_1)^2} \quad (\text{расчёт}).$$

Импеданс цепи

$$Z = \frac{V}{I},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{V_L}{V_R} = \frac{X_L}{R}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{X_L}{Z_{LR}} \quad \text{и} \quad \cos \varphi_1 = \frac{R}{Z_{LR}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_C - I_{LR} \sin \varphi_1}{I_{LR} \cos \varphi_1} \quad \text{и} \quad \cos \varphi = \frac{I_{LR} \cos \varphi_1}{I}.$$

**Например,** катушка с индуктивностью 159.2 мГн и сопротивлением 40 Ом параллельно соединена с конденсатором ёмкостью 30 мкФ и общим источником питания 240 В, 50 Гц. Эта цепь показана на **Рис. 56.5а**. Определим токи  $I_{LR}$  и  $I_C$ , а также ток цепи  $I$ .

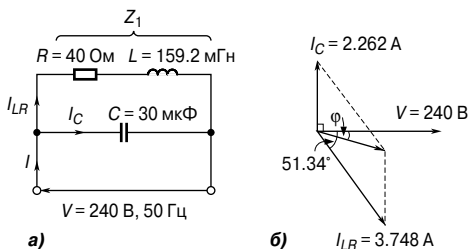


Рис. 56.5

Индуктивное сопротивление катушки

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(50)(159.2 \times 10^{-3}) = 50 \text{ Ом.}$$

Импеданс

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{40^2 + 50^2} = 64.03 \text{ Ом.}$$

Ток в катушке

$$I_{LR} = \frac{V}{Z_1} = \frac{240}{64.3} = 3.748 \text{ А.}$$

Фазовый угол отставления

$$\phi_1 = \arctg \frac{X_L}{R} = \arctg \frac{50}{40} = \arctg 1.25 = 51.34^\circ \text{ с отставанием,}$$

то есть ток в катушке  $I_{LR} = 3.748 \text{ А}$  с отставанием  $51.34^\circ$ . (См. векторную диаграмму на **Рис. 56.5б**.)

Ёмкостное сопротивление конденсатора

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(50)(50 \times 10^{-6})} = 106.1 \text{ Ом.}$$

Тогда ёмкостной ток  $I_C$

$$I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{240}{106.1} = 2.262 \text{ А,}$$

**опережая напряжение питания на  $90^\circ$**  (см. векторную диаграмму на **Рис. 56.5б**).



Ток  $I$  — это векторная сумма  $I_{LR}$  и  $I_C$ . Как было сказано выше, она может быть получена с помощью векторной диаграммы и измерения тока  $I$  и его фазового угла относительно  $V$ . (Ток  $I$  всегда является диагональю получившегося параллелограмма, как показано на **Рис. 56.56**).

Найдём ток в цепи вторым способом, то есть разложением каждого тока на горизонтальную ( $I_H$ ) и вертикальную ( $I_V$ ) составляющие.

Горизонтальная составляющая  $I_{LR}$

$$I_{LR} \cos 51.34^\circ = 3.748 \cos 51.34^\circ = 2.341 \text{ A.}$$

Горизонтальная составляющая  $I_C$

$$I_C \cos 90^\circ = 0.$$

Следовательно, суммарная горизонтальная составляющая

$$I_H = 2.341 \text{ A.}$$

Вертикальная составляющая  $I_{LR}$  равна

$$-I_{LR} \sin 51.34^\circ = -3.748 \sin 51.34^\circ = -2.927 \text{ A.}$$

Вертикальная составляющая  $I_C$  равна

$$I_C \sin 90^\circ = 2.262 \sin 90^\circ = 2.262 \text{ A.}$$

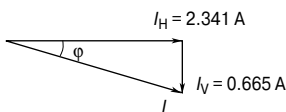
Следовательно, суммарная вертикальная составляющая

$$I_V = -2.927 + 2.262 = -0.665 \text{ A.}$$

$I_H$  и  $I_V$  показаны на **Рис. 56.6**, откуда

$$I = \sqrt{2.341^2 + (-0.665)^2} = 2.434 \text{ A.}$$

$$\text{Угол } \phi = \arctg \frac{0.665}{2.341} = 15.86^\circ \text{ с отставанием.}$$



**Рис. 56.6**

Отсюда

$$I = 2.434 \text{ A с отставанием от } V \text{ на угол } 15.86^\circ.$$

## Параллельный резонанс и добротность

### Параллельный резонанс

Резонанс возникает в цепи с двумя ответвлениями, в состав которой входят ёмкость  $C$ , соединённая параллельно с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $R$ , которые между собой соединены последовательно (Рис. 56.4а) в тот момент, когда вертикальная составляющая тока  $I_{LR}$  равна  $I_C$ . В этих условиях ток  $I$  находится в одной фазе с напряжением питания  $V$ . Поскольку в цепи катушка индуктивности и конденсатор соединены параллельно, такой резонанс получил название *параллельного*.

### Резонансная частота

Когда вертикальная составляющая  $I_{LR}$  равна  $I_C$ , то

$$I_C = I_{LR} \sin \varphi_1 \text{ (Рис. 56.7).}$$

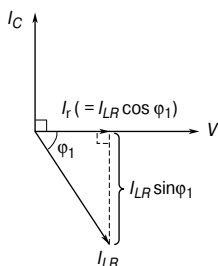


Рис. 56.7

Это может быть показано для частоты параллельного резонанса:

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right)}$$

Если величиной  $R$  можно пренебречь, то

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}},$$

что совпадает с ситуацией при последовательном резонансе.

Ток при резонансе

$$I_r = \frac{VRC}{L}.$$

При резонансе ток достигает *минимального значения*.

### Резонансное сопротивление

Так как ток при резонансе находится в одной фазе с напряжением, импеданс цепи работает как активное сопротивление. Такое сопротивление называется *резонансным сопротивлением*,  $R_D$  (иногда его называют *резонансным импедансом*). Резонансное сопротивление равно

$$R_D = \frac{L}{RC}$$

### Заграждающий фильтр

Зачастую параллельную резонансную цепь используют как *заграждающий фильтр*, так как максимальный импеданс она имеет на резонансной частоте, где результирующий ток достигает минимума.

### Добротность

По параллельным ответвлениям параллельной резонансной цепи могут циркулировать токи, значительно большие, чем ток питания; при этом ток, вытекающий из конденсатора, устанавливает магнитное поле индуктивности, которое впоследствии приводит к перезарядке конденсатора, и цикл повторяется вновь.

*Добротность* параллельной резонансной цепи — это отношение тока, циркулирующего в параллельных ответвлениях, к току питания, то есть это усиление тока. В формулах добротность обозначают символом  $Q$ .

Добротность при резонансе = усиление тока =

$$= \frac{\text{циркулирующий ток}}{\text{ток питания}},$$

или

$$Q = \frac{2\pi f_r L}{R}$$

(что равнозначно ситуации в последовательных цепях).

Заметим, что в параллельной цепи добротность — это показатель усиления тока, а в последовательной цепи — показатель усиления напряжения.

При частотах, существующих в энергосетях, добротность параллельной цепи обычно ниже 10, но в радиочастотных цепях добротность может достигать очень высоких значений.

**Например**, катушка индуктивности 0.20 Гн и сопротивлением 60 Ом соединена параллельно с конденсатором 20 мкФ через источник напряжения переменной частоты 20 В. Определим ток при резонансе и добротность параллельной цепи.

Резонансная частота параллельной цепи равна

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{(0.20)(20 \times 10^{-6})} - \frac{(60)^2}{(0.20)^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{250\,000 - 90\,000} = 63.66 \text{ Гц.}$$

Резонансное сопротивление

$$R_D = \frac{L}{RC} = \frac{0.20}{(60)(20 \times 10^{-6})} = \mathbf{166.7 \text{ Ом.}}$$

Ток при резонансе

$$I_r = \frac{V}{R_D} = \frac{20}{166.7} = \mathbf{0.12 \text{ А.}}$$

Добротность при резонансе

$$Q = \frac{2\pi f_r L}{R} = \frac{2\pi(63.66)(0.20)}{60} = \mathbf{1.33}.$$

Добротность можно подсчитать другим способом. Для параллельной цепи добротность при резонансе — это усиление тока, то есть  $\frac{I_C}{I_r}$ .

$$I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{V}{\left(\frac{1}{2\pi f_r C}\right)} = 2\pi f_r C V =$$

$$= 2\pi(63.66)(20 \times 10^{-6})(20) = 0.16 \text{ А.}$$

Зная  $I_C$ , находим  $Q$ .

$$Q = \frac{I_C}{I_r} = \frac{0.16}{0.12} = \mathbf{1.33},$$

как и было получено выше.

Более подробно о параллельном резонансе и добротности см. гл. 69.

## 57. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### Введение

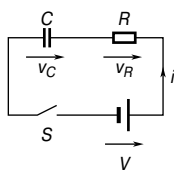
Когда к последовательно соединённым конденсатору  $C$  и резистору  $R$  прикладывают напряжение постоянного тока, сразу же после подачи напряжения существует некоторый интервал времени, когда ток, текущий в цепи, и напряжение на конденсаторе  $C$  и резисторе  $R$  изменяются.

Схожим образом, когда на последовательно соединённые катушку индуктивности  $L$  и резистор  $R$  подают напряжение постоянного тока, то существует такой интервал времени, в течение которого меняются ток в цепи и напряжение на  $L$  и  $R$ .

Эти временные изменения называют *переходными процессами*.

### Зарядка конденсатора

1. На **Рис. 57.1** показана принципиальная схема цепи с последовательно соединёнными конденсатором  $C$  и резистором  $R$ .



**Рис. 57.1**

Когда с помощью выключателя  $S$  цепь замкнута, то по закону Кирхгофа для напряжений

$$V = v_C + v_R. \quad (1)$$

2. Напряжение гальванической батареи  $V$  постоянно. Напряжение на конденсаторе  $v_C$  равно  $\frac{q}{C}$ , где  $q$  — заряд на конденсаторе.

Падение напряжения на резисторе  $R$  равно  $iR$ , где  $i$  — ток цепи.

Следовательно, в любой момент времени справедливо соотношение

$$V = \frac{q}{C} + iR. \quad (2)$$

В момент замыкания цепи выключателем  $S$  (первоначальное состояние цепи) предполагается, что на конденсаторе нет начального заряда, то есть  $q_0$  равно нулю, и, следовательно,  $v_{C_0}$  равно нулю.

Из уравнения (1) получаем

$$V = 0 + v_{R_0},$$

то есть

$$v_{R_0} = V.$$

Из этого следует, что ток в цепи определяется исключительно благодаря сопротивлению  $R$ , и первоначальный ток

$$i_0 = I = \frac{V}{R}.$$

3. Спустя короткое время (через  $t_1$  секунд после замыкания выключателя S) конденсатор частично зарядится до величины, предположим,  $q_1$  кулонов, так как всё это время ток протекал.

Напряжение  $v_{C1}$  теперь равно  $\frac{q_1}{C}$  вольт. Если ток равен  $i_1$  ампер, то падение напряжения на резисторе  $R$  достигнет величины  $i_1 R$  вольт.

Следовательно, теперь падение напряжения на резисторе в соответствии с уравнением (2) равно

$$V = \frac{q_1}{C} + i_1 R.$$

4. Немного времени спустя (через  $t_2$  секунд после замыкания переключателя) заряд возрастёт до величины, предположим,  $q_2$  кулонов, а  $v_C$  до  $-\frac{q_2}{C}$  вольт. Так как  $V = v_C + v_R$  и  $V$  константа, то  $v_R$  уменьшится до величины  $i_2 R$ . Следовательно, со временем  $v_C$  растёт, а  $i$  и  $v_R$  падает.

5. И вот, наконец, спустя несколько секунд после замыкания выключателя S (то есть в окончательном, или *стационарном, состоянии*) конденсатор полностью заряжается, допустим, до  $Q$  кулонов, и ток перестаёт течь, то есть

$$i = 0,$$

и, следовательно,

$$v_R = iR = 0.$$

Из уравнения (1) следует, что

$$v_C = V.$$

6. На **Рис. 57.2** показаны кривые, иллюстрирующие изменение  $v_C$ ,  $v_R$  и  $i$  в зависимости от времени.

Кривую, иллюстрирующую изменение  $v_C$  со временем, называют *экспонентой роста*, а график — характеристикой «напряжение на конденсаторе/время».

Кривые зависимости  $v_R$  и  $i$  от времени называют *экспонентой затухания*, а графики — соответственно характеристикой «напряжение на резисторе/время» и характеристикой «ток резистора/ время».

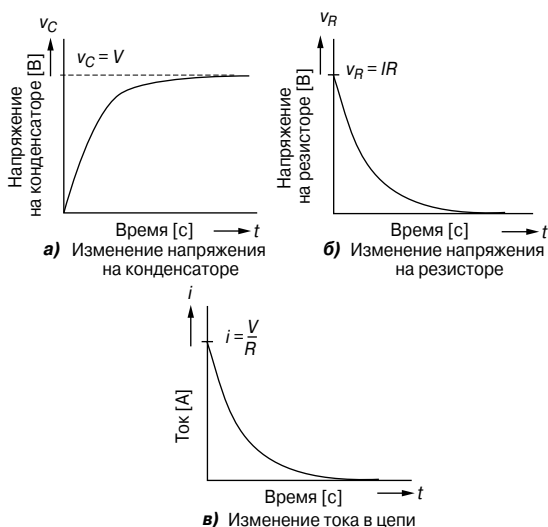


Рис. 57.2

(Слово «экспонента» говорит о том, что форма кривой может быть выражена математически с помощью уравнения, содержащего основание натуральных логарифмов (число  $e$ ), как это будет показано далее.)

## Постоянная времени для $R$ - $C$ цепи

Ниже приведено определение *постоянной времени*.

**Постоянная времени — это время, затраченное изменяющимся процессом на то, чтобы прийти в конечное состояние, если поддерживается первоначальная скорость изменения.**

Для последовательной  $R$ - $C$  цепи *постоянная времени*

$$\tau = RC$$

## Кривые переходного процесса $R$ - $C$ цепи

Существует два основных метода графического изображения кривой переходного процесса.

- *Метод касательных* (этот метод приводится ниже в качестве примера).

- *Метод трёх точек и первоначального наклона*, который основывается на следующих свойствах экспоненциальной кривой переходного процесса:
  - ✓ для кривой роста значение изменяющейся величины в момент времени, равный постоянной времени, равно 0.632 от его установившегося значения (как правило, берётся 63% от установившегося значения); в момент времени, равный постоянной времени, умноженной на два с половиной, равно 0.918 от его установившегося значения (как правило, берётся 92%) и в момент времени, равный постоянной времени, умноженной на пять, равно его установившемуся значению;
  - ✓ для кривой спада значение переходного процесса в момент времени, равный постоянной времени, равно 0.368 от его первоначального значения (как правило, берётся 37%); в момент времени, равный постоянной времени, умноженной на два с половиной, равно 0.082 от его первоначального значения (как правило, берётся 8%) и в момент времени, равный постоянной времени, умноженной на пять, равно нулю.

Кривая переходного процесса, показанная на **Рис. 57.2**, имеет математическое выражение, полученное с помощью решений разных уравнений, характеризующих работу цепи. Ниже приведены уравнения, характеризующие переменные процессы во время разрядки конденсатора в последовательной  $R$ - $C$  цепи. Рост напряжения на конденсаторе

$$v_C = V(1 - e^{-t/RC}) = V(1 - e^{-t/\tau})$$

Спад напряжения на резисторе

$$v_R = Ve^{-t/RC} = Ve^{-t/\tau}$$

Спад тока

$$i = Ie^{-t/RC} = Ie^{-t/\tau}$$

**Например**, разряженный конденсатор ёмкостью 15 мкФ последовательно соединён с резистором 47 кОм через источник постоянного напряжения 120 В. Тогда постоянная времени

$$\begin{aligned}\tau &= CR = 15 \text{ мкФ} \times 47 \text{ кОм} = \\ &= 15 \times 10^{-6} \times 47 \times 10^3 = \mathbf{0.705 \text{ с}}.\end{aligned}$$

Установившееся значение величины  $v_C = V$ , то есть  $v_C = 120 \text{ В}$ .





вившегося значения. В данном примере это  $0.632 \times 120 = 75.84$  В. Также из графика видно, что, когда  $t$  равно двум секундам,  $v_C$  равняется примерно 115 В. Это значение можно проверить, используя уравнение

$$v_C = V(1 - e^{-t/\tau}),$$

где  $V = 120$  В,  
 $\tau = 0.705$  с,  
 $t = 2$  с.

Подставив значения в уравнение, получаем  $v_C = 112.97$  В.

Определить время, когда  $v_C$  достигает значения половины своего окончательного значения, можно по графику, и это время приближённо равно 0.5 с. Это значение также можно проверить с помощью формулы

$$v_C = V(1 - e^{-t/\tau}),$$

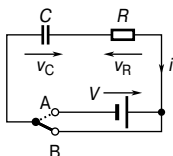
где  $V = 120$  В,  
 $v_C = 60$  В,  
 $\tau = 0.705$  с.

После вычислений следует, что

$$t = 0.489$$
 с.

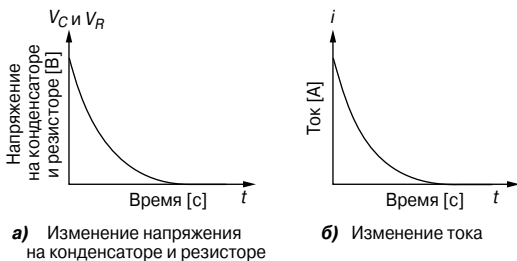
## Разрядка конденсатора

Когда конденсатор заряжен (то есть переключатель находится в положении А (**Рис. 57.4**)), а затем переключатель перемещают в положение В, электроны, накопленные в конденсаторе, непродолжительное время обеспечивают наличие тока в контуре.



**Рис. 57.4**

Изначально, в момент переключения из А в В, напряжение на конденсаторе  $v_C$  уравнивается равным и противоположным напряжением  $v_R = iR$ . Так как в первый момент  $v_C = v_R = V$ , то  $i = I = V/R$ . После окончания переходного процесса, применяя закон Кирхгофа о напряжении к ситуации на **Рис. 52.4**, получаем  $v_C = v_R = 0$ . Кривые переходного процесса, характеризующие напряжение и ток, показаны на **Рис. 57.5**.



**Рис. 57.5**

Ниже приведены уравнения, характеризующие переходные процессы во время разрядки конденсатора в последовательной  $R$ - $C$  цепи.

Спад напряжения

$$v_C = v_R = V e^{-t/RC} = V e^{-t/\tau}$$

Спад тока

$$i = I e^{-t/RC} = I e^{-t/\tau}$$

**Например,** конденсатор, заряженный до 100 В, разряжается через резистор 50 кОм. Постоянная времени цепи равна 0.8 с. Определим время, за которое напряжение на конденсаторе упадёт до 20 В.

Зная, что  $\tau = RC$ , определим ёмкость конденсатора

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{0.8}{50 \times 10^3} = 16 \text{ мкФ}.$$

Время, необходимое для того, чтобы напряжение на конденсаторе упало до 20 В, определим из формулы

$$v_C = V e^{-t/\tau}.$$

Подставляя значения  $v_C$  и  $\tau$ , имеем

$$20 = 100 e^{-t/0.8}, \text{ или}$$

$$\frac{1}{5} = e^{-t/0.8}.$$

Следовательно,

$$e^{t/0.8} = 5,$$

и после логарифмирования получаем

$$\frac{t}{0.8} = \ln 5,$$

откуда

$$t = 0.8 \ln 5 = 1.29 \text{ с}.$$

Когда конденсатор (в том числе и находящийся в составе электрической схемы) отключают от источника питания, он может быть по-прежнему заряжен и сохранять этот заряд продолжительное время. Поэтому необходимо принять меры предосторожности, чтобы гарантировать, что конденсатор автомати-

чески разрядится после того, как источник питания отключен. Это делается присоединением к выводам конденсатора резистора с высоким сопротивлением.

В цепи постоянного тока конденсатор блокирует ток всегда, кроме моментов, когда изменяется приложенное к нему напряжение.

## Рост силы тока в $L$ - $R$ цепи

1. На **Рис. 57.6** показана принципиальная схема последовательной  $L$ - $R$  цепи. Когда выключатель  $S$  замыкает цепь, то по закону Кирхгофа для напряжения справедливо соотношение

$$V = v_L + v_R. \quad (3)$$

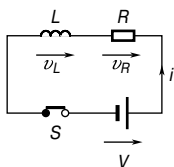


Рис. 57.6

2. Напряжение гальванической батареи  $V$  постоянно. Напряжение на катушке индуктивности — это индуцированное напряжение, то есть

$$v_L = L \times \frac{\text{изменение тока}}{\text{интервал времени}} = L \frac{di}{dt}.$$

Падение напряжения на резисторе  $v_R$  определяется произведением  $iR$ . Отсюда в любой момент справедливо соотношение

$$V = L \frac{di}{dt} + iR. \quad (4)$$

3. В момент замыкания выключателя скорость изменения тока такова, что он индуцирует в индуктивности ЭДС, равную и противоположную по знаку  $V$ , отсюда

$$V = v_L + 0,$$

то есть

$$v_L = V.$$

Так как  $v_L = V$ , то из уравнения (3) получаем, что

$$v_R = 0 \quad \text{и} \quad i = 0.$$

4. Спустя некоторое время после замыкания выключателя  $S$ , в момент  $t_1$ , начинает течь ток  $i_1$ . Это происходит потому, что изначально есть какое-то изменение силы тока, что в результате приводит к падению напряжения  $i_1 R$  на резисторе. Так как

$V(\text{константа}) = v_L + v_R$ , индуцируемая ЭДС уменьшается, и уравнение (4) принимает вид

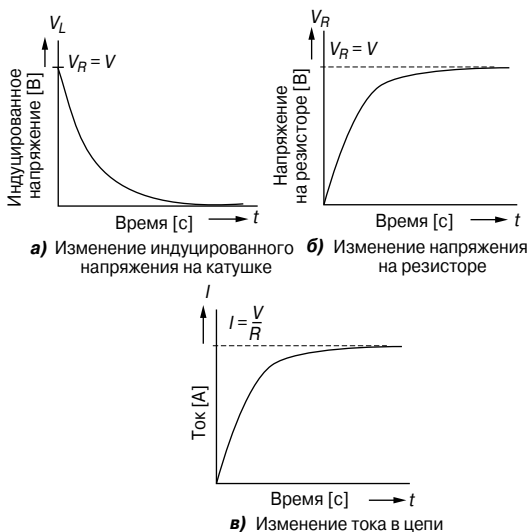
$$V = L \frac{di}{dt} + i_1 R.$$

5. Спустя немного времени предположим, что в момент  $t_2$ , после замыкания выключателя  $S$ , ток равен  $i_2$ , и падение напряжения на резисторе увеличивается до  $i_2 R$ . Так как  $v_R$  растёт, то  $v_L$  уменьшается.

6. Наконец, спустя несколько секунд после замыкания выключателя  $S$  ток полностью определяется сопротивлением резистора  $R$ , скорость изменения его становится равной нулю, следовательно,  $v_L$  тоже равняется нулю. Отсюда  $V = iR$ . В таких условиях ток установившегося режима обычно обозначают буквой  $I$ . Следовательно, в стационарных условиях

$$I = \frac{V}{R}, \quad v_R = IR, \quad v_L = 0.$$

7. На **Рис. 57.7** показаны кривые, отображающие изменения  $v_L$ ,  $v_R$  и  $i$  в зависимости от времени.



**Рис. 57.7**

Они показывают, что  $v_L$  в первый момент принимает максимальное значение (то есть равное  $V$ ), а затем по экспоненте падает до нуля, в то время как  $v_R$  и  $i$  растут по экспоненциальному закону от нуля до их установившихся значений  $V$  и  $I = \frac{V}{R}$  соответственно.

## Постоянная времени $L$ - $R$ цепи

Постоянная времени последовательной  $L$ - $R$  цепи определяется тем же способом, что и постоянная времени последовательной  $C$ - $R$  цепи, то есть

$$\tau = \frac{L}{R}$$

## Кривые переходного процесса $L$ - $R$ цепи

Кривые переходного процесса, отображающие характеристики «индуцированное напряжение/время», «напряжение на резисторе/время» и «ток/время», могут изображаться графически, как это было показано ранее. У всех кривых на **Рис. 57.7** есть свои математические выражения, приведённые ниже.

Спад индуцированного напряжения

$$v_L = V e^{-Rt/L} = V e^{-t/\tau}$$

Рост напряжения на резисторе

$$v_R = V(1 - e^{-Rt/L}) = V(1 - e^{-t/\tau})$$

Рост силы тока

$$i = I e^{-Rt/L} = I e^{-t/\tau}$$

**Например,** индуктивность реле 100 мГн, а сопротивление 20 Ом. Реле соединено с источником постоянного тока 60 В. Тогда постоянная времени

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{100 \times 10^{-3}}{20} = 5 \text{ мс};$$

окончательное значение тока

$$I = \frac{V}{R} = \frac{60}{20} = 3 \text{ А}.$$

Построим график переходного процесса «ток реле/время».

1. На горизонтальной оси должна помещаться, как минимум, постоянная времени, увеличенная в 5 раз, то есть 25 мс, а на вертикальной оси — 3 А.

2. На **Рис. 57.8** начальный наклон кривой формируется за счёт построения отрезка АВ, равного одной постоянной времени (то есть 5 мс) и последующего соединения точки О с точкой В.

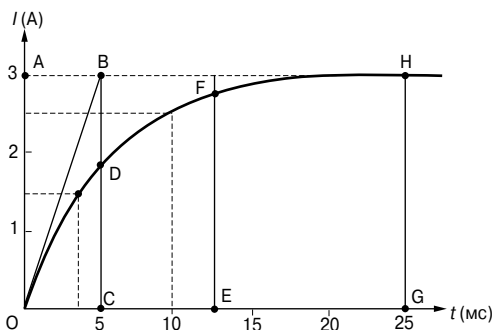


Рис. 57.8

3. В момент времени, равный одной постоянной времени, CD равно  $0.632 \times I = 0.632 \times 3 = 1.896 \text{ A}$ ;

в момент времени, равный 2.5 постоянным времени, EF равно  $0.918 \times I = 0.918 \times 3 = 2.754 \text{ A}$ ;

в момент времени, равный 5 постоянным времени, GH равно  $I = 3 \text{ A}$ .

4. Через точки O, D, F и H проводится плавная кривая, которая и характеризует зависимость тока от времени.

Сравним результаты, полученные из построенного графика, с расчётом по формуле.

Из характеристики **Рис. 57.8** получаем, что при  $t = 2\tau$  ток  $i \approx 2.6 \text{ A}$ . Если провести расчёт, исходя из формулы

$$i = I(1 - e^{-t/\tau}),$$

где  $I = 3 \text{ A}$ ,

$$t = 2\tau,$$

то в результате получим, что  $i = 2.59 \text{ A}$ .

Когда ток равен  $1.5 \text{ A}$ , по тому же графику получим, что ток достигнет этой величины приблизительно через  $3.6 \text{ мс}$  (см. пунктирную линию).

Если вновь провести расчёт, используя формулу

$$i = I(1 - e^{-t/\tau}),$$

где  $i = 1.5 \text{ A}$ ,

$$I = 3 \text{ A},$$

$$\tau = 5 \text{ мс},$$

то в результате получим, что  $t = 3.466 \text{ мс}$ .

## Спад тока в $L$ - $R$ цепи

Когда последовательную  $L$ - $R$  цепь замыкают с источником постоянного тока, как показано на **Рис. 57.9**, с помощью переключателя  $S$ , устанавливая его в положение А, ток  $I = \frac{V}{R}$  течёт

спустя короткий интервал времени, создавая магнитное поле ( $\Phi \sim I$ ), связанное с катушкой индуктивности.

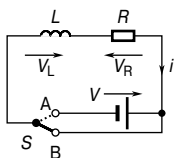


Рис. 57.9

Когда S переключается в положение В, ток уменьшается, вызывая снижение напряжённости магнитного поля. Возникает поттокосцепление, генерирующее напряжение

$v_L$ , равное  $L \frac{di}{dt}$ . По закону Ленца это напря-

жение заставляет ток  $i$  течь по цепи, при этом его величина ограничивается сопротивлением резистора  $R$ .

Следовательно,  $v_L = v_R$ .

Ток по экспоненте спадает до нуля, и, так как  $v_R$  пропорционально текущему току,  $v_R$  спадает по экспоненте до нуля.

Так как  $v_L = v_R$ ,  $v_L$  также спадает по экспоненте до нуля.

Кривые, характеризующие эти переходные процессы, схожи с теми, что показаны на Рис. 57.5. Ниже приведены уравнения, характеризующие спад напряжения и тока.

Спад напряжения

$$v_L = v_R = V e^{-Rt/L} = V e^{-t/\tau}$$

Спад тока

$$i = I e^{-Rt/L} = I e^{-t/\tau}$$

**Например**, катушка с индуктивностью 6 Гн и сопротивлением  $R$  последовательно соединена с резистором 10 Ом и источником постоянного тока 120 В. Постоянная времени цепи равна 300 мс. Когда достигаются условия стационарного состояния, источник питания заменяют на цепь короткого замыкания. Определим ток в цепи через 1 с.

Постоянная времени этой цепи

$$\tau = \frac{\text{индуктивное сопротивление цепи}}{\text{общее сопротивление цепи}} = \frac{L}{R + 10},$$

откуда

$$R = \frac{L}{\tau} - 10 = \frac{6}{0.3} - 10 = 10 \text{ Ом.}$$

Ток установившегося режима

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120}{10 + 10} = 6 \text{ А.}$$

Ток переходного процесса через 1 с

$$i = I e^{-t/\tau} = 6 e^{-1/0.3} = 6 \times 0.03567 = \mathbf{0.214 \text{ А.}}$$



Время, затраченное на то, чтобы ток упал, допустим, до 10% от его первоначального значения, определяется следующей последовательностью действий.

10% от первоначального значения тока составляет

$$\frac{10}{100} \times 6 = 0.6 \text{ A.}$$

Используя уравнение  $i = Ie^{-t/\tau}$ , получаем

$$0.6 = 6e^{-1/0.3},$$

откуда

$$e^{t/0.3} = \frac{6}{0.6} = 10.$$

Логарифмируя левую и правую части этого уравнения, получим

$$\frac{t}{0.3} = \ln 10,$$

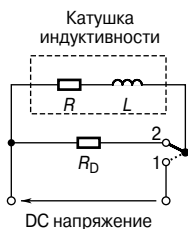
откуда

$$t = 0.3 \ln 10 = 0.691 \text{ с.}$$

## Переключаемые индуктивные цепи

Накопленная в магнитном поле катушки индуктивности энергия существует потому, что изменяющийся ток обеспечивает наличие магнитного поля. Когда источник постоянного тока отключают, ток быстро падает и магнитное поле резко исчезает, вызывая большую индуцируемую ЭДС, из-за которой либо образуется электрическая дуга между контактами переключателя, либо пробой изоляции между соседними витками катушки. Большая индуцированная ЭДС действует по направлению, которое стремится сохранить ток, то есть в том же направлении, что и приложенное ранее напряжение. Тем самым энергия магнитного поля поддерживает дугу, помогая питающему напряжению, что может повредить переключатель. Для того чтобы уменьшить ЭДС, переключатель, отключив источник напряжения, соединяет катушку индуктивности с разрядным резистором  $R_D$ , как это показано на **Рис. 57.10**.

Энергия магнитного поля рассеивается, так как удаётся избежать дуги на контактах переключателя и разогрева резисторов  $R_D$  и  $R$ .



**Рис. 57.10**

## Влияние постоянной времени на сигнал прямоугольной формы

### Интегрирующая цепь

Изменяя либо величину ёмкости конденсатора  $C$ , либо сопротивление резистора  $R$  в последовательной  $R$ - $C$  цепи, можно изменять постоянную времени цепи ( $\tau = CR$ ). Если на  $R$ - $C$  цепь поступает сигнал прямоугольной формы, изменяющийся от  $+E$  до  $-E$ , как показано на **Рис. 57.11**, напряжение на выходе конденсатора будет иметь разную форму в зависимости от значения сопротивления  $R$ .

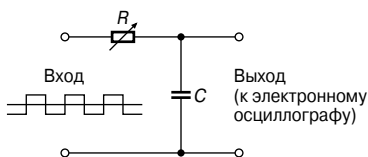


Рис. 57.11

Когда сопротивление  $R$  мало,  $\tau = RC$  также мало и форма выходного напряжения будет такой, как показано на **Рис. 57.12а**.

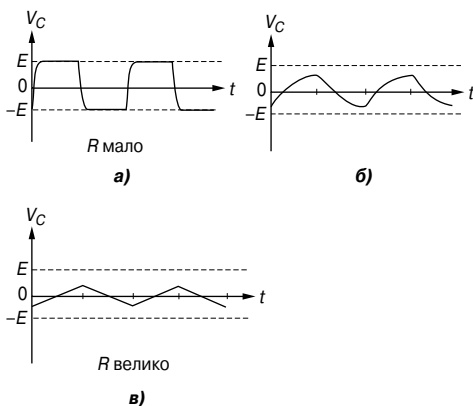


Рис. 57.12

По мере того как сопротивление  $R$  увеличивается, форма выходного напряжения меняется до состояния, показанного на **Рис. 57.12б**. Когда сопротивление  $R$  большое, форма напряжения такова, как это показано на **Рис. 57.12в**. Такая цепь называется *интегрирующей цепью*.

### Дифференцирующая цепь

Если сигнал прямоугольной формы, изменяющийся от  $+E$  до  $-E$ , поступает к последовательной  $R$ - $C$  цепи и на резисторе можно наблюдать изменение напряжения, как это показано на **Рис. 57.13**, то при изменении сопротивления  $R$  форма напряжения на выходе будет изменяться, так как с изменением сопротивления изменяется постоянная времени ( $\tau = RC$ ).

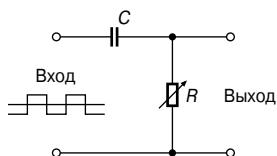


Рис. 57.13

Когда сопротивление  $R$  мало, форма сигнала такая, как показано на **Рис. 57.14а**, при этом напряжение на резисторе  $R$  быстро спадает благодаря очень быстро разряжающемуся конденсатору.

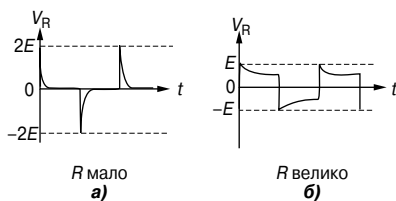


Рис. 57.14

Так как изменение напряжения на конденсаторе колеблется от  $+E$  до  $-E$ , изменение тока разрядки равно  $2E/R$ , в результате чего возникает изменение напряжения на резисторе  $-2E$ . Такую цепь называют *дифференцирующей цепью*. Когда сопротивление  $R$  велико, форма сигнала будет такой, как показано на **Рис. 57.14б**.

## 58. ОПЕРАЦИОННЫЕ УСИЛИТЕЛИ

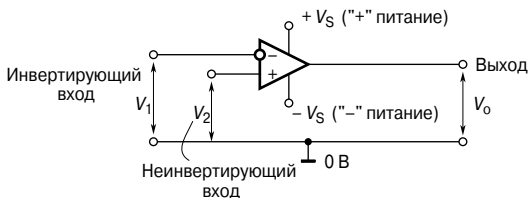
### Введение

Изначально *операционные усилители* (ОУ) выполнялись из дискретных элементов и разрабатывались для решения математических уравнений электронным способом, выполняя такие операции, как сложение и деление в аналоговых вычислительных машинах. В настоящее время ОУ выпускаются в виде интегральных схем (ИС) и в таком виде находят широкое применение. Одним из основных видов применения является использование их в качестве усилителей напряжения постоянного и переменного тока с высоким коэффициентом усиления.

К основным свойствам такого усилителя относятся:

- очень высокий коэффициент усиления по напряжению при разомкнутой цепи обратной связи, равный примерно  $10^5$  для постоянного тока и низкочастотного переменного тока, однако уменьшающийся с увеличением частоты;
- очень высокий входной импеданс, как правило, равный от  $10^6$  до  $10^{12}$  Ом, что позволяет при малом выходном токе подключённого прибора или питающей цепи иметь входное напряжение на ОУ с малыми потерями;
- очень низкий выходной импеданс (около 100 Ом), что позволяет почти без потерь передавать выходное напряжение любой нагрузке, превышающей несколько килоом.

На **Рис. 58.1** показано символьное обозначение операционного усилителя. У него один выход  $V_o$  и два входа; *инвертирующий вход*  $V_1$  отмечен знаком «-», а *неинвертирующий вход*  $V_2$  — знаком «+».



**Рис. 58.1**

Операции, выполняемые операционным усилителем, больше годятся для парно сбалансированного источника питания  $\pm V_S$  (то есть  $+V_S$ , 0,  $-V_S$ ); центральная точка источника питания, то есть 0 В, общая для входной и выходной цепей и принимается за уровень опорного напряжения. Соединения источника питания на принципиальной схеме обычно не показываются.

Операционный усилитель, как правило, является *дифференциальным усилителем* напряжения, то есть он усиливает разность между входными напряжениями  $V_1$  и  $V_2$ . Возможны три ситуации:

если  $V_2 > V_1$ , то  $V_o$  положительно;

если  $V_2 < V_1$ , то  $V_o$  отрицательно;

если  $V_1 = V_2$ , то  $V_o$  равно нулю.

В общем случае

$$V_o = A_o (V_2 - V_1)$$

или

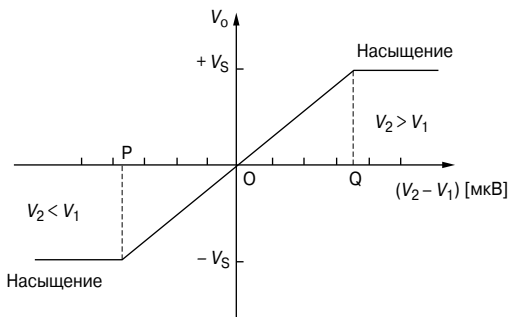
$$A_o = \frac{V_o}{V_2 - V_1}, \quad (1)$$

где  $A_o$  — коэффициент усиления по напряжению при разомкнутой цепи обратной связи.

**Например**, если коэффициент усиления по напряжению у дифференциального усилителя равен 120, а входные сигналы равны 2.45 и 2.35 В, то выходное напряжение  $V_o = A_o (V_2 - V_1) = 120(2.45 - 2.35) = (120)(0.1) = 12$  В.

### Передаточная характеристика

На **Рис. 58.2** показана типичная выходная характеристика, иллюстрирующая, как выходное напряжение  $V_o$  зависит от разности входных сигналов ( $V_2 - V_1$ ).



**Рис. 58.2**

На **Рис. 58.2** видно, что только в очень малом входном диапазоне РОQ напряжение на выходе прямо пропорционально напряжению на входе; именно в этом диапазоне характеристика операционного усилителя линейна, и на выходе усилителя наблюдаются минимальные искажения. Входные сигналы вне линейной зоны имеют насыщение, и поэтому выходной сигнал близок к своему максимальному значению, то есть  $+V_S$  или  $-V_S$ . Ограниченный линейный характер возникает из-за очень высокого коэффициента усиления по напряжению  $A_o$ , и, чем выше коэффициент, тем больше это ограничение.

### Отрицательная обратная связь

Операционные усилители почти всегда используют *отрицательную обратную связь* (ООС), получаемую за счёт возвращения некоторых, или всех, выходных сигналов обратно к инвертирующему (—) входу (как будет показано на **Рис. 58.5** в следующем разделе). Обратная связь создаёт выходное напряжение, противоположное тому, откуда оно было взято. Это уменьшает новый выходной сигнал усилителя, и полученный в результате коэффициент усиления по напряжению  $A$  становится меньше, чем коэффициент усиления по напряжению  $A_0$ . Однако в результате введения ООС ко входу можно приложить напряжение более широкого диапазона. Пока  $A_0 \gg A$ , отрицательная обратная связь даёт:

- постоянный и предсказуемый коэффициент усиления по напряжению  $A$ ;
- уменьшенное искажение выходного сигнала;
- лучший частотный отклик.

Преимущества использования отрицательной обратной связи перевешивают сопровождающие потери коэффициента усиления, который легко увеличить за счёт использования двух или более каскадов операционных усилителей.

### Ширина полосы частот

У операционного усилителя коэффициент усиления по напряжению при разомкнутой цепи обратной связи не является постоянной величиной на всех без исключения частотах; из-за ёмкостных эффектов на высоких частотах он падает. На **Рис. 58.3** показана зависимость коэффициента усиления от полосы частот для 741 операционного усилителя.

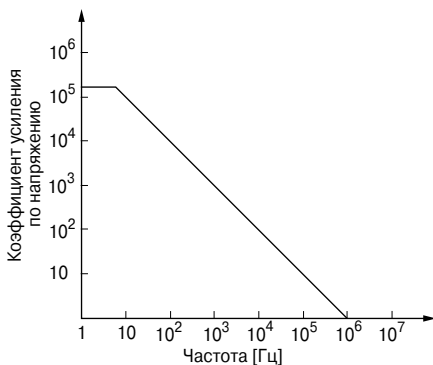


Рис. 58.3

На частотах ниже 10 Гц коэффициент неизменен, но на более высоких частотах он падает с постоянной скоростью, равной 6 дБ на октаву (эквивалентно скорости 20 дБ на декаду), до 0 дБ.

Произведение коэффициента усиления и ширины полосы для любого усилителя равно коэффициенту усиления линейного напряжения, умноженному на ширину полосы при этом коэффициенте. Значение частоты, при которой коэффициент усиления по напряжению падает до единицы, называется *переходной частотой*  $f_T$ .

$f_T$  = коэффициент усиления по напряжению с обратной связью  $\times$   
 $\times$  ширина полосы частот. (2)

На **Рис. 58.3**  $f_T = 10^6$  Гц, или 1 МГц; коэффициент 20 дБ (то есть  $20 \lg 10$ ) даёт ширину полосы 100 кГц, в то время как коэффициент 80 дБ (то есть  $20 \lg 10^4$ ) ограничивает ширину полосы до 100 Гц.

## Некоторые параметры ОУ

### *Входной ток*

Входной ток  $I_B$  — это среднее значение входных токов инвертирующего и неинвертирующего входов при выходном напряжении, равном 0 В. Типовая величина входного тока операционного усилителя 741 составляет около 80 нА (то есть,  $80 \times 10^{-9}$  А).

Входной ток смещения вызывает падение напряжения на импедансе эквивалентного источника.

### *Разность входных токов*

*Разность входных токов*  $I_{os}$  операционного усилителя — это разность между двумя входными токами при нуле вольт на выходе. В 741 операционном усилителе типовое значение  $I_{os}$  — 20 нА.

### *Входное напряжение смещения*

В идеальном операционном усилителе при нуле на обоих входах должен быть и нулевой выход. Из-за нарушения равновесия внутри усилителя это не всегда бывает именно так, и поэтому на выходе присутствует небольшое напряжение. Этот эффект можно исключить, если к усилителю приложить небольшое напряжение смещения  $V_{os}$ . В усилителе 741  $V_{os}$  типовое значение напряжения смещения равно 1 мВ.

### *Коэффициент ослабления синфазного сигнала*

Выходное напряжение операционного усилителя пропорционально разности напряжений, приложенных к двум его входам. В идеале, когда два напряжения равны, выходное напряже-

ние должно быть равно нулю. Сигнал, приложенный к обоим входам, называется *синфазным сигналом*, и, как правило, это нежелательное шумовое напряжение. Способность усилителя подавлять синфазные сигналы выражается через *коэффициент ослабления синфазного сигнала (КОСС)*, который определяется соотношением

$$\text{КОСС} = 20 \lg \frac{\text{дифф. коэфф. усиления по напряжению}}{\text{коэфф. усиления синфазного сигнала}}. \quad (3)$$

Для усилителя 741 типовое значение КОСС — 90 дБ.

Коэффициент усиления синфазного сигнала  $A_{\text{com}}$  определяется соотношением

$$A_{\text{com}} = \frac{V_o}{V_{\text{com}}} \quad (4)$$

где  $V_{\text{com}}$  — синфазный входной сигнал.

**Например**, если коэффициент усиления дифференциального усилителя по напряжению равен 120, а синфазный входной сигнал 3.0 В для обоих входов, и в результате сигнал на выходе равен 24 мВ, то коэффициент усиления синфазного сигнала равен

$$A_{\text{com}} = \frac{V_o}{V_{\text{com}}} = \frac{24 \times 10^{-3}}{3.0} = 8 \times 10^{-3} = \mathbf{0.008},$$

а коэффициент ослабления синфазного сигнала равен

$$\text{КОСС} = 20 \lg \left( \frac{120}{0.008} \right) = 20 \lg 15\,000 = \mathbf{83.52 \text{ дБ}}.$$

### ***Скорость нарастания выходного напряжения***

*Скорость нарастания выходного напряжения* — это максимальная скорость изменения выходного напряжения при воздействии входного ступенчатого сигнала.

На **Рис. 58.4** показан эффект нарастания, являющийся причиной более низкой скорости изменения выходного напряжения по сравнению с входным.

В результате низкой скорости выходной сигнал — это искажённый входной сигнал. Типовое значение максимальной скорости нарастания выходного напряжения — 0.5 В/мкс.

### **ОУ в качестве инвертирующего усилителя**

Основная электрическая схема *инвертирующего усилителя* с использованием операционного усилителя показана на **Рис. 58.5**, где входное напряжение  $V_i$  (входной сигнал может быть как переменным, так и постоянным), которое надо уси-



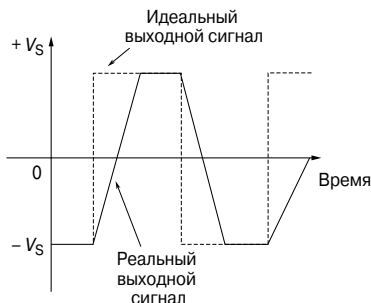


Рис. 58.4

лить, прикладывается через резистор  $R_i$  к инвертирующему (–) входу; следовательно, выходное напряжение  $V_o$  находится в противофазе с входным.

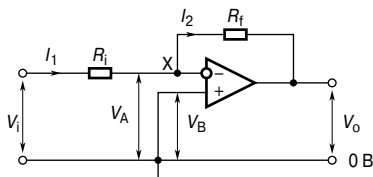


Рис. 58.5

На неинвертирующем (+) входе сохраняется 0 В. Отрицательная обратная связь обеспечивается резистором цепи обратной связи  $R_f$ , возвращающим обратно на инвертирующий вход определённую часть выходного напряжения (индекс *i* от англ. *inverting* — инвертирующий, индекс *f* — от *feedback* — обратная связь. — Прим. переводчика).

### Коэффициент усиления

В идеальном операционном усилителе сделано два допущения, а именно:

- каждый вход получает нулевой ток от источника сигнала, то есть их входной импеданс бесконечен;
- оба входа имеют одинаковый потенциал, если операционный усилитель находится не в режиме насыщения, то есть  $V_A = V_B$  на Рис. 58.5.

На Рис. 58.5  $V_B = 0$ , отсюда  $V_A = 0$ , а точку X называют точкой с заземлённым потенциалом. Следовательно,

$$I_1 = \frac{V_i - 0}{R_i} \text{ и } I_2 = \frac{0 - V_o}{R_f}.$$

Однако из первого допущения следует, что (1)  $I_1 = I_2$ .

Следовательно,  $\frac{V_i}{R_i} = -\frac{V_o}{R_f}$ ,

знак минус показывает, что  $V_o$  отрицательно, когда  $V_i$  положительно, и наоборот.

*Коэффициент усиления* при замкнутой цепи обратной связи равен

$$A = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_f}{R_i}. \quad (5)$$

Это соотношение показывает, что коэффициент усиления зависит только от двух резисторов, которые могут быть подобраны с требуемой точностью, а не от характеристик операционного усилителя, которые могут отличаться у разных образцов.

**Например**, если  $R_i = 10 \text{ кОм}$  и  $R_f = 100 \text{ кОм}$ , то коэффициент усиления при замкнутой цепи обратной связи

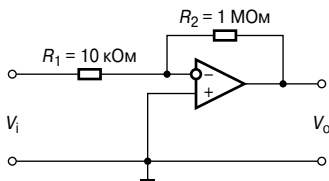
$$A = -\frac{R_f}{R_i} = \frac{-100 \times 10^3}{10 \times 10^3} = -10.$$

Следовательно, входное напряжение 10 мВ вызовет изменение напряжения на выходе, равное 1 В.

### *Входной импеданс*

Так как точка X — это точка с заземлённым потенциалом (то есть её потенциал равен 0 В), можно считать, что резистор  $R_i$  подсоединён между инвертирующим (–) выводом и 0 В. Следовательно, *входной импеданс* цепи — это резистор  $R_i$ , параллельно соединённый с гораздо большим входным импедансом операционного усилителя, то есть фактически он равен  $R_i$ . Поэтому управлять входным импедансом цепи можно просто заменой резистора  $R_i$ .

**Например**, операционный усилитель, показанный на **Рис. 58.6**, при 20°C имеет входной ток смещения 100 нА.



**Рис. 58.6**

Следовательно, в соответствии с уравнением (5) имеем коэффициент усиления по напряжению

$$A = \frac{-R_f}{R_i} = \frac{-1 \times 10^6}{10 \times 10^3} = -100.$$

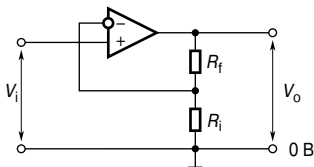
Входной ток смещения  $I_B$  вызывает падение напряжения на эквивалентном импедансе источника, видимое как вход усилителя. В этом случае  $R_i$  и  $R_f$  соединены параллельно. Отсюда напряжение смещения  $V_{os}$  на входе из-за входного тока смещения  $I_B$  100 нА равно

$$V_{os} = I_B \left( \frac{R_i R_f}{R_i + R_f} \right) = (100 \times 10^{-9}) \left( \frac{10 \times 10^3 \times 1 \times 10^6}{(10 \times 10^3) + (1 \times 10^6)} \right) = \\ = (10^{-7})(9.9 \times 10^3) = 9.9 \times 10^{-4} = \mathbf{0.99 \text{ мВ}}.$$

Влияние входного тока смещения можно свести к минимуму, если убедиться, что оба входа «видят» одно и то же сопротивление. Это значит, что между неинвертирующим (+) входом и землёй надо поместить сопротивление 9.9 кОм, как показано на **Рис. 58.6**.

## ОУ в качестве неинвертирующего усилителя

Основная электрическая схема *неинвертирующего усилителя* с использованием операционного усилителя показана на **Рис. 58.7**, где входное напряжение  $V_i$  (входной сигнал может быть как переменным, так и постоянным) приложено к неинвертирующему (+) входу операционного усилителя.



**Рис. 58.7**

В результате на выходе появляется выходное напряжение  $V_o$ , которое находится в одной фазе с входным напряжением. Отрицательная обратная связь возникает за счёт того, что часть напряжения  $V_o$  на резисторе  $R_i$  делителя напряжения, образованного резисторами  $R_f$  и  $R_i$ , поступает обратно на инвертирующий (–) выход.

## Коэффициент усиления

Допустим, что коэффициент обратной связи в случае, показанном на **Рис. 58.7**, равен  $\beta = \frac{R_i}{R_i + R_f}$ .

Можно показать, что для усилителя с коэффициентом усиления при разомкнутой цепи обратной связи  $A_o$  коэффициент уси-

ления по напряжению при замкнутой цепи обратной связи равен

$$A = \frac{A_o}{1 + \beta A_o}.$$

Для обычного операционного усилителя  $A_o = 10^5$ , следовательно,  $\beta A_o$  много больше 1, и приведённое выше выражение приближается к

$$A = \frac{A_o}{\beta A_o} = \frac{1}{\beta} \quad (6)$$

или к

$$A = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R_i + R_f}{R_i} = 1 + \frac{R_f}{R_i} \quad (7)$$

**Например,** если  $R_i = 10$  кОм, а  $R_f = 100$  кОм, тогда

$$A = 1 + \frac{100 \times 10^3}{10 \times 10^3} = 1 + 10 = 11.$$

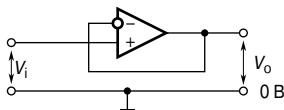
Снова, как и в случае с инвертирующим усилителем, коэффициент усиления зависит только от величины резисторов  $R_i$  и  $R_f$  и не зависит от коэффициента усиления при разомкнутой цепи обратной связи  $A_o$ .

### **Входной импеданс**

Так как на неинвертирующем (+) выходе нет точки с заземлённым потенциалом, входной импеданс намного больше (обычно 50 МОм) чем входной импеданс инвертирующего усилителя. Также на него не влияет изменение коэффициента усиления за счёт изменения  $R_f$  и/или  $R_i$ . Эта схема с неинвертирующим усилителем даёт хорошее совпадение, когда входной сигнал подаётся источником с высоким импедансом.

## **ОУ в качестве повторителя напряжения**

*Повторитель напряжения* — это особый случай неинвертирующего усилителя, в котором при непосредственном соединении выхода с инвертирующим (–) выходом устанавливается 100%-ная отрицательная обратная связь, как это показано на **Рис. 58.8**.



**Рис. 58.8**

Следовательно,  $R_f$  на **Рис. 58.7** равно нулю, а  $R_i$  «бесконечно» велико.

Из уравнения (6) следует, что  $A = \frac{1}{\beta}$  (когда  $A_0$  очень велико).

Так как на схеме **Рис. 58.8** все сигналы с выходов передаются обратно на вход, то  $\beta = 1$ , а  $A \approx 1$ .

Значит, коэффициент усиления по напряжению почти равен 1, а  $V_o = V_i$  с точностью до нескольких милливольт.

Электрическую схему, показанную на **Рис. 58.8**, называют повторителем напряжения, так как (как и в случае с её эквивалентом — эмиттерным повторителем на транзисторе)  $V_o$  повторяет  $V_i$ . У этой схемы очень высокий входной импеданс и низкий выходной импеданс. Основное её применение — это *буферный усилитель*, который обеспечивает усиление тока, чтобы источник с большим импедансом совпадал с нагрузкой с низким импедансом.

**Например**, эта схема применяется в качестве входного каскада аналогового вольтметра, где нужен самый высокий из возможных импедансов, чтобы не было искажений при измерениях цепи; выходное напряжение измеряется магнитоэлектрическим измерительным прибором с подвижной катушкой, у которого относительно большой импеданс.

## ОУ в качестве сумматора

Благодаря потенциальной заземлённой точке операционный усилитель можно использовать для сложения нескольких напряжений (входной сигнал может быть как переменным, так и постоянным), если его подсоединить как инвертирующий усилитель со многими входами. Такая возможность является следствием высокого коэффициента усиления по напряжению при разомкнутой цепи обратной связи  $A_0$ . Такие схемы, называемые *сумматорами*, можно применять в качестве «смесителей» в аудиосистемах, чтобы соединять выходные сигналы микрофонов, электрогитар, адаптеров и т. д. Их также используют для выполнения математических операций сложения при аналоговой обработке данных.

На **Рис. 58.9** показана электрическая схема сумматора с тремя входными напряжениями —  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$ , приложенными к инвертирующему входу (—) через входные резисторы —  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ .

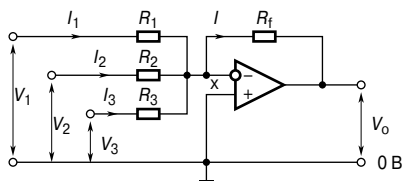


Рис. 58.9

Если предположить, что инвертирующий (–) вход операционного усилителя не пропускает никакого тока, а весь он проходит через  $R_f$ , тогда

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Так как X — это точка заземлённого потенциала (то есть её потенциал равен 0 В), то из этого следует, что

$$\frac{-V_o}{R_f} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}.$$

Отсюда

$$V_o = -\left(\frac{R_f}{R_1}V_1 + \frac{R_f}{R_2}V_2 + \frac{R_f}{R_3}V_3\right) = -R_f\left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}\right). \quad (8)$$

Три входных напряжения складываются и усиливаются, если  $R_f$  больше, чем сопротивление каждого из входных резисторов; в таких случаях говорят, что возникает «взвешенное» суммирование. Иным способом входные напряжения складываются и ослабляются, если  $R_f$  меньше, чем каждое входное сопротивление.

**Например,** если

$$\frac{R_f}{R_1} = 4, \quad \frac{R_f}{R_2} = 3, \quad \frac{R_f}{R_3} = 1, \text{ а}$$

$$V_1 = V_2 = V_3 = +1 \text{ В, то}$$

$$V_o = -\left(\frac{R_f}{R_1}V_1 + \frac{R_f}{R_2}V_2 + \frac{R_f}{R_3}V_3\right) = -(4 + 3 + 1) = -8 \text{ В.}$$

Если  $R_1 = R_2 = R_3 = R_i$ , входное напряжение равнозначно усиливается или ослабляется, и

$$V_o = \frac{R_f}{R_i}(V_1 + V_2 + V_3).$$

А если  $R_f = R_i$ , то

$$V_o = -(V_1 + V_2 + V_3).$$

Точка заземления называется также *точкой суммирования* усилителя. Она изолирует входы друг от друга, и каждый вход ведёт себя так, как будто остальных не существует и как будто больше никакой вход не питает другие входы, хотя все резисторы соединены на инвертирующем (–) входе.

**Например,** для суммирующего операционного усилителя, показанного на **Рис. 58.10**, выходное напряжение определяется выражением

$$V_o = -R_f \left( \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right) =$$

$$= -(50 \times 10^3) \left( \frac{0.5}{10 \times 10^3} + \frac{0.8}{20 \times 10^3} + \frac{1.2}{30 \times 10^3} \right) = -6.5 \text{ В.}$$

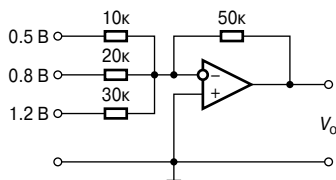


Рис. 58.10

### ОУ в качестве компаратора напряжений

*Компаратором* (от лат. comparare — сравнивание) называют устройство сравнения двух сигналов для определения момента их равенства. Выходное напряжение  $V_o$  при каждом равенстве нулю разности двух сигналов изменяется от нижнего до верхнего (или наоборот) предельного значения.

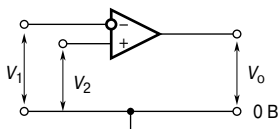


Рис. 58.11

Если оба входа операционного усилителя, показанного на **Рис. 58.11**, используются одновременно, тогда выходное напряжение, определяемое из уравнения (1), равно

$$V_o = A_o(V_2 - V_1).$$

- Когда  $V_2 > V_1$ ,  $V_o$  положительно, а его максимальное значение является положительным напряжением питания  $+V_S$ , которое оно принимает, тогда

$$(V_2 - V_1) \geq \frac{V_S}{A_o}.$$

В этом случае операционный усилитель входит в насыщение.

Например, если  $V_S = +9\text{ В}$ , а  $A_o = 10^5$ , то насыщение наступает, когда  $(V_2 - V_1) \geq \frac{9}{10^5}$ , то есть когда  $V_2$  превышает  $V_1$  на 90 мкВ, а  $V_o = +V_S = +9\text{ В}$ .

- Когда  $V_1 > V_2$ , то  $V_o$  отрицательно, и наступает насыщение.

Если  $V_1$  превышает  $V_2$  на  $\frac{V_S}{A_o}$ , то есть, примерно 90 мкВ в приведённом выше примере, то  $V_o \approx -V_S = -9\text{ В}$ .

Следовательно, небольшое изменение в  $(V_2 - V_1)$  «вынуждает»  $V_o$  переключаться между примерно  $+V_S$  и примерно  $-V_S$  и даёт возможность операционному усилителю показывать, когда  $V_2$  больше или меньше, чем  $V_1$ , то есть работать как *дифференциальный усилитель* и сравнивать два напряжения.

Такая схема применяется в электронном цифровом вольтметре.

## Светочувствительная схема сигнализации

На Рис. 58.12 показана типичная *светочувствительная схема сигнализации*.

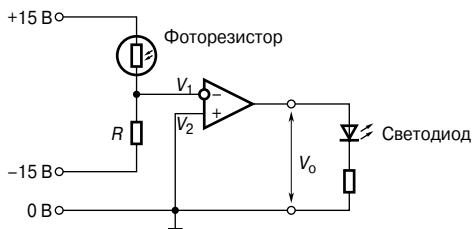


Рис. 58.12

Резистор  $R$  и фоторезистор (ФР) образуют делитель напряжения, соединённый с источником питания  $+15/0/-15\text{ В}$ . Усилитель сравнивает напряжение  $V_1$  на средней точке делителя, то есть на инвертирующем ( $-$ ) входе, с напряжением на неинвертирующем ( $+$ ) входе, то есть с  $V_2$ , который равен  $0\text{ В}$ . В темноте сопротивление фоторезистора намного больше, чем сопротивление  $R$ , поэтому основная часть от  $30\text{ В}$  на делителе падает на ФР, что «вынуждает»  $V_1$  падать ниже  $0\text{ В}$ . Теперь  $V_2 > V_1$ , и выходное напряжение  $V_o$  переключается от примерно  $-15\text{ В}$  до примерно  $+15\text{ В}$ , и «загорается» светоизлучающий диод.

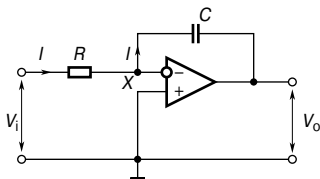


## ОУ в качестве интегратора

На **Рис. 58.13** показан *интегратор* (интегрирующая схема), выполненный на операционном усилителе.

Это устройство названо интегратором потому, что его выходное напряжение  $V_o$  пропорционально интегралу по времени от входного напряжения  $V_i$ .

Его электрическая схема такая же, как схема инвертирующего усилителя, показанная на **Рис. 58.5**, только обратная связь здесь реализуется через конденсатор  $C$ , а не через резистор.



**Рис. 58.13**

Выходное напряжение в такой схеме

$$V_o = -\frac{1}{CR} \int V_i dt \quad (9)$$

В схеме, показанной на **Рис. 58.13**, используется инвертирующий (–) вход,  $V_o$  отрицательно, если  $V_i$  положительно, и наоборот. Именно поэтому в уравнении (9) появляется знак «минус».

Так как X — точка заземления, то есть при 0 В напряжение на  $R$  равно  $V_i$ , а напряжение на  $C$  — соответственно  $V_o$ .

Снова предполагаем, что ни один из входных токов  $I$  не попадает в инвертирующий (–) вход операционного усилителя. Тогда весь ток  $I$  потечёт через конденсатор  $C$  и сделает значение выше.

Если  $V_i$  постоянно, ток  $I$  также будет постоянным, и его можно определить по формуле

$$I = \frac{V_i}{R}.$$

Следовательно, конденсатор  $C$  будет заряжаться с постоянной скоростью, и потенциал стороны выхода  $C$  ( $= V_o$ , так как сторона входа равна нулю) заряжается так, что цепь обратной связи поглощает  $I$ . Если  $Q$  — это заряд на конденсаторе  $C$  в момент времени  $t$ , а разность потенциалов на нём (то есть выходное напряжение) меняется в этот период от 0 до  $V_o$ , то

$$Q = -V_o C = It \text{ (см. гл. 44),}$$

то есть

$$-V_o C = \frac{V_i}{R}, \text{ откуда}$$

$$V_o = \frac{1}{CR} V_i t.$$

Этот результат получается также из формулы

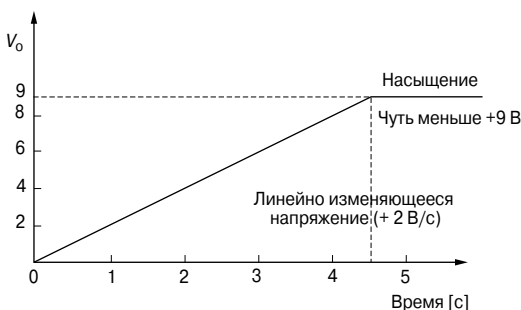
$$V_o = -\frac{1}{CR} \int V_i dt,$$

если  $V_i$  равно постоянной величине.

**Например,** если выходное напряжение  $V_i = -2$  В а,  $CR = 1$  с, тогда

$$V_o = -(-2)t = 2t.$$

График зависимости  $V_o$  от  $t$  — линейная функция, как показано на **Рис. 58.14** ( $V_o = 2t$  — это график прямой линии  $y = mx + c$ , где  $y = V_o$ ;  $x = t$ , градиент;  $m = 2$  и отрезок на вертикальной оси  $c = 0$ ).



**Рис. 58.14**

$V_o$  растёт постепенно на +2 В в секунду, как видно из **Рис. 58.14**, и, если напряжение источника питания равно, допустим,  $\pm 9$  В, тогда  $V_o$  достигает +9 В спустя 4.5 с, когда операционный усилитель входит в режим насыщения.

**Другой пример.** Если установившееся напряжение  $-0.75$  В подаётся на интегрирующую схему, где  $R = 200$  кОм, а  $C = 2.5$  мкФ и предполагая, что изначально заряд конденсатора равен нулю, то значение выходного напряжения  $V_o$  спустя 100 мс после приложения входного сигнала равно

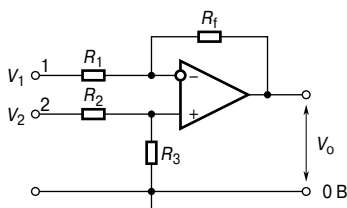
$$\begin{aligned} V_o &= -\frac{1}{CR} \int V_i dt = -\frac{1}{(2.5 \times 10^{-6})(200 \times 10^3)} \int (-0.75) dt = \\ &= -\frac{1}{0.5} \int (-0.75) dt = -2[-0.75t] = +1.5t. \end{aligned}$$

Когда время  $t = 100$  мс, выходное напряжение

$$V_o = (1.5)(100 \times 10^{-3}) = \mathbf{0.15 \text{ В.}}$$

## ОУ в качестве дифференциального усилителя

На **Рис. 58.15** показана электрическая схема, выполняющая функцию дифференцирования, где напряжения  $V_1$  и  $V_2$  приложены к двум его входным выводам, а усиливается разность между этими напряжениями.



**Рис. 58.15**

Пусть  $V_1$  приложено к выводу 1, а к выводу 2 приложено 0 В. Разность потенциалов на инвертирующем (–) и неинвертирующем (+) входе операционного усилителя практически равна нулю, и поэтому инвертирующий выход должен быть с нулевым потенциалом. В этом случае  $I_1 = \frac{V_1}{R_1}$ .

Так как входное сопротивление операционного усилителя высоко, этот ток течёт через резистор цепи обратной связи  $R_f$ . Напряжение приложено к  $R_f$ , поэтому выходное напряжение  $V_o = \frac{V_1}{R_1} R_f$ , отсюда коэффициент усиления по напряжению при замкнутой цепи обратной связи  $A$  равняется

$$A = \frac{V_o}{V_1} = -\frac{R_f}{R_1} \quad (10)$$

По схожим причинам, если  $V_2$  приложено к выводу 2, а к выводу 1 приложено 0 В, то возникающее на неинвертируемом выходе напряжение равно  $\frac{R_3}{R_2 + R_3} V_2$  вольт.

Это напряжение также появится на инвертирующем (–) входе, и, следовательно, напряжение на  $R_1$  равно  $-\left(\frac{R_3}{R_2 + R_3}\right) V_2$  вольт.

Теперь выходное напряжение равно

$$V_o = \frac{R_3}{R_2 + R_3} V_2 + \left[ -\left(\frac{R_3}{R_2 + R_3}\right) V_2 \right] \left( -\frac{R_f}{R_1} \right),$$

и коэффициент усиления по напряжению

$$A = \frac{V_o}{V_2} = \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) + \left[ - \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) \right] \left( - \frac{R_f}{R_1} \right),$$

то есть

$$A = \frac{V_o}{V_2} = \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) \left( 1 + \frac{R_f}{R_1} \right) \quad (11)$$

Наконец, если напряжения, приложенные к выходам 1 и 2, равны  $V_1$  и  $V_2$  соответственно, тогда разность двух напряжений будет усилена.

Если  $V_1 > V_2$ , тогда

$$V_o = (V_1 - V_2) \left( - \frac{R_f}{R_1} \right). \quad (12)$$

Если  $V_2 > V_1$ , тогда

$$V_o = (V_2 - V_1) \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) \left( 1 + \frac{R_f}{R_1} \right). \quad (13)$$

**Например**, если в дифференциальном усилителе, показанном на **Рис. 58.15**,  $R_1 = 10 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 10 \text{ кОм}$ ,  $R_3 = 100 \text{ кОм}$  и  $R_f = 100 \text{ кОм}$ , то

при условии, что  $V_1 = 5 \text{ мВ}$  и  $V_2 = 0$ , выходное напряжение  $V_o$  равно

$$V_o = - \frac{R_f}{R_1} V_1 = - \left( \frac{100 \times 10^3}{10 \times 10^3} \right) (5) = -50 \text{ мВ},$$

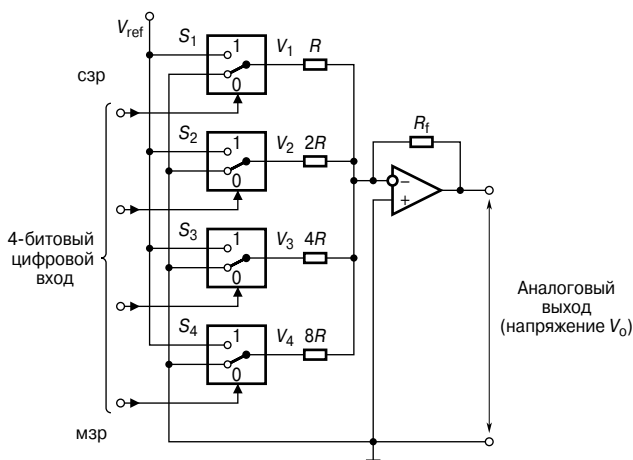
а если  $V_1 = 25 \text{ мВ}$  и  $V_2 = 50 \text{ мВ}$ , тогда

$$\begin{aligned} V_o &= (V_2 - V_1) \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) \left( 1 + \frac{R_f}{R_1} \right) = \\ &= (50 - 25) \left( \frac{100}{100 + 10} \right) \left( 1 + \frac{100}{10} \right) (5) = +250 \text{ мВ}. \end{aligned}$$

## Цифро-аналоговое преобразование

Существует несколько ситуаций, когда цифровые сигналы надо преобразовать в аналоговые. Например, зачастую на экране цифрового компьютера необходимо показать графическое изображение; для этого нужно, чтобы *цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП)* изменил двухуровневое цифровое выходное напряжение компьютера на непрерывно меняющееся аналоговое напряжение на входе катодной лучевой трубки, чтобы она могла отклонить пучок электронов и на экране появилось графическое изображение.

На **Рис. 58.16** показан двоичный ЦАП со взвешенным сопротивлением, рассчитанный для четырёхбитового входного сигнала. Величины резисторов  $R$ ,  $2R$ ,  $4R$ ,  $8R$  увеличиваются согласно двоичной системе счисления — отсюда и название преобразователя.



**Рис. 58.16**

В схеме в качестве суммирующего усилителя с резистором обратной цепи  $R_f$  используется операционный усилитель. Электронные переключатели с цифровым управлением на **Рис. 58.16** показаны как  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ . Каждый переключатель, последовательно подключённый к резистору, соединяет этот резистор с фиксированным опорным напряжением  $V_{ref}$  в том случае, если входной контролируемый бит равен 1, и с землёй (0 В), если бит равен 0. Следовательно, входные напряжения от  $V_1$  до  $V_4$ , приложенные к операционному усилителю четырёхбитовым входом через резисторы, принимают два значения: либо  $V_{ref}$ , либо 0 В.

Из уравнения (8) получаем, что напряжение аналогового выходного сигнала  $V_o$  равно

$$V_o = \left( \frac{R_f}{R} V_1 + \frac{R_f}{2R} V_2 + \frac{R_f}{4R} V_3 + \frac{R_f}{8R} V_4 \right).$$

Допустим,  $R_f = R = 1$  кОм, тогда

$$V_o = - \left( V_1 + \frac{1}{2} V_2 + \frac{1}{4} V_3 + \frac{1}{8} V_4 \right).$$

Если на четырёхбитовом входе 0001 (то есть 1 в десятиричной системе счисления), то  $S_4$  соединяет  $8R$  с  $V_{ref}$ , то есть  $V_4 = V_{ref}$ , а

$S_1, S_2$  и  $S_3$  соединяют  $R, 2R$  и  $4R$  с  $0\text{ В}$ , отчего  $V_1 = V_2 = V_3 = 0$ . И снова, если  $V_{\text{ref}} = -8\text{ В}$ , то выходное напряжение

$$V_o = -\left(0 + 0 + 0 + \frac{1}{8}(-8)\right) = +1\text{ В}.$$

Если на четырёхбитовом входе 0101 (то есть 5 в десятиричной системе), то выходное напряжение  $S_2$  и  $S_4$  соединяют  $2R$  и  $4R$  с  $V_{\text{ref}}$ , то есть  $V_2 = V_4 = V_{\text{ref}}$ , и  $S_1$  и  $S_3$  соединяют  $R$  и  $3R$  с  $0\text{ В}$ , отчего  $V_1 = V_3 = 0$ . Вновь если  $V_{\text{ref}} = -8\text{ В}$ , то выходное напряжение

$$V_o = -\left(0 + \frac{1}{2}(-8) + 0 + \frac{1}{8}(-8)\right) = +5\text{ В}.$$

Если на входе 0111 (то есть 7 в десятиричной системе), то выходное напряжение  $7\text{ В}$ , и т. д.

Из этих примеров видно, что напряжение на выходе аналогового сигнала  $V_o$  прямо пропорционально сигналу цифрового входа.

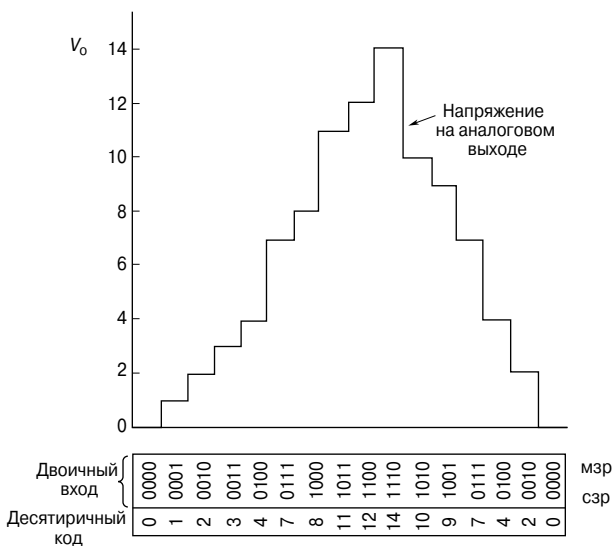


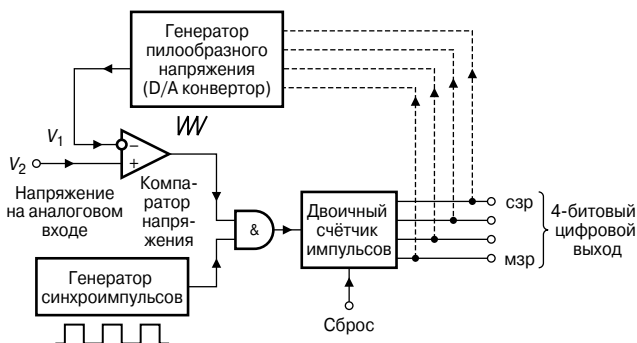
Рис. 58.17

$V_o$  имеет «ступенчатую» форму кривой, которая зависит от цифрового входа. На Рис. 58.17 показана типичная форма полученной кривой. Аббревиатуры мзр и сзр означают соответственно «младший знак разряда» и «старший знак разряда».

## Аналогово-цифровое преобразование

К цифровому вольтметру входной сигнал поступает в аналоговой форме, а показания отражены на экране в цифровом виде. Это пример прибора, в котором применяется *аналогово-цифровой преобразователь (АЦП)*.

На **Рис. 58.18** показана блок-схема четырёхбитового АЦП счётчика. Как и на **Рис. 58.16** и **Рис. 58.17**, аббревиатуры мзр и сзр означают соответственно «младший знак разряда» и «старший знак разряда».



**Рис. 58.18**

Здесь снова применяется операционный усилитель, но теперь в качестве компаратора напряжений. Напряжение на аналоговом входе  $V_2$ , показанное на **Рис. 58.19а** как стационарное напряжение постоянного тока, прикладывается к неинвертирующему (+) входу, в то время как пилообразное напряжение  $V_1$  подаётся на инвертирующий (–) вход.

Выходной сигнал компаратора, равный 1 (то есть уровень сигнала «ВЫСОКИЙ»), подаётся на один вход логического элемента «И» до тех пор, пока  $V_1$  равно или превышает  $V_2$ , а потом он переходит в 0 (то есть уровень сигнала «НИЗКИЙ»), как показано на **Рис. 58.19б**.

На другой вход логического элемента «И» подаётся постоянная последовательность импульсов от генератора импульсов, как это показано на **Рис. 58.19в**. Когда оба сигнала на входе логического элемента «ВЫСОКИЕ», он «открыт» и даёт «ВЫСОКИЙ» выходной сигнал, то есть импульс, как это показано на **Рис. 58.19г**. Время, за которое  $V_1$  достигает значения  $V_2$ , пропорционально аналоговому напряжению, если пилообразная наклонная линейна. Выходные импульсы логического элемента фиксируются двоичным счётчиком импульсов, и, как видно на **Рис. 58.19д**, они являются цифровым эквивалентом напряжения на аналоговом входе  $V_2$ . На практике генератор пилообраз-

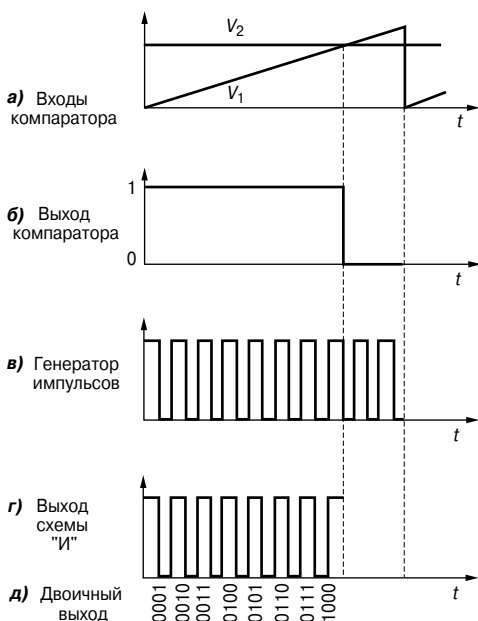


Рис. 58.19

ного напряжения — это ЦАП, у которого на входе цифровой сигнал с двоичного счётчика импульсов, что показано пунктирной линией на **Рис. 53.18**. По мере прохождения импульсов через счётчик на выходе ЦАП будет выстраиваться ступенчатая кривая с равными промежутками между ступеньками (то есть пилообразный сигнал), что характеризует первые несколько ступенек на **Рис. 58.17**.

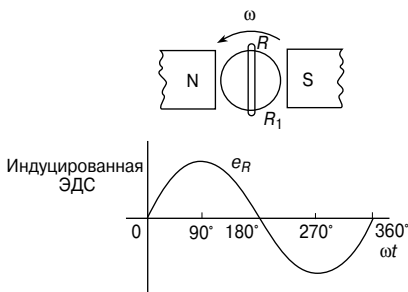


## 59. ТРЁХФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

### Введение

Генерация, передача и распределение электричества через Национальную Электросеть Великобритании реализуется с помощью трёхфазного переменного тока.

На **Рис. 59.1** показано напряжение, индуцированное единичной катушкой при её вращении в однородном магнитном поле. Такое напряжение называется *однофазным*.



**Рис. 59.1**

Большинство потребителей электричества получают его от однофазного источника питания переменного тока. Для этого используют два провода, один из которых называют проводом под напряжением (как правило, красного цвета), а другой — нулевым проводом (как правило, чёрного цвета). Нулевой провод обычно соединён с землёй через защитное устройство, а провод заземления делают зелёного цвета. Стандартное напряжение для однофазного источника питания переменного тока равно 240 В. Большинство однофазных источников получают путём подсоединения соответствующим образом к трёхфазному источнику (**Рис. 59.6**).

### Трёхфазные источники тока

Токи в трёхфазной системе генерируются в случае, когда три катушки индуктивности расположены под углом  $120^\circ$  друг к другу, и вся эта система вращается в однородном магнитном поле, как показано на **Рис. 59.2а**. В результате получают три независимых источника питания с одинаковыми напряжениями, которые перемещаются по отношению друг к другу под углом  $120^\circ$ . На **Рис. 59.2б** показаны индуцированные этим источником

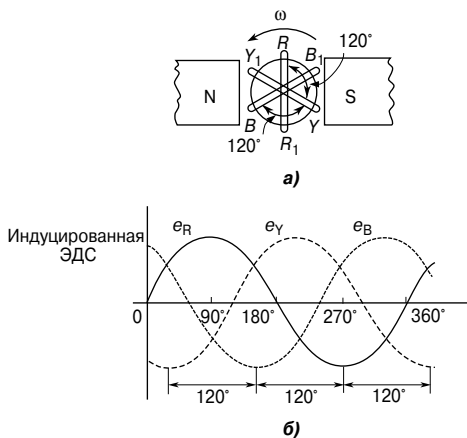


Рис. 59.2

ЭДС, которые также смещены по фазе на  $120^\circ$  по отношению друг к другу. Каждое из этих напряжений называют *фазным*.

- По общей договорённости каждому из трёх фазных напряжений присвоен цвет: R — красный (*Red*), Y — жёлтый (*Yellow*), B — синий (*Blue*), как показано на **Рис. 59.2**.
- *Фазовая последовательность* получается благодаря последовательности, в которой проводники, вращаясь в магнитном поле, минуют некую условную точку, изначально занимаемую красным проводником. Принятый в Британии стандарт фазовой последовательности: R, Y, B.

Трёхфазное питание реализуется тремя проводниками, называемыми «*линиями*», окрашенными в красный, жёлтый и синий цвета.

Токи в этих проводниках называют *линейными* ( $I_L$ ), а разность потенциалов между ними — *напряжением в сети* ( $V_L$ ). Четвёртый проводник, называемый *нейтралью* (чёрного цвета, подсоединённый к земле через защитное устройство), обычно используется при реализации трёхфазного питания.

Если трёхфазные обмотки, показанные на **Рис. 59.2**, независимы друг от друга, то для подсоединения источника питания (такого, как генератор) к нагрузке (такой, как мотор) требуется шесть проводов. Для уменьшения числа проводов три фазы обычно объединяют. Как правило, это делают одним из двух способов: *соединением звездой* и *соединением треугольником* (или *многоугольником*). Источники трёхфазного тока, то есть генераторы переменного тока, как правило, соединены звездой, хотя обмотки трёхфазных трансформаторов, моторов и других нагрузок могут быть соединены либо звездой, либо треугольником.

## Соединение звездой

- На **Рис. 59.3** показана нагрузка, соединенная звездой, где каждый из проводников генератора соединён с нагрузкой, а выходы нагрузок объединены вместе в точке N, и образуют то, что называют *нейтральной точкой* или *точкой звезды*.

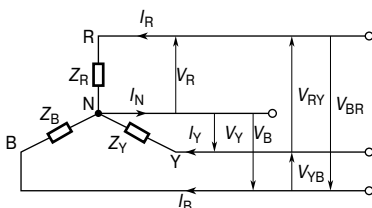


Рис. 59.3

- Напряжения  $V_R$ ,  $V_Y$  и  $V_B$  называют *фазовыми напряжениями*. Фазовые напряжения обычно обозначаются как  $V_p$  (индекс p от англ. phase — фаза. — Прим. переводчика).
- Напряжения  $V_{RY}$ ,  $V_{YB}$  и  $V_{RB}$  называют *линейными напряжениями*.
- Из **Рис. 59.3** следует, что фазовые токи (то есть  $I_p$ ) равны соответствующим им линейным токам  $I_R$ ,  $I_Y$  и  $I_B$ , то есть для соединения звездой

$$I_L = I_p$$

- В случаях, когда выполняются соотношения

$$\begin{aligned} I_R &= I_Y = I_B; \\ V_R &= V_Y = V_B; \\ V_{RY} &= V_{YB} = V_{RB}; \\ Z_R &= Z_Y = Z_B, \end{aligned}$$

систему называют *симметричной*, и тогда ток в нейтральном проводнике  $I_N = 0$ .

- Когда система, соединённая звездой, симметрична, нейтральный проводник необязателен, и часто им пренебрегают.

Линейное напряжение  $V_{RY}$  показанное на **Рис. 59.4a**, равно  $V_{RY} = V_R - V_Y$  ( $V_Y$  — отрицательно, так как оно имеет противоположное  $V_{RY}$  направлению). На векторной диаграмме, показанной на **Рис. 59.4б**, вектор  $V_Y$  обращён (показан пунктирной линией), а вектор  $V_{RY}$  получен векторным сложением, то есть  $V_{RY} = V_R + (-V_Y)$ . По формулам тригонометрии или с помощью измерений  $V_{RY} = \sqrt{3} V_R$ , то есть для симметрично-

го соединения звездой, линейное напряжение равно фазовому, умноженному на  $\sqrt{3}$ , то есть

$$V_L = \sqrt{3} V_p$$

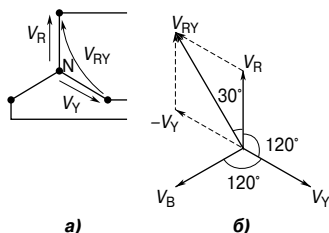


Рис. 59.4

На **Рис. 59.5** показана векторная диаграмма симметричной, трёхпроводной трёхфазной нагрузки с системой соединения звездой, имеющей фазовое напряжение 240 В, линейный ток 5 А и коэффициент мощности с отстающим током, равный 0.966.

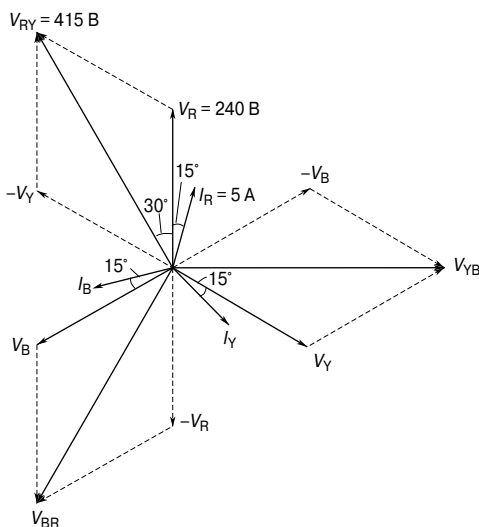


Рис. 59.5

Построим такую векторную диаграмму.

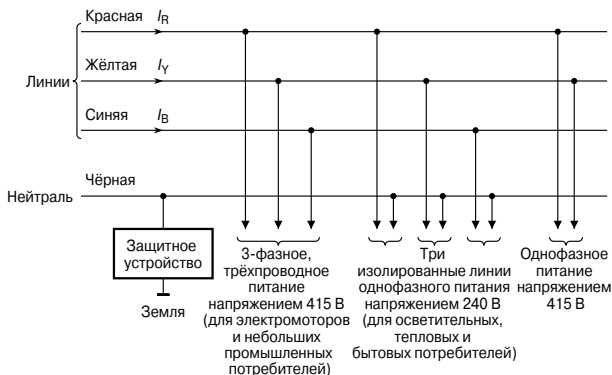
1. Из одной точки построим векторы  $V_R = V_Y = V_B = 240$  В, разнесённые на  $120^\circ$ . (Заметим, что вектор  $V_R$  идёт вертикально

вверх, хотя это не имеет особого значения, и он может быть направлен в любом направлении.)

2. Коэффициент мощности  $\cos\varphi = 0.966$  (отставание). Следовательно, фазовый угол нагрузки равен  $\arccos 0.966$ , то есть  $15^\circ$  (отставание). Отсюда  $I_R = I_Y = I_B = 5$  А с соответствующим отставанием от  $V_R$ ,  $V_Y$  и  $V_B$  на  $15^\circ$ .

3.  $V_{RY} = V_R - V_Y$ . Так как это разность векторов, то обращённый вектор  $V_Y$  векторно складывается с вектором  $V_R$ . С помощью измерений получаем, что напряжение  $V_{RY}$  равно 415 В и опережает  $V_R$  на  $30^\circ$ . (Тот же результат получим, используя формулы тригонометрии:  $\sqrt{3} \times 240 = 415$ .) Точно так же  $V_{YB} = V_Y - V_B$  и  $V_{BR} = V_B - V_R$ .

- Соединённые звездой три фазы источника питания вместе с нейтральным проводником позволяют использовать два напряжения — фазовое и линейное. Система с четырьмя проводниками используется в случаях, когда нагрузка несимметрична. В электросетях Великобритании стандартное низковольтное напряжение — трёхфазное, четырёхпроводное, переменное (415/240 В, 50 Гц). На **Рис. 59.6** показана схема соединений с нагрузками различных типов.



**Рис. 59.6**

## Соединение треугольником

На **Рис. 59.7** показано соединение нагрузки треугольником, где конец одной нагрузки соединён с началом следующей.

Из **Рис. 59.7** следует, что линейные напряжения  $V_{RY}$ ,  $V_{YB}$  и  $V_{BR}$  являются соответствующими фазовыми напряжениями, то есть при соединении треугольником

$$I_L = I_p$$

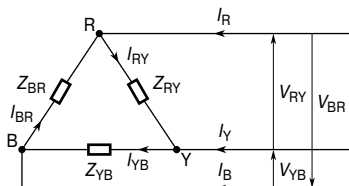


Рис. 59.7

Применяя закон Кирхгофа к электрической схеме, изображённой на **Рис. 59.7**, получаем

$$I_R = I_{RY} - I_{BR} = I_{RY} + (-I_{BR}).$$

Из векторной диаграммы на **Рис. 59.8** по формулам тригонометрии или с помощью измерений получаем  $I_R = \sqrt{3} I_{RY}$ , то есть для соединения треугольником линейный ток равен фазовому току, умноженному на  $\sqrt{3}$ , или

$$I_L = \sqrt{3} I_p$$

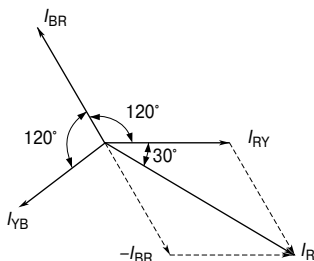


Рис. 59.8

**Например**, активное сопротивление каждой из трёх катушек индуктивности равно 3 Ом, а индуктивное — 4 Ом. Катушки соединены (а) звездой и (б) треугольником с трёхфазным источником 415 В. Определим фазовое напряжение и фазовый и линейный токи для обоих случаев.

Для соединения звездой

$$I_L = I_p \quad \text{и} \quad V_L = \sqrt{3} V_p.$$

Поскольку напряжение трёхфазного источника равно 415 В, то и линейное напряжение  $V_L$  равно **415 В**.

Тогда

$$\text{фазовое напряжение } V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{415}{\sqrt{3}} = 240 \text{ В};$$

$$\text{импеданс нагрузки } Z_p = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ Ом};$$

$$\text{фазовый ток } I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{240}{5} = 48 \text{ А};$$

$$\text{линейный ток } I_L = I_p = 48 \text{ А}.$$

Для соединения треугольником

$$V_L = V_p \text{ и } I_L = \sqrt{3} I_p.$$

Как было сказано выше, линейное напряжение  $V_L = 415 \text{ В}$ .

Тогда

$$\text{фазовое напряжение } V_p = V_L = 415 \text{ В};$$

$$\text{фазовый ток } I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{415}{5} = 83 \text{ А};$$

$$\text{линейный ток } I_L = \sqrt{3} I_p = \sqrt{3}(83) = 144 \text{ А}.$$

Следовательно,

когда нагрузка подсоединена треугольником, то от источника питания получают линейный ток, в 3 раза превышающий линейный ток, получаемый при соединении звездой.

## Мощность в трёхфазных системах

Для любого симметричного соединения, будь то звездой или треугольником, полная мощность равна

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \text{ Вт}$$

или

$$P = 3 I_p^2 R_p \text{ Вт}$$

Кажущаяся мощность равна

$$S = \sqrt{3} V_L I_L \text{ В·А}$$

**Например,** три одинаковые катушки индуктивности, каждая с сопротивлением 10 Ом и индуктивностью 42 мГн, подсоединены (а) звездой и (б) треугольником к трёхфазному источнику 415 В, 50 Гц. Определим полную мощность для обоих случаев.

### Соединение звездой

Предварительно найдём:

индуктивное сопротивление  $X_L = 2\pi fL = 2\pi(50)(42 \times 10^{-3}) = 13.19 \text{ Ом};$

импеданс нагрузки  $Z_p = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{10^2 + 13.19^2} = 16.55 \text{ Ом};$   
линейное напряжение  $V_L = 415 \text{ В};$

фазовое напряжение  $V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{415}{\sqrt{3}} = 240 \text{ В};$

фазовый ток  $I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{240}{16.55} = 14.50 \text{ А};$

линейный ток  $I_L = I_p = 14.50 \text{ А};$

коэффициент мощности  $\cos \varphi = \frac{R_p}{Z_p} = \frac{10}{16.55} = 0.6042 \text{ (отставание).}$

Теперь можно найти полную мощность:

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi = \sqrt{3}(415)(14.50)(0.6042) = \mathbf{6.3 \text{ кВт.}}$$

(Этот же результат можно получить иначе:

$$P = 3 I_p^2 R_p = 3(14.50)^2(10) = \mathbf{6.3 \text{ кВт.}})$$

### Соединение треугольником

Выше было найдено, что

$$V_L = V_p = 415 \text{ В},$$

$$Z_p = 16.55 \text{ Ом},$$

$\cos \varphi = 0.6042$  (отставание). Тогда

$$\text{фазовый ток } I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{415}{16.55} = 25.08 \text{ А};$$

$$\text{линейный ток } I_L = \sqrt{3} I_p = \sqrt{3}(25.08) = 43.44 \text{ А}.$$

Теперь можно найти полную мощность:

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi = \sqrt{3}(415)(43.44)(0.6042) = \mathbf{18.87 \text{ кВт.}}$$

(Этот же результат можно получить иначе:

$$P = 3 I_p^2 R_p = 3(25.08)^2(10) = \mathbf{18.87 \text{ кВт.}})$$

Следовательно,

|| *нагрузки, соединённые треугольником, получают мощность, в 3 раза большую, чем в случае, когда они соединены звездой, и соответственно в первом случае линейный ток в 3 раза больше.*



## Измерение мощности в трёхфазных системах

Мощность в трёхфазных нагрузках может измеряться несколькими способами.

### Метод с одним ваттметром для симметричной нагрузки

На **Рис. 59.9** показаны подключения ваттметра к симметричной системе нагрузок, соединённых звездой и треугольником.

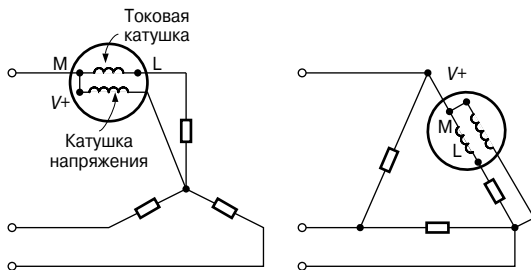


Рис. 59.9

Полная мощность =  $3 \times$  показание ваттметра

### Метод с двумя ваттметрами для симметричных и несимметричных нагрузок

Схема соединения для нагрузок, подсоединённых звездой, показана на **Рис. 59.10**. Похожие соединения делаются и для нагрузок, подсоединённых треугольником.

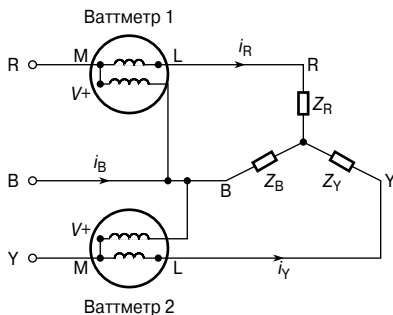


Рис. 59.10

Полная мощность = Сумма показаний ваттметра =  $P_1 + P_2$

Коэффициент мощности может быть определен из формулы

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3 \left( \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right)}$$

Возможны случаи, когда один ваттметр подсоединяют «в обратную сторону», чтобы снять показания, — всё зависит от коэффициента мощности нагрузки.

**Например**, два ваттметра показывают 10 и 3 кВт соответственно.

При этом на счётчике, дающем показания 3 кВт, работает реверсивный переключатель.

Следовательно, 3 кВт считаются как  $-3$  кВт.

Общая входная мощность  $P = P_1 + P_2 = 10 + (-3) = 7$  кВт.

Найдём  $\operatorname{tg} \varphi$ .

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \left( \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right) = \sqrt{3} \left( \frac{10 - (-3)}{10 + (-3)} \right) = \sqrt{3} \left( \frac{13}{7} \right) = 3.2167.$$

Откуда

$$\text{угол } \varphi = \arctg 3.2167 = 72.73^\circ.$$

Следовательно,

$$\text{коэффициент мощности} = \cos \varphi = \cos 72.73^\circ = \mathbf{0.297}.$$

**Метод с тремя ваттметрами**  
**для трёхфазной четырёхпроводной системы**  
**для симметричной и несимметричной нагрузки**

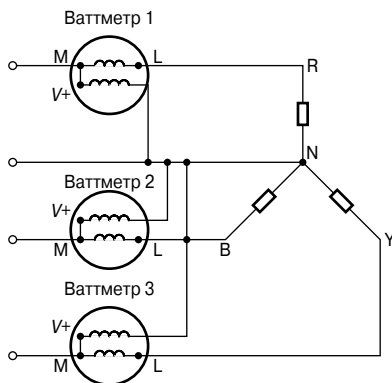


Рис. 59.11

$$\text{Полная мощность} = P_1 + P_2 + P_3$$

## Сравнение соединений нагрузок звездой и треугольником

- Соединённые треугольником с источником питания нагрузки рассеивают в 3 раза большую мощность по сравнению с нагрузками, соединёнными звездой.
- Для одной и той же мощности фазовые токи должны быть одинаковыми как для соединений треугольником, так и для соединений звездой (так как мощность  $= 3 I_P^2 R_P^2$ ). Следовательно, линейный ток в системе с треугольником больше, чем линейный ток в соответствующей системе со звездой. Для получения в системе звездой того же фазового тока, как и в системе треугольника, линейное напряжение в системе звездой должно равняться линейному напряжению в системе треугольника, умноженному на  $\sqrt{3}$ .

Следовательно, для заданной передачи мощности система треугольника завязана с линейными токами большей величины (а следовательно, с необходимостью большей площади поперечного сечения проводников), а соединение звездой связано с бóльшим линейным напряжением (а следовательно, с необходимостью более надёжной изоляции).

## Преимущества трёхфазных систем

Подключение ваттметров для трёхфазной четырёхпроводной системы показано на **Рис. 59.11**.

- Для заданной мощности, передаваемой через систему для трёхфазной системы, необходимы проводники с меньшей площадью поперечного сечения. Это значит, что экономится медь (или алюминий), и, следовательно, такая система дешевле.
- Возможно использование двух напряжений.
- Трёхфазные электродвигатели очень надёжны и относительно дешёвы. Они обладают самостартующими свойствами, обеспечивают более плавный запуск и требуют меньше затрат на профилактику по сравнению с однофазными электродвигателями.

## 60. ТРАНСФОРМАТОРЫ

### Введение

*Трансформатор* — это устройство, предназначенное для изменения величины переменных напряжений и токов, в работе которого используется явление взаимной индукции (гл. 48 и 49). На практике одним из основных преимуществ передачи и распределения именно переменного тока является простота, с которой трансформатор может увеличивать или уменьшать напряжение такого тока.

Как правило, потери в трансформаторе малы, следовательно, велика его эффективность. Не обладая движущимися частями, эти устройства имеют продолжительный срок службы и очень надёжны в эксплуатации.

Трансформаторы отличаются размерами и могут быть как миниатюрными компонентами электронных схем, так и крупногабаритными силовыми объектами электростанций. Но принцип их работы везде одинаков.

На **Рис. 60.1а** показан трансформатор, состоящий из двух электрических контуров, объединённых общим ферромагнитным сердечником.

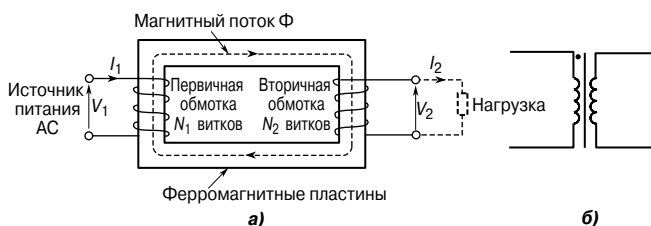


Рис. 60.1

Одну катушку называют *первичной обмоткой*, она соединена с источником питания переменного тока (АС), а другую — *вторичной обмоткой*, её можно подсоединять к нагрузке. На **Рис. 60.1б** показано символическое изображение трансформатора, используемое в электрических схемах.

### Принцип работы трансформатора

Когда вторичная обмотка разомкнута, а на первичную подаётся переменное напряжение  $V_1$ , то в ней начинает течь небольшой ток, называемый *током холостого хода*  $I_0$ , создавая магнитный поток в сердечнике. Возникшая магнитная цепь соединяет первичную и вторичные обмотки благодаря взаимной индукции индуцирует в них две ЭДС — соответственно  $E_1$  и  $E_2$ .

Индуктируемая в катушке с  $N$  витками ЭДС  $E$  равна

$$E = -N \frac{d\Phi}{dt} \text{ вольт,}$$

где  $\frac{d\Phi}{dt}$  — скорость изменения магнитного потока.

В идеальном трансформаторе скорость изменения магнитного потока одинакова как для первичной, так и для вторичной обмотки, следовательно,

$$\frac{E_1}{N_1} = \frac{E_2}{N_2},$$

то есть

*ЭДС, индуктируемая на один виток, постоянна.*

При отсутствии потерь

$$E_1 = V_1 \quad \text{и} \quad E_2 = V_2.$$

Тогда

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}, \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (1)$$

$\frac{V_1}{V_2}$  называют *коэффициентом передачи по напряжению*, а  $\frac{N_1}{N_2}$  — *отношением витков обмоток трансформатора* или *коэффициентом трансформации*. Если  $N_2$  меньше  $N_1$ , тогда  $V_2$  меньше  $V_1$ , и такой прибор называют *понижающим трансформатором*. Если  $N_2$  больше  $N_1$ , тогда  $V_2$  больше  $V_1$ , и такой трансформатор называют *повышающим*.

Когда ко вторичной обмотке подсоединена нагрузка, в ней появляется ток  $I_2$ . В идеальном трансформаторе потери ничтожны, и поэтому его КПД считается равным 100%.

Следовательно, входная мощность равна выходной мощности, или

$$V_1 I_1 = V_2 I_2,$$

то есть в идеальном трансформаторе *ампер-витки первичной и вторичной обмотки равны*.

В этом случае

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1}. \quad (2)$$

Объединяя уравнения (1) и (2), получаем

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}} \quad (3)$$

**Например**, определим напряжение и ток вторичной обмотки идеального трансформатора, если коэффициент трансформации определён как  $8 : 1$ , а ток первичной обмотки равен  $3\text{ А}$ , когда она подключена к источнику питания  $240\text{ В}$ .

Коэффициент трансформации  $8:1$  означает, что  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{8}{1}$ , то есть это понижающий трансформатор.

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2},$$

откуда напряжение на вторичной обмотке

$$V_2 = V_1 \left( \frac{N_2}{N_1} \right) = 240 \left( \frac{1}{8} \right) = 30\text{ В}.$$

Далее, известно, что

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1},$$

откуда ток вторичной обмотки

$$I_2 = I_1 \left( \frac{N_1}{N_2} \right) = 3 \left( \frac{8}{1} \right) = 24\text{ А}.$$

Номинальный режим работы трансформатора выражается в *вольт-амперах*, которые он может трансформировать не перегреваясь. Как следует из **Рис. 60.1а**, номинальный режим работы трансформатора будет либо  $V_1 I_1$ , либо  $V_2 I_2$ , где  $I_2$  — это ток полностью нагруженной вторичной обмотки. В приведённом выше примере номинальный режим работы составляет  $V_1 I_1 = (240)(3) = 720\text{ В}\cdot\text{А}$ , или  $V_2 I_2 = (30)(24) = 720\text{ В}\cdot\text{А}$ .

## Векторная диаграмма ненагруженного трансформатора

Магнитный поток в сердечнике трансформатора общий для первичной и вторичной обмотки, и поэтому его принимают за основной вектор при построении векторной диаграммы. Когда во вторичной обмотке отсутствует нагрузка, в первичной обмотке течёт небольшой ток холостого хода  $I_0$ , и поэтому, без учёта потерь, первичная обмотка становится «чистой» катушкой индуктивности, и, следовательно, ток отстаёт от приложенного напряжения  $V_1$  на  $90^\circ$ .

На векторной диаграмме, изображённой на **Рис. 60.2а**, ток  $I_0$  создаёт магнитный поток, находящийся с ним в одной фазе (потери пренебрегают). Индуцируемая в первичной обмотке ЭДС  $E_1$  находится в противофазе с  $V_1$  (по закону Ленца) и изображена вектором, находящимся в  $180^\circ$  от фазы  $V_1$ , но равна ей по величине. Индуцируемая во вторичной обмотке ЭДС  $E_2$  показана с учётом коэффициента трансформации  $2:1$ .

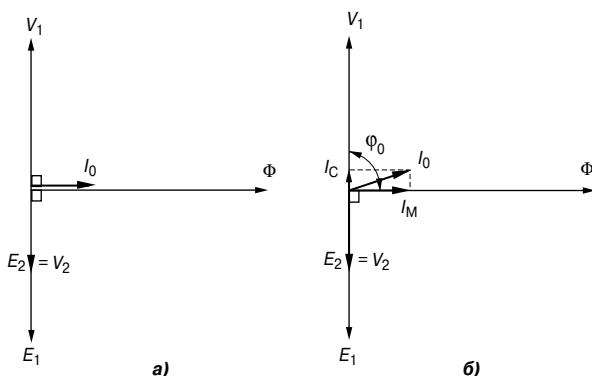


Рис. 60.2

На **Рис. 60.2б** показана векторная диаграмма реального трансформатора без нагрузки во вторичной обмотке (то есть режим холостого хода). Если течёт ток, то появляются потери. Когда потери берутся в расчёт, то ток холостого хода  $I_0$  является векторной суммой двух составляющих: во-первых, *намагничивающего тока*  $I_M$ , который находится в фазе с магнитным потоком; во-вторых, *потерь в сердечнике*  $I_C$  (определяемых гистерезисными потерями и вихревыми токами). Из **Рис. 60.2б** получаем, что ток холостого хода равен

$$I_0 = \sqrt{I_M^2 + I_C^2},$$

где  $I_M = I_0 \sin \varphi_0$ ,  
 $I_C = I_0 \cos \varphi_0$ .

Коэффициент мощности без нагрузки  $\cos \varphi_0 = \frac{I_C}{I_0}$ .

Полные потери на сердечнике (то есть, потери на сталь) =  $= V_1 I_0 \cos \varphi_0$ .

## Уравнение ЭДС трансформатора

Действующее значение (rms) ЭДС, индуцируемой в первичной обмотке, равно

$$E_1 = 4.44 f \Phi_m N_1 \text{ В.} \quad (4)$$

Действующее значение (rms) ЭДС, индуцируемой во вторичной обмотке, равно

$$E_2 = 4.44 f \Phi_m N_2 \text{ В.} \quad (5)$$

Разделив левую и правую части уравнения (4) соответственно на левую и правую части уравнения (5), имеем соотношение, уже полученное ранее:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2}.$$

**Например,** определим максимальный магнитный поток, если однофазный трансформатор с параметрами 50 Гц, 100 кВ·А, 4 000 В/200 В имеет 100 витков во вторичной обмотке.

Из уравнения (5) имеем

$$E_2 = 4.44 f \Phi_m N_2.$$

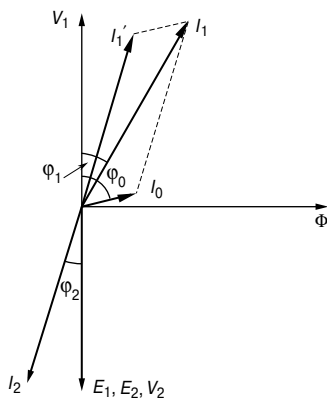
Откуда, полагая, что  $E_2 = V_2$ , получим

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \frac{E_2}{4.44 f N_2} = \frac{200}{(4.44)(50)(100)} = \\ &= 9.01 \times 10^{-3} \text{ Вб, или } 9.01 \text{ мВб.} \end{aligned}$$

### Векторная диаграмма трансформатора под нагрузкой

Если не брать в расчёт падение напряжения в обмотках трансформатора, то конечное напряжение  $V_2$  будет таким же, как индуцируемая ЭДС  $E_2$  во вторичной обмотке. Точно так же  $V_1 = E_1$ . Полагая, что число витков первичной и вторичной обмотки одинаково, получаем  $E_1 = E_2$  и допускаем, что фазовый угол отставания нагрузки равен  $\varphi_2$ .

На векторной диаграмме, изображённой на **Рис. 60.3**, ток  $I_2$  отстаёт от  $V_2$  на угол  $\varphi_2$ .



**Рис. 60.3**

Когда нагрузка подсоединена ко вторичной обмотке, в ней появится ток  $I_2$ . Появившаяся в результате вторичная ЭДС

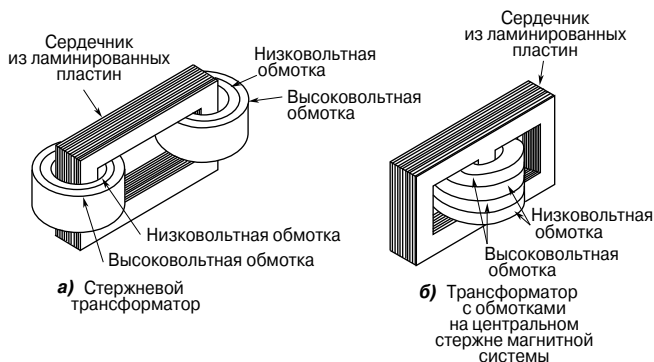


действует так, как будто стремится уменьшить магнитный поток в сердечнике. Однако этого не происходит, так как уменьшение потока в сердечнике уменьшает  $E_1$ . Следовательно, возникает отражённое увеличение первичного тока  $I_1'$ , что обеспечивает восстанавливающую магнитодвижущую силу. Значит, при всех нагрузках магнитодвижущая сила первичной и магнитодвижущая сила вторичной обмотки равны, но противоположны по направлению, а поток в сердечнике остаётся постоянным. Ток  $I_1'$  иногда называют «уравновешивающим», равным по величине, но противоположным по направлению току  $I_2$ , как это показано на **Рис. 60.3**. Ток  $I_0$ , показанный на **Рис. 60.3** под углом  $\varphi_0$  к  $V_1$ , — это ток холостого хода трансформатора.

Векторная сумма  $I_1'$  и  $I_0$  определяет ток питания  $I_1$ , а угол, показанный как  $\varphi_1$ , есть не что иное, как фазовый угол между напряжением и током первичной обмотки, то есть между  $V_1$  и  $I_1$ .

## Конструкции трансформаторов

Широкое применение находят показанные на **Рис. 60.4** два вида однофазного трансформатора с двумя обмотками: *стержневой трансформатор* и *трансформатор с обмотками на центральном стержне магнитной системы*.



**Рис. 60.4**

Чтобы уменьшить ток утечки, высоковольтные и низковольтные обмотки навиты так, как изображено на **Рис. 60.4**.

В случае силовых трансформаторов (номиналом в несколько МВ·А, работающих в Британии на частоте 50 Гц) материалом для сердечника, как правило, служит ламинированная (то есть состоящая из тонких, плоских слоёв) кремнистая сталь или листовая электротехническая сталь. Расщепление сердечника на тонкие листы уменьшает вихревые токи, а кремнистая сталь сводит гистерезисные потери к минимуму.

Большие силовые трансформаторы применяют в основных электросетях и в промышленных линиях электропитания. Широкое распространение получили небольшие трансформаторы, в том числе в сварочных аппаратах и выпрямляющих источниках питания, в цепях электрических звонков, стиральных машинах и т. д.

В *низкочастотных трансформаторах*, номиналом от нескольких мВ·А до более чем 20 В·А, работающих на частотах до 15 кГц, используют сердечник из ламинированной кремнистой стали. Типичное применение таких трансформаторов — аудио-усилительные системы.

В *трансформаторах высокой частоты*, работающих в мегагерцовом диапазоне, сердечник либо воздушный, ферритовый, либо порошковый. Феррит — это керамический материал, магнитные свойства которого схожи со свойствами кремнистой стали, но имеющий более высокое удельное сопротивление. Порошковые сердечники состоят из мелких частиц карбонильного железа или пермаллоя (сплава никеля и железа), каждая частица которого изолирована от соседней. Такие трансформаторы находят применение в радио- и телевизионных приёмниках.

*Обмотки трансформаторов* обычно делают из медной или алюминиевой проволоки, покрытой эмалью. Небольшие трансформаторы обычно охлаждаются воздухом, большие — маслом.

## Эквивалентная схема трансформатора

На Рис. 60.5 показана эквивалентная схема трансформатора.

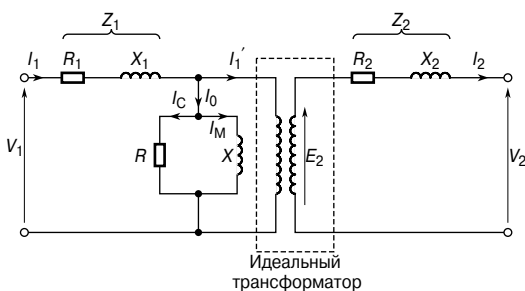
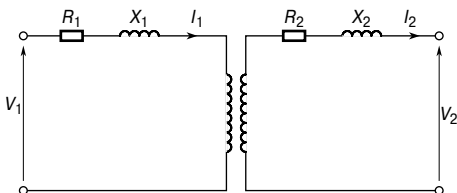


Рис. 60.5

Резисторы  $R_1$  и  $R_2$  определяют активное сопротивление первичной и вторичной обмоток, а  $X_1$  и  $X_2$  — их реактивное сопротивление, появляющееся в результате тока утечки.

Потери в сердечнике из-за гистерезиса и вихревых токов заменены резистором  $R$ , через который течёт ток  $I_C$ . Реактивное сопротивление  $X$  характеризует намагничивающую составляющую  $I_M$ .

В упрощённой эквивалентной схеме, показанной на **Рис. 60.6**, активным и реактивным сопротивлением  $R$  и  $X$  пренебрегают, так как ток холостого хода  $I_0$  обычно составляет лишь 3...5% от тока первичной обмотки при наличии полной нагрузки во вторичной обмотке.



**Рис. 60.6**

Обычно при расчётах принимают, что все активные и реактивные сопротивления находятся на одной стороне трансформатора.

Сопротивление  $R_2$  на **Рис. 60.6** можно заменить дополнительным сопротивлением  $R_2'$  в первичной цепи, которое добавляется так, чтобы мощность, рассеиваемая на  $R_2'$  в первичной цепи, была бы равна мощности, рассеиваемой на  $R_2$  во вторичной обмотке, то есть

$$I_1^2 R_2' = I_2^2 R_2,$$

откуда

$$R_2' = R_2 \left( \frac{I_2}{I_1} \right)^2 = R_2 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^2.$$

Тогда общее эквивалентное сопротивление  $R_e$  первичной цепи равно первичному и вторичному сопротивлению реального трансформатора. Значит,

$$R_e = R_1 + R_2',$$

то есть

$$R_e = R_1 + R_2 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^2$$

По схожим причинам эквивалентное реактивное сопротивление в первичной цепи равно

$$X_e = X_1 + X_2',$$

то есть

$$X_e = X_1 + X_2 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^2$$

Эквивалентный импеданс  $Z_e$ , замещающий активные и реактивные сопротивления первичной и вторичной обмоток, равен

$$Z_e = \sqrt{R_e^2 + X_e^2}$$

Если  $\varphi_e$  — это фазовый угол между током  $I_1$  и падением напряжения  $I_1 Z_e$ , тогда

$$\cos \varphi_e = \frac{R_e}{Z_e}$$

С учётом вышесказанного упрощённая эквивалентная схема трансформатора приобретает вид, показанный на **Рис. 60.7**.

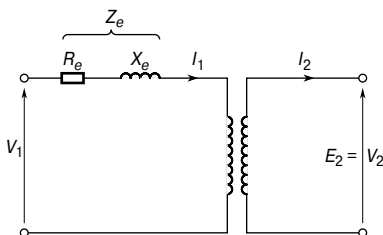


Рис. 60.7

## Изменение выходного напряжения трансформатора

Когда вторичная обмотка трансформатора находится под нагрузкой, вторичное напряжение  $V_2$  падает по сравнению с напряжением холостого хода. Так как коэффициент мощности уменьшается, то это падение напряжения увеличивается. Этот процесс называют *изменением выходного напряжения*,  $\Delta V_2$  трансформатора.

Обычно  $\Delta V_2$  выражается в процентах от напряжения на вторичной обмотке при холостом ходе  $E_2$ . Для условий полной нагрузки

$$\Delta V_2 = \left( \frac{E_2 - V_2}{E_2} \right) \times 100\%$$

Падение напряжения ( $E_2 - V_2$ ) вызвано активным и реактивным сопротивлением обмоток.

Обычно в небольших трансформаторах  $\Delta V_2$  составляет примерно 3%, а в крупных — 1%.

**Например**, определим изменение выходного напряжения однофазного трансформатора (5 кВ·А, 200 В/400 В), находящегося под нагрузкой, если напряжение на вторичной обмотке равно 387.6 вольт.

$$\Delta V_2 = \left( \frac{E_2 - V_2}{E_2} \right) \times 100\%,$$

где  $E_2$  — напряжение на вторичной обмотке без нагрузки (напряжение холостого хода),

$V_2$  — напряжение на вторичной обмотке под нагрузкой (напряжение нагрузки).

Тогда

$$\Delta V_2 = \left( \frac{400 - 387.6}{400} \right) \times 100 = \frac{12.4}{400} \times 100 = 3.1\% .$$

## Потери и коэффициент полезного действия трансформаторов

### *Потери мощности в трансформаторах*

К основным источникам потерь в трансформаторах, находящихся под нагрузкой, относятся *потери на медь* и *потери на сталь*.

Потери на медь не постоянны; в результате прохождения тока проводники (как правило, медные) нагреваются из-за того, что обладают сопротивлением. Если  $R_1$  и  $R_2$  — это сопротивление первичной и вторичной обмотки, то общие потери на медь составят

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 .$$

Потери на железо постоянны для заданной частоты и плотности магнитного потока. Существуют два вида потерь на железо: гистерезисные потери и потери на вихревые токи.

- *Гистерезисные потери* — это нагрев сердечника в результате изменения полярности молекул сердечника, которые возникают при изменении магнитного потока. Потери пропорциональны площади гистерезисной петли, и поэтому в качестве материала для сердечников стремятся использовать сплавы железа и никеля, имеющие малые потери, так как гистерезисные петли этих сплавов имеют небольшие площади (гл. 45).
- *Потери на вихревые токи* — это нагрев сердечника в результате возникновения ЭДС не только в обмотках трансформатора, но также и в самом сердечнике. Такие микроЭДС вызывают циркулирующие токи, называемые *вихревыми*. При низком сопротивлении сердечника вихревые токи могут оказаться значительными и вызывать большие потери мощ-

ности и излишний нагрев сердечника. Потери от них можно снизить, если увеличить удельное сопротивление материала сердечника или, что бывает чаще, ламинировать сердечник (то есть расщепить его на тонкие, плоские слои) и поместить между каждой парой расщеплённых слоёв тонкий слой изоляционного материала. Это увеличит сопротивление вихревым токам и уменьшит их величину.

### **Коэффициент полезного действия трансформатора**

Коэффициент полезного действия (КПД) трансформатора

$$\eta = \frac{\text{выходная мощность}}{\text{входная мощность}} = \frac{\text{выходная мощность} - \text{потери}}{\text{входная мощность}},$$

то есть

$$\eta = 1 - \frac{\text{потери}}{\text{входная мощность}}$$

Как правило, КПД трансформатора выражают в процентах. Обычно КПД силовых трансформаторов составляет от 95 до 98%.

$$\text{Выходная мощность} = V_2 I_2 \cos \varphi_2.$$

Общие потери = потери на медь + потери на железо.

Входная мощность = выходная мощность + потери.

**Например,** определим КПД трансформатора при полной нагрузке, если его коэффициент мощности 0.85, номинальная мощность 200 кВ·А, полные потери на медь — 1.5 кВт, а на железо — 1 кВт.

$$\begin{aligned} \text{Выходная мощность при полной нагрузке} &= VI \cos \varphi = \\ &= (200)(0.85) = 170 \text{ кВт.} \end{aligned}$$

$$\text{Общие потери} = 1.5 + 1.0 = 2.5 \text{ кВт.}$$

$$\begin{aligned} \text{Входная мощность} &= \text{выходная мощность} + \text{потери} = \\ &= 170 + 2.5 = 172.5 \text{ кВт.} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{КПД} &= \left( 1 - \frac{2.5}{172.5} \right) = 1 - 0.01449 = 0.9855, \text{ или} \\ &\quad \mathbf{98.55\%}. \end{aligned}$$

Определим КПД этого же трансформатора, когда его нагрузка уменьшена в 2 раза.

$$\begin{aligned} \text{Выходная мощность при половинной нагрузке} = \\ = \frac{1}{2}(200)(0.85) = 85 \text{ кВт.} \end{aligned}$$

Потери на медь (или  $I^2 R$  потери) пропорциональны квадрату тока.

Значит, потери на медь при половинной нагрузке равны

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 (1\,500) = 375 \text{ Вт.}$$

Потери на железо = 1 000 Вт (постоянны).

Общие потери = 375 + 1 000 = 1 375 Вт, или 1.375 кВт.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Входная мощность при} \\ \text{половинной нагрузке} \end{array} \right\} = \begin{array}{l} \text{выходная мощность при} \\ \text{половинной нагрузке} \end{array} +$$

$$+ \text{потери} = 85 + 1.375 = 86.375 \text{ кВт.}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \text{КПД} = 1 - \frac{\text{потери}}{\text{входная мощность}} &= \left(1 - \frac{1.375}{86.375}\right) = \\ &= 0.9841, \text{ или } \mathbf{98.41\%}. \end{aligned}$$

### **Максимальный коэффициент полезного действия**

Можно показать, что КПД трансформатора принимает максимальное значение, когда изменяющиеся потери на медь, то есть  $(I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2)$ , равны постоянным потерям на железо.

### **Согласование сопротивлений источника питания и нагрузки**

Изменение сопротивления нагрузки, с тем чтобы она была равна или почти равна внутреннему сопротивлению источника питания, называется *согласованием*. К случаям, когда согласование сопротивлений имеет большое значение, относятся соединение антенны с передатчиком или приёмником или соединение громкоговорителя с усилителем.

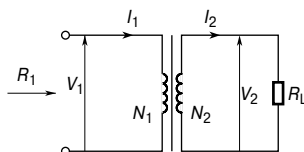
Трансформаторы тогда используют для передачи максимальной мощности.

Внутреннее сопротивление генератора постоянного тока или аккумулятора обычно очень мало. Тогда при попытке сделать со-

противление нагрузки таким же низким, как и внутреннее сопротивление источника питания, возникает перегрузка источника.

Для корректировки величины сопротивления нагрузки так, чтобы оно согласовывалось с внутренним сопротивлением источника, применяется метод достижения максимума мощности между источником и нагрузкой (см. гл. 53). В качестве устройства согласования сопротивлений можно использовать трансформатор, подсоединив его между нагрузкой и источником. Из схемы, показанной на **Рис. 60.8**, можно вычислить сопротивление  $R_1$ :

$$R_1 = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_L$$



**Рис. 60.8**

Из уравнения следует, что, изменяя коэффициент трансформации, можно добиться того, чтобы эквивалентное внутреннее сопротивление трансформатора «согласовалось» бы с внутренним сопротивлением нагрузки и был достигнут максимум передаваемой мощности.

**Например**, если трансформатор с коэффициентом трансформации 4 : 1 подключён к нагрузке с сопротивлением 100 Ом, то эквивалентное входное сопротивление определяется из соотношения

$$R_1 = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_L = \left( \frac{4}{1} \right)^2 (100) = 1\,600 \text{ Ом}.$$

## Автотрансформаторы

*Автотрансформатор* — это трансформатор, у которого часть обмотки является общей как для первичной, так и для вторичной цепи. На **Рис. 60.9а** показана схема трансформатора с двумя обмотками, а на **Рис. 60.9б** — схема автотрансформатора.

На последнем из них видно, что вторичная цепь — это часть первичной цепи, при этом ток во вторичной цепи равен  $(I_2 - I_1)$ . Так как ток в этой части меньше, площадь поперечного сечения провода обмотки можно уменьшить, и от этого уменьшится количество необходимого материала.



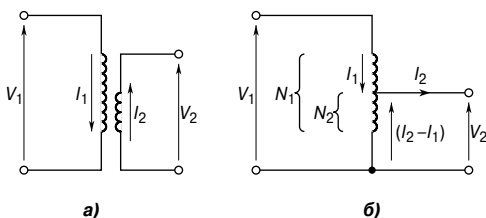


Рис. 60.9

На **Рис. 60.10** изображён символичный знак, которым на схеме обозначают автотрансформатор.

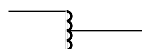


Рис. 60.10

**Например**, отношение напряжений однофазного автотрансформатора 320 В : 250 В, и он подключён к нагрузке, мощность которой 20 кВ·А при 250 В. Определим ток в каждой части обмотки, если трансформатор идеальный.

$$\text{Номинальное значение мощности} = 20 \text{ кВ} \cdot \text{А} = V_1 I_1 = V_2 I_2,$$

откуда ток первичной обмотки

$$I_1 = \frac{20 \times 10^3}{V_1} = \frac{20 \times 10^3}{320} = 62.5 \text{ А},$$

а ток вторичной обмотки

$$I_2 = \frac{20 \times 10^3}{V_2} = \frac{20 \times 10^3}{250} = 80 \text{ А}.$$

Тогда ток в общей части обмотки = 80 – 62.5 = 17.5 А.

Величины токов в каждой части автотрансформатора показаны на **Рис. 60.11**.

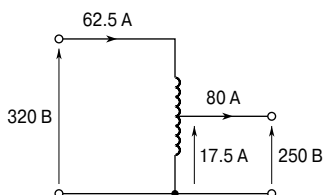


Рис. 60.11

### ***Экономия меди при изготовлении автотрансформаторов***

Если выход и коэффициент трансформации по напряжению такие же, как и в трансформаторе с двумя обмотками, то при изготовлении автотрансформатора потребность в медном проводе снижается.

Если

$$\frac{N_2}{N_1} = x, \text{ то}$$

(масса меди в автотрансформаторе) =  $(1 - x)$  (масса меди в двухобмоточном трансформаторе).

Предположим, что

$$x = \frac{4}{5},$$

тогда

(масса меди в автотрансформаторе) =  $\left(1 - \frac{4}{5}\right)$ , откуда

$$\begin{aligned} & \text{(масса меди в автотрансформаторе)} = \\ & = \frac{1}{5} \text{ (масса меди в двухобмоточном трансформаторе)}. \end{aligned}$$

Экономия меди составляет 80%.

Если  $x = \frac{1}{4}$ , то экономится 25% и т. д.

Чем ближе  $N_1$  к  $N_2$ , тем больше экономия меди.

### ***Преимущества автотрансформаторов***

Автотрансформаторы имеют ряд преимуществ перед двухобмоточными трансформаторами. Это

- экономия материала, так как требуется меньше медного провода (см. выше);
- меньший объём, что является следствием меньшего количества используемого материала;
- более высокий КПД в результате меньших потерь  $I^2R$ ;
- используя подвижный контакт, можно получить меняющееся выходное напряжение;
- меньшее (в процентах) изменение выходного напряжения  $\Delta V_2$ .

### ***Недостатки автотрансформаторов***

Первичная и вторичная обмотки электрически не изолированы, значит, если во вторичной обмотке цепь размыкается, то на выходе цепи появляется полное первичное напряжение.

## Применение автотрансформаторов

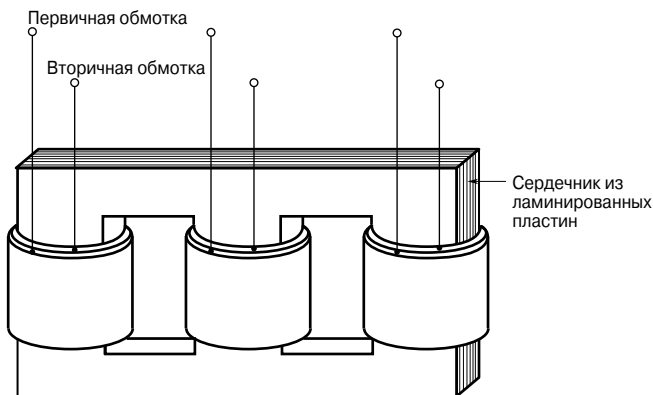
Автотрансформаторы используют для уменьшения напряжения при запуске асинхронного двигателя (см. гл. 62) и для связи систем, работающих примерно на одинаковом напряжении.

## Изолирующие трансформаторы

Трансформаторы нужны не только для изменения величины тока или напряжения. Они также обеспечивают средства электрической изоляции одной части цепи от другой в условиях, когда между первичной и вторичной обмоткой не должно быть гальванической связи. *Изолирующий трансформатор* — это трансформатор с коэффициентом 1:1. Его основное применение — розетки в ванной комнате, переносные электрические инструменты, модели железных дорог и т. д.

## Трёхфазные трансформаторы

*Трёхфазные двухобмоточные трансформаторы* применяют в основном при передаче электроэнергии, и, как правило, их изготавливают по типу трансформаторов с сердечником. Такие трансформаторы состоят из трёх пар однофазных обмоток, навитых на единый сердечник, как это показано на **Рис. 60.12**.



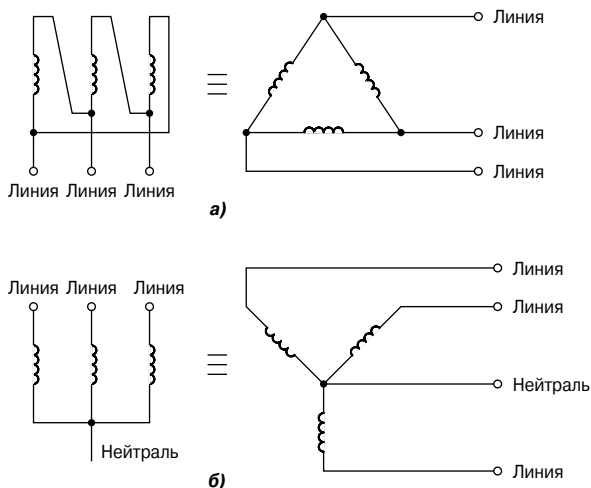
**Рис. 60.12**

Это даёт существенную экономию в количестве используемого железа. Первичная и вторичная обмотки на **Рис. 60.12** прикреплены к верхней части друг друга в форме концентрических цилиндров, как это показано на **Рис. 60.4а**.

Первичные обмотки могут быть соединены треугольником, а вторичные — звездой, или наоборот; возможны также соедине-

ния звезда—звезда или треугольник—треугольник,— всё зависит от применения трансформатора.

Соединение треугольником показано на **Рис. 60.13а**, а соединение звездой — на **Рис. 60.13б**.



**Рис. 60.13**

## Токовые трансформаторы

Для измерения токов, превышающих 100 А, обычно применяют токовые трансформаторы. При магнитоэлектрическом амперметре постоянного тока с подвижной катушкой ток, необходимый для получения отклонения на всю шкалу, очень мал — обычно несколько миллиампер. Когда надо измерить большой ток, то в цепь добавляют шунтирующий резистор (см. гл. 50). Однако даже с такими резисторами не всегда можно измерить очень большие токи. Когда измеряют переменный ток, шунтирующий резистор неприменим, так как ток, текущий через измерительный прибор, будет зависеть от его импеданса, который зависит от частоты.

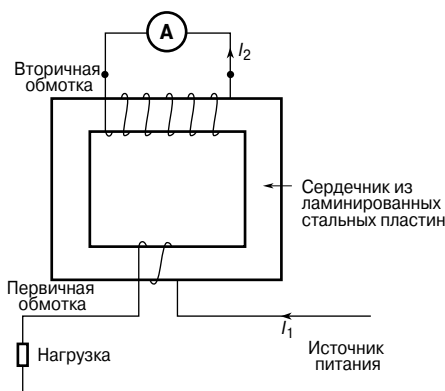
В двухобмоточном трансформаторе справедливо соотношение

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1},$$

откуда ток вторичной обмотки

$$I_2 = I_1 \left( \frac{N_1}{N_2} \right).$$

В *токовых трансформаторах* первичная обмотка обычно состоит из двух витков, а вторичная имеет несколько сот витков. Типичное устройство такого трансформатора показано на **Рис. 60.14**.



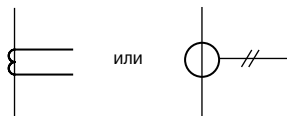
**Рис. 60.14**

**Например,** если первичная обмотка имеет 2 витка, а вторичная 200, то при токе в первичной обмотке 500 А ток во вторичной обмотке равен

$$I_2 = I_1 \left( \frac{N_1}{N_2} \right) = (500) \left( \frac{2}{200} \right) = 5 \text{ А}.$$

Токовые трансформаторы изолируют амперметр от основной цепи и позволяют использовать стандартный набор амперметров, дающих полное отклонение шкалы 1 А, 2 А или 5 А. В случае очень больших токов вокруг проводника или шины можно приварить сердечник трансформатора. Тогда первичная обмотка будет иметь всего один виток.

Перед тем как удалить амперметр, необходимо закоротить вторичную обмотку. Это следует делать потому, что, когда в первичной обмотке течёт ток, во вторичной могут индуцироваться опасно высокие напряжения, если она не замкнута.



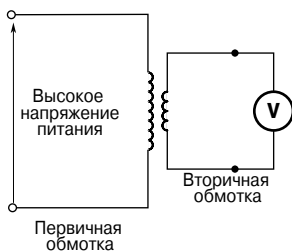
**Рис. 60.15**

На **Рис. 60.15** показаны символьные обозначения токовых трансформаторов, применяемые для их изображения на схемах.

## Трансформаторы напряжения

Для измерения напряжений, превышающих 500 В, зачастую бывает безопаснее использовать *трансформаторы напряжений*. Как правило, это двухобмоточные трансформаторы с большим числом витков в первичной обмотке, которая подсоединена к источнику высокого напряжения, и с малым числом витков во вторичной обмотке.

На **Рис. 60.16** показано типичное устройство такого трансформатора.



**Рис. 60.16**

Так как  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$ , то напряжение на вторичной обмотке

$$V_2 = V_1 \left( \frac{N_2}{N_1} \right).$$

Следовательно, если трансформатор, изображённый на **Рис. 60.16**, имеет 4 000 витков в первичной обмотке и 20 витков во вторичной, то при напряжении 22 кВ в первичной обмотке напряжение во вторичной обмотке определяется из уравнения

$$V_2 = V_1 \left( \frac{N_2}{N_1} \right) = (22\,000) \left( \frac{20}{4\,000} \right) = 110 \text{ В}.$$

## 61. МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### Введение

Когда на вход машины поступает электроэнергия (то есть на электрические выводы машины подают напряжение), а на её выходе получают механическую энергию (то есть вращающийся вал), такую машину называют *электродвигателем*.

Следовательно, электродвигатель преобразует электрическую энергию в механическую. Принцип работы электродвигателя описан в гл. 47. Когда на вход электрической машины поступает механическая энергия (то есть, допустим, дизельный двигатель, соединённый с машиной валом), а на выходе снимают электрическую энергию, (то есть напряжение, возникающее на электрических выводах машины), то такую машину называют *генератором*.

Следовательно, генератор преобразует механическую энергию в электрическую.

Принцип работы генератора объясняется в гл. 48.

### Механическое действие электрического тока

В электродвигателях проводники с током вращаются в постоянном магнитном поле. На **Рис. 61.1** показан проводник, образующий одноконтурную петлю, заключённую между постоянными магнитами.

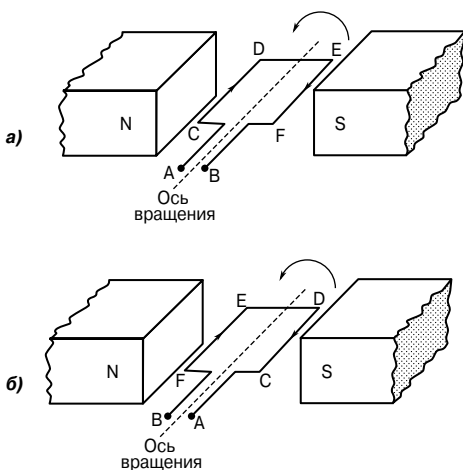


Рис. 61.1

Постоянное напряжение подаётся к точкам А и В.

В результате взаимодействия магнитного поля двух магнитов и магнитного поля, возникшего вследствие протекающего в петле тока, на петлю действует сила  $F$ . Эта сила пропорциональна плотности магнитного потока  $B$ , силе тока  $I$  и рабочей длине проводника  $l$ , то есть

$$F = BIl.$$

Сила  $F$  состоит из двух составляющих: одна действует вертикально вниз благодаря току, текущему от С к D, а другая действует вертикально вверх благодаря току, текущему от Е к F (по правилу левой руки). Если петля свободно вращается, то при повороте на  $180^\circ$  проводники займут положение, показанное на **Рис. 61.16**. Чтобы вращение продолжилось в том же направлении, необходимо, чтобы ток изменил направление и был направлен от D к С и от F к Е, как показано на **Рис. 61.16**. Изменение направления тока, называемое переключением, достигается переменной полярности приложенного напряжения.

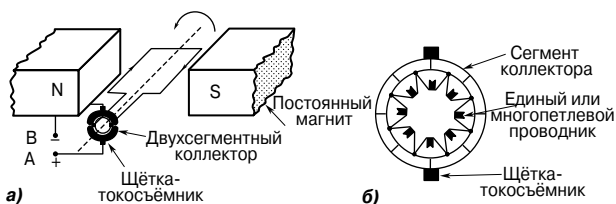


Рис. 61.2

Из **Рис. 61.2a** видно, что с появлением напряжения на выводах А и В контур под действием возникших сил начинает вращение против часовой стрелки. Достигнув вертикального положения, контур должен остановиться, поскольку вращающий момент в этом положении уменьшится до нуля. Чтобы движение продолжалось, коллектор, вращающийся вместе с контуром, должен быть разделён на два сектора, благодаря чему при достижении контуром вертикального положения происходит смена полярности напряжения в контуре. Ток в проводнике контура меняет направление, силы, действующие на него, также меняют направление, заставляя вращаться контур против часовой стрелки до следующего вертикального положения, где направление тока вновь меняется, и ситуация повторяется.

Следовательно, существуют силы, придающие постоянное вращение в направлении против часовой стрелки. Показанное на **Рис. 61.2a** устройство называется *двухсекментным коллектором*.



Напряжение к вращающимся элементам передаётся с помощью стационарных *щёток* (как правило, это графитовые блоки), которые скользят по материалу коллектора (обычно это медь) во время вращения рамки.

На практике конструкция вращающихся частей машин постоянного тока состоит из многих проводников, подсоединённых ко многим сегментам коллектора. На **Рис. 61.26** схематично показан пример *многосегментного коллектора*.

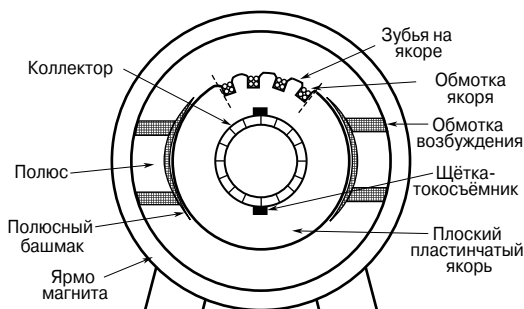
Плохое контактирование приводит к искрению, возникающему на задней кромке щёток. Конструкцию можно улучшить с помощью *добавочных полюсов* (расположенных между каждой парой основных полюсов), щёток с высоким сопротивлением или с помощью щёток, перекрывающих несколько сегментов коллектора.

## Устройство машины постоянного тока

На **Рис. 61.3** показаны основные части машины постоянного тока. К ним относятся:

во-первых, стационарная часть, называемая *статором* и включающая:

- стальное кольцо, называемое *станиной*;
- *магнитные полюсы*, закреплённые на станине;
- *обмотки подмагничивания*, то есть много витков проводника, навитых вокруг сердечника полюса; проходящий через этот проводник ток образует электромагнит (а не постоянные магниты, показанные на **Рис. 61.1** и **Рис. 61.2**);



**Рис. 61.3**

во-вторых, вращающаяся часть, называемая *якорем* (ротором), закреплённым на шейках вала, расположенных в станине. Эта часть состоит из:

- цилиндра, называемого *якорем*, изготовленного из железных или стальных пластин, в котором сформированы зубья;

- обмоток якоря, образующих систему из одного или нескольких проводников, размещённых в пазах между зубьями;
- коллектора.

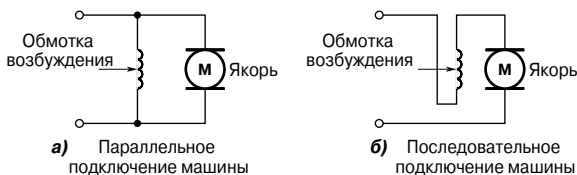
*Обмотки якоря* можно разделить на две группы в зависимости от способа подсоединения проводов к коллектору. К этим группам относятся волновые и петлевые обмотки.

В *волновых обмотках* есть две параллельные дорожки, не зависящие от числа полюсов. Каждая дорожка обеспечивает половину общего тока на выходе. Генераторы с волновыми обмотками производят высокое напряжение при низком выходном токе.

В *петлевых обмотках* параллельных дорожек столько, сколько в машине полюсов. Общий ток на выходе делится между дорожками. Генераторы с петлевыми обмотками производят большой ток при низком выходном напряжении.

## Параллельные, последовательные и смешанные обмотки

Когда обмотка возбуждения машины постоянного тока соединена с якорем параллельно, как это показано на **Рис. 61.4а**, её называют машиной с *параллельной обмоткой*.



**Рис. 61.4**

Если обмотка возбуждения соединена с якорем последовательно, как, показано на **Рис. 61.4б**, то такую машину называют машиной с *последовательной обмоткой*. В машине со *смешанной обмоткой* есть и тот, и другой вид обмотки.

В зависимости от типа обмотки машины различается и характер работы машины под нагрузкой. Поведение машины постоянного тока в различных условиях показывается схематично на графиках, называемых *характеристическими кривыми* или характеристиками. Данные в следующих разделах характеристики — теоретические, так как они не учитывают реакцию якоря.

*Реакция якоря* — это эффект, заключающийся в том, что магнитное поле, создаваемое якорем, берёт на себя магнитное поле, создаваемое системой возбуждения. В генераторе реакция якоря вызывает уменьшение выходного напряжения, а в электродвигателе она вызывает увеличение скорости.

Предотвратить эффект реакции якоря можно с помощью установки компенсирующих обмоток, расположенных в щелях лицевой поверхности полюса.

## ЭДС, генерируемая обмотками якоря

Если  $Z$  — число проводников якоря,  
 $\Phi$  — полезный магнитный поток, приходящийся на один полюс, измеряемый в веберах [Вб],  
 $p$  — число пар полюсов,  
 $n$  — скорость якоря, измеряемая в оборотах в секунду [об/с],  
 $c$  — число параллельных дорожек через обмотку между положительными и отрицательными щётками, тогда генерируемая ЭДС

$$E = \frac{2p\Phi nZ}{c} \quad (1)$$

где  $c = 2$  — для волновой обмотки,  
 $c = 2p$  — для петлевой обмотки.

**Например,** у восьмиполюсного якоря с петлевой обмоткой имеется 1 200 проводников, а магнитный поток из расчёта на один полюс равен 0.03 Вб. Определим ЭДС, генерируемую при скорости вращения якоря 500 об/с.

Для машины с петлевой обмоткой

$$E = \frac{2p\Phi nZ}{c} = \frac{2p\Phi nZ}{2p},$$

то есть

$$E = \Phi nZ = (0.03) \left( \frac{500}{60} \right) (1\,200) = 300 \text{ В.}$$

Если якорь имеет волновую обмотку (для волновой обмотки  $c = 2$ ), то генерируемая ЭДС

$$\begin{aligned} E &= \frac{2p\Phi nZ}{c} = \frac{2p\Phi nZ}{2} = \\ &= p\Phi nZ = (4)(\Phi nZ) = (4)(300) = 1\,200 \text{ В.} \end{aligned}$$

Так как в уравнении (1)  $Z$ ,  $p$  и  $c$  — постоянные для заданной машины, то  $E \sim \Phi n$ .

Однако  $2\pi n$  равно угловой скорости  $\omega$  (в радианах в секунду), следовательно, генерируемая ЭДС пропорциональна  $\Phi$  и  $\omega$ , то есть

$$E \sim \Phi \omega \quad (2)$$

## Генераторы постоянного тока

Генераторы *постоянного тока* классифицируют по способу возбуждения магнитного поля.

Во-первых, это генераторы *с независимым возбуждением*, где обмотки возбуждения соединены с источником питания иначе, чем якорь собственной машины.

Во-вторых, это генераторы *с самовозбуждением*, где обмотки возбуждения получают питание от якоря собственной машины и которые в свою очередь подразделяются на генераторы параллельного, последовательного и смешанного возбуждения.

### Типы генераторов постоянного тока и их характеристики

#### Генератор с независимым возбуждением

Схема типичного генератора *с независимым возбуждением* показана на **Рис. 61.5**.

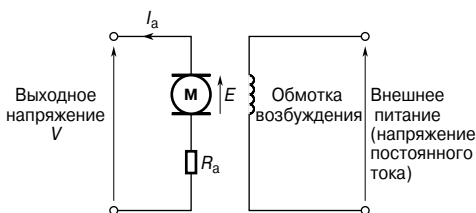


Рис. 61.5

Когда нагрузку подсоединяют к выводам якоря, появляется ток нагрузки  $I_a$ . Напряжение  $V$  на выводе окажется меньше величины ЭДС при разомкнутой цепи ( $E$ ) вследствие падения напряжения, вызванного током, текущим через сопротивление якоря, показанного как  $R_a$ , то есть выходное напряжение

$$V = E - I_a R_a$$

Тогда генерируемая ЭДС

$$E = V + I_a R_a \quad (3)$$

#### Характеристики

К двум основным характеристикам генератора относят:

- зависимость генерируемого напряжения от тока возбуждения, называемую *характеристикой холостого хода*;

- зависимость выходного напряжения от тока нагрузки, называемую *характеристикой нагрузки* или *выходной характеристикой*.

Типичная характеристика холостого хода генератора с независимым возбуждением показана на **Рис. 61.6а**, а типичная характеристика нагрузки — на **Рис. 61.6б**.

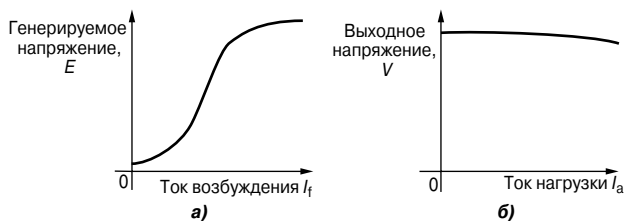


Рис. 61.6

Генератор с независимым возбуждением применяют только в отдельных случаях, когда, например, требуется широкий диапазон изменения выходного напряжения или когда требуется точное управление током возбуждения.

Недостаток этих генераторов состоит в необходимости отдельного источника питания постоянного тока.

### Генератор параллельного возбуждения

В генераторе *параллельного возбуждения* обмотка намагничивания соединена параллельно с якорем, как это видно на **Рис. 61.7**.

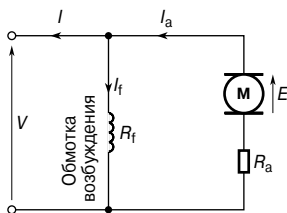


Рис. 61.7

Обмотка имеет относительно высокое сопротивление, и, следовательно, ток возбуждения — это только часть тока в обмотке якоря. Для схемы на **Рис. 61.7** имеем выходное напряжение

$$V = E - I_a R_a,$$

откуда генерируемая ЭДС

$$E = V + I_a R_a.$$

По закону Кирхгофа для тока

$$I_a = I_f + I,$$

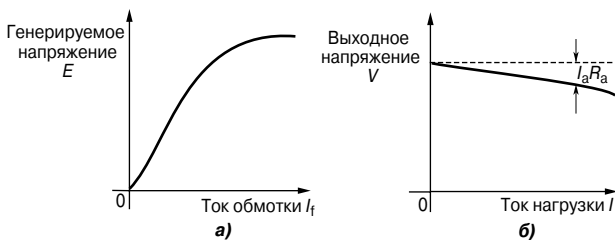
где  $I_a$  — ток в обмотке якоря,

$$I_f \text{ — ток возбуждения } \left( = \frac{V}{R} \right),$$

$I$  — ток нагрузки.

### Характеристики

Генерируемая ЭДС  $E$  пропорциональна  $\Phi\omega$ , следовательно, скорость постоянна, так как  $\omega = 2\pi n$ ,  $E \sim \Phi$ . Поток  $\Phi$  пропорционален току возбуждения  $I_f$  до тех пор, пока не возникает магнитное насыщение стального магнитопровода, и тогда характеристика холостого хода принимает вид, показанный на **Рис. 61.8а**.



**Рис. 61.8**

Так как ток нагрузки в генераторе с постоянным током возбуждения, работающего с постоянной скоростью, растёт, ток в обмотке якоря увеличивается, и, следовательно, падение напряжения на якоре  $I_a R_a$  увеличивается. Генерируемое напряжение  $E$  больше, чем окончательное напряжение  $V$ , и уравнение напряжения для цепи с якорем определяется соотношением

$$V = E - I_a R_a.$$

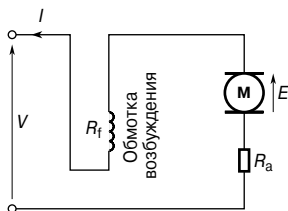
Так как  $E$  в данном случае величина постоянная, то с увеличением тока нагрузки напряжение  $V$  уменьшается. Характеристика нагрузки показана на **Рис. 61.8б**. У многих реальных генераторов параллельного возбуждения падение напряжения находится в пределах примерно 10% от напряжения без нагрузки до напряжения полной нагрузки.

Этот тип генераторов на практике используют чаще других, однако необходимо следить, чтобы величина тока нагрузки была значительно ниже максимального значения. Тогда можно избежать излишних колебаний выходного напряжения.

Обычно эти генераторы применяют для зарядки батарей и в автомобильных двигателях.

### Генератор последовательного возбуждения

В генераторе *последовательного возбуждения* обмотки намагничивания последовательно соединены с якорем, как это видно на **Рис. 61.9**.

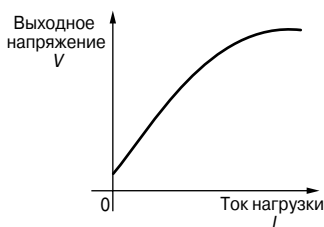


**Рис. 61.9**

### Характеристики

Нагрузочная характеристика — это зависимость выходного напряжения от тока нагрузки. Генерируемая ЭДС  $E$  пропорциональна  $\Phi\omega$ , и при постоянной скорости  $\omega (= 2\pi n)$  постоянна. Следовательно,  $E$  пропорциональна  $\Phi$ . Для величин тока ниже магнитного насыщения статора, полюсов, воздушных зазоров и сердечника якоря поток  $\Phi$  пропорционален току, а значит,  $E \sim \Phi$ . Для величин тока выше тех, которые приводят к магнитному насыщению, генерируемая ЭДС примерно постоянна.

В машине с последовательным возбуждением величины сопротивления обмотки возбуждения и сопротивления якоря малы, и, следовательно, выходное напряжение  $V$  почти приближается к значению  $E$ . Типичная нагрузочная характеристика генератора последовательного возбуждения показана на **Рис. 61.10**.



**Рис. 61.10**

В таком генераторе обмотка намагничивания соединена последовательно с якорем, и, когда выводы разомкнуты, ток возбуждения получить невозможно, поэтому нельзя получить и характеристику холостого хода. На практике генераторы последовательного возбуждения используются редко, но их можно рассматривать в качестве «усилителей» в линиях электропередачи постоянного тока.

### Генератор смешанного возбуждения

Генератор *смешанного возбуждения* содержит соединения двух типов, сочетающих в себе параллельные и последовательные обмотки так, чтобы извлечь преимущества каждого вида соединения. На **Рис. 61.11а** показан генератор смешанного возбуждения с *длинным шунтом*, а на **Рис. 61.11б** — генератор смешанного возбуждения с *коротким шунтом*. Последний находит наиболее широкое применение.

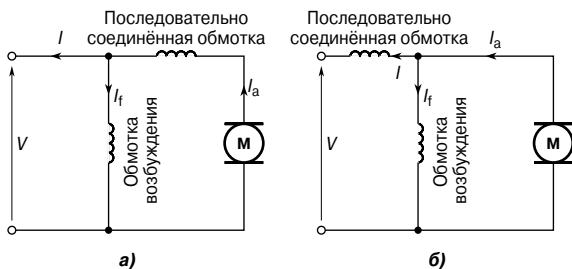


Рис. 61.11

**Например**, генератор смешанного возбуждения с коротким шунтом потребляет ток 80 А при напряжении 200 В. Определим ЭДС, если сопротивление обмотки возбуждения  $R_f = 40 \text{ Ом}$ , последовательное сопротивление обмотки короткого шунта  $R_{se} = 0.02 \text{ Ом}$ , сопротивление якоря  $R_a = 0.04 \text{ Ом}$ .

Электрическая схема с приведёнными параметрами приведена на **Рис. 61.12**.

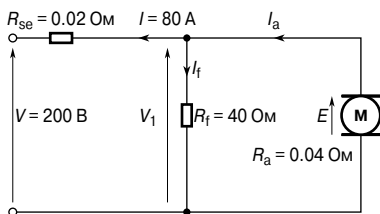


Рис. 61.12

Падение напряжения на последовательной обмотке

$$IR_{se} = (80)(0.02) = 1.6 \text{ В.}$$

Напряжение на обмотке возбуждения определяется напряжением на якоре

$$V_1 = 200 + 1.6 = 201.6 \text{ В.}$$



Ток возбуждения

$$I_f = \frac{V_1}{R_f} = \frac{201.6}{40} = 5.04 \text{ А.}$$

Ток якоря

$$I_a = I + I_f = 80 + 5.04 = 85.04 \text{ А.}$$

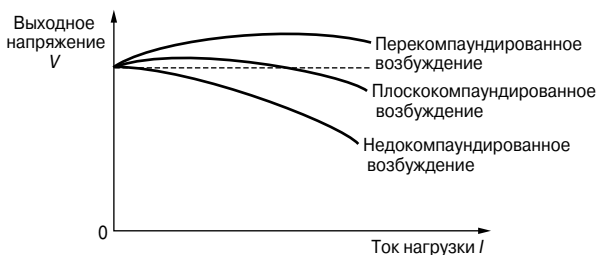
Тогда генерируемая ЭДС

$$E = V_1 + I_a R_a = 201.6 + (85.04)(0.04) = \mathbf{205 \text{ В.}}$$

### Характеристики

В машине смешанного возбуждения с согласованным включением обмоток магнитный поток, производимый полями параллельной и последовательной обмоток, является дополнительным. В эту группу входят машины с *перекомпаундированным*, *недокомпаундированным* и *плоскокомпаундированным* возбуждением, — степень *компаундированности* (смешанности) зависит от числа витков провода на последовательной обмотке.

Большое число витков последовательной обмотки приводит к перекомпаундированной характеристике, показанной на **Рис. 61.13**.



**Рис. 61.13**

Здесь выходное напряжение при полной нагрузке превышает напряжение без нагрузки. В плоскокомпаундированном генераторе напряжение на выводах при полной нагрузке приблизительно равно напряжению без нагрузки, как показано на **Рис. 61.13**.

В недокомпаундированном генераторе напряжение при полной нагрузке меньше, чем напряжение без нагрузки, как видно на **Рис. 61.13**. Однако даже эта последняя характеристика немного лучше, чем характеристика генератора с параллельным возбуждением.

Генераторы смешанного возбуждения применяются в аппаратах дуговой электросварки, в системах освещения и морском оборудовании.

## Потери мощности в машинах постоянного тока

Как уже говорилось ранее, генератор — это машина для преобразования механической энергии в электрическую, а электродвигатель — машина для преобразования электрической энергии в механическую. При такого рода преобразованиях возникают определённые потери мощности, главным образом в виде тепла.

К основным видам потерь относят:

- *потери на медь* в обмотке из-за омических ( $I^2 R$ ), а следовательно, и тепловых потерь в обмотках якоря и электромагнита;
- *потери на сталь* (или в сердечнике) из-за гистерезисных потерь и вихревых токов в якоре. Эти потери можно уменьшить, если якорь готовить из пластин стали, легированной кремнием, обладающих высоким сопротивлением и низкими гистерезисными потерями. При постоянной скорости вращения якоря потери на сталь считаются постоянными;
- *потери на трение* и сопротивление воздуха из-за трения щёток и шейки вала и сопротивления воздуха относительно движущихся деталей. При постоянной скорости вращения якоря эти потери считаются постоянными;
- *потери на контакт* между щётками и коллектором. Эти потери примерно пропорциональны току нагрузки.

Общие потери машины могут оказаться значительными. Как правило, коэффициент полезного действия электрических машин составляет от 80 до 90%.

## Коэффициент полезного действия генератора постоянного тока

*Коэффициент полезного действия* (КПД) электрической машины определяется отношением выходной мощности к входной, обычно выражаемым в процентах. Для обозначения этой величины используется греческая буква « $\eta$ », и так как это отношение двух одноимённых величин, то есть  $\frac{\text{мощность}}{\text{мощность}}$ , то КПД — безразмерная величина. Значит, коэффициент полезного действия

$$\eta = \left( \frac{\text{выходная мощность}}{\text{входная мощность}} \right) \times 100 \%$$

Если суммарное сопротивление цепи якоря (включая сопротивление контакта щёток) равно  $R_a$ , то потери в цепи якоря равны  $I_a^2 R_a$ .

Если выходное напряжение равно  $V$ , а ток в параллельной цепи возбуждения равен  $I_f$ , то потери в параллельной цепи равны  $I_f V$ .

Если сумма потерь на сталь, на трение и на сопротивление воздуха равна  $C$ , тогда суммарные потери равны

$$I_a^2 R_a + I_f V + C$$

( $I_a^2 R_a + I_f V$  — это фактически «потери на медь»).

Если ток на выходе равен  $I$ , тогда

$$\text{выходная мощность} = VI,$$

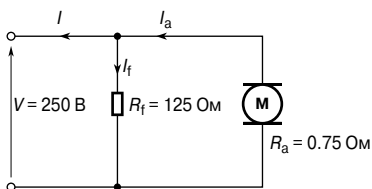
$$\text{суммарная входная мощность} = VI + I_a^2 R_a + I_f V + C.$$

Тогда КПД электрических машин

$$\eta = \frac{\text{ВЫХОД}}{\text{ВХОД}} = \left( \frac{VI}{VI + I_a^2 R_a + I_f V + C} \right) \times 100\% \quad (4)$$

**Например,** генератор с параллельным возбуждением мощностью 10 кВт имеет сопротивление цепи якоря 0.75 Ом, а сопротивление обмотки возбуждения — 125 Ом. Выходное напряжение при полной нагрузке — 250 В. Определим КПД генератора при полной нагрузке, полагая, что потери на сталь, на трение и на сопротивление воздуха равны 600 Вт.

Электрическая схема с приведёнными параметрами приведена на **Рис. 61.14**.



**Рис. 61.14**

$$\text{Выходная мощность} = 10\,000 \text{ Вт} = VI,$$

откуда ток нагрузки

$$I = \frac{10\,000}{V} = \frac{10\,000}{250} = 40 \text{ А.}$$

Ток в цепи возбуждения

$$I_f = \frac{V}{R_f} = \frac{250}{125} = 2 \text{ А.}$$

Ток якоря

$$I_a = I_f + I = 2 + 40 = 42 \text{ A.}$$

Тогда коэффициент полезного действия

$$\begin{aligned} \eta &= \left( \frac{VI}{VI + I_a^2 R + I_f V + C} \right) \times 100\% = \\ &= \left( \frac{10\,000}{10\,000 + (42)^2(0.75) + (2)(250) + 600} \right) \times 100\% = \\ &= \mathbf{80.50\%}. \end{aligned}$$

Коэффициент полезного действия генератора максимален, когда выполняется равенство

$$I_a^2 R_a = VI_f + C,$$

то есть когда переменные потери равны постоянным потерям.

## Электродвигатель постоянного тока

Устройство *электродвигателя постоянного тока* такое же, как устройство генератора постоянного тока. Единственное отличие заключается в том, что в генераторе ЭДС выше, чем выходное напряжение, в то время как в электродвигателе ЭДС ниже, чем выходное напряжение.

Электродвигатели постоянного тока часто применяют на электростанциях в системах управления аварийными насосами, приводимыми в действие для защиты жизненно важного оборудования и всего производства, в тех случаях, когда отказывают обычные насосы или источники питания переменного тока.

### *Противо-ЭДС и полная электрическая мощность*

Когда якорь электродвигателя постоянного тока вращается, в его проводниках индуцируется ЭДС. По закону Ленца это индуцирует ЭДС, противоположно направленную напряжению  $V$ , и такая ЭДС называется *противо-ЭДС*. Тогда

$$\boxed{V = E + I_a R_a} \quad \text{или} \quad \boxed{E = V - I_a R_a} \quad (5)$$

Из уравнения (5) в случае электродвигателя постоянного тока напряжение питания

$$V = E + I_a R_a.$$

Умножая каждую из величин на  $I_a$ , получаем

$$VI_a = EI_a + I_a^2 R_a.$$

Выражение  $VI_a$  называют *полной электрической мощностью*, подаваемой на якорь; выражение  $I_a^2 R_a$  отражает потери на сопротивлении якоря, а выражение  $E I_a$  — механическую мощность, развиваемую якорем.

### **Вращающий момент электродвигателя**

Если  $M$  — *вращающий момент*, измеряемый в ньютон-метрах [Н·м], то выделяемая механическая мощность равна  $M\omega$  ватт (гл. 28).

Следовательно,

$$M\omega = 2\pi n M = E I_a,$$

откуда

$$\boxed{M = \frac{E I_a}{2\pi n}} \quad (6)$$

Из уравнения (1) генерируемая ЭДС

$$E = \frac{2p\Phi n Z}{c},$$

тогда, используя уравнение (6), имеем

$$2\pi n M = E I_a = \left( \frac{2p\Phi n Z}{c} \right) I_a.$$

Следовательно, вращающий момент

$$M = \frac{\left( \frac{2p\Phi n Z}{c} \right)}{2\pi n} I_a,$$

или

$$\boxed{M = \frac{p\Phi Z I_a}{\pi c}} \quad (7)$$

Для каждой данной машины  $Z$ ,  $c$  и  $p$  имеют фиксированные значения.

Отсюда, вращающий момент

$$\boxed{M \sim \Phi I_a} \quad (8)$$

**Например,** электродвигатель постоянного тока с восемью полюсами имеет якорь с волновой обмоткой с 900 проводниками. Полезный магнитный поток, приходящийся на один полюс, равен 25 мВб. Определим вращающий момент, возникающий, когда в каждом проводнике якоря течёт ток 30 А.

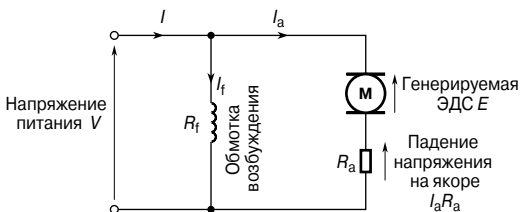
Так как для волновой обмотки  $c = 2$ , то вращающий момент

$$M = \frac{p\Phi Z I_a}{\pi c} = \frac{(4)(25 \times 10^{-3})(900)(30)}{\pi(2)} = 429.7 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

## Типы электродвигателей и их характеристики

### *Электродвигатель параллельного возбуждения*

В электродвигателе *параллельного возбуждения* обмотка возбуждения соединена параллельно с якорем, как показано на **Рис. 61.15**.



**Рис. 61.15**

Для показанной на **Рис. 61.15** схеме напряжение питания

$$V = E + I_a R_a,$$

откуда генерируемая ЭДС

$$E = V - I_a R_a.$$

По закону Кирхгофа ток в цепи питания

$$I = I_a + I_f.$$

### Характеристики

Две основные характеристики — это зависимость вращающего момента от тока в якоре и зависимость скорости вращения от тока в якоре. Из этих двух характеристик можно вывести зависимость скорости от вращающего момента.

- Теоретически характеристику «вращающий момент/скорость якоря» можно вывести из выражения  $T \sim \Phi I_a$ . Для электродвигателя параллельного возбуждения обмотка возбуждения параллельно соединена с якорной схемой, и, следовательно, прикладываемое напряжение даёт постоянный ток возбуждения, то есть электродвигатель параллельного возбуждения — это машина с постоянным магнитным потоком. А если это так, то  $M \sim I_a$ . Эта характеристика показана на **Рис. 61.16**.

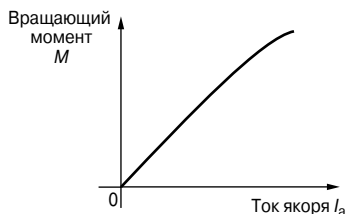


Рис. 61.16

- Якорная схема электродвигателя постоянного тока обладает активным сопротивлением, определяемым сопротивлениями обмотки якоря и щёток и равным  $R_a$  Ом. С протеканием тока якоря  $I_a$  из-за этого сопротивления возникает падение напряжения, равное  $I_a R_a$  вольт. В схеме на **Рис. 61.15** для лучшего понимания сопротивление якоря показано как отдельный резистор в якорной цепи.

Хотя в данном случае рассматривается электродвигатель, тем не менее проводники якоря, вращающиеся в магнитном поле, генерируют напряжение  $E \sim \Phi \omega$ .

Из уравнения (5)

$$E = V - I_a R_a.$$

Однако

$$E \sim \Phi n,$$

откуда

$$n \sim \frac{E}{\Phi},$$

то есть, имея в виду уравнение (5), скорость вращения

$$n \sim \frac{E}{\Phi} \sim \frac{V - I_a R_a}{\Phi}. \quad (9)$$

Для электродвигателя с параллельным возбуждением  $V$ ,  $\Phi$  и  $R_a$  — величины постоянные, значит, с увеличением тока якоря  $I_a$  увеличивается  $I_a R_a$ , а  $(V - I_a R_a)$  уменьшается, и, сле-

довательно, скорость, пропорциональная этой величине, также уменьшается, что показано на **Рис. 61.17**.

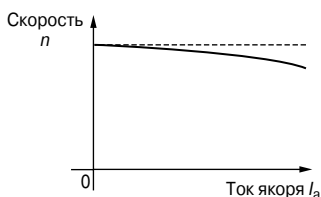


Рис. 61.17

Когда нагрузка на вал электродвигателя растёт,  $I_a$  увеличивается и скорость немного падает. На практике в большинстве электродвигателей параллельного возбуждения скорость падает примерно на 10% между режимом без нагрузки и с полной нагрузкой. Так как это довольно незначи-

тельное падение, электродвигатели параллельного возбуждения, как правило, считаются машинами с постоянной скоростью вращения якоря и могут применяться для управления токарными станками, линиями валов, вентиляторами, конвейерными лентами, насосами, компрессорами, бурильными машинами и т. д.

- Так как вращающий момент пропорционален току якоря (см. выше), теоретическую характеристику «скорость/вращающий момент», показанную на **Рис. 61.18**, можно построить из характеристик «вращающий момент/ток якоря» и «скорость вращения/ток якоря».

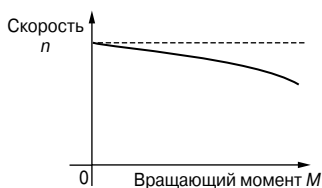


Рис. 61.18

### Электродвигатель последовательного возбуждения

В электродвигателе последовательного возбуждения обмотка возбуждения соединена с якорем последовательно, как показано на **Рис. 61.19**.

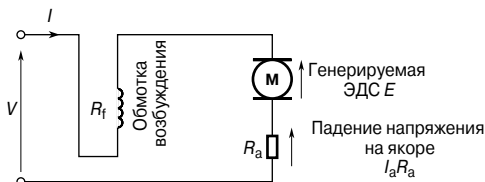


Рис. 61.19



Напряжение питания

$$V = E + I(R_a + R_f),$$

откуда генерируемая ЭДС

$$E = V - I(R_a + R_f).$$

### Характеристики

В электродвигателе последовательного возбуждения ток якоря течёт в обмотке возбуждения и, следовательно, равен току в цепи питания  $I$ .

#### **Характеристика «вращающий момент/ток»**

Ранее было показано, что вращающий момент  $M \sim \Phi I_a$ . Так как ток якоря и ток возбуждения в такой машине равны току  $I$ , то  $M \sim \Phi I$  в ограниченном диапазоне до того, как достигается магнитное насыщение магнитной цепи в электродвигателе (то есть на линейной части  $B-H$  кривой магнитной цепи — станина статора, полюсы, воздушные зазоры, щётки и якорь). Следовательно,  $\Phi \sim I$  и  $M \sim I^2$ .

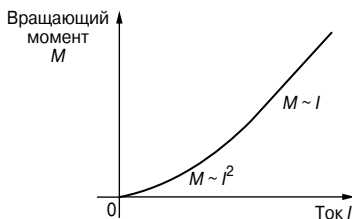


Рис. 61.20

После магнитного насыщения  $\Phi$  становится практически постоянной и  $M \sim I$ . На Рис. 61.20 показана теоретическая характеристика «вращающий момент/ток».

#### **Характеристика «скорость/ток»**

В уравнении (9) показано, что

$$n \sim \frac{V - I_a R_a}{\Phi}.$$

В электродвигателе с последовательным возбуждением  $I_a = I$  и магнитный поток ниже уровня магнитного насыщения, поэтому  $\Phi \sim I$ .

Следовательно,

$$n \sim \frac{V - IR}{I},$$

где  $R$  — суммарное сопротивление последовательной обмотки и якорной цепи.

Так как  $IR$  мало по сравнению с  $V$ , справедливо приближительное соотношение для скорости

$$n \sim \frac{V}{I} \sim \frac{1}{I}, \text{ так как } V \text{ постоянная.}$$

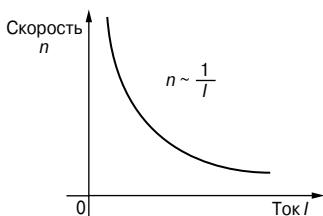


Рис. 61.21

Теоретическая характеристика «скорость вращения/ток» показана на **Рис. 61.21**.

Высокая скорость при малом токе показывает, что этот тип электродвигателя не должен работать с очень малыми нагрузками, и такие электродвигатели непременно фиксированно сопряжены с их нагрузками.

#### Характеристика «скорость/вращающий момент»

Теоретически такая характеристика может вытекать из двух первых, если для разных значений тока получить вращающий момент и скорость и нанести координаты на характеристику «скорость/вращающий момент». На **Рис. 61.22** показана типичная характеристика «скорость вращения/вращающий момент».

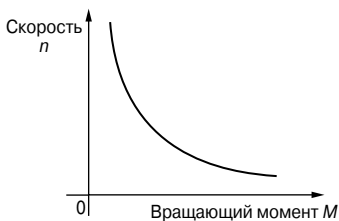


Рис. 61.22

При запуске электродвигателя последовательного возбуждения нужен большой ток, и характеристика на **Рис. 61.20** показывает, что электродвигатель с последовательным возбуждением имеет большой вращающий момент при большом токе. Поэтому эти электродвигатели применяют в уст-

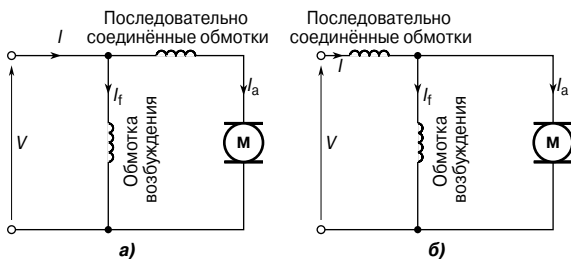
ройствах, где требуется большая тяга (например, в поездах, локомотивах и т. д.), используют в кранах и подъёмниках, где необходим большой начальный вращающий момент.

#### Электродвигатель смешанного возбуждения

Существует два типа электродвигателей смешанного возбуждения:

- с *согласованно включёнными обмотками*, где последовательная обмотка соединена так, что поле, возникающее в ней, благоприятствует полю, возникшему в параллельной обмотке;
- с *дифференциально включёнными обмотками*, где последовательная обмотка соединена так, что поле, возникающее в ней, противостоит полю, возникающему в параллельной обмотке.

На **Рис. 61.23а** показана схема электродвигателя смешанного возбуждения с *длинным шунтом*, а на **Рис. 61.23б** — с *коротким шунтом*.

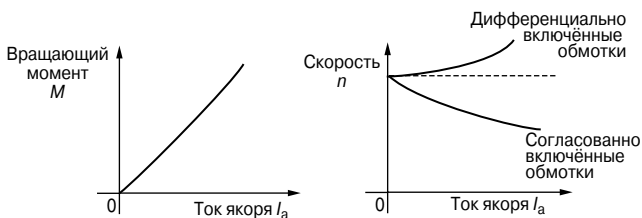


**Рис. 61.23**

### Характеристики

Электродвигатель со смешанным возбуждением имеет как последовательную, так и параллельную обмотку (то есть одна обмотка соединена с якорем последовательно, а другая — параллельно), и обычно проводники навиты так, чтобы его характеристики были похожи по форме на характеристики электродвигателя последовательного возбуждения (см. **Рис. 61.20**, **Рис. 61.21**, **Рис. 61.22**).

Чтобы удержать скорость в режиме без нагрузки в безопасных пределах, число витков параллельной обмотки ограничено. Однако, изменяя число витков в последовательных и параллельных обмотках и направления магнитных полей, создаваемых этими обмотками (благоприятствующих или препятствующих), можно получить семейства характеристик, приспособленных к любым условиям применения. Обычно электродвигатели со смешанным возбуждением применяются для тяжёлых режимов работы, особенно там, где большая нагрузка может возникнуть внезапно. Например, их используют для управления поршневыми насосами, прессами, шестерёночными подъёмниками, конвейерами, кранами и т. д. На **Рис. 61.24** показаны типичные характеристики вращающего момента и скорости электродвигателя.



**Рис. 61.24**

## Коэффициент полезного действия электродвигателей постоянного тока

Как было показано ранее, коэффициент полезного действия электродвигателя постоянного тока равен

$$\eta = \frac{\text{выходная мощность}}{\text{входная мощность}} \times 100\%.$$

$$\text{Общие потери электродвигателя} = I_a^2 R_a + I_f V + C,$$

где  $C$  — сумма потерь на сталь, на трение и на сопротивление воздуха.

Для электродвигателя

$$\text{входная мощность} = VI,$$

$$\begin{aligned} \text{выходная мощность} &= VI - \text{потери} = \\ &= VI - I_a^2 R_a - I_f V - C. \end{aligned}$$

Тогда коэффициент полезного действия

$$\eta = \left( \frac{VI - I_a^2 R_a - I_f V - C}{VI} \right) \times 100\% \quad (10)$$

**Например,** электродвигатель последовательного возбуждения, находящийся под нагрузкой, имеет скорость вращения 30 об/с и потребляет при этом ток 10 А при напряжении питания 400 В. Определим коэффициент полезного действия, если общее сопротивление электродвигателя равно 2 Ом, а потери на сталь, на трение и на сопротивление воздуха достигают 300 Вт.

Коэффициент полезного действия равен

$$\begin{aligned} \eta &= \left( \frac{VI - I^2 R - C}{VI} \right) \times 100\% = \\ &= \left( \frac{(400)(10) - (10)^2(2) - 300}{(400)(10)} \right) \times 100\% = \\ &= 87.5\%. \end{aligned}$$

КПД электродвигателя максимален, когда выполняется условие

$$I_a^2 R_a = I_f V + C.$$

## Стартер электродвигателя постоянного тока

Если электродвигатель постоянного тока со стационарным якорем подключить непосредственно к источнику питания, скорее всего предохранители электродвигателя сгорят. Это произойдёт потому, что сопротивление якоря мало (зачастую меньше одного ома). Следовательно, в тот момент, когда переключатель замыкается для запуска электродвигателя, в цепь якоря следует добавить дополнительное сопротивление.

С увеличением скорости электродвигателя проводники якоря пересекают магнитный поток, и генерируется напряжение, действующее противоположно приложенному напряжению, что ограничивает ток якоря. Следовательно, величину дополнительного сопротивления якоря можно после запуска уменьшить.

Когда при нормальной скорости индуцированная ЭДС принимает постоянную величину, в цепи якоря уже не требуется никакого дополнительного сопротивления. Для реализации этого меняющегося сопротивления в цепи электродвигателя постоянного тока при старте применяется *стартер*, показанный на Рис. 61.25.

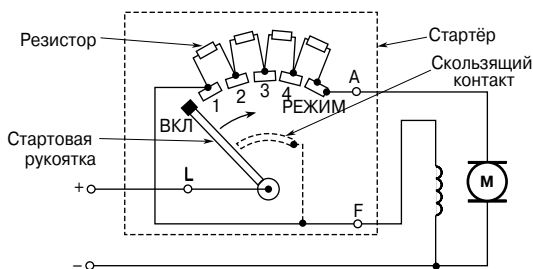


Рис. 61.25

Чтобы запустить электродвигатель, пусковая рукоятка двигателя медленно в направлении против часовой стрелки. В случае электродвигателя параллельного возбуждения обмотка возбуждения подсоединяется к  $I$  или  $L$  посредством скользящего контакта на пусковой рукоятки, чтобы обеспечить максимальный ток возбуждения, а следовательно, и максимальный магнитный поток, и максимальный вращающий момент при запуске (напомним, что  $M \sim \Phi I_a$ ). Для электродвигателя последовательного возбуждения используется схожее устройство без соединения обмотки.

## Управление скоростью электродвигателя постоянного тока

### Электродвигатель с параллельным возбуждением

Скорость электродвигателя с параллельным возбуждением  $n$  в соответствии с уравнением (9) пропорциональна выражению

$$\frac{V - I_a R_a}{\Phi},$$

откуда следует, что скорость можно изменять, изменяя либо величину магнитного потока  $\Phi$ , либо величину сопротивления якоря  $R_a$ .

Первое достигается благодаря резистору, последовательно соединённому с обмоткой возбуждения, как это показано на **Рис. 61.26а**. Такой резистор называют *стабилизатором поля параллельной обмотки*.

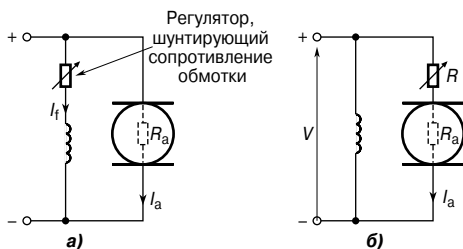


Рис. 61.26

Когда увеличивают сопротивление регулятора параллельной обмотки возбуждения, значение тока обмотки возбуждения  $I_f$  уменьшается. В результате уменьшается значение потока  $\Phi$ , а следовательно, увеличивается скорость, так как  $n \sim 1/\Phi$ . Следовательно, с помощью этого метода можно получить только те скорости, которые выше скоростей, полученных без регулятора параллельной обмотки возбуждения. Скорости ниже тех, что вычисляются по формуле  $\frac{V - I_a R_a}{\Phi}$ , получаются увеличением со-

противления в цепи якоря, как это показано на **Рис. 61.26б**, где

$$n \sim \frac{V - I_a (R_a + R)}{\Phi}.$$

Так как резистор  $R$  соединён с якорем последовательно, через него течёт полный ток якоря, что приводит к значительной потере мощности в больших моторах, где требуется, чтобы довольно продолжительное время наблюдалось значительное снижение скорости.

### Электродвигатель с последовательным возбуждением

Управление скоростью двигателей с последовательным возбуждением достигается за счёт использования либо а) сопротивления обмотки возбуждения, либо б) методом сопротивления обмотки якоря.

#### Управление скоростью

##### путём изменения сопротивления обмотки возбуждения

Скорость двигателя с последовательным возбуждением задаётся соотношением

$$n = k \left( \frac{V - IR}{\Phi} \right),$$

где  $k$  — постоянная,

$V$  — напряжение на зажимах,

$R$  — объединённое сопротивление якоря и последовательной обмотки возбуждения,

$\Phi$  — магнитный поток.

Следовательно, в результате уменьшения потока увеличивается скорость. Это достигается тем, что обмотки возбуждения шунтируют резистором переменного сопротивления, а также уменьшают ток обмотки возбуждения, а значит, и поток до заданного значения тока питания. Принципиальная схема такого устройства показана на **Рис. 61.27а**.

Переменный резистор, соединённый параллельно с последовательным возбуждением для управления скоростью, называют *отводным устройством*. Этот метод позволяет получить скорости выше тех, что даны без отводного устройства.

#### Управление скоростью

##### путём изменения омического сопротивления

Скорости ниже нормальных получают последовательным соединением резистора переменного сопротивления с обмоткой возбуждения и цепью якоря, как показано на **Рис. 61.27б**. Этот приём увеличивает сопротивление  $R$  в уравнении

$$n = k \left( \frac{V - IR}{\Phi} \right), \text{ а следовательно, уменьшает скорость.}$$

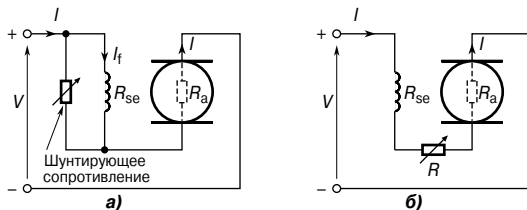


Рис. 61.27

Так как дополнительный резистор пропускает полный ток питания, большие потери мощности — свойство больших электродвигателей, в которых требуется значительное уменьшение скорости в течение продолжительного времени.

## **Охлаждение электродвигателя**

Электродвигатели часто классифицируют по типу кожуха, который выбирают в зависимости от условий, в которых применяется электродвигатель, и уровня необходимой вентиляции.

Самый распространённый тип защищённого электродвигателя — это электродвигатель с *защитным экраном* и с вентилятором внутри корпуса, при этом зазоры на конце электродвигателя согласуются с проволочным каркасом.

Электродвигатель *влагозащищённого* типа похож на электродвигатель с защитным экраном, но у него имеется колпак над экраном, чтобы капли воды не попадали в машину.

Электродвигатель с принудительным охлаждением обычно остужается отводом тепла из корпуса электродвигателя.

Воздух по трубе поступает к электродвигателю из объёма с обеспыленной атмосферой, а установленный внутри вентилятор обеспечивает циркуляцию этого холодного воздуха.



## 62. ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### Введение

Широкое применение нашли два основных типа электродвигателя переменного тока, а именно *асинхронный двигатель* и *синхронный двигатель*. Каждый из них можно подразделять и дальше: на работающих от трёхфазного промышленного источника питания, и называемых *трёхфазными двигателями*, и на тех, которые в основном используются в бытовой технике и называются *однофазными двигателями*.

В электродвигателях постоянного тока, о которых речь шла в гл. 61, обмотки вращающегося якоря проходят через стационарное магнитное поле. В трёхфазных асинхронных двигателях вращается магнитное поле, и преимущество такой конструкции состоит в том, что нет необходимости создавать дополнительные электрические соединения с ротором. Название «асинхронный» (в английской терминологии такой двигатель характеризуется термином *induced*, то есть индуцируемый. — *Прим. переводчика*) происходит от того, что ток в роторе индуцируется магнитным полем, а не подаётся за счёт электрического соединения с источником питания.

В результате такой электродвигатель обладает рядом достоинств. Во-первых, он дешёвый и прочный; во-вторых, взрывобезопасен, так как отсутствуют коллектор или скользящие кольца и щётки и вызываемые ими искры; в-третьих, требует незначительного (или вообще не требует) квалифицированного технического обслуживания и, наконец, в-четвёртых, обладает свойствами самопроизвольного старта, когда его переключают на источник питания без дополнительных расходов на периферийное оборудование. Основной недостаток этих двигателей в том, что нельзя быстро устанавливать их скорость.

### Создание вращающегося магнитного поля

Когда трёхфазный источник питания соединён с симметричными трёхфазными обмотками, токи, текущие в этих обмотках, создают магнитное поле. Это магнитное поле имеет постоянную величину и вращается, как показано ниже, с постоянной скоростью, которая называется *синхронной скоростью*.

На **Рис. 62.1** видно, что обмотки состоят из трёх однопетлевых проводников (по одному на каждую фазу), отмеченными буквами  $R_S R_F$ ,  $Y_S Y_F$  и  $B_S B_F$ , где буквы R, Y, B, S и F означают красный провод (Red), жёлтый провод (Yellow), синий провод (Blue), старт (Start) и финиш (Finish) соответственно.

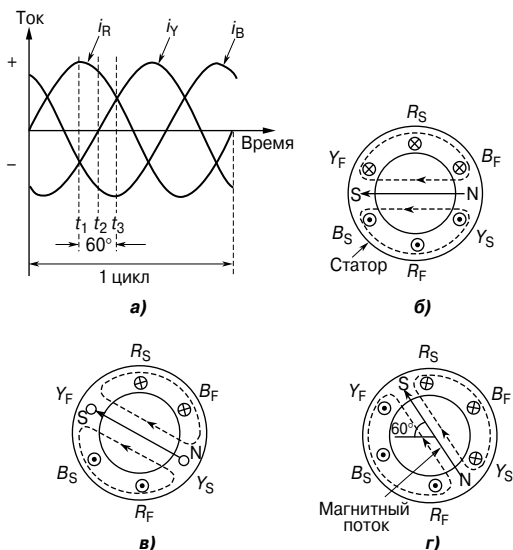


Рис. 62.1

В реальных конструкциях каждая фазная обмотка состоит из многих витков, распределённых вокруг статора; конструкция с одной петлёй используется лишь для простоты пояснения. Когда обмотки статора подсоединены к трёхфазному источнику питания, текущий в каждой обмотке ток меняется со временем, как это показано на **Рис. 62.1а**. Если величина тока в обмотке положительна, считается, что ток течёт от начала к концу обмотки, то есть если фаза «красная», ток течёт от  $R_S$  к  $R_F$ , то есть от наблюдателя в  $R_S$ , к наблюдателю в  $R_F$ . Когда значение тока отрицательно, считается, что ток течёт от конца к началу, то есть к наблюдателю в «S» обмотке от наблюдателя в «F» обмотке. В момент времени  $t_1$ , как показано на **Рис. 62.1а**, ток, текущий в «красной» фазе, достигает максимального положительного значения. В тот же момент времени  $t_1$  каждый из токов, текущих в «жёлтой» и «синей» фазе равен половине максимального значения и имеет отрицательный знак.

Следовательно, ток в обмотках статора распределяется так, как это показано на **Рис. 62.1б**, где ток течёт от наблюдателя (показанного как  $\otimes$ ) в  $R_S$ , так как он положителен, но в направлении наблюдателя в  $Y_S$  и  $B_S$  (показанных как  $\odot$ ), так как он отрицателен.

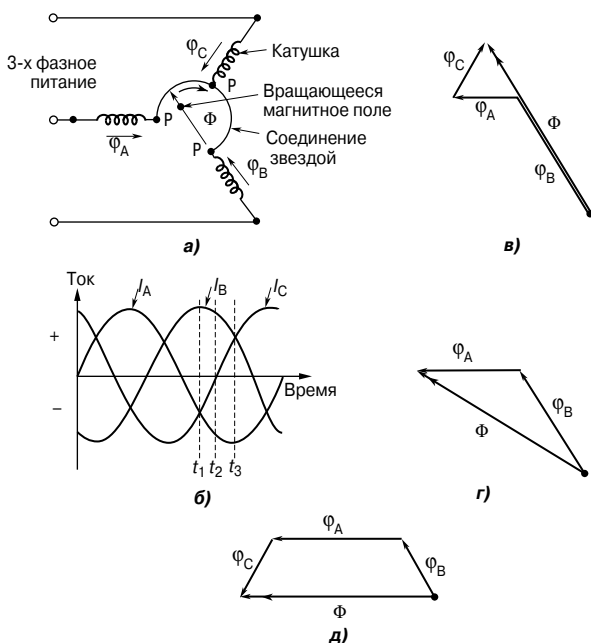
В результате действия «соленоида» и в соответствии с правилом буравчика создаётся магнитное поле, направление которого показано пунктиром на **Рис. 62.1б**.

Спустя короткий интервал времени, в момент  $t_2$  ток, текущий в «красной» фазе, уменьшается примерно до значения в 0.87 раза меньше своего максимума, и он положителен, ток в «жёлтой» фазе равен нулю, а ток в «синей» фазе примерно в 0.87 раза меньше своего максимума и отрицателен. Значит, токи и получившееся в результате магнитное поле будут такими, как показано на **Рис. 62.1в**.

В момент времени  $t_3$  токи в «красной» и «жёлтой» фазе имеют величину в 2 раза меньше своего максимума, а ток в «синей» фазе принимает своё максимальное отрицательное значение. Эти токи и получившееся в результате магнитное поле показаны на **Рис. 62.1г**.

Диаграммы, схожие с диаграммами на **Рис. 62.1б**, **Рис. 62.1в** и **Рис. 62.1г** можно получить для любого момента времени, и тогда станет очевидно, что магнитное поле совершает полный оборот за каждый цикл приложенного к обмоткам статора напряжения. Ниже показано, что вращающееся магнитное поле имеет постоянную величину магнитного потока. Для этого рассмотрим величину магнитного потока, а не величины токов.

Три катушки, показанные на **Рис. 62.2а**, соединены звездой с трёхфазным источником тока.



**Рис. 62.2**

Пусть положительные направления магнитных потоков, созданных токами, текущими в катушках, будут  $\Phi_A$ ,  $\Phi_B$  и  $\Phi_C$ , соответственно. Их направления не меняются, а значения пропорциональны токам, текущим в катушках, в любой момент времени. В момент  $t_1$ , показанный на **Рис. 62.2б**, в катушке текут токи:  $i_B$ , максимальное положительное значение, то есть поток к точке P;  $i_A$  и  $i_C$ , равные половине максимального значения и отрицательные, то есть их магнитные потоки направлены от точки P.

Эти токи порождают магнитные потоки  $\Phi_A$ ,  $\Phi_B$  и  $\Phi_C$ , чьи значения и направления показаны на **Рис. 62.2в**. Результирующий поток — это векторная сумма  $\Phi_A$ ,  $\Phi_B$  и  $\Phi_C$ , показанная как  $\Phi$  на **Рис. 62.2в**.

В момент времени  $t_2$  токи будут такими:

$i_B$  — 0.866 от максимального положительного значения,

$i_C$  — ноль,

$i_A$  — 0.866 от максимального отрицательного значения.

Магнитные потоки и результирующее магнитное поле такие, как показано на **Рис. 62.2г**.

В момент времени  $t_3$ :

$i_B$  — 0.5 от максимального значения и положителен,

$i_A$  — максимален и отрицателен,

$i_C$  — 0.5 от максимального значения и положителен.

На **Рис. 62.2д** показаны магнитные потоки и результирующий магнитный поток.

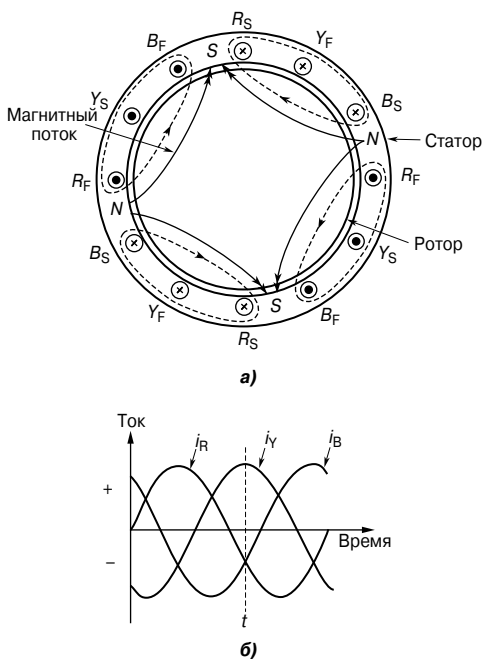
Анализ **Рис. 62.2в**, **Рис. 62.2г** и **Рис. 62.2д** показывает, что величина результирующего потока  $\Phi$  в каждом случае постоянна и равна  $\frac{1}{2}$  от максимального значения  $\Phi_A$ ,  $\Phi_B$  или  $\Phi_C$ , но направление потока меняется.

Процесс определения результирующего магнитного потока можно повторить для любого момента. И всегда величина результирующего магнитного потока будет постоянна для всех значений времени, и при этом поток вращается с постоянной скоростью, совершая один оборот за каждый цикл изменения напряжения питания.

## Скорость синхронизации

Вращающееся магнитное поле, созданное трёхфазными обмотками, могло бы быть создано благодаря вращению северного и южного полюса постоянного магнита с синхронной скоростью, (показанных как N и S на концах векторов потока на **Рис. 62.1б**, **Рис. 62.1в** и **Рис. 62.1г**). Такая конструкция называется *двухполюсной системой*, а асинхронный двигатель, использующий только трёхфазные обмотки, называется *двухполюсным асинхронным двигателем*.

Если шесть обмоток сместить одну по отношению к другой на  $60^\circ$ , как показано на **Рис. 62.3а**, построив графики тока и результирующего магнитного поля в разные моменты времени, то можно показать, что за один цикл тока питания, подаваемого на обмотки статора, магнитное поле переместится на половину оборота.



**Рис. 62.3**

На **Рис. 62.3б** изображено распределение тока в обмотках статора, показанного на **Рис. 62.3а**, для момента времени  $t$ .

Можно увидеть, что для шести обмоток на статоре создаваемый магнитный поток такой же, как магнитный поток, создаваемый вращением северных и южных полюсов двух постоянных магнитов с синхронной скоростью. Такая конструкция называется *четырёхполюсной системой*, а асинхронный двигатель с шестью фазовыми обмотками называется *четырёхполюсным асинхронным двигателем*. Увеличивая число фазных обмоток, число полюсов можно увеличить до любого чётного числа.

В общем случае если  $f$  — частота токов в обмотках статора, навитых так, чтобы быть эквивалентом  $p$  пар полюсов, то ско-

рость вращения магнитного поля, то есть синхронная скорость  $n_s$ , равна

$$n_s = \frac{f}{p}$$

**Например**, трёхфазный асинхронный двигатель с четырьмя полюсами подсоединён к источнику питания с рабочей частотой 50 Гц. Синхронная скорость двигателя, измеряемая в оборотах в минуту, в таком случае равна

$$n_s = \frac{50}{2} = 25 \text{ об/с},$$

или

$$25 \times 60 = 1\,500 \text{ об/мин.}$$

## Устройство трёхфазного асинхронного двигателя

Статор трёхфазного асинхронного двигателя — это стационарная часть, соответствующая станине статора машины постоянного тока. Его обмотка выполнена так, чтобы создавать 2-полюсное, 4-полюсное, 6-полюсное и т. д. вращающееся магнитное поле в зависимости от требуемой скорости ротора. Ротор, соответствующий якору машины постоянного тока, состоит из стальных ламинированных пластин, чтобы уменьшить вихревые токи.

В наиболее широко применяемом типе ротора, называемом *короткозамкнутым ротором* (известном также под названием «беличье колесо»), медные или алюминиевые стержни помещены в вырезанные в стальных пластинах отверстия, при этом концы стержней приварены или припаяны твёрдым припоем к хорошо проводящему кольцу (**Рис. 62.4а**).

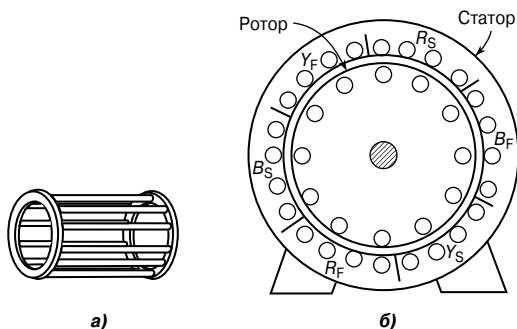


Рис. 62.4

На **Рис. 62.4б** показано поперечное сечение трёхфазного асинхронного двигателя.

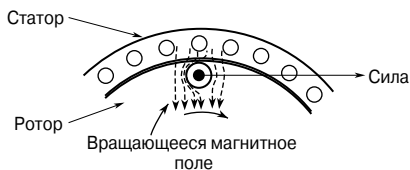
Проводники помещены в щели в пластинчатом стальном сердечнике электродвигателя. Если щели скошены, то это позволяет достичь лучшего запуска и обеспечить менее шумную работу ротора. В роторе этого типа нет никаких внешних соединений, и это означает, что не нужны скользящие кольца и щётки. Двигатель с короткозамкнутым ротором дешёв, надёжен и эффективен.

Другой тип ротора называется *фазным ротором*. В роторе этого типа имеются фазные обмотки в щелях, похожие на те, что есть в статоре. Обмотки могут быть соединены звездой или треугольником, и эти соединения ведут к трём скользящим кольцам. Скользящие кольца используют для того, чтобы добавить внешнее сопротивление к цепи ротора, особенно во время запуска, однако в обычном рабочем режиме кольца разомкнуты.

Принцип действия у фазного ротора и короткозамкнутого ротора одинаков.

## Принцип работы трёхфазного асимметричного двигателя

Когда трёхфазный источник питания подсоединён к обмоткам статора, возникает вращающееся магнитное поле. Когда магнитный поток пересекает стержень ротора, в нём возникает ЭДС, и, так как он подсоединён через конец проводящего кольца к другому стержню, отстоящему на один полюсный шаг, в стержнях начинает течь ток. Магнитное поле, связанное с этим током в стержнях, взаимодействует с вращающимся магнитным полем, и возникает сила, стремящаяся повернуть ротор в том же направлении, что и вращающееся магнитное поле (**Рис. 62.5**).



**Рис. 62.5**

Схожие силы прикладываются ко всем проводникам ротора так, что возникает вращающий момент, заставляющий ротор вращаться.

## Скольжение

Сила, создаваемая стержнями ротора, заставляет ротор поворачиваться в направлении вращающегося магнитного поля. С увеличением скорости вращения ротора темп, с которым магнитное поле пересекает стержни ротора, уменьшается, а частота индуцируемой в стержнях ЭДС падает. Если ротор вращается с такой же скоростью, как и вращающееся магнитное поле, никакой ЭДС в роторе не возникает, следовательно, не возникает и сила, действующая на стержни ротора, и вращающий момент в роторе отсутствует. Значит, движение ротора замедляется. По этой причине он никогда не может работать с синхронной скоростью.

Когда на роторе нет нагрузки, сила сопротивления, возникающая из-за сопротивления воздуха и трения, мала, и скорость ротора очень близка к синхронной скорости. Когда ротор находится под нагрузкой, скорость падает, что вызывает увеличение частоты ЭДС, индуцированной в стержнях ротора, а значит, и рост тока в роторе, силы и вращающего момента. Разность между скоростью ротора  $n_r$  и синхронной скоростью  $n_s$  называют *скоростью скольжения*, то есть

$$\text{скорость скольжения} = n_s - n_r \text{ об/с.}$$

Отношение  $\frac{n_s - n_r}{n_s}$  называют *относительным скольжением*

или просто *скольжением*  $s$ . Скольжение, как правило, определяют в процентах.

Значит,

$$s = \left( \frac{n_s - n_r}{n_s} \right) \times 100\%$$

Типичные значения скольжения между режимом без нагрузки и режимом с нагрузкой составляют примерно от 4 до 5% для небольших двигателей и 1.5...2% — для больших.

**Например,** определим скольжение у статора трёхфазного асинхронного двигателя с четырьмя полюсами, подсоединённого к источнику питания с рабочей частотой 50 Гц. Ротор при полной нагрузке вращается со скоростью 1 455 об/мин.

Определим сначала синхронную скорость

$$n_s = \frac{f}{p} = \frac{50}{2} = 25 \text{ об/с.}$$

Затем определим скорость ротора в оборотах в секунду

$$n_r = \frac{1\,455}{60} = 24.25 \text{ об/с.}$$



Тогда скольжение

$$s = \left( \frac{n_s - n_r}{n_s} \right) \times 100\% = \left( \frac{25 - 24.25}{25} \right) \times 100\% = 3\% .$$

## ЭДС и частота вращения ротора

### ЭДС ротора

Когда асинхронный двигатель неподвижен, обмотки статора и ротора образуют эквивалент трансформатора, как показано на Рис. 62.6.

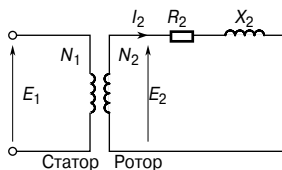


Рис. 62.6

Тогда ЭДС ротора в покое равна

$$E_2 = \left( \frac{N_2}{N_1} \right) E_1 , \quad (1)$$

где  $E_1$  — источник напряжения из расчёта одной фазы на статор.

Когда асинхронный двигатель работает, индуцируемая в роторе ЭДС меньше, чем  $E_2$ , так как меньше относительное перемещение между проводниками и вращающимся магнитным полем.

Индуцируемая ЭДС пропорциональна этому перемещению, значит, она должна быть пропорциональна скольжению  $s$ .

Следовательно, во время работы ЭДС ротора, приходящаяся на одну фазу

$$E_r = sE_2,$$

то есть

$$\text{ЭДС ротора на фазу} = s \left( \frac{N_2}{N_1} \right) E_1 . \quad (2)$$

### Частота ротора

ЭДС ротора индуцируется благодаря изменяющемуся магнитному потоку, а скорость, при которой поток пересекает проводники, является скоростью скольжения. Значит, частота ЭДС ротора

$$f_r = (n_s - n_r)p = \left( \frac{n_s - n_r}{n_s} \right) (n_s p) .$$

Однако  $\left(\frac{n_s - n_r}{n_s}\right)$  — это скольжение  $s$ , а  $(n_s p)$  — частота источника  $f$ , значит,

$$f_r = sf \quad (3)$$

## Импеданс и ток ротора

### Активное сопротивление ротора

Активное сопротивление ротора  $R_2$  не зависит от частоты или скольжения и, следовательно, остаётся постоянным.

### Реактивное сопротивление ротора

Реактивное сопротивление ротора изменяется с частотой тока ротора.

В состоянии покоя реактивное сопротивление на фазу

$$X_2 = 2\pi f L.$$

Во время работы ротора реактивное сопротивление на фазу

$$X_r = 2\pi f L.$$

С учётом уравнения (3)

$$X_r = 2\pi(s f)L = s(2\pi f L),$$

то есть

$$X_r = sX_2. \quad (4)$$

На **Рис. 62.7** показана эквивалентная электрическая схема ротора во время работы.

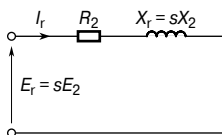


Рис. 62.7

### Импеданс ротора

Импеданс ротора на фазу

$$Z_r = \sqrt{R_2^2 + (sX_2)^2}. \quad (5)$$

В состоянии покоя скольжение  $s = 1$ , тогда

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2}. \quad (6)$$

### Ток ротора

Из Рис. 62.6 и Рис. 62.7 следует: ток при запуске (состояние покоя)

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2} = \frac{\left(\frac{N_2}{N_1}\right) E_1}{\sqrt{R_2^2 + X_2^2}} \quad (7)$$

ток во время работы

$$I_r = \frac{E_r}{Z_r} = \frac{s\left(\frac{N_2}{N_1}\right) E_1}{\sqrt{R_2^2 + (sX_2)^2}} \quad (8)$$

### Потери на медь

Мощность  $P = 2\pi n M$ , где  $M$  — вращающий момент, измеряемый в ньютон-метрах [Н·м], откуда вращающий момент

$$M = \frac{P}{2\pi n}.$$

Если  $P_2$  — это мощность на входе ротора, определяемая вращающимся магнитным полем, а  $P_m$  — механическая мощность на выходе (включая потери на трение), то

$$M = \frac{P_2}{2\pi n_s} = \frac{P_m}{2\pi n_r},$$

откуда

$$\frac{P_2}{n_s} = \frac{P_m}{n_r},$$

или

$$\frac{P_m}{P_2} = \frac{n_r}{n_s}.$$

Не нарушая равенства, можем записать

$$1 - \frac{P_m}{P_2} = 1 - \frac{n_r}{n_s},$$

или

$$\frac{P_2 - P_m}{P_2} = \frac{n_s - n_r}{n_s} = s.$$

$P_2 - P_m$  — это электрические потери, или потери на медь в роторе, то есть

$$P_2 - P_m = I_r^2 R_2.$$

Значит, скольжение

$$s = \frac{\text{потери ротора на медь}}{\text{мощность на входе ротора}} = \frac{I_r^2 R_2}{P_2} \quad (9)$$

откуда мощность на входе ротора

$$P_2 = \frac{I_r^2 R_2}{s} \quad (10)$$

## Потери асинхронного двигателя и коэффициент полезного действия

На Рис. 62.8 показаны все возможные потери в асинхронных двигателях.

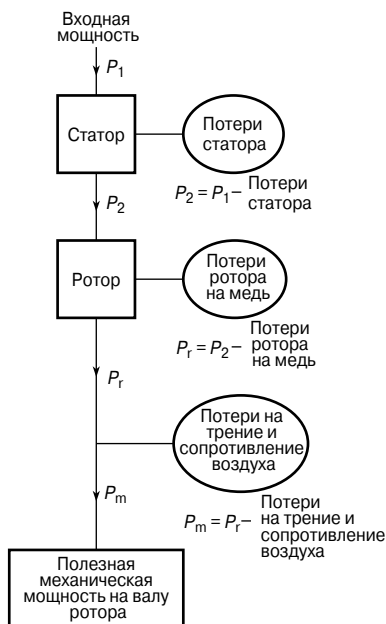


Рис. 62.8

Коэффициент полезного действия двигателя

$$\eta = \frac{\text{выходная мощность}}{\text{входная мощность}} = \frac{P_m}{P_1} \times 100\%$$

**Например**, мощность, подводимая к трёхфазному асинхронному двигателю, равна 32 кВт, а потери статора составляют 1 200 Вт. Определим его коэффициент полезного действия, если скольжение составляет 5%, а потери на трение и сопротивление воздуха равны 750 Вт.

Во-первых, определим мощность, поступающую на ротор.

Входная мощность ротора равна входной мощности статора минус потери статора, то есть

$$\text{входная мощность ротора} = 32 \text{ кВт} - 1.2 \text{ кВт} = \mathbf{30.8 \text{ кВт}}.$$

Во-вторых, определим потери ротора на медь.

Из уравнения (9) имеем

$$\text{скольжение} = \frac{\text{потери ротора на медь}}{\text{мощность на входе ротора}},$$

то есть

$$\frac{5}{100} = \frac{\text{потери ротора на медь}}{30.8},$$

откуда

$$\text{потери ротора на медь} = (0.05)(30.8) = \mathbf{1.54 \text{ кВт}}.$$

В-третьих, определим полную механическую мощность, развиваемую ротором.

Полная механическая мощность, развиваемая ротором, равна мощности на входе ротора минус потери ротора, то есть

$$\text{полная механическая мощность} = 30.8 - 1.54 = \mathbf{29.26 \text{ кВт}}.$$

В-четвёртых, определим мощность на выходе двигателя.

Мощность на выходе двигателя равна мощности, развиваемой ротором, минус потери на трение и сопротивление воздуха, то есть

$$\text{мощность на выходе двигателя} = 29.26 - 0.75 = \mathbf{28.51 \text{ кВт}}.$$

Наконец, определим коэффициент полезного действия асинхронного двигателя

$$\begin{aligned} \eta &= \left( \frac{\text{выходная мощность}}{\text{входная мощность}} \right) \times 100\% = \\ &= \left( \frac{28.51}{32} \right) \times 100\% = \mathbf{89.10\%}. \end{aligned}$$

## Уравнение вращающего момента для асинхронного двигателя

Из уравнения (10) имеем вращающий момент

$$M = \frac{P_2}{2\pi n_s} = \left( \frac{1}{2\pi n_s} \right) \left( \frac{I_r^2 R_2}{s} \right).$$

Из уравнения (8)

$$I_r = \frac{s \left( \frac{N_2}{N_1} \right) E_1}{\sqrt{R_2^2 + (sX_2)^2}}.$$

Значит, вращающий момент на фазу

$$\begin{aligned} M &= \left( \frac{1}{2\pi n_s} \right) \left( \frac{s^2 \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 E_1^2}{R_2^2 + (sX_2)^2} \right) \left( \frac{R_2}{s} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{2\pi n_s} \right) \left( \frac{s \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 E_1^2 R_2}{R_2^2 + (sX_2)^2} \right). \end{aligned}$$

Если в двигателе  $m$  фаз, тогда

$$M = \left( \frac{m \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2}{2\pi n_s} \right) \left( \frac{s E_1^2 R_2}{R_2^2 + (sX_2)^2} \right) \quad (11)$$

или

$$M = k \left( \frac{s E_1^2 R_2}{R_2^2 + (sX_2)^2} \right),$$

где  $k$  — константа для определённой машины, то есть

$$M \sim \left( \frac{s E_1^2 R_2}{R_2^2 + (sX_2)^2} \right) \quad (12)$$

В нормальных условиях источник напряжения обычно стабилен, то есть  $E = \text{const}$ , значит, уравнение (12) можно изменить:

$$M \sim \frac{s R_2}{R_2^2 + (sX_2)^2} \sim \frac{R_2}{\frac{R_2^2}{s} + sX_2^2}.$$

Вращающий момент максимален, когда минимален знаменатель, а это бывает, когда

$$\frac{R_2^2}{s} = sX_2^2,$$

то есть когда

$$s = \frac{R_2}{X_2};$$

откуда

$$R_2 = sX_2,$$

или в соответствии с уравнением (4)

$$R_2 = X_r.$$

Следовательно, *максимальный вращающий момент* возможен в случаях, когда активное сопротивление ротора равно реактивному сопротивлению ротора, то есть когда  $R_2 = X_r$ .

### Характеристики «вращающий момент/скорость»

В нормальных условиях вращающий момент при запуске асинхронного двигателя может быть меньше, чем вращающий момент при полной нагрузке. Скорость, при которой возникает максимальный вращающий момент, определяется величиной сопротивления ротора.

При синхронной скорости проскальзывание равно нулю, и вращающий момент тоже равен нулю. Исходя из этих наблюдений, на **Рис. 62.9** показаны характеристики асинхронного двигателя «вращающий момент/скорость» и «вращающий момент/скольжение».

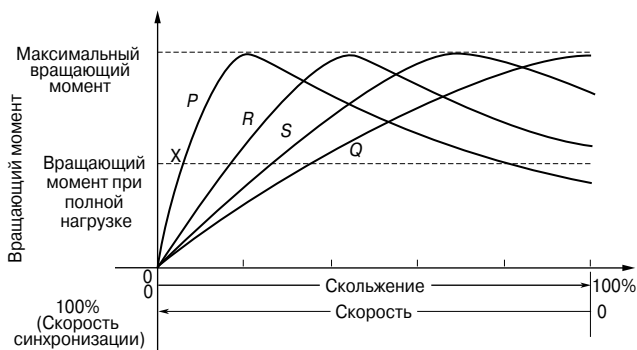
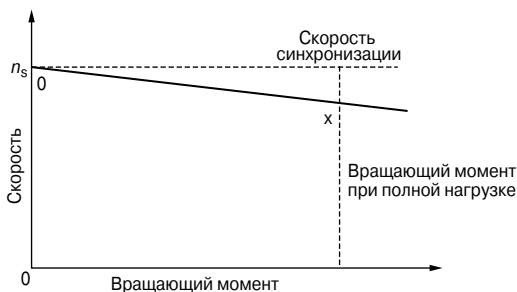


Рис. 62.9

Активное сопротивление ротора асинхронного двигателя обычно мало по сравнению с реактивным сопротивлением (например,  $R_2 = 0.35$  Ом и  $X_2 = 3.5$  Ом — довольно типичные случаи), так что максимальный вращающий момент возникает при высокой скорости, как правило, равной около 80% синхронной скорости.

Кривая Р на **Рис. 62.9** — это типичная характеристика асинхронного двигателя. В точке Х кривая Р пересекает прямую вращающего момента при полной нагрузке, то есть при полной нагрузке скольжение равно примерно 4...5%. Нормальные рабочие условия находятся между 0 и Х, следовательно, можно увидеть, что для нормальной работы изменение скорости в зависимости от нагрузки довольно мало, то есть асинхронный двигатель — это машина, работающая практически с постоянной скоростью. Построив заново характеристику «скорость/вращающий момент» между точками 0 и Х, получим характеристику, показанную на **Рис. 62.10**, которая похожа на характеристику двигателя параллельного возбуждения, приведённую в гл. 61.



**Рис. 62.10**

Если при запуске необходимо получить максимальный вращающий момент, тогда следует обеспечить высокое сопротивление ротора, что даёт характеристику Q на **Рис. 62.9**. Однако в этом случае, как можно видеть, двигатель имеет скольжение при полной нагрузке более 30%, что вызывает падение КПД. Такой двигатель имеет также значительное изменение скорости при изменении нагрузки. Кривые R и S на **Рис. 62.9** — это характеристики для значений сопротивления ротора между кривыми Р и Q. Вращающий момент при запуске тогда получается лучше, чем для кривой Р, но при этом в рабочих условиях КПД ниже и скорость меняется.

*Короткозамкнутый асинхронный двигатель* обычно имеет характеристическую кривую Р. Этот тип машины имеет высокий коэффициент полезного действия и примерно постоянную скорость вращения при нормальных условиях работы. Однако у неё слабый вращающий момент при запуске, поэтому её надо запус-



кать без нагрузки или с очень малой нагрузкой. Кроме того, при запуске ток может быть в четыре-пять раз больше тока при полной нагрузке из-за того, что двигатель работает как трансформатор с закороченной вторичной обмоткой.

*Асинхронный двигатель с фазным ротором* имеет характеристику Р, когда кольца скольжения закорочены, что является нормальным рабочим условием.

Однако кольца скольжения предусматривают добавление внешнего сопротивления в схему ротора, и в результате при запуске двигатель может обладать характеристикой, похожей на кривую Q на **Рис. 62.9**, и тогда можно устранить проблему высокого тока запуска, которую испытывает на себе асинхронный двигатель с короткозамкнутым ротором.

В общем случае для трёхфазных асинхронных двигателей коэффициент мощности обычно находится между 0.8 и 0.9 запаздывания, а коэффициент полезного действия при полной нагрузке, как правило, равен 80...90%.

Из уравнения (12) видно, что вращающий момент пропорционален квадрату напряжения питания. Поэтому любое изменение напряжения будет сильно сказываться на работе асинхронного двигателя.

## Методы запуска асинхронных двигателей

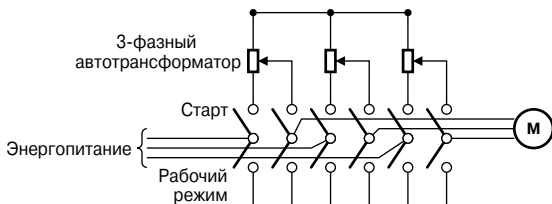
### *Короткозамкнутый ротор*

#### Прямой запуск

При этом методе ток запуска высок и может вызывать помехи в питании других потребителей сети.

#### Автотрансформаторный запуск

При этом методе напряжение статора  $E_1$  уменьшается с помощью автотрансформатора, а следовательно, уменьшается ток запуска (см. уравнение (7)). Однако вращающий момент при таком запуске сильно уменьшается (см. уравнение (12)), поэтому уменьшение напряжения достаточно только для того, чтобы дать необходимое уменьшение тока запуска. На **Рис. 62.11** показано типичное устройство с автотрансформатором.



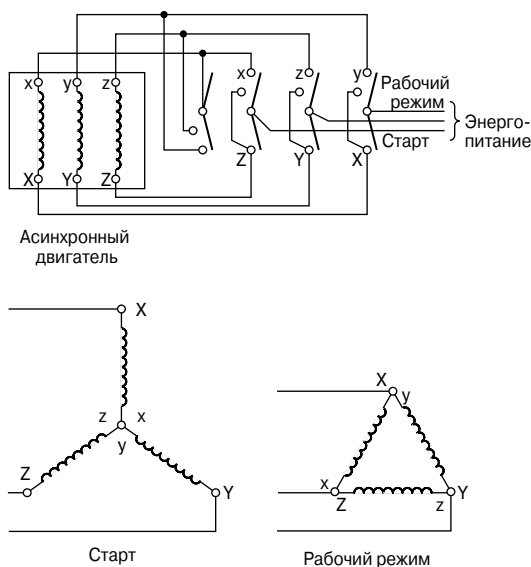
**Рис. 62.11**

В момент запуска переключатель на два положения подсоединяет цепь к автотрансформатору, и, когда двигатель достигает нужной скорости, переключатель переводится в рабочее положение, соединяя источник тока непосредственно с двигателем.

### Пуск переключением со звезды на треугольник

При этом методе в момент запуска соединения с обмотками фазы статора выполнены звездой, так, чтобы напряжение на каждой фазной обмотке равнялось  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  (то есть 0.577) напряжения сети. После запуска на время работы двигателя обмотки переключаются на соединение треугольником.

На **Рис. 62.12** показана типичная схема переключения от звезды к треугольнику.



**Рис. 62.12**

Этот метод запуска менее дорогой, чем запуск с помощью автотрансформатора.

## Фазный ротор

Когда необходим запуск под нагрузкой, следует использовать асинхронный двигатель с фазным ротором, потому что максимальный вращающий момент при запуске можно получить с помощью добавления внешнего сопротивления к цепи ротора через кольца скольжения. Применяют стартёр с лицевой панелью, и, так как сопротивление постепенно уменьшается, характеристики машины на каждой стадии будут схожи с Q, S, R и P на Рис. 62.13.

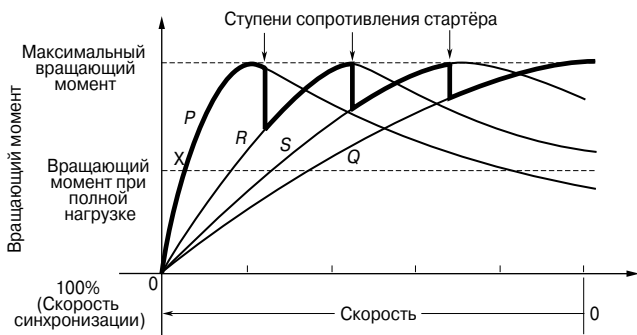


Рис. 62.13

На каждой промежуточной стадии работа двигателя переходит от одной характеристики к следующей так, что общая характеристика запуска оказывается такой, как показано «жирной» линией на Рис. 62.13.

Для очень больших асинхронных двигателей постепенный и плавный запуск достигается сопротивлением жидкостного типа.

## Достоинства асинхронных двигателей с короткозамкнутым ротором

Двигатели с короткозамкнутым ротором по сравнению с асинхронными двигателями с фазным ротором имеют ряд преимуществ:

- они дешевле и более прочные;
- обладают немного большим коэффициентом полезного действия и коэффициентом мощности;
- защищены от взрыва, так как риск появления искр уменьшен ввиду отсутствия колец скольжения и щёток.

## Достоинства асинхронных двигателей с фазным ротором

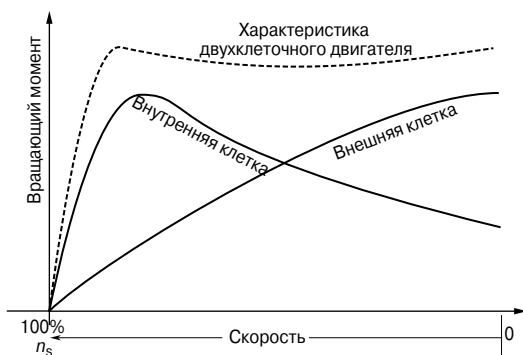
В свою очередь двигатели с фазным ротором по сравнению с короткозамкнутыми двигателями имеют другие достоинства:

- они обладают гораздо **большим** вращающим моментом при запуске;
- имеют гораздо меньший ток запуска;
- содержат устройство для изменения скорости ротора с помощью внешнего сопротивления.

## Двухклеточный асинхронный двигатель

Достоинства короткозамкнутого асинхронного двигателя и двигателя с фазным ротором объединены в *двухклеточном асинхронном двигателе*. Этот тип асинхронного двигателя специально устроен так, что ротор имеет две клетки, одну в другой.

Внешняя клетка обладает проводниками с высоким сопротивлением, чтобы максимальный вращающий момент достигался точно или почти в момент запуска. Внутренняя клетка имеет медные проводники с нормальным низким активным сопротивлением, однако с большим реактивным сопротивлением, так как оно находится глубоко внутри стального сердечника. Характеристика «вращающий момент/скорость» внутренней клетки такая же, что и у обычного асинхронного двигателя, как видно на **Рис. 62.14**.



**Рис. 62.14**

При запуске вращающий момент создаёт внешняя клетка, но в рабочем режиме вращающий момент обеспечивает внутренняя клетка. Объединённая характеристика внутренней и внешней клеток показана на **Рис. 62.14**. Двухклеточный асинхронный двигатель имеет высокий коэффициент полезного действия в рабочем режиме.

## Применение трехфазных асинхронных двигателей

Трёхфазные асинхронные двигатели широко применяются в промышленности, начиная от небольших мастерских и заканчивая крупными промышленными предприятиями, так как они входят в состав почти всех промышленных механизмов с приводом, где требуется практически постоянная скорость,.

Как правило, они применяются в станках, насосах и двигателях на мельницах.

Из всех двигателей переменного тока наиболее часто используется двигатель с короткозамкнутым ротором.

## Однофазный асинхронный двигатель

Большинство двигателей с мощностью меньше одной лошадиной силы применяются в бытовой технике. Являясь однофазными асинхронными двигателями, они работают в холодильниках, насосах для горячей воды, фенах и т. д. Однофазный источник питания, подсоединённый к обмотке статора, производит только пульсирующее, а не вращающееся магнитное поле, как это делает трёхфазный источник питания. Поэтому, для того чтобы статоры этих устройств давали некий вращающий момент при нулевой скорости, в статор приходится встраивать дополнительные обмотки. Существует несколько типов таких устройств, и двигатели называются в соответствии с используемым в них устройством. К ним относятся:

- двигатель с реакторным пуском;
- двигатель с конденсаторным пуском;
- конденсаторный двигатель с постоянно включённым мотором;
- двигатель с экранированным полюсом;
- постоянно разделённый конденсаторный двигатель и др.

## Трёхфазный синхронный двигатель

*Трёхфазные синхронные двигатели* обычно имеют две обмотки: трёхфазная обмотка статора производит магнитное поле, а обмотка ротора, питаемая непосредственно постоянным током, намагничивает ротор. В магнитном плане ротор замкнут на вращающееся магнитное поле, и в случае источника постоянной частоты ротор работает с постоянной скоростью, прямо пропорциональной частоте источника.

Эти двигатели можно применять при различных нагрузках, приводимых в движение асинхронными двигателями, но они:

- как правило, дороже;
- требуют источников как постоянного, так и переменного тока;

- требуют дополнительного оборудования, чтобы работать на скорости, близкой к их нормальной рабочей скорости, так, чтобы магнитное поле ротора было бы замкнуто на вращающееся магнитное поле;
- имеют более высокую стоимость технического обслуживания по сравнению с асинхронными двигателями.

Однако они могут работать с более высоким коэффициентом полезного действия и при совместном использовании с несколькими асинхронными двигателями могут повысить КПД всей системы (компенсация коэффициента мощности). Из-за перечисленных выше недостатков трёхфазные синхронные двигатели обычно применяются там, где необходима большая входная мощность, где экономия за счёт высокого КПД перевешивает эти недостатки. К таким способам применения относятся управление водяными насосами (электростанции, водопровод), управление поточными линиями на сталелитейных заводах и управление системой вентиляции в шахтах.

## Однофазные синхронные двигатели

Как и в случае однофазных асинхронных двигателей, *однофазные синхронные двигатели* требуют дополнительных устройств запуска. Им также необходим источник постоянного тока для ротора или постоянный магнит, встроенный в ротор. К первому прибегают редко, и основные способы применения однофазных синхронных двигателей сильно ограничены и сводятся к электронным часам, устройствам отсчёта времени, проигрывателям и т. д. Такие двигатели называются двигателями с *экранированным полюсом*. Как и трёхфазные синхронные двигатели, они работают с постоянной скоростью в случае подключения к источнику постоянной частоты.

## 63. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

### Понятие комплексных чисел

Комплексным числом называют выражение  $(a + jb)$ , где  $a$  — действительное число, а  $jb$  — мнимая часть комплексного числа (мнимое число).

$(1 + j2)$  и  $(5 - j7)$  — примеры комплексных чисел.

Символ  $j$  называют оператором, который по определению равен

$$j = \sqrt{-1}$$

или

$$j^2 = -1$$

Комплексные числа широко применяются при:

- анализе последовательных, параллельных и последовательно-параллельных цепей, работающих от источника переменного напряжения (см. гл. 64...66);
- получении уравнений равновесия в измерительных мостах переменного тока (см. гл. 67);
- анализе цепей переменного тока с использованием законов Кирхгофа (см. гл. 70);
- анализе цепей методами контурных токов и узловых потенциалов (см. гл. 71);
- использовании принципа суперпозиции (см. гл. 72);
- реализации теорем Тевенина—Гельмгольца (об эквивалентном генераторе) и Нортона (см. гл. 73);
- преобразованиях треугольник—звезда и звезда—треугольник (см. гл. 74);
- рассмотрении многих других аспектов электротехники высокого уровня.

Преимущество использования комплексных чисел заключается в том, что процесс сложных преобразований заменяется обычными алгебраическими операциями.

Комплексное число можно представить графически с помощью *диаграммы Арганда*. На **Рис. 63.1** прямая  $OA$  представляет комплексное число  $(2 + j3)$ ,  $OB$  —  $(3 - j)$ ,  $OC$  —  $(-2 + j2)$ , а  $OD$  —  $(-4 - j3)$ .

Комплексное число в форме  $a + jb$  называют *декартовым* или *прямоугольным комплексным числом*.

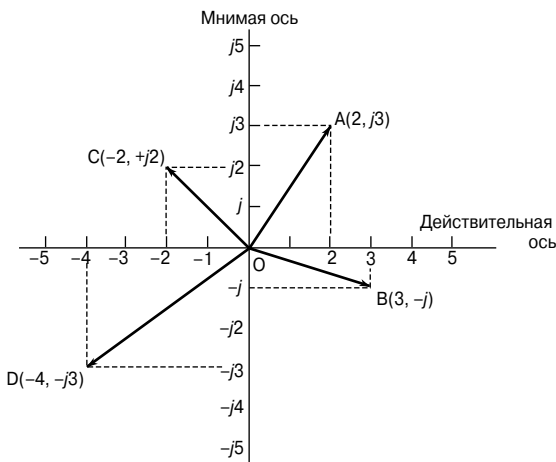


Диаграмма Арганда

Рис. 63.1

Графічески обозначение оператора  $j$  показано на Рис. 63.2. На Рис. 63.2а число 4, то есть  $(4 + j0)$ , изображено в виде горизонтального вектора вправо от начала действительной оси координат. (Такой вектор может характеризовать, например, переменный ток  $i = 4 \sin \omega t$ , в тот момент, когда время  $t$  равно нулю.)

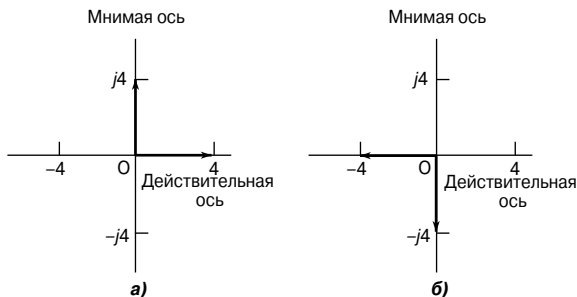


Рис. 63.2

Число  $j4$ , то есть  $(0 + j4)$ , изображено на Рис. 63.2а вертикально вверх от начала мнимой оси координат. Значит, умножение числа 4 на оператор  $j$  приводит к сдвигу против часовой стрелки на  $90^\circ$  без изменения числового значения. Умножение  $j4$  на  $j$  даёт  $j^2 4$ , то есть  $-4$ , и это показано на Рис. 63.2б в виде вектора, численно равного четырём единицам, отложенным по действительной горизонтальной оси влево от начала координат,



что символизирует сдвиг против часовой стрелки на  $90^\circ$ , если сравнивать с положением вектора  $(0 + j4)$  на **Рис. 63.2а**. Значит, умножение на  $j^2$  меняет первоначальное направление вектора на противоположное.

Умножение  $j^2 4$  на  $j$  даёт  $j^3 4$ , то есть  $j(j)^2(4) = -j4$ , и это показано на **Рис. 63.2б** в виде вектора в четыре единицы, отложенного по вертикальной мнимой оси вниз от начала координат, что символизирует сдвиг на  $90^\circ$  относительно положения вектора  $(-4 + j0)$  на **Рис. 63.2б**.

Умножение  $j^3 4$  на  $j$  даёт  $j^4 4$ , то есть  $j^2 (j)^2(4) = 4$ , что является первоначальным положением вектора, показанным на **Рис. 63.2а**.

Подводя итог вышесказанному, можно утверждать, что на диаграмме Арганда оператор  $j$  поворачивает любое число на  $90^\circ$  против часовой стрелки, умножение на  $j^2$  поворачивает его на  $180^\circ$  против часовой стрелки, умножение на  $j^3$  поворачивает его на  $270^\circ$ , а умножение на  $j^4$  — на  $360^\circ$ , то есть возвращает назад в его первоначальное положение. В каждом случае числовое значение вектора не меняется.

По тем же причинам, если вектор умножается на  $-j$ , то сдвиг составляет  $-90^\circ$  (то есть происходит поворот по часовой стрелке), а численное значение вектора не изменится.

В электрических цепях фазовые сдвиги на  $90^\circ$  возникают между напряжением и током в «чистых» конденсаторах и катушках индуктивности. Это и является основной причиной такого частого использования оператора  $j$  в анализе электрических цепей. Объяснение этому дано в гл. 64.

## Операции с использованием декартовых комплексных чисел

### Сложение и вычитание

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + c)$$

и

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - c).$$

Например,

$$(3 + j2) + (2 - j4) = 3 + j2 + 2 - j4 = 5 - j2$$

и

$$(3 + j2) - (2 - j4) = 3 + j2 - 2 + j4 = 1 + j6.$$

### Умножение

$$\begin{aligned}(a + jb)(c + jd) &= ac + a(jd) + (jb)c + (jb)(jd) = \\ &= ac + jad + jbc + (j^2 bd).\end{aligned}$$

Но

$$j^2 = -1,$$

поэтому

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc).$$

**Например,**

$$\begin{aligned}(3 + j2)(2 - j4) &= 6 - j12 + j4 - j^2 8 = \\ &= 6 - j12 + j4 + 8 = 14 + j(-8) = \\ &= 14 - j8.\end{aligned}$$

### **Сопряжённые комплексные числа**

Комплексному числу  $(a + jb)$  соответствует комплексное число  $(a - jb)$ . Такие пары комплексных чисел называют *сопряжёнными*.

**Например,** число, сопряжённое комплексному числу  $(3 - j2)$ , — это комплексное число  $(3 + j2)$ .

Произведение комплексного числа и сопряжённого с ним комплексного числа всегда действительное число. (Это важное свойство применяется при делении комплексных чисел.)

Умножим два сопряжённых комплексных числа по правилам умножения многочленов:

$$\begin{aligned}(a + jb)(a - jb) &= a^2 - jab + jab - j^2 b^2 = a^2 - (-b^2) = \\ &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

В результате умножения получили действительное число.

**Например,**  $(1 + j2)(1 - j2) = 1^2 + 2^2 = 5$ .

**Другой пример.**  $(3 - j4)(3 + j4) = 3^2 + 4^2 = 25$ .

### **Деление**

Деление одного комплексного числа на другое комплексное число  $(a + jb)$  выполняется путем умножения числителя и знаменателя на сопряжённое знаменателю комплексное число  $(a - jb)$ .

**Например,**

$$\begin{aligned}\frac{2 + j4}{3 - j4} &= \frac{2 + j4}{3 - j4} \times \frac{3 + j4}{3 + j4} = \frac{6 + j8 + j12 + j^2 16}{3^2 + 4^2} = \\ &= \frac{6 + j8 + j12 - 16}{25} = \frac{-10 + j20}{25} = \\ &= \frac{-10}{25} + j\frac{20}{25}, \text{ или } -0.4 + j0.8.\end{aligned}$$

Исключение мнимой части знаменателя с помощью умножения как числителя, так и знаменателя на сопряжённое знаменателю число часто называют «приведением к рациональному виду».

## Комплексные уравнения

Если два комплексных числа равны, то соответственно равны их действительные и мнимые части.

Это означает, что если

$$a + jb = c + jd,$$

то

$$a = c, b = d.$$

Это полезное свойство, так как уравнения с двумя неизвестными могут быть решены в составе одного уравнения. *Комплексные уравнения* применяют, в частности, при выводе уравнений равновесия измерительных мостов переменного тока (см. гл. 67).

**Например,** решим комплексное уравнение

$$(2 + j)(-2 + j) = x + jy.$$

Выполнив последовательно операции умножения и сложения, получаем

$$-4 + j2 - j2 + j^2 = x + jy,$$

$$-5 + j0 = x + jy.$$

Приравняв соответствующие действительные и мнимые части, имеем

$$x = -5, y = 0.$$

## Комплексное число в тригонометрической форме

Рассмотрим треугольник OZA на Рис. 63.3.

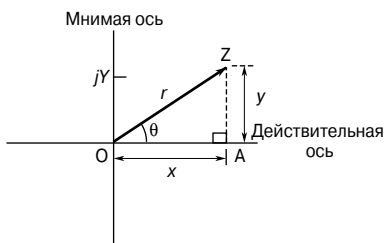


Рис. 63.3

Из тригонометрии известно, что

$$\begin{aligned} Z = x + jy &= r \cos\theta + jr \sin\theta = \\ &= r(\cos\theta + j \sin\theta). \end{aligned}$$

Последнее выражение обычно записывают как  $Z = r \angle \theta$  и называют *тригонометрической формой комплексного числа*.

Числовое значение  $r$  называют *модулем* числа  $Z$  и записывают как  $\text{mod } Z$ , или  $|Z|$ .

Числовое значение  $r$  определяют из треугольника OAZ по теореме Пифагора, то есть

$$|Z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

На диаграмме Арганда модуль представлен в виде отрезка OZ.

Угол  $\theta$  называют *аргументом* (или амплитудой) комплексного числа  $Z$  и записывают как  $\arg Z$ .

Угол  $\theta$  также вычисляется из треугольника OAZ:

$$\arg Z = \angle \theta = \arctg \frac{y}{x}.$$

**Например**, декартово комплексное число  $(3 + j4)$  соответствует числу  $r \angle \theta$  в тригонометрической форме, где

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

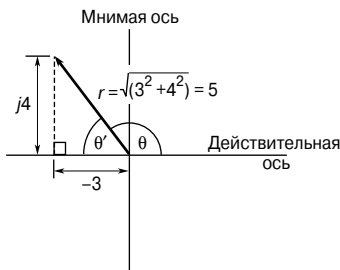
$$\angle \theta = \arctg \frac{4}{3} = 53.13^\circ.$$

Тогда

$$(3 + j4) = 5 \angle 53.13^\circ.$$

Аналогично для комплексного числа  $(-3 + j4)$  (показано на **Рис. 63.4**)

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$



**Рис. 63.4**

$$\theta' = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 53.13^\circ,$$

$$\theta = 180^\circ - 53.13^\circ = 126.87^\circ.$$

Значит,

$$(-3 + j4) = 5 \angle 126.87^\circ.$$

**Другой пример.** Чтобы привести вектор  $5 \angle -132^\circ$  в форму декартового числа следует записать число в тригонометрической форме и провести соответствующие вычисления.

$$\begin{aligned} 5 \angle -132^\circ &= 5 [\cos(-132^\circ) + j \sin(-132^\circ)] = \\ &= 5 \cos(-132^\circ) + j5 \sin(-132^\circ) = -3.346 - j3.716. \end{aligned}$$

## Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

### Умножение

$$[r_1 \angle \theta_1][r_2 \angle \theta_2] = r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2).$$

Например,

$$3 \angle 25^\circ \times 2 \angle 32^\circ = 6 \angle 57^\circ;$$

$$4 \angle 11^\circ \times 5 \angle -18^\circ = 20 \angle -7^\circ;$$

$$2 \angle (\pi/3) \times 7 \angle (\pi/6) = 14 \angle (\pi/2).$$

### Деление

$$\frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2).$$

Например,

$$\frac{8 \angle 58^\circ}{2 \angle 11^\circ} = 4 \angle 47^\circ.$$

Другой пример. 
$$\frac{9 \angle 136^\circ}{3 \angle -60^\circ} = 3 \angle (136^\circ - (-60^\circ)) =$$
  

$$= 3 \angle 196^\circ, \text{ или } 3 \angle -164^\circ.$$

Третий пример. 
$$\frac{10 \angle (\pi/2)}{5 \angle (-\pi/4)} = 2 \angle (3\pi/4).$$

Преобразование из декартовой, или прямоугольной, формы в тригонометрическую и наоборот можно провести с ис-

пользованием  $R \leftarrow P$  и  $P \leftarrow R$  преобразования, доступного практически на всех калькуляторах с функцией экспоненциального представления чисел. Это, конечно, позволяет сэкономить много времени.

## Возведение в степень комплексных чисел и извлечение корней из них (теорема Муавра)

*Теорема Муавра* устанавливает, что

$$[r \angle \theta]^n = r^n \angle n\theta$$

Это уравнение действительно для всех положительных, отрицательных или дробных значений  $n$ . Следовательно, теорема Муавра применима для определения степеней и корней комплексных чисел.

**Например,**  $[2 \angle 15^\circ]^6 = 2^6 \angle (6 \times 15^\circ) = 64 \angle 90^\circ = 0 + j64$ .

Квадратный корень из комплексного числа определяется соотношением

$$\sqrt{[r \angle \theta]} = [r \angle \theta]^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} \angle \frac{1}{2}\theta.$$

Однако важно понимать, что действительное число имеет два квадратных корня, равных по величине и противоположных по знаку. На диаграмме Арганда такие корни отличаются друг от друга на  $180^\circ$ .

**Например,** определим два квадратных корня из комплексного числа  $(12 + j5)$ .

*В тригонометрической форме* числу  $(12 + j5)$  соответствует выражение

$$(12 + j5) = \sqrt{12^2 + 5^2} \angle \arctg\left(\frac{5}{12}\right).$$

Так как  $(12 + j5)$  находится в первой четверти диаграммы Арганда, то

$$(12 + j5) = 13 \angle 22.62^\circ.$$

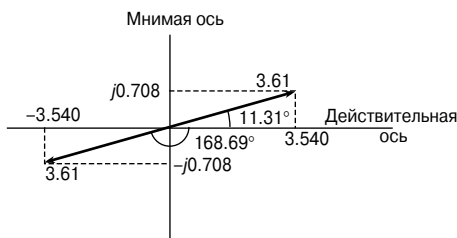
Так как надо найти квадратные корни из числа  $13 \angle 22.62^\circ$ , то возможны два решения.

Для получения второго решения полезно выразить  $13 \angle 22.62^\circ$  как  $13 \angle (360^\circ + 22.62^\circ)$ , то есть  $13 \angle 382.62^\circ$  (чтобы получить этот результат, следует просто добавить один оборот).

Это делается для того, чтобы после деления на 2 получить угол меньше  $360^\circ$ , как это показано ниже.

Первое решение	$\sqrt{(12+j5)}$	Второе решение
$= \sqrt{13 \angle 22.62^\circ} =$		$= \sqrt{13 \angle 382.62^\circ} =$
$= [13 \angle 22.62^\circ]^{\frac{1}{2}} =$		$= [13 \angle 382.62^\circ]^{\frac{1}{2}} =$
$= 13^{\frac{1}{2}} \angle \left(\frac{1}{2} \times 22.62^\circ\right) =$		$= 13^{\frac{1}{2}} \angle \left(\frac{1}{2} \times 382.62^\circ\right) =$
по теореме Муавра		
$= \sqrt{13} \angle 11.31^\circ =$		$= \sqrt{13} \angle 191.31^\circ =$
$= 3.61 \angle 11.31^\circ$		$= 3.61 \angle -168.69^\circ$

Эти два решения  $\sqrt{(12+j5)}$  показаны на диаграмме Арганда на **Рис. 63.5**.



**Рис. 63.5**

Это решение можно представить и в декартовой форме.

Первое решение	Второе решение
$3.61 \angle 11.31^\circ =$	$3.61 \angle -168.69^\circ =$
$= 3.61(\cos 11.31^\circ + j \sin 11.31^\circ) =$	$= 3.61[\cos(-168.69^\circ) + j \sin(-168.69^\circ)]$
$= 3.540 + j0.708$	$= -3.540 - j0.708$

Следовательно, в декартовой форме окончательное решение — это два корня  $\pm(3.540 + j0.708)$ .

Из диаграммы Арганда видно, что корни находятся в  $180^\circ$  друг от друга, то есть они лежат на прямой линии. При извлечении квадратных корней из комплексных чисел это всегда верно.

## 64. АНАЛИЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

### Введение

Простые цепи переменного тока можно проанализировать с помощью векторных диаграмм. Однако, когда цепи становятся более сложными благодаря применению комплексных чисел, анализ значительно упрощается. Перед тем как проводить анализ цепей переменного тока, необходимо как следует освоить основные операции с комплексными числами, которые описывались в гл. 63. Теория, изложенная в гл. 55, тоже имеет к этому отношение, так как в ней анализировались электрические цепи, используя понятие оператора  $j$  и диаграммы Арганда.

### Цепь переменного тока с чисто активным сопротивлением

В цепи переменного тока, куда входит только сопротивление  $R$  (Рис. 64.1а), ток  $I_R$  находится в фазе с приложенным напряжением  $V_R$ , как это показано на векторной диаграмме на Рис. 64.1б. Векторную диаграмму можно наложить на диаграмму Арганда (Рис. 64.1в).

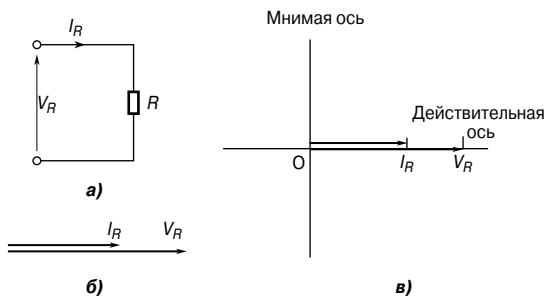


Рис. 64.1

Импеданс цепи  $Z$  в этом случае

$$Z = \frac{V_R \angle 0^\circ}{I_R \angle 0^\circ} = R.$$



## Чисто индуктивная цепь переменного тока

В цепи переменного тока, обладающей только индуктивностью  $L$  (Рис. 64.2а), ток  $I_L$  *отстаёт* от приложенного напряжения  $V_L$  на  $90^\circ$ , как показано на векторной диаграмме Рис. 64.2б. Векторную диаграмму можно наложить на диаграмму Арганда (Рис. 64.2в).

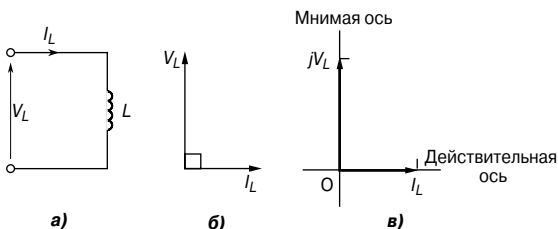


Рис. 64.2

Импеданс цепи  $Z$  в этом случае

$$Z = \frac{V_L \angle 90^\circ}{I_L \angle 0^\circ} = \frac{V_L}{I_L} \angle 90^\circ = X_L \angle 90^\circ,$$

или  $jX_L$ , где  $X_L$  — индуктивное сопротивление, равное

$$X_L = \omega L = 2\pi f_L$$

где  $f$  — частота в герцах [Гц],

$L$  — индуктивность в генри [Гн].

## Чисто ёмкостная цепь переменного тока

В цепи переменного тока, обладающей только ёмкостью  $C$  (Рис. 64.3а), ток  $I_C$  *опережает* приложенное напряжение  $V_C$  на  $90^\circ$ , как показано на векторной диаграмме Рис. 64.3б.

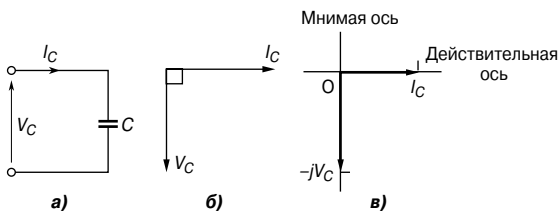


Рис. 64.3

Векторную диаграмму можно наложить на диаграмму Арганда, как показано на Рис. 64.3в.

Импеданс цепи  $Z$  в этом случае

$$Z = \frac{V_C \angle -90^\circ}{I_C \angle 0^\circ} = \frac{V_C}{I_C} \angle -90^\circ = jX_C \angle -90^\circ, \text{ или } -X_C$$

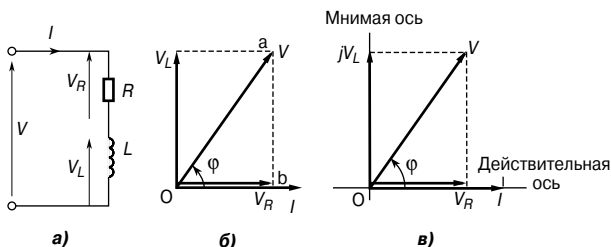
где  $X_C$  — ёмкостное сопротивление, равное

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}$$

где  $C$  — ёмкость в фарадах [Ф].

### ***R-L* последовательная цепь**

В цепи переменного тока с последовательно соединёнными резистором  $R$  и катушкой индуктивности  $L$  (**Рис. 64.4а**) приложенное напряжение  $V$  — это векторная сумма напряжений  $V_R$  и  $V_L$ , как видно на векторной диаграмме **Рис. 64.4б**.



**Рис. 64.4**

Ток  $I$  отстаёт от приложенного напряжения  $V$  на угол между  $0^\circ$  и  $90^\circ$  — его величина зависит от величин  $V_R$  и  $V_L$ , которые в свою очередь зависят от величин сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$ . Фазовый угол цепи, то есть угол между током и приложенным напряжением, обозначен на векторной диаграмме буквой  $\phi$ . В любой последовательной цепи ток одинаков для всех компонентов и, следовательно, принимается за эталонный вектор (**Рис. 64.4б**). Векторную диаграмму можно наложить на диаграмму Арганда, как это показано на **Рис. 64.4в**, где можно видеть, что напряжение питания  $V$  в комплексной форме равно

$$V = V_R + jV_L.$$

На **Рис. 64.5а** показан треугольник напряжений, получившийся из векторной диаграммы **Рис. 64.4б** (то есть треугольник  $Oab$ ).

Если каждую сторону этого треугольника поделить на ток  $I$ , то получится треугольник импедансов (**Рис. 64.5б**).

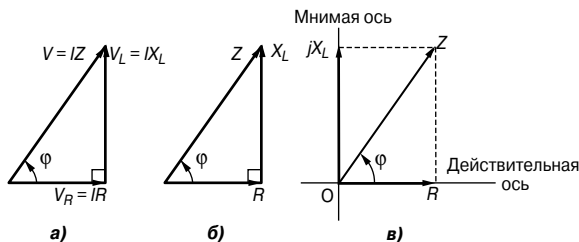


Рис. 64.5

Треугольник импедансов можно наложить на диаграмму Арганда, как показано на **Рис. 64.5в**, где видно, что в комплексной форме импеданс  $Z$  равен

$$Z = R + jX_L.$$

**Например**, импеданс, выраженный как  $(3 + j4)$  Ом, означает, что сопротивление равно 3 Ом, а индуктивное реактивное сопротивление равно 4 Ом.

В тригонометрической форме (в соответствии с треугольником импедансов) импеданс  $Z$  имеет вид

$$Z = |Z| \angle \varphi,$$

где модуль импеданса (в соответствии с треугольником импедансов)

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

фазовый угол цепи

$$\varphi = \arctg(X_L/R) \text{ с отставанием.}$$

**Например**, цепь состоит из резистора с сопротивлением 90 Ом, последовательно соединённого с катушкой индуктивности с индуктивным реактивным сопротивлением 150 Ом. Ток в цепи равен  $1.35 \angle 0^\circ$  А. На **Рис. 64.6** показана принципиальная схема такой цепи.

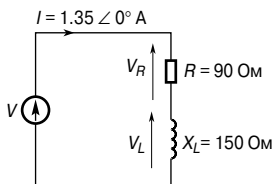


Рис. 64.6

Определим напряжение питания, напряжения на резисторе и катушке индуктивности, а также фазовый угол между током цепи и напряжением питания.

Импеданс цепи

$$\begin{aligned} Z &= R + jX_L = \\ &= (90 + j150) \text{ Ом, или } 174.93 \angle 59.04^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Напряжение питания

$$\begin{aligned} V &= IZ = \\ &= (1.35 \angle 0^\circ)(174.93 \angle 59.04^\circ) = \\ &= \mathbf{236.2 \angle 59.04^\circ \text{ В, или } (121.5 + j202.5) \text{ В.}} \end{aligned}$$

Так как  $V = V_R + jV_L$ , то напряжение на резисторе

$$V_R = \mathbf{121.5 \text{ В}},$$

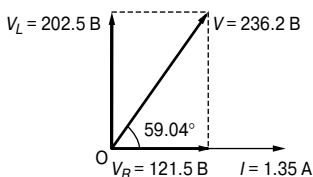
а напряжение на катушке индуктивности

$$V_L = \mathbf{202.5 \text{ В, опережая } V_R \text{ на } 90^\circ}.$$

Фазовый угол между током в цепи и напряжением питания

$$\varphi = \mathbf{59.04^\circ \text{ с отставанием (ток отстаёт от напряжения)}}.$$

На **Рис. 64.7** показана векторная диаграмма для тока и напряжений.



**Рис. 64.7**

## ***R-C* последовательная цепь**

В цепи переменного тока с последовательно соединёнными резистором  $R$  и конденсатором  $C$  (**Рис. 64.8а**) приложенное напряжение  $V$  — это векторная сумма напряжений  $V_R$  и  $V_C$ , как показано на векторной диаграмме **Рис. 64.8б**.

Ток  $I$  опережает приложенное напряжение  $V$  на угол, лежащий между  $0^\circ$  и  $90^\circ$ . Величина угла зависит от величин  $V_R$  и  $V_C$ , которые в свою очередь зависят от величин сопротивления  $R$  и ёмкости  $C$ . Фазовый угол цепи на векторной диаграмме изобра-

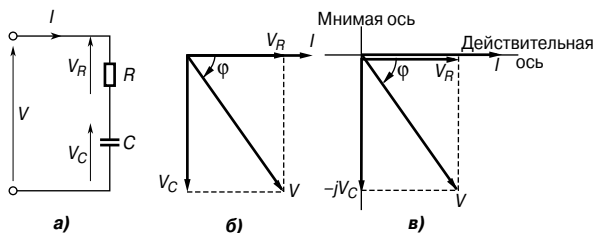


Рис. 64.8

жён как угол  $\varphi$ . Фазовую диаграмму можно наложить на диаграмму Арганда, как это показано на **Рис. 64.8в**, где можно видеть, что напряжение питания  $V$  в комплексной форме равно

$$V = V_R - jV_C.$$

На **Рис. 64.9а** показан треугольник напряжений, полученный из векторной диаграммы **Рис. 64.8б**.

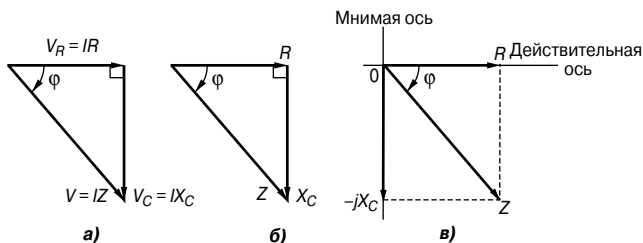


Рис. 64.9

Если каждую сторону треугольника напряжений поделить на ток  $I$ , получится треугольник импедансов, как это показано на **Рис. 64.9б**. Треугольник импедансов можно наложить на диаграмму Арганда, как это сделано на **Рис. 64.9в**, где можно видеть, что в форме комплексного числа импеданс  $Z$  имеет вид

$$Z = R - jX_C.$$

**Например**, импеданс, выраженный как  $(9 - j14)$  Ом, означает, что омическое сопротивление  $R$  равно 9 Ом, а ёмкостное сопротивление  $X_C$  равно 14 Ом.

В тригонометрической форме импеданс  $Z$  имеет вид

$$Z = |Z| \angle \varphi,$$

где из треугольника импедансов следует, что

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2},$$

$\varphi = \arctg(X_C/R)$  с опережением.

**Например**, определим ёмкость конденсатора и ток в последовательной  $R$ - $C$  цепи, если её импеданс, равный  $(30 - j50)$  Ом, подсоединён к источнику питания 240 В с частотой 50 Гц.

Так как импеданс  $Z = (30 - j50)$  Ом, то омическое сопротивление равно 30 Ом, а ёмкостное сопротивление равно 50 Ом.

Так как

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC},$$

то ёмкость

$$C = \frac{1}{2\pi fX_C} = \frac{1}{2\pi(50)(50)} = 63.66 \text{ мкФ}.$$

Модуль импеданса

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{30^2 + 50^2} = \\ &= 58.31 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Импеданс

$$\begin{aligned} Z &= (30 - j50) = 58.31 \angle \arctg \frac{X_C}{R} = \\ &= 58.31 \angle -59.04^\circ \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Ток в цепи

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{240 \angle 0^\circ}{58.31 \angle -59.04^\circ} = 4.12 \angle 59.04^\circ \text{ А}.$$

### **$R$ - $L$ - $C$ последовательная цепь**

В цепи переменного тока с последовательно соединёнными резистором  $R$ , катушкой индуктивности  $L$  и конденсатором  $C$  (**Рис. 64.10а**) приложенное напряжение  $V$  — это векторная сумма  $V_R$ ,  $V_L$  и  $V_C$ , как видно на векторной диаграмме **Рис. 64.10б** (условно принято, что  $V_L > V_C$ ).

Векторную диаграмму можно наложить на диаграмму Арганда, как показано на **Рис. 64.10в**, где можно увидеть, что напряжение питания  $V$  в комплексной форме равно

$$V = V_R + j(V_L - V_C).$$

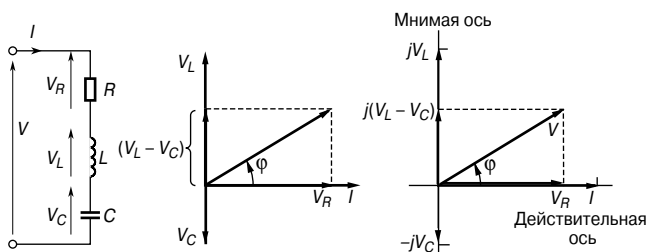


Рис. 64.10

Из треугольника напряжений образуем треугольник импедансов и, наложив его на диаграмму Арганда, получим импеданс в комплексной форме.

Импеданс

$$Z = R + j(X_L - X_C),$$

или

$$Z = |Z| \angle \varphi,$$

где

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right).$$

**Например,** определим ток в последовательной цепи, состоящей из катушки с сопротивлением 12 Ом и индуктивностью 0.10 Гн и конденсатора 120 мкФ, если к ней приложено напряжение 240 В с частотой 50 Гц. На Рис. 64.11 приведена принципиальная схема этой цепи.

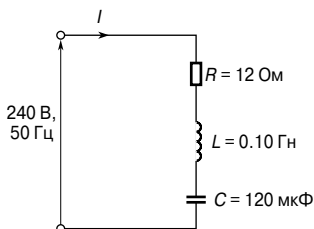


Рис. 64.11

Индуктивное реактивное сопротивление

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(50)(0.10) = 31.4 \text{ Ом.}$$

Ёмкостное реактивное сопротивление

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(50)(120 \times 10^{-6})} = 26.5 \text{ Ом.}$$

Импеданс

$$Z = R + j(X_L - X_C),$$

то есть

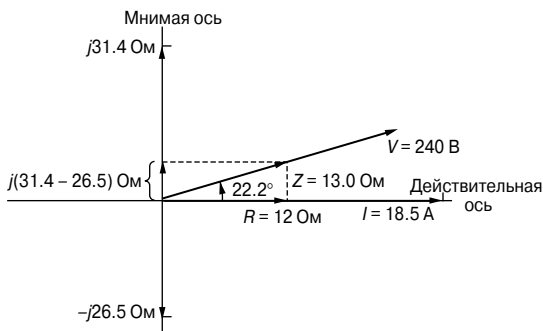
$$Z = 12 + j(31.4 - 26.5) = (12 + j4.9) = 13.0 \angle 22.20^\circ \text{ Ом.}$$

Ток в цепи

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{240 \angle 0^\circ}{13.0 \angle 22.2^\circ} = 18.5 \angle -22.20^\circ \text{ А,}$$

то есть ток равен 18.5 А с отставанием от напряжения на  $22.20^\circ$ .

Векторная диаграмма токов и напряжений приведена на диаграмме Арганда на **Рис. 64.12**.



**Рис. 64.12**

Когда  $V_L = V_C$ ,  $X_L = X_C$ , то напряжение  $V$  и ток  $I$  совпадают по фазе. Это явление называют *последовательным резонансом*, подробно рассмотренным в гл. 68.

В цепи переменного тока, где несколько импедансов, предположим,  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ , соединены последовательно, полный эквивалентный импеданс  $Z_T$  равен

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n.$$



## 65. АНАЛИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

### Введение

Как и в случае с последовательными цепями, анализ параллельных цепей можно проводить с помощью векторных диаграмм. Однако, так как параллельные цепи часто содержат более двух ответвлений, может оказаться, что провести такой анализ достаточно сложно. Поэтому именно в случае параллельных цепей переменного тока анализ с использованием комплексных чисел может оказаться наиболее эффективным.

### Проводимость активная, реактивная и полная

*Адмиттанс (полная проводимость)* определяют как отношение тока  $I$ , текущего в цепи переменного тока, к напряжению питания  $V$  (то есть это величина, обратная импедансу  $Z$ ). *Адмиттанс* обозначают буквой  $Y$ . Следовательно,

$$Y = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z}$$

Единица проводимости — *сименс* [См].

Импеданс можно представить в виде действительной части  $R$  и мнимой части  $X$ , тогда

$$Z = R \pm jX.$$

Аналогично проводимость можно представить в виде двух частей: действительной части, которую называют *активной проводимостью*  $G$  (или просто проводимостью), и мнимой части, называемой *реактивной проводимостью*  $B$ , — и выразить это в форме комплексного числа.

Следовательно, адмиттанс, или полная проводимость,

$$Y = G \pm jB.$$

Например, если  $Z = (3 - j2)$  Ом, то проводимость

$$\begin{aligned} Y = \frac{1}{Z} &= \frac{1}{(3 - j2)} = \frac{3 + j2}{3^2 + 2^2} = \frac{3}{13} + j\frac{2}{13} = \\ &= (0.231 + j0.154) \text{ См.} \end{aligned}$$

Тогда активная проводимость

$$G = 0.231 \text{ См},$$

а ёмкостная реактивная проводимость

$$B_C = 0.154 \text{ См}.$$

## Параллельные цепи переменного тока

На Рис. 65.1 показана принципиальная схема, содержащая три компонента с импедансами  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ , соединённые параллельно.

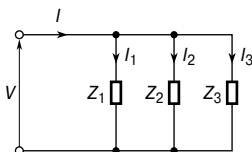


Рис. 65.1

Напряжение на каждом компоненте одинаково, и это напряжение питания  $V$ .

Токи, протекающие через компоненты схемы

$$I_1 = \frac{V}{Z_1}, I_2 = \frac{V}{Z_2}, I_3 = \frac{V}{Z_3}.$$

Если  $Z_T$  — это полный эквивалентный импеданс цепи, то

$$I = \frac{V}{Z_T}.$$

Ток в цепи питания  $I = I_1 + I_2 + I_3$  (в векторном виде).  
Значит,

$$\frac{V}{Z_T} = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} + \frac{V}{Z_3}$$

и, следовательно,

$$\boxed{\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}}$$

Тогда суммарная проводимость

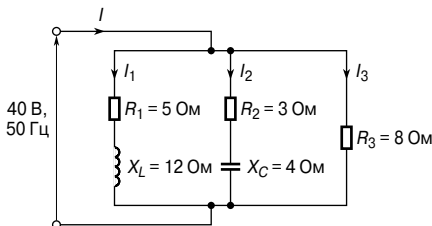
$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3.$$

В общем случае полная проводимость  $n$  компонентов, соединённых параллельно

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n \text{ (в векторном виде).}$$

Именно для параллельных цепей анализ с использованием адмиттансов наиболее рационален.

**Например,** определим ток в цепи питания для показанной на **Рис. 65.2** параллельной цепи, если импеданс  $Z_1 = (5 + j12)$  Ом,  $Z_2 = (3 - j4)$  Ом,  $Z_3 = 8$  Ом, а напряжение питания  $V 40 \angle 0^\circ$  В.



**Рис. 65.2**

Ток в цепи питания

$$I = \frac{V}{Z_T} = V Y_T,$$

где  $Z_T$  — суммарный импеданс цепи.

Определим суммарную проводимость цепи:

$$\begin{aligned} Y_T &= Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \\ &= \frac{1}{(5 + j12)} + \frac{1}{(3 - j4)} + \frac{1}{8} = \\ &= \frac{5 - j12}{5^2 + 12^2} + \frac{3 + j4}{3^2 + 4^2} + \frac{1}{8} = \\ &= (0.0296 - j0.0710) + (0.1200 + j0.1600) + (0.1250), \end{aligned}$$

то есть

$$Y_T = (0.2746 + j0.0890) \text{ См,}$$

или

$$Y_T = 0.2887 \angle 17.96^\circ \text{ См.}$$

Ток потребления

$$I = V Y_T = (40 \angle 0^\circ)(0.2887 \angle 17.96^\circ) = 11.55 \angle 17.96^\circ \text{ А.}$$

Итак, ток потребления  $I$  равен 11.55 А и опережает напряжение питания 40 В на  $17.96^\circ$ .

Тот же результат можно получить иным способом:

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Находим токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ .

$$I_1 = \frac{40 \angle 0^\circ}{5 + j12} = \frac{40 \angle 0^\circ}{13 \angle 67.38^\circ} =$$

$$= 3.077 \angle -67.38^\circ \text{ A, или } (1.183 - j2.840) \text{ A.}$$

$$I_2 = \frac{40 \angle 0^\circ}{3 - j4} = \frac{40 \angle 0^\circ}{5 \angle -53.13^\circ} =$$

$$= 8 \angle 53.13^\circ \text{ A, или } (4.80 + j6.40) \text{ A.}$$

$$I_3 = \frac{40 \angle 0^\circ}{8 \angle 0^\circ} = 5 \angle 0^\circ, \text{ или } (5 + j0) \text{ A.}$$

Тогда ток в цепи питания

$$I = I_1 + I_2 + I_3 =$$

$$= (1.183 - j2.840) + (4.80 + j6.40) + (5 + j0) =$$

$$= 10.983 + j3.560 =$$

$$= 11.55 \angle 17.96^\circ \text{ A.}$$

Результат, совпадающий с полученным ранее.

## Распределение тока в цепях переменного тока

В случае двух параллельно соединённых компонентов с импедансами  $Z_1$  и  $Z_2$ , как показано на **Рис. 65.3**, токи определяются уравнениями

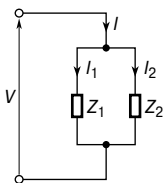


Рис. 65.3

$$I_1 = I \left( \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)$$

и

$$I_2 = I \left( \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)$$

Например, в цепи на **Рис. 65.4** суммарный импеданс цепи равен

$$Z_T = 5 + \frac{(8)(j6)}{8 + j6} = 5 + \frac{(j48)(8 - j6)}{8^2 + 6^2} = 5 + \frac{j384 + 288}{100} =$$

$$= (7.88 + j3.84) \text{ Ом, или } 8.77 \angle 25.98^\circ \text{ Ом.}$$

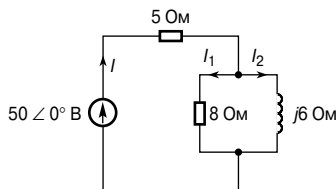


Рис. 65.4

Теперь можно определить токи  $I$ ,  $I_1$  и  $I_2$ .

$$I = \frac{V}{Z_T} = \frac{50 \angle 0^\circ}{8.77 \angle 25.98^\circ} = 5.70 \angle -25.98^\circ.$$

$$I_1 = I \left( \frac{j6}{8 + j6} \right) = (5.70 \angle -25.98^\circ) \left( \frac{6 \angle 90^\circ}{10 \angle 36.87^\circ} \right) = 3.42 \angle 27.15^\circ \text{ A.}$$

$$I_2 = I \left( \frac{8}{8 + j6} \right) = (5.70 \angle -25.98^\circ) \left( \frac{8 \angle 0^\circ}{10 \angle 36.87^\circ} \right) = 4.56 \angle -62.85^\circ \text{ A.}$$

Заметим, что ток  $I$  равен сумме токов  $I_1 + I_2$ .

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = 3.42 \angle 27.15^\circ + 4.56 \angle -62.85^\circ = \\ &= (3.043 - j1.561) + (2.081 - j4.058) = \\ &= (5.124 - j2.497) \text{ A, или } 5.70 \angle -25.98^\circ \text{ A.} \end{aligned}$$

**Другой пример.** Определим напряжения и токи в цепи с последовательным и параллельным соединением активных и реактивных компонентов, показанной на **Рис. 65.5**.

Импеданс  $Z$  двух параллельных ветвей

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(5 + j7)(4 - j15)}{(5 + j7) + (4 - j15)} = \frac{20 - j75 + j28 - j^2 105}{9 - j8} = \\ &= \frac{125 - j47}{9 - j8} = \frac{133.54 \angle -20.61^\circ}{12.04 \angle -41.63^\circ} = \\ &= 11.09 \angle 21.02^\circ \text{ Ом, или } (10.35 + j3.98) \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Импеданс эквивалентной последовательной цепи

$$\begin{aligned} Z_T &= (1.65 + j1.02) + (10.35 + j3.98) = \\ &= (12 + j5) \text{ Ом, или } 13 \angle 22.62^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

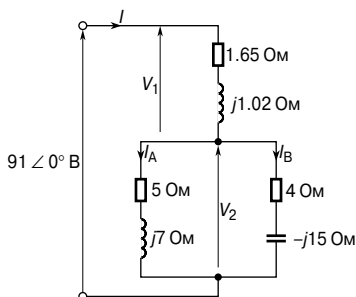


Рис. 65.5

Ток в цепи питания

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{91 \angle 0^\circ}{13 \angle 22.62^\circ} = 7 \angle -22.62^\circ \text{ A.}$$

Напряжение  $V_1 = IZ_1$ , где

$$Z_1 = (1.65 + j1.02) \text{ Ом, или } (1.94 \angle 31.72^\circ) \text{ Ом.}$$

Отсюда

$$V_1 = (7 \angle -22.62^\circ)(1.94 \angle 31.72^\circ) = 13.58 \angle 9.10^\circ \text{ В.}$$

Напряжение  $V_2 = IZ$ ,

где  $Z$  — эквивалентный импеданс двух параллельных ветвей. Значит,

$$V_2 = (7 \angle -22.62^\circ)(11.09 \angle 21.02^\circ) = 77.63 \angle -1.60^\circ \text{ В.}$$

Ток в ветви А

$$I_A = \frac{V_2}{Z_A},$$

где

$$Z_A = (5 + j7) \text{ Ом, или } 8.60 \angle 54.46^\circ.$$

Значит,

$$I_A = \frac{77.63 \angle -1.60^\circ}{8.60 \angle 54.46^\circ} = 9.03 \angle -56.06^\circ.$$

Ток в ветви В

$$I_B = \frac{V_2}{Z_B},$$

где

$$Z_B = (4 - j15) \text{ Ом, или } 15.524 \angle -75.07^\circ \text{ Ом.}$$

Значит,

$$\begin{aligned} I_B &= \frac{77.63 \angle -1.60^\circ}{15.524 \angle 75.07^\circ} = \\ &= \mathbf{5.00 \angle 73.47^\circ \text{ A.}} \end{aligned}$$

Тот же результат можно получить с помощью уравнений разделения тока:

$$\begin{aligned} I_A &= I \left( \frac{Z_B}{Z_A + Z_B} \right) = (7 \angle -22.62^\circ) \left( \frac{15.524 \angle -75.07^\circ}{(5 + j7) + (4 - j15)} \right) = \\ &= (7 \angle 22.62^\circ) \left( \frac{15.524 \angle -75.07^\circ}{9 - j8} \right) = \\ &= (7 \angle -22.62^\circ) \left( \frac{15.524 \angle -75.07^\circ}{12.04 \angle -41.63^\circ} \right) = \\ &= \mathbf{9.03 \angle -56.06^\circ \text{ A.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_B &= I \left( \frac{Z_B}{Z_A + Z_B} \right) = (7 \angle -22.62^\circ) \left( \frac{8.60 \angle 54.46^\circ}{12.04 \angle -41.63^\circ} \right) = \\ &= \mathbf{5.00 \angle 73.47^\circ \text{ A.}} \end{aligned}$$

## 66. МОЩНОСТЬ И КОЭФФИЦИЕНТ МОЩНОСТИ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### Мощность в цепях переменного тока

Как показано в гл. 55, в чисто резистивной цепи переменного тока средняя мощность  $P$  определяется уравнением

$$P = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

где  $V$  и  $I$  — действующие значения величин.

В чисто индуктивной цепи переменного тока средняя мощность равна нулю.

В чисто ёмкостной цепи средняя мощность также равна нулю.

В цепи с активным сопротивлением, индуктивностью и/или ёмкостью, будь то последовательное или параллельное соединение, средняя мощность  $P$  определяется уравнениями

$$P = VI \cos \varphi,$$

или

$$P = I_R^2 R$$

( $V$ ,  $I$  и  $I_R$  — действующие значения величин.)

**Например,** рассчитаем мощность электрической схемы, показанной на Рис. 66.1.

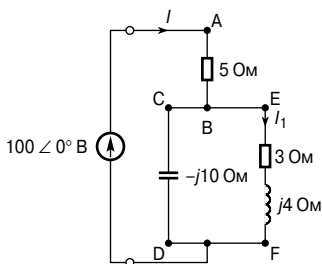


Рис. 66.1

Импеданс цепи

$$Z = 5 + \frac{(3 + j4)(-j10)}{(3 + j4 - j10)} =$$



$$\begin{aligned}
 &= 5 + \frac{(40 - j30)}{(3 - j6)} = 5 + \frac{50 \angle -36.87^\circ}{6.71 \angle -63.43^\circ} = \\
 &= 5 + 7.45 \angle 26.56^\circ = 5 + 6.66 + j3.33 = \\
 &= (11.66 + j3.33) \text{ Ом, или } 12.13 \angle 15.94^\circ \text{ Ом.}
 \end{aligned}$$

Ток в цепи питания

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{V}{Z} = \frac{100 \angle 0^\circ}{12.13 \angle 15.94^\circ} = \\
 &= 8.24 \angle -15.94^\circ \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Активная мощность ветви между точками А и В

$$P_{AB} = I^2 R = (8.24)^2 (5) = \mathbf{339.5 \text{ Вт.}}$$

Активная мощность ветви между точками С и D равна нулю, так как эта ветвь содержит только «чистую» ёмкость.

Ток ветви EF

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I \left( \frac{Z_{CD}}{Z_{CD} + Z_{EF}} \right) = 8.24 \angle -15.94^\circ \left( \frac{-j10}{3 - j6} \right) = \\
 &= 8.24 \angle -15.94^\circ \left( \frac{10 \angle -90^\circ}{6.71 \angle -63.43^\circ} \right) = \\
 &= 12.28 \angle -42.51^\circ \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Тогда активная мощность ветви между точками Е и F

$$P_{EF} = I_1^2 R = (12.28)^2 (3) = \mathbf{452.4 \text{ Вт.}}$$

Из вышесказанного следует, что общая активная мощность

$$P = 339.5 + 452.4 = \mathbf{791.9 \text{ Вт, или } 792 \text{ Вт}}$$

с точностью до трёх значащих цифр.

Тот же результат можно получить иначе.

Общая активная мощность

$$P = I^2 R_T = (8.24)^2 (11.66) = \mathbf{792 \text{ Вт}}$$

(11.66 Ом — это общее эквивалентное сопротивление цепи),  
или

$$P = VI \cos \varphi = (100)(8.24) \cos 15.94^\circ = \mathbf{792 \text{ Вт.}}$$

## Треугольник мощностей и коэффициент мощности

На Рис. 66.2а показана векторная диаграмма, на которой ток  $I$  отстаёт от приложенного напряжения  $V$  на угол  $\varphi$  (то есть цепь индуктивная).

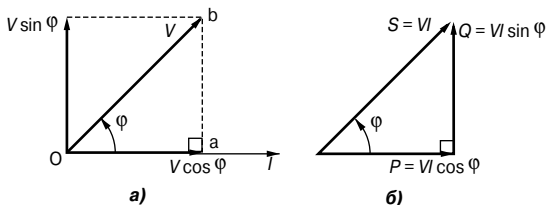


Рис. 66.2

Горизонтальная составляющая  $V$  равна  $V \cos \varphi$ , а вертикальная составляющая  $V$  равна  $V \sin \varphi$ . Если каждый вектор напряжения треугольника  $Oab$  умножить на  $I$ , получим диаграмму, изображённую на Рис. 66.2б, которую называют «треугольником мощностей». Каждая из сторон треугольника характеризует определённый вид мощности.

**Активная мощность,  $P = VI \cos \varphi$  ватт [Вт].**  
**Кажущаяся мощность,  $S = VI$  вольт-ампер [В·А].**  
**Реактивная мощность,  $Q = VI \sin \varphi$  вар [вар].**

Треугольник мощностей — это не диаграмма векторов, так как величины  $P$ ,  $Q$  и  $S$  — это средние, а не действующие значения величин, изменяющихся по синусоиде.

Наложив треугольник мощностей на диаграмму Арганда, получаем соотношение между  $P$ ,  $S$  и  $Q$  в форме комплексного уравнения, то есть

$$S = P + jQ.$$

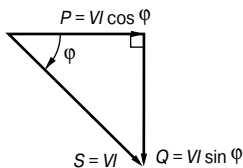
*Кажущаяся мощность,  $S$ ,* — величина первостепенной важности, так как устройства переменного тока, такие, как генераторы, трансформаторы и кабели, обычно нормированы в вольт-амперах, а не в ваттах. Допустимый выход таких устройств, как правило, ограничен не механическим напряжением, а ростом температуры и, следовательно, энергетическими потерями в устройстве. Потери определяются напряжением и током и практически не зависят от коэффициента мощности. Значит, количество электрического оборудования для питания определённой нагрузки преимущественно определяется вольт-амперами нагрузки, а не одной только мощностью.

*Номинал* машины определяют как максимальную кажущуюся мощность, так как её проектируют так, чтобы она работала непрерывно без перегрева.

*Реактивная мощность*,  $Q$ , никак не участвует в передаче энергии в цепи, но тем не менее вызывает такую нагрузку оборудования, как если бы она участвовала. Термин «реактивная мощность» в основном используется в сферах производства, распределения и потребления электроэнергии.

Индуктивную реактивную мощность принято определять как положительную реактивную мощность; ёмкостную реактивную мощность — как отрицательную реактивную мощность.

Можно показать, что данные выше соотношения, вытекающие из векторной диаграммы индуктивной цепи, могут быть справедливы и для ёмкостной цепи. Треугольник мощностей для этого случая показан на **Рис. 66.3**.



**Рис. 66.3**

*Коэффициент мощности* определяют как отношение активной мощности к кажущейся, то есть

$$\text{коэффициент мощности} = \frac{P}{S}$$

Для синусоидальных напряжений и токов

$$\begin{aligned} \text{коэффициент мощности} &= \frac{P}{S} = \frac{VI \cos \varphi}{VI} = \\ &= \cos \varphi = \frac{R}{Z} \text{ (из треугольника импедансов).} \end{aligned}$$

Говорят, что цепь, в которой ток отстаёт от напряжения (то есть цепь индуктивная), имеет коэффициент мощности при индуктивном (отстающем) токе и показывает реактивную мощность  $Q$  при отстающем токе.

Говорят, что цепь, в которой ток опережает напряжение (то есть цепь ёмкостная), имеет коэффициент мощности при опережающем токе и показывает реактивную мощность  $Q$  при опережающем токе.

## Определение мощности с применением комплексных чисел

Если в цепи переменного тока напряжение и ток определяются выражениями

$$V = (a + jb),$$

$$I = (c + jd),$$

то

$$\text{активная мощность, } P = ac + bd, \quad (1)$$

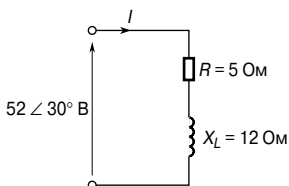
$$\text{реактивная мощность, } Q = bc - ad, \quad (2)$$

$$\text{кажущаяся мощность, } S = P + jQ = VI^*, \quad (3)$$

где  $I^*$  — это сопряжённая с  $I$  величина, то есть  $(c - jd)$ .

Данное выше выражение даёт альтернативный метод определения активной мощности  $P$ , реактивной мощности  $Q$  и кажущейся мощности  $S$ , когда напряжение и ток — комплексные величины.

**Например**, катушка с сопротивлением 5 Ом и индуктивным реактивным сопротивлением 12 Ом соединена с источником напряжения  $52\angle 30^\circ$  В, как показано на **Рис. 66.4**. Определим активную, реактивную и кажущуюся мощности такой цепи.



**Рис. 66.4**

Импеданс

$$Z = (5 + j12) \text{ Ом, или } 13\angle 38^\circ \text{ Ом.}$$

Напряжение

$$V = 52\angle 30^\circ \text{ В, или } (45.03 + j26.0) \text{ В.}$$

Ток

$$\begin{aligned} I &= \frac{V}{Z} = \frac{52\angle 30^\circ}{13\angle 38.38^\circ} = \\ &= 4\angle -37.38^\circ \text{ А, или } (3.18 - j2.43) \text{ А.} \end{aligned}$$

Существует три метода подсчёта мощности.

### Метод 1

Активная мощность  $P = VI \cos \phi$ , где  $\phi$  — угол между напряжением  $V$  и током  $I$ .

Значит,

$$\begin{aligned} P &= (52)(4) \cos[30^\circ - (37.38)^\circ] = \\ &= (52)(4) \cos 67.38^\circ = \mathbf{80 \text{ Вт}}. \end{aligned}$$

## Метод 2

Активная мощность

$$P = I_R^2 R = (4)^2(5) = \mathbf{80 \text{ Вт}}.$$

## Метод 3

Так как

$$V = (45.03 + j26.0) \text{ В},$$

$$I = (3.18 - j2.43) \text{ А},$$

то активная мощность из уравнения (1)

$$P = (45.03)(3.18) + (26.0)(2.43),$$

то есть

$$P = 143.2 - 63.2 = \mathbf{80 \text{ Вт}}.$$

Реактивная мощность

$$Q = VI = (52)(4) \sin 67.38^\circ = \mathbf{192 \text{ вар}}.$$

Кажущаяся мощность

$$S = VI = (52)(4) = \mathbf{208 \text{ В} \cdot \text{А}}.$$

Для  $S$  тот же результат можно получить иным способом.

$$\begin{aligned} S &= VI^* = (45.03 + j26.0)(3.18 + j2.43) = \\ &= (80 + j192) = P + jQ, \end{aligned}$$

откуда

$$|S| = \sqrt{(80^2 + 192^2)} = \mathbf{208 \text{ В} \cdot \text{А}}.$$

## Увеличение коэффициента мощности

Для определённой подаваемой активной мощности высокий коэффициент мощности уменьшает ток, текущий в цепи питания, и, следовательно, уменьшает стоимость кабелей, трансформаторов, распределительных устройств и генераторов. Энергоснабжающие организации применяют тарифы, поощряющие потребителей работать с разумно высоким коэффициентом мощности. Один из методов увеличения коэффициента мощности индуктивной нагрузки — это параллельное подключение к нагрузке батареи конденсаторов. Конденсаторы но-

минируются в реактивных вольт-амперах, и действие конденсаторов заключается в сокращении реактивной мощности системы без изменения активной мощности. Большинство бытовых и промышленных нагрузок в системе энергоснабжения обладают индуктивным сопротивлением, то есть работают с коэффициентом мощности при отстающем токе.

На **Рис. 66.5а** показана упрощённая принципиальная схема, где конденсатор  $C$  соединён параллельно с индуктивной нагрузкой.

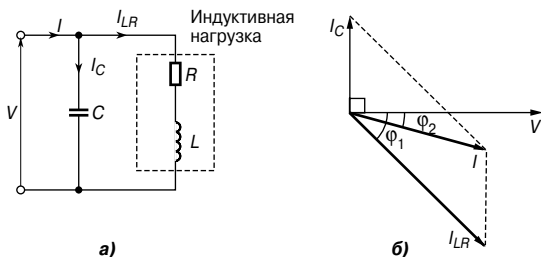


Рис. 66.5

Перед подключением конденсатора ток цепи равен  $I_{LR}$ . На векторной диаграмме **Рис. 66.5б** он показан отстающим от напряжения  $V$  на угол  $\varphi_1$ . Когда конденсатор  $C$  подключён, через него течет ток  $I_C$ , показанный на векторной диаграмме опережающим напряжение  $V$  на  $90^\circ$ .

Ток потребления  $I$  на **Рис. 66.5а** является теперь векторной суммой токов  $I_{LR}$  и  $I_C$ , как показано на **Рис. 66.5б**. Фазовый угол цепи, то есть угол между  $V$  и  $I$ , уменьшился с  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ , а коэффициент мощности повысился от  $\cos \varphi_1$  до  $\cos \varphi_2$ .

На **Рис. 66.6а** показан треугольник мощностей для индуктивной цепи с коэффициентом мощности  $\cos \varphi_1$  при отстающем токе.

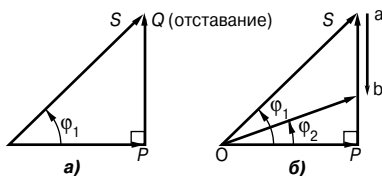


Рис. 66.6

На **Рис. 66.6б** угол  $\varphi_1$  уменьшился до угла  $\varphi_2$ , то есть коэффициент мощности улучшился от  $\cos \varphi_1$  до  $\cos \varphi_2$  благодаря введению опережающих реактивных вольт-амперов (показано как отрезок  $ab$ ), что достигается с помощью параллельного присоединения конденсатора к индуктивной нагрузке. Коэффициент

мощности возрос благодаря уменьшению реактивных вольт-амперов; на активную мощность  $P$  это никак не повлияло.

Коррекция коэффициента мощности приводит к уменьшению кажущейся мощности  $S$  (от  $Oa$  до  $Ob$  на **Рис. 66.66**), и следовательно, к снижению тока так, что система энергоснабжения используется более эффективно.

**Например**, определим активную, реактивную и кажущуюся мощности и коэффициент мощности цепи, импеданс которой  $Z = (3 + j4)$  Ом, а источник напряжения  $50\angle 30^\circ$  В с частотой 1.5 кГц. Вычислим также ёмкость корректирующего конденсатора, необходимую для увеличения коэффициента мощности до 0.966 с отставанием.

Ток потребления

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50\angle 30^\circ}{(3 + j4)} = \frac{50\angle 30^\circ}{5\angle 53.13^\circ} = 10\angle -23.13^\circ \text{ А.}$$

Кажущаяся мощность

$$S = VI^* = (50\angle 30^\circ)(10\angle 23.13^\circ) = 500\angle 53.13^\circ \text{ В}\cdot\text{А} = (300 + j400) \text{ В}\cdot\text{А.}$$

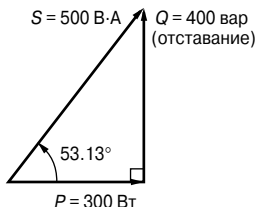
Поскольку

$$S = P + jQ,$$

то

**активная мощность  $P = 300$  Вт,**  
**кажущаяся мощность  $S = 500$  В·А,**  
**реактивная мощность  $Q = 400$  вар (отставание),**  
**коэффициент мощности  $\cos\varphi = 300/500 = 0.6$ .**

Треугольник мощностей показан на **Рис. 66.7**.



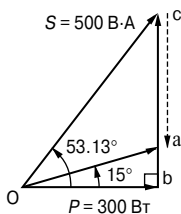
**Рис. 66.7**

Определим ёмкость, необходимую для увеличения коэффициента мощности до 0.966.

Так как коэффициент мощности должен быть равен 0.966, то есть  $\cos\varphi = 0.966$ , то

$$\angle\varphi = \arccos 0.966 = 15^\circ.$$

Для увеличения коэффициента мощности от  $\cos 53.13^\circ$ , то есть от 0.60, до 0.966 треугольник мощности нужно изменить с  $Ocb$  на **Рис. 66.8** до  $Oab$ , при этом отрезок  $ca$  характеризует номинал конденсатора, подсоединённого параллельно к цепи.



**Рис. 66.8**

Из **Рис. 66.8** следует

$$\operatorname{tg} 15^\circ = ab/300,$$

откуда

$$ab = 300 \operatorname{tg} 15^\circ = 80.38 \text{ вар.}$$

Значит, номинал конденсатора,  $ca = cb - ab = 400 - 80.38 = 319.6$  вар с опережением.

Ток конденсатора в этом случае

$$I_C = \frac{Q}{V} = \frac{319.6}{50} = 6.39 \text{ А.}$$

Ёмкостное реактивное сопротивление

$$X_C = \frac{V}{I_C} = \frac{50}{6.39} = 7.82 \text{ Ом.}$$

Однако

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC},$$

откуда требуемая корректирующая ёмкость конденсатора

$$C = \frac{1}{2\pi(1\,500)(7.82)} = 13.57 \text{ мкФ.}$$

Ещё один метод улучшения коэффициента мощности, кроме применения статических конденсаторов, — это метод с использованием синхронных моторов; такие машины могут быть сделаны так, чтобы работать с коэффициентом мощности при опережающем токе.



## 67. МОСТЫ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### Введение

*Мосты переменного тока* — это электрические цепи, основанные на расширении принципа моста сопротивлений, используемые для определения неизвестного импеданса с помощью сравнения с известным импедансом, а также для определения частоты. В общем случае они состоят из четырёх плеч-импедансов, источника переменного тока и ноль-индикатора, чувствительного к переменному току. В измерительном мосте переменного тока достичь равновесия сложнее, чем в мосте постоянного тока, потому что на состояние равновесия влияют не только модули, но и фазовые углы импедансов. В этом случае уравнение равновесия можно записать с помощью комплексных чисел. Мосты переменного тока позволяют реализовать точные методы измерения индуктивности, ёмкости и сопротивления.

### Состояние равновесия в измерительных мостах переменного тока

Большинство хорошо известных мостов переменного тока классифицируют как мосты с четырьмя плечами, сконструированные из четырёх импедансов (в комплексной форме —  $Z = R + jX$ ), как показано на **Рис. 67.1**.

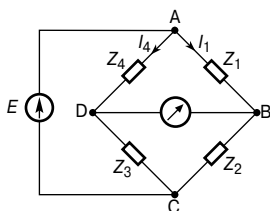


Рис. 67.1

Как и в случае моста сопротивлений, мост переменного тока считается «сбалансированным», когда ток, проходящий через индикатор, равен нулю (то есть в ветви BD на **Рис. 67.1** ток отсутствует). Если ток через индикатор равен нулю, то ток  $I_1$ , текущий через импеданс  $Z_1$ , должен также течь через импеданс  $Z_2$ , а ток  $I_4$ , текущий через  $Z_4$ , должен также течь через  $Z_3$ .

В равновесии:

- падение напряжения между А и В равно падению напряжения между А и D, то есть

$$V_{AB} = V_{AD},$$

или

$$I_1 Z_1 = I_4 Z_4 \quad (1)$$

(равенство соблюдается как по модулю, так и по фазе);

- падение напряжения между В и С равно падению напряжения между D и С, то есть

$$V_{BC} = V_{DC},$$

или

$$I_1 Z_2 = I_4 Z_3 \quad (2)$$

(равенство соблюдается как по модулю, так и по фазе).

Поделив уравнение (1) на уравнение (2), получаем

$$\frac{I_1 Z_1}{I_1 Z_2} = \frac{I_4 Z_4}{I_4 Z_3},$$

откуда

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_3},$$

или

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4 \quad (3)$$

Уравнение (3) показывает, что в равновесии произведения импедансов противоположных плеч моста равны.

Запишем члены уравнения (3) в тригонометрической форме:

$$Z_1 = |Z_1| \angle \alpha_1,$$

$$Z_2 = |Z_2| \angle \alpha_2,$$

$$Z_3 = |Z_3| \angle \alpha_3,$$

$$Z_4 = |Z_4| \angle \alpha_4.$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$(|Z_1| \angle \alpha_1)(|Z_3| \angle \alpha_3) = (|Z_2| \angle \alpha_2)(|Z_4| \angle \alpha_4).$$

Для состояния равновесия моста переменного тока должно одновременно выполняться два условия:

$$|Z_1| |Z_3| = |Z_2| |Z_4|,$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4.$$

Выводя уравнения равновесия для мостов переменного тока, в которых хотя бы два импеданса выражены в комплексной форме, важно принять во внимание, что в комплексном уравнении  $(a + jb) = (c + jd)$  равны и действительные части, то есть  $a = c$ , и мнимые, то есть  $b = d$ , о чём говорилось в гл. 63.

Как правило, импеданс одного плеча моста переменного тока неизвестен, в то время как другие содержат компоненты с известными фиксированными или изменяющимися величинами. Обычно у моста изменяются только два компонента. При установлении равновесия в цепи моста, благодаря последовательным корректировкам величин двух изменяющихся компонентов, ток через индикатор постепенно уменьшается до нуля. В равновесии неизвестный импеданс можно выразить через величины фиксированных или изменяющихся компонентов.

***Процедура определения уравнений равновесия для любого моста переменного тока***

- Определить импеданс в каждом плече моста в комплексной форме и записать уравнение равновесия в виде уравнения (3). Как правило, с уравнениями легче иметь дело, если  $L$  и  $C$  изначально выражены в форме  $X_L$  и  $X_C$ , а не  $\omega L$  или  $\frac{1}{\omega C}$ .
- Перенести неизвестные величины налево, придав им вид  $(a + jb)$ .
- Преобразовать величины в правой части уравнения в вид  $(c + jd)$ .
- Приравнять действительные части уравнения, то есть  $a = c$ , и приравнять мнимые части уравнения, то есть  $b = d$ .
- Подставить  $\omega L$  вместо  $X_L$  и  $\frac{1}{\omega C}$  вместо  $X_C$  и упростить уравнение.

**Типы индикаторов**

Применяемые в мостах переменного тока индикаторы должны согласоваться с типом моста и его рабочей частотой. К самым распространённым относятся:

- электронный осциллограф, пригодный для использования в широком диапазоне частот;
- наушники (или шлемофоны), пригодные для частот до 10 кГц и часто используемые на частоте 1 кГц, где человеческое ухо особенно чувствительно;
- различные электронные приборы со схемами, настроенными на определение тока при заданной частоте;
- вибрационные гальванометры, как правило, применяемые для мостов, работающих от сети; этот тип индикатора в основном состоит из узкой подвижной катушки, подвешенной на тонкой проволоке из фосфористой бронзы между полюсами магнита. Когда ток нужной частоты течёт через катушку, гальванометр реагирует на вибрацию. Это происходит потому, что механическая резонансная частота подвески специально выбирается равной электрической частоте тока в ка-

тушке. Прикреплённое к катушке зеркало отражает пятно света на шкалу, и, когда катушка начинает вибрировать, пятно появляется в виде луча света. Когда полоса частот уменьшается до размеров пятна, мост уравновешен. Вибрационные гальванометры подходят для измерений в диапазоне частот 10...300 Гц.

## Разновидности мостовых схем переменного тока

К настоящему времени разработано большое количество мостовых схем, и у каждой из них есть несколько особых преимуществ по сравнению с остальными. К основным мостам относятся мосты Максвелла, Хэя (мост с активно-ёмкостным и активно-индуктивным плечами), Оуэна и Максвелла—Вина, с помощью которых измеряют индуктивность, мосты Саути и Шеринга (для измерения ёмкости) и мост Вина (для измерения частоты). Очевидно, что существуют широкие возможности комбинирования составляющих этих мостов.

Обнаружено, что во многих мостах два балансирующих импеданса имеют одну и ту же природу и зачастую состоят из стандартных неиндуктивных резисторов. Чтобы мост быстро пришёл в равновесие, должно выполняться одно из следующих требований:

- соседние плечи — это «чистые» компоненты (то есть либо оба резисторы, либо оба «чистые» конденсаторы, либо один из них). Этот тип моста называется *мостом отношений* (ratio-arm bridge);
- пара противоположных плеч — это «чистые» компоненты. Такой тип моста называется *мостом произведений* (product-arm bridge).

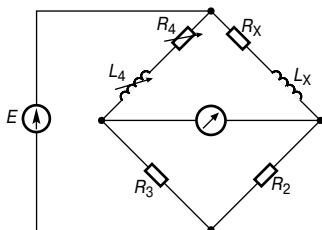
Мост отношений используется только для измерения реактивных свойств того же типа. При использовании product-arm bridge моста реактивная компонента балансирующего импеданса должна иметь знак, противоположный знаку неизвестного реактивного компонента.

Существует также коммерческий, или *универсальный*, мост, который применяют для измерения и сопротивления, и индуктивности, и ёмкости.

### Простой мост Максвелла

*Мост Максвелла* используют для измерения сопротивлений и индуктивностей катушек с высокой добротностью (напомним, что добротность,  $Q = \frac{\omega L}{R}$ ; см. гл. 55 и 68).

Катушка с неизвестным сопротивлением  $R_X$  и индуктивностью  $L_X$  показана в составе электрической схемы простого моста Максвелла на **Рис. 67.2**.



**Рис. 67.2**

Резистор  $R_4$  и катушка индуктивности  $L_4$  представляют собой стандартную катушку с известными изменяющимися значениями. В равновесии значения для  $R_X$  и  $L_X$  могут быть выражены через известные величины —  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  и  $L_4$ .

Процедура решения уравнений равновесия

- Запишем импедансы компонентов моста, показанного на **Рис. 67.2**.

$$Z_X = R_X + jX_{L_X},$$

$$Z_2 = R_2,$$

$$Z_3 = R_3,$$

$$Z_4 = R_4 + jX_{L_4}.$$

В соответствии с уравнением (3)

$$(Z_X)(Z_3) = (Z_2)(Z_4),$$

или

$$(R_X + jX_{L_X})(R_3) = (R_2)(R_4 + jX_{L_4}).$$

- В левой части уравнения оставим только неизвестный импеданс

$$(R_X + jX_{L_X}) = \frac{R_2}{R_3}(R_4 + jX_{L_4}).$$

- Преобразуем правую часть уравнения к виду  $(a + jb)$

$$(R_X + jX_{L_X}) = \frac{R_2 R_4}{R_3} + j \frac{R_2 X_{L_4}}{R_3}.$$

- Уравняв действительные члены левой и правой части комплексного уравнения, имеем

$$R_X = \frac{R_2 R_4}{R_3}.$$

Аналогичное уравнивание мнимых членов даёт

$$X_{L_X} = \frac{R_2 X_{L_4}}{R_3}.$$

- Зная, что  $X_L = \omega L$ , имеем

$$\omega L_X = \frac{R_2(\omega L_4)}{R_3},$$

откуда

$$L_X = \frac{R_2 L_4}{R_3}.$$

Итак, в равновесии неизвестные компоненты в простом мосте Максвелла определяются соотношениями

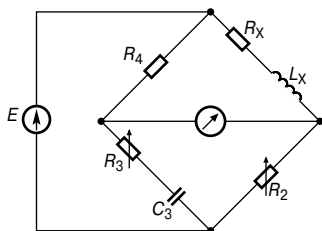
$$\boxed{R_X = \frac{R_2 R_4}{R_3}} \quad \text{и} \quad \boxed{L_X = \frac{R_2 L_4}{R_3}}$$

Эти соотношения называют *уравнениями равновесия* данного моста.

### Мост Хэя

*Мост Хэя* — мостовая схема с активно-ёмкостным и активно-индуктивным плечами. Этот мост применяется для измерения сопротивления и индуктивности катушки с очень высокой добротностью. На схеме **Рис. 67.3** показана катушка с неизвестными сопротивлением  $R_X$  и индуктивностью  $L_X$ . Можно показать, что в равновесии неизвестные компоненты моста Хэя равны

$$\boxed{R_X = \frac{\omega^2 C_3^2 R_2 R_3 R_4}{(1 + \omega^2 C_3^2 R_3^2)}} \quad \text{и} \quad \boxed{L_X = \frac{C_3 R_2 R_4}{(1 + \omega^2 C_3^2 R_3^2)}}$$



**Рис. 67.3**

Так как в уравнениях равновесия появляется частота  $\omega$  (или  $2\pi f$ ), то этот мост является частотозависимым.

### Мост Оуэна

Мост Оуэна, показанный на **Рис. 67.4**, используют для измерения сопротивления и индуктивности катушек с большой индуктивностью.

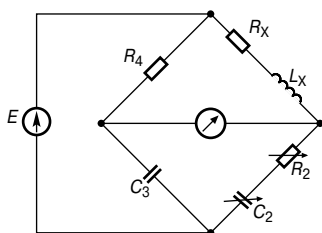


Рис. 67.4

Можно показать, что в равновесии неизвестные компоненты моста Оуэна равны

$$R_X = \frac{R_4 C_3}{C_2} \quad \text{и} \quad L_X = R_2 R_4 C_3$$

### Мост Максвелла—Вина

Мост Максвелла—Вина, показанный на **Рис. 67.5**, используют для измерения сопротивления и индуктивности катушки с низкой добротностью.

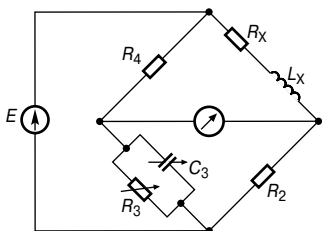


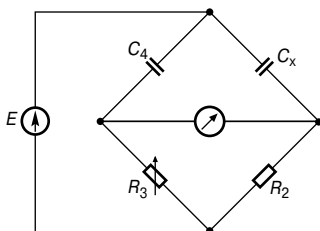
Рис. 67.5

Можно показать, что в равновесии неизвестные компоненты моста Максвелла — Вина равны

$$R_X = \frac{R_2 R_4}{R_3} \quad \text{и} \quad L_X = R_2 R_4 C_3$$

### Мост Саути

Мост Саути, показанный на **Рис. 67.6**, обеспечивает очень простой метод измерения ёмкости с помощью сравнения с известной ёмкостью.



**Рис. 67.6**

Можно показать, что в равновесии

$$C_X = \frac{R_3 C_4}{R_2}$$

Этот простой мост по большей части не подходит для практического применения. Коэффициент мощности испытуемого конденсатора значителен из-за внутренних потерь диэлектрика, — эти потери являются результатом рассеивания мощности внутри диэлектрического материала, когда на конденсатор подают переменное напряжение.

### Мост Шеринга

Мост Шеринга, показанный на **Рис. 67.7**, применяют для измерения ёмкости и эквивалентного последовательного сопротивления конденсатора. Из замеренных значений можно определить коэффициент мощности изоляционных материалов и потери в диэлектрике. Можно показать, что в равновесии неизвестные компоненты моста Шеринга равны

$$R_X = \frac{C_3 R_4}{C_2} \quad \text{и} \quad C_X = \frac{C_2 R_3}{R_4}$$

Потери в диэлектрике можно представить либо сопротивлением в параллельном соединении с конденсатором, либо конденсатором без потерь с последовательно соединённым резистором.

Если диэлектрик представлен последовательной  $R$ - $C$  цепью, как показано на **Рис. 67.7** (резистор  $R_X$  и конденсатор  $C_X$ ), то векторная диаграмма для неизвестного плеча будет такой, как показано на **Рис. 67.8**.



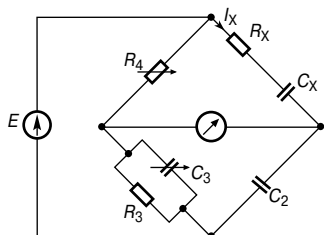


Рис. 67.7

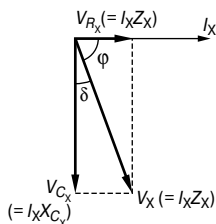


Рис. 67.8

$$\angle \varphi = \operatorname{arctg} \frac{V_{C_X}}{V_{R_X}} = \operatorname{arctg} \frac{I_X X_{C_X}}{I_X R_X} = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\omega C_X R_X} \right).$$

Коэффициент мощности неизвестного плеча выражается через  $\cos \varphi$ .

Угол  $\delta (= 90^\circ - \varphi)$  называют *углом потерь* и определяют как

$$\begin{aligned} \delta &= \operatorname{arctg} \frac{V_{R_X}}{V_{C_X}} = \operatorname{arctg} \omega C_X R_X = \\ &= \operatorname{arctg} \left[ \omega \left( \frac{C_2 R_3}{R_4} \right) \left( \frac{C_3 R_4}{C_2} \right) \right] = \\ &= \operatorname{arctg} (\omega R_3 C_3). \end{aligned}$$

(См. гл. 78.)

### Мост Вина

Мост Вина, показанный на Рис. 67.9, применяют для измерения частоты с помощью известных компонентов (или для измерения ёмкости, если известна частота).

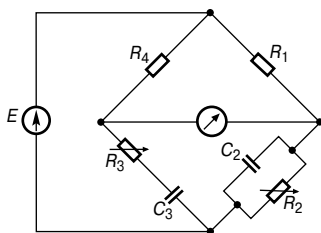


Рис. 67.9

Его также можно использовать в качестве цепи, стабилизирующей частоту. Можно показать, что в равновесии

$$\boxed{\frac{R_3}{R_2} + \frac{C_2}{C_3} = \frac{R_4}{R_1}}$$

и частота

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi\sqrt{C_2 C_3 R_2 R_3}}}$$

Следует заметить, что если  $C_2 = C_3 = C$  и  $R_2 = R_3 = R$ , то

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{C^2 R^2}} = \frac{1}{2\pi CR}.$$

**Например,** определим частоту моста Вина, показанного на **Рис. 67.9**, если  $R_2 = R_3 = 39$  кОм и  $C_2 = C_3 = 1$  нФ.

Когда мост находится в равновесии, значение сопротивления  $R_1$  определяется из уравнения

$$\frac{R_3}{R_2} + \frac{C_2}{C_3} = \frac{R_4}{R_1}.$$

Так как  $R_2 = R_3$  и  $C_2 = C_3$ , то

$$1 + 1 = \frac{1\,000}{R_1},$$

откуда

$$R_1 = \frac{1\,000}{2} = 500 \text{ Ом.}$$

Из условия равновесия находим частоту

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi\sqrt{C_2 C_3 R_2 R_3}} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(10^{-9})^2 (30 \times 10^3)^2}} = 5.305 \text{ кГц.} \end{aligned}$$

## 68. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ РЕЗОНАНС И ДОБРОТНОСТЬ

### Введение

Когда напряжение  $V$ , поданное в электрическую цепь, содержащую сопротивление, индуктивность и ёмкость, совпадает по фазе с результирующим током  $I$ , говорят, что цепь находится в *резонансе*. Резонанс имеет большое значение для всех областей радиотехники, техники связи и телевидения, в связи с тем что он позволяет выделять небольшие участки частотного спектра для независимого усиления выделенной части.

При резонансе *импеданс* цепи  $Z$  чисто резистивный, так как напряжение питания и ток находятся в одной фазе. *Коэффициент мощности* резонансной цепи равен единице (то есть коэффициент мощности  $= \cos \varphi = \cos 0^\circ = 1$ ).

В теории и практике электрических цепей существует два типа резонанса: один связан с последовательными цепями, о чём рассказывалось в гл. 55, когда входной импеданс минимален (в этой главе речь об этом пойдёт позже), а другой связан с простыми параллельными цепями, когда входной импеданс максимален (о чём рассказывалось в гл. 56).

### Последовательный резонанс

На **Рис. 68.1** показана схема, состоящая из соединённых последовательно катушки индуктивности  $L$ , резистора  $R$  и конденсатора  $C$ .

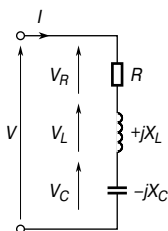


Рис. 68.1

Импеданс  $Z$  последовательной цепи  $R$ - $L$ - $C$  равен

$$Z = R + j(X_L - X_C) \text{ Ом,}$$

или

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \text{ Ом,}$$

где  $\omega = 2\pi f$ .

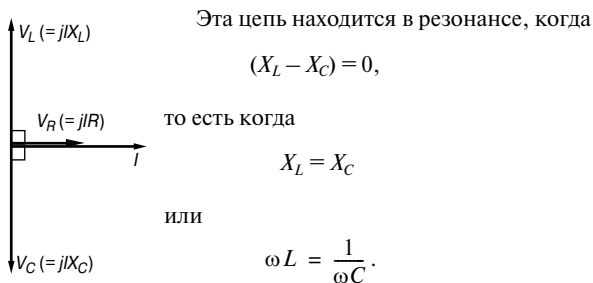


Рис. 68.2

Векторная диаграмма для этого условия показана на Рис. 68.2, где  $|V_L| = |V_C|$ .

Так как при резонансе

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C},$$

то

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{и} \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Следовательно, так как  $\omega = 2\pi f_r$ , резонансная частота

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

На Рис. 68.3 показано, как индуктивное реактивное сопротивление  $X_L$  и ёмкостное реактивное сопротивление  $X_C$  изменяются с частотой.

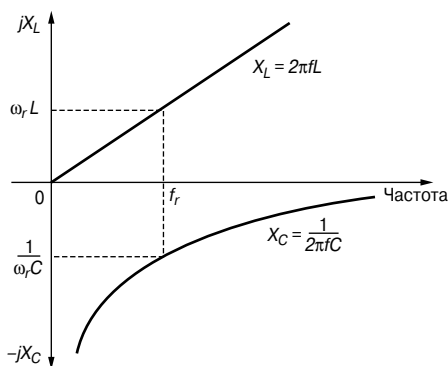


Рис. 68.3

На резонансной частоте  $f_r$  выполняется равенство  $|X_L| = |X_C|$ .

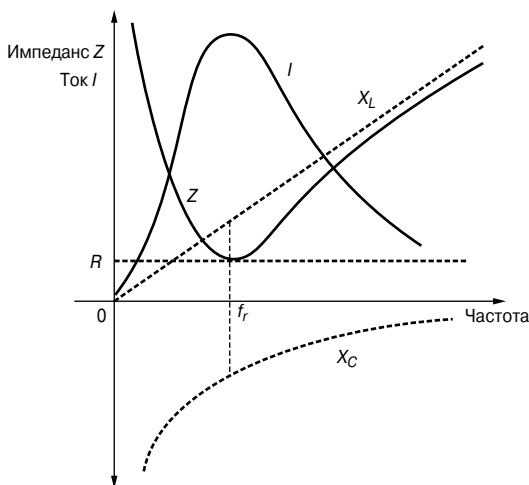
Так как импеданс  $Z = R + j(X_L - X_C)$  и при резонансе  $(X_L - X_C) = 0$ , то *при резонансе импеданс  $Z = R$ .*

Это значение импеданса наименьшее из возможных, как это видно на графике зависимости модуля импеданса  $|Z|$  от частоты (**Рис. 68.4**).

На частотах, меньших, чем  $f_r$ ,  $X_L < X_C$ , и цепь является ёмкостной; на частотах, больших, чем  $f_r$ ,  $X_L > X_C$ , и цепь является индуктивной.

Ток  $I = \frac{V}{Z}$ ; поскольку импеданс  $Z$  имеет минимальное значение при резонансе, то *ток  $I$  в этом случае максимален* и равен  $I = \frac{V}{R}$ .

Кривая зависимости тока от частоты, имеющая максимум на резонансной частоте, показана на **Рис. 68.4**.



**Рис. 68.4**

**Например,** катушка с сопротивлением 10 Ом и индуктивностью 75 мГн последовательно соединена с конденсатором 40 мкФ и источником питания 200 В. Тогда резонансная частота

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(75 \times 10^{-3})(40 \times 10^{-6})}} = 91.9 \text{ Гц},$$

и ток на резонансной частоте

$$I = \frac{V}{R} = \frac{200}{10} = 20 \text{ А}.$$

## Добротность

*Добротность* — это величина, характеризующая качество устройства, такого, например, как  $L$ - $C$ - $R$  цепь. Такая цепь резонирует с цикличным изменением накопленной энергии, сопровождаемым рассеиванием энергии из-за резонанса.

По определению, при резонансе

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \left( \frac{\text{максимальная накопленная энергия}}{\text{потери энергии за цикл}} \right) = \\ &= 2\pi \left( \frac{\text{максимальная накопленная энергия}}{\text{средняя рассеиваемая мощность} \times \text{период}} \right) = \\ &= 2\pi \left( \frac{\text{максимальная накопленная энергия}}{\text{средняя рассеиваемая мощность} \times \frac{1}{f_r}} \right) = \\ &= 2\pi f_r \left( \frac{\text{максимальная накопленная энергия}}{\text{средняя рассеиваемая мощность}} \right), \end{aligned}$$

то есть

$$Q = \omega_r \left( \frac{\text{максимальная накопленная энергия}}{\text{средняя рассеиваемая мощность}} \right),$$

где  $\omega_r$  — угловая частота при резонансе.

В  $L$ - $C$ - $R$  цепи оба реактивных элемента сохраняют энергию во время четверти цикла входного переменного тока питания и возвращают её в источник цепи во время следующей четверти цикла. Катушка индуктивности накапливает энергию в своём магнитном поле, затем передаёт её в электрическое поле конденсатора, затем конденсатор возвращает энергию обратно в магнитное поле и т. д. Значит, индуктивные и ёмкостные элементы последовательно передают энергию друг другу, источник питания при этом вообще не добавляет никакой дополнительной энергии.

Однако используемые на практике электрические реактивные компоненты не только сохраняют, но и рассеивают энергию. Добротность говорит о «доброкачественности» реактивного компонента.

Для катушки индуктивности имеем

$$\begin{aligned} Q &= \omega \left( \frac{\text{максимум сохранённой энергии}}{\text{средняя рассеиваемая мощность}} \right) = \\ &= \omega_r \left( \frac{\frac{1}{2} L I_m^2}{I^2 R} \right) = \left( \frac{\omega_r \left( \frac{1}{2} L I_m^2 \right)}{\left( \frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 R} \right), \end{aligned}$$

то есть

$$Q = \frac{\omega_r L}{R} . \quad (1)$$

Аналогично для конденсатора имеем

$$\begin{aligned} Q &= \left( \frac{\omega_r \left( \frac{1}{2} C V_m^2 \right)}{\left( \frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 R} \right) = \left( \frac{\omega_r \left( \frac{1}{2} C \right) (I_m X_C)^2}{\left( \frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 R} \right) = \\ &= \left( \frac{\omega_r \left( \frac{1}{2} C I_m^2 \right) \left( \frac{1}{\omega_r C} \right)^2}{\left( \frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 R} \right) , \end{aligned}$$

то есть

$$Q = \frac{1}{\omega_r C R} . \quad (2)$$

Из выражений (1) и (2) следует, что

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{X_C}{R} = \frac{\text{реактивное сопротивление}}{\text{активное сопротивление}} .$$

На практике добротность определяют также как отношение реактивной мощности к активной, то есть

$$\text{добротность} = \frac{Q^*}{P} ,$$

где  $Q^*$  — реактивная мощность, являющаяся также пиковой скоростью расхода запасённой энергии,

$P$  — активная мощность, или усреднённая скорость рассеивания энергии.

(Звёздочка \* поставлена у символьного обозначения реактивной мощности для того, чтобы избежать путаницы, так как символьные обозначения добротности и реактивной мощности одинаковы. — *Прим. редактора перевода*).

Покажем справедливость такого определения.

Действительно,

$$\text{добротность} = \frac{Q^*}{P} = \frac{I^2 X_L}{I^2 R} = \frac{X_L}{R}$$

или

$$\text{добротность} = \frac{Q^*}{P} = \frac{I^2 X_C}{I^2 R} = \frac{X_C}{R},$$

то есть

$$Q = \frac{\text{реактивная мощность}}{\text{активная мощность}}$$

В последовательной  $R$ - $L$ - $C$  цепи количество сохранённой энергии при резонансе постоянно. Когда напряжение на конденсаторе максимально, ток в катушке индуктивности равен нулю, и наоборот, поэтому максимальная энергия в катушке индуктивности равна максимальной энергии в конденсаторе (но не одновременно).

$$\frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} C V_m^2.$$

Значит, добротность при резонансе  $Q_r$

$$Q_r = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R} \quad (3)$$

Однако известно, что при резонансе

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Значит, подставив в уравнение (1) значение  $\omega_r$ , имеем

$$Q_r = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

то есть

$$Q_r = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Следует заметить, что добротность цепи определена для любой частоты, однако на практике, когда говорят о добротности, почти всегда имеют в виду «добротность при резонансе».

Из **Рис. 68.1** и **Рис. 68.2** следует, что при резонансе  $V_L = V_C$ . Действительно,

$$V_L = I X_L = I \omega_r L = \frac{V}{R} \omega_r L = \left( \frac{\omega_r L}{R} \right) V = Q_r V$$

и



$$V_C = IX_C = \frac{I}{\omega_r C} = \frac{V}{R} \frac{1}{\omega_r C} = \left( \frac{1}{\omega_r CR} \right) V = Q_r V$$

и, следовательно,

$$V_L = V_C = Q_r V,$$

откуда

$$\boxed{Q_r = \frac{V_L}{V}} \quad \text{или} \quad \boxed{Q_r = \frac{V_C}{V}}$$

Напряжения  $V_L$  и  $V_C$  при резонансе могут быть гораздо выше напряжения питания  $V$ . По этой причине  $Q$  часто называют *коэффициентом усиления цепи*, так как он определяет, во сколько раз  $V_L$  или  $V_C$  больше напряжения питания.

Добротность при резонансе может принимать значения в несколько сот единиц. На практике резонанс представляет интерес в основном только в тех цепях, где добротность больше 10; цепи со значительно меньшей добротностью эффективно работают лишь при коэффициенте мощности, равном единице.

**Например,** последовательная цепь состоит из резистора 10 Ом, конденсатора 5 мкФ и катушки индуктивности с переменной индуктивностью  $L$ . Источник напряжения  $20 \angle 0^\circ$  В, 318.3 Гц. Индуктивность катушки подстраивается до тех пор, пока разность потенциалов на резисторе 10 Ом не станет максимальной. Определим добротность для этого случая.

Максимальное напряжение на резисторе возникает при резонансе, когда ток становится максимальным. В этом случае

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C},$$

откуда индуктивность

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{\omega_r^2 C} = \frac{1}{(2\pi 318.3)^2 (5 \times 10^{-6})} = \\ &= 0.050 \text{ Гн, или } 50 \text{ мГн.} \end{aligned}$$

Ток при резонансе

$$I_r = \frac{V}{R} = \frac{20 \angle 0^\circ}{10 \angle 0^\circ} = 2.0 \angle 0^\circ \text{ А.}$$

Напряжение на резисторе

$$V_R = I_r R = (2.0 \angle 0^\circ)(10) = 20 \angle 0^\circ \text{ В.}$$

Напряжение на катушке индуктивности

$$V_L = IX_L,$$

где

$$X_L = 2\pi(318.3)(0.050) = 100 \text{ Ом.}$$

Тогда

$$V_L = (2.0 \angle 0^\circ)(100 \angle 90^\circ) = 200 \angle 90^\circ \text{ В.}$$

Напряжение на конденсаторе

$$V_C = IX_C = (2.0 \angle 0^\circ)(100 \angle -90^\circ) = 200 \angle -90^\circ \text{ В.}$$

Добротность при резонансе

$$Q_r = \frac{V_L (\text{или } V_C)}{V} = \frac{200}{20} = 10.$$

Тот же результат можно получить другими способами.

$$Q_r = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{100}{10} = 10,$$

или

$$Q_r = \frac{1}{\omega_r C R} = \frac{1}{2\pi(318.3)(5 \times 10^{-6})(10)} = 10,$$

или

$$Q_r = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{0.050}{5 \times 10^{-6}}} = 10.$$

## Повышение напряжения

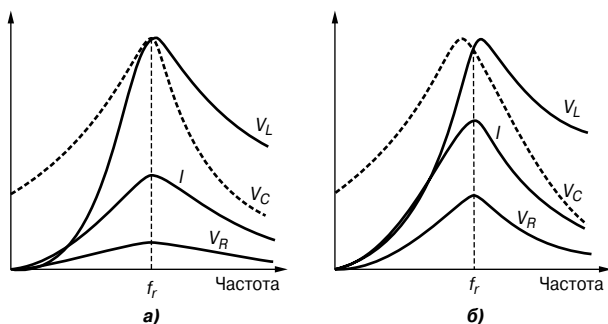
Для цепи с высокой добротностью (допустим, превышающей 100) максимум напряжения на катушке  $V_L$  и максимум напряжения на конденсаторе  $V_C$  на резонансной частоте  $f_r$  совпадают с максимумом тока цепи, как показано на **Рис. 68.5а**.

Однако если цепь имеет низкую добротность (к примеру, меньше 10), то можно экспериментально показать, что максимальное значение  $V_C$  появляется на частоте, меньшей, чем  $f_r$ , в то время как максимальное значение  $V_L$  возникает при частоте выше резонансной, как это показано на **Рис. 68.5б**. Максимальный ток, однако, и при низкой добротности всё-таки появляется на резонансной частоте.

Это обстоятельство можно выразить соотношением

$$f = f_r \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (4)$$

Если добротность велика, то  $f \approx f_r$ , как видно на **Рис. 68.5а**.



**Рис. 68.5**

Также можно показать, что максимальное напряжение на конденсаторе и максимальное напряжение на катушке индуктивности равны и выражаются соотношением

$$V_{C_m} = V_{L_m} = \frac{QV}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2\right]}} \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что при высокой добротности

$$V_{C_m} = V_{L_m} \approx QV.$$

**Например**, на последовательную цепь  $L$ - $R$ - $C$  подаётся синусоидальное напряжение амплитудой 12 В. Если индуктивность цепи  $L$  20 мГн, сопротивление  $R$  80 Ом, а ёмкость  $C$  400 нФ, то резонансная частота

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(20 \times 10^{-3})(400 \times 10^{-9})}} = 1779.4 \text{ Гц},$$

а добротность

$$Q = \frac{\omega_r L}{R} \quad \left( \text{или} = \frac{1}{\omega_r C R}, \quad \text{или} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \right),$$

то есть

$$Q = \frac{(2\pi)(1779.4)(20 \times 10^{-3})}{80} = 2.80.$$

Сравним напряжение  $V_C$  на конденсаторе на резонансной частоте с максимальным значением  $V_{C_m}$ , а также значение резонансной частоты с частотой, на которой  $V_C$  максимально.

На резонансной частоте напряжение на конденсаторе равно

$$V_C = QV = (2.80)(12) = \mathbf{33.60 \text{ В.}}$$

Максимальное напряжение на конденсаторе в соответствии с уравнением (5)

$$V_{C_m} = \frac{QV}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2\right]}} = \frac{(2.80)(12)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{1}{2(2.80)}\right)^2\right]}} = \mathbf{34.15 \text{ В.}}$$

Из уравнения (4) следует, что частота  $f$ , при которой напряжение  $V_C$  максимально,

$$f = f_r \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)} = (1779.4) \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2(2.80)^2}\right)} = \mathbf{172 \text{ 1.7 Гц}},$$

то есть частота, на которой  $V_C$  максимально, на **57.7 Гц** ниже резонансной частоты.

### Добротность компонентов последовательной цепи и полная добротность

Если не принимать во внимание потери на конденсаторе, полная добротность цепи зависит от добротности отдельно взятых компонентов. Если добротность катушки индуктивности равна  $Q_L$ , а добротность конденсатора равна  $Q_C$ , то полная добротность

$$Q_T = \frac{Q_L Q_C}{Q_L + Q_C}$$

**Например**, если катушку индуктивности с добротностью 60 последовательно соединить с конденсатором с добротностью 390, то полная добротность

$$Q_T = \frac{Q_L Q_C}{Q_L + Q_C} = \frac{(60)(390)}{60 + 390} = \frac{232400}{450} = \mathbf{52}.$$

### Ширина полосы частот

На **Рис. 68.6** показано, как изменяется ток  $I$  в зависимости от частоты  $f$  в последовательной цепи  $R$ - $L$ - $C$ .



Рис. 68.6

На резонансной частоте  $f_r$  ток принимает максимальное значение, показанное на **Рис. 68.6** как  $I_r$ . В точках А и В, соответствующих частотам  $f_1$  и  $f_2$ , ток в 0.707 раза меньше своего максимального значения.

Мощность цепи равна  $I^2 R$ . При  $I = 0.707 I_r$ , мощность равна  $(0.707 I_r)^2 R = 0.5 I_r^2 R$ , то есть половине мощности на частоте  $f_r$ . Точки А и В, соответствующие  $f_1$  и  $f_2$ , называются *точками по уровню половинной мощности*. Расстояние между ними, то есть  $(f_2 - f_1)$ , называют *шириной полосы частот*.

Если отношение двух мощностей  $P_1$  и  $P_2$  выражено в децибелах, то

$$N = 10 \lg \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \text{ дБ.}$$

Так как мощность в точках по уровню половинной мощности равна  $(0.707 I_r)^2 R = \frac{I_r^2 R}{2}$ , а пиковая мощность —  $I_r^2 R$ , то отношение мощностей в децибелах равно

$$10 \lg \left[ \frac{\frac{I_r^2 R}{2}}{I_r^2 R} \right] = 10 \lg \frac{1}{2} = -3 \text{ дБ.}$$

Именно по этой причине точки по уровню половинной мощности часто называют «*точками -3 дБ*».

На частоте, соответствующей уровню половинной мощности,  $I = 0.707 I_r$ , следовательно, импеданс

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V}{0.707 I_r} = 1.414 \left( \frac{V}{I_r} \right) = \sqrt{2} Z_r.$$

Так как при резонансе  $Z_r = R$ , то

$$Z = \sqrt{2} R.$$

Можно показать, что для последовательной цепи  $R$ - $L$ - $C$  справедливо соотношение

$$\boxed{Q_r = \frac{f_r}{f_2 - f_1}} \quad \text{и} \quad \boxed{f_r = \sqrt{f_1 f_2}} \quad (6)$$

## Избирательность

*Избирательность* — это способность цепи «более охотно» откликаться на сигналы определённой частоты, на которую она настроена, чем на сигналы других частот. Отклик становится значительно слабее по мере того, как частота удаляется от резонансной. Селективность (то есть чувствительность) к другим сигналам становится более ярко выраженной с уменьшением потерь в цепи, то есть с увеличением добротности. Значит,  $Q_r = f_r / (f_2 - f_1)$  — это способ оценки избирательности цепи, исходя из точек половинной мощности на каждой стороне резонанса, в которых ток в цепи в 0.707 раза меньше максимального значения, достигнутого при резонансе. Чем выше добротность, тем уже полоса частот и тем более избирательна цепь. По этой причине в технике связи применяются цепи с высокой добротностью (допустим, порядка 300). Недостатком высокой добротности в последовательной цепи электропитания является то, что это может привести к опасно высоким напряжениям на изоляции, что в свою очередь может привести к электрическому пробое.

**Например**, предположим, утверждается, что номинальное напряжение конденсатора равно 1 кВ и конденсатор используется в цепи с напряжением питания 240 В. Максимальная величина напряжения питания может достигать  $\sqrt{2}(240)$ , то есть 340 В. Напряжения конденсатора, казалось бы, должно хватить с избытком. Однако если добротность схемы, предположим, равна 10, то напряжение на конденсаторе может достигать 2.4 кВ. Так как конденсатор допускает работу при 1 кВ, более чем вероятно, что пробой диэлектрика неизбежен.

Низкие добротности (в диапазоне от 5 до 25) встречаются в силовых трансформаторах со стальными пластинчатыми сердечниками.

Асинхронный двигатель с конденсаторным пуском, используемый в таких бытовых приборах, как стиральная машина или пылесос, имеющих добротность всего 1.5 при запуске, приведёт к тому, что напряжение на конденсаторе будет в 1.5 раза больше, чем напряжение питания. А это значит, что для кабеля, соединяющего конденсатор с двигателем, потребуется дополнительная изоляция.

**Например**, определим ширину полосы, верхнюю и нижнюю частоты, соответствующие половинной мощности, для последо-

вательной  $R$ - $L$ - $C$  цепи, имеющей резонансную частоту 1.2 кГц и добротность при резонансе 30.

Если импеданс цепи при резонансе равен 50 Ом, то на резонансной частоте  $Z = R$ , то есть  $R = 50$  Ом.

Добротность при резонансе

$$Q_r = \frac{\omega_r L}{R},$$

откуда индуктивность

$$\begin{aligned} L &= \frac{Q_r R}{\omega_r} = \frac{(30)(50)}{(2\pi \cdot 1200)} = \\ &= \mathbf{0.199 \text{ Гн}}, \text{ или } \mathbf{199 \text{ мГн}}. \end{aligned}$$

При резонансе

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C},$$

следовательно, ёмкость

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\omega_r^2 L} = \frac{1}{(2\pi \cdot 1200)^2 (0.199)} = \\ &= \mathbf{0.088 \text{ мкФ}}, \text{ или } \mathbf{88 \text{ нФ}}. \end{aligned}$$

Добротность на резонансной частоте

$$Q = f_r / (f_2 - f_1),$$

откуда ширина полосы

$$(f_2 - f_1) = \frac{f_r}{Q} = \frac{1200}{30} = \mathbf{40 \text{ Гн}}.$$

В соответствии с уравнением (6) резонансная частота

$$f_r = \sqrt{f_1 f_2},$$

то есть

$$1200 = \sqrt{f_1 f_2},$$

откуда

$$f_1 f_2 = (1200)^2 = 1.44 \times 10^6. \quad (7)$$

Ранее было определено, что

$$f_2 - f_1 = 40. \quad (8)$$

Из уравнения (7) получаем

$$f_1 = \frac{1.44 \times 10^6}{f_2}.$$

Подстановка в уравнение (8) даёт

$$f_2 - \frac{1.44 \times 10^6}{f_2} = 40.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$f_2^2 - 1.44 \times 10^6 = 40f_2,$$

или

$$f_2^2 - 40f_2 - 1.44 \times 10^6 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, имеем

$$f_2 = \frac{40 \pm \sqrt{[(40)^2 - 4(-1.44 \times 10^6)]}}{2} = \frac{40 \pm 2\,400}{2}.$$

Так как  $f_2$  не может быть отрицательным, то

$$f_2 = \frac{40 + 2\,400}{2} = 1\,200.$$

Значит, верхняя частота, соответствующая половинной мощности,

$$f_2 = 1\,220 \text{ Гц}.$$

Из уравнения (8) получаем нижнюю частоту, соответствующую половинной мощности,

$$f_1 = f_2 - 40 = 1\,220 - 40 = 1\,180 \text{ Гц}.$$

Следует обратить внимание на то, что верхняя и нижняя частоты, соответствующие половинной мощности, относительно резонансной частоты расположены симметрично. Как правило, это справедливо, когда добротность большая (обычно  $> 10$ ).

## Небольшие отклонения от резонансной частоты

Пусть  $\omega_1$  — это частота последовательной  $L$ - $R$ - $C$  цепи ниже резонансной  $\omega_r$ . А  $\omega_2$  — это частота выше  $\omega_r$  настолько, насколько  $\omega_1$  ниже  $\omega_r$ , то есть  $\omega_r - \omega_1 = \omega_2 - \omega_r$ .



Допустим, частичное отклонение от резонансной частоты —  $\delta$ , где

$$\delta = \frac{\omega_r - \omega_1}{\omega_r} = \frac{\omega_2 - \omega_r}{\omega_r}.$$

Можно показать, что при частоте  $\omega_2$  справедливы соотношения

$$\frac{I}{I_r} = \frac{1}{1 + j\delta Q} \quad (9)$$

и

$$\frac{Z}{Z_r} = 1 + j2\delta Q \quad (10)$$

Можно показать также, что при частоте  $\omega_1$  справедливы соотношения

$$\frac{I}{I_r} = \frac{1}{1 + j2\delta Q}$$

и

$$\frac{Z}{Z_r} = 1 - j2\delta Q$$

**Например,** в последовательной  $L$ - $R$ - $C$  цепи индуктивность  $L = 8$  мГн, ёмкость  $C = 0.3$  мкФ, сопротивление  $R = 15$  Ом. Входное напряжение равно  $7.5 \angle 0^\circ$  В. Определим ток в цепи и её импеданс на: а) резонансной частоте, б) частоте на 3% выше резонансной частоты.

а) При резонансе

$$Z_r = R = 15 \text{ Ом},$$

и тогда ток на резонансной частоте

$$I_r = \frac{V}{Z_r} = \frac{7.5 \angle 0^\circ}{15 \angle 0^\circ} = 0.5 \angle 0^\circ \text{ А.}$$

б) Если частота на 3% выше резонансной частоты, то  $\delta = 0.03$ .

В соответствии с уравнением (9)

$$\frac{I}{I_r} = \frac{1}{1 + j2\delta Q},$$

где

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{15} \sqrt{\frac{8 \times 10^{-3}}{0.3 \times 10^{-6}}} = 10.89.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{I}{0.5\angle 0^\circ} &= \frac{1}{1+j2(0.03)(10.89)} = \\ &= \frac{1}{1+j0.6534} = \frac{1}{1.1945\angle 33.16^\circ},\end{aligned}$$

откуда

$$I = \frac{0.5\angle 0^\circ}{1.1945\angle 33.16^\circ} = \mathbf{0.4186\angle -33.16^\circ \text{ A.}}$$

Когда частота на 3% выше резонансной частоты, импеданс цепи можно определить из уравнения (10)

$$\frac{Z}{Z_r} = 1 + j2\delta Q,$$

откуда

$$Z = Z_r(1 + j2\delta Q) = R(1 + j2\delta Q).$$

Подставив вместо  $R$ ,  $\delta$  и  $Q$  их значения, имеем

$$\begin{aligned}Z &= 15(1 + j2(0.03)(10.89)) = \\ &= 15(1 + j0.6534) = 15(1.1945\angle -33.16^\circ) = \mathbf{17.92\angle -33.16^\circ \text{ Ом.}}\end{aligned}$$

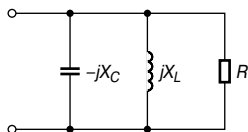
Тот же результат можно получить другим путём.

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{7.5\angle 0^\circ}{0.4186\angle -33.16^\circ} = \mathbf{17.92\angle 33.16^\circ \text{ Ом.}}$$

## 69. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ РЕЗОНАНС И ДОБРОТНОСТЬ

### Общие понятия о параллельном резонансе

На **Рис. 69.1** показана параллельная цепь, содержащая сопротивление  $R$ , идеальную индуктивность  $L$  и идеальную ёмкость  $C$ .



**Рис. 69.1**

Так как индуктивность и ёмкость считаются идеальными компонентами, такую цепь иногда называют «идеальной». Однако этот термин может использоваться также, чтобы выделить некоторые касающиеся резонанса точки, применимые к любой параллельной цепи. Из схемы на **Рис. 69.1** следует, что проводимость ветви с сопротивлением

$$G = \frac{1}{R},$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{проводимость ветви} \\ \text{с индуктивностью} \end{array} \right\} B_L = \frac{1}{jX_L} = \frac{-j}{\omega L},$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{проводимость ветви} \\ \text{с ёмкостью} \end{array} \right\} B_C = \frac{1}{-jX_C} = \frac{j}{1/\omega C} = j\omega C.$$

Полная проводимость цепи

$$Y = G + j(B_C - B_L),$$

или

$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

*Параллельный резонанс* в цепи наступает тогда, когда мнимая часть равна нулю, то есть

$$\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = 0.$$

Однако при резонансе

$$\omega_r C = \frac{1}{\omega_r L},$$

откуда

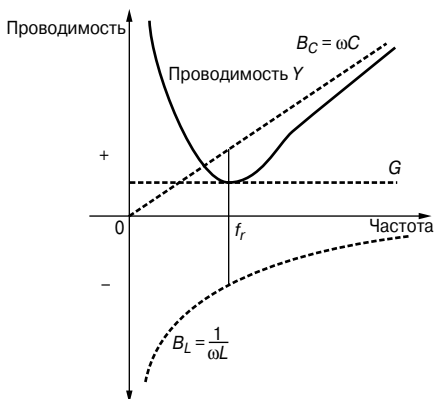
$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

и тогда резонансная частота

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Следует обратить внимание на то, что условия наступления резонанса для переменной и последовательной  $R$ - $L$ - $C$  цепей одинаковы.

На **Рис. 69.2** показан типичный график зависимости  $B_C$ ,  $B_L$ ,  $G$  и  $Y$  от частоты  $f$  для цепи, показанной на **Рис. 69.1**.



**Рис. 69.2**

При резонансе  $B_C = B_L$ , и, следовательно,

$$Y = G = \frac{1}{R}.$$

Это соотношение характеризует условие минимальной проводимости цепи и, следовательно, *максимального импеданса*.

Так как ток  $I = V/Z = VY$ , то в параллельной цепи при резонансе ток также имеет минимальную величину.

Считая, что характеристика, изображённая на **Рис. 69.2**, отражает свойства идеальной цепи, можно утверждать, что при резонансе для любой параллельной цепи:

- проводимость  $Y$  минимальна;
- импеданс  $Z$  максимален;

- ток  $I$  минимален;
- выражение для резонансной частоты  $f_r$  можно получить, приравняв мнимую часть комплексного выражения для проводимости к нулю.

## Параллельная $L$ - $R$ - $C$ цепь

На Рис. 69.3 показана более распространённая на практике цепь, содержащая катушку индуктивности  $L$  и резистор  $R$ , соединённые параллельно с конденсатором  $C$ . Реальная катушка индуктивности изготовлена из металлического проводника (чаще всего из медного провода), который всегда имеет определённое омическое сопротивление, поэтому приведённая схема справедлива и для случая, когда реальный резистор в ней отсутствует.

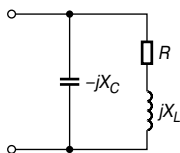


Рис. 69.3

Проводимость катушки

$$Y_{\text{COIL}} = \frac{1}{R + jX_L} = \frac{R - jX_L}{R^2 + X_L^2} =$$

$$= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Проводимость конденсатора

$$Y_C = \frac{1}{-jX_C} = \frac{j}{X_C} = j\omega C.$$

Общая проводимость цепи

$$Y = Y_{\text{COIL}} + Y_C = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\omega C \quad (1)$$

При резонансе полная проводимость цепи  $Y$  равна её действительной части, а мнимая часть равна нулю, то есть

$$Y = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Следовательно, при резонансе

$$\frac{-\omega_r L}{R^2 + \omega_r^2 L^2} + \omega_r C = 0.$$

Откуда, проведя ряд преобразований, найдём  $\omega_r$ .

$$\begin{aligned}\frac{\omega_r L}{R^2 + \omega_r^2 L^2} &= \omega_r C; \\ \frac{L}{C} &= R^2 + \omega_r^2 L^2; \\ \omega_r^2 L^2 &= \frac{L}{C} - R^2; \\ \omega_r^2 &= \frac{L}{CL^2} - \frac{R^2}{L^2}; \\ \omega_r^2 &= \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}; \\ \omega_r &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}.\end{aligned}\tag{2}$$

То есть резонансная частота

$$\boxed{f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}}\tag{3}$$

Следует обратить внимание на то, что когда

$$\frac{R^2}{L^2} \ll \frac{1}{LC},$$

то

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

То есть при определённых условиях формула, определяющая резонансную частоту, одинакова для параллельных и последовательных  $R$ - $L$ - $C$  цепей (см. гл. 68).

Уравнение (3) такое же, как получено в гл. 56; однако рассмотренный выше метод можно применить к любой параллельной цепи.

## Динамическое сопротивление

Так как ток при резонансе находится в одной фазе с напряжением, импеданс цепи ведёт себя как омическое сопротивление, которое называют *динамическим сопротивлением*  $R_D$ .

Если  $I_r$  — ток цепи на резонансной частоте, то импеданс

$$R_D = \frac{V}{I_r}.$$

Так как на резонансной частоте мнимая часть уравнения (1) равна нулю, то

$$I_r = VY_r = V\left(\frac{R}{R^2 + \omega_r^2 L^2}\right).$$

В этом случае получаем

$$R_D = \frac{V}{I_r} = \frac{V}{\frac{VR}{R^2 + \omega_r^2 L^2}} = \frac{R^2 + \omega_r^2 L^2}{R}.$$

Подставляя вместо  $\omega^2$  его значение из уравнения (2), имеем

$$\begin{aligned} R_D &= \frac{R^2 + L^2\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right)}{R} = \\ &= \frac{R^2 + \frac{L}{C} - R^2}{R} = \frac{\frac{L}{C}}{R} = \frac{L}{CR}. \end{aligned}$$

Итак, динамическое сопротивление принимает вид

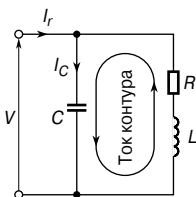
$$\boxed{R_D = \frac{L}{CR}} \quad (4)$$

## Добротность параллельной $R$ - $L$ - $C$ цепи

Добротность последовательной  $R$ - $L$ - $C$  цепи — это показатель усиления напряжения. В параллельной цепи ток, превышающий ток питания, может циркулировать в параллельных ветвях, при этом ток, уходя из конденсатора, создаёт магнитное поле в катушке индуктивности, которое вновь заряжает конденсатор, и т. д. *Добротность параллельной резонансной цепи* — это отношение тока, циркулирующего в параллельных ветвях, к току потребления, то есть в параллельной цепи добротность — это показатель усиления тока.

При резонансе циркулирующие токи могут в сотни раз превышать ток потребления. Для параллельной цепи, показанной на **Рис. 69.4**, добротность при резонансе

$$Q_r = \frac{\text{ток контура}}{\text{ток при резонансе}} = \frac{\text{ток через конденсатор}}{\text{ток при резонансе}} = \frac{I_C}{I_r}$$



**Рис. 69.4**

Ток конденсатора

$$I_C = V/X_C = V\omega_r C.$$

Ток питания при резонансе

$$I_r = \frac{V}{R_d} = \frac{V}{L/CR} = \frac{VCR}{L}.$$

$$Q_r = \frac{I_C}{I_r} = \frac{V\omega_r C}{VCR/L},$$

то есть

$$Q_r = \frac{\omega_r L}{R}$$

**Например,** катушка с индуктивностью 5 мГн и сопротивлением 10 Ом параллельно соединена с ёмкостью 250 нФ и источником питания 50 В с изменяющейся частотой. Для этой цепи определим резонансную частоту, добротность на резонансной частоте, а также резонансное сопротивление и ток.

В соответствии с уравнением (3) резонансная частота

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{5 \times 10^{-3} \times 250 \times 10^{-9}} - \frac{10^2}{(5 \times 10^{-3})^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{(800 \times 10^6 - 4 \times 10^6)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{(796 \times 10^6)} = \mathbf{4\,490 \text{ Гц.}} \end{aligned}$$



Добротность

$$Q_r = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{(2\pi \cdot 4\,490)(5 \times 10^{-3})}{10} = 14.1.$$

В соответствии с уравнением (4) резонансное сопротивление

$$R_D = \frac{L}{CR} = \frac{5 \times 10^{-3}}{(250 \times 10^{-9})(10)} = 2\,000 \text{ Ом.}$$

Ток при резонансе

$$I_r = \frac{V}{R_D} = \frac{50}{2\,000} = 25 \text{ мА.}$$

## Частота свободных колебаний и резонансная частота вынужденных колебаний

Разница между резонансной частотой последовательной и параллельной цепями может быть довольно незначительной. Резонансная частота катушки индуктивности, соединённой параллельно с конденсатором, определена в уравнении (3); однако вокруг замкнутой петли, объединяющей катушку и конденсатор, энергия перетекает от катушки индуктивности к конденсатору и обратно с частотой, равной частоте последовательной цепи  $R$ - $L$ - $C$ , как это показано в гл. 68. Эта последняя частота называется *частотой свободных колебаний*  $f_n$ , а частоту резонанса на выводах (**Рис. 69.4**) зачастую называют *резонансной частотой вынужденных колебаний*  $f_r$ . (Для последовательной цепи эти частоты совпадают.)

Для контура катушка—конденсатор (**Рис. 69.4**) можно показать, что

$$f_r = f_n \sqrt{\left(1 - \frac{1}{Q^2}\right)}$$

Следовательно, видно, что даже при низкой добротности разница между  $f_r$  и  $f_n$  невелика. Высокая добротность «заставляет» резонансную частоту параллельной цепи стремиться к тому же значению, что и при последовательной цепи.

Выражения, полученные в гл. 68 для полосы частот и резонансной частоты, также применимы к параллельным цепям, то есть

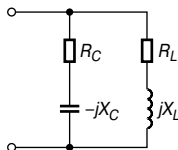
$$Q_r = \frac{f_r}{(f_2 - f_1)} \quad (5)$$

и

$$f_r = \sqrt{f_1 f_2} \quad (6)$$

## Параллельная $LR$ - $CR$ цепь

На **Рис. 69.5** показана часто встречающаяся на практике цепь, содержащая индуктивность  $L$  и сопротивление  $R_L$ , соединённых параллельно с ёмкостью  $C$  и сопротивлением  $R_C$ , которые соединены последовательно.



**Рис. 69.5**

Проводимость индуктивной ветви

$$Y_L = \frac{1}{R_L + jX_L} = \frac{R_L - jX_L}{R_L^2 + X_L^2} = \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} - \frac{jX_L}{R_L^2 + X_L^2}.$$

Проводимость ёмкостной ветви

$$Y_C = \frac{1}{R_C - jX_C} = \frac{R_C + jX_C}{R_C^2 + X_C^2} = \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2} + \frac{jX_C}{R_C^2 + X_C^2}.$$

Общая проводимость цепи

$$Y = Y_L + Y_C = \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} - \frac{jX_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2} + \frac{jX_C}{R_C^2 + X_C^2}.$$

При резонансе проводимость минимальна и мнимая часть  $Y$  равна нулю.

Следовательно, при резонансе

$$\frac{-X_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} = 0,$$

то есть

$$\frac{\omega_r L}{R_L^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1/(\omega_r C)}{R_C^2 + (1/\omega_r^2 C^2)}. \quad (7)$$

Из уравнения (7) видно, что в такой цепи параллельный резонанс можно достичь несколькими способами: изменяя либо частоту  $f$ , либо индуктивность  $L$ , либо ёмкость  $C$ , либо сопротивление  $R_L$  или сопротивление  $R_C$ .

Проводя обычные математические преобразования в уравнении (7), имеем

$$\omega_r L \left( R_C^2 + \frac{1}{\omega_r^2 C^2} \right) = \frac{1}{\omega_r C} (R_L^2 + \omega_r^2 L^2);$$

$$\omega_r L R_C^2 + \frac{L}{\omega_r C^2} = \frac{R_L^2}{\omega_r C} + \frac{\omega_r L^2}{C}.$$

Приводя к общему знаменателю  $\omega_r C^2$ , получаем

$$\omega_r^2 C^2 L R_C^2 + L = R_L^2 C + \omega_r^2 L^2 C;$$

$$\omega_r^2 (C^2 L R_C^2 - L^2 C) = R_L^2 C - L;$$

$$\omega_r^2 C L (C R_C^2 - L) = R_L^2 C - L.$$

Из этого уравнения определяем  $\omega_r^2$ .

$$\omega_r^2 = \frac{(C R_L^2 - L)}{L C (C R_C^2 - L)},$$

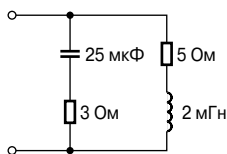
откуда

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - (L/C)}{R_C^2 - (L/C)}}.$$

Тогда резонансная частота

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - (L/C)}{R_C^2 - (L/C)}} \quad (8)$$

**Например,** на **Рис. 69.6** показана параллельная цепь из двух ветвей.



**Рис. 69.6**

В соответствии с уравнением (8) резонансная частота

$$f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{[(2 \times 10^{-3})(25 \times 10^{-6})]}} \sqrt{\frac{5^2 - ((2 \times 10^{-3})/(25 \times 10^{-6}))}{3^2 - ((2 \times 10^{-3})/(25 \times 10^{-6}))}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{5 \times 10^{-8}}\sqrt{\frac{25-80}{9-80}}} = \frac{10^4}{2\pi\sqrt{5}\sqrt{-71}} = 626.5 \text{ Гц.}$$

### Добротность компонентов параллельной цепи и полная добротность

Полная добротность  $Q_T$  двух параллельных компонентов, имеющих разные добротности

$$Q_T = \frac{Q_L Q_C}{Q_L + Q_C} \quad (9)$$

То есть формула, определяющая полную добротность, одинакова для параллельных и последовательных цепей (см. гл. 68).

**Например**, если конденсатор с добротностью 300 параллельно соединён с катушкой индуктивности с добротностью 60, то полная добротность

$$Q_T = \frac{Q_L Q_C}{Q_L + Q_C} = \frac{(60)(300)}{60 + 300} = \frac{18\,000}{360} = 50.$$

### Небольшие отклонения от резонансной частоты

Можно показать, что для параллельной цепи

$$\frac{Y}{Y_r} = \frac{R_D}{Z} = 1 + j2\delta Q \quad (10)$$

где  $Y$  — проводимость цепи,

$Y_r$  — проводимость при резонансе,

$Z$  — импеданс цепи,

$R_D$  — динамическое сопротивление (то есть импеданс при резонансе),

$\delta$  — незначительное отклонение от резонансной частоты.

**Например**, в  $L$ - $R$ - $C$  цепи ёмкость равна 10.61 нФ, ширина полосы составляет 500 Гц, а резонансная частота равна 150 кГц. Определим значение импеданса, если частота источника питания больше, допустим, на 0.4% настроенной частоты.

Сначала определим добротность и динамическое сопротивление.

Из уравнения (5)

$$Q = \frac{f_r}{f_2 - f_1} = \frac{150 \times 10^3}{500} = 300,$$

а из уравнения (4) динамическое сопротивление

$$R_D = \frac{L}{CR}.$$

Также в  $L$ - $R$ - $C$  цепи

$$Q = \frac{\omega_r L}{R},$$

откуда

$$R = \frac{\omega_r L}{Q}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} R_D &= \frac{L}{CR} = \frac{L}{C\left(\frac{\omega_r L}{Q}\right)} = \frac{LQ}{C\omega_r L} = \frac{Q}{\omega_r C} = \\ &= \frac{300}{(2\pi 150 \times 10^3)(10.61 \times 10^{-9})} = \mathbf{30 \text{ кОм.}} \end{aligned}$$

Теперь можно найти импеданс.

Из уравнения (10) имеем

$$\frac{R_D}{Z} = 1 + j2\delta Q,$$

откуда

$$Z = \frac{R_D}{1 + j2\delta Q}.$$

Так как  $\delta = 0.4\% = 0.004$ , подставив в уравнение значения  $R_D$ ,  $Q$  и  $\delta$ , получим

$$\begin{aligned} Z &= \frac{30 \times 10^3}{1 + j2(0.004)(300)} = \frac{30 \times 10^3}{1 + j2.4} = \\ &= \frac{30 \times 10^3}{2.6 \angle 67.38^\circ} = 11.54 \angle -67.38^\circ \text{ кОм.} \end{aligned}$$

Следовательно, импеданс при заданных условиях равен **11.54 кОм.**

## 70. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

### Введение

Источники напряжения в последовательно-параллельных цепях «заставляют» ток течь в каждой ветви цепи, и в компонентах цепи возникает соответствующее падение напряжения. В задачу теории цепей переменного тока входит определение токов в этих ветвях и/или напряжений на компонентах цепи.

Токи и падение напряжения в цепях переменного тока определяются рядом законов.

- Ток через компонент цепи определяется законом Ома

$$I = \frac{V}{Z},$$

где  $Z$  — комплексный импеданс,  
 $V$  — напряжение на компоненте.

- Полный импеданс параллельных и последовательных цепей определяют законы:

для  $n$  последовательно соединённых компонентов —

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n,$$

для  $n$  параллельно соединённых компонентов —

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n}.$$

- *Законы Кирхгофа* дают возможность определять токи и напряжения в электрических цепях.

1. В любой точке электрической цепи векторная сумма токов, направленных к данному узлу, равна векторной сумме токов, направленных от этого узла.

2. В любом замкнутом контуре электрической цепи векторная сумма падений напряжений (то есть произведение токов и импедансов) равна векторной сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

В любой цепи токи и напряжения в любой точке можно определить с помощью законов Кирхгофа (как показано в этой главе) или с помощью следствия из этих законов, называемых *методом контурных токов* и *методом узловых потенциалов* (см. гл. 71).

Однако в случае более сложных цепей, чтобы разрешить проблемы, относящиеся к цепям как переменного, так и постоянного тока, в качестве альтернативы законам Кирхгофа разработано несколько теорем. К ним относятся:

- *принцип суперпозиции* (см. гл. 72);
- *теорема Тевенина—Гельмгольца* (см. гл. 73);

- *теорема Нортон* (см. гл. 73);
- *теорема о максимуме отдаваемой мощности* (см. гл. 75).

В качестве дополнения к этим теоремам преобразования типа звезда—треугольник (или  $T - \pi$ ) и треугольник—звезда (или  $\pi - T$ ), зачастую выступающие как подготовительное действие перед применением теорем, обеспечивают упрощение отдельно взятых цепей (см. гл. 74).

В теории цепей переменного тока, куда входят законы Кирхгофа и теоремы цепей, использование комплексных чисел необходимо.

## Решение систем уравнений с помощью определителей

Применяя к цепям законы Кирхгофа, можно получить системы уравнений, которые необходимо потом решить. Если цепь содержит два контура, то можно составить систему уравнений с двумя неизвестными; если контуров — три, то может быть сформирована система из трёх уравнений с тремя неизвестными и т. д. Для решения таких уравнений можно применить методы исключения и замены. Однако более подходящий приём — это метод с использованием *определителей*.

### Система уравнений с двумя неизвестными

Чтобы решить систему линейных уравнений с двумя неизвестными методом определителей, следует выполнить ряд процедур.

- **Во-первых**, записать уравнения в виде

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y + c_1 &= 0; \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0.\end{aligned}$$

- **Во-вторых**, записать решение в виде

$$\frac{x}{D_x} = \frac{-y}{D_y} = \frac{1}{D},$$

где

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$D_x$  — это определитель коэффициентов, составленный из двух столбцов: первый — из коэффициентов при « $y$ », второй — из свободных членов (на практике можно действовать так: «закрыть» столбец с коэффициентами при « $x$ » и составить определитель из оставшихся членов);

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

$D_y$  — это определитель коэффициентов, составленный из двух столбцов: первый — из коэффициентов при «х», второй — из свободных членов (на практике можно действовать так: «закрыть» столбец с коэффициентами при «х» и составить определитель из оставшихся членов);

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$D$  — это определитель коэффициентов, составленный из двух столбцов: первый — из коэффициентов при «х», второй — из коэффициентов при «у» (на практике можно действовать так: «закрыть» столбец со свободными членами и составить определитель из оставшихся членов).

Определитель «2 на 2»  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  вычисляется с помощью операции  $ad - bc$ .

### **Система уравнений с тремя неизвестными**

Чтобы решить систему линейных уравнений с тремя неизвестными методом определителей, также следует выполнить определённые процедуры.

- **Во-первых**, записать уравнения в виде

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0; \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0; \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0. \end{aligned}$$

- **Во-вторых**, записать решение в виде

$$\frac{x}{D_x} = \frac{-y}{D_y} = \frac{z}{D_z} = \frac{-1}{D},$$

где

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}; \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}; \\ D_z &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$



### Решение определителя $3 \times 3$

1. *Минор элемента* матрицы  $3 \times 3$  — это определитель  $2 \times 2$ , полученный вычёркиванием столбца и строки, содержащих этот элемент.

**Например,** для матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  минор элемента 4 — это

определитель  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ , то есть

$$(2 \times 9) - (3 \times 8) = 18 - 24 = -6.$$

Аналогично минор элемента 3 —  $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$ , то есть

$$(4 \times 8) - (5 \times 7) = 32 - 35 = -3.$$

2. Знак минора зависит от расположения элемента в матри-

це, при этом общее расположение знаков элемента  $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ .

Минор элемента, учитывающий знак, называют *алгебраическим дополнением*. Значит, алгебраическое дополнение элемента 4 в приведённой выше матрице

$$- \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -(-6) = +6.$$

Алгебраическое дополнение элемента называют также *адьюнктой элемента*.

Тогда адьюнкта элемента 2  $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -(36 - 42) = +6$ .

**|| Значение определителя  $3 \times 3$  равно сумме произведений элементов матрицы и их адьюнктов, находящихся в любой строке или любом столбце соответствующей матрицы  $3 \times 3$ ,**

то есть

с учётом расположения знаков определитель  $3 \times 3$   $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix}$

принимает вид

$$a \begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & j \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

с использованием верхней строки  
или

$$-b \begin{vmatrix} d & f \\ g & j \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & j \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

с использованием второго столбца.

Легко подсчитать, что существует шесть способов вычисления определителя  $3 \times 3$ .

## Применение законов Кирхгофа к теории цепей

Законы Кирхгофа можно применить к цепям как постоянного, так и переменного тока. С законами для цепей постоянного тока знакомит гл. 53. Для демонстрации метода рассмотрим цепь постоянного тока, показанную на **Рис. 70.1**.

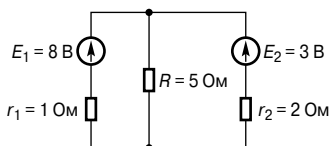


Рис. 70.1

Если ток протекает в каждой ветви, можно использовать трёхступенчатую процедуру.

- **Во-первых**, наметим токи в ветвях и их направления на принципиальной схеме. Выбор направлений произволен, но в качестве точки отсчёта полезно было бы предположить, что ток течёт от положительных выводов источников напряжения. Это показано на **Рис. 70.2**, где токи трёх ветвей выражены только через  $I_1$  и  $I_2$ , так как ток через резистор  $R$  по закону Кирхгофа равен  $(I_1 + I_2)$ .

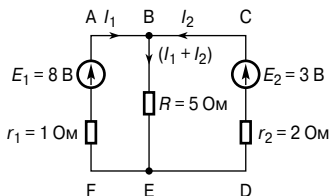


Рис. 70.2

- **Во-вторых**, разделим цепи на контуры, в данном случае их два (**Рис. 70.2**), и затем используем закон Кирхгофа о напряжении к каждой цепи по очереди. Из цепи ABEF, двигаясь по часовой стрелке (выбор направления в цепи произволен), получаем

$$E_1 = I_1 r + (I_1 + I_2) R$$

(заметим, что два значения падений напряжения положительны, так как направление обхода цепи такое же, как направление тока).

Значит,

$$8 = I_1 + 5(I_1 + I_2),$$

или

$$6I_1 + 5I_2 = 8. \quad (1)$$

Из цепи BCDE на **Рис. 70.2**, двигаясь против часовой стрелки (заметим, что направление не обязательно должно быть таким же, как в первой цепи), получаем

$$E_2 = I_2 r_2 + (I_1 + I_2) R,$$

то есть

$$3 = 2I_2 + 5(I_1 + I_2),$$

или

$$5I_1 + 7I_2 = 3. \quad (2)$$

- **В-третьих**, решим систему уравнений (1) и (2) относительно  $I_1$  и  $I_2$ .

Умножая уравнение (1) на 7, получаем

$$42I_1 + 35I_2 = 56. \quad (3)$$

Умножая уравнение (2) на 5, получаем

$$25I_1 + 35I_2 = 15. \quad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) вычитанием получаем

$$17I_1 = 41,$$

откуда

$$I_1 = \frac{41}{17} = 2.412 \text{ A} = \mathbf{2.41 \text{ A}}$$

с точностью до двух десятичных знаков.

Из уравнения (1):

$$6(2.412) + 5I_2 = 8,$$

откуда

$$I_2 = \frac{8 - 6(2.412)}{5} = -1.294 \text{ A} = \mathbf{-1.29 \text{ A}}$$

с точностью до двух десятичных знаков.

Знак «минус» показывает, что ток  $I_2$  течёт в противоположном направлении к тому, что показан на **Рис. 70.2**.

Ток, текущий через резистор  $R$ ,

$$I_1 + I_2 = 2.412 + (-1.294) = 1.118 \text{ A} = \mathbf{1.12 \text{ A}}$$

с точностью до двух десятичных знаков.

Для проверки на **Рис. 70.2** можно выбрать третью цепь, двигаясь по часовой стрелке вокруг внешней части цепи.

$$E_1 - E_2 = I_1 r_1 - I_2 r_2,$$

то есть

$$8 - 3 = I_1 - 2I_2.$$

Следовательно,

$$5 = 2.412 - 2(-1.294)$$

или

$$5 = 5.$$

Значения токов  $I_1$  и  $I_2$  можно получить иначе. Ниже показан альтернативный метод решения уравнений (1) и (2) с использованием определителей.

Так как

$$6I_1 + 5I_2 - 8 = 0, \tag{1}$$

$$5I_1 + 7I_2 - 3 = 0, \tag{2}$$

то справедливо соотношение

$$\frac{I_1}{\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-I_2}{\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}},$$

то есть

$$\frac{I_1}{-15 + 56} = \frac{-I_2}{-18 + 40} = \frac{1}{42 - 25};$$

$$\frac{I_1}{41} = \frac{-I_2}{22} = \frac{1}{17},$$

откуда

$$I_1 = \frac{41}{17} = \mathbf{2.41 \text{ A}}$$

и

$$I_2 = -\frac{22}{17} = \mathbf{-1.29 \text{ A}},$$

как было получено ранее.

Вышеописанная процедура показана на простой цепи постоянного тока с двумя неизвестными значениями тока. Однако эту процедуру также эффективно можно применять для цепей переменного тока и/или цепей с тремя неизвестными токами.

**Например,** с использованием законов Кирхгофа определим значение тока через компонент с импедансом  $(4 + j3)$  Ом в цепи, показанной на **Рис. 70.3**.

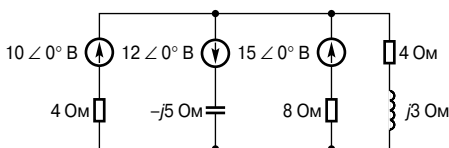


Рис. 70.3

Расставив токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  и их направления на электрической схеме, показанной на **Рис. 70.3**, получим **Рис. 70.4**.

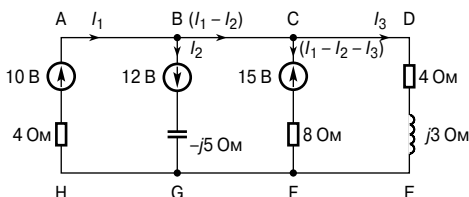


Рис. 70.4

Ток через компонент с импедансом  $(4 + j3)$  Ом определяется только одной составляющей, то есть только током  $I_3$ . Это означает, что три образованных уравнения нужно решить только для одного неизвестного тока.

Выберем три цепи. Из цепи  $ABGH$ , двигаясь по часовой стрелке, в соответствии со вторым законом Кирхгофа имеем

$$4I_1 - j5I_2 = 10 + 12. \quad (1)$$

Из цепи  $BCFG$ , двигаясь против часовой стрелки, получаем

$$-j5I_2 - 8(I_1 - I_2 - I_3) = 15 + 12. \quad (2)$$

Из цепи  $CDEF$ , двигаясь по часовой стрелке, получаем

$$-8(I_1 - I_2 - I_3) + (4 + j3)(I_3) = 15. \quad (3)$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$4I_1 - j5I_2 + 0I_3 - 22 = 0;$$

$$-8I_1 + (8 - j5)I_2 + 8I_3 - 27 = 0;$$

$$-8I_1 + 8I_2 + (12 + j3)I_3 - 15 = 0.$$

Решение для  $I_3$  получают, используя определители

$$\frac{I_3}{\begin{vmatrix} 4 & -j5 & -22 \\ -8 & (8-j5) & -27 \\ -8 & 8 & -15 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} 4 & -j5 & 0 \\ -8 & (8-j5) & 8 \\ -8 & 8 & (12+j3) \end{vmatrix}}.$$

Упрощая определители в знаменателях, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{I_3}{4 \begin{vmatrix} (8-j5) & -27 \\ 8 & -15 \end{vmatrix} + j5 \begin{vmatrix} -8 & -27 \\ -8 & -15 \end{vmatrix} - 22 \begin{vmatrix} -8 & (8-j5) \\ -8 & 8 \end{vmatrix}} = \\ & = \frac{-1}{4 \begin{vmatrix} (8-j5) & 8 \\ 8 & (12+j3) \end{vmatrix} + j5 \begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -8 & (12+j3) \end{vmatrix}}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{I_3}{384 + j700} = \frac{-1}{308 - j304},$$

откуда

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{-(384 + j700)}{(308 - j304)} = \\ &= \frac{798.41 \angle -118.75^\circ}{432.76 \angle -44.63^\circ} = \\ &= 1.85 \angle -74.12^\circ \text{ A.} \end{aligned}$$

Следовательно,

**сила тока, текущего через компонент с импедансом  $(4 + j3)$  Ом, равна 1.85 А.**

## 71. АНАЛИЗ ЦЕПЕЙ МЕТОДАМИ КОНТУРНЫХ ТОКОВ И УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

### Метод контурных токов

*Метод контурных токов* — это расширение применения законов Кирхгофа, объяснение которым давалось в гл. 70. На **Рис. 71.1** показана цепь, где циркулирующие токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  относятся скорее к замкнутым петлям в общей цепи, а не к ответвлениям цепи.

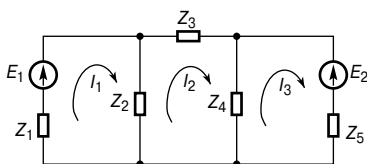


Рис. 71.1

Токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  называются *контурными токами*.

В анализе методом контурных токов все петлевые токи организованы так, чтобы циркулировать в одном направлении (на **Рис. 71.1** показано направление токов по часовой стрелке). Вторым закон Кирхгофа применяют к каждой петле по очереди, что для цепи, изображённой на **Рис. 71.1**, приводит к трём уравнениям с тремя неизвестными, решая которые можно определить токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ . Вот эти три уравнения:

$$I_1(Z_1 + Z_2) - I_2Z_2 = E_1;$$

$$I_2(Z_2 + Z_3 + Z_4) - I_1Z_2 - I_3Z_4 = 0;$$

$$I_3(Z_4 + Z_5) - I_2Z_4 = -E_2.$$

Токи ветвей определяют с учетом того, что векторная сумма контурных токов является общей к этой ветви. К примеру, ток, текущий в компоненте цепи  $Z_2$  (**Рис. 71.1**), равен  $(I_1 - I_2)$ .

Анализ токов с помощью метода контурных токов часто называют *теоремой Максвелла*.

**Например**, рассмотрим цепь переменного тока на **Рис. 71.2**, применив анализ контурных токов.

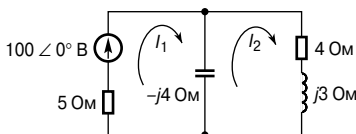


Рис. 71.2

Для первого замкнутого контура

$$(5 - j4)I_1 - (-j4I_2) = 100\angle 0^\circ. \quad (1)$$

Для второго замкнутого контура

$$(4 + j3 - j4)I_2 - (-j4I_1) = 0. \quad (2)$$

Составим из уравнений (1) и (2) систему двух уравнений:

$$(5 - j4)I_1 + j4I_2 - 100 = 0; \quad (1')$$

$$j4I_1 + (4 - j)I_2 + 0 = 0. \quad (2')$$

Используя определители, имеем

$$\overline{\begin{matrix} I_1 \\ j4 & -100 \\ (4-j) & 0 \end{matrix}} = \overline{\begin{matrix} -I_2 \\ (5-j4) & -100 \\ j4 & 0 \end{matrix}} = \overline{\begin{matrix} 1 \\ (5-j4) & j4 \\ j4 & (4-j) \end{matrix}},$$

или

$$\frac{I_1}{(400 - j100)} = \frac{-I_2}{j400} = \frac{1}{(32 - j21)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(400 - j100)}{(32 - j21)} = \frac{412.31\angle -14.04^\circ}{38.28\angle -33.27^\circ} = \\ &= 10.77\angle 19.23^\circ \text{ A} = \mathbf{10.8\angle 19.2^\circ \text{ A}} \end{aligned}$$

с точностью до одного десятичного знака.

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{400\angle -90^\circ}{38.28\angle -33.27^\circ} = \\ &= 10.45\angle -56.73^\circ \text{ A} = \\ &= \mathbf{10.5\angle -56.7^\circ \text{ A}} \end{aligned}$$

с точностью до одного десятичного знака.

Ток, текущий через конденсатор

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \\ &= 10.77\angle 19.23^\circ - 10.45\angle -56.73^\circ = \\ &= 4.44 + j12.28 = 13.1\angle 70.13^\circ \text{ A}, \end{aligned}$$

то есть **ток, текущий через конденсатор, равен 13.1 А.**

Мощность цепи

$$P = VI \cos \varphi = (100)(10.77) \cos 19.23^\circ = \mathbf{1\ 016.9 \text{ Вт}},$$

или 1 020 Вт с точностью до одного десятичного знака.



[Проверка: мощность резистора 5 Ом

$$I_1^2(5) = (10.77)^2(5) = 579.9 \text{ Вт};$$

мощность резистора 4 Ом

$$I_2^2(4) = (10.45)^2(4) = 436.81 \text{ Вт}.$$

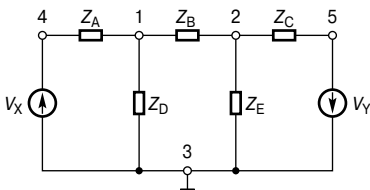
Следовательно, общая мощность

$$579.97 + 436.81 = 1\,016.8 \text{ Вт} = 1\,020 \text{ Вт}$$

с точностью до четырёх значащих цифр.]

## Метод узловых потенциалов

*Узел цепи* определяют как точку, в которой сходятся две или более ветви. Если в узле сошлись три или более ветви, то этот узел называют *главным узлом*. На **Рис. 71.3** точки 1, 2, 3, 4 и 5 — это узлы, а точки 1, 2 и 3 из них — главные узлы.



**Рис. 71.3**

*Напряжение узла* — это напряжение определённого узла, измеренное или рассчитанное по отношению к заранее выбранному узлу, который называют *исходным*. Если на **Рис. 71.3**, например, узел 3 выбран в качестве исходного узла, то считается, что  $V_{13}$  — это напряжение узла 1 относительно узла 3 (в отличие от  $V_{31}$ ). Аналогично  $V_{23}$  означает напряжение узла 2 относительно узла 3 и т. д. Однако, так как напряжение в узле всегда определяется относительно определённого исходного узла, в этом примере всегда будет использовано обозначение  $V_1$  для  $V_{13}$  и  $V_2$  для  $V_{23}$ .

Суть метода узловых потенциалов заключается в том, чтобы определить значения напряжений во всех главных узлах относительно исходного узла, например вычислить напряжения  $V_1$  и  $V_2$  на **Рис. 71.3**. Когда такие напряжения определяются, можно вычислить токи в каждой ветви.

Применяя закон Кирхгофа о токах к узлам 1 и 2 по очереди (Рис. 71.3), получаем два уравнения с неизвестными  $V_1$  и  $V_2$ , которые можно решить одновременно с помощью определителей.

Ветви, ведущие к узлу 1, показаны на Рис. 71.4 отдельно друг от друга.

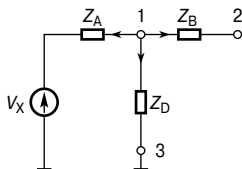


Рис. 71.4

Предположим, что все токи ветвей выходят, как показано, из этого узла. Так как сумма токов в узле равна нулю, то

$$\frac{V_1 - V_x}{Z_A} + \frac{V_1}{Z_D} + \frac{V_1 - V_2}{Z_B} = 0. \quad (1)$$

Аналогично составим уравнение для узла 2, полагая, что все токи ветвей выходят из этого узла, как показано на Рис. 71.5.

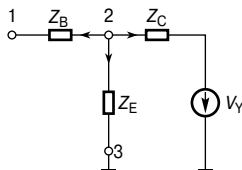


Рис. 71.5

$$\frac{V_2 - V_1}{Z_B} + \frac{V_2}{Z_E} + \frac{V_2 + V_y}{Z_C} = 0. \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) предполагается, что все токи выходят из узла. На самом деле можно сделать любой выбор направления токов — результирующие уравнения будут одинаковы. (К примеру, если для узла 1 ток, текущий в  $Z_B$ , считается текущим к узлу 1, вместо того чтобы течь из него, то уравнение для узла 1 примет вид

$$\frac{V_1 - V_x}{Z_A} + \frac{V_1}{Z_D} = \frac{V_2 - V_1}{Z_B},$$

что после перестановки выглядит так же, как уравнение (1).

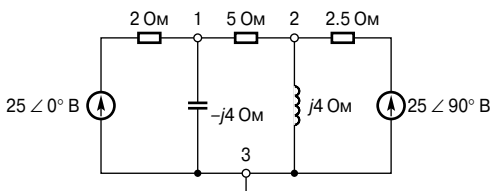
Преобразования уравнений (1) и (2) приводит их к виду

$$\left(\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_D}\right)V_1 - \left(\frac{1}{Z_B}\right)V_2 - \left(\frac{1}{Z_A}\right)V_X = 0, \quad (3)$$

$$-\left(\frac{1}{Z_B}\right)V_1 + \left(\frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_E}\right)V_2 + \left(\frac{1}{Z_C}\right)V_Y = 0. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) можно решить относительно  $V_1$  и  $V_2$  с помощью определителей. Уравнения токов, а следовательно, и уравнения напряжений можно записать для каждого главного узла цепи, за исключением исходного. Число уравнений, необходимых для получения решения, на самом деле всегда на одно меньше, чем число главных узлов.

**Например,** определим мощность, рассеиваемую резистором 2.5 Ом в цепи, показанной на **Рис. 71.6**.



**Рис. 71.6**

Применив метод узловых потенциалов к узлу 1, имеем

$$\frac{V_1 - 25\angle 0^\circ}{2} + \frac{V_1}{-j4} + \frac{V_1 - V_2}{5} = 0.$$

После преобразования получаем

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{-j4} + \frac{1}{5}\right)V_1 - \left(\frac{1}{5}\right)V_2 - \frac{25\angle 0^\circ}{2} = 0,$$

или

$$(0.7 + j0.25)V_1 - 0.2V_2 - 12.5 = 0. \quad (1)$$

Применив ту же процедуру к узлу 2, получим

$$\frac{V_2 - 25\angle 90^\circ}{2.5} + \frac{V_2}{j4} + \frac{V_2 - V_1}{5} = 0.$$

После преобразования уравнение принимает вид

$$-\left(\frac{1}{5}\right)V_1 + \left(\frac{1}{2.5} + \frac{1}{j4} + \frac{1}{5}\right)V_2 - \frac{25\angle 90^\circ}{2.5} = 0,$$

или

$$-0.2V_1 + (0.6 - j0.25)V_2 - j10 = 0. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получаем

$$(0.7 + j0.25)V_1 - 0.2V_2 - 12.5 = 0,$$

$$-0.2V_1 + (0.6 - j0.25)V_2 - j10 = 0.$$

Используя определители, имеем

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\begin{vmatrix} -0.2 & -12.5 \\ (0.6 - j0.25) & -j10 \end{vmatrix}} &= \frac{-V_2}{\begin{vmatrix} (0.7 + j0.25) & -12.5 \\ -0.2 & -j10 \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{1}{\begin{vmatrix} (0.7 + j0.25) & -0.2 \\ -0.2 & (0.6 - j0.25) \end{vmatrix}}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{(j2 + 7.5 - j3.125)} &= \frac{-V_2}{(-j7 + 2.5 - 2.5)} = \\ &= \frac{1}{(0.42 - j0.175 + j0.15 + 0.0625 - 0.04)}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{V_1}{7.584\angle -8.53^\circ} = \frac{-V_2}{-7\angle 90^\circ} = \frac{1}{0.443\angle -3.23^\circ}.$$

Откуда находим  $V_1$  и  $V_2$ .

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{7.584\angle -8.53^\circ}{0.443\angle -3.23^\circ} = 17.12\angle -5.30^\circ \text{ В} = \\ &= \mathbf{17.1\angle -5.3^\circ \text{ В}} \end{aligned}$$

с точностью до одного десятичного знака;

$$V_2 = \frac{7\angle 90^\circ}{0.443\angle -3.23^\circ} = 15.80\angle 93.23^\circ \text{ В} = \mathbf{15.8\angle 93.2^\circ \text{ В}}$$

с точностью до одного десятичного знака.

Ток в катушке индуктивности  $j4$  Ом равен

$$\frac{V_2}{j4} = \frac{15.80 \angle 93.23^\circ}{4 \angle 90^\circ} = 3.95 \angle 3.23^\circ \text{ A}$$

и направлен к узлу 3.

Ток, текущий в резисторе 5 Ом, равен

$$I_5 = \frac{V_1 - V_2}{5} = \frac{17.12 \angle -5.30^\circ - 15.80 \angle 93.23^\circ}{5},$$

или

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{(17.05 - j1.58) - (-0.89 + j15.77)}{5} = \frac{17.94 - j17.35}{5} = \\ &= \frac{24.96 \angle -44.04^\circ}{5} = \\ &= 4.99 \angle -44.04^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

и течёт от узла 1 к узлу 2.

Активная мощность резистора 2.5 Ом равна

$$\begin{aligned} P_{2.5} &= (I_{2.5})^2 (2.5) = \left( \frac{V_2 - 25 \angle 90^\circ}{2.5} \right)^2 (2.5) = \\ &= \frac{(-0.89 + j15.77 - j25)^2}{2.5} = \\ &= \frac{(9.273 \angle -95.51^\circ)^2}{2.5} = \frac{85.99 \angle -191.02^\circ}{2.5}. \end{aligned}$$

Применив теорему Муавра, получим

$$P_{2.5} = 34.4 \angle 169^\circ \text{ Вт.}$$

Следовательно,

**активная мощность резистора 2.5 Ом равна 34.4 Вт.**

Какой из методов для определения токов в цепи использовать — метод контурных токов или метод узловых потенциалов, зависит от числа контуров и узлов в цепи. Как правило, выбирают метод, требующий наименьшего числа уравнений.

## 72. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

### Введение

Принцип суперпозиции гласит:

*в любой цепи, составленной из линейных импедансов и включающей более одного источника ЭДС, результирующий ток, текущий в любой ветви, равен векторной сумме токов, которые бы текли в этой ветви, если бы каждый источник рассматривался отдельно, при этом все другие источники были заменены в это время соответствующими внутренними импедансами.*

### Применение принципа суперпозиции для цепи постоянного тока

Принцип суперпозиции (наложения), который рассматривался в гл. 53 для случая цепей постоянного тока, можно применить как к цепи постоянного, так и к цепи переменного тока. На **Рис. 72.1** показана цепь постоянного тока, на которой будет продемонстрирован принцип суперпозиции.

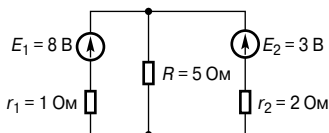


Рис. 72.1

Чтобы вычислить ток в каждой ветви цепи, следует предпринять ряд шагов.

- **Во-первых**, перерисуем цепь, убрав один из источников ЭДС, допустим,  $E_2$ , заменив его  $r_2$ , как это показано на **Рис. 72.2**.

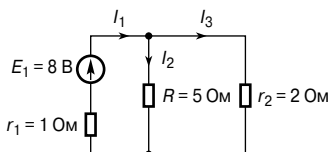


Рис. 72.2

- **Во-вторых**, отметим токи в каждой ветви и их направления, как показано на **Рис. 72.2**, а затем определим их значения. Выбор направления тока  $I_1$  зависит от полярности источника, и, по договорённости, он считается текущим от положительного вывода, как показано на **Рис. 72.2**.

Сопротивление резистора  $R$ , параллельно соединённого с резистором  $r_2$ , равно эквивалентному сопротивлению  $\frac{5 \times 2}{5 + 2} = 1.429 \text{ Ом}$ , как показано на **Рис. 72.3**.

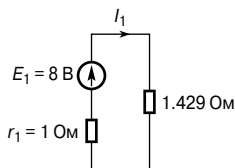


Рис. 72.3

Из **Рис. 72.3** легко определить ток  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{E_1}{(r_1 + 1.429)} = \frac{8}{2.429} = 3.294 \text{ А.}$$

Теперь, возвращаясь к **Рис. 72.2**, можно найти токи  $I_2$  и  $I_3$ :

$$I_2 = \left( \frac{r_2}{R + r_2} \right) (I_1) = \left( \frac{2}{5 + 2} \right) (3.294) = 0.941 \text{ А,}$$

$$I_3 = \left( \frac{5}{5 + 2} \right) (3.294) = 2.353 \text{ А.}$$

- **В-третьих**, перерисуем первоначальную схему, но теперь удалим источник  $E_1$ , заменив его на  $r_1$ , как показано на **Рис. 72.4**.

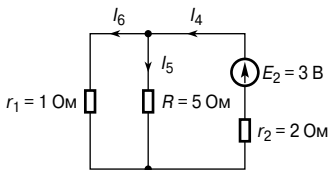


Рис. 72.4

- **В-четвёртых**, отметим токи и их направления в каждой ветви, как это сделано на **Рис. 72.4**, и определим их значения.

Параллельно соединённые  $R$  и  $r_1$  могут быть заменены эквивалентным сопротивлением  $\frac{5 \times 1}{5 + 1} = 0.833$  Ом, как показано на **Рис. 72.5**.

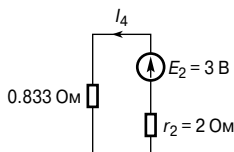


Рис. 72.5

Из **Рис. 72.5** легко определить ток  $I_4$ :

$$I_4 = \frac{E_2}{r_2 + 0.833} = \frac{3}{2.833} = 1.059 \text{ A.}$$

Теперь, возвращаясь к **Рис. 72.4**, можно найти токи  $I_5$  и  $I_6$ :

$$I_5 = \left( \frac{1}{1 + 5} \right) (1.059) = 0.177 \text{ A,}$$

$$I_6 = \left( \frac{5}{1 + 5} \right) (1.059) = 0.8825 \text{ A.}$$

- **В-пятых**, накладываем **Рис. 72.2** на **Рис. 72.4**, как это показано на **Рис. 72.6**.

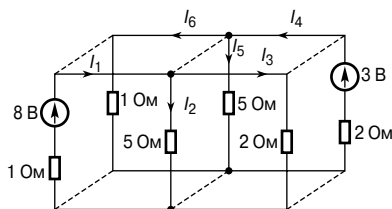


Рис. 72.6

- И наконец, **в-шестых**, определяем алгебраическую сумму токов, текущих в каждой ветви. (Заметим, что в цепи переменного тока потребуются именно векторная сумма токов.) Из **Рис. 72.6** следует, что результирующий ток, текущий в ветви с источником тока 8 В, равен

$$I_1 - I_6 = 3.294 - 0.8825 = 2.41 \text{ A}$$

(ток, разряжающий источник ЭДС, то есть текущий от положительного вывода источника).



Результирующий ток, текущий в ветви с источником 3 В, равен

$$I_3 - I_4 = 2.353 - 1.059 = \mathbf{1.29 \text{ A}}$$

(ток, заряжающий источник ЭДС, то есть текущий к положительному выводу источника).

Результирующий ток, текущий через резистор 5 Ом, равен

$$I_2 + I_5 = 0.941 + 0.177 = \mathbf{1.12 \text{ A}}.$$

## Применение принципа суперпозиции для цепи переменного тока

Применение принципа суперпозиции к цепи переменного тока показано на примере расчёта схемы, показанной на Рис. 72.7.

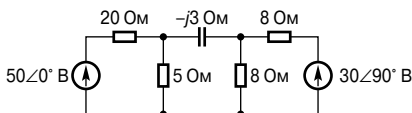


Рис. 72.7

- **Во-первых**, схему преобразуем, удаляя источник  $30\angle 90^\circ \text{ В}$ , как показано на Рис. 72.8.

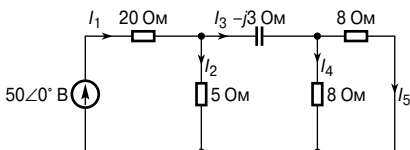


Рис. 72.8

- **Во-вторых**, отметим токи от  $I_1$  до  $I_5$  на Рис. 72.8, откуда получаем, что два параллельно соединённых резистора по 8 Ом дают эквивалентное сопротивление 4 Ом.

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{50\angle 0^\circ}{20 + \frac{5(4-j3)}{5+4-j3}} = \frac{50\angle 0^\circ}{20 + \frac{5(5\angle -36.87^\circ)}{9.487\angle -18.43^\circ}} = \\ &= \frac{50\angle 0^\circ}{20 + 2.635\angle -18.44^\circ} = \frac{50\angle 0^\circ}{22.50 - j0.833} = \\ &= \frac{50\angle 0^\circ}{22.52\angle -2.12^\circ} = \mathbf{2.220\angle 2.12^\circ \text{ A}}. \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{(4-j3)}{(5+4-j3)} I_1 = \left( \frac{5 \angle -36.87^\circ}{9.487 \angle -18.43^\circ} \right) (2.220 \angle 2.12^\circ) =$$

$$= 1.170 \angle -16.32^\circ \text{ A.}$$

$$I_3 = \left( \frac{5}{5+4-j3} \right) I_1 = \left( \frac{5}{9.487 \angle -18.43^\circ} \right) (2.220 \angle 2.12^\circ) =$$

$$= 1.170 \angle 20.55^\circ \text{ A.}$$

$$I_4 = I_5 = \left( \frac{8}{8+8} \right) I_3 = \frac{1}{2} (1.170 \angle 20.55^\circ) =$$

$$= 0.585 \angle 20.55^\circ \text{ A.}$$

- **В-третьих**, преобразуем первоначальную схему, удалив источник  $50 \angle 0^\circ \text{ В}$ , как это показано на **Рис. 72.9**.

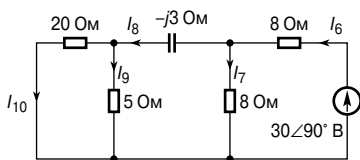


Рис. 72.9

- **В-четвёртых**, отметим токи от  $I_6$  до  $I_{10}$  на **Рис. 72.9**, откуда имеем параллельно соединённые резисторы 20 Ом и 5 Ом, эквивалентное сопротивление которых  $\frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4 \text{ Ом}$ .

Значит,

$$I_6 = \frac{30 \angle 90^\circ}{8 + \frac{8(4-j3)}{8+4-j3}} = \frac{30 \angle 90^\circ}{8 + \frac{8(5 \angle -36.87^\circ)}{12.369 \angle -14.04^\circ}} =$$

$$= \frac{30 \angle 90^\circ}{8 + 3.234 \angle -22.83^\circ} = \frac{30 \angle 90^\circ}{10.981 - j1.255} =$$

$$= \frac{30 \angle 90^\circ}{11.052 \angle -6.52^\circ} = 2.714 \angle 96.52^\circ \text{ A.}$$

$$I_7 = \frac{(4-j3)}{(8+4-j3)} I_6 =$$

$$= \left( \frac{5 \angle -36.87^\circ}{12.369 \angle -14.04^\circ} \right) (2.714 \angle 96.52^\circ) = 1.097 \angle 73.69^\circ \text{ A.}$$

$$I_8 = \left( \frac{8}{8 + 4 - j3} \right) I_6 =$$

$$= \left( \frac{8}{12.369 \angle -14.04^\circ} \right) (2.714 \angle 96.52^\circ) = 1.755 \angle 110.56^\circ \text{ A.}$$

$$I_9 = \left( \frac{20}{20 + 5} \right) I_8 = 1.404 \angle 110.56^\circ \text{ A.}$$

$$I_{10} = \left( \frac{5}{20 + 5} \right) I_8 = 0.351 \angle 110.56^\circ \text{ A.}$$

- **В-пятых**, сложив схемы, изображённые на **Рис. 72.8**, с **Рис. 72.9**, получим ток, текущий через конденсатор:

$$(I_3 - I_8) = 1.170 \angle 20.55^\circ - 1.755 \angle 110.56^\circ =$$

$$= (1.712 - j1.233) \text{ A,}$$

или

$$2.11 \angle -35.76^\circ \text{ A,}$$

то есть

**модуль величины тока, текущего через конденсатор, равен 2.11 А.**

Напряжение на резисторе 5 Ом равно  $(I_2 + I_9)$  (5).

Так как

$$(I_2 + I_9) = 1.170 \angle -16.32^\circ + 1.404 \angle 110.56^\circ =$$

$$= (0.630 + j0.986) \text{ A,}$$

или

$$1.17 \angle 57.42^\circ \text{ A,}$$

то

**модуль величины напряжения на резисторе 5 Ом равен  $(1.17)(5) = 5.85 \text{ В}$ .**

Активная мощность резистора 20 Ом

$$(I_1 + I_{10})^2 (20).$$

$$(I_1 + I_{10}) = 2.220 \angle 2.12^\circ - 0.351 \angle 110.56^\circ$$

$$(2.342 - j0.247) \text{ A,}$$

или

$$2.355 \angle -6.02^\circ \text{ A.}$$

Значит,

**активная мощность резистора 20 Ом равна  $(2.355)^2 (20) = 111 \text{ Вт}$ .**

Активная мощность источника  $50 \angle 0^\circ \text{ В}$

$$P_1 = V(I_1 - I_{10}) \cos \varphi_1 = (50)(2.355) \cos(6.02^\circ - 0^\circ) = 117.1 \text{ Вт.}$$

Активная мощность источника  $30\angle 90^\circ$  В

$$P_2 = 30(I_6 - I_5) \cos \varphi_2.$$

Подсчитаем величину  $(I_6 - I_5)$ :

$$\begin{aligned}(I_6 - I_5) &= 2.714\angle 96.52^\circ - 0.585\angle 20.55^\circ = \\ &= (-0.856 + j2.491) \text{ А},\end{aligned}$$

или

$$2.634\angle 108.96^\circ \text{ А}.$$

Подставляя величину  $(I_6 - I_5)$  в уравнение

$$P_2 = 30(I_6 - I_5) \cos \varphi_2,$$

имеем

$$P_2 = (30)(2.634) \cos(108.96^\circ - 90^\circ) = 74.7 \text{ Вт}.$$

**Общая мощность  $P = P_1 + P_2 = 117.1 + 74.7 = 191.8$  Вт.**

(Этот результат можно проверить, просуммировав мощности  $I^2 R$  резисторов.)

Как применять принцип суперпозиции, ясно, но вычисления получаются достаточно длинными. Эти же результаты можно получить более быстрым способом, применяя описанные в гл. 73 теоремы Тевенина и Нортон.

## 73. ТЕОРЕМА ТЕВЕНИНА И ТЕОРЕМА НОРТОНА

### Введение

Многие из цепей, для анализа которых в гл. 70 и 72 использовались законы Кирхгофа, методы контурных токов и узловых потенциалов, а также теорема о суперпозиции, можно проанализировать быстрее и проще с помощью *теоремы Тевенина* и *теоремы Нортона* (в отечественной технической литературе теорему Тевенина и теорему Нортона называют методом эквивалентного генератора. — *Прим. редактора перевода*). Каждая из этих теорем подразумевает замену того, что может быть сложной цепью источников и линейных импедансов, простой эквивалентной схемой. Применяя каждую из теорем, необходимо следовать установленным процедурам, причём они подразумевают знание основ теории электрических цепей. (Возможно, сначала стоит вспомнить общую теорию цепей постоянного тока, данную в гл. 53.)

### Теорема Тевенина

Теорема Тевенина гласит:

*ток, текущий в любой ветви цепи, равен току, который бы тёк в данной ветви, если бы она соединялась последовательно с источником электроэнергии, ЭДС которого равна разности потенциалов, которая имела бы место в этой ветви, если бы она была разомкнута, а внутренний импеданс которого был бы равен импедансу, имеющему место на выводах этой разомкнутой ветви, когда все источники заменены их внутренними импедансами.*

Теорема применима к любой линейной активной цепи (термин «линейная» означает, что измеренные величины компонентов цепи не зависят от направления и величины текущего в них тока, а термин «активная» означает, что цепь содержит источник или источники ЭДС).

Данная выше теорема просто означает, что сложную цепь с внешними выводами АВ, как видно на **Рис. 73.1а**, можно заменить одним источником напряжения  $E$  с импедансом  $Z$ , как показано на **Рис. 73.1б**.

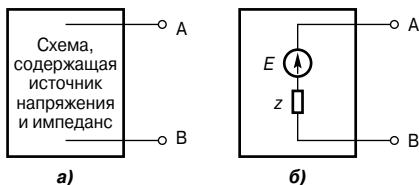


Рис. 73.1

$E$  — это напряжение на разомкнутой цепи, измеренное на выводах АВ, а  $Z$  — это эквивалентный импеданс цепи на выводах АВ, когда все внутренние источники ЭДС равны нулю. Полярность напряжения  $E$  выбирается так, чтобы ток, текущий через резистор с импедансом, подсоединённый между А и В, имел бы то же направление, которое получилось бы в случае, если такой резистор был бы подсоединён между А и В первоначальной цепи. **Рис. 73.16** называют *эквивалентной схемой Тевенина*. Первый раз эта схема упоминалась в гл. 53 для случая цепи постоянного тока.

Для определения с помощью теоремы Тевенина тока, текущего в ветви с импедансом активной цепи  $Z_L$ , можно применять четырёхступенчатую процедуру.

- **Во-первых**, удалим импеданс  $Z_L$  из ветви.
- **Во-вторых**, определим напряжение разомкнутой цепи  $E$  на месте разрыва.
- **В-третьих**, удалим все источники ЭДС, заменим каждый из них его внутренним импедансом (если импеданс данного источника равен нулю, то заменим его короткозамкнутой цепью) и затем определим внутренний импеданс  $Z$ , «смотрящий» на разрыв.
- **В-четвёртых**, определим ток, текущий из эквивалентной цепи Тевенина, показанной на **Рис. 73.2**, то есть

$$i_L = \frac{E}{Z_L + z}.$$

Для демонстрации того, как с помощью теоремы Тевенина применять описанную выше процедуру для определения тока, текущего через резистор 5 Ом, рассмотрим простую цепь постоянного тока (**Рис. 73.3**).

Эквивалентная  
схема Тевенина

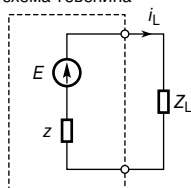


Рис. 73.2

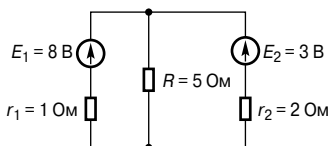


Рис. 73.3

- **Во-первых**, удаляем резистор 5 Ом, как показано на **Рис. 73.4а**.

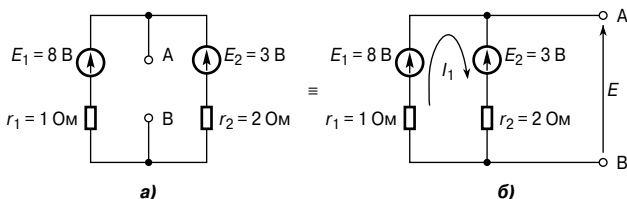


Рис. 73.4

- **Во-вторых**, определяем напряжение разомкнутой цепи  $E$  на разрыве. Преобразовав цепь, изображённую на **Рис. 73.4а**, получаем цепь, изображённую на **Рис. 73.4б**, где ток

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2} = \frac{8 - 3}{1 + 2} = \frac{5}{3}, \text{ или } 1\frac{2}{3} \text{ А.}$$

Значит, напряжение разомкнутой цепи

$$E = E_1 - I_1 r_1,$$

то есть

$$E = 8 - \left(1\frac{2}{3}\right)(1) = 6\frac{1}{3} \text{ В.}$$

То же значение можно получить, используя цепь с источником  $E_2$ :

$$E = E_2 - (-I_1)r_2 = 3 + \left(1\frac{2}{3}\right)(2) = 6\frac{1}{3} \text{ В.}$$

- **В-третьих**, удаляя оба источника ЭДС, получаем цепь, показанную на **Рис. 73.5**.

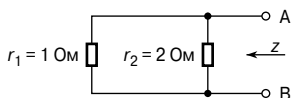


Рис. 73.5

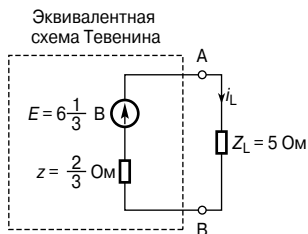
Импеданс  $z$  на разрыве АВ

$$z = \frac{1 \times 2}{1 + 2} = \frac{2}{3} \text{ Ом.}$$

- И наконец, **в-четвёртых**, эквивалентная цепь Тевенина показана на **Рис. 73.6**, откуда

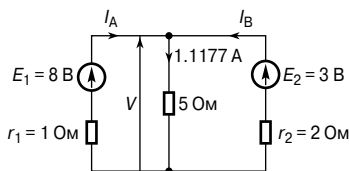
$$i_L = \frac{E}{Z_L + z} = \frac{6\frac{1}{3}}{5 + \frac{2}{3}} = 1.1177 = \mathbf{1.12 \text{ A}}$$

с точностью до двух десятичных знаков.



**Рис. 73.6**

Теперь легко определить токи, текущие в двух других ветвях цепи на **Рис. 73.3**. Та же схема с указанием токов показана на **Рис. 73.7**.



**Рис. 73.7**

Сначала определим напряжение  $V$ :

$$V = (1.1177)(5) = 5.5885 \text{ В.}$$

Однако

$$V = E_1 - I_A r_1,$$

то есть

$$5.5885 = 8 - I_A, \quad (1)$$

откуда

$$I_A = 8 - 5.5885 = \mathbf{2.41 \text{ A}}$$

с точностью до трёх значащих цифр.

Аналогично

$$V = E_2 - I_B r_2,$$



то есть

$$5.5885 = 3 - I_B, \quad (2)$$

откуда

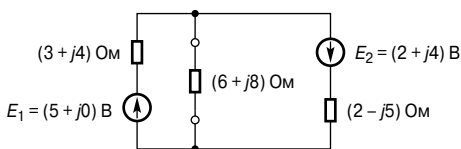
$$I_B = \frac{3 - 5.5885}{2} = -1.29 \text{ А}$$

с точностью до трёх значащих цифр.

Знак «минус» указывает на то, что ток течёт в направлении, противоположном тому, что показано на **Рис. 73.7**.

Приведённую выше процедуру с использованием теоремы Тевенина можно применять как к цепям постоянного, так и к цепям переменного тока, как будет показано ниже.

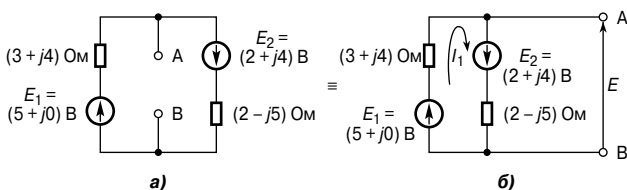
На **Рис. 73.8** показана цепь переменного тока, и требуется с помощью теоремы Тевенина найти ток, текущий в резисторе с импедансом  $(6 + j8)$  Ом.



**Рис. 73.8**

Используем данную выше процедуру.

- **Во-первых**, удаляем резистор с импедансом  $(6 + j8)$  Ом, как показано на **Рис. 73.9а**.



**Рис. 73.9**

- **Во-вторых**, найдём напряжение разомкнутой цепи на разрыве. Для удобства преобразуем цепь, показанную на **Рис. 73.9а**, и получаем равнозначную ей цепь, изображённую на **Рис. 73.9б**, где

$$I_1 = \frac{(5 + j0) + (2 + j4)}{(3 + j4) + (2 - j5)} = \frac{7 + j4}{5 - j} = 1.581 \angle 41.05^\circ \text{ А.}$$

Следовательно, напряжение разомкнутой цепи на АВ

$$E = E_1 - I_1(3 + j4),$$

то есть

$$E = (5 + j0) - (1.581 \angle 41.05^\circ)(5 \angle 53.13^\circ),$$

откуда

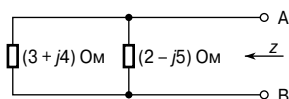
$$E = 9.657 \angle -54.73^\circ \text{ В.}$$

- **В-третьих**, из схемы на **Рис. 73.10** следует, что импеданс  $Z$  на выводах АВ

$$z = \frac{(3 + j4)(2 - j5)}{(3 + j4) + (2 - j5)} = 5.281 \angle -3.76^\circ \text{ Ом,}$$

или

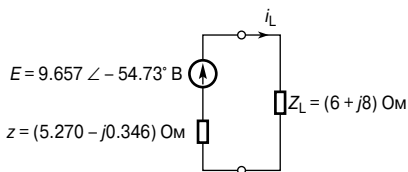
$$z = (5.270 - j0.346) \text{ Ом.}$$



**Рис. 73.10**

- **В-четвёртых**, из эквивалентной схемы Тевенина, показанной на **Рис. 73.11**, найдём ток резистора с импедансом  $(6 + j8) \text{ Ом}$ :

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{E}{Z_L + z} = \frac{9.657 \angle -54.73^\circ}{(6 + j8) + (5.270 - j0.346)} = \\ &= \frac{9.657 \angle -54.73^\circ}{13.623 \angle 34.18^\circ} = 0.71 \angle -88.91^\circ \text{ А.} \end{aligned}$$



**Рис. 73.11**

## Теорема Нортона

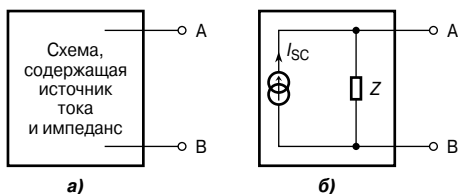
Источник электроэнергии можно представить источником ЭДС, последовательно соединённым с резистором. В предыдущем разделе источник постоянного напряжения состоял из постоянного ЭДС  $E$ , который мог быть источником как переменного, так и постоянного тока, и последовательно соединённого с ним внутреннего импеданса  $Z$ . Однако это не единственная

форма представления. Источник электроэнергии можно также представить в виде источника постоянного тока, который может быть источником как переменного, так и постоянного тока и параллельно соединённого с ним импеданса. Эти две формы на самом деле эквивалентны.

*Теорема Нортон* гласит:

*ток, текущий в любой ветви цепи, равен току, который бы тёк в этой ветви, если бы она была параллельно соединена с источником электроэнергии, при этом его ток короткого замыкания равен току, который бы тёк в короткозамкнутой цепи через ветвь, а внутренний её импеданс равен импедансу, имеющему место между выводами короткозамкнутой ветви.*

Данное выше утверждение просто означает, что любую линейную активную цепь с выводами АВ, как показано на **Рис. 73.12а**, можно заменить источником тока, параллельно соединённого с импедансом  $Z$ , как показано на **Рис. 73.12б**.



**Рис. 73.12**

Эквивалентный источник тока  $I_{sc}$  — это ток, текущий через короткозамкнутую цепь и приложенный к выводам цепи. Импеданс  $Z$  — это эквивалентный импеданс цепи на выводах АВ в момент, когда все внутренние источники ЭДС равны нулю. Электрическую схему на **Рис. 73.12б** называют *эквивалентной схемой Нортон*. Первое упоминание о ней появилось в гл. 53 при рассмотрении цепи постоянного тока.

Для определения тока, проходящего через резистор с импедансом  $Z_L$  ветви АВ, с помощью теоремы Нортон можно применить следующую четырёхступенчатую процедуру.

- **Во-первых**, замыкаем накоротко ветвь АВ.
- **Во-вторых**, определяем ток короткозамкнутой цепи  $I_{sc}$ .
- **В-третьих**, удаляем все источники ЭДС и заменяем каждый из них его внутренним импедансом (или, если существует источник тока, заменяем его разомкнутой цепью), затем определяем импеданс  $Z$ , «смотрящий в» на разрыве между А и В.

- **В-четвёртых**, определяем значение тока  $i_L$ , текущего через резистор с импедансом  $Z_L$  эквивалентной схемы Нортон, показанной на Рис. 73.13, то есть

$$i_L = \left( \frac{z}{Z_L + z} \right) I_{SC}.$$

Эквивалентная схема Нортон

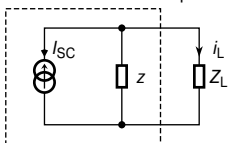


Рис. 73.13

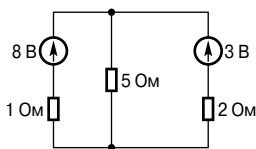


Рис. 73.14

На Рис. 73.14 представлена простая схема, на примере которой с помощью теоремы Нортон можно показать, как применить вышеописанную процедуру определения тока, текущего в резисторе 5 Ом.

- **Во-первых**, замкнём накоротко ветвь 5 Ом, как показано на Рис. 73.15.

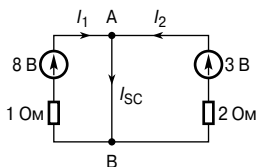


Рис. 73.15

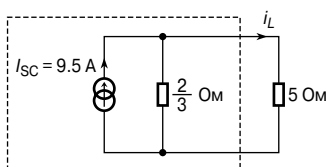


Рис. 73.16

- **Во-вторых**, из электрической схемы, изображённой на Рис. 73.15, следует

$$I_{SC} = I_1 + I_2 = \frac{8}{1} + \frac{3}{2} = 9.5 \text{ A.}$$

- **В-третьих**, если удалить все источники ЭДС, импеданс  $Z$  на разрыве между А и В равен

$$z = \frac{1 \times 2}{1 + 2} = \frac{2}{3} \text{ Ом.}$$

- **В-четвёртых**, из эквивалентной схемы Нортон, показанной на Рис. 73.16, ток, проходящий через резистор 5 Ом, равен

$$I_L = \left( \frac{\frac{2}{3}}{5 + \frac{2}{3}} \right) (9.5) = 1.12 \text{ A.}$$

Как и в случае с теоремой Тевенина, теорему Нортон можно использовать для цепей как постоянного, так и переменного тока, что будет показано ниже.

На **Рис. 73.17** показана цепь переменного тока, где с помощью теоремы Нортон требуется найти ток, текущий через резистор с импедансом  $(6 + j8) \text{ Ом}$ .

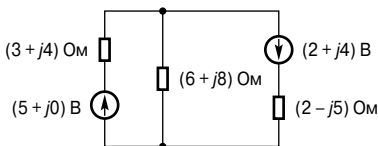


Рис. 73.17

Используем описанную выше процедуру.

- **Во-первых**, замыкаем накоротко импеданс  $(6 + j8) \text{ Ом}$ , как показано на **Рис. 73.18**.

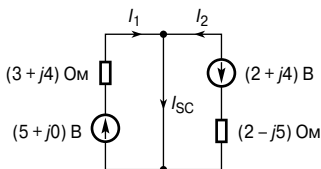


Рис. 73.18

- **Во-вторых**, из электрической схемы, изображённой на **Рис. 73.18**, следует

$$\begin{aligned}
 I_{sc} &= I_1 + I_2 = \frac{(5 + j0)}{(3 + j4)} + \frac{-(2 + j4)}{(2 - j5)} = \\
 &= 1 \angle -53.13^\circ - \frac{4.472 \angle 63.43^\circ}{5.385 \angle -68.20^\circ} = \\
 &= 1 \angle -53.13^\circ - 0.8305 \angle 131.63^\circ = \\
 &= (1.152 - j1.421) \text{ А, или } \mathbf{1.829 \angle -50.97^\circ \text{ А.}}
 \end{aligned}$$

- **В-третьих**, если удалить все источники ЭДС, то импеданс  $Z$  на разрыве между А и В, равен

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{(3 + j4)(2 - j5)}{(3 + j4) + (2 - j5)} = \\
 &= 5.281 \angle -3.76^\circ \text{ Ом,}
 \end{aligned}$$

или

$$z = (5.270 - j0.346) \text{ Ом.}$$

- В-четвёртых, из эквивалентной цепи Нортон, показанной на Рис. 73.19, следует, что ток  $i_L$  равен

$$i_L = \left( \frac{z}{Z_L + z} \right) I_{SC} =$$

$$= \left( \frac{5.281 \angle -3.76^\circ}{(6 + j8) + (5.270 - j0.346)} \right) (1.829 \angle -50.97^\circ).$$

Проведя вычисления, получим, что ток через резистор с импедансом  $(6 + j8)$  Ом

$$i_L = 0.71 \angle -88.91 \text{ А.}$$

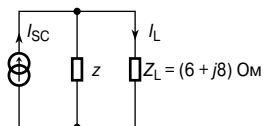


Рис. 73.19

### Эквивалентность цепей Тевенина и Нортон

Ранее было отмечено, что когда к одинаковым цепям применяют теоремы Тевенина и Нортон, то получают один и тот же результат. Следовательно, цепи Тевенина и Нортон, показанные на Рис. 73.20, эквивалентны друг другу.

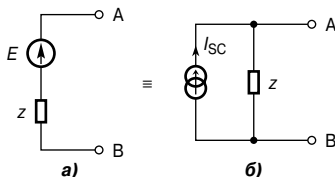


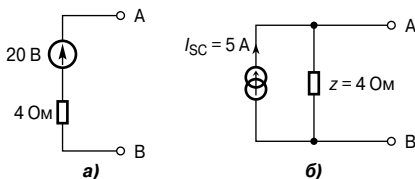
Рис. 73.20

Импеданс на выводах АВ одинаков во всех цепях, то есть равен  $z$ .

Если выводы АВ на Рис. 73.20а замкнуть накоротко, то ток короткозамкнутой цепи равняется  $\frac{E}{z}$ . Если выводы АВ на Рис. 73.20б замкнуть накоротко, ток в цепи короткого замыкания будет  $I_{SC}$ . Значит,

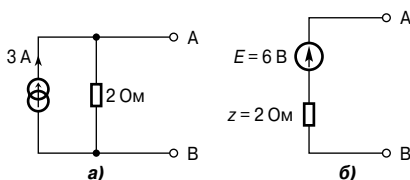
$$I_{SC} = \frac{E}{z}.$$

Например, цепь на **Рис. 73.21а** эквивалентна цепи на **Рис. 73.21б**.



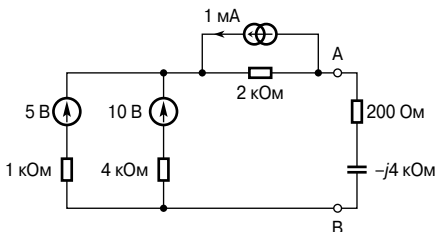
**Рис. 73.21**

Аналогично, цепь на **Рис. 73.22а** эквивалентна цепи на **Рис. 73.22б**.



**Рис. 73.22**

**Другой пример.** Рассмотрим эквивалентную цепь Тевенина для выводов АВ на **Рис. 73.23**.

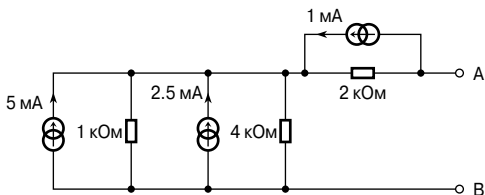


**Рис. 73.23**

Для ветви, содержащей источник напряжения 5 В, преобразование в эквивалентную цепь Нортона приводит к источнику тока  $I_{SC} = \frac{5}{1\,000} = 5\text{ мА}$  и  $z = 1\text{ кОм}$ .

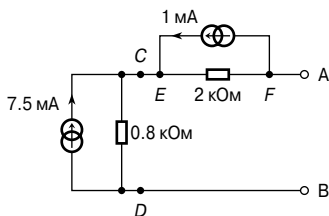
Для ветви с источником напряжения 10 В преобразование в эквивалентную цепь Нортона приводит к источнику тока  $I_{SC} = \frac{10}{4\,000} = 2.5\text{ мА}$  и  $z = 4\text{ кОм}$ .

Следовательно, цепь на **Рис. 73.23** преобразуется в цепь на **Рис. 73.24**.

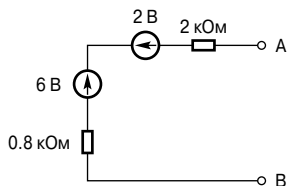


**Рис. 73.24**

Две полученные эквивалентные цепи, показанные на **Рис. 73.24**, можно объединить, тогда общий ток короткозамкнутой цепи равен  $(5 + 2.5) = 7.5$  мА и общий импеданс  $z$  равен  $\frac{1 \times 4}{1 + 4} = 0.8$  кОм. В результате получается цепь, показанная на **Рис. 73.25**.



**Рис. 73.25**



**Рис. 73.26**

Обе эквивалентные схемы Нортона, показанные на **Рис. 73.25**, можно преобразовать в эквивалентные схемы Тевенина.

Напряжение разомкнутой цепи на CD равно

$$(7.5 \times 10^{-3})(0.8 \times 10^3) = 6 \text{ В},$$

а импеданс на CD равен 0.8 кОм.

Напряжение разомкнутой цепи на EF равно

$$(1 \times 10^{-3})(2 \times 10^3) = 2 \text{ В},$$

а импеданс «смотрящий в» на EF равен 2 кОм.

Тогда **Рис. 73.25** преобразуется в **Рис. 73.26**.

Объединение двух схем Тевенина даёт ЭДС

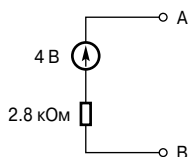
$$E = 6 - 2 = 4 \text{ В},$$

а импеданс

$$Z = (0.8 + 2) = 2.8 \text{ кОм}.$$



Следовательно, эквивалентная схема Тевенина для выводов АВ на **Рис. 73.23** преобразуется в схему, показанную на **Рис. 73.27**.



**Рис. 73.27**

Если импеданс, допустим, равен  $(200 - j4\,000)$  Ом и соединён с выводами АВ, то следующий через него ток

$$I = \frac{4}{2\,800 + (200 - j\,4\,000)} = \frac{4}{5\,000 \angle -53.13^\circ} = 0.80 \angle 53.13^\circ \text{ мА},$$

то есть ток в ёмкостной ветви равен **0.80 мА**.

## 74. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ «ТРЕУГОЛЬНИК—ЗВЕЗДА» И «ЗВЕЗДА—ТРЕУГОЛЬНИК»

### Введение

Как было показано в гл. 70 и 72, токи и напряжения в цепях можно определить с помощью законов Кирхгофа, методов контурных токов и узловых потенциалов или принципа суперпозиции. Теоремы Тевенина и Нортона, приведённые в гл. 73, обеспечивают альтернативный метод решения, зачастую значительно уменьшая вычисления. К тому же эти две теоремы особенно удобно использовать в случаях, когда требуется найти ток только в определённой ветви сложной цепи. Для упрощения некоторых видов цепей перед применением теорем можно использовать преобразования «треугольник—звезда» или «звезда—треугольник».

### Соединения «треугольник» и «звезда»

Цепь, показанная на **Рис. 74.1а**, и состоящая из трёх компонентов с импедансами  $Z_A$ ,  $Z_B$  и  $Z_C$ , называется  $\pi$ -образной.

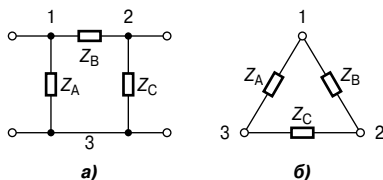


Рис. 74.1

Эту схему можно изобразить так, как показано на **Рис. 74.1б**, где расположение компонентов называют «соединение треугольником» или «соединение замкнутым контуром».

Цепь, показанная на **Рис. 74.2а** и состоящая из трёх компонентов с импедансами  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ , называется  $T$ -образной.

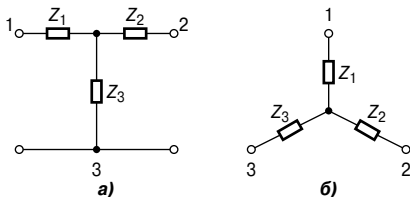
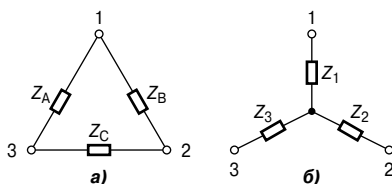


Рис. 74.2

Эту схему можно изобразить так, как показано на **Рис. 74.2б**. Такое расположение элементов называют «соединение звездой».

## Преобразование «треугольник—звезда»

Соединение треугольником, показанное на **Рис. 74.3а**, можно заменить эквивалентным ему соединением звездой (**Рис. 74.3б**), так, что импеданс, измеренный между любой парой выводов (1 — 2, 2 — 3 или 3 — 1), будет одинаковым как при соединении треугольником, так и при соединении звездой.



**Рис. 74.3**

Преобразованная цепь, соединённая звездой, потребляет столько же энергии и работает с таким же коэффициентом мощности, как и изначальная цепь, соединённая треугольником. Преобразование «треугольник—звезда» можно также назвать « $\pi$ — $T$  преобразованием».

Участки цепи в соединении звездой на **Рис. 74.3б** эквивалентны участкам цепи в соединении треугольником на **Рис. 74.3а**, когда

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (1)$$

$$Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (2)$$

$$Z_3 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (3)$$

**Например**, схема, резисторы которой соединены звездой, соответствует резистивной схеме, соединённой треугольником (**Рис. 74.4**), при условии, что

$$Z_1 = \frac{(2)(3)}{2 + 3 + 5} = 0.6 \text{ Ом},$$

$$Z_2 = \frac{(3)(5)}{2 + 3 + 5} = 1.5 \text{ Ом},$$

$$Z_3 = \frac{(2)(5)}{2 + 3 + 5} = 1.0 \text{ Ом.}$$

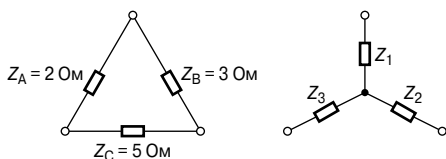


Рис. 74.4

**Другой пример.** Определим импеданс цепи на Рис. 74.5 относительно выводов АВ.

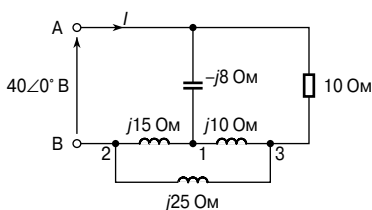


Рис. 74.5

Преобразуя схему на Рис. 74.5, получаем Рис. 74.6, где более чётко видна часть цепи 1, 2, 3, образующая соединение треугольником. Это соединение можно преобразовать в соединение звездой, как показано на Рис. 74.7.

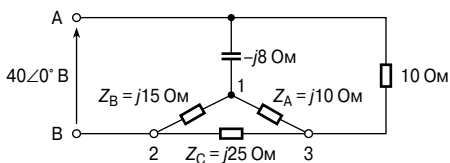


Рис. 74.6

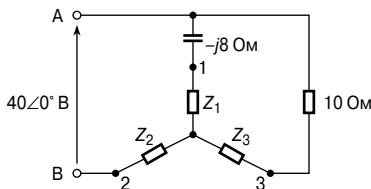


Рис. 74.7

Из уравнения (1)

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(j10)(j15)}{j10 + j15 + j25} =$$

$$= \frac{(j10)(j15)}{(j50)} = j3 \text{ Ом.}$$

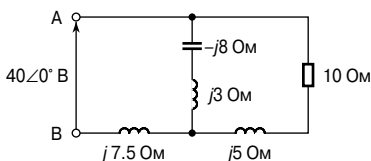
Из уравнения (2)

$$Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(j15)(j25)}{(j50)} = j7.5 \text{ Ом.}$$

Из уравнения (3)

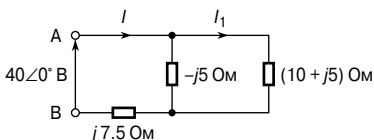
$$Z_3 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} = \frac{(j10)(j15)}{(j50)} = j5 \text{ Ом.}$$

Получившаяся эквивалентная схема показана на **Рис. 74.8**.



**Рис. 74.8**

Упрощая её, получаем схему, показанную на **Рис. 74.9**.



**Рис. 74.9**

Компонент  $(10 + j5)$  Ом, соединённый параллельно с компонентом  $-j5$  Ом, даёт эквивалентный импеданс

$$\frac{(10 + j5)(-j5)}{(10 + j5 - j5)} = (2.5 - j5) \text{ Ом.}$$

Тогда общий эквивалентный импеданс цепи на выводах АВ

$$Z_{AB} = (2.5 - j5) + j7.5 = (2.5 - j2.5) \text{ Ом,}$$

или

$$Z_{AB} = 3.45 \angle 45^\circ \text{ Ом.}$$

Ток в цепи питания

$$I = \frac{V}{Z_{AB}} = \frac{40 \angle 0^\circ}{3.54 \angle 45^\circ} = 11.3 \angle -45^\circ \text{ А.}$$

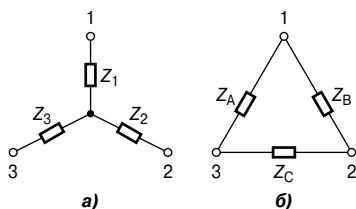
Мощность  $P$ , допустим, резистора 10 Ом (**Рис. 74.5**) равна  $(I_1)^2(10)$ , где  $I_1$  (см. **Рис. 74.9**):

$$I_1 = \left( \frac{-j5}{10 + j5 - j5} \right) (11.3 \angle -45^\circ) = 5.65 \angle -135^\circ \text{ А.}$$

Тогда мощность  $P = (5.65)^2(10) = 319 \text{ Вт.}$

### Преобразование «звезда—треугольник»

Участок цепи в виде соединения звездой, показанный на **Рис. 74.10а**, можно заменить эквивалентными участками в соединении треугольником (**Рис. 74.10б**). Такое преобразование называют также « $T$ - $\pi$  преобразование».



**Рис. 74.10**

Участки цепи в соединении треугольником на **Рис. 74.10б** эквивалентны участкам цепи в соединении звездой на **Рис. 74.10а**, когда

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \quad (4)$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \quad (5)$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \quad (6)$$

**Например,** соединение треугольником, эквивалентно резистивной цепи, соединённой треугольником (**Рис. 74.11**), если

$$Z_A = \frac{(0.6)(1.5) + (1.5)(1.0) + (1.0)(0.6)}{1.5} = \frac{3.0}{1.5} = 2 \text{ Ом.}$$

$$Z_B = \frac{3.0}{1.5} = 3 \text{ Ом.}$$

$$Z_C = \frac{3.0}{0.6} = 5 \text{ Ом.}$$

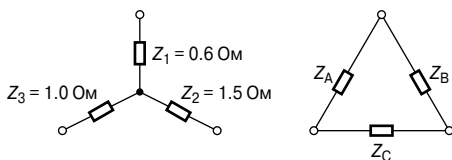


Рис. 74.11

**Другой пример.** Определим импедансы элементов эквивалентной цепи, соединённых треугольником, если известны импедансы элементов цепи, соединённых звездой, как показано на **Рис. 74.12**.

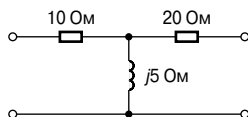


Рис. 74.12

Преобразовав схему на **Рис. 74.12**, получаем схему, показанную на **Рис. 74.13а**. На **Рис. 74.13б** показано эквивалентное соединение треугольником, состоящее из импедансов  $Z_A$ ,  $Z_B$  и  $Z_C$ .

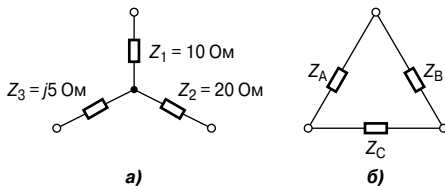


Рис. 74.13

Из уравнения (4) получаем:

$$\begin{aligned} Z_A &= \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} = \\ &= \frac{(10)(20) + (20)(j5) + (j5)(10)}{20} = \\ &= \frac{200 + j150}{20} = \\ &= (10 + j7.5) \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Из уравнения (5) получаем:

$$\begin{aligned} Z_B &= \frac{(200 + j150)}{Z_3} = \frac{(200 + j150)}{j5} = \\ &= \frac{-j5(200 + j150)}{25} = (30 - j40) \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Из уравнения (6) получаем:

$$Z_C = \frac{(200 + j150)}{Z_1} = \frac{(200 + j150)}{10} = (20 + j15) \text{ Ом.}$$



## 75. ТЕОРЕМЫ О МАКСИМУМЕ ОТДАВАЕМОЙ МОЩНОСТИ И СОГЛАСОВАНИЕ ИМПЕДАНСОВ

### Теоремы о максимуме отдаваемой мощности

Цепь, содержащую линейные импедансы и один или несколько источников напряжения или тока, можно упростить по теореме Тевенина, как это показано в гл. 73. Когда к выводам этой эквивалентной цепи подсоединена нагрузка, от источника к нагрузке передаётся мощность.

Эквивалентная цепь Тевенина с импедансом источника  $z = (r + jx)$  Ом и комплексной нагрузкой  $Z = (R + jX)$  Ом показана на Рис. 75.1.

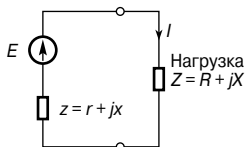


Рис. 75.1

Максимум мощности, отдаваемой источником нагрузке, зависит от перечисленных ниже четырёх условий.

- **Во-первых**, если нагрузка чисто резистивная (то есть  $X = 0$ ) и корректируемая, то максимум передаваемой мощности достигается при выполнении условия

$$R = |z| = \sqrt{r^2 + R^2} \quad (1)$$

- **Во-вторых**, если нагрузка и импеданс источника чисто резистивные (то есть  $X = x = 0$ ), максимум отдаваемой мощности достигается при выполнении условия

$$R = r \quad (2)$$

(На самом деле это условие постоянного тока, о котором рассказывалось в гл. 53.)

- **В-третьих**, если сопротивление нагрузки  $R$  и её реактивная составляющая  $X$  регулируются независимо, то максимум отдаваемой мощности достигается при

$$X = -x \quad \text{и} \quad R = r. \quad (3)$$

- **В-четвёртых**, если сопротивление нагрузки  $R$  регулируется при фиксируемом реактивном сопротивлении  $X$ , то максимум отдаваемой мощности достигается при

$$R = \sqrt{r^2 + (x + X)^2} \quad (4)$$

Теоремы о максимуме отдаваемой мощности имеют первостепенную значимость, когда источник энергии невелик, например выход телефонной системы.

**Например**, определим максимум мощности, отдаваемой источником в нагрузку в цепи, показанной на **Рис. 75.2**, и величину сопротивления нагрузки, при которой достигается этот максимум. Импеданс нагрузки  $Z$  представляет собой чисто резистивное сопротивление.

Из условия (1) следует, что максимум отдаваемой мощности может быть достигнут, когда  $R = |z|$ , то есть когда

$$R = |15 + j20| = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ Ом.}$$

Ток  $I$ , текущий в нагрузке, равен

$$I = \frac{E}{Z_T},$$

где общий импеданс цепи

$$Z_T = z + R = 15 + j20 + 25 = (40 + j20) \text{ Ом,}$$

или

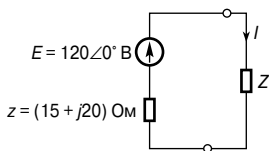
$$44.72 \angle 26.57^\circ \text{ Ом.}$$

Значит,

$$I = \frac{120 \angle 0^\circ}{44.72 \angle 26.57^\circ} = 2.683 \angle -26.57^\circ \text{ А.}$$

Следовательно, максимальная подаваемая мощность

$$P = I^2 R = (2.683)^2 (25) = 180 \text{ Вт.}$$



**Рис. 75.2**

**Другой пример.** Импеданс нагрузки  $Z$  на **Рис. 75.2** состоит из переменного сопротивления  $R$  и переменного реактивного сопротивления  $X$ . Определим значение  $Z$ , при котором отдаваемая мощность будет максимальной.

Из условия (3) отдаваемая источником мощность достигает максимума, когда  $X = -x$  и  $R = r$ .

Следовательно, если

$$z = (r + jx) = (15 + j20) \text{ Ом},$$

то

$$Z = (15 - j20) \text{ Ом},$$

или

$$25 \angle -53.13^\circ \text{ Ом}.$$

Общий импеданс цепи при максимуме отдаваемой мощности

$$Z_T = z + Z,$$

то есть

$$Z = (15 + j20) + (15 - j20) = 30 \text{ Ом}.$$

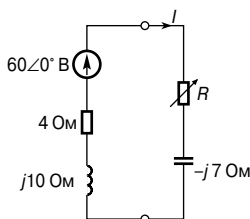
Значит, ток в нагрузке

$$I = \frac{E}{Z_T} = \frac{120 \angle 0^\circ}{30} = 4 \angle 0^\circ \text{ А}$$

и максимум мощности, отдаваемой в нагрузку,

$$P = I^2 R = (4)^2 (15) = 240 \text{ Вт}.$$

**Ещё один пример.** В цепи, показанной на **Рис. 75.3**, нагрузка состоит из фиксированного ёмкостного реактивного сопротивления  $7 \text{ Ом}$  и переменного сопротивления  $R$ .



**Рис. 75.3**

Определим значение сопротивления  $R$ , при котором мощность, отдаваемая в нагрузку, максимальна.

Из условия (4) максимум отдаваемой мощности достигается, когда

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{r^2 + (x + X)^2} = \sqrt{4^2 + (10 - 7)^2} = \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Ток

$$I = \frac{60 \angle 0^\circ}{(4 + j10) + (5 - j7)} = \frac{60 \angle 0^\circ}{(9 + j3)} = \frac{60 \angle 0^\circ}{9.487 \angle 18.43^\circ} = 6.324 \angle -18.43^\circ \text{ A.}$$

Значит, максимум отдаваемой мощности

$$P = I^2 R = (6.324)^2 (5) = 200 \text{ Вт.}$$

## Согласование импедансов

Из предыдущего раздела ясно, что, когда от источника требуется получить максимально возможную мощность, хорошо, если составляющие цепи могут быть откорректированы так, чтобы получить равенство импедансов. Эту корректировку называют *согласованием импедансов*, и это важно учитывать в электронных приборах и средствах связи, которые обычно имеют небольшую мощность. К примерам, где важно это согласование, относятся соединение антенны с передатчиком или приёмником или соединение громкоговорителя и усилителя.

Мощность, потребляемая от сети, считается бесконечно большой по сравнению со спросом на неё, и при таких обстоятельствах необходимо рассмотреть условия, необходимые для достижения максимума отдаваемой мощности. В случае линий передач (см. гл. 83), линии «согласуются» идеально, то есть заканчиваются в их характеристическом импедансе.

У таких электротехнических изделий, как генераторы постоянного тока, двигатели или аккумуляторы, внутренний импеданс, как правило, очень мал, и при попытке сделать импеданс нагрузки таким же маленьким, как внутренний импеданс источника, происходит перегрузка источника.

Метод достижения максимума отдаваемой мощности между источником и нагрузкой сводится к корректировке величины импеданса нагрузки так, чтобы он согласовывался с импедансом источника, а это может быть выполнено с помощью «*согласующего трансформатора*».

На **Рис. 75.4** представлен трансформатор, питающий нагрузку  $Z_L$ .

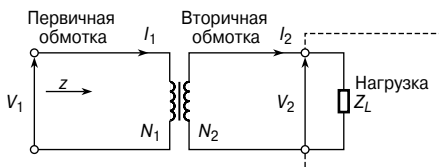


Рис. 75.4

Небольшие трансформаторы, применяемые в маломощных цепях, обычно считаются идеальными (то есть потерями пренебрегают), например,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}.$$

На **Рис. 75.4** изображена электрическая схема, импеданс входа первичной обмотки которой  $|z|$  равен

$$|z| = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2}\right) V_2}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right) I_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{V_2}{I_2}.$$

Так как импеданс нагрузки

$$|Z_L| = \frac{V_2}{I_2},$$

то

$$|z| = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 |Z_L| \quad (1)$$

Если входной импеданс и импеданс нагрузки на **Рис. 75.4** чисто резистивные (предположим,  $r$  и  $R_L$  соответственно), то уравнение (1) принимает вид

$$r = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L \quad (2)$$

(Этот случай рассматривается в гл. 60.)

Следовательно, изменяя значение коэффициента трансформации, эквивалентный входной импеданс трансформатора может согласовываться с импедансом источника для достижения максимума отдаваемой мощности.

**Например,** определим коэффициент трансформации идеального трансформатора, необходимого для согласования генератора и нагрузки  $(40 + j19)$  Ом с целью получения максимума отдаваемой мощности, если выходной импеданс генератора  $(450 + j60)$  Ом.

Пусть выходной импеданс генератора —  $z$ , где  $z = (450 + j60)$  Ом, или  $453.98 \angle 7.59$  Ом, а импеданс нагрузки —  $Z_L$ , где  $Z_L = (40 + j19)$  Ом, или  $44.28 \angle 25.41^\circ$  Ом.

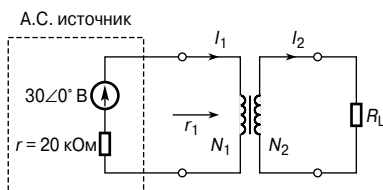
Из схемы, показанной на **Рис. 70.4**, и уравнения (1) имеем

$$|z| = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 |Z_L|,$$

откуда коэффициент трансформации

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \sqrt{\frac{|z|}{|Z_L|}} = \sqrt{\frac{453.98}{44.28}} = \sqrt{(10.25)} \\ = 3.20.$$

**Другой пример.** Пусть источник переменного тока  $30\angle 0^\circ$  В и внутреннее сопротивление 20 кОм согласуются с нагрузкой с помощью идеального трансформатора 20 : 1. Принципиальная схема этой цепи показана на **Рис. 75.5**.



**Рис. 75.5**

Определим сопротивление нагрузки при максимуме отдаваемой мощности.

Для получения максимума отдаваемой мощности сопротивление  $r_1$  должно быть равно 20 кОм. Из уравнения (2)

$$r_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L,$$

откуда сопротивление нагрузки

$$R_L = r_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = (20\,000) \left(\frac{1}{20}\right)^2 = 50 \text{ Ом}.$$

Теперь найдём мощность, передаваемую в нагрузку.

Общее внутреннее сопротивление, когда источник соединён с согласующим трансформатором, равно  $(r + r_1)$ , то есть

$$20 \text{ кОм} + 20 \text{ кОм} = 40 \text{ кОм}.$$

Ток в цепи первичной обмотки

$$I_1 = \frac{V}{40\,000} = \frac{30}{40\,000} = 0.75 \text{ мА}.$$

Известно, что

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1},$$

откуда

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 \left( \frac{N_1}{N_2} \right) = (0.75 \times 10^{-3}) \left( \frac{20}{1} \right) = \\ &= 15 \text{ мА}. \end{aligned}$$

Тогда мощность нагрузки  $R_L$

$$P = I_2^2 R_L = (15 \times 10^{-3})(50) = \mathbf{0.01125 \text{ Вт}}, \text{ или } \mathbf{11.25 \text{ мВт}}.$$

## 76. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

### Введение

В предыдущих главах предполагалось, что источники электроэнергии генерируют сигналы синусоидальной формы. В электротехнике такая форма переменной величины встречается повсеместно. Однако зачастую генерируемые сигналы имеют форму, далёкую от синусоидальной. Например, существуют генераторы пилообразного напряжения, а мультивибраторы могут генерировать сигналы прямоугольной формы. Колебания, имеющие несинусоидальную форму, называют *периодическими сигналами сложной формы* или *сигналами сложной формы*. Такие сигналы можно представить, составив сумму ряда синусоидальных волн с различными взаимосвязанными циклами (то есть суммой синусоидальных сигналов с разными, но взаимосвязанными частотами можно заменить любой сложный периодический сигнал).

Говорят, что функция  $f(t)$  *периодическая*, если  $f(t + T) = f(t)$  для всех значений  $t$ , где  $T$  — интервал между двумя последовательными повторениями, называемый *периодом функции*. Синусоидальные колебания, период которых равен  $\frac{2\pi}{\omega}$ , — это знакомый всем пример периодической функции.

Типичные сложные колебания периодического напряжения, показанные на **Рис. 76.1**, имеют период  $T$  секунд и частоту  $f$  герц.

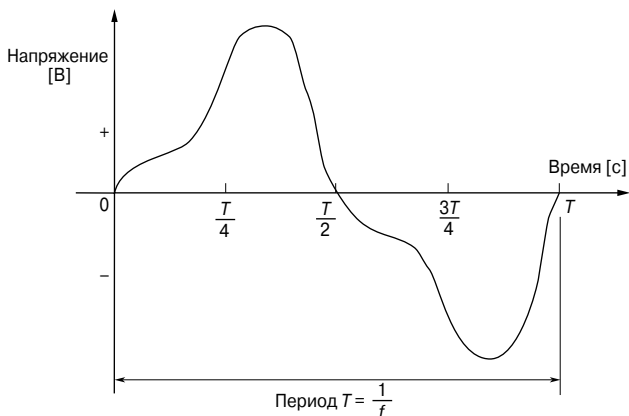


Рис. 76.1



Такой сложный сигнал может быть выражен в виде суммы некоторого числа синусоидальных колебаний, а каждая синусоидальная волна может иметь отличную от остальных частоту, амплитуду и фазу.

Первоначальная компонента основной синусоидальной волны имеет частоту  $f$ , равную частоте сложного колебания. Эта частота называется *основной*, или *первой*, *гармоникой*. Компоненты других синусоидальных волн, называемых *гармониками*, — это частоты с целочисленными множителями частоты  $f$ . Таким образом, вторая гармоника имеет частоту  $2f$ , третья — частоту  $3f$  и т. д.

Следовательно, если основная частота (то есть частота источника питания) сложного колебания равна 50 Гц, то третья гармоника равна 150 Гц, четвёртая — 200 Гц и т. д.

## Основное уравнение периодических сигналов сложной формы

Мгновенное значение напряжения сложной формы, действующего в линейной цепи, можно представить *основным уравнением*:

$$v = V_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + V_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots \\ \dots + V_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n) \text{ вольт.} \quad (1)$$

Здесь  $V_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$  характеризует основную гармонику, в которой  $V_{1m}$  — это максимальное, или пиковое, значение, частота  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , а  $\psi_1$  — фазовый угол относительно времени  $t = 0$ .

Аналогично  $V_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2)$  характеризует вторую гармонику, а  $V_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n)$  характеризует  $n$ -ю гармоническую компоненту, где  $V_{nm}$  — пиковое значение, частота равна  $\frac{n\omega}{2\pi} (= nf)$ , а  $\psi_n$  — фазовый угол.

Таким же образом мгновенное значение тока  $i$  сложной формы можно представить с помощью общего уравнения:

$$i = I_{1m} \sin(\omega t + \theta_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \theta_2) + \dots \\ \dots + I_{nm} \sin(n\omega t + \theta_n) \text{ ампер.} \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) относятся к напряжению и току линейной цепи. Фазовый угол между основным напряжением и током  $\phi_1 = (\psi_1 - \theta_1)$ , фазовый угол между второй гармоникой напряжения и тока  $\phi_2 = (\psi_2 - \theta_2)$  и т. д.

Часто бывает так, что в сигналах сложной формы присутствуют не все гармонические компоненты. Иногда имеются только основная гармоника и гармоники нечётного порядка, в других случаях есть только основная и гармоники чётного порядка.

## Гармонический синтез

*Гармонический анализ* — это процесс разложения сложного периодического сигнала на ряд синусоидальных компонент в возрастающем порядке по частоте. Многие встречающиеся на практике сигналы можно представить с помощью математических выражений, схожих с теми, что даны в уравнениях (1) и (2), а значение их гармонических компонент вместе с их фазой можно подсчитать с помощью *ряда Фурье* (см. «Инженерная математика. Карманный справочник», Изд. дом «Додэка-XXI», 2007.). Численные методы используют для анализа сигналов, которые не имеют простых математических выражений. Численный метод гармонического анализа рассмотрен в гл. 77. В лаборатории анализ сигналов можно выполнить с помощью *анализатора формы сигнала*, производящего непосредственное считывание гармоник, присутствующих в сложном сигнале.

С помощью сложения мгновенных значений основной и возрастающих гармоник сложного сигнала для заданных моментов времени можно постепенно выстроить его форму.

Эта графическая процедура называется *гармоническим синтезом* (термин «синтез» означает «совмещение частей или элементов, позволяющее получить сложное единое целое»).

- На **Рис. 76.2а** показано сложное колебание, состоящее из суммы основной (первой) гармоники и третьей гармоники, чья амплитуда составляет примерно половину от амплитуды основной, при этом оба колебания находятся в одной фазе. Если добавить дальнейшие нечётные гармоники подходящих амплитуд, получится хорошее приближение (аппроксимация) к сигналу в форме квадрата. На **Рис. 76.2б** показана третья гармоника с изначальным смещением фазы относительно основной гармоники.

Положительные и отрицательные полуциклы каждого сложного колебания на **Рис. 76.2а** и **Рис. 76.2б** идентичны по форме, и это является свойством колебаний, состоящих из основной и только нечётных гармоник.

- На **Рис. 76.2в** показано сложное колебание, состоящее из суммы основной и второй гармоник. Амплитуда последней составляет половину амплитуды основной, причём колебания изначально находятся в одной фазе друг с другом. Если дальше добавить чётные гармоники подходящих амплитуд, получится хорошее приближение к сигналу в виде последовательности треугольных импульсов. Если перевернуть изображение на **Рис. 76.2в** относительно горизонтальной оси, то можно увидеть, что отрицательный цикл является зеркальным отражением положительного цикла относительно точки А. На **Рис. 76.2г** показана вторая гармоника с начальным сдвигом фазы относительно основной гармоники, и положительные и отрицательные полуциклы не симметричны и в этом случае.

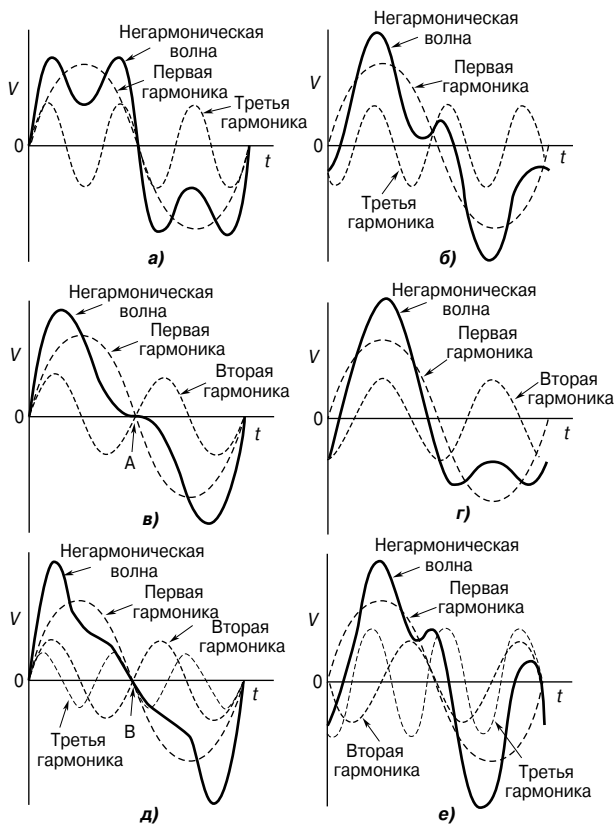


Рис. 76.2

- На **Рис. 76.2д** показано сложное колебание, состоящее из суммы основной, второй и третьей гармоник, и каждое колебание изначально находится в фазе. Если изображение перевернуть относительно горизонтальной оси, то получается отрицательный полупику как зеркальное отражение положительного полупика относительно точки В. На **Рис. 76.2е** показано сложное колебание, состоящее из суммы основной, второй и третьей гармоник с начальным фазовым сдвигом. Видно, что положительные и отрицательные полупики не одинаковы.

Отмеченные свойства, относящиеся к **Рис. 76.2а...Рис. 76.2е** дают возможность распознать гармоники, присутствующие в сложном сигнале, отражаемом на экране электронного осциллографа.

## Действующее и среднее значения величин и коэффициент формы сложного сигнала

### Действующее значение величин

Колесания тока сложной формы, представленного рядом Фурье, имеют вид:

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \theta_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \theta_2) + \dots + I_{nm} \sin(n\omega t + \theta_n) \text{ А,}$$

где  $I_0$  — постоянная составляющая гармонического ряда  $i$ .

Действующее значение тока  $I$  определяется выражением

$$I = \sqrt{\left( I_0^2 + \frac{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + \dots + I_{nm}^2}{2} \right)}$$

Аналогично для напряжения сложной формы, представленного в виде

$$v = V_0 + V_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + V_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + V_{nm} \sin(n\omega t + \psi_n) \text{ В,}$$

где  $I_0$  — постоянная составляющая гармонического ряда  $v$ .

Действующее значение напряжения  $V$  определяется выражением

$$V = \sqrt{\left( V_0^2 + \frac{V_{1m}^2 + V_{2m}^2 + \dots + V_{nm}^2}{2} \right)}$$

Действующие значения величин  $I$  и  $V$  называют также *среднеквадратическими*.

**Например,** если форма кривой тока представлена в виде

$$i = 25 + 80 \sin \omega t + 30 \sin \left( 3\omega t + \frac{\pi}{6} \right) + 10 \sin \left( 5\omega t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ мА,}$$

тогда действующее значение тока

$$I = \sqrt{\left( 25^2 + \frac{80^2 + 30^2 + 10^2}{2} \right)} = 65.8 \text{ мА.}$$

### Среднее значение

Среднее значение комплексной величины, у которой отрицательный полупериод симметричен положительному полупериоду, для тока определяется выражением

$$I_{av} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} i d(\omega t)$$

для напряжения

$$V_{av} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v d(\omega t)$$

Каждое соотношение соответствует одному полупериоду.

В отличие от действующих значений на средние значения влияют относительные фазовые углы составляющих гармоник.

**Например**, для приведённого в предыдущем примере тока

$$\begin{aligned} I_{av} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( 25 + 80 \sin \omega t + 30 \sin \left( 3\omega t + \frac{\pi}{6} \right) + 10 \sin \left( 5\omega t + \frac{\pi}{3} \right) \right) d(\omega t) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ 25\omega t - 80 \cos \omega t - \frac{30}{3} \cos \left( 3\omega t + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{10}{5} \cos \left( 5\omega t + \frac{\pi}{3} \right) \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ 25\pi - 80 \cos \pi - 10 \cos \left( 3\omega t + \frac{\pi}{6} \right) - 2 \cos \left( 5\omega t + \frac{\pi}{3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left[ 0 - 80 \cos 0 - 10 \cos \frac{\pi}{6} - 2 \cos \frac{\pi}{3} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} [(78.54 + 80 + 8.66 + 1.00) - (0 - 80 - 8.66 - 1.00)] = \\ &= 82.1 \text{ мА}. \end{aligned}$$

### Коэффициент формы

Коэффициент формы периодического сложного сигнала, у которого отрицательный полупериод по форме совпадает с его положительным полупериодом, определяется соотношением

$$\text{коэффициент формы} = \frac{\text{действующее значение}}{\text{среднее значение}}$$

где среднее значение приходится на полупериод.

Смещение фазы гармоник может существенно изменять коэффициент формы сложного сигнала.

Для данного выше тока

$$\text{коэффициент формы} = \frac{65.8}{82.1} = 0.80.$$

### Мощность периодического сложного сигнала

Средняя мощность сигнала в одном цикле основной гармоники задаётся выражением

$$P = V_0 I_0 + V_1 I_1 \cos \varphi_{t_1} + V_2 I_2 \cos \varphi_{t_2} + \dots + V_n I_n \cos \varphi_{t_n},$$

где  $V_1, V_2, \dots, V_n$  — действующие значения (rms) напряжений первой (основной), второй и последующих гармоник;

$I_1, I_2, \dots, I_n$  — действующие значения (rms) токов первой (основной), второй и последующих гармоник;

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  — разность фаз между током и напряжением первой (основной), второй и последующих гармоник.

Если  $R$  — эквивалентное последовательное сопротивление цепи, то общая мощность

$$P = I^2 R,$$

где  $I$  — действующее значение тока.

**Например**, если напряжение, заданное выражением

$$v = 25 + 100 \sin \omega t + 40 \sin \left( 3\omega t + \frac{\pi}{6} \right) + 20 \sin \left( 5\omega t + \frac{\pi}{12} \right) \text{ В},$$

подано в цепь и результирующий ток равен

$$i = 5 + 14.14 \sin (\omega t - 0.785) + 2.53 \sin (3\omega t + 0.726) + \\ + 0.784 \sin (5\omega t - 1.112) \text{ А},$$

то средняя мощность цепи

$$P = (25)(5) + \left( \frac{100}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{14.14}{\sqrt{2}} \right) \cos(0 - 0.785) + \\ + \left( \frac{40}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{2.53}{\sqrt{2}} \right) \cos \left( \frac{\pi}{6} - 0.726 \right) + \\ + \left( \frac{20}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{0.784}{\sqrt{2}} \right) \cos \left( \frac{\pi}{12} - 1.112 \right) = \\ = 125 + 500.12 + 15.97 + 1.53 = \mathbf{642.6 \text{ Вт}}.$$

### **Коэффициент мощности**

Когда периодический сигнал имеет не синусоидальную форму (то есть его можно разложить на гармоники), полный коэффициент мощности цепи определяют выражением

$$\text{Полный коэффициент мощности} = \\ = \frac{\text{суммарная поступающая мощность}}{\left( \begin{array}{cc} \text{суммарное} & \text{суммарный} \\ \text{среднеквадратическое} & \times \text{среднеквадратический} \\ \text{напряжение} & \text{ток} \end{array} \right)} =$$

$$= \frac{\text{суммарная мощность (ватты)}}{\text{вольт-амперы}},$$

то есть

$$\text{коэффициент мощности} = \frac{V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots}{VI}$$

При синусоидальном колебании

$$\text{коэффициент мощности} = \frac{\text{мощность}}{\text{вольт-амперы}} = \frac{VI \cos \varphi}{VI} = \cos \varphi.$$

Следовательно, коэффициент мощности зависит от значения фазового угла  $\varphi$ , отстаёт от индуктивной цепи и опережает ёмкостную цепь. Однако при сложном сигнале коэффициент мощности не будет равен  $\cos \varphi$ . В уравнении для вычисления мощности есть фазовые углы в  $n$ -м количестве,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , и все они могут быть разными. Это происходит потому, что при наличии гармоник нельзя сказать наверняка, будет ли коэффициент мощности отставать или опережать.

**Например**, для данного выше напряжения и тока

$$I = \sqrt{\left(5^2 + \frac{14.14^2 + 2.53^2 + 0.784^2}{2}\right)} = 11.33 \text{ A},$$

а

$$V = \sqrt{\left(25^2 + \frac{100^2 + 40^2 + 20^2}{2}\right)} = 81.39 \text{ В},$$

следовательно,

$$\text{полный коэффициент мощности} = \frac{642.6}{(81.39)(11.33)} = \mathbf{0.697}.$$

## Гармоники в однофазной цепи

Когда напряжение переменного тока, имеющее сложную форму (то есть сигнал содержит гармоники), подаётся в однофазную цепь, содержащую сопротивление, индуктивность и/или ёмкость (то есть элементы линейной цепи), то результирующий ток также будет иметь сложную форму.

Пусть напряжение представлено в виде

$$v = V_{1m} \sin \omega t + V_{2m} \sin 2\omega t + V_{3m} \sin 3\omega t + \dots$$

### «Чистое» сопротивление

Импеданс чистого сопротивления  $R$  не зависит от частоты, а ток и напряжение находятся в одной фазе для каждой гармоники. Значит, общее выражение для тока примет вид

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_{1m}}{R} \sin \omega t + \frac{V_{2m}}{R} \sin 2\omega t + \frac{V_{3m}}{R} \sin 3\omega t + \dots \quad (1)$$

Процентное соотношение гармоник в уравнении тока такое же, как в уравнении напряжения. Например, в процентах содержание второй гармоники в уравнении (1)

$$\frac{\frac{V_{2m}}{R}}{\frac{V_{1m}}{R}} \times 100\%,$$

то есть

$$\frac{V_{2m}}{V_{1m}} \times 100\%,$$

такое же, как в уравнении для напряжения. Следовательно, колебания тока и напряжения по форме одинаковы.

### «Чистая» индуктивность

Импеданс чистой индуктивности  $L$ , то есть индуктивное реактивное сопротивление  $X_L (= 2\pi fL)$ , изменяется в зависимости от частоты гармоники.

Для выражения каждой из гармоник ток отстаёт от напряжения на  $90^\circ$ , или  $\frac{\pi}{2}$  рад.

Так как для  $n$ -й гармоники реактивное сопротивление равно  $n\omega L$ , то

$$i = \frac{v}{X_L} = \frac{V_{1m}}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{V_{2m}}{2\omega L} \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{V_{3m}}{3\omega L} \sin\left(3\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \quad (2)$$

Уравнение (2) показывает, что, скажем, для  $n$ -й гармоники процентное содержание гармоник в уравнении тока равно всего лишь  $\frac{1}{n}$  соответствующего содержания гармоник в уравнении напряжения.

Если уравнение тока содержит компоненту постоянного тока, тогда падение напряжения постоянного тока на «чистой» индуктивности равно нулю.



### «Чистая» ёмкость

Импеданс «чистой» ёмкости  $C$ , то есть ёмкостное реактивное сопротивление  $X_C (= \frac{1}{2\pi fC})$ , изменяется в зависимости от частоты гармоники, когда к нему приложено напряжение.

Также для выражения каждой из гармоники ток опережает напряжение на  $90^\circ$ , или  $\frac{\pi}{2}$  рад. Так как для  $n$ -й гармоники реактивное сопротивление равно  $\frac{1}{n\omega C}$ , то ток

$$i = \frac{v}{X_C} = \frac{V_{1m}}{\frac{1}{\omega C}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{V_{2m}}{\frac{1}{2\omega C}} \sin 2\omega t + \frac{\pi}{2} + \\ + \frac{V_{3m}}{\frac{1}{3\omega C}} \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

то есть

$$i = V_{1m}(\omega C) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + V_{2m}(2\omega C) \sin\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \\ + V_{3m}(3\omega C) \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \dots \quad (3)$$

Уравнение (3) показывает, что процентное содержание гармоники в уравнении тока для  $n$ -й гармоники в  $n$  раз больше, чем для соответствующей гармоники в уравнении напряжения.

**Например**, периодически изменяющееся напряжение сложной формы, основная частота которого 1 кГц, представлено в виде

$$v = 100 \sin \omega t + 30 \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + 10 \sin\left(5\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ В.}$$

Это напряжение подаётся в цепь, содержащую:

- а) «чистое» сопротивление 40 Ом,
- б) «чистую» индуктивность 7.96 мГн,
- в) «чистую» ёмкость 25 мкФ.

Определим ток в цепи для каждого представленного случая.

а) В соответствии с уравнением (1) ток в цепи

$$i = \frac{v}{R} = \frac{100}{40} \sin \omega t + \frac{30}{40} \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{10}{40} \sin\left(5\omega t - \frac{\pi}{6}\right),$$

то есть

$$i = 2.5 \sin \omega t + 0.75 \sin \left( 3\omega t + \frac{\pi}{3} \right) + 0.25 \sin \left( 5\omega t - \frac{\pi}{6} \right) \text{ А.}$$

б) На основной частоте индуктивное сопротивление

$$\omega L = 2\pi(1\,000)(7.96 \times 10^{-3}) = 50 \text{ Ом.}$$

В соответствии с уравнением (2) ток в цепи

$$i = \frac{100}{50} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{30}{3 \times 50} \sin \left( 3\omega t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) + \\ + \frac{10}{5 \times 50} \sin \left( 5\omega t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \right),$$

то есть

$$i = 2 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + 0.20 \sin \left( 3\omega t - \frac{\pi}{6} \right) + 0.04 \sin \left( 5\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \text{ А.}$$

в) На основной частоте ёмкостное сопротивление

$$\omega C = 2\pi(1\,000)(25 \times 10^{-6}) = 0.157 \text{ Ом.}$$

В соответствии с уравнением (3) ток в цепи

$$i = 100(0.157) \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) + 30(3 \times 0.157) \sin \left( 3\omega t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) + \\ + 10(5 \times 0.157) \sin \left( 5\omega t - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right),$$

то есть

$$i = 15.70 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) + 14.13 \sin \left( 3\omega t + \frac{5\pi}{6} \right) + 7.85 \sin \left( 5\omega t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ А.}$$

**Другой пример.** ЭДС представлена в виде

$$e = 50 + 200 \sin \omega t + 40 \sin \left( 2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + 5 \sin \left( 4\omega t + \frac{\pi}{4} \right) \text{ В,}$$

где основная частота равна 50 Гц.

ЭДС подаётся в цепь, содержащую конденсатор 100 мкФ, последовательно соединённый с резистором 50 Ом. Выражение для тока найдём, определяя его составляющие.

### Постоянная составляющая

В цепи постоянного тока через конденсатор ток вообще течь не будет, поэтому колебание тока не содержит компоненты постоянного тока, хотя она присутствует в уравнении ЭДС. Значит,  $i_0 = 0$ .

### Основная гармоника

Ёмкостное реактивное сопротивление

$$X_{C_1} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(50)(100 \times 10^{-6})} = 31.83 \text{ Ом.}$$

Импеданс  $Z_1 = (50 - j31.83) \text{ Ом} = 59.27 \angle -32.48^\circ \text{ Ом.}$

$$I_{1m} = \frac{V_{1m}}{Z_1} = \frac{200 \angle 0^\circ}{59.27 \angle -32.48^\circ} = 3.374 \angle 32.48^\circ \text{ А} = 3.374 \angle 0.567 \text{ А.}$$

Следовательно, основной ток

$$i = 3.374 \sin(\omega t + 0.567) \text{ А.}$$

### Вторая гармоника

Ёмкостное реактивное сопротивление

$$X_{C_2} = \frac{1}{2(2\pi fC)} = \frac{31.83}{2} = 15.92 \text{ Ом.}$$

Импеданс  $Z_2 = (50 - j15.92) \text{ Ом} = 52.47 \angle -17.66^\circ \text{ Ом.}$

$$\begin{aligned} I_{2m} = \frac{V_{2m}}{Z_2} &= \frac{40 \angle -\frac{\pi}{2}}{52.47 \angle -17.66^\circ} = 0.762 \angle \left(-\frac{\pi}{2} - (-17.66^\circ)\right) = \\ &= 0.762 \angle -72.34^\circ \text{ А.} \end{aligned}$$

Следовательно, вторая гармоника тока

$$i_2 = 0.762 \sin(2\omega t - 72.34^\circ) \text{ А} = 0.762 \sin(2\omega t - 1.263) \text{ А.}$$

### Четвёртая гармоника

Ёмкостное реактивное сопротивление

$$X_{C_4} = \frac{1}{4} X_{C_1} = \frac{31.83}{4} = 7.958 \text{ Ом.}$$

Импеданс  $Z_4 = (50 - j7.958) \text{ Ом} = 50.53 \angle -9.04^\circ \text{ Ом.}$

$$\begin{aligned} I_{4m} = \frac{V_{4m}}{Z_4} &= \frac{5 \angle \frac{\pi}{4}}{50.53 \angle -9.04^\circ} = 0.099 \angle \left(\frac{\pi}{4} - (-9.04^\circ)\right) = \\ &= 0.099 \angle 54.04^\circ \text{ А.} \end{aligned}$$

Следовательно, четвёртая гармоника тока

$$i_4 = 0.099 \sin(4\omega t + 54.04^\circ) \text{ A} = 0.099 \sin(4\omega t + 0.943) \text{ A}.$$

Выражение для тока

$$i = i_0 + i_1 + i_2 + i_4,$$

то есть

$$i = 3.374 \sin(\omega t + 0.567) + 0.762 \sin(2\omega t - 1.263) + \\ + 0.099 \sin(4\omega t + 0.943) \text{ A}.$$

Из вышесказанного следует, что действующее значение тока

$$I = \sqrt{\left(\frac{3.374^2 + 0.762^2 + 0.099^2}{2}\right)} = \\ = 2.45 \text{ A}.$$

## Селективный резонанс

В промышленных электросетях при промышленных частотах типичные значения  $L$  и  $C$  делают резонанс на основной частоте маловероятным. (Исключение составляет асинхронный двигатель с конденсаторным пуском, у которого обмотка запуска при разгоне может достигать коэффициента мощности, равного единице.)

Однако если кривая напряжения имеет не чисто синусоидальную форму, то вполне возможно, что резонансная частота будет близка к одной из гармоник.

В этом случае амплитуда определённой гармоники в составе кривой напряжения сильно увеличена и может даже превышать амплитуду основной частоты. В результате возникает большое искажение результирующей кривой тока, и поэтому на элементах индуктивности и ёмкости цепи может возникнуть опасное падение напряжения.

Эффект, когда цепь резонирует на одной из гармоник напряжения питания, называют *селективным*, или *гармоническим*, *резонансом*.

Известно, что для возникновения резонанса на основной частоте должно выполняться условие

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

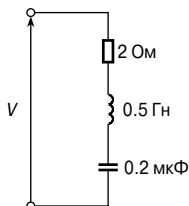
Для возникновения резонанса, предположим, на третьей гармонике должно выполняться условие

$$3\omega L = \frac{1}{3\omega C}.$$

Для возникновения резонанса на  $n$ -й гармонике должно выполняться условие

$$n\omega L = \frac{1}{n\omega C}$$

**Например,** максимальное значение напряжения на  $L_C$  основной частоты составляет 400 В, а максимальное значение напряжения на  $L_C$  третьей гармоники — 10 В. Это напряжение подаётся в цепь, показанную на **Рис. 76.3**.



**Рис. 76.3**

Основную частоту можно определить из условия резонанса на третьей гармонике.

Резонанс на третьей гармонике означает, что

$$3\omega L = \frac{1}{3\omega C},$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{1}{9LC}\right)} = \frac{1}{3\sqrt{(0.5)(0.2 \times 10^{-6})}} = 1\,054 \text{ рад/с},$$

а основная частота

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1\,054}{2\pi} = 167.7 \text{ Гц}.$$

На основной частоте импеданс

$$\begin{aligned} Z_1 &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \\ &= 2 + j\left[(1\,054)(0.5) - \frac{1}{(1\,054)(0.2 \times 10^{-6})}\right] = \\ &= (2 - j4\,217) \text{ Ом} = 4\,217 \angle -89.97^\circ \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Теперь можно определить максимальное значение тока на основной частоте:

$$I_{1m} = \frac{V_{1m}}{Z_1} = \frac{400}{4\,217} = \mathbf{0.095\text{ А}}.$$

На третьей гармонике импеданс

$$Z_3 = R + j\left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right).$$

Так как резонанс возникает на третьей гармонике, то есть  $3\omega L = \frac{1}{3\omega C}$ , то

$$Z_3 = R = 2\text{ Ом}.$$

Определим максимальное значение тока на третьей гармонике:

$$I_{3m} = \frac{V_{3m}}{Z_3} = \frac{10}{2} = \mathbf{5\text{ А}}.$$

Значит,

$$\frac{I_{3m}}{I_{1m}} = \frac{5}{0.095} = 52.6.$$

Таким образом, расчёты показывают, что амплитуда тока на третьей гармонике в 52.6 раза больше амплитуды тока на основной частоте.

## Источники гармоник

- Гармоники могут возникать в выходных сигналах генератора переменного тока. Причиной этому могут быть «зубчатые гармоники», возникающие либо из-за щелей, в которые укладывают обмотки, либо из-за искажения магнитного потока не синусоидальной формы в воздушном зазоре.

В больших энергосистемах к обеспечению синусоидальной формы сигнала на выходе генератора следует относиться очень внимательно. Однако в свою очередь нелинейные нагрузки вызывают появление гармоник в кривой тока нагрузки. Гармоники возникают в устройствах, где имеется нелинейный отклик на входные сигналы. К элементам нелинейной цепи (то есть элементам, в которых текущий через них ток не пропорционален приложенному напряжению) относятся выпрямители и любые усилители с большим уровнем сигнала, в которых используются диоды, транзисторы, вентили или катушки индуктивности с железными сердечниками.

- Выпрямитель* — это устройство для преобразования переменного или другого колебательного тока в однонаправленный или приблизительно постоянный ток. Выпрямитель имеет

малый импеданс при протекании тока в одном направлении и почти бесконечный импеданс при протекании тока в противоположном направлении. Следовательно, когда на выпрямитель подан переменный ток, он потечёт через него только во время положительного полупериода; при отрицательном полупериоде ток равен нулю. На **Рис. 76.4** показана типичная кривая тока. Это «однополупериодное выпрямление» возникает при использовании единственного диода, как показано в гл. 51.

Кривая на **Рис. 76.4** типична для кривой, имеющей довольно большую вторую гармонику.



**Рис. 76.4**

- *Транзисторы и вентили* — это нелинейные устройства, в которых синусоидальный вход становится причиной разного усиления положительных и отрицательных полупериодов. Это значит, что полупериоды выходного сигнала имеют разные амплитуды. Так как они отличаются по форме, можно предположить наличие нелинейных искажений (см. ранее тему синтеза гармоник).
- *Катушки с сердечником из ферромагнетика* являются источником генерации гармоник в цепях переменного тока из-за нелинейности кривой намагничивания или гистерезисной петли, особенно в случае насыщения.

Пусть на катушку с ферромагнитным сердечником (активное сопротивление которой мало по сравнению с индуктивным реактивным сопротивлением) подано синусоидальное напряжение. Её площадь поперечного сечения равна  $A$  квадратных метров, а количество витков равно  $N$ . Если  $\Phi$  — магнитный поток, возникающий в катушке, то мгновенное напряжение (гл. 48)  $v = N \frac{d\Phi}{dt}$ .

Так как  $\Phi = BA$ ,

$$v = N \frac{d}{dt}(BA) = NA \frac{dB}{dt},$$

где  $B$  — плотность потока в катушке,

$A$  — площадь, постоянная для определённого сердечника.

Разделив переменные, получаем

$$\int dB = \frac{1}{NA} \int v dt,$$

то есть

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{NA} \int V_m \sin \omega t dt = \\ &= -\frac{V_m}{\omega NA} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Так как  $-\cos \omega t = \sin(\omega t - 90^\circ)$ , то

$$B = \frac{V_m}{\omega NA} \sin(\omega t - 90^\circ). \quad (4)$$

Уравнение (4) показывает, что, если приложенное напряжение синусоидальное, плотность потока в стальном сердечнике должна быть также синусоидальной, но запаздывать на  $90^\circ$ . Условие, когда сопротивление мало по сравнению с индуктивным реактивным сопротивлением, дающим синусоидальный поток от синусоидального источника напряжения, называется *свободным намагничиванием*.

Рассмотрим характер изменения тока в катушке с сердечником, имеющим гистерезисную петлю (**Рис. 76.5а**), при подаче на катушку синусоидального напряжения.

Горизонтальная ось гистерезисной петли — это напряжённость магнитного поля  $H$ , но так как  $H = \frac{Ni}{l}$ , а  $N$  и  $l$  (длина пути потока) постоянны, ось может быть размечена равными шагами в единицах измерения тока (то есть  $i = \frac{Hl}{N}$ ). На

**Рис. 76.5б** показаны синусоидальные кривые напряжения  $v$  и плотности потока  $B$ . При этом  $B$  отстаёт от  $v$  на  $90^\circ$ .

Кривую тока, показанную на **Рис. 76.5в**, получают следующим образом. В момент времени  $t_1$  точка  $a$  на кривой напряжения соответствует точке  $b$  на кривой плотности магнитного потока и точке  $c$  на гистерезисной петле. В момент времени  $t_1$  ток определяется расстоянием  $dc$  на кривой **Рис. 76.5а**.

Перенос этого тока на шкалу времени даёт точку  $e$  на кривой тока. Ту же процедуру следует выполнить для моментов времени  $t_2$ ,  $t_3$  и так далее через один цикл напряжения. (Заметим, что по гистерезисной петле важно двигаться в правильном направлении.) Видно, что кривая тока имеет не синусоидальную форму, а также то, что положительные и отрицательные полуциклы одинаковы. Это говорит о том, что колебание содержит только чётные гармоники.



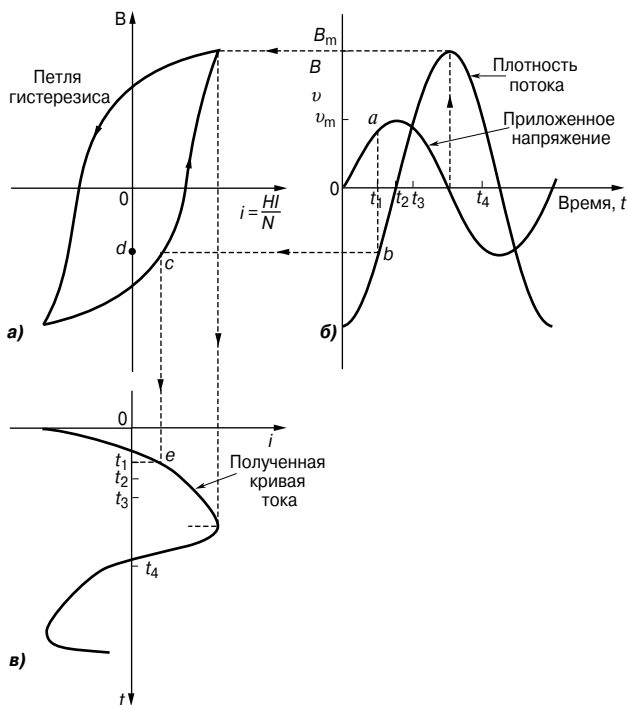


Рис. 76.5

- Если в цепи, содержащей катушку с ферромагнитным сердечником, активное сопротивление большое по сравнению с индуктивным реактивным сопротивлением, тогда ток, создаваемый синусоидальным источником, стремится иметь синусоидальную форму. Это значит, что плотность потока  $B$  сердечника не может быть синусоидальной, так как она связана с током гистерезисной петлей. Это означает, что индуцируемое напряжение из-за переменного потока (то есть  $v = NA \frac{dB}{dt}$ ) не будет синусоидальным. Это условие называется *вынужденным намагничиванием*..

Форма кривой индуцированного напряжения при вынужденном намагничивании получается следующим образом. На **Рис. 76.6а** кривая тока показана по вертикальной оси.

Гистерезисная петля, соответствующая максимальному значению тока в цепи, рисуется так, как показано на **Рис. 76.6б**.

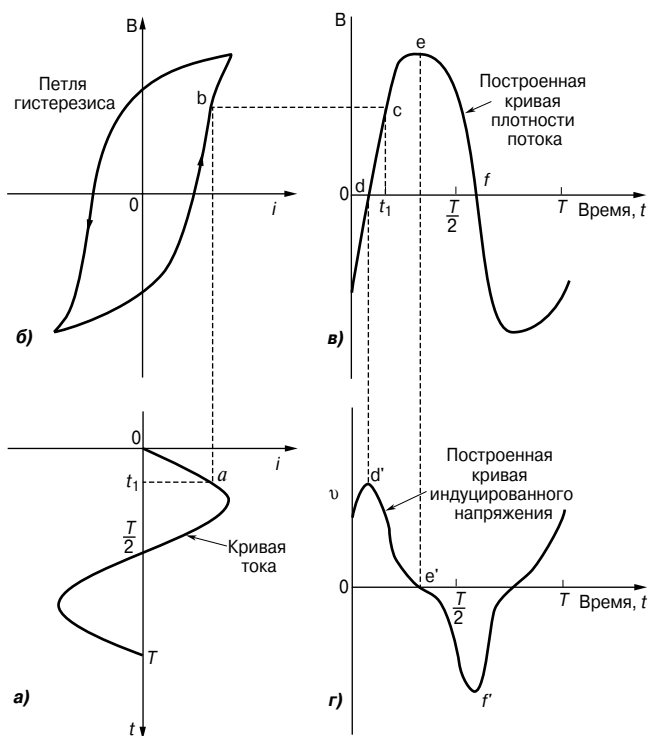


Рис. 76.6

Кривая плотности потока, полученная из синусоидальной кривой тока, показана на **Рис. 76.6в**. Точка  $a$  на кривой тока в момент времени  $t_1$  соответствует точке  $b$  на гистерезисной петле и точке  $c$  на кривой плотности потока. Беря другие точки на всём интервале цикла тока, получаем кривую плотности потока.

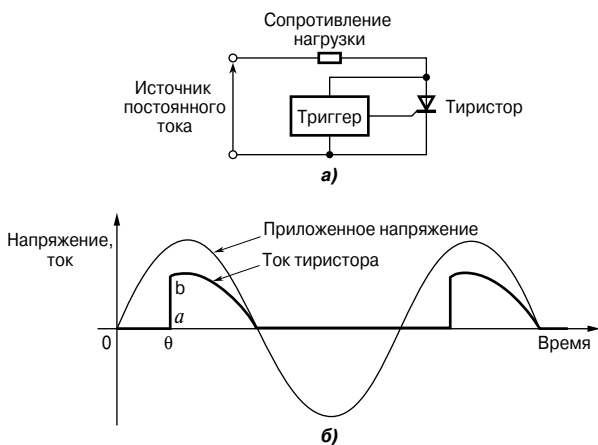
Соотношение между индуцируемым напряжением  $v$  и плотностью потока  $B$  определяется уравнением  $v = NA \frac{dB}{dt}$ .

Производная  $\frac{dB}{dt}$  здесь характеризует скорость изменения плотности потока относительно времени, то есть это наклон касательной к кривой  $B(t)$ . (По определению производной, это тангенс угла наклона касательной к кривой в заданной точке.— *Прим. редактора перевода.*) В точке  $d$  наклон к кривой  $B(t)$  максимален в положительном направлении. Следовательно,  $v$  имеет максимальное положительное значение, что

соответствует точке  $d'$  на **Рис. 76.6г**. В точке  $e$  наклон (то есть  $\frac{dB}{dt}$ ) равен нулю, следовательно,  $v$  равно нулю, как показано точкой  $e'$ . В точке  $f$  наклон максимален в отрицательном направлении, значит,  $v$  максимально отрицательно, что обозначено точкой  $f'$ . Если определить наклон касательных во всех точках кривой  $B(t)$ , то получится кривая, характеризующая индуцируемое напряжение и показанная на **Рис. 76.6г**.

Получившаяся кривая напряжения имеет несинусоидальную форму. Положительные и отрицательные полупериоды одинаковы по форме, что говорит о том, что колебание состоит из основной частоты и явно выделяющейся третьей гармоники.

- Мощностью, поставляемой к нагрузке, можно управлять при помощи полупроводникового прибора, называемого *тиристором*. К примерам использования управляемыми выпрямителями можно отнести управление лампами и обогревателями, а также управление скоростью двигателя. На **Рис. 76.7а** показана основная цепь, применяемая для однофазного контроля мощности.



**Рис. 76.7**

Триггерный модуль содержит электрическую схему, производящую ток, поступающий на электрод тиристора для включения тока нагрузки. Если импульс приложен в момент времени  $\frac{\theta}{\omega}$ , где  $\theta$  — угол пуска, то ток, текущий в нагрузочном резисторе, имеет форму, показанную на **Рис. 76.7б**. Однако крутой фронт нарастания приводит к возникновению гармоник.

- В *микроэлектронных системах* сигналы прямоугольного вида встречаются часто. И снова быстрое нарастание фронта приводит к возникновению гармоник, особенно на высоких частотах. Эти гармоники могут возвращаться в основной канал, если их не отфильтруют.

Из приведённых примеров видно, что в электрических и электронных системах появление гармоник совсем не редкость.

## 77. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

### Введение

Многие сигналы, встречающиеся на практике, можно представить простыми математическими выражениями и с помощью *ряда Фурье* определить их гармонические составляющие. Для колебаний, не подпадающих под эту категорию, анализ можно произвести численными методами. *Гармонический анализ* — это процесс разложения периодической несинусоидальной величины в ряд синусоидальных составляющих возрастающего порядка частоты.

### Гармонический анализ на основе данных, представленных в виде таблицы или графика

Ряд Фурье — это тригонометрический ряд, имеющий вид

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots,$$

то есть

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

*Коэффициенты Фурье*  $a_0$ ,  $a_n$  и  $b_n$  требуют интегрирования функций:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx =$$

= среднее значение функции  $f(x)$  в диапазоне от  $-\pi$  до  $\pi$  или от 0 до  $2\pi$ ;

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx =$$

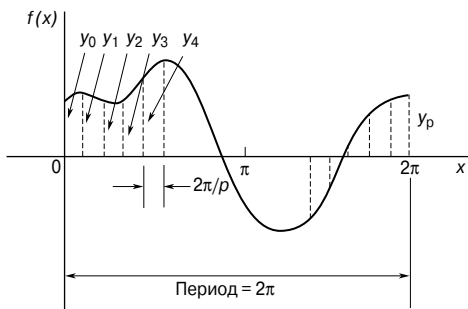
= удвоенное среднее значение функции  $f(x) \cos nx$  в диапазоне от 0 до  $2\pi$ ;

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx =$$

= удвоенное среднее значение функции  $f(x) \sin nx$  в диапазоне от 0 до  $2\pi$ .

Однако нерегулярные сигналы, как правило, нельзя выразить в аналитической форме, и, следовательно, коэффициенты Фурье нельзя определить с помощью вычислений. В таких случаях для оценки коэффициентов Фурье применяют методы аппроксимации, например *правило трапеций*.

На практике большинство сигналов, которые необходимо проанализировать, периодические. Пусть период колебаний равен  $2\pi$  и разделён на  $p$  равных частей, как показано на **Рис. 77.1**.



**Рис. 77.1**

Следовательно, ширина каждого интервала равна  $\frac{2\pi}{p}$ . Пусть ординаты границ интервалов называются  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_p$  (замечим, что  $y_0 = y_p$ ). Правило трапеций гласит:

$$\left\| \begin{aligned} \text{Площадь} &= (\text{ширина интервала}) \left[ \frac{1}{2} (\text{первая} + \text{последняя ординаты}) + \text{сумма остальных ординат} \right] \approx \\ &\approx \frac{2\pi}{p} \left[ \frac{1}{2} (y_0 + y_p) + y_1 + y_2 + y_3 + \dots \right] \end{aligned} \right\|$$

Так как  $y_0 = y_p$ , то

$$\frac{1}{2}(y_0 + y_p) = y_0 = y_p.$$

Тогда площадь  $\approx \frac{2\pi}{p} \sum_{k=1}^p y_k$ .

$$\text{Среднее значение} = \frac{\text{площадь}}{\text{длина основания}} \approx \frac{1}{2\pi} \left( \frac{2\pi}{p} \right) \sum_{k=1}^p y_k \approx \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_k.$$

Однако  $a_0$  = среднее значение  $f(x)$  в диапазоне от 0 до  $2\pi$ , следовательно,

$$\boxed{a_0 \approx \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_k} \quad (1)$$

Схожим образом  $a_n$  = удвоенное среднее значение  $f(x)\cos nx$  в диапазоне от 0 до  $2\pi$ , следовательно,

$$a_n \approx \frac{2}{p} \sum_{k=1}^p y_k \cos nx_k \quad (2)$$

и  $b_n$  = удвоенное среднее значение  $f(x)\sin nx$  в диапазоне от 0 до  $2\pi$ , следовательно,

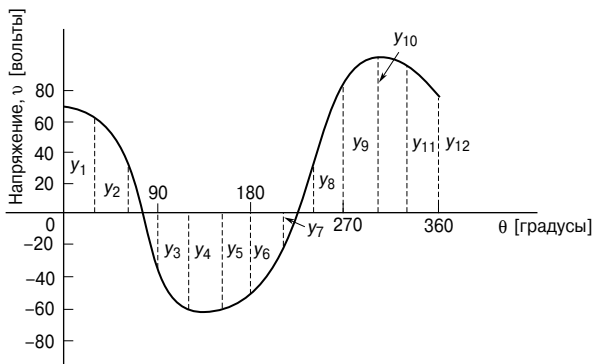
$$b_n \approx \frac{2}{p} \sum_{k=1}^p y_k \sin nx_k \quad (3)$$

**Например,** ниже в таблице приведены значения напряжения  $u$  (в вольтах) в разные моменты цикла.

$\theta$ (градусы)	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
$u$ (вольты)	62	35	-38	-64	-63	-52	-28	24	80	96	90	70

Проведём анализ напряжения для первых трёх образующих гармоник.

На **Рис. 77.2** показан график зависимости напряжения  $u$  от угла  $\theta$ .



**Рис. 77.2**

Диапазон от 0 до  $2\pi$  разделён на 12 равных частей, при этом ширина интервала равна  $\frac{2\pi}{12}$ , то есть  $\frac{\pi}{6}$  рад, или  $30^\circ$ . Значения ординат  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{12}$  в этом случае равны 62, 35, -38, ..., 70 из

приведённой таблицы значений. Если взять большее число интервалов, получатся более точные результаты. Данные фиксируются в таком виде, как показано в **Табл. 77.1**.

Из уравнения (1)

$$a_0 \approx \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_k.$$

Так как  $p = 12$ , то

$$a_0 = \frac{1}{12}(212) = 17.67.$$

Из уравнения (2)

$$a_n \approx \frac{2}{p} \sum_{k=1}^p y_k \cos nx_k,$$

следовательно,

$$a_1 \approx \frac{2}{12}(417.94) = 69.66;$$

$$a_2 \approx \frac{2}{12}(-39) = -6.50;$$

$$a_3 \approx \frac{2}{12}(-49) = -8.17.$$

Из уравнения (3)

$$b_n \approx \frac{2}{p} \sum_{k=1}^p y_k \sin nx_k,$$

следовательно,

$$b_1 \approx \frac{2}{12}(-278.53) = -46.42;$$

$$b_2 \approx \frac{2}{12}(29.43) = 4.91;$$

$$b_3 \approx \frac{2}{12}(55) = 9.17.$$

Подставив эти значения в ряд Фурье

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

имеем

$$\begin{aligned} v = & 17.67 + 69.66 \cos \theta - 6.50 \cos 2\theta + 8.17 \cos 3\theta \dots - \\ & - 46.42 \sin \theta + 4.91 \sin 2\theta + 9.17 \sin 3\theta + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что в уравнении (4) выражение  $(-46.42 \sin \theta + 69.66 \cos \theta)$  отражает основную частоту,  $(4.91 \sin 2\theta - 6.50 \cos 2\theta)$  — вторую гармонику, а  $(9.17 \sin 3\theta - 8.17 \cos 3\theta)$  — третью гармонику.



Таблица 77.1

Ордината	$\theta$	$V$	$\cos\theta$	$V\cos\theta$	$\sin\theta$	$V\sin\theta$	$\cos 2\theta$	$V\cos 2\theta$	$\sin 2\theta$	$V\sin 2\theta$	$\cos 3\theta$	$V\cos 3\theta$	$\sin 3\theta$	$V\sin 3\theta$
$y_1$	30	62	0.866	53.69	0.5	31	0.5	31	0.866	53.69	0	0	1	62
$y_2$	60	35	0.5	17.5	0.866	30.31	-0.5	-17.5	0.866	30.31	-1	-35	0	0
$y_3$	90	-38	0	0	1	-38	-1	38	0	0	0	0	-1	38
$y_4$	120	-64	-0.5	32	0.866	-55.42	-0.5	32	-0.866	55.42	1	-64	0	0
$y_5$	150	-63	-0.866	54.56	0.5	-31.5	0.5	-31.5	-0.866	54.56	0	0	1	-63
$y_6$	180	-52	-1	52	0	0	1	-52	0	0	-1	52	0	0
$y_7$	210	-28	-0.866	24.25	-0.5	14	0.5	-14	0.866	-24.25	0	0	-1	28
$y_8$	240	24	-0.5	-12	-0.866	-20.78	-0.5	-12	0.866	20.78	1	24	0	0
$y_9$	270	80	0	0	-1	-80	-1	-80	0	0	0	0	1	80
$y_{10}$	300	96	0.5	48	-0.866	-83.14	-0.5	-48	-0.866	-83.14	-1	-96	0	0
$y_{11}$	330	90	0.866	77.94	-0.5	-45	0.5	45	-0.866	-77.94	0	0	-1	-90
$y_{12}$	360	70	1	70	0	0	1	70	0	0	1	70	0	0
$\sum_{k=1}^{12} y_k = 212$			$\sum_{k=1}^p y_k \cos\theta_k = 417.94$		$\sum_{k=1}^p y_k \sin\theta_k = -278.53$		$\sum_{k=1}^p y_k \cos 2\theta_k = -39$		$\sum_{k=1}^p y_k \sin 2\theta_k = 29.43$		$\sum_{k=1}^p y_k \cos 3\theta_k = -49$		$\sum_{k=1}^p y_k \sin 3\theta_k = 55$	

В карманном справочнике «Инженерная математика» (Изд. дом «Додэка-XXI», 2007) показано, что

$$a \sin \omega t + b \cos \omega t = R \sin(\omega t + \alpha),$$

где  $a = R \cos \alpha$ ,

$$b = R \sin \alpha,$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Для основной частоты

$$R = \sqrt{(-46.42)^2 + (69.66)^2} = 83.71.$$

Если  $a = R \cos \alpha$ , тогда

$$\cos \alpha = \frac{a}{R} = \frac{-46.42}{83.71},$$

что даёт отрицательное значение косинуса,

а если  $b = R \sin \alpha$ , тогда

$$\sin \alpha = \frac{b}{R} = \frac{69.66}{83.71},$$

то есть синус положителен.

Единственная четверть, где  $\cos \alpha$  отрицателен, а  $\sin \alpha$  положителен, — это вторая четверть.

Значит,

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{69.66}{-46.42} = 123.68^\circ, \text{ или } 2.16 \text{ рад}.$$

Следовательно,

$$(-46.42 \sin \theta + 69.66 \cos \theta) = 83.71 \sin(\theta + 2.16).$$

Похожим образом можно показать, что вторая гармоника —

$$(4.91 \sin 2\theta - 6.50 \cos 2\theta) = 8.15 \sin(2\theta - 0.92),$$

а третья гармоника —

$$(9.17 \sin 3\theta - 8.17 \cos 3\theta) = 12.28 \sin(3\theta - 0.73).$$

Значит, уравнение (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} v = & 17.67 + 83.71 \sin(\theta + 2.16) + 8.15 \sin(2\theta - 0.92) + \\ & + 12.28 \sin(3\theta - 0.73) \text{ В,} \end{aligned}$$

и мы получаем уравнение для сложных сигналов такого же вида, как рассмотренные в гл. 76.

## Оценка сложных сигналов

Иногда можно предсказать гармоническое содержимое в каком-либо периодическом сигнале, если предварительно оценить его определённые характеристики; в результате объём вычислений сокращается.

- Если периодический сигнал таков, что площадь над горизонтальной осью равна площади под ней, то среднее значение равно нулю. Значит,  $a_0 = 0$  (**Рис. 77.3а**).
- *Чётная функция* симметрична относительно вертикальной оси и не содержит составляющих синуса (**Рис. 77.3б**).
- *Нечётная функция* симметрична относительно начала координат и не содержит составляющих косинуса (**Рис. 77.3в**).
- $f(x) = f(x + \pi)$  характеризует сигнал, повторяющийся через половину цикла, и в нём присутствуют только чётные гармоники (**Рис. 77.3г**).
- $f(x) = -f(x + \pi)$  характеризует сигнал, где положительные и отрицательные циклы одинаковы по форме, поэтому уравнение содержит только нечётные гармоники (**Рис. 77.3д**).

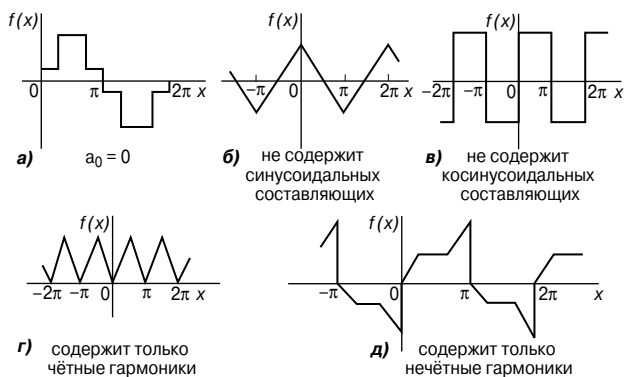


Рис. 77.3

## 78. ДИЭЛЕКТРИКИ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ

### Электрические поля, ёмкость и диэлектрическая проницаемость

Любую область, в которой электрический заряд попадает под силовое влияние электричества, называют *электрическим полем*. Характеристики электрического поля, закон Кулона, определение ёмкости и диэлектрической проницаемости рассмотрены в гл. 44. Здесь же приведём основные формулы.

- Напряжённость электрического поля

$$E = \frac{V}{d} \text{ В/м} .$$

- Ёмкость

$$C = \frac{Q}{V} \Phi .$$

- Плотность электрического потока

$$D = \frac{Q}{A} \text{ Кл/м}^2 .$$

- $$\frac{D}{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon .$$

- Относительная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon_r = \frac{\text{плотность электрического потока в веществе}}{\text{плотность электрического потока в вакууме}} .$$

Изолирующую среду, отделяющую друг от друга заряженные поверхности, называют *диэлектриком*. По сравнению с проводниками диэлектрические материалы обладают высоким удельным сопротивлением (а следовательно, низкой электропроводностью, так как  $\rho = \frac{1}{\sigma}$ ). Поэтому их используют для того, чтобы отделять друг от друга проводники с разными потенциалами, например обкладки конденсатора или линии электропередачи.

*Ёмкость конденсатора* с параллельными обкладками определяют по формуле

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A (n - 1)}{d} .$$

## Поляризация

Когда диэлектрик помещают между заряженными пластинами, ёмкость системы увеличивается. Физическое явление, благодаря которому диэлектрик увеличивает ёмкость, называют *поляризацией*. В электрическом поле электроны и атомные ядра диэлектрических материалов испытывают влияние сил, направленных в противоположных направлениях. Так как электроны в изоляторе не могут перемещаться, каждый атом становится крошечным *диполем* со слегка разделёнными положительным и отрицательным зарядами, то есть материал становится поляризованным.

В материале это не приводит к каким-то визуально заметным эффектам. Однако на поверхностях диэлектрика появляются слои зарядов. Электроны притягиваются к пластине с положительным потенциалом, образуя слой отрицательных зарядов, и отталкиваются от пластин с отрицательным потенциалом, оставляя после себя положительно заряженную поверхность. Следовательно, диэлектрик становится вместилищем нейтрального изолятора с поверхностными зарядами противоположной полярности на противоположных поверхностях.

В результате электрическое поле внутри диэлектрика становится меньше, чем электрическое поле, вызывающее поляризацию, так как эти два слоя зарядов порождают поле, противодействующее вызвавшему его полю. Напряжённость электрического поля определяется формулой

$$E = \frac{V}{d},$$

откуда разность потенциалов между обкладками  $V = Ed$ .

Значит, если  $E$  уменьшается, когда вводится диэлектрик, то  $V$  тоже падает, и это падение напряжения возникает без изменения зарядов на обкладках. Следовательно, ёмкость возрастает, так как  $C = \frac{Q}{V}$ , и этот рост определяется величиной относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_r$  для данного диэлектрика.

Существует два основных объяснения того, как происходит поляризация.

- Электрическое поле, как говорилось выше, отталкивает друг от друга электроны и ядра, так как они имеют противоположные заряды, что превращает каждый атом в электрический диполь. Движение очень небольшое и происходит очень быстро, так как масса электронов очень мала. Значит, если приложенное электрическое поле периодически изменяется, поляризация, а следовательно (из-за этих индуцированных диполей), и диэлектрическая проницаемость не зависят от частоты приложенного поля.

- Некоторые атомы обладают постоянным электрическим диполем в результате своих структурных особенностей, и, когда прикладывается электрическое поле, они разворачиваются и стремятся выстроиться вдоль линий поля. Отклик постоянных диполей более медленный, чем отклик индуцированных диполей, и часть относительной диэлектрической проницаемости, которая возникает из-за такого типа поляризации, уменьшается с увеличением частоты.

Большинство материалов содержат как индуцированные, так и постоянные диполи, поэтому численное значение относительной диэлектрической проницаемости, как правило, стремится уменьшиться с увеличением частоты.

## Электрическая прочность диэлектрика

Максимальную напряжённость поля, которую может выдержать диэлектрик, называют *электрической прочностью* материала. Когда по периметру материала устанавливается электрическое поле, возникает ориентация молекул и искажение орбит электронов, вращающихся вокруг атомов диэлектрика. Это приводит к механическому напряжению, которое в свою очередь генерирует тепло. Возникновение тепла характеризует рассеивание мощности, причём такие потери имеют место во всех применяемых на практике диэлектриках, особенно при использовании в высокочастотных системах, где полярность поля постоянно и быстро меняется.

Диэлектрик, чья электропроводность не равна нулю между обкладками конденсатора, обеспечивает «дорожку» проводимости, по которой могут течь заряды, тем самым разряжая конденсатор. Сопротивление  $R$  диэлектрика определяется соотношением

$$R = \frac{\rho l}{a},$$

где  $l$  — толщина диэлектрической плёнки (которая может быть всего 0.0001 мм),

$a$  — площадь обкладок конденсатора.

Сопротивление диэлектрика  $R$  можно представить как сопротивление утечки в идеальном конденсаторе (см. потери в диэлектрике). Необходимый нижний предел для приемлемого сопротивления между обкладками определяется в зависимости от цели применения конденсатора. Высококачественные конденсаторы имеют высокие значения шунтирующего сопротивления. Мера качества диэлектрика — это время, за которое конденсатор разрядится на заданную величину через сопротивление диэлектрика. Это время связано с произведением  $RC$ .

$C \sim \frac{\text{площадь}}{\text{толщина}}$  и  $\frac{1}{R} \sim \frac{\text{площадь}}{\text{толщина}}$ , следовательно,  $RC$  может слу-

жить характеристикой данного диэлектрика. На практике проектирование схемы значительно упрощается, если проводимостью изоляции можно пренебречь (то есть  $R \rightarrow \infty$ ), и, следовательно, конденсатор считается разомкнутой цепью для постоянного тока.

Так как ёмкость  $C$  с единичной парой параллельных обкладок конденсатора задаётся уравнением

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d},$$

уменьшение толщины  $d$  диэлектрической плёнки увеличивает ёмкость, но уменьшает сопротивление. Оно также понижает величину напряжения, с которым конденсатор может работать без пробоя (так как  $V = \frac{Q}{C}$ ). В конце концов пробой происходит в любом материале и, как правило, повреждает его, если на этот материал воздействует достаточно сильное электрическое поле. При пробое может возникнуть искра, отчего в плёнке образуется сквозное отверстие. В точке пробоя металлическая плёнка, образующая металлические обкладки, может замкнуться.

Пробой зависит от напряжённости электрического поля  $E$  (где  $E = \frac{V}{d}$ ), поэтому более тонкие плёнки подвержены пробую при меньших напряжениях, приложенных к ним. Это основная причина ограничения напряжения, прикладываемого к конденсатору. На всех применяемых на практике конденсаторах отмечают безопасное для их работы напряжение, как правило, при определённой максимальной температуре. На **Рис. 78.1** показан типичный характер зависимостей напряжённости электрического поля и пробивного напряжения от толщины плёнки.

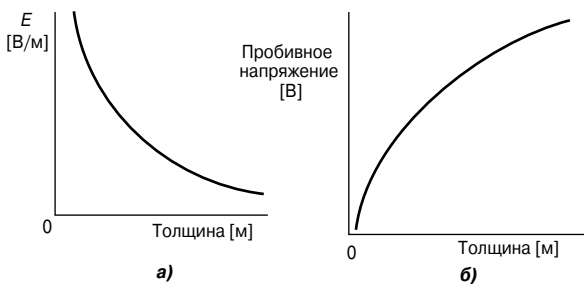


Рис. 78.1

Форма кривых зависит от ряда факторов, к которым относятся:

- тип диэлектрика;
- форма и размер проводников, связанных с ним;
- атмосферное давление;
- влажность/количество влаги в материале;
- рабочая температура.

Электрическую прочность диэлектрика очень важно учитывать при разработке конденсаторов, а также трансформаторов, изоляторов высокого напряжения, двигателей и генераторов.

Диэлектрики отличаются по своей способности противостоять сильным полям. В Табл. 78.1 приведены некоторые типичные значения электрической прочности, а также удельного сопротивления и относительной диэлектрической проницаемости для различных типов диэлектриков.

**Таблица 78.1.** Диэлектрические свойства некоторых материалов

Материал	Удельное сопротивление, $\rho$ [Ом·м]	Относительная диэлектрическая проницаемость, $\epsilon_r$	Диэлектрическая прочность [В/м]
Воздух		1.0	$3 \times 10^6$
Бумага	$10^{10}$	3.7	$1.6 \times 10^7$
Слюда	$5 \times 10^{11}$	5.4	$10^8 \dots 10^9$
Диоксид титана	$10^{12}$	100	$6 \times 10^6$
Полиэтилен	$10^{11}$	2.3	$4 \times 10^7$
Полистирол	$10^{13}$	2.5	$2.5 \times 10^7$
Керамика (тип 1)	$4 \times 10^{11}$	6...500	$4.5 \times 10^7$
Керамика (тип 2)	$10^6 \dots 10^{13}$	500...1 000	$2 \times 10^6 \dots 10^7$

Керамика обладает очень высокой относительной диэлектрической проницаемостью и стремится быть «ферроэлектриком», то есть сохранять полярность, когда электрическое поле удаляют. Для диэлектриков с ферроэлектрическими свойствами заряд на конденсаторе равен

$$Q = (C\mathcal{U}) + (\text{остаточная поляризация}).$$

Эти диэлектрики обычно обладают отрицательным температурным коэффициентом сопротивления. Несмотря на это, во многих случаях наличие высокой диэлектрической проницаемости очень желательно, поэтому керамические диэлектрики находят широкое применение.



## Тепловые эффекты

Так как температура большинства диэлектриков во время работы повышается, сопротивление изоляции быстро падает. Это приводит к росту тока утечки, способствуя дальнейшему нагреванию. В конце концов, когда тепло генерируется быстрее, чем успевает рассеиваться, может возникнуть состояние, называемое *тепловым обвалом* или *тепловым пробоем*. Тогда диэлектрик перестаёт выполнять свои функции и даже может загореться. *Тепловые эффекты* могут очень сильно влиять на выбор и применение изоляционных материалов. К основным факторам, которые стоит принять во внимание, относятся:

- точка плавления (например, для воска в бумажных конденсаторах);
- старение вследствие нагрева;
- максимальная температура, которую материал может выносить без серьёзных потерь нужных свойств;
- температура воспламенения, или возгораемость;
- сопротивляемость возникновению электрических дуг;
- особая теплоёмкость материала;
- удельное тепловое сопротивление;
- коэффициент температурного расширения;
- точка замерзания материала.

## Механические свойства

*Механические свойства* диэлектриков до определённой степени определяют то, насколько подходит твёрдый материал в качестве изолятора: как правило, важны предел прочности на разрыв, предел прочности на изгиб, предел прочности при разделении, предел прочности на сжатие.

Большинство твёрдых изоляторов в той или иной степени неэластичны, а многие довольно хрупки, следовательно, необходимо принимать во внимание такие особенности, как способность к сжатию, деформация под влиянием изгибающего усилия (напряжение изгиба), ударная прочность и растяжимость, прочность на разрыв, обрабатываемость и способность сгибаться без деформации.

## Типы конденсаторов, применяемых на практике

Конденсаторы, применяемые на практике, характеризуются материалом диэлектрика. К основным типам конденсаторов относятся: переменный воздушный, слюдяной, бумажный, керамический, пластиковый, с диоксидом титана и электролитный. Описание каждого из них можно найти в гл. 44.

## Жидкие диэлектрики и газовая изоляция

К жидким диэлектрикам, применяемым для изоляции, относятся рафинированные минеральные масла, силиконовые жидкости и синтетические масла, такие, как хлорированный дифенил. Жидкие диэлектрики в основном применяют в качестве заполняющей и охлаждающей среды для трансформаторов, конденсаторов и реостатов; изолирующей и гасящей дугу среды в распределительных устройствах типа автомата защиты и как пропитывающее вещество абсорбирующей изоляции. Например, в трансформаторах, автоматах защиты, конденсаторах и кабелях для изоляции используют дерево, графит, бумагу или прессованный картон, пропитанные жидким диэлектриком.

Для газовой изоляции применяют два типа газов: азот и гексафторид серы. Азот выступает в качестве изолирующей среды в некоторых герметичных трансформаторах и в кабелях электросети, а гексафторид серы находит всё большее применение в автоматах защиты как в качестве изолятора, так и в качестве гасящей дугу среды.

## Диэлектрические потери и угол потерь

В конденсаторах с твёрдыми диэлектриками потери могут объясняться двумя причинами:

- *диэлектрическим гистерезисом* — явление, которое сопровождается расходом энергии, а в результате инверсии механического напряжения в диэлектрике под воздействием электрического напряжения возникает нагревание. Такие потери — аналог гистерезисных потерь в магнитных материалах;
- *токами утечки*, которые могут течь в объёме диэлектрика и по поверхности между выводами.

Общие потери в диэлектрике можно представить как потери в дополнительном сопротивлении резистора, подключенного между обкладками. При расчётах это можно отобразить либо как небольшое сопротивление резистора, последовательно соединённого с идеальным конденсатором, либо как большое сопротивление резистора, параллельно соединённого с идеальным конденсатором.

### Последовательное соединение

На **Рис. 78.2** показана эквивалентная схема и векторная диаграмма для последовательного соединения резистора с конденсатором, заполненным диэлектриком. Фазовый угол цепи — это угол  $\varphi$ .

Если сопротивление  $R_s$  равно нулю, ток  $I$  опережает напряжение на  $90^\circ$ , что справедливо для идеального конденсатора. Разность между  $90^\circ$  и фазовым углом цепи  $\varphi$  — это угол, пока-

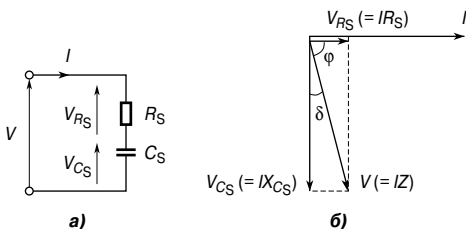


Рис. 78.2

занный как  $\delta$ . Он называется *углом потерь* конденсатора, то есть угол потерь

$$\delta = (90^\circ - \varphi)$$

Для эквивалентной цепи с последовательным сопротивлением

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{V_{R_S}}{V_{C_S}} = \frac{IR_S}{IX_{C_S}} = \frac{R_S}{\frac{1}{\omega C_S}} = R_S \omega C_S.$$

Как было показано в гл. 68,

$$Q = \frac{1}{\omega CR},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg} \delta = R_S \omega C_S = \frac{1}{Q} \quad (1)$$

Коэффициент мощности конденсатора

$$\cos \varphi = \frac{V_{R_S}}{V} = \frac{IR_S}{IZ_S} = \frac{R_S}{Z_S} = \frac{R_S}{X_{C_S}},$$

так как  $X_{C_S} \approx Z_S$ .

Если  $\delta$  мало, то коэффициент мощности  $= \cos \varphi \approx R_S \omega C_S$ , то есть

$$\cos \varphi \approx \operatorname{tg} \delta \quad (2)$$

*Тангенс угла потерь D* определяют как величину, обратную добротности и являющуюся показателем качества диэлектрика, то есть

$$D = \frac{1}{Q} = \operatorname{tg} \delta \quad (3)$$

**Например**, эквивалентная схема для определённого конденсатора, работающего на частоте 8 МГц, содержит резистор с сопротивлением 1.5 Ом, последовательно соединённый с конденсатором ёмкостью 400 пФ.

Из уравнения (1) для эквивалентной схемы с последовательным сопротивлением

$$\operatorname{tg} \delta = R_S \omega C_S = (1.5)(2\pi \times 8 \times 10^6)(400 \times 10^{-12}) = 0.030159,$$

откуда

$$\text{угол потерь } \delta = \arctg(0.030159) = 1.727^\circ, \text{ или } 0.030 \text{ рад.}$$

Из уравнения (2)

$$\text{коэффициент мощности} = \cos \varphi \approx \operatorname{tg} \delta = \mathbf{0.030}.$$

Из уравнения (1)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{Q},$$

откуда

$$Q = \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{1}{0.030159} = \mathbf{33.16}.$$

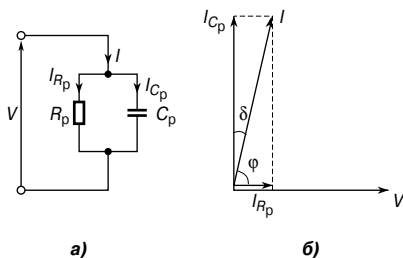
Из уравнения (3) тангенс угла потерь

$$D = \frac{1}{Q} = 0.030159, \text{ или } \mathbf{0.030}$$

с точностью до 3 значащих цифр.

### **Параллельное соединение**

На **Рис. 78.3** показана эквивалентная схема конденсатора и векторная диаграмма для параллельного соединения резистора с конденсатором, заполненным диэлектриком.



**Рис. 78.3**

Из векторной диаграммы на **Рис. 78.3** следует:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_{R_p}}{I_{C_p}} = \frac{V/R_p}{V/X_{C_p}} = \frac{X_{C_p}}{R_p},$$

то есть

$$\boxed{\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{R_p \omega C_p}} \quad (4)$$

Коэффициент мощности конденсатора

$$\cos \varphi = \frac{I_{R_p}}{I} = \frac{V/R_p}{V/Z_p} = \frac{Z_p}{X_p} \approx \frac{X_{C_p}}{R_p},$$

так как  $X_{C_p} \approx Z_p$  при малых  $\delta$ .

Тогда коэффициент мощности  $= \cos \varphi \approx \frac{1}{R_p \omega C_p}$ , то есть

$$\boxed{\cos \varphi \approx \operatorname{tg} \delta}$$

(Для равнозначности между последовательной и параллельной схемами должны выполняться равенства

$$C_S \approx C_p = C$$

и

$$R_S \omega C_S \approx \frac{1}{R_p \omega C_p},$$

откуда

$$R_S \approx \frac{1}{R_p \omega^2 C^2}.)$$

### **Потери мощности**

Потери мощности в диэлектрике  $= VI \cos \varphi$ .

Из векторной диаграммы на **Рис. 78.3** следует:

$$\cos \delta = \frac{I_{C_p}}{I} = \frac{V/X_{C_p}}{I} = \frac{V \omega C}{I},$$

откуда

$$I = \frac{V \omega C}{\cos \delta}.$$

Тогда потери мощности  $= VI \cos \varphi = V \left( \frac{V \omega C}{\cos \delta} \right) \cos \varphi$ .

Однако  $\cos \varphi = \sin \delta$  (как углы, дополняющие до  $90^\circ$ ), поэтому

$$\text{потери мощности} = V \left( \frac{V \omega C}{\cos \delta} \right) \sin \delta = V^2 \omega C \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = V^2 \omega C \operatorname{tg} \delta.$$

Значит,

$$\text{диэлектрические потери мощности} = V^2 \omega C \operatorname{tg} \delta. \quad (5)$$

**Например**, угол потерь конденсатора составляет 0.025 рад, и, когда он соединён непосредственно с источником питания 5 кВ с частотой 50 Гц, потери мощности равны 20 Вт. Найдём параметры элементов параллельной эквивалентной схемы.

Из уравнения (5)

$$\text{потери мощности} = V^2 \omega C \operatorname{tg} \delta,$$

то есть

$$20 = (5\,000)^2 (2\pi 50)(C) \operatorname{tg}(0.025),$$

откуда ёмкость

$$C = \frac{20}{(5\,000)^2 (2\pi 50) \operatorname{tg}(0.025)} = \\ = 0.102 \text{ мкФ}.$$

(Заметим, что  $\operatorname{tg}(0.025)$  означает «тангенс 0.025 радиан».)

Из уравнения (4), для эквивалентной схемы с параллельным резистором, следует:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{R_p \omega C_p},$$

откуда

$$R_p = \frac{1}{\omega C_p \operatorname{tg} \delta} = \frac{1}{(2\pi 50)(0.102 \times 10^{-6}) \operatorname{tg} 0.025},$$

то есть сопротивление эквивалентного резистора

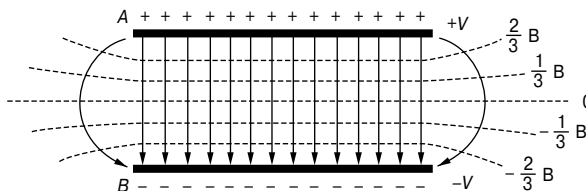
$$R_p = 1.248 \text{ МОм}.$$

## 79. ЭФФЕКТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ

### Введение

Электрические и магнитные поля и поля вокруг проводника с током (то есть области, рядом с которыми протекает электрический ток) демонстрируют схожие характеристики. Следовательно, всех их можно проанализировать с помощью схожих процессов. Далее анализируются процессы, протекающие в электрических полях.

На **Рис. 79.1** показаны две параллельные пластины — А и В.



**Рис. 79.1**

Пусть потенциал на пластине А равен  $+V$  вольт, а потенциал на пластине В равен  $-V$  вольт. Сила, действующая на точечный заряд в 1 кулон, помещённый между пластинами, — это напряжённость электрического поля  $E$ , показанная *силовыми линиями*. Направление силы совпадает с направлением поля, и её величина зависит от разности потенциалов между пластинами и расстояния между ними. На **Рис. 79.1** движение вдоль силовой линии от пластины В к пластине А означает движение от потенциала  $-V$  к потенциалу  $+V$ . Поэтому разность потенциалов между пластинами соответствует 2 вольтам, и потенциал точки нахождения заряда изменяется линейно при его движении от одной пластины к другой. Значит, градиент потенциала следует за изменением пройденного расстояния.

Другие (пунктирные) линии можно изобразить так, чтобы они соединяли вместе все точки внутри поля с одинаковым потенциалом. Эти линии называются *эквипотенциальными линиями*, и на **Рис. 79.1** они изображены для потенциалов  $\frac{2}{3}V$ ,  $\frac{1}{3}V$ ,  $0$ ,  $-\frac{1}{3}V$  и  $-\frac{2}{3}V$ . Нулевая эквипотенциальная линия характеризует потенциал «земли», а потенциалы на пластинах А и В — соответственно выше и ниже потенциала «земли». Эквипотенциали образуют часть *эквипотенциальной поверхности*. Такие поверхности параллельны пластинам, показанным на **Рис. 79.1**, и сами пластины — это тоже эквипотенциальные по-

верхности. Между заданными точками на каждой из поверхностей вообще может не быть тока, так как все точки на эквипотенциальной поверхности имеют один и тот же потенциал. Значит, силовая линия должна пересекать эквипотенциальные поверхности под прямыми углами. *Силовые линии* в электростатическом поле называют также *линиями потока*.

На **Рис. 79.2** показано распределение электрического поля для концентрического цилиндрического конденсатора.

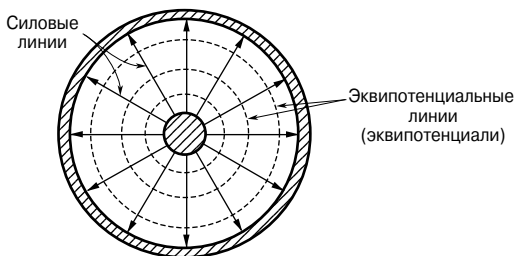


Рис. 79.2

В изолирующей среде между двумя хорошими проводниками устанавливается электрическое поле. Любым падением напряжения в проводниках обычно можно пренебречь, если сравнивать его с разностью потенциалов на изоляции, так как проводники имеют высокую проводимость. Следовательно, все точки на проводниках обладают одинаковым потенциалом, поэтому проводники образуют приграничные эквипотенциальные поверхности для электростатического поля.

Силовые линии, которые должны пересекать все эквипотенциальные поверхности под прямым углом, уходят от одной проводящей границы под прямым углом, проходят через поле и входят через другую границу снова под прямым углом.

В магнитном поле линия магнитного потока — это линия, изображённая так, что её направление везде параллельно направлению магнитного потока. Эквипотенциальная поверхность в магнитном поле — это поверхность, по которой полюс магнита может двигаться без затрат энергии и совершения работы.

В поле вокруг проводника с током линия потока — это линия, изображённая в направлении, которое везде параллельно направлению тока.

## Ёмкость между концентрическими цилиндрами

*Концентрический кабель* — это кабель, содержащий два или более отдельных проводника, установленных концентрически (то есть имеющих общий центр), при этом между ними находится изоляция.



В коаксиальном кабеле центральный проводник, который может быть как полым, так и цельным, окружён внешним трубчатым проводником, а пространство между ними занято диэлектриком. Так как воздух — это газообразный диэлектрик, то для того, чтобы проводники не касались друг друга, используют концентрические изоляционные диски. Их общая основная черта — это полное отсутствие внешнего потока, а значит, полное отсутствие помех из-за влияния других цепей.

Электрическое поле между двумя концентрическими цилиндрами (то есть в коаксиальном кабеле) показано на поперечном сечении кабеля (Рис. 79.3).

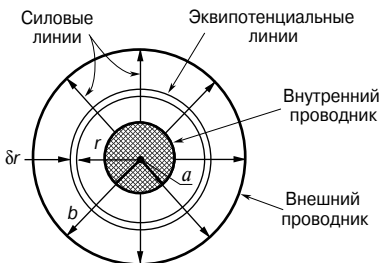


Рис. 79.3

Цилиндрические проводники образуют приграничные эквипотенциальные поверхности для поля. На Рис. 79.3 это концентрические цилиндры радиусом  $a$  и  $b$ . Силовые линии — это радиальные линии, пересекающие эквипотенциальную поверхность под прямым углом.

Ёмкость  $C$  между концентрическими цилиндрами (ёмкость коаксиального кабеля на метр длины) равна

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\frac{b}{a}} \quad (1)$$

где  $a$  — радиус внутреннего проводника,  
 $b$  — радиус внешнего проводника.

**Например,** коаксиальный кабель имеет внутренний проводник радиусом 0.5 мм, внешний проводник радиусом 6 мм и относительную диэлектрическую проницаемость диэлектрика между внутренним и внешним проводником 2.7.

Тогда ёмкость кабеля в соответствии с уравнением (1)

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{2\pi(8.85 \times 10^{-12})(2.7)}{\ln\left(\frac{6.0}{0.5}\right)} = 60.4 \text{ Ф/м.}$$

## Напряжённость электрического поля в диэлектрике

Напряжённость электрического поля  $E$  в диэлектрике

$$E = \frac{V}{r \ln \frac{b}{a}} \quad (2)$$

где  $V$  — потенциал проводника,  
 $r$  — радиус эквипотенциали (см. **Рис. 79.3**),  
 $a$  — радиус внутреннего проводника,  
 $b$  — радиус внешнего проводника.

Максимальная и минимальная напряжённость электрического поля определяются выражениями

$$E_{\max} = \frac{V}{a \ln \frac{b}{a}} \quad (3)$$

и

$$E_{\min} = \frac{V}{b \ln \frac{b}{a}} \quad (4)$$

**Например,** в коаксиальном кабеле диаметр внутреннего проводника — 32 мм, диаметр внешней оплётки — 80 мм. Потенциал проводника равен 40 кВ, а относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика — 3.5. Определим ёмкость кабеля на метр длины, напряжённость электрического поля на расстоянии 30 мм от оси кабеля, а также максимальную и минимальную напряжённость в диэлектрике.

Из уравнения (1) ёмкость на метр (или километр) длины

$$\begin{aligned} C &= \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi(8.85 \times 10^{-12})(3.5)}{\ln \left(\frac{40}{16}\right)} = \\ &= 212.4 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}, \\ &\text{или } 212 \text{ нФ/км}, \text{ или } \mathbf{0.212 \text{ мкФ/км}}. \end{aligned}$$

Из уравнения (2) напряжённость электрического поля в диэлектрике при радиусе 30 мм равна

$$\begin{aligned} E &= \frac{V}{r \ln \frac{b}{a}} = \frac{40 \times 10^3}{(30 \times 10^{-3}) \ln \left(\frac{40}{16}\right)} = \\ &= 1.46 \times 10^6 \text{ В/м или } \mathbf{1.46 \text{ МВ/м}}. \end{aligned}$$

Из уравнения (3) максимальная напряжённость электрического поля в диэлектрике

$$E_{\max} = \frac{V}{a \ln \frac{b}{a}} = \frac{40 \times 10^3}{(16 \times 10^{-3}) \ln \left( \frac{40}{16} \right)} = 2.73 \text{ МВ/м.}$$

Из уравнения (4) минимальная напряжённость электрического поля в диэлектрике

$$E_{\min} = \frac{V}{b \ln \frac{b}{a}} = \frac{40 \times 10^3}{(40 \times 10^{-3}) \ln \left( \frac{40}{16} \right)} = 1.09 \text{ МВ/м.}$$

### Размеры самого экономичного кабеля

При разработке конструкции кабеля очень важно получить самые экономичные размеры. Для большинства экономичных кабелей радиус внутреннего проводника

$$a = \frac{V}{E_{\max}} \quad (5)$$

а радиус внешнего проводника

$$b = ae \quad (6)$$

где  $e = 2.718$  с точностью до 4 значащих цифр.

**Например,** для сети магистральных ЛЭП нужно разработать концентрический кабель с одним сердечником. В качестве диэлектрика используется бумага, максимально допустимая по безопасности, напряжённость электрического поля которой равна 10 МВ/м. Относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика — 3.5. Радиус внутреннего проводника и радиус внешней оплётки для большинства экономичных кабелей можно рассчитать из уравнений (5) и (6).

Радиус внутреннего проводника

$$a = \frac{V}{E_{\max}} = \frac{60 \times 10^3 \text{ В}}{10 \times 10^6 \text{ В/м}} = 6 \times 10^{-3} \text{ м} = 6.0 \text{ мм.}$$

Радиус внешней оплётки

$$b = ae = 6.0e = 16.3 \text{ мм.}$$

## Ёмкость изолированной двухпроводной линии

Ёмкость  $C$  изолированной двухпроводной линии равна

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln \frac{D}{a}} \quad (7)$$

где  $D$  — расстояние между осями двух проводников,  
 $a$  — радиус каждого проводника.

**Например,** два параллельных провода, каждый диаметром 5 мм, равномерно протянуты в воздухе на расстоянии 50 мм друг от друга. Определим ёмкость линии на метр длины ( $\varepsilon_r = 1$  для воздуха).

Из уравнения (7)

$$\begin{aligned} C &= \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln \frac{D}{a}} = \frac{\pi (8.85 \times 10^{-12}) (1)}{\ln \frac{50}{5/2}} = \\ &= \frac{\pi (8.85 \times 10^{-12})}{\ln 20} = 9.28 \times 10^{-12} \text{ Ф/м.} \end{aligned}$$

Тогда ёмкость двухпроводной линии длиной, предположим, 500 м равна

$$\begin{aligned} C &= (9.28 \times 10^{-12} \times 500) = \\ &= 4\,640 \text{ пФ, или } 4.64 \text{ нФ.} \end{aligned}$$

## Энергия, накопленная в электрическом поле

Накопленная в электрическом поле конденсатора *энергия* определяется выражением (см. гл. 44)

$$W_f = \frac{1}{2} C V^2 \quad (8)$$

**Например,** накопленную в конденсаторе 10 нФ энергию, когда он заряжен до 1 кВ, находим из уравнения

$$W_f = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} (10 \times 10^{-9}) (10^3)^2 = 5 \text{ мДж.}$$

Энергия, накопленная на единицу объёма диэлектрика, равна

$$W_f = \frac{1}{2} D E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 = \frac{D^2}{2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (9)$$

**Например,** конденсатор с ёмкостью 400 пФ заряжен до разности потенциалов 100 В. Площадь его поперечного сечения равна  $200 \text{ см}^2$ , а относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего конденсатор, — 2.3.

Накопленная на единицу объёма диэлектрика энергия в соответствии с уравнением (9)

$$W_f = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r}.$$

Плотность электрического потока

$$D = \frac{Q}{A} = \frac{CV}{A} = \frac{(400 \times 10^{-12})(100)}{200 \times 10^{-12}} = 2 \times 10^{-6} \text{ Кл/м}^2.$$

Тогда накопленная энергия

$$\begin{aligned} W_f &= \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{(2 \times 10^{-6})^2}{2(8.85 \times 10^{-12})(2.3)} = \\ &= 0.0983 \text{ Дж/м}^3, \text{ или } 98.3 \text{ мДж/м}^3. \end{aligned}$$

## Скин-эффект

Текущий в однородном проводнике постоянный ток стремится распределяться равномерно по поперечному сечению проводника. Однако при переменном токе, особенно на высокой частоте, ток в проводнике распределяется по доступному для него поперечному сечению не равномерно, а стремится сконцентрироваться на поверхности проводника. Это явление называют *скин-эффектом* (от английского skin — поверхность. — Прим. переводчика). Когда ток течёт через проводник, возникающий в результате магнитный поток имеет форму концентрических окружностей. Некоторые такие потоки существуют внутри проводника и более сильно связаны с током вблизи центра. В результате индуктивность центральной части проводника больше, чем индуктивность проводника вблизи поверхности из-за большего количества индуктивных связей, существующих в области центра. На высоких частотах реактивное сопротивление ( $X_L = 2\pi fL$ ) дополнительной индуктивности достаточно большое для того, чтобы серьёзно повлиять на плотность тока, большая часть которого потечёт скорее по поверхности проводника, где импеданс невелик, а не вблизи центра, где он высок.

## Индуктивность концентрического цилиндра (или коаксиального кабеля)

Индуктивность  $L$  коаксиального кабеля на метр длины равна

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right) \quad (10)$$

где  $a$  — внутренний радиус проводника,

$b$  — внешний радиус проводника.

**Например,** в коаксиальном кабеле радиус внутреннего проводника — 1 мм, а радиус внешней оплётки — 4 мм.

Определим индуктивность кабеля на метр длины, полагая, что относительная магнитная проницаемость равна 1.

В соответствии с уравнением (10)

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu}{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{b}{a} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{4.0}{1.0} \right) = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(1)}{2\pi} (0.25 + \ln 4) = \\ &= 3.27 \times 10^{-7} \text{ Гн/м, или } 0.327 \text{ мкГн/м.} \end{aligned}$$

## Индуктивность изолированной двухпроводной линии

Индуктивность изолированной двухпроводной линии на метр длины равна

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{D}{a} \right) \quad (11)$$

где  $D$  — расстояние между осями двух проводников,

$a$  — радиус каждого проводника.

В большинстве линий, используемых на практике, относительная магнитная проницаемость  $\mu_r$  равна 1.

**Например,** определим индуктивность двухпроводной однофазной линии длиной 1 км с диаметром проводников 10 мм и разнесённых друг от друга в воздухе на 800 мм.

Из уравнения (11) индуктивность на метр длины

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{D}{a} \right) = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(1)}{\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{800}{10/2} \right) = \\ &= 4 \times 10^{-7} (0.25 + \ln 160) = 21.3 \times 10^{-7} \text{ Гн/м.} \end{aligned}$$

Тогда индуктивность линии длиной 1 км

$$\begin{aligned} L &= 21.3 \times 10^{-7} \times 10^3 = \\ &= 21.3 \times 10^{-4} \text{ Гн, или } 21.3 \text{ мГн.} \end{aligned}$$

## Энергия, накопленная в магнитном поле

Энергия магнитного поля на единицу объёма в немагнитной среде равна

$$W_f = \frac{1}{2}HB = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (12)$$

**Например,** протяжённость воздушного зазора в приборе с подвижным магнитом составляет 20 мм, а площадь его поперечного сечения равна 500 мм<sup>2</sup>. Плотность потока равна 50 мТл. Определим общее количество энергии, накопленной в магнитном поле зазора.

В соответствии с уравнением (12)

$$W_f = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(50 \times 10^{-3})^2}{2(4\pi \times 10^{-7})} = 9.95 \times 10^2 \text{ Дж/м}^3.$$

Объём воздушного зазора

$$Al = (500 \times 2.0) \text{ мм}^3 = 1\,000 \times 10^{-9} \text{ м}^3.$$

Тогда накопленная в зазоре энергия

$$\begin{aligned} W_f &= 9.95 \times 10^2 \times 1\,000 \times 10^{-9} = \\ &= \mathbf{9.95 \times 10^{-4} \text{ Дж}}, \text{ или } \mathbf{0.995 \text{ мДж}}, \text{ или } \mathbf{995 \text{ мкДж}}. \end{aligned}$$

Энергия магнитного поля, накопленная в катушке индуктивности (см. гл. 48), вычисляется по формуле

$$W_f = \frac{1}{2}LI^2 \quad (13)$$

**Например,** энергия, накопленная в катушке индуктивности 200 мГн, когда в ней течёт ток, равна

$$\begin{aligned} W_f &= \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(200 \times 10^{-3})(50 \times 10^{-3})^2 = \\ &= \mathbf{2.5 \times 10^{-4} \text{ Дж}}, \text{ или } \mathbf{0.25 \text{ мДж}}, \text{ или } \mathbf{250 \text{ мкДж}}. \end{aligned}$$

## 80. АТТЕНЮАТОРЫ

### Введение

*Аттенюатор* — это прибор для внесения специальных потерь между источником сигнала и согласованной нагрузкой, не приводящий к нарушению взаимосвязи импеданса, необходимого для их согласования. Внесённые потери должны быть постоянны независимо от частоты. Так как реактивные элементы ( $L$  или  $C$ ) изменяются с частотой, то идеальные делители мощности — это цепи, содержащие «чистые» сопротивления. Фиксированный сегмент аттенюатора называют «пустышкой» («pad»).

*Затухание* (ослабление) сигнала — это уменьшение напряжения или тока вследствие его прохождения по линии или через аттенюатор. Достичь можно любого уровня затухания, если подобрать резисторы с нужным сопротивлением, но входной и выходной импедансы аттенюатора должны быть такими, чтобы составляющие импеданса, существующие в цепи, куда его подключили, не были бы искажены. Поэтому наряду с необходимым затуханием аттенюатор должен обеспечивать «правильные» входной и выходной импедансы.

### Четырёхполюсники

Схема, в которой электроэнергия подаётся на одну пару выводов, а выводится с другой пары выводов, называют *четырёхполюсник*. Следовательно, аттенюатор — это четырёхполюсник, так же как и линия электропередачи, трансформаторы и электронные усилители. Если схема состоит только из пассивных элементов, как это бывает в аттенюаторах, говорят, что такая схема *пассивная*; если схема содержит источник ЭДС, как это бывает в электронном усилителе, то говорят, что схема *активная*.

На **Рис. 80.1а** показан  $T$ -аттенюатор. Он называется *симметричным*, если  $Z_A = Z_B$ . На **Рис. 80.1б** показан  $\pi$ -аттенюатор, который является симметричным, если  $Z_E = Z_F$ .

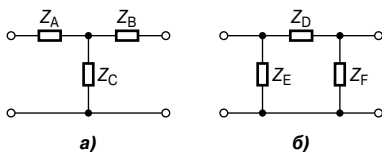


Рис. 80.1

Если  $Z_A \neq Z_B$  на **Рис. 80.1а**, а  $Z_E \neq Z_F$  на **Рис. 80.1б**, то аттенюаторы называются *асимметричными*. Обе показанные схемы



имеют один общий вывод, который может быть заземлён. Про такой аттенуатор говорят, что он несбалансирован.

Сбалансированные  $T$ - и  $\pi$ -образные аттенуаторы показаны соответственно на **Рис. 80.2а** и на **Рис. 80.2б**.

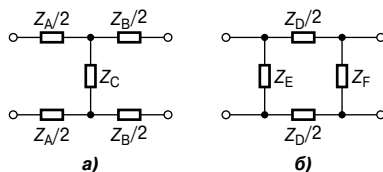


Рис. 80.2

## Характеристический импеданс

*Входной импеданс* цепи — это отношение напряжения к току (в комплексной форме) на входе. В случае четырёхполюсника входной импеданс часто изменяется в зависимости от импеданса нагрузки на выходе. Для любого пассивного четырёхполюсника всегда можно найти определённое значение импеданса нагрузки, при котором входной импеданс будет иметь значение, равное импедансу нагрузки. Такой импеданс асимметричного четырёхполюсника называют *повторным*, и его значение зависит от того, какую пару выводов задействовали в качестве входа, а какую в качестве выхода (следовательно, существует два значения повторного импеданса, по одному для каждого направления).

В случае симметричного четырёхполюсника у повторного импеданса существует только одно значение, и такой импеданс называется *характеристическим*.

## Логарифм отношения двух мощностей

Отношение двух мощностей ( $P_1$  и  $P_2$ ) можно выразить в логарифмической форме, как это показано в гл. 50. Пусть  $P_1$  — это мощность на входе системы, а  $P_2$  — на выходе.

Если использовать десятичные логарифмы, тогда

$$\begin{aligned} \text{отношение мощностей в децибелах} = \\ = 10 \lg \frac{P_2}{P_1} = 20 \lg \frac{V_2}{V_1} = 20 \lg \frac{I_2}{I_1} \end{aligned} \quad (1)$$

**Например,** предположим, что 5% подаваемой к кабелю мощности появляется на выходе. Определим затухание (в децибелах).

Из уравнения (1) следует

$$\begin{aligned}\text{отношение мощностей в децибелах} &= 10 \lg \frac{P_2}{P_1} = 10 \lg \frac{5}{100} = \\ &= 10 \lg 0.05 = -13 \text{ дБ.}\end{aligned}$$

Значит, затухание (то есть потери мощности) равно 13 дБ.

**Другой пример.** Коэффициент усиления усилителя равен 15 дБ, а входная мощность — 12 мВт. Определим выходную мощность.

Из уравнения (1) следует:

$$15 = 10 \lg \left( \frac{P_2}{12} \right),$$

или

$$1.5 = \lg \left( \frac{P_2}{12} \right),$$

где  $P_2$  — выходная мощность в милливаттах.

По определению логарифмов имеем

$$\left( \frac{P_2}{12} \right) = 10^{1.5},$$

откуда выходная мощность

$$P_2 = 12(10)^{1.5} = 379.5 \text{ мВт.}$$

Если применить логарифмы с основанием  $e$  (то есть использовать натуральные, или неперовы логарифмы), то

$$\left. \begin{array}{l} \text{отношение мощностей} \\ \text{в неперах} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_2}{P_1} = \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{I_2}{I_1} \quad (2)$$

Следовательно, если отношение мощностей

$$\frac{P_2}{P_1} = 5, \text{ то}$$

$$\text{отношение мощностей в неперах} = \frac{1}{2} \ln 5 = 0.805.$$

Затухание сигнала в фильтрах и в линиях связи происходит по экспоненте, и именно в таких случаях удобно применять единицу измерения *непер* (см. гл. 81 и 83).

## Симметричный $T$ -образный аттенюатор

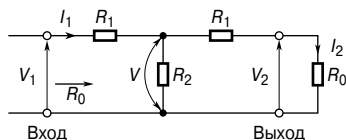
Для показанного на **Рис. 80.3** симметричного  $T$ -образного аттенюатора характеристический импеданс определяется соотношением

$$R_0 = \sqrt{R_1^2 + 2 R_1 R_2} \quad (3)$$

или

$$R_0 = \sqrt{R_{OC} R_{SC}} \quad (4)$$

где  $R_{OC}$  — сопротивление на входе при разомкнутом выходе,  
 $R_{SC}$  — сопротивление на входе при короткозамкнутом выходе



**Рис. 80.3**

Например, если на **Рис. 80.3**  $R_1 = 20$  Ом и  $R_2 = 15$  Ом, то характеристический импеданс  $R_0$  равен

$$R_0 = \sqrt{R_1^2 + 2 R_1 R_2} = \sqrt{20^2 + 2(20)(15)} = 31.62 \text{ Ом.}$$

Тот же результат получим, используя формулу (4).

При разомкнутом выходе сопротивление на входе

$$R_{OC} = 20 + 15 = 35 \text{ Ом,}$$

а при короткозамкнутом выходе сопротивление на входе

$$R_{SC} = 20 + \frac{(20)(15)}{20 + 15} = 28.57 \text{ Ом,}$$

откуда

$$R_0 = \sqrt{R_{OC} R_{SC}} = \sqrt{(35)(28.57)} = 31.62 \text{ Ом.}$$

### Расчёт симметричного $T$ -образного аттенюатора

Если для симметричного  $T$ -аттенюатора (**Рис. 80.3**) известны характеристический импеданс  $R_0$  и отношение  $N \left( = \frac{V_1}{V_2} \right)$ , то

$$R_1 = R_0 \left( \frac{N-1}{N+1} \right) \quad \text{и} \quad R_2 = R_0 \left( \frac{2N}{N^2-1} \right) \quad (5)$$

**Например,** рассчитаем сопротивления резисторов симметричного фиксированного  $T$ -образного аттенюатора, обеспечивающего затухание напряжения 20 дБ и имеющего характеристический импеданс 600 Ом.

В соответствии с уравнением (1) отношение напряжений в децибелах  $= 20 \lg \frac{V_1}{V_2}$ .

Так как  $N = \frac{V_1}{V_2}$ , то  $20 = 20 \lg N$ ,

откуда

$$N = 10.$$

Подставив в уравнение (5) значения  $N$  и характеристического импеданса  $R_0 = 600$  Ом, получим

$$R_1 = R_0 \left( \frac{N-1}{N+1} \right) = (600) \left( \frac{10-1}{10+1} \right) = 491 \text{ Ом}$$

и

$$R_2 = R_0 \left( \frac{2N}{N^2-1} \right) = (600) \left( \frac{2(10)}{10^2-1} \right) = 121 \text{ Ом}.$$

[Проверка. Подставив в уравнение (3) вместо  $R_0$  и  $R_1$  их значения, получим значение характеристического сопротивления:

$$R_0 = \sqrt{R_1^2 + 2R_1R_2} = \sqrt{491^2 + 2(491)(121)} = 600 \text{ Ом}].$$

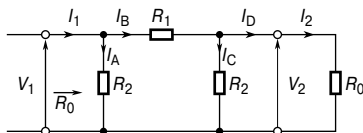
## Симметричный $\pi$ -образный аттенюатор

Для показанного на **Рис. 80.4** симметричного  $\pi$ -аттенюатора характеристический импеданс  $R_0$  определяется соотношением

$$R_0 = \sqrt{\left( \frac{R_1 R_2^2}{R_1 + 2R_2} \right)} \quad (6)$$

или

$$R_0 = \sqrt{R_{OC} R_{SC}} \quad (7)$$



**Рис. 80.4**

**Например,** если на **Рис. 80.4**  $R_1 = 20$  Ом и  $R_2 = 15$  Ом, то в соответствии с уравнением (6) характеристический импеданс  $R_0$  равен

$$\bullet \quad R_0 = \sqrt{\left(\frac{R_1 R_2^2}{R_1 + 2R_2}\right)} = \sqrt{\frac{(20)(15)^2}{10 + 2(15)}} = 9.49 \text{ Ом.}$$

Тот же результат получим, используя формулу (7).

• При разомкнутом выходе сопротивление на входе

$$R_{OC} = \frac{(15)(20 + 15)}{15 + (20 + 15)} = 10.5 \text{ Ом,}$$

а при короткозамкнутом выходе сопротивление на входе

$$R_{SC} = \frac{(15)(20)}{15 + 20} = 8.57 \text{ Ом.}$$

Тогда, подставив в уравнение (7) значения  $R_{OC}$  и  $R_{SC}$ , получим

$$R_0 = \sqrt{R_{OC} R_{SC}} = \sqrt{(10.5)(8.57)} = 9.49 \text{ Ом.}$$

#### **Расчёт симметричного $\pi$ -образного аттенюатора**

Если для симметричного  $\pi$ -образного аттенюатора (**Рис. 80.4**) известны характеристический импеданс  $R_0$  и отношение  $N \left( = \frac{V_1}{V_2} \right)$ , то

$$\boxed{R_1 = R_0 \left( \frac{N^2 - 1}{2N} \right)} \quad \text{и} \quad \boxed{R_2 = R_0 \left( \frac{N + 1}{N - 1} \right)} \quad (8)$$

**Например,** чтобы получить симметричный  $\pi$ -образный аттенюатор с ослаблением напряжения 25 дБ, определим значение сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  (характеристический импеданс — 600 Ом).

В соответствии с уравнением (1) имеем

$$25 = 20 \lg \frac{V_1}{V_2} = 20 \lg N,$$

откуда

$$\lg N = \frac{25}{20} = 1.25.$$

По определению логарифмов

$$N = 10^{1.25} = 17.78.$$

Тогда, подставив в уравнение (8) значения  $N$  и характеристического импеданса, получим

$$R_1 = R_0 \left( \frac{N^2 - 1}{2N} \right) = (600) \left( \frac{17.78^2 - 1}{2(17.78)} \right) = 5.317 \text{ кОм},$$

$$R_2 = R_0 \left( \frac{N + 1}{N - 1} \right) = (600) \left( \frac{17.78 + 1}{17.78 - 1} \right) = 671.5 \text{ Ом}.$$

[Проверка. Подставив в уравнение (6) значения  $R_1$  и  $R_2$ , получим значение характеристического сопротивления]

$$R_0 = \sqrt{\left( \frac{R_1 R_2^2}{R_1 + 2R_2} \right)} = \sqrt{\frac{(5317)(671.5)^2}{5317 + 2(671.5)}} = 600 \text{ Ом.}]$$

### Вносимые потери

На **Рис. 80.5а** показан генератор  $E$ , соединённый непосредственно с нагрузкой  $Z_L$ . Обозначим ток в цепи как  $I_L$ , а разность потенциалов на нагрузке —  $V_L$ . Внутренний импеданс источника обозначим как  $z$ .

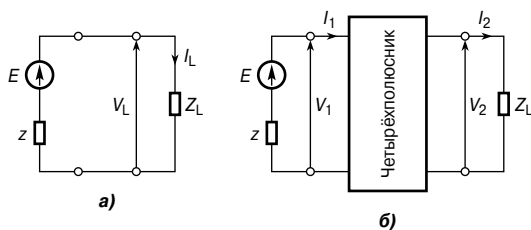


Рис. 80.5

На **Рис. 80.5б** показан четырёхполюсник, подсоединённый к генератору  $E$  и нагрузке  $Z_L$ . Ток через нагрузку, обозначенный как  $I_2$ , и разность потенциалов на нагрузке, обозначенная как  $V_2$ , как правило, меньше, чем ток  $I_L$  и напряжение  $V_L$  на **Рис. 80.5а** из-за того, что между генератором и нагрузкой подключили четырёхполюсник.

Коэффициент вносимых потерь  $A_L$  определяют соотношением

$$A_L = \frac{\text{напряжение на нагрузке, непосредственно соединённой с генератором}}{\text{напряжение на нагрузке при подсоединении четырёхполюсника}}.$$

Так как  $V_L = I_L Z_L$  и  $V_2 = I_2 Z_L$ , то можно записать

$$A_L = \frac{V_L}{V_2} = \frac{I_L}{I_2} \quad (9)$$

Так как и  $V_L$ , и  $V_2$  определяются разностью потенциалов на одном и том же импедансе  $Z_L$ , то коэффициент вносимых потерь в децибелах

$$\begin{aligned} \text{коэффициент потерь вставки} = \\ = 20 \lg\left(\frac{V_L}{V_2}\right) \text{дБ, или } 20 \lg\left(\frac{I_L}{I_2}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

Когда схема замкнута на характеристический импеданс  $Z_0$ , говорят, что схема согласована. В таких условиях входной импеданс также равен  $Z_0$ , и, следовательно, вносимые потери — это просто отношение входного и выходного напряжения (то есть  $\frac{V_1}{V_2}$ ). Следовательно, для схемы, замкнутой на характеристический импеданс,

$$\text{вносимые потери} = 20 \lg\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \text{дБ, или } 20 \lg\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$$

**Например,** реостат 0...3 кОм непосредственно соединён с выходом генератора сигнала, внутреннее сопротивление которого равно 500 Ом. Присоединив нагрузку 2 кОм к средней точке реостата, определим вносимые потери на ответвлении, предположим, 2 кОм. Принципиальная схема дана на **Рис. 80.6**.

Без реостата в цепи (**Рис. 80.7**) напряжение  $V_L$  на нагрузке 2 кОм равно

$$V_L = \left( \frac{2000}{2000 + 500} \right) E = 0.8 E.$$

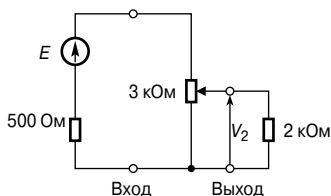


Рис. 80.6

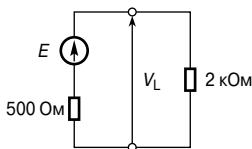


Рис. 80.7

При ответвлении 2 кОм схему на **Рис. 80.7** можно перестроить так, как показано на **Рис. 80.8**, которая в свою очередь упрощается так, как показано на **Рис. 80.9**, откуда найдём  $V_2$ .

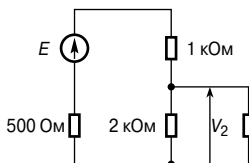


Рис. 80.8

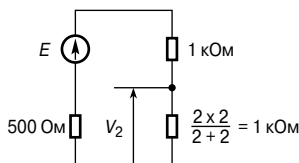


Рис. 80.9

$$V_2 = \left( \frac{1\,000}{1\,000 + 1\,000 + 500} \right) E = 0.4 E.$$

Теперь, в соответствии с уравнением (9), коэффициент вносимых потерь

$$A_L = \frac{V_L}{V_2} = \frac{0.8E}{0.4E} = 2,$$

или, в соответствии с уравнением (10), коэффициент вносимых потерь в децибелах

$$A_L = 20 \lg \left( \frac{V_L}{V_2} \right) = 20 \lg 2 = 6.02 \text{ дБ}.$$

### Асимметричные T- и $\pi$ -образные аттенюаторы

На **Рис. 80.10а** показан *асимметричный T-образный аттенюатор*, у которого сопротивление  $R_{11} \neq R_3$ . На **Рис. 80.10б** показан асимметричный  $\pi$ -образный аттенюатор, у которого  $R_2 \neq R_3$ .

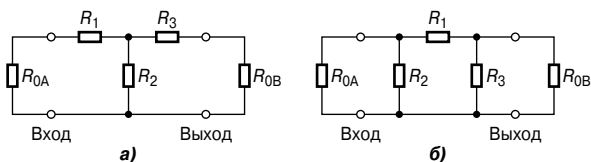


Рис. 80.10

Если смотреть со стороны входа, то в каждом из аттенюаторов выходной импеданс равен  $R_{0B}$ ; если смотреть со стороны выхода, то входной импеданс равен  $R_{0A}$ . Так как аттенюаторы несимметричны, то  $R_{0A}$  имеет отличное от  $R_{0B}$  значение.

Если выход аттенюатора нагружен на импеданс  $Z$ , и при этом значение импеданса «видимого» со стороны входа окажется таким же как у импеданса  $Z$ , то такой импеданс называют *повторным*.



Например, импеданс, видимый со стороны входа (Рис. 80.11а) равен, предположим, 500 Ом когда выход аттенюатора нагружен на резистор 500 Ом. Импеданс, «видимый» со стороны выхода (Рис. 80.11б) равен, предположим, 600 Ом, когда вход замкнут на 600 Ом. (В симметричных  $T$ - и  $\pi$ -образных аттенюаторах оба повторных импеданса равны, причём их значения равно их характеристическому импедансу).

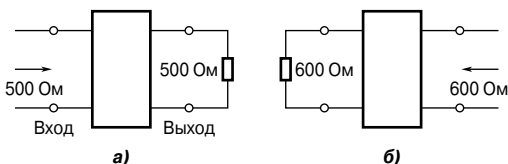


Рис. 80.11

Импедансы  $R_{0A}$  и  $R_{0B}$  называют *зеркальными*, если входной импеданс четырехполюсника с подключенным к его выходу импедансом  $R_{0B}$  равен  $R_{0A}$ , а выходной импеданс четырехполюсника с подключенным к его входу импедансом  $R_{0A}$  равен  $R_{0B}$ . Например, случай, когда  $R_{0A} = 400$  Ом, а  $R_{0B} = 750$  Ом, изображен на Рис. 80.12.

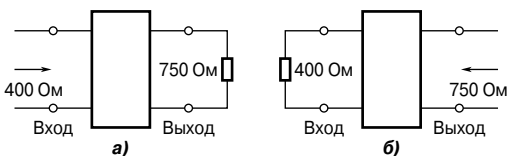


Рис. 80.12

Считается, что несимметричная схема нагружена правильно, когда она нагружена на зеркальный импеданс. (Если зеркальные импедансы равновелики, то их значения равны характеристическому импедансу).

Например, несимметричный  $T$ -образный аттенюатор показан на Рис. 80.13.

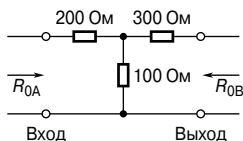


Рис. 80.13

Определим зеркальные импедансы «видимые со стороны входа и выхода».

Зеркальный импеданс  $R_{0A}$ , «видимый» со стороны входа на **Рис. 80.13**, вычисляется из уравнения (4)

$$R_{0A} = \sqrt{R_{OC}R_{SC}}$$

где  $R_{OC}$  и  $R_{SC}$  — сопротивления, «видимые» со стороны выхода соответственно при разомкнутом и замкнутом входе.

$$R_{OC} = 200 + 100 = 300 \text{ Ом},$$

$$R_{SC} = 200 + \frac{(100)(300)}{100 + 300} = 275 \text{ Ом}.$$

Тогда

$$R_{0A} = \sqrt{(300)(275)} = \mathbf{287.2 \text{ Ом}}.$$

Аналогично находим зеркальный импеданс  $R_{0B}$ , «видимый» со стороны входа

$$R_{0B} = \sqrt{R_{OC}R_{SC}}$$

где  $R_{OC}$  и  $R_{SC}$  — сопротивления, «видимые» со стороны входа соответственно при разомкнутом и замкнутом выходе.

$$R_{OC} = 300 + 100 = 400 \text{ Ом},$$

$$R_{SC} = 300 + \frac{(200)(100)}{200 + 100} = 366.7 \text{ Ом}$$

Тогда

$$R_{0B} = \sqrt{(400)(366.7)} = \mathbf{383 \text{ Ом}}.$$

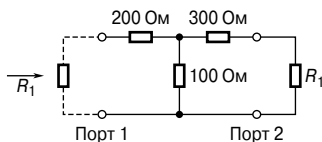
Таким образом, зеркальные сопротивления будут 287.2 Ом и 383 Ом.

[Проверка:

$$R_{0A} = 200 + \frac{(100)(300 + 383)}{100 + 300 + 383} = 287.2 \text{ Ом}$$

$$R_{0B} = 300 + \frac{(100)(200 + 287.2)}{100 + 200 + 287.2} = 383 \text{ Ом.}]$$

Повторное сопротивление, «видимое» со стороны входа, показано на **Рис. 80.14** как  $R_1$ .



**Рис. 80.14**

Рассчитаем  $R_1$ :

$$R_1 = 200 + \frac{(100)(300 + R_1)}{100 + 300 + R_1} = 200 + \frac{30\,000 + 100R_1}{400 + R_1} =$$

$$= \frac{80\,000 + 200R_1 + 30\,000 + 100R_1}{400 + R_1},$$

откуда,

$$400R_1 + R_1^2 = 80\,000 + 200R_1 + 30\,000 + 100R_1$$

и

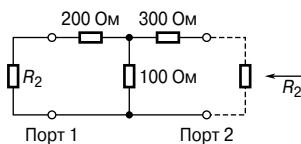
$$R_1^2 + 100R_1 - 110\,000 = 0.$$

Решая квадратное уравнение и пренебрегая отрицательным значением, получаем

$$R_1 = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 - (4)(1)(-110\,000)}}{2}$$

$$= \frac{-100 \pm 670.8}{2} = \mathbf{285.4 \text{ Ом}}$$

Зеркальное сопротивление, «видимое» со стороны выхода, показано на **Рис. 80.15** как  $R_2$ .



**Рис. 80.15**

Рассчитаем  $R_2$ :

$$R_2 = 300 + \frac{(100)(200 + R_2)}{100 + 200 + R_2} =$$

$$= 300 + \frac{20\,000 + 100R_2}{300 + R_2},$$

откуда

$$300R_2 + R_2^2 = 90\,000 + 300R_2 + 20\,000 + 100R_2$$

и

$$R_2^2 - 100R_2 - 110\,000 = 0.$$

Решая квадратное уравнение и пренебрегая отрицательным значением, получаем

$$R_2 = \frac{100 \pm \sqrt{(-100)^2 - (4)(1)(-110000)}}{2} =$$

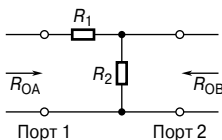
$$= \frac{100 \pm 670.8}{2} = 385.4 \text{ Ом.}$$

Таким образом, зеркальные сопротивления аттенюатора, показанного на **Рис. 80.13** равны 285.4 Ом и 385.4 Ом.

### Г-образный аттенюатор

Для *с* Г-образного аттенюатора, который показан на **Рис. 80.16**, справедливы уравнения

$$R_1 = \sqrt{R_{0A}(R_{0A} - R_{0B})} \quad \text{и} \quad R_2 = \sqrt{\left(\frac{R_{0A}R_{0B}^2}{R_{0A} - R_{0B}}\right)} \quad (11)$$



**Рис. 80.16**

**Например,** если генератор, внутреннее сопротивление которого 400 Ом, соединён с нагрузкой 100 Ом через Г-образный аттенюатор, как это показано на **Рис. 80.16**, тогда из уравнений (11) имеем

$$R_1 = \sqrt{R_{0A}(R_{0A} - R_{0B})} = \sqrt{400(400 - 100)} = 346.4 \text{ Ом}$$

и

$$R_2 = \sqrt{\left(\frac{R_{0A}R_{0B}^2}{R_{0A} - R_{0B}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{400(100)^2}{400 - 100}\right)} = 115.5 \text{ Ом.}$$

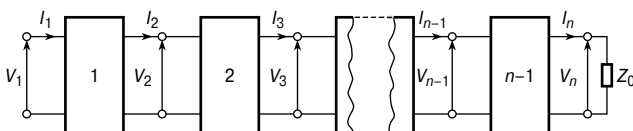
### Каскадное соединение четырёхполюсников

Зачастую четырёхполюсники соединяют каскадами, то есть выход первой схемы (звена) становится входом второй и так далее, как это видно на **Рис. 80.17**. Следовательно, аттенюатор может состоять из нескольких каскадных звеньев с тем, чтобы достичь желаемых рабочих характеристик всей системы.

Если каскад организован так, что импеданс звена на входе, и импеданс, на который нагружен выход имеют одно значение, то каждое звено (полагают, что они симметричны) будет иметь одинаковый характеристический импеданс  $Z_0$ , и последнее звено замкнётся на  $Z_0$ .

Это значит, что каждое звено будет иметь согласующуюся нагрузку, и, следовательно, затухание сегмента 1 на **Рис. 80.17** в децибелах равняется

$$a_1 = 20 \lg \frac{V_1}{V_2}.$$



**Рис. 80.17**

Аналогично затухание на звене 2 будет

$$a_2 = 20 \lg \frac{V_2}{V_3}$$

и так далее.

Общее затухание по правилам сложения логарифмов определяется выражением

$$\begin{aligned} a &= 20 \lg \frac{V_1}{V_n} = 20 \lg \left( \frac{V_1}{V_2} \times \frac{V_2}{V_3} \times \frac{V_3}{V_4} \times \dots \times \frac{V_{n-1}}{V_n} \right) = \\ &= 20 \lg \frac{V_1}{V_2} + 20 \lg \frac{V_2}{V_3} + \dots + 20 \lg \frac{V_{n-1}}{V_n}, \end{aligned}$$

то есть

$$\boxed{\text{общее ослабление } a = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} \quad (12)$$

Следовательно, общее затухание — это сумма затуханий (в децибелах) согласующихся сегментов.

**Например,** пять одинаковых сегментов аттенюатора соединены в каскад. Общее затухание равно 70 дБ, а напряжение на входе первозвена равно 20 мВ.

Из уравнения (12) следует, что общее затухание равно сумме затуханий отдельно взятых сегментов, а так как в данном случае звенья одинаковы, то

$$\text{затухание каждого сегмента} = \frac{70}{5} = 14 \text{ дБ.}$$

Если  $V_1$  — входное напряжение в первом звене, а  $V_O$  — выходное напряжение последнего звена, то

$$\text{общее затухание} = 20 \lg \left( \frac{V_1}{V_O} \right),$$

то есть

$$70 = 20 \lg \left( \frac{20}{V_O} \right),$$

где  $V_O$  измеряется в милливольтгах,  
или

$$3.5 = \lg \left( \frac{20}{V_O} \right).$$

По определению логарифмов имеем

$$10^{3.5} = \frac{20}{V_O}.$$

откуда находим выходное напряжение последнего звена:

$$\begin{aligned} V_O &= \frac{20}{10^{3.5}} = 6.32 \times 10^{-3} \text{ мВ} = \\ &= \mathbf{6.32 \text{ мкВ}}. \end{aligned}$$

## 81. ФИЛЬТРЫ

### Введение

*Фильтр* — это схема, выполненная так, чтобы пропускать сигналы с частотами определённой полосы (называемой *полосой пропускания*) с незначительным затуханием, но большим ослаблением сигналов других полос (называемыми *полосами заграждения*).

Фильтр состоит из элементов с реактивными сопротивлениями и поэтому чувствителен к частоте. Так как определённые частоты надо пропускать с минимальными потерями, в идеале катушки индуктивности и конденсаторы должны быть «чистыми» компонентами, поскольку присутствие активного сопротивления приводит к некоторому затуханию сигнала на всех частотах.

Между полосой пропускания фильтра, где в идеале затухание равно нулю, и полосой заграждения, где в идеале затухание бесконечно, находится *частота среза* (пороговая частота), при которой затухание меняется от нуля до некоторого конечного значения.

Фильтрующая схема, не имеющая никаких источников энергии, называется *пассивной*, а схема, содержащая один или более источник энергии, называется *активной* фильтрующей.

Фильтры применяют почти во всех устройствах электросвязи и системах управления. Ширина полосы частот фильтров, применяемых в системах электросвязи, варьируется от долей герца до мегагерц в зависимости от назначения.

Различают четыре основных типа фильтрующих сегментов:

- фильтры нижних частот;
- фильтры верхних частот;
- фильтры полосовые;
- фильтры заграждающие.

### Фильтры нижних частот

На **Рис. 81.1** показаны простые несбалансированные сегменты фильтров с *T*-образной и *π*-образной схемами с последовательно соединёнными катушками индуктивности и шунтирующими элементами (в данном случае — конденсаторами).

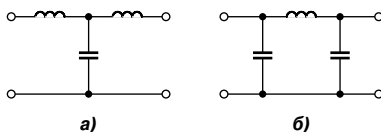
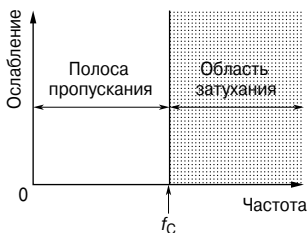


Рис. 81.1

Если любой сегмент подсоединить к сети с постоянно возрастающей частотой, то каждый сегмент будет иметь частотную характеристику затухания, как это показано на **Рис. 81.2**.

Это идеальная характеристика, что предполагает чисто реактивные элементы.



**Рис. 81.2**

Видно, что сигналы на всех частотах, от нуля до определённой частоты  $f_c$  (частота среза), проходят без затухания, а сигналы на частотах выше  $f_c$  затухают. Именно по этой причине схемы, показанные на **Рис. 81.1а** и **Рис. 81.1б**, называют *фильтрами нижних частот*.

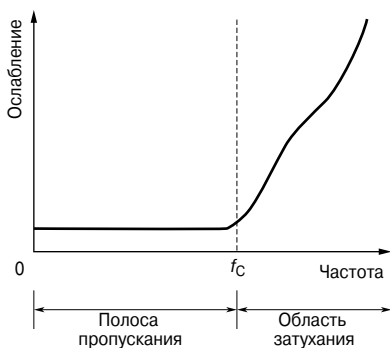


**Рис. 81.3**

На принципиальных схемах такие фильтры обозначают символом, показанным на **Рис. 81.3**.

Суммируя вышеизложенное, можно сказать, что фильтр нижних частот — это фильтр для пропускания сигналов на частотах ниже заданной частоты среза.

На практике характеристическая кривая низкочастотного фильтра выглядит примерно так, как показано на **Рис. 81.4**.



**Рис. 81.4**

Характеристику можно приблизить к идеальной, если соединить два или более одинаковых сегмента в каскад. Это приведёт



к гораздо более резкой характеристике среза, хотя затухание в полосе пропускания уменьшится ненамного.

Когда в качестве источников питания постоянного тока электронных систем используют выпрямители, нежелательный шум вносит значительная пульсация, которая даже может «поглотить» напряжение сигнала.

В этих случаях фильтры, пропускающие сигналы низких частот, добавляют для того, чтобы сгладить колебания выходного напряжения, и это одно из наиболее распространённых назначений этих фильтров в электрических цепях.

Фильтры необходимы для разделения различных сегментов замкнутой системы, а следовательно, для предотвращения нежелательного взаимовлияния. Например, добавление развязывающего низкочастотного фильтра между каждой ступенью усилителя и общим источником питания сокращает их взаимовлияние, возникающее из-за импеданса общего источника питания.

## Фильтры верхних частот

На Рис. 81.5 показаны простые  $T$ -образный и  $\pi$ -образный фильтры с последовательно соединёнными конденсаторами и шунтирующими элементами (в данном случае — катушками индуктивности).

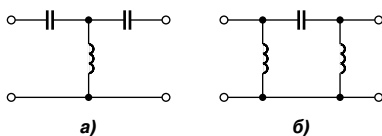


Рис. 81.5

Если любой из этих сегментов подсоединить к рабочей схеме с постоянно возрастающей частотой, то каждый из них будет иметь частотную характеристику затухания, как это показано на Рис. 81.6.

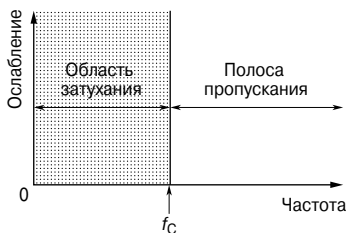


Рис. 81.6

И вновь, как и в случае с фильтрами нижних частот, это — идеальная характеристика, предполагающая чисто реактивные элементы. Видно, что все сигналы с частотой ниже частоты среза  $f_C$  ослабляются, а все сигналы с частотой выше  $f_C$  передаются без потерь. Именно по этой причине схемы, показанные на **Рис. 81.5а** и **Рис. 81.5б** называют *фильтрами верхних частот*.

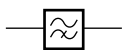


Рис. 81.7

Символ, которым обозначают такие фильтры на принципиальных схемах, показан на **Рис. 81.7**.

Суммируя изложенное выше, можно сказать, что фильтр верхних частот — это фильтр для прохождения сигналов на частотах выше заданной частоты среза.

Характеристика, показанная на **Рис. 81.6**, идеальна в том смысле, что, как предполагается, в полосе пропускания вообще нет никакого затухания, а в полосе задержания затухание бесконечно. На практике оба этих условия недостижимы. Из-за наличия сопротивления (в основном в индуктивных элементах) затухание в полосе пропускания не будет равно нулю, а затухание в полосе задержания в реальном фильтре не будет бесконечным. К потерям на сопротивлении зачастую добавляются дополнительные потери из-за частичного рассогласования.

В идеале, когда в схему добавляют фильтр, он должен быть согласован с её импедансом. Однако характеристический импеданс фильтра меняется с частотой, и фильтр может быть нагружен на импеданс, который меняется с частотой иначе. Чтобы снизить потери из-за сопротивления и рассогласования, фильтры, по возможности, применяют в условиях зеркального импеданса (см. гл. 80).

На **Рис. 81.6** показана характеристика затухания идеального фильтра верхних частот в зависимости от частоты. На практике характеристическая кривая фильтра верхних частот скорее выглядит примерно так, как на **Рис. 81.8**.

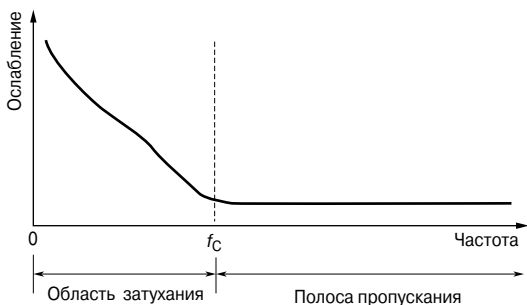
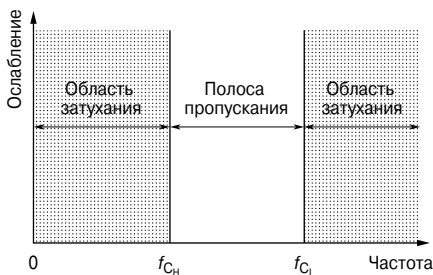


Рис. 81.8

## Полосовые фильтры

*Полосовой фильтр* — это фильтр, пропускающий сигналы в диапазоне между двумя заданными частотами среза. На **Рис. 81.9** показаны характеристические кривые идеального полосового фильтра.



**Рис. 81.9**

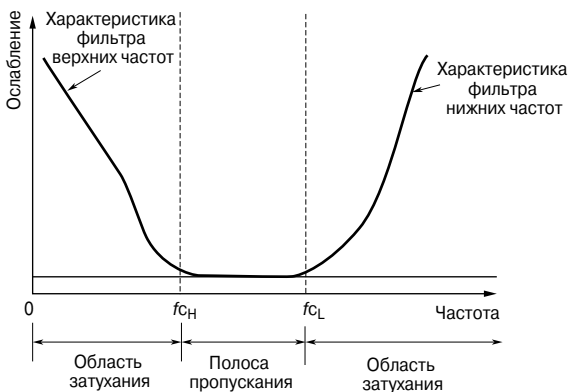
Такой фильтр может быть образован с помощью каскада фильтров верхних и нижних частот. Здесь  $f_{CH}$  — это частота среза фильтра верхних частот, а  $f_{CL}$  — частота среза фильтра нижних частот. Как видно, для полосового фильтра  $f_{CL} > f_{CH}$ , при этом полоса пропускания — это разность этих значений.

На принципиальной схеме полосовой фильтр обозначают символом, показанным на **Рис. 81.10**.



**Рис. 81.10**

Типичная характеристика полосового фильтра показана на **Рис. 81.11**.

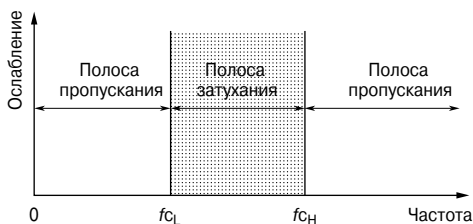


**Рис. 81.11**

Полосовые фильтры широко применяются в кварцевых и керамических резонаторах. Они также часто встречаются в усилителях промежуточной частоты в диапазоне СВЧ, где для правильной работы необходимо поддерживать точно заданную полосу частот.

## Заграждающие фильтры

*Заграждающий фильтр* — это фильтр, пропускающий сигналы на всех частотах, кроме тех, что находятся в интервале между двумя заданными частотами среза. На **Рис. 81.12** показана характеристика идеального заграждающего фильтра.



**Рис. 81.12**

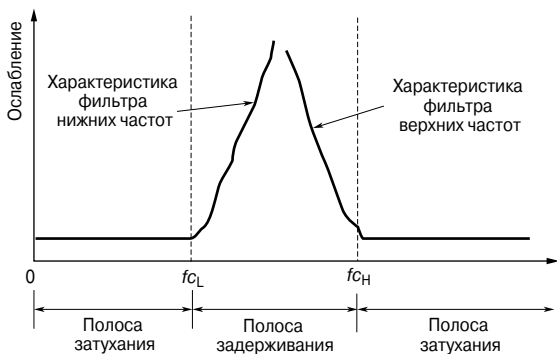
Такой фильтр можно создать с помощью параллельного подключения фильтров верхних и нижних частот. Как видно, для заграждающего фильтра  $f_{CH} > f_{CL}$ , при этом полоса пропускания — это разность этих значений.



**Рис. 81.13**

На принципиальной схеме заграждающий фильтр обозначают символом, показанным на **Рис. 81.13**.

На **Рис. 81.14** показана типичная характеристика такого фильтра.



**Рис. 81.14**

Иногда, как в случае помех от сетевого электропитания 50 Гц в аудиосистемах, точная частота случайных помех известна. Как правило, такие помехи идут от нечётных гармоник промышленной частоты 50 Гц, например от 50 Гц. Для минимизации шумового эффекта используется точно настроенный заграждающий фильтр, рассчитанный на то, чтобы ослабить шум на частоте 250 Гц. Фильтр верхних частот с частотой среза больше 250 Гц также удалил бы помехи, но с ними были бы потеряны и некоторые низкочастотные составляющие аудиосигнала.

## 82. МОДУЛЯЦИЯ

### Введение

Для передачи на расстояние информации, такой, как речь, музыка и данные, необходим несущий канал. Обычной практикой считается «перенос» различных сообщений, называемых *сигналами*, на разных частотах, чтобы один сигнал не создавал помехи другому. Сигнал можно сместить полностью с его первоначальной полосы на другую полосу, что достигается «наложением» одного колебания на другое.

Средний уровень частоты, на который смещается сигнал, называют *несущей частотой*, а процесс наложения информационного сигнала на несущую (канал связи) — *модуляцией*. Полученный в результате сигнал называют *модулированным*. С помощью модулирующих методик многие сигналы, такие, как телефонные разговоры, можно передавать одновременно по одной проводной паре линий. Модуляция полосы низких частот на высокочастотную несущую является ключевым моментом в радиосвязи. Использование различных несущих частот позволяет одновременно передавать много программ. Несущая частота — это частота, на которую должен быть настроен приёмник; например, для первого канала радио Би-Би-Си это — 97.6...99.8 МГц. Звуковой сигнал получают из модулированной несущей благодаря процессу, называемому *демодуляцией*.

### Амплитудная модуляция

Несущая частота должна иметь одну или более характеристики (то есть амплитуду, частоту и/или фазу), которая изменяется под воздействием информационного сигнала. Если он меняет амплитуду несущей, этот процесс называется *амплитудной модуляцией*. Для иллюстрации амплитудной модуляции рассмотрим сигнал в виде синусоидального колебания с частотой  $f_m$ , как показано на **Рис. 82.1а**, и несущую в виде синусоидального колебания с частотой  $f_c$ , как показано на **Рис. 82.1б**.

Результат амплитудной модуляции показан на **Рис. 82.1в**, причём информационный сигнал дублируется на обеих сторонах несущей; это показано пунктирными линиями, являющимися линиями построения, иллюстрирующими то, как изменяется амплитуда модулируемого колебания. В результате получается полоса частот в диапазоне от  $(f_c - f_m)$  до  $(f_c + f_m)$ , то есть несущая частота  $\pm$  полоса частоты сигнала. Диапазон частот между самой высокой и самой низкой из этих частот называют *полосой пропускания*.

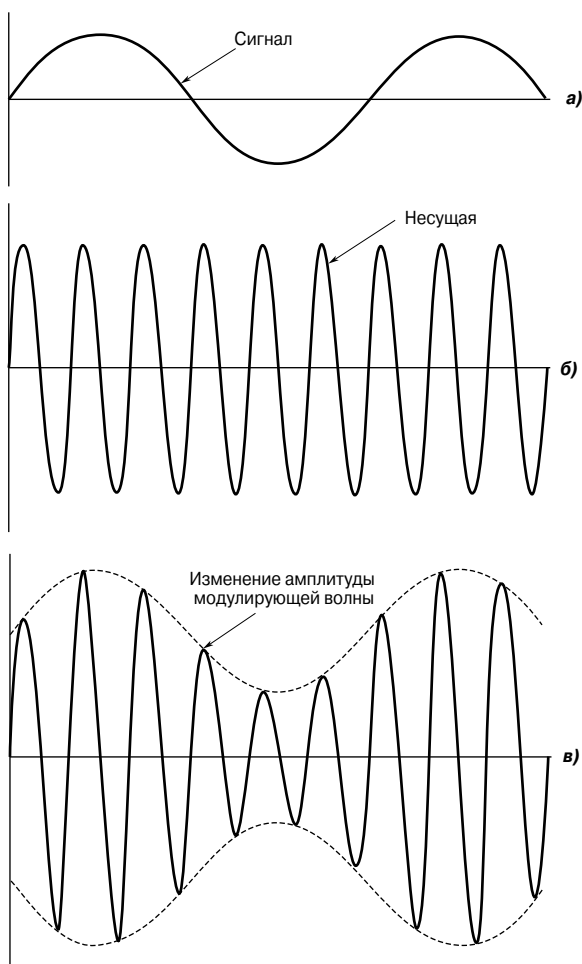


Рис. 82.1

## Частотная модуляция

Вместо изменения амплитуды несущей модулирующий сигнал можно использовать для изменения её частоты.

В этом случае увеличение амплитуды сигнала вызывает изменение частоты несущей, пропорциональное амплитуде модулирующего сигнала. Этот процесс называется *частотной модуляцией*, и на **Рис. 82.2** он показан для сигнала, изменяющегося по косинусоиду.

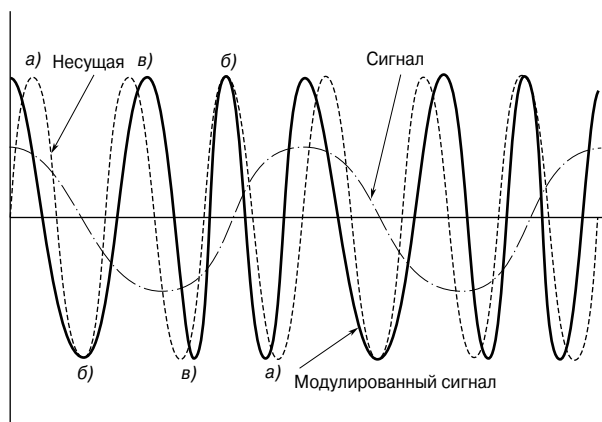


Рис. 82.2

Когда амплитуда сигнала положительна, частота несущей модулируется так, чтобы быть меньше, чем она была изначально; на рисунке это положение **а)**. Немодулированное положение несущей показано пунктиром для ориентира.

Модулируемая волна находится в том же положении, что и изначальная несущая, когда амплитуда сигнала равна нулю, как это видно на рисунке (положение **б)**).

Когда амплитуда сигнала отрицательна, частота несущей становится больше, чем частота начальной несущей, как это видно на рисунке (положение **в)**).

### **Девияция частоты, диапазон изменения частоты и модулирующий индекс**

*Девияция частоты* — это термин, используемый при частотной модуляции. Девию определяют как наибольшее отклонение частоты частотно-модулированного сигнала от несущей частоты во время одного цикла модуляции.

*Диапазон изменения частоты* — это разность максимального и минимального значений мгновенной частоты частотно модулируемого сигнала.

*Модулирующий индекс* для синусоидальной модулирующей волны — это отношение девии частоты к частоте модулирующего сигнала. Следовательно, модулирующий индекс — это отношение девии частоты, вызванной определённым сигналом, к частоте этого сигнала.



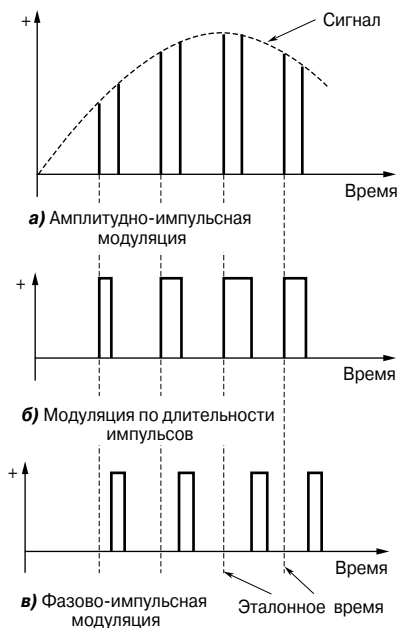
## Фазовая модуляция

Модулирующий сигнал можно использовать для ускорения или замедления фазы несущей пропорционально амплитуде этого сигнала. Этот метод, называемый *фазовой модуляцией*, включает также изменение частоты. В данном случае модуляция зависит от скорости изменения фазы, а следовательно, как от амплитуды, так и от частоты модулирующего сигнала. Этот процесс похож на колебания, показанные на **Рис. 82.2**.

## Импульсная модуляция

При *импульсной модуляции* выбор сигнала производится на частоте, которая как минимум в 2 раза больше частоты, присутствующей в сигнале. Например, для речи, частота которой колеблется в диапазоне от 300 Гц до 3.4 кГц, типичная частота выборки — 8 кГц. На практике используют различные формы импульсной модуляции, к которым относятся амплитудно-импульсная, фазово-импульсная модуляция и модуляции по длительности импульсов.

Принцип импульсной модуляции показан на **Рис. 82.3а**, где амплитуда импульса пропорциональна амплитуде сигнала.



**Рис. 82.3**

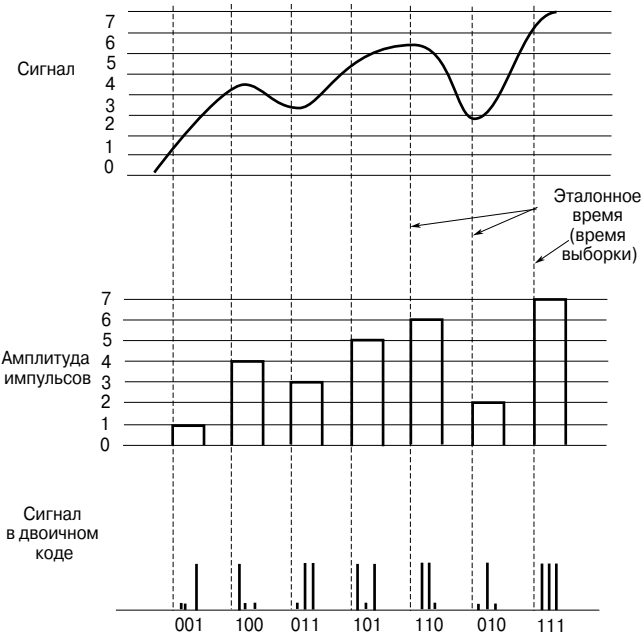
Амплитуда импульса может изменяться во время периода «включён» или оставаться постоянной, что приводит к ступенчатому колебанию, как это видно на **Рис. 82.3а**.

На **Рис. 82.3б** показан принцип *модуляции по длительности импульса*, при этом длительность импульса пропорциональна амплитуде сигнала.

При *фазово-импульсной модуляции* положение импульса относительно некоторого значения (например, эталонного времени выборки) пропорционально амплитуде сигнала, как это видно на **Рис. 82.3в**.

**Импульсно-кодовая модуляция**

В *импульсно-кодовой модуляции* амплитуда сигнала делится на некоторое число равных приращений, причём каждое приращение обозначается числом. Например, амплитуда, делённая на 8 приращений, может иметь мгновенное значение амплитуды, передаваемое с использованием двоичной системы счисления с тремя битами, и уровень передаётся как: 000, 001, 011,..., 111. Этот принцип показан на **Рис. 82.4**.



**Рис. 82.4**

Следовательно, при импульсно-кодовой модуляции аналоговый сигнал преобразуется в цифровой. Так как аналоговый сигнал в определённых пределах может иметь любое значение, а результирующий цифровой сигнал имеет только дискретные значения, в результате получается некоторое искажение сигнала. Поэтому, чем больше число приращений, тем ближе цифровой сигнал к исходному аналоговому.

## 83. ДВУПРОВОДНЫЕ ЛИНИИ СВЯЗИ (ДЛИННЫЕ ЛИНИИ)

### Введение

*Двупроводная линия связи*, называемая также *длинной линией*, — это система проводников, соединяющих одну точку с другой, по которой можно передавать электромагнитную энергию. Следовательно, телефонные линии и линии электропередачи — это типичные примеры линий связи. В электронике, однако, этот термин, как правило, подразумевает линии для передачи энергии радиоизлучения (ВЧ-энергии), например от радиопередатчика к антенне.

Важная особенность линий связи состоит в том, что она должна передать энергию от источника на передающем конце к нагрузке на принимающем конце без потерь с помощью излучения. Зачастую один из типов построения линий — это два похожих проводника, близко смонтированных на неизменном друг от друга расстоянии. Два проводника образуют две стороны сбалансированной цепи, и любое излучение от одного из них нейтрализуется излучением от другого. Такие двупроводные линии применяют для переноса мощного радиоизлучения, например, в передатчиках. Для маломощного излучения широко применяется коаксиальная форма построения линий, при этом один проводник имеет форму цилиндра, окружающего другой проводник в его центре, а значит, действующего как экран. Такие кабели часто используют для соединения телевизионного и FM-приёмников и антенн.

На частотах выше 1 000 МГц линии связи обычно создают в форме волновода, которые можно считать коаксиальными линиями без центрального проводника, при этом энергия запускается в волновод или извлекается оттуда штырями или рамками, встроенными в этот волновод.

### Первичные параметры линий связи

Пусть генератор переменного тока соединён с парой параллельных проводников бесконечной длины. Синусоидальная волна движется вдоль линии, и по ней течёт ток конечной величины. Изменение напряжения вдоль линии по форме напоминает изменение напряжения во времени. Движущуюся волну, в данном случае синусоидальную, называют «путешествующей». По мере того как волна движется по линии, ёмкость линии заряжается и движущиеся заряды накапливают магнитную энергию. Значит, продвижение такой *электромагнитной волны* порождает поток энергии.

Спустя определённое время измерить величину волны можно в любой точке линии. Следовательно, линия, подключаемая

к генератору как разомкнутая цепь, реально, однако, является нагрузкой с определённым значением  $Z_0$ . Если напряжение передающего конца равно  $V_S$ , а ток на передающем конце равен  $I_S$ ,

то  $Z_0 = \frac{V_S}{I_S}$ . Следовательно, линия поглощает всю энергию и

ведёт себя схожим с генератором образом, то есть так же, как вёл бы себя единичный сосредоточенный компонент с импедансом  $Z_0$ , непосредственно подсоединённый к выводам генератора.

Существует четыре параметра, связанных с линиями передач: сопротивление, индуктивность, ёмкость и проводимость.

- *Сопротивление  $R$*  определяется из уравнения

$$R = \rho l / A,$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление материала проводника,  
 $A$  — площадь поперечного сечения каждого проводника,  
 $l$  — длина проводника (для двухпроводной системы  $l$  — это длина двойной линии).

Сопротивление устанавливается в омах на метр длины линии [Ом/м] и характеризует несовершенство проводника. Сопротивление, установленное в омах на метр линии, более специфично, так как оно учитывает тот факт, что на определённой протяжённости линии существуют два проводника.

- *Индуктивность  $L$*  возникает из-за магнитного поля вокруг проводника линии связи, которое образуется во время протекания по ним тока. Индуктивность изолированной двухпроводной линии (как показано в гл. 79, уравнение (11)) определяется соотношением

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{D}{a} \right) \text{ Гн/м},$$

где  $D$  — расстояние между центрами проводников,  
 $a$  — радиус каждого проводника.

На практике в большинстве линий  $\mu_r = 1$ . Индуктивность, установленная в генри на метр рамки, учитывает тот факт, что на определённой протяжённости линии существуют два проводника.

- *Ёмкость  $C$*  существует в результате наличия электрического поля между проводниками линии связи. Ёмкость изолированной двухпроводной линии (как показано в гл. 79, уравнение (7)) определяется соотношением

$$C = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln \frac{D}{a}} \text{ Ф/м}.$$

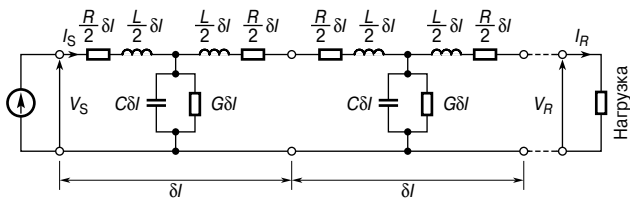
На практике в большинстве линий  $\epsilon_r = 1$ .

- *Проводимость  $G$*  определяется качеством изоляции линии, позволяющей некоторому количеству тока течь из одного проводника в другой. Проводимость измеряется в сименсах на метр длины линии и характеризует несовершенство изоляции. Часто проводимость называют *утечкой*.

Каждая из четырёх постоянных линии связи —  $R$ ,  $L$ ,  $C$  и  $G$ , называемых *первичными параметрами линии*, равномерно распределены по линии.

В гл. 80 показано, что, когда симметричный  $T$ -сегмент замыкается на свой характеристический импеданс  $Z_0$ , входной импеданс схемы также равен  $Z_0$ . Схожим образом, если некоторое число одинаковых  $T$ -сегментов соединены в каскады, входной импеданс схемы также будет равен  $Z_0$ .

Линию связи можно рассматривать как цепь, состоящую из очень большого числа  $T$ -сегментов, каждый очень маленькой длины ( $\delta l$ ), как это показано на **Рис. 83.1**. Эта аппроксимация линии с равномерным распределением; чем больше число сегментов со сосредоточенными параметрами, тем ближе приближение к линии истинного распределения.



**Рис. 83.1**

Когда подсоединён генератор  $V_S$ , течёт ток  $I_S$ , который разделяется на ток утечки, определяемый проводимостью  $G$ , и ток, который постепенно заряжает каждый конденсатор  $C$ , что устанавливает колебание распространяющегося напряжения, движущееся вдоль линии связи. Потери и затухания в линии вызваны как проводимостью  $G$ , так и последовательным сопротивлением  $R$ .

### **Задержка по фазе, длина волны и скорость распространения**

Каждый сегмент, показанный на **Рис. 83.1**, — просто фильтр низких частот, отражающий потери  $R$  и  $G$ . Если потерями пренебречь, то  $R$  и  $G$  отсутствуют, схема упрощается, а бесконечная линия уменьшается до повторяющегося фильтра низких частот с  $T$ -сегментом, как это показано на **Рис. 83.2**.

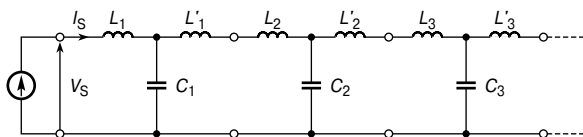


Рис. 83.2

Пусть генератор соединён, как показано, с линией, и пусть напряжение вырастает до максимального положительного значения в момент подключения линии. Ток  $I_S$  течёт через катушку индуктивности  $L_1$  в конденсатор  $C_1$ . Конденсатор заряжается, и на нём нарастает напряжение. Оно «посылает» ток через индуктивность  $L'_1$  и  $L_2$  в конденсатор  $C_2$ . Конденсатор заряжается, и напряжение, нарастающее на нём, «посылает» ток через  $L'_2$  и  $L_3$  в  $C_3$  и т. д. Следовательно, все конденсаторы последовательно заряжаются до максимального входного напряжения. Когда напряжение, поступающее от генератора, снижается, каждый конденсатор в свою очередь разряжается в обратную сторону, и, как и до этого, входной заряд постепенно переходит в следующий конденсатор. Таким образом, напряжение и ток распространяются по линии, находясь в зависимости друг от друга.

Описанный выше процесс требует времени; например, к моменту, когда напряжение на конденсаторе  $C_3$  достигает максимального значения, входной сигнал от генератора может быть равным нулю или двигаться в сторону минимального значения. Следовательно, между входным напряжением генератора и напряжением в любой точке линии существует различие по времени и фазе.

### Задержка по фазе

Так как линия, показанная на **Рис. 83.2**, — это многозвенная ступенчатая схема фильтров низких частот с  $T$ -сегментом, то *задержку по фазе*  $\beta$  можно показать как

$$\boxed{\beta = \omega \sqrt{LC}} \quad (1)$$

где  $L$  и  $C$  — индуктивность и ёмкость на метр линии соответственно.

### Длина волны

Длина волны  $\lambda$  на линии — это расстояние между заданной точкой и следующей точкой на линии, где напряжение находится в той же фазе, причём первоначальная точка опережает последующую на  $2\pi$  радиан. Так как в одном колебании возникает

фазовый сдвиг на  $2\pi$ , то сдвиг фазы на метр составляет  $\frac{2\pi}{\lambda}$ ,  
то есть

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda},$$

откуда длина волны

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta}} \quad (2)$$

### **Скорость распространения**

Скорость распространения  $u$  определяется из формулы

$$u = f\lambda,$$

где  $f$  — частота,  
 $\lambda$  — длина волны.

Тогда

$$\boxed{u = f\lambda = f\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{\omega}{\beta}} \quad (3)$$

Скорость распространения электромагнитной волны в свободном пространстве равна скорости света, то есть приблизительно  $300 \times 10^6$  м/с. Скорость передачи электроэнергии по линии всегда меньше скорости электромагнитной волны в свободном пространстве. Длина волны излучения в свободном пространстве  $\lambda$  равняется  $\lambda = \frac{c}{f}$ , где  $c$  — скорость света. Так как

скорость распространения сигнала по линии всегда меньше  $c$ , длина волны, согласующаяся с любой определённой частотой в линии, всегда короче, чем в свободном пространстве.

**Например**, линия связи имеет индуктивность 4 мГн/км и ёмкость 0.003 мкФ/км. При работе на частоте 1 кГц из уравнения (1) следует, что задержка по фазе равна

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = (2\pi 1000) \sqrt{(4 \times 10^{-3})(0.004 \times 10^{-6})} = \mathbf{0.025 \text{ рад/км}};$$

из уравнения (2) следует, что длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.025} = \mathbf{251 \text{ км}};$$

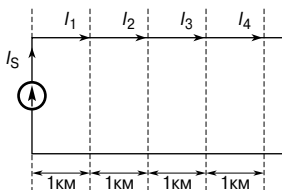
из уравнения (3) следует, что скорость распространения сигнала

$$u = f\lambda = (1\,000)(251) \text{ км/с} = \mathbf{251 \times 10^6 \text{ м/с}}.$$



## Вторичные параметры линий связи

На **Рис. 83.3** показан источник напряжения  $V_S$ , подключённый к началу бесконечной линии или линии, замкнутой на характеристический импеданс, так, что в линии течёт ток  $I_S$ .



**Рис. 83.3**

Пусть в точке, находящейся, скажем, в 1 км далее по линии, ток равен  $I_1$ . Этот ток будет иметь отличное от  $I_S$  значение из-за затухания в линии; к тому же  $I_1$  будет отставать от  $I_S$  на угол  $\beta$ .

Следовательно, отношение  $\frac{I_S}{I_1}$  — это векторная величина. Пусть

ток в точке, отнесённой ещё на километр по линии, равен  $I_2$  и т. д., что и показано на **Рис. 83.3**. Каждая единица длины линии может рассматриваться как сегмент повторяющейся цепи, и затухание идёт в виде логарифмической зависимости

$$\frac{I_S}{I_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_3} = e^\gamma,$$

где  $\gamma$  — постоянная распространения волны в линии (величина, не имеющая единицы измерения).

*Постоянная распространения* волны — это комплексная величина вида

$$\gamma = \alpha + j\beta,$$

где  $\alpha$  — *постоянная затухания*, измеряемая в неперах,

$\beta$  — *постоянная фазового сдвига*, измеряемая в радианах.

Для  $n$  сегментов длиной 1 км

$$\frac{I_S}{I_R} = e^{n\gamma},$$

где  $I_R$  — ток на принимающем конце.

Значит,

$$\frac{I_S}{I_R} = e^{n(\alpha + j\beta)} = e^{(n\alpha + jn\beta)} = e^{n\alpha} \angle n\beta,$$

откуда

$$I_R = I_S e^{-n\gamma} = I_S e^{-n\alpha} \angle -n\beta \quad (4)$$

В уравнении (4) затухание на линии равно  $n\alpha$  неперов, а сдвиг по фазе —  $n\beta$  радиан.

Во всех точках бесконечной линии отношение напряжения к току равно  $Z_0$  — характеристическому импедансу. Следовательно, из уравнения (4) получаем, что напряжение на принимающем конце

$$V_R = V_S e^{-n\gamma} = V_S e^{-n\alpha} \angle -n\beta \quad (5)$$

$Z_0$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  называют *вторичными параметрами линии* или просто *параметрами*.

**Например**, линия связи длиной 5 км имеет характеристический импеданс, равный  $800 \angle -25^\circ$  Ом. При определённой частоте коэффициент затухания линии равен 0.5 Нп/км, а коэффициент фазового сдвига — 0.25 рад/км. Если действующее напряжение на посылающем конце равно  $2.0 \angle 0^\circ$  В, то напряжение на принимающем конце (из уравнения (5))

$$\begin{aligned} V_R &= V_S e^{-n\gamma} = I_S e^{-n\alpha} \angle -n\beta = (2.0 \angle 0^\circ) e^{-(5)(0.5)} \angle -(5)(0.25) = \\ &= (2.0 e^{-2.5} \angle -1.25 = \mathbf{0.1642 \angle -71.62^\circ \text{ В.}} \end{aligned}$$

Ток на принимающем конце

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{V_R}{Z_0} = \frac{0.1642 \angle -71.62^\circ}{800 \angle -25^\circ} = 2.05 \times 10^{-4} \angle (-71.62^\circ - (-25^\circ)) = \\ &= \mathbf{0.205 \angle -46.62^\circ \text{ мА.}} \end{aligned}$$

### Связь характеристического импеданса и коэффициента распространения волны с первичными параметрами линии

Во всех точках на бесконечно длинной линии связи отношение напряжения к току называется *характеристическим импедансом*  $Z_0$ . Значение  $Z_0$  не зависит от длины линии; оно описывает свойства линии, зависящие от её физических особенностей. Так как линию небольшой длины можно рассматривать как набор из одинаковых сегментов низкочастотных фильтров, характеристический импеданс можно вычислить так, как это делается в гл. 80, то есть

$$Z_0 = \sqrt{Z_{OC} Z_{SC}} \quad (6)$$

причём импеданс разомкнутой цепи  $Z_{OC}$  и импеданс короткозамкнутой цепи  $Z_{SC}$  можно легко измерить.

Характеристический импеданс линии связи можно также выразить через первичные параметры линии связи —  $R$ ,  $L$ ,  $G$  и  $C$ . Эти параметры могут быть получены для определённого типа линии, и производители, как правило, указывают их для стандартной длины.

Можно показать, что характеристический импеданс  $Z_0$  равен

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (7)$$

и если пренебречь потерями  $R$  и  $G$ , то

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8)$$

коэффициент распространения  $\gamma$  равен

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (9)$$

и для линии без потерь, то есть при  $R = G = 0$

$$\gamma = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = j\omega \sqrt{LC} \quad (10)$$

**Например**, на частоте 1 кГц первичные параметры линии связи: сопротивление  $R = 25$  Ом/км, индуктивность  $L = 5$  мГн/км, ёмкость  $C = 0.04$  мкФ/км и проводимость  $G = 80$  мкСм/км. Определим  $Z_0$  и  $\gamma$ .

В соответствии с уравнением (7) характеристический импеданс

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \text{ Ом.}$$

$$\begin{aligned} R + j\omega L &= 25 + j(2\pi 1\,000)(5 \times 10^{-3}) = (25 + j31.42) = \\ &= 40.15 \angle 51.49^\circ \text{ Ом;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G + j\omega C &= 80 \times 10^{-6} + j(2\pi 1\,000)(0.04 \times 10^{-6}) = \\ &= (80 + j251.33)10^{-6} = \\ &= 263.76 \times 10^{-6} \angle 72.34^\circ \text{ См.} \end{aligned}$$

Следовательно, характеристический импеданс

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{40.15 \angle 51.49^\circ}{263.76 \times 10^{-6} \angle 72.34^\circ}} = \\ &= 390.2 \angle -10.43^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Из уравнения (10) находим коэффициент распространения

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)} = \\ &= \sqrt{(40.15 \angle 51.49^\circ)(263.76 \times 10^{-6} \angle 72.34^\circ)} = \\ &= \sqrt{0.01059 \angle 123.83^\circ} = \mathbf{0.1029 \angle 61.92^\circ}.\end{aligned}$$

## Искажения в линиях связи

Если колебание на принимающем конце линии связи отличается по форме от колебаний на отправляющем конце, говорят, что имеет место *искажение сигнала*.

При разработке линии связи если

$$LG = CR,$$

то никакие искажения не привносятся. Это означает, что сигнал на принимающем конце такой же, как и на отправляющем, только меньше по амплитуде и имеет задержку на заданном интервале времени. При отсутствии искажения затухание в линии минимально.

На практике, однако,  $\frac{R}{L} \gg \frac{G}{C}$ . Индуктивность, как правило,

низкая, а ёмкость большая, и её трудно уменьшить. Следовательно, если на практике требуется, чтобы условие  $LG = CR$  выполнялось, то надо увеличивать либо  $L$ , либо  $G$ , так как ни  $C$ , ни  $R$  практически изменить нельзя. Нежелательно увеличивать  $G$ , так как увеличиваются затухание и потери мощности. Следовательно, одна величина, допускающая увеличение, — это индуктивность  $L$ , и такой искусственный рост индуктивности в линии называется *добавкой индуктивности*. Это достигается либо добавлением катушек индуктивности через некоторые интервалы вдоль линии связи — процедура, получившая название «*лупинизация*» (lumped loading), либо обмоткой проводников металлической лентой с высокой магнитной проницаемостью — эта процедура называется «*крупинизацией*» (continuous loading).

**Например**, подземный кабель имеет следующие первичные параметры: сопротивление  $R = 10$  Ом/км, индуктивность  $L = 1.5$  мГн/км, проводимость  $G = 1.2$  мкСм/км и ёмкость  $C = 0.06$  мкФ/км.

Определим, на какую величину должна быть увеличена индуктивность, чтобы искажения сигнала были минимальны.

Условие минимального искажения  $LG = CR$ , откуда индуктивность

$$L = \frac{CR}{G} = \frac{(0.06 \times 10^{-6})(10)}{(1.2 \times 10^{-6})} = 0.5 \text{ Гн, или } 500 \text{ мГн.}$$

Следовательно, для минимального искажения индуктивность должна быть увеличена на  $(500 - 1.5)$  мГн, то есть на **498.5 мГн/км**.

## Отражение волны и коэффициент отражения

В предыдущих разделах этой главы предполагалось, что линия связи замкнута на свой характеристический импеданс или является бесконечной. На практике все линии конечно же имеют конечную длину и зачастую замыкающий импеданс имеет величину, отличную от характеристического импеданса линии.

В этом случае говорят, что линия связи имеет «несогласованную нагрузку».

Волну, распространяющуюся вперёд от источника к нагрузке, называют *падающей (прямой) волной* или волной начала линии. При несогласованной нагрузке замыкание поглощает только часть энергии прямой волны, а остаток «вынужден» вернуться вдоль линии к источнику. Эту часть волны называют *отражённой волной*.

Линия связи передаёт электроэнергию; когда такая энергия приходит на замыкание, величина которого отлична от величины характеристического импеданса, она испытывает на себе резкое изменение импеданса среды. Когда это происходит, имеет место некоторое отражение энергии прямой волны, и отражённая энергия теперь потеряна для принимающей нагрузки. Как правило, в природе отражения возникают, когда возникает изменение среды передачи; например, звуковые волны отражаются от стены, отчего может возникать эхо (см. гл. 17), а зеркало отражает световые лучи (см. гл. 19).

Если линия связи замкнута на свой характеристический импеданс, то никакого отражения не происходит; если она замкнута на разомкнутую или короткозамкнутую цепи, то происходит полное отражение, то есть вся прямая волна движется обратно к источнику. Между этими крайними положениями возможны любые варианты отражения.

### *Энергия, связанная с распространяющейся волной*

Можно считать, что движущаяся по линии волна состоит из электрических и магнитных составляющих. Энергия накапливается в магнитном поле благодаря току (энергия =  $\frac{1}{2}LI^2$ ), а в

электрическом — благодаря напряжению (энергия =  $\frac{1}{2}CV^2$ ).

Происходит постоянный обмен энергией между магнитным и электрическим полями, и наоборот. Такой обмен вызывает передачу общей электромагнитной энергии по линии связи.

Когда волна достигает окончание линии в виде разомкнутой цепи, магнитное поле «разрушается», так как ток  $I$  равен нулю. Энергия не может исчезнуть, но она может изменить форму. В данном случае она преобразуется в электрическую энергию добавлением к уже существующему электрическому полю. Соответственно напряжение на конце линии удваивается, и это

выросшее напряжение инициирует движение по линии в виде отражённой волны. Это движение восстановит магнитное поле, и вся энергия отражённой волны снова разделится между составляющими её магнитным и электрическим полем.

Когда волна встречает в конце линии замыкание в виде короткозамкнутой цепи, разрушается электрическое поле, и его энергия переходит в магнитную энергию, что приводит к удвоению тока.

### Коэффициент отражения

Отношение отражённого тока к прямому называется *коэффициентом отражения* и обычно обозначается символом  $\rho$ , то есть

$$\rho = \frac{I_r}{I_i}, \text{ или } \rho = \frac{Z_0 - Z_R}{Z_0 + Z_R}, \text{ или } \rho = -\frac{V_r}{V_i} \quad (11)$$

где  $I_i$  — прямой ток, или ток начала линии,

$V_i$  — прямое напряжение, или напряжение начала линии,

$I_r$  — отражённый ток,

$V_r$  — отражённое напряжение,

$Z_0$  — характеристический импеданс,

$Z_R$  — импеданс замыкания.

Когда  $Z_R = Z_0$ , то  $\rho = 0$ , и отражения не происходит.

**Например**, кабель, характеристический импеданс которого равен 75 Ом, замкнут на нагрузку 250 Ом. Предположим, что потерями в кабеле можно пренебречь, и напряжение, замеренное на замыкающей нагрузке, равно 10 В.

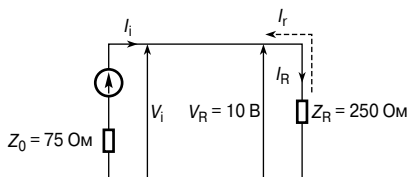
Определим коэффициент отражения и величины прямых и отражённых токов и напряжений.

Из уравнения (11) находим коэффициент отражения:

$$\rho = \frac{Z_0 - Z_R}{Z_0 + Z_R} = \frac{75 - 250}{75 + 250} = \frac{-175}{325} = -0.538.$$

Эта цепь показана на **Рис. 83.4**. Ток в замыкающей нагрузке,

$$I_R = \frac{V_R}{Z_R} = \frac{10}{250} = 0.04 \text{ А.}$$



**Рис. 83.4**

Однако ток  $I_R$  состоит из прямого и отражённого токов, то есть

$$I_R = I_i + I_r.$$

Определив из уравнения (11)

$$I_r = \rho I_i,$$

получаем

$$I_R = I_i + \rho I_i = I_i(1 + \rho),$$

откуда прямой ток

$$I_i = \frac{I_R}{(1 + \rho)} = \frac{0.04}{1 + (-0.538)} =$$

$$= 0.0866 \text{ A, или } 86.6 \text{ mA.}$$

Прямое напряжение  $V_i = I_i Z_0 = (0.0866)(75) = 6.50 \text{ V}$ .

Так как

$$I_R = I_i + I_r,$$

то отражённый ток

$$I_r = I_R - I_i = 0.04 - 0.0866 = -0.0466 \text{ A, или } -46.6 \text{ mA.}$$

Отражённое напряжение  $V_r = -I_r Z_0 = -(-0.0466)(75) = 3.50 \text{ V}$ .

## Стоячие волны и коэффициент стоячей волны

Рассмотрим линию связи без потерь, разомкнутую на конце (режим холостого хода). Колебание прямого тока полностью отражается на конце линии, и, как уже говорилось, отражённый ток имеет то же значение, что и прямой ток, но с разностью фаз  $180^\circ$ .

На **Рис. 83.5а** показаны прямые и отражённые колебания тока, изображённые раздельно (соответственно  $I_i$  влево и  $I_r$  вправо) в момент времени  $t = 0$ , при этом  $I_i = 0$ .

Результирующая двух колебаний получается благодаря сложению их в соответствующих интервалах. В данном случае результирующая, как видно, равна нулю. На **Рис. 83.5б** и **Рис. 83.5в** показаны прямая и отражённая волны, изображённые раздельно, когда  $t = T/8$  и  $t = T/4$ , где  $T$  — период сигнала. И снова результирующая получена путём сложения прямой и отражённой волн в соответствующих интервалах. На **Рис. 83.5г ... Рис. 83.5з** показаны прямые и отражённые колебания тока, нанесённые на одну ось вместе с их результирующей волной в моменты времени от  $t = 3T/8$  до  $t = 7T/8$  с интервалом  $T/8$ .

Если результирующие колебания, показанные на **Рис. 83.5а...Рис. 83.5ж**, наложить одно на другое, то получится **Рис. 83.6**.

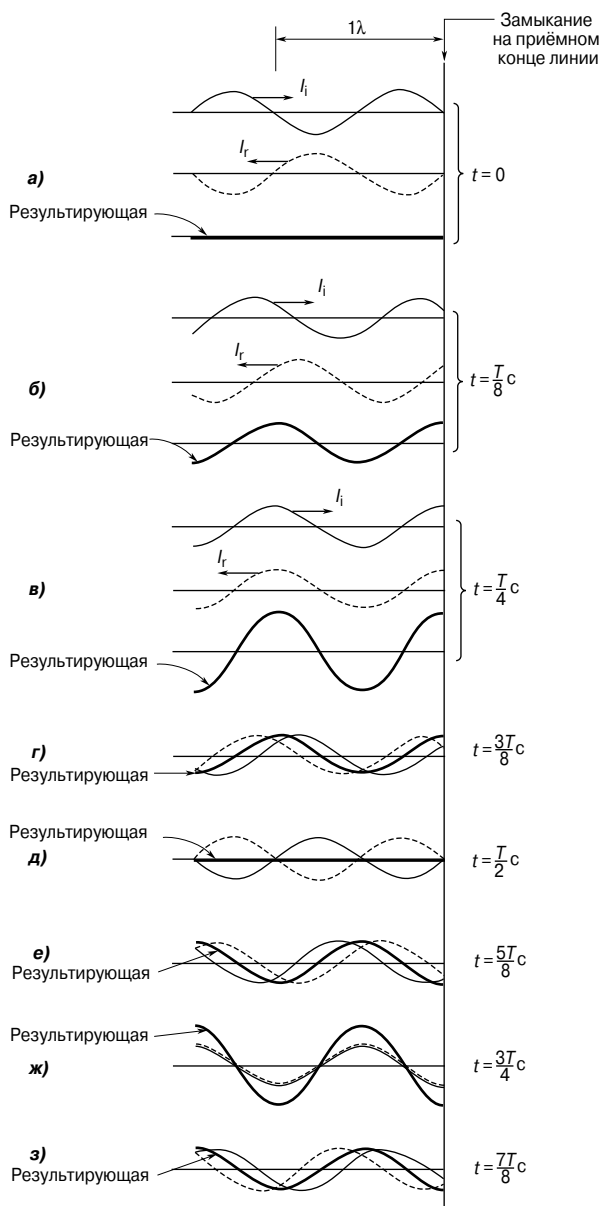


Рис. 83.5



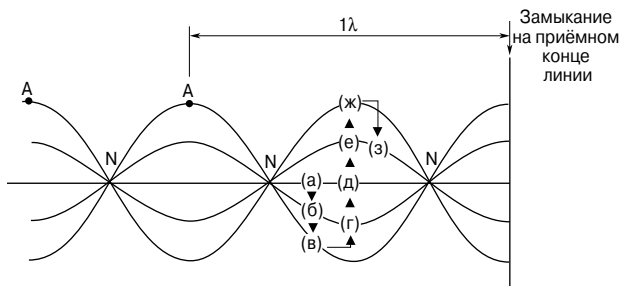


Рис. 83.6

(Заметим, что для ясности шкала была в 2 раза увеличена.) Колебания ясно показывают, что волна (а) движется к (б) спустя  $T/8$ , затем к (в) спустя ещё один интервал  $T/8$ , затем к (г), (д), (е), (ж) и (з) с интервалом  $T/8$ . Замечено, что в любой заданной точке зависимость тока от времени имеет характер синусоиды, а амплитуда волны различна в разных точках линии.

В какой бы момент две волны одной частоты и амплитуды, идущие в противоположных направлениях, ни накладывались друг на друга, как это было сделано выше, между ними всегда существует интерференция, и возникает *стоячая*, или *стационарная волна*. Точки, где ток всегда равен нулю, называют *узлами* (на Рис. 83.6 они обозначены буквой N). Стоячая волна не движется ни вправо, ни влево, и узлы не колеблются. Те точки волны, что испытывают максимальное возмущение, называют *пучностями* (на Рис. 83.6 они обозначены буквой A). Расстояние между соседними узлами или соседними пучностями равно  $\lambda/2$ , где  $\lambda$  — длина волны. Стоячая волна — это происходящее во время передачи периодическое изменение в вертикальной плоскости без перемещения в каком-либо направлении.

Схожим образом можно исследовать результирующую прямого и отражённого колебаний напряжения в случае разомкнутой цепи (режим холостого хода). Однако, как уже говорилось, когда прямая волна напряжения достигает конца линии, она отражается без изменения фазы. На Рис. 83.7 показаны результирующие волны прямого и отражённого напряжений с интервалами  $t = T/8$ . На Рис. 83.8 показано наложение всех результирующих колебаний Рис. 83.7 от а) до з); и снова видно, что в результате получается стоячая волна.

Узлы (N) и пучности (A) показаны на Рис. 83.8 и по сравнению с колебаниями тока имеют сдвиг фаз на  $90^\circ$ .

Если линия связи оканчивается в виде короткозамкнутой цепи (режим короткого замыкания), то именно прямой ток

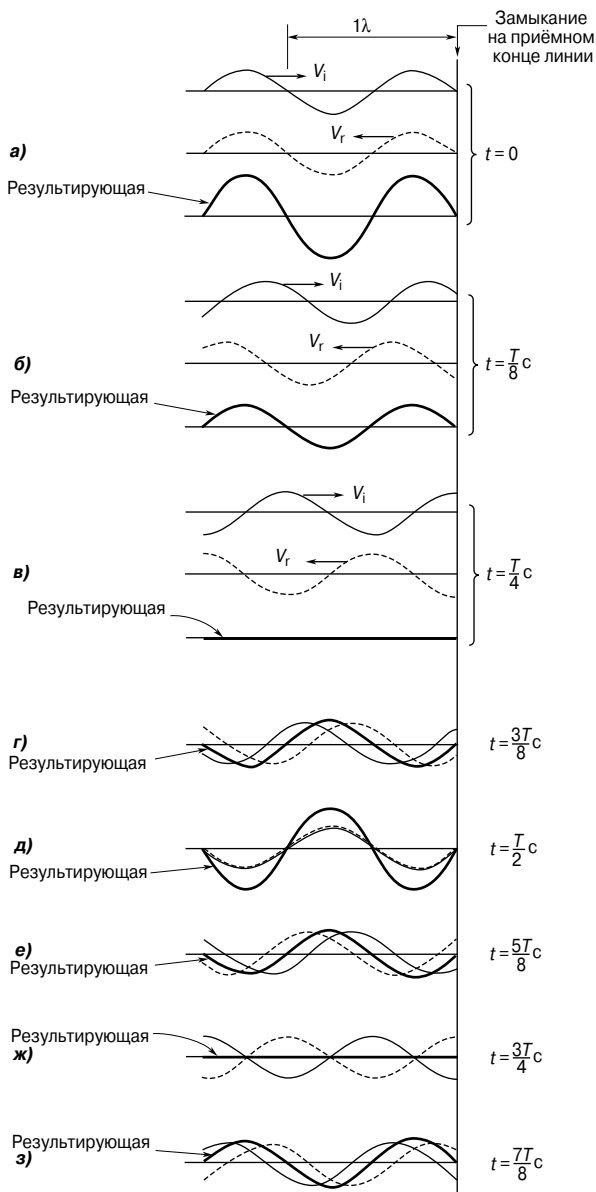


Рис. 83.7

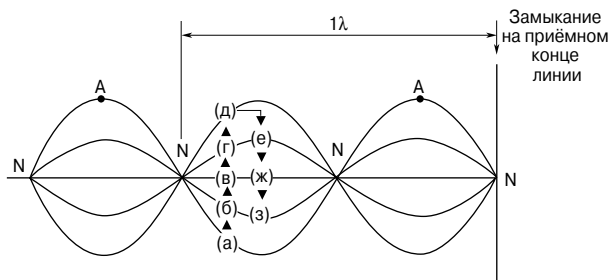


Рис. 83.8

отражается без изменения фазы, а прямое напряжение отражается с разницей фаз  $180^\circ$ . Следовательно, графики, показанные на Рис. 83.5 и Рис. 83.6, характеризующие ток при разомкнутой цепи на конце линии, могут быть использованы для представления напряжения при короткозамкнутом окончании линии. Графики на Рис. 83.7 и Рис. 83.8, характеризующие напряжение при разомкнутой цепи, могут представлять ток в режиме короткого замыкания.

На Рис. 83.9 показана зависимость действующих значений тока и напряжения, нанесённых на одну ось, от расстояния в случае полного отражения, что получилось из Рис. 83.6 и Рис. 83.8.

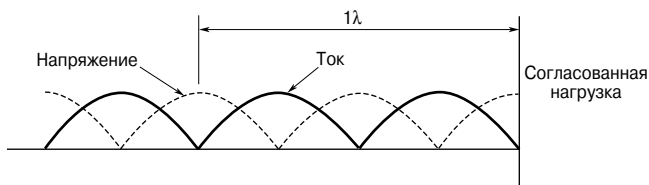


Рис. 83.9

Действующие значения равны амплитудам колебаний, показанным на Рис. 83.6 и Рис. 83.8, за исключением того, что каждая из них поделена на  $\sqrt{2}$  (так как для синусоидальной волны

действующее значение величины  $= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \text{максимальная величина}$ ).

При полном отражении образцы стоячих волн действующие значения напряжения и тока состоят из последовательности положительных синусоидальных волн с узлом напряжения, расположенным в пучности тока, и с узлом тока, расположенным в пучности напряжения. Конец линии — это узловая точка тока. Действующие значения тока и напряжения (rms) могут

фиксироваться прибором, движущимся по линии. Такие измерения максимума и минимума напряжения и тока обеспечивают довольно точные показания длины волны, а также дают информацию о количестве отражённой энергии относительно прямой энергии, которая была поглощена на конце линии, как это показано ниже.

### **Коэффициент стоячей волны**

Пусть прямой ток, текущий от источника несогласованной линии связи без потерь, равен  $I_i$ , а ток, отражённый на конце линии, равен  $I_r$ . Если  $I_{\text{MAX}}$  равен сумме прямого и отражённого тока, а  $I_{\text{MIN}}$  — это их разность, то коэффициент стоячей волны (обозначается символом  $s$ ) линии определяется выражением

$$s = \frac{I_{\text{MAX}}}{I_{\text{MIN}}} = \frac{I_i + I_r}{I_i - I_r} \quad (12)$$

Можно показать, что

$$\frac{I_r}{I_i} = \left( \frac{s-1}{s+1} \right) \quad (13)$$

$$\frac{P_r}{P_i} = \left( \frac{s-1}{s+1} \right)^2 \quad (14)$$

$$s = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (15)$$

**Например,** линия связи имеет характеристический импеданс, равный  $600 \angle 0^\circ$  Ом, и потери, которыми можно пренебречь. Если замыкающий импеданс линии равен  $(400 + j250)$  Ом, то из уравнения (11) коэффициент отражения

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{Z_0 - Z_R}{Z_0 + Z_R} = \frac{600 \angle 0^\circ - (400 + j250)}{600 \angle 0^\circ + (400 + j250)} = \\ &= \frac{200 - j250}{1000 + j250} = \frac{320.16 \angle -51.34^\circ}{1030.78 \angle 14.04^\circ} = \\ &= \mathbf{0.3106 \angle -65.38^\circ}. \end{aligned}$$

Тогда  $|\rho| = 0.3106$ .

Следовательно, из уравнения (15) можно найти коэффициент стоячей волны:

$$s = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} = \frac{1 + 0.3106}{1 - 0.3106} = \mathbf{1.901}.$$

Если прямая мощность, приходящая на замыкание, равна, предположим, 200 мВт, то из уравнения (14)

$$\frac{P_r}{P_i} = \left( \frac{s-1}{s+1} \right)^2,$$

то есть

$$\frac{P_r}{0.200} = \left( \frac{1.901-1}{1.901+1} \right)^2 = 0.09646,$$

откуда отражённая мощность

$$P_r = \mathbf{19.29 \text{ мВт.}}$$

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

## N

- n-p-n* транзистор — 148, 150
- n*-типа материал — 140

## P

- p-n-p* транзистор — 150
- p-n*-переход — 141
- p-n*-переход обратносмещённый — 144
- p-n*-переход прямосмещённый — 143
- $\pi$ -аттенюатор симметричный — 508
- $\pi$ -образная цепь — 442
- $\pi$ -*T* преобразование — 443
- p*-типа материал — 140

## R

- rms — 187

## A

- абсолютная диэлектрическая проницаемость — 59
- абсолютная магнитная проницаемость — 72
- авометр — 128
- автотрансформатор — 280
- адьюнкта элемента — 409
- аккумулятор кислотный — 43
- аккумулятор щелочной — 43
- активная фильтрующая схема — 519
- Алкомекс — 90
- Ални — 89
- Алнико — 89
- ампер — 23, 71
- ампер-виток — 71
- ампервольтметр — 25
- амперметр — 25, 125
- ампер-час — 45
- амплитуда — 131, 186
- амплитудная модуляция — 526
- анализ гармонический — 458
- анализатор формы сигнала — 458
- аналогово-цифровой преобразователь — 255
- аналоговый измерительный прибор — 121
- анод — 36
- асинхронный двигатель — 313
- атом — 22
- атомное ядро — 22
- АЦП — 255

## B

- база — 148
- балластный резистор — 125
- батарея — 41
- биполярный транзистор — 148

- блок-схема — 21
- бумажный конденсатор — 66

## B

- ватт — 28
- ваттметр — 128
- вебер — 70
- вентиль — 471
- верхних частот фильтр — 522
- взаимная индуктивность — 106, 110
- вихревые токи — 79, 277
- вносимый импеданс — 115
- вносимых потерь коэффициент — 510
- внутреннее сопротивление — 39
- воздушный конденсатор переменный — 65
- волна гармоническая — 186
- волна отражённая — 541
- волна падающая — 541
- волна синусоидальная — 186
- волна стационарная — 545
- волна стоячая — 545
- волна электромагнитная — 532
- волновые обмотки — 290
- вольт — 23
- вольт-ампер — 270
- вольтамперная характеристика — 143
- вольтметр — 25, 125
- вольтметр цифровой — 126
- вращающий момент — 301
- вторичная обмотка — 268
- вторичные параметры линий связи — 538
- вторичные элементы — 42
- вход инвертирующий — 236
- вход неинвертирующий — 236
- входная характеристика транзистора — 153, 154
- входной импеданс — 242
- вынужденное намагничивание — 473
- вынужденных колебаний резонансная частота — 401
- выпрямитель — 470
- выпрямитель мостовой — 146
- выпрямление — 146, 193
- выпрямление двухполупериодное — 146
- выпрямление однополупериодное — 146
- высокочастотный трансформатор — 274
- выходная характеристика транзистора — 154, 155

**Г**

газ — 36  
 газовая изоляция — 490  
 гальванический элемент — 37  
 гальванического элемента ёмкость — 45  
 гальванометр — 134  
 гармоника — 457  
 гармоника основная — 457  
 гармоника первая — 457  
 гармоническая волна — 186  
 гармонический анализ — 458  
 гармонический резонанс — 468  
 гармонический синтез — 458  
 генератор — 287  
 генератор параллельного возбуждения — 293  
 генератор переменного тока — 104, 185  
 генератор последовательного возбуждения — 295  
 генератор постоянного напряжения идеальный — 178  
 генератор постоянного тока — 292  
 генератор с независимым возбуждением — 292  
 генератор с самовозбуждением — 292  
 генератор смешанного возбуждения — 296  
 генерируются — 257  
 генри — 106, 110  
 германий — 140  
 герц — 186  
 гистерезис — 76  
 гистерезис диэлектрический — 490  
 гистерезисная петля — 76  
 гистерезисные потери — 277  
 главный узел — 417  
 градиент электрического потенциала — 56  
 градуировочная сетка — 129  
 громкоговоритель — 97

**Д**

двигатель асинхронный — 313  
 двигатель двухполюсный асинхронный — 316  
 двигатель однофазный — 313  
 двигатель синхронный — 313  
 двигатель трёхфазный — 313  
 двигатель четырёхполюсный асинхронный — 317  
 двухлучевой осциллограф — 131  
 двухполупериодное выпрямление — 146  
 двухполюсная система — 316  
 двухполюсный асинхронный двигатель — 316

двухпроводной линии индуктивность — 502  
 двухсегментный коллектор — 288  
 девиация частоты — 528  
 действительное число — 335  
 действующее значение тока — 460  
 делитель напряжения — 48  
 демпфирующее устройство — 121  
 децибел — 132  
 децибелметр — 134  
 джоуль — 28  
 диамагнетизм — 83  
 диапазон изменения частоты — 528  
 динамическое сопротивление — 399  
 диод Зенера — 145  
 диод полупроводниковый — 145  
 диполь — 485  
 дифференциальный усилитель — 248  
 дифференцированно связанная катушка индуктивности — 112  
 дифференцирующая цепь — 235  
 диэлектрик — 57, 59, 484  
 диэлектрик жидкий — 490  
 диэлектриков механические свойства — 489  
 диэлектрическая проницаемость абсолютная — 59  
 диэлектрическая проницаемость относительная — 58  
 диэлектрическая проницаемость свободного пространства — 58  
 диэлектрические потери — 490  
 диэлектрический гистерезис — 490  
 длина волны — 535  
 длинная линия — 532  
 длинный шунт — 296, 307  
 добавочный полюс — 289  
 добротность — 136, 204, 219, 382  
 добротность параллельной резонансной цепи — 399  
 домен — 85  
 дрейф — 23  
 дрессель — 108  
 дырка — 141

**Ё**

ёмкостное реактивное сопротивление — 380  
 ёмкостное сопротивление — 195  
 ёмкость — 56  
 ёмкость гальванического элемента — 45  
 ёмкость изолированной двухпроводной линии — 500  
 ёмкость конденсатора — 484

**Ж**

железо-никелевый сплав — 88

железо-никелевый элемент — 44  
жидкий диэлектрик — 490  
жидкость — 36

### З

заграждающий фильтр — 219, 524  
задержка по фазе — 535  
закон Кулона — 55  
закон Ома — 26  
законы Кирхгофа — 167, 406  
законы Фарадея — 104  
заряд электрический — 23, 56  
заряда электрического плотность — 57  
заряженные частицы — 36  
затухание — 101  
затухания постоянная — 537  
звонок электрический — 94  
Зенера диод — 145  
Зенера эффект — 144

### И

идеальный генератор постоянного напряжения — 178  
идеальный операционный усилитель — 241  
избирательность — 206, 390  
изменение выходного напряжения трансформатора — 276  
изменения частоты диапазон — 528  
измерительный прибор с круглой катушкой — 122  
измерительный прибор с плоской катушкой — 122  
измерительный прибор универсальный — 128  
измерительный прибор цифровой многофункциональный — 126  
измерительный прибор электронный — 126  
изолированной двухпроводной линии ёмкость — 500  
изолирующий трансформатор — 283  
изоляторы — 23, 27, 139  
изоляция газовая — 490  
импеданс — 197, 379  
импеданс вносимый — 115  
импеданс максимальный — 396  
импеданс характеристический — 538  
импедансов согласование — 452  
импульсная модуляция — 529  
импульсно-кодовая модуляция — 530  
инвертирующий вход — 236  
инвертирующий усилитель — 240  
индекс модулирующий — 528  
индекс Штейнмеца — 77  
индуктивное реактивное сопротивление — 380

индуктивное сопротивление — 194  
индуктивности катушка — 107  
индуктивность — 106  
индуктивность взаимная — 106, 110  
индуктивность двухпроводной линии — 502  
индуктивность катушки — 109  
индуктивность коаксиального кабеля — 502  
индуктивность концентрического цилиндра — 502  
индуктивность собственная — 106  
индукция электромагнитная — 103, 104  
интегратор — 249  
интегрирующая цепь — 234  
ион — 22, 36  
искажение сигнала — 540  
исходный уровень — 133

### К

кабель коаксиальный — 497  
кабель концентрический — 496  
катод — 36  
катушка индуктивности — 107, 109  
катушка с сердечником из ферромагнетика — 471  
катушки индуктивности дифференцированно связанные — 112  
катушки индуктивности кумулятивно связанные — 112  
катушки индуктивности сильносвязанные — 111  
катушки индуктивности слабосвязанные — 111  
керамический конденсатор — 67  
киловатт-час — 29  
Кирхгофа законы — 167, 406  
кислотный аккумулятор — 43  
коаксиального кабеля индуктивность — 502  
коаксиальный кабель — 497  
колебание тока сложной формы — 460  
коллектор — 148, 290  
коллектор двухсегментный — 288  
коллектор многосегментный — 289  
компаратор — 247  
компонент — 21  
компонент линейный — 26  
компонент нелинейный — 26  
конденсатор — 57  
конденсатор бумажный — 66  
конденсатор воздушный переменный — 65  
конденсатор керамический — 67  
конденсатор пластмассовый — 67  
конденсатор плоский — 59  
конденсатор подстроечный — 117



конденсатор с оксидом титана — 68  
 конденсатор слюдяной — 65  
 конденсатор электролитический — 68  
 конденсатора ёмкость — 484  
 конденсаторы параллельно соединённые — 60  
 конденсаторы последовательно соединённые — 62  
 контактная разность потенциалов — 142  
 контур магнитосвязанный — 110  
 контурный ток — 415  
 контурных токов метод — 406, 415  
 концентрический кабель — 496  
 концентрического цилиндра индуктивность — 502  
 короткий шунт — 307  
 короткозамкнутый ротор — 318  
 коррозия — 39  
 КОСС — 240  
 коэрцитивная сила — 76  
 коэффициент вносимых потерь — 510  
 коэффициент мощности — 379  
 коэффициент ослабления синфазного сигнала — 240  
 коэффициент отражения — 542  
 коэффициент передачи по напряжению — 269  
 коэффициент полезного действия — 298  
 коэффициент полезного действия электродвигателей постоянного тока — 308  
 коэффициент распространения — 539  
 коэффициент связи — 111  
 коэффициент сопротивления температурный — 32  
 коэффициент стоячей волны — 548  
 коэффициент трансформации — 269  
 коэффициент усиления — 242  
 коэффициент усиления по напряжению — 164  
 коэффициент усиления по току — 160, 163  
 коэффициент усиления цепи — 385  
 коэффициент формы — 461  
 коэффициенты Фурье — 477  
 кремний — 140  
 кривая намагничивания — 72  
 кривая характеристическая — 290  
 кулон — 23  
 Кулона закон — 55  
 куметр — 136  
 кумулятивно связанные катушки индуктивности — 112  
 Кюри температура — 86

## Л

лавинный эффект — 144  
 легирование — 140  
 Лекланше элемент — 42  
 Ленца правило — 104  
 линейная шкала — 122  
 линейное напряжение — 259  
 линейный компонент — 26  
 линейный ток — 258  
 линии напряжённости электрического поля — 54  
 линии силовые — 54, 496  
 линия магнитного потока — 69  
 линия потока — 496  
 линия связи — 532  
 линия эквипотенциальная — 495

## М

магнит подъёмный — 95  
 магнит постоянный — 69  
 магнитная индукция насыщения — 76  
 магнитная постоянная — 72  
 магнитная проницаемость абсолютная — 72  
 магнитная проницаемость относительная — 72  
 магнитная цепь — 74  
 магнитного поля напряжённость — 69  
 магнитного потока линия — 69  
 магнитного потока плотность — 70  
 магнитное поле — 69, 108  
 магнитное сопротивление — 74  
 магнитные материалы непостоянные — 86  
 магнитные полюсы — 289  
 магнитные свойства материалов — 83  
 магнитный момент — 83  
 магнитный поток — 70  
 магнитный экран — 74  
 магнитодвижущая сила — 71  
 магнитосвязанные контуры — 110  
 Максвелла теорема — 415  
 максимальное значение переменной величины — 186  
 максимальный импеданс — 396  
 материал  $n$ -типа — 140  
 материал  $p$ -типа — 140  
 материалы магнитные непостоянные — 86  
 машина с параллельной обмоткой — 290  
 машина со смешанной обмоткой — 290  
 мгновенное значение переменных величин — 186  
 мегометр — 128

метод касательных — 223  
 метод контурных токов — 406, 415  
 метод трёх точек и первоначального наклона — 224  
 метод узловых потенциалов — 406  
 механические свойства диэлектриков — 489  
 микроэлектронная система — 476  
 минор элемента — 409  
 многосегментный коллектор — 289  
 модулированный сигнал — 526  
 модулирующий индекс — 528  
 модуляция амплитудная — 526  
 модуляция импульсная — 529  
 модуляция импульсно-кодовая — 530  
 модуляция по длительности импульса — 530  
 модуляция фазовая — 529  
 модуляция фазово-импульсная — 530  
 момент диполя постоянный — 84  
 момент магнитный — 83  
 мост сопротивлений — 135  
 мостовой выпрямитель — 146  
 мощность — 28  
 мощность полная электрическая — 301  
 мультиметр — 25, 126, 128

## Н

нагрузка несогласованная — 541  
 нагрузочная прямая — 162  
 намагничивание вынужденное — 473  
 намагничивание свободное — 472  
 намагничивающий ток — 271  
 напряжение однофазное — 257  
 напряжение пробивное — 144  
 напряжение электрическое — 23, 24  
 напряженность электрического поля в диэлектрике — 498  
 напряжённость магнитного поля — 69  
 напряжённость электрического поля — 56  
 неинвертирующий вход — 236  
 неинвертирующий усилитель — 243  
 нейтраль — 258  
 нейтральная точка — 259  
 нейтрон — 22  
 нелинейная шкала — 122  
 нелинейный компонент — 26  
 неосновные носители — 144  
 непостоянные магнитные материалы — 86  
 несогласованная нагрузка — 541  
 несущая частота — 526  
 нечётная функция — 483

нижних частот фильтр — 520  
 низкочастотный трансформатор — 274  
 никель-кадмиевый элемент — 44  
 нифе элемент — 44  
 Нортона теорема — 179, 407, 429, 435  
 Нортона эквивалентная схема — 435  
 носители заряда — 140  
 носители неосновные — 144  
 носители основные — 142  
 нулевой метод измерений — 134

## О

обвал тепловой — 489  
 обеднённый слой — 143  
 обмотка волновая — 290  
 обмотка петлевая — 290  
 обмотка подмагничивания — 289  
 обмотка трансформатора — 274  
 обмотка якоря — 290  
 обратное смещение — 148  
 обратносмещённый  $p$ - $n$  переход — 144  
 однонаправленный сигнал — 185  
 однополупериодное выпрямление — 146  
 однофазное напряжение — 257  
 однофазный двигатель — 313  
 ом — 24  
 Ома закон — 26  
 ом-метр — 31  
 омметр — 25, 127  
 операционный усилитель — 236  
 опережение по фазе — 190  
 определитель — 407  
 осаждение электролитическое — 36  
 основная гармоника — 457  
 основное уравнение периодических сигналов сложной формы — 457  
 основные носители заряда — 142  
 остаточная магнитная индукция — 76  
 осциллограф двухлучевой — 131  
 осциллограф электронно-лучевой — 129  
 осциллограф электронный — 25  
 относительная диэлектрическая проницаемость — 58  
 относительная магнитная проницаемость — 72  
 отражения коэффициент — 542  
 отражённая волна — 541  
 отрицательная обратная связь — 238  
 отставание по фазе — 190  
 ОУ — 236  
 ошибка измерений — 137

## П

падающая волна — 541

- параллельно соединённые конденсаторы — 60  
 параллельного возбуждения генератор — 293  
 параллельного возбуждения электродвигатель — 302  
 параллельное соединение резисторов — 49  
 параллельный резонанс — 395  
 парамагнетизм — 84  
 параметры линий связи вторичные — 538  
 параметры линий связи первичные — 534  
 пассивная фильтрующая схема — 519  
 первая гармоника — 457  
 первичная обмотка — 268  
 первичные параметры линий связи — 534  
 первичный элемент — 41  
 переменного тока генератор — 104, 185  
 переменный воздушный конденсатор — 65  
 переходная частота — 239  
 переходной процесс — 221  
 период функции — 456  
 периодическая функция — 456  
 периодический сигнал сложной формы — 456  
 пермаллой — 88  
 петлевая обмотка — 290  
 петля гистерезисная — 76  
 пиковое значение — 131  
 пиковое значение переменной величины — 186  
 пластмассовый конденсатор — 67  
 плоский конденсатор — 59  
 плотность магнитного потока — 70  
 плотность электрического заряда — 57  
 плотность электрического потока — 57  
 поверхность эквипотенциальная — 495  
 повторитель напряжения — 244  
 повышающий трансформатор — 269  
 подмагничивания обмотка — 289  
 подсистема — 21  
 подстроечный конденсатор — 117  
 подъёмный магнит — 95  
 поле магнитное — 69  
 поле электрическое — 484  
 поле электростатическое — 54  
 полезного действия коэффициент — 298  
 полная электрическая мощность — 301  
 полный размах — 186  
 полоса заграждения — 519  
 полоса пропускания — 519, 526  
 полоса частот — 205  
 полосовой фильтр — 523  
 полосы частот ширина — 389  
 полупроводник — 139  
 полупроводниковый диод — 145  
 полюс добавочный — 289  
 полюс северный — 69  
 полюс южный — 69  
 полюсы магнитные — 289  
 поляризация — 37, 485  
 понижающий трансформатор — 269  
 последовательно соединённые конденсаторы — 62  
 последовательного возбуждения генератор — 295  
 последовательного возбуждения электродвигатель — 304  
 последовательное соединение резисторов — 47  
 последовательный резонанс — 202  
 постоянная времени — 223, 230  
 постоянная затухания — 537  
 постоянная распространения — 537  
 постоянная фазового сдвига — 537  
 постоянного тока генератор — 292  
 постоянного тока электродвигатель — 300  
 постоянный магнит — 69, 89  
 постоянный момент диполя — 84  
 потенциал электрический — 23  
 потенциометр — 135  
 потери в сердечнике — 271  
 потери гистерезисные — 277  
 потери диэлектрические — 490  
 потери на вихревые токи — 79, 277  
 потери на гистерезис — 76  
 потери на медь — 277, 298  
 потери на сталь — 277, 298  
 поток магнитный — 70  
 потока линия — 496  
 потока магнитного плотность — 70  
 потока электрического плотность — 57  
 правило большого пальца — 93  
 правило буравчика — 93  
 правило генератора — 104  
 правило левой руки — 98  
 правило Ленца — 104  
 правило мотора — 98  
 правило правой руки — 104  
 правило точки — 118  
 правило трапеций — 477  
 правой руки правило — 104  
 предельное значение переменной величины — 186  
 предохранитель — 29  
 преобразование  $\pi$ - $T$  — 443  
 преобразование  $T$ - $\pi$  — 446

преобразование  
 звезда—треугольник — 446  
 преобразование  
 треугольник—звезда — 443  
 преобразователь  
 аналогово-цифровой — 255  
 преобразователь напряжения — 184  
 преобразователь  
 цифро-аналоговый — 252  
 прибор для контроля целостности  
 цепей — 128  
 прибор измерительный  
 аналоговый — 121  
 прибор измерительный с круглой  
 катушкой — 122  
 прибор измерительный с плоской  
 катушкой — 122  
 прибор измерительный цифровой  
 многофункциональный — 126  
 прибор с подвижной катушкой —  
 100  
 прибор универсальный  
 измерительный — 128  
 прибор электронный  
 измерительный — 126  
 принцип суперпозиции — 170, 406,  
 422  
 пробивное напряжение — 144  
 пробой тепловой — 489  
 проводник — 23, 27, 139  
 проницаемость вакуума — 72  
 проницаемость магнитная  
 абсолютная — 72  
 проницаемость магнитная  
 относительная — 72  
 пропускания полоса — 526  
 противо-ЭДС — 300  
 протон — 22  
 прочность электрическая — 64, 486  
 прямое смещение — 148  
 прямосмещённый *p-n*-переход — 143  
 пучность — 545

## Р

рабочая точка — 157  
 разность входных токов — 239  
 разность потенциалов — 23  
 разрядка конденсатора — 68  
 распространения коэффициент —  
 539  
 распространения скорость — 536  
 реакция якоря — 290  
 регулирующее устройство — 121  
 резистор балластный — 125  
 резонанс — 218, 379  
 резонанс гармонический — 468  
 резонанс параллельный — 395  
 резонанс последовательный — 202  
 резонанс селективный — 468

резонансная частота — 380  
 резонансная частота вынужденных  
 колебаний — 401  
 резонансное сопротивление — 219  
 реле — 94  
 ротор короткозамкнутый — 318  
 ротор фазный — 319  
 ртутный элемент — 42  
 ряд Фурье — 458, 477  
 ряд электрохимический — 37

## С

саморазряд — 37, 38  
 светочувствительная схема  
 сигнализации — 248  
 свободное намагничивание — 472  
 свободные электроны — 23  
 свободных колебаний частота — 401  
 северный полюс — 69  
 селективный резонанс — 468  
 сетка градуировочная — 129  
 сигнал модулированный — 526  
 сигнал однонаправленный — 185  
 сигнал периодический сложной  
 формы — 456  
 сигнал сложной формы — 456  
 сигнала искажение — 540  
 сила — 96, 101  
 сила коэрцитивная — 76  
 сила магнитодвижущая — 71  
 сила отталкивания — 55  
 сила притяжения — 55  
 сила электродвижущая — 24, 39  
 силовые линии — 54, 496  
 сильносвязанная катушка  
 индуктивности — 111  
 сименс — 25  
 симметричный  $\pi$ -аттенюатор — 508  
 симметричный  $T$ -аттенюатор — 507  
 синтез гармонический — 458  
 синусоидальная волна — 186  
 синфазный сигнал — 240  
 синхронная скорость — 313  
 синхронный двигатель — 313  
 система двухполюсная — 316  
 система микроэлектронная — 476  
 система связи — 21  
 система четырёхполюсная — 317  
 система электромеханическая — 21  
 скин-эффект — 501  
 скорость распространения — 536  
 скорость синхронная — 313  
 скорость скольжения — 320  
 слабосвязанная катушка  
 индуктивности — 111  
 сложной формы сигнал — 456  
 слюдяной конденсатор — 65  
 смешанного возбуждения  
 генератор — 296

смешанного возбуждения с дифференциально включенными обмотками электродвигатель — 306  
 смешанного возбуждения с согласованно включёнными обмотками электродвигатель — 306  
 смешанного возбуждения электродвигатель — 306  
 собственная индуктивность — 106  
 согласование импедансов — 452  
 согласование сопротивлений — 279  
 согласующий трансформатор — 452  
 соединение замкнутым контуром — 442  
 соединение звездой — 258, 442  
 соединение резисторов параллельное — 49  
 соединение резисторов последовательное — 47  
 соединение треугольником — 258, 442  
 соленоид — 93  
 сопротивление — 24, 31  
 сопротивление динамическое — 399  
 сопротивление ёмкостное — 195  
 сопротивление ёмкостное реактивное — 380  
 сопротивление индуктивное — 194  
 сопротивление индуктивное реактивное — 380  
 сопротивление магнитное — 74  
 сопротивление резонансное — 219  
 сопротивление удельное — 31  
 спин — 83  
 сплав кремний-железо — 86  
 среднее значение переменной величины — 186  
 среднеквадратическое значение переменной величины — 187  
 среза частота — 519  
 стабилизатор поля параллельной обмотки — 310  
 станина — 289  
 стартер электродвигателя постоянного тока — 309  
 статор — 289  
 стационарная волна — 545  
 стационарное состояние — 222  
 стержневой трансформатор — 273  
 стоячая волна — 545  
 стоячей волны коэффициент — 548  
 сумматор — 245  
 суперпозиции принцип — 170, 406, 422  
 схема активная фильтрующая — 519  
 схема с общей базой — 152  
 схема с общим коллектором — 152  
 схема с общим эмиттером — 152  
 схема фильтрующая пассивная — 519

## Т

$T$ - $\pi$  преобразование — 446  
 тангенс угла потерь — 491  
 $T$ -аттенуатор симметричный — 507  
 твёрдые вещества — 36  
 Тевенина теорема — 429  
 Тевенина эквивалентная схема — 430  
 Тевенина—Гельмгольца теорема — 406  
 телефонный аппарат — 96  
 температура Кюри — 86  
 температурный коэффициент сопротивления — 32  
 теорема Максвелла — 415  
 теорема Нортон — 179, 429, 435  
 теорема о максимуме отдаваемой мощности — 182, 407, 449  
 теорема Тевенина — 429  
 теорема Тевенина—Гельмгольца — 176, 406  
 тепловой обвал — 489  
 тепловой пробой — 165, 489  
 тесла — 71  
 типы конденсаторов — 65  
 тиристор — 475  
 $T$ -образная цепь — 442  
 ток — 23  
 ток контурный — 415  
 ток намагничивающий — 271  
 ток трёхфазный — 257  
 ток утечки — 490  
 ток холостого хода — 268  
 токи вихревые — 79, 277  
 токовый трансформатор — 285  
 точка звезды — 259  
 точки 3 дБ — 389  
 точки по уровню половинной мощности — 389  
 точки половинной мощности — 205  
 точность градуировки — 137  
 транзистор — 471  
 трансформатор — 268  
 трансформатор высокочастотный — 274  
 трансформатор изолирующий — 283  
 трансформатор напряжений — 286  
 трансформатор низкочастотный — 274  
 трансформатор повышающий — 269  
 трансформатор понижающий — 269  
 трансформатор с обмотками на центральном стержне магнитной системы — 273  
 трансформатор согласующий — 452  
 трансформатор стержневой — 273  
 трансформатор токовый — 285  
 трансформатор трёхфазный двухобмоточный — 283

трансформатора изменение выходного напряжения — 276  
 трансформатора обмотка — 274  
 трапеций правило — 477  
 треугольник импедансов — 197  
 треугольник мощностей — 208  
 треугольник напряжений — 196  
 трёхфазный двигатель — 313  
 трёхфазный двухобмоточный трансформатор — 283

## У

угла потерь тангенс — 491  
 удельное сопротивление — 31  
 узел — 545  
 узел цепи — 417  
 узловых потенциалов метод — 406  
 универсальный измерительный прибор — 128  
 управляющее устройство — 121  
 уравнивание периодических сигналов сложной формы основное — 457  
 усилитель операционный — 236  
 устройство демпфирующее — 121  
 устройство регулирующее — 121  
 устройство управляющее — 121  
 утечки ток — 490

## Ф

фазный ротор — 319  
 фазовая модуляция — 529  
 фазового сдвига постоянная — 537  
 фазовое напряжение — 259  
 фазово-импульсная модуляция — 530  
 фазовый вектор — 190  
 фарад — 56  
 Фарадея законы — 104  
 феррит — 89  
 ферромагнетизм — 84  
 ферромагнитные материалы — 74  
 фильтр — 519  
 фильтр верхних частот — 522  
 фильтр заграждающий — 219, 524  
 фильтр нижних частот — 520  
 фильтр полосовой — 523  
 фильтрующая схема активная — 519  
 фильтрующая схема пассивная — 519  
 формы коэффициент — 461  
 формы сигнала анализатор — 458  
 функции период — 456  
 функция нечётная — 483  
 функция периодическая — 456  
 функция чётная — 483  
 Фурье коэффициенты — 477  
 Фурье ряд — 458, 477

## Х

характеристика нагрузки — 293  
 характеристика транзистора — 153  
 характеристика транзистора входная — 153, 154  
 характеристика транзистора выходная — 154, 155  
 характеристика холостого хода — 292  
 характеристическая кривая — 290  
 характеристический импеданс — 538  
 холостого хода характеристика — 292

## Ц

ЦАП — 252  
 цепь  $\pi$ -образная — 442  
 цепь магнитная — 74  
 цепь T-образная — 442  
 цикл — 186  
 цифро-аналоговый преобразователь — 252  
 цифровой вольтметр — 126  
 цифровой многофункциональный измерительный прибор — 126

## Ч

частицы заряженные — 36  
 частота — 130, 186  
 частота несущая — 526  
 частота резонансная — 380  
 частота резонансная вынужденных колебаний — 401  
 частота свободных колебаний — 401  
 частота среза — 519  
 четырёхполюсная система — 317  
 четырёхполюсный асинхронный двигатель — 317  
 чётная функция — 483  
 численный метод анализа сигналов — 458  
 число действительное — 335

## Ш

ширина полосы частот — 389  
 шкала линейная — 122  
 шкала нелинейная — 122  
 Штейнмеца индекс — 77  
 шунт — 125  
 шунт длинный — 296, 307  
 шунт короткий — 307

## Щ

щелочной аккумулятор — 43  
 щётка — 289

## Э

Эдисона элемент — 44  
 ЭДС — 24, 39  
 эквивалентная схема Нортона — 435  
 эквивалентная схема Тевенина —

430

эквипотенциальная линия — 495  
 эквипотенциальная поверхность — 495  
 экспонента роста — 222  
 электрическая прочность — 64, 486  
 электрическая энергия — 28  
 электрический заряд — 23, 56  
 электрический звонок — 94  
 электрический потенциал — 23  
 электрического поля линии  
 напряжённости — 54  
 электрического поля  
 напряжённость — 56  
 электрического потенциала  
 градиент — 56  
 электрического потока плотность — 57  
 электрическое напряжение — 23, 24  
 электрическое поле — 484  
 электрод — 36  
 электродвигателя постоянного тока  
 коэффициент полезного  
 действия — 308  
 электродвигателя постоянного тока  
 стартер — 309  
 электродвигатель — 287  
 электродвигатель влагозащищённо-  
 го типа — 312  
 электродвигатель параллельного  
 возбуждения — 302  
 электродвигатель последовательного  
 возбуждения — 304  
 электродвигатель постоянного  
 тока — 300  
 электродвигатель с защитным  
 экраном — 312  
 электродвигатель с принудительным  
 охлаждением — 312  
 электродвигатель смешанного  
 возбуждения — 306  
 электродвигатель смешанного воз-  
 буждения с дифференциально  
 включенными обмотками — 306  
 электродвигатель смешанного воз-  
 буждения с согласованно вклю-  
 чёнными обмотками — 306  
 электродвижущая сила — 24, 39  
 электролиз — 36

электролит — 36  
 электролитический конденсатор — 68  
 электролитическое осаждение — 36  
 электромагнит — 94  
 электромагнитная волна — 532  
 электромагнитная индукция — 103, 104  
 электромеханическая система — 21  
 электрон — 22, 140  
 электронная оболочка — 22  
 электронно-дырочная генерация — 144  
 электронно-лучевой осциллограф — 129  
 электронный измерительный  
 прибор — 126  
 электронный осциллограф — 25  
 электростатическое поле — 54  
 электрохимический ряд — 37  
 элемент — 21  
 элемент вторичный — 42  
 элемент гальванический — 37  
 элемент железо-никелевый — 44  
 элемент Лекланше — 42  
 элемент никель-кадмиевый — 44  
 элемент нифе — 44  
 элемент первичный — 41  
 элемент ртутный — 42  
 элемент Эдисона — 44  
 элемента адьюнкта — 409  
 элемента минор — 409  
 ЭЛО — 129  
 эмиттер — 148  
 энергия — 65, 108  
 энергия электрическая — 28  
 энергия электрического поля  
 конденсатора — 500  
 эффект Зенера — 144

## Ю

южный полюс — 69

## Я

ядро атомное — 22  
 якоря обмотка — 290  
 якоря реакция — 290  
 якорь — 289

**Бёрд Джон**  
**ФИЗИКА.**  
**ОТ ТЕОРИИ К ПРАКТИКЕ**

Карманный справочник  
**Книга 2**  
**Электричество, магнетизм.**  
**Теория, методы расчёта, практические устройства**

Переводчик *Т. И. Сенникова*  
Ответственный редактор *И. А. Сенников*  
Технический редактор *В. И. Матвеева*  
График *А. Н. Клочков*  
Корректор *Г. Б. Абудеева*

Формат 84х108/32.  
Бумага типографская № 2. Гарнитура «NewtonС». Печать офсетная.  
Объем 17,5 п. л. Усл. печ. л. 29,4. Тираж 2000 экз. Изд. №112.  
Заказ 2558.

Издательский дом «Додэка-XXI»

105318 Москва, а/я 70  
Тел./факс: (495) 366-24-29, 366-09-22  
E-mail: books@dodeca.ru; red@dodeca.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Типография «Новости»  
105005 Москва, ул. Ф. Энгельса, 46